UWAGI

NAD

OBJAWEM NAUKOWYM

Z POWODU WZORU

OGŁOSZONEGO PRZEZ WROŃSKIEGO W ROKU 1812

I DOWIEDZIONEGO PROŚCIÉJ PRZEZ P. CAYLEY'A W ROKU 1873

NAPISAŁ

P. ABEL TRANSON

Tłomaczenie z *Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal des Candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM.* Gerono *et* Ch. Brisse, 2e série, t. XIII, zeszyt kwietniowy, 1874 roku.)

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych, dnia 4 maja 1876 roku.)

Zagadnienie. — Przypuściwszy równanie

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \dots,$$

w którém $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... są jakiemikolwiek funkcyami x, podczas gdy x_1, x_2, x_3, ... są ilościami stałemi albo jeżeli się podoba zmiennemi, niezależnemi, niewchodzącemi w skład tych funkcyi, dać rozwinięcie x, albo nawet jakiejkolwiek funkcyi $F(x)$, w funkcyi potęg i iloczynów $x_1, x_2, x_3 \dots$

Wroński udzielił Instytutowi, w r. 1811, i ogłosił w r. 1812 rozwiązanie tego wielkiego zagadnienia, które późniéj w swych dziełach naukowych nazwał *zadaniém powszechném*, to jest dał wzór spółczynnika względnego co do wyrazu $(x_1{}^n, x_2{}^p, x_3{}^q \dots)$ w rozwinięciu już to x, już to funkcyi $F(x)$; a p. Cayley dał dowodzenie tegoż wzoru w numerze *Quarterly Journal*, na kwiecień 1873 r.

Oto tytuł i początek z dziennika angielskiego:

O Twierdzeniu Wrońskiego przez professora Cayley'a.

To twierdzenie, uważane przez autora jako odpowiedź na pytanie « En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences, et de résoudre généralement ce problème universel ? » jest podane bez dowodzenia w jego *Réfutation de la Théorie des Fonctions analytiques de Lagrange*, Paryż, r. 1812, str. 30, i powtórzoném (z dowodzeniem, jak sądzę) w *Philosophie de la Technie* (Paryż, r. 1815), również jest podane i dowiedzione w *Supplément à la Réforme de la Philosophie*, Paryż, r. 1847, str, CIX i nast. ; toż twierdzenie, lecz bez dowodzenia, znajduje się w *Encyclopédie mathematique de Montferrier* (Paryż, bez daty, t. III, str. 398).

Zagadnienie którego dałem powyżéj wysłowienie jest widocznie daleko ogólniejszém jak zagadnienie LAGRANGE'A w jego znakomitéj Rozprawie z r. 1770 (dla *Akademii Berlińskiéj*), które odpowiada równaniu takiemu jak

$$0 = x - a - x_1 f_1(x),$$

zagadnienie względnie proste, i którego rozwiązanie jest znaném w nauce pod nazwiskiem *szeregu Lagrange'a*.

W dalszym ciągu tych uwag przyjdzie mi powiedzieć o wysokiéj doniosłości przypisywanéj przez samego Wrońskiego swemu zagadnieniu powszechnemu. Już słowa p. Cayley przytoczone w początku jego artykułu a wzięte od Wrońskiego, pozwalają dostatecznie wnioskować o téj doniosłości, jednakże w rozprawie z roku 1811, rozwiązanie zagadnienia jest tylko podrzędnym dodatkiem podanym przez autora jedynie dla wytłomaczenia swéj śmiałości targnięcia się na pracę Lagrange'a i śmiałości przedstawienia światu pracy *zbijającéj teoryę funkcyi analitycznych*.

W rzeczy samèj, odparłszy tę teoryę, Wroński wyraża się w ten sposób : « Aby nie uledz przemocy naukowéj powagi LAGRANGE'a pozostaje nam tylko okazać, że prawo z którego wyprowadziliśmy poprzedzające *zbicie teoryi funkcyj analitycznych* zawiera w sobie, jako przypadek szczególny odkrycie główne, zrobione przez tego znakomitego geometrę w téj części Algorytmii, która się zajmuje wyłącznie rozwinięciem funkcyi (*Zbicie teoryi funkcyi analitycznych*, str. 28).

Wprawdzie, Wroński nie dał dowodzenia tego prawa (*Prawo Szeregów*), z którego wyprowadził, ani téż wytłomaczył jakim sposobem z tego prawa szeregów wyprowadził on swój wzór do rozwiązania zagadnienia powszechnego i ograniczył się tylko na zapowiedzeniu podrzędności prawa szeregów względem innego prawa daleko ogólniejszego, które nazwał wtedy *prawem algorytmiczném bezwzględném;* a które często podawał w swych dziełach późniejszych pod nazwiskiem *prawa najwyższego*. To właśnie prawo roku poprzedzającego, t. j. w r. 1810, przedstawił on Instytutowi również bez dowodzenia, i o niém to LAGRANGE i LACROIX, w raporcie ogłoszonym w *Monitorze* z 15 listopada 1810 r. powiedzieli : « W Rozprawie p. Wrońskiego komisarzy waszych najwięcéj uderzyło to, że on wyprowadza ze swego wzoru wszystkie wzory dotąd znane dla rozwinięcia funkcyj, i że te ostatnie są tylko przypadkami szczególnemi jego wzoru (*). »

Ten brak dowodzenia stał się powodem dla sprawozdawcy Komissyi wyznaczonéj do ocenienia rozprawy z r. 1811 do wyrzeczenia z pewnym rodzajem przykąsu tego co następuje. « Trudno jest odgadnąć jakie mogą być przyczyny skłaniające p. Wrońskiego do przedstawiania zawsze swych wzorów jako pewien rodzaj zagadek do rozwiązywania których zachęca on geometrów. Nie miałożby

---

(*) Wraz z raportem, nieodbicie potrzebném jest przeczytanie listu Wrońskiego zamieszczonego w *Monitorze* z d. 21 listopada 1810 roku.

się prawa pomyśleć, że skutkiem ciągłego uogólniania wzorów rozwijających, autor utraca możność dowodzenia ich?... » I na końcu raportu : « Streszczając ; wasi komisarze nie mogą wyrobić sobie zdania o wzorach rozwinięcia, zamkniętych w Rozprawie któréj podajemy sprawozdanie, albowiem nie zostały one przez autora udowodnione, a nadto, wzory te są przedstawione niezrozumiale. Co się zaś tyczy mniemanego *zbicia teoryi funkcyi analitycznych* LAGRANGE'A, to cośmy już powiedzieli dostateczném będzie do okazania, że ono w zupełności nie zasługuje na uwagę. »

Zostawiając na późniéj kwestyę przekonania się : czy rzeczywiście *zbicie teoryi funkcyi analitycznych* nie zasługiwało w zupełności na uwagę, ograniczę się w téj chwili na przedstawieniu tylko dwóch spostrzeżeń dotyczących tego przedmiotu i tak :

1° Wroński zaraz po ogłoszeniu *Zbicia teoryi funkcyi analitycznych* w roku 1812 dołączył do niego pod tytułem *trzecia rozprawa* (*troisième mémoire*), rozbiór szczegółowy raportu Komissyi, w którym dowodzi bardzodobrze zdaniem mojém, że sprawozdawca przywiązując się do szczegółów podrzędnych, nie zwrócił bynajmniéj uwagi na rzecz główną, która stanowi właśnie samo *Zbicie teoryi funkcyi analitycznych*.

2° Utwor Lagrange'a, za który przyznano mu uroczyście pierwszą ze sławnych nagród dziesięcioletnich, utwor ten jak powiadam, czyli raczéj *filozoficzne to usiłowanie* stworzenia *Zasad rachunku różniczkowego* oswobodzonych od wszelkich względów na *ilości nieskończenie małe* czyli *znikające*, na *granice* czyli *fluksye*, jest dzisiaj i od bardzo już dawna powszechnie przez geometrów zaniechane.

Obecnie przedstawię, podług samego Wrońskiego przyczyny uważane przezeń za słuszne, dla których wydał on swe *wzory*, nawet wzór *prawa najwyższego*, który w roku 1810 był oddanym pod sąd Lagrange'a, bez poparcia ich odpowiedniemi dowodzeniami ; przedtém jednakże życzyłbym objawić moje zdanie względem zarzutu uczynionego Wrońskiemu przez Komissyę : że wzory swe przedstawił « niezrozumiale ». Zdanie me objawię z całą przezornością, jak przystoi dla skromnego zwolennika nauki, lecz zarazem z całą swobodą gorliwego miłośnika prawdy.

Co to jest wzór niezrozumiały ? Jest to, jak mi się zdaje, wzór przedstawiony za pomocą symbolów, których znaczenia nie znamy. Otóż *Rozprawa* z r. 1811 zawiera w sobie tylko dwa wzory ogólne; jednym z nich « dla oparcia się wysokiéj powadze LAGRANGE'a » jest wzór *zagadnienia powszechnego*, o którym mówiłem na początku tych uwag ; a drugim dla uzasadnienia *Zbicia teoryi funkcyi analitycznych*, jest wzór *prawa szeregów*. Otóż w tych dwóch wzorach użyte są tylko symbole bardzo proste i bardzo łatwe do zrozumienia. W saméj rzeczy dla przekonania o tém czytelnika, przedstawię w krótkości *to prawo szeregów*.

Podług Wrońskiego, myśl, albo dokładniéj mówiąc kształt ogólny szeregów, jest następujący :

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\varphi(x)^{3/\xi} + \ldots,$$

w którym pierwsza strona przedstawia funkcyę wyznaczoną, funkcyę wyrażoną przez algorytmy znane ; daną, jedném słowem, przez to co autor nazywa jéj *budową teoretyczną* a druga daje rozwinięcie téj funkcyi $F(x)$ za pomocą funkcyi $\varphi(x)$ dowolnie wziętéj. Funkcya $\varphi(x)$ służy wtedy za *miarę algorytmiczną* do ocenienia funkcyi $F(x)$, za jéj *rozwinięcie techniczne*.

Symbol $\varphi(x)^{\mu/\xi}$ przedstawia iloczyn μ czynników, w których zmienna x przybiera, począwszy od jéj pierwszego stanu, $\mu - 1$ przyrostków równych ξ ; tak że wypada

$$\varphi(x)^{\mu/\xi} = \varphi(x)\varphi(x+\xi)\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi[x+(\mu-1)\xi].$$

Ten przyrostek ξ jest zdolnym przyjąć sam przez się jakąkolwiek wartość dowolną. Kiedy ta wartość jest różną od zera, funkcya $F(x)$ jest ocenioną podług *działów postępujących* (*facultés progressives*) funkcyi $\varphi(x)$, lub też według *potęg* (*puissances*) funkcyi $\varphi(x)$, jeżeli przypuścimy $\xi = 0$. Nadto, jeżeli jest po prostu $\varphi(x) = x$, rozwinięcie jest podług *iloczynów* zmiennéj (*les factorielles de la variable*), albo też podług jéj *potęg*, stosownie do tego czy ξ jest różném od zera, albo jemu równém.

Co się tyczy spółczynników $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$, pierwszy z nich jest najoczywiściéj równym temu czém się staje funkcya $F(x)$ dla wartości która czyni funkcyę $\varphi(x)$ równą zeru; tak więc, przypuszczając $\varphi(\alpha) = 0$, otrzymamy

$$A_0 = F(\alpha).$$

Następujące spółczynniki $A_1, A_2, A_3, \ldots$ są koniecznie niezależne od x, inaczéj bowiem funkcya $\varphi(x)$, nie utworzyłaby sama miary algorytmicznéj funkcyi $F(x)$. Wreszcie, też same spółczynniki zależą nie mniéj koniecznie, od funkcyi wyznaczonéj $F(x)$, od funkcyi dowolnéj $\varphi(\alpha)$ od stałéj α. Otóż *prawo szeregów* leży właśnie w wyrażeniu przedstawiającém tę zależność, które to wyrażenie samo przez się stanowi wzór spółczynnika ogólnego A_μ.

Zauważę mimochodem, że ta myśl szeregów mieści w sobie pojęcie nieskończoności; albowiem jeżeli dla przypadku szczególnego funkcyi $\varphi(x)$ druga strona nie jest nieograniczoną, musi ona być koniecznie identyczną z pierwszą; a wtedy daje ona z pewnością wykreślenie teoretyczne funkcyi $F(x)$ a nie jéj rozwinięcie techniczne.

Jakkolwiek bądź, w tym to wysokim stopniu uogólnienia, to jest przypuszczając miarę algorytmiczną $\varphi(x)$ i przyrostek ξ dowolnymi, podał Wroński, wzór na spółczynnik A_μ w swéj *Rozprawie* z r. 1811; wzór ten jest następujący:

$$A_\mu = \frac{[\Delta^a\varphi(x)\,\Delta^b\varphi(x)^{2\xi}\Delta^c\varphi(x)^{3\xi}\ldots\,\Delta^l\varphi(x)^{\mu-1/\xi}\Delta^m F(x)]}{\Delta^a\varphi(x)\Delta^b\varphi(x)^{2\xi}\Delta^c\varphi(x)^{3\xi}\ldots\,\Delta^l\varphi(x)^{\mu-1/\xi}\Delta^m\varphi(x)^{\mu/\xi}}.$$

Licznik jest jedną z tych summ kombinacyjnych, które od pół wieku prawie, pod nazwiskiem najprzód *funkcyi przeciwległych* (fonctions alternées), potém *wyznaczników* (déterminants), nabyły w nauce coraz to większéj doniosłości, lecz które dotąd były bardzo mało używane, chociaż znane od dawnego czasu, i od dawna także, jak to Wroński przypominał, « rozmaicie wyrażane, między innymi, według sposobów wskazanych przez Laplace'a, w jego *Rozprawie nad Rachunkiem całkowym* i *nad systemem świata*, umieszczonym pomiędzy rozprawami Akademii Paryzkiéj, z r. 1772, Część druga (*Zbicie teoryi funkcyi analitycznych*, str. 15) ».

Wroński nie poprzestawał na tém wskazaniu; i dawał jako przykład, dla zrozumienia swego wzoru, rozwinięcia tych summ kombinacyjnych dla przypadków prostych, w których wyraz ogólny przypuszcza dwa albo najwięcéj trzy czynniki. Jest to właśnie szczegół, który się znajduje dzisiaj na początku wszystkich objaśnień nad wyznacznikami.

W tém wyrażeniu na A_μ, mianownik jest zwyczajnym iloczynem μ czynników; licznik zaś przedstawia, między nawiasami to co nazywamy dzisiaj *wyrazem głównym wyznacznika*; przyrostek od którego zależą różnice Δ należy w nim zrobić równym ξ; dać skaźnikom $a, b, c, \ldots$ tych różnic wartości

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \ldots, \qquad l = \mu - 1 \quad m = \mu,$$

a zmiennéj x jakąkolwiek wartość taką, aby $\varphi(x) = 0$. Nakoniec, przypuszczając $\xi = 0$, należałoby zastąpić różnice przez różniczki. Takim jest spółczynnik $\varphi(x)^{\mu/\xi}$.

Co się tyczy spółczynnika ($x_1^p, x_2^q, x_3^r \ldots$), w rozwiązaniu zagadnienia powszechnego, jest to wzór całkiem podobny do poprzedzającego. Licznik zawiera w sobie wyznacznik, utworzony z różniczek funkcyi $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $F(x)$, a w mianowniku jest jeszcze zwyczajny iloczyn.

Zważywszy to wszystko cośmy powiedzieli powyżéj, czyż nie miałem słuszności powiedzieć, że wzory użyte w *rozprawie* z r. 1811 mieściły w sobie tylko symbole znane; z jakiegoż tedy powodu takie wzory mogły być przedstawione Akademii jako niezrozumiałe!... Ośmielmy się wyrzec, sprawozdawca Komissyi wzorów powyższych nie zrozumiał, można to tylko wytłomaczyć w jeden możliwy sposób który się nasuwa czytając ostatnie zdanie sprawozdania to jest : że sprawozdawca uważając mylnie, *rozprawę* oddaną mu do ocenienia, za niegodną uwagi, nad zbadaniem jéj dostatecznie się nie zastanowił.

Doprowadziwszy spostrzeżenia me do tego punktu, żywo pragnąłbym zostać w tém przekonaniu, że uwaga czytelnika nie jest jeszcze w zupełności znużoną, a to z tego powodu że czytelnikowi który do szedł ze mną aż dotąd, mogę w téj chwili przynieść korzyści wynikające z jego cierpliwości, t. j. wskazać właściwy punkt na którym Wroński opiera swe *Zbicie teoryi funkcyi analitycznych Lagrange'a*. W saméj rzeczy, Lagrange chciał uczynić Zasady rachunku różniczkowego wynikiem spółczynników rozwinięcia szczególnego funkcyj a mianowicie tego rozwinięcia, które bierze początek w rozwijaniu funkcyj podług potęg zmiennéj, a którego jużto możebność już też i nadewszystko powszechność nie mogą być *à priori* usprawiedliwionemi; tymczasem *prawo szeregów* (a jeszcze zupełniéj *prawo najwyższe*) wskazuje że rachunek różniczkowy urzeczywistnia nie tylko możebność, lecz także istność a nawet oznaczenie ścisłe spółczynników nieskończonéj liczby rozwinięć, których rozwinięcie podług potęg zmiennéj jest tylko przypadkiem nadzwyczaj szczególnym. Widzimy więc : że nie w niektórych spółczynnikach należy szukać Zasad rachunku różniczkowego, lecz przeciwnie w rachunku różniczkowym trzeba szukać praw tych spółczynników.

Lecz, mówi sprawozdawca rozprawy z r. 1811, « dla czego Wroński przedstawia zawsze swe wzory, w kształcie zagadek, do rozwiązania których zachęca geometrów ?

Postępowanie takie, w saméj rzeczy, będąc mało zgodne ze zwyczajami Akademii; zobaczmy jak się w tym względzie tłomaczy sam Wroński.

W roku 1810 Wroński przedstawił Akademii, jakeśmy powyżéj powiedzieli *prawo najwyższe* nie dając dowodzenia, lecz dołączając list do Dalemberta, sekretarza Akademii, w którym objaśnia on swe postępowanie następującemi słowy : « Co się tyczy dowodzenia *prawa najwyższego*, które miałem honor przedstawić Instytutowi francuzkiemu, miałem kilka powodów do usunięcia go chwilowo a mianowicie :

Pierwszym i głównym powodem było życzenie zwrócenia, na sam fakt i na istnienie tego prawa bez granic, większéj uwagi, która długiém i nużącém dowodzeniem mogłaby być oderwaną od właściwego przedmiotu.

Najpierwszą i najgłówniejszą rzeczą o którą chodzi mi w téj chwili jest pewność że prawo to istnieje; dowodzenie przyjdzie późniéj, jest ono zupełnie gotowe i na pierwsze żądanie Instytutu pospieszę z dostarczeniem go (patrz *Manifest historyczny* w dodatku do *Reformy filozofii*, t. II o *Messyanizmie*, str. 29). »

Zdaje się że Lacroix i Lagrange zgodzili się na taki sposób widzenia, gdyż nie czekając dowodzenia prawa, przyznali mu wartość i powszechność (*). « Ta okoliczność (jego powszechność), mówi Wroński w jednéj z Rozpraw ogłoszonych w r. 1812, w dalszym ciągu *Zbicia teoryi funkcyi analitycznych*, usuwa wszelką wątpliwość o prawdziwości i o doniosłości tego prawa; powszechność ta wyrównywa niejako dowodzeniu. W rzeczy saméj, z jednéj strony, byłoby trudniéj wytworzyć wzór fałszywy, z któregoby można wyprowadzać wszystkie wzory znane, aniżeli znaleźć prawdziwe prawo, które je ogarnia rzeczywiście; i z drugiéj strony zdaje nam się, że prawo które ogarnia i zawiera w sobie, sposobem najdokładniejszym i najbardziéj oznaczonym, wszystko co było zrobioném dla ocenienia ilości, od czasu kiedy ludzie zajmują się matematyką, musi mieć pewne znaczenie (*Zbicie teoryi funkcyi analitycznych*, str. 80) ».

Jednakże, pomimo tych rozumowań Wroński nie uważał za stosowne dalsze zwlekanie ogłoszenia swego dowodzenia i podał je, w r. 1815, w *Filozofii Technii* (I^sza^ Sekcya); zajmuje ono tam 90 stronic in-4°, z których wiele jest zasypanych w zupełności rachunkiem.

Fakt ten tłomaczy dostatecznie autora z zarzutu usunięcia « tymczasowo » tego dowodzenia, które bez wątpienia, będąc « długiém i fatygującém », oderwałoby uwagę sędziów od samego przedmiotu.

W swej odpowiedzi na sprawozdanie z r. 1811, objawia on z pewną dumą to zdanie, że « odkryć prawo jest trudniejszą i ważniejszą rzeczą aniżeli go dowieść gdy ono jest odkrytém »; nakoniec, zapewne dla okazania że jego wzory, jeżeli są « zagadkami », nie są zagadkami bez rozwiązania, daje on w dwóch stronicach dowodzenie bardzo proste i bardzo ścisłe *prawa szeregów*. Czytelnik który go odczyta przyzna chętnie Wrońskiemu słuszność że « PP. Komisarze byliby mogli sami je znaleźć »; gdyż ono wymaga tylko, z wiadomością wstępną różnic i różniczek, rozwiązania jakiegokolwiek układu równań pierwszego stopnia za pomocą wzoru wyznaczników!...

Co się tyczy rozwiązania zagadnienia powszechnego, to jest rozwinięcia którego *znakomity szereg Lagrange'a* jest tylko przypadkiem szczególnym, Wroński je zamilczał jeszcze w téj epoce, t. j. w r. 1812 i wydał je dopiero w r. 1847, w Dodatku do *Reformy Filozofii* (w t. II *Messyanizmu*); od tej to chwili zostały uzasadnione dwa z trzech praw, na których jest on przekonany że może oprzeć *Reformę Matematyki*. Za pomocą tych dwóch praw (*prawo najwyższe i prawo powszechne*), zachowując trzeciemu to co stanowi gałęź specyalną teoryi liczb, Wroński stara się odpowiedzieć na to pytanie, powtórzone przez p. Cayley, na początku artykułu *Quaterly Journal* :

« En quoi consistent les Mathematiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences et de résoudre généralement ce problème universel ? »

Należy tu przyznać, że dowodzenie zagadnienia powszechnego dane w r. 1847 zdaje się być również nieprzystępném a raczéj również przestraszającém, jak dowodzenie prawa najwyższego ogłoszone w r. 1815. Wreszcie, cóż może znaczyć trudność w tych dowodzeniach? Któż zajmował się we Francyi pracami Wrońskiego? Jeszcze w téj chwili, sprawozdanie z r. 1811 zdaje się ciążyć nad Wrońskim, i zdaje się upoważniać świat uczony do ciągłego uważania jego dzieł późniejszych tak licznych i tak znakomitych jako nie zasługujących « na żadną uwagę (**) ».

(*) Patrz powyżéj ich oświadczenie.

(**) Jego dzieła filozoficzne były przyjęte z równą obojętnością. Rzecz szczególna! W *Zbiorze sprawozdań nad postępem Nauk i Umiejętności we Francyi*, ogłoszonym w skutek Wystawy międzynarodowéj w roku 1867, znakomity autor *Filozofii XIX^go^ wieku we Francyi* zdaje się niewiedzieć nawet nazwiska Wrońskiego. Najmniejsi autorzy mający z filozofią bardzo daleki związek są zaszczyceni w jego sprawozdaniu rozbiorem sumiennym, podczas gdy się w nim szuka napróżno jakiejkolwiek wzmianki o *Prodromie*, t. j. *wstępie Messyanizmu*, o *Prolegomenach*, o *Metapolityce*, o *Reformie wiedzy ludzkiéj*,.... , o *Reformie filozofii*.

Dopiero w sześćdziesiąt lat późniéj, jeden z niezaprzeczonych mistrzów nauki, przynosi po raz pierwszy, jednemu z głównych utworów Wrońskiego, zapewnienie że się z autorem w zupełności zgadza, a nadto p. Cayley za pomocą genialnych przekształceń sprowadza dowodzenie do tak prostych wypadków, że czyni go przystępném dla najsłabszych nawet geometrów. Otóż to właśnie ten ostatni wypadek pozwoliłem sobie nazwać *Objawem naukowym*. Zdaje się że to cośmy dotąd powiedzieli wystarczającém jest do rozbudzenia opinii publicznéj i zwrocenia uwagi.

Najmniéjsze następstwo, którego należy w téj chwili oczekiwać jest to : że wkrótce ujrzymy sędziów zdolnych do osądzenia prac Wrońskiego, zajmujących się niemi z całą uwagą i przedstawiających światu ich uzasadnione ocenienie. Nadeszła tedy chwila w któréj wyznać winienem że jedynym przedmiotem uwag, które tu podaję jest właśnie wywołanie tego rozbioru i tego ocenienia. Zamiary moje w saméj rzeczy, nie idą daléj; sprawiedliwość i prawda są jedyną pobudką dla mnie do apelacyi od wyroku wydanego w 1811 roku przeciwko Wrońskiemu i kończąc me zadanie wystarczające, dla mnie i do dopięcia mego celu, zostawiam zdolniéjszym odemnie posunięcie daléj téj kwestyi.

Mógłbym więc na tém zakończyć, lecz wyrazy Wrońskiego przytoczone powyżéj przez p. Cayley, podnieciły bez wątpienia ciekawość czytelnika, którą sprobuję zadowolnić.

Oto jest inne zagadnienie : mając daną jakąkolwiek funkcyę $F(x)$, rozwinąć ją nadając jéj kształt następujący :

$$F(x)=A_0\Omega_0+A_1\Omega_1+A_2\Omega_2-A_3\Omega_3\ldots,$$

w którym $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3,\ldots$ są funkcyami x zupełnie dowolnemi, a $A_0, A_1, A_2, A_3,\ldots$ jakikolwiek ciąg ilości wyznaczonych. Te ilości są stałe, a skład ich zależy widocznie od funkcyi danej $F(x)$ i od funkcyj dawolnych Ω, przyjmując naprzód że spółczynnik A_μ musi zależeć od kształtu ilości Ω, których skaźniki idą od zera aż do μ, a nie zaczynając od Ω i w dalszym ciągu.

Idzie więc o podanie składu tych ilości stałych, a zakładając to wszechstronne zagadnienie rozwiązaném, jest rzeczą jasną że przyznając dla funkcyj Ω właściwe kształty, otrzyma się wszystkie rozwinięcia znane rzeczywiście, i wewnętrznie wszystkie rozwinięcia możliwe.

Oto jest właśnie to, co Wroński nazywa *prawem najwyższém*; na które Lagrange wydał świadectwo w r. 1810. Podamy tu jedno z jego zastosowań :

Przypuśćmy że się ma rozwiązać jakiekolwiek równanie

$$0=\Phi(x);$$

Funkcya $\Phi(x)$ przekształci się za pomocą *prawa najwyższego* w ten sposób, żeby kierując się pod względem wyboru funkcyi dowolnych i ich liczby, okolicznościami właściwemi pytaniu, otrzymać ostateczny wypadek w przybliżeniu naprzód oznaczoném. Po takiém przygotowaniu, kształt otrzymany będzie widocznie podobny do równania

$$0=f(x)+x_1f_1(x)+x_2f_2(x)+\ldots$$

a wówczas zastosowanie wzoru podanego w roku 1812 przez Wrońskiego i dowiedzionego prościéj w roku 1873 przez p. Cayley'a doprowadzi do rozwiązania danego równania.

Nic wreszcie nie określa ściśle natury tego równania : może ono być algebraiczném albo przestępném; może ono być o różnicach albo o różniczkach całkowitych albo częściowych; jednóm słowem, wszystkiém czém się tylko podoba.

Z tego to właśnie powodu autor zdaje się szczycić wynalezieniem sposobu « objęcia w jedném zagadnieniu wszystkich zagadnień nauk matematycznych i możności rozwiązania ich za pomocą tego *zagadnienia powszechnego*, a dla ustalenia charakteru tych rozwiązań dodam tu, że Wroński pojmuje użycie wyłączne szeregów zbieżnych tak dla *prawa najwyższego* (*Filoz. Technii*, t. I, str 265), jako też w zastosowaniach *Zagadnienia powszechnego* (*Reforma wiedzy ludzkiéj*, *dodatek*, t. I, str. LXXXI i passim).