SPOSÓB ŚCISŁY

OBLICZANIA OBJĘTOŚCI

WYKOPÓW I NASYPÓW

PRZEZ

ŁUCYANA WOJCIECHOWSKIEGO

Inżyniera, b. ucznia paryzkéj szkoły Dróg i Mostów

Wstęp. — W pracy przedstawionéj przez nas i umieszczonéj w tomie V^ym *Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych* w Paryżu z roku 1874, pod tytułem « *Nowy sposób obliczania powierzchni wykopów i nasypów* », podaliśmy już zasady obliczania dokładnego powierzchni wykopów i nasypów nie rysując profilów poprzecznych gruntu. Praca ta odnosiła się wyłącznie do *sposobu powierzchni średniéj* (moyenne des aires) i zupełnie go nie zmieniała pod względem zasad. W saméj rzeczy, w sposobie już podanym, bryłowatości otrzymują się zawsze mnożąc powierzchnie profilów przez połowę summy odległości każdego z nich od dwóch profilów najbliżéj go leżących, jednego po lewéj a drugiego po prawéj stronie, lub téż mnożąc odległość pomiędzy dwoma profilami przez połowę summy ich powierzchni. Odległości pomiędzy profilami są od razu znane z profilu podłużnego, powierzchnie zaś profilów poprzecznych obliczają się rozmaitemi sposobami a pomiędzy innemi i za pomocą sposobu przez nas podanego, który, jak sam tytuł wskazuje, zajmuje się li tylko ich obliczaniem. W téj chwili życzymy przedstawić czytelnikom naszym *sposób ścisły*, który dla tego nie tytułujemy *nowym*, że dotąd nikt jeszcze nie przedstawił pracy noszącéj tytuł *sposób ścisły*, i że sposób po dziś dzień znany, służący do obliczania bryłowatości wykopów lub nasypów ściśléj od *sposobu powierzchni średniéj*, znany jest pod nazwiskiem : *sposób tak zwany ścisły*. Sam tytuł wskazuje, lecz tylko domyślnie, że sposób ten nie jest ściśle dokładnym, a zatém sposób który tu podajemy będąc pierwszym w tym rodzaju nie może być zatytułowany nowym.

Wreszcie, sam charakter *sposobu ścisłego* wskazuje, że takich sposobów nie może być więcéj jak jeden; jeżeli tylko przedstawienie jego i zastosowanie będzie najprostszém. W każdym razie *sposób ścisły* będąc raz znalezionym nie podobna jest znaléźć drugiego *sposobu ścisłego*, lecz można go tylko

http://rcin.org.pl

uprościć. Przyczyna dla któréj znamy dotąd tyle sposobów obliczania bryłowatości wykopów i nasypów leży właśnie w tém, że żaden z nich nie miał na celu ścisłości lub przynajmniéj przybliżenia oznaczonego. Powiedziawszy co poprzedza zdaje nam się dostateczném dla wykazania wartości niniejszéj pracy, podać tytuły rozdziałów i porządek w jakim one po sobie następować będą.

I° Wykład sposobu już istniejącego i znanego pod nazwą : *sposób tak zwany ścisły* (méthode dite éxacte).

II° Określenie ścisłości przy obliczaniu bryłowatości wykopów lub nasypów.

III° Wykazanie o ile *sposób tak zwany ścisły* oddala się od téj ścisłości.

IV° Sposób ścisły przez nas podany.

V° Prostszy sposób jest niepodobnym.

I. — WYKŁAD SPOSOBU JUŻ ISTNIEJĄCEGO I ZNANEGO POD NAZWĄ *SPOSÓB TAK ZWANY ŚCISŁY*.

Profil podłużny i profile poprzeczne będąc ostatecznie przyjęte do budowy, wystarczającém będzie obliczyć bryłowatość wykopu i nasypu zawartą pomiędzy dwoma po sobie następującemi profilami poprzecznemi, a stosując sposób tutaj użyty do obliczania bryłowatości do jakichkolwiek innych profilów poprzecznych, otrzymamy szukaną nową bryłowatość i t. d. Sposób więc, który tu podajemy winien być uważanym za ogólny.

Niech będą (fig. 1) dwa profile poprzeczne po sobie idące $i'h'k'$ i I'H'K' na powierzchni których są przedstawione profile poprzeczne do wykonania : *mnophqrst* i MNOPHQRST.

Profil gruntu i profil do wykonania znane są naprzód, jako części niezbędne do wykończenia projektu. Te dwa profile spotykają się z sobą w pewnych punktach m, t, M, T, których nie znamy naprzód lecz które się wyznaczają z całą łatwością. W saméj rzeczy, chciejmy naprzykład wyznaczyć położenie punktu t, w tym celu wiemy że

$$s''t'' = \frac{ss'}{t+t'},$$

gdzie t oznacza nachylenie spadku w profilu do wykonania,

a t' « « « gruntu licząc od s' do k'.

Oznaczmy obecnie punkt M. Wiemy że

$$\mathrm{N''M''} = \frac{\mathrm{NN'}}{t-t'},$$

gdzie t i t' mają téż same znaczenie co powyżéj. Gdyby t' było większe od t mianownik stałby się równym $t'-t$. Reguła ta jest ogólną i brzmi jak następuje : jeżeli nachylenia spadków, gruntu i do wykonania, idą w strony przeciwne, mianownik ułamku jest równy ich summie $(t+t')$; jeżeli zaś te nachylenia idą w tymże samym kierunku, mianownik ułamku jest równy ich różnicy $(t-t')$ lub $(t'-t)$.

Znając obecnie prawidło podane powyżéj, podzielmy przestrzeń zawartą pomiędzy dwoma uważanemi profilami na figury, których objętość obliczyć umiemy, t. j. na graniastosłupy i piramidy.

http://rcin.org.pl

Podział ten da się zrobić prowadząc płaszczyzny sieczne prostopadle do profilów. Przypuśćmy, odpowiednio do naszego przypadku, że na osi i po lewéj jéj stronie oba nasze profile przedstawiają wykop, tymczasem po prawéj jéj stronie jeden z profili przedstawia wykop a drugi nasyp, i zacznijmy rachunek od strony lewéj przedstawiającéj wykop. Widzimy że pierwsza powierzchnia gruntu przedstawia powierzchnię skośną utworzoną ruchem linii prostéj poruszającéj się po liniach ($i'h'$, $i''h''$) i ($I'H'$, $I''H''$) zachowując zawsze położenie równoległe do płaszczyzny pionowéj przechodzącéj przez oś.

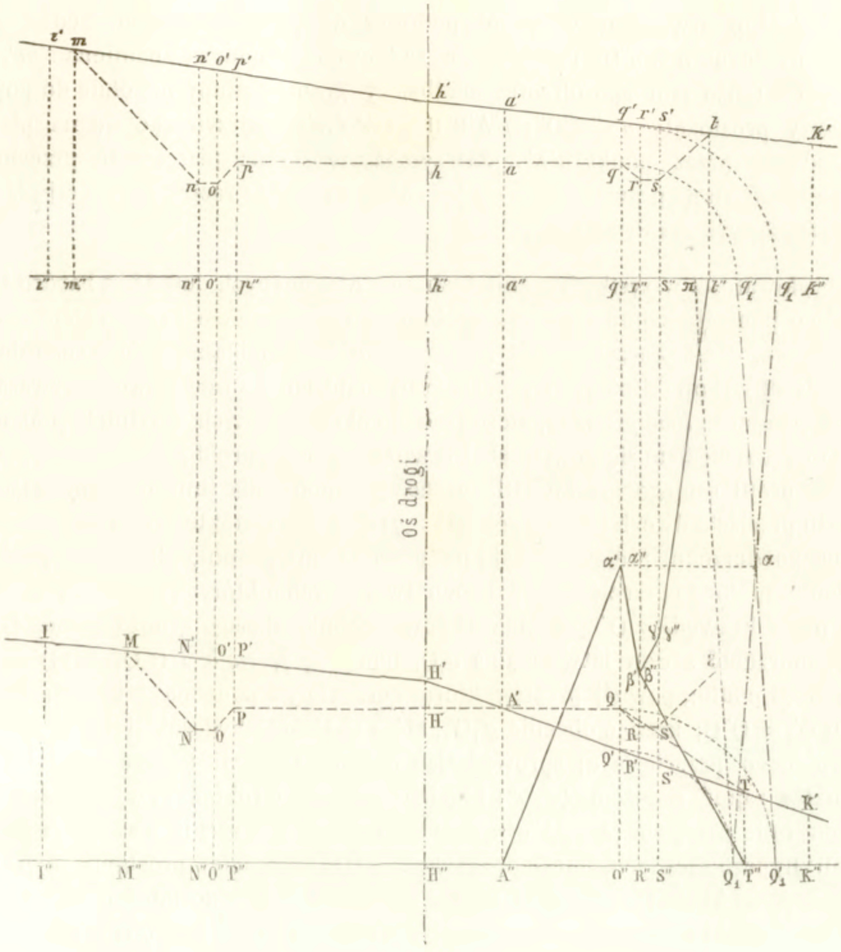

Fig. 1.

Ta pierwsza powierzchnia skośna kończy się położeniem tworzącéj ($h'H'$, $h''H''$) od którego to położenia zaczynając, pierwotne kierownice zostają zastąpione przez ($h'H'$, $h''H''$) i ($H'k'$, $H''k''$).

Pierwsza powierzchnia skośna przeciętą jest spadkiem (mn, MN) rowu, podług pewnéj linii, która podobnie jak wszystkie inne powstające z przecięcia się powierzchni gruntu z powierzchnią projektowaną, zowie się *linią przejścia*. Linie przejścia są krzywemi należącemi do kategoryi hiperbol, lecz z uwagi że ich krzywizna jest nadzwyczajnie małą, bywają one uważane za linie proste i do ich zupełnego wyznaczenia dostateczném jest znać dwa punkta przez które każda z nich przechodzi. W przypadku, którym się w téj chwili zajmujemy, *linia przejścia* (ligne de passage) będzie nam znaną od razu, albowiem dwa punkta przez które ona przechodzić winna leżą jeden na jednym profilu a drugi na drugim, punkta te są (m, m'') i (M, M''), a linia (mM, $m''M''$). Jeżeli teraz przyjmiemy raz na

http://rcin.org.pl

zawsze, że płasczyzny pionowe służące do podzielenia przestrzeni między profilami, prowadzone będą przez wszystkie punkta w których ciągłość powierzchni już to gruntu, już też powierzchni projektowanéj się zmienia, pierwsza z płasczyzn o których mowa winna być poprowadzoną przez punkt $n''N''$ i w ten sposób otrzymamy graniastosłup, którego rzutem będzie czworobok $m''M''$, $n''N''$ i którego krawędzie pionowe będą przedstawione przez znamiona nn' i NN', albowiem dwa pozostałe są zerami. Graniastosłup utworzony w ten sposób umiemy obliczyć z całą łatwością.

Drugi graniastosłup utworzony w sposób podobny do poprzedzającego, będzie przedstawiony w rzucie przez prostokąt $n''N''o''O''$ i będzie miał za krawędzie pionowe znamiona: nn', NN', oo', OO', postępując daléj w tenże sam sposób otrzymalibyśmy graniastosłupy podobne do poprzedzających i mające za rzuty prostokąty $o''p''P''O''$; $p''h''P''H''$, i $h''a''A''H''$ zatrzymując się na płasczyznie pionowéj przechodzącéj przez punkt $a''A''$. Zatrzymaliśmy się na płasczyznie przechodzącéj przez punkt $a''A''$ po przejściu na prawą stronę osi jedynie dla tego, że zacząwszy od tej płasczyzny jeden z profili przedstawia wykop a drugi nasyp.

Obliczenie bryłowatości wszystkich graniastosłupów otrzymanych dotąd jest bardzo łatwe, a mając zamiar podać go poniżéj, zajmiemy się natychmiast rozpoznaniem co się dzieje z drugiéj strony płasczyzny pionowéj $a''A''$. Zacząwszy od płasczyzny $a''A''$, koniecznêm jest znalezienie położenia linii odgraniczającéj wykop od nasypu; położenie to znajdziemy z całą łatwością zważając że ta linia odgraniczająca jest także *linią przejścia*, stosownie do określenia tych ostatnich podanego powyżéj, albowiem jest ona przecięciem się powierzchni utworzonéj przez profil projektowany, z powierzchnią utworzoną przez profil samego gruntu. Dla oznaczenia położenia linii odgraniczającéj, szukajmy najprzód punktu przejścia dwóch tworzących qQ i $q'Q'$, to jest: punktu któryby jednocześnie znajdował się i na powierzchni projektowanéj i na powierzchni gruntu, albowiem punkt ten będzie właśnie punktem wspólnego przecięcia się dwóch tworzących o których mowa. Płasczyzna pionowa przechodząca przez krawędź $q''Q''$ przecina 1° powierzchnię skośną gruntu podług tworzącéj $q'Q'$, która daje się odrzucić z całą łatwością na q_1Q_1 biorąc $q''q_1 = q''q'$ i $Q''Q_1 = Q''Q'$, i 2° płasczyznę projektowaną drogi podług pewnéj prostéj, którą odrzucimy z podobną łatwością na $q'_1Q'_1$ biorąc $q''q'_1 = q''q$ i $Q''Q'_1 = Q''Q$; kreśląc obecnie $q'_1Q'_1$, która to linia jest właśnie linią szukaną, otrzymamy punkt ich wspólnego przecięcia α; sprowadzając obecnie te dwie tworzące do ich pierwotnego położenia, punkt α zajmie położenia (α', α'') i będzie właśnie punktem przejścia szukanym, a zatém $A''\alpha''$ jest rzutem linii przejścia $(A'\alpha', A''\alpha'')$. Powiedzieliśmy powyżéj iż w skutek nadzwyczaj małéj krzywizny linij hyperbolicznych, można je zawsze zastąpić liniami prostemi, czyli że oznaczenie dwóch punktów przez które każda z nich winna przechodzić jest dostatecznêm, z tego to powodu właśnie szukaliśmy punktu leżącego na tworzących, których rzutem jest $q''Q''$, albowiem punkt ten należy zarazem do *linii przejścia* następującéj, która odpowiada spadkowi $qrQR$ rowu.

Jeżelibyśmy chcieli oznaczyć położenie punktu α' za pomocą rachunku, dostatecznêm byłoby oznaczyć odległość $\alpha''q''$. W saméj rzeczy: poprowadźmy $Q_1\pi$ równolegle do $Q'_1q'_1$ otrzymamy proporcyę:

$$\frac{Q_1\pi}{\alpha q'_1} = \frac{q_1\pi}{q_1q'_1},$$

lub też oznaczając odległość szukaną przez x; przez l odległość pomiędzy profilami; przez h znamię $qq' = q_1q'_1$ i przez h' znamię $QQ' = Q_1Q'_1 = q'_1\pi$ otrzymamy:

$$\frac{l}{x} = \frac{Q_1\pi}{\alpha q'_1} = \frac{q_1q'_1 + q'_1\pi}{q_1q'_1} = \frac{h + h'}{h},$$

http://rcin.org.pl

zkąd

$$x = \frac{lh}{hi + n}.$$

Gdybyśmy wzięli za niewiadomę $Q''\alpha'$, otrzymalibyśmy nazywając ją x'.

$$x' = \frac{lh'}{hh + h'}.$$

Widzimy więc z powyższego, że tak sposobem wykreślnym jako téż sposobem rachunkowym, oznaczenie punktu przejścia leżącego na jakiejkolwiek płaszczyźnie pionowéj nie przedstawia żadnych trudności, albowiem to cośmy dotąd zrobili nie ma bynajmniéj charakteru wyjątkowego.

Podawszy obecnie szczegóły dotyczące oznaczania linij odgraniczających wykopy od nasypów, wróćmy napowrót do kwestyi dotyczącéj podziału powierzchni pomiędzy-profilowéj na graniastosłupy. Widzimy z figury tu załączonéj że w profilu przedstawiającym wykop znajduje się rowek, gdy tymczasem w profilu przedstawiającym nasyp mamy po prostu spadek; otóż w profilu przedstawiającym wykop, przedłużmy na długości uważanego pomiędzy-profilu rowek o którym mowa aż do punktu w którym on dotyka samego gruntu. Przedstawmy rowek w profilu przedstawiającym nasyp np. liniami QRSE i postarajmy się oznaczyć linie podług których powierzchnie opierające się na obwodzie *qrst* i QRST przecinają powierzchnię skośną przedstawiającą grunt. Dla oznaczenia ich dostatecznem będzie znaleźć punkta w których krawędzie rowu qQ, rR, sS i tE spotykają powyżéj wskazaną powierzchnię skośną gruntu. Otóż punkt α', poprzednio już znaleziony, jest właśnie punktem gdzie krawędź qQ spotyka powierzchnię gruntu, a zatém wszelkie inne żądane punkta oznaczą się w sposób zupełnie podobny do powyżéj podanego dla punktu α' i otrzymamy ztąd punkta β', γ'. Punkt t'' wyznacza się bezpośrednio znając położenie punktu t, a zatém $A''\alpha''\beta''\gamma''t''$ będzie rzutem linii odgraniczającéj wykop od nasypu. Pozostaje więc tylko obecnie znaleźć jego bryłowatość obliczając graniastosłupy mające odpowiednio za podstawę, jużto trapezy $a''A''\alpha''q''$; $q''\alpha''\beta''r''$; $r''\beta''\gamma''s''$, już też trójkąt $s''\beta''t''$. Dodać tu winniśmy że krawędzie pionowe tych podstaw są nam doskonale znane.

Dotąd podaliśmy sposób obliczania bryłowatości wykopu, obecnie więc zajmiemy się nasypem.

Następstwo spadku po rowie wymaga, dla uniknienia przynajmniéj częściowego zatkania tego ostatniego w skutek różnicy nachyleń spadku nasypu i spadku wykopu, żeby je z sobą połączyć za pomocą pewnéj powierzchni; otóż powierzchnia ta jest powierzchnią skośną utworzoną ruchem prostéj która bezustannie powinna zostawać równoległą do płaszczyzny pionowéj h''H'' i która poruszać się winna po dwóch prostych; jednéj przedstawiającéj spadek QT i drugiéj łamanéj $\alpha'\beta'$T'. W skutek takiego postępowania, proste odgraniczające nasyp od wykopu są przedstawione w rzucie poziomym przez proste $\alpha''\beta''$ i β''T''.

Widzimy więc że dla znalezienia objętości nasypu, musimy obliczyć trzy graniastosłupy mające odpowiednio za podstawy: trójkąt $A''\alpha''Q''$; trapez $Q''\alpha''\beta''R''$ i trójkąt $R''\beta''T''$; których krawędzie są wiadome.

Wszystko cośmy dotąd powiedzieli dla naszego pomiędzy-profilu może się zastosować bez zmiany do jakiejkolwiek ich liczby, a zatém w téj chwili powiedzieć możemy, iż obliczenie bryłowatości wykopu lub nasypu w jakimkolwiek przypadku, może być zrobioném z przybliżeniem tak wielkiém jak się podoba, to jest że przybliżenie to może być o tyle dokładniejszém o ile przedstawienie gruntu za pomocą powierzchni skośnych, utworzonych jakeśmy powiedzieli, jest dokładniejszém.

http://rcin.org.pl

Rachunki wykonywane za pomocą tego sposobu są nadzwyczajnie długie i mozolne, to téż zastosowanie jego ma miejsce tylko wtenczas, gdy wykop do zrobienia jest nadzwyczajnie kosztownym i kiedy go się napotka przypadkiem w robotach już rozpoczętych; we wszystkich innych przypadkach uciekać się zawsze należy do sposobów łatwych i przybliżonych.

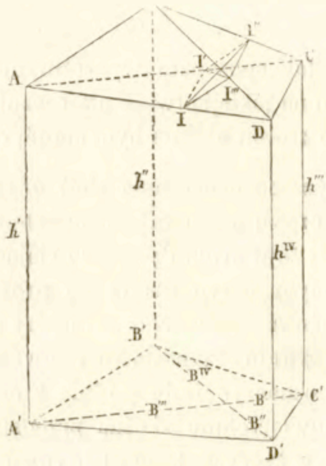

Fig. 2.

Obecnie pozostaje nam tylko podać opis sposobu postępowania przy obliczaniu graniastosłupów, które w naszém zastosowaniu napotkaliśmy, a to z tego powodu że obliczanie ich jest zależne od sposobu przedstawienia gruntu za pomocą powierzchni skośnych i że sposób ten obliczania będzie porównanym następnie ze sposobem obliczania elementów tworzących *sposób ścisły* przez nas podany.

Z tego cośmy dotąd powiedzieli widzimy, że bryły których objętości szukamy są graniastosłupami zamkniętemi po bokach płaszczyznami pionowemi i których podstawy górna i dolna są powierzchniami płaskiemi lub skośnemi, jedna z tych płaszczyzn jest płaszczyzną poziomą. Całe zadanie którego rozwiązania szukamy sprowadza się więc ostatecznie do znalezienia bryłowatości graniastosłupa pionowego, opartego na jego przecięciu prostém i zamkniętego w drugim końcu powierzchnią skośną.

Niech będzie (fig. 2) A'B'C'D' podstawa płaska i pozioma, BC i AD lub AB i DC kierownice powierzchni skośnéj; wiemy że powih erznia skośna będzie taż sama czy przyjmiemy za tworzącą téj powierzchni ABCD pierwszy systeat mprostych lub drugi. W saméj rzeczy, wystawmy sobie dwie płasczyzny przechodzące przez BCD i BAD, płasczyzny te przecinają się pomiędzy sobą podług prostéj BD: wystawmy sobie również dwie inne płasczyzny przechodzące przez ADC i ABC, które się przecinają podług prostéj AC; te proste przecięcia nie dotkną bynajmniéj powierzchni skośnéj z bardzo prostéj przyczyny, gdyż płasczyzny na których one leżą nie przecinają jéj także, proste te nie będą także leżeć na powierzchni skośnéj albowiem tylko tworzące jéj mogą do niéj przystawać; wypada więc ztąd że proste o których mowa muszą się znajdować jużto pod, jużto nad tą powierzchnią i dodać możemy natychmiast, że jeżeli jedna z prostych np. AD leży pod powierzchnią skośną, prosta BD znajdzie się ponad nią. W tém przypuszczeniu, summa dwóch graniastosłupów AA'D'C'DC ‡AA'B'C'CB odpowiadająca prostéj AC będzie mniejszą od objętości szukanéj, a summa dwóch grania-

http://rcin.org.pl

stosłupów odpowiadająca prostéj BD będzie większą od niéj i objętość szukana będzie właśnie średnią tych dwóch objętości. W saméj rzeczy, uważmy czworościan ABCD równy różnicy dwóch summ o których mowa; poprowadźmy przez jakikolwiek punkt J wzięty na prostéj AD płaszczyznę równoległą do dwóch prostych AB i CD, płaszczyzna tak nakreślona przetnie płaszczyzny górne graniastosłupa podług dwóch prostych J‴J″ i JJ′ równoległych do CD i podług dwóch innych prostych J‴J i J′J″ równoległych do AB, a zatém figura w ten sposób utworzona będzie równoległobokiem JJ′J″J‴. Widzimy wreszcie z łatwością że

$$\frac{DJ}{CJ''}=\frac{DA}{CB},$$

a zatém przekątnia równoległoboku jest właśnie tworzącą powierzchni skośnéj i ten wypadek będzie miał miejsce dla wszelkich równoległoboków utworzonych w sposób tutaj podany, t. j. kiedy punkt J będzie zmieniał swe położenie na prostéj AD; wynika więc z tego rozumowania że powierzchnia skośna dzieli czworościan ABCD na dwie równe części i że dostateczném będzie, dla znalezienia objętości szukanéj V dodać do summy S graniastosłupów pod nią leżących, połowę czworościanu T, lub odjąć tę wielkość od summy S′ groniastosłupów leżących po nad nią.

Możemy w téj chwili napisać dwie następujące równości

$$V=S'-\frac{1}{2}T,$$

$$V=S+\frac{1}{2}T,$$

zkąd wypada że

$$V=\frac{S+S}{2}.$$

Co było do okazania.

Nazwijmy h', h'', h''', h^{IV} wysokości czterech krawędzi bryły

" B', B'', B''', B^{IV} powierzchnie trójkątów służących za podstawę czterem graniastosłupom o których była mowa w poprzedzającym paragrafie.

Uważmy nadto że B nie powinno mieć dla któregokolwiek z czterech trójkątów, skaźnika powtarzającego się w wartościach dla h nadawanych krawędziom pionowym należącym do tegoż samego trójkąta. Jeżeli w równaniu podaném powyżéj

$$V=\frac{S+S'}{2},$$

wyrazimy S i S′ w funkcyi tych wysokości i tych podstaw, otrzymamy wzory ogólne objętości szukanéj, od któréj z całą łatwością odjąć będziemy mogli wszelkie wyrażenia odnoszące się do kształtów szczególnych brył o których mowa.

1° *Przypadek ogólny.* — Bryła mająca za podstawę jakikolwiek czworobok. Wzór dający jéj objętość jest następujący :

$$V=\frac{1}{2}\left\{\frac{B'(h''+h'''+h^{\text{IV}})}{3}+\frac{B''(h'+h'''+h^{\text{IV}})}{3}+\frac{B'''(h'+h''+h^{\text{IV}})}{3}+\frac{B^{\text{IV}}(h'+h''+h''')}{3}\right\}$$

nazywać go będziemy (A).

http://rcin.org.pl

2° *Podstawa trapezoidalna.* — Przypuszczamy że płaszczyzna krawędzi h' i h'' jest równoległą do płaszczyzny krawędzi h''' i h^{iv}; w tym przypadku podstawa B' staje się równą podstawie B'' i podstawa B''' podstawie B^{iv}, a zatém wzór poprzedzający zamieni się na następujący :

$$(B) \qquad V = \frac{1}{2}\left\{\frac{B'(h' + h'' + 2h''' + 2h^{iv})}{3} + \frac{B'''(h''' + h^{iv} + 2h' + 2h'')}{3}\right\}.$$

Jeżeli obecnie oznaczymy przez l najkrótszą odległość dwóch boków równoległych podstawy i przez b'_2 i b'''_4 długość tych dwóch boków, wzór (B) powyżéj podany zamieni się na następujący :

$$(B') \qquad V = \frac{1}{2}\left\{\frac{b'''_4(h' + h'' + 2h''' + 2h^{iv})}{3} + \frac{b'_2(h''' + h^{iv} + 2h' + 2h'')}{3}\right\}.$$

3° *Podstawa prostokątna.* — Jeżeli nazwiemy przez b podstawę prostokąta, bryłowatość będzie wyrażoną za pomocą wzoru (B') w którym założymy

$$b'''_4 = b'_2 = b.$$

i otrzymamy

$$(C) \qquad V = \frac{1}{4}\, bl(h' + h'' + h''' + h^{iv}).$$

4° *Podstawa trójkątna.* — Jeżeli nazwiemy przez b podstawę trójkąta i przez h', h'', h''' wysokości krawędzi odpowiadających każdemu z jego wierzchołków, objętość bryły da się obliczyć za pomocą wzoru (B') w którym założymy :

$$b'''_4 = 0 \quad b'_2 = b \ \text{ i } \ h''' = h^{iv},$$

otrzymamy więc

$$(D) \qquad V = \frac{bl}{6}\,(h' + h'' + h''').$$

Wzór (D) służył za punkt wyjścia do znalezienia wzoru ogólnego służącego do oznaczenia objętości graniastosłupów.

5°. *Podstawa trójkątna któréj dwie krawędzie są równe zeru.* — W tym przypadku bryła sprowadza się do czworościanu. Jeżeli nazwiemy h wysokość krawędzi pozostałéj, która nie jest zerem, dostateczném będzie, dla oznaczenia objętości szukanéj założyć we wzorze (D)

$$h' = h, \quad h'' = 0, \quad h''' = 0,$$

a otrzymamy

$$V = \frac{bl}{2} \times \frac{h}{3}.$$

Oto są wzory służące do oznaczenia objętości wszelkich jakichkolwiek brył na które w praktyce natrafić możemy.

II. — OKREŚLENIE ŚCISŁOŚCI PRZY OBLICZANIU OBJĘTOŚCI WYKOPÓW i NASYPÓW.

Dla dokładnego określenia *ścisłości* przy obliczaniu bryłowatości wykopów i nasypów, musimy się uciec do określenia przedstawiania samego gruntu. W saméj rzeczy, jak można żądać ażeby obliczenie

http://rcin.org.pl

bryłowatości jakiegoś ciała było ścislejszém od oznaczenia jego kształtu. Wszystko czego żądać możemy przy obliczanu bryłowatości ciał leży w tém, żeby mając te ciała przedstawione z pewną oznaczoną ścisłością, mieć obliczyć ich objętość z takąż samą dokładnością, t. j. żeby przybliżenie w obliczeniu ich objętości było równe w zupełności temu z jakiém te ciała zostały przedstawione.

W praktycznych zastosowaniach grunt jest zawsze przedstawionym przez proffil podłużny i przez profile poprzeczne. Wszystko co tu powiemy o profilu podłużnym odnosi się także do profilów poprzecznych, albowien każdy z nich, zwracając uwagę na zasadę jego formowania, jest profilem podłużnym którego długość jest znacznie mniejszą. Otóż profil podłużny, żeby dobrze przedstawiał grunt powinien się składać z szeregu prostych po sobie następujących i tworzących tyle cięciw łuków wypukłych lub wklęsłych mających dokładną formę samego gruntu i zlewających się z niemi, ile jest w rzeczywistości wypukłości lub wklęsłości samego gruntu. Grunt zupełnie płaski jest tylko przypadkiem szczególnym, który bardzo rzadko napotykać się daje.

Przy zdejmowaniu tak profilów poprzecznych jako téż i profilu podłużnego, praktyka uświęciła pewien sposób postępowania nie zostawiający nic do życzenia. Sposób ten jest wystarczającym do dokładnego przedstawienia kształtów gruntu nie przekraczając jednak pewnéj granicy, która byłaby w rzeczywistości mało użyteczną prawie niepodobną do osiągnięcia, albowiem granicą o któréj mowa, byłaby nieskończenie wielka liczba linii prostych nieskończenie małych i zlewających się w ten sposób z rzeczywistą krzywizną.

Nie podobna jest przyjąć że profile poprzeczne umieszczone na końcach pomiędzy-profilu, przedstawiają dokładnie kształt gruntu po prawéj i po lewéj stronie osi, szczególniéj jeżeli powierzchnia gruntu w pomiędzy-profilu przedstawioną jest jedynie dobrze zrobionym profilem podłużnym, z tego to powodu właśnie uważny geometra po dopełnieniu tego pierwszego warunku, zdejmuje inne profile poprzeczne zawarte pomiędzy pierwszemi, wszędzie, gdzie ich znajomość dokładna zdaje mu się być niezbędną do dokładnego przedstawienia kształtu gruntu leżącego po obu stronach osi. Profile poprzeczne rozłożone w sposób tutaj podany, mogą posłużyć do racyonalnego zastosowania *sposobu powierzchni średniéj*, lecz rzecz się ma zupełnie inaczéj gdy zamiast *sposobu powierzchni średniéj*, chcemy użyć *sposobu ścisłego*.

W saméj rzeczy, uważmy przestrzeń zawartą pomiędzy dwoma profilami poprzecznemi, przestrzeń ta zawiera wklęsłości i wypukłości które są przedstawione zupełnie niedokładnie za pomocą profilów poprzecznych nawet zwiększając ich liczbę. Profile poprzeczne przedstawiają punkta nizkie lub wzgórza tylko wtencza kiedy przechodzą właśnie przez nie, ponieważ jednakże pomiędzy dwoma punktami leżącemi w dole lub w górze znajduje się zawsze szczyt idący od jednego do drugiego, który to szczyt jest zazwyczaj pochylonym do osi (przypadek gdy szczyt jest prostopadłym do osi nie napotyka się prawie nigdy), a zatém należałoby dla dokładnego przedstawienia kształtu gruntu, powiększyć jeszcze liczię profilów poprzecznych, prowadząc je przez rozmaite punkta bardzo do siebie zbliżone. Taki sposób postępowania zwiększając nawet liczbę profilów poprzecznych nieograniczenie, nie przedstawiłby jeszcze z całą dokładnością kształtu gruntu w rzeczywistym jego kierunku.

Zasadzając się na powyższém rozumowaniu, robimy następujące pytanie : Nie należałoby též usunąć w zupełności zdejmowanie profilów poprzecznych, bardzo użytecznych stosując sposób obliczania bryłowatości przybliżony, kiedy idzie o dokładne przedstawienie kształtu gruntu i obliczenie objętości brył za pomocą sposobu ścisłego?

Na to pytanie odpowiedzieć możemy jak następuje. Profil podłużny z pomiędzy-profilami stosownie rozłożonemi, przedstawia z dostateczną dokładnością ślad gruntu, pomimo że pomiędzy cięciwami

http://rcin.org.pl

z których się składa i krzywemi samego gruntu przezeń przedstawionego dają się napotykać strzałki dość znacznéj wielkości, a zatém powierzchnia jakiegokolwiek gruntu może być dostatecznie dokładnie przedstawioną przez szereg trójkątów chociaż pomiędzy bokami ich i krzywemi samego gruntu pozostaną pewne strzałki które w danym projekcie będą tegoż samego rzędu przybliżenia co i strzałki profilu podłużnego. Grunt dla obliczenia jego bryłowatości zostanie zastąpionym przez powierzchnię wielościenną, w ten sam sposób jak profil podłużny, który zamiast być przedstawionym linią falistą, przedstawia się linią łamaną. W takim przypadku grunt będzie przedstawiony płaszczyzną pokrytą znamionami zdjętą starannie po prawéj i po lewéj stronie osi. Dla każdego szczytu można będzie zdjąc kilka punktów w ten sam sposób jak dla profilu podłużnego; dla jednego punktu wyniosłego zdejmie się tylko jeden punkt, dla pewnéj powierzchni płaskiéj zdejmie się jeden punkt odpowiadający jéj środkowi i kilka punktów tworzących jéj obwód i t. d.

Możemy więc odtąd przyjąć to podanie, że ścisłość w obliczaniu objętości wykopów lub nasypów, zależy jedynie od ścisłości z jaką dokonaném zostało przedstawienie wykreślne gruntu za pomocą powierzchni wielościennych podanych na płaszczyznie pokrytéj znamionami i wykonanéj z całą starannością i od dokładnego obliczenia objętości brył zawartych pomiędzy powierzchnią wielościenną i powierzchnią utworzoną przez profil projektowany. Dodać tu możemy że boki profilu podłużnego mogą być bokami ścian powierzchni wielościennéj.

III. — WYKAZANIE O ILE SPOSÓB TAK ZWANY ŚCISŁY ODDALA SIĘ OD ŚCISŁOŚCI OKREŚLONEJ W POPRZEDZAJĄCYM USTĘPIE

W ustępie pierwszym niniejszéj pracy widzieliśmy, że *sposób tak zwany ścisły* przyjmuje, że pomiędzy dwoma profilami poprzecznemi, powierzchnia gruntu jest powierzchnią skośną utworzoną ruchem prostéj poruszającéj się po obydwóch profilach i zostającéj bezustannie równoległą do płaszczyzny pionowéj przechodzącéj przez oś. Taki sposób przedstawienia gruntu przypuszcza, że pomiędzy uważanemi profilami kształt gruntu jest prawie gładki.

Niech będzie (fig. 3) powierzchnia wielościenna przedstawiająca dokładnie kształt gruntu, i niech będą dwa punkta A i B profilu podłużnego, pomiędzy któremi życzymy zastosować *sposób tak zwany ścisły* do obliczania bryłowatości ziemi. Ażeby dokonać tego, widzimy natychmiast, iż przez wierzchołki a, b i e, należy zdjąć profile poprzeczne, lecz pomiędzy temi punktami nic nam nie wskazuje potrzeby innych profilów poprzecznych. Uważmy więc najprzód przestrzeń zawartą pomiędzy profilami A i e, widzimy natychmiast, że boki JH, LC, MC i KN, doły i szczyty tworzące przerwy a jednakże dostępne tak dla instrumentów, jako téż i dla ich obliczania, zostały pominięte w zupełności stosując *sposób tak zwany ścisły*.

Niepraktycznem byłoby powiększać liczbę profilów poprzecznych pomiędzy punktami A i e, wreszcie gdybyśmy nawet zwiększyli ich liczbę do tego stopnia, że one dotykałyby się wzajemnie, dołki i szczyty JH, LC, ME i NK pozostałyby w zupełności, a zatém w skutek tych niedostatków sama myśl *sposobu tak zwanego ścisłego*, jest już naruszoną, albowiem widać, że ten sposób tak zwany ścisły zajmuje się tylko punktami najwyższemi pomijając w zupełności całe doły i całe szczyty. W samej rzeczy, niech będzie linia przejścia np. PP'; prosta ta w sposobie tak zwanym ścisłym zastępuje krzywę hiperboliczną, na co się w zupełności zgadzamy, albowiem strzałka ztąd wynikająca jest tego samego rzędu co strzałki profilu podłużnego; lecz ta linia przejścia, w przypadku którym się zajmujemy, zastępuje dwie krzywe hiperboliczne, to jest linię łamaną, o czém z łatwością można

http://rcin.org.pl

się przekonać na figurze, a zatém przy przedstawianiu gruntu za pomocą powierzchni wielościennych, zdarzenie o którém tu mówimy bezustannie powtarzać się musi, albowiem to co jest prawdziwém

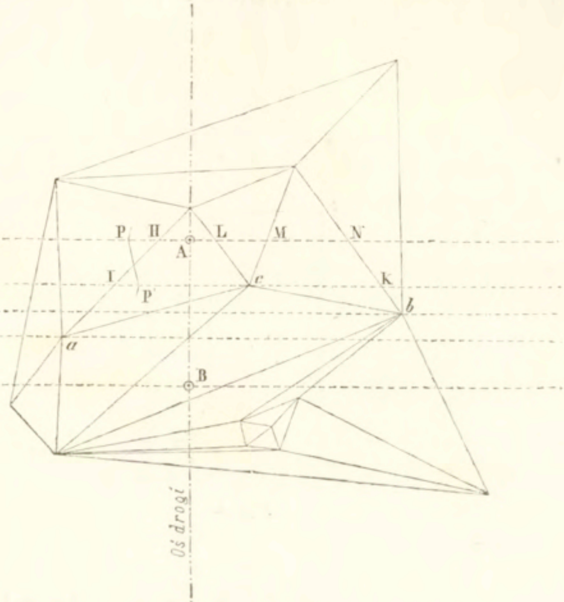

Fig. 3.

dla jednéj linii przejścia PP', jest także prawdziwém dla jakiéjkolwiek tworzącéj, któréj rzut przecina linie takie jak JH, LC, NK.

IV. — SPOSÓB ŚCISŁY.

Uważmy jakikolwiek trójkąt będący cząstką powierzchni wielościennéj gruntu. Niech będzie (fig. 4) ABC trójkąt o którym mowa; poprowadźmy pionowe przechodzące przez wierzchołki A, B i C i przedłużmy je aż do spotkania się z płaszczyzną poziomą porównania, to jest z poziomem morza; płaszczyzny pionowe AB, AC i BC przetną tę płaszczyznę podług prostych *ab*, *ac* i *bc* i utworzą trójkąt *abc*, którego płaszczyzna będzie poziomą, a zatém trójkąt ten będzie przecięciem prostém graniastosłupa ABC, *abc*; znając to postarajmy się obliczyć bryłowatość tego graniastosłupa.

W tym celu poprowadźmy przez wierzchołek B, którego znamie B*b* jest najmniejszém, płaszczyznę poziomą, która wyznaczy nam przecięcie proste B*a'c'*. Wiemy, że bryłowatość jakiegokolwiek graniastosłupa równa się bryłowatości graniastosłupa prostego (*abc*, *a'c'*B) zwiększonéj bryłowatością piramidy czworokątnéj (B, *a'c'*AC); nazywając przeto przez

S powierzchnię przecięcia prostego graniastosłupa, otrzymamy równanie

$$V = S \times Bb + (\text{trapez } a'c' \, AE) \times \frac{BH}{3}$$

w którém BH przedstawia wysokość piramidy czworokątnéj. Wysokość BH znajduje się na płaszczyznie przecięcia prostego B*a'c'* i jest prostopadłą do *a'c'*, które jest prostopadłe do A*a'* i C*c'*; mamy zatém:

$$V = S \times Bb + \left(\frac{Aa' + Cc'}{2} \times a'c'\right) \times \frac{BH}{3}$$

http://rcin.org.pl

Ponieważ nadto

$$a'c' \times \mathrm{BH} = 2\mathrm{S},$$

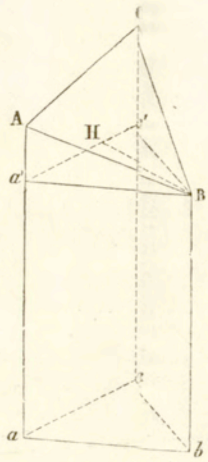

Fig. 4.

mamy więc jeszcze

$$\mathrm{V} = \mathrm{S} \times \mathrm{B}b + (\mathrm{A}a' + \mathrm{C}c')\frac{\mathrm{S}}{3} = \mathrm{S}\left(\mathrm{B}b + \frac{\mathrm{A}a' + \mathrm{C}c'}{3}\right);$$

lecz

$$\mathrm{A}a' = \mathrm{A}a - \mathrm{B}b$$
$$\mathrm{C}c' = \mathrm{C}c - \mathrm{B}b,$$

podstawiając więc w ostatniém równaniu za $\mathrm{A}a'$ i $\mathrm{C}c'$ wartości tylko co otrzymane i upraszczając, otrzymamy ostatecznie

$$\mathrm{V} = \mathrm{S} \times \frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c}{3}.$$

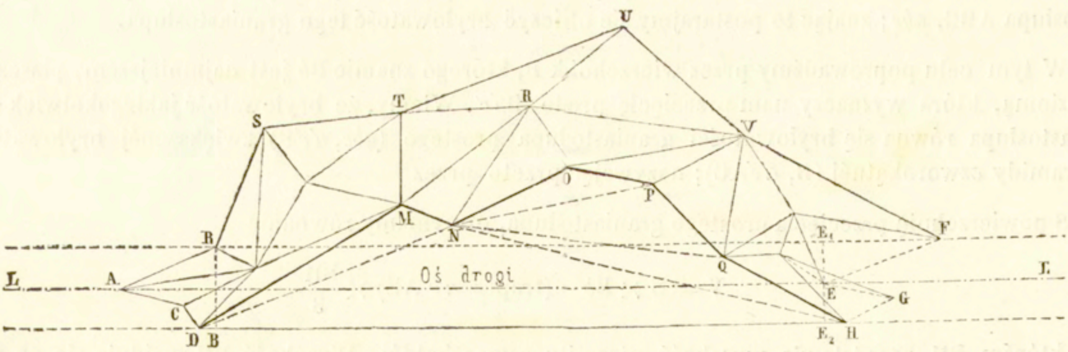

Fig. 5.

Znając obecnie objętość graniastosłupa, uważny jakikolwiek wykop, który przedstawiliśmy w perspektywie na fig. 5.

Niech będą : LL′ oś drogi, ABCD i EFGH linie przejścia od wykopu do dotykającego go nasypu,

http://rcin.org.pl

to jest linie przecięcia się platformy z gruntem DMNOPQH i BSTUVF linie łamane, przedstawiające przecięcia spadków wykopu z gruntem. Powierzchnia zatém wielościenna gruntu jest ograniczoną linią łamaną ACDMNOPQHGEFVUTSBA.

Znamiona wierzchołków téj powierzchni wielościennéj zostały zdjęte wprost na gruncie podobnie jak powierzchnie trójkątów z których ona się składa, i które to powierzchnie były mierzone poziomo.

Nazwijmy

n liczbę całkowitą trójkątów składających powierzchnię wielościenną,

S_1, S_2, S_3, $S_4 \ldots S_i \ldots S_{n-1}$, S_n, powierzchnie trójkątów o których mowa.

Każdy z tych trójkątów ma boki wspólne z trójkątami przyległemi, wypadek ten wpływa bardzo korzystnie na zdejmowanie planu, albowiem ukróca robotę lecz nie ma żadnego wpływu na obliczanie powierzchni. W saméj rzeczy, niech będzie jakikolwiek trójkąt RUV, którego znamiona wierzchołków są C_1, C_2 C_3, i którego powierzchnia jest S_p. Bryłowatość graniastosłupa pionowego, licząc aż do płasczyzny porównania, mającego ten trójkąt za podstawę jest daną przez równanie

$$V = S_p \times \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}$$

a zatém bryłowatość wszystkich graniastosłupów, mających za podstawę całą powierzchnię wielościenną gruntu wyrazi się przez równanie następujące :

$$V = \Sigma S_p \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}.$$

Oddzielmy obecnie na platformie czworokąt $BB_1 E_1E_2$ kreśląc prostopadłe do osi przez punkta B i E najbliżéj siebie leżące; podzielmy wielobok pozostały na trójkąty i prostokąt $BB_1 E_1E_2$ na dwa trójkąty i postąpmy dla platformy w ten sam sposób, w jakiśmy już postąpili dla powierzchni wielościennéj gruntu, otrzymamy w ten sposób bryłowatość odpowiadającą platformie za pomocą wzoru następującego:

$$V_1 = \Sigma S_1 \frac{(Cm_1 + Cn_1 + Cr_1)}{3},$$

w którym

S_1 przedstawia powierzchnię trójkąta mającego dla swych wierzchołków znamiona Cm_1, Cn_1, Cr_1.

Podzielmy również, spadki DMNOPQHD i BSTUVFB na trójkąty, otrzymamy bryłowatosć odpowiadającą każdemu z nich za pomocą wzoru

$$V_2 = \Sigma S_2 \frac{(Cm_2 + Cn_2 + Cr_2)}{3}.$$

i

$$V_3 = \Sigma S_3 \frac{(Cm_3 + Cn_3 + Cr_3)}{3}.$$

Tak obliczone trzy objętości V_1, V_2 i V_3 tworzą summę, która odjęta od objętości V da różnicę równą właśnie objętości szukanéj wykopu.

W przypadku nasypu postępowanie powyżé podane w niczém się nie zmieni.

http://rcin.org.pl

Zazwyczaj znamiona brane względem poziomu morza są bardzo wielkie, dla uproszczenia więc rachunków koniecznėm jest zredukować je ; w tym celu, zamiast brać znamiona względem poziomu morza będziemy je liczyli względem pewnėj płaszczyzny poziomėj, przechodzącėj przez najniższy punkt wykopu. Przypuśćmy, że płaszczyzna porównania o którėj mowa przechodzi przez punkt A, żeby więc mieć wielkość znamion względem tėj nowėj płaszczyzny, dostatecznėm będzie, od znamion już znalezionych odjąć ilość stałą równą właśnie odległości pomiędzy tą płaszczyzną i poziomem morza ; działanie to nie zmieni w niczém rozumowania podanego powyżėj. Obliczenie objętości rowów w wykopie odbędzie się w sposób następujący : Niech będzie rów odpowiadający bokowi DH (fig. 5); krawędź DH jest wspólną dla rowu i dla spadku; D i H są więc punktami w których ta krawędź górna rowu spotyka grunt ; punkta D_1 i H_1 są punktami spotkania się z gruntem krawędzi najbliższėj do poprzedzającėj i znajdującėj się u dołu rowu, a zatém D_1, H_1 przedstawia właśnie długość tėj krawędzi.

W ten sam sposób znajdziemy, że D_2H_2 jest długością drugiéj krawędzi dolnėj rowu, i że D_3H_3 jest długością krawędzi dotykającėj korony, punkta D_3H_3 leżą na prostych CD i HG. Mając te dane z łatwością znajdziemy długości spadków i będzie :

Długość jednego spadku wyrazi się przez

$$\frac{DH + D_1H_1}{2}.$$

Długość drugiego spadku przez

$$\frac{D_2H_2 + D_3H_3}{2},$$

a w końcu długość samego rowu będzie średnią pomiędzy temi dwoma długościami, t. j. że otrzymamy oznaczając ją przez l

$$l = \frac{1}{4}\,(DH + D_1H_1 + D_2H_2 + D_3H_3).$$

Oznaczając obecnie powierzchnię stałą rowu przez ω i długość drugiego rowu przez l_1, otrzymamy na obliczenie bryłowatości rowów w wykopie, wyrażenie następujące.

$$v = \omega(l + l_1)$$

V. — PROSTSZY SPOSÓB JEST NIEPODOBNYM.

Jeżeli tylko przyjmiemy, że grunt nie może być przedstawionym prościéj jak przez powierzchnię wielościenną, sposób ścisły przez nas podany musi być najprostszym.

W saméj rzeczy, sposób przez nas podany polega na odjęciu objętości jednéj bryły wielościennéj od objętości innéj bryły wielościennéj, które nie mają pomiędzy sobą żadnego związku, ani co do kształtu ani co do położenia, cały związek jaki między niemi istnieje jest wspólny obwód tak dla jednéj jak dla drugiéj, lecz obwód ten może być jakikolwiek, zatém inny sposób od sposobu przez nas podanego istnieć w tych warunkach nie może.

Idzie więc obecnie o to, żeby dowieść że nasz sposób obliczania objętości jest najprostszym. Dla okazania tego uważmy jakikolwiek trójkąt należący do powierzchni wielościennych o których mowa; położenie tego trójkąta w przestrzeni jest jakiekolwiek i nie ma najmniejszego związku z trójką-

http://rcin.org.pl

tami go otaczającemi lub od niego oddalonemi tak pod względem wielkości jako téż pod względem położenia, a zatém objętość graniastosłupa odpowiadającego mu nie ma żadnego związku z objętością innych graniastosłupów, a więc objętość całkowita składać się będzie koniecznie z takiéj liczby wyrazów ile jest graniastosłupów, lub prościéj mówiąc ile jest trójkątów w powierzchni wielościennéj. Rozbierzmy więc po szczególe objętość jednego z tych graniastosłupów, cóż spostrzegamy? oto, że ta objętość wyrażoną jest przez wyraz

$$S\left(\frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}\right),$$

to jest przez iloczyn z powierzchni trójkąta przez wysokość.

Otóż wszelka powierzchnia, jak wiemy, składać się musi przynajmniéj z dwóch czynników, a zatém ilość S nie może być uproszczoną. Wysokość zależną jest od położenia wierzchołków trójkąta, którego położenie w przestrzeni jest jakiémkolwiek, nic więc dziwnego, że wysokość ta składa się z trzech wyrazów odpowiadających trzem wierzchołkom, a ponieważ każdy z tych wyrazów składa się tylko z jednego czynnika, uproszczenie ich więc jest niepodobném. Z tego cośmy dotąd powiedzieli wyprowadzić możemy ten wniosek, że sposób przez nas podany jest najprostszym.

Przedstawia się jednakże maleńkie uproszczenie dotyczące spółczynników liczebnych, w saméj rzeczy, pomnóżmy każdy z wyrazów, zawartych w wyrażeniu objętości przez 6, cóż dostrzegamy? dostrzegamy że wyraz jakikolwiek, np. ten którym się w téj chwili zajmujemy, zamienia się na

$$2S(C_1 + C_2 + C_3).$$

Widzimy więc, że możemy obliczyć od razu dwa razy wziętą powierzchnię trójkąta, a przez to unikniemy konieczności dzielenia każdego wyrazu przez 2, i następnie, że obliczzjąc od razu trzy razy wziętą wysokość, unikniemy dzielenia każdego wyrazu przez 3; wypadki w ten sposób otrzymane będą sześć razy większe od prawdziwych, dzieląc więc ostateczną różnicę objętości brył przez powyżéj wskazany czynnik, t. j. przez 6, wypadek otrzymany będzie właśnie objętością któréj szukamy.

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl