O HYPOTEZACH

KTÓRE SŁUŻĄ ZA PODSTAWĘ GEOMETRYI

ROZPRAWA B. RIEMANNA

PRZEKŁAD POLSKI Z OBJAŚNIENIAMI

WŁ. GOSIEWSKIEGO

DOKONANY PRZEZ

S. DICKSTEINA

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych 5 września 1874 roku.

TREŚĆ.

(*) Artykuł I stanowi zarazem pracę przygotowawczą do przyczynków do analizy położenia (situs).

(**) To badanie o możliwych oznaczeniach miarowych n-krotnie rozciągłéj rozmaitości jest bardzo niezupełną, ale dla teraźniejszego celu zupełnie wystarczającém.

krzywizny) w danym punkcie i w danym kierunku powierzchniowym. Do oznaczenia stosunków miarowych jest (przy pewnych ograniczeniach) rzeczą możliwą i dostateczną, by miara krzywiznowa w każdym punkcie w $n\frac{(n-1)}{2}$ kierunkach powierzchniowych była dowolnie daną.

§ 3. Geometryczne wyjaśnienie.

§ 4. Rozmaitości płaskie (w których miara krzywiznowa równa zeru) dają się uważać za szczególny przypadek rozmaitości o stałéj krzywiznie. Daje się ono określić i w ten sposób, że w nich ma miejsce niezależność n krotnie rozciągłych wielkości od miejsca (poruszalność ich bez rozciągnięcia).

§ 5. Powierzchnie o stałéj mierze krzywizny.

III. — Zastosowanie do przestrzeni.

§ 1. Układ faktów wystarczających do oznaczenia stosunków miarowych przestrzeni, tak jak je zakłada geometrya.

§ 2. Jak dalece jest prawdopodobném stosowanie się tych empirycznych oznaczeń po za granicami doświadczenia w dziedzinie nieskończonéj wielkości?

§ 3. Jak dalece w dziedzinie nieskończonéj małości. Związek tego pytania z wyjaśnieniem natury (*).

(*) Paragraf 3 artykułu III wymaga jeszcze opracowania i dalszego rozwinięcia.

PRZEDMOWA TŁOMACZA

Praca wielkiego matematyka niemieckiego (*), któréj polski przekład dajemy, należy bez wątpienia do prac pierwszorzędnego w nauce znaczenia. W niéj bowiem nie tylko wyświecone są zasady, na których opiera się geometrya, ale wypowiedziane zostały głębokie myśli, mogące się stać z czasem zarodkiem wielkich odkryć w nauce.

(*) Oto krótki życiorys Riemanna :

Bernhard Riemann, urodził się dnia 17 Września 1826 roku w Breselenz w Hannowerskiém. Początkowe wychowanie pobierał w domu rodzicielskim, następnie uczęszczał do liceum w Hannowerze i Johanneum w Lüneburgu. Tu młody uczeń zwrócił na siebie uwagę nauczycieli wybitnemi zdolnościami do matematyki, do tego stopnia, że dawano mu do prywatnych studyów domowych dzieła Eulera i Legendre'a. W roku 1846 wstąpił na Uniwersytet w Getyndze, początkowo, zgodnie z życzeniem ojca na wydział teologiczny, ale party nieprzezwyciężonym pociągiem do matematyki przeszedł wkrótce na wydział filozoficzny. Tu słuchał wykładów Gaussa o metodzie najmniejszych kwadratów, Sterna o rozwiązalności równań liczebnych, Goldschmidta o elektromagnetyzmie; lecz ponieważ wykłady te nie nasycały jego żądzy do nauki, przeto w następnym roku przeniósł się do Berlina, by tam słuchać wykładów Jacobiego o mechanice i wyższéj algebrze, Steinera o geometryi, Dirichleta o całkach określonych i teoryi równań różniczkowych, Eisensteina o funkcyach eliptycznych. W roku 1849 powrócił do Getyngi, gdzie jeszcze przez trzy semestra uczęszczał na nauki przyrodnicze i filozofię, a przedewszystkiém na znakomite wykłady fizyki profesora Wilhelma Webera. W roku 1852 doktoryzował się i ogłosił pierwszą swą pracę : « Zasady ogólnéj teoryi funkcyi zmiennéj złożonéj » (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse), w któréj uogólnia pojęcie funkcyi, podaje metodę badania funkcyj wielowartościowych przy pomocy

Riemann postawił sobie w téj pracy zadanie: 1° odszukania tych najprostszych faktów czyli hypotez, na których opierają się stosunki miarowe przestrzeni naszéj, tak jak one wyrażają się twierdzeniami geometryi, 2° zbadania, czy i o ile możliwém jest rozciągnięcie tych hypotez po za granice doświadczenia, a mianowicie do dziedzin nieskończonéj wielkości i nieskończonéj małości.

---

pewnéj powierzchni, uważanéj jako miejsce wartości funkcyi, przez co takie funkcye wielowartościowe stają się jednowartościowemi funkcyami miejsca na takiéj powierzchni. Powierzchnie takie nazwane zostały późniéj powierzchniami Riemanna. Niezmiernéj doniosłości jest podana w téj pracy metoda nazwana przez Riemanna metodą Dirichleta, przy pomocy któréj oznaczyć można funkcyę zmiennéj złożonéj, gdy się zna warunki odnoszące się do ograniczenia jéj dziedziny i do punktów przerwy ciągłości.

Metody wyłożone w téj rozprawie doktorskiéj Riemann zastosował do zbadania funkcyj dających się przedstawić za pomocą szeregu Gaussa, w rozprawie p. t. « Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen », a szczególniéj do funkcyj Ablowych w klassycznéj rozprawie : « Theorie der Abel'schen Functionen », gdzie otrzymuje twierdzenia odkryte już przez innych i dowodzi wielu innych twierdzeń i własności bez zawiłych rachunków, opierając się na peryodyczności tych funkcyj i na zachowaniu się ich w punktach przerwy ciągłości.

Habilitacyjna rozprawa o szeregach trygonometycznych. « Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe » należy do znakomitych i ważnych prac, gdyż Riemann bada tu przypadki, których nie rozebrał Dirichlet w sławnéj rozprawie o zbieżności szeregów trygonometrycznych. W téj rozprawie Riemanna mieści się także klasycznie napisana historya teoryi szeregów trygonometrycznych, a w uwagach wstępnych znajduje się nowa ogólna definicya całki określonéj, z któréj pokazuje, że i funkcye, które w jakkolwiek małym przedziale nieskończenie wiele razy zrywają swą ciągłość, mogą być całkowane. Ztąd wynika odwrotnie możność istnienia takich funkcyj, które w skończonym przedziale wcale nie mają pochodnéj. Badaniem takich funkcyj dopiero niedawno matematycy zajmować się zaczęli.

Rozprawa o hypotezach geometryi była czytaną jako lekcya próbna przy instalowaniu się na docenta. Śmiało rzec można, że tak znakomitéj lekcyi żaden z instalujących się docentów aż do czasów Riemanna nie czytał. Gauss, który z trzech tematów przedstawionych przez Riemanna umyślnie wybrał temat o geometryi, będąc ciekawym, w jaki sposób młody ten człowiek traktować będzie przedmiot tak trudny, był do tego stopnia zdumiony wykładem który przeszedł wszelkie jego oczekiwania, że lubo zwykle zimny, Gauss tym razem z rzadkiém wzruszeniem wyraził swe najwyższe uznanie dla głębokich myśli wypowiedzianych przez młodego docenta.

Wyliczone przez nas rozprawy należą do najważniejszych prac Riemanna i one same dałyby mu już prawo do nieśmiertelnej sławy. I rzeczywiście uczniowie Riemanna już wiele przyczynili się do wzbogacenia literatury matematycznéj pracami opartemi na metodach wyłożonych we wspomnianych rozprawach. Ale wielostronny i na wskroś filozoficzny umysł Riemanna przenikał we wszystkie gałęzie wiedzy matematycznéj, wszędzie obejmując przedmiot badany w całéj ogólności i traktując go z największą ścisłością. I tak zajmował się on wyprowadzeniem równań różniczkowych dla powierzchni minimalnych (« Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung »), teoryą rozchodzenia się płaskich fal powietrznych o skończonéj dalekości (« Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite »), oznaczeniem liczby liczb pierwszych mniejszych od pewnéj liczby danéj (« Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse »), zadaniem Dirichleta o elipsojdzie płynnej (« Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides »), teoryą elektrodynamiki (« Ein Beitrag zur Elektrodynamik »), mechaniką ucha (« Mechanik der Ohres »), teoryą ciepła, teoryą równań różniczkowych, i t. p. Prócz tego w papierach jego znaleziono urywki prac treści filozoficzno-przyrodniczéj, w których przebija się oryginalny pogląd jego na pojęcia o wszechświecie.

Wszystkie prace Riemanna wyszły niedawno w dziele pod tytułem : « Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass », herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind, von H. Weber, Leipzig, Teubner, 1876 r. W dziele tém mieści się trzydzieści rozpraw matematycznych.

W roku 1856, Riemann został asesorem klassy matematycznéj w Getyngskiém Towarzystwie Nauk, w roku następnym, professorem nadzwyczajnym, a w 1859 zwyczajnym professorem matematyki i zwyczajnym członkiem Towarzystwa Nauk. W tym samym roku otrzymał godność członka korespondenta Akademii Berlińskiéj, następnie w roku 1866 został członkiem zagranicznym tejże Akademii. W tymże samym roku 1866, został wybrany

Dla rozwiązania pierwszego zadania Riemann stawia sobie toż samo pytanie daleko ogólniéj, odnosząc je do utworzonego przez siebie pojęcia *wielokrotnie rozciągłéj rozmaitości*, w którém przestrzeń trójwymiarowa zawiera się jako szczególny przypadek, i zajmuje się wyszukaniem warunków koniecznych i dostatecznych dla oznaczenia stosunków miarowych w takich wielokrotnie rozciągłych rozmaitościach, w których linie mają długość niezależną od położenia.

Szukanie tych warunków sprowadza się do wynalezienia wyrażenia analitycznego przedstawiającego element linijny w takiéj rozmaitości. Ograniczając w pewien sposób, ze względu na cel zamierzony, ogólność tego badania i oznaczając położenie każdego punktu za pomocą n zmiennych wielkości czyli współrzędnych, Riemann otrzymuje wyrażenie kwadratu elementu linijnego w założonych rozmaitościach jako funkcyę całkowitą i jednorodną drugiego stopnia różniczek współrzędnych punktu, z którego wychodzi tèn element linijny. Takie rozmaitości, w których ta funkcya sprowadza się do summy kwadratów różniczek nazywa Riemann z przyczyny poniżéj wyłuszczonéj *płaskiemi*; do takich płaskich rozmaitości zalicza się przestrzeń nasza.

Kształt wyrażenia elementu linijnego otrzymany w tém badaniu doprowadza do wniosku, że dla oznaczenia stosunków miarowych w n krotnie rozciągłéj rozmaitości, potrzeba znać w każdym punkcie $n.\frac{n-1}{2}$ funkcyj miejsca. Te funkcye miejsca oznaczyć się dadzą, gdy znaną będzie wartość wyrażenia, jakie się otrzymuje, jeżeli wyraz czwartego porządku w rozwinięciu kwadratu elementu linijnego podzieli się przez kwadrat trójkąta utworzonego z linij najkrótszych. Takich wielkości w każdym punkcie odpowiadających $n\frac{n-1}{2}$ kierunkom powierzchniowym przechodzącym przez n linij najkrótszych będzie $n\frac{n-1}{2}$ i każda z nich po pomnożeniu przez $-\frac{3}{4}$ staje się równą téj wielkości, którą Gauss nazwał krzywizną powierzchni. Wynika ztąd, że stosunki miarowe uważanych rozmaitości o n wymiarach będą wiadome, gdy będzie znaną krzywizna w $n\frac{n-1}{2}$ kierunkach powierzchniowych w każdym punkcie. Dla przestrzeni trójwymiarowéj $n\frac{n-1}{2}=3$, a więc dla oznaczenia stosunków miarowych przestrzeni trzeba znać krzywiznę w trzech kierunkach powierzchniowych w każdym punkcie. W przypadku rozmaitości, dla któréj kwadrat elementu linijnego wyraża się wprost summą kwadratów, będzie oczywiście krzywizna w każdym punkcie i w trzech kierunkach powierzchniowych zerem, i oto powód, dla którego takie rozmaitości nazwane zostały płaskiemi.

Rozmaitości, w których kwadrat elementu linijnego wyraża się pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego drugiego porządku, stanowią tylko szczególny przypadek ogólniejszych rozmaitości, w których kwadrat elementu linijnego wyraża się w sposób bardziéj złożony, np. pierwiastkiem czwartéj potęgi z wyrażenia różniczkowego czwartego porządku. Badanie takich rozmaito-

---

członkiem korespodentem Akademii Paryzkiej, i członkiem zagranicznym Londyńskiego Towarzystwa Królewskiego.

Objawy choroby piersiowéj zmusiły Riemanna do podróży do Włoch w roku 1862. Tu powtórnie przebywał w roku 1864; zaproponowanéj sobie podczas tego pobytu posady professora w Pizie po Mosottim nie przyjął. W roku 1866 poraz trzeci pojechał do Włoch i tu w kilka tygodni po przyjeździe, dnia 20 Lipca 1866 roku życie zakończył w Selasca nad jezi rem Laggo-Maggiore. Tu spoczywają jego zwłoki. Świat uczony opłakuje zgon przedwcześnie zmarłego genia nego myśliciela, którego krótki żywot tyloma cennemi odkryciami wzbogacił naukę.

ści możnaby przeprowadzić w taki sam sposób, w jaki zbadano rozmaitości poprzednie; Riemann nie zajmuje się jednak niemi szczegółowo, gdyż nie mają bezpośredniego znaczenia dla celu jego pracy; zwraca tylko uwagę na wybitną różnicę zachodzącą między temi dwoma rodzajami rozmaitości, którą wyrazić można w ten sposób, że rozmaitości, w których kwadrat elementu linijnego wyraża się pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego drugiego porządku mogą być nazwane płaskiemi w nieskończenie małych częściach, inne zaś nie (*). Badanie tych ogólniejszych rozmaitości, powiada Riemann w końcu téj pracy, może być ważném wtedy, gdy okaże się, że do dziedzin nieskończenie małych nie stosują się zasady naszéj geometryi.

Poświęciwszy ustęp rozmaitościom o stałéj krzywiznie, których główny charakter polega na tém, że w nich figury poruszać się mogą bez rozciągania, Riemann stosuje swe ogólne badania do naszéj przestrzeni, t. j. do przestrzeni, do któréj nadaje się geometrya Euklidesa. Przy założeniu niezależności linij od miejsca i powyżéj przyjętego kształtu linijnego elementu, t. j. płaskości w nieskończenie małych częściach, stosunki miarowe przestrzeni dają się wyrazić w ten sposób, że krzywizna w każdym punkcie w trzech kierunkach powierzchniowych jest zerem. Gdy daléj założymy nie tylko niazależność linij ale i ciał od miejsca, wyniknie, że krzywizna wszędzie jest stałą. Z tych hypotez wynika wprost, że summa kątów we wszystkich trójkątach jest oznaczoną, gdy jest oznaczoną w jednym jakimkolwiek trójkącie, i że stosunki miarowe przestrzeni są zupełnie oznaczone, jeżeli summa kątów w trójkącie równa się dwom kątom prostym.

Że krzywizna naszéj przestrzeni jest stałą i wszędzie równą zeru, jest to hypoteza, na któréj opiera się cała geometrya Euklidesa, a którą zawdzięczamy doświadczeniu, co aż do czasów Riemanna pozostało niewyjaśnioném, i pierwszorzędne nawet umysły bez potrzeby siliły się na wyprowadzenie XIgo postulatu Euklidesa z innych pewników wziętych za podstawę geometryi. Bezowocny skutek tych zabiegów przyniósł pośrednio wielką korzyść nauce; albowiem matematycy, straciwszy nadzieję dowiedzenia wspomnianego postulatu, pomyślili o utworzeniu takiéj geometryi, która przyjmując za podstawę wszystkie pozostałe pewniki, jest zupełnie niezależną od pewnika o liniach równoległych. W ten sposób powstała geometrya urojona Łobaczewskiego, absolutna Bolaya, nie-Euklidesowa Beltramiego. Dopiero Riemann w sposób stanowczy rozstrzyga to ważne pytanie: z jego badań wynika wprost, że postulat Euklidesa, lub każdy inny pewnik, który przyjąć trzeba dla zbudowania teoryi linii równoległych, jest wprost wynikiem hypotezy, że krzywizna przestrzeni jest wszędzie zerem i dla tego dowieść się nie da. Prócz tego Riemann wykazuje możliwość zbudowania zupełnie scisłych umiejętności różnych od zwyczajnéj geometryi. Geometrya nieeuklidesowa jest tylko pierwszym krokiem w tym kierunku; odrzucając inne pewniki geometryi Euklidesa np. aksiomat o nieskończonéj długości linii prostéj, obok geometryi nieeuklidesowéj (Łobaczewskiego, Bolyai'a i innych), którą Klein nazywa hyperboliczną, możliwą będzie inna, którą nazwać można eliptyczną; nasza zaś zwyczajna czyli paraboliczna geometrya jest przejściem od pierwszéj do drugiéj (*).

O ile hypotezę wziętą za podstawę geometryi Euklidesa można stosować po za granicami doświadczenia, Riemann rozbiera w ostatniéj części swéj pracy. Tu ustanawia on nadzwyczaj ważną różnicę, jaka zachodzi między nieograniczonością a nieskończonością. Z niezależności ciał od miejsca w przestrzeni naszéj wnosimy, że krzywizna jéj jest stałą. Jeżeli jest stałą i dodatną, wtedy przestrzeń musi być nieograniczoną, ale nieskończoną nie jest, podobnie, jak powierzchnia o stałéj dodatnéj krzywi-

---

(*) Porównaj II, 3.

(**) Porównaj artykuł profesora Kleina w « Mathematische Annalen, VI, p. t.: Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie », str. 113.

znie. Zdaniem więc Riemanna, przyjęcie, że przestrzeń jest nieskończoną, musi być uważaném za oddzielną hypotezę, która może być wynikiem tego, że ta stała miara krzywizny jest zerem.

Zresztą zdaniem Riemanna pytania o nieskończonéj wielkości są dla wyjaśnienia natury pytaniami bez znaczenia. W saméj rzeczy, jeżeli założyć, że przestrzeń jest nieskończoną, w takim razie krzywizna przestrzeni we wszystkich kierunkach i w każdym punkcie jest stale zerem, a więc stosunki miarowe tejże są wszędzie jedne i te same, i badanie w dziedzinie nieskończonéj wielkości nie może dać nic nowego. Inna rzecz ma się z badaniem odnośnie do nieskończonéj małości. Jeżeli bowiem nie założymy niezależności ciał od miejsca, to ze stosunków miarowych w skończoności nie można wnosić o stosunkach miarowych w nieskończonéj małości : albowiem miara krzywizny w każdym punkcie w trzech kierunkach mogłaby mieć wartość dowolną, gdy tym czasem cała krzywizna w każdéj skończonéj części przestrzeni mogłaby się nie różnić w sposób wyraźny od zera. Jeszcze bardziéj zawikłanemi byłyby stosunki miarowe w nieskończonéj małości, jeżeli by założyć, że element linijny wyraża się w sposób bardziéj złożony. Czy istnieją fakty upoważniające do takich przypuszczeń? Dzisiejszy stan nauki daje na to pytanie raczéj twierdzącą niż przeczącą odpowiedź. Istotnie, pojęcia odpowiadające stosunkom miarowym w skończoności, np. pojęcia ciała stałego lub promienia światła nie dają się przenieść do dziedziny nieskończonéj małości i z tego powodu nauka dla wytłomaczenia wielu szeregów zjawisk musi uciekać się do rozmaitych hypotez o materyi i sile. Ta okoliczność nasuwa myśl, że hypotezy geometryi Euklidesowéj mogą tracić swą moc w dziedzinie nieskończonéj małości, a raczéj, że może zjawiska dałyby się objaśnić w sposób bardziéj prosty, przez przyjęcie dla elementu linijnego wyrażenia mniéj prostego, niż to, które w téj pracy zostało przyjęte za podstawę.

Jaka może być wewnętrzna przyczyna tych stosunków miarowych przestrzeni? Odpowiedź na to pytanie daje Riemann w tem sposób : albo to, co jest rzeczywiście podstawą przestrzeni stanowi rozmaitość przerywaną, któréj stosunki miarowe określają się już samą naturą rozmaitości, albo téż przyczyna leży w działaniu sił w przestrzeni. Rozstrzygnięcie tych pytań należy pozostawić przyszłości (*).

Z tego pobieżnego streszczenia rozprawy Riemanna widać, jak ważne i głębokie zawiera ona badania. Matematyka, filozofia i nauki przyrodnicze znajdują w niéj ważne wskazówki dla swego doskonalenia się. Matematyka zyskała wiele przez utworzenie ogólnego pojęcia wielokrotnie rozciągłych wielkości, i wskazanie metod badania takich rozmaitości; filozofia znajduje w niéj wskazówki, jak badać należy podstawy wiedzy i w jaki sposób każda umiejętność ścisła z pojęć swych zasadniczych wytwarza konstrukcye przy pewnym układzie hypotez; nauki fizyczne wreszcie mogą wyciągnąć z niéj ten pożytek, by, mówiąc słowami Riemanna, nie tamowały się ograniczonością pojęć i w szukaniu związku przyczynowego pomiędzy zjawiskami nie opierały się na przekazanych przesądach.

Żałować należy, że myśli podane w ostatnim ustępie nie zostały, pomimo przyrzeczenia, szerzéj rozwinięte przez Riemanna; w znalezionych urywkach treści filozoficzno-przyrodniczéj znajdują się uwagi odmienne treścią od poprzednich. Przedwczesna śmierć nie pozwoliła genialnemu myślicielowi rozwinąć rzeczonych pomysłów, których opracowanie staje się obowiązkiem jego następców.

Przekład rozprawy Riemanna został dokonany, o ile można, najzgodniéj z duchem oryginału, przy starannéj baczności na czystość naszego języka. Wyrazy, które zmuszeni byliśmy wprowadzić na oznaczenie nowych pojęć, pozostawiamy ocenie światłych czytelników.

(*) Pan Gosiewski ma zamiar swój pogląd na to ciekawe miejsce z pracy Riemanna przedstawić w oddzielnym artykule.

Przypisy objaśniające trudniejsze miejsca w téj pracy Riemanna ułożone zostały po części przy pomocy uwag dodanych do innéj rozprawy (*), a które porobił Dedekind według wskazówek samego Riemanna, głównie zaś zawdzięczam je czynnéj pomocy pana Gosiewskiego, bez udziału którego przekład ten nie mógłby przyjść do skutku. Przedewszystkiém zwracam tu uwagę czytelnika na przypisek 8, w którym p. Gosiewski nie tylko upraszcza rachunki mające na celu wyprowadzenie miary krzywizny w każdym punkcie rozmaitości i sprowadzenie téjże do krzywizny Gaussa, ale prócz tego uzupełnia określenie krzywizny rozmaitości w $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkach powierzchniowych, wykazując, że kierunki wyznaczające stosunki miarowe rozmaitości w danym punkcie, stanowią układ ściśle określony, czego Riemann w swéj rozprawie o hypotezach geometryi nie wypowiada (**). Określony ten układ kierunków powierzchniowych, nazwany przez pana Gosiewskiego układem głównym, ustanawia pewną analogię między teoryą rozmaitości wielokrotnie rozciągłych i teoryą powierzchni, w któréj układ linij krzywiznowych odpowiada owemu układowi głównemu. Zasługuje téż na szczególną uwagę sposób podany przez p. Gosiewskiego na wyprowadzenie wzoru dającego długość elementu linijnego w rozmaitości o krzywiznie stałéj. Inną metodę wyprowadzenia tegoż wzoru zakomunikował mi łaskawie prof. H. Weber w Królewcu, któremu wypowiadam w tém miejscu szczere podziękowanie. Sposób ten pomieszczony został w końcu 12go przypisu.

Prócz tego załączam tu następujący spis znanych nam prac wcześniejszych lub późniejszych od pracy Riemanna, a mających związek z jéj treścią :

Łobaczewski. *O zasadach geometryi*, w *Gońcu kazańskim*, po rossyjsku, 1829 i 1830. *Nowe zasady geometryi*, w *Wiadomościach Naukowych Kazańskich*, po rossyjsku. Kazań, 1835, 1836, 1837.

Géometrie imaginaire, 1837, Crelle, XVII.

Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, 1870, wyszło we francuzkim przekładzie Hoüela pod tytułem :

Études géometriques, Paris, Gauthier-Villars, 1866.

Pangéometrie. Kazań, 1855.

J. Bolyai. Dodatek dzieła W. Bolyai'a : *Tentamen in elementa matheseos*, etc. Maros-Vasarhely, 1832; we francuzkim przekładzie p. t.

La science absolue de l'espace, etc. Paris, Gauthier-Villars, 1868.

Helmholz. *Ueber die Thatsachen der Geometrie*. *Wiadomości Getyngskie*, 1868.

Beltrami. *Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea*. Napoli, 1868.

Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante. Annali di Matematica. Serie II, tom II, 1868.

(*) *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Illustrissima Academia Parisiensi propositæ* : « Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un systeme de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes ». Uwagi, o jakich mówimy, znajdują się na str. 384 — 391 zupełnego wydania dzieł Riemanna

(**) W przytoczonéj rozprawie Riemanna na str. 382 zupełnego wydania znajduje się ustęp który naprowadza na myśl tego uzupełnienia określenia krzywizny; pan Gosiewski doszedł do tego samodzielnie, gdyż z tą rozprawą konkursową Riemanna zapoznał się dopiéro po zrobieniu powyższego uzupełnienia.

Francuzki przekład znajduje się w *Annales de l'école normale*, 1869.

Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante. (Bull. Darboux), 1876.

L. Schlæfli. Nota alla memoria del sig. Beltrami *Sugli spazii di curvatura constante. Annali di matematica*, II, 1868, 1869.

Genocchi. *Dei primi principii della mechanica et della geometria.* Firenze, 1869.

Tilly. *Etudes de mécanique abstraite.* (Mém. de l'acad. de Belg), 1870.

J. Rosanes. *Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschaung vom Raume.* Wrocław, 1871. Lekcya o treści badań Riemanna i Helmholza.

Hoüel. *Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide.* Mém. de Bordeaux, VIII, 1870 et *Nouvelles Annal*, IX, 1870.

Baltzer. *Ueber die Hypothesen der Parallelentheorie.* Crelle, LXXIII.

Schering. *Die Schwerkraft im Gauss'schen Raume*; *Wiadomości Getyngskie*, 1870.

Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannenschen Räumen. Wiadomości Getyngskie, 1873.

Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen.

C. Flye Ste-Marie. *Études analytiques sur la théorie des parallèles.* Paris, Gauthier-Villars, 1871.

E. Betti. *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni.* Milano, Bernardoni, 1871.

F. Klein. *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Mathematische Annalen*, IV, VI, VII.

Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, 1872.

J. König. *Ueber eine reale Abbildung der s. g. Nicht-Euclidischen Geometrie. Wiadomości Getyngskie*, 1872.

J. Frischhauf. *Absolute Geometrie*, nach *J. Bolyai.*

Element der absoluten Geometrie, 1876 (*).

A. Cayley. *On the non-euclidian Geometry. Clebsch Annalen*, V.

C. Jordan. *Essai sur la géometrie à n dimensions*, W *Bulletin de la société mathématique de France*, III, C. R., LXXV.

Beez. *Ueber das Krümmungsmaas von Mannigfaltigkeiten höheren Ordnung.* 1874. *Math. Ann*, VII

Zur Theorie des Krümmungsmaasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Schlömilchs Zeitschrift, XX, XXI (jeszcze nie ukończone).

Lipschitza Rozprawy o własnościach form kwadratowych w teoryi krzywizny pomieszczone w 71, 72, 74, 78 i 81 tomach dziennika Crelle'a.

Christoffel. *Ueber die Transformationen ganzer homogener Differentialausdrücke*, 1869.

Suworow. *Charakterystyki systemów o trzech wymiarach* po rossyjsku. Kazań, 1871. Wyciąg znajduje się w *Bulletin Darboux.*

Halphen. *Recherches de géometrie à n dimensions.* W *Bulletins de la Société math. de France.* II, 1873-74.

Tonelli. *Ueber die Potentialfunction in einem mehrfach ausgedehnten Raume. Wiad. Getyng.*, 1875.

S. D.

(*) Przygotowujemy polski przekład téj pożytecznéj i ciekawéj książki.

O HYPOTEZACH

KTÓRE SŁUŻĄ ZA PODSTAWĘ GEOMETRYI

(Z XIIIgo tomu Rozpraw Królewskiego Towarzystwa Nauk w Getyndze.

PLAN BADANIA.

Geometrya, jak wiadomo, przyjmuje jako coś danego zarówno pojęcie przestrzeni, jak i pierwsze zasadnicze pojęcia dla konstrukcyj w przestrzeni. Tych pojęć daje ona tylko określenia nominalne, gdy tymczasem istotne oznaczenia występują w formie pewników (aksiomatów). Stosunek tych założeń pozostaje przytém w ciemności; nie widać ani, czy i o ile ich połączenie jest koniecznem, ani a priori, czy jest możebném.

Ciemności téj nie zdołał usunąć żaden z matematyków ani filozofów, którzy się tém zajmowali, począwszy od Euklidesa aż do Legendre'a, że tu przytoczę najsławniejszego z nowszych uczonych, którzy opracowywali geometryę. Przyczyna tego leżała w tém, że ogólne pojęcie *wielokrotnie rozciągłych wielkości*, w którém zawierają się wielkości przestrzenne, pozostawało zupełnie nieopracowywaném. I dla tego postawiłem sobie najprzód zadanie zbudowania (wytworzenia) pojęcia wielokrotnie rozciągłéj wielkości z ogólnych pojęć wielkościowych. Ztąd wyniknie, że wielokrotnie rozciągła wielkość nadaje się do rozmaitych *stosunków miarowych* (1), że przestrzeń więc stanowi tylko szczególny przypadek trójkrotnie rozciągłéj wielkości. Tego koniecznem następstwem jest, że twierdzenia geometryi nie dają się wyprowadzić z ogólnych pojęć wielkościowych, lecz że te własności, któremi przestrzeń wyróżnia się od innych pomyśléć się dających trójkrotnie rozciągłych wielkości, mogą być tylko powzięte z doświadczenia (Erfahrung). Ztąd powstaje zadanie odszukania najprostszych faktów (Thatsachen), z których oznaczyć się dają stosunki miarowe przestrzeni — zadanie, które wedle istoty rzeczy nie jest jeszcze zupełnie oznaczoném; albowiem można wskazać wiele układów najprostszych faktów wystarczających do oznaczenia stosunków miarowych przestrzeni: najważniejszym dla teraźniejszego celu jest układ wzięty za podstawę przez Euklidesa. Te fakty, tak jak wszystkie fakty, nie są koniecznemi, a mają tylko pewność empiryczną, są hypotezami; można więc badać ich prawdopodobieństwo, które wprawdzie wewnątrz granic spostrzeżeń jest bardzo wielkiém, i wnioskować o możliwości rozciągnięcia ich po za granice spostrzeżeń zarówno w stronę nieskończonéj wielkości, jako téż w stronę nieskończonéj małości.

I. — Pojęcie n krotnie rozciągłéj wielkości.

Przystępując do rozwiązania pierwszego z wymienionych zadań, a mianowicie do rozwinięcia pojęcia wielokrotnie rozciągłéj wielkości, myślę, że liczyć mogę na względny sąd, ponieważ mało jestem

---

(1) Stosunki miarowe odpowiadają w pewien sposób miarze krzywizny według Gaussa. Porównaj II, 2.

wprawny w pracach tego rodzaju natury filozoficznéj, gdzie trudności spoczywają bardziéj w pojęciach, aniżeli w konstrukcyi, i że nie mogłem korzystać z żadnych prac poprzednich, prócz z kilku bardzo krótkich wskazań, które o tym przedmiocie dał tajny radca dworu Gauss w drugiéj rozprawie o resztach bikwadratowych w « *Wiadomościach naukowych Getyngskich* » i w swojéj pracy jubileuszowéj i z niektórych badań filozoficznych Herbarta.

I.

Pojęcia *wielkościowe* są tylko możebne tam, gdzie znajduje się przed tém pojęcie ogólne pozwalające na rozmaite *sposoby oznaczenia* (2). Wedle tego, czy pomiędzy temi sposobami oznaczenia ma miejsce przejście ciągłe od jednego do drugiego, czy nie ma miejsca, tworzą one *rozmaitość* (Mannigfaltigkeit) (3) *ciągłą* albo *przerywaną* (discrete); pojedyncze sposoby oznaczenia nazywają się w pierwszym przypadku *punktami*, w drugim *elementami* téj rozmaitości. Pojęcia, których sposoby oznaczenia tworzą rozmaitość przerywaną, spotykają się tak często, że dla dowolnie danych przedmiotów, przynajmniéj w językach wykształceńszych, daje się zawsze odnaleźć pojęcie, w którém one są zawarte, (i matematycy mogliby bez wątpienia w nauce o wielkościach przerywanych wziąć za punkt wyjścia warunek, aby przedmioty dane były uważane jako jednogatunkowe); przeciwnie, sposobność do tworzenia pojęć, których sposoby oznaczenia tworzą rozmaitość ciągłą, jest w życiu powszedniém tak rzadką, że miejsca przedmiotów zmysłowych i barwy są jedynemi pojęciami prostemi, których sposoby oznaczenia tworzą rozmaitość wielokrotnie rozciągłą. Częstszy powód do tworzenia i rozwijania tych pojęć ma miejsce dopiero w wyższéj matematyce.

Oznaczone części rozmaitości wyróżnione cechą (Merkmal) lub granicą nazywają się wielościami (quanta). Porównanie ich co do ilości odbywa się przy wielkościach przerywanych przez liczenie, przy ciągłych przez mierzenie. Mierzenie polega na nakładywaniu na siebie mających się porównać wielkości; do mierzenia więc potrzeba sposobu, za pomocą którego możnaby jednę wielkość przenosić jako miarę na inną. W braku tego, można dwie wielkości porównać tylko, gdy jedna jest częścią drugiéj i jeszcze wtedy można tylko rozstrzygnąć, o ile jedna jest większą lub mniejszą, a nie ile razy większą od drugiéj. Badania, które dają się w tym przypadku nad niemi przeprowadzić, tworzą ogólną część nauki o wielkościach, niezależną od oznaczeń miarowych, gdzie wielkości uważają się za istniejące nie niezależnie od położenia i nie jako wyrażalne przez jednę jednostkę, lecz jako dziedziny w jednéj rozmaitości. Takie badania stały się potrzebą dla wielu części matematyki, mianowicie dla badania wielowartościowych funkcyj analitycznych, i brak tychże jest głównym powodem, dla którego sławne twierdzenie Abla i prace Lagrange'a, Pfaffa, i Jacobie'go tak długo były bezpłodnemi dla ogólnéj teoryi równań różniczkowych. Dla teraźniejszego celu wystarcza z téj ogólnéj części nauki o rozciągłych wielkościach, gdzie nic więcéj nie przypuszcza się nad to, co już jest zawarte w samém ich pojęciu, podnieść dwa punkty, z których pierwszy dotyczy utworzenia pojęcia wielokrotnie rozciągłéj rozmaitości, drugi sprowadzenia wyznaczeń miejsca w danéj rozmaitości do oznaczeń ilościowych, co wyjaśni istotny charakter n krotnéj rozciągłości.

---

(2) Tém orzeczeniem Riemann bynajmniéj nie określa wielkości, ale tylko uwarunkowywa możebność jéj istnienia, przez co pozostawia pole otwarte dla uogólnienia jéj określenia zwykłego.

(3) Hoüel tłomaczy « Mannigfaltigkeit » przez « Variété. » (Przekład francuzki rozprawy Riemanna p. t. *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie*, 1870).

2.

Jeżeli przy pojęciu, którego sposoby oznaczenia tworzą rozmaitość ciągłą, przechodzić będziemy od jednego sposobu oznaczenia do innego w określony sposób, to przebieżone sposoby oznaczenia tworzą jednokrotnie rozciągłą rozmaitość, któréj istotnym charakterem jest to, że w niéj jest możebném przejście ciągłe tylko w dwie strony, naprzód i w tył. Jeżeli wyobrazimy sobie, że ta rozmaitość przechodzi w inną zupełnie różną, i wprawdzie znów w sposób określony, t. j. tak, że każdy punkt jednéj przechodzi w oznaczony punkt drugiéj, to wszystkie w ten sposób otrzymane sposoby oznaczenia tworzą dwukrotnie rozciągłą rozmaitość. W podobny sposób otrzymujemy trójkrotnie rozciągłą rozmaitość, jeżeli przedstawimy sobie, że dwukrotnie rozciągła przechodzi w sposób określony w inną zupełnie różną, i łatwo widzieć, jak tę konstrukcyę można daléj prowadzić. Jeżeli zamiast uważać pojęcie za oznaczalne, będziemy uważali przedmiot jego jako zmienny, to konstrukcyę tę można nazwać składaniem zmienności o $n+1$ wymiarach z jednéj zmienności o n wymiarach i jednéj o jednym wymiarze (4).

3.

Pokażę teraz, jak odwrotnie można rozłożyć zmienność, któréj dziedzina jest daną, na zmienność o jednym wymiarze i zmienność o mniejszéj liczbie wymiarów. W tym celu wyobraźmy sobie zmienny odcinek (kawałek, Stück) rozmaitości o jednym wymiarze, liczony od pewnego stałego punktu początkowego, tak że wartości jego dają się wzajemnie porównać — który to odcinek ma dla każdego punktu danéj rozmaitości wartość oznaczoną, zmieniającą się wraz z nim w sposób ciągły; albo innemi słowy, przyjmijmy wewnątrz danéj rozmaitości funkcyę ciągłą miejsca, mianowicie taką, która wzdłuż pewnéj części téj rozmaitości nie jest stałą. Każdy układ punktów, w których funkcya ma wartość stałą, stanowi rozmaitość o mniejszéj liczbie wymiarów, niż dana. Te rozmaitości przy zmianie funkcyi przechodzą jedna w drugą w sposób ciągły; można więc będzie przyjąć, że z jednéj z nich powstają pozostałe, co, ogólnie mówiąc, tak odbywać się może, że każdy punkt jednéj przechodzi w oznaczony punkt innéj; przypadki wyjątkowe (5), których badanie jest ważném, mogą tu pozostać nierozważanemi. Przez to, oznaczenie miejsca w danéj rozmaitości sprowadzi się do oznaczenia wielkościowego i do oznaczenia miejsca w mniejkrotnie rozciągłéj rozmaitości. Otóż łatwo pokazać, że ta rozmaitość ma $n-1$ wymiarów, jeżeli dana jest n krotnie rozciągłą. Przez n krotne tedy powtórzenie tego postępowania, oznaczenie miejsca w n krotnie rozciągłéj rozmaitości sprowadza się do n oznaczeń wielkościowych, a więc oznaczenie miejsca w danéj rozmaitości, gdy to jest możebném, do skończonéj liczby oznaczeń ilościowych. Istnieją też rozmaitości, w których oznaczenie miejsca wymaga już nie, jak wyżéj, skończonéj liczby, lecz nieskończonego szeregu lub ciągłéj rozmaitości oznaczeń wielkościowych. Takie rozmaitości tworzą np. możliwe oznaczenia funkcyi dla danéj dziedziny, możliwe kształty figury przestrzennéj i t. d.

---

(4) Założenie zrobione w końcu tego ustępu jest koniecznem do tego, by można traktować wyłożony w nim przedmiot w sposób wskazany w ustępie trzecim.

(5) Przypadki takie zdarzają się, gdy jedna rozmaitość przechodzi w drugą należącą do innéj familii.

II. Stosunki miarowe właściwe rozmaitości n wymiarowéj w założeniu, że linie posiadają długość niezależnie od położenia, że więc każda linia daje się mierzyć każdą.

Po ustanowieniu pojęcia n krotnie rozciągłéj rozmaitości i znalezieniu jéj istotnego charakteru, polegającego na tém, że wyznaczenie miejsca w téj rozmaitości daje się sprowadzić do n oznaczeń wielkościowych, przystępujemy do drugiego z wyżéj postawionych zadań, a mianowicie do zbadania stosunków miarowych, do których nadaje się taka rozmaitość i warunków wystarczających do oznaczenia tych stosunków miarowych. Te stosunki miarowe dają się tylko badać w oderwanych pojęciach wielkościowych i przedstawić w związku tylko za pomocą formuł; przy pewnych założeniach można je rozłożyć na stosunki, które pojedynczo uważane nadają się do geometrycznego przedstawienia, przez co staje się rzeczą możebną rezultaty rachunku wyrazić geometrycznie. Dla zyskania przeto stałéj podstawy, nie będzie można wprawdzie uniknąć oderwanego badania przy pomocy formuł, lecz wypadki tego badania dadzą się przedstawić w szacie geometrycznéj. Podstawy do obu tych rzeczy zawierają się w sławnéj rozprawie pana tajnego radcy dworu Gaussa o powierzchniach krzywych.

1.

Oznaczenia miarowe wymagają niezależności wielkości od miejsca, która może istnieć w wieloraki sposób; najprzód nasuwające się przypuszczenie, którego trzymać się będę, jest to, że długość linij jest niezależną od położenia, że więc każda linia daje się mierzyć każdą. Jeżeli oznaczenie miejsca sprowadzimy do oznaczeń wielkościowych, t. j. jeżeli położenie punktu w danéj n-krotnie rozciągłéj rozmaitości wyrazimy za pomocą n wielkości zmiennych x_1, x_2, x_3, i tak daléj do x_n, to oznaczenie linii wychodzi na to, że wielkości x są dane jako funkcye jednéj zmiennéj. Zadanie wtedy jest: utworzyć wyrażenie matematyczne dla długości linii, do którego to celu należy wielkości x uważać jako wyrażalne w jednościach. Będę traktował to zadanie tylko pod pewnemi ograniczeniami, i ograniczam się najprzód na takich liniach, w których stosunki między wielkościami dx, t. j. odpowiedniemi przyrostami wielkości x, zmieniają się w sposób ciągły. Można wyobrazić sobie te linie podzielone na elementy, wewnątrz których stosunki między wielkościami dx mogą być uważane jako stałe, i zadanie sprowadza się do tego, by dla każdego punktu znaleźć ogólne wyrażenie wychodzącego z niego elementu linijnego ds, które to wyrażenie zawierać będzie wielkości x i wielkości dx. Przyjmuję powtóre, że jeżeli odwrócimy uwagę od wielkości drugiego rzędu, długość elementu linijnego pozostaje niezmienioną, gdy wszystkie jego punkty doznają téjże saméj nieskończenie małéj zmiany miejsca, w czém zawiera się i to, że gdy wszystkie wielkości dx rosną w tym samym stosunku, to i element linijny w tym samym stosunku się zmienia. Przy takich przyjęciach element linijny może być dowolną funkcyą jednorodną pierwszego stopnia wielkości dx, która pozostaje niezmienioną, gdy wszystkie wielkości dx zmieniają swój znak, i w któréj stałe dowolne są funkcyami ciągłemi wielkości x. Dla znalezienia przypadków najprostszych, szukam najprzód wyrażenia dla $n-1$ krotnie rozciągłych rozmaitości równo oddalonych od początku elementu linijnego, t. j. szukam takiéj funkcyi miejsca, która je od siebie wyróżnia. Funkcya ta wychodząc z punktu początkowego, będzie na wszystkie strony albo rosła albo malała; przyjmuję, że na wszystkie strony rośnie, że więc w tym punkcie ma minimum. Gdy więc pierwsza i druga pochodna téj funkcyi są skończonemi, pierwsza jéj różniczka musi znikać, druga zaś nie powinna być nigdy odjemną; przyjmuję, że zawsze zostaje dodatną. To wyrażenie różniczkowe drugiego porządku pozostaje tedy stałém, jeżeli ds pozostaje stałém, i rośnie w stosunku kwadratowym, gdy wielkości dx, a więc i ds zmieniają się wszystkie w tym samym stosunku; równa się ono przeto stałéj pomnożonéj przez ds^2, a ztąd ds równa się pierwiastkowi kwadratowemu z zawsze dodatnéj, całkowitéj, jednorodnéj funkcyi, drugiego stopnia wielkości, dx, w któréj współczynniki są funkcyami ciągłemi wielkości x(7). Dla przestrzeni, gdy położenie punktów wyrazimy za pomocą współrzędnych prostokątnych, będzie $ds = \sqrt{\Sigma (dx)^2}$; przestrzeń zatém zawartą jest w tym najprostszym przypadku. Następny najprostszy przypadek obejmowałby rozmaitości, w których element linijny daje się wyrazić przez pierwiastek czwartego stopnia z wyrażenia różniczkowego czwartego porządku. Badanie tego ogólniejszego gatunku nie wymaga wprawdzie istotnie nowych zasad, lecz zajęłoby wiele czasu i rzuciłoby stosunkowo mało nowego światła na naukę o przestrzeni, choćby dlatego, że rezultaty nie dałyby się wyrazić geometrycznie; ograniczam się zatém na takich rozmaitościach, w których element linijny wyraża się przez pierwiastek kwadratowy z wyrażenia różniczkowego drugiego porządku. Można takie wyrażenie przekształcić w inne podobne, kładąc za n niezależnie zmiennych funkcye n nowych niezależnie zmiennych. Na téj drodze nie będzie można jednak każdego wyrażenia przekształcić w każde; albowiem to wyrażenie zawiera $n . \frac{n+1}{2}$ współczynników, które są funkcyami dowolnemi niezależnie zmiennych; przez wprowadzenie nowych zmiennych uczyni się zadość tylko n związkom, będzie więc można tylko n współczynników uczynić równemi wielkościom danym. Pozostałe $n . \frac{n-1}{2}$ współczynników są już zupełnie oznaczone przez naturę mającéj się przedstawić rozmaitości, a więc dla wyznaczenia stosunków miarowych téjże potrzeba $n \frac{n-1}{2}$ funkcyj miejsca. Rozmaitości, w których, tak jak na płaszczyznie i w przestrzeni, element linijny daje się sprowadzić do formy $\sqrt{\Sigma dx^2}$, tworzą tylko szczególny przypadek badanych tu rozmaitości; zasługują one na oddzielną nazwę i z tego powodu nazywać będę *płaskiemi* te rozmaitości, w których kwadrat linijnego elementu sprowadzić się daje do summy kwadratów zupełnych różniczek. Aby módz przejrzeć istotne różnice wszystkich rozmaitości dających się przedstawić w założonéj formie, jest rzeczą konieczną usunąć te różnice, które pochodzą od sposobu przedstawienia, co daje się uskutecznić przez wybór wielkości zmiennych według pewnéj zasady.

2.

W tym celu wyobraźmy sobie zbudowany układ najkrótszych linij wychodzących z pewnego dowolnego punktu; położenie nieoznaczonego punktu da się wtedy oznaczyć przez początkowy kierunek najkrótszéj linii, na któréj on leży i przez jego odległość na téj linii od punktu początkowego; będzie można zatém wyrazić je przez stosunki wielkości dx^0, t. j. wielkości dx w początku téj najkrótszéj linii i przez długość s téj linii. Wprowadźmy teraz zamiast dx^0 takie z nich utworzone wyrażenia linijne $d\alpha$, by wartość początkowa kwadratu elementu linijnego równała się summie kwadratów tych wyrażeń, tak że niezależnie zmiennemi są: wielkość s i sto-

---

(7)

(a) $$ds^2 = \sum_{ij} b_{ij}\, dx_i\, dx_j\,; \quad b_{ij} = b_{ji}$$

(b) $$1 = \sum_{ij} b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}$$

sunki wielkości $d\alpha$. Połóżmy teraz w miejsce $d\alpha$ takie proporcyonalne im wielkości $x_1, x_2, \dots x_n$, by summa kwadratów równała się s^2. Jeżeli wprowadzimy te wielkości, to dla nieskończenie małych wartości x kwadrat linijnego elementu będzie równy Σdx^2, wyraz następnego porządku w nim będzie równy wyrażeniu jednorodnemu drugiego stopnia $n\,\frac{n-1}{2}$ wielkości $(x_1dx_2 - x_2dx_1)$, $(x_1dx_3 - x_3dx_1), \dots$ a więc ilości nieskończenie małéj czwartego wymiaru, tak że otrzymuje się wielkość skończoną, gdy ją podzielimy przez kwadrat nieskończenie małego trójkąta, w wierzchołkach którego wartości zmiennych są : $(0, 0, 0 \dots)$, $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \dots)$. Ta wielkość zachowuje tę samą wartość, dopóki x i dx są zawarte w tych samych dwumiennych formach linijnych, albo dopóki obie najkrótsze linie od wartości 0 do x i od wartości 0 do wartości dx pozostają na tym samym elemencie powierzchniowym, zależy więc od miejsca i kierunku tegoż elementu. Jest ona oczywiście równą zeru, gdy przedstawiona rozmaitość jest płaską, t. j, gdy kwadrat elementu linijnego daje się sprowadzić do Σdx^2, może zatém być uważaną jako miara zboczenia rozmaitości od płaskości w tym kierunku powierzchniowym. Pomnożona przez $-\frac{3}{4}$ staje się ona równą wielkości, którą pan tajny radca dworu Gauss nazwał miarą krzywizny powierzchni. Wyżéj znaleźliśmy, że dla oznaczenia stosunków miarowych n krotnie rozciągłéj rozmaitości, dającéj się przedstawić w założonéj formie, potrzeba $n\,\frac{n-1}{2}$ funkcyj miejsca; gdy więc daną będzie miara krzywizny w każdym punkcie w $n\,\frac{n-1}{n}$ kierunkach powierzchniowych, to z tych wyznaczyć się dadzą stosunki miarowe rozmaitości, jeżeli tylko pomiędzy temi wartościami nie zachodzą związki tożsamościowe, co, w rzeczy saméj, ogólnie mówiąc, nie ma miejsca (8). Stosunki miarowe tych roz-

---

(8) Kwadrat elementu linijnego przedstawia wzór (a) przypisek (7). Warunek, by linie wychodzące z danego punktu były najkrótsze, wyraża się analitycznie, jak wiadomo, równaniem :

$$\delta \int_0^s ds = \delta \int_0^s \sqrt{\sum_{ij} b_{i,j} dx_i dx_j} = 0$$

które powiada, że przemienność długości linii, jeśli ona ma być najkrótszą, powinna być zerem. [Z] warunku tego wynikają równania różniczkowe linij najkrótszych w ten sposób :

$$\delta \int_0^s \sqrt{\sum_{ij} b_{i,j} dx_i dx_j} = \int_0^s \frac{\sum_{ij} \delta b_{ij} dx_i dx_j + 2 \sum_{ij} b_{ij} dx_i d\delta x_j}{2ds}$$

$$= \sum_{ij} \left\{ \left(b_{i,j} \frac{dx_i}{ds} \right)_1 (\delta x_j)_1 - \left(b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \right)_0 (\delta x_j)_0 \right\} + \int_0^s \left\{ \frac{ds}{2} \sum_{i,j} \delta b_{i,j} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} - \sum_{ij} dx_j d \left(b_{i,j} \frac{dx_i}{ds} \right) \right\} = 0$$

Z przyczyny że $(\delta x_j)_1 = (\delta x_j)_0 = 0$, otrzymuje się

$$\frac{ds}{2} \sum_{ij} \delta b_{i,j} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = \sum_{ij} \delta x_j d \left(b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \right);$$

rozwijając zaś przemienność $\delta b_{i,j}$ i porównywając współczynniki każdej z przemienności δx_m $(m = 1, 2, 3 \dots n)$, otrzymujemy n równań kształtu :

$$(c) \qquad \frac{ds}{2} \sum_{ij} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial x_m} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = d \sum_i b_{i,m} \frac{dx_i}{ds}$$

maitości, w których element linijny wyraża się pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego drugiego porządku, dają się wyrazić w sposób zupełnie niezależny od wyboru ilości

---

Założmy teraz $c_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0$, rozumiejąc przez drugą stronę wartość początkową stosunku ilości dx_i i ds, dla $i = 1, 2, 3 \ldots . n$. Ponieważ, gdy znany jest kierunek początkowy linii najkrótszéj i jej długość, to położenie punktu na niej znajdującego się jest oznaczone, przeto zmiennemi niezależnemi są teraz ilości c_i i s.

Wprowadzając te nowe zmienne, załóżmy $y_i = c_i s$, i ponieważ przy różniczkowaniach, jakie poniżej wykonywać się będą, będziemy się posuwali wzdłuż linii najkrótszej, przeto ilością zmienną będzie wtedy s. Przy tych nowych zmiennych równania (a) i (c) przechodzą w następujące:

$$(a') \qquad ds^2 = \sum_{i,j} a_{i,j} dy_i dy_j$$

$$(c') \qquad \frac{ds}{2} \sum_{i,j} \frac{da_{i,j}}{dy_m} c_i c_j = d \sum_i a_{i,m} c_i$$

gdzie a_{ij} są wartości współczynników przy nowych zmiennych.

Zakładając s nieskończenie małém, rozwijając a_{ij} według szeregu Taylora i poprzestając w tém rozwinięciu na wyrazach drugiego porządku, mieć będziemy

$$a_{ij} = (a_{ij})_0 + \sum_k \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_k}\right)_0 y_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_k \partial y_l}\right)_0 y_k y_l$$

Wartości te wprowadzone do równania (c') zamieniają je po wykonaniu przedtém wskazanego różniczkowania i po pomnożeniu następnie obu stron przez s^2 w następujące:

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_m}\right)_0 y_i y_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} y_i y_j \sum_k \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_k \partial y_m}\right)_0 y_k = \sum_i y_i \sum_k \left(\frac{\partial a_{i,m}}{\partial y_k}\right)_0 y_k + \sum_i y_i \sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 a_{i,m}}{\partial y_k \partial y_l}\right)_0 y_k y_l$$

Ponieważ te równania mają miejsce przy wszelkich nieskończenie małych wartościach y, to porównanie obu stron doprowadza do następnych związków:

$$\left(\frac{\partial a_{i,j}}{\partial y_m}\right)_0 = \left(\frac{\partial a_{i,m}}{\partial y_j}\right)_0 + \left(\frac{\partial a_{j,m}}{\partial y_i}\right)_0$$

$$2\left\{\left(\frac{\partial^2 a_{i,k}}{\partial y_l \partial y_m}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{i,l}}{\partial y_m \partial y_k}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{i,m}}{\partial y_k \partial y_l}\right)_0\right\} = \left(\frac{\partial^2 a_{l,m}}{\partial y_i \partial y_k}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{m,k}}{\partial y_i \partial y_l}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{k,l}}{\partial y_i \partial y_m}\right)_0.$$

Przestawiając w pierwszej z tych równości dwa znaczki m, j, i dodając otrzymane równania odpowiedniemi stronami znajdziemy

$$(d) \qquad \left(\frac{\partial a_{j,m}}{\partial x_i}\right)_0 = 0$$

Przestawiając zaś dwa znaczki i, k w drugiéj z powyższych równości i dodając je odpowiedniemi stronami dochodzi się łatwo do związku:

$$S = 3\left\{\left(\frac{\partial^2 a_{l,m}}{\partial y_i \partial y_k}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 a_{i,k}}{\partial y_l \partial y_m}\right)_0\right\}$$

gdzie S oznacza summę sześciu pochodnych:

$$\frac{\partial^2 a_{i,k}}{\partial y_l \partial y_m}, \quad \frac{\partial^2 a_{i,l}}{\partial y_m \partial y_k}, \quad \frac{\partial^2 a_{im}}{\partial y_k \partial y_l}, \quad \frac{\partial^2 a_{l,m}}{\partial y_i \partial y_k}, \quad \frac{\partial^2 a_{m,k}}{\partial y_i \partial y_l}, \quad \frac{\partial^2 a_{k,l}}{\partial y_i \partial y_m}.$$

zmiennych. Zupełnie podobna droga daje się użyć w tym samym celu i w tych rozmaitościach, w których element linijny wyraża się w sposób mniéj prosty, np. pierwiastkiem czwartego stopnia

---

Na mocy tej własności, że summa S nie zmienia się od przestawienia znaczków l, m ze znaczkami i, k, znajduje się łatwo:

$$(e) \qquad \left(\frac{\partial^2 a_{l,m}}{\partial y_i \partial y_k}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 a_{i,k}}{\partial y_l \partial y_m}\right)_0$$

a że ztąd S = 0, więc przy pomocy drugiéj z równości, z których wyszliśmy, dochodzimy do związku:

$$(f) \qquad \frac{\partial^2 a_{i,k}}{\partial y_l \partial y_m} + \frac{\partial^2 a_{i,l}}{\partial y_m \partial y_k} + \frac{\partial^2 a_{i,m}}{\partial y_k \partial y_l} = \frac{\partial^2 a_{l,m}}{\partial y_i \partial y_k} + \frac{\partial^2 a_{m,k}}{\partial y_i \partial y_l} + \frac{\partial^2 a_{k,l}}{\partial y_i \partial y_m} = 0.$$

Podstawiwszy rozwinięcie a_{ij} w wyrażenie kwadratu elementu, znajdujemy:

$$ds^2 = \sum_{i,j} (a_{ij})_0 dy_i dy_j + \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_k}\right)_0 y_k dy_i dy_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_k \partial y_l}\right)_0 y_k y_l dy_i dy_j$$

Jeżeli w miejsce y położymy tymczasowo δy, i umówimy się, że przemienności ddy, δdy, δdy $\delta\delta y$ są zerami, to ostatni wyraz powyższego rozwinięcia przedstawić można pod dwiema postaciami:

$$\frac{1}{2} dd \sum_{i,j} a_{ij} \delta y_i \delta y_j = \frac{1}{2} \delta\delta \sum_{i,j} a_{ij} dy_i dy_j$$

gdzie po wykonaniu różniczkowań należy podstawić za pochodne częściowe ich wartości początkowe. Na téj zasadzie i przy pomocy związku f, znajdziemy także:

$$dd \sum_{i,j} a_{ij} \delta y_i \delta y_j + 2 d\delta \sum_{i,j} a_{ij} dy_i \delta y_j = 0$$

zkąd wypadnie:

$$dd \sum_{i,j} a_{ij} \delta y_i \delta y_j = \frac{1}{3} \left\{ dd \sum_{i,j} a_{ij} \delta y_i \delta y_j - 2 d\delta \sum_{i,j} a_{ij} dy_i \delta y_j + \delta\delta \sum_{i,j} a_{ij} dy_i dy_j \right\},$$

co można po wykonaniu wspomnianych działań i przy pomocy równości (e) sprowadzić do formy następującéj.

$$\frac{1}{3} \sum_{i,k;j,l} \left(\frac{\partial a^2_{ij}}{\partial y_k \partial y_l}\right)_0 (dy_i \delta y_k - \delta y_i dy_k)(dy_j \delta y_l - \delta y_j dy_l),$$

gdzie summę rozciągnąć należy do wszystkich różnych par znaczków ik, jl.

Uwzględniając więc w rozwinięciu kwadratu elementu otrzymany teraz wypadek i równości (d), oraz, powracając ilościom δy ich pierwotne znaczenie y, znajdujemy:

$$(g) \qquad ds^2 = ds_0^2 + \frac{1}{6} \sum_{i,k;j,l} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_k \partial y_l}\right)_0 (y_k dy_i - y_i dy_k)(y_l dy_j - y_j dy_l)$$

gdzie

$$(h) \qquad ds_0^2 = \sum_{i,j} (a_{i,j})_0 dy_i dy_j$$

Ponieważ w formułach (g) i (h) współczynniki są ilościami stałemi, przeto istnieją takie podstawienia linijne o stałych współczynnikach, przy pomocy których początkowa wartość kwadratu linijnego elementu daje się sprowadzić do formy $\sum dx^2$, przyczem wyraz następującego porządku w rozwinięciu ds^2 nie ulegnie zmianie kształtu, tak że z wyrażenia różniczkowego czwartego porządku. Element linijny wtedy, ogólnie mówiąc, niedałby się już sprowadzić do formy pierwiastku kwadratowego z summy kwadratów wyrażeń ró-

---

przy tych nowych zmiennych napisać go będzie można:

$$\frac{1}{6}\sum_{ik;j,l}\left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 (x_k dx_i - x_i dx_k)(x_l dx_j - x_j dx_l),$$

jeżeli, by nie wprowadzać nowych oznaczeń, umówimy się aby ilości $\left(\frac{d^2 a_{ij}}{dx_k dx_l}\right)_0$ przedstawiały wartości odpowiednich współczynników w tem nowem przekształceniu.

Kwadrat trójkąta mającego wierzchołki w punktach $(0, 0, 0 \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3 \ldots)$ wyraża się wtedy w sposób następujący:

$$\frac{1}{4}\sum_{ij}(x_i dx_j - x_j dx_i)^2.$$

Dzieląc poprzednie wyrażenie przez ostatnie i mnożąc otrzymany wypadek przez $-\frac{3}{4}$, otrzymujemy wyrażenie

$$\alpha = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_{i,k;j,l}\left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}\right)_0 (x_k dx_i - x_i dx_k)(x_l dx_j - x_j dx_l)}{\sum_{ij}(x_i dx_j - x_j dx_i)^2},$$

któremu można jeszcze nadać postać

$$(i)\qquad \alpha = \sum A_{ij,ij}\, m^2_{ij} + 2\sum A_{ij;kl}\, m_{ik} m_{jl},$$

jeżeli założymy

$$(k)\quad \left\{\begin{aligned}
A_{ij;ij} &= \frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{d^2 a_{ij}}{dx_i dx_j}\right)_0 - \left(\frac{d^2 a_{i,i}}{dx^2_j}\right)_0 - \left(\frac{d^2 a_{j,j}}{dx^2_i}\right)_0\right\},\\
A_{ij;kl} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^2 a_{ij}}{dx_k dx_l}\right)_0 + \left(\frac{d^2 a_{kl}}{dx_i dx_j}\right)_0 - \left(\frac{d^2 a_{i,k}}{dx_j dx_l}\right)_0 - \left(\frac{d^2 a_{j,l}}{dx_i dx_k}\right)_0\right\},\\
m_{ij} &= \frac{x_i dx_j - x_j dx_i}{\sqrt{\sum_{ij}(x_i dx_j - x_j dx_i)^2}},
\end{aligned}\right.$$

i które jest równoważnem temu, co Gauss nazwał miarą krzywizny. Ażeby to pokazać, przypuśćmy, że element linijny znajduje się na powierzchni $x_i x_j$, zkąd już samo przez się wynika, że kwadrat tego elementu wyrazi się wzorem

$$a_{i,i} dx^2_i + 2a_{i,j} dx_i dx_j + a_{j,j} dx^2_j.$$

Według teoryi Gaussa, miara krzywizny α_{ij} dla takiego przypadku otrzymuje się z wzoru:

$$(l)\quad \begin{aligned}
4(a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2)^2 \alpha_{ij} = {} & a_{ii}\left[\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j}\frac{\partial a_{jj}}{\partial x_j} - 2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i}\right)^2\right]\\
& + a_{ij}\left(\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i}\frac{\partial a_{jj}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j}\frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i} - 2\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + 4\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - 2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i}\right)\\
& + a_{jj}\left[\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i}\frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i} - 2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j}\right)^2\right]\\
& - 2(a_{ii} a_{jj} - a^2_{ij})\left(\frac{\partial^2 a_{ii}}{\partial x_j^2} - 2\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 a_{jj}}{\partial x_i^2}\right).
\end{aligned}$$

źniczkowych, a więc w wyrażeniu na kwadrat elementu linijnego, zboczenie od płaskości byłoby ilością nieskończenie małą drugiego wymiaru, gdy tymczasem w tamtych jest nieskończenie małą

Podstawiając w tym wzorze za zmienne x zera, znajdziemy

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left\{ 2\left(\frac{d^2 a_{ij}}{dx_i dx_j}\right)_0 - \left(\frac{d^2 a_{ii}}{dx^2_j}\right)_0 - \left(\frac{d a_{jj}}{dx^2_i}\right)_0 \right\} = \mathrm{A}_{ij;\,ij}$$

albowiem z powodu, że wartość początkowa kwadratu elementu linijnego ma kształt $\sum dx^2$, jest $(a_{i,i})_0 = (a_{j,j})_0 = \ldots = 1$ i $(a_{i,j})_0 = (a_{k,l})_0 = \ldots = 0$, inne zaś uproszczenia wynikają z równania (d).

Taki sam rezultat daje wzór (i), gdy w nim uwzględnimy wartość kwadratu elementu, do której zastosowaliśmy wzór Gaussa, i widocznem jest, że nadając znakowi ij wszystkie różne znaczenia, których jest $\frac{n(n-1)}{2}$ otrzymamy tyleż miar krzywiznowych, wyznaczających w uważanym punkcie rozmaitości n wymiarowéj jéj stosunki miarowe w $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkach powierzchniowych, tych samych, które przyjęliśmy za kierunki współrzędnych.

Sposób użyty przez nas do pokazania tożsamości definicyi miary krzywizny podanéj przez Riemann'a z takąż definicyą Gaussa jest zupełnie różnym od tego, który wykonał Dedekind według wskazań Riemann'a (porównaj : *B. Riemann's Gesamm. Math. Werke* od str. 389 do 391). Nie jest on jednak mniéj ogólnym, albowiem kierunek powierzchniowy, oznaczony w formule Riemann'a (i) ilościami m_{ij}, jest tak samo dowolnym jak kierunek wzięty przez nas x_i x_j; jeżeli więc definicye Riemann'a i Gaussa zgadzają się z sobą dla tego ostatniego kierunku, to nie są także w sprzeczności i dla każdego innego. Lecz podając ten sposób, nierównie krótszy, nie mieliśmy na celu samego tylko uproszczenia kwestyi. Chcieliśmy zarazem utorować drogę do wykazania niedokładności pomienionéj definicyi Riemann'a w przypadku rozmaitości o więcéj jak dwu wymiarach, i następnie, do uzupełnienia téj definicyi.

W rzeczy saméj, trzymając się ściśle orzeczenia własnego Riemann'a (patrz w tekscie str. 11, wiersz 21 od wyrazów : « gdy więc i t. d. »), trudno jest zawyrokować, czy dla oznaczenia stosunków miarowych w danym punkcie rozmaitości wystarczy mieć miary krzywizny w $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkach powierzchniowych dowolnych, czy też koniecznem jest mieć je w tyluż kierunkach w pewien sposób oznaczonych. Przyjąwszy za podstawę to pierwsze, możnaby za owe kierunki wziąć kierunki początkowe współrzędnych, i wtedy, według tego co wyżéj było powiedzianém, stosunki miarowe wyznaczyłyby się za pomocą $\frac{n(n-1)}{2}$ współczynników $\mathrm{A}_{ij;ij}$ danych przez równania (k). Lecz w takim razie nastręcza się sama przez się wątpliwość dotycząca znaczenia pozostałych współczynników $\mathrm{A}_{ij;kl}$, które dla przyjętych teraz kierunków żadnéj nie mają roli, podczas gdy dla kierunków innych, jak to formuła (i) wskazuje, posiadają rolę jednorodną ze współczynnikami $\mathrm{A}_{ij;ij}$. Dla usunięcia téj wątpliwości należy definicyę Riemann'a uzupełnić jak następuje;

Poprowadźmy w punkcie $(0, 0, 0, \ldots)$ n elementów linijnych w ten sposób względem siebie skierowanych, by przedłużone w linie najkrótsze utworzyły układ taki, w którym wartość początkowa kwadratu elementu linijnego ma kształt $\sum dx^2$, innemi słowy, by elementy te były wzajemnie do siebie prostopadłe. Każde dwa takie elementy wyznaczają w uważanym punkcie jeden kierunek powierzchniowy, dający się określić za pomocą $\frac{n(n-1)}{2}$ ilości m_{ij} (k), a każdemu z tak utworzonych $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunków powierzchniowych odpowiada w tym samym punkcie miara krzywizny α, dająca się wyznaczyć, według Riemann'a, za pomocą formuły (i). Jeżeli teraz pomyślimy, że układ niezmienny n takich elementów linijnych porusza się około swego początku, to miary krzywizny α, odpowiadające $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkom powierzchniowym, również stale ze sobą połączonym, zmieniają się wówczas wraz z ilościami m_{ij}, tak, że gdy np. położenie tego układu zgodzi się z położeniem w początku układu pierwotnego współrzędnych, to ilości α przyjmą wartości współczynników $\mathrm{A}_{ij;ij}$. Można pytać się także o takie położenie pomienionego układu, by miary krzywizn α, odpowiadające $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkom powierzchniowym, były, ogólnie mówiąc, maksiczwartego wymiaru. Ta własność tych ostatnich rozmaitości może być nazwaną *płaskością w częściach najmniejszych* (9). Dla teraźniejszego celu najważniejszą właściwością tych rozmaitości,

---

mami lub minimami. Odpowiedź na to pytanie łatwa, bo znajduje się ją, szukając maksimów i minimów ilości α uważanéj za funkcyę (i) zmiennych m_{ij}. Stosując w tym celu znaną dobrze metodę, otrzymamy, na wyznaczenie $\frac{n(n-1)}{2}$ maksimów lub minimów λ funkcyi α i im odpowiadających i wzajemnie do siebie prostopadłych tyluż kierunków powierzchniowych, $\frac{n(n-1)}{2}$ równań zawartych w jedném równaniu :

$$\sum_{ij}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial m_{ij}}-2\lambda m_{ij}\right)\partial m_{ij}=0,$$

które ma miejsce przy wszelkich wartościach ∂m^{ij}. Tym $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkom powierzchniowym odpowiada n elementów linijnych również wzajemnie do siebie prostopadłych, w sposób, że każde dwa kierunki linijne wyznaczają jeden kierunek powierzchniowy, któremu odpowiada miara krzywizny maksimum lub minimum λ. Tak więc, w każdym punkcie rozmaitości n wymiarowéj istnieje zawsze jeden, i w ogóle tylko jeden, układ n kierunków linijnych wzajemnie do siebie prostopadłych, tworzący jednocześnie układ $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunków powierzchniowych mających w tym punkcie miary krzywizny maksimum lub minimum. Otóż, te miary i odpowiadające im kierunki powierzchniowe określają w uważanym punkcie stosunki miarowe rozmaitości. Dla odróżnienia nazwiemy je *miarami głównemi* i *kierunkami głównemi*.

Miara krzywizny, analogiczna do głównéj, w kierunku dowolnym będzie już teraz bardziéj złożoną jak według definicyi Riemann'a. Aby otrzymać kwadrat téj miary dla kierunku $x_i\ x_j$, należy zsumować kwadraty współczynników $A_{ij;kl}$ wziętych z wyrażenia $\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dm_{ij}}$; kierunek zaś téj miary nie zgadza się z kierunkiem powierzchniowym $x_i\ x_j$, jak to ma miejsce dla kierunku głównego, ale oznacza się stosunkami pomienionych współczynników $A_{ij;kl}$ do wielkości miary.

Jeżeli rozmaitość jest ciągłą, to zbiór elementów powierzchniowych w całéj rozmaitości, odpowiadających jednoimiennemu kierunkowi głównemu, stanowi rozmaitość dwuwymiarową, którą nazwiemy powierzchnią główną. Miara krzywizny powierzchni głównéj jest wszędzie do niéj normalną. Według tego, każdą rozmaitość n wymiarową uważać można jako utwór jedynego układu $\frac{n(n-1)}{2}$ familij powierzchni głównych, $\frac{n(n-1)}{2}$ krotnie prostopadłych i posiadających miary krzywizny normalne. W rozmaitości o krzywiznie stałéj we wszystkich kierunkach i w każdym punkcie, wszystkie krzywizny główne są sobie równe. W takiéj więc rozmaitości jest nieskończenie wiele między sobą tożsamościowych układów $\frac{n(n-1)}{2}$ familij powierzchni głównych. Formuła, dana poniżéj, przedstawiająca długość elementu linijnego takiéj rozmaitości, odnosi się do jednego z takich układów.

(9) Jeżeli element linijny wyraża się pierwiastkiem czwartego stopnia z wyrażenia różniczkowego czwartego porządku, wtedy będzie :

$$ds^2=\sqrt{\sum_{ijkl}a_{ij,kl}dx_i dx_j dx_k dx_l},$$

lub także

$$ds^2=\sum_i dx_i^2+\left(\sqrt{\sum_{ijkl}a_{ijkl}dx_i dx_j dx_k dx_l}-\sum_i dx_i^2\right),$$

gdzie wyraz znajdujący się w nawiasie musi, ogólnie mówiąc, pozostać wymiaru drugiego, co tłomaczy łatwo powyższe miejsce w tekscie. Można przytém zauważyć, że ponieważ stosunek wyrazu w nawiasie do kwadratu nieskończenie małego trójkąta mającego wierzchołki w punktach $(0,0,0,\ldots)$, $(x_1, x_2, x_3\ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3,\ldots)$ jest nieskończenie wielkim drugiego porządku, przeto biorąc ten stosunek za miarę krzywizny, przyszlibyśmy do wniosku, dla któréj one tu są badane, jest ta, że stosunki miarowe dwukrotnie rozciągłych rozmaitości, dają się przedstawić geometrycznie przez powierzchnie, a wielokrotnie rozciągłych sprowadzić do powierzchni w nich zawartych, co jeszcze potrzebuje krótkiego wyjaśnienia.

3.

W sposobie pojmowania powierzchni z wewnętrznemi stosunkami miarowemi, w których zwraca się uwagę na długość dróg na nich, mieszamy pojęcie o ich położeniu względem punktów zewnątrz leżących ([10]). Lecz można oderwać uwagę od stosunków zewnętrznych, przedsiębiorąc tylko takie zmiany z niemi, przy których długość linij pozostaje w nich niezmienną, t. j. wyobrażając je sobie dowolnie zginanemi bez rozciągnięcia, i uważając wszystkie w ten sposób nawzajem z siebie powstałe powierzchnie za jednorodne. Np. jakiekolwiek walcowe lub stożkowe powierzchnie są jednorodne z płaszczyzną, dlatego, że dają się z niéj utworzyć przez proste zgięcie, przyczém wewnętrzne stosunki miarowe i wszystkie o nich twierdzenia, a więc cała planimetrya, zachowują swą moc; przeciwnie są istotnie różnemi od kuli, która bez rozciągnięcia nie daje się zamienić na płaszczyznę. Według poprzedzającego badania, wewnętrzne stosunki miarowe dwukrotnie rozciągłéj wielkości, gdy element linijny wyrazić się daje pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego drugiego porządku, jak to ma miejsce przy powierzchniach, charakteryzuje się przez miarę krzywizny. Wielkość ta przy powierzchniach daje się uzmysłowić, gdyż jest iloczynem z dwóch krzywizn powierzchni w tym punkcie, albo téż w ten sposób, że iloczyn tychże przez nieskończenie mały trójkąt utworzony z najkrótszych linij równa się przewyżce summy jego kątów nad dwa proste w częściach promienia ([11]). Pierwsze określenie przypuszcza twierdzenie, że iloczyn obu promieni krzywizny przy prostém zgięciu powierzchni pozostaje bez zmiany,—drugie, że w tém samém miejscu przewyżka summy kątów nieskończenie małego trójkąta nad dwa proste, jest proporcyonalną do jego powierzchni. Aby uzmysłowić znaczenie krzywizny n krotnie rozciągłéj rozmaitości, w danym punkcie i w danym kierunku powierzchniowym przezeń przechodzącym, trzeba wyjść z tego, że linia najkrótsza, wychodząca z danego punktu, jest zupełnie oznaczoną, gdy dany jest jéj kierunek początkowy. W ten sposób otrzymamy oznaczoną powierzchnię, gdy wszystkie kierunki początkowe, wychodzące z danego punktu i leżące na danym elemencie powierzchniowym, przedłużymy w linie najkrótsze, i powierzchnia ta w danym punkcie ma oznaczoną miarę krzywizny, która zarazem jest miarą krzywizny n krotnie rozciągłéj rozmaitości w danym punkcie i w danym kierunku powierzchniowym.

4.

Zanim zrobimy zastosowanie do przestrzeni, musimy podać kilka uwag o rozmaitościach płaskich w ogólności, t. j. o takich, w których kwadrat elementu linijnego wyraża się summą kwadratów zupełnych różniczek.

że rozmaitości tego rodzaju mają w każdym punkcie krzywiznę nieskończenie wielką, i to jest powód dla którego autor nazwał rozmaitości poprzednio traktowane płaskiemi w częściach najmniejszych.

(10) To jest odnosimy je jak w zwykłéj geometryi do przestrzeni.

(11) Według znanego twierdzenia Gaussa, że całkowita krzywizna trójkąta utworzonego z linij najkrótszych na powierzchni tak się ma do powierzchni kuli jak przewyżka summy trzech kątów trójkąta nad dwa proste do ośmiu kątów prostych.

W płaskiéj n krotnie rozciągłéj rozmaitości miara krzywizny w każdym punkcie i w każdym kierunku jest zerem; do wyznaczenia jednego z stosunków miarowych dosyć wiedzieć, jak to z poprzedzającego badania wynika, że ta miara w każdym punkcie w $n\frac{n-1}{2}$ kierunkach powierzchniowych, których miary krzywiznowe są od siebie niezależne, jest zerem. Rozmaitości, dla których miara krzywizny jest wszędzie zerem, dają się uważać jako szczególny przypadek tych rozmaitości, których miara krzywizny jest wszędzie stałą. Wspólny charakter rozmaitości, których miara krzywizny jest stałą, daje się jeszcze tak wyrazić, że w nich figury mogą się poruszać bez rozciągania. Oczywiście bowiem, figury w nich nie mogłyby się dowolnie przemieszczać i obracać, gdyby miara krzywizny w każdym punkcie we wszystkich kierunkach nie była jedną i tąż samą. Z drugiéj strony stosunki miarowe rozmaitości są zupełnie oznaczone przez miarę krzywizny; a więc w około jednego punktu we wszystkich kierunkach stosunki miarowe są takież same, jak w około drugiego, a zatém, z jednego punktu poczynając, można wykonywać te same konstrukcye, co i z drugiego; w rozmaitościach zatém o stałéj miarze krzywiznowéj figurom można dać położenie dowolne.

Stosunki miarowe tych rozmaitości zależą tylko od wartości miary krzywiznowéj, a co się tyczy przedstawienia analitycznego, to zauważymy, że gdy tę wartość oznaczymy przez α, elementowi linijnemu można dać formę następującą:

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2} \text{ (}^{12}\text{)}.$$

---

(12) Dla udowodnienia tego wzoru, przyjmijmy za układ współrzędnych układ $\frac{n(n-1)}{2}$ krotnie do siebie prostopadłych powierzchnij głównych. Wartość początkowa kwadratu elementu linijnego wyrazi się wtedy summą $\sum dx^2$. Oznaczmy przez r odległość punktu jakiegokolwiek od początku współrzędnych, rachowaną na linii najkrótszéj na któréj oba znajdują się, a przez γ_i n ilości określających kierunek początkowy tejże linii. Ilości γ_i mają te same wartości wzdłuż całéj długości r i zadość czynią warunkowi $\sum_i \gamma^2_i = 1$. Współrzędne tego samego punktu, odnośnie do przyjętego układu powierzchnij głównych, wyrażą się ilościami $x_i = \gamma_i\,\rho$, rozumiejąc przez ρ funkcyę zmiennéj r, zamieniającą się na r dla r nieskończenie małego.

Pozostawiając ten sam początek, weźmy inny układ tożsamościowy z teraźniejszym, co jest zawsze możliwém z przyczyny że krzywizna rozmaitości jest stałą, i oznaczmy współrzędne punktu (x_i) w tym nowym układzie przez x'_i. Formuły służące do przejścia od układu pierwszego do drugiego zawierają się w następującéj:

$$x_i = \sum_k c_{i,k}\,x'_k\,,$$

rozumiejąc przez $c_{i,k}$ n^2 ilości stałych zadość czyniących związkom:

$$\sum_i c^2_{i,k} = 1 \quad \text{i} \quad \sum_i c_{k,i}\,c_{l,i} = 0;$$

skoro bowiem oba układy są między sobą tożsamościowe, to przejście od jednego do drugiego powinno się dokonać za pomocą podstawień liniowych o współczynnikach stałych; prostokątność zaś w obu układach wymaga przytoczonych związków pomiędzy temi stałemi.

5.

Do geometrycznego wyjaśnienia może służyć uważanie powierzchni o stałéj mierze krzywizny. Łatwo widzieć, że powierzchnie, których krzywizna jest dodatną, dadzą się nawinąć na kulę, któ-

---

Przyjętemu układowi odpowiadają oczywiście dwa niezmienniki: jeden $\sum x^2 = \sum x'^2 = \rho^2$ i drugi $\sum dx^2 = \sum dx'^2$; a że kwadrat elementu linijnego w rozmaitości o krzywiznie stałéj i we współrzędnych głównych powinien być także niezmiennikiem, przeto kwadrat ten musi mieć formę.

$$\varepsilon \sum dx^2,$$

rozumiejąc przez ε funkcyę samego ρ.

Celem znalezienia téj funkcyi, poprowadźmy przez linię najkrótszą r i przez linię najkrótszą będącą przedłużeniem elementu linijnego $ds = \sqrt{\varepsilon \sum dx^2}$, powierzchnię i pomyślmy w téj powierzchni układ współrzędnych analogiczny do powyższego o wspólnym z nim początku. Oznaczając w tym nowym układzie przez ξ_1 i ξ_2 współrzędne punktu z którego element ds wychodzi, mieć będziemy

$$\xi_1 = \rho \cos \varphi, \quad \xi_2 = \rho \sin \varphi,$$

gdzie φ oznacza kąt który kierunek początkowy linii najkrótszéj r tworzy z kierunkiem początkowym linii $\xi_2 = 0$. Kwadrat elementu linijnego wyrazi się wtedy formułą:

$$\varepsilon\,(d\xi_1^2 + d\xi_2^2).$$

Stosując do téj ostatniéj formułę (l) Gauss'a (przypisek 8), na wyznaczenie funkcyi ε znajdziemy równanie:

$$2\alpha\varepsilon^3 = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_2}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\xi_2^2}\right)$$

które, przy pomocy współrzędnych ρ i φ, przechodzi w następujące:

$$2\alpha\varepsilon^3 = \left(\frac{\partial\varepsilon}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)$$

Ponieważ funkcya ε nie powinna zależeć od kąta φ, przeto równanie poprzedzające redukuje się do następującego

$$2\alpha\varepsilon^3 = \left(\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right),$$

które, po założeniu $\varepsilon = \frac{1}{\omega^2}$, przybiera postać

$$\alpha\rho = \omega\left(\rho\frac{d^2\omega}{d\rho^2} + \frac{d\omega}{d\rho}\right) - \rho\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^2.$$

Całka ogólna tego ostatniego równania ma kształt:

$$\omega = a\rho^{2-b} + \frac{\alpha\rho^b}{4(b-1)^2.a},$$

rozumiejąc przez a i b dwie stałe dowolne. Stałe dowolne wyznaczymy z warunku, że dla $\rho = 0$, być powinno ε a tém samém i $\omega = 1$. Temu można uczynić zadość, kładąc albo $b = 2$ i $a = 1$, albo $b = 0$ i $a = \frac{\alpha}{4}$. W obu razach réj promień równa się jedności podzielonéj przez pierwiastek kwadratowy z miary krzywizny; lecz aby przejrzéć całą rozmaitość tych powierzchni, dajmy jednéj z nich kształt kuli, pozostałym

---

otrzymuje się $\omega = 1 + \frac{\alpha\rho^2}{4}$, a ztąd $\varepsilon = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}\rho^2\right)^2}$. Jeżeli za ρ^2 powrócimy wartość $\sum x^2$ powyżéj założoną, to otrzymamy na długość linijnego elementu:

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$$

t. j. wzór Riemanna

W celu znalezienia funkcyi ρ zmiennéj r, uważmy że zakładając wszystkie $\gamma = 0$ z wyjątkiem jednego $\gamma_i = 1$, mamy również wszystkie $x = 0$ z wyjątkiem jednego $x_i = \rho$. Kierunkowi temu odpowiada oczywiście linia najkrótsza r, któréj długość elementu ds wyrazi się, na mocy otrzymanego teraz wzoru, formułą $\frac{d\rho}{1 + \frac{d\rho^2}{4}}$. Jest przeto

$$r = \int_0^r ds = \int_0^\rho \frac{d\rho}{1 + \frac{\alpha\rho^2}{4}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{2},$$

a ztąd $\rho = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\alpha}r}{2}$, i następnie, $x_i = \frac{2\gamma_i}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\alpha}r}{2}$.

Podajemy jeszcze inny sposób wyprowadzenia tego wzoru zakomunikowany nam przez profesora H. Webera w Królewcu.

Jeżeli we wzorze (b), przypisku (7), podstawimy w miejsce stosunków $\frac{dx_i}{ds_0}$ znaczenia $c_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0$ wprowadzone w przypisku (8), to oznaczając przez b^0_{ij} wartości początkowe ilości b_{ij}, miéć będziemy równanie

$$\sum_{ij} b_{ij}{}^0 c_i c_j = 1.$$

Za pomocą podstawienia linijnego ze stałemi współczynnikami sprowadźmy to ostatnie równanie do formy

$$\sum_i \gamma^2_i = 1$$

połóżmy $\xi_i = \rho\gamma_i$ tak że ilości γ wzdłuż jednéj linii najkrótszéj są stałemi, ρ zaś oznacza funkcyę r, która dla nieskończenie małych wartości r jest równa r.

Uważmy teraz te najkrótsze linie, dla których tylko γ_i i γ_j są różne od zera, gdy pozostałe γ są zerami. Wtedy tworzą one powierzchnię, która nadaje się do przedstawienia w naszéj przestrzeni trójwymiarowéj i która posiada stałą krzywiznę. Można więc do niéj zastosować metodę Gauss'a. Jeżeli φ oznacza kąt jaki początkowy element jednéj z tych linij najkrótszych tworzy z początkowym elementem $\xi_j = 0$, to $\gamma_i = \cos\varphi$, $\gamma_j = \sin\varphi$ i według Gauss'a. (*Disquisitiones circa super. curvas*, Art. 19), dla dowolnego elementu linijnego znajdującego się na uważanéj powierzchni mamy

$$ds^2 = dr^2 + m^2 d\varphi^2; \quad \alpha = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{dr^2}, \text{ gdzie } m = 0 \text{ i } \frac{dm}{dr} = 1 \text{ dla } r = 0,$$

ztąd dla stałego α otrzymujemy

$$m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin r\sqrt{\alpha}.$$

zaś kształt powierzchni obrotowych, które dotykają kuli wzdłuż równika. Powierzchnie o większéj mierze krzywiznowéj, niż ta kula, będą dotykały kuli od wnętrza i przyjmą postać taką jak zewnętrzna część powierzchni pierścienia odwrócona od osi; dałyby się one nawinąć na pasy kuliste o mniejszym promieniu, ale więcéj niż raz jeden. Powierzchnie o mniejszéj dodatnéj krzywiznie otrzymamy, gdy z powierzchni kulistych o większym promieniu wytniemy kawałek ograniczony dwoma półokręgami kół wielkich i złączymy linie przecięcia. Powierzchnią o krzywiznie zero będzie powierzchnia walcowa, stojąca na równiku, powierzchnie z odjemną krzywizną będą dotykały walca od zewnątrz, i będą utworzone tak jak część powierzchni pierścienia zwrócona ku osi. Jeżeli wyobrazimy sobie te powierzchnie jako miejsce dla poruszających się na nich części powierzchniowych, w ten sposób, w jaki przestrzeń jest miejscem dla ciał, to na wszystkich tych powierzchniach części powierzchniowe będą się poruszały bez rozciągnięcia. Powierzchnie z dodatną krzywizną dają się zawsze tak uformować, by w nich części powierzchniowe mogły się poruszać dowolnie i bez zgięcia, a mianowicie w powierzchnie kuliste, z odjemną zaś krzywizną — nie. Oprócz téj niezależności części powierzchniowych od miejsca w powierzchniach z miarą krzywiznową równą zeru, zachodzi także niezależność kierunku od miejsca, co nie zachodzi przy innych powierzchniach.

III. — ZASTOSOWANIE DO PRZESTRZENI.

Po tych badaniach i oznaczeniu stosunków miarowych n-krotnie rozciągłéj wielkości, można już wskazać warunki dostateczne i konieczne do oznaczenia stosunków miarowych przestrzeni, gdy założymy niezależność linij od położenia i że element linijny wyraża się pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia, t. j. gdy założymy płaskość w najmniejszych częściach.

Stosunki te dają się najprzód w ten sposób wyrazić, że krzywizna w każdym punkcie w trzech kierunkach powierzchniowych jest zerem, a zatém stosunki miarowe przestrzeni są oznaczone, gdy summa kątów w trójkącie jest równa dwom kątom prostym.

Zkąd zakładając

$$ds^2 = \varepsilon(d\xi_1^2 + d\xi_2^2) = \varepsilon d\rho^2 + \varepsilon\rho^2 d\varphi^2,$$

otrzymujemy za pomocą prostego rachunku

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg.}\left\{\frac{1}{2} r\sqrt{\alpha}\right.$$

i następnie

$$ds = \frac{\sqrt{d\xi_i^2 + d\xi_j^2}}{1 + \frac{\alpha}{4}(\xi_i^2 + \xi_j^2)}.$$

Dowiedliśmy więc wzoru Riemann'a dla takiego elementu linijnego, który leży na powierzchni, dla której pozostałe ξ są zerami. Lecz ponieważ ten wzór nie zmienia swojej formy jeżeli w miejsce ilości ξ, lub co na jedno wychodzi w miejsce ilości γ wprowadzimy dowolne podstawienie linijne *ortogonalne*, więc ztąd wynika jej ogólna prawdziwość.

Jeżeli założymy, po drugie, wraz z Euklidesem, istnienie niezależne od położenia nie tylko linij ale i ciał, to wyniknie ztąd, że miara krzywizny jest wszędzie stałą i wtedy we wszystkich trójkątach summa kątów jest oznaczoną, jeżeli jest oznaczoną w jednym trójkącie.

Nakoniec możnaby, po trzecie, zamiast przypuszczenia niezależności długości linij od miejsca i kierunku, przyjąć niezależność ich długości i kierunku od miejsca. Przy takiém uważaniu zmiany miejsca albo różności miejsca są wielkościami złożonemi (complexe) wyrażalnemi w trzech niezależnych jednościach.

2.

W ciągu dotychczasowego badania oddzielaliśmy stosunki rozciągłościowe albo dziedzinowe (Ausdehnungs- oder Gebietsverhältnisse) od stosunków miarowych i znaleźliśmy, że przy tych samych stosunkach rozciągłościowych można pomyśléć rozmaite stosunki miarowe; następnie szukaliśmy układów najprostszych oznaczeń miarowych wyznaczających całkowicie stosunki miarowe przestrzeni, których to oznaczeń wszystkie twierdzenia o stosunkach miarowych są koniecznem następstwem. Pozostaje jeszcze wyjaśnić pytanie, jak, w jakim stopniu i w jakim zakresie doświadczenie stwierdza te założenia. Pod tym względem zachodzi istotna różnica między prostemi stosunkami rozciągłościowemi i stosunkami miarowemi; albowiem przy pierwszych, gdzie możliwe przypadki stanowią rozmaitość przerywaną, wyroki doświadczenia wprawdzie nie są nigdy zupełnie pewnemi, ale nie są niedokładnemi, gdy tymczasem przy ostatnich, gdzie możliwe przypadki tworzą rozmaitość ciągłą, każde oznaczenie z doświadczenia jest zawsze niedokładném, jakkolwiek wielkiém jest prawdopodobieństwo, że ono jest prawie pewném. Ta okoliczność jest ważną przy rozciągnięciu tych oznaczeń empirycznych po za granice spostrzeżeń w niezmierzalną wielkość lub w niezmierzalną małość, albowiem te ostatnie (stosunki miarowe) mogą rzeczywiście po za granicami spostrzeżeń stawać się ciągle niedokładniejszemi, pierwsze zaś (stosunki rozciągłościowe) -- nie.

Przy rozciągnięciu konstrukcyj przestrzennych w niezmierzalną wielkość, należy odróżnić nieograniczoność od nieskończoności. Pierwsza należy do stosunków rozciągłościowych, druga do stosunków miarowych. Że przestrzeń jest nieograniczoną trójkrotnie rozciągłą rozmaitością, jest to założenie, które stosujemy przy każdém pojmowaniu świata zewnętrznego, według którego w każdéj chwili dopełniamy dziedziny rzeczywistego poczucia i budujemy możliwe miejsca szukanego przedmiotu, tak że to założenie przy tych zastosowaniach ciągle się stwierdza. Nieograniczoność przestrzeni posiada zatém większą pewność empiryczną, aniżeli jakiekolwiek zewnętrzne doświadczenie. Ztąd jednak nie wynika wcale nieskończoność; przeciwnie, przestrzeń, gdy w niéj założymy niezależność ciał od miejsca, t. j. gdy jéj przypiszemy stałą miarę krzywizny, byłaby koniecznie skończoną, jeżeliby ta miara miała jakkolwiek małą wartość dodatną. Gdybyśmy wtedy kierunki początkowe, leżące na elemencie powierzchniowym przedłużyli w najkrótsze linie, otrzymalibyśmy nieograniczoną powierzchnię o stałéj dodatnéj mierze krzywizny, a więc powierzchnię, która w rozmaitości płaskiéj przyjęłaby kształt powierzchni kulistéj, która zatém jest skończoną.

3.

Pytania o niezmierzalnéj wielkości są dla wyjaśnienia natury próżnemi pytaniami. Inaczéj rzecz się ma z pytaniami o niezmierzalnéj małości. Na dokładności, z którą przenikamy zjawiska w nieskończoną małość, polega istotnie poznanie ich związku przyczynowego. Postępy ostatnich stuleci w poznaniu mechaniki natury są prawie całkowicie uwarunkowane dokładnością konstrukcyi, która stała się możebną przez wynalezienie analizy nieskończonościowéj i przy pomocy prostych pojęć zasadniczych, odkrytych przez Archimedesa, Galileusza i Newtona, jakiemi posługuje się teraźniejsza fizyka. W naukach przyrodniczych zaś, gdzie dotąd brak prostych pojęć zasadniczych do takich konstrukcyj, bada się zjawiska dla poznania związku przyczynowego, aż do przestrzennéj małości, tak daleko, jak pozwala na to mikroskop. Pytania o stosunkach miarowych przestrzeni w niezmierzalnéj małości nie należą zatém do pytań próżnych.

Jeżeli założymy, że ciała istnieją niezależnie od miejsca, to miara krzywizny jest wszędzie stałą i z pomiarów astronomicznych wynika, że nie może być różną od zera; w każdym razie odwrotna jéj wartość musiałaby być powierzchnią, w porównaniu z którą znika dziedzina dostępna naszym teleskopom. Lecz jeżeli taka niezależność ciał od miejsca nie istnieje, to ze stosunków miarowych w skończoności (*im Grossen*) nie można wnioskować o nich w nieskończonéj małości; może wtedy w każdym punkcie miara krzywizny, w trzech kierunkach mieć wartość dowolną, jeżeli tylko cała krzywizna w każdéj wymierzyć się dającéj części przestrzeni, nie różni się wyraźnie od zera; jeszcze zawikłańsze stosunki mogą nastąpić, gdy nie ma miejsca założone przez nas przedstawienie elementu linijnego, przez pierwiastek kwadratowy z wyrażenia różniczkowego drugiego porządku. Otóż zdaje się, że dane empiryczne, na których zasadzają się przestrzenne oznaczenia miarowe, pojęcie ciała stałego i promienia światła, tracą swoją moc w nieskończonéj małości; można sobie pomyśleć, że stosunki miarowe przestrzeni w nieskończonéj małości nie zgadzają się z założeniami geometryi, co w rzeczy saméj należałoby przyjąć, gdyby przez te zjawiska dały się wyjaśnić sposobem prostszym.

Pytanie o stosowaniu się założeń geometryi do nieskończonéj małości jest w związku z pytaniem o wewnętrznéj istocie stosunków miarowych przestrzeni. Przy tém pytaniu, które zaliczone być jeszcze powinno do nauki o przestrzeni, znajduje zastosowanie powyższa uwaga, że w rozmaitości przerywanéj zasada stosunków miarowych jest już zawartą w pojęciu téj rozmaitości, w ciągłéj zaś musi być wziętą zkądinąd. A zatém, albo *rzeczywistość* będąca podstawą przestrzeni (*das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche*) musi tworzyć rozmaitość przerywaną, albo téż istoty stosunków miarowych szukać należy zewnątrz, w wiążących siłach które w niéj działają.

Rozstrzygnięcie tych pytań może wtedy tylko nastąpić, gdy wyszedłszy z teraźniejszego pojmowania zjawisk nabytego doświadczeniem, czego Newton położył podstawę, powoli opracowywać je będziemy, pobudzani do tego faktami, które się nie dają za pomocą tego pojmowania wyjaśnić; takie badania, które jak niniejsze wychodzą z ogólnych pojęć, mogą służyć tylko do tego, by téj pracy nie tamowała ograniczoność pojęć, a postępu w poznaniu związku pomiędzy rzeczami nie wstrzymywały przekazane przesądy.

Wprowadza nas to w dziedzinę innéj umiejętności, w dziedzinę fizyki, do któréj nie pozwala wstąpić treść dzisiejszego wykładu.
