FIZYKA MATEMATYCZNA

TEORYA MECHANICZNA CIEPŁA

NAPISAŁ

JAN SNIECHOWSKI

Inżynier b. uczeń Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.

Członek czynny Towarzystwa Nauk Scisłych w Paryżu.

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, 4 Listopada 1876 roku.

TREŚĆ.

PRZEDMOWA

Wbrew geniuszowi sztuk, któremu jeden rzut oka wystarcza do objęcia piękna wszechrzeczy geniusz nauki niejako w pocie czoła i powoli, z trudem, wyrywa pokolei naturze jéj tajemnice.

Jeden błysk poezyi oświecił Grecyę; w początkach jéj dziejów na brzegach Egiejskiego morza brzmiały bohaterskie pieśni do dziś niezrównane, wtedy, gdy poeci oznaczali światu granice we Włoszech lub Hiszpanii. — W czasie względnie nader krótkim tysiące pomników pokryło place Rzymu i miast Grecyi, tysiące cudownych obrazów zasłało galerye muzeów. Lecz niestety! dzieła sztuk pięknych mieszczą się jedne obok drugich, lecz nigdy nie dodają. Wszystkie arcydzieła razem wzięte nie ocaliły świata starożytnego od upadku; jedynie wiedza, jedynie tylko znajomość praw przyrody zdolna jest ocalić społeczeństwo od podobnéj katastrofy.

Wiedza postępując żółwim krokiem zbiera po drodze owoce pracy spółczesnych i pozwala wielu dorzucić ziarnko po ziarnku, a tém samém zapewnia pierwszeństwo intelligencyi i wszystko porządkując wdraża w umysł ludzki potrzebę spokoju i prawdy. Jeden rzut oka w dziedzinę filozofii naturalnéj wystarcza do zauważenia że cała ta filozofia ogranicza się na badaniu siły i materyi.

Liczby rządzą siłą i materyą. — Dziwném jest, że im więcéj oddalamy się od świata nieorganicznego, tém więcéj wybija się wartość formy, tém więcéj siły są złożone i nie dają się ująć w pewne prawa. — Łatwém więc nam jest wytłomaczyć różnicę pomiędzy naukami fizycznemi, gdzie rachunek cudów dokazuje i nauką fizyologii i innemi, gdzie prawa z tak wielkim mozołem się otrzymują.

Jedyną metodą logicznie możebną przy badaniu tajemnic i praw przyrody jest więc metoda doświadczalna, pierwszy raz wskazana przez Bacon'a, która w swych skutkach przeszła nawet nadzieję jéj twórcy. — Dzięki téj metodzie nauki przyrodzone uczyniły olbrzymi skok i o więcéj postąpiły w przeciągu trzech wieków niż w całym peryodzie od początku historyi Grecyi aż do odrodzenia sztuk i nauk. — Jak wiadomo metoda Bacona polega na obserwowaniu najdrobniejszych zjawisk w ich największych szczegółach. Gdy więc pewna ilość tak obserwowanych zjawisk jest zebraną, społeczeństwo zawsze posiada umysł dość śmiały a genialny, zdolny do wyprowadzenia ogólnych praw zawartych niewyraźnie w tych szczególnych zjawiskach. — Wtedy to rachunek, to cudowne narzędzie jeżeli da się zastosować, czyni dane bardziéj ogólnemi i wyprowadza wnioski nie dające się znaleźć żadnym innym sposobem.

Rachunek wzmacnia siły umysłu, jak maszyny wzmacniają siły ciała.

Za pomocą badania szczegółów i indukcyi, dochodzimy do praw ogólnych tém piękniejszych, iż tłomaczą same przez się wszystkie zjawiska szczegółowe.

Największym pomnikiem umysłu ludzkiego jest bez wątpienia prawo Newtona: « dwie cząsteczki materyi przyciągają się z siłą odwrotnie proporcyonalną do kwadratów swych odległości i proporcyonalnie do swych mas ». — Z prawa tego astronomowie wyprowadzili nie tylko całość systemu świata lecz nawet najmniejsze szczegóły. — Wszystko na pierwszy rzut oka jest trudném, złożoném; lecz wszystko w głębi rzeczy jest prostém i prawidłowém i im większy jest postęp wiedzy tém mniejszą jest liczba hypotez i teoryi. Może się to wyda paradoksalném, lecz przypuszczalném jest, że może to właśnie niejako ta prostota przyrody jest jedyną trudnością badania jéj praw i tajemnic.

Cóż bardziéj, na pozór, niezawisłego od siebie, jak ciepło i praca, jednakże związek istniejący między niemi jest nader prosty a mianowicie :

$$EQ = P \text{ praca zewnętrzna}$$

Takiemi są wszystkie prawa przyrody lecz jakżeż wielka jest ich doniosłość, jak wielkie pole działania.

W końcu pierwszéj połowy tego stulecia nauka wzbogaciła się nową zdobyczą, tworzącą nową erę w dziedzinie wiedzy ludzkiéj. — Jeżeli prawa Kopernika i Newtona wywołały ogromny przewrot, nie mniejszą jest doniosłość teoryi mechanicznéj ciepła. — Na pierwszy rzut oka zdawałoby się, że teorya ta jest tylko gałęzią fizyki, na szczęście obszar jéj działania jest daleko rozleglejszy.

Nie będziemy szeroko się rozwodzić nad całą ważnością teoryi mechanicznéj ciepła w fizyologii, powiemy tylko że wyjaśniła ona wiele zadań i usunęła wiele trudności na polu nauk przyrodzonych. Co więcéj, doktor medycyny Mayer z miasta Heilbron, pierwszy wygłosił podstawowe zasady téj pięknéj teoryi opierając się na zjawiskach zauważanych w królestwie tworzeń żyjących. Teorya mechaniczna ciepła wzięta w znaczeniu dosłowném swego nazwiska ma za przedmiot badanie związków istniejących pomiędzy skutkiem ciepła i skutkiem równowagi statycznéj lub dynamicznéj materyi ważkiéj.

Postarajmy się określić dwa wyrazy : *ciepłostka* i *praca* tak często będące w użyciu.

Ciepło nie będąc ważkiém może być tylko oznaczoném za pomocą swych skutków. To co nazywamy temperaturą ciała i co mierzymy za pomocą termometru jest właściwie tylko naprężeniem *siły ciepła* znajdującego się w ciele, lecz termometr nigdy nie jest w stanie dać nam ilości ciepła.

Widocznėm jest że zmiany ilości ciepła znajdującego się w ciele, zależą i od naprężenia siły ciepła i od masy ciała. Mając więc na uwadze te dwa elementy możemy dójść do miary względnéj lecz zupełnie ścisłéj. W fizyce nazywamy jednością ilości ciepła lub *ciepłostką* ilość ciepła zdolną podnieść kilogram wody płynnéj od 0 do 1go stopnia. W mechanice zgodzono się ochrzcić mianem *siły* przyczynę ruchu materyi ważkiéj lub ciała. Prędkość nabyta przez ciało znajdujące się pod wpływem siły est zależną jednocześnie i od naprężenia téj siły i od przestrzeni przebieżonéj; jasném więc jest, że iloczyn z przestrzeni przebieżonéj i z naprężenia siły przedstawia dokładnie ilość działania téj ostatniéj; iloczyn ten został nazwany *pracą mechaniczną*, jednością któréj jest *kilogrammetr*. Określiliśmy więc dwie jedności miary które, zdaje się na pierwszy rzut oka, nie mają nic wspólnego z sobą.

Dzięki wiekopomnym doświadczeniom JOULE'A, MAYER'A i HIRN'A, teorya mechaniczna ciepła połączyła dwie te jedności miary nierozerwanym węzłem zależności, zwanym prawem równoważności.

Zadanie podane poniżéj powinno było od dawna wprowadzić uczonych na myśl iż istnieje pewien związek pomiędzy pracą zewnętrzną wykonaną i ciepłem zawartém w ciele. W saméj rzeczy, astronomowie dowodzą że ciepło wydane przez metr kwadratowy powierzchni słonecznéj zdolne jest poruszać maszynę parową o sile 75,000 koni. —Zauważmy że promieniowanie to trwa od kilku tysięcy a może nawet od kilku milionów wieków; ciepło to dostarczane przez słońce bez wyczerpania się zkąd może pochodzić, co je wywołuje? takie jest pytanie przychodzące nam niezwłocznie na myśl. — W pierwszéj chwili aby wytłomaczyć to możemy się powołać na palenie się, *kombustyę*, lecz niezwłocznie musimy odrzucić tę hypotezę gdyż jak wielkiém musiałoby być to gorzenie, aby dostarczyć tak ogromną ilość ciepła? — Pozostaje więc inna przyczyna a ta już granic nie mająca. — Zamiana pracy mechanicznéj na ciepło im bardziéj powiększamy szybkość ruchu i ilość masy wprawionéj w ruch, tém większą będzie w chwili zatrzymania i starcia się ilość ciepła wytworzonego. — W przestrzeni zaś bez granic ciała posiadają niesłychaną szybkość, przypuśćmy więc, że ciała te przez spotkanie się będą wstrzymane, co za ogromna ilość ciepła zostanie stworzoną w skutek téj pracy mechanicznéj gwałtownie wstrzymanéj. — Tu przyczyna równą jest skutkom.

Przejdźmy obecnie do innych przykładów bardziéj dotykalnych. — Ciało nagrzewane powiększa swą objętość, odwrótnie; ciało oziębione maleje.

Powiększając objętość ciała, nadajemy mu zdolność pokonania oporu zewnętrznego. I tak, woda zawarta w naczyniu zamkniętném silnie nagrzana, rozrywa najgrubsze ściany. — Proch będący ciałem, które w skutek ciepła silnie powiększa swą objętość, wyrzuca kulę z ogromną szybkością.

W maszynach parowych woda znajdująca się pod wpływém ciepła zamienia się w kotle na parę i przybiera objętość znacznie większą; para ta nadaje ruch tłokowi a ten go daléj przesyła. Gdy tłok dochodzi do kresu swego skoku para wchodzi do oziębiacza (t. j. przestrzeni próżnéj i zimnéj) skrapla się i wtedy tłok cofa się. — Wzrost i zmniejszanie się objętości ciała są przyczyną widoczną, dotykalną że tak powiem, ruchu tłoka, dalszą zaś przyczyną tego ruchu jest dodanie lub odjęcie pewnéj liczby ciepłostek. Tu zachodzi pytanie nader właściwie: Czy para oddaje oziębiaczowi całą ilość ciepła otrzymanego? Innemi słowy, przypuśćmy, że zmierzyliśmy ilość ciepła dostarczonego przez ognisko parze lub wodzie znajdującéj się w kotle i że oznaczyliśmy całą ilość ciepła oddanego skraplaczowi, pytanie poprzednie da się przedstawić w innym kształcie a mianowicie: Dwie ilości ciepła dostarczonego i oddanego są sobie równe lub nie? Przed 1842 rokiem wszyscy fizycy odpowiedzieliby na to pytanie — tak; dziś zaś każdy uczony jest wstanie przeczyć, albowiem ilekroć razy ciepło dostarczone ciału wykonywa pracę zewnętrzną, zawsze niknie ilość jego matematycznie proporcyonalna do téj pracy. — Odwrotnie, ilekroć razy niknie pewna ilość ciepła zawsze zostaje wykonaną pewna praca zewnętrzna, matematycznie proporcyonalna do téj ilości. — Pomiędzy pracą dokonaną lub zużytą i ilością ciepła pochłoniętą lub dostarczoną istnieje stosunek stały zwany *Równoważnikiem mechanicznym ciepła.*

Każdy wie że tarcie, uderzenie, zmniejszenie objętości ciał i t. p. wywołuje ciepło, ilość ciepła tak utworzonego niezależy zupełnie od natury ciała. — Ilekroć razy wydamy na pracę zewnętrzną 425 kilogrammetrów otrzymamy jedną i tylko jedną *ciepłostkę.*

W broni palnéj, ciepło będąc przyczyną gwałtownego wzrostu objętości gazów, w które proch się zamienił, wyrzuca kulę ze znaczną szybkością. — W czasie gdy kula posuwa się coraz prędzéj w rurze broni, gazy powstałe skutkiem spalenia prochu oziębiają się, ilość ciepła pochłonięta przez to oziębienie jest matematycznie równą pracy zewnętrznéj wykonanéj przez kulę. — W saméj rzeczy przypuśćmy że kula uderza w skałę; w chwili uderzenia, kula ogrzeje się i ilość ciepła powstała w skutek zniknięcia ruchu jest ściśle równa ilości ciepła pochłoniętéj przez gaz, który się oziębił.

Łatwém więc jest obecnie zrozumieć całą doniosłość prawa wygłoszonego przez Mayer'a. — Masa zadań zawikłanych, uważanych dotąd za niepodobne do rozwiązania, uległa potędze analizy i rachunku. — Wskażemy kilka przykładów.

Wytrzymałość materyałów ma za przyczynę przyciąganie się wzajemne cząsteczek, w celu przezwyciężenia tego przyciągania trzeba zużyć pewną siłę, trzeba wykonać pewną pracę. — Ciepło powiększając objętość ciała także przezwycięża przyciąganie wzajemne cząstek lub inaczéj mówiąc wykonywa pewną pracę, a zatém pewna ilość ciepła dostarczanego ciału użytą jest w tym celu; wynika ztąd, że jeżeli dostarczymy ciału pewnéj ilości ciepła część jego służy do przezwyciężenia przyciągania cząsteczek i nie podnosi jego temperatury. — Jeżeli więc potrafimy oznaczyć jaką jest część ciepła użyta do podniesienia temperatury ciała a jaka użyta do rozerwania jego cząsteczek, oznaczymy niezwłocznie pracę zewnętrzną wykonaną przez ciepło, a więc i naprężenie (intensité) przyciągań wzajemnych cząsteczek tego ciała. — Wartość przyciągań jest ogromną w ciałach twardych, zresztą jest to i widoczném, lecz co jest bardziéj zadziwiającém to właśnie ta okoliczność, że naprężenie przyciągań cząsteczek gazu nie jest bynajmniéj równem zeru, a w cieczach, naprzykład w wodzie, jest ono nader znaczném. — Wiadomém jest, że woda przy stałém ciśnieniu doszedłszy do stanu wrzenia nie zmienia swéj temperatury jaką by nie była ilość ciepła jéj dostarczonego. — Cała ta ilość zbyteczna ciepła użytą jest na rozerwanie cząstek wody i na przezwyciężenie przyciągań i ciśnienia zewnętrznego.

Jeżeli woda wre przy ciśnieniu jednéj atmosfery, 40 ciepłostek są zamienione na pracę zewnętrzną a 496 służy do przezwyciężenia przyciągań wzajemnych. — Dawna fizyka nazywała *cieplikiem utajonym* ciepło dostarczone, a nie służące do podniesienia temperatury ciała. — W kilogramie pary o ciśnieniu jednéj atmosfery i o temperaturze 100 stopni, nie ma więcéj ciepła jak w kilogramie wody o téj saméj temperaturze, chociaż dostarczyliśmy ogromną ilość ciepła 536 ciepłostek. Oddawna wiadomém było że ulotnienie wody wywołuje oziębienie téj cieczy, wyjaśnienie logiczne tego zjawiska dopiero po zbudowaniu teoryi mechanicznéj ciepła może mieć miejsce.

Zadanie téj cudownéj teoryi jest tyleż wzniosłém, ważąc przyciąganie atomów, jak astronomii, kiedy ona waży przyciąganie dwóch globów firmamentu. Posuńmy się jeszcze daléj; siła łącząca atomy ciała pojedynczego jest bez wątpienia różną od siły łączącéj dwa, trzy, dziesięć atomów różnych w jedną cząsteczkę złożoną; jedném słowem jesteśmy zmuszeni odróżniać przyciąganie cząsteczek skutkiem łączności (cohésion) od przyciągania chemicznego (affinité), badania ścisłe zjawisk cieplikowych pozwalają nam, dla pewnych ciał, odróżnić to co jest winne jednéj lub drugiéj sile a zatém wyrazić w liczbach, w kilogrammetrach dzielność siły łączącéj dwa elementy chemicznie w jeden składowy i jednorodny. Tak więc chemia ta nauka faktów i pamięci stanie się bez wątpienia poddnką analizy.

Dźwięk wynika z ruchu wahadłowego części wewnętrznych ciał elastycznych, jeżeli zatém moglibyśmy widzieć ruch wewnętrzny powietrza, ujrzelibyśmy płyn ten podzielonym na fale to zbliżające się to oddalające się od siebie.

Żeby zmniejszyć objętość ciała trzeba i konieczném jest wykonać pewną pracę, a więc ciało to nagrzeje się; jeżeli zaś w skutek swéj elastyczności ciało to przybierze pierwotną swą objętość, dostarczy ono pewną pracę i wskutek tego oziębi się. Tak więc fala ścieśniona posiada wyższą temperaturę niż fala rozrzedzona i ta ustalona zmiana temperatury wpływa na elastyczność ciał dźwięcznych, a zatém zmienia stopień zajmowany przez dźwięk w gammie i szybkość jego przesłania. — Wpływ o którym mowa jest znaczny : Newton znalazł szybkość głosu w powietrzu równą 288 metrom; Laplace zaś, zważając na zimno i ciepło wywołane przez rozrzedzenie i ściśnienie, znalazł że szybkość ta jest równą 340 metrom na sekundę. Znając szybkość głosu w powietrzu możemy oznaczyć wartość równoważnika mechanicznego ciepła i wartość ta jest różną o $\frac{1}{400}$ od wartości tegoż równoważnika znalezionéj w inny sposób przez Joule'a. Otóż i akustyka związaną jest silnym węzłem z teoryą mechaniczną ciepła.

ROZDZIAŁ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE.

Kilka twierdzeń pomocniczych. — Niech będzie system punktów materyalnych na który działają siły wewnętrzne i zewnętrzne. — Ruch jakim każdy punkt jest obdarzony sprawiony jest przez wypadkowę wszystkich sił nań działających. — W saméj rzeczy, punkt np. M. (fig. 1) znajdujący się pod wpływem siły F_z zewnętrznéj, i siły f_w wewnętrznéj zawdzięcza swój ruch sile F wypadkowéj sił F_z i f_w.

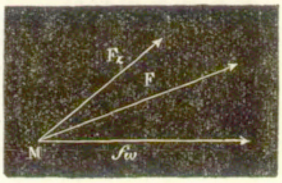

Fig. 1.

Niech $F_{(x)}$, $F_{(y)}$ i $F_{(z)}$ będą rzutami siły F_z na trzy osie spółrzędnych, podobnie $f_{(x)}$, $f_{(y)}$, $f_{(z)}$ rzutami siły f_w na też osie; otrzymamy trzy następujące równania

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_{(x)} + f_{(x)},\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_{(y)} + f_{(y)},\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_{(z)} + f_{(z)},
\end{aligned}
\right.
$$

które wyrażają, że rzut wypadkowéj na jakąkolwiek oś jest równy summie algebraicznéj rzutów składowych na tęż samą oś; dla każdego innego punktu możemy napisać trzy równania mające zupełnie ten sam kształt, a zatém dodając je pomiędzy sobą otrzymamy ostatecznie

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Sigma\frac{md^2x}{dt^2} &= \Sigma F_{(x)}\\
\Sigma\frac{md^2y}{dt^2} &= \Sigma F_{(y)}\\
\Sigma\frac{md^2z}{dt^2} &= \Sigma F_{(z)}
\end{aligned}
\right.
$$

lub

$$
(3)\qquad \begin{cases} d_t \Sigma m \dfrac{dx}{dt} = \Sigma F_{(x)} \\ d_t \Sigma m \dfrac{dy}{dt} = \Sigma F_{(y)} \\ d_t \Sigma m \dfrac{dz}{dt} = \Sigma F_{(z)}. \end{cases}
$$

Znak Σ znajdujący się z pierwszéj strony równań wskazuje, że wszystkie punkta zostały wzięte, a tenże znak po drugiéj stronie równań wyraża summę sił zewnętrznych. Po zsumowaniu wszystkich punktów i sił na nie działających, siły wewnętrzne znikają jako równe i znaków przeciwnych. Rozważając równania (3) dochodzimy do następującego twierdzenia :

Pochodna summy rzutów na jakąkolwiek oś stałą, ilości ruchu wszystkich punktów pewnego systemu, równą jest summie rzutów sił zewnętrznych na tęż samą oś.

Twierdzenie odnoszące się do sił żywych. — Iloczyn z masy punktu przez kwadrat jego prędkości zwie się *siłą żywą* tego punktu.

Wiemy że zmiany siły żywéj podczas pewnego przyrostu czasu mierzą się summą prac sił, które nań działają podczas tego samego przyrostu czasu. — Rozumując w ten sposób dla wszystkich punktów otrzymamy :

$$
(A)\qquad \Delta \Sigma m \frac{v^2}{2} = \Sigma PF
$$

gdzie PF oznacza pracę siły F.

Równanie (A) da się wyrazić słowy w następujący sposób :

Przyrost summy sił żywych wszystkich punktów systemu po upływie pewnego jakiegokolwiek czasu, równa się summie wszystkich prac tak zewnętrznych jako też i wewnętrznych działających na wszystkie punkty systemu podczas tego samego przyrostu czasu.

Praca siły F podczas przyrostu czasu dt wyraża się przez

$$
Xdx + Ydy + Zdz,
$$

a na mocy twierdzenia, że praca wypadkowéj równa się summie prac składowych, wyrażenie (A) da się zastąpić przez następujące :

$$
(B)\qquad d\Sigma m \frac{v^2}{2} = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz).
$$

Dodać tu winniśmy, że siła F jest wypadkową sił wewnętrznych i zewnętrznych.

W zastosowaniach twierdzenia sił żywych koniecznem jest odróżniać siły wewnętrzne od zewnętrznych. Działanie odwetowe dwóch cząsteczek m i m', które oddziela od siebie odległość r, składa się z dwóch sił równych i przeciwnych $mm'\varphi(r)$; jedna z nich przyłożona jest do pierwszego punktu, druga do drugiego, a ich kierunkiem wspólnym jest kierunek linii prostéj łączącéj te dwa punkty. — Funkcya $\varphi(r)$ jest dodatną lub ujemną stosownie czy siła jest przyciągającą lub odpychającą. — Jeżeli zrobimy x, y, z i x_1, y_1, z_1, spółrzędnemi punktów m i m', siły X, Y, Z, składowe wypadkowéj

$mm'\varphi(r)$ dla punktu m mają następujące wartości.

$$X = mm'\varphi(r)\frac{x'-x}{r},$$

$$Y = mm'\varphi(r)\frac{y'-y}{r},$$

$$Z = mm'\varphi(r)\frac{z'-z}{r};$$

a praca téj siły w ruchu bezwzględnym i w czasie dt da się wyrazić przez

$$Xdx + Ydy + Zdz = mm'\varphi(r)\frac{1}{r}[(x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz].$$

Podobnie otrzymamy na wyrażenie pracy siły przyczepionéj do punktu m'

$$-(Xdx' + Ydy' + Zdz') = -\frac{mm'\varphi(r)}{r}[(x'-x)dx' + (y'-y)dy' + (z'-z)dz'].$$

Dodając powyższe dwa równania otrzymamy pracę spełnioną w czasie dt działania odwetowego dwóch cząsteczek.

$$-\frac{mm'\varphi(r)}{r}[(x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz)].$$

Odległość dwóch punktów daje się wyrazić przez

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2,$$

różniczkując i upraszczając otrzymamy

$$rdr = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz),$$

a zatém wyrażenie pracy można zastąpić przez równanie

$$-mm'\varphi(r)dr = mm'd\psi(r);$$

zakładając

$$-\varphi(r) = \psi(r),$$

summa prac elementarnych sił wewnętrznych będzie

$$\Sigma\, mm'd\varphi(r) = d\Sigma\, mm'\varphi(r).$$

Na drugiéj stronie równania będziemy mieli tyle wyrazów ile można zrobić kombinacyi z punktów materyalnych biorąc je dwa po dwa. Powyższe wyrażenie zawiera tylko odległość punktów od siebie, a zatém praca ta jest jednakową w ruchach względnym i bezwzględnym. Ilość $\Sigma mm'\varphi(r)$ jest funkcyą spółrzędnych wszystkich punktów i może być wyrażoną przez

$$f(x, y, z, x', y', z', \ldots\ldots\ldots\ldots);$$

a funkcya ta jest tylko zależną od wzajemnych położeń punktów.

Wystawmy sobie myślą że zbiór punktów przechodzi z położenia którego cechą jest (1) do położenia którego cechą jest (2) otrzymamy wówczas

$$\Sigma PF \text{ wewn} = f(x_2, y_2, z_2, x'_2, y'_2, z'_2 \ldots\ldots) - f(x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1, \ldots\ldots),$$

lub dla skrócenia

$$\Sigma \mathrm{PF} \text{ wewn} = f_2 - f_1.$$

Przypuśćmy że na zbiór punktów nie działają siły zewnętrzne, natenczas otrzymamy

$$\Sigma m \frac{v_2^2}{2} - \Sigma m \frac{v_1^2}{2} = f_2 - f_1 \,;$$

zastąpmy funkcyę f przez funkcyę $\gamma(x, y, z, x' \ldots\ldots)$ jéj równą lecz znaku przeciwnego, otrzymamy

$$\Sigma m \frac{v_2^2}{2} - \Sigma m \frac{v_1^2}{2} \quad \gamma_1 - \gamma_2,$$

lub

$$\Sigma m \frac{v_2^2}{2} + \gamma_2 = \Sigma m \frac{v_1^2}{2} + \gamma_1,$$

a wiec w ogólności

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} + \gamma = \text{stałéj} = \mathrm{C}.$$

Czyli że doszliśmy do twierdzenia : *Jeżeli na zbiór punktów nie działają siły zewnętrzne, siła żywa więcéj funkcya* γ, *zostaje stałą.*

Wiemy z mechaniki że

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} = \frac{\mathrm{MV}^2}{2} + \Sigma m \frac{u^2}{2}.$$

Jeżeli więc nie ma sił zewnętrznych ruch środka ciężkości jest jednostajnym i prostolinijnym, pierwsza więc część $\mathrm{M}\frac{\mathrm{V}^2}{2}$ siły żywéj, jest stałą ; zauważyliśmy nadto że funkcya $\gamma = -f$ zachowuje tę samą wartość w ruchach względnym i bezwzględnym, t. j. że

$$\gamma(x, y, z, \ldots\ldots) = \gamma(\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots),$$

odejmując więc ilość stałą $\mathrm{M}\frac{\mathrm{V}^2}{2}$ dochodzimy do równania

$$\Sigma m \frac{u^2}{2} + \gamma = \text{stałéj} =$$

które da się wysłowić w sposób następujący : *Jeżeli na zbiór punktów nie działają siły zewnętrzne, siła żywa wewnętrzna dodana do funkcyi* γ *jest niezmienną.*

Przesłanie siły. — W jakiejkolwiek maszynie na każdy jéj element działa siła ciężkości w połączeniu z siłami zewnętrznemi i wewnętrznemi.

Jeżeli wystawimy sobie punkt materyalny znajdujący się pod wpływem powyżéj wspomnianych sił, ruch tego punktu będzie ruchem samego elementu.

Niech będą

Ox, Oy, Oz osie współrzędnych; oznaczmy przez

α, β, γ kąty, które tworzą te osie z pionową.

Nazwijmy

m masę elementu mającego za współrzędne x, y, z;

r jego prędkość;

$Z_{(x)}$, $Z_{(y)}$, $Z_{(z)}$ składowe siły Z przedstawiającéj działanie jednego elementu zewnętrznego na element m;

$W_{(x)}$, $W_{(y)}$, $W_{(z)}$ składowe siły W, która przedstawia działanie elementu wewnętrznego na element m.

Napiszmy równanie sił żywych

$$dm\frac{r^2}{2} = mg\,[\cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz] + dx\Sigma Z_{(x)} + dy\Sigma Z_{(y)} + dz\Sigma Z_{(z)} + dx\Sigma W_{(x)} + dy\Sigma W_{(y)} + dz\,\Sigma W_{(z)}.$$

Podobne równanie napisać możemy dla każdego elementu, otrzymamy więc

$$d\Sigma m\frac{r^2}{2} = \Sigma mg\,[\cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz] + \Sigma\,[dx\Sigma Z_{(x)} + dy\Sigma Z_{(y)} + dz\Sigma Z_{(z)}] + \Sigma\,[dx\Sigma W_{(x)} + dy\Sigma W_{(y)} + dz\Sigma W_{(z)}].$$

Zastanówmy się po szczególe nad każdą z trzech części drugiéj strony równania. — Pierwszy wyraz oznacza pracę siły ciężkości działającéj na wszystkie elementy; praca ta da się wyrazić przez iloczyn z ciężaru Mg przez wysokość pionową dh, która to wysokość jest odległością przebieżoną przez środek ciężkości w czasie dt; drugi wyraz oznacza pracę działań elementów zewnętrznych na cały zbiór, oznaczać ją będziemy dla skrócenie przez $d\theta$; ostatni wyraz przedstawia pracę elementów wewnętrznych i da się przedstawić przez $\Sigma f(r)dr$.

Dla wytłomaczenia tego ostatniego wyrazu możemy się uciec do pewnika Newtona, że działanie równe jest oddziaływaniu.

Element m' działając na element m przez siłę, któréj składowemi są $W_{(x)}$, $W_{(y)}$, $W_{(z)}$ sam znajduje się pod wpływem oddziaływania elementu m, którego to oddziaływania składowe są $-W_{(x)}$ $-W_{(y)}$, $-W_{(z)}$; praca więc tych sił da się wyrazić przez

$$W_{(x)}(dx - dx') + W_{(y)}(dy - dy') + W_{(z)}(dz - dz')$$

lub przez

$$f(r)dr.$$

Równanie więc sił żywych sprowadza się do następującego kształtu

$$d\Sigma m\frac{r^2}{2} = Mgdh + \Sigma f(r)dr + d\theta.$$

Całkę wyrażenia $Mgdh + \Sigma f(r)dr$, funkcyi $f(x, y, z, x', y', z'.....)$ współrzędnych, można otrzymać z łatwością.

Jeżeli przejdziemy z położenia ze znaczkiem 0 do jakiegokolwiek innego, otrzymamy

$$\Sigma m\frac{r^2}{2} - \Sigma m\frac{r_0^2}{2} = f(x, y, z, x', y', z', ...) - f(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0.....) + \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta.$$

Dodając i odejmując stałę dowolną C, otrzymamy

$$\left[\Sigma m \frac{r^2}{2} + C - f(x, y, z, x', y', z', \ldots)\right] - \left[\Sigma m \frac{r_0^2}{2} + C - f(x_0, y_0, z_0, x'_0 \ldots)\right] = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta.$$

Funkcya $f(x, y, z, x', y', z', \ldots)$ jest całką pracy siły ciężkości i działań wzajemnych wewnętrznych wszystkich elementów, nosi ona nazwę funkcyi sił i dla wartości zmiennych x, y, z odpowiadających jéj największéj wartości, czyni zadość warunkom równowagi stałéj, gdy inne siły zewnętrzne prócz siły ciężkości nie działają na zbiór punktów materyalnych. — W saméj rzeczy, gdy zbiór punktów materyalnych znajdzie się tylko pod wpływem sił ciężkości i wewnętrznych, wzór sił żywych przybiera postać,

$$d\Sigma m \frac{r^2}{2} = Mgdh + \Sigma\varphi(r)dr = df(x, y, z).$$

Wartości zmiennych x, y, z odpowiadające największéj wartości funkcyi $f(x, y, z)$ czynią jéj pochodnę równą zeru, t. j.

$$df(x, y, z) = 0$$

$$d\Sigma m \frac{r^2}{2} = 0.$$

Powyższy warunek jest także warunkiem równowagi, w saméj rzeczy, dowiedziemy że równowaga w tym razie jest stałą.

Całkując mamy

$$\Sigma m \frac{r^2}{2} - \Sigma m \frac{r_0^2}{2} = f(x, y, z \ldots) - f(x_0, y_0, z_0),$$

lu dodając i odejmując stałę dowolną B

$$\text{(C)} \qquad \Sigma m \frac{r^2}{2} - \Sigma m \frac{r_0^2}{2} = \left[f(x, y, z, \ldots) - B\right] - \left[f(x_0, y_0, z_0 \ldots) - B\right].$$

Niech funkcya $f(x, y, z \ldots)$ dosięgnie swéj największéj z największych wartości dla zmiennych x, y, z równych x_m, y_m, z_m.

Założmy $B = f(x_{(m)}, y_{(m)}, z_{(m)} \ldots)$, jeżeli zmiennym x, y, z, nadamy wartości $x_{(m)}, y_{(m)}, z_{(m)}$, pierwszy nawias staje się równym zeru; wartości zmiennych powyżéj podane odpowiadają największéj wartości funkcyi $f(x, y, z)$.

Zobaczmy obecnie co się dzieje gdy funkcya $f(x, y, z)$ ma wartość różną od swéj największości, t. j. mówiąc innemi słowy, gdy zmienne x, y, z są odpowiednio równe $x + \lambda$, $y + \mu$, $z + \nu$, założmy nadto

$$x_0 = x_m + \lambda_0, \quad y_0 = y_m + \mu_0, \quad z_0 = z_m + \nu_0.$$

W skutek tych założeń funkcya $f(x, y, z, \ldots) = f(x_m + \lambda, y_m + \mu, z_m + \nu \ldots)$ rozwińmy ją podług szeregu, otrzymamy

$$f(x_m + \lambda, y_m + \mu, z_m + \nu \ldots) = f(x_m, y_m, z_m) + \left[\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_{(m)}}\right) + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial y_{(m)}}\right) + \nu\left(\frac{\partial f}{\partial z_{(m)}}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_{(m)}}\right) + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial y_{(m)}}\right) + \nu\left(\frac{\partial f}{\partial z_{(m)}}\right)\right]^2 + \ldots\ldots R_{(m)}.$$

lub dla skrócenia

$$\text{(D)} \qquad f(x, y, z) = f(x_n + \lambda, y_m + \mu \ldots\ldots) = f(x_m, y_m, z_m) + \gamma(\lambda, \mu, \nu).$$

W ten sam sposób otrzymamy

$$f(x_0, y_0, z_0 \ldots\ldots) = f(x_m, y_m, z_m) + \gamma(\lambda_0, \mu_0, \nu_0).$$

Podstawmy tak otrzymane wartości dla funkcyi $f(x, y, z, \ldots)$ i $f(x_0, y_0, z_0 \ldots\ldots)$ w równaniu (C) otrzymamy, zważając że $B = f(x_m, y_m, z_m)$,

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} - \Sigma m \frac{v_0^2}{2} = \gamma(\lambda, \mu, \nu) - \gamma(\lambda_0, \mu_0, \nu_0).$$

Równanie (D) wskazuje że dla $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, funkcya $\gamma(\lambda, \mu, \nu)$ staje się równą zeru. — Dla tychże wartości zmiennych λ, μ, ν funkcya $f(x, y, z)$ ma wartość największą, a więc funkcya $\gamma(\lambda, \mu, \nu$ ma tę własność że dla wartości $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ staje się największą i równą zeru. Możemy więc oznaczyć wartości bezwzględne l, n, n dosyć małe aby funkcya $\gamma(\lambda, \mu, \nu)$ pozostawała wciąż odjemną, gdy zmienne λ, μ, ν mają wartości mniejsze bezwzględnie od granic oznaczonych, l, m, n.

Przypuśćmy w myśli, że zbiór punktów materyalnych porusza się w ten sposób, aby przybierał wszystkie położenia dla których choć jedna zmienna stałaby się równą swéj granicy, inne zaś mniejsze lub co najwięcéj równe swym granicom. W tych warunkach gdy zmienne będą przybierać szereg wskazanych wartości, funkcya $\gamma(\lambda, \mu, \nu)$ będzie ciągle pozostawać odjemną.

Oznaczmy przez $\int -z^2$ wartość odjemną funkcyi $\gamma(\lambda, \mu, \nu)$ najwięcéj zbliżoną do zera i obierzmy początkowe λ_0, μ_0, ν_0, takie położenie dla którego λ_0, μ_0, ν_0, są mniejsze bezwzględnie od granic l, m, n i prędkość dosyć małą v_0, aby $-\gamma(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \Sigma m \frac{v_0^2}{2}$ było mniejsze od Z^2, wówczas ruch zbioru punktów materyalnych wyrażony jest analitycznie przez wzór

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} = \gamma(\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots) - \gamma(\lambda_0, \mu_0, \nu_0 \ldots\ldots) + \Sigma m \frac{v_0^2}{2}.$$

Równanie to pokazuje że wszystkie zmienne pozostają mniejsze od granic l, m, n, gdy zbiór punktów przybiera położenie graniczne położeniu x_m, y_m, z_m. W pewnéj chwili funkcya $\gamma(\lambda, \mu, \nu)$ miałaby wartość odjemną większą lub co najmniéj równą Z^2, a więc większą wkażdym razie od

$$-\gamma(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) + \Sigma m \frac{v_0^2}{2};$$

wyrażenie $\gamma(\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots) - \gamma_0(\lambda_0, \mu_0, \nu_0 \ldots) + \Sigma m \frac{v_0^2}{2}$ byłoby więc odjemném, co jest niemożebném zważając że $\Sigma m \frac{v^2}{2}$ z natury rzeczy może być tylko dodatne.

Największe oddalenie zbioru punktów nastąpi gdy

$$\gamma(\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots) - \gamma(\lambda_0, \mu_0, \nu_0 \ldots) + \Sigma m \frac{v_0^2}{2} = 0.$$

Prędkości v będąc ograniczone i funkcya γ pozostając odjemną w położeniach granicznych położeniu x_m, y_m, z_m, siła żywa zbioru punktów materyalnych posiada swą największą wartość gdy

$$\gamma(\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots) = 0,$$

t. j., w chwili gdy zbiór punktów materyalnych znajduje się w położeniu odpowiadającém największéj wartości funkcyi $f(x, y, z)$; widzimy więc że największa wartość funkcyi $f(x, y, z)$ uczyni zadość warunkowi równowagi stałéj. Poprzednio znaleźliśmy wzór analityczny dla wyrażenia ruchu zbioru punktów gdy ciężkości i siły wewnętrzne i zewnętrzne nań działają. Wzór ten jest następujący :

$$\left[\Sigma m\frac{v^2}{2}+\mathrm{C}-f(x, y, z)\right]-\left[\Sigma m\frac{v_0^2}{2}+\mathrm{C}-f(x_0, y_0, z_0 \ldots)\right]=\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

w którym stała C miała wartość dowolną; uczyńmy ją w téj chwili równą największéj wartości funkcyi $f(x, y, z, \ldots)$, t. j. załóżmy że

$$\mathrm{C}=f(x_m, y_m, z_m, \ldots),$$

a zatém $\mathrm{C}-f(x, y, z)$ będzie zawsze ilością dodatną, któraby oznaczałaby pracę utworzoną przez ciężkość i działania wewnętrzne i zewnętrzne gdyby zbiór punktów przeszedł z położenia w którém się obecnie znajduje do położenia odpowiadającego warunkom równowagi stałéj i największéj z wartości funkcyi $f(x, y, z \ldots)$, otrzymamy więc ostatecznie, zakładając

$$\mathrm{T}=\mathrm{C}-f(x, y, z, \ldots),$$

równanie następujące

$$\left[\Sigma m\frac{v^2}{2}+\mathrm{T}\right]-\left[\Sigma m\frac{v_0^2}{2}+\mathrm{T}_0\right]=\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta.$$

Rankine nazwał summę $\Sigma m\frac{v_0^2}{2}+\mathrm{T}_0$ *dzielnością* systemu. Właściwość téj nazwy da się wytłomaczyć. W saméj rzeczy, pracę sił zewnętrznych można rozłożyć na dwie części: 1° pierwszą $d\theta_u$ oznaczającą pracę użyteczną sił zewnętrznych i 2° drugą $d\theta_b$ oznaczającą pracę bierną, a więc wzór powyższy przybiera następującą postać.

$$\left[\Sigma m\frac{v^2}{2}+\mathrm{T}\right]-\left[\Sigma m\frac{v_0^2}{2}+\mathrm{T}_0\right]=\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta_u-\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta_b.$$

Przypuśćmy obecnie, że zbiór punktów znajduje się w położeniu, którego cechą jest $\Sigma m\frac{v_0^2}{2}+\mathrm{T}_0$ że siły zewnętrzne użyteczne przestają nań działać.

Zbiór punktów nie zatrzyma się natychmiast, lecz przeciwnie zwycięży jeszcze pewną ilość pracy biernéj sił zewnętrznych danéj przez równanie

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta_b=\left[\Sigma m\frac{v_0^2}{2}+\mathrm{T}_0\right]-\left[\Sigma m\frac{v^2}{2}+\mathrm{T}\right]$$

$\Sigma m\frac{v^2}{2}$ i T są z natury rzeczy dodatne, a więc druga część powyższego równania posiadać będzie swą największą wartość gdy $\Sigma m\frac{v^2}{2}=0$ i $\mathrm{T}=0$, a zatém będzie największość

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta_b=\Sigma m\frac{v_0^2}{2}+\mathrm{T}_0.$$

Wyrażenie $\Sigma m \frac{v_0^2}{2} + T_0$, cechujące stan ciała lub zbioru ciał, przedstawia największą ilość pracy jaką to ciało jest zdolne wydobyć z siebie.

Nim pójdziemy dalej objaśnimy znaczenie kilku nazw i tak: summę sił żywych $\Sigma m \frac{v^2}{2}$ wszystkich punktów zbioru nazwiemy *dzielnością rzeczywistą*.

Praca T, to jest praca jaką ciało zdolne jest wykonać, przechodząc z położenia w którém się znajduje do położenia odpowiadającego największéj wartości funkcyi sił i warunkom równowagi stałéj nosić będzie miano *dzielności utajonéj*.

Dzielność całkowita równą jest summie dzielności rzeczywistéj i utajonéj. Dzięki tym uproszczeniom wzór

$$\left[\Sigma m \frac{v^2}{2} + T\right] - \left[\Sigma m \frac{v_0^2}{2} + T_0\right] = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta,$$

da się wysłowić w sposób następujący:

Przyrost dzielności całkowitéj równa się pracy sił zewnętrznych.

W przypadku szczególnym, gdy praca sił zewnętrznych, jest równą zeru, dzielność całkowita jest ilością stałą

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} + T = \Sigma m \frac{v_0^2}{2} + T_0.$$

Zastosowanie do maszyn. — Wzór

$$\left[\Sigma m \frac{v^2}{2} + T\right] - \left[\Sigma m \frac{v_0^2}{2} + T_0\right] = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

jest ogólnym. W szczególnym przypadku zastosujemy go do części maszyny B, zawierającéj pe-

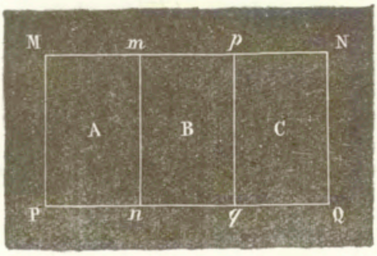

Fig. 2.

wien układ elementów, które w pewnéj chwili naprzykład w czasie spoczynku, były zawarte pomiędzy powierzchniami mn i pq.

Nazwijmy:

$d\theta_l$ pracę sił zewnętrznych działających z lewéj strony na mn,

$d\theta_p$ pracę sił zewnętrznych działających z prawéj strony na pq,

$d\theta_s$ pracę sił zewnętrznych działających na powierzchnię środkową $mnpq$; otrzymamy

$$d\theta = d\theta_{(l)} + d\theta_{(p)} + d\theta_{(s)},$$

a podstawiając będzie

$$\int d\theta_{(l)} = \left[\Sigma m \frac{v^2}{2} + T\right] - \left[\Sigma m \frac{v_0^2}{2} + T_0\right] - \int d\theta_s - \int d\theta_p ;$$

aby dowiedzieć się jakiemi znakami należy obdarzyć $d\theta_{(l)}$, $d\theta_{(p)}$ i $d\theta_{(s)}$, załóżmy że $d\theta_{(l)}$ jest pracą użyteczną $d\theta_{(s)}$ i $d\theta_{(p)}$ są pracami oporu, a zatém $d\theta_{(s)}$ i $d\theta_{(p)}$ będą poprzedzone znakami mniéj, i wzór poprzedni zastąpiony zostanie przez

$$p_{(l)} = \left[\Sigma m \frac{v^2}{2} + T\right] - \left[\Sigma m \frac{v_0^2}{2} + T_0\right] + P_s + p_p .$$

Równanie to pokazuje, że praca użyteczna da się rozłożyć na trzy części, że p_p działa na ciała zewnętrzne, stanowiąc opór maszynie mającéj za cel zwyciężyć go, że druga część oporu P służy do zniszczenia oporów zwanych biernymi, wreszcie i trzecia część równania jest przyczyną wpływu na zmiany w dzielności systemu działając bądź na części składowe maszyny mniéj lub więcéj elastyczne, bądź na prędkość.

Dzielność drgań. — Badajmy najprzód zbiór punktów materyalnych obdarzonych tylko ruchem drgań. Każdy punkt posiada ruch wahadłowy około położenia przecięciowego. Niech będą x, y, z współrzędne położenia przecięciowego, $(x + \xi)$, $(y + \eta)$, $(z + \zeta)$ współrzędne punktu obdarzonego ruchem drgań. Ponieważ zbiór punktów nie porusza się znacznie ale tylko drga, a więc współrzędne x, y, z są niezależne od czasu, a zatém mamy

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

Możemy uważać jakikolwiek ruch drgań, jako wypadkowy ruchów prostych dających się przedstawić w kształcie:

$$\xi = A \operatorname{dost} \left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right),$$

$$\eta = B \operatorname{dost} \left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right),$$

$$\zeta = C \operatorname{dost} \left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right).$$

Dodając do siebie kwadraty pochodnych z ξ, η, ζ otrzymamy wartość v^2 a zatém

$$v^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left[A^2 \operatorname{wst}^2 \left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + B^2 \operatorname{wst}^2 \left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right) + C^2 \operatorname{wst}^2 \left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right)\right]$$

lub

$$v^2 = \frac{2\pi^2}{T^2}\left[A^2 + B^2 + C^2 - A^2 \operatorname{dost} \left(\frac{4\pi t}{T} + 2\alpha\right) \ldots\right].$$

Siła żywa zmienia się w czasie drgania pojedynczego, jéj wartość przecięciowa daną jest przez całkę oznaczoną

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{mv^2 dt}{2} = m\pi^2 \frac{A^2 + B^2 + C^2}{T^2} .$$

W ruchu złożonym drgań, kwadrat prędkości ma następującą wartość

$$v^2 = 4\pi^2 \left[\Sigma \frac{A}{T} \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)\right]^2 + \left[\Sigma \frac{B}{T} \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right)\right]^2 + \left[\Sigma \frac{C}{T} \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right)\right]^2$$

$\Sigma \frac{A}{T} \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$ jest summą wyrazów następującego kształtu :

$$\frac{A}{T} \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + \frac{A'}{T'} \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right) + \ldots,$$

kwadrat téj summy jest równym

$$\Sigma \frac{A^2}{T^2} \mathrm{wst}^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + \Sigma \frac{2AA'}{TT'} \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right).$$

Przeobrażając jak poprzednio, wyrazy pierwszéj summy i biorąc wartość przecięciową po upływie czasu bardzo znacznie dłuższego od peryodu, w celu aby można było opuścić wyrazy peryodyczne otrzymamy

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{A^2}{T^2}.$$

Wyrazy drugiéj summy dadzą się przedstawić w innym kształcie w następujący sposób,

$$\frac{2AA'}{TT'} \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) \mathrm{wst}\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right) = \frac{AA'}{TT'} \left\{ \mathrm{dost}\left[2\pi t\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right) + \alpha - \alpha'\right] \right.$$

$$\left. - \mathrm{dost}\left[2\pi\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right) + \alpha + \alpha'\right] \right\}.$$

Całka drugiego wyrazu jest summą wstaw i wartość przecięciowa téj całki po upływie czasu znacznie dłuższego od trwania każdego peryodu jest małą, a więc możemy ją opuścić, w ten sposób znajdujemy, że wartość przecięciowa dzielności rzeczywistéj jest równą

$$\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{mv^2 dt}{2} = m\pi^2 \Sigma \frac{A^2 + B^2 + C^2}{T^2}.$$

Ztąd wnosimy, że dzielność przecięciowa jakiegokolwiek ruchu drgań równą jest summie dzielności przecięciowych ruchów prostych drgań.

Wyobraźmy sobie, że ciało badane oprócz ruchu drgań, obdarzone jest jeszcze jakim innym ruchem. Współrzędne punktu m są $(x + \xi), (y + \eta), (z + \zeta)$; współrzędne x, y, z w przypadku badanym, są funkcyą czasu.

Składowe prędkości tego punktu są :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{d\xi}{dt}.$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}.$$

Składowa prędkości ruchu innego niż drgania może być uważaną za stałą podczas trwania peryodu

T, jeżeli ruch drgań jest prostym, lub ogólniéj, podczas przeciągu czasu θ, małege w wartości bezwzględnéj, lecz znacznie większego od każdego peryodu ruchu złożonego drgań. Możemy więc napisać

$$\frac{1}{\theta}\int_0^\theta m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}dt=\frac{1}{\theta}m\frac{dx}{dt}\int_0^\theta\frac{d\xi}{dt}dt=\frac{1}{\theta}m\frac{dx}{dt}(\xi)^\theta{}_0=0.$$

Mamy zkądinąd

$$(\alpha)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\frac{mv^2}{2}dt=\frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)+\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\\+\frac{1}{\theta}\int_0^\theta m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).\end{aligned}\right.$$

Poprzednio pokazaliśmy, że summa trzech ostatnich wyrazów całki (α) da się opuścić bez popełnienia błędu, a więc

$$\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\frac{mv^2}{2}dt=\frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)+\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right).$$

Pierwsza część drugiéj strony tego równania jest siłą żywą ruchu widocznego, drugu zaś jest siłą żywą przecięciową ruchu drgań, a więc : *dzielność rzeczywista ciała jest summą dzielności ruchu widocznego i dzielności ruchu drgań.*

Wpływ ruchu drgań na dzielność utajoną. — Badajmy ciało nieobdarzone ruchem widocznym, ale tylko ruchem drgań. Dzielność utajona będąc funkcyą odległości wzajemnéj różnych punktów, jest zależną od ruchu drgań i zmiany jéj są peryodyczne.

Niech będą x, y, z współrzędne położenia przecięciowego punktu m; gdyby ruch drgań nie istniał, wartość dzielności utajonéj byłaby następującą

$$W=F(x,\ y,\ z,\ x',\ y'\ z'\ \ldots).$$

W czasie drgania punkt m ma za współrzędne $(x+\xi)$, $(y+\eta)$, $(z+\zeta)$, a więc wartość dzielności utajonéj jest równą

$$W=F(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta,\ x'+\xi',\ y'+\eta'\ \ldots).$$

Współrzędne ξ, η, ζ przemieszczeń drgających można uważać, jako bardzo małe wobec x, y, z; możemy więc rozwinąć funkcyę tę na szereg zbieżny, poprzestając na wyrazach drugiego stopnia.

$$W=F(x,y,z,x',y',z)+\frac{dF}{dx}\cdot\xi+\frac{dF}{dy}\cdot\eta+\frac{dF}{dz}\zeta+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2},\xi^2+\frac{d^2F}{dy^2}\eta^2+\frac{d^2F}{dz^2}\zeta^2+\frac{2d^2F}{dxdy}\xi\eta+\ldots\right]$$

Jeżeli weźmiemy wartość przecięciową funkcyi W wyrazy pierwszego rzędu dadzą się opuścić bez popełnienia znacznego błędu, i w ten sposób znajdujemy, że wartość przecięciowa funkcyi W jest :

$$F(x,\ y,\ z,\ \ldots)+\frac{1}{4}\left[\frac{d^2F}{dx^2}\cdot A^2+\frac{d^2F}{dy^2}\cdot B^2+\frac{d^2F}{dz^2}\cdot C^2+\frac{2d^2F}{dxdy}AB\,\mathrm{dos}(\alpha-\beta)+\ldots\right].$$

Ztąd wnosimy, że drgania wpływają na wartość przecięciową dzielności utajonéj, w niczém nie zmieniając stanu zewnętrznego ciała.

Praca zewnętrzna w przypadku ciśnienia jednostajnego. — Poprzednio znaleźliśmy, że przyrost dzielności całkowitéj ciała jest równym pracy sił zewnętrznych jednostajnie rozłożonych na całéj powierzchni ciała.

W tym razie wyrażenie pracy jest nadzwyczaj proste.

Niech będzie :

v objętość ciała A;

p ciśnienie na metr kwadratowy.

Ciśnienie wywierane na element ω powierzchni ciała będzie $p\omega$.

Załóżmy nadto, że zmiana objętości ciała A jest nieskończenie małą i że h jest częścią normalnéj zawartą pomiędzy elementem ω i nową powierzchnią ciała. Praca oddziaływania ciała A na ciała zewnętrzne jest $p\omega h$ dla elementu powierzchni ω.

Praca całkowita $d\mathrm{S}$ wykonana przez ciało jest równą

$$d\mathrm{S} = \Sigma p\omega h = p\,\Sigma\,\omega h.$$

Lecz ωh jest objętością zawartą pomiędzy elementem ω i elementem odpowiednim nowéj powierzchni : $\Sigma\omega h$ jest więc zmianą objętości ciała. Mamy więc

$$d\mathrm{S} = pdv.$$

Oto są twierdzenia pomocnicze, któremi w dalszym ciągu niniejszéj pracy wciąż posługiwać się będziemy.

ROZDZIAŁ II

ZASADY TEORYI MECHANICZNEJ CIEPŁA.

Cała budowa teoryi mechanicznéj ciepła spoczywa na dwóch założeniach; pierwsze daje związek istniejący pomiędzy ciepłem i pracą : drugie zaś pomiędzy pracą, ciepłem i temperaturą.

Założenia o których mówić zamierzamy są następujące :

I. Założenie (Lemme).—*Ilekroć razy ciepło działając na jakiekolwiek ciało staje się przyczyną pracy mechanicznéj spożytkowanéj na zewnątrz tego ciała, wtedy zawsze niknie ilość ciepła proporcyonalna do téj pracy.* I odwrotnie: *ilekroć razy praca wewnętrzna zostaje użytą na wykonanie pewnych zmian w jakimkolwiek celu, wtedy zawsze powstaje ilość ciepła znajdująca się w stosunku prostym do téjże pracy.*— Stosunek istniejący pomiędzy ilością ciepła zniknią lub powstałą a ilością pracy stworzoną lub zużytą jest stałym i niezależnym od natury ciała. Stosunek ten nazwanym został *równoważnikiem mechanicznym ciepła*, $\mathrm{E} = \frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{Q}}$ (F praca, Q ilość ciepła). Na tém założeniu polega cała budowa teoryi mechanicznéj ciepła; z niego wypływa pod nadzwyczaj prostym kształtem cały zbiór równań dających prawa téj cudownéj teoryi.

Prawa poprzednio dane będące wysłowieniem zjawiska fizycznego nie dają się inaczéj udowodnić jak tylko drogą doświadczenia i badania.

Każde założenie daje się dowieść poprawnie trzema sposobami.

1) Pokazując że pewne zjawiska tyczące się tego założenia prowadzą nas do niedorzeczności, jeżeli usuniemy związki istniejące według założenia pomiędzy niemi lub

2) Pokazując że pewne zjawiska nie dają się wytłomaczyć, jeżeli usuniemy istnienie i prawdziwość tego założenia, lub też nakoniec

3) Dowodząc wprost, że stosunek stały pomiędzy ilościami pracy i ciepła wiecznie i zawsze istnieje.

Z trzech tych sposobów, tylko za pomocą ostatniego możemy dowieść wprost prawdziwość założenia. Do niego się tu udamy; dzieląc dowodzenie na trzy odrębne działy, dowiedziemy więc, że

I) Zawsze niknie dana ilość ciepła ilekroć razy przez działanie ciała z wewnątrz, powstaje praca mechaniczna zewnętrzna. Odwrotnie, zawsze powstaje pewna ilość ciepła ilekroć razy działanie zewnątrz wywierane na ciało wymaga danéj ilości ciepła.

II) Ciepło znikłe lub powstałe jest proporcyonalne do pracy stworzonéj lub wydanéj.

III) Wreszcie stosunek ten jest stałym i niezmiennym.

Pierwszy dział dowodzenia. — *Zawsze istnieje lub powstaje pewna ilość ciepła ilekroć razy powstaje ilość dodatna lub ujemna pracy.*

1° Tarcie. — We wszystkich maszynach, tak w zegarku jak w maszynie parowéj, tarcie organów jest przyczyną straty pewnéj ilości pracy.

Praca ta nie użytecznie (zważając na cel w jakim została zbudowaną maszyna) obrócona na pokonanie tarć wywołuje pewną ilość ciepła, zupełnie równoważną, jak to późniéj zobaczymy.

Nie kładziemy żadnego nacisku na to, że tarcie wywołuje ciepło, gdyż zjawisko to jest aż za zbyt znaném przez wszystkich.

2° Dzielenie ciał twardych. — Dzielenie ciał twardych wymaga znacznéj pracy, gdyż natężenie połączone jest z przemieszczeniem

$$(F ds).$$

F oznacza natężenie,

ds « przemieszczenie.

Ciało tarte przez pilnik rozsyła naokoło tysiące iskier.

3° Zmniejszenie i wzrost objętości ciał. — Wszystkie ciała bez wyjątku są mniéj lub więcéj *ściśliwe*, to jest że objętość ich daje się zmniejszyć za pomocą ciśnienia zewnętrznego, normalnego do wszystkich punktów powierzchni ograniczającéj je w przestrzeni. Ściśliwość w najwyższym stopniu ma miejsce w gazach, inaczéj mówiąc, dla gazów taż sama siła wywołuje największe zmniejszenie ich objętości. Ciała najbardziéj twarde przesyłają fale głosowe co jest najlepszym dowodem, że wszystkie ciała są *ściśliwe*. Wszystkie ciała jednorodne są elastyczne, zastrzegając, że przez elastyczność ciał rozumiemy zdolność przybrania nie *kształtu* lecz objętości pierwotnéj, skoro tylko siła która wywołała zmniejszenie, przestaje działać. W ten sposób ołów, złoto, wosk, ciała nadzwyczaj miękkie, są w rzeczywistości tak samo elastyczne jak i inne;

gęstość złota lanego 19,26, gęstość złota kutego 19,36, pozostaje tą samą jakiemi by nie były natężenia kucia. — Ołów lany lub kuty posiada prawie tę samą gęstość.

Ciało ściskane ogrzewa się; gazy posiadają tę własność w najwyższym stopniu.

Odwrotnie ciało poprzednio ściśnięte rozprzęgając się, ziębnie.

Ściskać ciało lub zmniejszyć jego objętość przez działanie zewnętrzne, pociąga koniecznie za sobą pewien wydatek pracy. Tak więc powstanie ilości ciepła nierozłączném jest z pewnym wydatkiem pracy. P. Regnault dowiódł, że cieplik gatunkowy jest ilością stałą dla każdego gazu; a więc jeżeli zmniejsza się objętość gazu następuje rzeczywiste wytworzenie ciepła; odwrotnie zaś, jeżeli gaz rozprzęga się, niknie pewna ilość ciepła. Zkądinąd P. Joule pokazał, że jeżeli nie *wywieramy żadnéj pracy zewnętrznéj* na gaz który się rozprzęga, ilość ciepła pozostanie tą samą.

4° Zmiana kształtu ciał. — Zdolność przybrania pierwotnéj objętości, skoro siła przestała działać, jest własnością ciał.

Inaczéj rzecz się ma ze zdolnością przybrania pierwotnego kształtu. Własność ta jest daleko inaczéj ogólną i siła pewnych ciał zupełnie prawie nie istnieje (gazy, ciecze). Nadto nawet w ciałach posiadających ją, własność ta jest tak zmienną iż możemy podzielić ciała na miękkie i elastyczne.

W przypadku ciał: tak miękkich jak i elastycznych, zmiana kształtu sprowadzona przez działanie zewnętrzne wywołuje wzrost temperatury. Ołów jeżeli go zagniemy ogrzeje się.

Taśma kauczukowa jeżeli ją przedłużymy także nagrzeje się. Ołów jako ciało miękkie zachowuje kształt zgięty i pozostanie nagrzanym.

Kauczuk jako ciało elastyczne powróci do pierwotnego kształtu, skoro siła która go przedłużyła przestanie działać. Lecz siła może przestać działać stopniowo lub też raptownie, ztąd dwa odrębne zjawiska techniczne. Jeżeli siła przestaje działać stopniowo, kauczuk powróci do kształtu i temperatury pierwotnych. Jeżeli zaś siła przestanie działać raptownie, kauczuk powróci do pierwotnego kształtu, lecz pozostanie nagrzanym.

W pierwszym przypadku, praca wydana dla przedłużenia kauczuku jest całkowicie zwróconą, w drugim zaś praca została wydaną ostatecznie, lecz i ciepło zostało wywołane ostatecznie.

5° Uderzenie. — Oddawna wiadomem jest wszystkim, że metale kute na kowadle ogrzewają się nader szybko a ten wzrost gęstości ani zmniejszenie się cieplika gatunkowego nie mogą wpływać na powstanie ciepła gdyż te wielkości są prawie stałe.

Jaka więc jest inna przyczyna?

Załóżmy że dwie kule zupełnie równe i jednakowéj wagi są przyczepione do dwóch nici w sposób

1) Iż środki ich znajdują się na téj saméj linii pozioméj,

2) Iż nici są równoległe.

Po założeniu tego przypuśćmy, iż oddalemy dwie kule od siebie pozostawiając je wciąż w téj saméj płaszczyznie. Podnieśmy obie kule do téj saméj wysokości i puśćmy je.

Kule te upadną opisując łuki koła, i w punkcie najwyższym posiadać będą prędkości

$$V = \sqrt{2gH},$$

gdzie H jest wysokością spadku.

Dla podniesienia kul do wysokości H została wydaną praca PH; gdzie P oznacza wagę kul, H wysokość.

Praca ta jest równa

$$PH = \frac{PV^2}{2g} = \frac{MV^2}{2} = gHM.$$

W chwili gdy kule zetkną się z sobą, wywołaném zostanie w punkcie styczności pewne ciśnienie, natężenie, w kierunku przeciwnym ruchu, które odniesione do jedności masy działać będzie jako siła przyspieszająca i zniszczy ruch sprowadzony przez spadek. Pod wpływem tego ciśnienia kształt kul zmieni się i jeżeli nazwiemy R summę tych ciśnień zmiennych wywieranych na każdą cząsteczkę i odniesionych do środka ciężkości otrzymamy

$$\int R\,de = PH,$$

e jest długość przebieżona przez środki ciężkości kul podczas trwania styczności. To założywszy odróżnimy dwa przypadki nader odrębne.

1) Jeżeli ciała są miękkie, ciśnienie R przestaje istnieć jak tylko ruch sprowadzony przez spadek przestanie istnieć; obie kule pozostaną w spoczynku i ciepło wywołane przez zmianę ich kształtu będzie ostateczném.

2) Jeżeli ciała są elastyczne natężenie R będzie trwać nadal, a odniesione do jedności masy stanie się ono siłą przyspieszającą dodatną i naprężenie jéj zmieniając się ustawicznie zwróci kulom pracę $\int R\,de$ pierwotnie wydaną a więc i prędkość $V = \sqrt{2gH}$. Ciepło wywołane zmianą kształtu zniknie skoro długość e zostanie przebieżoną i dwie kule na powrót doskoczą do wysokości H.

W rzeczywistości ciała zupełnie elastyczne nie istnieją; ztąd wypływa; iż wysokość H zmniejszy się; ciepło odnoszące się do wysokości H′—H będzie trwać i w końcu stanie się równém ilości ciepła wywołanéj przez spadek z wysokości H.

Również ciała zupełnie miękkie także nie istnieją, kule rozłączą się zawsze po zetknięciu się z sobą. Jednakże różnica pomiędzy ciałami w tym względzie jest nader znaczną; i tak gdy dwie kule ołowiane odskakują zaledwie do $\frac{1}{50}$ wysokości spadku H dwie kule bilardowe z kości słoniowéj powracają do $\frac{7}{8}$ wysokości spadku

Widocznèm więc jest że, jeżeli zamiast podnieść dwie kule jednocześnie, pozostawimy jednę z nich w spoczynku, zakładając ją zupełnie elastyczną i nieskończenie większą od kuli w ruchu, zadanie będzie to samo co i poprzednie. Mała kula po uderzeniu zostanie w spoczynku jeżeli jest miękką; odskoczy zaś do pierwotnéj wysokości jeżeli jest elastyczną; zawsze więc nastąpi zmiana kształtu małéj kuli i powstanie pewna ilość ciepła. Jasném jest że przypadek ten najczęściéj spotyka się w naturze. Kowadło silnie przymocowane połączone z ziemią, która jest nieskończenie większą od młota, ten ostatni odskoczy jeżeli jest elastycznym i ciepło wywołane jest tylko chwilowém; pozostanie w spoczynku jeżeli jest miękkim lub co jest tém samém, jeżeli uderzy ciało miękkie położone na kowadle i wtedy to ciało miękkie silnie się ogrzeje.

Streszczenie poprzedniego paragrafu.

Łatwém jest przytoczyć wiele innych przykładów stwierdzających 1szy dział założenia. Streszczając w kilku słowach to cośmy poprzednio powiedzieli, możemy twierdzić, że każde przemieszczanie cząsteczek ciała pociąga za sobą koniecznie ubytek lub zysk pracy i zysk lub ubytek ciepła. Teraz pozostaje nam dowieść prawdziwości drugiego działu tego samego założenia.

Drugi dział dowodzenia. — *Ciepło znikłe lub powstałe jest proporcyonalne do pracy stworzonéj lub wydanéj.* — Poprzednio mogliśmy zauważyć, że ile razy, sprowadzając pewne zmiany w daném ciele, wydaliśmy lub zyskaliśmy *ostatecznie* pewną ilość pracy mechanicznéj, tyleż razy powstała lub znikła dana ilość ciepła. Ztąd bardzo racyonalnie możemy wnosić iż istnieje pewien i dotąd jeszcze nieokreślony związek pomiędzy skutkiem i przyczyną : ciepłem i pracą. Tu, jak i w wielu podobnych razach tylko sumienne badanie zjawisk może nam dostarczyć pewnych danych stwierdzających nasze przypuszczenie, lecz żeby dowieść drogą doświadczenia proporcyonalności pracy i ciepła koniecznėm jest, aby

1) Ciało badane znalazło się w końcu doświadczenia w tém samém stanie co i na początku.

2) Możebném było oznaczyć straty tak w pracy jak i w cieple. Nareszcie,

3) Gdy straty nie dają się wyznaczyć żeby chociaż były proporcyonalne do ciepła i pracy badanych.

Doświadczenia w warunkach poprzednio wzmiankowanych są dziś nader liczne ; przodują im badania p. Joule'a stanowiące epokę w dziejach wiedzy.

Prawie we wszystkich tych doświadczeniach praca mechaniczna została użytą na wywołanie ciepła. Doświadczenia w których obrano drogę odwrotną znajdują się w daleko mniejszéj liczbie, lecz za to doniosłość ich jest znacznie większą.

Pomiędzy zjawiskami w których praca mechaniczna jest wydaną na wywołania ciepła i zjawiskami w których ciepło służy do wykonania pewnéj pracy mechanicznéj zachodzi ogromna i cechująca je różnica. Zkąd ona pochodzi pokażemy to w następującem przykładzie.

Praca spadku wody naprzykład jest *całkowicie* zużytą na wytworzenie pewnéj ilości ciepła i taki tylko jest jéj skutek prawie we wszystkich fabrykach; ciepło zaś maszyn, jaką by nie była ich natura, nie może być całkowicie obrócone na pracę; zawsze i niezbędnie pewna tylko jego ilość przechodzi z jednego ciała na inne. Najmniejsza wartość téj ilości jest ściśle wyznaczoną przez teoryę mechaniczną ciepła; lecz wartość ta jest znacznie mniejszą od wartości straconéj w maszynach zwykłych; i tak : bywają wypadki iż $\frac{1}{20}$ ciepła obróconą jest z korzyścią na pracę $\frac{19}{20}$ przechodzą z jednego ciała na drugie i giną dla nas nieużytecznie.

P. Hirn znakomity fizyk, podał wypadki licznych doświadczeń czynionych w tym celu. Opiszemy tu jedno z nich z wszystkiemi szczegółami.

Doświadczenia P. Hirn. — Śledźmy myślą zjawiska jakie mają miejsce w maszynie gdy ruch jéj stał się jednostajnym. Woda o temperaturze 20 do 30 stopni wchodzi ustawicznie do ogrzewaczów, które, użytkując z korzyścią ciepło inaczéj stracone dymu, podnoszą jéj temperaturę prawie do punktu wrzenia. Przeszedłszy przez ogrzewacze woda wchodzi do kotła, gotuje się i ulatnia przy stałém ciśnieniu dzięki ciepłu dostarczonemu przez ognisko. Po wyjściu z kotła para wchodzi do walca i z początku działa na tłok z siłą ciśnienia w kotle, a potém, gdy styczność jéj z kotłem została przeciętą działa przez rozprzężenie. Skoro tylko tłok doszedł do kresu swego skoku, mięszanina wody i jéj pary zostaje oziębioną, skrapla się i tracąc prawie zupełnie swą prężność pozwala tłokowi swobodnie i bez przeszkody wykonać ruch wsteczny. Jeżeli w końcu doświadczenia znajdziemy w skraplaczu mniejszą ilość ciepła niż ilość dostarczona przed wejściem pary do walca, jasném jest z natury rzeczy, że różnica została obróconą na wykonanie pracy zewnętrznéj. Zapatrując się na rzecz z punktu badania zbiór doświadczeń jakie mamy wykonać składa się z

1) Oznaczenia ciepła całkowitego jakie woda posiada w kotle;

2) Oznaczenia ciepła całkowitego jakie posiada woda w skraplaczu;

8) Oznaczenia pracy zewnętrznéj dokonanéj.

1° *Oznaczenie ciepła całkowitego jakie woda posiada w kotle.* — Wiemy z całą dokładnością jaką tu jest konieczna ilość ciepła aby podnieść temperaturę kilograma wody z zera na t stopni i ulotnić go.

Ilość ta λ_t ma wartość przybliżoną następującą

$$\lambda_t = 606{,}5 + 0{,}305\, t.$$

Jeżeli więc kocioł maszyny badanéj pracuje przy ciśnieniu p i temperaturze stałéj t, każda waga m wody zamienionéj na parę spotrzebuje ilość ciepła $m\lambda$, co nam daje,

$$Q = m\lambda = m\,(606{,}5 + 0{,}305\, t).$$

Para wychodząc z kotła pociąga za sobą pewną ilość wody; woda ta także posiada temperaturę t. Wzory p. Regnault dają nam ilość ciepła potrzebną do podniesienia temperatury kilograma wody z zera na t stopni nie ulatniając go. Wzór ten ma następujący kształt,

$$\mu_t = t + 0{,}00002\, t^2 + 0{,}0000003\, t^3.$$

Oznaczmy więc przez M wydatek kotła na jeden skok tłoka. Waga wody porwanéj przez parę jest $(M - m)$, a zatém mamy dla wartości całkowitéj ciepła dostarczonego,

$$Q = (606{,}5 + 0{,}305\, t)m$$
$$+ (M - m)\,(t + 0{,}00002\, t^2 + 0{,}0000003\, t^3)$$

aby podnieść temperaturę M z zera na t stopni.

Dla ścisłego oznaczenia wagi M trzeba znać dokładnie wagę wody dostarczonéj kotłowi przez cały dzień i podzielić ją przez liczbę skoków.

W ten sposób nader prosty jak to mogliśmy spostrzedz, jesteśmy w możności ściśle oznaczyć ilość ciepła dostarczoną.

2° *Oznaczenie ilości ciepła oddanéj skraplaczowi.*

Niech będą,

II ilość całkowita wody wyrzuconéj w czasie gdy tłok wykonywa jeden skok;

m ilość pary;

i temperatura wody wprowadzonéj;

f « « wyrzuconéj.

Ilość ciepła otrzymanego ma więc wartość,

$$Q_0 = (\Pi - m)\left[(f - i) + 0{,}00002\,(f^2 - i^2) + 0{,}0000003\,(f^3 - i^3)\right];$$

lub opuszczając wyrazy $0{,}00002\,(f^2 - i^2)$; $0{,}0000003\,(f^3 - i^3)$ jako mało znaczące otrzymamy:

$$Q_0 = (\Pi - m)(f - i),$$

zadanie więc jest sprowadzone do oznaczenia empirycznego ilości i, f, Π.

3) **Oznaczenie pracy dokonanéj.** — Dla oznaczenia pracy zewnętrznéj użytecznéj p. Hirn użył hamulca p. Prony i skazówki Watta.

Oznaczając przez F pracę zewnętrzną, mamy,

$$m\,(606{,}50 + 0{,}305\,t - f) + 0{,}5\,(\theta - t) = AF + (\Pi - m)(f - i) + a,$$

a przedstawia ilość ciepła wytworzoną przez tarcie i inne opory bierne.

Podstawiając następne dane liczebne:

1) $\Pi = 43$;

2) Ciśnienie w kotle $4^{\text{atm.}},20$;

3) Temperatura kotła 145°;

4) « pary przegrzanéj 228 stopni;

5) « i « $16^{\circ},15$;

6) « f « $30{,}91$;

7) Waga pary $0^{\text{kg}},1987$;

8) Waga wody wrzuconéj $7^{\text{kg}},7323$;

9) Praca zebrana $5318^{\text{kgm}},8$.

W równaniu poprzedniém mamy

$$a + AF = 13{,}99,$$

a jest równem $1^{\text{ciep}},5$,
a więc

$$AF = 12{,}49,$$

zkąd

$$\frac{F}{12{,}49} = \frac{1}{A} = 425{,}83 = E = \text{równoważnik ciepła.}$$

P. Hirn zrobił doświadczenie na maszynie najprzód pracującéj z rozprzężeniem a potém prawie bez rozprzężenia, lecz dającéj tę samą pracę zewnętrzną.

Wypadki liczebne tych dwóch doświadczeń są następujące.

PIERWSZE DOŚWIADCZENIE.

Rozprzężenie 1 : 5.

Dane :

Ciśnienie w kotle 5 atmosfer = 51667kg;

Temperatura przegrzania 228 stopni;

Waga wody wrzuconéj na sekundę 5kg, 7253;

Temperatura $i = 17^0,3$;

« $f = 39^0,56$;

Waga wody wyrzuconéj na sekundę 5kg, 9567;

« pary zużytéj « « 5,9567 — 5,7253 = 5kg2314;

Praca zewnętrzna F = 9800 kilogrammetrów.

Podstawiając te dane w równanie ogólne mamy,

$$AF = 23^{\text{ciep.}}26;$$

dzieląc zaś F = 9800 przez E = 425 otrzymujemy

$$AF = \frac{F}{E} = 23^{\text{ciep.}},1.$$

Różnica pomiędzy dwiema wartościami AF jest nader zbliżoną i zawdzięcza swą istność jedynie niedokładnościom doświadczenia których uniknąć zupełnie jest niepodobném.

DRUGIE DOŚWIADCZENIE.

Rozprzężenie prawie równe zeru.

Dane :

Waga wody wrzuconéj 5kg,7253;

« « wyrzuconéj 5kg,9793;

« pary zużytéj 0kg,254;

Temperatura $i = 17^0,6$;

« $f = 42^0,08$,

« przegrzania 228;

Praca zewnętrzna 9800 kilogrammetrów.

Na mocy tych danych i równania (α) mamy

$$AF = 24^{\text{ciep.}},63.$$

Widzimy więc że mimo zupełnie odrębnych warunków, w jakich maszyna działała, ilość ciepła stracona dla skraplacza jest prawie tą samą co i w poprzedniém doświadczeniu, jedynie dla tego, iż praca zewnętrzna jest ta sama.

Zbytecznémby łoby mnożyć liczbę przykładów : wystarcza wysłowić je w następujący sposób :

Jaką by nie była wartość ciśnienia, temperatury i rozprzężenia pary, ilość ciepła nie zwrócona wodzie skraplacza jest zawsze proporcyonalną do pracy całkowitéj wykonanéj przez maszynę.

Wszystkie doświadczenia wykonane w tym kierunku dają dla stosunku $\frac{Q_1 - Q_0}{F} = \frac{1}{E} = A.$

Q_1 ilość ciepła dostarczona wodzie kotła;

Q_0 « « oddana skraplaczowi;

F praca zewnętrzna,

prawie tę samą wartość i tém samém dążą do wskazania pewnego niewzruszonego prawa.

TRZECI DZIAŁ DOWODZENIA. — **Pojęcie o równoważniku ciepła wypływające z praw Mariotte'a i Gay-Lussac'a.**

Pewien stosunek stały i jedyny istnieje pomiędzy ilością ciepła znikłą lub powstałą a pracą wytworzoną lub zużytą. Wartość tego stosunku.

Gdy ciepło rodzi pracę mechaniczną lub gdy praca wywołuje pewną ilość ciepła, ilości pracy i ciepła są, jak to poprzednio dowiedliśmy, związane prawem proporcyonalności. Istność tego prawa rodzi pojęcie istności innego prawa bardziéj ogólnego, prawa stosunku; stosunek ten jest niczém inném jak tylko równoważnikiem mechanicznym ciepła $E = \frac{F}{Q}$. Przepaść jaka rozdziela wysłowienie tego prawa od udowodnienia go drogą doświadczenia jest trudną do przebycia, mając na względzie tysiące trudności że tak powiemy nieuniknionych; w następnych stronicach powiemy słów kilka o wyznaczeniu wartości równoważnika drogą doświadczenia; lecz przedtém pokażemy : 1) jakie być winny te doświadczenia, 2) wskażemy wartość najbardziéj prawdopodobną równoważnika mechanicznego ciepła.

Aby wykazać dokładnie prawo proporcyonalności pomiędzy ilościami ciepła i pracy, wystarcza zupełnie, aby ubytki ich były także proporcyonalne do pracy. I tak w maszynie parowéj mogliśmy sprawdzić to prawo pomimo strat ciepła i pracy.

Warunki poprzednio wzmiankowane nie wystarczają już gdy chcemy oznaczyć wartość rzeczywistą równoważnika. Koniecznémjest w tym razie, aby wszystkie straty ciepła i pracy dały się wyznaczyć z całą dokładnością. Niezbędnem jest także, ażeby ciało badane, już to powróciło zupełnie do stanu pierwotnego w końcu téj pracy lub innemi słowy przebiegło *obieg* zamknięty.

Doświadczenia odbyte na maszynach parowych nie mogą służyć do poprawnego wyznaczenia wartości równoważnika.

Tu wprawdzie ciało badane przebiega obieg zamknięty, nadto straty postronne dają się wyznaczyć dosyć przybliżenie, lecz wartość równoważnika daną jest w funkcyi różnicy ciepła dostarczonego i zwróconego. Jasném więc jest że błąd nawet bardzo przybliżony popełniany na wartościach Q_1 i Q_0 zdwaja się prawie dla ich różnicy a przez to w kilogramie wpływa na niedokładność wartości E równoważnika. Zbytecznémjest dodać, że inne maszyny termiczne jeszcze mniéj zadosyć czynią warunkom żadanym.

Doświadczenia mające na celu oznaczenie wartości równoważnika mechanicznego ciepła są nader liczne i opis ich szczegółowy znajduje się we wszystkich traktatach fizyki. Dostatecznėm więc będzie, jak sądzę, podać tylko ich wypadki liczebne, które znajdzie czytelnik na końcu niniejszéj pracy.

Ciecze i gazy rozgrzewają się przez zużycie siły. W naczyniu napełnionėm wodą lub rtęcią osadźmy rodzaj młynka utworzonego z dwóch deseczek złożonych na krzyż a obracając go szybko; widzimy że ciecz stawiając opór niszczy pewną część pracy, termometr zaś w naczyniu umieszczony wskazuje ogrzewanie się cieczy tém znaczniejsze, im nakład pracy jest większy; a tém samém i szybsza chyżość obrotu.

Lekarz Mayer w Hoelbroun napełnił butelkę wodą, w któréj zanurzony termometr wskazywał 12 stopni ciepła; przez proste wstrząsanie naczynia zdołał on podnieść temperaturę wody o jeden stopień.

Przez ściskanie gazów wywiązuje się ciepło; dowodem tego jest znane krzesiwko powietrzne; jest to pusty walec metalowy w którym tłok szczelnie do ścianek walca przystający daje się posuwać na górę i na dół; na spodniéj części tłoka przyczepiony jest kawałek hubki, otóż jeżeli tłok silnie na dół zepchniemy, to w skutek ciśnienia powietrza, wywiązuje się tak wielkie ciepło, że się hubka zapala.

Dajmy jeszcze jeden przykład.

Weźmy kilogram gazu suchego czyniącego zadość prawom Mariotte'a i Gay-Lussac'a i którego ciepliki gatunkowe przy stałéj objętości i przy stałém ciśnieniu są niezależne od temperatury i ciśnienia. Takim gazem może być powietrze, kwasoród, wodoród lub azot.

Umieśćmy powyższy gaz w walcu metalowym zamkniętym przez tłok ściśle przystający, na który działać będzie siła, dająca się zamieniać stosownie na naprężenie gazu.

Nakreślmy dwie osie współrzędnych prostokątnych i obierzmy za zmienne: ciśnienie i objętość (p,v). Krzywa wynikła z różnych wartości zmiennych p,v przedstawiać będzie zmiany, jakich gaz nasz dozna.

Wiemy iż Mariotte i Gay-Lussac znaleźli dla gazów związki, które wyrazili analitycznie przez równość

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t),$$

v_0 i p_0 są objętość i ciśnienie przy temperaturze zero, α jest współczynnikiem rozszerzalności.

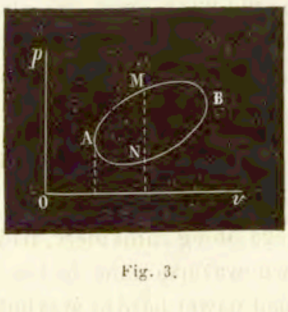

Fig. 3.

Oznaczmy przez c i C ciepliki gatunkowe przy stałéj objętości i przy stałém ciśnieniu. Starajmy się znaleźć ilość ciepła dQ którą trzeba dostarczyć kilogramowi gazu zawartego w walcu gdy zmienne p i v przybierają przyrostki i stają się $p + dp$, $v + dv$.

Ilość ciepła zawarta w gazie jest funkcyą ciśnienia i objętości tegoż gazu. A więc

$$Q = f(p, v),$$

różniczkując otrzymamy,

$$dQ = \frac{dQ}{dp} . dp + \frac{dQ}{dv} . dv,$$

dQ jest summą dwóch wyrazów z których pierwszy oznacza ilość ciepła potrzebną do sprowadzenia w ciśnieniu zmiany dp, pozostawiając objętość stałą, drugi zaś wyraz przedstawia ilość ciepła potrzebną do sprowadzenia w objętości zmiany dv, pozostawiając ciśnienie stałém.

Równanie $pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$ zróżniczkowane daje nam

$$dt = \frac{1}{\alpha p_0 v_0} (pdv + vdp),$$

co pokazuje, że jeżeli objętość pozostaje stała, zmiana temperatury odpowiadająca zmianie dp ciśnienia jest $\frac{1}{\alpha p_0 v_0} vdp$ i wymaga $\frac{c}{\alpha p_0 v_0} vdp$ ilości ciepła.

Toż samo równanie zróżniczkowane pokazuje nam, że jeżeli ciśnienie pozostaje stałém, zmiana temperatury odpowiadająca przyrostowi dv objętości jest

$$\frac{1}{\alpha p_0 v_0} pdv$$

i wymaga

$$\frac{C}{\alpha p_0 v_0} pdv \text{ ilości ciepła,}$$

mamy więc

$$dQ = \frac{c}{\alpha p_0 v_0} v\, dp + \frac{C}{\alpha p_0 v_0} pdv,$$

lecz

$$\frac{vdp}{\alpha p_0 v_0} = dt - \frac{1}{\alpha p_0 v_0} pdv,$$

podstawiając otrzymamy

$$dQ = cdt + \frac{C - c}{\alpha p_0 v_0} pdv$$

i całkując

$$Q = c(t - t_1) + \frac{C - c}{\alpha p_0 v_0} \int_{v_1}^{v} pdv.$$

Dopuśćmy że gaz zamknięty w walcu metalowym przeszedłszy przez szereg zmian w ciśnieniu i objętości, powrócił do stanu w jakim się początkowo znajdował. Krzywa opisana przez punkt M będzie krzywą zamkniętą AMBNA (fig. 3).

Powierzchnia płaska AMBNA przedstawia pracę zewnętrzną wykonaną przez siłę elastyczną gazu, pracę wyrażoną analitycznie przez $\int pdv$.

Ilość ciepła użyta do sprowadzenia szeregu zmian przez które przeszedł gaz, jakkolwiek ten ostatni powrócił do stanu w jakim się początkowo znajdował, nie jest równą zeru, lecz wartość jej jest dana przez równanie poprzednie, w którém trzeba uczynić $t_1 = t$,

$$Q = \frac{C - c}{\alpha p_0 v_0} \times \text{praca dokonana.}$$

Liczba $\frac{\alpha p_0 v_0}{C - c}$ przez którą trzeba pomnożyć ilość ciepła wyrażoną w ciepłostkach, aby otrzymać pracę równoważną w kilogrammetrach, dałaby się z łatwością oznaczyć, gdyby znano gaz ściśle podlegający prawom Mariotte'a i Gay-Lussac'a.

Liczba $\frac{\alpha p_0 v_0}{C - c}$ dla gazów stałych, gazów tylko przybliżenie podlegających prawom Mariotte'a i Gay-Lussac'a ma następujące wartości.

Dla powietrza	426,
kwasorodu	425,7,
azotu	431,3,
wodorodu	425,3.

Przecięciowa wartość téj liczby w przybliżeniu jest 425.

Prawie wszyscy autorowie zgadzają się iż 425 kgm. jest wartością równoważnika mechanicznego ciepła najbardziéj prawdopodobną.

ROZDZIAŁ III

CIEPLIK.

§ 1. TEMPERATURA.

1° **Twierdzenie pierwsze.** *Stan ciała mniéj więcéj gorący lub zimny nazwanym został jego temperaturą.*

Można się przekonać doświadczalnie, że jeżeli pogrążymy jakiekolwiek ciało w środzie mającym temperaturę stałą i nie przekraczającą pewnych granic, ciało to przybierze pewną objętość, jeżeli zaś pogrążymy to samo ciało w środzie różnym od pierwszego tylko temperaturą, ciało przybierze jakąś inną objętość.

Dla większéj łatwości zrozumienia niech będą t i t' temperatury środu S.

Ciało C pozostając w środzie S o temperaturze t przybiera objętość v; to samo ciało C w środzie S mającym temperaturę t' przybierze objętość v' różną od v.

Nakoniec jeżeli pogrążymy napowrót ciało C w środzie S o temperaturze t, ciało przybierze objętość v, objętość już przybraną w pierwszém doświadczeniu.

Z powyższych doświadczeń możemy wnosić, że istnieje pewien związek między temperaturą i objętością ciała. W tych doświadczeniach ciśnienie pozostawało stałém.

Przeczuwamy zatém, że ciśnienie, temperatura i objętość gatunkowa ciała, połączone są z sobą pewnym związkiem

$$f(t, v, p) = 0.$$

Postać téj funkcyi nie jest znaną dla wszystkich ciał.

Prawa Gay-Lussac'a i Mariotte'a dają dla gazów stałych wzór bardzo zbliżony do prawdy.

Objętość wszystkich ciał z bardzo małym wyjątkiem powiększa się, gdy podnosimy ich temperaturę, zmniejsza się zaś, gdy ją zniżamy.

Objętość ciała, może służyć do oznaczenia temperatury i jeżeli urządzimy się w taki sposób, aby poznanie zmian zaszłych w jego objętości było widoczném, zbudujemy narzędzie pospolicie znane i zwane ciepłomierzem.

Ciało ciepłomiernicze używane w badaniach skutków cieplika, jest ciepłomierz o słupie powietrza.

Ciepłomierz nie służy do mierzenia temperatur, lecz do ich porównywania.

2° **Ciepłostka lub jedność ilości ciepła**. Aby można było zmierzyć ilość ciepła, trzeba zrobić przypuszczenie, że jeżeli ciało będące w pewnych warunkach ciśnienia i temperatury potrzebuje pewnéj ilości cieplika do sprowadzenia zmian w jego temperaturze, to samo ciało za każdym razem powtarzamy, znajdując się w tych samych warunkach ciśnienia i temperatury, będzie potrzebować téj saméj ilości ciepła dla sprowadzenia tychże samych zmian w temperaturze.

Zgodzono się uznać za jedność ilości ciepła, ilość potrzebną do podniesienia temperatury, kilograma wody płynnéj z 0° na 1°, gdy ciśnienie powietrza mierzy się słupem rtęci wysokim na $0^m,76$.

Jedność tę nazwano CIEPŁOSTKĄ (calorie).

3° **Cieplik gatunkowy**. Pojmujemy, że ilości ciepła potrzebne do podniesienia temperatury wody w stanie płynnym i jakiegokolwiek ciała, są różne.

Ilość ciepła potrzebna do podniesienia o jeden stopień temperatury jednego kilograma wody w innych warunkach także byłaby różną, jeżeliby np. temperatura początkowa była wyższą lub niższą od zera.

Jeżeli oznaczymy przez ΔQ ilość ciepła wyrażoną w ciepłostkach którą trzeba dostarczyć jednemu kilogramowi ciała, aby jego temperatura powiększyła się o ilość Δt, wyrażoną w stopniach ciepłomierza, *granica* stosunku $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ przedstawiać będzie cieplik gatunkowy w oznaczonych warunkach (objętość pozostaje stałą),

$$\text{gr.}\ \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = C.$$

Wartość C jest zmienną z naturą i z warunkami w jakich się znajduje ciało.

Pierwsze twierdzenie zasadnicze teoryi mechanicznéj ciepła, wypływające z twierdzenia sił żywych, możemy teraz przedstawić przez wzór

$$\Delta U = \Sigma PF \text{ zewnętrz} + EQ.$$

Zwykle siłami zewnętrznemi są ciśnienia normalne działające na całą powierzchnię ciała.

Jeżeli oznaczymy przez S summę prac oddziaływań ciała którém się zajmujemy, na ciała zewnętrzne, summa prac sił zewnętrznych będzie S i równanie poprzednie zamieni się na

$$EQ = \Delta U + S$$

lub

$$Q = A(\Delta U + S).$$

Pokazuje ono, że *ilość cieplika wydana lub pochłonięta przez ciało jest równoważną przyrostowi dzielności więcéj pracy zewnętrznéj dokonanéj przez ciało.*

Stosunek E nazwanym został równoważnikiem mechanicznym cieplika, jest to liczba kilogrammetrów równa jednéj ciepłostce (calorie).

Gdy ciało powraca do stanu, w którém się początkowo znajdowało, ΔU jest równe zeru i równanie poprzednie staje się

$$EQ = S.$$

Ilość cieplika wydana lub pochłonięta przez ciało równoważną jest ilości pracy zewnętrznéj dokonanéj przez ciało.

4° **Wnioski z pierwszego twierdzenia.** — Widzieliśmy poprzednio, że temperatura t, objętość gatunkowa v i ciśnienie p, połączone są z sobą pewnym związkiem

$$f(t, v, p) = 0.$$

przedstawiającym równanie o trzech zmiennych

Dwie którekolwiek wystarczają do oznaczenia stanu fizycznego ciała. Obierzmy v i p.

Następująca figura geometryczna będzie nam wielce pomocną w rozumowaniu.

Dla tego nakreślmy w płaszczyznie dwie osie współrzędnych Ov i Op prostokątne i uważajmy punkt M płasczyzny, którego odcięta OM jest równą v, a rzędna M'M równą p; położenie jakie punkt M zajmuje na płasczyznie przedstawiać będzie stan ciała. Jeżeli ciało przejdzie ze stanu A do stanu B cały rząd przeobrażeń przedstawiać będzie linia AMNB.

Powierzchnia płaska AA' BB', wyraża pracę zewnętrzną S jaką ciało wykonało. Rzeczywiście wi-

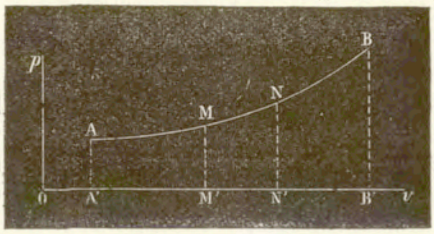

Fig. 4.

dzieliśmy, że jeżeli ciało bez ruchu znacznego znajduje się pod wpływem ciśnienia jednostajnego, praca zewnętrzna odpowiadająca przeobrażeniu nieskończenie małemu MN wyraża się przez

$$dS = pdv;$$

praca ta jest równa powierzchni małego prostokąta MNN'M', a zatém praca zewnętrzna dokonana przez ciało przechodząc ze stanu A do stanu B jest przedstawioną geometrycznie przez powierzchnię płaską AA' BB' zależną od postaci krzywéj AMNB.

5° **Równania Clausiusa**. — Zadaniem termodynamiki jest badać zmiany i przeobrażenia ciał jednorodnych, mających wszędzie w całéj ich wielkości tę samą gęstość, tę samą objętość gatunkową v, tę samą temperaturę i będących pod wpływem jednostajnego ciążenia na całéj ich powierzchni. Stan ciała w tych warunkach, zależy w ogólności od dwóch zmiennych niezależnych: dzielności rzeczywistéj V i dzielności utajonéj W.

Wszystkie ilości cechujące fizyczny stan ciała, a mianowicie temperatura t, objętość gatunkowa v i ciśnienie p, zależą od V i W i są funkcyami tych dwóch ilości.

$$t = f_1(V, W) \quad v = f_2(V, W) \quad p = f_3(V, W),$$

Mamy trzy równania o pięciu niewiadomych, z których dwie którekolwiek można uważać za zmienne niezależne (v i p).

Równanie zasadnicze,

$$Q = A(\Delta U + S),$$

zróżniczkowane, czyli

$$dQ = A(dU + dS),$$

daje się zastąpić przez

$$(a) \qquad dQ = A(dU + pdv)$$

dQ nie jest różniczką całkowitą zmiennych v i p.

Obierzmy za zmienne niezależne ilości v i p i wyraźmy dzielność całkowitą w funkcyi v i p

$$U = f(v, p),$$

różniczkując, otrzymamy

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v}dv + \frac{\partial U}{\partial p}.dp$$

równanie (*a*) daje nam

$$dQ = A\left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right)dv + A\left(\frac{\partial U}{\partial p}dp\right)$$

i zakładając dla skrócenia

$$X = \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right),$$

$$Y = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)$$

równanie (*a*) daje się sprowadzić do postaci

$$dQ = Xdv + Ydp.$$

Funkcye X i Y połączone są z sobą pewnym związkiem. Mamy rzeczywiście

$$\frac{\partial X}{\partial p} = A\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial p} + A,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = A\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial v};$$

ztąd otrzymujemy

$$\frac{\partial X}{\partial p} - \frac{\partial Y}{\partial v} = A.$$

Co pokazuje, że druga strona równania nie jest różniczką całkowitą.

Obierzmy teraz za zmienne niezależne *t* i *v*

$$U = \varphi(t,v)$$

różniczkując będzie

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial v}dv$$

rownanie (*a*) daje nam

$$dQ = A\frac{\partial U}{\partial t}\cdot dt + A\left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right)dv,$$

zakładając

$$c = A\frac{\partial U}{\partial t},$$

$$l = A\left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right);$$

otrzymamy

$$dQ = cdt + ldv$$

funkcye c i l mają znaczenie fizyczne,

c jest cieplikiem gatunkowym ciała przy stałéj objętości,

l jest cieplikiem utajonym rozszerzalności.

Rzeczywiście, czyniąc w równaniu poprzedniém

$$dv = 0,$$

mamy

$$\frac{dQ}{dt} = c \text{ cieplik gatunkowy.}$$

Jeżeli zaś zrobimy

$$dt = 0,$$

otrzymamy

$$\frac{dQ}{dv} = l \text{ cieplik utajony.}$$

Między funkcyami c i l istnieje związek, którego postaramy się dowieść.

Z tego co poprzedza mamy

$$\frac{\partial c}{\partial v} = A \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial v},$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = A \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial t} + A \frac{\partial p}{\partial t},$$

odejmując odpowiednio będzie

$$\frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial v} = A \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Ostatecznie obierzmy za zmienne ilości t i p,

$$U = \pi(t, p) \quad \text{i} \quad v = \gamma(t, p),$$

różniczkując wypada

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial p} dp,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial p} dp,$$

równanie (a) daje nam

$$dQ = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t}\right) \partial t + A\left(\frac{\partial U}{\partial p} + p \frac{\partial v}{\partial p}\right) dp,$$

zakładając

$$C = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

$$h = A\left(\frac{\partial U}{\partial p} + p \frac{\partial u}{\partial p.}\right),$$

otrzymamy

$$dQ = Cdt + hdp$$

Funkcya C jest cieplikiem gatunkowym ciała przy stałém ciśnieniu.

Jeszcze inny związek istnieje pomiędzy C i h. Mamy

$$\frac{\partial h}{\partial t} = A\left(\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial t} - p\frac{\partial^2 v}{\partial p dt}\right),$$

$$\frac{\partial C}{\partial p} = A\left(\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial t} + p\frac{p\partial^2 v}{\partial t \partial p} + \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

odejmując otrzymamy

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p} = -A\frac{\partial v}{\partial t}$$

---

§ 2gi O KSZTAŁCIE FUNKCYJ λ i μ.

6° **Twierdzenie pomocnicze.** — Poprzednio otrzymaliśmy równanie

$$dQ = A\left[\frac{\partial U}{\partial v} + p\right]dv + A\frac{\partial U}{\partial p}dp.$$

lub zakładając dla skrócenia

$$X = A\left[\frac{\partial U}{\partial v} + p\right],$$

$$Y = A\frac{\partial U}{\partial p},$$

(1) $$dQ = Xdv + Ydp.$$

Wiemy również, że druga strona tego równania nie jest różniczką zupełną ilości v i p. Rachunek całkowy daje nam sposób znalezienia pewnéj funkcyi zmiennych v i p, przez którą pomnożona funkcya dQ da się zcałkować. Powtórzymy tu to dowodzenie

Równanie różniczkowe

$$Xdv + Ydp = 0,$$

w którém zmienna v jest funkcyą ilości p i odwrotnie, ma swą całkę ogólną, niech tą całką będzie

$$F(v, p) = \mu$$

gdzie μ jest stałą dowolną.

Równanie

$$F(v, p) = \mu,$$

zróżniczkowane, daje nam

$$F'_v \, dv + F'_p \, dp = 0,$$

lub

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{F'_v}{F'_p}.$$

Wartość stosunku $\frac{dp}{dv}$ winna być równą wartości tegoż samego stosunku, danéj przez równanie różniczkowe, a więc

$$\frac{X}{Y} = \frac{F'_v}{F'_p}.$$

Równanie to powinno zadosyć uczynić wszystkim warunkom zmiennych v i p, a zatém

$$\frac{X}{F'_v} = \frac{Y}{F'_p} = \lambda,$$

gdzie λ jest pewną funkcyą zmiennych v i p.

Z powyższego otrzymamy

$$\frac{X}{\lambda} = F'_p \quad \text{i} \quad \frac{Y}{\lambda} = F'_p.$$

Dzieląc obiedwie strony równania różniczkowego (1) przez λ znajdziemy

$$\frac{dQ}{\lambda} = \frac{X}{\lambda} dv + \frac{Y}{\lambda} dp,$$

lub

$$\frac{dQ}{\lambda} = F'_v dv + F'_p \, dp,$$

druga strona tego równania jest różniczką całkowitą funkcyi

$$F(v, p) = \mu,$$

a zatém

$$\frac{dQ}{\lambda} = d\mu.$$

Dochodzimy więc do twierdzenia, że istnieje taka funkcya λ dwóch zmiennych niezależnych, która dzieląc wyrażenie dQ, czyni je różniczką zupełną. Dowiedziemy obecnie, iż istnieje cały szereg funkcyj posiadających te same własności co funkcya λ, w saméj rzeczy :

Niech będzie λ_1 jedną z takich funkcyi, otrzymamy

$$\frac{dQ}{\lambda_1} = d\mu.$$

Jeżeli założymy $\lambda = \lambda_1 \varphi(\mu)$ gdzie $\varphi(\mu)$ jest funkcyą dowolną μ, znajdziemy

$$\frac{dQ}{\lambda} = \frac{\lambda_1 \, d\mu}{\lambda_1 \varphi(\mu)} = \frac{d\mu}{\varphi(\mu)}.$$

druga strona równania ostatniego jest widocznie różniczką zupełną pewnéj funkcyi $\psi(\mu)$, to jest że mamy

$$\psi(\mu) = \int \frac{d\mu}{\varphi(\mu)}.$$

Możemy więc powiedzieć, że jeżeli znamy funkcyę λ czyniącą wyrażenie $\frac{dQ}{\lambda}$ różniczką zupełną, możemy otrzymać inną funkcyę, posiadającą tę samą własność mnożąc λ przez funkcyę dowolną μ.

2. **Prawo Joule'a.** — *Dzielność wewnętrzna gazu jest wyłącznie funkcyą temperatury a nie jego objętości.*

Aby udowodnić powyższe prawo Joule zrobił następujące doświadczenia :

Zanurzył w wodzie dwa klosze metalowe równéj objętości, połączone z sobą za pomocą rury obdarzonéj kurkiem. Poprzednio w jednym z nich zgęścił powietrze pod ciśnieniem 22 atmosfer w drugim zaś uczynił próżnię.

Po uczynieniu tego co się wyżéj powiedziało, otworzono kurek. Powietrze zgęszczone przeszło do klosza, w którym próżnię uczyniono i ciśnienie zostało sprowadzone ostatecznie do 11 atmosfer.

Ciepłomierz nadzwyczaj czuły nie okazał najmniejszéj zmiany w temperaturze, — lecz także żadna praca zewnętrzna nie została dokonaną. Gaz podwoił swą objętość, a temperatura jego pozostała niezmienną. Prawo Joule'a da się wytłomaczyć analitycznie.

Rzeczywiście równanie zasadnicze teoryi mechanicznéj ciepła daje nam

$$EQ = \Delta U + S,$$

lub

$$Q = A\,(\Delta U + S). \tag{α}$$

Poprzednio otrzymaliśmy

$$Q = c\,(t - t_1) + \frac{C - c}{\alpha p_0 v_0} \int_{v_1}^{v} p\,dv \tag{β}$$

w którém

$$\frac{C - c}{\alpha p_0 v_0} = \frac{1}{E} = A$$

Odejmując (α) i (β) otrzymamy

$$\Delta U = c\,\frac{(t - t_1)}{A}$$

to jest; że dzielność wewnętrzna gazu doskonałego jest wyłącznie funkcyą jego temperatury a nie objętości

$$U = f(t).$$

3° **Wnioski.** — PIERWSZY WNIOSEK. — Wartość ogólna cieplika gatunkowego przy stałéj objętości jest daną przez

$$c = A\frac{\partial U}{\partial t}.$$

W przypadku szczególnym gazów, druga strona równania jest wyłącznie funkcyą temperatury t, więc : *cieplik gatunkowy gazu przy stałéj objętości jest wyłącznie funkcyą temperatury tegoż gazu.*

DRUGI WNIOSEK. — Poprzednio otrzymaliśmy dla cieplika gatunkowego jakiegokolwiek ciała wyrażenie,

$$C = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Dla gazów znamy związki łączące temperaturę, ciśnienie i objętość; ztąd wyprowadzamy

$$v = \frac{1}{p}\,\alpha v_0 p_0 (a + t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\alpha v_0 p_0}{p},$$

$$a = \frac{1}{\alpha},$$

więc

$$C = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha p_0 v_0\right),$$

t. j. cieplik gatunkowy gazu przy stałém ciśnieniu jest wyłącznie funkcyą temperatury tegoż gazu.

TRZECI WNIOSEK. — Odejmując c od C otrzymamy związek

$$C - c = A\alpha p_0 v_0.$$

A więc : Różnica między cieplikami gazu przy stałém ciśnieniu i przy stałéj objętości jest ilością stałą dla każdego gazu. Wartość zaś

$$\frac{C - c}{v_0} = A\alpha p_0$$

jest ilością stałą dla wszystkich gazów.

CZWARTY WNIOSEK. — Udowodniliśmy poprzednio, że dzielność wewnętrzna gazu jest wyłącznie funkcyą temperatury tegoż gazu. A więc

$$\frac{\partial U}{\partial v} = 0.$$

Wyrażenie otrzymane dla cieplika utajonego rozszerzalności jakiegokolwiek ciała, staje się dla gazów następującém

$$l = Ap.$$

Co dowodzi, że cieplik utajony rozszerzalności znajduje się w prostym stosunku do ciśnienia pod jakiém znajduje się gaz.

Mamy jeszcze ogólnie.

$$h = \mathrm{A}p\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Zkądinąd równanie

$$v = \frac{1}{p}\alpha p_0 v_0 (a + t)$$

zróżniczkowane daje

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\alpha p_0 v_0 (a + t)}{p^2} = -\frac{v}{p};$$

ztąd wynika związek bardzo prosty

$$h = -\mathrm{A}v$$

4° **O szczególnéj wartości funkcyi** λ. — W szczególnym przypadku gazów doskonałych wartość funkcyi λ z łatwością da się oznaczyć, w saméj rzeczy obierzmy za zmienne ilości t i v otrzymamy dla $d\mathrm{Q}$ wartość następującą :

$$d\mathrm{Q} = cdt + ldv.$$

podstawmy za l w ostatniém równaniu jego wartość $l = \mathrm{A}p$, za p wartość otrzymaną z równania

$$p = \alpha p_0 v_0 \left(\frac{a + t}{v}\right),$$

otrzymamy

$$d\mathrm{Q} = cdt + \mathrm{A}\alpha p_0 v_0 (a + t)\frac{dv}{v}$$

zkąd

$$\frac{d\mathrm{Q}}{a + t} = \frac{cdt}{a + t} + \mathrm{A}\alpha p_0 v_0 \frac{dv}{v}$$

druga strona ostatniego równania jest widocznie różniczką zupełną, gdyż c jest wyłącznie funkcyą temperatury, jestto różniczka pewnéj funkcyi μ zmiennych t i v, możemy napisać

$$\frac{d\mathrm{Q}}{a + t} = d\mu.$$

Jedną z wartości funkcyi λ jest $(a + t)$.

Biorąc obecnie za zmienne niezależne t, i p mamy

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{C}dt + hdp.$$

Podstawiając za h jemu równe $-\mathrm{A}v$, będzie

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{C}dt + (-\mathrm{A}vdp).$$

Zastępując v przez jemu równe $\frac{\alpha p_0 v_0 (a+t)}{p}$ znajdziemy

$$dQ = Cdt - A\alpha p_0 v_0 (a+t)\frac{dp}{p},$$

dzieląc przez $a+t$ będzie

$$\frac{dQ}{a+t} = \frac{Cdt}{a+t} - A\alpha p_0 v_0 \frac{dp}{p}.$$

Funkcya C jest wyłącznie zależną od temperatury, druga więc strona poprzedniego równania jest różniczką zupełną pewnéj funkcyi μ zmiennych t i p. Biorąc zaś za zmienne niezależne p i v znajdujemy tę samą wartość $(a+t)$ dla funkcyi λ. Wszystko to pokazuje nam, że jedna z wartości funkcyi λ, w przypadku szczególnym gazów doskonałych, jest wyłącznie funkcyą temperatury.

Okazaliśmy powyżéj, że cieplik gatunkowy C przy stałém ciśnieniu, w przypadku szczególnym gazów, jest wyłącznie funkcyą temperatury; doświadczenie pokazuje, że C jest zupełnie niezależném od temperatury i jest ilością stałą dla każdego ciała.

Wynikiem bezpośrednim powyższego prawa, jest że c musi być ilością stałą, gdyż

$$C - c = A\alpha p_0 v_0.$$

Twierdzenia o cieplikach gatunkowych dają nam możność oznaczenia postaci funkcyi μ. W saméj rzeczy, biorąc za zmienne niezależne t i v otrzymaliśmy

$$\frac{dQ}{a+t} = \frac{cdt}{a+t} + (C-c)\frac{dv}{v} = d\mu.$$

Ponieważ C i c są ilościami stałemi, całkując więc powyższe równanie będzie

$$\mu = \log B(a+t)^c v^{C-c},$$

lub podstawiając za $(a+t)$ jemu równe $\frac{pv}{\alpha p_0 v_0}$ będzie

$$\mu = \log B \frac{p^c v^C}{(\alpha p_0 v_0)^c}.$$

Ponieważ stała B jest dowolną uczyńmy więc $\frac{B}{\alpha p_0 v_0} = 1$, a otrzymamy

$$\mu = \log p^c v^C.$$

Jeżeli weźmiemy za zmienne niezależne t i p otrzymamy

$$\mu = \frac{dQ}{a+t} = \frac{Cdt}{a+t} - (C-c)\frac{dp}{p}.$$

Całką ogólną drugiéj strony równania jest

$$\mu = \log B' \frac{(a+t)^C}{p^{C-c}} = \log \frac{B'}{(\alpha p_0 v_0)^c} p^c v^C,$$

ub wybierając stosownie stałę B'

$$\mu = \log p^c v^C.$$

Do tego samego wypadku przyszlibyśmy, biorąc za zmienne niezależne v i p; mamy więc ostatecznie dla gazów stałych

$$\frac{dQ}{a+t} = d.\log p^c v^C. \tag{1}$$

Prawo Poisson'a — Jeżeli gaz przechodzi przez cały szereg zmian nie wydając ani pochłaniając ciepła w żadnéj chwili trwania tychże zmian, pierwsza strona równania (1) pozostaje wciąż równą zeru, toż samo ma miejsce i z drugą stroną równania (1), a zatém iloczyn $p^c v^C$ pozostaje niezmiennym i to właśnie stanowi prawo Poisson'a.

TWIERDZENIE. — *Przyrosty dzielności wewnętrznéj gazu są proporcyonalne do przyrostów temperatury liczonych na ciepłomierzu.*

Wiemy że

$$c = A\frac{dU}{dt}$$

lub

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{A}c = Ec;$$

a ponieważ c jest stałą, więc

$$U = U_0 + Ec(t - t_0),$$

co dowodzi prawdziwości powyższego twierdzenia.

PRAWO WYPŁYWAJĄCE Z DOŚWIADCZENIA. — Doświadczenie pokazuje nam że stosunek $\frac{C}{v_0}$ cieplika gatunkowego gazu przy stałém ciśnieniu, do jedności objętości tegoż gazu, jest ilością stałą dla wszystkich gazów.

Ponieważ

$$C - c = A\alpha p_0 v_0,$$

jest ilością stałą, więc to cośmy powiedzieli o cieplikn gatunkowym C przy stałém ciśnieniu, da się w zupełności powtórzyć dla cieplika gatunkowego c przy stałéj objętości.

Ilości C i v_0 dadzą się oznaczyć doświadczalnie; podajemy więc poniżéj tablicę ich wartości dla niektórych gazów.

NAZWISKO GAZU	$\frac{1}{v_0}$	C	$C-c=A\alpha p_0 v_0$	$c=C-A\alpha p_0 v_0$	$\frac{C}{v_0}$	$\frac{c}{v_0}$
Powietrze...	1,29318	0,23751	0,0489	0,1686	0,307	0,218
Wodoród....	0,08957	3,40900	0,994	2,415	0,305	0,216

ROZDZIAŁ IV

LINIE ADYABATYCZNE I RÓWNEJ TEMPERATURY.

§ 1.

Twierdzenie Carnot'a. — Objętość gatunkowa, temperatura i ciśnienie wystarczają do dobrego oznaczenia stanu fizycznego jakiegokolwiek ciała.

Niech będzie A jakiekolwiek ciało w stanie równowagi. Ciało to znajduje się w pewnym oznaczonym stanie i wartości cechujące jego własności są p, t, v.

Ciśnienie na metr kwadratowy p, które zakładamy jednostajném na całéj powierzchni ciała jest ciśnieniem lub naprężeniem jego dla wyżéj określonego stanu. Jeżeli ciało zmienia swą postać dosyć powolnie żeby się wciąż znajdować w stanie równowagi, ciśnienie jakie wywiera na otaczający je śród lub powłokę, będzie ciągle równém naprężeniu właściwemu jego stanowi. Jeżeli zaś opór otaczającego środu lub powłoki gwałtownie się zmniejszy, ciało może wywierać na otaczający je śród lub powłokę ciśnienie znacznie mniejsze od swego naprężenia.

Naprężenie właściwe stanowi ciała $f(p, v, t), = 0$ jest największém ciśnieniem jakie to ciało jest zdolném wywierać na swoją powłokę lub téż wywiera rzeczywiście, jeżeli taż powłoka może stawić dostateczny opór.

Poprzednio dowiedliśmy że dla zmiany nieskończenie małéj MN zachodzi związek,

$$\frac{dQ}{\lambda} = d\mu.$$

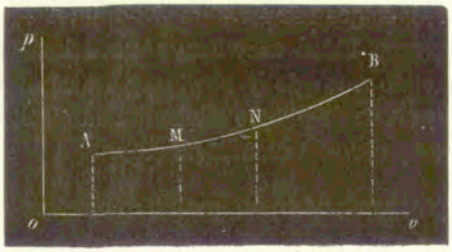

Fig. 5.

Gdy ciało przechodzi ze stanu A do stanu B, cechami których są znaczki 1 i 2, ilość ciepła wydana lub pochłonięta przez to ciało daną jest przez

$$Q = \int_1^2 \lambda d\mu.$$

Całka ta jest zależną nie tylko od stanów krańcowych lecz także od szeregu zmian przez które to ciało przeszło, lub innemi słowy, od postaci krzywéj AB.

Mamy również

$$\int_1^2 \frac{dQ}{\lambda} = \mu_2 - \mu.$$

Druga strona tego równania jest wyłącznie funkcyą stanów końcowych a nie całego szeregu zmian to samo dzieje się koniecznie i z pierwszą jego stroną.

W szczególnym przypadku, gdy ciało powraca do pierwotnego swego stanu, ma miejsce równanie następujące

$$\int \frac{dQ}{\lambda} = 0.$$

Zmiany odwracalne. — Gdy ciało doznaje jakichkolwiek przekształceń połączonych ze zjawiskami ciepłorodnemi zdarza się iż w tych samych warunkach można wywołać odwrotnie tożsamo przekształcenie, zgodzono się nazwać te zmiany *odwracalnemi*. W przeciwnym razie zmiana jest nieodwracalną, jeżeli okoliczności są takie że wywołując je w porządku odwrotnym nie zdolni jesteśmy zmusić ciała do przejścia przez szereg tychże samych stanów, zmian.

Wyobraźmy sobie dwa ciała A i B; A jest ciałem którego zmiany badamy, B zaś jest ciałem zewnętrzném nieskończenie doskonałym przewodnikiem ciepła i nadto zostającém w połączeniu z ciałem B. Urządźmy się w taki sposób aby temperatura tych dwóch ciał pozostawała wciąż jednakową, zmiana w tych warunkach widocznie będzie odwrotną.

Aby zmiana mogła być odwrotną, koniecznėm jest aby ciało zewnętrzne B posiadało tę samą temperaturę co i ciało którego zmiany badamy, albowiem gdyby ciało zewnętrzne B posiadało temperaturę wyższą od temperatury ciała A, ciało B mogłoby przesłać ciału A ilość ciepła potrzebną do przejścia ze stanu M do stanu N, lecz nie mogłoby pochłonąć ciepła, które ciało A powinno wydać przechodząc ze stanu N do stanu M.

Widzimy więc że pierwszym warunkiem odwrotności zmian jest równość temperatury, drugim zaś jak to zaraz zobaczymy jest równość ciśnień.

Nazwaliśmy p ciśnienie odpowiadające temperaturze t i objętości gatunkowéj v. Aby zmiana mogła być odwrotną, ciśnienie zewnętrzne, które nazwiemy p' musi być wciąż równém ciśnieniu p, albowiem, gdyby było mniejszém, ciało A mogłoby powiększyć swą objętość i zmiana odwrotna byłaby nie możebną. Przeciwnie gdyby ciśnienie p' było większém od ciśnienia p objętość ciała A zmniejszyłaby się i zmiana odwrotna byłaby również niemożebną.

W dalszym ciągu niniejszéj pracy mówić będziemy tylko o zmianach odwrotnych.

Pomiędzy *liniami zmian* znajduje sią kilka noszących szczególne nazwiska.

1° Ciało jest zdolne przejść przez cały szereg zmian nie wydając ani pochłaniając ciepła w żadnéj chwili tych zmian, linia przedstawiająca szereg takich zmian nazwaną została przez Rankine'a *adyabatyczną*.

2° Jeżeli ciało przesyła lub pochłania ciepło w sposób taki, że temperatura jego pozosta jesta linia przedstawiająca zmiany nazwaną została *isothermiczną*, lub *równéj temperatury*.

3° Nareszcie nosi miano linii *równéj dzielności*, linia zmian gdy ciało zachowuje ciągle tę samą *dzielność wewnętrzną*; znając prawo zmian ciała z łatwością otrzymamy równanie powyższych linij. W saméj rzeczy, obierzmy za zmienne niezależne ilości p i v, otrzymamy:

(1) $$t = f(v, p),$$

(2) $$U = F(v, p),$$

(3) $$\mu = \varphi(v, p).$$

Jeżeli w powyższych równaniach założymy t stałém, równanie (1) będzie równaniem *linii równéj temperatury*, podobnie równanie (2) przedstawi *linje równéj dzielności* jeżeli przypuścimy że U jest ilością stałą; W końcu zakładając μ stałém; równanie (3) będzie równaniem linij *adyabatycznych*.

Przypuśćmy obecnie że ciało przechodzi ze stanu A (v_1, p_1) do stanu B (v_2, p_2) przebiegając linię

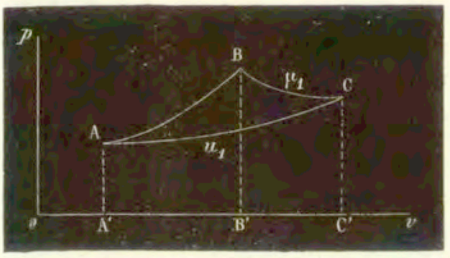

Fig. 6.

mian A B (fig. 6). poprowadźmy przez punkt A linię *równéj dzielności* U_1, a przez punkt B linię *adya atyczną* μ_1, te dwie linie przecinają się w punkcie C. Równanie zasadnicze

$$EQ = \Delta U + S$$

staje się obecnie

$$EQ = U_2 - U_1 + S.$$

Praca zewnętrzna S dokonana przez ciało przedstawioną jest przez powierzchnię trapeza krzywolinijnego ABB'A'. Przyrost dzielności $U_2 - U_1$ przedstawia powierzchnia BCC'B'. Wystawmy sobie że ciało przechodzi ze stanu B do stanu C idąc po linii *adyabatycznéj* μ_2, ponieważ nie ma ciepła zyskanego i dzielność wewnętrzna w punktach A i C jest tą samą, zatém nazywając S' pracę zewnętrzną dokonaną przez tę zmianę otrzymamy

$$U_1 - U_2 + S' = 0$$

lub

$$U_2 - U_1 = S'.$$

Dzielność wewnętrzna zmniejsza się i przekształca w pracę która jest przedstawioną przez powierzchnię trapeza krzywolinijnego BCC'B'. Ilość ciepła przesłana ciału podczas zmiany AB przedstawioną jest w jednościach mechanicznych przez summę powierzchni ABB'A' + BCC'B'.

Kształt linij zmian daje się z łatwością oznaczyć gdy ciałem badaném jest gaz doskonały. Natychmiast dostrzegamy że dla gazów linie równéj temperatury i równéj dzielności zlewają się z sobą. Rzeczywiście, dzielność gazu nieobdarzonego ruchem znacznym będąc wyłącznie funkcyą temperatury, dzielność wewnętrzna pozostaje niezmienną, jeżeli w czasie trwania zmian temperatura pozostawała stałą; możemy ztąd twierdzić że dla gazów, linie równéj dzielności i równéj temperatury są też same.

Każda linia równéj temperatury w przypadku szczególnym gazów jest hiperbolą równoboczną daną przez równanie.

$$pv = \alpha p_0 v_0 (a + t)$$

w którém trzeba uważać t za stałę.

Znaleźliśmy poprzednio iż

$$\mu = \log v^C p^c.$$

Zakładając μ stałém otrzymamy równanie linij *adyabatycznych*.

$$v^{C1} p^c = e^\mu$$

linie te są także liniami kształtu hiperbolicznego, i asymptotami do dwóch osi ov i op. Stała C będąc większą od stałéj c rzędna p zmniejsza się szybciéj niż rzędna hiperboli równobocznéj gdy v powiększa się.

§ 2.

Własności linii równéj temperatury i adyabatycznych. — Twierdzenie. *Dwie linie równéj temperatury nie przecinają się z sobą.*

W każdém ciele temperatura jego jest funkcyą ciśnienia i objętości gatunkowéj.

(α) $$t = f(p, v)$$

Zakładając t stałém otrzymamy równanie ogólne całego rodzaju linii równéj temperatury. Linie należące do jednego i tegoż samego działu różnią się pomiędzy sobą tylko *parametrem* i posiadają własności następujące: Jeżeli przetniemy je linią prostopadłą MF do osi ov punkta przecięcia M i M′, mają rzędne tém większe im parametr jest większy, z warunkiem że ciało uważane jest ciałem powiększającém swą objętość pod wpływem ciepła.

Niech będą dwie krzywe odpowiadające temperaturom t' i t'', przecięte w punktach M i M′ przez prostopadłę AF.

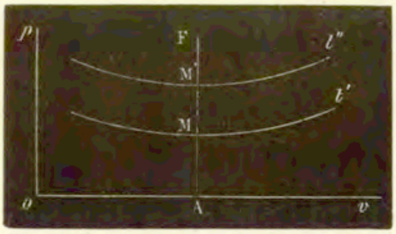

Fig. 7.

Wiemy z doświadczenia że konieczną jest rzeczą żeby, pozostawiając objętość ciała niezmienną, temperatura jego wzniosła się, gdy ciśnienie przeszło z wartości MA do wartości większéj M′A, t'' było większe od t'. Wypada ztąd że dwie linie równéj temperatury nie przecinają się z sobą jeżeli znajdujemy się w granicach w których kierunek zmian objętości nie zwraca się.

Kształt równania linij adyabatycznych. — W ogólności dla wszystkich ciał dzielność wewnętrzna jest funkcyą ciśnienia i objętości gatunkowéj, a zatém

$$U = F(p, v);$$

różniczkując wypada,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial p} dp + \frac{\partial U}{\partial v} dv,$$

lub dla skrócenia

$$dU = X dp + Y dv;$$

podstawiając powyższe wartości w równanie zróżniczkowane równoważnośc

$$dQ = A dU + A dS$$

otrzymamy

$$dQ = AX dp + A(Y + p)\, dv.$$

Równaniem linii adyabatycznych będzie równanie poprzednie zakładając w niém

$$dQ = 0$$

czyli

$$\frac{X dp}{dv} + Y + p = 0.$$

1° **Twierdzenie pomocnicze.** — Niech będzie A linia adyabatyczna przechodząca przez punkt M i MM′ zmiana elementarna ciała, element MM′ znajduje się nad linią adyabatyczną, a zatém trzeba było

Fig. 8.

dostarczyć ciału ciepła aby mogło przejść ze stanu M do stanu M′. Dla dowiedzenia powyższego założenia poprowadźmy przez punkt M′ linię równoległą do osi *ov*. Ciało przeszedłszy przez szereg zmian powraca do stanu w którym się pierwotnie znajdowało, a zatém

$$\int \frac{dQ}{\lambda} = 0.$$

Przechodząc ze stanu M′ do stanu N, ciało zmniejszając swą objętość przy stałém ciśnieniu oddaje pewną ilość ciepła dQ, która, oznaczając przez λ_1 wartość przecięciową od M′ do N daje element całki $-\frac{dQ}{\lambda_1}$.

Punkt określający stan ciała postępując po adyabatycznéj od N do M, ciało nie wydaje ani nie pochłania ciepła a zatém od N do M

$$dQ = 0.$$

Od M do M′ nie wiemy jeszcze czy ciało będzie wydawać lub pochłaniać ciepło; oznaczając przez λ_2 od M do M′ będziemy mieć trzeci element całki $\pm \frac{dQ_2}{\lambda_2}$. Funkcya λ będąc zależną od p i v i punkta MM′ i N znajdując się w odległościach nieskończenie zbliżonych, λ_2 może się różnić od λ_1 tylko o ilość nieskończenie małą $d\lambda$, a więc

$$\frac{dQ_2}{\lambda_2} = \frac{dQ_2}{\lambda_1 + d\lambda_1} = \frac{dQ_2}{\lambda_1}\left[1 - \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} + \left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\right)^2 + \ldots\ldots\right] = \frac{d\lambda_2}{\lambda_1} + \varepsilon,$$

gdzie ε jest ilością nieskończenie małą drugiego rzędu niknącą w granicy, a więc

$$\frac{dQ_2}{\lambda_2} = \frac{dQ_2}{\lambda_1}.$$

Podstawiając powyższe wartości w całkę

$$\int \frac{dQ}{\lambda} = 0,$$

otrzymamy

$$-\frac{dQ_1}{\lambda_1} \pm \frac{dQ_2}{\lambda_1} = 0,$$

co wymaga, aby dQ_2 obdarzoném było znakiem więcéj lub innemi słowy żeby dQ_2 było ilością ciepła dostarczoną ciału.

Dowiedlibyśmy odwrotnie, że gdyby element badany znajdował się pod linią adyabatyczną zmiana dokonana oddalając się od téj linii byłaby połączona z wydaniem ciepła.

2° **Twierdzenie pomocnicze.** — *Dwie linie adyabatyczne nie przecinają się z sobą.*

Niech będą dwie linie adyabatyczne PM i QM mające punkt wspólny M. Poprowadźmy linię jaką-

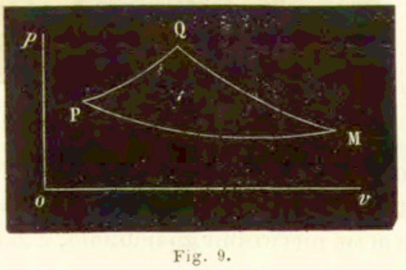

Fig. 9.

kolwiek nieskończenie krótką a nie adyabatyczną, ciało przebiegłszy PQM powraca do stanu P, a więc

$$(\alpha) \qquad \int \frac{dQ}{\lambda} = 0.$$

Od P do Q ciało badane pożycza na zewnątrz pewnéj ilości ciepła $+dQ$ która, oznaczając przez λ_1 wartość przeciętną λ od P do Q, daje nam element całki $\frac{dQ_1}{\lambda_1}$.

Od Q do M i od M do P punkt określający stan ciała postępuje po adyabatycznych więc $dQ = 0$ i całka poprzednia (α) sprowadza się do

$$\frac{dQ_1}{\lambda_1} = 0.$$

PQ będąc nieskończenie małém wartość λ nie może się znacznie różnić, nadto możemy tak wybrać kierunek PQ że znak λ nie może się zmieniać.

Warunek

$$\frac{dQ_1}{\lambda_1} = 0.$$

wymagałby, aby $dQ_1 = 0$ co jest niemożebném, gdyż PQ nie jest linią adyabatyczną z założenia.

Wyniki. — Wypada z tego cośmy powiedzieli powyżéj, że każda zmiana w stanie ciała przedstawiona linią MN (fig. 10) idącą od jednéj adyabatycznéj AD do drugiéj A'D' jest koniecznie połączoną z pożyczką ciepła na zewnątrz.

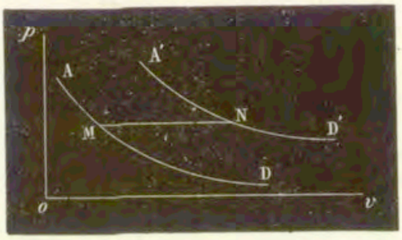

Fig. 10.

Jeżeli punkt określający stan ciała przebiega, poczynając od AD, w kierunku MN, ciało musi sobie pożyczać ciepła na zewnątrz żeby dojść do punktu N; odwrotnie, jeżeli przebieg punktu określającego stan ciała ma miejsce w kierunku przeciwnym, to jest poczynając od A'D', ciało wydaje z siebie pewną ilość ciepła.

Obieg Carnot'a (Cycle). — Jeżeli ciało przeszedłszy przez szereg zmian, powraca do swego pierwotnego stanu, cały ten szereg zmian nazwanym został *cyklem* lub *obiegiem*.

Możemy sobie wyobrazić nieskończoną liczbę cyklów; cykl złożony z dwóch adyabatycznych i dwóch linii równéj temperatury nosi miano *cykla Carnot'a*.

Niech będą dwie adyabatyczne A i A' i dwie linie równéj temperatury MN i PO odpowiadające temperaturom t_1 i t_2 mierzonym na ciepłomierzu Celsiusza. Mówiąc o własnościach linij adyabatycznych dowiedliśmy że t_2 jest większe od t_1.

Gdy punkt określający postępuje po MN, NO, OP i MP, ciało przebiega cykl Carnot'a, lecz żeby to było możebne trzeba postąpić w sposób następujący :

1° Od M do N ciało zostaje w styczności ze źródłem nieskończoném o temperaturze t_2, samo posiada tę temperaturę i powiększa swą objętość.

2° Od N do O ciało jest odosobnione od źródła nieskończonego o temperaturze t_2, objętość jego rośnie a temperatura maleje i spada na t_1 gdy punkt określający stan ciała znajduje się w punkcie O.

3° Aby punkt określający stan ciała mógł obiedz OP, koniecznem jest : 1° żebyśmy zetknęli ciało z masą nieskończoną o temperaturze t_1, 2° żeby ciało posiadało temperaturę t_1, 3° nadto winniśmy zmniejszyć jego objętość.

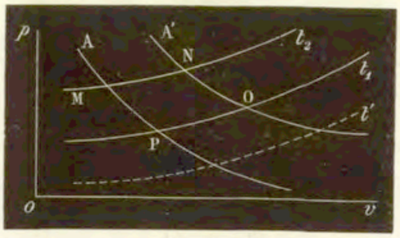

Fig. 11.

4° Nareszcie odosobniamy ciało od masy o temperaturze t_1, wciąż zmniejszając jego objętość i sprowadzamy go do stanu i objętości pierwotnych. Wtedy to punkt określający stan ciała przebiega linię MP.

Streszczając wszystko cośmy powyżéj powiedzieli, widzimy iż od M do N ciało musiało sobie pożyczyć od środka nieskończonego o temperaturze t_2 pewnéj ilości ciepła Q_2 i przesłać masie nieskończonéj o temperaturze t_1 inną ilość ciepła Q_1, w tym czasie została dokonaną pewna praca przedstawiona przez powierzchnię MNOP. Ponieważ obieg jest zamknięty; więc dzielność (énergie) wewnętrzna na początku i na końcu przebiegu jest równą.

$$U_2 - U_1 = 0.$$

Twierdzenie zasadnicze teoryi mechanicznéj ciepła da się wyrazić algebraicznie przez

$$Q_2 - Q_1 = AS.$$

Wzór ten wskazuje że Q_2 jest większe od Q_1 albowiem S jest dodatném, nadto figura geometryczna pokazuje że gdybyśmy dla zamknięcia obiegu, wzięli linię o temperaturze t' mniejszéj od t_1, praca dokonana byłaby większa, co dowodzi że ilość ciepła ustąpiona masie byłaby mniejszą.

Ponieważ obieg którym się zajmujemy jest zamknięty, mamy więc własność

$$\int \frac{dQ}{\lambda} = 0.$$

zobaczmy jakie mają znaczenie elementy składające powyższą całkę.

Od M do N ciało pochłania ciepło a zatém dQ jest dodatne; od N do O i od P do M, dQ jest zerem; od O do P, dQ jest odjemne. Nazywając więc λ_2 wartość przecięciową λ na długości MN taką że

$$\int_M^N \frac{dQ}{\lambda} = \frac{Q_2}{\lambda_2};$$

zakładając nadto λ_1 równém wartości przecięciowéj λ na linii PO możemy napisać

$$\frac{Q_2}{\lambda_2} - \frac{Q_1}{\lambda_1} = 0,$$

równanie które pokazuje że wartości Q_1 i Q_2 są w stosunku prostym do wartości przecięciowych λ na liniach równéj temperatury im odpowiadających.

Prawo Clausius'a. — Jeżeli dwa ciała które są doskonałemi przewodnikami ciepła np. R_2 i R_1 z których pierwsze posiada temperaturę wyższą t_2 a drugie temperaturę t_1, znajdują się w bezpośredniém połączeniu z sobą i to w jakikolwiek sposób, przez promieniowanie naprzykład lub inaczéj; ciepło przechodzi z ciała R_2 na ciało R_1 zimniejsze; jeżeli nadto założymy że te ciała są nieskończenie wielkie zjawisko to będzie miało miejsce ciągle i zawsze w tym samym kierunku. Clausius opierając się na swych licznych doświadczeniach powiada, że jeżeli ciała R_2 i R_1 znajdują się w połączeniu nie bezpośrednio lecz za pośrednictwem maszyny działającéj podług obiegu Carnot'a nie możebném jest przenieść ciepła z R_1 na ciało cieplejsze R_2, bez utraty pewnej pracy.

§ 3

Drugie twierdzenie Carnot'a.

Dla wszystkich ciał działających podług obiegu Carnot'a w tychże samych granicach temperatury, stosunek ilości ciepła czerpanego ze źródła wyższego do ilości ciepła zamienionego na pracę jest stałym.

Kształt linii równéj temperatury zależy od natury ciała, o czém się przekonywamy z równania

$$A = f(v, p),$$

a zatém dla różnych ciał w tychże samych granicach temperatury linie izotermiczne są różne.

Wyobraźmy sobie jakąkolwiek liczbę ciał których punkta określające przebiegają obieg Carnot'a w kierunku prostym.

Nazwijmy Q_2, Q_2', Q_2'' ilości ciepła czerpanego ze źródła wyższego K_2, zaś Q_1, Q'_1, Q''_1 ilości ciepła przesłanego źródłu niższemu K_1. Na mocy powyższych założeń twierdzenie da się wyrazić algebraicznie w następujący sposób

$$\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q''_2}{Q''_2 - Q''_1}.$$

Pozostaje nam dowieść prawdziwości powyższych stosunków. W dowodzeniu możemy się ograniczyć na badaniu dwóch tylko ciał to jest wykazać że

$$\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q'_2}{Q_2' - Q_1'},$$

lub

$$\frac{Q_2}{Q_2'} = \frac{Q'_2 - Q'_1}{Q_2 - Q_1}.$$

Załóżmy że stosunek drugi jest współmierny i równy stosunkowi liczb całkowitych m i n to jest że mamy

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{m}{n}; \tag{3}$$

przypuśćmy nadto że stosunek pierwszy jest naprzykład mniejszy od $\frac{m}{n}$ t. j. że

$$\frac{Q_2}{Q'_2} < \frac{m}{n},$$

lub że

$$mQ'_2 - nQ_2 > 0. \tag{4}$$

Nazwijmy A i B dwa ciała, których badaniem w téj chwili się zajmujemy; przypuśćmy że te ciała działają podług obiegów Carnot'a zróbmy za pomocą tych dwóch ciał maszynę złożoną w której ciało A przebiega w kierunku prostym n razy obieg swój (A), podczas gdy ciało B przebiega m razy obieg (B) w kierunku odwrotnym.

Gdy ciało A obiega raz jeden cykl (A) ilość ciepła $(Q_2 - Q_1)$ zostaje zamienioną na pracę, a zatém po n obiegach ciała A ilość ciepła zamieniona na pracę będzie

$$nE[Q_2 - Q_1].$$

Ciało B za każdym obiegiem ustępuje ilość ciepła $Q'_2 - Q'_1$, a zatém gdy ciało to obiegło m razy swój cykl ilość ciepła zamieniona na pracę która została pochłoniętą, będzie

$$mE[Q'_2 - Q'_1].$$

Dodając algebraicznie pracę dokonaną i pracę pochłoniętą przez ciała A i B otrzymamy pracę wykonaną przez maszynę, t. j.

$$nE[Q_2 - Q_1] - mE[Q'_2 - Q'_1] = P.$$

Z założenia wiemy że

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{m}{n},$$

azatém

$$P = 0.$$

Zobaczmy teraz jakie były wymiany ciepła? Ciało A działając w kierunku prostym czerpie w źródle wyższém ilość ciepła nQ_2 i oddaje źródłu niższemu ilość nQ_1.

Ciało B działając w kierunku odwrotnym, zabiera źródłu K_1 ilość ciepła mQ_1' i przynosi źródłu R_2 ilość ciepła wyrażoną przez mQ'_2, a zatém widzimy, że źródło wyższe zyskało ilość ciepła

$$mQ'_2 - nQ_2,$$

źródło zaś niższe straciło ilość ciepła równą

$$mQ'_1 - nQ_1.$$

Na mocy równości (3) dwie powyższe ilości są sobie równe i związek (4) pokazuje, że ilości te są dodatne, czyli że maszyna przeniosłaby ze źródła zimniejszego ilość ciepła $mQ_1' - nQ_1$ do źródła cieplejszego bez żadnego wydatku pracy co jest wręcz przeciwne prawu Clausius'a.

Moglibyśmy dowieść, że stosunek pierwszy nie może być większy od drugiego, wypada więc ztąd że dwa te stosunki są sobie równe, to jest że

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q_2}{Q'_2},$$

lub

$$\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_2 - Q'_1}.$$

Wniosek. — Z powyższych dwóch stosunków równych wypada, że

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_1}{Q'_2},$$

czyli że: *dla ciał działających podług obiegu Carnot'a w tychże samych granicach temperatury, stosunek* $\frac{Q_2}{Q_1}$ *ilości ciepła wziętego ze źródła cieplejszego, do ilości ciepła przyniesionego źródłu zimniejszemu jest stałym.*

Własności ogólne funkcyi λ. — Przypuśćmy, że maszyna działa podług obiegu Carnot'a złożonego z dwóch linij równej temperatury t_2 i t_1 i dwóch adyabatycznych nieskończenie zbliżonych. Załóżmy

$$\mu_1 = \mu \quad \text{i} \quad \mu_2 = \mu + d\mu,$$

dla zmiany nieskończenie małéj zachodzi związek

$$dQ = \lambda d\mu.$$

Nazwijmy λ_1 wartość λ w punkcie D (fig. 12) i λ_2 wartość λ w punkcie A, dla zmiany DC będziemy mieli związek

$$Q_1 = \lambda_1 d\mu,$$

dla zmiany AB będzie

$$Q_2 = \lambda_2 d\mu.$$

Wartość $d\mu$ jest taż sama dla dwóch powyższych zmian, albowiem zmiany te mają miejsce pomiędzy dwoma adyabatycznemi μ i $\mu + d\mu$, a zatém wyprowadzić możemy że

$$\text{granica } \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Dowiedliśmy tylko co, że stosunek $\frac{Q_2}{Q_1}$ jest stałym i niezależnym od adyabatycznych μ_1 i μ_2, to jest w przypadku który badamy niezależnym od μ i $\mu + d\mu$, a więc stosunek $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ wartości λ w punktach A i D dwóch linij równéj temperatury t_2 i t_1 jest niezależnym od μ i funkcyą t_1 i t_2.

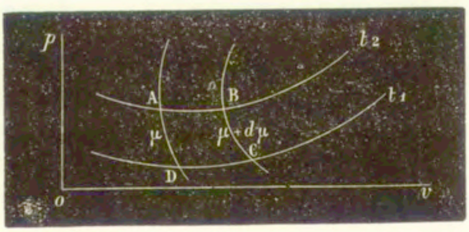

Fig. 12.

Ztąd, że sama funkcya λ jest równą funkcyi temperatury jednakowéj dla wszystkich ciał i pomnożonéj przez funkcyę μ dowolną i właściwą każdemu oddzielnie ciału, wypada

$$\lambda = f(t) \times \varphi(\mu).$$

Z łatwością daje się sprawdzić, że warunek powyższy jest wystarczającym, albowiem, jeżeli

$$\lambda_1 = f(t_1) \times \varphi(\mu),$$

$$\lambda_2 = f(t_2) \times \varphi(\mu),$$

mamy

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f(t_1)}{f(t_2)}.$$

Możemy udowodnić, że kształt funkcyi λ jest wynikiem twierdzenia Carnot'a. W saméj rzeczy jeżeli stosunek $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ zależy wyłącznie od temperatury t_1 i t_2, to tożsamość ma miejsce także ze stosunkiem

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1,$$

a więc także

$$\frac{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{t_2-t_1}}{\lambda_1}.$$

Założmy, że dwie linie równéj temperatury są nieskończenie zbliżone do siebie, do tego wystarczy założyć że

$$t_1=t \quad \text{i} \quad t_2=t+dt.$$

Ilości t i μ możemy uważać jako zmienne niezależne, a więc wartość λ jest funkcyą ilości t i μ, granica zaś stosunku $\frac{\lambda_2-\lambda_1}{t_2-t_1}$ jest pochodną częściową $\frac{\partial\lambda}{\partial t}$ téjże funkcyi względem t, zakładając μ stałém. Mamy więc

$$\text{granica}\ \frac{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{t_2-t_1}}{\lambda_1}=\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial t}}{\lambda}.$$

Na mocy tego co poprzedza, stosunek ten jest dla wszystkich tąż samą funkcyą temperatury, możemy więc napisać

$$\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial t}}{\lambda}=\frac{\partial\log\lambda}{\partial t}=\psi(t).$$

Całkując co do zmiennéj t i zważając że stała wprowadzona przez całkowanie, jest funkcyą dowolną drugiéj zmiennéj μ, otrzymamy

$$\log\lambda=\int\psi(t)\,dt+\log\varphi(\mu),$$

lub

$$\lambda=\varphi(\mu)e^{\int\psi(t)dt}.$$

Zakładając

$$e^{\int\psi(t)dt}=f(t)$$

mamy

$$\lambda = f(t)\,\varphi(\mu).$$

Funkcya $\psi(t)$ jest taż sama dla wszystkich ciał, toż samo się dzieje z funkcyą $f(t)$, a zatém kształt jaki nadaliśmy funkcyi λ jest wynikiem twierdzenia Carnot'a.

Funkcya $\varphi(\mu)$ będąc dowolną, możemy ją uczynić równą jedności

$$\varphi(\mu) = 1$$

co daje

$$\lambda = f(t).$$

Tak więc : *pomiędzy funkcyami czyniącemi* Q *różniczką całkowitą, istnieje jedna będąca wyłącznie funkcyą temperatury i taż samą dla wszystkich ciał.*

Temperatura bezwzględna. — Funkcya λ służy do zrobienia skali temperatur, ktorą to skalę nazwiemy skalą temperatur bezwzględnych. Jeżeli temperaturę bezwzględną oznaczymy przez T możemy napisać

$$\lambda = \mathrm{T}.$$

Powyżéj znaleźliśmy (Rozdział 3), że T dla gazów jest równe $a+t$, gdzie a przedstawia stałę równą 273, a t temperaturę daną przez ciepłomierz o słupie powietrza. Funkcya λ jest taż sama dla wszystkich ciał, a zatém możemy napisać w ogólności

$$\lambda = a + t, \text{ i } \mathrm{T} = a + t.$$

Skala temperatur zlewa się ze skalą ciepłomierza z tym warunkiem, że zakładamy zero bezwzględne o 273 stopnie niżéj zera topniejącego śniegu.

Ponieważ znaleźliśmy że $\lambda = a + t = \mathrm{T}$, możemy więc zastąpić

$$\frac{dQ}{\lambda} = \mu$$

przez

$$\frac{dQ}{\mathrm{T}} = \mu.$$

gdzie μ jest funkcyą dwóch zmiennych niezależnych.

Twierdzenie to jest *drugiém twierdzeniem zasadniczém.*

Dla zmiany jakiéjkolwiek lecz skończonéj mamy.

$$\int_1^2 \frac{dQ}{\mathrm{T}} = \mu_2 - \mu_1,$$

gdzie μ_2 i μ_1 są wartościami ilości μ na końcu i na początku.

Jeżeli zmiana odbywa się podług linij równéj temperatury równanie poprzednie zamienia się na

$$\frac{Q}{\mathrm{T}} = \mu_2 - \mu_1.$$

Wnosimy więc ztąd, *że ilość ciepła potrzebna do sprawienia zmiany podług linii równéj temperatury jakiéjkolwiek, położonéj pomiędzy dwiema adyabatycznemi danemi znajduje się w stosunku prostym do temperatury bezwzględnéj*.

Obieg Carnot'a (cycle) składa się z dwóch linij równéj temperatury AB i DC (fig. 13) zawartych

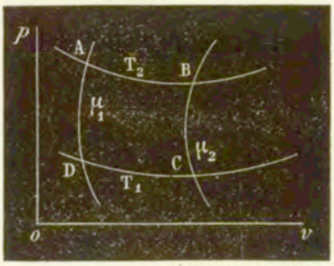

Fig. 13.

pomiędzy dwoma adyabatycznemi AD i CB, jak to już powiedzieliśmy. Na mocy poprzedzającego związku mamy

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} = \mu_2 - \mu_1,$$

lub

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Drugie twierdzenie zasadnicze

$$\frac{dQ}{T} = d\mu$$

jest wynikiem bezpośrednim twierdzenia Carnot'a. Z łatwością pojmiemy całą ważność tego twierdzenia i wielką usługę, jaką Carnot oddał nauce jeżeli przypomniemy, że przedtém nie znano warunków mechanicznych równowagi temperatury dla jakiegokolwiek ciała, a teraz za pomocą twierdzenia o którém mowa można ominąć tę trudność. Trudność ta nie istnieje dla gazów.

Za pomocą znanych praw rządzących gazami znaleźliśmy, że λ jest wyłącznie funkcyą temperatury czyniącą funkcyę dQ różniczką całkowitą funkcyi μ, to jest że mamy

$$\frac{dQ}{\lambda} = d\mu = \frac{dQ}{a+t} = \frac{dQ}{T}.$$

Związek $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$ a zatém i twierdzenia Carnot'a są wynikiem téj własności. Dowiedliśmy w sposób ogólny bez uciekania się do żadnych szczególnych własności istności funkcyi λ, czyniącéj dQ różniczką całkowitą funkcyi wspólnéj wszystkim ciałom i będącéj wyłącznie zależną od temperatury.

Posługując się własnościami właściwemi gazom, dowodzenie istności takiéj funkcyi znacznie się upraszcza. Niech będzie jakiekolwiek ciało i gaz, działające podług obiegu Carnot'a w jednakowych granicach temperatury, twierdzenie Carnot'a daje nam

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_1}.$$

Ilości ciepła Q i Q_1 odnoszą się do ciała badanego, ilości ciepła Q'_2 i Q'_1 do gazu. Na mocy własności gazów, ostatni stosunek jest znanym i równym $\frac{T_2}{T_1}$ mamy więc koniecznie

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{T'_2}{T'_1}.$$

Wiemy z poprzedzającego, że jeżeli założymy że obieg jest zawarty pomiędzy dwoma adyabatycznemi nieskończenie zbliżonemi μ i $(\mu+d\mu)$ granica stosunku $\frac{Q_2}{Q_1}$ jest równą $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, a zatém $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{T_2}{T_1}$ lub $\frac{\lambda_2}{T_2}=\frac{\lambda_1}{T_1}$. Z tego ostatniego związku wnosić możemy, że stosunek $\frac{\lambda}{T}$ jest stałym wzdłuż całéj adyabatycznéj DA, a zatém jest on funkcyą μ i niezależnym od temperatury, co się da wyrazić przez $\lambda=T\varphi(\mu)$.

Dowiedliśmy poprzednio, że znając jedną funkcyę czyniącą dQ różniczką całkowitą, możemy natychmiast znaleźć inną funkcyę, czyniącą zadosyć powyższym warunkom, mnożąc lub dzieląc przez $\varphi(\mu)$ pierwszą z otrzymanych, jeżeli więc podzielimy

$$\lambda=T\varphi(\mu)$$

przez $\varphi(\mu)$ otrzymamy

$$\lambda=T.$$

Ogólność stosunku $\frac{\Theta_2}{\Theta_1}=\frac{T_2}{T_1}$. — Niech będzie v ciśnienie zewnętrzne dodatne lub ujemne; r ciśnienie mające za przyczynę wzajemne przyciąganie się cząsteczek; widoczném jest że ciepło dostarczone ciału równoważy summę $(r+p)$ i dąży do jéj przezwyciężenia.

Oznaczmy przez z *objętość różniczkową* ciała, t. j. różnicę pomiędzy objętością widoczną i objętością bezwzględną materyi składającéj to ciało. Wielkość ta jest stałą i przedstawia objętość przedziałów pomiędzy atomami. Po założeniu tego przypuśćmy, że ciało przebiega obieg czyniący zadosyć następującym warunkom największości pracy.

1) Niech z rośnie a p maleje w sposób ciągły; ciało w tych warunkach oziębiłoby się — dla zapobieżenia temu dostarczmy mu ilość ciepła zdolną utrzymać jego temperaturę stałą.

Praca całkowita tak wewnętrzna jak zewnętrzna będzie mieć wartość

$$(1)\qquad L_2=\int_{Z_3\,(R_3+P_3)}^{Z_2(R_2+P_2)}(r+p)\,dz$$

gdy Z_2 stanie się równém Z_3, a (R_2+P_2) równém (R_3+P_3).

Ponieważ temperatura pozostaje stałą widoczném jest że ciepło dostarczone obróconém zostanie na wykonanie pracy L_2, a więc

$$AL_2=Q_2.$$

2) Dajmy że z rośnie daléj od Z_3 do Z_1 *bez dostarczania ciepła zewnętrznego*. Ciśnienie całkowite (R_3+P_3) spadnie na (R_1+P_1) i praca całkowita tak wewnętrzna jak i zewnętrzna daną jest przez

$$L_3=\int_{Z_1\,(R_1+P_1)}^{Z_3\,(R_3+P_3)}(r+p)\,dz.$$

Ilość ciepła pochłoniętego równą jest AL_3; a ponieważ ciepło to wzięte jest z wnętrza ciała, pochłonięcie to wywoła spadek temperatury matematycznie proporcyonalny. Jedném słowem

$$AL_3 = (T_2 - T_1)\, \Pi K$$

gdzie Π jest wagą ciała,

K — cieplikiem gatunkowym bezwzględnym.

3) Zmniejszmy teraz objętość ciała w sposób zdolny sprowadzić objętość różniczkową jego z Z_1 na Z_4 i ciśnienie całkowite $(R_1 + P_1)$ na $(R_4 + P_4)$ pochłaniając całą ilość ciepła wywiązującego się przy tych zmianach.

Praca całkowita wydana na dokonanie tych zmian ma za wyrażenie

$$(3) \qquad L_1 = \int_{Z_4\,(R_4 + P_4)}^{Z_1\,(R_1 + P_1)} (r + p)\, dz,$$

ilość zaś ciepła oddana przez ciało, aby utrzymać temperaturę stałą i równą T_1 jest

$$AL_1 = Q_1.$$

4) Nakoniec zmniejszmy jeszcze objętość ciała i sprowadźmy objętość różniczkową jego z Z_4 na Z_1 bez odjęcia ciepła wywiązanego skutkiem téj zmiany.

Praca wewnętrzna i zewnętrzna jest równą

$$(4) \qquad L_4 = \int_{Z_2(R_2+P_2)}^{Z_4(R_4+P_4)} (r + p)\, dz,$$

jeżeli zrobimy $(Z_1 - Z_4)$ takim, iż $L_4 = L_3$ (co zresztą daje się z łatwością uskutecznić) widoczném jest iż ciało powróci zupełnie do stanu pierwotnego lub jedném słowem przebiegnie obieg zamknięty.

Suma prac wewnętrznych i zewnętrznych w końcu tych czterech peryodów jest równą $L_2 + L_3 - L_1 - L_4$.

Lecz na zasadzie prawa równoważności mamy

$$Q_2 - Q_1 = AF,$$

gdzie F jest pracą zewnętrzną

Ponieważ $L_3 = L_4$, a zatém

$$L_2 - L_1 = F.$$

Oznaczmy przez S_2. S_3, — S_1 — S_4 prace *zewnętrzne* wykonane w czasie czterech peryodów. Będziemy mieć $S_2 + S_3 - S_1 - S_4 = S$, a ponieważ $L_3 = L_4$ więc odejmując równanie (3) od równania (1) otrzymamy

$$\int r_2 dz_2 - \int r_1 dz_1 = S_3 - S_4.$$

Równanie to pokazuje nam, że różnica pomiędzy pracą *wewnętrzną* w pierwszym i trzecim peryodzie jest równą różnicy pomiędzy pracą *zewnętrzną* w drugim i czwartym peryodzie.

W czasie każdego z tych peryodów, objętość różniczkowa ciała i ciśnienia tak wewnętrzne jak i zewnętrzne są w ciągłym związku. Na pierwszy rzut oka, nie tylko że nie widzimy nic takiego coby nam wskazywało prawo tego związku, lecz nawet nic nam nie pokazuje istności tego związku.

Dla skrócenia uczyńmy

$$W_2 = (R_2 + P_2); \quad W_3 = (R_3 + P_3); \quad W_1 = (R_1 + P_1); \quad W_4 = (R_4 + P_4); \qquad w = (r + p),$$

a jeszcze dla większego uogólnienia załóżmy że

$$\left.\begin{array}{lll} \text{1. Peryod} & & w_2 = W_2 \varphi_2 \left(\frac{Z_2}{z_2}\right) \\ \text{2.} & \text{«} & w_3 = W_3 \varphi_3 \left(\frac{Z_3}{z_3}\right) \\ \text{3.} & \text{«} & w_1 = W_1 \varphi_1 \left(\frac{Z_1}{z_1}\right) \\ \text{4.} & \text{«} & w_4 = W_4 \varphi_4 \left(\frac{Z_4}{z_4}\right) \end{array}\right\} \varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4 \text{ oznaczają funkcye łączące } w \text{ i } z.$$

Ażeby ułatwić czytelnikowi poznanie przebiegu tych wypadków przedstawmy je graficznie.

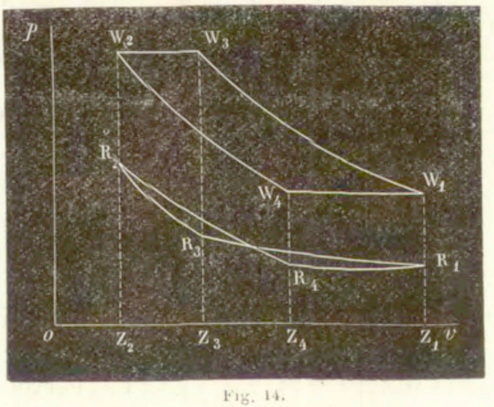

Fig. 14.

Oznaczmy przez OZ_2 objętość różniczkową pierwotną Z_2 ciała badanego; na przedłużeniu osi *ov* odetnijmy wartości OZ_3, OZ_1 i OZ_4, równe Z_3, Z_4 i Z_1; podobnie na osi rzędnych odetnijmy wartości W_2Z_2, W_3Z_3, W_4Z_4, W_1Z_1 równe ciśnieniom całkowitym W_2, W_3, W_4, W_1 i długości Z_2R_2, Z_3R_3, Z_4R_4, Z_1R_1 równe wartościom ciśnień wewnętrznych R_2, R_3, R_4, R_1.

Praca całkowita tak zewnętrzna jak i wewnętrzna przedstawioną jest graficznie przez czworoboki krzywolinijne $Z_2W_2W_3Z_3$, $Z_3W_3W_1Z_1$, $W_1Z_1W_4Z_4$, $W_4Z_4W_2Z_2$, praca zaś zewnętrzna lub różnica $L_2 - L_1$, daną jest przez powierzchnię $W_2W_3W_1W_4$.

Praca wewnętrzna przedstawioną jest graficznie przez czworoboki krzywolinijne $Z_2R_2R_3Z_3$, $Z_3R_3R_1Z_1$, $Z_1R_1R_4Z_4$, i $Z_4R_4R_2Z_2$.

Oprócz tego mamy związek

$$Z_2R_2R_3Z_3 - Z_1R_1R_4Z_4 = Z_3R_3R_1Z_1 - Z_4R_4R_2Z_2.$$

Na mocy tych uwag całki poprzednie stają się następujące

$$L_2 = \int_{W_3}^{W_2} w_2 dz_2 = W_2 \int_{Z_3}^{Z_2} \varphi_2 \left(\frac{Z_2}{z}\right) dz \quad 1 \quad \text{Peryod}$$

$$L_3 = \int_{W_1}^{W_3} w_3 dz_3 = W_3 \int_{Z_1}^{Z_3} \varphi_3 \left(\frac{Z_3}{z}\right) dz \quad 2 \quad \text{«}$$

$$L_1 = \int_{W_4}^{W_1} w_1 dz_1 = W_1 \int_{Z_4}^{Z_1} \varphi_1 \left(\frac{Z_1}{z}\right) dz \quad 3 \quad \text{«}$$

$$L_4 = \int_{W_2}^{W_4} w_4 dz_4 = W_4 \int_{Z_2}^{Z_4} \varphi_4 \left(\frac{Z_4}{z}\right) dz \quad 4 \quad \text{«}$$

Uczyńmy $\frac{Z_2}{z} = y$,

zkąd

$$z = \frac{Z_2}{z},$$

otrzymamy

$$L_2 = W_2 \int_{Z_3}^{Z_2} \varphi_2 \left(\frac{Z_2}{z}\right) dz = \int_{Z_3}^{Z_2} \varphi_2 y d\frac{Z_2}{y} = - W_2 Z_2 \int_{Z_3}^{Z_2} \varphi_2 y \frac{dy}{y_2};$$

jeżeli po zcałkowaniu podstawimy za y jego wartość $\frac{Z_2}{z}$, będziemy mieć

$$L_2 = \alpha W_2 Z_2 \left[1 - \varphi'_2 \left(\varphi_2 \frac{Z_2}{Z_3}\right)\right];$$

tu α jest ilością stałą, φ'_2 jest zaś pewną funkcyą.

Lecz to co ma miejsce dla L_2 da się zastosować i do trzech innych całek, a zatém

$$L_2 = \alpha W_2 Z_2 \left[1 - \varphi'_2 \left(\varphi_2 \frac{Z_2}{Z_3}\right)\right] \quad 1 \quad \text{Peryod}$$

$$L_3 = \beta W_3 Z_3 \left[1 - \varphi'_3 \left(\varphi_3 \frac{Z_3}{Z_1}\right)\right] \quad 2 \quad \text{«}$$

$$L_1 = - \alpha' W_1 Z_1 \left[1 - \varphi'_1 \left(\varphi_1 \frac{Z_1}{Z_4}\right)\right] \quad 3 \quad \text{«}$$

$$L_4 = - \beta' W_4 Z_4 \left[1 - \varphi'_4 \left(\varphi_4 \frac{Z_2}{Z_4}\right)\right] \quad 4 \quad \text{«}$$

Łatwém nam jest niezwłocznie zobaczyć że cztery te całki sprowadzają się do dwóch.

1. Rzeczywiście z założenia mamy $L_3 = L_4$, a więc

$$\int w_3 dz_3 = \int w_4 dz_4$$

$$w_3 dz_3 = w_4 dz_4,$$

zkąd

$$W_1 dz_3 = W_2 dz_4 \quad \text{i} \quad dz_3 = \frac{w_4}{w_3} dz_4 = \frac{W_2}{W_1} dz_4.$$

Dwie krzywe $(W_3 W_1)$ i $(W_4 W_2)$ są téj samej natury i $\varphi_3 \frac{Z_3}{z}$ jest równe $\varphi_4 \frac{Z_4}{z}$.

Dla wartości skrajnych zachodzi związek

$$\frac{W_2}{W_3} = \frac{W_4}{W_1},$$

a ztąd

$$\frac{W_2}{W_3} = \frac{w_4}{w_3},$$

gdyż granica W_1 jest dowolną, zkąd wypada

$$\frac{W_2}{W_3} \Delta Z_4 = \Delta Z_3;$$

czyniąc

$$Z_1 - Z_3 = \Delta Z_3 \quad \text{i} \quad Z_4 - Z_2 = \Delta Z_4.$$

2. Zakładając podobnie

$$Z_3 - Z_2 = \Delta Z_2,$$

$$Z_1 - Z_4 = \Delta Z_1,$$

mamy widocznie

$$\Delta Z_2 + \Delta Z_3 = \Delta Z_1 + \Delta Z_4.$$

Podstawiając za ΔZ_3 wartość jemu równą $\frac{W_2}{W_3} \Delta Z_4$,

otrzymujemy

$$\Delta Z_1 = \Delta Z_2 + \Delta Z_4 \left(\frac{W_2}{W_3} - 1\right),$$

zkąd

$$\frac{\Delta Z_2}{\Delta Z_1} = \frac{\Delta Z_2}{\Delta Z_2 + \Delta Z_4 \left(\frac{W_2}{W_3} - 1\right)},$$

mamy również

$$dz_1 = dz_2 + dz_4 \left(\frac{W_2}{W_3} - 1\right),$$

a zatém

$$dz_1 = \frac{\Delta Z_2}{\Delta Z_1} dz_2 = \frac{\Delta Z_2 \, dz}{\Delta Z_2 + \Delta Z_4 \left(\frac{W_2}{W_3} - 1\right)}.$$

Lecz granica W_3 jest także dowolną a W_3 jest dane przez W_4 na mocy związku

$$\frac{W_2}{W_3}=\frac{W_4}{W_1},$$

z którego otrzymujemy

$$\frac{W_2}{W_4}=\frac{W_3}{W_1}.$$

Dla całej rozciągłości krzywych (W_2W_3) i (W_4W_1) otrzymujemy

$$\frac{W_2}{W_4}=\frac{w_3}{w_1}.$$

Na mocy tych uwag, cztery całki poprzednie stają się następujące

$$F=L_2-L_1=\alpha W_2Z_2\left[1-\varphi'_2\left(\varphi_2\frac{Z_2}{Z_3}\right)\right]=\alpha W_4Z_4\left[1-\varphi'_2\left(\varphi_2\frac{Z_4}{Z_1}\right)\right],$$

$$L_3=L_4=\alpha W_3Z_3\left[1-\varphi'_3\left(\varphi_3\frac{Z_3}{Z_1}\right)\right]=\beta W_4Z_4\left[1-\varphi'_3\left(\varphi_3\frac{Z_2}{Z_4}\right)\right].$$

Dzieląc pierwsze z tych równań przez L_2 otrzymujemy

$$\frac{F}{L_2}=\frac{W_2Z_2\left[1-\varphi_2\left(\varphi_2\frac{Z_2}{Z_3}\right)\right]-W_4Z_4\left[1-\varphi'_2\left(\varphi_2\frac{Z_4}{Z_3}\right)\right]}{W_2Z_2\left[1-\varphi'_2\left(\varphi_2\frac{Z_2}{Z_3}\right)\right]};$$

lecz

$$\varphi_2\left(\frac{Z_2}{Z_3}\right)=\frac{W_3}{W_1} \quad \text{i} \quad \varphi_2\left(\frac{Z_4}{Z_1}\right)=\frac{W_1}{W_4},$$

a ponieważ

$$\frac{W_2}{W_3}=\frac{W_4}{W_1} \quad \text{i} \quad \frac{W_3}{W_2}=\frac{W_1}{W_4},$$

a zatém

$$1-\varphi'_2\left(\varphi_2\frac{Z_2}{Z_3}\right)=1-\varphi'_2\left(\varphi_2\frac{Z_4}{Z_1}\right);$$

co nam daje upraszczając poprzednie równanie:

$$(\alpha) \qquad \frac{W_2Z_2-W_4Z_4}{W_2Z_2}=\frac{Q_2-Q_1}{Q_2}.$$

Z poprzednich twierdzeń wiemy iż

$$\frac{Q_2-Q_1}{Q_2}=\frac{T_2-T_1}{T_2},$$

a więc czyniąc $WZ=(R+P)Z=\Theta$, otrzymujemy

$$\frac{\Theta_2-\Theta_4}{\Theta_2}=\frac{T_2-T_1}{T_2},$$

Rankine nazwał Θ *pracą całkowitą utajoną*

Istność zera bezwzględnego. — Przy dowodzeniu twierdzeń Carnot'a i poprzedzającego, bez wątpienia nasunęło się na myśl czytelnika pytanie, czy istność temperatury i zera bezwzględnego jest usprawiedliwioną. Dawna fizyka zakładając że ilość ciepła zawartego w ciele jest nieskończoną, nie uznawała istności zera bezwzględnego.

Rzeczywiście na pozór i tylko na pozór zero bezwzględne zawiera coś hypotetycznego.

Poprzednie twierdzenie pomoże nam do dowiedzenia istnienia temperatury bezwzględnéj w sposób bezwględny.

W saméj rzeczy, gdyby ilość ciepła zawartego w ciele była nieskończenie wielką mielibyśmy równość

$$K\Pi T = \infty,$$

w którém K jest cieplikiem gatunkowym;

Π — wagą ciała i

T równe ilości nieskończenie wielkiéj ∞

gdyż K i Π są ilościami stałemi.

Z tego założenia niezwłocznie wynika

$$A\Pi\int_{W_2}^{W_4} w_4 dz_4 = A\Pi\left(\int_0^{W_2} w_4 dz_4 - \int_0^{W_4} w_4 dz_4\right) = K\Pi\,(T_2 - T_1) = \infty,$$

co daje

$$\int_0^{W_2} w_4 dz_4 = \infty \quad \text{i} \quad \int_0^{W_4} w_4 dz_4 = \infty$$

lub

$$AS = Q\cdot\frac{\Delta T}{T_0} = 0;$$

innemi słowy; gdyby powyższe założenie było prawdziwem, *ciepło nigdy by nie dało pracy mechanicznéj*.

Tak więc temperatura i zero bezwzględne nie należą do dziedziny fikcyi, lecz rzeczywiście istnieją.

Poprzednio dowiedliśmy iż zawsze zachodzi związek następujący

$$\frac{\Theta_2}{T_2} = \frac{\Theta_4}{T_1},$$

zkąd

$$\Theta_4 = \Theta_2 \times \frac{T_1}{T_2};$$

lecz

$$\Theta_2 = W_2 Z_2 = (R_2 + P_2)\,Z_2,$$

$$\Theta_4 = W_4 Z_4 = (R_4 + P_4)\,Z_4,$$

a więc mamy równanie

$$(\beta) \qquad R_4 + P_4 = (R_2 + P_2)\frac{Z_2}{Z_4} \times \frac{T_1}{T_2}.$$

Oznaczmy przez a liczbę stopni oddzielających zero bezwzględne od zera naszych termometrów, otrzymamy

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a + t_1}{a + t_2};$$

dzieląc przez a i zakładając $\alpha = \frac{1}{a}$, równość poprzednia przybiera kształt

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2},$$

podstawiając w równanie (β) wartości otrzymane dla T i Z mamy

$$R_4 + P_4 = (R_2 + P_2)\left(\frac{V_2 - \psi}{V_4 - \psi}\right)\left(\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}\right).$$

Czyniąc równanie poprzednie wyraźném względem α dochodzimy do wzoru

$$\alpha = \frac{\left(\frac{R_4 + P_4}{R_2 + P_2}\right)\left(\frac{V_4 - \psi}{V_2 - \psi}\right) - 1}{t_2 - t_1\left(\frac{R_4 + P_4}{R_2 + P_2}\right)\left(\frac{V_4 - \psi}{V_2 - \psi}\right)}.$$

Ponieważ wielkości R i ψ dla gazów są małe względem P i V_2, a zatém zakładając $\psi = 0$ i $R = 0$ mamy równanie

$$\alpha = \frac{\frac{P_4 V_4}{P_2 V_2} - 1}{t_2 - t_1 \times \frac{P_4 V_4}{P_2 V_2}}.$$

Możemy się urządzić w taki sposób iż temperatura powiększy się a objętość pozostanie tą samą. Uczyniwszy zadosyć powyższym warunkom, wartość α daną jest przez wzór kształtu

$$\alpha = \frac{P_4 - P_2}{P_2 t_2 - P_4 t_1}.$$

Ilość stopni $a = \frac{1}{\alpha}$ oddzielających zero bezwzględne od zera termometrów jest więc daną przez ułamek $\frac{1}{\alpha}$, w którym mianownik oznacza współczynnik rozszerzalności ciał. Współczynnik ten oznaczonym został z wielką ścisłością dla powietrza, wartość jego jest $\alpha = 0{,}003665$, a więc

$$a = \frac{1}{0{,}003665} = 272^\circ{,}85 \text{ stopni Celsiusa.}$$

Wzór dający prawo Mariotte'a jako przypadek szczególny. — Na mocy poprzedzającego twierdzenia mamy ogólnie

$$\frac{\Theta_2}{T_2} = \frac{\Theta_4}{T}.$$

zkąd

$$\Theta_4 = \Theta_2 \frac{T_1}{T_2};$$

lecz

$$\Theta_2 = W_2 Z_2 = (R_2 + P)Z_2$$

i

$$\Theta_4 = W_4 Z_4 = (R_4 + P_4)Z_4.$$

mamy więc w skutek tego

$$R_4 + P_4 = (R_2 + P_2)\frac{Z_2}{Z_4}\frac{T_1}{T_2}.$$

Oznaczmy przez a liczbę stopni zawartą pomiędzy zerem bezwzględnem i zerem termometrów, będziemy mieć

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a + t_1}{a \times t_2};$$

dzieląc przez a i zakładając $\frac{1}{a} = \alpha$ otrzymujemy:

$$R_4 + P_4 = (R_2 + P_2)\frac{Z_2}{Z_4}\left(\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}\right),$$

gdzie Z oznacza objętość różniczkową ciała, to jest różnicę pomiędzy objętością widoczną V i objętością atomów ψ, a zatém podstawiając za Z jego wartość $(V - \psi)$ równanie poprzednie przybiera kształt

$$R_4 + P_4 = (R_2 + P_2)\frac{V_2 - \psi}{V_4 - \psi}\left(\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}\right).$$

Prawo to jak widzimy jest bardziéj ogólném niż prawa znane Mariotte'a i Gay-Lussac'a gdyż czyniąc $R = 0$, $\psi = 0$ otrzymujemy :

$$P_4 = P_2 \frac{V_2}{V_4}\frac{T_1}{T_2}.$$

Równania Wilhama Thompson'a. — Wilham Thompson wyprowadził z równania zasadniczego

$$\frac{dQ}{T} = d\mu,$$

kilka związków nadzwyczaj ważnych. Uważając v i p za zmienne niezależne mamy .

$$dQ = Xdv + Ydp,$$

a zatém

$$d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{Xdv}{T} + \frac{Ydp}{T}.$$

Ponieważ druga strona równania jest różniczką całkowitą funkcyi μ, zatém mają miejsce związki następujące

$$\frac{\partial\left(\frac{X}{T}\right)}{\partial p}=\frac{\partial\left(\frac{Y}{T}\right)}{\partial v}$$

lub

$$\frac{T\partial X}{\partial p}-\frac{X\partial T}{\partial p}=\frac{T\partial Y}{\partial v}-\frac{Y\partial T}{\partial v}$$

czyli

$$\frac{X\partial T}{\partial p}-\frac{Y\partial T}{\partial v}=T\left(\frac{\partial X}{\partial p}-\frac{\partial Y}{\partial v}\right). \tag{α}$$

Na mocy równania Clausius'a $\frac{\partial X}{\partial p}-\frac{\partial Y}{\partial v}=A$, równanie ($\alpha$) upraszcza się i staje się równém następującemu :

$$X\frac{\partial T}{\partial p}-Y\frac{\partial T}{\partial v}=AT. \tag{β}$$

2° Przyjmijmy teraz za zmienne niezależne T i v, otrzymamy:

$$dQ=cdt+ldv=cdT+ldv,$$

lub

$$d\mu=\frac{dQ}{T}=\frac{cdT}{T}+\frac{l}{T}dv.$$

Wyrażenie to jest różniczką całkowitą, zatém mamy

$$\frac{\partial\left(\frac{c}{T}\right)}{\partial v}=\frac{\partial\left(\frac{l}{T}\right)}{\partial T}$$

lub

$$T\frac{\partial c}{\partial v}=T\frac{\partial l}{\partial T}-l,$$

zkąd

$$l=T\left(\frac{\partial l}{\partial T}-\frac{\partial c}{\partial v}\right). \tag{β_1}$$

Na mocy drugiego równania Clausius'a $\frac{\partial l}{\partial T}-\frac{\partial c}{\partial v}=A\frac{\partial p}{\partial T}$, równanie poprzednie sprowadza się do

$$l=AT\frac{\partial p}{\partial T}. \tag{β_2}$$

3° Przyjmijmy nareszcie za zmienne niezależne t i p otrzymamy

$$dQ=CdT+hdp$$

lub

$$d\mu = \frac{dQ}{dT} = \frac{C}{T}\,dT + \frac{h}{T}\,dp,$$

ztąd otrzymamy równanie warunkowe

$$\frac{\partial\left(\frac{C}{T}\right)}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{h}{T}\right)}{\partial T}$$

$$T\frac{\partial C}{\partial p} - T\frac{\partial h}{\partial T} = -h.$$

Na mocy trzeciego równania Clausius'a $\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial C}{\partial p} = -A\frac{\partial v}{\partial T}$, równanie poprzednie zamienia się na

$$(\beta_3) \qquad h = -AT\frac{\partial v}{\partial T}.$$

Równanie (β_1) jest równaniem o pochodnych częściowych pierwszego rzędu, któremu winna zadosyć czynić funkcya T zmiennych niezależnych v i p. W równaniu (β_1) p jest uważane za funkcyę zmiennych niezależnych T i v, a w równaniu (β_3) v jest funkcyą zmiennych T i p. Ostatnie dwa równania dają się zastąpić przez równanie o pochodnych częściowych, któremu zadosyć czyni funkcya T zmiennych niezależnych v i p.

Niech równość $\varphi(T, v, p) = 0$, wyraża związek nieznany istniejący pomiędzy objętością gatunkową, ciśnieniem i temperaturą. Uważając v za ilość stałą, mamy

$$\frac{\partial T}{\partial p} \times \frac{\partial p}{\partial T} = 1.$$

Możemy więc zastąpić równanie (β_2) przez (β'_2) następujące

$$(\beta'_2) \qquad l\frac{\partial T}{\partial p} = AT.$$

Również uważając p za ilość stałą mamy $\frac{\partial v}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial v} = 1$, możemy zatém równanie (β_3) zastąpić przez

$$(\beta'_3) \qquad h\frac{\partial T}{\partial v} = -AT.$$

Wypada więc, że ta sama funkcya T zmiennych niezależnych v i p, czyni zadosyć trzem równaniom o pochodnych częściowych (β_1), (β'_2) i (β'_3). Pierwsze równanie zawiera obie pochodne częściowe, dwa ostatnie zaś tylko po jednéj.

Równanie Rankine'a. — Znamy już jedno wyrażenie ilości ciepła koniecznéj do sprowadzenia zmiany podług linii równéj temperatury AB. Wyrażenie to jest

$$Q = T(\mu_2 - \mu_1).$$

Rankine podał inny wzór dla wyrażenia téjże saméj ilości ciepła. Nazwijmy S pracę wykonaną podczas zmiany AB otrzymamy

$$S = \int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

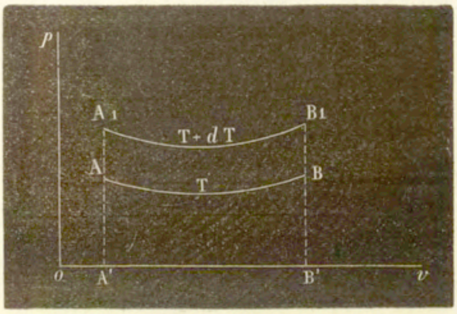

Fig. 15.

Wyobraźmy sobie, że punkt określający stan ciała przebiega linię A'B' różną od AB, lecz także zawartą pomiędzy wartościami v_2 i v_1, to jest znajdującą się pomiędzy równoległemi AA' i BB', praca zewnętrzna wykonana podczas jednéj z tych zmian, jest funkcyą temperatury. Uważajmy v i T za zmienne niezależne i załóżmy, że linia A_1B_1 jest nieskończenie bliską linii AB, przyrost pracy zewnętrznéj dany jest przez powierzchnię ABB_1A_1, to jest

$$\frac{dS}{dT} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p}{\partial T} dv.$$

Równanie ogólne

$$dQ = cdT + ldv,$$

sprowadza się dla linii równéj temperatury do

$$dQ = ldv.$$

Podstawiając za l wartość daną przez równanie (β_2) otrzymamy

$$dQ = AT \frac{\partial p}{\partial T} dv,$$

zkąd

$$Q = AT \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p}{\partial T} dv,$$

lub

$$Q = AT \frac{dS}{dT}.$$

ROZDZIAŁ V

DAJNOŚĆ MASZYN.

Zasady ogólne. — Zastosujmy wzory powyżéj podane do obliczania dajności maszyn (rendement).

Weźmy najprzód, jako przykład, maszynę działającą podług obiegu Carnot'a. Niech będzie T_2 i T_1 temperatura wyższego i niższego źródła.

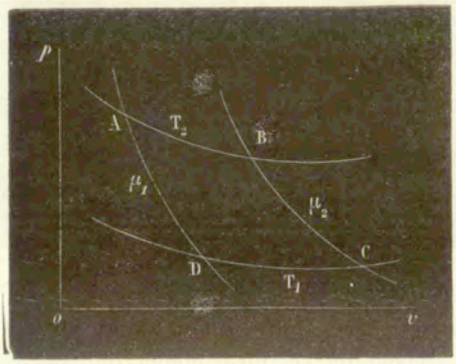

Fig. 16.

Maszyna czerpie pewną ilość ciepła ze źródła wyższego K_2 i oddaje pewną, lecz już inną ilość ciepła oziębiaczowi K_1.

Ilość ciepła użyta do wykonania pracy S jest daną przez różnicę $Q_2 - Q_1$, praca zaś S przedstawioną jest geometrycznie przez powierzchnię ABCD. Zgodzono się nazwać *dajnością* maszyny o ogniu stosunek ilości ciepła zamienionego na pracę do ilości ciepła wziętego ze źródła wyższego, wypada więc ztąd, że dajność maszyny jest równą

$$D = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}.$$

Drugie twierdzenie zasadnicze daje nam równoważnik powyższego stosunku a więc

$$D = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Ostatni wzór wskazuje nam, że dajność maszyny zależy wyłącznie od temperatur krańcowych, dajność tę powiększamy, zmniejszając temperaturę oziębiacza i powiększając temperaturę źródła K_2. Weźmy za przykład maszynę, której źródło posiada temperaturę 300 stopni Celsius'a, oziębiacz zaś tylko 15. Wzór znany daje natychmiast

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{t_2 - t_1}{a + t_2} = \frac{285}{273 + 300} = \frac{285}{573} = \text{blisko } 1/2.$$

Widzimy więc, że łatwo jest obliczyć dajność maszyny, jeżeli ona działa podług obiegu Carnot'a.

Weźmy obecnie maszynę działającą podług jakiegoś innego obiegu jak poprzedzający. Koniecznèm jest żeby ta maszyna była w styczności ze źródłem o temperaturze zmiennéj i z oziębiaczem także o temperaturze zmiennéj.

Poprowadźmy dwie linie równéj temperatury T_1 i T_2 i dwie adyabatyczne μ_1 i μ_2 styczne do obiegu; albo innemi słowy wpiszmy obieg ABCD w obieg Carnot'a LMNZ, styczny do pierwszego (fig. 17). Wzdłuż całéj linii ABC maszyna pochłonie ciepło przesłane przez źródło wyższe, gdyż od A do C funkcya μ ciągle wzrasta. Oznaczmy przez Q_2 ilość ciepła pochłoniętą w téj części obiegu.

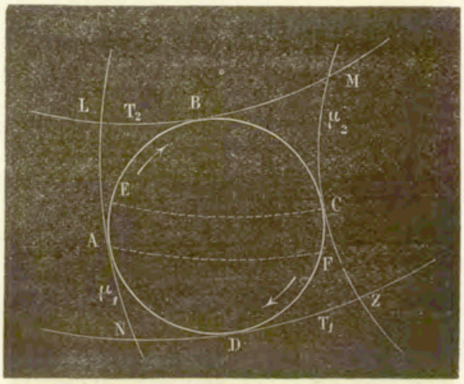

Fig. 17.

Wzdłuż linii CDA maszyna przesyła ciepło oziębiaczowi, gdyż funkcya μ maleje a więc dQ i $d\mu$ są ilościami odjemnemi. Nazwijmy Q_1 ilość ciepła oddanego przez maszynę w części CDA obiegu ABCD. Gdy punkt określający stan ciała przebiega DAB w kierunku wskazanym przez strzałkę, temperatura wzrasta, przeciwnie zaś idąc od B do D temperatura maleje. Przez punkta styczności A i C poprowadźmy linie równéj temperatury AF i CE, widzimy, że źródło podczas zmiany AE posiada temperaturę niższą od temperatury oziębiacza w punkcie C.

Wzór ogólny daje

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Z tego cośmy powiedzieli wyżéj, wzór ten da się przedstawić w kształcie następującym

$$\int_{ABC} \frac{dQ}{T} - \int_{CDA} \frac{dQ}{T} = 0.$$

Wzdłuż krzywéj ABC temperatura T ciała, którego zmiany badamy jest niższą od temperatury T_2 punktu B, a zatém

$$\int_{ABC} \frac{dQ}{T} > \int \frac{dQ}{T},$$

lub zważając, że T_2 jest stałém

$$\int_{ABC} \frac{dQ}{T} > \frac{Q_2}{T_2}.$$

Wzdłuż krzywéj CDA temperatura ciała badanego jest niższą od temperatury T_1 punktu D, a więc

$$\int_{CDA} \frac{dQ}{T} < \frac{dQ}{T_1},$$

lub

$$\int_{CDA} \frac{dQ}{T} < \frac{Q_1}{T_1}.$$

Na mocy równania (1) otrzymujemy

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} < 0,$$

albo

$$\frac{Q_1}{Q_2} > \frac{T_1}{T_2}.$$

Ztąd wyprowadzimy nierówność

$$1 - \frac{Q_1}{Q_2} < 1 - \frac{T_1}{T_2},$$

albo

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Widzimy więc, że współczynnik oszczędności maszyny działającéj podług jakiegokolwiek obiegu jest mniejszym niż w przypadku działania téjże saméj maszyny podług obiegu Carnot'a, którego cechą charakterystyczną jest stałość temperatury, źródła i oziębiacza.

Verdet dowodzi, że nie tylko obieg Carnot'a posiada własność najlepszego użytkowania ciepła, lecz że są inne obiegi pozwalające dojść do tego samego wypadku. Obiegom podanym przez Verdet'a można zarzucić, iż wymagają narzędzi zwanych odradzaczami ciepła. Jeżeli posiadamy tylko dwa źródła o stałéj temperaturze, obieg Carnot'a jest jedynym obiegiem odwracalnym i posiadającym własności najlepszego zużytkowania ciepła.

Odradzacze ciepła. — Załóżmy, że maszyna działa podług jakiegokolwiek obiegu w granicach temperatur T_2 i T_1. Wpiszmy obieg Carnot'a styczny do pierwszego. Niech będą A,B,C,D punkta styczności, z tego cośmy wyżéj powiedzieli, wiemy że

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

to jest, że spółczynnik oszczędnosci dla jakiegokolwiek obiegu jest mniejszy niż dla obiegu Carnot'a.

W praktyce urzeczywistnienie obiegu Carnot'a połączone jest z wielkiemi trudnościami. Szukano różnych sposobów, aby obejść te trudności; jednym z najbardziéj genialnych jest *odradzacz* ciepła.

Przez punkta styczności C i A poprowadźmy linje równéj temperatury CE i AF (fig. 18), wystawmy sobie łuk AE podzielonym na pewną liczbę części i przez punkta podziału poprowadźmy linie równéj temperatury, tym sposobem łuk CF podzielonym zostanie na pewną liczbę części odpowiednich. Dla dokonania zmiany mn źródło dostarcza ilości ciepła dq_2 o temperaturze T, podczas zaś zmiany odpowiedniéj $m'n'$, maszyna przesyła oziębiaczowi ilość ciepła dq_1, ponieważ te dwie ilości ciepła dq_2 i dq_1 posiadają tę samą temperaturę, możemy więc sobie wyobrazić ciało zewnętrzne o temperaturze T, któreby zabierało ilość ciepła dq_2, wydaną podczas zmiany $m'n$ i oddawało ją maszynie dla przyczynienia się do dokonania zmiany odpowiedniéj mn. Jeżeli ilo-

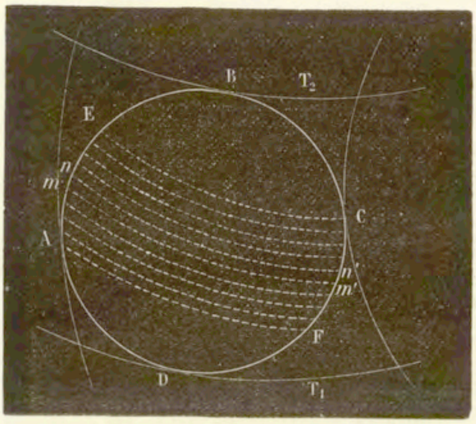

Fig. 18.

ści ciepła dq_1 i dq_2 są sobie równe, ilość ciepła wydana podczas zmiany $m'n'$, wystarczy do dokonania zmiany mn i jeżeli krzywe CF i AE posiadają własność, że warunek ten ma miejsce dla wszystkich części odpowiednich, ilość ciepła wydana podczas zmiany CF będzie mogła służyć i wystarczyć do dokonania zmiany AE bez żadnego wydatku pracy. Ciało zewnętrzne zachowujące dla przyszłéj zmiany ciepło wydane w zmianie dokonanéj, nazwane zostało *odradzaczem* ciepła.

Jeżeli warunek wyżéj określony ma miejsce, ognisko dostarczać będzie ciepła maszynie tylko wzdłuż linii EBC, oziębiacz zaś pochłaniać będzie ciepło tylko wzdłuż linii F. Odradzacz zmniejszył wydatek lecz współczynnik oszczędności jest jeszcze mniejszym od takiego współczynnika w przypadku obiegu Carnot'a. W saméj rzeczy, wzór ogólny daje nam.

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

lub w przypadku badanym

$$\int \frac{dQ}{T} = \int_{AE} \frac{dq_2}{T} + \int_{EBC} \frac{dQ_2}{T} - \int_{CF} \frac{dq_1}{T} - \int_{FDA} \frac{dQ_1}{T} = 0.$$

Podczas zmian odpowiednich mn i $m'n'$ temperatura jest taż sama, a z założenia wypada

$$dq_2 = dq_1,$$

a zatém

$$\int_{AE} \frac{dq_2}{T} = \int_{CF} \frac{dq_1}{T}$$

i równanie poprzednie przybierze kształt

$$\int_{EBC} \frac{dQ_2}{T} - \int_{FDA} \frac{dQ_1}{T} = 0.$$

Wzdłuż krzywéj EBC temperatura jest mniejszą od T_2, wzdłuż zaś linii FDA większą od T_1, a zatém

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} < 0,$$

lub

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Można jednakże urządzić się w ten sposób, że za pomocą odradzacza otrzymamy największy współczynnik oszczędności; dla tego wystarcza, aby wzdłuż linij EBC i FDA temperatura pozostawała stałą, t, j. aby linie te były liniami równéj temperatury. W saméj rzeczy, zbudujmy obieg za pomocą dwóch linij równéj temperatury, linii dowolnéj AB i dokończmy go kreśląc czwartą linię CD taką, ażeby ilości ciepła pochłonięte i wydane na częściach odpowiednich linij AB i CD były równe.

Mamy

$$0 = \int_{BC} \frac{dQ_2}{T} - \int_{BA} \frac{dQ_1}{T} = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1},$$

w skutek czego

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Obieg czyniący zadosyć powyższemu warunkowi jest równie dobry jak obieg Carnot'a. Obrawszy dowolnie linię AB, linia CD wyznaczyć się daje zakładając, że dla części odpowiednich mn i $m'n'$ zachodzi równość

$$dq_2 = dq_1.$$

Niech będą v i p rzędne punktu m; v' i p' rzędne punktu odpowiedniego m', mamy

$$dq_2 = M(cdt + ldv),$$

lub także

$$dq_2 = M(cdt + Apdv).$$

Cieplik gatunkowy c jest niezależnym od objętości, a ponieważ przyrost temperatury dt jest tenże sam dla obydwóch elementów a zatém

$$dq_1 = M(cdt + Ap'dv).$$

Warunek $dq_1 = dq_2$, sprowadza się do warunku, $pdv = p'dv$.

Ponieważ punkta m i m' należą do linij równéj temperatury, a więc można zastosować prawo Mariotte'a ($pv = p'v'$) co daje:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dv'}{v'},$$

lub

$$v = kv',$$

zkąd

$$p = \frac{p'}{k}.$$

Znając równanie linii AB, $\varphi(v, p) = 0$, wystarcza zastąpić v przez kv'; p przez $\frac{p'}{k}$, aby otrzymać równanie linii CD.

$$\varphi\left(kv', \frac{p'}{k}\right) = 0.$$

ROZDZIAŁ VI

PARA.

§ Iy. — PARA NASYCONA.

1° **Para nasycona.** — Jeżeli będziemy wciąż zmniejszać objętość pary suchéj, pozostawiając jéj temperaturę stałą i powiększając ciśnienie, dojdziemy do pewnéj granicy, do pewnego ciśnienia, którego nie będzie można przekroczyć. Para sucha będąc pod wpływem tego krańcowego ciśnienia znajduje się w stanie *nasycenia*.

Gdybyśmy w tych warunkach zmniejszyli jeszcze objętość pary, część jéj wówczas zamieniłaby się w płyn, lecz ciśnienie pozostałoby zawsze tém samém. Ta największa prężność pary przy téjże saméj temperaturze, zależy od natury ciała i jest funkcyą temperatury.

(1) $$p = F(t).$$

Jeżeli będziemy zmniejszać stopniowo temperaturę pary suchéj znajdującéj się pod wpływem ciśnienia stałego dojdziemy do pewnéj granicy, któréj przekroczyć nie będzie można. Temperatura któréj przekroczyć nie można bez zmiany stanu pary jest temperaturą, dla któréj para sucha znajduje się w stanie nasycenia.

Jeżeli jeszcze zmniejszymy temperaturę pary znajdującéj się w stanie nasycenia pewna jéj część przybierze stan płynny i dopóki będzie choć trochę pary temperatura jéj zostanie stałą.

Rozwiązując równanie (1) względem t otrzymamy wartość najmniejszéj temperatury przy daném ciśnieniu, t. j.

(2) $$t = \varphi(p).$$

Chcąc podwyższyć temperaturę jakiegokolwiek płynu o t stopni bez zmiany stanu, musimy mu dostarczyć pewną ilość ciepła; dla podniesienia zaś temperatury tego samego płynu o t stopni i zamienienia go na parę o temperaturze t, winniśmy mu dostarczyć pewną lecz już różną od poprzedzającéj ilość ciepła. Różnica pomiędzy ilością ciepła potrzebną do podniesienia temperatury płynu o t stopni i zamienienia go na parę o temperaturze t, a ilością ciepła potrzebną do ogrzania tegoż płynu na t stopni nazwaną została *cieplikiem utajonym ulotnienia*.

Płyn nagrzewany przy stałém ciśnieniu w ogólności gotuje się gdy temperatura t jest daną przez równanie (2).

Zamiana na płyn jest zjawiskiem prostém odbywającém się zawsze przy tém samém ciśnieniu i temperaturze. Zjawisko odwrotne to jest ulotnienie jest bardziéj nieprawidłowém, albowiem zauważono, że jeżeli masa płynna nie posiada powierzchni odkrytéj, można przekroczyć temperaturę daną przez równania (1) i (2) bez zmiany stanu. Jeżeli po tém przegrzaniu zrobimy lotną ową masę, cieplik utajony F′ pochłonięty, będzie różny od cieplika przy zjawisku prawidłowém.

W saméj rzeczy, niech będzie płyn o ciśnieniu p, gotujący się prawidłowo, przy temperaturze t objętość jego gwałtownie się powiększa, a ponieważ ciśnienie pozostaje stałém, zmiany zaszłe w stanie płynu dadzą się przedstawić graficznie przez linię równoległą do Ov.

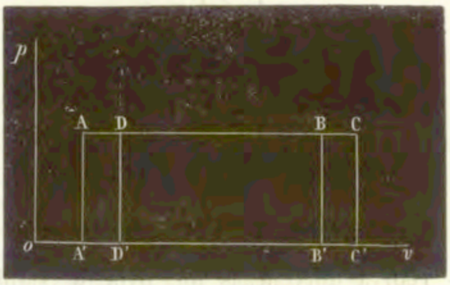

Fig. 19.

Pozostawiając ciśnienie stałem podnieśmy temperaturę téj pary na $t+dt$ stopni; objętość powiększy się nieznacznie, para będzie przegraną i nowa ta zmiana przedstawioną będzie przez linię BC.

Oznaczmy przez C cieplik gatunkowy płynu przy stałém ciśnieciu;
« C′ cieplik gatunkowy pary przy stałém ciśnieniu.

Gotowanie prawidłowe AB wymaga ilości ciepla F, nagrzanie zaś BC pary przy stałém ciśnieniu wymaga ilości ciepła wyrażonéj przez

$$\int_t^{t+dt} C'dt.$$

Ostatecznie jeden kilogram płynu, aby przejść ze stanu A do stanu C, potrzebuje ilości ciepła danéj przez

$$F+\int_t^{t+dt} C'dt.$$

Przypuśćmy teraz, że podniesiemy płyn bez zmiany jego stanu od temperatury t do $t+dt$ zawsze przy ciśnieniu p; objętość jego zwiększy się nieznacznie i płyn przejdzie ze stanu A do stanu D, następnie płyn gotując się przy ciśnieniu p, przychodzi do stanu C. Ilość ciepła potrzebna do dokonania tych zmian daną jest przez

$$\int_t^{t+dt} Cdt + F'.$$

Dwie te ilości są sobie równe, albowiem praca zewnętrzna dokonana jak i zmiana dzielności wewnętrznéj są też same, a zatém

$$F + \int_t^{t+dt} C'dt = \int_t^{t+dt} Cdt + F',$$

czyli ztąd wyprowadzamy że

$$F' = F - \int_t^{t+dt} (C - C')dt.$$

Doświadczenie pokazuje, że cieplik gatunkowy wszystkich płynów przynajmniéj w bliskości punktu gotowania jest większy, niż cieplik ich pary, mamy więc

$$C' < C,$$

a zatém

$$F' < F;$$

dla wody naprzykład mamy

$$C = 1, \qquad C' = 0,4825.$$

Wzory p. Regnault. — Teorya dotychczas nie była w stanie wynaleźć związków istniejących pomiędzy prężnością i temperaturą pary. Tu ją wyprzedziły doświadczenia p. Regnault, który głównie badał własności pary wody i eteru, związki znalezione empirycznie są następujące:

Dla pary wodnéj

(A) $$\log p = 6,5567365 - 4,8011 \times 0,9936^t$$

gdzie p oznacza ciśnienie na metr kwadratowy, wyrażone w kilogramach, t wyraża temperaturę w stopniach daną przez termometr Celsiusza.

Różniczkując powyższe równanie mamy

$$\frac{dp}{dt} = -48011 \frac{\log 0,9936}{(\log e)^2} \times 0,9936^t \times p;$$

p. Regnault znalazł ilość ciepła potrzebną do podniesienia temperatury jednego kilograma wody płynnéj od 0 do t stopni i zamienienia jéj na parę. Wzór ten jest następujący

(c) $$\lambda_t = 606,50 + 0,305t.$$

Znakomity ten fizyk podał także formułę do obliczenia ilości ciepła potrzebnéj do podniesienia temperatury jednego kilograma wody płynnéj od 0 do t stopni nie zamieniając jéj na parę.

(D) $$\mu_t = t + 0,00002t^2 + 0,0000003t^3.$$

Biorąc różniczkę równania (D) otrzymamy

(E) $$\frac{d\mu}{dt} = 1 + 0,00004t + 0,0000006t^2.$$

Różnica $L = \lambda_t - \mu_t$, jak to już wyżéj powiedzieliśmy, nazwaną została cieplikiem utajonym ulotnienia. Dla wody

$$L = \lambda_t - \mu_t = 606{,}50 - 0{,}695t - 0{,}00002t^2 - 0{,}0000003t^3.$$

Wzór ten pokazuje, że L maleje wraz z temperaturą.

Przejście ciała ze stanu płynnego do stanu pary, połączone jest z wielkim wzrostem objętości, skutkiem czego cieplik utajony wykonywa pracę zewnętrzną dosyć znaczną, której część służy do powiększenia dzielności wewnętrznéj.

Oznaczmy przez σ objętość gatunkową płynu o temperaturze t,

« v « pary nasyconéj o téjże saméj temperaturze i załóżmy, że ciśnienie pozostaje stałém. Praca zewnętrzna wyraża się przez $p(v - \sigma)$.

Twierdzenie zasadnicze daje nam

$$EL = \Delta U + p(v - \sigma),$$

zkąd

$$A\Delta U = L - Ap(v - \sigma).$$

Wykonajmy wskazane działanie, zakładając $p = 760$.

Otrzymamy dla wody

$$Ap(v - \sigma) = 31{,}10 + 0{,}0096t - 0{,}00002t^2 - 0{,}0000003t^3,$$

$$A\Delta U = 576{,}40 - 0{,}791t.$$

Dla eteru

$$L = 94{,}00 - 0{,}07901t - 0{,}0008514t^2.$$

$$Ap(v - \sigma) = 7{,}46 + 0{,}02747t - 0{,}0001354t^2.$$

$$A\Delta U = 86{,}54 - 0{,}106487t - 0{,}0007160t^2.$$

2° **Powstawanie pary suchéj.** — Weźmy mięszaninę płynu i jego pary i zmuśmy ją do przebieżenia obiegu Carnot'a składającego się z dwóch linij równéj temperatury i dwóch adyabatycznych.

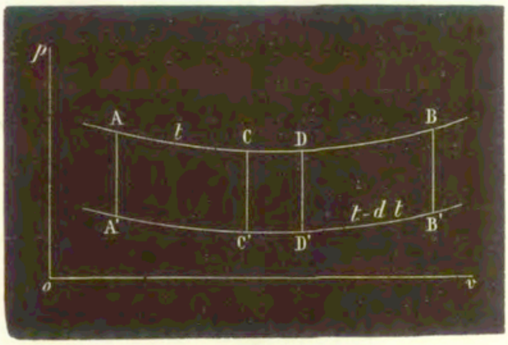

Fig. 20.

Oznaczmy przez q_1 ilość ciepła dostarczoną przez źródło mięszaninie, które to ciepło posiada temperaturę t.

Niech będzie q' ilość ciepła przesłana oziębiaczowi przez mięszaninę, które to ciepło ma temperaturę niższą od poprzedzającéj i równą $t - dt$. Twierdzenie Carnot'a daje nam

$$\frac{q-q'}{q}=\frac{dt}{a+t}.$$

Nazwijmy w powierzchnię obiegu $ABB'A'$, powierzchnią ta jest, jak wiemy, miarą pracy zewnętrznéj. Na mocy prawa równoważności mamy

$$q-q'=Aw,$$

lub podstawiając

$$qdt=A(a+t)w,$$

inaczéj

$$qdt=ATw,$$

gdzie q jest ilością ciepła dostarczoną mięszaninie, gdy punkt określający stan ciała przechodzi z A do B.

Jeżeli dwie adyabatyczne zamiast znajdować się w odległościach skończonych będą nieskończenie bliskie CC' i DD', otrzymamy

$$dqdt=A(a+t)dw.$$

Bardzo jest łatwo znaleść wartość dw w funkcyi ilości p i v. W saméj rzeczy, powierzchnia $CDD'C'$,

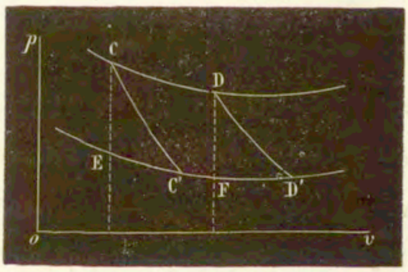

Fig. 21.

da się zastąpić przez CDEF, któréj miarą jest iloczyn z CE przez rzut CD na oś Ov. Ponieważ

$$CE=\frac{dp}{dt}\cdot dt,$$

a rzut CD na oś Ov jest równy dv, a więc

$$dw=\frac{dp}{dt}\cdot dt\times dv.$$

Podstawiając tak otrzymaną wartość dla dw w równanie powyżéj podane; otrzymamy

$$dqdt=A(a+t)\frac{dp}{dt}\cdot dt.dv,$$

$$dq=A(a+t)\frac{dp}{dt}\cdot dv,$$

Wzór ten da się jeszcze otrzymać innym sposobem.

Rankin znalazł że

$$(\alpha) \qquad Q = AT\frac{dS}{dT},$$

gdzie S oznacza pracę zewnętrzną.

Powierzchnia CDC'D', przedstawiająca geometrycznie pracę dS mierzy się iloczynem z dp przez dv; T jest równe $(a+t)$, a więc $dt = dT$ i ilość ciepła dostarczona mięszaninie jest nieskończenie małą. Wprowadzając te zmiany do wzoru powyżéj znalezionego otrzymamy

$$(\alpha) \qquad dq = A(a+t)\frac{dp}{dt}\cdot dv,$$

t. j. wzór już otrzymany innym sposobem.

Badajmy teraz zjawiska ulotnienia jednego kilograma mięszaniny od chwili, w któréj się znajdował w stanie płynu aż do chwili w któréj się zupełnie ulotnił.

Badania fizyków i liczne ich doświadczenia, pokazują nam, że temperatura w czasie ulotnienia się pozostaje stałą, a zatém $(a+t)$ i $\frac{dp}{dt}$ są to ilości stałe.

Oznaczmy przez σ objętość kilograma płynu o temperaturze t,
« v « jego pary o téjże saméj temperaturze.

Całkując równanie poprzednio otrzymane (α), mamy

$$q = A(a+t)\frac{dp}{dt}(v-\sigma);$$

gdzie q oznacza ilość ciepła potrzebną do zamienienia na parę o temperaturze t, płynu posiadającego też samą temperaturę.

Ilość tę oznaczyliśmy poprzednio przez L, możemy więc w téj chwili napisać jéj dwie wartości

$$(1) \qquad L = A\Delta U + Ap(v-\sigma),$$

$$(2) \qquad L = A(a+t)\frac{dp}{dt}(v-\sigma).$$

Oznaczając przez u wartość $(v-\sigma)$, t. j.

$$u = v - \sigma,$$

otrzymamy

$$L = A(a+t)\frac{dp}{dt}\cdot u.$$

Mając temperaturę daną, wzory (F) i (B) dają wartości ilości L i $\frac{dp}{dt}$, a zatém możemy obliczyć przyrost objętości kilograma wody u, przy przejściu jéj ze stanu płynnego w lotny. Przy téj zmianie stanu ciśnienie i temperatura pozostają stałemi, a więc praca zewnętrzna równą jest pu, któréj równoważnikiem wyrażonym w ciepłostkach jest Apu.

Na mocy równania poprzedzającego mamy

$$Apu = \frac{Lp}{(a+t)\frac{dp}{dt}}.$$

Związki (A), (B), (F) i (G) pokazują, że dla pary nasyconéj ciśnienie p i jego pochodna $\frac{dp}{dt}$; ilość ciepła L; przyrost objętości a zatém i objętość $v = \sigma + u$ pary; są wyłącznie funkcyami temperatury.

To pozwala nam przypuścić, że istnieje pewien związek pomiędzy ciśnieniem p i objętością v.

Zeuner dla pary wodnéj podał następujący wzór empiryczny

$$pv^n = p_1 v^n{}_1 = \text{ilość stała},$$

w którym p oznacza ciśnienie na metr kwadratowy wyrażone w kilogramach,

« v jest objętością kilograma pary wodnéj nasyconéj

$$n = 1{,}0646 \text{ i } p_1 v_1{}^n = 17609{,}136.$$

3° **Mięszanina płynu i jego pary.** — Badajmy zmiany mięszaniny o temperaturze t, płynu i jego pary ważącéj jeden kilogram.

Niech będzie x, waga pary w mięszaninie,

$(1-x)$ waga płynu,

w waga mięszaniny,

σ i v objętości gatunkowe płynu i pary.

Widocznem jest że

$$(\alpha) \qquad w = \sigma(1-x) + vx = \sigma + (v-\sigma)x.$$

Cztery wielkości σ, v, p, L są wyłącznie funkcyą temperatury, v jest funkcyą t i x, a zatém t i x możemy uważać jako zmienne niezależne. Badajmy więc zmianę nieskończenie małą, gdy ciało przechodzi ze stanu którego cechą jest (t, x), do stanu którego cechą jest $(t+dt, x+dx)$. W tym przypadku mamy do ogrzania: 1° wagę x pary; 2° wagę $(1-x)$ płynu i 3° do zamienienia na parę wagę dx płynu.

Wiemy z poprzednich twierdzeń, że ilość ciepła potrzebna do podniesienia temperatury na dt stopni, daną jest przez równanie

$$dQ = Cdt + hdp,$$

a zatém

$$dQ = (1-x)(Cdt + hdp) + x(C'dt + h'dp) + \mathrm{L}.dx.$$

Dla gazów jak dla pary nasyconéj, ciśnienie jest wyłącznie funkcyą temperatury a więc

$$dp = \frac{dp}{dt} \cdot dt,$$

czyli podstawiając za dp w poprzedniém równaniu tu podaną wartość otrzymamy

$$dQ = (1-x)\left(C + \frac{hdp}{dt}\right)dt + x\left(C' + \frac{h'dp}{dt}\right)dt + Ldx.$$

Załóżmy dla skrócenia

$$m = C + h\frac{dp}{dt}$$

$$m' = C' + h'\frac{dp}{dt}.$$

Wielkości C, h, m, C', h', m', są wyłącznie funkcyą temperatury. Spółczynnik m' nazwany został cieplikiem gatunkowym pary nasyconéj suchéj.

Po dokonaniu skróceń i uproszczeń równanie poprzednie zamienia się na następujące:

$$dQ = [m(1-x) + m'x]dt + Ldx,$$

lub

$$dQ = [m + x(m'-m)]dt + Ldx.$$

Różniczkując równanie (α), dające wartość w, mamy

$$dw = \frac{d\sigma}{dt} . dt + x\frac{d(v-\sigma)}{dt}dt + (v-\sigma)dx,$$

a więc praca zewnętrzna równa jak wiadomo

$$lS = pdw,$$

wyraża się przez

$$dS = p\left[\left(\frac{d\sigma}{dt} + x\frac{d(v-\sigma)}{dt}\right)dt + (v-\sigma)dx\right].$$

Równanie zasadnicze daje nam

$$dQ = A\,[\,dU + pdw],$$

a zatém podstawiając otrzymamy

$$(\beta) \qquad AdU = \left[m + (m'-m)x - Ap\frac{d\sigma}{dt} - Apx\frac{d(v-\sigma)}{dt}\right]dt + [L - Ap(v-\sigma)]dx.$$

Równanie Clausius'a. — Dzielność wewnętrzna mięszaniny płynu i jego pary, jest pewną funkcyą zmiennych niezależnych t i x.

Równanie (β) daje różniczkę całkowitą téj funkcyi, a zatém i dwie jéj pochodne częściowe pierwszego rzędu równe: pierwsza

$$A\frac{dU}{dt} = m + (m'-m)x - Ap\frac{d\sigma}{dt} - Apx\frac{d(v-\sigma)}{dt}$$

a druga

$$A\frac{dU}{dx}=L-Ap(v-\sigma);$$

ztąd wyprowadzamy

$$A\frac{d^2U}{dtdx}=m'-m-Ap\frac{d(v-\sigma)}{dt}$$

i

$$A\frac{d^2U}{dxdt}=\frac{dL}{dt}-A(v-\sigma)\frac{dp}{dt}-Ap\frac{d(v-\sigma)}{dt}.$$

Równając pomiędzy sobą dwie ostatnie równości otrzymujemy właśnie związek Clausius'a.

$$\frac{dL}{dt}+m-m'=A(v-\sigma)\frac{dp}{dt}.$$

Równanie Tompson'a. — Równanie

$$dQ=[m+(m'-m)x]dt+Ldx$$

podzielone przez T daje nam

$$d\mu=\frac{dQ}{T}=\frac{m+(m'-m)x}{T}dT+\frac{L}{T}dx.$$

Druga strona tego równania jest różniczką zupełną funkcyi zmiennych niezależnych t i x, a więc

$$\frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dF}=\frac{m'-m}{T},$$

co można jeszcze przedstawić w następującym kształcie

$$(\beta_1)\qquad \frac{dL}{dT}=\frac{L}{T}+m'-m.$$

Wreszcie zestawienie równań

$$\frac{dL}{dT}+m-m'=A(v-\sigma)\frac{dp}{dt}\quad \text{i}\quad (\beta_1)$$

daje nam

$$\frac{L}{T}=A(v-\sigma)\frac{dp}{dt}.$$

Jeżeli w równaniu danem na początku tego paragrafu zastąpimy $(m'-m)$ przez ich wartości otrzymamy

$$\frac{dQ}{T}=\frac{m}{T}dT+xd\left(\frac{L}{T}\right)+\frac{L}{T}+dx,$$

lub

$$d\mu=\frac{dQ}{T}=\frac{m}{T}dT+d\left(\frac{Lx}{T}\right).$$

Druga strona tego równania jest różniczką zupełną, gdyż m jest wyłącznie funkcyą temperatury, całkując więc przychodzimy do wzoru,

$$\mu = \frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{T}} + \int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}} \frac{m}{\mathrm{T}}\, d\mathrm{T}.$$

Jeżeli w tém ostatniém równaniu założymy μ stałém, otrzymamy równanie linij adyabatycznych.

Gęstość pary nasyconéj. — Poprzednio otrzymaliśmy

$$v - \sigma = \frac{\mathrm{EL}}{(a+t)\frac{dp}{dt}} = \frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{T}\frac{dp}{dt}}.$$

Wielkości L i p są funkcyami temperatury i ich wartości dadzą się wyznaczyć za pomocą wzorów empirycznych p. Regnault.

Równanie poprzednie daje nam wartości v i σ. Ponieważ objętość płynu σ, jest prawie stałą, a więc możemy oznaczyć wartość v objętości pary, a ztąd i jéj gęstość. Oto są wypadki doświadczeń Clausius'a dla pary wodnéj.

STOPNIE t	OBLICZONE v	OBSERWOWANE v	OBLICZONE v ZA POMOCĄ PRAWA MARIOTTE'A
58,21	8,23	8,27	8,38
92,66	2,11	2,15	2,18
117,17	0,947	0,941	0,991
144,74	0,437	0,432	0,466

Fairbairn i Faite wyznaczyli także drogą doświadczeń wartości dla v. Wartości te bardzo mało się różnią od wartości danych teoretycznie i są znacznie mniejsze od wartości obliczonych za pomocą formuły Mariotte'a.

Cieplik gatunkowy pary nasyconéj. — Poprzednio znaleźliśmy związek,

$$m' - m = \mathrm{T}\,\frac{d\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)}{d\mathrm{T}},$$

za pomocą którego możemy wyznaczyć wartość m' cieplika gatunkowego pary nasyconéj, jeżeli L jest znaném. Nadto możemy uczynić

$$m = \mathrm{C},$$

albowiem dla płynów spółczynnik h jest bardzo małym

Wszystkie płyny możemy podzielić na trzy rodzaje :

1° Płyny dla których m jest odjemne ; 2° Płyny dla których m' jest dodatne i w końcu ; 3° Płyny dla których m' zmienia znak stosownie do temperatury.

Równanie zasadnicze

$$dQ = cdt + ldv,$$

dla pary suchéj i nasyconéj, daje się napisać jak następuje

$$dQ = \left(c' + l'\frac{dv'}{dT}\right)dT.$$

Równanie to jest wyłącznie funkcyą temperatury, a więc

$$m' = c' + l'\frac{dv'}{dT}.$$

Ze wzrostem temperatury objętość gatunkowa pary nasyconéj maleje, a zatém pochodna $\frac{dv'}{dT}$ jest odjemną; druga strona równania poprzedzającego składa się z dwóch wyrazów znaków przeciwnych, możebném więc jest, że wartości m' stosownie do przypadku mogą być dodatne lub odjemne.

Oto jest tablica wartości m' podana przez Clausius'a.

NATURA CIAŁA	STOPNIE t	m'
Para wodna	0	
	58,21	−1,398
	92,66	−1,266
	117,17	−1,107
	144,74	−0,807
Siarczan węgla (Sulfure de carbone)	0	−0,184
	80	−0,164
	160	−0,157
Para eteru	0	+0,116
	40	+0,120
	80	+0,128
	120	+0,133

Tablica powyższa wskazuje nam że para wodna i siarczan węgla należą do pierwszego rodzaju płynów, para zaś eteru do drugiego.

4° **Skraplanie częściowe przy rozprężaniu się pary wodnéj.** — Znak wartości m' ma wielkie znaczenie; przypuśćmy że para wodna doznaje zmiany nieskończenie małéj, zastrzegając, że para ta zostaje suchą i nasyconą; mamy:

$$dQ = m'dt$$

lub

$$dQ = m' \frac{dt}{dv} dv = m' \frac{d}{\frac{dv}{dt}}.$$

Pochodna $\frac{dv}{dt}$ i wartość m' są odjemne ztąd wypada że dQ i dv posiadają téż same znaki.

Niech będzie jeden kilogram pary wodnéj suchéj i nasyconéj o temperaturze t, zmniejszmy jéj objętość; dv i dQ będą ilościami odjemnemi, a zatém para odda pewną ilość ciepła. Jeżeli zmniejszenie objętości pary będzie wykonane w sposób tak gwałtowny że ciepło wydane nie będzie w stanie przenieść się na ciała zewnętrzne, ciepło to ogrzeje jeszcze parę i podniesie jéj temperaturę wyżéj temperatury właściwéj nasyceniu, a zatém para wodna zostanie *przegrzaną* za pomocą ściśnienia.

Przypuśćmy odwrotnie że para wodna rozszerza się, dv i dQ są ilościami dodatnemi a zatém para pochłania ciepło. Jeżeli powiększenie objętości pary wodnéj zostało dokonane w sposób tak gwałtowny że ciała zewnętrzne nie były wstanie dostarczyć potrzebnéj ilości ciepła, nastąpi koniecznie częściowe skroplenie się pary.

Dla eteru ponieważ m' posiada znak dodatny zjawisko poprzednie odbędzie się w sposób odwrotny.

Zjawiska poprzednio opisane dadzą się przedstawić geometrycznie w sposób następujący:

Niech będzie NN linia nasycenia pary wodnéj nakreślmy adyabatyczną AB, punkt M będzie punktem przecięcia odpowiadającym suchości i nasyceniu pary. Jeżeli zmniejszymy objętość pary bez

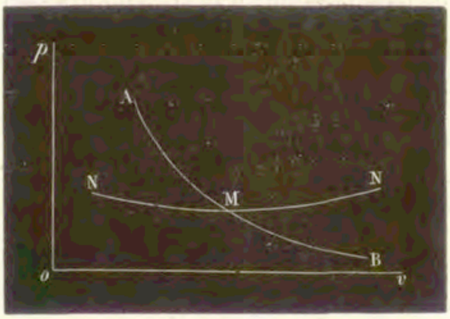

Fig. 22.

wydatku i pochłonięcia ciepła, para przegrzewa się, a zatém gałęź MA adyabatycznéj będzie się znajdować nad krzywą NN.

Jeżeli zaś zwiększymy objętość pary wodnéj bez wydatku i pochłonięcia ciepła, nastąpi skroplenie częściowe i gałęź MB adyabatycznéj znajdować się będzie poniżéj krzywéj NN.

Wzór służący do oznaczenia stanu mięszaniny i jego pary w założeniu, że punkt określający stan ciała przebiega adyabatyczną. — Weźmy kilogram mięszaniny zawierającéj wagę x, pary i wagę $(1-x)$ płynu o temperaturze t i ciśnieniu p.

Niech punkt M (fig. 23) będzie punktem określającym stan ciała, spółrzędne tego punktu są

$$p = \mathrm{NM} \quad \text{i} \quad \mathrm{ON} = \sigma + x(v-\sigma) = \sigma + xu.$$

Przedstawmy geometrycznie zmianę zaszłą w stanie mięszaniny przez element obiegu MM'. Punkt określający stan ciała przejdzie z punktu M do położenia M' i spółrzędne pierwotne zamienią się na

$$(p+dp) \quad \text{i} \quad [\sigma + xu + d(xu)].$$

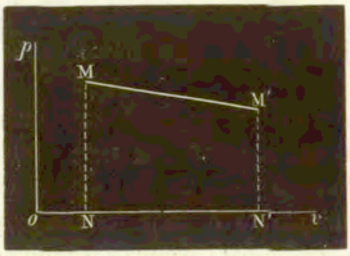

Fig. 23.

Twierdzenie równoważności daje nam wzór następujący :

$$(\alpha) \qquad dQ = AdU + Apd(mu).$$

W obliczeniu pracy zewnętrznéj opuściliśmy wyraz, w którym się znajduje $d\sigma$ jako spółczynnik, gdyż rozszerzalność płynu jest nieskończenie małą.

Następujące uwagi posłużą nam do przedstawienia równania (α) w innym kształcie.

Mięszaninę można doprowadzić do stanu M nagrzewając najprzód kilogram wody od 0° do t, co wymaga ilości ciepła μ_t; następnie ulatniając przy temperaturze t i ciśnieniu p wagę x, co wymaga jeszcze ilości ciepła $x(\lambda_t - \mu_t) = m$L. Doprowadzenie mięszaniny do stanu M wywołało dokonanie pracy pxu i dzielność wewnętrzna téj mięszaniny wzrosła o ilość $(U - U_0)$, a zatém

$$(\beta) \qquad \mu_t + xL = A(U - U_0) + Apxu.$$

W podobny sposób możemy doprowadzić mięszaninę do stanu M' i równanie analityczne stanu mięszaniny w M' różnić się będzie od poprzedzającego tylko tém, że każda zmienna powiększy się o swą różniczkę, a zatém będzie

$$(\gamma) \qquad \mu_t + \frac{d\mu_t dt}{dt} + xL + dxL = A(U + dU - U_0) + Apxu + Apd(xu) + Axu\frac{dp}{dt}\,dt.$$

Odejmując równanie (β) od równania (γ) mamy,

$$\frac{d\mu_t}{dt}\cdot dt + d(xL) = AdU + Apd(xu) + Axu\frac{dp}{dt}\cdot dt.$$

Znaleźliśmy poprzednio że

$$Au\frac{dp}{dt} = \frac{L}{a+t} = \frac{L}{T},$$

zakładając zaś

$$\frac{d\mu}{dt} = X = m$$

otrzymamy

$$mXdt + d(xL) = AdU + Apd(xu) + \frac{xL}{T}dT.$$

Rozwiążmy poprzednie równanie co do dU i wartość tak znalezioną podstawmy w równaniu równoważności

$$dQ = AdU + Apd(xu)$$

znajdziemy

$$dQ = mdt + d(xL) - \frac{xL}{a+t} \cdot dt$$

lub dzieląc obie strony równania przez $a+t$

$$(\lambda) \qquad \frac{dQ}{a+t} = m\frac{dt}{a+t} + d\frac{(xL)}{a+t} - \frac{xL}{(a+t)^2}dt = m\frac{dt}{a+t} + d\left(\frac{xL}{a+t}\right) = \frac{dQ}{a+t} = d\mu.$$

Ostatnie równanie daje prawo stanów mięszaniny, gdy punkt określający stan ciała przebiega jakąkolwiek linię. Jeżeli linia ta jest adyabatyczną mamy warunek $dQ = 0$ i równanie poprzednie zamienia się na

$$\frac{mdt}{a+t} + d\left(\frac{xL}{a+t}\right) = 0,$$

lub całkując w granicach t_2 i t_1

$$(\pi) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \frac{mdt}{a+t} + \frac{x_2L_2}{a+t_2} - \frac{x_1L_1}{a+t_1} = 0.$$

Jeżeli mięszanina wody i jéj pary zawartą jest w walcu o ścianach nieprzepuszczających ciepła obdarzonym tłokiem ruchomym wzór poprzedni pozwala nam oznaczyć w każdéj chwili stan téj mięszaniny.

Praca podczas rozprężania się pary. — Rozwiążmy równanie poprzednie (π) co do x_2 i podstawmy wartość tak otrzymaną w równanie :

$$U_2 - U_1 = E(L_2x_2 - L_1x_1) - p_2w_2 + p_1w_1 + E\int_{T_1}^{T_2} ndT + \int_{p_1}^{p_2} vdp,$$

otrzymamy

$$U_2 - U_1 = Ex_1L_1\frac{T_2}{T_1} - ET_2\int_{T_1}^{T_2} m\frac{dT}{T} - EL_1x_1 - p_2w_2 + Ep_1w_1 - E\int_{T_1}^{T_2} mdT + \int_{p_1}^{p_2} vdp$$

lub upraszczając

$$U_2 - U_1 = EL_1x_1\frac{T_2 - T_1}{T_1} + E\int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_2}{T}\right)dT - p_2w_2 + p_1w_1 + \int_{p_1}^{p_2} vdp.$$

Ponieważ punkt określający stan ciała przebiega adyabatyczną $dQ = 0$, a zatém praca zewnętrzna równa jest ubytkowi dzielności wewnętrznéj $U_1 - U_2$, czyli że mamy

$$S = E(L_1x_1 - L_2x_2) + p_2w_2 - p_1w_1 - E\int_{T_1}^{T_2} mdT - \int_{p_1}^{p_2} vdp.$$

Clausius badał parę suchą i nasyconą o temperaturze 150° obrał za jedność objętości, objętość kilograma pary posiadającéj 150°, czyli że $t_1 = 150$; $x_1 = 1$; $w_1 = 1$; i obliczył kilka wartości dla S w funkcyi temperatury.

t	x	w	S kilogrammetrów	w_1
0				
125	0,956	1,8	11300	1,93
100	0,911	3,90	23200	4,16
75	0,866	9,23	25900	10,11
50	0,821	15,70	49300	29,70
25	0,776	88,70	63900	107,10

Powyższa tablica wskazuje że skraplanie wzrasta wraz z rozprężalnością pary.

§ 2. PARA PRZEGRZANA.

1° **Własności pary przegrzanéj. Wzory Zeunera. Tablice Hirna.** — Teorya pary przegrzanéj jest prawie w całości do zrobienia. Zeuner i Hirn podali kilka wzorów, któremi zwykle posługują się konstruktorowie maszyn. Liczne doświadczenia p. Regnault pokazują że cieplik gatunkowy pary, przy stałém ciśnieniu zmienia się nieznacznie z temperaturą. Dla pary wodnéj w granicach zwykłych temperatury, cieplik gatunkowy ma wartość przecięciową równą 0,4805.

Związek służący do oznaczenia ilości ciepła dQ potrzebnéj do przegrzania kilograma pary jest następujący :

$$Q = 0{,}4805\,(t - t_1).$$

Spółczynnik rozszerzalności pary przegrzanéj jest bardzo zmiennym, największa jego wartość odpowiada chwili nasycenia, wartość ta maleje następnie i dąży do ilości 0,003665 która jest spółczynnikiem gazów stałych.

Zeuner podał wzór służący do obliczania objętości gatunkowéj pary suchéj, którą przegrzewamy, pozostawiając ciśnienie stałém. Wzór ten jest następujący :

$$pv = 50933\,(a + t) - 192{,}50\,p^{1/4}.$$

Ciśnienie p jest wyrażone w kilogramach na metr kwadratowy. Wartości znalezione za pomocą tego wzoru, dla v zbliżają się bardzo do wartości znalezionych drogą doświadczalną przez p. Hirn.

Tablica poniższa obejmuje kilka wartości objętości gatunkowéj pary przegrzanéj.

CIŚNIENIE W ATMOSFERACH	TEMPERATURA W STOPNIACH	OBJĘTOŚCI GATUNKOWE W METRACH SZEŚCIENNYCH WARTOŚCI OTRZYMANE	
		NA MOCY DOŚWIADCZENIA	Z FORMUŁY
1	118,50	1,740	1,747
1	141	1,850	1,852
3	200	0,697	0,695
4	165	0,482	0,473
4	200	0,522	0,516
4	246	0,575	0,573
5	162,50	0,376	0,373
5	205	0,414	0,415

Wzór podany powyżéj daje wartości v zbliżające się znacznie do wartości znalezionych doświadczalnie przez p. Hirn.

Zeuner opierając się na licznych swych doświadczeniach twierdzi, iż równanie

$$pv^{4/3} = \text{ilość stała}$$

jest równaniem adyabatycznych pary przegrzanéj.

Nakreślmy linię MA, daną przez równanie $p_1 v_1^{(1,0646)} = \text{ilość stała}$. Ostatni ten wzór daje nam związek istniejący pomiędzy objętością i prężnością jednego kilogramma pary nasyconéj. Obierzmy na krzywéj MA punkt M mający za współrzędne om i mM. Punkt M jest punktem określającym stan jednego kilogramma pary nasyconéj. Nagrzewajmy kilogramm pary przy stałém ciśnieniu, przegrzejmy go i zmuśmy do przejścia do stanu N[(N$n = p_1 =$ M$m = p_1'$), $on = v_1$].

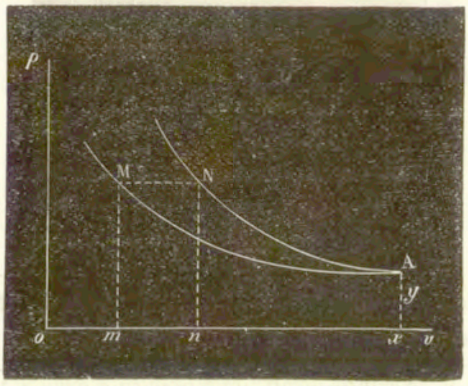

Fig. 24.

Przez punkt N poprowadźmy krzywę NA, daną przez równanie

$$pv^{4/3} = p'_1 \, v_1^{4/3}.$$

Krzywa ta przedłużona dostatecznie przetnie krzywę MA w punkcie A, mającym za współrzędne x i y. Ponieważ punkt przecięcia znajduje się na krzywéj MA i na krzywéj NA, a zatém

$$yx^{4/3} = p'_1 v_1^{4/3} \qquad \text{i} \qquad yx^{(1,0646)} = p'_1 v'_1{}^{(1,0646)}.$$

Dzieląc przez siebie te dwa równania i biorąc logarytmy otrzymamy

$$0,2687 \log x = \frac{4}{3} \log v_1 - 1,0646 \log v_1.$$

Wzór ten pokazuje, że krzywe MA i NA zawsze się przetną z sobą i tém daléj od początku osi im przegrzanie będzie silniejszém.

2° **Przejście raptowne pary z ciśnienia większego na mniejsze.** — W poprzednich paragrafach pokazaliśmy prawa rządzące parą, gdy cała praca jaką ta para zdolna jest wytworzyć została oddaną. Z biegu rzeczy nasuwa się pytanie co się dzieje z mięszaniną płynu i pary nasyconéj, przy gwałtownéj zmianie ciśnień bez wykonania pracy zewnętrznéj?

Paragraf ten ma za przedmiot dowieść że para nasycona w tych warunkach musi się koniecznie przegrzać.

W tym celu wyobraźmy sobie dwa walce A i B o przecięciach 5 i 575 połączone przez rurę r' i obdarzone dwoma tłokami których drągi działają na koło zębate G.

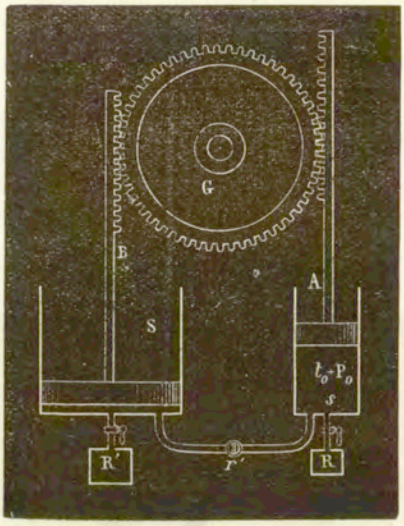

Fig. 25.

Tłok B znajduje się na dole swego skoku, tłok zaś A u góry. Nadto załóżmy że A zawiera wagę $M = 1$ kilogram pary nasyconéj o ciśnieniu P_0 i temperaturze t_0.

Otwórzmy częściowo kurek r'. Nastąpi gwałtowne przejście pary z A do B i spadek ciśnienia P_0 na P_1, a ponieważ tłoki wciąż się równoważą więc

$$P_0 s = P_1 S.$$

Tłok A zniży się, tłok zaś B pójdzie w górę z szybkością zależną od otworu kurka. Ponieważ kurek tylko w bardzo małéj części został otworzonym szybkość tę w ciągu tego dowodzenia możemy opuścić. Zauważmy nadto, iż na mocy zależności tłoków, jeżeli tłok A np. wykonywa pracę dodatną to B wykonywa taką samą ilość pracy ujemnéj, a więc summa prac tłoków A i B pozostaje wiecznie i ustawicznie równą zeru, czego skutkiem jest niezmienność ilości ciepła wewnętrznego.

Przypominamy czytelnikowi iż v i s oznaczają objętości gatunkowe pary i płynu, u zaś ich różnicę.

Po zupełném przejściu pary z A do B nastąpi wzrost jéj objętości w stosunku s do S.

Oznaczmy objętość téj pary przez W; V_0 przedstawia objętość pary nasyconéj przy ciśnieniu P_0 i temperaturze t_0. Gdyby para po przejściu z A do B była tylko nasyconą ciepło jéj wewnętrzne miałoby za wyrażenie

$$I_x = q_x + \rho_x$$

lub

$$I_x = \lambda_x - A P_x (u_x).$$

Nim przyjdziemy do równania stającego się dowodzeniem naszego założenia zrobimy uwagę, iż λ

i $AP u$ rosną wraz z ciśnieniem i temperaturą. Lecz z warunków poprzednio założonych wypływa równość

$$W = V_0 \frac{S}{s}$$

a zatém

$$q_x + \rho_x = \lambda_x - AP_x u_x < q_0 + \rho_0 = \lambda_0 - AP_0 u_0$$

lub

$$\lambda_0 - AP_0 u_0 = \lambda_x - AP_x + a$$

zkąd

$$a = \lambda_0 - \lambda_x + (AP_x u_x - APu_0).$$

Ilość ciepła a nie może zkądinąd pochodzić jak tylko ztąd, że para gwałtownie przerzucając się z walca A do B bez wykonania żadnéj pracy zewnętrznéj dochodzi do temperatury θ większéj od t_x temperatura t_x jest właściwą nasyceniu przy ciśnieniu P_x i objętości V_x. Jeżeli więc oznaczymy przez K cieplik gatunkowy bezwzględny pary otrzymamy

$$l\lambda_0 = \lambda_x - AP_x u_x + K(\theta - t_x)$$

θ jest zawsze większém od t_x.

Tak więc dowiedliśmy że ilekroć para nasycona i sucha przechodzi gwałtownie i bez wykonania pracy zewnętrznéj, z cisnienia większego P_0 na mniejsze P_x ($P_0 > P_x$) zawsze para ta po przejściu posiadać będzie temperaturę wyższą od temperatury właściwéj ciśnieniu P_x.

Twierdzenie. — Jeżeli para sucha lub przegrzana, któréj prawo rozprężania jest ciągłém, przechodzi adyabatycznie i bez wydatku pracy zewnętrznéj z objętości V_0 lub W_0 do objętości $W > V_0 = W_0$ i spada w skutek tego, z ciśnienia P_0 na ciśnienie mniejsze P, zachodzi wciąż związek

$$P_0 V_0 = PV \text{ lub } P_0 W_0 = PW.$$

Przypominamy czytelnikowi iż V i W oznaczają objętości gatunkowe pary suchéj i przegrzanéj. Dla dowiedzenia powyższego twierdzenia niech będą tłoki A i B niezależne od siebie

Tłok A waży P_0 a powierzchnia jego $s = 1$ metr. kwadr. Walec A zawiera kilogram pary nasyconéj lub innéj o ciśnieniu P_0 i temperaturze t_0; tłok więc A równoważy ustawicznie prężność. R jest zbiornikiem pustym o temperaturze 0 zdolnym pomieścić przy temperaturze 0 kilogram płynu, który dał w walcu A parę o ciśnieniu P_0 i temperaturze t_0.

Otwórzmy częściowo kurek r'; para przejdzie gwałtownie do zbiornika pustego R i skropli się; koniecznem następstwem tego jest opadnięcie tłoka A (fig. 24).

Ilość ciepła, którą musimy odebrać zbiornikowi R, aby go utrzymać przy temperaturze zero jest daną przez

$$Q_0 = U_0 + AP_0 V_0.$$

Zamiast skroplić parę w R możemy postąpić sobie inaczéj i to w dwojaki sposób.

Dla tego niech będzie B drugi walec którego tłok waży także P_0. Powierzchnia tłoka B jest równą S i większą od s.

Widocznėm jest, że skoro otworzymy kurek r' para nasza o temperaturze t_0 przejdzie przy ciśnieniu P_0 z A do B, gdzie posiadać będzie prężność $P_1 = P_0 \frac{s}{S}$. Gdy tłok A znajdować się będzie na dole swego skoku tłok B podniesie się na wysokość nieznaną h_1, da miejsce objętości W'_1, a więc tém samém wykona pracę $P_1 W_1$. Jeżeli więc obecnie otworzymy częściowo kurek r'', para gwałtownie przerznie się do zbiornika pustego R′ posiadającego temperaturę równą zeru, a ponieważ żadna praca zewnętrzna nie została zebraną, ilość więc ciepła którą musimy odebrać zbiornikowi R′ aby go utrzymać przy temperaturze 0 jest daną przez

$$Q_0 = U_1 + AP_1 W'_1$$

a zatém

$$Q_0 = U_0 + AP_0 W_0 = U_1 + AP_1 W_1.$$

Zmianę dzielności możemy tylko zawdzięczyć wzrostowi algebraicznemu pracy $P_1 W_1$.

Postąpmy teraz jeszcze inaczéj niż poprzednio.

Zamiast zostawić drągi tłoków wolnemi, uczyńmy je zależnemi za pomocą koła zębatego G (fig. 24).

(Rozumie się samo przez się, iż w tém wszystkiem cośmy powiedzieli tarcie było uważaném za równe zeru). Walec A posiada kilogram pary o temperaturze t_0 i ciśnieniu P_0. Para po otwarciu kurka r' przejdzie z A do B i posiadać będzie objętość teraz już znaną, gdyż objętości powstałe przez ruch tłoków są w stosunku $\frac{S}{s}$. Ciśnienia w A i B są nam nieznane, lecz zawsze zachodzi związek $\frac{P_a}{P_b} = \frac{S}{s}$.

W tém doświadczeniu żadna praca zewnętrzna nie jest zebraną; dzielność więc ostateczna w B jest koniecznie równą dzielności początkowéj w A, dzielność ta jest równą U_0 oznaczając więc przez P'_1 ciśnienie ostateczne i nieznane w B i po uczynieniu tłoka B wolnym, zmuszając potém parę do przejścia do zbiornika R′ pod wpływem ciśnienia P′ ilość ciepła którą musimy odebrać temu zbiornikowi daną będzie przez

$$Q'_1 = U_0 + AP'_1 W'_1.$$

Na pozór dwa te doświadczenia, któreśmy dopiéro co opisali nie mają nic wspólnego. W pierwszym przez skroplenie odbieramy tę samą ilość ciepła lecz dzielność U_1 i praca $P_1 W'_1$ są nieznanemi. W drugiém doświadczeniu dzielność ostateczna U_0 jest znaną, lecz za to ani ciśnienie ani dzielność w A i w B w czasie ruchu pozostają nieoznaczonemi; nadto nie wiemy jaką jest ilość ciepła Q potrzebna do skroplenia przy ciśnieniu stałém P'_1. Pokażemy jednakże, że dwa poprzednio opisane doświadczenia są zupełnie te same pod względem zjawisk termicznych, dynamicznych.

W saméj rzeczy powiedzieliśmy że praca zewnętrzna pozostaje wciąż równą zeru, a zatém dzielność całkowita jest ilością stałą; co nam daje,

$$U_a m + U_b (1 - m) = U_0;$$

m i $(1 - m)$ są wagami pary w A i w B,

U_a i U_b oznaczają dzielności zmienne kilograma pary.

Różniczkując równanie poprzednie mamy

$$\text{(B)} \qquad m dU_a + U_a dm - U_b dm + (1 - m) dU_b = 0.$$

Badajmy teraz zjawiska mające miejsce w walcach.

Zjawiska odbywające się w walcu A są nader proste. Jeżeli P_a zmienia się, to jedynie w skutek iż albo ruch tłoka jest za wolny lub za prędki względem przepływu pary przez kurek r', lub téż, iż objętość powstała przez ruch tłoka jest mniejszą lub większą od objętości uszłéj. W skutek tego rozprężenia lub ściśnienia pary powstaje praca mająca za wyrażenie $P_a dV_a$ i wpływająca na zmiany dzielności U_a. Przedstawiając algebraicznie to cośmy powyżéj słowy wyrazili mamy,

$$m dU_a = - m A P_a dV_a$$

V_a oznacza objętość gatunkową.

Zjawiska mające za siedlisko walec B są bardziéj złożone. Zmiany P_b mogą nastąpić w skutek przyczyn wymienionych powyżéj dla P_a, nadto

1) Z A do B przy ciśnieniu $(P_a - P_b)$ (w czasie gdy tłok A sprowadza powstanie objętości sdh) przechodzi objętość którą oznaczymy przez dv dając miejsce pracy $(P_a - P_b) dv$. Praca ta kosztuje ilość ciepła $A(P_a - P_b) dv$.

2) W chwili gdy para ta wchodzi do B objętość jéj przechodzi z wartości dv na dY i rozprężając się gwałtownie wykonywa pracę $P_b (dY - dv)$, kosztującą ilość ciepła $AP_b (dY - dv)$. Widocznėm jest, iż przyrost algebraiczny dzielności $(1 - m) dU$, równa się summie trzech przyrostów poprzednio wymienionych,

$$(1 - m) dU_b = - AP_b dV_b (1 - m) + A (P_a - P_b) dv - AP_b (dY - dv),$$

co upraszczając daje nam równość

$$(1 - m) dU_b = A [(P_a - P_b) dv - P_b (dY - dv) - (1 - m) P_b dV_b].$$

Podstawiając dla $m dU_a$ i $(1 - m) dU_b$ wartości znalezione, równanie (B) staje się

$$\text{(II)} \qquad (U_a - U_b) dm - A (P_a dV_a) + A(P_a - P_b) dv - AP_b (dY - dv) - A (1 - m) P_b dV_b = 0$$

lecz

$$dv = S dh + m dV_a,$$
$$dY = S dh - (1 - m) dV_b,$$

$$P_b = \frac{s}{S} P_a,$$

a zatém podstawiając mamy

$$\text{(E)} \qquad (U_a - U_b) dm = 0,$$

zkąd

$$U_a = U_b.$$

Zastępując U_b przez U_a w równaniu (A) otrzymujemy

$$U_a = U_0.$$

Co nam pozwala twierdzić iż dzielność pary w obydwóch jest tą samą i stałą.

Na mocy $U_a =$ ilość stała mamy

$$m dU_a = - m AP_a dV_a = 0,$$

zkąd

$$P_a = \text{ilość stała} = P_0,$$

a zatém

$$P_0 V_0 = P_1 V_1$$

lub

$$PW = P_0 V_0 = P_0 W_0.$$

Z tego widzimy że dwa powyżéj opisane doświadczenia jakkolwiek odrębne na pozór, są w rzeczywistości zupełnie te same.

W doświadczeniu o tłokach niezależnych założyliśmy

$$Q_0 = U_0 + AP_0 V_0,$$

$$Q_0 = U_1 + AP_1 V_1$$

dla ilości ciepła, oddanych przez parę skroploną przy temperaturze 0 i ciśnieniach stałych P_0 i P_1; lecz

$$U_1 = U_0 \quad \text{i} \quad V_1 = V_0 \frac{P_0}{P_1},$$

a zatém

$$Q_0 = U_0 + AP_0 V_0 = U_0 + AP_1 V_1.$$

Równanie to wyraża że ilość ciepła oddana przez skroplenie jest tą samą dla obydwóch walców. Ze wzorów powyżéj otrzymanych wypływają dla pary i gazów dwa prawa nader ważne:

1) Iloczyn z ciśnienia zewnętrznego i objętości pozostaje stałym, jeżeli żadna praca zewnętrzna nie została wykonaną;

2) Ilość ciepła oddana przez skroplenie przy ciśnieniu stałém i ostateczném P_1 jest stałą.

NOTA. — Jeszcze przypominamy czytelnikowi iż V i W oznaczają objętości gatunkowe pary suchéj przegrzanéj.

ROZDZIAŁ VII

ZASTOSOWANIE TEORYI MECHANICZNEJ CIEPŁA DO MASZYN PAROWYCH.

§ 1y MASZYNA IDEALNA.

Maximum pracy kilograma pary w granicach oznaczonych temperatury. — Badajmy najprzód maszynę idealną działającą podług obiegu Carnot'a i dającą się uzmysłowić w następujący sposób. Parę wytworzoną w *grzalnicy* (chaudière) wprowadzamy do walca zamkniętego o ścianach nieprzepuszczających ciepła; para ta wywiera silne ciśnienie na tłok i popycha go. Ruch nadany tłokowi, za pomocą różnych przyrządów zostaje przesłany na zewnątrz. Skoro para przemieściła tłok mniéj lub więcéj wprowadzenie jéj ustaje i tylko skutkiem swego rozprężania para popycha i zmusza tłok do dosięgnięcia krańca swego skoku (course).

W chwili gdy tłok dochodzi do końca swego skoku, łączymy walec zamknięty ze *skraplaczem* (condenseur) posiadającym temperaturę znacznie niższą od temperutury grzalnicy, w celu zmniejszenia prężności mięszaniny wody i pary, gdy tłok będzie się cofać.

Następnie wodę znajdującą się w skraplaczu, można przesłać do grzalnicy za pomocą pompy lub jakiegokolwiek innego przyrządu. Jeżeli weźmiemy za odcięte, objętości mięszaniny pary i wody, a za rzędne prężności odpowiednie, końce tych rzędnych oznaczą nam linię zamkniętą zwaną obiegiem, któréj powierzchnia przedstawi pracę przesłaną tłoka, gdy ten ostatni dokonał ruchu w tył i naprzód. Obieg ten jest zamknięty, gdyż woda powraca do swego pierwotnego stanu. Posiadamy dwa źródła o stałéj temperaturze, grzalnicę i skraplacz, pierwsze źródło ma temperaturę t_2 a drugie temperaturę t_1.

Dowiedliśmy poprzednio, że największa dajność maszyny otrzymuje się kiedy ciało pośrednie działa pomiędzy dwowa źródłami o stałéj temperaturze, przebiegając obieg Carnot'a. Zobaczymy więc obecnie w jaki sposób można urzeczywistnić obieg Carnot'a. Podzielimy w tym celu przebieg obiegu Carnot'a na cztery peryody.

1° Para powstała wprowadzoną zostaje do walca i działa z pełném ciśnieniem;

2° Para rozpręża się bez pochłaniania lub wydatku ciepła w walcu którego ściany nieprzepuszczają zupełnie ciepła;

3° Para zostaje w połączeniu ze skraplaczem i jest ciśniętą przez tłok cofający się;

4° Mięszanina wody i pary jest ściskaną bez pochłonienia lub wydatku ciepła i odesłaną do grzalnicy.

Po tém treściwém określeniu maszyny parowéj i sposobu w jaki da się urzeczywistnić obieg Carnota, przystąpmy do ujęcia w formuły algebraiczne zjawisk które mają miejsce.

W grzalnicy znajduje się waga M wody posiadającéj temperaturę T_2 i ciśnienie stałe p_2.

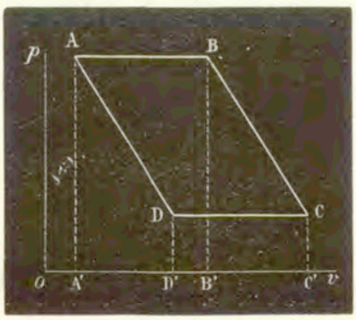

Fig. 26.

Ciepło dostarczone przez ognisko (foyer) przerabia pewną część téj wody na parę o temperaturze T_2; pierwszy więc peryod przedstawiony jest przez linię AB równoległą do osi Ov. Zbyteczném byłoby powtarzać cośmy już powiedzieli, ograniczymy się więc na dodaniu, że BC przedstawia peryod drugi, CD trzeci i AD czwarty i ostatni.

Wzdłuż linii równéj temperatury AB część Mx_2 wagi płynu, została przerobioną na parę i ognisko dla dokonania tego, dostarczyło ilość ciepła oznaczoną przez równanie.

$$Q_2 = L_2 Mx_2 = ML_2 x_2.$$

Od B do C mięszanina rozpręża się nie pochłaniając ani wydając ciepła i jeżeli x_1 jest częścią pary gdy mięszanina jest w stanie C, będziemy mieli

$$\frac{L_1 x_1}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT.$$

Wzdłuż linii CD nowa ilość pary skrapla się przy temperaturze T_1 i jeżeli x', jest częścią pary pozostałéj w punkcie D ilość ciepła Q_1 przesłana skraplaczowi jest wyrażoną przez równanie

$$Q = ML_1(x_1 - x).$$

Mięszanina powraca ostatecznie do stanu A i to nam pozwala oznaczyć wartość x'. Od D do A mięszanina jest ściskaną adyabatycznie i w punkcie A, x jest równém zeru, a więc

$$(2) \qquad \frac{L_1 x'}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT.$$

Wartość x_2 jest dowolną, wszystkie zaś inne dają się wyznaczyć w jéj funkcyi.

Odejmując równanie (2) od równania (1) otrzymamy

$$\frac{L_1(x_1 - x')}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2}.$$

Możemy więc napisać wartość Q_1 w sposób następujący

$$Q_1 = ML_2 x_2 \frac{T_1}{T_2}.$$

Ilość ciepła zamienionego na pracę równa się

$$Q_2 - Q_1 = ML_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

co też i być powinno, gdyż maszyna działa podług obiegu Carnot'a.

Praca wykonana przez maszynę przedstawia się w kształcie

$$S = MEL_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

który odpowiada pracy dokonanéj przez wagę Mx_2 pary, a zatém dla jednego kilograma pary będzie

$$S = EL_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{t_2 - t_1}{a + t},$$

i to jest największa wartość pracy jaką wykonać może jeden kilogram w danych granicach temperatury

W warunkach idealnych, kilogram pary suchéj, działając podług obiegu Carnot'a, pomiędzy ogrzewaczem o temperaturze 159°,22 i skraplaczem o temperaturze 40°, może wykonać pracę zewnętrzną 57846,77 kilogrammetrów. Koń parowy przez godzinę wykonywa

$$75 \times 3600 = 270{,}000 \text{ kilogrammetrów},$$

ztąd wypada, że w tych warunkach wystarczającém jest dostarczyć maszynie na godzinę i na konia parowego wagę pary równą $\frac{270000}{57846{,}77} = 4^{kg}66$, którą to wagę otrzymać można bardzo łatwo paląc tylko pół kilograma węgla; praktycznie jednak, po dziś dzień nie zdołano urzeczywistnić obiegu Carnot'a.

Użycie mięszaniny wody i jéj pary. — Przypuśćmy, że para wychodząc z ogrzewacza est pomięszana z wodą. Niech będzie

x_2 waga pary;

$1 - x_2$ jest wagą wody;

albowiem mięszanina waży jeden kilogram.

t_2 temperatura ogrzewacza;

t_1 « skraplacza.

Nakreślmy obieg, który jak poprzednio składać się będzie z czterech peryodów.

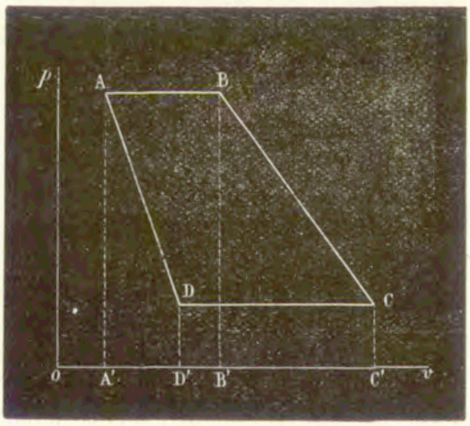

Fig. 27.

Zacznijmy od chwili w któréj kilogram wody znajduje się w stanie płynnym i posiada temperaturę t_2. Stan o którym mowa oznaczy się geometrycznie biorąc $OA = \sigma$ i oznaczając ciśnienie w ogrzewaczu przez $AA' = p_2$. W chwili gdy waga pary przybiera wartość x_2, ciśnienie pozostaje stałém, objętość powiększa się o $x_2 u_2$ i otrzymujemy punkt B, czyniąc $OB = \sigma + x_2 u_2$ i $BB' = p_2$. Linia AB jest równoległą do Ov. Od punktu B mięszanina rozpręża się adyabatycznie i gdy temperatura jéj stanie się równą temperaturze skraplacza, mięszanina zawierać będzie wagę x_1 pary daną przez równanie

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{T}\, dT + \frac{x_2 L_2}{T_2} - \frac{x_1 L_1}{T_1} = 0,$$

jéj objętość stanie się równą $\sigma + x_1 u_1$; ciśnienie równém p_1 i otrzymamy w ten sposób punkt C; czyniąc $OC' = \sigma + x_1 u_1$ i $CC' = p_1$.

Peryody trzeci i czwarty oznaczają się tak samo jak w przypadku pary suchéj. W ogrzewaczu woda znajduje się w stanie płynnym i posiada temperaturę t_2, a ponieważ mamy ulotnić tylko wagę pary x_2, przeto ciepło potrzebne do osiągnięcia tego jest dane przez równanie:

$$x_2(\lambda_{t_2} - \mu_{t_2}) = x_2 L_2.$$

W pierwszym peryodzie maszyna wykonywa pracę $x_2(pu)_2$ równoważną ilości ciepła $x_2 A(pu)_2$ i w końcu tego peryodu mięszanina posiada ilość ciepła $x_2(\lambda_{t_2} - A(pu)_2) + (1 - x_2)\mu_{t_2} + q$; q jest ilość ciepła którą posiada mięszanina gdy jest w stanie płynnym przy temperaturze zero.

W drugim peryodzie mięszanina rozpręża się adyabatycznie i doszedłszy do punktu C posiada wagę pary x_1 daną przez równanie

$$x_1 = \frac{a + t_1}{L_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{a+t}\, dT + x_2 \frac{a+t_1}{L_1} \times \frac{L_2}{a+t_1}$$

a ilość ciepła zawartego w niéj jest

$$x_1(\lambda_{t_2} - A(pu)_1) + (1 - x_1)\mu_{t_1} + q_0.$$

Ilość więc ciepła wydanego w końcu drugiego peryodu jest

$$x_2[\lambda_{t_2} - A(pu)_2] + (1 - x_2)\mu_{t_2} - x_1 [\lambda_{t_1} - A(pu)_1] - (1 - x_1)\mu_{t_1}.$$

Trzeci peryod kończy się w chwili, gdy waga x'_1 pary jest taką, że wywierając ciśnienie można ostatecznie sprowadzić mięszaninę do stanu płynnego i temperatury ogrzewacza. Wartość x'_1 jest daną przez równanie

$$x_1' = \frac{a + t_1}{L_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\, dT}{T}.$$

Praca oporu w czasie trzeciego peryodu przedstawia ilość ciepła równą $(m_1 - x'_1))A pu)_1$, a taż praca w czasie czwartego peryodu równoważy ilość ciepła równą

$$\mu_{t_2} - x'_1[((\lambda_{t_1} - A(pu)_1) - \mu_{t_1}] - \mu_{t_1}.$$

Dodajmy obecnie ilość ciepła pierwszego i drugiego peryodu przedstawiające pracę wprawiającą w ruch i odejmijmy od tak otrzymanéj summy ilości ciepła równoważne pracom oporu podczas trzeciego i czwartego peryodu, różnica ostatecznie otrzymana wyznaczy nam ilość ciepła zużytkowanego i będzie

$$x_2 A(pu)_2 + x_2(\lambda_{t_2} - (Apu)_2) + (1 - x_2)\mu_{t_2} - x_1(\lambda_{t_1} - (Apu)_1) - (1 - x_1)\mu_{t_1} - (x_1 - x'_1)(Apu)_1$$
$$- \mu_{t_2} + x'_1((\lambda_{t_1} - (Apu)_1) - \mu_{t_1}) + \mu_{t_1}$$

lub upraszczając

$$x_2 L_2 - L_1 (x_1 - x'_1).$$

Lecz

$$x_1 - x'_1 = x_2 \times \frac{a + t_1}{L_1} \times \frac{L_2}{a + t_2}$$

a zatém ilość ciepła zużytkowanego równą jest

$$x_2 L_2 \times \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Ponieważ ilość ciepła dostarczona jest równą $x_2 L_2$, widzimy zatém, że spółczynnik oszczędności w tym przypadku jest tenże sam co w przypadku pary suchéj, jednakże doświadczenie wskazuje, że użycie mięszaniny pary z wodą zmniejsza potęgę maszyny, i to zmniejszenie potęgi maszyny pochodzi w rzeczywistości z oziębienia ścian walców w skutek czego warunki zadania są zmienione, albowiem oziębienie o którém mowa pociąga za sobą znaczny ubytek ciepła.

Drugą ważną niedogodnością mięszaniny wody i pary, jest konieczność większego rozprężenia się pary, o czém z łatwością przekonać się możemy z samych wzorów. W saméj rzeczy stosunek objętości ostatecznéj pary suchéj do objętości początkowéj jest równy, jak wiemy

$$x_1 \frac{u_1}{u_2}.$$

Stosunek ten w przypadku mięszaniny wody i pary równa s

$$\frac{x_1}{x_2} \times \frac{u_1}{u}$$

i powiększa się gdy x_2 maleje, albowiem

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{T_1}{L_1} \times \frac{L_2}{T_2} + \frac{1}{x_2} \frac{T_1}{L_1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT.$$

Użycie pary przegrzanéj. — Para posiadająca w ogrzewaczu temperaturę t_2 i ciśnienie p_2 może być przed wejściem do walców oddzieloną od płynu i wprowadzoną do przyrządów ogrzewających zdolnych podnieść jéj temperaturę na $t_2 + \theta$ stopni, nie zmieniając ciśnienia.

Postaramy się wykazać ile wygrywamy na zastąpieniu pary suchéj przez parę przegrzaną zakładając, że para ta, po jéj wprowadzeniu do walców, rozpręża się adyabatycznie, aż do chwili w któréj prężność jéj staje się równą prężności istniejącéj w skraplaczu.

Para przegrzana rozprężając się adyabatycznie wykonywa pewną pracę zewnętrzną i jak się o tém przekonać możemy, zbliża się do stanu nasycenia. Wypada więc odróżnić koniecznie dwa przypadki. Pierwszy w którym para dochodzi do nasycenia zanim temperatura jéj stanie się równą temperaturze skraplacza i drugi w którym para doszedłszy do ciśnienia i temperatury skraplacza znajduje się ciągle w stanie przegrzania.

W pierwszym przypadku para doszedłszy do stanu nasycenia, będzie się daléj rozprężać w sposób podobny parze suchéj; w drugiéj zaś nastąpi gwałtowne zniżenie temperatury, a ztąd i strata dajności.

Formuły empiryczne podane powyżéj pozwalają nam badać skutecznie wszystkie okoliczność przebiegu w dwóch peryodach obiegu danego za pomocą figury następującéj.

Jak kilogram wody znajduje się w ogrzewaczu, objętość jego równą jest $A'O = \sigma$, a ciśnienie ma wartość $AA' = p_2$. Zamieńmy ten kilogram wody na parę, zostawiając ciśnienie stałém, objętość jego zamieni się na $OB' = \sigma + u_2 = v_m$, a ciśnienie stanie się równém $BB' = p_2$, nakoniec przegrzejmy kilogram pary, pozostawiając wciąż ciśnienie stałém i doprowadźmy punkt określający stan ciała do punktu F. Objętość pary przegrzewając ją powiększy się i stanie się równą OF′, która to wartość jest dana przez równanie

$$p_2 v_2 = 50,933(a + t_2 + \theta) - 192,5 p_2^{1/4}.$$

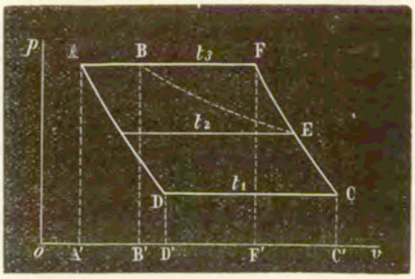

Fig. 28.

Ilość ciepła potrzebna do przegrzania kilograma pary równą jest

$$Q = 0,48\theta.$$

Zaczynając od punktu F para rozpręża się adyabatycznie i związek jaki łączy jéj prężność z ciśnieniem jest

$$pv^{1/3} = \text{ilość stała}$$

(stała zależy od wartości jakie zmienne p i v miały na początku rozprężenia się).

Kreśląc krzywę FC daną przez poprzednie równanie znajdujemy punkt przecięcia E odpowiadający stanowi nasycenia. Po za tym punktem E odpowiadającym temperaturze t_2 para przegrzana odbędzie swój dalszy przebieg, podobnie do pary suchéj.

Zastrzeżenia zrobione powyżéj wystarczają do analitycznego badania zjawisk, jakie mają miejsce. W końcu obiegu woda wejdzie napowrót do ogrzewacza w stanie płynnym o temperaturze t_2 i ilość ciepła dostarczonego równa się

$$\lambda_{t_2} + 0,48\theta - \mu_{t_2} = L_2 + 0,48\theta.$$

W pierwszym peryodzie wykonywamy pracę zewnętrzną równoważną ilości ciepła $Ap_2(v_2 - \sigma$ i w końcu tegoż peryodu para posiada ilość ciepła równą

$$\lambda_2 + 0,48\theta - Ap_2(v_2 - \sigma).$$

Od punktu F para rozpręża się adyabatycznie i doszedłszy do punktu E posiada ilość ciepła równą

$$[\lambda_{tc} - (Apu)_c],$$

zatém w pierwszéj części drugiego peryodu na wykonanie pracy zewnętrznéj zużyła ona ilość ciepła równą

$$\lambda_{t_2} + 0,48\theta - Ap\ (v_2 - \sigma) - \lambda_{tc} + (Apu)_c.$$

Od punktu E para już nie jest przegrzaną i działa podobnie do pary suchéj.

W punkcie C para o któréj mowa zawierać będzie wagę pary x_1 daną przez równanie

$$x_1 = \frac{a+t_1}{L_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{T}\,dt + \frac{a+t_1}{L_1}\times\frac{L_c}{a+t_c}.$$

Ilość ciepła w niéj zawartego jest

$$x_1[\lambda_{t_1} - (Apu)_1] + (1-x_1)\mu_{t_1}$$

a ilość ciepła zamienionego na pracę

$$\lambda_{t_c}(Apu)_c - x_1[\lambda_{t_1} - (Apu)_1] - (1-x_1)\mu_{t_1}.$$

Przebieg w ciągu dwóch ostatnich peryodów jest ten sam co dla pary suchéj, praca zatém oporu pochłonie ilość ciepła równą

$$(Apu)_1 + \mu_{t_2} - m_1[\lambda_{t_2} - (Apu)_1] - \mu_{t_1}) - \mu_{t_1}.$$

Dodajmy do siebie wszystkie ilości ciepła zużytego otrzymamy

$$L_2 + 0{,}48\theta - L_1(x_1 - x'_1) = L_2 + 0{,}48\theta - (a+t)_1\left(\frac{L_c}{a+t_c}\int_{t_c}^{t_2}\frac{m}{T}\,dT\right).$$

Jeżeli w tém równanin założymy

$$\theta = 0 \text{ i } t_c = t_2,$$

otrzymamy jako sprawdzenie co być powinno, to jest

$$L_2 \times \frac{t_2 - t_1}{a + t_2}.$$

Dla lepszego przekonania się, że użycie pary przegrzanéj nie o wiele powiększa spółczynnik oszczędności, weźmy przykład liczebny następujący

Para nasycona przy ciśnieniu sześciu atmosfer i temperaturze 159°,22 jest przegrzaną i podniesioną do temperatury 270° mamy więc

$$Q = 270° - t_2 = 270° - 159°{,}22 = 110°{,}78.$$

Znajdujemy nadto, że para rozprężając się adyabatycznie dochodzi do stanu nasycenia gdy

$$t_c = 115°{,}54, \text{ a } p_c = 1{,}7 \text{ atmosfer.}$$

Ilość ciepła zabranego ogrzewaczowi jest równą

$$L_2 + 0{,}48\theta = 547{,}28 \text{ ciepłostek};$$

ilość ciepła zużytkowanego przedstawia wzór

$$L_2 + 0{,}48\theta - (a+t_1)\left[\frac{L_c}{a+t_c} - \int_{t_c}^{t_2}\frac{m}{T}\,aT\right] = 159{,}48 \text{ ciepłostek}$$

a więc dajność równa się

$$\frac{159{,}48}{547{,}28} = 0{,}291.$$

Przy użyciu pary suchéj znaleźliśmy, że wartość spółczynnika oszczędności była równą 0,275, widzimy więc, że wpływ użycia pary przegrzanéj na wartość spółczynnika oszczędności jest nader słaby.

Zrobimy tu zaraz wzmiankę, że para przegrzana nie działała podług obiegu Carnot'a, a zatém spółczynnik oszczędności nie jest danym przez

$$\frac{t_2 + \theta - t_1}{a + t_2 + \theta}.$$

Równanie ogólne obiegów zamkniętych

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

pokaże nam, że przegrzanie pary nie o wiele podnosi wartość spółczynnika oszczędności. W saméj rzeczy, powróćmy do obiegu pary przegrzanéj. Od A do B para pozostaje w stanie nasycenia ogrzewacz przesyła jéj ilość ciepła równą q_2. Od B do F dostarczamy parze ilość ciepła równą q' i przegrzewamy ją. Od F do C para rozpręża się adyabatycznie. Od C do D tłok wywiera ciśnienie i para oddaje skraplaczowi ilość ciepła równą q_1 o temperaturze t_1. Rozkładając równanie ogólne

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

mamy

(1) $$\frac{q_2}{a + t_2} + \int_B^C \frac{dQ}{T} - \frac{q_1}{a + t_1}.$$

Uczyńmy

$$\int_B^C \frac{dQ}{T} = \frac{q'}{a + t'}$$

t' jest widocznie zawarte pomiędzy t_2 i $t_2 + \theta$. Równanie więc poprzednie zamienia się na następujące:

(2) $$\frac{q_2}{a - t_2} + \frac{q'}{a + t'} - \frac{q_1}{a + t_1} = 0,$$

które możemy napisać w kształcie następującym

(3) $$\frac{q_2 + q'}{a + x} - \frac{q_1}{a + t_1} = 0.$$

Zakładając

(4) $$a + x = \frac{(a + t_2)(a + t_1)(q_2 + q')}{q'(x + t_2) + q_2(a + t)} = (a + t_2)\frac{q_2 + q'}{q'\frac{a + t_2}{a + t'} + q_2} = (a + t')\frac{q_2 + q_1}{q_1 + q_2\frac{a + t'}{a + t}},$$

ilość ciepła wydana równą jest $q_2 + q'$, ilość ciepła zużytkowana $q_2 + q' - q_1$, a więc dajność, zważając na związek (3), jest równą

$$\frac{q_2 + q_1 - q_1}{q_2 + q'} = \frac{x - t_1}{a + x}$$

Lecz związek (4) wskazuje, że $x < t'$ i niewiele większe od t_2, dajność więc jest zaledwie taką samą jak w przypadku obiegu Carnot'a zawartego pomiędzy temperaturą t_1 i temperaturą nieco wyższą od t_2; jednakże pomimo to para przegrzana posiada wielkie zalety a mianowicie

1° Usuwa częściowe skraplanie się pary;

2° Przegrzanie otrzymuje się bardzo łatwo, często prawie bez kosztów, a więc trzeba odjąć od mianownika ułamku wyznaczającego dajność, ilość 0,480 co czyni

$$\frac{159{,}48}{494{,}11} = 0{,}32$$

wartość spółczynnika oszczędności.

§ 2. MASZYNY PAROWE RZECZYWISTE.

W praktyce zwykle maszyny nie działają podług obiegu Carnot'a. Para rozprężając się niedochodzi do temperatury i ciśnienia skraplacza; woda nie jest odesłaną do kotła w stanie płynnym i o temperaturze t_2; lecz styczność z skraplaczem istnieje dopóty, aż para zostanie w całości zamienioną na wodę i w tym stanie dopiero zostaje odesłaną do kotła.

Postaramy się wykazać całą ważność tych zmian zakładając, że mamy do czynienia z parą suchą.

Dla tego nakreślmy nowy obieg.

Zacznijmy od chwili, w któréj woda posiadająca temperaturę skraplacza t_1 i ciśnienie p_2, wchodzi do kotła. Stan ten danym jest przez punkt A którego współrzędne są $Oa = b_1$ i $A_a = p_2$.

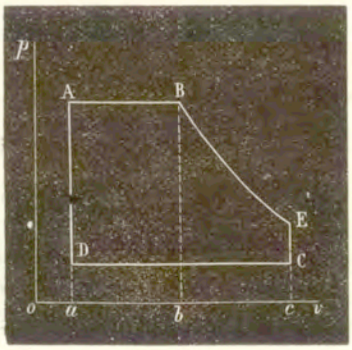

Fig. 29.

Ciecz pod wpływem dostarczonego jéj ciepła powiększa swą objętość i dochodzi do stanu $B(Ob = \sigma_2 + u_2$ i $Bb = p_2)$. Ilość ciepła dostarczonego od A do B jest $\lambda_{t_2} - \mu_{t_2}$, a praca wykonana wyrażona w ciepłostkach posiada wartość $Ap_2(\sigma_2 - \sigma_1) + (Apu)_2$ lub $(Apu)_2$, gdyż rozszerzalność cieczy jest nieskończenie małą. Począwszy od B para rozpręża się adyabatycznie w walcu, którego ściany z założenia nie przepuszczają ciepła i jeżeli zatrzymamy się w punkcie E, posiadającym temperaturę t_e i ciśnienie p_e, gdy waga wody jest x_e, objętość mięszaniny stanie się $\sigma + x_e u_e$ i otrzymamy punkt E czyniąc $Oc = \sigma + x_e u_e$ i $Ec = p_e$.

Gdy mięszanina znajduje się w stanie E, otwieramy skraplacz, którego temperatura jest t_1 a ciśnienie p_1 mniejsze od p_e o ilość $p_e - p_1 = \varepsilon$. Pewna część pary jeszcze się skropli; ciśnienie gwałtownie spadnie na p_1 i mięszanina zawierać będzie tylko wagę x', taką iż $\sigma + x_e u_1 = \sigma + x_e u_e$, gdyż w téj gwałtownéj zmianie objętość pozostaje tą saną. Po tych zmianach stan mięszaniny wyznaczonym jest przez punkt C mający za współrzędne $Oc = \sigma + x'_1 u_1$ i $Ce = p_1$.

Podczas trzeciego peryodu poczynającgo się od punktu C trwającego aż do końca skoku w tył tłoka t. j. aż do chwili, w któréj cała mięszanina będzie przywróconą do stanu płynnego o temperaturze t_1 i ciśnieniu p. Czyniąc $ao = \sigma$ linia CD równoległa do osi $0v$ jest elementem przebieżonym obiegu. W czwartym peryodzie ciecz przechodzi z ciśnienia p_1 do ciśnienia p_2 bez znacznéj zmiany w objętości, tak, iż peryod jest przedstawionym przez linię AD równoległą do osi Op. W ostatnim peryodzie tłok wpychając ciecz do kotła przezwycięża opór równy ilości ciepłostek $\frac{\sigma p_2}{425}$, lecz wejście wody do kotła staje się przyczyną powstania téj samej ilości ciepła, a zatém możemy uważać tę pracę jako niewchodzącą do rachunku.

Streśćmy w kilku wyrażeniach analitycznych to cośmy przedtém powiedzieli.

1 peryod : Ciepło zamienione na pracę wprawiającą wruch $(Apu)_2$

2gi peryod : « « « « $\lambda_{t_2} - (Apu)_2 - x_e[\lambda_{te} - (Apu)_e] - (1 - x_e)\mu_{tc}$

Razem $\lambda_{t_2} - x_c[\lambda_{tc} - (Apu)_e] - (1 - x_c)\mu_{te}$

3ci peryod : Ciepło równoważne pracy oporu $x'_e(Apu)_1$

4ty peryod 0

Praca zużytkowana $\lambda_{t_2} - x_e[\lambda_{te} - (Apu)_e - \mu_{te}] - \mu_{te} - x'_e(Apu)_1$

Zważywszy, iż $x_e u_e = x'_e u_1$ i $p_1 = p_e - \xi$

zkąd

$$x'_e(Apu_1) = x_e u_e A(p_e - \xi)$$

otrzymamy wartość ciepła zużytkowanego

$$\lambda_{t_2} - \mu_{t_1} - (\mu_{te} - \mu_1) - x_e L_e + x_e A \xi u_e$$

dzieląc powyższą ilość przez $\lambda_{t_2} - \mu_{t_1}$, ilość ciepła dostarczonego, znajdziemy dajność maszyny.

Dla obliczania po kolei wpływu zmian czynionych w obiegu, przypuśćmy najprzód że rozprężanie odbywa się podług obiegu Carnot'a i pokażmy jaki wpływ wywiera zmiana sposobu dostarczania wody kotłu. Dla tego trzeba uczynić w poprzednich formułach $t_c = t_1$, $\mu_{te} = \mu_{t_1}$, $\xi = 0$.

Zastosujmy powyższe wzory do maszyny, w któréj para sucha przybywa do walca o ciśnieniu sześciu atmosfer i skrapla się przy 40 stopniach.

Zmieńmy najprzód tylko sposób dostarczania wody kotłu.

Ciepło pożyczone jest $\lambda_{t_2} - \mu_{t_1} = 615{,}21$ ciepłostek, ciepło zużytkowane $- \lambda_{t_2} - \mu_{t_1} - x_1 L_1 = 155{,}13$ a więc dajność równa się

$$\frac{155{,}13}{615{,}21} = 0{,}25$$

(w przypadku obiegu Carnot'a dajność jest równą 0,27). Zamieńmy teraz jeszcze sposób rozprężania się pary i zatrzymajmy się gdy $t_e = 100^\circ$.

Ciepło pożyczone jak i przedtem jest równe 615,21,

« zużytkowane $\lambda_{t_2} - \mu_{t_1} - (\mu_c - \mu_{t_1}) - x_e L_e + x_e A \xi u_e = 106,75$,

Dajność równa się $\frac{106,75}{615,21} = 0,171$,

Miara rozprężenia jest $\frac{u_2 + 0,001}{x_e u_e + 0,001} = \frac{1}{4,8}$.

Jeżeli zatrzymamy rozprężanie się pary nie przy cisnieniu jednéj atmosfery lecz przy innych, wypadki dadzą się obliczyć podług tychże samych formuł.

Podajemy tu tablicę obliczoną dla kilku miar rozprężenia.

PRZY WPROWADZANIU			W KOŃCU ROZPRĘŻENIA			TEMPERATURA SKRAPLACZA t_1	ROZPRĘŻENIE $\frac{x_e u_e + 0,001}{u_2 + 0,001}$	DAJNOŚĆ
Ciśnienie w atmosferach	Temperatura t_2	Objętość $u_2 + 0,001$	Ciśnienie w atmosferach	Temperatura	Objętość $x_e u_e + 0,001$			
6 atmos.	159°,22	0,306	6 atmos.	159°,22	0,306	40	1	0,073
id.	id.	id.	2 id.	120°,60	0,797	id.	2,6	0,139
id.	id.	id.	1 id.	100°, «	1,480	id.	4,8	0,171
id.	id.	id.	0,4 id.	76°,25	3,481	id.	11,4	0,186
id.	id.	id.	0,3 id.	69°,49	4,462	id.	14,60	0,204
id.	id.	id.	0,7 id.	40°,	16,023	id.	52	0,250

Liczby pokazują, że jakkolwiek wpływ rozprężenia na dajność maszyny jest ogromny w początku, w końcu gwałtownie zmniejsza się. Konstruktorzy maszyn nie posuwają do krańcowych granic rozprężenia pary, dla następujących przyczyn. Najpierw zauważmy, że nie chodzi nam o największą wartość pracy przesłanéj tłoku, lecz o największą wartość pracy użytecznéj, t. j. różnicy pracy przesłanéj tłoku i pracy biernéj. Praca zaś oporów biernych rośnie w miarę rozprężenia i jest prawie proporcyonalną do długości przebieżonéj przez tłok. Widocznem jest, że szkodliwém by było posunąć rozprężenie pary do krańcowych granic których oznaczenie jest nadzwyczaj trudne, aby uczynić zadosyć najkorzystniejszym warunkom.

Inspektor naczelny min Callon zaleca, ażeby dla maszyn o niskiém ciśnieniu, nie przekraczać 0,2 atmosfery, dla maszyn zaś o wielkiém ciśnieniu 0,3 atmosfery.

Nadzwyczajne przedłużenie walców powiększa wagę, a tém samém i cenę maszyny; jeżeli więc oszczędność materyału palnego nie leży na pierwszym planie, możemy zmniejszyć wagę maszyny, poświęcić w części korzyści rozprężenia, a nawet zupełnie usunąć skraplanie. W praktyce para wprowadzaną jest tylko do chwili, gdy tłok jeszcze nie przeszedł dziesiątéj części swego skoku; nie znaczy to bynajmniéj, że para rozprężając się, powiększa dziesięć razy swą objętość pierwiastkową. Koniecznem jest dla oznaczenia miary rozprężenia pary, wprowadzić w rachunek parę zapełniającą przestrzeń martwą, której objętość równa się prawie $\frac{1}{20}$ objętości małego walca. Na mocy poprzednich uwag i zastrzeżeń łatwo by było obliczyć ilość ciepła zamienionego na pracę użyteczną i zawartego w jednym kilogramie pary dostarczonéj przez kocioł, gdyby wszystkie warunki, jakie wzory analityczne zakładają, dały się w całości urzeczywistnić.

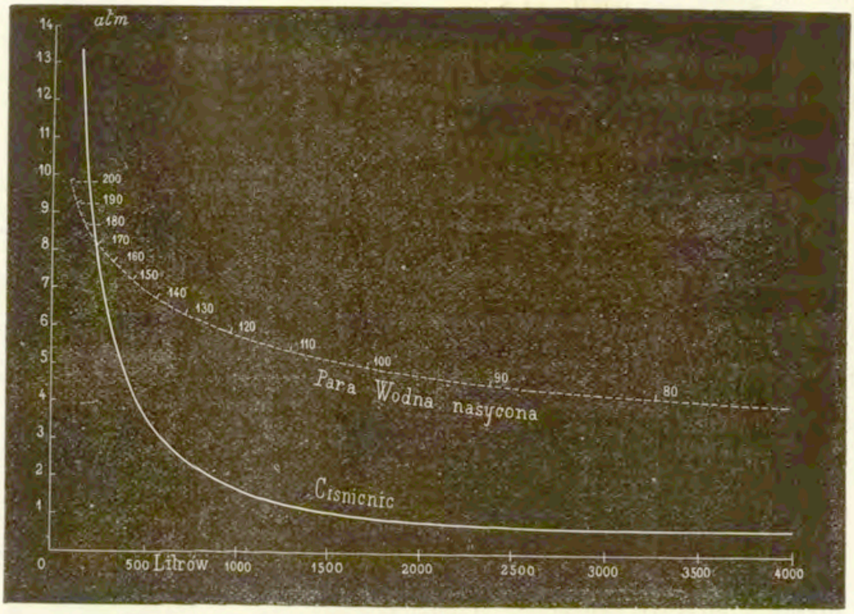

Fig. 30.

Porównywając wypadki dane teoretycznie z wypadkami znalezionemi doświadczalnie znajdujemy, iż te ostatnie są mniéj korzystne. Zkąd to pochodzi? W formułach założyliśmy ściany walca nieprzepuszczającemi ciepła, warunek który się nie urzeczywistnia w praktyce. Wymiana ciepła odbywająca się pomiędzy parą i metalem szkodliwie wpływa na dajność maszyny.

Maszyny o dwóch płynach. — Powiedzieliśmy poprzednio, że posuwając rozprężenia musimy nadać ogromną długość walcom, a tém samém powiększyć pracę oporu biernego.

Starano się usunąć tę niedogodność i do sposobów najbardziéj genialnych, należy bez wątpienia zastąpienie pary przez dwa płyny różnorodne. Jeżeli nakreślimy na mocy formuł p. Regnault dla pary wodnéj nasyconéj, krzywe ciśnień i temperatur, których odcięte przedstawiają objętości jedności wagi a rzędne ciśnienia temperatury, zauważymy, że pomiędzy początkiem i temperaturą 120°, ciśnienia i temperatury gwałtownie maleją gdy objętość stała powiększa się, lecz po za temperaturą 120°, znajdujemy, że dla ogromnych przyrostów objętości zmniejszenie : ciśnienia i temperatury jest prawie nieznaczne.

I tak jeden kilogram pary wodnéj nasyconéj posiadającéj o temperaturze 200° prężność równą 15 atmosferom i objętość 127 litrów, zajmuje tylko objętość 876 litrów, gdy stan jego odpowiada temperaturze 120° i ciśnieniu 2 atmosfer, wtedy gdy przy temperaturze 40° i ciśnieniu 0,07 atmosfery, para zajmuje ogromną objętość 19,645 litrów.

Powyższa figura pokazuje nam, że gdyby nawet rozprężenie pary odbyło się adyabatycznie i

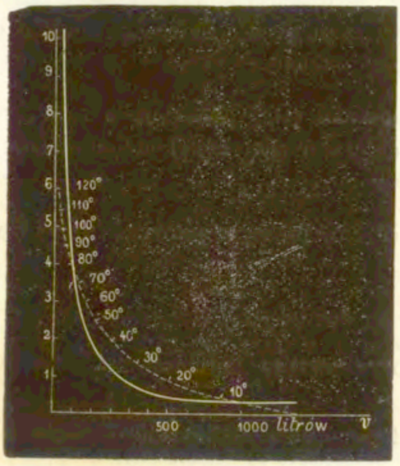

Fig. 31.

w stanie nasycenia, koniecznem by było, przeszedłszy p stopni posunąć je nadzwyczaj daleko jeżeli chcemy w celu dobrego zużycia ciepła, aby skraplacz posiadał niską temperaturę i ciśnienie.

Lecz wtedy, długi skok tłoka stanie się przyczyną silnego wzrostu oporu biernego, który zważywszy że ciśnienie przy 90° jest nader słabe, może się stać większym od ciśnienia rzeczywistego pary.

Jest kilka sposobów zdolnych mniéj więcéj usunąć tę trudność.

1) Użycie walców różnych średnic ;

2) Zastąpienie pary wodnéj przez dwie ciecze.

Jeżeli nakreślimy dla eteru krzywe ciśnień i temperatur, podobnie jakeśmy to uczynili dla pary wodnéj, zauważymy, że rzędne gwałtowniéj maleją z wzrostem objętości niż w przypadku pary wodnéj.

I tak w okolicach 30° stopni znajduje się punkt podobny temu, który dla pary wodnéj odpowiadał temperaturze 120°. Widzimy więc, że możliwém jest zastąpić parę wodną przez ciecze, posiadać maszyny działające podług obiegu Carnot'a, bez tych ogromnych przedłużeń walców.

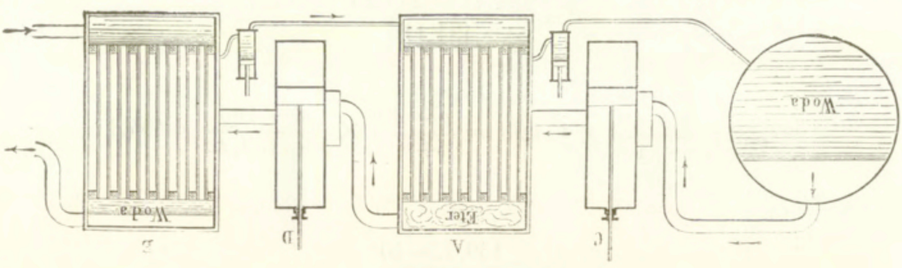

Fig. 32.

Praca $\frac{EQ}{a+t}(t_2 - t)$ wykonana przez ilość ciepła Q działającą podług obiegu Carnot'a w granicach temperatur t_2 i t, może być uważaną przez podobieństwo, jako praca dokonana przez wagę

$P = \frac{EQ}{a + t_2}$ spadającą z wysokości $h = (t_2 - t_1)$. Możemy podzielić ten spadek temperatury na dwie części $t_2 - t'$ i $t' - t$ i otrzymać tęż samą pracę, obierając za ciało działające, parę w wyższéj części $t_2 - t'$ przebiegu ciała, inną zaś ciecz, eter naprzykład, w części niższéj $(t' - t_1)$.

W ten sposób usuniemy niedogodność pary pojawiającą się w granicach temperatur 90° i 30° i polegającą w ogromnym wzroście objętości przy nader słabém ciśnieniu. Przykład na liczbach pokaże nam to, w sposób bardziéj bijący w oczy.

Dla tego niech będzie, jak i przedtém, maszyna parowa, któréj kocioł posiada temperaturę 159°,22 i ciśnienie równe 6 atmosferom.

Podzielmy spadek temperatury na dwie części (159°,22 — 100) i (100° — 40°) i pozwólmy parze rozprężać się do $\frac{1}{4,80}$ skoku. Kocioł dostarcza jednemu kilogramowi ilość ciepła $\lambda_{t_2} - \mu_{t_2} = 494,11$ i przesyła skraplaczowi na mocy twierdzenia Carnot'a ilość ciepła równą $494,11 \frac{a + 100}{a + 159,22} = 424,93$ ciepłostek.

Zamiast po wyjściu z walca wprowadzić parę do skraplacza zwykłego, sprowadźmy ją do skraplacza mającego kształt pudła; przez które przechodzi wiązka rur zawierających eter.

Eter ten ulotni się i działać będzie na tłok zawarty w walcu D i przejdzie do drugiego skraplacza B, którego rury są ustawicznie zwilżane wodą zimną o temperaturze np. 40°. W skraplaczu B większa część eteru skrapla się i potém już w stanie płynnym o temperaturze 100° posiada prężność równą $6^{atm}52$ i jeden kilogram téj pary zajmuje objętość 57 litrów. Poprzednio dowiedliśmy, że para ta rozprężając się nie tylko, że się nie skropli, lecz owszém jeszcze przegrzeje się. Przy temperaturze 40° para eteru nasycona zajmuje objętość 286 litrów i posiada prężność równą $1^{atm}20$, miarą więc rozprężenia jest $\frac{286}{57} = 5$, każdy kilogram pary eteru zabiera pierwszemu skraplaczowi ilość ciepła $\lambda - \mu = 80$ ciepłostek, a więc każdy kilogram pary wodnéj przynoszącéj ilość ciepła 424,93 ulotni $\frac{424.93}{80} = 5,5$ kilogramów eteru, który działając podług obiegu Carnot'a, odda skraplaczowi B ilość ciepła $424,93 \frac{a + 40}{a + 100} = 284,28$ ciepłostek uniesionych przez wodę zimną. Dajność więc maszyny o dwóch cieczach daną jest przez

$$d = \frac{494,11 - 283,28}{494,11}$$

lecz

$$283,28 = \frac{a + 40}{a + 100} \times 424,93 = \frac{a + 40}{a + 100} \times \frac{a + 100}{a + 159,22} \times 494,11$$

a więc

$$d = \frac{159,22 - 40}{a + 159,22}$$

współczynnik ten równym jest współczynnikowi maszyn Carnot'a.

Oprócz eteru chciano jeszcze zastosować chloroform, lecz ciecze te narażając robotników na ogromne niebezpieczeństwa, tak pod względem życia jak i zdrowia, nie dały się wprowadzić w użycie tak jakby się tego spodziewać należało.

Wpływ jaki wywiera na dajność maszyn, wymiana ciepła pomiędzy cieczą i ścianami walców. — Widzieliśmy poprzednio całą ważność działania pary podług obiegu Carnot'a i jego wpływ na dajność maszyny. Obliczyliśmy także zmiany jakie sprowadza przecięcie rozprężenia i sposób używany w praktyce wprowadzania wody do kotła. Obecnie zajmiemy się skutkami wymiany ciepła pomiędzy parą i ścianami walca, które w teoryi założyliśmy nieprzepuszczającemi ciepła.

Para wchodzi do walca nie zupełnie suchą lecz posiadającą najmniéj 10% wody, bądź to skutkiem porwania mechanicznego będącego wynikiem gotowania się wody, bądź téż skutkiem oziębienia przy przechodzie przez rury łączące kocioł z walcem.

Para w tym stanie wchodzi do walca, spotyka ściany metaliczne, których temperatura jest znacznie niższą od jéj temperatury; skrapla się w części, i ogrzewa je oddając ilość ciepła dosyć znaczną, tak iż woda dosięga często proporcyi 60%. Pierwszym wynikiem przesłania ciepła ścianom walca jest zmniejszenie temperatury i ciśnienia pary.

I tak w końcu peryodu wejścia znajdujemy w walcu mięszaninę pary i wody, pochodzącéj 1) z porwania mechanicznego sprowadzonego gotowaniem się 2) z oziębienia pary skutkiem oddania pewnéj ilości ciepła ścianom oziębionym walca 3) i znajdującéj się już poprzednio. Mięszanina ta zajmuje

Fig. 33.

objętość ABEF któréj ściany już ogrzane są doprowadzone do wspólnéj temperatury. W takich to warunkach poczyna się peryod rozprężenia. W miarę wzrostu objętości temperatura i prężność pary maleją, wtedy to woda perląca się na powierzchniach ABEF znajdując się na ścianach względnie gorących, gotuje się i ulatnia.

W czasie tego tłok skutkiem ruchu odkrywa ustawicznie ściany powierzchni EFCD, które posiadając temperaturę niższą od temperatury mięszaniny, sprowadzają ogrzewając się same, skroplenie niszczące w części ulatnianie się wyżéj wspomniane. Ciepło pochłonięte przez ściany i w części zwrócone w czasie rozprężania się pary użyte jest (część [ta zwrócona) 1° na ogrzanie ścian EC, FD 2° na powiększenie objętości pary zawartéj w walcu a] w skutek tego] na sprowadzenie wzrostu ciśnienia i pracy większéj niżby to miało miejsce przy rozprężeniu adyabatyczném. Gdy rzeczy znajdują się w tym stanie mięszanina styka się z skraplaczem, którego ściany posiadają temperaturę i ciśnienie niższe od temperatury walca. Para wlatuje gwałtownie do skraplacza porywając z sobą część wody, lecz jeszcze pozostawiając tyle że sciany tłoka i walca są prawie w całości zwilżone.

Druga ta część wody i to znaczniejsza znajdując ściany tłoka i walca względnie gorące poczyna się gotować używając w tym celu 1) ciepło własne 2) pożyczone od ścian tłoka i walca wreszcie zabierając skraplaczowi pewną liczbę ciepłostek, nie tylko zupełnie straconych, lecz jeszcze służących do wzmocnienia oporu biernego. To ciepło stracone jest przedstawione przez wagę wody ulotnionéj podczas otwarcia skraplacza a zatém ubytek sprowadzony przez promieniowanie zależeć będzie od ilości wody perlącéj się na ścianach w końcu rozprężenia i ulatniającéj się w części. Zebrane ono było powierzchnią ABCD która znajdując się oziębioną, skropli przy następném skoku tłoka pewną ilość pary wyszłéj z kotła. Zjawiska poprzednio badane dadzą się wyrazić za pomocą formuł w następujący sposób. Nazwijmy

w wagę mięszaniny użytą na wykonanie skoku tłoka

x'_2 proporcyę pary gdy mięszanina znajduje się w pudle szuflady

x_2 « « w końcu wprowadzenia;

x_c « « « rozprężenia.

A′ temperaturę wody wprowadzonéj do kotła;

s wagę wody pozostałéj w walcu z poprzedniego stanu.

Zacznijmy badanie od stanu mięszaniny w w pudle szuflady, w chwili gdy ona wchodzi do walca przedstawmy jéj objętość przez EFGH.

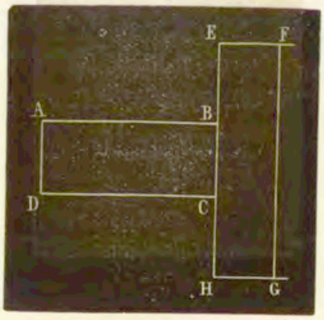

Fig. 34.

Po upływie pewnego czasu mięszanina zajmie przestrzeń walca EFGH i skropli się w części oddając ścianom ilość ciepła d, którą równanie równoważności

$$Q = A\Delta U + AS$$

pozwoli nam oznaczyć. Przyrost dzielności $(U_2 - U_1)$, zważywszy, że prędkości przeniesienia (translation) są nieznaczne, sprowadza się do przyrostu dzielności wewnętrznéj mięszaniny, która z proporcyi x'_2 pary o temperaturze t'_2 przechodzi do stanu, w którym waga pary jest x_2 i posiada temperaturę t_2. Przyrost dzielności wewnętrznéj, wyrażonéj w ciepłostkach, jest równy na mocy poprzednich wzorów.

$$A(U_2 - U'_2) = W[x_2[\lambda_{t_2} - (Apu)_2] + (1 - x_2)\mu_{t_2} - x'_2)[\lambda'_{t_2} - (Apu)'_2] - (1 - x'_2)\mu'_{t_2}]$$

S zaś jak wiemy, jest pracą zewnętrzną wykonaną przez mięszaninę. Mięszanina jest ciśniętą ze strony kotła na powierzchni AD, a więc praca oddziaływania jest $p'_2 x'_2 u'_2 W$, to jest równa iloczynowi ciśnienia p'_2 przez objętość AACD, która, opuszczając objętość cieczy, wyraża się przez $x'_2\, u'_2\, W$. Ze strony tłoka mięszanina wywiera ciśnienie p_2 które pomnożone przez objętość EFGH da nam pracę wprawiającą w ruch, a więc podstawiając te wartości w równanie równoważności i uważając, iż d jest ujemném, otrzymujemy

$$-d = W\left[x_2[\lambda_{t_2} - (Apu)_2] + (1-x_2)\mu_{t_2} - x_2[\lambda'_{t_2} - (Apu)'_2] - (1-x'_2)\mu'_{t_2} - (Apu)'_2 x'_2 + (Apu)_2 x_2\right]$$

zkąd

$$d = W\left[x'_2 L'_2 + \mu'_{t_2} - x_2 L_2 - \mu_{t_2}\right]$$

praca przesłana tłoku w czasie wprowadzenia pary jest

$$W x_2 (Apu)_2\,;$$

obliczmy teraz pracę zyskaną w czasie rozprężenia.

Mięszanina w końcu wprowadzenia posiada ilość ciepła wewnętrznego $W\left[x_2[\lambda_{t_2} - (Apu)_2] + (1-x_2)\mu_{t_2}\right]$; nadto woda pozostała z poprzedniego skoku tłoka zabrała jeszcze ilość d, którą dopiero co oznaczyliśmy. Potém mięszanina rozpręża się i gdy w końcu skoku doszła do temperatury t_e, posiada wagę pary x_e nie dającą się obliczyć i ilość ciepła

$$W\left[x_e[\lambda_{t_e} - (Apu)_e] - (1-x_e)\mu_{t_e}\right].$$

Co do ilości ciepła zebranéj w czasie pierwszego peryodu, jedna jéj część jak wyżéj powiedzieliśmy, ulotniła pewną część wody, druga zaś, którą oznaczymy przez d', przeniosła się na ściany tłoka i walca. Ilość więc ciepła użytego w drugim peryodzie na pracę jest równą

$$W\left[x_2[\lambda_{t_2} - (Apu)_2] + (1-x_2)\mu_{t_2} - \frac{d}{W} - x_e[\lambda_{t_e} - (Apu)_e] - (1-x_e)\mu_{t_e} - \frac{d'}{W}\right].$$

W czasie trzeciego peryodu maszyna dla zwyciężenia przeciwciśnienia skraplacza wydaje ilość ciepła

$$W x_e A p_1 u_e = W\left[x_e (Apu)_e - x_e A\xi u_e\right]$$

oznaczając przez ξ różnicę $p_e - p_2$.

Zestawmy z sobą wszystkie te wypadki i streśćmy w jednéj tablicy, otrzymamy

1szy peryod ciepło zamienione na pracę $W x_2 (Apu)_2$

2gi « « « « « $W\left[x_2(\lambda_{t_2} - (Apu)_2) + (1-x_2)\mu_{t_2} - \frac{d}{W} - x_e(\lambda_{t_e} - (Apu)_e)\right.$

$$\left. - (1-x_e)\mu_{t_e} - \frac{d'}{W}\right].$$

3ci « « zużyte — $W\left[x_e (Apu)_e - x_e A\xi u_e\right]$

Dodając do siebie te wszystkie wartości, otrzymujemy dla wartości pracy zużytéj,

$$W\left[x'_2 L'_2 - \mu'_{t_2} - \mu'_{t_1} - \left\{\mu_{t_e} - \mu'_1 - x_e(L_e - A\xi u_e) + \frac{d'}{W}\right\}\right].$$

Woda wchodząca do kotła i posiadająca temperaturę t' powinna otrzymać, aby się zamienić na mięszaninę zawierającą x'_2 pary nasyconéj, ilość ciepła równą $x_2 L_2 - \mu'_{t_2} - \mu'_{t_1}$, co daje dla wartości ciepła nie zużytego wyrażenie

$$W\left(\mu_{t_e} - \mu_{t_e} - x_e (L_e - A\xi u_e) + \frac{d'}{W}\right).$$

Postarajmy się oznaczyć wartość d'. Ilość ta jest przedstawioną przez wagę wody ulotnionéj podczas otwarcia skraplacza i zależy od ilości wody perlącéj się na ścianach metalowych. W walcu znajduje się w końcu rozprężenia, waga wody $W(1-x_e)+S$ posiadająca temperaturę t_e. Jeżeli oznaczymy przez d' część która się zamieni na parę przy ciśnieniu p_1 skraplacza, otrzymamy, opuszczając stratę sprowadzoną przez promieniowanie

$$\frac{d'}{W} = \left((1-x_e) + \frac{S}{W}\right) n\left(\lambda_{t_1} - \mu_{t_e}\right).$$

Powłoka parowa Watt'a. — Od dawna szukano sposobów zdolnych usunąć stratę ciepła sprowadzoną w maszynach parowych przez ulatnianie się wody wilżącéj ściany walca i przez oziębienie tychże ścian. Strata ta rzeczywiście bywa ogromną i często przewyższa nawet wartość ilości ciepła użytego na wykonanie pracy zewnętrznéj. Widocznem jest że sposoby te winny dążyć do zmniejszenia współczynników $\frac{d'}{W}$. I tak możemy zmniejszyć pierwszy współczynnik $(1-x_e)+\frac{S}{W}$ najpierw niszcząc ilość wody s pozostałéj w walcu, następnie zmniejszając wagę $(1-x_e)$ pochodzącą bądź to z wody przyniesionéj przez parę, bądź téż z wody, która się skropliła.

Możemy usunąć s, ilość wody pozostałéj w walcu i rosnącą z liczbą skoków tłoka wyganiając ją od czasu do czasu za pomocą narzędzi czyszczących. Zmniejszamy ilość wody przyniesionéj susząc parę przy wyjściu jéj z kotła i usuwając oziębienie się rur prowadzących : Osłabiamy wreszcie skroplenie się przez użycie pary przegrzanéj która, nie przedstawiając w teoryi wielkich korzyści, posiada ogromne zalety w rzeczywistości. P. Hirn robiąc doświadczenie na maszynie parowéj bez powłoki i o jednym walcu, znalazł, że maszyna ta zużywała $15^k,64$ pary nasyconéj na konia i godzinę a tylko $9^k,6$ pary przegrzanéj.

Geniusz przemysłu Watt wynalazł sposób skutecznie zmniejszający skraplanie się pary. Polega on w obwinięciu walca głównego przez inny walec o większéj średnicy, pozostawiając pomiędzy nimi przedział pozwalający parze swobodnie przechodzić. Para ta dostarcza parze w walcu głównym ilość ciepła zdolną usunąć skraplanie się jéj w czasie rozprężania.

Jeżeli W jest wagą pary użytéj przy każdym skoku tłoka, potrzeba najpierw dostarczyć ilość ciepła $\mu T_2 - \mu T_1$ aby podnieść temperaturę wody z T_1 na T_2, następnie ilość WL_2 aby ją ulotnić i w końcu ilości $W\int_{T_1}^{T_2} m' dT$ w celu utrzymania pary w stanie nasyconym od temperatury T_2 do temperatury T_1. Ilość więc ciepła dostarczona przez ognisko jest równą

$$Q_2 = W\left(\mu_{T_2} - \mu_{T_1} - L_2 + \int_{T_1}^{T_2} m' dT\right.$$

lub

$$Q = W\left(\mu_{T_2} - \mu_{T_1} - L_2 - \int_{T_1}^{T_2} (-m') dT\right.$$

Para przychodzi do skraplacza w stanie nasyconym i oddaje mu ilość ciepła

$$Q_1 = WL_1.$$

Ilość więc ciepła użytego na wykonanie pracy zewnętrznéj jest

$$Q_2 - Q_1 = W\left[L_2 - L_1 + \mu_{T_2} - \mu_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} - m'dT\right]$$

lub jeżeli zastąpimy C przez m i zauważymy iż $\int_{T_1}^{T_2} C dT = \mu_{T_2} - \mu_{T_1}$ otrzymamy dla wartości pracy wykonanéj przez kilogram pary wyrażenie

$$S = E\left(L_2 - L_1 + \int_{T_1}^{T_2} (m - m')\, dT\right).$$

Równanie to daje się uprościć zważając, iż

$$m - m' = -\frac{dL}{dT} + \frac{L}{T}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} (m - m')\, dT = -(L_2 - L_1) - \int_{T_1}^{T_2} \frac{L}{T} dT$$

a zatém

$$S = E \int_{T_1}^{T_2} \frac{L}{T} dT.$$

Formuła pana Regnault daje dla pary wodnéj

$$L = 606{,}50 - 0{,}695\, t = 796{,}25 - 0{,}695\ T$$

a więc podstawiając w równanie poprzednie otrzymamy

$$S = E\left(796{,}25 \log \frac{T_2}{T_1} - 0{,}695\,(T_2 - T_1)\right).$$

Jeżeli temperatura kotła jest 150° a skraplacza 50° znajdziemy $S = 144$ E. Maszyna zwykła działająca w tychże samych granicach temperatury daje tylko $S' = 132$ E, powłoka więc Watt'a sprowadza czysty zysk 12 E bez żadnego kosztu i wydatku.

Sposoby tylko co wskazane dążą do osłabienia wartości współczynnika $(1 - x_e) + \frac{s}{W}$. Woolf za pomocą maszyn compound w których rozprężanie kończy się w walcu o większéj średnicy, pokazał że zmniejszenie współczynnika n przynosi znaczne korzyści.

Sposób p. Hirn badania zmian pary pomiędzy kotłem i skraplaczem. — Wskazywacz Watt'a (indicateur) podaje w każdéj chwili skoku tłoka, ciśnienie pary znajdującéj się w walcu.

Jeżeli więc poprzednio, za pomocą licznych ważeń, oznaczymy wagę W mięszaniny, pochłoniętą przy każdym skoku tłoka, wiemy, iż mięszanina ta zajmuje w danéj chwili objętość V; posiada ciśnienie p i temperaturę odpowiednią t, jesteśmy więc w stanie oznaczyć jéj skład na mocy związku

$$N = W(\sigma + xu)$$

gdyż σ i u są dane przez tablice gdy temperatura t jest znaną. Jeżeli podstawiwszy w równanie poprzednie wartości σ i u, znajdziemy dla x wartość większą od jedności, jesteśmy zmuszeni wnosić, iż objętość W jest napełnioną przez wagę W pary przegrzanéj o ciśnieniu p; wtedy więc za pomocą wzoru empirycznego

$$p\frac{N}{W} = 50{,}933\,(a + t) - 192{,}50\,p^{1/4},$$

znajdziemy jéj temperaturę, a różnica pomiędzy tą ostatnią temperaturą i temperaturą pary nasyconéj o ciśnieniu p, wskaże nam stopień przegrzania.

Niech będzie

W' waga całkowita wody wychodzącéj ze skraplacza przy jednym skoku tłoka;

t_u temperatura téj wody,

t' temperatura kotła.

Woda skraplacza zyskuje ilość ciepła $(W' - W)(\mu_{t_u} - \mu_{t_0})$; ilość ta jest równą ilości $W(x_2''L'' + \mu''_{t_2} - \mu_{t_u})$, dostarczonéj wodzie i parze wychodzącéj z kotła, mniéj ilość AS zamieniona na pracę ezwnętrzną mniéj ilość ΣN przedstawiająca wszystkie straty i zyski ciepła; jednem słowem mamy

$$1) \qquad (W' - W)(\mu_{t_2} - \mu_{t_0}) = W(x_2''L_2'' + \mu''_{t_2} - \mu_{t_u}) - AS - \Sigma N$$

wyraz ΣN zawiera

1) stratę a będącą wynikiem oziębienia zewnętrznego walca,

2) « a' « « « rury prowadzącéj parę do skraplacza,

3) zysk ciepła b dany przez tarcie tłoka,

4) « « b' « « « pompy o słupie powietrza,

5) stratę e sprowadzoną przez oziębienie rury prowadzącéj parę do walca;

a więc

$$\Sigma N = a + a' - (b + b') + e;$$

wielkości te są zazwyczaj małe; p. Leloutre znalazł iż

$$a = 1^{\text{ciepł.}},85,\ a' = 1,\quad b = 0{,}5\quad b' = 0{,}5$$

Podstawiając w równanie (1) ilość pracy S daną przez wskazywacz i summę ΣN znajdziemy wartość $W(x''_2L''_2 + \mu''_{t_2} - \mu_{t_n})$ a więc znając t''_2 temperaturę daną przez termometr oznaczymy x''_2. Gdybyśmy chcieli dowiedzieć się jaki jest skład mięszaniny w pudle szuflady, musielibyśmy uciec się do związku

$$x'_2L'_2 + \mu''_{t_2} - C = x'_2L'_2 + \mu'_{t_2}.$$

Sposób ten badania wskazany przez p. Hirn, daje wypadki nadzwyczaj dokładne.

§ 3. MASZYNY POWIETRZNE.

Maszyny o ogrzaném powietrzu. — Przy użyciu pary widzieliśmy, że tylko nader słaba część ciepła dostarczonego da się korzystnie zużytkować. Dajność maszyny, będąc daną przez współczynnik $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$ jest tém samém ograniczoną, gdyż t nie mogąc być większém od temperatury powietrza, tylko powiększenie T_2 wpływa na podwyższenie jéj wartości.

Jeżeli ciałem działającém jest para, t_2 nie może być większém od 180°, albowiem nieodłączny nadmiarowy wzrost ciśnienia wymagałby ogromnych wymiarów dla powłok. Przeciwnie zaś, jeżeli ciałem działającém jest powietrze, podniesienie jego stanu z temperatury zera i ciśnienia 1 atmosfery do temperatury 270°, powiększa jego prężność tylko o jedną atmosferę t. j. czyni ją równą

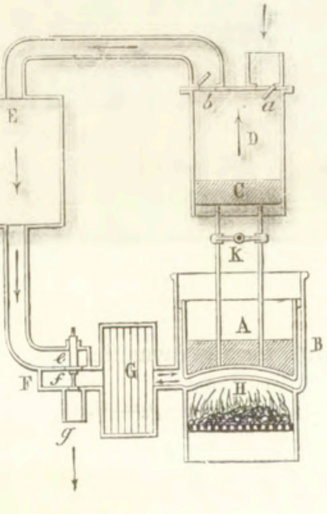

Fig. 35.

ciśnieniu dwóch atmosfer. Zbudowano wiele maszyn, w których para została zastąpioną przez powietrze ogrzane. Jedną z najlepiéj obmyślanych, jest maszyna Ericson'a, posiadająca odradzacz ciepła

Maszyna Ericsona. — Podajemy tu w streszczeniu zasady, na których maszyna Ericsona polega. W walcu B, otwartym w części górnéj i znajdującym się w styczności z atmosferą, swobodnie porusza się tłok A. Drugi tłok C o mniejszéj średnicy i połączony z pierwszym, zawarty jest w walcu D otwartym w części dolnéj i obdarzonym klapkami *a* i *b*, otwierającemi się w sposób wskazany na figurze.

W pudle F znajdują się również dwie klapki *e* i *f* niezależne od siebie. Gdy klapki *f* i *e* są otwarte, powietrze zawarte w zbiorniku E wlatuje do walca B, przechodząc przez otwór klapki *e* i przez odradzacz ciepła G. Przeciwnie zaś, gdy klapka *e* jest zamkniętą a *f* otwartą, powietrze zawarte w walcu B przechodzi przez odradzacz i uchodzi przez rurę *g*. Ognisko H znajduje się pod walcem B

Działanie maszyny. — W zbiorniku znajduje się powietrze o ciśnieniu p_2 i temperaturze t_1 dostarczane przez walec D, którego wymiary dozwalają ciśnieniu pozostawać stałém. Powietrze to, po otwarciu klapki e, wchodzi do walca B, przechodzi przez odradzacz ogrzany poprzednio, nagrzewa się i podnosząc się z temperatury t_1 na t_2, powiększa swą objętość przy stałém ciśnieniu, równém ciśnieniu zbiornika E, skutkiem czego tłok A podnosi się. W téj chwili klapka e zamyka się, powietrze wciąż powiększa swą objętość, rozprężając się i popychając tłok A. Rozprężenie powietrza odbywa się przy stałéj temperaturze t_2, gdyż ognisko dostarcza ilość ciepła ku temu potrzebną. Gdy tłok A doszedł do końca swego skoku, klapka f otwiera się, powietrze zawarte w walcu B i posiadające ciśnienie p_2 i temperaturę t_1, uchodzi przez rurę g, lecz przechodząc przez odradzacz pozostawia swe ciepło i ustawicznie oziębiając się temperatura jego spada z t_2 na t_1. Powietrze to może być uważane jako wzięte napowrót przez klapkę a walca D z atmosfery, w której przy stałém ciśnieniu podniosło się z ciśnienia p_1 na p_2.

Obieg maszyny.

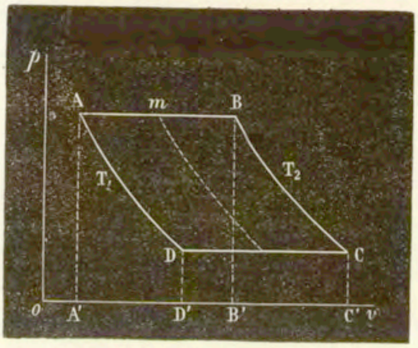

Fig. 36.

Linia AB jest równoległą do osi Ov i ma za równanie

$$p - p_2 = 0,$$

linia zaś CD

$$\frac{p}{k} - p_2 = 0,$$

a'j

$$p' = kp_2 = p_1,$$

Ognisko dostarcza potrzebną ilość ciepła wzdłuż linij BC równéj temperatury; a oziębiacz pochłania ciepło, gdy punkt określający stan ciała przebiega linię równéj temperatury DA. Łatwem jest przekonać się, że ilość ciepła pochłonięta wzdłuż lini CD równą jest ilości ciepła oddanéj gazowi przez tenże odradzacz. W saméj rzeczy, mamy ogólnie

$$dq = W(Cdt + hdp).$$

W maszynie Ericsona zmiana odbywa się przy stałém ciśnieniu, a zatém $dp = 0$; zysk i strata ciepła na dwóch elementach odpowiednich m i m' linij AB i CD, jest więc.

$$dq_2 = dq_1 = WCdt.$$

Maszyna Stirlinga. — Obieg téj maszyny jest następujący :

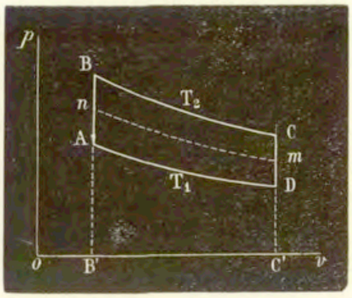

Fig. 37.

Linie AB i CD są równoległe do osi Op, linie zaś BC i AD są liniami równéj temperatury. Równaniem linii AB jest

$$v - v' = 0,$$

zaś

$$kv' - v_1 = 0,$$

jest równaniem linij CD.

Dla elementów $m\, m'$ położonych pomiędzy liniami równéj temperatury, mamy

$$dq_1 = dq_2 = Wcdt.$$

W téj maszynie ognisko dostarcza ciepła gazowi wzdłuż linij równéj temperatury BC i ciepło to zamienia się na pracę zewnętrzną. Gdy punkt określający stan ciała przebiega CD, gaz oziębia się nie zmieniając objętości i przesyła ciepło oziębiaczowi. Wzdłuż linii DA część pracy wykonanéj podczas przebiegu BC, użytą jest do zmniejszenia objętości gazu i doprowadzenia go do stanu początkowego, jednocześnie gaz przesyła oziębiaczowi ilość ciepła, która jest zupełnie straconą, gdyż temperatura jéj jest najniższą w maszynie. Wreszcie wzdłuż linii AB gaz jest ogrzewanym przy stałéj objętości i doprowadzonym do ciśnienia pierwotnego za pomocą ciepła wydzielonego z odradzacza.

Niedogodności jakie przedstawiają maszyny o ogrzaném powietrzu. — Teoretycznie maszyny o ogrzaném powietrzu przedstawiają ogromne zalety, jednakże liczba ich zastosowań nie jest wielką, przyczyna tego leży w przeszkodach następujących :

1) Organy maszyny prędko się zużywają i rdzewieją znajdując się w styczności z gazami, których temperatura przechodzi 300° stopni. Tłuszcz służący do smarowania organów rozkłada się natychmiast, a w skutek tego następuje silny wzrost tarcia.

2) Masa powietrza działającego nie może być utrzymaną przy wysokiéj temperaturze chyba że gaz pochodzący ze spalenia materyału palnego i otaczający powłoki powietrza działającego, posiada jeszcze wyższą temperaturę.

Zużycie więc materyału palnego nie jest dobrém, gdyż gaz ten unosi znaczną ilość ciepła.

Maszyny o gazie wybuchającym. — Maszyna Lenoir. — W maszynie téj wybuch mięszaniny powietrza i gazu służącego do oświecenia stwarza gaz posiadający wysoką temperaturę. Skutkiem téj wysokiéj temperatury, przebieg jest zjawiskiem nadzwyczaj złożoném nie dającém się ująć w formuły analityczne.

Maszyna Lenoir, jest podobną do maszyny parowéj. Po wprowadzeniu do walca mięszaniny 10°/₀ powietrza i 90°/₀ gazu, zapala się ją za pomocą maszyny znanéj Rumkorffa. Gaz powiększa silnie swą objętość i rozprężając się popycha tłok do kresu jego skoku. Wtedy to szuflada odmyka się i pozwala gazom wynikłym ze spalenia ujść zupełnie i tłok odbywa ruch w tył. Figura następująca pozwoli nam pokazać sposób, w jaki maszyna ta działa.

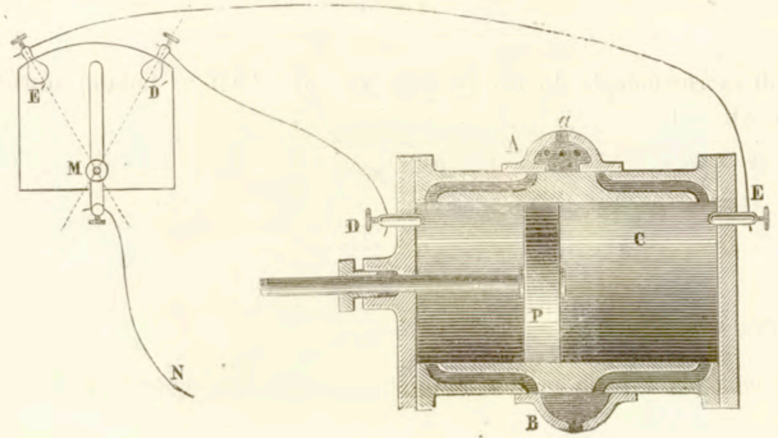

Fig. 38.

Walec główny obdarzony jest dwiema szufladami A i B. Gaz wchodzi przez otwór A, powietrze zaś przez dziurki widoczne na figurze.

Skazówka MN może się znajdować naprzemian w styczności E′ lub D′. Iskra przechodzi przez drut N i udaje się bądź do D bądź do E′. Koniec drutu EE′ pogrążony jest w ziemi, drut zaś DD′ za pomocą N, znajduje się w styczności z maszyną Rumkorffa. Spalenie mięszaniny gazów wywołuje w maszynie silny wzrost temperatury, który wciąż powiększa się, w końcu spaliłby tłuszcz i zniszczył części składowe maszyny; dla zapobieżenia temu, walec główny zawarty jest w podwójnéj powłoce ustawicznie wodą zimną zwilżanej. Ilość wody potrzebnéj ku temu, jest znaczną, i koniec końców maszyna Lenoir więcéj wody zużywa niż maszyna parowa.

Zjawiska, których siedliskiem jest walec, są nadzwyczaj złożone i czas potrzebny do dokończenia zespolenia chemicznego gazu z powietrzem, będąc dosyć znacznym, zespolenie to nie jest jeszcze skończoném, gdy tłok doszedł do kresu swego skoku, skutkiem czego następuje ogromna strata gazów palnych.

W ogóle maszyna Lenoir źle spożywa opał nader drogi, gdyż na konia i godzinę trzeba dostarczyć 2400 litrów gazu.

Maszyna ta jednakże da się korzystnie zastosować, lecz tylko w przypadku, gdy wymagalną jest mała siła działająca w przerwach.

Maszyny o ściśnionem powietrzu. — Przy przebijaniu tunelów w skale, maszyny o ściśnionem powietrzu znajdują liczne zastosowania, gdyż małość przestrzeni zajmowanej przez nie, zmusza inżyniera do dania im pierwszeństwa nad maszynami parowemi. Ściśnienie powietrza odbywa się na pewnéj odległości od galeryi, za pomocą znanych maszyn służących ku temu; powietrze to jest przesłane za pomocą rur na miejsce przeznaczenia. Można zwiększyć prężność powietrza pozostawiając temperaturę stałą lub też adyabatycznie, t. j. wykonać ściśnienie powietrza w walcach o ścianach nieprzepuszczających ciepła. Podobnie można zużytkować powietrze bądź adyabatycznie, bądź pozostawiając temperaturę stałą.

Teorya pokaże nam, któremu z tych dwóch sposobów powinniśmy dać pierwszeństwo.

Dla tego nakreślmy obieg kilograma powietrza: niech M będzie punktem określającym stan jego w chwili gdy je bierzemy o temperaturze i ciśnieniu atmosfery. Jeżeli przy stałéj temperaturze sprowadzimy objętość powietrza do *on*, punkt M przebiegnie linię równéj temperatury MN i praca wydana przedstawioną będzie przez M*m*N*n*.

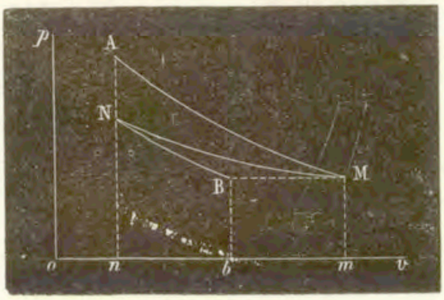

Fig. 39.

Jeżeli zaś ścieśniamy powietrze w walcu o ścianach nieprzepuszczających ciepła, punkt M przebiegnie linię adyabatyczną MA i spadnie w końcu z A do N, gdyż powietrze przechodząc przez rury dążące do przesłania go oziębi się. Praca potrzebna ku temu podaną jest przez powierzchnię *m*M*n*A, większą od *m*M*n*N, gdyż adyabatyczna MN znajduje się nad MN linią równéj temperatury. Przy rozprężaniu się powietrza punkt M przebiegnie NM, jeżeli temperatura pozostała stałą, jeżeli zaś rozprężenie się powietrza miało miejsce w walcu o ścianach nieprzepuszczających powietrza punkt M przebiegnie adyabatyczną NB kończącą się w B, gdzie prężność B*b* staje się równą ciśnieniu atmosfery. Praca dostarczona przez rozprężalność powietza daje pracę NB*bn*. Widzimy więc, że cisnienie powietrza, powinno się odbywać w walcu o ścianach przepuszczających ciepło.

Weźmy kilogramm powietrza $(p_1\ t_1)$ o ciśnieniu atmosfery, ściśnijmy go w walcu o ścianach nieprzepuszczających ciepła, i znajdźmy temperaturę t, jaką mieć będzie, gdy ciśnienie stanie się równém p. Mamy

$$P_1V_1 = R(a+t'), \quad PV = R(a+t)$$

Prawo Poisson'a daje

$$p_1^c V_1^C = p^c V^C,$$

zkądinąd

$$\frac{a+t}{a+t'} = \frac{T}{T'} = \frac{pV}{p_1V_1}$$

a więc

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{C+c}{C}} = \frac{T}{T_1} = \frac{a+t}{a+t_1}$$

podstawmy liczby np. $t_1 = 10^\circ$, otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\text{dla } p = 3p_1, && t = 116^\circ, \\
&\text{« } p = 7p_1 && t = 236^\circ, \\
&\text{« } p = 10p_1 && t = 278^\circ.
\end{aligned}$$

Gdy przeciwnie powietrze rozpręża się popychając tłok w walcu o ścianach nieprzepuszczających ciepła, jeżeli uczynimy $t = 10^\circ$ i $p = 7$ atmosfer; skoro ciśnienie spadnie na $p_1 = 1$ atmosfera $t_1 = -117^\circ$.

Ten wielki spadek temperatury, jest nową przeszkodą, jaką spotykamy przy rozprężaniu się powietrza o ścianach nieprzepuszczających ciepła.

Jeżeli zamiast użyć to rozprężenie się powietrza ściśnionego do przezwyciężenia oporu równego jego prężności, pozwoli mu się swobodnie ujść, spadek temperatury będzie mniejszym, lecz także nader znacznym.

W saméj rzeczy równanie równoważności daje

$$A(U_1 - U) + AS = 0,$$

zkąd

$$\Delta U = U_1 - U = S,$$

lecz

$$U - U_1 = \frac{C}{A}\left(t - t_1\right) = \frac{C}{A}\,\frac{PV - P_1V_1}{R} \quad \text{i} \quad S = P_1(V_1 - V),$$

podstawiając

$$\frac{C}{A}\,\frac{PV - P_1V_1}{R} = P_1(V_1 - V$$

lub

$$\frac{V_1}{V}\left(R + \frac{C}{A}\right) = R + \frac{C}{A}\left(\frac{P}{P_1}\right)$$

zkądinąd mamy

$$\frac{a+t_1}{a+t} = \frac{P_1V_1}{PV}.$$

Czyniąc $P = 7P$, i $t = 10^\circ$ otrzymujemy

$$t_1 = -62^\circ{,}43,$$

ROZDZIAŁ VIII

TEORYA GAZÓW DOSKONAŁYCH.

Określenia. — Gaz doskonały jest ciałem na którego części składowe, działają tylko dwie siły: *ciepło* dążące do zwiększenia objętości i *ciśnienie zewnętrzne* działające wręcz przeciwnie. Z samego określenia wynika, iż w przyrodzie nie ma gazów doskonałych.

Jakiém by nie było rozrzedzenie gazu prostego, cząsteczki jego przyciągają się wzajemnie i to przyciąganie wewnętrzne razem z ciśnieniem zewnętrznèm, dąży do zrównoważenia siły ciepła. Z tego cośmy powiedzieli, wypływa à priori, że gaz złożony nie może być gazem doskonałym.

Jednym słowem gaz doskonały jest ciałem idealném, którego własności są jednakże nader zbliżone do własności gazów rzeczywistych. Hypoteza, że przyciąganie wewnętrzne jest równém zeru, stanowi podstawę gazów. Hypoteza ta wypływa z doświadczenia p. Joule'a, pokazującego, że dla gazów praca sił wewnętrznych jest równą zeru.

Uczeni przypuszczają, że cząsteczki gazu obdarzone są ruchem nader szybkim przeniesienia (translation); nadto ruch ten ma być jednostajnym i prostolinijnym.

W ogóle cząsteczki gazu znajdują się na takich odległościach od siebie, iż siły wewnętrzne przyciągania są nieskończenie małe, z wyjątkiem pewnych chwil i to w czasie nader krótkim, gdy dwie cząsteczki przechodzą bardzo blizko; w tym to czasie siła wewnętrzna przyciągania działa skutecznie i ruch jest zmienionym.

Uważajmy dwie cząsteczki równe m i m' zbliżające się do siebie po linii prostéj XY z prędkością u. Gdy odległość AA' jest bardzo małą, siła przyciągania zaczyna działać energicznie, a ponieważ siła ta jest odpychającą, prędkość więc n maleje i staje się równą zeru w położeniu BB'; następnie cząsteczki oddalają się od siebie i w położeniu AA' posiadają pierwiastkową prędkość u, lecz ze znakiem przeciwnym.

Na początku działania cząsteczki m i m' posiadały prędkości a i $(-a)$, w końcu cząsteczka m' posuwa się z szybkością $+u$. Tak więc nastąpiła tylko prosta wymiana prędkości i stan fizyczny gazu nie został zmienionym.

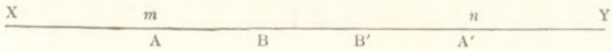

Fig. 40.

Uważajmy obecnie dwie cząsteczki postępujące po dwóch liniach tworzących z sobą jakikolwiek kąt. Skoro odległość dwóch tych cząsteczek stała się taką, iż siła przyciągania działa skutecznie, każda z tych cząsteczek opisze małą krzywę i daléj posuwać się będzie po linii prostéj, wciąż posiadając prędkość obdarzoną tym samym znakiem co i na początku.

Zmiana kierunkn nie wpływa na siłę żywą, a ponieważ cząsteczki poruszają się we wszystkich możliwych kierunkach, widocznèm więc jest, że stan ciała pozostaje bez zmiany.

Ciśnienie. — Ciśnienie, jakie gaz zawarty w naczyniu wywiera na jego ściany, ma za przyczynę nieskończoną liczbę uderzeń cząsteczek o téż ściany. Skoro cząsteczka znajduje się na małéj odległości od ściany, siła odpychania działa skutecznie, najprzód niszczy prędkość $+u$ cząsteczki a potém odpycha ją z prędkością $(-u)$. Nieskończona liczba tych uderzeń stanowi ciśnienie.

Krönig i Clausius podali wytłomaczenie ciśnienia.

Podamy je tu w porządku chronologicznym.

Niech będzie sześcian o wymiarze a, zawierający jakikolwiek gaz: niech n przedstawia liczbę cząsteczek tego gazu; Krönig utrzymuje, że w każdym z trzech prostopadłych kierunków, posuwać się będzie liczba $\frac{n}{3}$ cząsteczek z tą samą prędkością u.

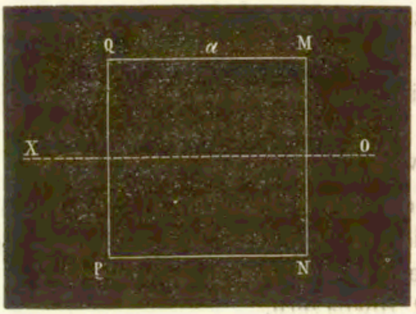

Fig. 41.

Ciśnienie które gaz wywiera na ścianę MN sprawione jest przez uderzenie $\frac{n}{3}$ cząsteczek, których prędkość jest prostopadłą do téj ściany.

Jeżeli nazwiemy przez f oddziaływanie (réaction) ściany na cząsteczkę m, mamy

$$m\frac{du}{dt} = f \quad \text{lub} \quad mdu = f\,dt.$$

Obierając za kierunek prędkości dodatnych Ox, prędkość przed uderzeniem była $(-u)$ po uderzeniu staje się $+u$, a więc całkując mamy:

$$2mu = \int f\,dt.$$

Dodając równania podobne dla wszystkich uderzeń zaszłych w czasie θ, otrzymujemy równanie

$$\Sigma\, 2mu = \Sigma \int f\,dt.$$

Zkądinąd zakładając

$$F\theta = \Sigma \int f\,dt,$$

gdzie F oznacza ciśnienie, γ' oddziaływanie przeciętne ściany na zbiór cząsteczek; równanie poprzednie daje się zastąpić przez

$$2mu \times N = F\Theta.$$

Wyznaczmy teraz N t. j. liczbę uderzeń.

Po pierwszém uderzeniu o ścianę MN cząsteczka m posuwa się z prędkością $+u$ w kierunku Ox, odbija się o ścianę PQ i uderza znów MN i tak daléj.

Czas który upływa pomiędzy dwoma następującemi po sobie uderzeniami jest danym przez $\frac{2a}{u}$, liczba uderzeń cząsteczki m o ścianę MN w czasie θ jest $\frac{\Theta u}{2a}$; liczba N uderzeń sprawionych przez zbiór $\frac{n}{3}$ cząsteczek, posiadających prędkość prostopadłą do ściany MN, przedstawioną jest przez

$$\frac{\Theta u}{2a} \times \frac{n}{3},$$

a więc równanie poprzednie staje się

$$\frac{nmu^2\Theta}{3a} = F\Theta,$$

zkąd

(1)
$$F = \frac{nmu^2}{3a}.$$

Oznaczając przez p ciśnienie na metr kwadratowy, mamy

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{nmu^2}{3a^3},$$

a zatém

(2)
$$pv = \frac{nmu^2}{3}$$

gdyż $a^3 = v$ jest objętością sześcianu.

Clausius doszedł do tego samego wypadku innym sposobem.

Uważajmy znaczną objętość gazu i dwie płasczyzny równoległe, rozległe i znajdujące się na bardzo małéj odległości od siebie.

Nadto przypuśćmy, że pomiędzy temi dwiema płasczyznami znajduje się n cząsteczek, posuwających się we wszystkich możliwych kierunkach.

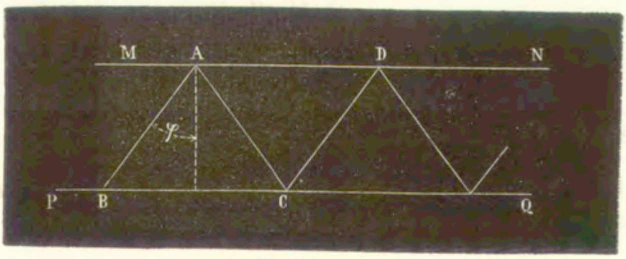

Fig. 42.

Cząsteczka gazu posuwając się w kierunku BA, uderza płasczyznę MN w punkcie A, odskakuje pod tym samym kątem, spotyka w C płasczyznę PQ i tak daléj.

Niech będzie a odległość dwóch płasczyzn, φ kąt zawarty pomiędzy linią BA i prostopadłą do płasczyzn.

Cząsteczka gazu, aby przejść z punktu B do punktu C, przebiegła drogę $\frac{2a}{\operatorname{dost}\varphi}$, a czas potrzebny do przebieżenia téj drogi jest $\frac{2a}{u \operatorname{dost}\varphi}$.

Liczba uderzeń zaszłych w czasie Θ, równą więc jest wartości

$$\frac{\Theta u \operatorname{dost}\varphi}{2a}.$$

Jeżeli nazwiemy przez u' rzut prędkości na prostopadłę do płaszczyzn, a przez f oddziaływanie płaszczyzny MN, będziemy mieć

$$\frac{m du'}{dt} = f,$$

lub

$$m du' = f dt$$

lub całkując dla całego uderzenia

$$2mu' = 2mu \operatorname{dost}\varphi = \int f dt.$$

Dodając równania podobne dla wszystkich uderzeń o płaszczyznę MN zaszłych w czasie Θ, otrzymamy równanie

$$\Sigma 2mu \operatorname{dost}\varphi = \Sigma \int f dt = F\Theta$$

gdzie F jest wartością przecięciową oddziaływania płaszczyzny na cząsteczki.

Dopiero co pokazaliśmy, że liczba uderzeń w czasie Θ jest $\frac{\Theta u \operatorname{dost}\varphi}{2a}$, a więc

$$\Sigma 2mu \operatorname{dost}\varphi \times \frac{\Theta u \operatorname{dost}\varphi}{2a} = \Sigma \frac{mu^2 \operatorname{dost}^2\varphi}{a} \times \Theta = F\Theta.$$

Znak Σ odnosi się do wszystkich cząsteczek, a zatém

$$F = \Sigma \frac{mu^2 \operatorname{dost}^2\varphi}{a}. \tag{3}$$

Aby wyznaczyć tę summę Clausius robi hypotezę, iż wszystkie cząsteczki posiadają tę samą massę i prędkość, nadto posuwają się we wszystkich możliwych kierunkach.

Wyobraźmy sobie kulę zakreśloną promieniem równym jedności; przez środek téj kuli poprowadźmy linie równoległe do kierunków prędkości wszystkich cząsteczek.

Prędkości, których kierunki czynią z prostopadłą xx' do płaszczyzn, kąty zawarte pomiędzy φ i $\varphi + d\varphi$, przetną kulę podług pasów (zones) przeciwległych $aba'b'$, $cdc'd'$, zawartych pomiędzy ostrokręgami kołowemi, mającemi za kąty w wierzchołku kąty φ i $\varphi + d\varphi$.

Liczba wszystkich cząsteczek jest n, a więc i liczba przecięć z kulą, promieni równoległych do kierunków prędkości wszystkich cząsteczek, będzie także n, i stosunek liczby n' cząsteczek odpowiednich pasom *aba'b'*, *cdd'c'* do liczby całkowitéj cząsteczek jest równym stosunkowi powierzchni dwóch pasów do powierzchni całéj kuli

$$\frac{n'}{n}=\frac{2\times 2.\Pi\,\text{wst}\varphi\, d\varphi}{4\Pi}=\text{wst}\varphi\, d\varphi,$$

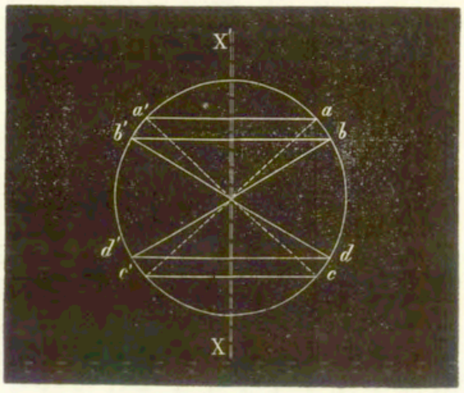

Fig. 43.

zkąd

$$n'=n\,\text{wst}\varphi\, d\varphi,$$

każda z n' cząsteczek wprowadza do summy (3) wyraz

$$\frac{mu^2\text{dost}^2\varphi}{a},$$

a zatém liczba n' cząsteczek daje nam

$$n'\frac{mu^2\text{dost}^2\varphi}{a}=\frac{mu^2\text{dos}^2\varphi}{a}=n\,\text{wst}\varphi\, d\varphi$$

Ażeby otrzymać działanie wszystkich cząsteczek odpowiadających całkowitéj powierzchni kuli, wystarcza zcałkować to wyrażenie w granicach: 0 i $\frac{\Pi}{2}$; równanie (3) staje się

$$\mathrm{F}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{mu^2\,\text{dost}^2\varphi}{a}\,n\,\text{wst}\varphi\, d\varphi=\frac{nmu^2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{dost}^2\varphi\,\text{wst}\varphi\, d\varphi,$$

lecz

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{dos}^2\varphi\,\text{wst}\varphi\, d\varphi=\left(-\frac{\text{dost}^2\varphi}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3},$$

a zatém

(4) $$\mathrm{F}=\frac{nmu^2}{3a}.$$

Oznaczając przez ω powierzchnię każdéj z płaszczyzn MN i PQ, a przez v objętość gazu zawartego, otrzymujemy

$$p=\frac{\mathrm{F}}{\omega}=\frac{n\,mu^2}{3a\omega}$$

zkąd

$$(5) \qquad pv = \frac{nmu^2}{3},$$

Twierdzenie p. Briot. — Clausius dla dowiedzenia związku (5) zakłada, iż massy i prędkości, wszystkich cząsteczek są równe. Hypotezy te, a szczególniéj ostatnie nie są weale usprawiedliwione, pomimo to związek

$$(6) \qquad \mathrm{F} = \Sigma \frac{mu^2 \operatorname{dost}^2\varphi}{a}$$

zawsze ma miejsce.

Summa $\Sigma_1 \frac{mu^2}{2}$ sił żywych cząsteczek, których prędkości odpowiadają pasom wyznaczonym przez kąty φ i $\varphi + d\varphi$ i summa $\Sigma \frac{mu^2}{2} = \mathrm{V}_u$ sił żywych wszystkich cząsteczek, znajdują się w stosunku powierzchni dwóch pasów do powierzchni całéj kuli; a zatém

$$\frac{\Sigma_1 \frac{mu^2}{2}}{\Sigma \frac{mu^2}{2}} = \frac{2 \cdot 2\pi \operatorname{wst}\varphi \, d\varphi}{4\pi} = \operatorname{wst}\varphi d\varphi,$$

zkąd

$$\Sigma_1 \frac{mu^2}{2} = \mathrm{V}_u \operatorname{wst}\varphi \, d\varphi;$$

mnożąc obiedwie strony poprzedniego równania przez czynnik stały $\frac{2\operatorname{dost}^2\varphi}{a}$, mamy:

$$\Sigma \frac{mu^2 \operatorname{dost}^2\varphi}{a} = \mathrm{F} = \mathrm{V}_u \, \frac{2}{a} \, \operatorname{dost}^2\varphi \operatorname{wst}\varphi \, d\varphi.$$

$\frac{2\operatorname{dost}^2\varphi}{a}$ nie jest właściwie ilością stałą, lecz można ją uważać za taką, gdyż wyrazy zawarte w summie $\Sigma_1 \frac{mu^2}{2}$ czynią prawie ten sam kąt φ z prostopadłą.

Całkując równanie poprzednie w granicach: 0 i $\frac{\pi}{2}$ otrzymujemy

$$\mathrm{F} = \frac{2}{a} \mathrm{V}_u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{dost}^2\varphi \operatorname{wst}\varphi \, d\varphi,$$

lub

$$\mathrm{F} = \frac{2}{3a} \mathrm{V}_u,$$

zkąd

$$p = \frac{\mathrm{F}}{\omega} = \frac{2}{3a\omega} \mathrm{V}_u$$

(7) $$pv = \frac{2}{3} V_u = \frac{2}{3} \Sigma \frac{mu^2}{2}.$$

Tak więc: « *iloczyn z masy gazu przez ciśnienie, równa się* $\frac{2}{3}$ *summy sił żywych ruchu przeniesienia wszystkich cząsteczek.*

Prawo mięszaniny gazów. — Uważajmy dwa gazy odrębne. Oznaczmy przez $\Sigma \frac{m'u'^2}{2}$ i $\Sigma \frac{m''u''^2}{2}$ siły żywe ruchu przeniesienia tych dwóch gazów i przypuśémy, że mięszamy te gazy nie wykonywając pracy zewnętrznéj.

Jeżeli gazy te nie działają na siebie chemicznie, siła żywa mięszaniny równą jest summie sił żywych gazów zmięszanych

$$\Sigma \frac{mu^2}{2} = \Sigma \frac{m'u'^2}{2} + \Sigma \frac{m''u''^2}{2}.$$

Jeżeliby po kolei każdy z gazów mięszanych zajmował objętość v mięszaniny, mielibyśmy

$$p'v = \frac{2}{3} \Sigma \frac{m'u'^2}{2},$$

$$p''v = \frac{2}{3} \Sigma \frac{m''u''^2}{2}.$$

Nadto oznaczając przez p ciśnienie mięszaniny, mamy

$$pv = \frac{2}{3} \Sigma \frac{mv^2}{2},$$

a więc

$$pv = p'v + p''v,$$

lub

(8) $$p = p' + p''$$

Co da się wysłowić w następujący sposób:

Ciśnienie mięszaniny równém jest summie ciśnień gazów mięszanych, które to ciśnienia miały by miejsce gdyby każdy po kolei z gazów mięszanych zajmował objętość mięszaniny.

Na mocy prawa Gay-Lussac'a mamy

(9) $$pv = \alpha p_0 v_0 T,$$

zkądinąd

$$pv = \frac{2}{3} \Sigma \frac{mu^2}{2},$$

a więc

(10) $$\frac{3}{2} \alpha p_0 v_0 T = \Sigma \frac{mu^2}{2}$$

co nam pokazuje że « *siła żywa ruchu przeniesienia cząsteczek gazu jest proporcyonalną do temperatury bezwzględnéj* ». Nadając równaniu (10) inny kształt.

$$\frac{\Sigma \frac{mu^2}{2}}{v_0} = \frac{3}{2}\alpha p_0 \mathrm{T},$$

możemy powiedzieć że «*stosunek siły żywéj jedności wagi do objętości gatunkowéj, równym jest temperaturze bezwzględnéj pomnożonéj przez czynnik wspólny wszystkim gazom.*

Prędkość ruchu przeniesienia. — Summa $\Sigma \frac{mu^2}{2}$ równa się $\frac{nm_1u_1^2}{2}$, zakładając iż n oznacza summę cząsteczek, zaś m' i u' przedstawiają wartości przecięciowe massy i prędkości. Tak więc

$$\Sigma \frac{mu^2}{2} = \frac{nm_1u_1^2}{2};$$

zkądinąd

$$\Sigma \frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2}\alpha p_0 v_0 \mathrm{T},$$

a więc

$$\alpha p_0 v_0 \mathrm{T} = \frac{nm_1u_1^2}{3}.$$

Jeżeli gaz badany waży jeden kilogram, mamy:

$$nm_1 = \Sigma m = \frac{1}{g}$$

i równanie poprzednie daje nam

$$u_1 = \sqrt{3g\alpha p_0 v_0 \mathrm{T}}. \tag{12}$$

Stałe α, p_0 i g mają następujące wartości:

$$\alpha = \frac{1}{273}, \quad p_0 = 10{,}333, \quad g = 9{,}8096,$$

nadto dla powietrza $v_0 = 0{,}7733$; a więc oznaczając przez ρ gęstość jakiegokolwiek gazu, mamy:

$$v_0 = \frac{0{,}7733}{\rho}.$$

Równanie (12) przybiera kształt

$$u_1 = 485\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{273\rho}}.$$

Dla temperatury termometrów równéj $\mathrm{T} = 273^\circ$ równanie poprzednie staje się

$$u_1 = 485\sqrt{\frac{1}{\rho}}$$

Wykonywując działania wskazane dla różnych gazów otrzymujemy następujące wypadki:

Powietrze $u_1 = 485^m$,

Kwasoród $u_1 = 461^m$,

Azot $u_1 = 492^m$,

Wodoród $u_1 = 1848^m$.

Wypływ gazów. — 1° Prędkość wypływu.

Wyobraźmy sobie dwa walce A i B w których poruszają się swobodnie dwa tłoki. Powierzchnia walca A jest znacznie większą od powierzchni walca B.

Wypływ z wielkiego walca do małego będzie mieć miejsce jeżeli ciśnienie p_1 wywierane na tłok dużego walca jest większém od ciśnienia p_2 małego tłoka.

Niech będą.

v_1 objętość gatunkowa gazu, T_1 temperatura gazu, w_1 prędkość przeniesienia — w dużym walcu

v_2 objętość gatunkowa, T_2 temperatura gazu, w_2 prędkość przeniesienia — w małym walcu.

Jeżeli oznaczymy przez $d\omega$ wagę mas równych, przez U_1 i U_2 dzielności wewnętrzne jedności wagi gazu badanego w walcach A i B, przyrost dzielności całkowitéj ma następujące wyrażenie

$$d\omega\left(\frac{w_2^2}{2g} + U_2\right) - d\omega\left(\frac{w_1^2}{2g} + U_1\right).$$

Zkądinąd praca ciśnień daną jest przez $p_1v_1d\omega - p_2v_2dw$, a zatém równanie sił żywych staje się następującém

$$d\omega\left(\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + U_2 - U_1\right) = p_1v_1d\omega - p_2v_2d\omega,$$

lub upraszczając i przenosząc

$$(1) \qquad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = p_1v_1 - p_2v_2 - (U_2 - U_1).$$

Równanie to zawiera warunek, iż ciepło nie zostało przesłaném na zewnątrz.

Dla gazów mamy

$$U_2 - U_1 = Ec\,(T_2 - T_1),$$

$$p_1v_1 = \alpha p_0 v_0 T_1$$

A zatém podstawiając wartości te w równanie (1) otrzymujemy

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = (\alpha p_0 v_0 + \mathrm{E}c)(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2).$$

Nadto mamy

$$\alpha p_0 v_0 = \mathrm{E}(\mathrm{C} - c),$$

a więc

(2) $$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \mathrm{EC}(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2).$$

Praktycznie trudno jest wyznaczyć temperaturę T_2, lecz trudność tę można obejść wyrażając T_2 w funkcyi ciśnienia.

W samej rzeczy, poprzednio otrzymaliśmy dla gazu doskonałego

$$p^c v^{\mathrm{C}} = e\mu.$$

Ponieważ w przypadku badanym wszystkie zmiany gazu są adyabatyczne, wartość μ jest ilością stałą i zachodzi związek

$$p_1^c v_1^{\mathrm{C}} = p_2^c v_2^{\mathrm{C}};$$

mamy również

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}.$$

Z tych dwóch związków wyprowadzamy wzory

(3) $$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{\mathrm{C}}{c} - 1} = \frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}$$

i

(4) $$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\mathrm{C} - c}{\mathrm{C}}} = \frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}.$$

Równanie (4) daje nam T w funkcyi ciśnień; podstawiając w równanie (2) wartość znalezioną dla T, otrzymamy prędkość wypływu.

Jeżeli prędkość W_1 jest nieznaczną równanie (2) sprowadza się do kształtu

(5) $$\frac{w_2^2}{2g} = \mathrm{EC}(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2).$$

Przykład liczebny.—Zastosujmy wzór dopiero co otrzymany do wypływu masy powietrza wychodzącego z naczynia, w którym temperatura jest 30 stopni Celsiusa a ciśnienie równém $\frac{3}{2}$ atmosfery, i gubiącego się w przestrzeni. Mamy dane

$$t_1 = 30^{\circ}; \qquad p_1 = \frac{3}{2}\ \text{atm.};$$
$$\mathrm{C} = 0{,}2375; \quad p_2 = 1\ \text{atm.};$$
$$c = 0{,}1684, \quad \mathrm{C} - c = 0{,}0791.$$

Podstawiając wartości dane w równaniu (4) otrzymujemy

$$T_2 = 303^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{791}{2375}} = 269^0$$

zkąd

$$t_2 = -4^0.$$

Wzór (5) daje nam na mocy tych danych

$$w_2 = 258 \text{ metrów na sekundę.}$$

Widzimy więc, że w tych warunkach wypływ gazu połączony jest ze znacznym spadkiem temperatury.

Wyobraźmy sobie dwa balony A i B połączone za pomocą rury obdarzonéj kurkiem, nadto zawierające ten sam gaz lecz w warunkach odrębnych i starajmy się zbadać analitycznie, zjawiska jakie mają miejsce po otwarciu kurka.

Niech będą :

$$\left.\begin{array}{ll} V_1 & \text{objętość gatunkowa gazu} \\ M_1 & \text{waga gazu na początku} \\ v_1 & \text{objętość balonu A} \\ p_1 & \text{ciśnienie} \\ T_1 & \text{temperatura} \end{array}\right\} \text{ w balonie A}$$

Ilości V_2 M_2 v_2 p_2 i T_2 mają te same znaczenie, lecz odnoszą się do balonu B.

Załóżmy iż $p_1 > p_2$ i badajmy zjawisko w chwili gdy waga M gazu przeszła z balonu A do balonu B.

Natenczas waga gazu zawartego w balonie A jest $M_1 - M$ i stan jego ma za cechę v'_1, p'_1, T'_1. Balon B zawiera wagę $M_2 + M$ gazu którego cechą są v'_2, p'_2, T'_2; wszystkie te wartości v'_2, v'_1 p'_2. p'_1, T'_2, T'_1 postaramy się wyznaczyć w funkcyi wagi M gazu. Z początku waga $M_1 - M$ gazu zajmowała tylko pewną część objętosci całkowitéj V_1 balonu A; gaz ten rozrzedził się i w końcu zajął całą objętość. Ponieważ zmiany zaszłe w stanie gazu odbyły się adyabatycznie mamy więc równanie

$$p'^{c}_1 v'^{C}_1 = p_1^{c} v_1^{C},$$

$$\frac{p'_1}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^{\frac{C}{c}}$$

Stosunek $\frac{v_1}{v'_1}$ jest znanym gdyż

$$_1 = \frac{V_1}{M_1} \quad \text{i} \quad v'_1 = \frac{V_1}{M_1 - M}$$

zkąd

$$\frac{v_1}{v'_1} = \frac{M_1 - M}{M}.$$

a zatém

$$\frac{p'_1}{p_1}=\left(\frac{M_1-M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}} \tag{6}$$

równanie to wyznacza ciśnienie p'_1 w balonie A.

Dla wyznaczenia T'_1 mamy związek

$$\frac{T'_1}{T_1}=\left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^{\frac{C-c}{c}}$$

zkąd

$$\frac{T'_1}{T_1}=\left(\frac{M_1-M}{M_1}\right)^{\frac{C-c}{c}} \tag{7}$$

Równania (6) i (7) oznaczają zupełnie stan gazu w balonie A.

W balonie B waga gazu jest M_2+M. Dzielność całkowita masy gazu zawartego w dwóch balonach pozostała tą samą, gdyż żadna praca zewnętrzna nie została wykonaną. Warunek ten wystarcza do oznaczenia stanu gazu w balonie B.

W saméj rzeczy, dla gazów mamy

$$A\frac{dU}{dT}=c,$$

zkąd

$$U=U_0+EcT$$

a ponieważ dzielność całkowita jest tą samą jak na początku tak i w końcu zjawiska, a zatém

$$M_1(U_0+EcT_1)+M_2(U_0+EcT_2)=(M_1-M)(U_0+EcT'_1)+(M_2+M)(U_0+EcT'_2)$$

lub

$$M_1T_1+M_2T_2=(M_1-M)T'_1+(M_2+M)T'_2;$$

Podstawiając za T'_1 wartość daną przez równanie (7) mamy

$$T'_2=\frac{M_2T_2}{M_2+M}+\frac{M_1T_1}{M_2+M}\left[1-\left(\frac{M_1-M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right]. \tag{8}$$

Ażeby oznaczyć ciśnienie p'_2 uciekniemy się do równania

$$\frac{p'_2v'_2}{p_2v_2}=\frac{T'_2}{T_2};$$

lub

$$\frac{p'_2}{p_2}=\frac{T'_2v_2}{T_2v'_2};$$

mamy zkądinąd

$$\frac{v_2}{v'_2}=\frac{M_2+M}{M}.$$

co nam daje

$$\frac{p'_2}{p_2} = \frac{M_2 + M}{M_2} \times \frac{T'_2}{T_2}$$

lub podstawiając za T'_2 wartość daną przez równanie (8)

$$\frac{p'_2}{p_2} = 1 + \frac{M_1 T_1}{M_2 T_2}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{c}{C}}\right]. \tag{9}$$

Równania (6) (7) (8) (9) oznaczają stan gazu w funkcyi wagi gazu M.

Wypływ przestaje mieć miejsce skoro $p'_1 = p'_2$. Wtedy zachodzi związek

$$p_1\left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{c}{C}} = p_2\left\{1 - \frac{M_1 T_1}{M_2 T_2}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{c}{C}}\right]\right\}.$$

Równanie to pozwala nam wyznaczyć wagę M gazu, który przeszedł z balonu A do balonu B.

Mamy zawsze

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2}$$

i

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{V_1 v_2}{V_2 v_1}$$

ztąd wypada

$$\frac{M_1 T_1}{M_2 T_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}. \tag{α}$$

Jeżeli podstawimy równość (α) w równanie poprzednio otrzymane, będziemy mieć.

$$\left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{c}{C}}\left(p_1 + p_1\frac{V_1}{V_2}\right) = p_2\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\frac{V_1}{V_2}\right),$$

a ztąd

$$M = M_1\left\{1 - \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1(V_1 + V_2)}\right]^{\frac{C}{c}}\right\} \tag{10}$$

i równanie (7) stanie się następującém

$$\frac{T'_1}{T} = \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1(V_1 + V_2)}\right]^{\frac{C - c}{C}}. \tag{11}$$

Jeżeli gaz zawarty w balonie A nie przechodzi do balonu lecz udaje się prosto w atmosferę, należy założyć $V_2 = \infty$ i $M_2 = \infty$.

Na mocy czego równania (10) i (11) stają się

$$M = M_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{c}{C}}\right]. \tag{12}$$

$$\frac{T'_1}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{C - c}{C}} \tag{13}$$

i równanie (8) sprowadza się do

$$T'_2 = T_2.$$

2gi Przykład liczebny. — Założmy że objętość V_1 balonu A jest równa 1 metrowi sześciennemu adto uczyńmy

$$t_1 = 30^0,$$
$$p_1 = 5 \text{ atmosfer.}$$

Waga M_1 gazu jest równą $5^{\text{kil.}}$,8256.

Wypływ przestanie mieć miejsce skoro p_1 stanie się równém jednéj atmosferze; wtedy mamy

$$M - M_1\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{c}{C}}\right] = 3{,}9652 \text{ kilogr.}$$

$$T'_1 = 190^0 \quad \text{zkąd} \quad t'_1 = -83^0.$$

Tak więc wypływ gazu połączonym jest z znacznym spadkiem temperatury.

Badanie analityczne prawa p. Joule'a. — P. Joule badał zjawiska nader złożone przy wypływie gazu z balonu A téj saméj objętości co i B, lecz zupełnie pustego do balonu B. Skoro kurek rury łączącéj dwa balony A i B zostanie otwartym, gaz przechodzi do balonu pustego B; objętość jego podwaja się a ciśnienie spada na połowę lecz ciepłomierz (calorimètre) w którym balony są pogrążone nie wskazuje żadnéj zmiany w temperaturze. Ponieważ żadna praca zewnętrzna nie została wykonaną, a zatém równanie zasadnicze

$$EQ = \Delta U + S$$

staje się na mocy $S = 0$, $Q = 0$

$$\Delta U = 0.$$

Tak więc dzielność wewnętrzna gazu pozostała stałą pomimo tego, iż objętość gazu została zdwojoną; co dowodzi że dzielność wewnętrzna gazu jest wyłącznie funkcyą temperatury $U = f(t)$.

W drugiém doświadczeniu p. Joule rozdzielił balony A i B; pogrążył je w dwóch odrębnych ciepłomierzach i skoro kurek rury łączącéj balony został otwartym, ciepłomierz balonu A napełnionego gazem oziębił się, ciepłomierz zaś balonu B nagrzał się.

Ażeby udowodnić analitycznie drugie doświadczenie p. Joule'a należy założyć we wzorach poprzednio otrzymanych

$$p_2 = 0, \qquad M_2 = 0, \qquad T_1 = T_2.$$

Równanie (10) staje

$$M = M_1\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{c}{C}}\right] \tag{14}$$

zkąd wypada

$$\frac{M_1 - M}{M_1} = \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{c}{C}}$$

i równania (6) (7) i (8) przybierają kształt

(15) $$p'_1 = p'_2 = p_1 \left(\frac{M_1 - M}{M}\right)^{\frac{c}{c}} = p_1 \frac{V_1}{V_1 + V_2},$$

(16) $$T'_1 = T_1 \left(\frac{M_1 - M}{M}\right)^{\frac{C-c}{C}} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{C-c}{C}},$$

(17) $$T'_2 = T_1 \frac{M_1}{M}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right] = T_1 \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)}{1 - \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{c}{C}}}.$$

Widzimy więc że temperatura krańcowa T'_1 w balonie A jest mniejszą od temperatury T_1 na początku; temperatura zaś krańcowa T'_2 balonu B jest większą jak na początku.

Zastosujmy jeszcze poprzednie wzory do przypadku gdy balon B jest najprzód pustym a potém wlatuje doń atmosfera. Należy zatém założyć, iż $V_1 = \infty$ i $M_1 = \infty$.

Równania (15) i (16) sprowadzają się do kształtu $p'_1 = p'_2 - p_1$; $T'_1 = T_1$.

Rezultat ten daje się z łatwością przewidzieć à priori.

Ażeby możebném było wprowadzić poprzednie założenia do równania (14), trzeba je najprzód przekształcić.

Mamy $v_1 = \frac{V_1}{M_1}$ i $M_1 = \frac{V_1}{v_1}$. Na mocy tego, równanie (14) staje się

$$M = \frac{V_1}{v_1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{c}{C}}\right] = \frac{V_1}{v_1}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c}{C}}}\right] = \frac{V_1}{v_1}\left[1 - \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{c}{C}}\right];$$

rozwijając to wyrażenie na szereg, otrzymujemy

$$M = \frac{V_1}{v_1}\left[\frac{c}{C}\frac{V_2}{V_1} + B\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + \ldots\ldots\right].$$

Objętość V_1 jest nieskończenie wielką a zatém cały nawias sprowadza się do pierwszego wyrazu

(18) $$M = \frac{V_1}{v_1}\left[\frac{c}{C}\frac{V_2}{V_1}\right] = \frac{V_2}{v_1} \times \frac{c}{C}.$$

Równanie (17) przedstawione w kształcie

$$T'_2 = \frac{M_1 T_1}{M}\left[1 - \left(1 - \frac{M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right]$$

i rozwinięte na szereg

$$T'_2 = \frac{M_1 T_1}{M}\left[\frac{C}{c}\frac{M}{M_1} + B'\left(\frac{M}{M_1}\right)^2 \ldots\right],$$

sprowadza się do kształtu

(19) $$T'_2 = \frac{C}{c} T_1 \;;\; \text{gdyż } M_1 = \infty.$$

Ściśnienie lub rozprężenie gazu doskonałego podług linii równéj temperatury.

Gaz doskonały rozpręża się podług prawa Mariotte'a

$$V = V_0 \frac{P_0}{P} \quad P = P_0 \frac{V_0}{V},$$

jeżeli temperatura pozostaje niezmienną; podczas téj zmiany wykonywa się praca zewnętrzna mająca za wartość

$$\pm \int P dV = \pm P_0 V_0 \int \frac{dV}{V} = P_0 V_0 \log\left(\frac{V}{V_0}\right) = S.$$

Praca ta staje się przyczyną spadku lub wzrostu temperatury, stosownie do tego czy objętość gazu wzrasta lub maleje; ażeby utrzymać temperaturę stałą, należy dodać lub ująć pewną ilość ciepła, a ponieważ cieplik gatunkowy c jest ilością stałą, ilość więc ciepła, którą trzeba dodać lub ująć jest proporcyonalną do pracy zewnętrznéj.

$$\pm Q = AP_0 V_0 \log\left(\frac{V}{V_0}\right) = AP_0 V_0 \log\left(\frac{P_0}{P}\right).$$

Jeżeli dla uproszczenia założymy iż waga gazu badanego jest jeden kilogram, będzie

$$V_0 = \frac{1}{\rho},$$

gdzie ρ jest gęstością gatunkową przy ciśnieniu P_0 i temperaturze T_0; P_0 jest równe 1ej atmosferze; $T_0 = 272{,}85$ stopni (zero termometrów); będziemy mieli

$$Q = \frac{0{,}089107}{\rho} \log\left(\frac{P_0}{P}\right) = \frac{0{,}089107}{\rho} \log\left(\frac{V}{V_0}\right).$$

Ztąd możemy wnosić, iż dla tego samego gazu, ilość ciepła którą trzeba dodać aby utrzymać temperaturę niezmienną, jest proporcyonalną do temperatury bezwzględnéj i logarytmu Nepera stosunków $\frac{V}{V_0}$ lub $\frac{P_0}{P}$.

Ściśnienie lub rozprężenie gazu podług adyabatycznej. — Cieplik gatunkowy c jest ilością stałą, praca zewnętrzna połączona jest z ubytkiem lub wzrostem ilości ciepła gazu. Oznaczając przez M wagę gazu badanego, mamy

$$dQ' = \mp McdT,$$

lecz zkądinąd

$$dQ = \pm AP_0 V_0 \frac{T}{T_0} \frac{dV}{V},$$

a ponieważ $dQ_1 = dQ$ a zatém

$$-McdT = +\frac{AP_0 V_0}{T_0} \frac{T}{V} dV,$$

lub całkując pomiędzy granicami

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V \end{Bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{Bmatrix} T_1 \\ T \end{Bmatrix}$$

wypada

$$Mc\log\left(\frac{T}{T_1}\right)=\frac{AP_0V_0}{T_0}\log\left(\frac{V_1}{V}\right),$$

lecz zawsze zachodzi związek

$$M=V_0\rho$$

zkąd

$$\rho c\log\left(\frac{T}{T_1}\right)=\frac{AP_0}{T_0}\log\left(\frac{V_1}{V}\right),$$

ponieważ P_0 jest równe 1ej atmosferze = 10333 kilogramów i $T_0=272^0,85$ (zero termometrów), a zatém

$$\log\left(\frac{T}{T_1}\right)=\frac{0{,}089107}{c\rho}\log\left(\frac{V_1}{V}\right)$$

lub

$$T=T_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\frac{0{,}089107}{\rho c}}$$

Stosunek $\frac{V_1}{V}$ daje się z łatwością zastąpić przez stosunek ciśnień $\frac{P}{P_1}$.

W samćj rzeczy na mocy prawa Gay-Lussac'a mamy

$$P=\frac{P_1V_1}{T_1}\times\frac{T}{V},$$

zkąd

$$\frac{V_1}{V}=\frac{P\,.\,T_1}{P_1\,.\,T}.$$

Podstawiając ostatnią wartość stosunku $\frac{V_1}{V}$ w równaniu poprzedniém otrzymujemy

$$T=T_1\left[\left(\frac{P}{P_1}\right)\left(\frac{T_1}{T}\right)\right]^{\frac{0{,}089107}{\rho c}}$$

$$T^{\frac{1+0{,}089107}{c}}=T_1^{\left(\frac{1+0{,}089107}{\rho c}\right)}\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\left(\frac{1+0{,}089107}{\rho c}\right)}$$

a w skutek tego

(α) $$T=T_1\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{0{,}089107}{\rho c\left(1+\frac{0{,}089107}{\rho c}\right)}}.$$

Wartość wykładnika wyraża się algebraicznie przez

$$\frac{AP_0}{\rho cT_0(1+AP_0:\rho cT_0)}.$$

Równanie (α) daje się z łatwością przedstawić w innym kształcie. W samej rzeczy

$$c = C - \frac{AP_0}{\rho T_0}$$

zkąd

$$C - c = \frac{AP_0}{\rho T_0},$$

a zatém

$$\frac{AP_0}{cT_0(1 + AP_0 : \rho c T_0)} = \frac{C - c}{c\left(1 + \frac{C - c}{c}\right)} = \frac{C - c}{C}.$$

Równanie (α) staje się w skutek tego następującém

$$T = T_1 \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{C-c}{C}} = T_1 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{C-c}{C}}$$

lub ponieważ

$$T = a + t = 1 + \alpha t = \frac{1}{\alpha} + t,$$

$$t = \left(\frac{1}{\alpha} + t_1\right)\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{C-c}{C}} - \frac{1}{\alpha}.$$

Sciśnienie lub rozprężenie gazu z ubytkiem lub wzrostem temperatury. — Jeżeli oznaczymy przez dQ ilość ciepła dodanego lub ujętego w czasie zmiany objętości dv i temperatury dT, będziemy mieć następujący związek

$$\pm dQ = c dT + \left(\frac{AP_0 V_0}{T_0}\right) T \frac{dV}{V}$$

lub

$$\pm dQ = c dT + \frac{0{,}089107}{\rho} \frac{T}{V} dV.$$

Nadto mamy

$$V = V_0 \frac{P_0}{P} \cdot \frac{T}{T_0},$$

zkąd

$$dV = \frac{P_0 T_0}{T_0}\left(\frac{dT}{P} - T \frac{dP}{P^2}\right),$$

lub dzieląc przez wartość V

$$\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P}.$$

Podstawiając tę ostatnią wartość w równanie ogólne otrzymujemy

$$dQ = c dT + \frac{AP_0 V_0}{T_0} dT - \frac{AP_0 V_0}{T_0} \frac{dP}{p};$$

lecz zachodzi związek

$$c + \frac{AP_0V_0}{T_0} = C,$$

a zatém

$$dQ = CdT - \frac{AP_0V_0}{T_0} \cdot \frac{dP}{P}$$

lub

$$dQ = CdT - \frac{0,089107}{\rho} \cdot \frac{dP}{P}.$$

TABLICE

Tablica 1sza

Prężność pary wodnéj dana w millimetrach od 0° do + 30°,9 ułożona podług wzorów p. Regnault.

Tem.	Prężn.	Tem.	Prężn.	Tem.	Prężn.	Tem.	Prężn.	Tem.	Prężn.	Tem.	Prężn.	Tem.	Prężn.	Tem.	Prężn.	Tem.	Prężn.
stop.	millim	stop.	millim	stop.	millim.	stop.	millim.	stop.	millim.	stop.	millim.	stop.	millim.	stop.	millim.	stop.	millim.
0,0	4,600	3,5	5,889	7,0	7,492	10,5	9,474	14,0	11,906	17,5	14,882	21,0	18,495	24,5	22,858	28,0	28,101
0.1	4,633	3,6	5,930	7,1	7,544	10,6	9,537	14,1	11,988	17,6	14,977	21,1	18,610	24,6	22,996	28,1	28,267
0,2	4,667	3,7	5,972	7,2	7,595	10,7	9,601	14,2	12,064	17,7	15,072	21,2	18,724	24,7	23,135	28,2	28,433
0,3	4,700	3,8	6,014	7 3	7,647	10,8	9,665	14,3	12,142	17,8	15,167	21,3	18,839	24,8	23,273	28,3	28,599
0,4	4,733	3,9	6,055	7,4	7,699	10,9	9,728	14,4	12,220	17,9	15,262	21,4	18,954	24,9	23,411	28,4	28,765
0,5	4,767	4,0	6,097	7,5	7,751	11,0	9,792	14,5	12,298	18,0	15,357	21,5	19,069	25,0	23,550	28,5	28,931
0,6	4,801	4,1	6,140	7,6	7,804	11,1	9,857	14,6	12,378	18,1	15,454	21,6	19,187	25,1	23,692	28,6	29,101
0,7	4,836	4,2	6,183	7,7	7,857	11,2	9,923	14,7	12,458	18,2	15,552	21,7	19,305	25,2	23,834	28,7	29,271
0,8	4,871	4,3	6,226	7,8	7,910	11,3	9,989	14,8	12,538	18,3	15,650	21,8	19,423	25,3	23,976	28,8	29,441
0,9	4,905	4,4	6,270	7,9	7,964	11,4	10,054	14,9	12,619	18,4	15,747	21,9	19,541	25,4	24,119	28,9	92,612
1,0	4,940	4,5	6,313	8,0	8,017	11,5	10,120	15,0	12,699	18,5	15,845	22,0	19,659	25,5	24,261	29,0	29,782
1,1	4,975	4,6	6,357	8,1	8,072	11,6	10,187	15,1	12,781	18,6	15,945	22,1	19,780	25,6	24,406	29,1	29,956
1,2	5,011	4,7	6,401	8,2	8,126	11,7	10,255	15,2	12,864	18,7	16,045	22,2	19,901	25,7	24,552	29,2	30,131
1,3	5,047	4,8	6,445	8,3	8,181	11,8	10,322	15,3	12,947	18,8	16,145	22,3	20,022	25,8	24,697	29,3	30,315
1,4	5,082	4,9	6,490	8,4	8,236	11,9	10,389	15,4	13,029	18,9	16,246	22,4	20,143	25,9	24,842	29,4	30,479
1,5	5,118	5,0	6,534	8,5	8,291	12,0	10,457	15,5	13,112	19,0	16,346	22,5	20,265	26,0	24,988	29,5	30,654
1,6	5,155	5,1	6,580	8,6	8,347	12,1	10,526	15,6	13,197	19,1	16,449	22,6	20,389	26,1	25,138	29,6	30,833
1,7	5,191	5,2	6,625	8,7	8,404	12,2	10,596	15,7	13,281	19,2	16,552	22,7	20,514	26,2	25,288	29,7	31,011
1,8	5,228	5,3	6,671	8,8	8,461	12,3	10,665	15,8	13,366	19,3	16,655	22,8	20,639	26,3	25,438	29,8	31,190
1,9	5,265	5,4	6,717	8,9	8,517	12,4	10,734	15,9	13,451	19,4	16,758	22,9	20,763	26,4	25,588	29,9	31,369
2,0	5,302	5,5	6,763	9,0	8,574	12,5	10,804	16,0	13,536	19,5	16,861	23,0	20,888	26,5	25,738	30,0	31,548
2,1	5,340	5,6	6,810	9,1	8,632	12,6	10,875	16,1	13,623	19,6	16,967	23,1	21,016	26,6	25,891	30,1	31,729
2,2	5,378	5,7	6,857	9,2	8,690	12,7	10,947	16,2	13,710	19,7	17,073	23,2	21,144	26,7	26,045	30,2	31,911
2,3	5,416	5,8	6,904	9,3	8,748	12,8	11,019	16,3	13,797	19,8	17,179	23,3	21,272	26,8	26,198	30,3	32,094
2,4	5,454	5,9	6,951	9,4	8,807	12,9	11,090	16,4	13,885	19,9	17,285	23,4	21,400	26,9	26,351	30,4	32,278
2,5	5,491	6,0	6,998	9,5	8,865	13,0	11,162	16,5	13,972	20,0	17,391	23,5	21,528	27,0	26,505	30,5	32,463
2,6	5,530	6,1	7,047	9,6	8,925	13,1	11,235	16,6	14,062	20,1	17,500	23,6	21,659	27,1	26,663	30,6	32,650
2,7	5,569	6,2	7,095	9,7	8,985	13,2	11,309	16,7	14,151	20,2	17,608	23,7	21,790	27,2	26,820	30,7	32,837
2,8	5,608	6,3	7,144	9,8	9,045	13,3	11,383	16,8	14,241	20,3	17,171	23,8	21,921	27,3	26,978	30,8	33,026
2,9	5,647	6,4	7,193	9,9	9,105	13,4	11,456	16,9	14,331	20,4	17,826	23,9	22,053	27,4	27,136	30,9	33,215
3,0	5,687	6,5	7,242	10,0	9,165	13,5	11,530	17,0	14,421	20,5	17,935	24,0	22,184	27,5	27,294		
3,1	5,727	6,6	7,292	10,1	9,227	13,6	11,605	17,1	14,513	20,6	18,047	24,1	22,319	27,6	27,455		
3,2	5,767	6,7	7,342	10,2	9,288	13,7	11,681	17,2	14,605	20,7	18,159	24,2	22,453	27,7	27,617		
3,3	5,807	6,8	7,392	10,3	9,350	13,8	11,757	17,3	14,697	20,8	18,271	24,3	22,588	27,8	27,778		
3,4	5,848	6,9	7,442	10,4	9,412	13,9	11,832	17,4	14,790	20,9	18,383	24,4	22,723	27,9	27,939		

Tablica 2.

Wartość w millimetrach wysokości burometru przy 0°

WYSOKOŚĆ	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.
5	0,00085	0,00171	0,00256	0,00342	0,00428	0,00513	0,00599	0,00684	0,00770
10	0,00171	0,00342	0,00513	0,00684	0,00856	0,01027	0,01198	0,01369	0,01540
15	0,00256	0,00513	0,00769	0,01026	0,01284	0,01540	0,01797	0,02053	0,02310
20	0,00342	0,00684	0,01029	0,01368	0,01712	0,02054	0,02396	0,02738	0,03080
25	0,00427	0,00855	0,01283	0,01710	0,02139	0,02567	0,02995	0,03422	0,03850
30	0,00513	0,01026	0,01540	0,02052	0,02567	0,03080	0,03593	0,04107	0,04620
35	0,00598	0,01197	0,01797	0,02394	0,02995	0,03594	0,04192	0,04791	0,05390
40	0,00684	0,01368	0,02053	0,02736	0,03423	0,04107	0,04791	0,05476	0,06160
45	0,00769	0,01539	0,02310	0,03078	0,03850	0,04620	0,05390	0,06160	0,06930
50	0,00855	0,01711	0,02567	0,03422	0,04278	0,05133	0,05989	0,06844	0,07700
55	0,00940	0,01882	0,02824	0,03764	0,04706	0,05646	0,06588	0,07528	0,08470
60	0,01026	0,02053	0,03080	0,04106	0,05134	0,06160	0,07187	0,08212	0,09240
65	0,01111	0,02224	0,03337	0,04449	0,05562	0,06673	0,07786	0,08897	0,10010
70	0,01197	0,02395	0,03593	0,04791	0,05990	0,07187	0,08385	0,09582	0,10780
75	0,01282	0,02567	0,03850	0,05153	0,06417	0,07700	0,08983	0,10266	0,11550
80	0,01368	0,02738	0,04106	0,05476	0,06845	0,08213	0,09582	0,10951	0,12320
85	0,01453	0,02909	0,04363	0,05818	0,07273	0,08727	0,10181	0,11635	0,13090
90	0,01539	0,03080	0,04619	0,06160	0,07701	0,09240	0,10780	0,12320	0,13860
95	0,01625	0,03251	0,04876	0,06502	0,08129	0,09753	0,11378	0,13004	0,14630
100	0,01711	0,03422	0,05133	0,06844	0,08555	0,10266	0,11977	0,13688	0,15399
105	0,01796	0,03593	0,05390	0,07166	0,08983	0,10779	0,12576	0,14372	0,16169
110	0,01882	0,03764	0,05646	0,07528	0,09411	0,11293	0,13175	0,15057	0,16939
115	0,01967	0,03935	0,05903	0,07871	0,09839	0,11806	0,13774	0,15741	0,17709
120	0,02053	0,04106	0,06160	0,08213	0,10266	0,12320	0,14372	0,16426	0,18479
125	0,02138	0,04278	0,06416	0,08555	0,10694	0,12833	0,14971	0,17110	0,19248
130	0,02224	0,04449	0,06673	0,08898	0,11122	0,13346	0,15570	0,17795	0,20018
135	0,02309	0,04620	0,06929	0,09240	0,11549	0,13860	0,16169	0,18479	0,20788
140	0,02395	0,04791	0,07186	0,09582	0,11977	0,14374	0,16767	0,19164	0,21558
145	0,02480	0,04962	0,07442	0,09924	0,12405	0,14887	0,17366	0,19848	0,22328
150	0,02566	0,05133	0,07699	0,10266	0,12832	0,15399	0,17965	0,20532	0,23098
155	0,02658	0,05304	0,07956	0,10608	0,13260	0,15912	0,18564	0,21216	0,23868
160	0,02737	0,05475	0,08212	0,10950	0,13688	0,16426	0,19163	0,21901	0,24638
165	0,02822	0,05646	0,08469	0,11293	0,14116	0,16939	0,19762	0,22585	0,25408
170	0,02908	0,05817	0,08726	0,11635	0,14543	0,17453	0,20361	0,23270	0,26178
175	0,02994	0,05989	0,08982	0,11977	0,14971	0,17966	0,20959	0,23954	0,26948
180	0,03079	0,06160	0,09239	0,12320	0,15399	0,18479	0,21553	0,24639	0,27718
185	0,03165	0,06331	0,09495	0,12662	0,15827	0,18993	0,22157	0,25323	0,28488
190	0,03250	0,06502	0,09752	0,13004	0,16254	0,19506	0,22756	0,26008	0,29258
195	0,03336	0,06673	0,10008	0,13346	0,16682	0,20019	0,23355	0,26692	0,30028
200	0,03422	0,06844	0,10266	0,13688	0,17110	0,20532	0,23954	0,27376	0,30798
205	0,03507	0,07015	0,10523	0,14030	0,17538	0,21045	0,24553	0,28060	0,31568
210	0,03593	0,07186	0,10779	0,14372	0,17966	0,21559	0,25152	0,28745	0,32338
215	0,03678	0,07357	0,11036	0,14715	0,18394	0,22072	0,25751	0,29429	0,33108
220	0,03764	0,07528	0,11293	0,15057	0,18821	0,22586	0,26349	0,30114	0,33878
225	0,03849	0,07700	0,11549	0,15399	0,19249	0,23099	0,26948	0,30798	0,34647
230	0,03935	0,07871	0,11805	0,15742	0,19677	0,23612	0,27547	0,31483	0,35417
235	0,04020	0,08042	0,12062	0,16084	0,20105	0,24126	0,28145	0,32167	0,36187
240	0,04106	0,08213	0,12318	0,16426	0,20532	0,24639	0,28744	0,32852	0,36957
245	0,04191	0,08384	0,12575	0,16768	0,20960	0,25152	0,29343	0,33536	0,37727
250	0,04277	0,08555	0,12832	0,17110	0,21387	0,25665	0,29942	0,34220	0,38497
255	0,04362	0,08756	0,13089	0,17452	0,21815	0,26178	0,30541	0,34904	0,39267
260	0,04448	0,08897	0,13345	0,17794	0,22243	0,26692.	0,31140	0,35589	0,40037
265	0,04534	0,09068	0,13601	0,18137	0,22671	0,27205	0,31739	0,36273	0,40807
270	0,04619	0,09239	0,13858	0,18479	0,23098	0,27719	0,32338	0,36958	0,41577
275	0,04705	0,09411	0,14115	0,18821	0,23526	0,28232	0,32936	0,37642	0,42347
280	0,04790	0,09582	0,14371	0,19164	0,23954	0,28745	0,33535	0,38327	0,43117
285	0,04876	0,09753	0,14628	0,19506	0,24381	0,29259	0,34134	0,39011	0,43887
290	0,04961	0,09924	0,14884	0,19848	0,24809	0,29772	0,34733	0,39696	0,44657
295	0,05047	0,10095	0,15141	0,20190	0,25237	0,30285	0,35332	0,40380	0,45427
300	0,05133	0,10266	0,15399	0,20532	0,25655	0,30798	0,35931	0,41064	0,46197

Tablica 2 (ciąg dalszy).

WYSOKOŚĆ	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.
305	0,05218	0,10437	0,15656	0,20874	0,26093	0,31311	0,36530	0,41748	0,46967
310	0,05304	0,10608	0,15912	0,21216	0,26521	0,31825	0,37129	0,42433	0,47737
315	0,05389	0,10779	0,16169	0,21559	0,26949	0,32338	0,37728	0,43117	0,48507
320	0,05475	0,10951	0,16426	0,21901	0,27376	0,32852	0,38326	0,43802	0,49276
325	0,05560	0,11122	0,16682	0,22243	0,27804	0,33365	0,38925	0,44486	0,50046
330	0,05646	0,11293	0,16939	0,22586	0,28232	0,33878	0,39524	0,45171	0,50816
335	0,05731	0,11464	0,17195	0,22928	0,28659	0,34392	0,40122	0,45855	0,51586
340	0,05817	0,11635	0,17452	0,23270	0,29087	0,34905	0,40721	0,46540	0,52356
345	0,05902	0,11806	0,17708	0,23612	0,29515	0,35418	0,41320	0,47224	0,53126
350	0,05988	0,11977	0,17965	0,23954	0,29942	0,35931	0,41919	0,47908	0,53896
355	0,06074	0,12148	0,18222	0,24296	0,30370	0,36444	0,42518	0,48592	0,54666
360	0,06159	0,12319	0,18478	0,24638	0,30798	0,36958	0,43118	0,49277	0,55436
365	0,06245	0,12490	0,18735	0,24981	0,31226	0,37471	0,43716	0,49961	0,56206
370	0,06330	0,12662	0,18992	0,25323	0,31653	0,37985	0,44315	0,50646	0,56976
375	0,06416	0,12833	0,19248	0,25665	0,32081	0,38498	0,44913	0,51330	0,57746
380	0,06501	0,13004	0,19505	0,26008	0,32509	0,39011	0,45513	0,52015	0,58516
385	0,06587	0,13175	0,19761	0,26350	0,32937	0,39525	0,46111	0,52699	0,59286
390	0,06672	0,13346	0,20018	0,26692	0,33364	0,40038	0,46710	0,53384	0,60056
395	0,06758	0,13517	0,20274	0,27034	0,33792	0,40552	0,47309	0,54068	0,60826
400	0,06844	0,13688	0,20532	0,27376	0,34220	0,41064	0,47908	0,54752	0,61596
405	0,06929	0,13859	0,20789	0,27718	0,34648	0,41577	0,48507	0,55436	0,62366
410	0,07015	0,14039	0,21045	0,28060	0,35076	0,42091	0,49106	0,56821	0,63136
415	0,07100	0,14201	0,21302	0,28403	0,35504	0,42604	0,49705	0,56805	0,63906
420	0,07186	0,14373	0,21559	0,28745	0,35931	0,43118	0,50303	0,57490	0,64675
425	0,07271	0,14544	0,21815	0,29087	0,36359	0,43631	0,50902	0,58174	0,65445
430	0,07357	0,14715	0,22072	0,29430	0,36787	0,44144	0,51501	0,58859	0,66215
435	0,07442	0,14886	0,22328	0,29772	0,37215	0,44658	0,52099	0,59543	0,66985
440	0,07528	0,15057	0,22585	0,30114	0,37642	0,45171	0,52698	0,60228	0,67755
445	0,07613	0,15228	0,22341	0,30456	0,38070	0,45684	0,53297	0,60912	0,68525
450	0,07699	0,15399	0,23098	0,30798	0,38497	0,46197	0,53896	0,61596	0,69295
455	0,07785	0,15570	0,23355	0,31140	0,38925	0,46710	0,54495	0,62280	0,70065
460	0,07870	0,15741	0,23612	0,31482	0,39353	0,47224	0,55094	0,62965	0,70835
465	0,07956	0,15912	0,23868	0,31825	0,39781	0,47737	0,55693	0,63649	0,71605
470	0,08041	0,16084	0,24125	0,32167	0,40208	0,48251	0,56292	0,64334	0,72375
475	0,08127	0,16255	0,24382	0,32509	0,40636	0,48764	0,56890	0,65018	0,73145
480	0,08212	0,16426	0,24638	0,32852	0,41064	0,49277	0,57489	0,65703	0,73915
485	0,08298	0,16597	0,24895	0,33194	0,41491	0,49791	0,58088	0,66387	0,74685
490	0,08383	0,16768	0,25151	0,33536	0,41919	0,50304	0,58687	0,67072	0,75455
495	0,08469	0,16939	0,25408	0,33878	0,42347	0,50817	0,59286	0,67756	0,76225
500	0,08555	0,17110	0,25665	0,34220	0,42775	0,51330	0,59885	0,68440	0,76995
505	0,08640	0,17281	0,25922	0,34562	0,43203	0,51843	0,60484	0,69124	0,77765
510	0,08726	0,17452	0,26178	0,34904	0,43631	0,52357	0,61083	0,69809	0,78535
515	0,08811	0,17623	0,26435	0,35247	0,44095	0,52870	0,61682	0,70493	0,79305
520	0,08897	0,17795	0,26692	0,35589	0,44486	0,53384	0,62280	0,71178	0,80074
525	0,08982	0,17966	0,26948	0,35931	0,44914	0,53897	0,62879	0,71862	0,80844
530	0,09068	0,18137	0,27205	0,36274	0,45342	0,54410	0,63478	0,72547	0,81614
535	0,09153	0,18303	0,27461	0,36616	0,45769	0,54924	0,64076	0,73231	0,82384
540	0,09239	0,18479	0,27718	0,36958	0,46197	0,55437	0,64675	0,73916	0,83154
545	0,09324	0,18650	0,27974	0,37300	0,46625	0,55950	0,65274	0,74600	0,83924
550	0,09410	0,18821	0,28231	0,37642	0,47052	0,56463	0,65873	0,75284	0,84694
555	0,09496	0,18992	0,28488	0,37984	0,47480	0,56976	0,66472	0,75968	0,85464
560	0,09581	0,19163	0,28745	0,38326	0,47908	0,57490	0,67071	0,76653	0,86234
565	0,09667	0,19334	0,29001	0,38669	0,48336	0,58003	0,67670	0,77337	0,87004
570	0,09752	0,19506	0,29258	0,39011	0,48763	0,58517	0,68269	0,78022	0,87774
575	0,09838	0,19677	0,29514	0,39353	0,49191	0,59030	0,68867	0,78706	0,88544
580	0,09923	0,19848	0,29771	0,39696	0,49619	0,59543	0,69466	0,79391	0,89314
585	0,10009	0,20019	0,30027	0,40038	0,50047	0,60057	0,70065	0,80075	0,90084
590	0,10094	0,20190	0,30284	0,40380	0,50474	0,60570	0,70664	0,80760	0,90854
595	0,10180	0,20361	0,30540	0,40722	0,50962	0,61083	0,71263	0,81444	0,91624
600	0,10266	0,20532	0,30798	0,41064	0,51330	0,61596	0,71862	0,82128	0,92394

Tablica 2 (ciąg dalszy i koniec).

WYSOKOŚĆ	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.	Millimetry.
605	0,10351	0,20703	0,31055	0,41406	0,51758	0,62109	0,72461	0,82812	0,93164
610	0,10437	0,20874	0,31311	0,41748	0,52186	0,62623	0,73060	0,83497	0,93934
615	0,10522	0,21045	0,31568	0,42091	0,52614	0,63136	0,73659	0,84181	0,94704
620	0,10608	0,21217	0,31825	0,42433	0,53041	0,63650	0,74257	0,84866	0,95474
625	0,10693	0,21388	0,32081	0,42775	0,53469	0,64163	0,74856	0,85550	0,96243
630	0,10779	0,21559	0,32337	0,43118	0,53897	0,64676	0,75455	0,86235	0,97013
635	0,10864	0,21730	0,32594	0,43460	0,54324	0,65190	0,76053	0,86019	0,97783
640	0,10950	0,21901	0,32850	0,43802	0,54752	0,65703	0,76652	0,87604	0,98553
645	0,11035	0,22072	0,33107	0,44144	0,55180	0,66216	0,77251	0,88288	0,99323
650	0,11121	0,22243	0,33364	0,44486	0,55607	0,66729	0,77850	0,88972	1,00093
655	0,11207	0,22414	0,33621	0,44828	0,56035	0,67242	0,78449	0,89656	1,00863
660	0,11292	0,22585	0,33877	0,45170	0,56463	0,67756	0,79048	0,90341	1,01633
665	0,11378	0,22756	0,34134	0,45513	0,56891	0,68269	0,79647	0,91025	1,02403
670	0,11463	0,22928	0,34391	0,45855	0,57318	0,68783	0,80246	0,91710	1,03173
675	0,11549	0,23099	0,34647	0,46197	0,57746	0,69296	0,80844	0,92394	1,03943
680	0,11634	0,23270	0,34904	0,45540	0,58174	0,69803	0,81443	0,93079	1,04713
685	0,11730	0,23441	0,35160	0,46882	0,58602	0,70326	0,82042	0,93763	1,05483
690	0,11805	0,23612	0,35417	0,47224	0,59029	0,70839	0,82641	0,94448	1,06253
695	0,11891	0,23783	0,35673	0,47566	0,59457	0,71349	0,83240	0,95132	1,07023
700	0,11977	0,33931	0,35931	0,47908	0,59885	0,71862	0,83839	0,95816	1,07793
705	0,12062	0,24125	0,36188	0,48250	0,60313	0,72375	0,84438	0,96500	1,08563
710	0,12148	0,24296	0,36444	0,48502	0,60741	0,72889	0,85037	0,97185	1,09333
715	0,12233	0,24467	0,36701	0,40935	0,61169	0,73402	0,85636	0,97869	1,10103
720	0,12319	0,24639	0,36958	0,49277	0,61596	0,73916	0,86234	0,98554	1,10873
725	0,12404	0,24810	0,37214	0,49619	0,62024	0,74429	0,86633	0,99238	1,11642
730	0,12490	0,24981	0,37471	0,49962	0,62452	0,74942	0,87432	0,99923	1,12412
735	0,12575	0,25152	0,37727	0,50304	0,62880	0,75456	0,88030	1,00607	1,13182
740	0,12661	0,25323	0,37984	0,50646	0,63307	0,75969	0,88629	1,01292	1,13952
745	0,12746	0,25494	0,38340	0,50988	0,63735	0,76482	0,89228	1,01976	1,13722
750	9,12832	0,25665	0,38497	0,51330	0,64162	0,76995	0,89827	1,02660	1,15492
755	0,12918	0,25836	0,38754	0,51672	0,64590	0,77508	0,90426	1,03344	1,16262
760	0,13003	0,26007	0,39011	0,52014	0,65018	0,78022	0,91025	1,04020	1,17032
765	0,13089	0,26178	0,39267	0,52357	0,65446	0,78535	0,91624	1,04713	1,17802
770	0,13174	0,26350	0,39524	0,52699	0,65873	0,79049	0,92223	1,05398	1,18572
775	0,13260	0,26521	0,39781	0,53041	0,66301	0,79562	0,92821	1,06082	1,19342
780	0,13345	0,26692	0,40037	0,53383	0,66729	0,80075	0,93420	1,06767	1,20112
785	0,13431	0,26863	0,40294	0,53725	0,67157	0,80589	0,94019	1,07454	1,20882
790	0,13516	0,27034	0,40550	0,54067	0,67584	0,81102	0,94618	1,08136	1,21652
795	0,13602	0,27205	0,40707	0,54409	0,68012	0,81615	0,95217	1,08820	1,22422
800	0,13688	0,27376	0,41064	0,54752	0,68440	0,82128	0,95816	1,09504	1,23192

PRZYKŁAD. — Niech będzie do sprowadzenia do 0° wysokość barometru równa 557^{mm}, znaleziona przy temperaturze 17°,4.

Szukamy w pierwszéj kolumnie liczby najbardziéj zbliżonéj do 557, liczba ta jest równa 555. Wprowadzamy następujące poprawki :

Dla 10°(10 × 1)	mamy	0,9496,
7°	. . . . .	0,6647,
0°,4	. . . . .	0,0380,
	Razem	1,6523.

Tablica 3.

Wartość stosunku $\dfrac{1}{(1+\alpha t)0{,}760}$ *od* 0° *do* 35°.

Temperatura. 1°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1,31578	1,31530	1,31482	1,31434	1,31386	1,31337	1,31289	1,31241	1,31193	1,31145
1	1,31097	1,31049	1,31002	1,30954	1,30906	1,30858	1,30810	1,30763	1,30715	1,30667
2	1,30620	1,30572	1,30525	1,30477	1,30430	1,30382	1,30335	1,30287	1,30240	1,30193
3	1,30146	1,30098	1,30051	1,30004	1,29957	1,29910	1,29863	1,29816	1,29769	1,29722
4	1,29675	1,29628	1,29581	1,29534	1,29487	1,29441	1,29394	1,29347	1,29301	1,29254
5	1,29207	1,29161	1,29114	1,29068	1,29021	1,28975	1,28929	1,28882	1,28836	1,28790
6	1,28744	1,28697	1,28651	1,28605	1,28559	1,28513	1,28467	1,28421	1,28375	1,28329
7	1,28283	1,28237	1,28191	1,28145	1,28100	1,28054	1,28008	1,27962	1,27917	1,27871
8	1,27825	1,27780	1,27734	1,27689	1,27643	1,27596	1,27553	1,27507	1,27462	1,27417
9	1,27371	1,27326	1,27281	1,27236	1,27191	1,27146	1,17100	1,27055	1,27010	1,26965
10	1,26960	1,26876	1,26831	1,26786	1,26741	1,26696	1,26651	1,26607	1,26562	1,26517
11	1,26473	1,26428	1,26384	1,26339	1,26294	1,26250	1,26206	1,26161	1,26117	1,26072
12	1,26028	1,25984	1,25940	1,25895	1,25851	1,25807	1,25763	1,25719	1,25675	1,25631
13	1,25587	1,25543	1,25499	1,25455	1,25411	1,55367	1,25323	1,25279	1,25236	1,25192
14	1,25148	1,25105	1,25061	1,25017	1,24974	1,24930	1,24887	1,24843	1,24800	1,24751
15	1,24713	1,24670	1,24626	1,24583	1,24540	1,24496	1,24453	1,24410	1,24367	1,24324
16	1,24281	1,24238	1,24195	1,24151	1,24109	1,24065	1,24023	1,23980	1,23937	1,23894
17	1,23851	1,23809	1,23766	1,23723	1,23680	1,23638	1,23595	1,23553	1,23510	1,23467
18	1,23425	1,23383	1,23340	1,23298	1,23255	1,23213	1,23171	1,23128	1,23086	1,23044
19	1,23002	1,22959	1,22917	1,22875	1,22833	1,22791	1,22749	1,22707	1,12663	1,22623
20	1,22581	1,22539	1,22497	1,22455	1,22414	1,22372	1,22330	1,22288	1,22247	1,22205
21	1,22163	1,22122	1,22080	1,22039	1,21997	1,21955	1,21914	1,21873	1,21831	1,21790
22	1,21748	1,21707	1,21666	1,21625	1,21583	1,21542	1,21501	1,21460	1,21419	1,21377
23	1,21336	1,21295	1,21254	1,21213	1,21172	1,21131	1,21091	1,21050	1,21009	1,20968
24	1,20927	1,20886	1,20846	1,20805	1,20764	1,20724	1,20683	1,20642	1,20602	1,20561
25	1,20521	1,20480	1,20440	1,20399	1,20359	1,20318	1,20278	1,20238	1,20197	1,20157
26	1,20117	1,20077	1,20036	1,19996	1,19956	1,19916	1,19876	1,19836	1,19796	1,19756
27	1,19716	1,19676	1,19636	1,19596	1,19556	1,19516	1,19476	1,19436	1,19397	1,19357
28	1,19317	1,19277	1,19238	1,19198	1,19159	1,19119	1,19080	1,19040	1,19001	1,18961
29	1,18922	1,18882	1,18843	1,18803	1,18764	1,18725	1,18685	1,18646	1,18607	1,18568
30	1,18528	1,18489	1,18450	1,18411	1,18372	1,18333	1,18294	1,18255	1,18216	1,18177
31	1,18138	1,18099	1,18060	1,18021	1,17982	1,17944	1,17905	1,17866	1,17827	1,17788
32	1,17750	1,17711	1,17673	1,17634	1,17595	1,17557	1,17518	1,17480	1,17441	1,11403
33	1,17364	1,17326	1,17288	1,17249	1,17211	1,17173	1,17134	1,17096	1,17058	1,17020
34	1,16982	1,16943	1,16905	1,16867	1,16829	1,16791	1,16753	1,16715	1,16677	1,16639
35	1,16601	1,16563	1,16525	1,16487	1,16450	1,16412	1,16374	1,16336	1,16298	1,16261