TRANSZENDENZ VON e UND π

EIN BEITRAG ZUR HÖHEREN MATHEMATIK VOM ELEMENTAREN STANDPUNKTE AUS

VON

GERHARD HESSENBERG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT.

Die eigentliche Vorrede zu dieser Arbeit ist zu ihrem ersten Teile angewachsen. Sie soll die kopfschüttelnde, vielleicht auch vorwurfsvolle Frage „Wozu?“, mit der man im Falle $n \geqq 10$ die $(n+1)$-te Behandlung eines Gegenstandes zu begrüßen geneigt sein wird, mit einer zu ihrer Kürze umgekehrt proportionalen Ausführlichkeit dahin beantworten, daß ein großes n zuweilen gerade ein Zeichen noch nicht restlos überwundener Sprödigkeit des betrachteten Gegenstandes sein kann. Solche Sprödigkeit ist, wenn auch objektiv vorhanden, so doch nicht objektiv meßbar, vielmehr der Größe nach eine Funktion des Lesers, seiner Veranlagung und Übung und deren Stärke und Richtung. Ausgesprochenen Algebraikern und routinierten Rechnern kommt sie im vorliegenden Falle kaum zum Bewußtsein; daraus erklärt es sich, daß die meisten Autoren sie gar nicht berücksichtigen, anderen ihre Bewältigung trotz bester Absichten nicht völlig gelingt. Ihren Ursachen kommt man am ehesten durch Beobachtung der Hindernisse auf die Spur, die der Anfänger am Gegenstand selbst oder an verwandten Aufgaben besonders schwer bewältigt; solchen Beobachtungen während meiner Tätigkeit an dem mathematischen Seminar der Universität Bonn verdankt der Plan zu diesen Blättern seine Entstehung. Mögen sie den Kollegen Study, London, Kowalewski, Hausdorff, Schmidt, Carathéodory und Müller ein Gruß und dieser ein Zeichen sein, daß ich dankbar der anregenden Stunden in ihrem liebenswürdigen Kreise gedenke.

Breslau, im Dezember 1911.

DER VERFASSER.

INHALT.

Erster Teil. **Zur Methodik der Beweisanordnung.**

I. Der Deus ex machina im Transzendenzbeweis.

II. Die fortschreitende Spezialisierung.

III. Der indirekte Beweis.

Zweiter Teil. **Allgemeine Vorbereitungen.**

IV. Ganze Funktionen.

A. Wertegleichheit und formale Gleichheit.

Seite

IX. Analytischer Teil des Transzendenzbeweises.

X. Zahlentheoretischer Teil des Transzendenzbeweises.

A. Ganzzahligkeit.

B. Die erste Variante des Beweises.

Seite

C. Die zweite Variante des Beweises.

D. Übersicht der Ergebnisse.

Vierter Teil. Algebraische Vorbereitungen.

XI. Mengen und Folgen.

AA. Formale und numerische Verschiedenheit.

B. Allgemeine Mengen.

C. Numerische Mengen.

D. Allgemeine Folgen.

E. Zahlfolgen.

XII. Die Verküpfungssätze.

A. Subtraktion und Division.

Seite

XV. Algebraische Zahlen.

A. Symmetrische Funktionen.

B. Reduzibilität und Irreduzibilität.

C. Algebraisch-ganze Zahlen.

D. Symmetrische Funktionen eines Bündels.

E. Symmetrische Funktionen und Bündel zweiter Stufe.

F. Lineare Funktionen.

XVI. Exponentialformen mit algebraischen Bestimmungsstücken.

Fünfter Teil. Der Lindemannsche Satz und die Transzendenz von π.

XVII. Die Spezialisierung der Problemstellung.

A. Spezialisierung auf algebraisch-ganze Zahlen.

B. Spezialisierung auf symmetrischen Bau.

Berichtigungen.

Seite 11, § 22, dritte Zeile: Herleitung aus (statt Herleitun gaus).

Seite 31, vierte Zeile von oben: $\left[\sum x_\nu\right]^m$ für $\left[\sum x_\nu\right]^{\mathrm{m}}$.

Seite 32, zweite Zeile von oben, unter dem ersten $\sum$: $\nu = 1$ für $k = 1$.

Seite 48, § 110, achte Zeile, hinter der eckigen Klammer: c^ϱ für e^ϱ.

Seite 51, § 118, fünfte Zeile: „wie“ für „als“.

Seite 59, letzte Zeile: „wertegleichen“ für „gleichwertigen“.

Erster Teil.

Zur Methodik der Beweisanordnung.

I. Der „Deus ex machina" im Transzendenzbeweis.

1. Eine Zahl heißt bekanntlich *„algebraisch"*, wenn sie einer algebraischen Gleichung mit *ganzzahligen* Koeffizienten genügt. Nichtalgebraische Zahlen heißen *transzendent;* zu ihnen gehören als bekannteste Beispiele die Zahlen e und π. Ihre Transzendenz ist in folgendem allgemeinen Satze von Lindemann enthalten:

Eine „Exponentialform", d. h. ein Ausdruck von der Gestalt

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}, \tag{1}$$

hat einen nicht verschwindenden Wert, wenn folgende vier Voraussetzungen erfüllt sind:

(V_1) *Je zwei der Exponenten c_λ sind voneinander verschieden.*
(V_2) *Nicht alle Koeffizienten C_λ sind null.*
(V_3) *Die Exponenten c_λ sind algebraische Zahlen.*
(V_4) *Die Koeffizienten C_λ sind algebraische Zahlen.*

Der ersten Voraussetzung kann man unter allen Umständen genügen, indem man etwa vorhandene Glieder mit gleichen Exponenten zusammenzieht; dann schließt (V_2) den trivialen Ausnahmefall aus, daß E bereits unabhängig vom Sinn des Zeichens „e" den Wert Null besitzt. (V_1) und (V_2) beziehen sich also nur auf die *Formulierung* des Problems, sie sind *„formale"* Voraussetzungen.

Das Schwergewicht des Satzes liegt in den *„zahlentheoretischen"* Voraussetzungen (V_3) und (V_4). Da die rationalen, speziell die ganzen Zahlen zu den algebraischen gehören[1]), so gilt die Behauptung $E \neq 0$ des Lindemannschen Satzes auch dann, wenn (V_3) oder (V_4) oder auch beide zugleich durch die engeren Fassungen ersetzt werden:

(V_3^*) *Die Exponenten c_λ sind ganze Zahlen.*
(V_4^*) *Die Koeffizienten C_λ sind ganze Zahlen.*

---

1) Sind a und b ganze Zahlen, so genügt die Zahl $a:b$ der ganzzahligen Gleichung ersten Grades $bx - a = 0$.

2. Die Exponentialform $e^0 + e^{\pi i}$ genügt den Voraussetzungen (V_1), (V_2) und $(V_4{}^*)$. Da sie den Wert Null hat, kann (V_3) nicht erfüllt sein, und da der Exponent 0 algebraisch ist, muß πi eine transzendente Zahl sein. *Daraus folgt, daß auch π transzendent ist.*[1])

Dasselbe Resultat folgt allgemeiner aus dem Verschwinden der Form $e^0 + e^\alpha + e^{2\alpha} + \cdots + e^{(n-1)\alpha}$ für $\alpha = 2\pi i : n$.

3. Noch direkter ergibt der Lindemannsche Satz die Transzendenz von e. Ist

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0, \qquad a_0 \neq 0$$

eine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, so sind für die Exponentialform

$$E = a_0 e^0 + a_1 e^1 + a_2 e^2 + \cdots + a_m e^m \tag{2}$$

(V_1), (V_2), $(V_3{}^*)$ und $(V_4{}^*)$ erfüllt. Daher ist $E \neq 0$: e genügt keiner ganzzahligen algebraischen Gleichung.

Der Beweis wird für diesen besonders einfachen Fall nach Hilbert folgendermaßen geführt[2]): Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Funktion und

$$F(x) = e^x \int_x^\infty e^{-t} f(t)\, dt \quad \text{(Hermitesches Integral)}, \tag{3}$$

$$R(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt, \quad \text{also} \quad e^x F(0) = F(x) + R(x), \tag{4}$$

$$P = a_0 F(0) + a_1 F(1) + a_2 F(2) + \cdots + a_m F(m), \tag{5}$$

$$Q = a_0 R(0) + a_1 R(1) + a_2 R(2) + \cdots + a_m R(m), \tag{6}$$

also

$$E \cdot F(0) = P + Q. \tag{7}$$

Man setze für $f(x)$ die „Abschätzungsfunktion" ein:

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-m)^p. \tag{8}$$

Dann ist P ein ganzzahliges Vielfaches von $(p-1)!$.

Man setze weiter für p eine in $a_0 m!$ nicht aufgehende Primzahl, *so wird P durch p unteilbar, ist also nicht null.* Daraus folgt

$$|P| \geqq (p-1)!. \tag{9}$$

Wird endlich noch p hinreichend groß gewählt, so ist

$$|Q| < (p-1)! \tag{10}$$

d. h.

$$|Q| < |P|. \tag{11}$$

1) Ein Produkt algebraischer Zahlen ist algebraisch (§ 249), und die Zahl i ist algebraisch. Mit π müßte also auch πi algebraisch sein.

2) Wir geben nur den Gedankengang, und diesen mit einigen formalen, unserer späteren Bezeichnung angepaßten Abänderungen.

Dagegen würde aus $E = 0$ nach (7) $P = -Q$, also $|P| = |Q|$ folgen. *E ist also von Null verschieden.*

Der Beweis des Lindemannschen Satzes beruht auf einer Verallgemeinerung derselben Hilfsmittel und Schlußweisen.

4. Nicht nur die hier gegebene Skizze, sondern durchweg alle bekannten Darstellungen des Beweises zeigen spätestens von derjenigen Stelle an, an der die *„Abschätzungsfunktion“* $f(x)$ eingeführt wird, jene typische Anordnung, die eine boshafte Legende den Vorträgen Ennepers nachsagt: Sie beginnen mit *„Setzt man...“* und endigen mit *„so folgt...“* Die Folgerungen sind dabei alle von höchst einfacher Art; dagegen bleibt die Entstehung der völlig unvermittelten und unvorbereiteten „Setzungen“ dem Anfänger zumeist problematisch. Sie sind, wie Schopenhauer an einem unpassenden Beispiel sagt: „Schlingen, die sich unerwartet zuziehen und den Assensus des Lernenden gefangen nehmen, der nun verwundert zugeben muß, was ihm seinem innern Zusammenhang nach völlig unbegreiflich bleibt.“ Seminarvorträge über Transzendenzbeweise machen nach meiner Erfahrung stets den Eindruck von Bergbesteigungen im dicken Nebel, die man sich ohne kundigen Führer — scilicet ohne Vortragsmanuskript — auszuführen nicht getrauen würde. Weder der Hörer noch auch der Vortragende kommt aus dem Staunen über die genialen Kunstgriffe heraus. Die Abschätzungsfunktion spielt die Rolle eines richtigen *„Deus ex machina“*: Wie Pallas Athene dem Haupte des Zeus, scheint sie völlig gewappnet und gerüstet einer genialen Intuition entsprungen zu sein. So tritt sie zu Beginn des Beweises oder nach einigen harmlosen Präliminarien in die Rechnung ein und entfaltet nacheinander ihre teils analytischen, teils zahlentheoretischen Eigenschaften, deren Bedeutung für die einzelnen Schritte des Gedankenganges in der Fülle der Gesichte zu erfassen oder gar abzuwägen dem Anfänger nicht möglich ist.

5. Liegt es aber nicht im Wesen des Genialen, daß der Durchschnittsverstand ihm nicht in die Werkstatt zu blicken vermag? Ist nicht oft genug der Entdecker selbst sich unklar, warum er diesen oder jenen Ansatz versuchte? Ist es nicht letzthin *„profane Neugier“*, die angesichts der fertigen Leistung noch Fragen über die Entstehungsgeschichte zu stellen hat?

In jenen schönen Zeiten, da wir noch nach blendenden Thesen für die Promotion fahndeten, diskutierten wir auch das Thema: *„Die Existenz der Mathematik beweist einen Mangel unseres Verstandes.“* Diese blasphemische Paradoxie löste sich als Tautologie, die Beleidigung der Majestät der Mathematik ward zu ihrer Verherrlichung durch die Konstruktion einer *„idealen Intelligenz“*, an deren Maßstab gemessen der normale Verstand sich als zu kurz erweist. Die ideale Intelligenz beherrscht nämlich ihre eigenen Hilfsmittel vollständig; nur die Gesetze der äußeren Natur können ihre Probleme sein. Die Erkenntnis der mathematischen

Gesetze, die ja nach Kant der inneren Natur angehören, ist also notwendig, um jener idealen Intelligenz näher zu kommen.

Bei dieser Argumentation beriefen wir uns jedoch auf ein psychologisches, nicht dialektisches Argument: Je vertrauter uns eine mathematische Betrachtung ist, desto selbstverständlicher erscheint sie uns; Kriterium völliger Beherrschung eines Gegenstandes ist seine Trivialität, diese natürlich nur im Sinne verstandesmäßigen Denkens, nicht als ästhetische Bewertung gedacht.

6. Das Streben nach einer mehr als formallogischen Einsicht, nach einem Verständnis nicht nur der Folgerungen, sondern auch der *„heuristischen“* Gründe der Ansätze, entspringt also der Überzeugung, daß auch das Komplizierteste sich letzthin als einfach erweisen muß. Nicht *„profane Neugier“* ist es, die das Leitwort *„Simplex sigillum veri“* geprägt hat, und die Leistungen der Antike verblassen nicht dadurch, daß ihre grandiose Einfachheit sie uns heute schon in jungen Jahren als *„Elementarmathematik“* zugänglich macht.

Ebensowenig wird man auch in den neueren Versuchen, die Transzendenzbeweise für e und π an vertiefte Darstellungen der Elementarmathematik abschließend anzugliedern, eine Profanierung des Gegenstandes oder auch nur eine *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος* sehen wollen. Vielmehr erkennen sie alle ausdrücklich das Bedürfnis an, die spröde Materie einem breiteren Publikum näher zu bringen; wobei freilich unsere Ansicht dahin geht, daß sie dieses Bedürfnis in sehr wesentlichen Punkten noch keineswegs befriedigen.

7. Herr Vahlen betont vor allem den *elementaren* Charakter der von ihm benutzten *Hilfsmittel* (Konstruktionen und Approximationen, Teil VIII, S. 321 f. und Schlußwort) und Herr Klein im Rückblick auf seine Darstellung des Hilbertschen Beweises die *Einfachheit aller Schlüsse* (Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Bd. I, Anhang I, S. 545). Die Erschwerung des tieferen Verständnisses durch den *Ansatz selbst* wird aber hiervon gar nicht berührt. Über ihn sagt Herr Klein a. o. O.:

„Gedächtnismäßig braucht man sich eigentlich nur das Hermitesche Integral zu merken.“

Gerade dieses Integral wird nun in der *Einleitung* des Beweises (a. o. O. S. 521) als das *„Haupthilfsmittel“*, als *„der Schlüssel zum ganzen Beweis“* bezeichnet. Wenn wir diese Charakterisierung in das angeführte Schlußwort einsetzen, so gewinnt die Aussage, daß man sich gedächtnismäßig *„nur“* das Haupthilfsmittel zu merken habe, einen vom Verfasser gewiß nicht beabsichtigten ironischen Beigeschmack. Sinngemäßer wird man sagen dürfen: *„Das Haupthilfsmittel, den Schlüssel zum ganzen Beweis muß man sich leider gedächtnismäßig merken.“*

In der Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber und

Wellstein (Bd. I, Abschnitt 26) wird die Integraldefinition von $F(x)$ ersetzt durch die heuristisch viel leichter zugängliche rationale

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots$$

des Herrn Hurwitz. Damit reduziert sich der „*Beweisschlüssel*“ auf die Abschätzungsfunktion $f(x)$. Sie tritt aber auch hier ganz ohne Vermittlung in Aktion.

8. Unserem Empfinden nach muß die Lösung des Problems, wie man aus dem umfangreichen mathematischen Schlüsselbunde den für unsere Aufgabe passenden Schlüssel herausfindet, anderswo als in der Mnemotechnik gesucht werden.

Hierfür kann uns das Bild des „Schlüssels“ ein nützliches Symbol werden, wenn wir uns nur unter der Abschätzungsfunktion $f(x)$ (oder dem Hermiteschen Integral) nicht einen simplen Hausschlüssel vorstellen. Treffender dürfte der Vergleich mit dem Tresorschlüssel einer Großbank ausfallen; wenigstens vermute ich, daß ich mit einem solchen zunächst nicht das Geringste anzufangen wüßte, wenn man mir ihn in die Hand gäbe. Kunstschlösser besitzen Sperrungen und Riegel, die sich der Hausschlüsselmethode des Einsteckens und n-maligen Umdrehens nicht ergeben.

Wir können uns aber vorstellen, daß ein Schlosser sich aus äußeren Merkmalen des Schlosses ein Bild von der ungefähren Form und Größe des Schlüssels macht und danach zunächst eine Rohform desselben herstellt. Wenn er sodann mit einfachen Sperrhaken die einzelnen Federn und Riegel des Schlosses sondiert, kann er dem Befunde gemäß an der Rohform des Schlüssels durch Ausfeilungen die nötigen Zungen und Zacken herausarbeiten, bis alle „*Eingriffe*“ richtig spielen und das Schloß sich öffnet. Ob diese unsere Vorstellung der wirklichen Praxis des gelernten Schlossers adäquat ist, das kommt hier natürlich nicht in Betracht. Wesentlich ist vielmehr, daß sie sich bildlich auf unser mathematisches Problem anwenden läßt.

9. Die „*Rohform*“ unseres „*Beweisschlüssels*“ muß ein Abschätzungsverfahren für Exponentialformen sein, das ausgiebiger modifiziert werden kann als die unmittelbar dafür gegebene, aber für unsere Zwecke nicht genügend vielseitige, weil keine willkürlichen Bestimmungsstücke enthaltende Exponentialreihe. Immerhin dient sie uns als nächstliegender Ausgangspunkt: durch eine ungezwungene Verallgemeinerung gelangen wir sogleich zu der rationalen Form $F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots$ des Hermiteschen Integrals als einem bei passenden Verfügungen über $f(x)$ brauchbaren Ausdruck zur näherungsweisen Darstellung von $F(0)e^x$. Diese Verfügungen stellen nunmehr die „*Ausfeilungen*“ dar, die sich zugleich mit und aus den im Beweisgang auszuführenden „*Eingriffen*“ ergeben; und zwar treten die Eingriffe hervor durch sukzessive Heranziehung der einzelnen Daten der gestellten Aufgabe. Dadurch erhält die

Betrachtung eine „*Anordnung nach fortschreitender Spezialisierung*", über die es sich vor Eintritt in den Transzendenzbeweis verlohnt, noch einiges Allgemeine zu sagen. Ihre Bedeutung für die Übersichtlichkeit der Darstellung beschränkt sich nicht auf unser spezielles Problem. Und da wir einmal Fragen der Darstellungsmethodik anschneiden mußten, tun wir gut, an dem unliebenswürdigen Geschäft der Kritik den positiven Teil nach Möglichkeit herauszuheben, indem wir die gewonnenen allgemeinen Gesichtspunkte auf ihre Berechtigung und praktische Anwendbarkeit nachprüfen. Dadurch gewinnen wir zugleich einen objektiveren Maßstab ihres Wertes als durch den immerhin problematischen Anspruch, die Behandlung der besonderen vorliegenden Aufgabe mit ihrer Hilfe verbessert zu haben.

II. Die fortschreitende Spezialisierung.

10. Die Vorteile der Behandlung nach „*fortschreitender Spezialisierung*", d. h. der schrittweisen Heranziehung der einzelnen Daten einer gestellten Aufgabe, sind von verschiedener Art. Der allgemeinste Gesichtspunkt scheint uns folgender zu sein: Je weniger Voraussetzungen wir benutzen, desto kleiner ist der Inhalt der betrachteten Begriffe. Begriffe kleinen Inhalts sind leicht verständlich und geben nur zu wenigen, darum meist naheliegenden und ungezwungenen Folgerungen Anlaß. Andererseits ist der Umfang eines Begriffes um so größer, je kleiner sein Inhalt ist. Um so größer ist daher die Allgemeinheit, um so vielseitiger die Anwendbarkeit der gezogenen Folgerungen. Hierauf in erster Linie dürfte beispielsweise der eigene Reiz mengentheoretischer Betrachtungen beruhen.

11. Zweitens ergibt die fortschreitende Spezialisierung eine natürliche Gliederung des Gedankenganges, besonders dann, wenn es uns gelingt, vor jeder Neueinführung einer Voraussetzung ein einigermaßen abschließendes Zwischenresultat herauszuheben, auf dem die nächsten Schritte sich aufbauen können. Dadurch entstehen Zäsuren, die im psychologischen Sinn als Ruhepunkte wirken. Sie gestatten einen Rückblick auf das Erreichte und entlasten durch dessen Zusammenfassung das Gedächtnis.

12. Darum sollte das Arbeiten mit *problematischen Annahmen* nach Möglichkeit vermieden werden. Denn alle aus ihnen gezogenen Folgerungen sind selbst problematisch, darum keine „*Resultate*" im mathematischen und keine „*Ruhepunkte*" im psychologischen Sinne. Die häufigste Form der problematischen Annahme ist die Annahme des Gegenteiles der zu beweisenden Behauptung im indirekten Beweis. Man verwendet sie am besten nur in heuristischem Sinne als Wegweiser für die weitere Ausgestaltung der Betrachtung. *Muß* man dagegen Folgerungen aus ihr ziehen, so geschehe es möglichst gegen Ende des Beweises, damit die Widerlegung in einem Zuge erfolgen kann, der kurz genug ist, um einer Gliederung entraten zu können.

13. Drittens zwingt uns die fortschreitende Spezialisierung zur Nachprüfung der Tragweite der einzelnen Voraussetzungen und gedanklichen Hilfsmittel und schützt uns dadurch vor einem keineswegs seltenen Fehler: vor der ungerechtfertigten Betonung nebensächlicher Dinge und vor der formalen Einführung von Annahmen, die de facto gar nicht benutzt werden. Solche Mißgriffe lenken die Aufmerksamkeit des Lesers oder Hörers von der Hauptsache ab oder führen sie geradezu irre, während die korrekte Hervorhebung der wahren Zusammenhänge bei fortschreitender Spezialisierung allein in der Anordnung bereits ihren Ausdruck findet.

14. Immerhin dürfen wir in der Methode fortschreitender Spezialisierung, so viel wir sie auch in diesen Blättern angewandt finden werden, keine (wie etwa die logische Strenge) allen anderen Rücksichten grundsätzlich überzuordnende Forderung sehen. Sie ist eine von Fall zu Fall auf ihren Anwendungswert zu prüfende praktische Maxime, die anderen Maximen ähnlichen Charakters koordiniert und im Falle eines Widerstreites je nach den Umständen vorzuziehen oder zu verwerfen ist. Vor allem sind es zwei Prinzipien, mit denen wir gerade hier in Kollision geraten: Der elementare Standpunkt und das Bestreben nach Kürze des Ausdrucks.

15. Der elementare Standpunkt, d. h. das Bestreben, möglichst wenig an Vorkenntnissen beim Leser vorauszusetzen, nötigt uns, eine Reihe von Betrachtungen, ohne Rücksicht auf die eigentliche Stelle ihres Eingriffs in den Beweis, diesem voranzustellen. Es sind das Entwicklungen von selbständiger, allgemeiner Bedeutung, deren Anwendung im Transzendenzbeweis nur eine gelegentliche ist. Sie gehören von Rechts wegen zu den Vorkenntnissen, sind jedoch erfahrungsgemäß nicht jedem Leser und nicht alle zu jeder Zeit gegenwärtig. Hauptsächlich handelt es sich um Sätze der Algebra; so haben wir dem Lindemannschen Satz eine Theorie der algebraischen Zahlen und symmetrischen Funktionen vorangestellt, die uns zugleich als Versuch verlockend schien, einmal einen anderen Gesichtspunkt in den Vordergrund zu rücken.

Es ist klar, daß in dem Beweisgang selbst die Einschaltung solcher „*Auffrischungen der Kenntnisse ad usum delphini*“ bei einigem Umfang sich von selbst verbietet. Aber auch wenn sie knapp gehalten sind, sind sie für den Leser, der ihrer nicht bedarf, eine lästige Unterbrechung, während der Leser, dem sie gerade helfen sollen, dazu neigen wird, den Einbau in den Transzendenzbeweis als organische Zugehörigkeit zu deuten und in Sätzen von allgemeiner methodischer Bedeutung besondere Kunstgriffe des vorliegenden Problems zu sehen. (Wir haben diesen Fall miterlebt.) Die Voranstellung ermöglicht dem Leser erster Art die Überschlagung oder flüchtige Durchsicht bekannter Dinge, dem Leser zweiter Art ihre Aneignung und Beurteilung unabhängig von der späteren Anwendung.

Von dem Leser zweiter Art setzen wir immerhin voraus, daß er die Elemente der Infinitesimalrechnung, der komplexen Zahlen und der Rechnung mit Polynomen aus der üblichen Vorlesung über Differential- und Integralrechnung behalten hat. Das Rechnen mit Kongruenzen wird er von der Schule her schon kennen.

16. Von wesentlich allgemeineren Ursachen bedingt ist die Kollision zwischen fortschreitender Spezialisierung und Kürze des Ausdrucks. Wird die Kürze als oberste Richtschnur der Darstellung gewählt, so darf jede Vereinfachung, auch wenn sie nur durch möglichst sofortige Heranziehung aller Daten und weitgehendste Spezialisierung zu erreichen ist, ausgenutzt werden. Solche Fälle, bei denen von vornherein die Entscheidung im Kollisionsfalle zuungunsten der fortschreitenden Spezialisierung getroffen ist, dürfen darum nicht nach dieser Maxime beurteilt werden. Als Beispiele nennen wir die vier durch ihre Kürze ausgezeichneten Transzendenzbeweise von Hilbert, Hurwitz, Gordan und Vahlen.[1])

Anders liegen die Dinge, wenn das Bestreben nach Kürze nicht bevorzugt wird. Dann kommt es, vielfach unbewußt, zum Ausdruck in dem Versuch, möglichst viele Daten der Aufgabe formelmäßig im Ansatz unterzubringen und dadurch ihre Formulierung in Worten entbehrlich zu machen. So wählt man zum Beweise der Transzendenz von e fast durchweg den Ansatz (2) des § 3 an Stelle des allgemeineren (1) in § 1, weil er die Voraussetzungen (V_1), (V_3^*) und mit $a_0 \neq 0$ auch (V_2) formal zum Ausdruck bringt, so daß nur (V_4^*) in Worten ausgesprochen zu werden braucht. Gerade dieses Beispiel kann uns einige Bedenken illustrieren, die gegen zu weit gehende Spezialisierung des Ansatzes bestehen.

17. Eine Voraussetzung, die im Ansatz steckt, nimmt formal an allen Entwicklungen teil; ihre eigentliche „*Eingriffsstelle*“ tritt also nicht von selbst hervor, wenn sie auch unter Umständen leicht aufzufinden sein mag. Aus der formalen Teilnahme kann aber eine sachliche werden. Dann trägt die im Ansatz steckende Voraussetzung dazu bei, die Aufmerksamkeit von den eigentlich aktiven, ausschlaggebenden Annahmen abzulenken. Sie spezialisiert zudem die Zwischenergebnisse, wodurch diese an Einfachheit oder Bedeutsamkeit einbüßen können.

Ist der Ansatz besonders inhaltsreich und „elegant“, so ist ständig eine große Zahl von Voraussetzungen in Aktion, und die fortschreitende Spezialisierung kann teilweise oder völlig unterbunden werden. Wir kommen damit zu dem Ergebnis: *Je besser der formelmäßige Ansatz*

1) Math. Ann. 43 und 53. Die drei letztgenannten sind im wesentlichen Umarbeitungen des Hilbertschen Beweises.

dem Problem sich anschmiegt, desto größer ist die Gefährdung der Durchsichtigkeit der Beweisführung. So paradox diese Behauptung klingen mag, sie läßt sich leicht an Beispielen bestätigen. Mit dem Hermiteschen Integral, das einen für Kürze und Prägnanz geradezu mustergültigen und unübertroffenen Ansatz des Transzendenzbeweises darstellt, kann man die Identität (7) des § 2 ohne jede Vermittlung der Hilfszeichen E, $f(x)$, $F(x)$, $R(x)$, P und Q sofort folgendermaßen anschreiben:

$$\left[\sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda e^\lambda\right] \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \cdots (x-m)^p \, dx = \sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda e^\lambda \int_\lambda^\infty \cdots + \sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda e^\lambda \int_0^\lambda \cdots.$$

Daß aber hiermit eine *durchsichtige* Beweisführung nicht inauguriert wird, das haben alle Bearbeiter des Beweises durch Verzicht auf gleich ausdrucksvolle Ansätze und die Interpreten des Beweises durch lange textliche Erläuterung des Sinnes dieser Identität anerkannt. Zum vollen Genuß und zu vollwertiger Würdigung des Hermiteschen Integrals gelangt man erst, wenn man den Beweis in breiteren Darstellungen durchgearbeitet und verstanden hat.

18. Was nun den Ansatz (2) für E betrifft, so besitzt er ebenfalls Nachteile, die uns veranlassen, bereits bei der Transzendenz von e den allgemeinen Ansatz (1) mit den textlich formulierten Voraussetzungen (V_1), (V_2), (V_3*) und (V_4*) unterzulegen. Zunächst spezialisieren nämlich die in (2) steckenden Annahmen (V_1), (V_3*) die Abschätzung des Fehlergliedes Q unserer Näherungsformel für E. Der Erfolg ist in allen bekannten Darstellungen der, daß beim Beweis der Transzendenz von π diese Abschätzung neu aufgenommen werden und, da man hierbei die speziellen Werte $C_\lambda = 1$ im Ansatz unterbringt, beim Beweise des Lindemannschen Satzes nochmals wiederholt werden muß. Der Ansatz (1) wird demgegenüber zeigen, daß die Abschätzung von Q an keinerlei zahlentheoretische Eigenschaften der c_λ und C_λ gebunden ist, nicht einmal an ihre Realität. Sie kann also bei der Transzendenz von e sogleich vollständig erledigt werden, so daß nur die Untersuchung von P unter den verallgemeinerten zahlentheoretischen Annahmen wieder aufzunehmen ist.

19. Man könnte dem entgegenhalten, daß mit den gleichen Argumenten sich die Übergehung der Transzendenz von e und die sofortige Inangriffnahme des Lindemannschen Satzes rechtfertigen ließe.[1])

1) So verfährt in der Tat Herr Vahlen (Konstruktionen und Approximationen); jedoch bereitet auch er den Beweis durch Spezialfälle vor, und zwar durch eine überaus große Zahl: Irrationalität von π, π^2, e, e^2, e^m (ganzes m) und Nichtverschwinden von $ae^\alpha + ae^{\alpha'} - c$, wenn a, c, $\alpha + \alpha'$ und $\alpha\alpha'$ ganze Zahlen sind.

Der Unterschied zwischen den allgemeinen zahlentheoretischen Voraussetzungen (V_3), (V_4) und den speziellen (V_3^*), (V_4^*) ist jedoch ein sehr tiefgreifender hinsichtlich der vorauszusetzenden Vorkenntnisse, und er findet einen adäquaten Ausdruck in der zahlentheoretisch verlaufenden Untersuchung von P. Dagegen kann die Abschätzung von Q durch die zahlentheoretischen Voraussetzungen *gar nicht*, durch die Realität der c_λ, C_λ nur ganz unwesentlich abgekürzt werden. Die bewußte Ausnutzung der speziellen Werte c_λ, C_λ (z. B. in der Enzyklopädie der Elementarmathematik) nimmt sogar mehr Raum in Anspruch als die allgemeinste analytische Methode, und sie ist auch gedanklich nicht einfacher. Selbst der in § 15 beschriebene Leser zweiter Art kennt die Mittelwertsätze der Differential- und Integralrechnung, die Reste der Taylorschen, der geometrischen und der Exponentialreihe und weiß, daß der absolute Betrag einer Summe nicht größer ist als die Summe der absoluten Beträge. Das Interesse an einer Einschränkung dieser Hilfsmittel scheint uns darum ein rein akademisches zu sein. Eine solche Einschränkung provoziert geradezu das, was sie zu vermeiden beabsichtigt: die Anwendung von „*Geistesgymnastik*“. Je beschränktere Schätzungsmittel wir anwenden, desto leichter können wir vorbeischätzen, während bei den allgemeinen Mittelwertsätzen und den Reihenresten schon Kunst dazu gehört, wenn man *nicht* zum Ziel gelangen will. Die Abrundung von Q wird mit ihnen ohne jedes Raffinement, so grob als möglich und rein nach Schema F ausgeführt; dabei liefert sie als obere Schranke für $|Q|:(p-1)!$ ein beliebig zu verkleinerndes „ε“, obwohl wir nur der endlichen Schranke 1, also gar keiner „*Epsilontik*“ bedürftig sind. Selbst die geometrische Interpretation des Ergebnisses halten wir für eine unnötige Betonung. Ein Studierender vom dritten Semester an kennt bei einiger Intelligenz die Zusammenhänge der Reihenreste und Mittelwertsätze und muß imstande sein, die auf *einem* Wege richtig verstandene Abschätzung auf dem anderen selbständig zu wiederholen.

20. Ein anderer Nachteil des Ansatzes (2) ist das Auftreten numerischer Exponenten. Eine Größe, die mit einem Buchstaben bezeichnet wird, ist an jeder Stelle der Entwicklung als Individuum wiederzuerkennen. Eine numerisch gegebene Zahl kann untertauchen und sich dem Blick entziehen. Beispielsweise ist es zwar leicht zu erraten, aber nicht selbstverständlich, daß die Nullstellen von $f(x)$ dieselben Individuen sind wie die Exponenten in E. Beim Ansatz (1) wird sich dieser Zusammenhang dagegen von selbst verstehen, und daraus wird sich ganz zwanglos ergeben, in welcher Richtung die Lindemannschen Verallgemeinerungen der Transzendenz von e, nicht nur ihre Beweise, zu suchen sind.

Das Produkt $m!$, in dem p nicht aufgehen darf, ist nur zufällig das Produkt der p-fachen Nullstellen von $f(x)$. Im allgemeinen Ansatz erkennt man, daß seine Faktoren als Individuen die Differenzen der

p-fachen Nullstellen gegen die $(p-1)$-fache, 0, bedeuten. Daß die Null hierbei eine bevorzugte Rolle spielt, wird man daraus zu erklären suchen, daß sie überhaupt unter den Zahlen eine Ausnahmestellung einnimmt. Tatsächlich ist aber ihre Bevorzugung willkürlich, und es ist klar, daß der Ansatz (1) mit lauter gleichberechtigten Exponenten dies ganz von selbst zum Ausdruck bringen wird. Obwohl er also durch einen größeren Aufwand an Worten ergänzt werden muß, ist er, was die Rolle der einzelnen Werte c_λ betrifft, ausdrucksvoller und, was die Abschätzung des Fehlers betrifft, auch ökonomischer als der Ansatz (2).

III. Der indirekte Beweis.

21. Unsere Skizze des Transzendenzbeweises in § 3 läßt erkennen, daß er in seinem Grundgedanken ein direkter Beweis ist. Jedoch ist die Fassung in den meisten Darstellungen, besonders ausgeprägt in denen von Klein und Weber, eine indirekte. Es wird eine Gleichung von der Form $E=0$ als bestehend angenommen. Die Zerlegung der linken Seite in zwei Summanden verschiedenen Absolutbetrages ergibt alsdann einen Widerspruch. Dieser an sich unbedeutenden gedanklichen Nuance stehen große Bedenken entgegen, sowie man die darstellungsmethodische Seite betrachtet (§ 11 ff.).

22. Die problematische Annahme $E=0$ als Ausgangspunkt zerstört die psychologischen Ruhepunkte. Über allen Ergebnissen hängt das Damoklesschwert der Herleitun gaus falschen Prämissen. Richtiges und Falsches läuft durcheinander, an Stelle einfacher Identitäten, wie (7), treten falsche Relationen zwischen Hilfsgrößen. Das Hauptobjekt E tritt in den Gleichungen nicht mehr auf, weil ihm ein numerischer Wert beigelegt ist. Und in der Tat ist eine ausgesprochene Ruhelosigkeit des Gedankenganges der typische Eindruck bei erstmaliger Lektüre gerade der ausführlicheren Darstellungen, und ein ganz ungerechtfertigter Gebrauch des Konjunktivs das Kennzeichen von Seminarvorträgen über unser Thema.

Lassen wir daher die problematische Annahme $E=0$ beiseite und versuchen wir, ohne sie vorzugehen, um die Eingriffsstelle bloßzulegen. Dann finden wir, was uns die Skizze in § 3 deutlich zeigt, *daß einschließlich des Ergebnisses* $|P|>|Q|$, *worin* $E \neq 0$ *bereits enthalten ist, alles aus den Voraussetzungen* (V_1) *bis* (V_4) *und nichts, aber auch gar nichts, aus der Annahme* $E=0$ *geschlossen wird.* Ihre Einführung an erster Stelle veranlaßt also den Hörer oder Leser, seine Aufmerksamkeit, statt auf den Dialog der handelnden Personen des Dramas, auf das „Rhabarber"-Gemurmel eines Statisten zu richten, dessen ganze Aufgabe darin besteht, unmittelbar vor dem Fallen des Vorhangs von dem siegreichen Helden wehrlos niedergestochen zu werden.

23. Nach dem Vorbild des Transzendenzbeweises müßte der pythagoreische Lehrsatz folgendermaßen bewiesen werden: Wir nehmen an, in dem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC sei a^2+b^2 von c^2 verschieden, und leiten daraus folgendermaßen einen Widerspruch her: Wir zerlegen das Hypotenusenquadrat durch das Lot von C auf AB in zwei Rechtecke, von denen wir in bekannter Weise zeigen, daß sie mit den Kathetenquadraten gleiche Flächeninhalte besitzen. Da sie andererseits zusammen das Hypotenusenquadrat ausmachen, welches von der Summe der Kathetenquadrate verschieden ist, ergibt sich ein Widerspruch gegen das Axiom „Gleiches zu Gleichem addiert ergibt Gleiches". Unsere Voraussetzung war daher falsch, es muß vielmehr $c^2 = a^2 + b^2$ sein, quod erat demonstrandum.

Das Beispiel ist grotesk, aber im Prinzip nicht verschieden von folgendem Beweis der Umkehrung des „Pythagoras": Es sei $c^2=a^2+b^2$, aber der Winkel γ von 90^0 verschieden. Wir konstruieren ein bei C' rechtwinkliges Dreieck $A'B'C'$ mit den Katheten $C'A'=b$, $C'B'=a$. Seine Hypotenuse ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz gleich c, es stimmt also mit ABC in drei Seiten überein, nicht aber in den Winkeln γ und γ', gegen den Dreiseiten-Kongruenzsatz.

Da dieser Beweis — in noch viel schlechterer Fassung — sich in Lehrbüchern vorfindet[1]), sei darauf hingewiesen, daß man ihn wörtlich ebenso *ohne die Annahme* $\gamma \neq 90^0$ führen kann. Dann folgt aus der Übereinstimmung der drei Seiten *direkt:* $\gamma = \gamma' = 90^0$.

24. „Pseudo-indirekte" Beweise, die, wie die vorstehenden, lediglich durch Ungeschicklichkeit indirekt frisierte, tatsächlich direkte Beweise sind, mögen einen großen Teil des Mißbehagens verschulden, das erfahrungsgemäß indirekte Beweise dem Schüler verursachen. Der Schüler ahnt, daß eine „*Vorspiegelung falscher Voraussetzungen*" vorliegt; gewiß ist ihm nur, daß er den Zweck der Annahme des Gegenteils nicht zu erkennen vermag, und das macht ihn unsicher. Aber auch an Beweisen, die ihrer Natur nach indirekt sind, findet man recht verbesserungsbedürftige Anordnungen. Die indirekten Beweise des Elementarunterrichts beruhen fast ausschließlich auf dem logischen Schema der einfachen Umkehrung, d. h. auf dem Übergang von der Aussage „Aus a folgt b" zu der ihr inhaltlich gleichwertigen „Aus non-b folgt non-a". Ausführlich vollzogen erfordert dieser Übergang die Anwendung des Satzes vom Widerspruch, stellt also einen indirekten Beweis dar. Beispielsweise folgt aus dem Verschwinden eines Faktors das des Produktes. Umgekehrt kann daher ein nichtverschwindendes Produkt nur von Null verschiedene Faktoren enthalten: „*Denn wenn einer seiner Faktoren null wäre, so wäre auch das Produkt null, gegen die Voraussetzung.*"

1) Z. B. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie, 18. Auflage, 1888, § 146. Weitere Beispiele pseudo-indirekter Beweise ebenda in §§ 59, 161, 215, 224 u. a. Das Lehrbuch darf trotzdem als eines unserer besten gelten.

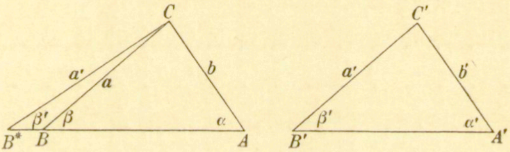
Es ist zunächst klar, daß für mathematisch begabte Schüler, aber auch für alle logisch denkenden überhaupt, die Handhabung der einfachen Umkehrung keine ernsthafte Schwierigkeit bietet. Dem Mathematiker von Fach ist sie ja derart geläufig, daß er sich die pedantischen Konjunktivsätze mit „Denn, wenn . . .“ gemeinhin spart und infolgedessen das Indirekte der Schlußweise gar nicht mehr empfindet. Gelingt es also, einen indirekten Beweis so anzuordnen, daß alles spezifisch Mathematische in direkten Schlüssen verläuft und der indirekte Teil als logisches Schema möglichst rein hervortritt, so sind jedenfalls die Schwierigkeiten des Verständnisses auf das unvermeidliche Minimum reduziert. Und für diejenigen Schüler, deren Denken noch der Disziplin entbehrt, ergibt sich ein Übungsmaterial, dessen Bedeutung über die Mathematik hinausgeht, weil ja die einfache Umkehrung auch im täglichen Leben vonnöten ist und an Beispielen dieses täglichen Lebens angewandt und geübt werden kann. Wie weit man dabei in der abstrakten Herausarbeitung des logischen Schemas gehen kann, muß ich kompetenten Kennern dieser Unterrichtsstufen zu beurteilen überlassen. Schon wenn der Schüler nur *empfindet*, daß alle indirekten Beweise nach einem gemeinsamen einfachen „Rezept“ gearbeitet sind, ist viel gewonnen.

25. Ein Beispiel mag dies erläutern. Der Beweis des vierten Kongruenzsatzes ($ABC \cong A'B'C'$, wenn $a = a'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ und $a > b$) verläuft in der üblichen Fassung mit einigen Modernisierungen folgendermaßen:

Wir tragen $A'B'$ von A aus nach B hin auf AB ab; der Endpunkt heiße B^*. Dann ist $A'B'C' \cong AB^*C$ aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, insbesondere also

$$CB^* = a' = CB$$

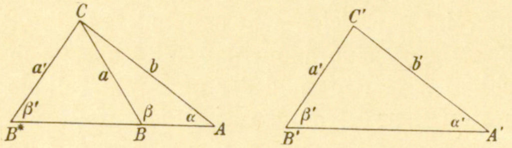
nach Voraussetzung, und $\sphericalangle\, CB^*A = \beta'$.



Angenommen nun, die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ seien nicht kongruent, so muß insbesondere $A'B' = AB^*$ von AB, also B von B^*, und β' von β verschieden sein. Die Figur CBB^* ist daher ein Dreieck, und zwar ein gleichschenkliges, woraus $\beta + \beta' = 180^0$ folgt. Einer der beiden Winkel β, β' ist somit stumpf, daher größer als α, so daß $b > a$ gegen die Voraussetzung sein müßte. Ergo . . .

Dieser Gedankengang wird an der Hand einer Figur entwickelt, in der der Voraussetzung gemäß $a > b$ gewählt zu sein pflegt, so daß weder die Gleichschenkligkeit von CBB^* noch die Stumpfheit eines der beiden Winkel β, β' zur Darstellung gelangen kann. Dieser Widerstreit von Anschauung und Logik mag von manchen Lehrern für eine *nützliche* und *lehrreiche* Erschwerung gehalten werden. Unserem Empfinden nach bedeutet er eine für diese Stufe gewaltsame Geistesgymnastik. Ihr zu entgehen griff ich schon als Schüler zu folgender Selbsthilfe:

Lassen wir zunächst die Annahme $a > b$ fallen, dann hindert uns nichts, den ganzen Beweis wörtlich ebenso bis zur Konsequenz $b > a$ durchzuführen, diesmal aber nicht im Widerstreit mit der Figur, sondern unter Anleitung einer korrekt gezeichneten, in der CBB^* gleichschenklig, einer der Winkel β, β' stumpf und, wie die Schlußfolgerung bestätigt, $b > a$ ist. Damit ist folgendes *positive* Resultat gewonnen:



Wenn $a = a'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ *ist, und wenn die Dreiecke* ABC, $A'B'C'$ *nicht kongruent sind, so ist* $b > a$.

Der Schritt, der nun von hier aus zum vierten Kongruenzsatz führt, ist zwar ganz abstrakt, aber, *da er rein logisch durch einfache Umkehrung erfolgt,* ist er der Anschauung nicht bedürftig und wird daher auch nicht gewaltsam im Widerstreit mit ihr oder gar mit einer Figur ausgeführt.

Auch für unseren Vorschlag, problematische Voraussetzungen möglichst spät einzuführen, ist unser Beispiel lehrreich. Es wird zwar nicht die *problematische* Annahme des ursprünglichen Beweises, ABC sei mit $A'B'C'$ nicht kongruent, an eine *spätere* Stelle verschoben; dafür aber wird durch logische Umkehrung des Satzes diejenige Voraussetzung, die am *spätesten* zum Eingriff gelangt, nämlich $a > b$, zur *problematischen* gemacht. Der mathematische Teil der Betrachtung verläuft nunmehr in direkten Schlüssen und positiven Ergebnissen, seine Gedankenarbeit wird „ökonomisch"; und der indirekte Teil reduziert sich auf ein allgemeines Schema, womit ebenfalls eine Ersparnis erzielt wird

26. Im Gegensatz zur *einfachen* Umkehrung des Satzes „Aus a folgt b", die rein logisch aus ihm folgt, ist seine *„vollständige"* Umkehrung „Aus b folgt a" ein selbständiger Satz, der, sofern er wahr ist, eines neuen Beweises bedarf. Es liegt darum keineswegs in der Natur der vollständigen Umkehrung, daß sie indirekt bewiesen werden müßte.[1])

Ein Fall jedoch existiert, wo auch für sie der indirekte Beweis nachweislich der kürzeste und gedanklich einfachste ist, dort nämlich, wo außer dem Satz „Aus a folgt b" auch seine *„Ergänzung"* „Aus non-a folgt non-b" bewiesen ist. Ersichtlich ist die vollständige Umkehrung des ersten die einfache des zweiten Satzes; von der Ergänzung zur vollständigen Umkehrung ist darum nur ein ganz schematischer Übergang rein logischer Art zu vollziehen.

1) Sollte etwa eine Verwechslung der einfachen und vollständigen Umkehrung die Ursache der auffallenden Tatsache sein, daß die meisten Beispiele pseudo-indirekter Beweise sich bei vollständigen Umkehrungen (wie beim Beispiel des § 23) vorfinden?

Angenommen, man habe neben dem pythagoreischen Lehrsatz „Wenn $\gamma = 90^0$, so ist $c^2 = a^2 + b^2$“ noch die beiden anderen Sätze bewiesen: „Wenn $\gamma < 90^0$, so ist $c^2 < a^2 + b^2$; wenn $\gamma > 90^0$, so ist $c^2 > a^2 + b^2$“, was mit den Methoden des ersteren oder auch aus ihm selbst leicht geschehen kann. Dann sind je zwei dieser drei Sätze die Ergänzung des dritten, so daß alle drei vollständig umkehrbar sind.

Aus dem Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck leitet man in bekannter Weise ab, daß der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüberliegt. Da wiederum von den drei Aussagen: „Aus $a > b$ folgt $\alpha > \beta$, aus $a = b$ folgt $\alpha = \beta$, aus $a < b$ folgt $\alpha < \beta$“ je zwei die dritte ergänzen, lassen sie sich auf rein logischem Wege vollständig umkehren. Die Lehrbücher bevorzugen jedoch in diesem Falle wie an ähnlichen Beispielen die umständlicheren konstruktiven Beweise.[1]) In der logischen Methodik dürften sich demnach noch manche, für den Elementarunterricht nutzbringende Anregungen finden, und es sollte insbesondere der Hochschulunterricht in dieser Richtung vorbildlich zu wirken bestrebt sein.

27. Man könnte versucht sein, die auffallende indirekte Fassung des Transzendenzbeweises auf gewisse, dem *„elementaren Standpunkt“* eigentümliche formale Gewohnheiten zurückzuführen, die der *„höhere Standpunkt“* noch nicht abgestreift hat. Da ist zunächst der Horror vor demjenigen Vacuum, das durch das Fehlen des Gleichheitszeichens hinter einem Rechenausdruck entsteht. Er ist auch psychologisch verständlich; denn im Gegensatz zu der die Anschauung anregenden und damit wenigstens Wahrnehmungserkenntnis erzeugenden geometrischen Figur bleibt ein Rechenausdruck eine problematische Vorstellung, solange nichts über ihn ausgesagt, solange er nicht einer Gleichung einverleibt ist. Eine solche erhält man aber faute de mieux jederzeit vermittels der Zeichen „$= 0$“. Daher auch die unglückliche negative Fassung des Lindemannschen Satzes, der wir zumeist begegnen, und die den indirekten Beweis geradezu provoziert: „Eine *Gleichung* $C_1 e^{c_1} + \cdots + C_n e^{c_n} = 0$ kann nicht bestehen, wenn usw.“ Das *„funktionale Denken“* wird ja in einer hoffentlich nicht allzufernen Zeit im Elementarunterricht die einseitige Betonung der „Gleichungen“ verdrängen. Vorläufig hat der akademische Lehrer noch immer hartnäckig gegen die Zerlegung der „Gleichung“ $x^2 - 5x + 6 = 0$ in Linearfaktoren, gegen die „Gleichung“

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

des Abstandes zweier Punkte, gegen die Berechnung des Abstandes eines

1) Für den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel ist dies z. B. bei Spieker (a. o. O. § 49) dadurch geboten, daß seine Umkehrung vor seiner Ergänzung durch den Satz von den Gegenwinkeln ungleicher Seiten gebracht wird. Für letzteren gibt Spieker sowohl den rein logischen wie einen konstruktiven Beweis der Umkehrung (a. o. O. § 51).

Punktes von einer Geraden durch Einsetzen seiner Koordinaten in ihre „Gleichung" usw. anzukämpfen, und als Trost bleibt ihm lediglich die Möglichkeit, den um die Fortschritte seines Sprößlings besorgten Vater mit den Worten zu beruhigen: „Ihr Sohn ist jetzt im *vierten* Semester bereits bei den Gleichungen *fünften* Grades; wenn er so fortfährt, wird er bald sein Examen bestehen können."

Immerhin, auch wir beugen uns dem Horror vacui vermittels des Zeichens „$= E$", haben dabei indes den Vorteil, auf *direktem* Wege $|E| > 0$ zu erhalten, während derjenige, der für E eine Null schreibt, zu dem Widerspruch $|0| > 0$ und damit zu dem *indirekten* Beweise gelangt.

28. Der klassische Formalismus der Darstellung durch „*Voraussetzung, Behauptung, Beweis*" verlangt für jeden Lehrsatz die hypothetische Form: „Wenn ..., so ..." Für den Satz „e ist transzendent" kann sie durch folgende Fassung gewonnen werden: „*Wenn* e eine algebraische Zahl ist, *so* ergibt sich ein Widerspruch", womit dann der Beweis von vornherein auf das indirekte Geleise gelenkt ist.

Dieser Erklärungsversuch ist ebenso unliebenswürdig und haftet nicht minder an der Oberfläche der Dinge wie der vorangehende. Immerhin aber sind wir in dem klassischen Formalismus einer brauchbaren Anregung näher gekommen.

Es ist einmal der Vorschlag gemacht worden — ich kann mich leider nicht mehr darauf besinnen, wann und wo —, man solle, ähnlich wie den Konstruktionsaufgaben, auch den Beweisen der Lehrsätze eine *Analysis* voranschicken. Eine „*Analysis des Beweises*", eine methodische Anleitung, zu einem gegebenen Satze den Beweis zu suchen, das bedeutet, logisch gesprochen, ein Verfahren, Gründe zu einer gegebenen Folgerung aufzufinden. Folgerungen aus gegebenen Gründen findet man durch die Operation des *Schließens*. Was hier gefordert wird, wäre eine zum Schließen gewissermaßen „*inverse*" Operation. Gibt es eine solche? Dann ist sie jedenfalls so wenig bekannt, daß die Sprache noch kein Wort für sie geprägt hat.

Durch die Operation des Schließens findet man die Lehrsätze selbst; soll also der Schüler selbständig Wahrheiten suchen, so ist das leichtere Problem die Auffindung des *Satzes*, nicht die Auffindung des *Beweises* zu einem gegebenen Satze. Beispielsweise ist die Frage: „Was läßt sich aus der Gleichheit zweier Seiten eines Dreiecks folgern" schon ihrer größeren Allgemeinheit wegen einfacher als die andere: „Wie kann man aus der Gleichheit zweier Seiten die der gegenüberliegenden Winkel beweisen."

Diese Erwägung gilt allgemein für die mathematische Forschung. Solange wir uns rein im Gebiet des Folgerns bewegen, etwa beim Ausbau einer Theorie, befinden wir uns in der Lage eines Mannes, der die Umgebung seines Aufenthaltsortes auf lohnende Wanderungen untersucht. Ohne räumliches Ziel wandernd, ist er in der Lage, an jeder Wegeteilung die Fortsetzung nach Belieben zu wählen. Gehen wir dagegen auf die Suche nach dem Beweise eines vorgegebenen Satzes, so gleichen wir dem Wanderer, der einen ganz bestimmten Punkt erreichen will. Wie diesem sein Vorhaben durch falsche Entscheidung über die Fortsetzung an einer Wegeteilung vereitelt werden kann, so kann der Forscher auf eine Schlußkette geraten, aus deren Sätzen das angestrebte Ergebnis überhaupt nicht zu erschließen ist.

Die Forderung der Analysis des Beweises ist somit für das, was sie leisten soll, nämlich für die Förderung heuristischer Denkweise im Elementarunterricht, zu eng gestellt, und wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir die Ursache dieser Einseitigkeit in dem Versuch sehen, mit dem klassischen Formalismus „Voraussetzung, Behauptung, Beweis" auszukommen. Nicht durch seine Erweiterung, nicht durch Hinzufügung eines Mittelgliedes, sondern nur durch Emanzipation von seiner völlig auf die Darstellung *fertiger Ergebnisse* zugeschnittenen Methode kann man dem heuristischen Denken nach allen Seiten gerecht werden.

29. Selbstverständlich bestreiten wir hiermit keineswegs, daß in zahlreichen Fällen die Aufgabe tatsächlich dahin gestellt ist, einen gegebenen Satz zu beweisen bzw. zu widerlegen. Die geometrische Anschauung legt uns oft genug bestimmte Vermutungen nahe; auch bei dem Versuch, einen Satz umzukehren, ist die zu beweisende Behauptung von vornherein bekannt. Vor allem aber gehört gerade die Transzendenz von e und π zu denjenigen Tatsachen, die lange, ehe man sie beweisen konnte, vermutet, ja für fast gewiß gehalten wurden. Wir nehmen daher die vorhin gestellte Frage auf, wie man sich eine Analysis des Beweises zu denken hat, wie insbesondere die zum Schließen inverse Operation auszuführen ist.

Das Schema der einfachen logischen Umkehrung läßt sich folgendermaßen aussprechen: „Wenn a ein *Grund* von b ist, so ist non-a eine *Folge* von non-b". Wir können also die Aufsuchung von *Gründen* in einfacher, rein logischer Weise auf Negationen und *Folgerungen* zurückführen. Um einen Grund für die Wahrheit von b zu finden, kann ich so verfahren, daß ich aus der Annahme des Gegenteils, non-b, Folgerungen ziehe und untersuche, ob eine von diesen widerlegbar, d. h. ob ihr „*Negat*" eine als wahr feststehende oder erweisliche Tatsache ist.

Was wir hier beschrieben haben, ist der indirekte Beweis. In ihm haben wir also eine *Beweisanalysis* zu sehen und können das an Beispielen leicht im einzelnen verfolgen.

30. Angenommen, wir wollten von irgend einem Ausdruck E, der numerisch völlig bestimmt ist, nachweisen, daß er nicht verschwindet. Wir nehmen an, er sei null, und betrachten die Folgerungen, die sich daraus ziehen lassen. Beispielsweise: Jedes Produkt, das E als Faktor enthält, verschwindet. Wird E als Produkt dargestellt, so verschwindet mindestens ein Faktor. Nach jedem Modul ist E zu Null kongruent.

Ist es Differenz zweier Zahlen, so sind diese selbst, ist es Summe zweier Zahlen, so sind deren absolute Werte einander gleich.

Das Nichtverschwinden von E kann daher bewiesen werden, erstens durch Angabe eines nichtverschwindenden Produktes mit dem Faktor E; zweitens durch Zerlegung von E in nichtverschwindende Faktoren; drittens durch Angabe einer Zahl, von der E kein ganzzahliges Vielfaches ist; viertens durch Darstellung von E als Differenz zweier ungleicher Zahlen oder fünftens als Summe zweier Zahlen von verschiedenen absoluten Beträgen. Letzteres geschieht beispielsweise durch Abschätzung.

Diese Hilfsmittel, deren Liste sich beliebig weit fortsetzen ließe, sind uns so geläufig und finden so mannigfache Anwendung, daß wir sie in praxi niemals indirekt ab ovo herleiten werden. Ihre Anwendung im Transzendenzbeweis rechtfertigt also dessen indirekte Fassung in keiner Weise.

In der Tat kann ja auch keine der genannten Methoden, auch die Abschätzung nicht, als „Grundgedanke" des Transzendenzbeweises angesprochen werden. Dafür sind sie viel zu allgemein. Der Kernpunkt des Beweises ist vielmehr die Abschätzungsfunktion $f(x)$, und bei ihrem schrittweisen Aufbau erst treffen wir auf eine wirklich ungezwungene und naheliegende Anwendung des indirekten Verfahrens. Wir stoßen auf eine von $f(x)$ abhängige Zahl B und bemerken, daß diese im Falle $E = 0$ verschwinden müßte. Die noch verfügbaren Bestimmungsstücke von $f(x)$ gestatten jedoch, $f(x)$ so zu wählen, daß B nicht Null wird, und damit haben wir einen in der Tat zunächst indirekten Beweis für die Behauptung $|E| > 0$ erbracht.

Diesen können wir aber sofort in einen direkten verwandeln, indem wir mit der gewonnenen endgültigen Gestalt der Abschätzungsfunktion die Schätzung wirklich zu Ende führen, die nunmehr ohne jede Annahme über E das Ergebnis $|E| > 0$ liefern muß.

31. Unter „*Rudimenten*" versteht man Teile eines Organismus, die keinen ersichtlichen Zweck besitzen, deren Existenz jedoch entwicklungsgeschichtlich durch die Hypothese einer in früheren Stadien vorhanden gewesenen organischen Funktion erklärt wird. In diesem Sinne glauben wir die heute noch übliche indirekte Fassung des Transzendenzbeweises als ein Rudiment verständlich machen zu dürfen: Ihr leicht rekonstruierbarer Zweck, die Aufstellung der Abschätzungsfunktion, ist hinfällig geworden, seit man es vorzieht, die Abschätzungsfunktion als fertiges Ganze unvermittelt in den Beweis einzuführen. An deren Charakter als „Deus ex machina" bleibt daher das Rudiment der indirekten Beweisanordnung ein peinlicher Erdenrest, ein verräterisches, aber dem heuristischer Anregungen bedürftigen Leser erfreuliches Abzeichen einer Entstehung, die nicht, rein göttlichen Ursprungs, nur in genialer Intuition, sondern auch in der Mitwirkung der mühevolleren menschlichen Arbeit geistiger Zeugung zu suchen ist.

Zweiter Teil.

Allgemeine Vorbereitungen.

IV. Ganze Funktionen.

A. Wertegleichheit und formale Gleichheit.

32. Für das Verständnis des Transzendenzbeweises selbst ohne Belang, dagegen grundlegend für die Einsicht in die Zusammenhänge seiner verschiedenen Fassungen, ist die Tatsache, daß der Rechenapparat der Differentialrechnung, solange er auf ganze rationale Funktionen beschränkt bleibt, eine rein formale Auffassung zuläßt und in dieser auf *elementare* Weise, nämlich ohne Heranziehung des Grenzbegriffs, begründet werden kann. Man bedarf dazu lediglich des sogleich noch schärfer zu präzisierenden Satzes, daß eine ganze Funktion nur auf eine Weise nach Potenzen ihres Argumentes entwickelt werden kann. Wir geben für ihn eine Ableitung, die formalen Rechnungen so weit aus dem Wege geht, wie es uns möglich war. Wir wollen dabei zugleich eine nicht immer richtig beachtete Seite des Satzes hervorheben und benutzen andererseits den Anlaß, um zwanglos die aus der Theorie der ganzen Funktionen für den Transzendenzbeweis zu entlehnenden Hilfsmittel zusammenzustellen.

33. Eine *„Funktion"* kann auf zwei inhaltlich verschiedene Weisen definiert werden. Nach der älteren, *„formalen"* oder „Eulerschen" Auffassung ist sie ein formaler Rechenausdruck mit unbestimmten (variablen) Größen, nach der neueren, *„abstrakten"* oder „Dirichletschen" Auffassung dagegen eine Zuordnung von Werten, die unter Umständen durch einen analytischen Ausdruck definiert sein *kann*, aber nicht *muß*. Jedenfalls ist nach dieser Auffassung der analytische Ausdruck nur eine *Darstellung* der Funktion. Die ältere Auffassung ist genötigt, um die Funktion kalkulmäßig untersuchen zu können, in gewissen Umformungen des analytischen Ausdrucks keine Abänderung der Funktion zu sehen. Beispielsweise ist $x^2 - 1$ *„dieselbe"* Funktion wie $(x-1)(x+1)$. Die *konsequente* Durchführung der älteren Auffassung zwingt daher zu einer genauen Angabe der in jedem Fall zulässigen Umformungen; die *unbefangene* Anwendung der formalen Rechenhilfsmittel involviert dagegen einen verschleierten Übergang zum Dirichletschen Funktionsbegriff.

34. Es sei $\mathfrak{C}$ ein Bereich von endlich oder unendlich vielen reellen oder komplexen Zahlen c. Wenn zwei formale Rechenausdrücke $A(x)$, $B(x)$ mit einer Variablen x an jeder „*Stelle*" (d. h. für jeden speziellen Wert des Argumentes) $x = c$, die dem Bereich $\mathfrak{C}$ angehört, gleiche Werte, $A(c) = B(c)$, annehmen, so heißen sie „*wertegleich für den Bereich* $\mathfrak{C}$". Enthält $\mathfrak{C}$ alle reellen und komplexen Zahlen überhaupt, so heißen A und B „*wertegleich*" schlechthin. Wir setzen natürlich voraus, daß die Werte von A und B an jeder Stelle *eindeutig bestimmt* sind.

Zwei für $\mathfrak{C}$ wertegleiche Ausdrücke stellen für diesen Bereich „*dieselbe Funktion*" im Dirichletschen Sinne dar.

35. Außer den Wertegleichheiten $1 + 2 = 3$ usw. des gemeinen Rechnens gelten noch eine Reihe von halbformalen und reinformalen Wertegleichheiten für irgendwelche Ausdrücke A, B, C. Als „*halbformale*" seien genannt:

$$A + 0 = A, \quad A \cdot 1 = A, \quad A \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Aus } AB = 0 \text{ und } A \neq 0 \text{ folgt } B = 0.$$

Als „*reinformal*" bezeichnen wir die bekannten fünf Rechengesetze:

$$\text{(1a)} \quad A + (B + C) = (A + B) + C, \qquad A(BC) = (AB)C, \quad \text{(1b)}$$

$$\text{(2a)} \quad A + B = B + A, \qquad AB = BA, \quad \text{(2b)}$$

$$\text{(3)} \quad A(B + C) = AB + AC.$$

Die beiden ersten, die „*assoziativen*" Gesetze, gestatten die klammerfreien Schreibarten $A + B + C$, ABC und mit (2a), (2b), den „*kommutativen*" Gesetzen, zusammen die Umstellung der Glieder in Summen und der Faktoren in Produkten. Das „*distributive*" Gesetz (3) gestattet, die Multiplikation einer Summe durch eine Addition von Produkten zu ersetzen und umgekehrt gemeinsame Faktoren „*auszuklammern*".

36. Unter „*Potenzen*" schlechthin verstehen wir hier Potenzen mit nichtnegativen ganzen Exponenten. Sie sind definiert durch die Bezeichnungsvorschriften:

$$A^{m+1} = A^m A, \quad A^0 = 1.$$

Die zweite gilt auch für $A = 0$. Die Unbestimmtheit des Zeichens 0^0 tritt erst bei Erweiterung des Potenzbegriffs auf.

Unter einer „*endlichen Potenzreihe*" des Argumentes x, auch „*Reihe*" schlechthin genannt, verstehen wir eine Summe von Gliedern der Form ax^n mit konstantem a. Eine Reihe ist „*reduziert*", wenn je zwei Glieder verschiedene Exponenten besitzen, so daß der konstante Faktor von x^μ mit a_μ bezeichnet werden kann. Die Summe $\sum a_\mu x^\mu$ kann alsdann formal über beliebig viele Werte μ von $0, 1, \ldots$ an erstreckt werden, indem man fehlende Potenzen mit dem Koeffizienten 0 multipliziert und als „*unechte*“ Glieder hinzusetzt. Es ist also a_μ für jedes ganze nichtnegative μ eindeutig definiert.

37. Eine nichtreduzierte Reihe $A(x)$ kann durch Zusammenfassen von Gliedern mit gleichen Exponenten (wozu — nötigenfalls — das Umstellen der Glieder und das distributive Gesetz in der besonderen Anwendung[1]) $a'x^\mu + a''x^\mu = (a' + a'')x^\mu$ erforderlich sind) in eine *reduzierte*, $\bar{A}(x) = \sum a_\mu x^\mu$, verwandelt werden. Die Konstanten a_μ heißen die „*reduzierten Koeffizienten*“ von $A(x)$. Zwei Reihen heißen „*koeffizientengleich*“, wenn sie entsprechend gleiche reduzierte Koeffizienten besitzen ($a_\mu = b_\mu$ für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$).

Der höchste in echten Gliedern auftretende Exponent m der reduzierten Darstellung von $A(x)$ heißt „*Grad*“, $a_m x^m$ heißt „*höchstes Glied*“ der Reihe $A(x)$. Als Grad der „*unechten*“ Reihe, die nur unechte Glieder besitzt ($a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 0$) gilt im allgemeinen Null.

38. Ein formaler Rechenausdruck heißt „*ganz*“, wenn er eine endliche Anzahl von Additionen und Multiplikationen (also auch Subtraktionen, da $A - B = A + (-1)B$) auf x und irgendwelche Konstanten auszuüben vorschreibt. Zwei ganze Ausdrücke heißen *umformungsgleich*, wenn sie durch eine endliche Anzahl von Anwendungen der in § 35 genannten Rechenregeln ineinander umgeformt werden können. Potenzreihen sind ganze Ausdrücke, koeffizientengleiche Potenzreihen sind umformungsgleich, umformungsgleiche Ausdrücke sind wertegleich. Ist A zu B, so auch B zu A, ist A zu B, B zu C, so auch A zu C umformungsgleich.

39. Auf Grund des distributiven Gesetzes kann jeder ganze Ausdruck so umgeformt werden, daß zunächst nur Multiplikationen, sodann nur Additionen auszuführen sind. Durch die Multiplikationen können nur Produkte der unmittelbar gegebenen variablen und konstanten Größen, also Glieder der Form ax^μ entstehen. Durch deren Addition entsteht eine Potenzreihe: *Jeder ganze Ausdruck ist zu einer Potenzreihe umformungsgleich.*

40. Die „*ganze Funktion*“ wird abstrakt definiert als eine Funktion, die durch einen ganzen Rechenausdruck dargestellt werden kann. Sie ist also insbesondere durch eine Potenzreihe ihres Argumentes darstellbar.

Eine ganze Funktion ist eindeutig definiert für jeden reellen oder komplexen Wert des Argumentes. Ersetzt man das Argument durch eine ganze Funktion eines neuen Argumentes, so geht die Funktion in eine ganze Funktion dieses neuen Argumentes über.

41. Man trifft vielfach noch formale Definitionen der ganzen Funktion in Lehrbüchern an. Und zwar wird sie entweder „*engformal*“ als eine Potenzreihe oder „*allgemeinformal*“ als ganzer Rechenausdruck de-

1) Es werden nur Variable ausgeklammert und Konstante eingeklammert.

finiert. Erklärt man *umformungsgleiche* Ausdrücke für *„gleiche“* Funktionen, so kann wegen § 38 nur die allgemeinformale Definition in Frage kommen. Umgekehrt sind daher bei der engformalen Definition nur *koeffizientengleiche* Potenzreihen als ein und dieselbe ganze Funktion anzusehen.

Mangelnde Schärfe in der Unterscheidung der Begriffe *„wertegleich“*, *„umformungsgleich“* und *„koeffizientengleich“* führt in vielen Darstellungen zu mehr oder weniger versteckten Erschleichungen, die glücklicherweise keine fehlerhaften Konsequenzen haben und darum leider nicht hinreichend beachtet werden; *denn die drei genannten Gleichheitsbegriffe decken sich im Gebiet der ganzen Funktionen.*

42. Um dies zunächst für die Begriffe *umformungsgleich* und *koeffizientengleich* einzusehen, definieren wir als *„formale“* Summe $A \dotplus B$ und als *„formales“* Produkt $A \circ B$ zweier Reihen $A = \sum a_\mu x^\mu$, $B = \sum b_\mu x^\mu$ die Reihen $S = \sum s_\mu x^\mu$ und $P = \sum p_\mu x^\mu$ mit den Koeffizienten

$$s_\mu = a_\mu + b_\mu, \quad p_\mu = a_\mu b_0 + a_{\mu-1} b_1 + a_{\mu-2} b_2 + \cdots + a_0 b_\mu.$$

Sodann beweisen wir durch Ausrechnen der Koeffizienten (beispielsweise von $A \circ (B \circ C)$ und $(A \circ B) \circ C$), *daß auch hier die reinformalen Rechengesetze des § 35 gelten, und zwar als* ***Koeffizientengleichheiten.*** Verstehen wir unter 0 die unechte Potenzreihe, unter 1 die Reihe A mit $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \cdots = 0$, so gelten offenbar auch die drei ersten halbformalen Regeln. Die vierte behauptet kurz gesagt, daß das formale Produkt zweier echten Reihen wieder echt ist; zum Beweis zeigt man, daß wenn A und B echt von den Graden m, n sind, $A \circ B$ echt vom Grade $m + n$, nämlich $p_{m+n} = a_m b_n$ wird: das höchste Glied des formalen Produktes ist das Produkt der höchsten Glieder der Faktoren. Ein gleiches gilt von den niedersten Gliedern und beweist ebenfalls die vierte halbformale Regel.

43. Ist nun $G(A, B, C, \ldots)$ ein *„formalganzer“* Ausdruck, der endlichviele *formale* Additionen und Multiplikationen auf die Argumente $A, B, C, \ldots$ auszuüben vorschreibt, so definiert er eindeutig eine ganz bestimmte Potenzreihe in x, wenn die Argumente als Potenzreihen in x definiert werden, da ja der Sinn der Zeichen $A \dotplus B$, $A \circ B$ eindeutig feststeht. Und da die formalen Rechenregeln hier Koeffizientengleichheiten bedeuten, definieren alle mit G umformungsgleichen Ausdrücke koeffizientengleiche Potenzreihen.

Es ist aber jede Konstante a deutbar als Potenzreihe $\sum a_\mu x^\mu$ mit $a_0 = a$, $a_1 = a_2 = \cdots = 0$, x selbst mit $a_1 = 1$, $a_0 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$, und es wird alsdann $a \dotplus b = a + b$, $a \dotplus x = a + x$, $a \circ b = ab$, $a \circ x = ax$, $x \circ x = x^2$ usf. Daher ist jeder ganze Ausdruck in $x, a, b, \ldots$ deutbar als *formalganz, und umformungsgleiche Ausdrücke definieren koeffizientengleiche Potenzreihen.*

B. Formale Darstellung und Werteverlauf.

44. Außer dem soeben bewiesenen Satze

a) *Umformungsgleiche Potenzreihen sind koeffizientengleich,*

gilt noch der bereits in § 41 angekündigte:

b) *Wertegleiche Potenzreihen sind umformungsgleich.*

Der erste enthält die Übereinstimmung der beiden formalen Gleichheitsbegriffe untereinander, der zweite (der wegen § 38 f. nur für Potenzreihen an Stelle von ganzen Ausdrücken überhaupt ausgesprochen zu werden braucht) ihre Übereinstimmung mit dem abstrakten. Beide Sätze ergeben zusammen und folgen, da ex definitione (§ 38) die logischen Umkehrungen gelten, aus:

c) *Wertegleiche Potenzreihen sind koeffizientengleich.*

Dieser Satz kann bewiesen werden in der genaueren Fassung:

d) *Zwei Potenzreihen niederen als n-ten Grades sind koeffizientengleich, wenn sie an n verschiedenen Stellen wertegleich sind,*

und statt dessen genügt der Spezialfall:

d′) *Eine Reihe niederen als n-ten Grades, die n-mal den Wert Null annimmt, hat lauter verschwindende Koeffizienten,*

nämlich nach d), weil sie mit der unechten Reihe an n Stellen wertegleich ist. Sind umgekehrt $\sum a_\mu x^\mu$ und $\sum b_\mu x^\mu$ von niederem Grade als n, so gilt das gleiche von $\sum (a_\mu - b_\mu) x^\mu$. Diese Reihe verschwindet aber an jeder Stelle, an der die beiden ersten wertegleich sind, und ist daher nach d′) unecht, d. h. $a_\mu = b_\mu$, wenn diese Wertegleichheit n-mal eintritt. Die Aussagen d), d′) sind also gleichbedeutend. Mit d′) gleichbedeutend ist noch seine logische Umkehrung:

d″) *Eine echte Reihe m-ten Grades hat höchstens m Nullstellen.*

45. Um d) zu beweisen, beachten wir, daß die n in den Unbekannten a_ν linearen Gleichungen $\sum\limits_\nu a_{\nu-1} c_\lambda^{\nu-1} = p_\lambda$ $(\lambda, \nu = 1, 2, \ldots n)$ die Determinante $|c_\lambda^{\nu-1}|$ besitzen, die nach Vandermonde gleich dem Produkt $\prod\limits_{\lambda > \mu} (c_\lambda - c_\mu)$ der $\frac{1}{2} n (n-1)$ Differenzen $c_2 - c_1$, $c_3 - c_1$, ... $c_n - c_1$ usw. bis $c_n - c_{n-1}$ ist. Sind daher die Werte c_λ alle verschieden, so sind die Gleichungen *eindeutig* und *unbeschränkt* (d. h. für beliebig gegebene p_λ) nach den a_ν auflösbar, und es gibt daher *genau eine* reduzierte Potenzreihe $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ niederen als n-ten Grades mit vorgeschriebenen Werten $A(c_\lambda) = p_\lambda$ an n verschiedenen Stellen. Hiermit ist außer d) noch bewiesen:

d*) *Es gibt stets eine Reihe niederen als n-ten Grades, die an n vorgeschriebenen Stellen vorgeschriebene Werte annimmt.*

46. Da beim Beweis des Vandermondeschen Satzes zumeist Dinge als bekannt vorausgesetzt werden, die hier erst zu beweisen sind, so wollen wir c) noch durch einen anderen Beweis für d″) erhärten.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion, und $B(y) = \sum b_\mu y^\mu$ eine Potenzreihe für die nach § 40 in y ganze Funktion $f(c+y)$, so ist $f(x)$ wertegleich mit $B(x-c)$, weil $f(c+(x-c)) = f(x)$. Die Reihe $\sum b_\mu (x-c)^\mu$ heißt eine „*Entwicklung von* $f(x)$ *an der Stelle* $x = c$". Ihr erster Koeffizient ergibt sich durch $x = c$ als $b_0 = f(c)$, ist also durch den Werteverlauf allein bestimmt.

Ist $A(x) = \sum a_\mu x^\mu$ eine Potenzreihe vom Grade m für $f(x)$, d. h. eine Entwicklung an der Stelle Null, so kann eine Entwicklung an der Stelle c durch *formale* Umrechnung (§ 42) von $\sum a_\mu (c+y)^\mu$ gefunden werden. Dabei ist y höchstes Glied von $c+y$, also nach § 42 y^μ höchstes von $(c+y)^\mu$ und $a_m y^m$ höchstes von $A(c+y)$, d. h. endlich: $a_m (x-c)^m$ höchstes von $B(x-c)$. Ist c eine Nullstelle von $f(x)$, so wird hiernach, weil $b_0 = f(c) = 0$:

(1) $$f(x) = (x-c)\left[b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + a_m(x-c)^{m-1}\right],$$

und die eckige Klammer kann formal wieder in eine Reihe $A_1(x)$ vom Grade $m-1$ umgeformt werden.

47. Soll die Reihe $a_0 x^0$ echt, so muß $a_0 \neq 0$ sein, womit d'') für den Grad 0 bewiesen ist. Sei ferner d'') für den Grad $m-1$ bewiesen und c eine Nullstelle[1]) der Reihe m-ten Grades $A(x)$. Dann wird nach (1) $A(x)$ umformungsgleich, also wertegleich mit einem Produkt $(x-c)A_1(x)$, worin $A_1(x)$ vom Grade $m-1$ ist. Jede von c verschiedene Nullstelle von $A(x)$ muß aber Nullstelle von $A_1(x)$ sein, und da $A_1(x)$ höchstens $m-1$ Nullstellen besitzt, besitzt $A(x)$ deren höchstens m, w. z. b. w.

48. Nachdem nunmehr c) bewiesen ist, dürfen wir auch von „*dem Grade einer ganzen Funktion*" sprechen, was vorher nur auf Grund der engformalen Definition zulässig ist. Wir können ferner in bekannter Weise schließen, daß eine ganze Funktion, die an den n Stellen $c_1, c_2, \ldots c_n$ verschwindet, durch die n Faktoren $x - c_\lambda$, also auch durch

(2) $$g(x) = (x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$$

teilbar sein muß, vorausgesetzt, daß es sich um n voneinander verschiedene Werte c_λ handelt. Zwei an den n Stellen c_λ wertegleiche Funktionen $\chi(x)$, $\bar{\chi}(x)$ stehen also in einer Beziehung von der Form

(3) $$\bar{\chi}(x) = \chi(x) + g(x)h(x),$$

worin $h(x)$ eine ganze Funktion oder die Null ist, letzteres sicher, wenn $\bar{\chi}(x)$ und $\chi(x)$, also auch ihre Differenz von niederem Grade als n sind.

49. Um noch das Korollar d') zu beweisen, betrachten wir die n Funktionen $g_\lambda(x)$, die durch Unterdrückung je eines Linearfaktors aus $g(x)$ hervorgehen:

1) Hat $A(x)$ gar keine Nullstellen, so hat sie a fortiori auch nicht mehr als m.

(4) $$g(x) = (x - c_\lambda) g_\lambda(x).$$

Es wird $g_\lambda(x)$ vom Grade $n - 1$, ferner

(5) $$g_\lambda(c_\mu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \lambda,$$

und $g_\lambda(c_\lambda)$ sicher von Null verschieden. Die Funktion

(6a) $$\chi(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{g_\lambda(x)}{g_\lambda(c_\lambda)} b_\lambda$$

ist daher erstens ganz, zweitens von niederem Grade als n, drittens nimmt sie die beliebig vorschreibbaren Werte

(6b) $$\chi(c_\lambda) = b_\lambda$$

an. Ihre Darstellung durch diese Werte in der Form (6) ist bekannt als „*Interpolationsformel von Lagrange*“. Die allgemeinste mit $\chi(x)$ an den Stellen c_λ wertegleiche ganze Funktion ist in der Form (3) darstellbar.

Anmerkung. Aus (3) und (6) folgt noch die als „*Partialbruchdarstellung*“ bekannte Umformungsgleichheit:

$$\frac{\bar{\chi}(x)}{g(x)} = h(x) + \sum_{\lambda} \frac{\bar{\chi}(c_\lambda)}{g_\lambda(c_\lambda)} \cdot \frac{1}{x - c_\lambda}.$$

50. Wir verallgemeinern die wichtigsten Ergebnisse noch auf ganze Funktionen von k Variablen. Ein formaler Ausdruck heißt „*ganz*“, wenn er eine endliche Anzahl von Additionen und Multiplikationen auf irgendwelche Variablen und Konstanten auszuüben vorschreibt. Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_k)$ heißt „*ganz*“, wenn sie darstellbar ist durch einen „*ganzen*“ Rechenausdruck. Eine ganze Funktion ist daher eindeutig definiert für jede „*Stelle*“, d. h. für jedes spezielle Wertesystem $c_1, c_2, \ldots c_k$ der Argumente. Ersetzt man nur einen Teil der Argumente durch feste Zahlen, so geht sie über in eine ganze Funktion der übrigen Argumente. Ersetzt man die Argumente durch ganze Funktionen neuer Argumente, so geht sie über in eine ganze Funktion von diesen.

51. Wir schreiben zur Abkürzung kleine gotische Buchstaben für „*Folgen*“ mehrerer Zahlen, d. h. für Systeme von k Zahlen in vorgeschriebener Reihenfolge. Um ein solches System explizite anzugeben, setzen wir seine Elemente in der vorgeschriebenen Anordnung zwischen eckige Klammern. So sei $\mathfrak{x}$ das System $[x_1, x_2, \ldots x_k]$ der Argumente; wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, nennen wir das System auch „*das Argument*“ schlechthin und schreiben $f(\mathfrak{x})$ für $f(x_1, x_2, \ldots x_k)$. Eine „*Stelle*“ $\mathfrak{c}$ des Argumentes ist eine Folge $[c_1, c_2, \ldots c_k]$ von gegebenen reellen oder komplexen Zahlen; sie heißt eine „*Nullstelle*“, wenn $f(\mathfrak{c}) = 0$ ist.

Zwei Zahlfolgen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gelten als „*gleich*“, wenn $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots x_k = y_k$ ist. Als „*Potenz*“ $\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$ mit der „*Basis*“ $\mathfrak{x}$ und dem „*Exponenten*“ $\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k]$ definieren wir das Produkt

$$\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}} = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_k^{\mu_k}.$$

Wird als Summe bzw. Differenz $\mathfrak{x} \pm \mathfrak{y}$ zweier Folgen die Folge $[x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots x_k \pm y_k]$ bezeichnet, mit $\mathfrak{o}$ die Nullfolge $[0, 0, \ldots 0]$, so wird
$$\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = \mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}\mathfrak{x}^{\mathfrak{n}}, \quad \mathfrak{x}^{\mathfrak{o}} = 1,$$
und die Aussagen $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ sind gleichbedeutend.

52. Ein ganzer Rechenausdruck ist umformungsgleich einer *„Potenzreihe"* des Argumentes $\mathfrak{x}$, die wir *„reduziert"* denken können und dann als $\sum a_{\mathfrak{m}}\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$ ($a_{\mathfrak{m}} = a_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k}$) über beliebig viele Folgen $\mathfrak{m}$ aus ganzen nichtnegativen Zahlen erstrecken dürfen. Der höchste in echten Gliedern auftretende Wert μ_λ bei festem λ heißt *„Relativgrad"* der Reihe in bezug auf x_λ, der höchste Wert von $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = \mu$ der *„Gesamtgrad"* der Reihe. Sind alle Glieder unecht, d. h. mit verschwindenden Koeffizienten multipliziert, so heißt die Reihe selbst unecht; als ihre Relativ- und Gesamtgrade können Nullen gelten.

53. Die Reihe $A(\mathfrak{x}) = \sum a_{\mathfrak{m}}\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$ kann nach Potenzen irgendeines Einzelargumentes x, etwa x_k, geordnet werden. Dann ist der Koeffizient von x^μ eine Potenzreihe $A_\mu(\bar{\mathfrak{x}})$ des Argumentes $\bar{\mathfrak{x}} = [x_1, x_2, \ldots x_{k-1}]$ Der Koeffizient $a_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k}$ ist Koeffizient von $x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_{k-1}^{\mu_{k-1}}$ in $A_{\mu_k}(\bar{\mathfrak{x}})$. Ist daher $A(\mathfrak{x})$ eine unechte Reihe, so sind alle $A_\mu(\bar{\mathfrak{x}})$ unecht und umgekehrt.

Es *sei* bewiesen, daß eine echte Reihe von $k-1$ Einzelargumenten Stellen besitzt, die nicht Nullstellen sind. Für Reihen eines einzigen Argumentes *ist* dies bewiesen. Sodann sei $A(\mathfrak{x})$ eine echte Reihe von k Einzelargumenten und m der Relativgrad in bezug auf $x = x_k$, also $A_m(\bar{\mathfrak{x}})$ echt. Ist $\bar{\mathfrak{c}} = [c_1, c_2, \ldots c_{k-1}]$ eine Stelle, an der $A_m(\bar{\mathfrak{x}})$ nicht verschwindet, $A_m(\bar{\mathfrak{c}}) \neq 0$, so wird $\sum A_\mu(\bar{\mathfrak{c}})x^\mu$ eine echte Reihe des einen Argumentes x. Es gibt also einen Wert c_k, für den sie nicht verschwindet, *und* $\mathfrak{c} = [c_1, c_2, \ldots c_k]$ *ist eine Stelle, an der* $A(\mathfrak{c})$ *von Null verschieden ausfällt.* Demnach kann eine Reihe mit beliebig vielen Argumenten nur dann an jeder Stelle verschwinden, wenn sie unecht ist, und es folgt wie in § 44, *daß wertegleiche Potenzreihen gleiche reduzierte Koeffizienten besitzen.*

C. Der Ableitungskalkul.

54. Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion des Argumentes x und vielleicht irgendwelcher weiterer Argumente. Ersetzen wir x durch die ganze Funktion $x + \xi$ der Argumente x und ξ, so wird $f(x + \xi)$ eine ganze Funktion in den alten Argumenten und in ξ. Nach Potenzen von ξ entwickelt, sei
$$f(x + \xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + \cdots$$
Für $\xi = 0$ ergibt sich A_0 als wertegleich mit $f(x)$, es ist also auch formal $A_0 = f(x)$.

A_1 wird eine Funktion von x und den anderen ursprünglichen Argumenten. Wir nennen sie die *„nach x abgeleitete"* zu $f(x)$ gehörige Funktion, kürzer die *„Abgeleitete von $f(x)$ nach x"* und bezeichnen sie

a) mit $f'(x)$, wenn Zweifel über das Argument, nach dem abzuleiten ist, nicht bestehen und die Angabe der andern Argumente sich erübrigt, z. B. wenn x einziges Argument ist,

b) provisorisch mit $f_x(x, y, \ldots)$, wenn die soeben genannten Bedingungen nicht erfüllt sind.

Hiernach wird

$$f(x+\xi) = f(x) + \xi f'(x) + \xi^2(\ldots),$$

worin „$(\ldots)$" eine ganze Funktion bezeichnet, die uns nicht weiter interessiert.

Das Wort *„Ableitung"* reservieren wir für die beschriebene Rechenoperation, durch die die *„Abgeleitete"* gebildet wird.

55. Ist $f(x, y)$ eine Funktion von mindestens zwei Argumenten x, y, so wird

$$\begin{aligned} f(x+\xi, y+\eta) &= f(x, y+\eta) + \xi f_x(x, y+\eta) + \xi^2(\ldots) \\ &= f(x, y) + \eta f_y(x, y) + \xi f_x(x, y) + \xi\eta f_{xy}(x, y) \\ &\quad + \xi^2(\ldots) + \eta^2(\ldots). \end{aligned}$$

Entwickelt man zuerst nach η, dann nach ξ, so erhält das Glied mit $\xi\eta$ den Faktor $f_{yx}(x, y)$:

Bei wiederholter Ableitung nach verschiedenen Argumenten ist die Reihenfolge ohne Bedeutung.

56. Ist $\Phi(\mathfrak{u})$ eine Funktion von k Argumenten $u_1, u_2, \ldots u_k$, so wird ganz ebenso wie in § 55:

$$\Phi(\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) = \Phi(\mathfrak{u}) + \sum_{\lambda=1}^{k} \Phi_{u_\lambda}(\mathfrak{u}) \cdot v_\lambda + \sum_{\lambda,\mu} v_\lambda v_\mu(\ldots).$$

Sind die Argumente u_λ ihrerseits Funktionen eines Argumentes x (wobei ebenso wie in Φ noch beliebige weitere Argumente auftreten können, die jedoch nicht variiert werden), so wird:

$$u_\lambda(x+\xi) = u_\lambda(x) + v_\lambda, \quad \text{darin} \quad v_\lambda = \xi u_\lambda'(x) + \xi^2(\ldots).$$

In der Entwicklung von $\Phi(\mathfrak{u}+\mathfrak{v})$ werden alle Glieder $v_\lambda v_\mu$ von der Form $\xi^2(\ldots)$. Als Glied ersten Grades in ξ bleibt $\sum \Phi_{u_\lambda} \cdot u_\lambda' \cdot \xi$, und wir erhalten damit die bekannte Formel der *„partiellen Ableitung"*, die in nuce die ganze Differentialrechnung enthält:

Ist $f(x) = \Phi(\mathfrak{u})$, darin $u_\lambda = u_\lambda(x)$, so ist

(1) $$f'(x) = \sum_{\lambda=1}^{k} \Phi_{u_\lambda}(\mathfrak{u}) \cdot u_\lambda'(x).$$

Insonderheit: *Ist $f(x) = \varphi(u)$, darin $u = u(x)$, so ist*

$$f'(x) = \varphi'(u) \cdot u'(x).$$

57. Für die einfachsten Fälle: $f(x) = A_0 x^0$ und $f(x) = A_1 x^1$ erhält man ohne weiteres $f'(x) = 0$ und $f'(x) = A_1$, wobei A_0 und A_1 von x unabhängig sein sollen, aber beliebige andere Argumente enthalten dürfen.

Damit folgt weiter aus (1) für $\Phi(\mathfrak{u}) = \sum A_\lambda u_\lambda$ und $\Phi(\mathfrak{u}) = u_1 u_2$:

(2) *Ist* $f(x) = \sum\limits_\lambda A_\lambda u_\lambda(x)$, *so ist* $f'(x) = \sum\limits_\lambda A_\lambda u_\lambda'(x)$.

Die Ableitung ist eine „lineare" Operation.

(3) *Ist* $f(x) = u_1(x)\, u_2(x)$, *so ist* $f'(x) = u_1(x)\, u_2'(x) + u_1'(x)\, u_2(x)$.

(4) *Ist* $f(x) = x^m$, *so ist* $f'(x) = m x^{m-1}$.

Der Satz (4) ist richtig für $m = 0$ und $m = 1$. Ist er richtig für x^n, so folgt aus der Produktformel (3) seine Gültigkeit für $x^{n+1} = x^n \cdot x$, indem man $u_1(x) = x^n$, $u_2(x) = x$ setzt.

58. Wir definieren die höheren Abgeleiteten in bekannter Weise als Ergebnisse wiederholter Ableitungen, speziell für *eine* Variable durch die Bezeichnungsvorschriften:

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(\varrho+1)}(x) = f^{(\varrho)\prime}(x).$$

Für k Variable bezeichnen wir das Ergebnis von je ϱ_λ Ableitungen nach x_λ, wobei die Reihenfolge nach § 55 belanglos ist, mit

$$f^{(\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_k)}(x_1, x_2, \ldots x_k),$$

kürzer für $\mathfrak{r} = [\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_k]$ mit

$$f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x}), \quad \text{speziell } f(\mathfrak{x}) \text{ mit } f^{(\mathfrak{o})}(\mathfrak{x}).$$

Die Zahlen ϱ_λ sind die *„Relativordnungen"* der Abgeleiteten $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x})$, $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k$ ist ihre *„Gesamtordnung"*.

59. Die ϱ-te Abgeleitete von x^m ist $m(m-1)\ldots(m-\varrho+1)\, x^{m-\varrho}$ für $\varrho \geqq 1$. Um auch $\varrho = 0$ zu berücksichtigen und eine geschlossene Darstellung zu gewinnen, schreiben wir sie als

(5a) $$\varrho! \binom{m}{\varrho} x^{m-\varrho},$$

wobei $\varrho!$ und $\binom{m}{\varrho}$ in bekannter Weise definiert sind durch:

(6) $$0! = 1, \quad (\varrho+1)! = \varrho!\,(\varrho+1);$$

(7) $$\binom{m}{0} = 1, \quad \binom{m}{\varrho+1} = \binom{m}{\varrho} \frac{m-\varrho}{\varrho+1}.$$

Für $0 \leqq \varrho \leqq m$ folgt daraus noch

(8a) $$\binom{m}{\varrho} = \frac{m!}{\varrho!\,(m-\varrho)!} = \binom{m}{m-\varrho}, \quad \text{speziell } \binom{m}{m} = 1.$$

Denn diese Fakultätendarstellung ist richtig für $\varrho = 0$ und ferner für $\varrho + 1$, wenn sie für ϱ richtig ist.[1])

Die m-te Ableitung von x^m wird konstant, gleich $m!$, daher jede höhere Null, was sich durch das Verschwinden von $\binom{m}{\varrho}$ für $\varrho > m$ nach (7) formal zeigt.

60. Nunmehr wird auch für $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$, wenn wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$\mathfrak{r}! = [\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_\lambda]! = \varrho_1!\, \varrho_2! \dots \varrho_k!, \qquad \mathfrak{o}! = 1, \tag{9}$$

$$\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}} = \binom{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k}{\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_k} = \binom{\mu_1}{\varrho_1}\binom{\mu_2}{\varrho_2}\cdots\binom{\mu_k}{\varrho_k}, \qquad \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{o}} = 1, \tag{10}$$

die allgemeine Abgeleitetete darstellbar als

$$f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{r}!\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}}\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}-\mathfrak{r}}. \tag{5b}$$

Wenn eines der ϱ_λ größer ist als sein zugehöriges μ_λ, wenn also einer der Einzelexponenten $\mu_\lambda - \varrho_\lambda$ negativ wird, so verschwindet zugleich mit $\binom{\mu_\lambda}{\varrho_\lambda}$ auch $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}}$. Andernfalls ist wieder

$$\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{m}!}{\mathfrak{r}!\,(\mathfrak{m}-\mathfrak{r})!} = \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}-\mathfrak{r}}, \quad \text{speziell} \quad \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}} = 1. \tag{8b}$$

61. Da x_λ eine ganze Funktion des Argumentes $y_\lambda = x_\lambda - c_\lambda$ ist, wird $f(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{c} + \mathfrak{y})$ eine ganze Funktion des Argumentes $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \mathfrak{c}$ und gestattet daher eine *„Entwicklung an der Stelle* $\mathfrak{c}$“, d. h. nach Potenzen von $\mathfrak{x} - \mathfrak{c}$:

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{m}} b_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{x} - \mathfrak{c})^{\mathfrak{m}}. \tag{11a}$$

Da es gleichgültig ist, ob nach x_λ oder $y_\lambda = x_\lambda - c_\lambda$ abgeleitet wird (denn die Abgeleitete von y_λ nach x_λ ist gleich 1), so wird

$$f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{r}!\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}} b_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{x} - \mathfrak{c})^{\mathfrak{m}-\mathfrak{r}}.$$

Glieder mit $\varrho_\lambda > \mu_\lambda$ fallen überhaupt heraus, Glieder mit einem $\varrho_\lambda < \mu_\lambda$ verschwinden durch den Faktor $(x_\lambda - c_\lambda)^{\mu_\lambda - \varrho_\lambda}$ für $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$. Es wird also $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{c})$ nur aus dem einen Glied bestehen, in dem $\varrho_\lambda = \mu_\lambda$ für $\lambda = 1$ bis k, d. h. $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}$ ist:

$$f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{r}!\, b_{\mathfrak{r}}. \tag{11b}$$

Dies ist die allgemeine Taylorsche Darstellung der Entwicklungs-

---

[1]) $\binom{m}{\varrho+1} = \frac{m!}{\varrho!\,(m-\varrho)!}\cdot\frac{m-\varrho}{\varrho+1} = \frac{m!\,(m-\varrho)}{\varrho!\,(\varrho+1)\cdot(m-\varrho-1)!\,(m-\varrho)}$
$= \frac{m!}{(\varrho+1)!\,(m-(\varrho+1))!}.$

koeffizienten, die zumeist in der aus (11a) und (11b) folgenden *„Taylorschen Formel“* wiedergegeben wird:

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{c})}{\mathfrak{r}!}(\mathfrak{x}-\mathfrak{c})^{\mathfrak{r}}. \tag{12}$$

62. Auf Grund unserer Definition der Abgeleiteten in § 54 ist:

$$f(x+\xi) - f(x) = \xi\,[f'(x) + \xi(\ldots)];$$

daher

$$\lim_{\xi=0} \frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi} = f'(x),$$

d. h. unsere formale Definition der abgeleiteten Funktion deckt sich mit derjenigen der höheren Analysis.

D. Ganzzahlige Funktionen.

63. Eine ganze Funktion $f(\mathfrak{x})$ heißt *„ganzzahlig“*, wenn die reduzierten Koeffizienten ihrer Potenzentwicklung (an der Stelle $\mathfrak{o}$) ganze Zahlen sind. Aus dieser Definition folgt:

a) *Ordnet man $f(\mathfrak{x})$ nach Potenzen eines Teiles der Argumente, so sind die Koeffizienten ganzzahlige Funktionen der übrigen Argumente, sofern $f(\mathfrak{x})$ ganzzahlig ist, und umgekehrt.*

b) *Setzt man für einen Teil der Argumente einer ganzzahligen Funktion ganze Zahlen ein, so entsteht eine ganzzahlige Funktion der übrigen Argumente. An jeder ganzzahligen Stelle* $\mathfrak{c}$ ($c_1, c_2, \ldots, c_k$ ganze Zahlen) *hat eine ganzzahlige Funktion einen ganzzahligen Wert.* (Nicht umkehrbar! Z. B. hat auch die nicht ganzzahlige Funktion $\frac{1}{2}x(x-1)$ an jeder ganzzahligen Stelle einen ganzzahligen Wert.)

64. Man überzeugt sich mühelos, daß Summen, Differenzen und Produkte ganzzahliger Funktionen ebensolche Funktionen sind. Daraus folgt:

c) *Setzt man für die Argumente einer ganzzahligen Funktion ganzzahlige Funktionen neuer Argumente, so entsteht eine in diesen neuen Argumenten ganzzahlige Funktion.*

d) *Die Entwicklung von $f(\mathfrak{x})$ an einer ganzzahligen Stelle hat ganzzahlige Koeffizienten, sofern $f(\mathfrak{x})$ eine ganzzahlige Funktion ist, und umgekehrt;* denn x_λ ist alsdann eine ganzzahlige Funktion von $y_\lambda = x_\lambda - c_\lambda$ und umgekehrt.

Dies erkennt man auch aus folgendem allgemeineren Satze:

e) *Ist $f(\mathfrak{x})$ eine ganzzahlige Funktion, so auch* $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x}) : \mathfrak{r}!$ *und damit* $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x})$. Denn $f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})$ ist eine ganzzahlige Funktion der Argumente $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, hat aber, nach Potenzen von $\mathfrak{y}$ geordnet, die Koeffizienten $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x}) : \mathfrak{r}!$, woraus nach § 63a) die Behauptung folgt.

65. *Anmerkung:* Jede ganze Funktion $f(\mathfrak{x})$, ob ganzzahlig oder nicht, ist eine ganzzahlige Funktion ihrer *Argumente und Koeffizienten;*

das gleiche gilt daher von den Funktionen $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x}):\mathfrak{r}!$: *die Zahlen* $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}}$ *müssen ganz sein.* Wir werden dies noch auf andere Weise verifizieren.

66. Die Funktion $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ ist ganzzahlig in $\mathfrak{x}$, daher auch $f(\mathfrak{x}) = [\sum x_\nu]^{\mathfrak{m}}$ als ganzzahlige Funktion von y. Wir errechnen ihre Entwicklung nach Potenzen von $\mathfrak{x}$, d. h. an der Stelle $\mathfrak{o}$.

Da die Abgeleiteten von y nach jedem x_λ gleich 1 sind, wird $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x}) = \varrho!\binom{m}{\varrho}y^{m-\varrho}$, darin $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k$ die Gesamtordnung von $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{x})$. Für $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ ist $y = 0$, daher auch $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{o}) = 0$, außer wenn $\varrho = m$, $f^{(\mathfrak{r})}(\mathfrak{o}) = m!$ ist. Es wird also

$$\text{(1a)}\qquad \left[\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu\right]^m = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{m!}{\mathfrak{r}!}\mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} = \sum_{\varrho_1,\varrho_2,\ldots\varrho_k} \frac{m!}{\varrho_1!\,\varrho_2!\ldots\varrho_k!}\cdot x_1^{\varrho_1}x_2^{\varrho_2}\ldots x_k^{\varrho_k},$$

die Summe zu erstrecken über alle nichtnegativen ganzen Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_k$, für die

$$\text{(1b)}\qquad \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k = m$$

gilt.

Diese Formel enthält den sogenannten „*polynomischen Lehrsatz*“, dessen Spezialfall für $k = 2$ als „*binomischer Satz*“ allgemeiner bekannt ist. Für diesen wird

$$\varrho_2 = m - \varrho_1, \quad \frac{m!}{\varrho_1!\,\varrho_2!} = \binom{m}{\varrho_1}, \quad (x_1+x_2)^m = \sum_{\varrho=0}^{m}\binom{m}{\varrho}x_1^{\varrho}x_2^{m-\varrho}.$$

Da $f(\mathfrak{x})$ ganzzahlig ist, sind die in Bruchform dargestellten Koeffizienten, speziell die „*Binomialkoeffizienten*“ $\binom{m}{\varrho}$, *ganze* Zahlen, was sich auch independent aus (1b) allein zahlentheoretisch beweisen läßt.

67. Der Polynomialkoeffizient

$$\frac{m!}{\varrho_1!\,\varrho_2!\,\ldots\,\varrho_k!}$$

ist nur dann gleich 1, wenn eines der ϱ_λ gleich m ist und alle anderen gleich Null sind; anders ausgedrückt, wenn $\mathfrak{x}^{\mathfrak{r}}$ eine der reinen Potenzen x_λ^m, keine gemischte Potenz ist.

Wenn m eine Primzahl p ist, so kann es sich gegen den Nenner nur heben, wenn ein ϱ_λ gleich p ist. Denn andernfalls sind alle Faktoren des Nenners kleiner als p. Es sind daher die Koeffizienten aller gemischten Potenzen durch p teilbar, d. h. für eine Primzahl p ist

$$\text{(2)}\qquad \left[\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu\right]^p = \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu^p + p\cdot G(\mathfrak{x}),$$

darin $G(\mathfrak{x})$ eine *ganzzahlige* Funktion.

68. Setzen wir für die x_ν ganze Zahlen c_ν ein, so folgt

$$\left[\sum_{k=1}^{k} c_\nu\right]^p \equiv \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu^{\,p} \pmod{p}.$$

Setzen wir alle $c_\nu = 1$, so wird $\sum c_\nu = \sum c_\nu^{\,p} = k$, also

(3a) $$k^p \equiv k \pmod{p}$$

für jede Primzahl p und jede positive ganze Zahl k; es kann aber k auch negativ oder Null sein, da es, sofern es ganz, zu einem positiven k_1 kongruent, daher $k^p \equiv k_1^{\,p} \equiv k_1 \equiv k \pmod{p}$ ist.

Ist k durch p unteilbar, so folgt aus (3a):

(3b) $$k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Die Formeln (3a), (3b) enthalten einen bekannten zahlentheoretischen Satz von Fermat.

V. Absolutbeträge und Mittelwertsätze.

A. Absolutbeträge.

69. Unter dem Absolutbetrag $|A|$ von $A = A_1 + iA_2$ (A_1, A_2 reell) versteht man die positive Quadratwurzel aus $A_1^2 + A_2^2$; im Falle $A = 0$ und nur dann ist $|A| = 0$. Ist A reell, so ist $|A| = +A$, wenn A positiv, $|A| = -A$, wenn A negativ ist. Ist $\bar{A}$ der zu A konjugiert komplexe Wert $A_1 - iA_2$, so ist $|\bar{A}| = |A|$ und $A\bar{A} = |A|^2$.

Es ist $|AB| = |A|\,|B|$, $|A:B| = |A| : |B|$. Auf Grund dessen ist auch

(1) $$A = \eta\,|A|, \quad |\eta| = 1,$$

und allgemeiner kann die Aussage

(2a) $$|A| \leqq |B|$$

ersetzt werden durch die beiden Aussagen:

(2b) $$A = \eta B, \quad |\eta| \leqq 1,$$

was besonders dann vorteilhaft ist, wenn ein Teil A eines umfangreicheren Ausdrucks abgeschätzt werden soll.

70. Bekanntlich ist $|A_1 + A_2 + A_3 + \cdots| \leqq |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots$, wofür wir allgemeiner sagen können:

Sind $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ *absolut genommen nicht größer als* 1, *so ist:*

(3a) $$\eta_1 B_1 + \eta_2 B_2 + \eta_3 B_3 + \cdots = \eta\,(|B_1| + |B_2| + |B_3| + \cdots), \quad |\eta| \leqq 1.$$

Aus der Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe folgt hieraus für eine komplexe Funktion $f(x)$ des komplexen Argumentes x und irgendeinen Weg von a nach b:

(4a) $$\int_a^b f(x)\,dx = \eta \int_a^b |f(x)|\,|dx|, \quad |\eta| \leqq 1.$$

71. Bekanntlich ist $||A|-|B|| \leqq |A-B|$, wofür wir schreiben können:

(3b) $$|A|-|B| = \eta(A-B), \quad |\eta| \leqq 1.$$

Hiernach wird $(|f(b)|-|f(a)|):(b-a) = \eta(f(b)-f(a)):(b-a)$ und durch Übergang zur Grenze für $b=a=x$, falls die Abgeleiteten nach x von $|f(x)|$ und $f(x)$ existieren:

(4b) $$|f(x)|' = \eta f'(x), \quad |\eta| \leqq 1.$$

B. Die Mittelwertsätze.

72. Sind a, b komplexe Zahlen, so durchläuft der Wert

(5) $$x = a + t(b-a), \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

die „*gerade Bahn*" von a nach b in der Ebene der komplexen Zahlen, im Falle reeller a, b das *Intervall* von a bis b. Den Werten $t=0, t=1$ entsprechen die Endpunkte a, b, den Werten t zwischen 0 und 1 die „*Mittelwerte*" x zwischen a und b.

73. Wird auf gerader Bahn von a nach b integriert, und ist die komplexe Funktion $\varphi(x)$ daselbst einschließlich der Endpunkte stetig, so ist

(6a) $$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \eta(b-a)\varphi(a+\vartheta(b-a)), \quad 0<\vartheta<1, \quad |\eta| \leqq 1.$$

Für reelle Funktionen reellen Arguments kann $\eta=1$ gesetzt werden. Der Satz wird für diesen Spezialfall als „*kleiner*" oder „*einfacher*" *Mittelwertsatz der Integralrechnung* in jedem brauchbaren Lehrbuch der höheren Analysis bewiesen. Die allgemeinere Fassung (6a) folgt aus ihm, wenn wir nach (5) das reelle Argument t einführen und vermittels (4a) zu dem reellen Absolutbetrag des Integranden übergehen. Wir setzen $\varphi(a+t(b-a)) = \psi(t)$, so wird:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 \psi(t)\,dt = \eta_1(b-a)\int_0^1 |\psi(t)|\,dt, \qquad |\eta_1| \leqq 1$$

$$= \eta_1(b-a)|\psi(\vartheta)| = \eta(b-a)\varphi(a+\vartheta(b-a)), \ |\eta| \leqq 1, \ 0<\vartheta<1,$$

womit (6a) bewiesen ist.

74. Sind $\Phi(x)$ und $\Phi'(x)$ auf der geraden Bahn von a nach b einschließlich der Endpunkte stetig, so ist $\Phi(b)-\Phi(a) = \int_a^b \Phi'(x)\,dx$, also nach (6a):

(6b) $$\Phi(b)-\Phi(a) = \eta(b-a)\Phi'(a+\vartheta(b-a)), \quad 0<\vartheta<1, \quad |\eta| \leqq 1.$$

Umgekehrt folgt auch (6a) aus (6b), da für ein unbestimmtes Integral $\Phi(x)$ von $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \Phi'(x), \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

ist. Die Sätze (6a) und (6b) sind hiernach nur verschiedene Fassungen derselben Tatsache.

75. Für das reelle Gebiet wird (6b) als *„Rollesches Theorem“* oder *einfacher Mittelwertsatz der Differentialrechnung* ohne Anwendung des Integralbegriffs mit $\eta = 1$ in jedem brauchbaren Lehrbuch abgeleitet. Mit (5), (1) und (4b) können wir auf diesen Spezialfall wiederum den allgemeinen Fall zurückführen. Wir setzen

$$\Psi(t) = \Phi(a + t(b-a)) - \Phi(a), \quad \text{also} \quad \Psi(0) = 0,$$

so wird:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Psi(1) = \eta_1(|\Psi(1)| - |\Psi(0)|) = \eta_1 |\Psi(\vartheta)|', \ |\eta_1| = 1, \ 0 < \vartheta < 1,$$
$$= \eta \Psi'(\vartheta) = \eta(b-a)\Phi'(a + \vartheta(b-a)), \qquad |\eta| \leqq 1.$$

Allgemeinere Mittelwertsätze als diese, z. B. die Taylorsche Formel, werden im folgenden nicht benutzt.

VI. Die Exponentialfunktion.

A. Konvergenz der Exponentialreihe.

76. Die formal über unendlich viele reelle oder komplexe Größen w_ϱ erstreckte Summe heißt *„konvergent“* und W ihr *„Wert“*, in Zeichen:

$$W = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots = \sum_{\varrho=0}^{\infty} w_\varrho,$$

wenn mit wachsendem m die Werte W_m ihrer *„Abschnitte“*

$$W_m = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_m = \sum_{\varrho=0}^{m} w_\varrho$$

gegen W konvergieren. In diesem Falle ist wegen $w_m = W_m - W_{m-1}$:

$$\lim_{m=\infty} w_m = 0.$$

77. Sind die w_ϱ reell und nicht negativ, so ist $W_m \leqq W_{m+1}$; damit W_m mit wachsendem m nicht beliebig groß werde, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer oberen *„Schranke“*, $S \geqq W_m$ (für jedes m). Alsdann existiert aber nach bekannten Sätzen $\lim W_m$, und es ist $W_m \leqq W$ (wobei das Gleichheitszeichen offenbar nur dann gilt, wenn von w_{m+1} an alle w_ϱ verschwinden). Hieraus folgt noch: Ist für jedes ϱ: $0 \leqq w_\varrho' \leqq w_\varrho$, so ist mit $\sum w_\varrho$ auch $\sum w_\varrho'$ konvergent, da $W \geqq W_m \geqq W_m'$, also W eine Schranke für W_m' ist.

78. Für reelles positives oder negatives w_ϱ ist von den beiden Zahlen $w_\varrho' = \frac{1}{2}(|w_\varrho| + w_\varrho)$ und $w_\varrho'' = \frac{1}{2}(|w_\varrho| - w_\varrho)$ die eine gleich Null, die andere gleich $|w_\varrho|$, daher $0 \leqq w_\varrho' \leqq |w_\varrho|$, $0 \leqq w_\varrho'' \leqq |w_\varrho|$. Mit $\sum |w_\varrho|$ konvergieren daher $\sum w_\varrho'$, $\sum w_\varrho''$, und, weil $w_\varrho = w_\varrho' - w_\varrho''$, also $W_m = W_m' - W_m''$ ist, existiert $\lim W_m$, d. h. auch $\sum w_\varrho$ konvergiert.

Ist $w_\varrho = u_\varrho + i v_\varrho$ komplex, so ist $|u_\varrho| \leqq |w_\varrho|$, $|v_\varrho| \leqq |w_\varrho|$; mit $\sum |w_\varrho|$ konvergieren daher $\sum |u_\varrho|$, $\sum |v_\varrho|$, $\sum u_\varrho$, $\sum v_\varrho$ und damit $\sum w_\varrho = \sum u_\varrho + i \sum v_\varrho$.

Wenn $\sum |w_\varrho|$ konvergiert, so heißt die nach dem soeben Bewiesenen ebenfalls konvergente Reihe $\sum w_\varrho$ *„absolut"* konvergent. Nach § 70 ist

$$\left|\sum_{\varrho=0}^{m} w_\varrho\right| \leqq \sum_{\varrho=0}^{m} |w_\varrho|, \quad \text{also auch} \quad \left|\sum_{\varrho=0}^{\infty} w_\varrho\right| \leqq \sum_{\varrho=0}^{\infty} |w_\varrho|.$$

79. Die unendliche Potenzreihe

$$(1) \qquad E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{x^\varrho}{\varrho!}$$

hat für $x \geqq 0$ nur reelle nichtnegative Glieder. Ferner kann man für ihre Abschnitte

$$(2) \qquad E_m(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} = \sum_{\varrho=0}^{m} \frac{x^\varrho}{\varrho!}$$

eine obere Schranke finden. Für $\bar{m} = m + k$ ist nämlich

$$E_{\bar{m}}(x) = E_m(x) + \frac{x^m}{m!}\left[\frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{x^k}{(m+1)\cdots(m+k)}\right]$$
$$\leqq E_m(x) + \frac{x^m}{m!}\left[\frac{x}{m+1} + \left(\frac{x}{m+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{m+1}\right)^k\right].$$

Auf Grund der elementaren Identität

$$(1-q)(q + q^2 + \cdots + q^k) = q(1 - q^k)$$

ist aber für $0 \leqq q < 1$:

$$q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{q}{1-q}(1 - q^k) \gtreqless \frac{q}{1-q},$$

und daher, wenn $m \geqq x$ gewählt wird:

$$(3) \qquad E_{\bar{m}}(x) < E_m(x) + \frac{x^m}{m!}\,\frac{x}{m+1-x} \qquad (m \geqq x \geqq 0)$$

für jedes $\bar{m} > m$ und a fortiori auch für $\bar{m} \leqq m$. Damit ist, da die rechte Seite von $\bar{m}$ unabhängig ist, die behauptete Schranke gefunden: $E(x)$ *konvergiert für* $x \geqq 0$ *nach* § 77.

80. Für komplexes x ist die Summe der Absolutbeträge $|x|^\varrho : \varrho!$ gleich $E(|x|)$. *Es konvergiert also die Reihe* (1) *in der ganzen Zahlenebene absolut und stellt eine eindeutige Funktion von x dar.* Als Anwendungen der § 76 und 78 erhalten wir sogleich

(4) $$\lim_{m=\infty} \frac{x^m}{m!} = 0 \text{ für jedes } x,$$

sowie:

(5) $$|E(x)| \leqq E(|x|), \text{ d. h. } E(x) = \eta E(|x|), \quad |\eta| \leqq 1.$$

Analog ist auch für den Reihenrest $R_m(x) = E(x) - E_m(x)$:

(6) $$R_m(x) = \eta R_m(|x|), \quad |\eta| \leqq 1.$$

Hierin kann $R_m(|x|)$ für $m \geqq |x|$ nach (3), zweckmäßiger aber *für jedes m* wie folgt geschätzt werden:

$$R_m(|x|) = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\left[1 + \frac{|x|}{m+2} + \frac{|x|^2}{(m+2)(m+3)} + \cdots\right] \leqq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} E(|x|).$$

Da $R_m(|x|) \leqq R_{m-1}(|x|)$ ist, erhalten wir hiermit außer

(7) $$E(x) = E_m(x) + \eta \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} E(|x|), \quad |\eta| \leqq 1$$

noch die meist bequemere Darstellung:

(8) $$E(x) = E_m(x) + \eta \frac{|x|^m}{m!} E(|x|), \quad |\eta| \leqq 1.$$

B. Additionstheorem und Abgeleitete.

81. Aus (2) folgt unmittelbar

(9) $$E_m'(x) = E_{m-1}(x), \quad \text{also} \quad E_m^{(\varrho)}(x) = E_{m-\varrho}(x).$$

Daher wird nach der Taylorschen Reihe für ganze Funktionen:

$$\begin{aligned} E_m(x+y) &= \sum_{\varrho=0}^{m} E_{m-\varrho}(x) \frac{y^\varrho}{\varrho!} \\ &= \sum_{\varrho=0}^{m} E(x) \frac{y^\varrho}{\varrho!} - \sum_{\varrho=0}^{m} \eta_\varrho \frac{|x|^{m-\varrho} y^\varrho}{(m-\varrho)!\,\varrho!} E(|x|), \qquad |\eta_\varrho| \leqq 1 \\ &= E(x) \sum_{\varrho=0}^{m} \frac{y^\varrho}{\varrho!} + \eta E(|x|) \sum_{\varrho=0}^{m} \frac{|x|^{m-\varrho}\,|y|^\varrho}{(m-\varrho)!\,\varrho!}, \qquad |\eta| \leqq 1. \\ &= E(x) E_m(y) + \eta E(|x|) \frac{(|x|+|y|)^m}{m!}, \end{aligned}$$

wenn wir (8), § 70 und den binomischen Satz anwenden. Für $\lim m = \infty$ folgt nach (4):

(10) $$E(x+y) = E(x) E(y).$$

Bezeichnen wir, wie üblich, $E(1)$ mit e, so folgt $E(m) = e^m$ für $m = 0, 1, 2 \cdots$. Es wird daher ganz allgemein e^x für $E(x)$ geschrieben. Die Funktion e^x heißt die *Exponentialfunktion*, die Reihe (1) die *Exponentialreihe*, die Relation (10) das *Additionstheorem*.

82. Die Exponentialfunktion ist differentiierbar, also stetig, und zwar wird für $h \neq 0$ nach (10) und (7) (für $m = 1$):

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \left[1 + \eta \frac{|h|}{2} e^{|h|}\right], \quad |\eta| \leqq 1.$$

Da nun $e^{|h|}$ für $|h| < 1$ kleiner als e wird, folgt:

$$\text{(11)} \qquad \lim_{h=0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{de^x}{dx} = e^x.$$

C. Werteverlauf und Periodizität.

83. Für $x \geqq 0$ ist auf Grund der Exponentialreihe $e^x \geqq 1$, daher $0 < e^x < 1$ für $x < 0$ wegen $e^x e^{-x} = e^0 = 1$. *Für reelles x ist also stets e^x positiv und wächst infolgedessen monoton mit x,* weil nach (11) und dem Rolleschen Theorem $e^b - e^a = (b-a)\, e^{a+\vartheta(b-a)}$ mit $b - a$ gleiches Vorzeichen hat. Mit x zugleich wächst bereits $E_{m+1}(x) : x^m$ *unbeschränkt*, d. h. über jeden vorgegebenen Betrag, für positives x daher a fortiori wegen $e^x > E_{m+1}(x)$ auch $e^x : x^m$; anders ausgedrückt ist für jede Potenz, also auch für jede ganze Funktion $F(x)$:

$$\text{(12a)} \qquad \lim_{x=+\infty} e^{-x} F(x) = 0.$$

84. Für reelles y sind $E_m(yi)$ und $E_m(-yi)$, daher auch e^{yi} und e^{-yi} konjugiert komplex, wegen $e^{yi}e^{-yi} = e^0 = 1$ also vom Absolutbetrage 1, und allgemein:

$$|e^{x+iy}| = |e^x|\,|e^{iy}| = e^x.$$

Auch für komplexes z ist daher e^z niemals Null. Dagegen ist

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x+iy} = 0,$$

weil dies von dem Absolutbetrag e^{-x} gilt, einerlei ob und wie y mit x variiert. Ist $F(z)$ eine ganze Funktion, so ist allgemeiner

$$\text{(12b)} \qquad \lim_{z=+\infty} e^{-z} F(z) = 0,$$

worin $z = +\infty$ bedeutet, daß der reelle Teil x von z gegen $+\infty$ geht, während der imaginäre Teil yi absolut unter einer oberen Schranke k bleibt. Denn alsdann wird

$$|(x+iy)^m| \leqq (x+k)^m$$

und nach (12a) $\lim e^{-x}(x+k)^m = 0$ für $x = +\infty$.

Allgemeiner gilt (12b) auch, wenn y mit x unendlich, aber nicht stärker unendlich wird als eine Potenz von x.

85. Nach (1) wird

$$\text{(13)} \qquad e^{iy} = A(y) + iB(y),$$

darin

$$A(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots, \tag{13a}$$

$$B(y) = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots; \tag{13b}$$

wissen wir daher, daß dies die Reihen für die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus sind, so geht (13) über in die Eulersche Formel

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{14}$$

und es ist klar, daß e^{iy} jeden komplexen Wert vom Absolutbetrag 1, e^{x+iy} jeden komplexen Wert außer Null annehmen kann. Wir wollen indessen dieses Ergebnis ohne die genannten Vorkenntnisse zu gewinnen suchen.

86. Nach (13) ist $2A(y) = e^{iy} + e^{-iy}$, $2iB(y) = e^{iy} - e^{-iy}$; daher sind die Funktionen $A(y)$, $B(y)$ ableitbar und damit stetig; und zwar wird

$$2A'(y) = ie^{iy} - ie^{-iy} = -2B(y),$$

d. h.

$$A'(y) = -B(y) \quad \text{und ebenso} \quad B'(y) = +A(y). \tag{15}$$

Nach dem Rolleschen Theorem nimmt daher $A(y)$ monoton ab oder zu, je nachdem $B(y)$ positiv oder negativ ist, $B(y)$ nimmt monoton zu oder ab, je nachdem $A(y)$ positiv oder negativ ist.

87. Mit der Exponentialreihe konvergieren nach § 77 auch die Reihen (13a, b) absolut für jedes y. Schreiben wir die erste in der Form:

$$-\frac{1}{4!}(-24 + 3\cdot 4y^2 - y^4) - \frac{y^6}{8!}(7\cdot 8 - y^2) - \frac{y^{10}}{12!}(11\cdot 12 - y^2) - \cdots,$$

so erweisen sich für $y = 2$ alle Klammern positiv, daher $A(2)$ als negativ. Weil andererseits $A(0) = 1$ positiv ist, besitzt $A(y)$ als stetige Funktion im Intervall $0 < y < 2$ *mindestens* eine Nullstelle.

Schreiben wir nunmehr (13b) in der Form:

$$\frac{y}{3!}(2\cdot 3 - y^2) + \frac{y^5}{7!}(6\cdot 7 - y^2) + \frac{y^9}{11!}(10\cdot 11 - y^2) + \cdots,$$

so sehen wir, daß im Intervall $0 < y < 2$ ständig $B(y) > 0$, also $A(y)$ *monoton* ist. *Es besitzt also* $A(y)$ *genau eine Nullstelle* ω *zwischen* 0 *und* 2 *und durchläuft für* $0 \leqq y \leqq \omega$ *abnehmend alle positiven Werte von* 1 *bis* 0.

88. Daraus folgt, daß $B(y)$ im Intervall $0 \leqq y \leqq \omega$ monoton zunimmt, *also wegen* $B(0) = 0$, $|B(\omega)| = |e^{i\omega}| = 1$ *alle positiven Werte von* 0 *bis* 1 *durchläuft. Im gleichen Intervalle durchläuft somit* e^{iy} *alle komplexen Werte* $a + bi$ *des Absolutbetrages* 1 *mit nichtnegativen Komponenten* a, b.

Nunmehr ist aber mit $A(\omega) = 0$, $B(\omega) = 1$:

$$e^{i\omega} = i, \quad \text{also} \quad e^{2i\omega} = -1, \quad e^{3i\omega} = -i, \quad e^{4i\omega} = 1, \tag{16}$$

daher

$$(17)\qquad \begin{cases} e^{iy+i\omega} = -B(y) + iA(y), & e^{iy+2i\omega} = -A(y) - iB(y), \\ e^{iy+3i\omega} = B(y) - iA(y), & e^{iy+4i\omega} = e^{iy}, \end{cases}$$

woraus zu ersehen ist, daß e^{iy} *im Intervall* $0 \leqq y < 4\omega$ *alle komplexen Werte vom Absolutbetrag* 1 *durchläuft.* Zugleich ist die Periode $4\omega i$ der Exponentialfunktion entdeckt, und damit entsteht die Frage nach dem Wert von ω.

89. Aus $A(2y) + iB(2y) = e^{2iy} = (e^{iy})^2 = [A(y) + iB(y)]^2$ erhält man durch Entwickeln und Vergleich der reellen Teile:

$$A(2y) = A^2(y) - B^2(y).$$

Mit $|e^{iy}| = 1$, d. h.

$$1 = A^2(y) + B^2(y),$$

kann man im Falle $0 < y < \omega$ hieraus $A(y)$ und $B(y)$ als positive Größen eindeutig finden. *Genau ebenso werden aber* $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ *aus* $\cos 2\varphi$ *berechnet, und da* $\cos\frac{1}{2}\pi = A(\omega) = 0$ *ist, wird hiernach auch*

$$(18)\qquad A(\omega : 2^n) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi : 2^n), \quad B(\omega : 2^n) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi : 2^n)$$

für jedes ganze $n \geqq 1$. Nun folgt aus (13b) mühelos

$$(19)\qquad \lim_{y=0} \frac{B(y)}{y} = 1, \quad \text{also} \quad \lim_{n=\infty} 2^n B(\omega : 2^n) = \omega.$$

Ferner ist nach elementaren geometrischen Sätzen:

$$(20)\qquad \lim_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1, \quad \text{also} \quad \lim_{n=\infty} 2^n \sin(\tfrac{1}{2}\pi : 2^n) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

woraus sich nach (18), (19) ergibt:

$$(21)\qquad \omega = \tfrac{1}{2}\pi.$$

90. *Anmerkung.* Aus (20) und den Additionstheoremen des Kosinus und Sinus beweist man auf bekannten Wegen, daß

$$d(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi$$

ist. Da nun jedes z vom Absolutbetrag 1 auf genau je eine Weise in den beiden Formen

$$z = e^{iy}, \quad 0 \leqq y < 2\omega; \qquad z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

darstellbar ist, erhält man durch Ableitung

$$dz = iz\,dy = iz\,d\varphi, \quad \text{also} \quad dy = d\varphi,$$

und, weil y und φ für $z = 1$ zugleich verschwinden:

$$y = \varphi,$$

womit (14) und (21) gewonnen sind.

D. Allgemeine Exponentialfunktion und Logarithmus.

91. Ist u eine positive Zahl, so gibt es nach § 83 genau *ein* reelles x, so daß $e^x = u$ wird. Dieses x heißt der *„natürliche Logarithmus"* von u, zur Unterscheidung von der allgemeineren Definition für komplexes u auch der *„natürliche Hauptlogarithmus"* von u, in Zeichen:

$$x = \mathrm{Ln}\, u.$$

Aus dem Additionstheorem folgt

$$\mathrm{Ln}\, u + \mathrm{Ln}\, v = \mathrm{Ln}\,(u + v).$$

Wird die komplexe Zahl $u + vi = w$ dargestellt in der Form

$$w = |w|\,(\cos y + i \sin y) \qquad -\pi < y \leqq +\pi,$$

so ist

$$z = \mathrm{Ln}\,|w| + yi + 2k\pi i \quad (k \text{ ganz})$$

die allgemeine Lösung der Gleichung $e^z = w$. Jede Lösung wird ein *„natürlicher Logarithmus"* von w genannt. Das entsprechende Zeichen $z = \ln w$ ist vieldeutig, was wohl zu beachten ist, wenn nicht der Relation

$$\ln w + \ln w' = \ln w w'$$

sinnlose Deutungen untergeschoben werden sollen.

92. Die ganze Funktion $f(x) = e^{\alpha x}$ ist eindeutig, stetig, ableitbar, durch die für jedes reelle oder komplexe x absolut konvergente Reihe $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\mu}{\mu!} x^\mu$ darstellbar und besitzt dasselbe Additionstheorem

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

wie die Exponentialfunktion. Sie wird daher ebenfalls als Exponentialfunktion, und zwar zur Unterscheidung von e^x als *allgemeine*, e^x als *natürliche* Exponentialfunktion bezeichnet. Die Zahl α wollen wir die *„Charakteristik"* von $e^{\alpha x}$ nennen; gewöhnlich wird $1 : \alpha$ der Modul, $e^\alpha = a$ die Basis genannt. Für ganzes m ist $f(m) = a^m$; $f(1 : \alpha)$ hat den Wert e; $f'(x)$ ist gleich $\alpha f(x)$.

93. Ist α reell, so ist die Basis positiv. In diesem Falle kann $f(x)$ mit a^x bezeichnet werden, da die Basis die Charakteristik $\alpha = \mathrm{Ln}\, a$ eindeutig bestimmt. Da die Funktion wiederum *monoton* (wachsend für $a > 1$, fallend für $a < 1$, der Ausnahmefall $a = 1$, $f(x) = 1$ ausgeschlossen) alle positiven Werte durchläuft, existiert für jedes positive u genau eine reelle Lösung der Gleichung $a^x = u$, der *„Hauptlogarithmus von u zur Basis a"*, ${}^a\mathrm{Log}\, u$. Wäre nicht die Basis 10 von so eminenter Bedeutung für das praktische Rechnen, so würde sich die Einführung einer besonderen Bezeichnung nicht verlohnen. Denn die Gleichungen $e^\alpha = a$, $e^{\alpha x} = u$ haben die Lösungen $\alpha = \mathrm{Ln}\, a$, $\alpha x = \mathrm{Ln}\, u$, aus denen

$$x = {}^a\mathrm{Log}\, u = \mathrm{Ln}\, u : \mathrm{Ln}\, a$$

folgt.

94. Bei komplexer Charakteristik darf das Zeichen a^x nur unter besonderen Kautelen benutzt werden, da die Basis a ihren Logarithmus nicht eindeutig bestimmt. *Die Funktionen* $e^{(\alpha+2k\pi i)x}$ *haben für ganzes* k *sämtlich die gleiche Basis, sind aber alle zusammen wertegleich nur für ganzes* x. Das Zeichen a^x ist daher zulässig erstens, wenn nur ganzzahlige Argumente betrachtet werden, zweitens, wenn a nicht *numerisch*, sondern *buchstabenmäßig*, d. h. als Funktions-, nicht als Zahlzeichen benutzt wird, wobei dann für Funktionen verschiedener Charakteristik verschiedene Zeichen zu verwenden sind, ganz einerlei, ob die Basen numerisch verschieden sind oder nicht. So hat zwar $e^{(1+2\pi i)x}$ die Basis e, $e^{2\pi i x}$ die Basis 1, aber niemand wird ernsthaft daran denken, diese Funktionen mit e^x oder 1^x zu bezeichnen.[1])

VII. Exponentialformen.

A. Funktionalformen. Echtheit.

95. Was über die in den formalen Voraussetzungen (V_1), (V_2) des § 1 geforderte „*Reduziertheit*" und „*Echtheit*" einer „*Exponentialform*"

$$\mathsf{E}(\alpha) = C_1 e^{\alpha c_1} + C_2 e^{\alpha c_2} + \cdots + C_n e^{\alpha c_n}$$

zunächst zu sagen ist, betrifft nur die Koeffizienten und Exponenten und gilt daher allgemein von dem formalen Ausdruck

$$K(\varphi) = C_1 \varphi(c_1) + C_2 \varphi(c_2) + \cdots + C_n \varphi(c_n),$$

in dem $\varphi(x)$ eine an den Stellen c_λ eindeutig definierte Funktion bezeichnen soll, und den wir kurz eine „*Funktionalform*" nennen wollen.

Wenn nach „*Reduktion*" von $K(\varphi)$, d. h. nach Zusammenfassung etwa vorhandener Glieder gleichen Argumentes c_λ, nicht alle Koeffizienten null sind, so heißt $K(\varphi)$ ein *echter* Ausdruck. *Unechte* Funktionalformen haben den Wert Null für jedes $\varphi(x)$.

---

1) Dennoch fand ich einmal in einem Lehrbuch einen „*punktierten*" Ast der Exponentiallinie, der Werten wie $e^{\frac{1}{2}} = -|\sqrt{e}|$ entsprechen sollte. Und — ich glaube, noch in diesem Jahrhundert — wurde in einer Unterrichtszeitschrift die Frage erörtert, ob ${}^4\log(-2) = \frac{1}{2}$ sei oder nicht. Für andere als positive Basen und Numeri ist das Zeichen ${}^a\log w$ geradezu gemeingefährlich und sollte, wie L. Fuchs an einem anderen Beispiel zu sagen pflegte: „*bei Todesstrafe verboten werden*". Denn weder a noch w bestimmen im komplexen Gebiet den Sinn von ${}^a\log w$ eindeutig. Wählen wir als Charakteristik von 4^x, wie es sich gehört, Ln 4, so ist $4^{\frac{1}{2}} = +2$ und nichts anderes. Für die komplexen Charakteristiken $\mathrm{Ln}\,4 + 2k\pi i$ ist $4^{\frac{1}{2}} = +2$ oder -2, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Die Frage, ob ${}^4\log(-2) = \frac{1}{2}$ sei, ist also keine Tatsachenfrage, sondern eine Frage der *Bezeichnung*, und zwar, da über die zweckmäßigste Bedeutung von a^x bei positiver Basis kein Zweifel bestehen kann, eine Frage der *unzweckmäßigen* Bezeichnung.

96. *Und umgekehrt: Ist $K(\varphi)$ echt, so gibt es Funktionen $\varphi(x)$, für die $K(\varphi)$ nicht Null ist. Und zwar befinden sich darunter ganze Funktionen, unter diesen ganzzahlige, darunter wieder Potenzen und zwar mindestens eine der n ersten, $\varphi(x) = x^\nu$, $\nu = 0$ bis $n-1$.* Ist nämlich $K(\varphi)$ reduziert, so daß (V_1) und (V_2) gelten, so wird für die Funktionen $g_\nu(x)$ des § 49: $K(g_\nu) = C_\nu g_\nu(c_\nu)$, darin nach (V_1) kein $g_\nu(c_\nu)$ und nach (V_2) nicht jedes C_ν, also auch nicht jedes $K(g_\nu)$ Null.

Sei ferner $K(\varphi)$ für $\varphi(x) = x^\nu$ mit K_ν bezeichnet. Dann ist für jede ganze Funktion

$$\varphi(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m:$$

$$K(\varphi) = a_0 K_0 + a_1 K_1 + a_2 K_2 + \cdots + a_m K_m. \tag{1}$$

Mit K_0 bis K_{n-1} müßte also $K(\varphi)$ für jede ganze Funktion vom Grade $m \leqq n-1$ verschwinden. Die Beispiele $g_\nu(x)$ lehren, daß das nicht zutrifft; unter den Werten K_0 bis K_{n-1} ist daher mindestens einer nicht Null.

97. *Anmerkung 1.* Mit Vorstehendem ist noch bewiesen, daß die Formen $K(\varphi)$ und $K^*(\varphi)$, letztere mit den Koeffizienten $C_\lambda^* = C_\lambda g_\lambda(c_\lambda)$, zugleich echt und reduziert sind.

Anmerkung 2. Ist $w(x) = u(x)v(x)$ und $v(c) = 0$, so ist

$$w'(c) = u(c)v'(c),$$

insbesondere

$$g'(c_\lambda) = g_\lambda(c_\lambda), \tag{2}$$

ferner für $\varphi(x) = g(x)\psi(x)$:

$$\varphi'(c_\lambda) = g'(c_\lambda)\psi(c_\lambda) = g_\lambda(c_\lambda)\psi(c_\lambda), \tag{3}$$

und

$$K(\varphi') = K^*(\psi). \tag{4}$$

Man kann also Funktionen φ angeben, für die $K(\varphi)$ gliedweise verschwindet, während $K(\varphi') \neq 0$ ausfällt.

98. *Anmerkung 3.* Wenn (V_2) erfüllt ist, so gibt es n Zahlen a_λ so, daß $\sum C_\lambda a_\lambda \neq 0$. Beispielsweise für $C_1 \neq 0: a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$. Wenn (V_1) erfüllt ist, kann man alsdann nach §§ 45, 49 eine ganze Funktion $\chi(x)$ bilden, so daß $\chi(c_\lambda) = a_\lambda$, also $K(\chi) \neq 0$ wird.

Wenn K_0 bis K_{n-1} verschwinden, so muß in den n linearen Gleichungen für die $C_\lambda : \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda c_\lambda^{\nu-1} = 0$ entweder die Determinante $|c_\lambda^{\nu-1}|$, $(\lambda, \nu = 1$ bis $n)$ oder jedes einzelne C_λ verschwinden. Die erste Möglichkeit wird durch (V_1) nach § 45, die zweite durch (V_2) unterbunden.

Wir haben diese beiden Beweise zu § 96 anhangsweise aufgeführt, weil sie besonders klar die Eingriffsstellen der Voraussetzungen (V_1), (V_2) zeigen.

B. Exponentialformen.

99. Wählen wir $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ und schätzen $e^{\alpha x}$ nach § 80 mit $E_m(\alpha x)$ und einem Rest $R_m(\alpha x)$ ab, so wird $K(\varphi)$ zu einer Exponentialform $\mathsf{E}(\alpha) = \mathsf{E}_m(\alpha) + \mathsf{P}_m(\alpha)$, darin nach § 96 (1) wegen

$$E_m(\alpha x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha^m}{m!}x^m:$$

(5) $$\mathsf{E}_m(\alpha) = K_0 + \frac{\alpha}{1!}K_1 + \frac{\alpha^2}{2!}K_2 + \cdots + \frac{\alpha^m}{m!}K_m,$$

und nach (7) des § 80:

(6a) $$\mathsf{P}_m(\alpha) = \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda \eta_\lambda \frac{|\alpha c_\lambda|^{m+1}}{(m+1)!} e^{|\alpha c_\lambda|}, \quad |\eta_\lambda| \leqq 1.$$

Diese Darstellung des Restes wollen wir, lediglich der besseren Übersichtlichkeit halber, durch Vergröberung der Abschätzung noch etwas vereinfachen. Es sei c eine Zahl, die nicht kleiner ist als jeder der Absolutbeträge $|c_\lambda|$, z. B. der größte von ihnen, und

$$C = |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_n|;$$

dann wird nach § 70:

(6b) $$\mathsf{P}_m(\alpha) = \eta C \frac{|\alpha c|^{m+1}}{(m+1!)} e^{|\alpha c|}, \quad |\eta| \leqq 1,$$

und nach § 80 Gl. (4) konvergiert $\mathsf{P}_m(\alpha)$ mit wachsendem m gegen Null, was selbstverständlich bereits an (6a) zu erkennen ist.

100. Hiernach wird $\sum C_\lambda e^{\alpha c_\lambda}$ dargestellt durch die für jedes α absolut konvergierende Potenzreihe

$$\mathsf{E}(\alpha) = K_0 + \frac{K_1}{1!}\alpha + \frac{K_2}{2!}\alpha^2 + \frac{K_3}{3!}\alpha^3 + \cdots$$

und kann daher nach einem allgemeinen Potenzreihensatz nicht für jedes α, auch nicht für jedes reelle, d. h. es kann

$$C_1 a^{c_1} + C_2 a^{c_2} + \cdots + C_n a^{c_n}$$

nicht für jedes a verschwinden, es sei denn, daß jedes K_ν Null, die betrachtete Form also unecht ist. Wir erwähnen dies nur der Vollständigkeit halber. Zeigte § 96, daß eine echte Form

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

nicht unabhängig vom Sinn des *Funktionszeichens* e^x verschwindet, so wissen wir jetzt, daß dies auch nicht unabhängig vom Sinn des *Zahlzeichens* e geschehen kann. Daß eine echte Form trotzdem *numerisch* Null sein kann, versteht sich an Beispielen wie $e^0 + e^{\pi i}$ oder $3e^{\ln 2} - 2e^{\ln 3}$ von selbst.

C. Ein Satz von Liouville.

101. Im Jahre 1840 bewies Liouville, daß e keiner echten *ganzzahligen* quadratischen Gleichung

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 = 0, \quad C = |C_1| + |C_2| + |C_3| > 0$$

genügt. Für $C_3 = 0$ ist darin die bereits früher von Fourier auf dem gleichen Weg erkannte Irrationalität von e enthalten. Der Beweis von Liouville beruht auf der Abschätzung des vorigen Abschnitts und ist, von unwesentlichen Modifikationen abgesehen, der folgende:

Mit

$$C_1 + C_2 e + C_3 e^2$$

ist auch

$$E = C_1 e^{-1} + C_2 e^0 + C_3 e^1$$

zugleich Null oder nicht Null. Da hier, wie künftig stets, α gleich 1 zu wählen, außerdem aber auch $c = 1$ ist, erhalten wir aus § 99 Gl. (6b), wenn jetzt P_m, E_m für $\mathsf{P}_m(1)$, $\mathsf{E}_m(1)$ geschrieben wird:

$$\mathsf{P}_m = \eta C \frac{e}{(m+1)!},$$

also für $m \geqq eC > C$:

(7) $$|\mathsf{P}_m| < \frac{1}{m!}.$$

102. Die Zahlen K_ν sind ganz; speziell ist

$$K_1 = K_3 = K_5 = \cdots = C_3 - C_1,$$
$$K_2 = K_4 = K_6 = \cdots = C_3 + C_1.$$

Abgesehen von dem Trivialfall $C_1 = C_3 = 0$ einer eingliedrigen Form, die, sofern sie echt, niemals Null ist, muß daher mindestens für alle geraden oder alle ungeraden m

$$|K_m| > 0$$

sein. Andererseits ist $|K_m| \leqq C$; für $m > C$ also

(8) $$0 < |K_m| < m.$$

Der Wert E_m ist rational. Auf den Nenner $m!$ gebracht, erhält er den Zähler:

$$m!\,\mathsf{E}_m = m!\,K_0 + (2 \cdot 3 \cdots m) K_1 + (3 \cdot 4 \cdots m) K_2 + \cdots + m K_{m-1} + K_m;$$

dieser ist ganz und modulo m zu K_m kongruent, daher nach (8) *durch m unteilbar und darum als ganze Zahl mindestens vom Absolutbetrage* 1. Hieraus folgt

$$|\mathsf{E}_m| \geqq \frac{1}{m!}$$

und mit (7): $|\mathsf{P}_m| < |\mathsf{E}_m|$, womit $E \neq 0$ erwiesen ist.

103. In dieser Anordnung zeigt der Liouvillesche Beweis bereits zwei charakteristische Züge des Transzendenzbeweises: die *analytische* Abschätzung des *Fehlers* und die *zahlentheoretische* Gewinnung einer unteren Schranke für den *Näherungswert*. Jedoch ist eine direkte Übertragung des Verfahrens auf Gleichungen beliebigen Grades bisher nicht gelungen. Ausschlaggebend für den Erfolg im vorliegenden Falle ist nämlich die Tatsache, daß $c = 1$, d. h. kein Exponent absolut größer als 1 ist, und das wird durch Betrachtung von $C_1 e^{-1} + C_2 + C_3 e$ an Stelle von $C_1 + C_2 e + C_3 e^2$ erreicht. Dagegen wird im allgemeinen Falle

$$\mathsf{P}_m = \eta C e^c \frac{c^{m+1}}{(m+1)!}$$

nicht mehr absolut kleiner als $1 : m!$ mit wachsendem m, und $m!\,\mathsf{E}_m$ ist zwar kongruent zu K_m modulo m wie zuvor, aber K_m wächst mit m stärker als m selbst.[1]) Es versagen also die wesentlichen Hilfsmittel des oben benutzten Verfahrens, und wir werden daher den Transzendenzbeweis damit beginnen, daß wir an Stelle der Exponentialreihe ein verallgemeinertes Abschätzungsverfahren aufsuchen, das vielseitiger modifiziert werden kann.

---

1) Für $E = C_1 e^{-2} + C_2 e^0 + C_3 e^2$ und $m \geqq 1$ wird

$$K_m = (C_3 + (-1)^m C_1)\, 2^m,$$

also bei hinreichend großem m von den Formen $m = 2k+1$ oder (im Falle $C_1 = C_3$) $m = 2(2k+1)$ durch m unteilbar. Da das hieraus folgende Ergebnis $m!\,|\mathsf{E}_m| \geqq 1$ nicht genügt, beachten wir weiter, was leicht zu sehen ist, daß $m!\,\mathsf{E}_m$ gliedweise teilbar ist durch die höchste Potenz 2^μ von 2, die in $m!$ aufgeht, und schließen daraus, daß $m!\,|\mathsf{E}_m| \geqq 2^\mu$ sein muß. Wählt man nun k als Potenz von 2, so läßt sich zeigen, was wir hier nicht ausführen wollen, daß $\mu = m - 2$, also $m!\,\mathsf{P}_m = \eta 2^\mu 2^3 C e^2 : (m+1)$ wird. Für $m \geqq 2^3 C e^2$ ist daher $|\mathsf{P}_m| < |\mathsf{E}_m|$, und das Verfahren ist gerettet. Jedoch versagt auch dieser Kunstgriff wieder für $c \geqq 2$ und für den Fall $C_1 e^{-2} + C_2 e^{-1} + C_3 + C_4 e + C_5 e^2$, ganz abgesehen davon, daß seine Umständlichkeit in keinem Verhältnis zu der geringen Bedeutung des Spezialfalles steht, der durch ihn erledigt wird.

Dritter Teil.

Die Transzendenz von *e*.

VIII. Verallgemeinerung der Exponentialreihe.

A. Aufstellung des Näherungswertes.

104. Wenn mehrere empirische Messungsergebnisse X_1, X_2 bis X_k für eine Größe Ξ bekannt sind, so bildet man aus ihnen mit „*Gewichten*" p_ν, die die Zuverlässigkeit der einzelnen Messungen zahlenmäßig ausdrücken, einen Mittelwert

$$X = \frac{p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_k X_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_k},$$

z. B. bei gleicher Zuverlässigkeit aller Messungen $(p_1 = p_2 = \cdots = p_k)$ das arithmetische Mittel. Sind alle Werte X_ν einander gleich, so ist auch $X = X_\nu$. Andernfalls ist X bei beliebig variablen Gewichten an sich jedes Wertes fähig. Seine Eigenschaft als Mittelwert und dadurch als brauchbarer Näherungswert für Ξ folgt erst daraus, daß die Gewichte ihrer Bedeutung gemäß positiv sein müssen.

105. In Analogie hierzu wollen wir aus endlich vielen der Näherungswerte für e^c:

$$E_\nu(c) = 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^\nu}{\nu!}$$

einen neuen Näherungswert mit Gewichten p_0 bis p_k bilden. Der Zähler wird eine ganze Funktion von c:

$$\text{(1a)} \qquad F(c) = p_0 E_0(c) + p_1 E_1(c) + p_2 E_2(c) + \cdots + p_k E_k(c),$$

der Nenner $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ wegen $E_\nu(0) = 1$ darstellbar sein als $F(0)$. Über die Gewichte müssen besondere Verfügungen getroffen werden, damit $F(c) : F(0)$ einen brauchbaren Näherungswert für e^c abgibt; denn bei beliebig variablen p_ν kann nicht nur wiederum $F(c) : F(0)$ *jeden Wert*, sondern auch $F(c)$ *jede ganze Funktion* vom Höchstgrade k darstellen, was sich sogleich zeigen wird.

106. Die ganze Funktion $E_\nu(c)$ entsteht aus ihrem höchsten Gliede $c^\nu : \nu!$ dadurch, daß man ihm seine sämtlichen Abgeleiteten nach c hinzufügt. Ebenso entsteht daher $F(c)$ aus der ganzen Funktion

$$\text{(1b)} \qquad f(c) = p_0 + p_1 c + \frac{p_2}{2!} c^2 + \cdots + \frac{p_k}{k!} c^k$$

durch die Operation:

(2a) $$F(c) = f(c) + f'(c) + f''(c) + \cdots + f^{(k)}(c).$$

Hieraus folgt und hat umgekehrt wieder (2a) zur Folge:

(2b) $$f(c) = F(c) - F'(c).$$

Um also eine beliebig gegebene ganze Funktion $F(c)$ in der Form (1a) darzustellen, bilden wir das zugehörige $f(c)$ nach (2b). Dessen Koeffizienten geben nach (1b) mit Fakultäten multipliziert die Gewichte der Darstellung (1a) von $F(c)$ an.

107. Statt nach Verfügungen über die Gewichte selbst fragen wir zweckmäßiger nach solchen über die „*Abschätzungsfunktion*" $f(c)$, die uns ja die Gewichte unmittelbar angibt. Mit der Beschränkung auf positive Gewichte brauchen wir uns dabei nicht aufzuhalten; denn im Gegensatz zum Empiriker sind wir hier im Besitz des abzuschätzenden Wertes e^c und können daher an Stelle des „*wahrscheinlichen*" Fehlers den *wahren* Fehler $e^c - F(c) : F(0)$ zum Ausgangspunkt nehmen. Dabei ist noch folgende Formulierung der Beziehung (2a) von Bedeutung:

Entwickelt man $f(x)$ an der Stelle c:

(3a) $$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu (x-c)^\nu,$$

und ersetzt hierin die Potenzen $(x-c)^\nu$ durch die Fakultäten ihrer Exponenten, so erhält man $F(c)$:

(3b) $$F(c) = a_0 + a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \nu!.$$

Es ist nämlich nach dem Taylorschen Satz $a_\nu \nu! = f^{(\nu)}(c)$.

B. Abschätzung und Beeinflussung des Fehlers.

108. Setzen wir

(4a) $$F(0)\,e^c = F(c) + R(c),$$

so ist $R(c) : F(0)$ der „*absolute*", $R(c) : F(c)$ der „*relative*" Fehler des Näherungswertes $F(c) : F(0)$ für e^c.

Schreiben wir $R(c)$ mit Herrn Hurwitz als

$$R(c) = -e^c\,[e^{-c}F(c) - e^0 F(0)],$$

so können wir die Klammer nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung abschätzen. Nach (2b) ist

(5a) $$\frac{d}{dx}[e^{-x}F(x)] = -e^{-x}f(x),$$

daher wird nach § 74:

(4b) $$R(c) = \eta c e^{(1-\vartheta)c} f(\vartheta c), \quad 0 < \vartheta < 1, \quad |\eta| \leqq 1.$$

109. Da die Näherungswerte $E_\nu(c)$ um so besser sind, je größer ν ist, empfiehlt es sich jedenfalls, möglichst viele der ersten Gewichte, etwa p_0 bis $p_{\varrho-1}$ gleich Null zu wählen. Dies läuft darauf hinaus, $f(x)$ durch x^ϱ teilbar, d. h. die Stelle $x = 0$ zu einer Nullstelle möglichst hoher Ordnung von $f(x)$ zu machen.

Dies läßt sich an der Abschätzung (4b) verifizieren. Sei etwa

$$f(x) = A_0 x^\varrho + A_1 x^{\varrho+1} + A_2 x^{\varrho+2} + \cdots,$$

also

$$F(0) = A_0 \varrho! + A_1(\varrho+1)! + A_2(\varrho+2)! + \cdots$$

nach (3a, b), so wird der Absolutfehler $R(c) : F(0)$ zu

$$[\eta c e^{(1-\vartheta)c} \vartheta^\varrho] \frac{c^\varrho}{\varrho!} \cdot \frac{A_0 + A_1 \vartheta c + A_2 \vartheta^2 c^2 + \cdots}{A_0 + A_1(\varrho+1) + A_2(\varrho+1)(\varrho+2) + \cdots}.$$

Darin ist der Wert der eckigen Klammer absolut kleiner als $|c|\, e^{|c|}$. Der Faktor $c^\varrho : \varrho!$ kann durch ein hinreichend großes ϱ beliebig klein gemacht werden. Wenn wir gleichzeitig durch passende Wahl der A_λ noch den letzten Bruch an übermäßigem Wachstum verhindern[1]), so werden wir den Fehler beliebig klein machen können.

110. Die Symmetrie von $R(c) = e^c F(0) - e^0 F(c)$ in bezug auf die Werte 0 und c läßt vermuten, daß auch die Stelle c von ähnlicher Bedeutung sein wird. In der Tat, sei jetzt:

$$f(x) = A_0'(x-c)^\varrho + A_1'(x-c)^{\varrho+1} + A_2'(x-c)^{\varrho+2} + \cdots,$$

also

$$F(c) = A_0'\varrho! + A_1'(\varrho+1)! + A_2'(\varrho+2)! + \cdots$$

nach (3a, b), so wird der Relativfehler $R(c) : F(c)$ zu

$$[\eta c e^{(1-\vartheta)c}(\vartheta - 1)^\varrho] \frac{c^\varrho}{\varrho!} \cdot \frac{A_0' - A_1'(1-\vartheta)c + A_2'(1-\vartheta)^2 c^2 - + \cdots}{A_0' + A_1'(\varrho+1) + A_2'(\varrho+1)(\varrho+2) + \cdots},$$

und es gelten dieselben Schlüsse wie zuvor. *Ceteris paribus ist es also vorteilhaft für die Genauigkeit der Abschätzung von e^c, wenn die Abschätzungsfunktion $f(x)$ an der Stelle c eine Nullstelle hoher Ordnung besitzt.*

C. Anhang. Vergleichende Übersicht anderer Anordnungen.

111. In dem anschließenden Transzendenzbeweis wird sich der zahlentheoretische Teil ausschließlich auf die Beziehung (3a, b) des § 107, der analytische ausschließlich auf (4a, b) des § 108 stützen. Im wesentlichen ebenso verfahren die Beweise von Hilbert, Hurwitz, Gordan und Weber. Sie unterscheiden sich daher untereinander und von unserer Darstellung nur durch die Methoden, mit denen der Zusammenhang zwischen (3a, b) und (4a, b) gewonnen wird, genauer gesagt: durch den Umfang, in dem dabei Hilfsmittel der höheren Analysis herangezogen und angewandt werden.

---

1) Dies geschieht z. B. durch die Verfügung $A_0 \geq 0$, $A_1 \geq 0$, ...

112. Das Minimum an analytischen Mitteln ist die Konvergenz der Exponentialreihe. Denn die Exponentialfunktion tritt in (4a) auf, und die einfachste Art, sie zu definieren, ist die Exponentialreihe. Mit diesem Minimum kommen die Beweise von Gordan und Weber auch wirklich aus. Zunächst beruht allein auf der Konvergenz der Exponentialreihe die Restschätzung in § 80. Mit dieser aber erhalten wir aus unserem Ausgangsansatz (1a), § 105:

$$F(c) = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu (e^c - R_\nu(c)) = e^c \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu - \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu \eta_\nu \frac{|c|^\nu}{\nu!} e^{|c|}$$

$$= e^c F(0) - \eta e^{|c|} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{|p_\nu|}{\nu!} |c|^\nu, \quad |\eta| \leqq 1.$$

Die letzte Summe geht aus $f(c)$ hervor, wenn man Argument und Koeffizienten durch ihre Absolutbeträge ersetzt. Nennen wir sie daher $\bar{f}(|c|)$, so wird mit (4a):

(4c) $$R(c) = \eta e^{|c|} \bar{f}(|c|), \quad |\eta| \leqq 1.$$

Diese Abschätzung genügt, wenn sie auch nicht mit (4b) gleichwertig ist, vollkommen für den Transzendenzbeweis; jedoch läßt sie nicht so unmittelbar wie (4b) in § 110 die Bedeutung des Verschwindens von $f(c)$ an der Stelle c erkennen, da das hier auftretende $\bar{f}(|c|)$ für $f(c) = 0$ offenbar nicht zu verschwinden braucht. Wir haben daher trotz des gemeinsamen Ausgangspunktes (1a) in unsere Darstellung diese Fehlerschätzung nicht übernommen.

113. Den Zusammenhang zwischen (1a, b) und (3a, b) vermittelt Herr Weber durch die Beziehung (2a); genau ebenso sind wir verfahren. *Dabei bedeutet die Verwendung der Abgeleiteten keine Hereinziehung der höheren Analysis. Denn es wird nur mit ganzen Funktionen operiert, und für diese ist der Ableitungskalkul formal begründbar* (Kap. IV, C). Dem entspricht auch die Stelle, an der in der Enzyklopädie der Elementarmathematik der Transzendenzbeweis steht: *Hinter* den unendlichen Reihen, aber *vor* der Differentialrechnung.

114. Auch diesen formalen Ableitungskalkul noch zu umgehen, unternimmt der Gordansche Beweis, indem er mittels des binomischen Satzes direkt von (1a, b) zu (3a, b) übergeht. Schreiben wir h für $x - c$, also $c + h$ für x, so wird nach (1b):

$$f(c+h) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{p_\nu}{\nu!}(c+h)^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu \sum_{\varrho=0}^{\nu} \frac{c^\varrho h^{\nu-\varrho}}{\varrho!\,(\nu-\varrho)!}.$$

Setzen wir nach § 107 hierin $(\nu-\varrho)!$ für $h^{\nu-\varrho}$, so entsteht:

$$\sum_{\nu=0}^{k} p_\nu \sum_{\varrho=0}^{\nu} \frac{c^\varrho}{\varrho!} = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu E_\nu(c) = F(c)$$

nach (1a), womit die Beziehung (3a, b) bewiesen ist.

115. In Herrn Gordans Darstellung ist die Vorschrift, h^μ durch $\mu!$ zu ersetzen, dem Sinn des Zeichens h selbst „*einverleibt*", d. h. es soll unter h^μ ganz direkt $\mu!$, unter $f(c+h)$ derjenige Ausdruck, nämlich $F(c)$ in unserer Bezeichnung, verstanden werden, der aus der Entwicklung von $f(c)$ in eine lineare Verbindung der Größen h^μ hervorgeht, wenn diesen Größen der Sinn $\mu!$ beigelegt wird. Wer mit dem Unterschied des formalen und abstrakten Funktionsbegriffes vertraut ist, dem macht es keine Schwierigkeit, unter dem Zeichen $f(c+h)$ lediglich eine lineare Form der Argumente $h^0, h^1, \ldots h^k$ zu denken; und für diese Argumente können irgendwelche Größen $h_0, h_1, \ldots h_k$ z. B. auch $0!, 1!, \ldots k!$ eingesetzt werden.[1]) Aber, wie wir schon früher einmal feststellen mußten: die verschiedenen Funktionsbegriffe werden de facto nicht hinreichend scharf gesondert, und so nimmt es nicht Wunder, daß die Gordansche Symbolik gemeinhin ein gelindes Gruseln zu erwecken pflegt, nicht zuletzt auch darum, weil die Zumutung, unter h^μ sich $\mu!$ zu denken, mit der Gewohnheit kollidiert, beim Rechnen überhaupt nichts zu denken.

116. Als Gegenmittel gegen diese Gewohnheit, gewissermaßen als „*Gefahrwarnungen*" des Inhalts: „Vorsicht! Hier muß gedacht werden!" hat man Zeichen wie „*symb* $f(c+h)$" oder „$\mathfrak{S}_h f(c+h)$" vorgeschlagen. Zweckmäßiger erscheint uns dann schon das Zeichen ! an Stelle des Gordanschen h. In dem Symbol $f(c+!)$ bezeichnet es, dazu noch mit einem unverkennbaren Pathos, die gefährliche Stelle selbst; ferner versucht es nicht, einen Sinn vorzutäuschen, ehe nicht nach seinen Potenzen entwickelt ist, und endlich vergißt man an $!^\mu$ nicht so leicht die Bedeutung $\mu!$ wie an h^μ.

Die Rechnung des § 114 sieht alsdann so aus:

$$f(c+!) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{p_\nu}{\nu!}(c+!)^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu \sum_{\varrho=0}^{\nu} \frac{c^\varrho\, !^{\nu-\varrho}}{\varrho!\,(\nu-\varrho)!} = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu \sum_{\varrho=0}^{\nu} \frac{c^\varrho}{\varrho!},$$

und hieran kann unmittelbar die Fehlerschätzung des § 112 anschließen, deren Ergebnis zu schreiben ist:

$$f(!)\,e^c = f(c+!) + \eta e^{|c|} \bar{f}(|c|), \qquad |\eta| \leqq 1.$$

Über die weiteren Vereinfachungen des Rechenapparates, die sich aus der Gordanschen Symbolik ergeben, verschafft man sich leicht einen Überblick, wenn man die geringe Mühe nicht scheut, den Gordanschen Beweis in die übliche Formelsprache zu übersetzen.

---

1) Wer freilich im formalen Rechnen so sattelfest ist, daß sein Rößlein vor einer Symbolik nicht scheu wird, der wird auch um die formale Begründbarkeit des Ableitungskalkuls für ganze Funktionen Bescheid wissen; dann wird aber die Ausschaltung dieses bequemen Kalkuls und umsomehr sein Ersatz durch eine unbequeme Symbolik für ihn überflüssig sein.

117. Die Restabschätzung der Exponentialreihe ist ein Spezialfall der allgemeinen Taylorschen Restabschätzung für Potenzreihen überhaupt und kann daher als bekannt gelten, wenn man die Kenntnis der Hilfsmittel der Differentialrechnung voraussetzt. Es ist aber in diesem Falle zweckmäßiger, den Mittelwertsatz der Differentialrechnung direkt anzuwenden, da erstens die Taylorsche Restabschätzung aus ihm abgeleitet zu werden pflegt, und da er zweitens im vorliegenden Falle den geschlossenen Ausdruck $R(c)$ an Stelle der einzelnen Reihenreste abzuschätzen gestattet.

Dadurch wird nun der Übergang von (3) zu (4) durch (2) allein vermittelt, während (1) nicht mehr, wie bei Gordan-Weber, die Rolle eines Bindegliedes spielt. Diese Methode des Hurwitzschen Beweises haben wir unter anderen Gründen uns auch darum zu eigen gemacht, weil die Beziehung (2) sowohl *analytisch*, als Gleichung zwischen *Grenzwerten*, wie auch *formal*, da sie nur *ganze Funktionen* enthält, gedeutet werden kann und darum das beste Mittelglied zwischen der *rein analytischen* Beziehung (4) und der *rein formalen* (3) darstellt. Während aber Herr Hurwitz, die Darstellung (1) ganz beseite lassend, aus einer zunächst willkürlichen ganzen Funktion $f(x)$ nach (2a) $F(x)$ bildet und durch Abschätzung von $F(0)\,e^c - F(c)$ nach (4) bemerkt, daß man e^c bei passender Wahl von $f(x)$ mit $F(c):F(0)$ annähern kann, haben wir $F(x)$ in der Absicht, einen Näherungswert für e^c zu erhalten, zunächst durch (1) definiert und *sodann*, als wir aus (2) sahen, daß *jede* ganze Funktion derart darstellbar ist, mit Hilfe von (4) nach zweckmäßigen Spezialisierungen gesucht.

118. Für eine noch weitergehende Heranziehung analytischer Hilfsmittel in Gestalt der Integralrechnung spricht der Umstand, daß der Mittelwertsatz der *Differentialrechnung* mit deren Begriffsbildungen allein nicht gerade einfach, jedenfalls nicht entfernt so einfach zu beweisen ist als der ihm gleichwertige, aber aus dem Integralbegriff unmittelbar folgende Mittelwertsatz der *Integralrechnung*. Dies gilt ganz besonders für das komplexe Gebiet, und in der Tat hat Herr Hurwitz seine Methode nur auf die Transzendenz von e, nicht auch auf die von π angewandt.

Nach § 74 haben wir lediglich (5a) nach Integration in der Form zu schreiben:

$$(5b)\qquad e^{-b}F(b) - e^{-a}F(a) = -\int_a^b e^{-x}f(x)\,dx;$$

dann erhalten wir für $a = c$, $b = 0$ den Rest dargestellt als:

$$(4d)\qquad R(c) = e^c\int_0^c e^{-x}f(x)\,dx$$

und können daraus (4b) sofort anschreiben. Es genügen aber — und darin liegt ein weiterer Vorteil der Integraldarstellung — für den Transzendenzbeweis sehr viel gröbere Abschätzungen des Integrals.

119. Noch einheitlicher wird nun diese Methode, wenn wir mit (5b) für $a = c$, $b = \infty$ nach § 83, 84 (Gl. (12a, b)) $F(x)$ selbst durch das Hermitesche Integral darstellen:

$$F(c) = e^c \int_c^\infty e^{-x} f(x)\, dx. \tag{5c}$$

Dann gewinnen wir (4a, d) als einfache Identität:

$$e^c \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx = e^c \int_c^\infty e^{-x} f(x)\, dx + e^c \int_0^c e^{-x} f(x)\, dx,$$

und der Anschluß an den analytischen Teil des Transzendenzbeweises ist auf dem denkbar kürzesten Wege erreicht. Dies ist das charakteristische Verfahren des Hilbertschen Beweises. Da Herr Hilbert $F(c)$ durch (5c) definiert, haben wir noch zu fragen, wie man von (5c) zu der formalen Beziehung (3a, b) gelangt.

120. Der nächstliegende Weg ist die Umkehrung der Integration, durch die wir zu (5c) gelangten; bilden wir aus (5c) die Ableitung nach c, so entsteht

$$F'(c) = F(c) - f(c),$$

also (2b), woraus (2a) und damit (3a, b) folgt.

121. Integrieren wir den Faktor e^{-x} unter dem Integral partiell, so erhalten wir

$$F(c) = f(c) + e^c \int_c^\infty e^{-x} f'(x)\, dx,$$

und durch Wiederholung des Verfahrens entsteht auf direktem Wege (2a).

Diese partielle Integration wird in der Theorie der *Gammafunktion* benutzt und ergibt dort für den Spezialfall $f(x) = x^m$, $c = 0$:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m dx = m \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx,$$

also mit

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{u=\infty} [- e^{-u} + e^0] = 1$$

für jedes ganze $m \geqq 0$:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m dx = m!. \tag{6}$$

122. Setzen wir nun die Theorie der Gammafunktion als bekannt voraus, so können wir mit Herrn Hilbert unmittelbar von (5c) zu

(3a, b) übergehen. Entwickeln wir $f(x)$ nach (3a) an der Stelle $x = c$ und schreiben abkürzend y für $x - c$, so wird nach (6):

$$F(c) = \int_0^\infty e^{-y} f(c+y)\,dy = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \int_0^\infty e^{-y} y^\nu\,dy = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \nu!.$$

123. Einen Überblick über die beschriebenen Zusammenhänge soll das folgende Schema geben. Die beiden gefiederten Pfeile geben die

Zahlentheoretischer Teil des Transzendenzbeweises

$\uparrow$

Ist $f(x) = \sum a_\nu (x-c)^\nu$,
so ist $F(c) = \sum a_\nu \nu!$

Gammafunktion	Formaler Ableitungskalkul	Binom. Satz (Symbolik)
$\uparrow$ § 122	$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow$ § 107	$\uparrow$ § 114 § 116
$F(c) = e^c \int_c^\infty e^{-x} f(x)\,dx$ ← § 119 ← →§ 120 f.→	$F(c) = \sum f^{(\nu)}(c)$ ← ← § 106	$F(c) = \sum p_\nu E_\nu(c)$ $f(c) = \sum p_\nu c^\nu : \nu!$
$\downarrow$ § 118	$\downarrow\ \downarrow$ § 108	$\downarrow\ \downarrow$ § 112
Integralrechnung	Differentialrechnung	Konvergenz der Exponentialreihe

Abschätzung von $e^c F(0) - F(c)$

$\downarrow$

Analytischer Teil des Transzendenzbeweises.

allen Beweisanordnungen gemeinsamen Anschlüsse an die beiden Teile des Transzendenzbeweises an. Die starken vertikalen ungefiederten Pfeile bezeichnen die Wege, auf denen Hilbert (links), Hurwitz (in der Mitte) und Gordan (rechts) diese Anschlüsse erreichen, ausgehend von je einer der drei Definitionen des Zusammenhangs zwischen $F(x)$ und $f(x)$, die in der Mittelzeile des Schemas nebeneinander stehen. Und zwar ist die Hilbertsche *rein analytisch*, die Hurwitzsche *gemischt*, die Gordansche *rein formal*.

Die punktierte Linie gibt die Webersche Modifikation des Gordanschen Beweises, die geschlängelte die *unsrige* des Hurwitzschen an. Kleine Pfeile bezeichnen endlich den Zusammenhang des Hilbertschen Beweises mit dem von Hurwitz, und die angegebenen Paragraphen weisen nochmals darauf hin, wo in diesen Blättern der betreffende Übergang beschrieben ist.

124. Historisch ist zu bemerken, daß die Beweisanordnung von Hilbert als erste weitgehende Vereinfachung der Beweise von Hermite, Lindemann und Weierstraß von den hier beschriebenen die früheste ist. Sodann hat Herr Hurwitz die Integralrechnung, Herr Gordan auch die Differentialrechnung ausgeschaltet; den formalen Ableitungskalkul hat Herr Weber zur Umgehung der Symbolik wieder eingeführt. Außerdem hat Herr Vahlen dem Gordanschen Beweis eine Darstellung gegeben, in der weder symbolische Bezeichnungen noch Ableitungen verwandt werden. Durch explizites Rechnen mit Summenzeichen verfällt er dem in § 17 beschriebenen Nachteil des allzu ausführlichen Ansatzes, so daß beispielsweise die Gliederung in den analytischen, den zahlentheoretischen und den für unser Schema maßgebenden allgemeinen Verbindungsteil verwischt wird. Auch der große Umfang der Rechnungen macht uns eine organische Eingliederung dieses Beweises in unser Schema unmöglich, obwohl er, wie die anderen hier betrachteten Beweise, eine direkte Umarbeitung des Hilbertschen ist.

125. Auch der Beweis von Mertens[1]) kann seiner umfangreichen Rechnungen wegen — er benutzt als formales Werkzeug statt des Ableitungskalkuls oder des binomischen Lehrsatzes die Differenzenrechnung — hier nicht besprochen werden, vor allem aber auch darum nicht, weil er von dem Hilbertschen und seinen Varianten wesentlich abweicht. Er erstrebt außer dem *analytischen* auch ein *zahlentheoretisches* Minimum, indem er die Verwendung von Kongruenzen vermeidet, durch die gerade Hilbert den Transzendenzbeweis so außerordentlich vereinfacht hatte. Abgesehen von diesem Rückschritt ist jedoch der Ausgangspunkt des Mertensschen Beweises sehr beachtenswert. Er geht nämlich darauf aus, die Gewichte p_ν in unserem § 105 so zu bestimmen, daß in dem Fehlerglied $\sum p_\nu R_\nu(c)$ die Glieder der niedersten Grade in möglichst weitem Umfange herausfallen, wodurch die Restschätzung erheblich verschärft werden kann. Praktisch läuft dieses Verfahren genau auf unsere Nullstellenmethode hinaus.

IX. Analytischer Teil des Transzendenzbeweises.

126. Um die Exponentialform

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

abzuschätzen, werden wir nach § 110 eine Abschätzungsfunktion wählen, die an den Stellen c_1 bis c_n verschwindet, und zwar von einer Ordnung m, über die wir uns die Verfügung vorbehalten. Die erste *„Ausfeilung des Beweisschlüssels“* besteht daher in dem Ansatz:

1) Wiener Berichte 1896.

(1) $$f(x) = \varphi(x)^m;$$

darin soll $\varphi(x)$ eine ganze Funktion und

(2) $$\varphi(c_1) = 0, \ \varphi(c_2) = 0, \ldots \varphi(c_n) = 0$$

sein. Nach § 109 können wir, wenn die Null nicht schon unter den Werten c_λ vorkommt, auch noch $\varphi(0) = 0$ fordern; wir kommen aber mit den Nullstellen c_λ allein aus.

127. Unter Verwendung des Zeichens $K(F) = \sum\limits_\lambda C_\lambda F(c_\lambda)$ (§ 95 ff.) wird jetzt nach Gl. (4a), § 108:

(3) $$F(0)E = K(F) + K(R)$$

für $F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots$, und darin nach (4b):

$$K(R) = \sum_\lambda C_\lambda \eta_\lambda c_\lambda e^{(1-\vartheta_\lambda)c_\lambda} \varphi(\vartheta_\lambda c_\lambda)^m, \qquad 0 < \vartheta_\lambda < 1, \ |\eta_\lambda| \leqq 1.$$

Wir bezeichnen wie in § 99 mit c einen Wert, der nicht kleiner ist als $|c_1|$, $|c_2|$ bis $|c_n|$, z. B. den größten dieser Absolutbeträge, und mit C die Summe $|C_1| + |C_2| + \cdots + |C_n|$. Ferner sei M_φ eine obere Schranke aller in Betracht kommenden Werte $|\varphi(\vartheta_\lambda c_\lambda)|$, z. B. das Maximum von $|\varphi(x)|$ im Bereich $|x| \leqq c$. Für e^x ist nach § 80 Gl. (5) e^c dieses Maximum. Hiernach wird

(4) $$K(R) = \eta M M_\varphi^m, \qquad |\eta| \leqq 1,$$

worin $M = Cce^c$ von m und $\varphi(x)$, M_φ von m unabhängig ist.

128. Für die meistbenutzte Variante des Beweises wird der allgemeinere Ansatz zugrunde gelegt:

(1*) $$f(x) = \varphi(x)^m \chi(x).$$

Darin ist $\chi(x)$ eine von $\varphi(x)$ und m unabhängige ganze Funktion, und $\varphi(x)$ genügt wiederum den Bedingungen (2). Die Fehlerschätzung liefert formal dasselbe Ergebnis (4), wenn jetzt $M = Cce^c M_\chi$ und darin für M_χ eine obere Schranke von $|\chi(x)|$ für $|x| \leqq c$ gesetzt wird.

129. Ist $f(x) = u(x)\,v(x)$, so beweist man leicht durch Ausrechnen der Koeffizienten von $f(x)$, daß $\bar f(|x|) \leqq \bar u(|x|)\,\bar v(|x|)$ wird. Infolgedessen liefert auch die Gordansche Fehlerschätzung sowohl für den Ansatz (1) wie für (1*) formal das Ergebnis (4), wenn wir nur M_φ durch $M_{\bar\varphi}$ und M durch Ce^c bzw. durch $Ce^c M_{\bar\chi}$ ersetzen.

130. *Wie nun auch* (4) *gewonnen wird, jedenfalls gibt es einen Wert* m_0, *so daß stets*

(5) $$|K(R)| < m! \quad \textit{für} \quad m \geqq m_0$$

wird. Wir haben nur dafür zu sorgen, daß $m_0 \geqq M_\varphi$ und

$$M_\varphi^{m_0} : m_0! < 1 : M$$

ausfällt, und nach Gl. (4) in § 80 ist dies stets möglich.

Anmerkung. Die Bedingungen (2) sind hierbei nicht benutzt worden. Ihr Einfluß ist aber jetzt bereits zu erkennen. Jeder der Werte $F(c_\lambda)$ wird, weil $f(x)$ formal durch $(x - c_\lambda)^m$ teilbar ist, formal durch $m!$ teilbar sein, so daß wir hoffen dürfen, es werde $K(F)$ unter den nötigen Kautelen von der Größenordnung $m!$, also größer als $K(R)$ werden. Es ist aber klar, daß dies nur auf Grund besonderer Annahmen über die Koeffizienten und Exponenten gelingen kann.

X. Zahlentheoretischer Teil des Transzendenzbeweises.

A. Ganzzahligkeit.

131. Die Funktion $\varphi(x)$ enthält wegen (2) den Faktor

$$g(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n) \qquad (\S\ 48).$$

Dieser ist auf Grund der zahlentheoretischen Voraussetzung (V_3^*) des § 1 eine *ganzzahlige* Funktion. Es liegt nahe, auch für den anderen Faktor $\psi(x)$ in

$$(6) \qquad \varphi(x) = g(x)\,\psi(x)$$

eine *ganzzahlige* Funktion zu wählen, ebenso für $\chi(x)$ im Ansatz (1*). Dann wird das Gleiche gelten von $f(x)$, seinen sämtlichen Ableitungen (§ 64) und damit von $F(x)$.

132. Die Entwicklung von $f(x)$ an der Stelle c_λ hat die Gestalt:

$$(7\text{a}) \quad f(x) = A_{\lambda 0}(x - c_\lambda)^m + A_{\lambda 1}(x - c_\lambda)^{m+1} + A_{\lambda 2}(x - c_\lambda)^{m+2} + \cdots,$$

gemäß § 107 wird darum

$$(7\text{b}) \qquad F(c_\lambda) = A_{\lambda 0}\, m! + A_{\lambda 1}(m+1)! + A_{\lambda 2}(m+2)! + \cdots.$$

Die Zahlen $A_{\lambda\nu}$ sind ganzzahlige Funktionen von c_λ (§ 64), haben also ganzzahlige Werte. *Daher sind die Zahlen* $F(c_\lambda) : m!$ *und auf Grund der zahlentheoretischen Voraussetzung* (V_4^*) (§ 1) *auch* $K(F) : m!$ *ganz.*

133. Wie die Untersuchung weiterzugehen hat, lehrt uns im Zweifelsfalle die Annahme $E = 0$, aus der nach (3) des § 127 sich $K(F) = -K(R)$, also mit (5) für jedes $m \geqq m_0$

$$|K(F) : m!| < 1$$

ergibt. Dies bedeutet aber mit der soeben bewiesenen Ganzzahligkeit zusammen $K(F) = 0$ für $m \geqq m_0$, und diese unendlich vielen Gleichungen sind *diophantische*, da alle Koeffizienten der betrachteten Funktionen und Entwicklungen ganze Zahlen sind. Diophantischen Gleichungen sucht man nun seit altersher durch Teilbarkeitsfragen, seit Gauß vor allem mit dem Rechenapparat der Kongruenzen beizukommen. Ob wir daher $K(F)$ selbst oder, im Falle eines unstillbaren Bedürfnisses nach Gleichheitszeichen (§ 27), die problematische Gleichung $K(F) = 0$ betrachten, jedenfalls wollen wir uns nach einem passenden *Modul* umsehen und damit jenen Weg einschlagen, auf dem Hilbert den Beweis so ungemein vereinfacht hat.

Die Entwicklung (7b) gibt uns den Modul $m+1$ unmittelbar an die Hand, weil alle Glieder von $K(F):m!$ bis auf das erste durch ihn teilbar sind. Diesen Gedanken verfolgen wir im übernächsten Abschnitt C als *„zweite Variante"* des Transzendenzbeweises. Zunächst jedoch setzen wir den Hebel etwas tiefer, nämlich am Ansatz (1) an. Hiernach ist $f(x)$ Potenz eines Polynoms, und der polynomische Lehrsatz gibt für einen Primzahlexponenten p Anlaß zu einfachen Kongruenzen nach dem Modul p; auf diesen Kongruenzen wollen wir die *erste Variante* aufbauen.

B. Die erste Variante des Beweises.

134. Wir wählen für m eine Primzahl p, was uns bekanntlich nicht hindert, der Bedingung $p \geqq m_0$ zu genügen.

Die Entwicklung von $\varphi(x)$ an der Stelle c_λ hat die Gestalt:

(8a) $$\varphi(x) = a_{\lambda 1}(x-c_\lambda) + a_{\lambda 2}(x-c_\lambda)^2 + \cdots + a_{\lambda k}(x-c_\lambda)^k;$$

darin sind die Koeffizienten

(8b) $$a_{\lambda\nu} = \varphi^{(\nu)}(c_\lambda) : \nu!, \quad \text{speziell} \quad a_{\lambda 1} = \varphi'(c_\lambda),$$

ganzzahlige Funktionen des Arguments c_λ (§ 64).

Bilden wir nach § 67 $f(x)$, indem wir dort in Gl. (2) $a_{\lambda\nu}(x-c_\lambda)^\nu$ für x_ν einsetzen, so wird $G(\mathfrak{x})$ eine Funktion des Argumentes $(x-c_\lambda)$, deren Koeffizienten nach § 64c und § 63a ganzzahlige Funktionen der $a_{\lambda\nu}$, also auch des Argumentes c_λ sind. Diese Koeffizienten $B_\sigma(c_\lambda)$ sind also hier ganze Zahlen $b_{\lambda\sigma}$. In

(9a) $$f(x) = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\lambda\nu}^p (x-c_\lambda)^{\nu p} + p\sum_\sigma b_{\lambda\sigma}(x-c_\lambda)^\sigma$$

durchläuft der Zeiger σ keine kleineren Werte als p, da ja niedere Potenzen als $(x-c_\lambda)^p$ überhaupt nicht in $f(x)$ auftreten. Nebenbei bemerkt ist sogar $\sigma \geqq p+1$, da die niederste Potenz $(x-c_\lambda)^p$ in der ersten Summe in (9a) steht.

135. Nach § 107 wird jetzt:

(9b) $$F(c_\lambda) : p! = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\lambda\nu}^p ((\nu p)! : p!) + p\sum_\sigma b_{\lambda\sigma}(\sigma! : p!),$$

und die Zahlen $\sigma! : p!$ sind ganz. Ebenso ist $(\nu p)! : p!$ ganz und außerdem durch $p^{\nu-1}$ teilbar.[1]) Modulo p fallen also die ganze zweite Summe und alle Glieder der ersten bis auf das zu dem Zeiger $\nu = 1$ gehörige heraus. Es bleibt:

(10a) $$F(c_\lambda) : p! \equiv a_{\lambda 1}^p \pmod p$$

und nach dem Fermatschen Satze mit (8b):

(10b) $$F(c_\lambda) : p! \equiv a_{\lambda 1} = \varphi'(c_\lambda) \pmod p,$$

womit wir erhalten:

(11) $$K(F) : p! \equiv K(\varphi') \pmod p.$$

136. Ziehen wir jetzt nochmals die Annahme $E = 0$ heran, so folgt, wie wir aus § 133 wissen, $K(F) = 0$ für $p \geqq m_0$, d. h. $K(\varphi') \equiv 0 \pmod p$. Nun ist $K(\varphi')$ von p unabhängig, es kann also $p > |K(\varphi')|$ gewählt werden. Dann ist aber die *Kongruenz* $K(\varphi') \equiv 0$ gleichbedeutend mit der *Gleichung* $K(\varphi') = 0$. *Im Falle* $E = 0$ *muß also jede Funktion* $\varphi(x) = g(x)\psi(x)$ *bei ganzzahligem* $\psi(x)$ *für* $K(\varphi')$ *den Wert Null ergeben.*

Hieraus folgt indessen nach § 96 ff. bei reduziertem E seine Unechtheit, und umgekehrt ergibt bei reduziertem echtem E mindestens je eine der Funktionen $g(x)x^{\nu-1}$ und $g(x)g_\nu(x)$ $(\nu = 1$ bis $n)$ als $\varphi(x)$ ein nichtverschwindendes $K(\varphi')$. *Aus* (V_1), (V_2), (V_3^*), (V_4^*) *folgt also* $E \neq 0$; *damit ist die Transzendenz von e bewiesen.*

C. Die zweite Variante des Beweises.

137. Wie wir bereits in § 133 bemerkten, reduziert sich $F(c_\lambda) : m!$ modulo $(m+1)$ auf das Glied $A_{\lambda 0}$, und zwar lediglich auf Grund der Tatsache, daß die Entwicklung von $f(x)$ mit $A_{\lambda 0}(x - c_\lambda)^m$ beginnt, also auch im Falle des allgemeinen Ansatzes (1*).

Nun beginnen die Entwicklungen von $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ frühestens mit den Gliedern $\varphi'(c_\lambda)(x - c_\lambda)$ und $\chi(c_\lambda)$, daher die Entwicklung von $f(x)$ frühestens mit $\varphi'(c_\lambda)^m (x - c_\lambda)^m \chi(c_\lambda)$, d. h. es wird ausführlich:

(12) $$F(c_\lambda) : m! \equiv \varphi'(c_\lambda)^m \chi(c_\lambda) \pmod{m+1}.$$

138. Um auch hier wieder die rechte Seite der Kongruenz vom Modul unabhängig zu machen, werden wir diesen als Primzahl p, nunmehr also $m = p - 1$ wählen. Dann ist $\varphi'(c_\lambda)^{p-1} \equiv 0$ oder $1 \pmod p$, je nachdem $\varphi'(c_\lambda)$ durch p teilbar ist oder nicht. Die Unterscheidung dieser beiden Fälle läßt sich durch folgende Kunstgriffe (oder auch allgemeinere) umgehen:

1) Auf Grund des Primzahlcharakters von p ist $(\nu p)! : p!$ auch *genau* durch $p^{\nu-1}$ teilbar, worauf es hier indessen nicht ankommt. Wir wollen auch nicht unerwähnt lassen, daß der Primzahlcharakter von p nur *bequem*, aber nicht *notwendig* für diese Betrachtung ist. Das Ergebnis (10a) gilt für *jede* ganze Zahl p, was in der zweiten Variante leicht zu bemerken sein wird.

Erstens: Wir wählen $\chi(x) = \varphi'(x)$, also $f(x) = \varphi(x)^{p-1}\varphi'(x)$, dann ist, einerlei ob $\varphi'(c_\lambda)$ durch p teilbar ist oder nicht:

(13) $$F(c_\lambda) : (p-1)! \equiv \varphi'(c_\lambda)^p \equiv \varphi'(c_\lambda) \pmod p,$$

also

$$K(F) : (p-1)! \equiv K(\varphi') \pmod p,$$

woran sich wörtlich die Schlüsse des § 136 anschließen lassen.

139. *Zweitens:* Wir sorgen dafür, daß p in keinem der Werte $\varphi'(c_\lambda)$ aufgeht. Das läßt sich (z. B. durch die Forderungen $p > |\varphi'(c_\lambda)|$ für $\lambda = 1$ bis n) stets und nur erreichen, wenn kein $\varphi'(c_\lambda)$ verschwindet, und dessen versichern wir uns mittels (V_1) am radikalsten durch die Wahl $\varphi(x) = g(x)$, also $f(x) = g(x)^{p-1}\chi(x)$. Alsdann ist:

(14) $$F(c_\lambda) : (p-1)! \equiv g'(c_\lambda)^{p-1}\chi(c_\lambda) \equiv \chi(c_\lambda) \pmod p,$$

also

$$K(F) : (p-1)! \equiv K(\chi) \pmod p.$$

Auch hieran können sich wörtlich die Schlüsse des § 136 anschließen, da nach § 96 für $K(\chi) \neq 0$ gesorgt werden kann.

140. *Anmerkung 1.* Daß die Anordnung des § 138 in die erste Variante einmündet, ist kein Zufall. Die Abschätzungsfunktionen $f(x) = \varphi(x)^p$ und $f_0(x) = \varphi(x)^{p-1}\varphi'(x)$ stehen in dem Zusammenhang $f'(x) = pf_0(x)$. Wegen $f(c_\lambda) = 0$ ist daher

$$F(c_\lambda) = pF_0(c_\lambda) \quad \text{und} \quad K(F) : p! = K(F_0) : (p-1)!,$$

weshalb natürlich auch die Reste modulo p dieselben sind. Hierbei bestätigt sich die Bemerkung zu § 135 (Fußnote), daß die Kongruenz $F(c_\lambda) : p! \equiv \varphi'(c_\lambda)^p \pmod p$ unabhängig von dem Primzahlcharakter von p besteht.

141. *Anmerkung 2.* Beachten wir, daß von allen benutzten Funktionen nur ihre Werte an den Stellen c_λ und diese Werte nur modulo p in Betracht kommen, so erweisen sich auch die Kunstgriffe in § 138 und § 139 als nicht wesentlich verschieden. Wie wir nämlich bereits in § 97 bemerkten, wird $\varphi'(c_\lambda) = g'(c_\lambda)\psi(c_\lambda)$, so daß wir in (13) mit teilweiser Anwendung des Fermatschen Satzes schreiben können:

$$F(c_\lambda) : (p-1)! \equiv g'(c_\lambda)^p\psi(c_\lambda) \pmod p.$$

Dieselbe Kongruenz entsteht aber aus (14), wenn wir für $\chi(x)$ eine Funktion mit den Werten $\chi(c_\lambda) = g'(c_\lambda)\psi(c_\lambda)$, z. B. nach der Lagrangeschen Interpolationsformel (§ 49, vgl. auch § 97, Gl. (2)):

$$\chi(x) = \sum_\lambda \psi(c_\lambda)\, g_\lambda(x)$$

ansetzen. Der Ansatz des § 138 kann also immer durch einen an den Stellen c_λ und modulo p gleichwertigen von der Form des § 139 ersetzt werden. Hierzu gilt noch die Umkehrung. Wählen wir nämlich bei gegebenem $\chi(x)$:

$$\psi(x) = \sum \chi(c_\lambda)\, g'(c_\lambda)^{p-3} g_\lambda(x),$$

so wird

$$\psi(c_\lambda) = \chi(c_\lambda)\, g'(c_\lambda)^{p-2},$$

also nach dem Fermatschen Satz:

$$\psi(c_\lambda)\, g'(c_\lambda) \equiv \chi(c_\lambda) \pmod p$$

und mit $\varphi(x) = g(x)\psi(x)$:

$$K(\chi) \equiv K(\varphi') \pmod p.$$

D. Übersicht der Ergebnisse.

142. Wenn wir zu einer gegebenen Exponentialform, die den Voraussetzungen (V_1), (V_2), (V_3^*), (V_4^*) genügt, eine passende Abschätzungsfunktion aufstellen wollen, so haben wir nach dem Vorstehenden zuerst die *„Hauptfunktion"* $g(x) = (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$ und alsdann eine ganzzahlige *„Zusatzfunktion"* $\psi(x)$ oder $\chi(x)$ zu bilden, derart, daß $K(g'\psi)$ bzw. $K(\chi)$ einen von Null verschiedenen Wert B erhält. Dies ist auf Grund von (V_1) und (V_2) stets möglich. Beispielsweise kann für den Fall $C_1 \neq 0$ sowohl $\psi(x)$ wie $\chi(x)$ gleich $g_1(x)$ genommen werden, wodurch B einen der Werte $C_1 g_1(c_1)^2$ oder $C_1 g_1(c)$ erhält.

Unter allen Umständen wird B eine ganze Zahl.

143. Bezeichnen wir $g(x)\psi(x)$ oder im Falle des § 139 $g(x)$ selbst mit $\varphi(x)$, so genügt $\varphi(x)$ den Anforderungen:

I. *Die Koeffizienten von $\varphi(x)$ sind ganze Zahlen.*

II. *Die Werte $\varphi(c_1)$ bis $\varphi(c_n)$ sind Null.*

Diese beiden Anforderungen sind stets und nur verträglich, wenn die Zahlen c_λ algebraisch sind. Diese Bedingung ist nach (V_3^*) a fortiori erfüllt. Wir erkennen dabei die Richtung, in der die Lindemannschen Verallgemeinerungen zu suchen sein werden.

144. Wir bestimmen sodann die Schranken M_φ und M_χ (§ 127 f.) und erhalten aus ihnen einen Wert m_0 nach § 130.

Sodann bestimmen wir eine Zahl p, die

III. *Primzahl ist,*

IV. *in B nicht aufgeht,*

V. *größer als m_0 ist.*

Im Falle des § 139 ist IV. dahin zu ergänzen, daß p auch in $g'(c_1)$ bis $g'(c_n)$ nicht aufgeht. B und alle $g'(c_\lambda)$ sind ganz und nicht Null, daher ist IV. erfüllbar.

145. Wählen wir nunmehr die Abschätzungsfunktion $f(x) = \varphi(x)^p$ im Falle der *ersten*, $f(x) = \varphi(x)^{p-1}\chi(x)$ im Falle der *zweiten* Variante, bilden $F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots$ und zerlegen $F(0)E$ in die Teile $K(F)$ und $K(R)$, so ergeben sich folgende Tatsachen:

Erste Variante.	*Zweite Variante.*
a) Auf Grund von I. und (V_3^*) sind die Zahlen $F(c_\lambda)$ ganz.	
b) Auf Grund von II. ist $F(c_\lambda)$ teilbar durch $m!$, worin	
$m = p$.	$m = p - 1$.
c_1) Auf Grund von III. ist $F(c_\lambda) : m! \equiv \varphi'(c_\lambda)^p \pmod p$ (Eingreifen des polynomischen Lehrsatzes).	c_2) Es ist $F(c_\lambda) : m! \equiv \varphi'(c_\lambda)^{p-1}\chi(c_\lambda) \pmod p$, hierin entweder $\chi(c_\lambda) = \varphi'(c_\lambda)$ (§ 138) oder $\varphi'(c_\lambda) \neq 0$ (§ 139).
d) Auf Grund von III. ist nach dem Fermatschen Satze:	
$F(c_\lambda) : m! \equiv \varphi'(c_\lambda) \pmod p$,	$F(c_\lambda) : m! \equiv \chi(c_\lambda) \pmod p$.

e) Daher wird auf Grund von (V_4^*) (Ganzzahligkeit der C_λ):

$$K(F) : m! \equiv B \pmod p.$$

f) Auf Grund von IV. ist somit $K(F) : m!$ eine durch p nicht teilbare, also nicht verschwindende ganze Zahl, darum

$$|K(F)| \geqq m!$$

g) Auf Grund von V. ist (nach § 130):

$$|K(R)| < m!$$

h) Aus (f) und (g) folgt $|K(F)| > |K(R)|$. Der Relativfehler der Schätzung ist absolut genommen kleiner als 1, daher $E \cdot F(0)$ und somit E selbst nicht null.

146. Die Analogie der einzelnen Schritte ist nur beim dritten, c), unterbrochen. Und zwar ist c_1) zweifellos komplizierter als c_2). Jedoch ist das Hereinziehen des polynomischen Lehrsatzes durch die *Einfachheit* des Ansatzes $f(x) = \varphi(x)^m$ zwanglos gegeben, während der Schritt c_2) zu seiner erfolgreichen Durchführung den komplizierteren Ansatz $f(x) = \varphi(x)^m \chi(x)$ und dessen geschickte Spezialisierung erfordert.

Diese Unterschiede sind an sich bedeutungslos; man läßt aber vielfach den polynomischen und Fermatschen Satz nicht als zahlentheoretische Hilfsmittel völlig *elementaren* Charakters gelten, und dann ist allerdings die zweite Variante nicht nur sparsamer im Gebrauch höherer Hilfsmittel, sondern sie gestattet sogar ihre völlige Vermeidung, *da der Fermatsche Satz in beiden Varianten durch Spezialisierung der Zusatzfunktionen umgangen werden kann.*

147. Diese Spezialisierungen sind die in § 142 genannten: $\psi(x)$ bzw. $\chi(x)$ gleich $g_1(x)$. Dadurch verschwinden $\varphi'(x)$ bzw. $\chi(x)$ an den Stellen c_2 bis c_n, und da $\chi(x)$ entweder gleich $\varphi'(x)$ oder gleich $g_1(x)$

und alsdann $\varphi(x) = g(x)$ ist, wird $\chi(c_1) = \varphi'(c_1)$; daher folgt in allen Varianten aus c) unmittelbar

$$K(F) \equiv C_1 \varphi'(c_1)^p \pmod{p}.$$

Zugleich wird $B = C_1 \varphi'(c_1)$, und es leuchtet ein, daß jeder Primfaktor von $C_1 \varphi'(c_1)^p$ entweder in C_1 oder in $\varphi'(c_1)$, also beidemale in B aufgehen muß. Hiermit ist auf elementarem Wege aus IV. der Schritt f) geleistet, und der Beweis läuft wie oben zu Ende.

148. Die Verfügung $\varphi(x) = g(x)$, $\chi(x) = g_1(x)$, also

$$f(x) = (x - c_1)^{p-1}(x - c_2)^p (x - c_3)^p \cdots (x - c_n)^p$$

liegt dem Hilbertschen Beweis zugrunde und ist von allen Bearbeitern, Hurwitz, Gordan, Weber und Vahlen, unverändert übernommen. Daß der Primzahlcharakter von p bei dem Verfahren des § 147 nicht mehr erforderlich ist — es genügt z. B. für p ein hinreichend großes Vielfaches einer in B nicht aufgehenden Primzahl zu wählen —, zeigt nur die Hilbertsche Fassung des Beweises. Die anderen Autoren haben p als Primzahl beibehalten, wohl darum, weil diese Verfügung die bequemste bleibt.

Vierter Teil.

Algebraische Vorbereitungen.

XI. Mengen und Folgen.

A. Formale und numerische Verschiedenheit.

149. Die Zusammenfassung von k Dingen (Elementen) c_1, c_2 bis c_k zu einer Menge $\mathfrak{C}$ werde durch eine geschweifte Klammer, die Menge selbst durch einen großen Frakturbuchstaben bezeichnet:

$$\mathfrak{C} = \{c_1, c_2, \ldots c_n\}.$$

Die Elemente, um die es sich handelt, müssen irgendwie, mindestens formal — z. B. durch die Indizes —, voneinander unterschieden sein. Vor allem betrachten wir Mengen, deren Elemente *Zahlen* sind, und müssen dabei zulassen, daß unterschiedliche Elemente denselben Zahlenwert darstellen.[1]) Dies zwingt uns zu einer sorgfältigen Terminologie, damit die formale Unterscheidbarkeit nicht mit der numerischen verwechselt werde.

150. Wir sagen von formal unterschiedenen Dingen, sie seien „*different*". (Als deutsche Termini kämen etwa „*unterschieden*" oder „*unterschiedlich*" in Betracht.) Den Gegensatz dazu bezeichnet das Wort *identisch.*

Die Worte *gleich* und *verschieden* dagegen beschränken wir auf den *numerischen* Sinn. In $\{c_1, c_2, \ldots c_k\}$ ist also c_λ mit c_μ *identisch*, wenn λ *gleich* μ ist; dagegen sind c_λ und c_μ *different*, wenn λ von μ *verschieden* ist.

Da wir verschiedene Zahlenwerte nicht mit dem gleichen Zeichen belegen dürfen, so sind *verschiedene* Zahlen stets *different*, *identische* Elemente stets *gleich*, dagegen können *differente* Zahlen *gleich* sein, und umgekehrt. Bei allen Erweiterungen der Bedeutung dieser Termini wird diese Relation beibehalten werden.

---

1) Wir betrachteten z. B. in § 95 die Möglichkeit, daß mehrere der Argumente c_λ des Ausdrucks $K(\varphi)$ denselben Zahlenwert besitzen. Ferner können numerisch gleiche Elemente vorkommen unter den Primfaktoren einer Zahl, unter den Wurzeln einer Gleichung, unter den Ziffern, mit denen eine ganze Zahl im Dezimalsystem geschrieben wird usf.

B. Allgemeine Mengen.

151. Zwei Mengen heißen *identisch*, wenn jedes Ding einer jeden mit einem Ding der anderen identisch ist. Andernfalls — wenn mindestens eine ein Ding enthält, das mit keinem Ding der anderen identisch ist — heißen sie different; insbesondere *total different*, wenn jedes Ding einer jeden von jedem Ding der anderen different ist.

152. Sind $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ bis $\mathfrak{C}_n$ zu je zweien total differente Mengen von je k_1, k_2 bis k_n Elementen, so entsteht durch Zusammenfassen aller ihrer Elemente eine Menge $\mathfrak{C}$ von $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ Elementen. Die Mengen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_n$ bilden eine „*Zerlegung*" von $\mathfrak{C}$: Jedes Element von $\mathfrak{C}$ ist in genau einer der Mengen $\mathfrak{C}_\lambda$ enthalten.

153. Besteht eine Zerlegung von $\mathfrak{C}$ aus zwei Mengen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, so heißt jede das „*Komplement*" der anderen in bezug auf $\mathfrak{C}$. Es ist empfehlenswert, auch eine „*leere*" Menge 0, die gar keine Elemente enthält, einzuführen. Sie ist das Komplement von $\mathfrak{C}$ in bezug auf $\mathfrak{C}$ und bildet mit $\mathfrak{C}$ zusammen die *unechte* Zerlegung von $\mathfrak{C}$. Eine Menge mit zwei oder mehr Elementen besitzt echte Zerlegungen, die leere Menge oder eine Menge mit nur einem Element dagegen nicht.

154. Die Glieder $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ einer echten Zerlegung heißen *Teile* von $\mathfrak{C}$. Ist jedes Element von $\mathfrak{C}$ mit einem von $\mathfrak{C}$ identisch, so ist $\mathfrak{C}$ ein Teil von $\mathfrak{C}$ oder mit $\mathfrak{C}$ identisch.

Enthält $\mathfrak{C}$ k Elemente und der Teil $\mathfrak{C}'$ deren n, so ist $\mathfrak{C}'$ dem üblichen Sprachgebrauch nach eine „*Kombination der Elemente von $\mathfrak{C}$ zur n-ten Klasse*", d. h. eine Auswahl von n differenten Elementen ohne Rücksicht auf die Anordnung. Es gibt $\binom{k}{n}$ differente Kombinationen zur n-ten Klasse.

155. Zwei Mengen mit gleichvielen Elementen kann man eineindeutig aufeinander abbilden, beispielsweise durch die Indizes, die ja selbst nichts weiter darstellen als eine Abbildung von $\mathfrak{C}$ auf die Menge $\{1, 2, \ldots k\}$. Dadurch wird zugleich jedem Teil der einen ein Teil der anderen eineindeutig zugeordnet.

156. Insbesondere kann jede Menge eineindeutig auf sich selbst abgebildet werden. Eine solche Abbildung heißt eine *Permutation.*[1]) Da zugleich jedem Teil von n Elementen wieder ein solcher zugeordnet wird, bewirkt jede Permutation der Menge eine Permutation innerhalb jeder Kombinationenklasse.

---

1) Diese Begriffsbildung hat zunächst mit einer *Anordnung* der Elemente nichts zu tun. Wird aber die Menge geordnet, so gehört zu jeder Permutation in obigem Sinne eine Änderung dieser Ordnung, d. h. eine Permutation im engeren Sinne, und umgekehrt.

C. Numerische Mengen.

157. Sind die Elemente von $\mathfrak{C}$ Zahlen, so sagen wir von irgendeiner Zahl x, sie sei in $\mathfrak{C}$ *„n-fach“* oder *„n-mal vertreten“*, wenn genau n differente Elemente von $\mathfrak{C}$ den Wert x haben. Dabei darf n gleich Null sein, wenn nämlich kein c_ν den Wert x hat.

Der Wert x ist in $\mathfrak{C}$ *vorhanden*, wenn er mindestens *einmal*, er ist *mehrfach vorhanden* ($\mathfrak{C}$ besitzt *„mehrfache Elemente“*), wenn er mindestens *zweimal vertreten* ist.

Die Gesamtheit der *verschiedenen* in $\mathfrak{C}$ vorhandenen Zahlen bildet den *Wertevorrat* von $\mathfrak{C}$.

158. Ist kein Zahlenwert in $\overline{\mathfrak{C}}$ öfter als in $\mathfrak{C}$ vertreten, so nennen wir $\overline{\mathfrak{C}}$ eine *„Untermenge“* von $\mathfrak{C}$. Ist $\overline{\overline{\mathfrak{C}}}$ Untermenge von $\overline{\mathfrak{C}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}$, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{C}}}$ Untermenge von $\mathfrak{C}$.

Ist $\overline{\mathfrak{C}}$ Untermenge von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}$ Untermenge von $\overline{\mathfrak{C}}$, so ist jeder Zahlenwert in beiden gleich häufig vertreten. Wir nennen dann $\mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ *„gleiche“* Mengen.

Ist $\mathfrak{C}$ nicht gleich $\overline{\mathfrak{C}}$, ist also mindestens ein Zahlenwert in $\overline{\mathfrak{C}}$ in anderer Häufigkeit als in $\mathfrak{C}$ vertreten, so heißen $\mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ *verschieden*, speziell *total verschieden*, wenn jedes Element von $\overline{\mathfrak{C}}$ von jedem von $\mathfrak{C}$ verschieden ist.

Eine Untermenge von $\mathfrak{C}$ ist entweder gleich $\mathfrak{C}$ oder gleich 0 oder gleich einem Teile $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{C}$.

Anmerkung. Verschiedene Mengen sind stets different, total verschiedene stets total different. Dagegen können differente (auch total differente) Mengen gleich sein. Eine Menge mit mehrfachen Elementen besitzt Teile, die different, sogar total different, und gleich sind.

159. Eine Menge ist *„bestimmt“*, wenn von jeder Zahl feststeht, wie oft sie in ihr vertreten sein soll.

Jede Untermenge $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{C}$ *„bestimmt“* ein Komplement $\mathfrak{C}_2$ von $\mathfrak{C}_1$ in bezug auf $\mathfrak{C}$. Ist nämlich x in $\mathfrak{C}_1$ m_x-fach, in $\mathfrak{C}$ n_x-fach vertreten, so ist $m_x \leqq n_x$ und $\mathfrak{C}_2$ durch die Forderung bestimmt, daß jedes x genau $(n_x - m_x)$-fach in $\mathfrak{C}_2$ vertreten sein soll. *Zu gleichen Untermengen gehören gleiche Komplemente.*

160. Irgend n Mengen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ bis $\mathfrak{C}_n$ *„bestimmen“* eine Menge $\mathfrak{D}$, ihren *„Durchschnitt“*, folgendermaßen: Es sei x in $\mathfrak{C}_\nu$ ξ_ν-fach vertreten und ξ_0 der kleinste der Zahlenwerte ξ_1 bis ξ_n. Zu jeder Zahl x gehört eine solche ganze nichtnegative Zahl ξ_0, und die Forderung, jedes x solle genau ξ_0-fach in $\mathfrak{D}$ enthalten sein, *„bestimmt“* $\mathfrak{D}$.

Der Durchschnitt von $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, ... $\mathfrak{C}_n$ ist Untermenge jedes $\mathfrak{C}_\lambda$, und jede Menge von gleicher Eigenschaft ist Untermenge des Durchschnitts.

Denn ξ_0 ist nicht größer als irgend ein ξ_λ, d. h. kein Zahlenwert ist in $\mathfrak{D}$ öfter als in $\mathfrak{C}_\lambda$ vertreten. Und umgekehrt kann keine gemeinsame Untermenge von $\mathfrak{C}_1$ bis $\mathfrak{C}_n$ die Zahl x öfter als $\mathfrak{k}_0$-fach, d. h. öfter als $\mathfrak{D}$ enthalten, weil ja $\mathfrak{k}_0$ einer der Werte $\mathfrak{k}_\lambda$ ist.

Zusatz. Der Wertvorrat des Durchschnitts von $\mathfrak{C}_1$ bis $\mathfrak{C}_n$ ist der Durchschnitt der Wertevorräte von $\mathfrak{C}_1$ bis $\mathfrak{C}_n$.

Anmerkung. Nach der hier gegebenen Durchschnittsbildung suchen wir im Elementarunterricht aus den Primfaktorenzerlegungen mehrerer Zahlen ihren größten gemeinsamen Teiler.

D. Allgemeine Folgen.

161. Wenn den Elementen einer Menge $\mathfrak{C}$ eine Anordnung vorgeschrieben wird, so entsteht eine „*geordnete Menge*" oder „*Folge*" $\mathfrak{c} = [c_1, c_2, \ldots c_k]$. Wir bezeichnen sie mit einem kleinen Frakturbuchstaben oder durch Anschreiben der Elemente in der vorgeschriebenen Reihenfolge zwischen eckigen Klammern. Die Folge $\mathfrak{c}$ „*gehört*" zur Menge $\{c_1, c_2, \ldots c_k\}$ und umgekehrt.

Folgen aus verschieden vielen Elementen gelten als different; Folgen aus gleichvielen Elementen sind identisch, wenn das ν-te Element der einen mit dem ν-ten der anderen (für jedes in Betracht kommende ν) identisch ist.

162. Auch aus den Teilen von $\mathfrak{C}$ können Folgen gebildet werden; sie heißen die „*Variationen zur n-ten Klasse*" von $\mathfrak{C}$, wenn n die Anzahl ihrer Elemente ist. Es gibt $k(k-1)\cdots(k-n+1)$ oder $\binom{k}{n} n!$ different Variationen von k Elementen zur n-ten Klasse. Die aus $\mathfrak{C}$ selbst zu bildenden Folgen, die Variationen zur k-ten Klasse, sind die Permutationen von $\mathfrak{C}$ im üblichen Sinne. Jede Permutation im Sinne des § 156 oder jeder Übergang von einer Anordnung $\mathfrak{c}$ zu einer anderen, $\bar{\mathfrak{c}}$, permutiert alle Variationen einer Klasse unter sich.

E. Zahlfolgen.

163. Zwei Zahlfolgen $\mathfrak{c} = [c_1, \ldots c_k]$, $\bar{\mathfrak{c}} = [\bar{c}_1, \ldots \bar{c}_k]$ heißen *gleich*, wenn für $\nu = 1$ bis k stets $c_\nu = \bar{c}_\nu$ ist. Andernfalls heißen sie *verschieden*. Zu gleichen Folgen gehören gleiche Mengen.

164. Gehören umgekehrt zwei Folgen $\mathfrak{c}$ und $\bar{\mathfrak{c}}$ zu gleichen Mengen, so heißen sie „*verwandt*". Sie enthalten gleiche Zahlen in gleicher Häufigkeit, nicht aber notwendig in gleicher Anordnung, brauchen also nicht gleich zu sein.

Die Gesamtheit aller untereinander verschiedenen und verwandten Folgen heißt eine „*Familie*". Sie ist durch jedes ihrer Mitglieder oder seine zugehörige Menge bestimmt.

165. *Anmerkung 1.* Sind in $\mathfrak{C}$ n verschiedene Zahlen in den Häufigkeiten $k_1, k_2, \ldots k_n$ vertreten, so besitzt die zugehörige Familie

$$k! : (k_1! k_2! \ldots k_n!)$$

verschiedene Mitglieder. Daß diese Anzahl ein Polynomialkoeffizient ist, ist kein Zufall; vielmehr beruht auf dieser Anzahlbestimmung ein bekannter Beweis des polynomischen Satzes.

Anmerkung 2. Zahlenfolgen verwenden wir bei der dezimalen Schreibweise, in der Koordinatengeometrie, in der Theorie der Determinanten und Matrizen usw. Auch die komplexen Zahlen $a + bi$ werden arithmetisch am einfachsten als geordnete Paare $[a, b]$ reeller Zahlen gedeutet. Im gleichen Sinne sind Folgen von n Zahlen „*komplexe Zahlen höherer Ordnung*“, wie das im folgenden noch deutlicher hervortreten wird.

XII. Die Verknüpfungssätze.

A. Subtraktion und Division.

166. Als „*Verknüpfungssätze*“ bezeichnet man die in § 35 genannten „*reinformalen*“ und „*halbformalen*“ Rechengesetze, von denen wir die letzteren noch ausführlicher darstellen und auf ihre Tragweite untersuchen wollen.

Die *Subtraktion* wird postuliert durch den Satz: *Die Gleichung $A + B = C$ hat bei gegebenen A, C stets genau eine Lösung B; sie wird mit $C - A$ bezeichnet.*

Hieraus folgen ohne weiteres die Klammerregeln

$$A + (B - C) = (A + B) - C, \quad A - (B + C) = (A - B) - C \quad \text{usw.}$$

Speziell wird $B + (A - A) = (B + A) - A = B$, d. h. die Lösung 0 der Gleichung $A + 0 = A$ löst auch die Gleichung $B + 0 = B$, ist also von A, B unabhängig. Sie heißt die „*Null*“. Es ist $A - B = 0$ stets und nur, wenn $A = B$.

Die Lösung A' von $A + A' = 0$ heißt die „*Entgegengesetzte*“ von A und wird mit $(-A)$ bezeichnet. Es ist $A - B = A + (-B)$. An Stelle der allgemeinen Subtraktion genügt es also, die Existenz der Null und der Entgegengesetzten zu postulieren.

Da $A(B + 0)$ sowohl gleich AB wie gleich $AB + A \cdot 0$ wird, ist $A \cdot 0 = 0$, ebenso $0 \cdot A = 0$ für jedes A. Da $(A - A)B$ sowohl gleich 0 wie gleich $AB + (-A)B$ ist, ist $(-A)B = -AB$.

167. Die Ausführbarkeit der *Division* postulieren wir in mehreren Schritten. Zunächst ist klar, daß die Null eine Ausnahmestellung einnimmt, sofern die Division überhaupt ausführbar ist. Denn die Gleichung $0B = C$ hat für $C = 0$ jede beliebige Zahl B zur Lösung, andernfalls keine.

In den geläufigen Größenbereichen gilt nun der „*Eindeutigkeitssatz*“: *Ein Produkt verschwindet stets und nur dann, wenn einer seiner Faktoren verschwindet.* Ist alsdann $A \neq 0$, so folgt aus $AB_1 = AB_2$:

$$A(B_1 - B_2) = 0, \quad \text{also} \quad B_1 = B_2,$$

d. h. *die Division durch eine von der Null verschiedene Größe ist, wenn überhaupt, so nur auf eine Weise möglich.*

168. Wir werden Größenbereiche kennen lernen, in denen $A \neq 0$, $A' \neq 0$, aber $AA' = 0$ sein kann. Dann heißt A ein „*Teiler der Null*", A' ein zu A „*konjugierter*" Teiler der Null. Mit A ist auch AB für jedes B ein Nullteiler oder die Null selbst, denn es wird

$$A'(AB) = (A'A)B = 0 \cdot B = 0.$$

Ist umgekehrt AB ein Nullteiler, B aber nicht, so ist A ein Nullteiler, denn es wird $A'(AB) = 0$, also $(A'A)B = 0$, und da B kein Nullteiler ist, $A'A = 0$. An Stelle des Eindeutigkeitssatzes tritt hier der Satz:

Ein Produkt ist stets und nur Teiler der Null, wenn einer seiner Faktoren Teiler der Null ist.

Hat die Gleichung $AB = C$ zwei verschiedene Lösungen B_1, B_2, so ist $A(B_1 - B_2) = 0$, also sind A und C zu $B_1 - B_2$ konjugierte Nullteiler. Ist umgekehrt B_1 Lösung von $AB = C$ und A Nullteiler, $AA' = 0$, so ist auch $B_2 = B_1 + A'$ Lösung von $AB = C$, und eine solche ist sicher unmöglich, wenn nicht C ein zu A' konjugierter Nullteiler ist.

169. Hat für mindestens ein A, das nicht Nullteiler ist, die Gleichung $AE = A$ eine Lösung E, so wird

$$A(EB - B) = AEB - AB = AB - AB = 0,$$

also $EB = B$ für *jedes* B. Die Größe E heißt die *Eins*, 1. Definitionsgemäß kann sie kein Nullteiler sein.

Hat die Gleichung $AA' = 1$ eine Lösung A', so hat $AB = C$ für jedes C genau eine Lösung $B = A'C$. A' heißt die „*Reziproke*" A^{-1} von A. Die Reziproke von A^{-1} ist A. Nur wenn A weder Null noch Nullteiler ist, kann es eine Reziproke besitzen.

B. Teilbarkeit.

170. Ein Bereich von Größen, der eine Eins und zu irgend zweien seiner Elemente, A, B, auch deren Produkt AB enthält, heiße ein „*Teilbarkeitsbereich*". Nach § 168 bleibt ihm seine Eigenschaft erhalten, wenn man etwa vorhandene Nullteiler und die Null aus ihm entfernt. Haben irgend endlich- oder unendlichviele Teilbarkeitsbereiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... gemeinsame Elemente A, B, ... und haben die Zeichen 1, AB in allen Bereichen denselben Sinn, so bilden die gemeinsamen Elemente einen Teilbarkeitsbereich $\mathfrak{T}$. Denn $\mathfrak{T}$ enthält 1 und mit A, B auch AB, da 1 und mit A und B auch AB allen Bereichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... gemeinsam angehört („*Durchschnittssatz*").

171. Wenn A, B, also auch $AB = C$ einem Teilbarkeitsbereiche $\mathfrak{A}$ angehören, so heißen A und B „*Teiler von C in $\mathfrak{A}$*"; C heißt „*durch A und B in $\mathfrak{A}$ teilbar*". Ist C durch A, D durch B, so auch CD durch AB, ist C durch B, B durch A, so auch C durch A teilbar in $\mathfrak{A}$. „*Einheits-*

teiler", d. h. Teiler der Eins, sind diejenigen Größen von $\mathfrak{A}$, die in $\mathfrak{A}$ Reziproken besitzen. Ein Produkt aus Einheitsteilern ist ein Einheitsteiler. Jeder Einheitsteiler ist Teiler jeder Größe des Bereiches. Die Teilbarkeitsbegriffe werden daher trivial (wenn auch nicht falsch) für solche Bereiche, in denen jede Größe (sofern sie nicht die Null oder ein Nullteiler ist) eine Reziproke besitzt.

172. Ist A Teiler von A', A' von A, so ist $A' = AE$, E ein Einheitsteiler. Jeder Teiler von A ist Teiler von A', jede durch A teilbare Größe ist durch A' teilbar, und umgekehrt; A und A' heißen daher „*äquivalent in* $\mathfrak{A}$". Ist A zu A', B zu B', so auch $C = AB$ zu $C' = A'B'$ äquivalent, und Zerlegungen, wie diese, nämlich äquivalenter Größen C, C' in (zwei oder mehr) entsprechend äquivalente Faktoren, heißen „*äquivalente*" Zerlegungen und gelten (ebenso wie äquivalente Größen) als „*nicht wesentlich verschieden*", insofern sie in allen Teilbarkeitsfragen einander vertreten können. In diesem Sinne nennt man unter den gemeinsamen Teilern zweier Größen A, B einen solchen, der alle zu Teilern hat, „*den*" *größten,* da er seine definierende Eigenschaft nur mit den zu ihm äquivalenten Größen (und mit diesen offenbar stets) teilt. Denn von zwei größten gemeinsamen Teilern ist ex definitione jeder ein Teiler des andern. Übrigens braucht ein größter gemeinsamer Teiler von A und B nicht notwendig zu existieren (vgl. § 174d); er existiert aber sicher und kann gleich 1 gewählt werden im Falle „*teilerfremder*" A, B, die nur die Einheitsteiler zu gemeinsamen Teilern haben.

173. Jede mit A oder 1 äquivalente Größe ist Teiler von A und gilt als „*uneigentlicher*" Teiler von A. Zerlegungen in lauter uneigentliche Teiler gelten ebenso als „*uneigentlich*". Größen ohne eigentliche Teiler heißen „*einfach*", „*unzerlegbar*" oder „*irreduzibel*" (scil. in $\mathfrak{A}$), die anderen „*zusammengesetzt*", „*zerlegbar*" oder „*reduzibel*". Von dieser Unterscheidung werden die Einheitsteiler als besondere Größenklasse ausgenommen. Eine einfache Größe ist teilerfremd zu jeder Größe, von der sie nicht Teiler ist. Ist sie auch teilerfremd zu jedem Produkt aus zu ihr teilerfremden Größen und daher umgekehrt Teiler mindestens eines Faktors in jedem durch sie teilbaren Produkt, so heißt sie eine „*Primgröße*". Eine in Primgrößen zerlegbare Größe ist „im wesentlichen" (§ 172) nur auf diese eine Art in einfache Größen zerlegbar. Ist A Einheitsteiler, zerlegbar, einfach oder prim, so gilt das gleiche von allen zu A äquivalenten Größen.

174. Einige Beispiele mögen vor allem auf die Relativität des Teilbarkeitsbegriffes hinweisen, dessen Inhalt für dasselbe Größenpaar je nach dem zugrundeliegenden Bereich ganz verschieden sein kann.

a) Im Bereich der ganzen Funktionen mit *rationalen* Koeffizienten sind alle echten Funktionen nullten Grades, z. B. $2x^0$, Teiler der Eins, x^0. Daher ist x äquivalent zu $2x$ und $2x$ Teiler von x^2.

b) Im Bereich der *ganzzahligen* Funktionen sind nur x^0 und $-x^0$

Einheitsteiler. Daher ist x eigentlicher Teiler von $2x$, und x^2 ist durch $2x$ nicht teilbar, da der Quotient $\frac{1}{2}x$ dem Bereich nicht angehört.

c) Im Bereich der Dezimalzahlen, d. h. der rationalen Zahlen von der Form $a : 10^n$ (a ganz), der den Bereich der ganzen Zahlen umfaßt, sind alle Zahlen $2^m 5^n$ Einheitsteiler, so daß beispielsweise 3, 6, 12, 15 usf. zueinander äquivalent und, wie leicht zu sehen, Primgrößen werden.

d) Im Bereich derjenigen ganzen Zahlen, die, wie 4, 6, 9, 16, 36, Produkte einer *geraden* Anzahl gewöhnlicher Primzahlen sind, sind die Produkte *zweier* Primzahlen, wie 4, 6, 9, 10, 15, *unzerlegbar*, aber nicht Primgrößen. Denn beispielsweise ist 6 Teiler von $4 \cdot 9$, ohne Teiler eines der Faktoren zu sein, so daß 36 *zwei wesentlich verschiedene* Zerlegungen in einfache Größen, $4 \cdot 9$ und $6 \cdot 6$, besitzt. Ferner haben 60 und 90 die gemeinsamen Teiler 6, 10 und 15, *aber keinen größten.*

175. Ein Größenbereich, der eine Eins und zu irgend zweien seiner Größen A, B auch $A + B$, $A - B$, AB und daher jede ganzzahlige Funktion irgendwelcher seiner Größen enthält, heißt ein „*Ganzheits*“- oder „*Integritätsbereich*“. Enthält er außerdem zu jedem $A \neq 0$ auch A^{-1}, so heißt er ein „*Körper*“ oder „*Rationalitätsbereich*“. Wie in § 170 beweist man, daß die gemeinsamen Elemente irgendwelcher Integritäts-(Rationalitäts-)Bereiche wieder einen Integritäts-(Rationalitäts-)Bereich bilden. Einfache Beispiele sind der Integritätsbereich der ganzen, der Rationalitätsbereich der rationalen Zahlen.

C. Das Rechnen nach einem Modul.

176. Die Verknüpfungssätze finden Anwendung beim Rechnen nach einem Modul. Das einfachste Beispiel dieser Rechnungsweise erhalten wir derart, daß wir die Achse der reellen Zahlen auf einen Kreis vom Umfange u aufgewickelt denken und nunmehr zwei Zahlen a, a' als „*kongruent modulo u*“, $a \equiv a' \pmod u$, bezeichnen, wenn ihre repräsentierenden Punkte zusammenfallen, „*kongruieren*“, *d. h. wenn* $a' = a + mu$ *und m eine ganze Zahl ist.* Die letzte Fassung läßt auch komplexes u zu. Beispielsweise sind alle Werte von $\ln a$ kongruent modulo $2\pi i$.

177. Allgemein nennen wir zwei Größen A, A' „*kongruent modulo U*“, $A \equiv A' \pmod U$, in bezug auf einen Integritätsbereich $\mathfrak{M}$, wenn $A' = A + MU$ und M eine Größe aus $\mathfrak{M}$ ist. Aus $A \equiv A'$, $B \equiv B'$ folgt *stets* $A \pm B \equiv A' \pm B'$ und, *wenn* U, A, B *zu* $\mathfrak{M}$ *gehören*, auch $AB \equiv A'B'$. Wir schließen sogleich den Trivialfall aus, daß U Einheitsteiler in $\mathfrak{M}$, also stets $A \equiv 0$ ist. Dann bilden beim Rechnen modulo U die Größen von $\mathfrak{M}$ einen Integritätsbereich „$\mathfrak{M}$ *modulo U*“, in dem jetzt nur inkongruente Größen als verschieden zu gelten haben. Die Eins von $\mathfrak{M}$ und jede ihr kongruente Größe ist auch Eins in $\mathfrak{M}$ mod U.

A „*verschwindet modulo U*“, wenn $A \equiv 0$, d. h. A durch U teilbar ist. A, B sind „*konjugierte Nullteiler modulo U*“, wenn $A \not\equiv 0$, $B \not\equiv 0$, aber

$AB \equiv 0 \pmod{U}$ ist. Indem wir sogleich für $\mathfrak{M}$ den Eindeutigkeitssatz als gültig annehmen, schließen wir aus, daß ein Nullteiler in $\mathfrak{M}$ mod U schon in $\mathfrak{M}$ selbst Nullteiler ist.

178. Je nachdem ein Nullteiler mod U zu U in $\mathfrak{M}$ teilerfremd ist oder nicht, heißt er ein Nullteiler „*zweiter*“ oder „*erster*“ Art. Nullteiler erster Art setzen einen in $\mathfrak{M}$ zerlegbaren Modul $U = VW$ voraus und existieren dann stets. Denn jeder echte Teiler V von U ist Nullteiler, und eine zu U nichtteilerfremde Größe $A = MV$ ist mod U null oder Nullteiler, weil $AW = MU \equiv 0 \pmod{U}$ wird.

179. Ist U in $\mathfrak{M}$ unzerlegbar, fehlen also Nullteiler erster Art mod U, so ist U entweder Primgröße in $\mathfrak{M}$ oder nicht. Im ersten Falle fehlen Nullteiler mod U überhaupt, da die charakteristische Eigenschaft der Primgröße U, Teiler eines Faktors zu sein, wenn sie Teiler eines Produktes ist, genau den Eindeutigkeitssatz für den Bereich $\mathfrak{M}$ mod U ausspricht. Im zweiten Falle ist daher U Teiler mindestens eines Produktes zu U teilerfremder Größen, die damit als Nullteiler zweiter Art in $\mathfrak{M}$ mod u gekennzeichnet sind. So 4 und 9 mod 6 in dem Beispiel § 174d, das allerdings nur einen Teilbarkeits-, keinen Integritätsbereich darstellt.

180. Wenn unter den gemeinsamen Teilern irgend zweier Größen A, U von $\mathfrak{M}$ stets ein *größter*, T, vorhanden und mit Größen A', U' aus $\mathfrak{M}$ als $T = AA' + UU'$ darstellbar ist, so wird, wenn A zu U teilerfremd, d. h. kein Nullteiler erster Art mod U ist, $T = 1$, also $AA' \equiv 1$ mod U, d. h. A ein *Einheitsteiler* mod U und darum *überhaupt kein Nullteiler* sein. Eine unzerlegbare Größe U von $\mathfrak{M}$ ist dann stets Primgröße, und $\mathfrak{M}$ mod U wird ein Körper, indem jede mod U nichtverschwindende Größe A eine Reziproke A' modulo U besitzt.

181. Im Bereich $\mathfrak{G}$ der ganzen Zahlen gilt die Betrachtung des § 180, da hier der Euklidische Teileralgorithmus anwendbar ist. Daher gibt es nach einem Primzahlmodul p keine Nullteiler; die Reziproke mod p der mod p nicht verschwindenden Zahl k liefert der Fermatsche Satz in der expliziten Darstellung k^{p-2}. Nach einem zerlegbaren Modul existieren Nullteiler erster Art (so 2, 3 und 4 modulo 6; $2 \cdot 3 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 0$ mod 6) und die Division ist bekanntlich weder durchgängig möglich noch eindeutig. Dieses elementare Beispiel zeigt, daß der Nullteilerbegriff sehr zu Unrecht zuweilen für abstrus gehalten wird.

Auch im Bereich der ganzen Funktionen ist der Euklidische Algorithmus anwendbar. Nach einem funktionalen Modul gibt es also keine Nullteiler zweiter Art, wohl aber sind beispielsweise $x - c_1$ bis $x - c_n$ Nullteiler erster Art modulo $g(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$. Im Falle *$n$ verschiedener* Nullstellen c_λ kennen wir die funktionale Kongruenz

$$\bar{\chi}(x) \equiv \chi(x) \pmod{g(x)}$$

bereits als „*Wertegleichheit*“ an diesen Stellen. In diesem Sonderfalle besitzt $g'(x)$, weil zu $g(x)$ teilerfremd, eine Reziproke mod $g(x)$; diese wird man, unter gleichzeitiger Verwendung des numerischen Primzahlmoduls p, in der Betrachtung des § 141 leicht wiedererkennen.

D. Verknüpfung von Zahlfolgen.

182. Die Summe zweier Zahlfolgen

$$\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k], \quad \mathfrak{n} = [\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k]$$

haben wir schon in § 51 als

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = [\mu_1 + \nu_1, \mu_2 + \nu_2, \ldots \mu_k + \nu_k]$$

definiert. Diese Summe ist kommutativ und assoziativ. Es existiert die Null $\mathfrak{o} = [0, 0, \ldots 0]$, die Entgegengesetzte zu $\mathfrak{m}$, $-\mathfrak{m} = [-\mu_1, -\mu_2, \cdots -\mu_k]$ und daher auch die Differenz $\mathfrak{m} - \mathfrak{n} = [\mu_1 - \nu_1, \mu_2 - \nu_2, \cdots \mu_k - \nu_k] = \mathfrak{m} + (-\mathfrak{n})$.

183. Analog definieren wir ein Produkt — zum Unterschied von anderen Produktbildungen das „*gliedweise*" Produkt genannt — durch

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = [\mu_1\nu_1, \mu_2\nu_2, \ldots \mu_k\nu_k].$$

Es ist assoziativ, kommutativ und distributiv. Die Rolle der Eins übernimmt die Folge $\mathfrak{e} = [1, 1, \ldots 1]$, und zu jeder nullfreien Folge $\mathfrak{m}$ existiert eine Reziproke, $\mathfrak{m}^{-1} = [\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \ldots \mu_k^{-1}]$; dagegen ist jede Folge, die eine Null enthält, ein Nullteiler und konjugiert zu jeder Folge, die an denjenigen Stellen Nullen hat, wo die erste mit nichtverschwindenden Zahlen besetzt ist. So gilt von den Folgen mit einer Eins neben lauter Nullen, den „*Haupteinheiten*"

$$\mathfrak{e}_1 = [1, 0, 0, \ldots 0], \quad \mathfrak{e}_2 = [0, 1, 0, \ldots 0], \ldots \mathfrak{e}_k = [0, 0, 0, \ldots 1]$$

das System von Relationen:

(1) $$\mathfrak{e}_\lambda \mathfrak{e}_\mu = \mathfrak{o} \text{ für } \lambda \neq \mu, \quad \mathfrak{e}_\lambda \mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_\lambda.$$

184. Unter dem Produkt $a\mathfrak{m}$ einer Zahl a mit einer Folge $\mathfrak{m}$ verstehen wir die Folge

$$a[\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k] = [a\mu_1, a\mu_2, \ldots a\mu_k].$$

Dann ist insbesondere

(2) $$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = 2\mathfrak{m}, \quad n\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = (n+1)\mathfrak{m},$$

also $n\mathfrak{m}$ für positiv ganzes n eine Summe n gleicher Folgen $\mathfrak{m}$.

In zahlreichen Anwendungsgebieten, z. B. in der Physik, werden Zahlfolgen als „*vektorielle*" Größen, einzelne Zahlen im Gegensatz hierzu als „*Skalare*" bezeichnet. Das Produkt $a\mathfrak{m}$ hat zwei heterogene Faktoren, einen skalaren und einen vektoriellen, und ist selbst ein Vektor.

185. Ist $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_k$ ein System „*linear unabhängiger*" Folgen $\mathfrak{p}_\varrho = [p_{\varrho 1}, p_{\varrho 2}, \cdots p_{\varrho k}]$, d. h. ist die Determinante $|p_{\varrho\nu}|$ nicht Null, so sind die k linearen Gleichungen $\sum_{\varrho=1}^{k} p_{\varrho\nu} a_\varrho = \mu_\nu$ nach den a_ϱ unbeschränkt und eindeutig auflösbar. Andererseits lassen sie sich zusammenfassen in die eine Gleichung

$$(3) \qquad a_1 \mathfrak{p}_1 + a_2 \mathfrak{p}_2 + \cdots + a_k \mathfrak{p}_k = \mathfrak{m}.$$

Es ist also jede Folge $\mathfrak{m}$ linear aus den Folgen $\mathfrak{p}_\varrho$ zusammensetzbar.

Beispielsweise wird für die *„Haupteinheiten“* $\mathfrak{e}_\varrho$ des § 183:

$$(4) \qquad [\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k] = \mu_1 \mathfrak{e}_1 + \mu_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \mu_k \mathfrak{e}_k.$$

186. Für unsere Zwecke wichtiger sind die *„Grundeinheiten“*:

$$\mathfrak{g}_1 = [1, 0, 0, \ldots 0], \quad \mathfrak{g}_2 = [1, 1, 0, \ldots 0], \ldots \mathfrak{g}_k = [1, 1, 1, \ldots 1].$$

Der Ansatz (3) liefert für $\mathfrak{p}_\varrho = \mathfrak{g}_\varrho$ die Gleichungen:

$$(5) \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \mu_1, \quad a_2 + \cdots + a_k = \mu_2, \ldots a_k = \mu_k,$$

die nach den a_ϱ elementar aufgelöst werden können; sie ergeben:

$$(6) \qquad a_1 = \mu_1 - \mu_2, \quad a_2 = \mu_2 - \mu_3, \ldots a_{k-1} = \mu_{k-1} - \mu_k, \quad a_k = \mu_k.$$

Diese Darstellung von $\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k]$:

$$(7) \qquad \mathfrak{m} = (\mu_1 - \mu_2)\mathfrak{g}_1 + (\mu_2 - \mu_3)\mathfrak{g}_2 + \cdots + (\mu_{k-1} - \mu_k)\mathfrak{g}_{k-1} + \mu_k \mathfrak{g}_k,$$

erhält man auch unmittelbar aus (4) und den Beziehungen:

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1, \ldots \mathfrak{e}_k = \mathfrak{g}_k - \mathfrak{g}_{k-1}.$$

187. Unter der *„Spur“* $\mathfrak{S}\mathfrak{m}$ einer Folge $\mathfrak{m}$ versteht man die Summe $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ ihrer Elemente, unter der *„Norm“* $\mathfrak{N}\mathfrak{m}$ ihr Produkt $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k$. Es ist $\mathfrak{N}\mathfrak{m} = 0$ stets und nur, wenn $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$ oder ein Nullteiler ist. Ferner ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) = \mathfrak{S}\mathfrak{m} + \mathfrak{S}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{N}(\mathfrak{m}\mathfrak{n}) = \mathfrak{N}\mathfrak{m}\mathfrak{N}\mathfrak{n}$. Von der Norm machen wir wenig Gebrauch.

188. Die Spur $\mathfrak{S}(\mathfrak{m}\mathfrak{n})$ des gliedweisen Produktes heißt nach Graßmann das *„innere Produkt“*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{m}\mathfrak{n}) = \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \cdots + \mu_k \nu_k$$

der Folgen $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$. Da sie ein *„Skalar“* ist, so hat das innere Produkt von mehr als zwei Folgen keinen Sinn, und damit entfällt das assoziative Gesetz. Dagegen gilt das kommutative und das distributive Gesetz:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{m}\mathfrak{n}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{n}\mathfrak{m}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{m}\mathfrak{p}) + \mathfrak{S}(\mathfrak{m}\mathfrak{q}).$$

189. Sind $a_1^x, a_2^x, \ldots a_k^x$ k Exponentialfunktionen mit den Charakteristiken $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, so verstehen wir für $\mathfrak{x} = [x_1, x_2, \ldots x_k]$ unter $\mathfrak{a}^\mathfrak{x}$ das Produkt

$$\mathfrak{a}^\mathfrak{x} = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_k^{x_k}.$$

Es ist

$$\mathfrak{a}^\mathfrak{o} = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}^\mathfrak{x} \mathfrak{a}^\mathfrak{y} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}.$$

Man könnte in Analogie zum gliedweisen Produkt die Exponentialfunktion zunächst durch die Folge $[a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, \ldots a_k^{x_k}]$ definieren, deren

Norm dann unser $\mathfrak{a}^{\mathfrak{x}}$ ist. Ferner ist noch $\mathfrak{a}^{\mathfrak{x}} = e^{\mathfrak{S}(\mathfrak{c}\mathfrak{x})}$, wenn $\mathfrak{c}$ die „*Charakteristik*“ $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k]$ der „*Basis*“ $\mathfrak{a}$ bezeichnet.

190. *Anmerkung 1.* Die Bezeichnung „*Multiplikation*“ wird im allgemeinen auf irgendwelche Operationen mit Folgen angewandt, die sich distributiv verhalten und das Herausziehen skalarer Faktoren gestatten. Infolgedessen wird das Produkt zweier durch linear unabhängige Folgen $\mathfrak{p}_\varrho$ dargestellter Folgen $\mathfrak{m} = \sum\limits_\varrho a_\varrho \mathfrak{p}_\varrho$, $\mathfrak{n} = \sum\limits_\sigma b_\sigma \mathfrak{p}_\sigma$ allemal darstellbar als $\sum a_\varrho b_\sigma \mathfrak{p}_\varrho \mathfrak{p}_\sigma$, so daß man sich darauf beschränken kann, den Sinn der n^2 Produkte $\mathfrak{p}_\varrho \mathfrak{p}_\sigma$ festzusetzen. In der Tat definieren die Relationen (1) das gliedweise, die Relationen $\mathfrak{S}(\mathfrak{e}_\lambda \mathfrak{e}_\mu) = 0$, $(\lambda \neq \mu)$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{e}_\lambda \mathfrak{e}_\lambda) = 1$ das innere Produkt vollständig.

191. *Anmerkung 2.* Das Produkt ist nur in zwei Fällen so definierbar, daß Körper entstehen; erstens, wenn die Folgen aus ganzen Zahlen bestehen, mit denen nach einem Primzahlmodul gerechnet wird. Diese Körper werden als „Galoissche Felder“ bezeichnet. Zweitens, wenn die Folgen Paare reeller Zahlen sind und unter ihnen zwei solche existieren, daß $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_2 = - \mathfrak{p}_1$ ist. Damit erhält man offenbar die komplexen Zahlen. Außerdem gibt es noch ein System von Folgen, dessen Multiplikation wenigstens frei von Nullteilern, doch nicht mehr kommutativ ist. Dieses System ist das der „*Quaternionen*“; sie sind, wie der Name besagt, Folgen aus vier (reellen) Zahlen.

192. *Anmerkung 3.* Auch der Determinanten- und Matrizenkalkul ist als Multiplikation darstellbar; diese heißt nach Graßmann: „*äußere Multiplikation*“. Die definierenden Relationen sind zunächst $\mathfrak{e}_\varrho \mathfrak{e}_\sigma = - \mathfrak{e}_\sigma \mathfrak{e}_\varrho$, $\mathfrak{e}_\varrho \mathfrak{e}_\varrho = 0$, wodurch das kommutative Gesetz zu $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = - \mathfrak{n}\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m} = 0$, und jedes Produkt aus linear abhängigen Folgen (z. B. mit mehr als k oder mit zwei gleichen Faktoren) zu Null wird. Die Produkte

$$\mathfrak{e}_{\sigma_1} \mathfrak{e}_{\sigma_2} \ldots \mathfrak{e}_{\sigma_m} \quad (1 \leqq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_m \leqq k;\ m \leqq k)$$

sind sodann die Haupteinheiten $\mathfrak{E}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \ldots M)$ eines *neuen* Systems von Folgen aus $\binom{k}{m} = M$ Elementen. Die wertvollen geometrischen Anwendungen dieses Kalkuls liegen dem Rahmen dieser Arbeit zu fern, um eine Besprechung zu rechtfertigen.

XIII. Die Anordnungssätze.

A. Transitive und additive Eigenschaft.

193. Die „*Anordnungssätze*“ handeln von der Beziehung $a < b$. Es sind folgende vier, die zunächst für reelle Zahlen gelten:

Der Disjunktionssatz (Satz der dreifachen Disjunktion): Sind a, b zwei Zahlen, so ist entweder $b < a$ oder $a = b$ oder $a < b$.

Das transitive Gesetz: Ist $a < b$, $b < c$, so ist $a < c$.

Das additive Gesetz: Ist $a < b$, so ist $a + c < b + c$ für jedes c.

Das multiplikative Gesetz: Ist $a < b$, $0 < c$, so ist $ac < bc$.

Von dem letzten Gesetz machen wir hier keinen Gebrauch.

194. Aus dem additiven Gesetz folgt mit Hilfe des transitiven der Satz: *Aus* $a \leqq b$ *und* $c \leqq d$ *folgt* $a + c \leqq b + d$, *und zwar gilt das Gleichheitszeichen in der Folgerung nur, wenn es in beiden Voraussetzungen gilt.*

Gilt in einer der Voraussetzungen das Gleichheitszeichen, so haben wir das additive Gesetz vor uns. Es sei daher $a < b$, also nach dem additiven Gesetz $a + c < b + c$, und $c < d$, also ebenso $b + c < b + d$. Dann folgt aus dem transitiven Gesetz $a + c < b + d$.

Nicht nur das additive, sondern auch das transitive Gesetz ist umgekehrt in diesem Satz enthalten. Denn aus $a < b$ und $b < c$ folgt durch Addition $a + b < b + c$ und durch Addition von $-b$: $a < c$.

195. Aus dem additiven Gesetz folgt, daß die Gleichung $a + x = b$, aus dem multiplikativen, daß $ax = b$ höchstens eine Lösung besitzen kann. In der Tat schließt das multiplikative Gesetz die Existenz von Nullteilern aus.

Ein System von Größen, in dem das additive Gesetz gilt, muß unendlich viele Elemente enthalten, denn es wird, wenn $a > 0$ ist, $2a > a > 0$ und ebenso $na > (n-1)a > 0$ für jedes ganze n. Daher können die Anordnungssätze nicht auf Zahlsysteme nach einem Modul übertragen werden, da hier $ua \equiv 0 \bmod u$ wird. Dagegen werden wir sie auf Zahlfolgen übertragen.

B. Die Anordnung von Zahlfolgen.

196. Wenn die Folgen $\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k]$, $\mathfrak{n} = [\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k]$ nicht gleich sind, so gibt es mindestens einen und darum speziell einen *kleinsten* Index α, für den $\mu_\alpha \neq \nu_\alpha$ ist. Gilt nun im Bereiche der μ_ϱ, ν_ϱ der *Disjunktionssatz* (§ 193), so ist entweder $\mu_\alpha < \nu_\alpha$ oder $\mu_\alpha > \nu_\alpha$. Im ersten Falle heißt $\mathfrak{n}$, im zweiten $\mathfrak{m}$ die *höhere* Folge, entsprechend die jeweils andere die *niedere*, in Zeichen $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, und wenn nicht $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ ist, ist entweder $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, d. h. *der Disjunktionssatz ist auf Folgen übertragen.*

197. Nunmehr sei $\mathfrak{l} < \mathfrak{m}$, d. h. es gebe einen Index α, für den

$$(1) \qquad \lambda_\alpha < \mu_\alpha \quad \text{und, falls } \varrho < \alpha\text{:} \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho \qquad (2)$$

gilt. Ferner sei $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, d. h. es gebe einen Index β, für den

$$(3) \qquad \mu_\beta < \nu_\beta \quad \text{und, falls } \sigma < \beta\text{:} \quad \mu_\sigma = \nu_\sigma \qquad (4)$$

gilt. Nun ist entweder $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$ oder $\alpha = \beta$. Im ersten Falle ist α und jedes ϱ ein σ, daher $\mu_\alpha = \nu_\alpha$, $\mu_\varrho = \nu_\varrho$ nach (4). Mit (1) und (2) folgt:

$$\lambda_\alpha < \nu_\alpha \quad \text{und, falls } \varrho < \alpha\text{:} \quad \lambda_\varrho = \nu_\varrho, \quad \text{d. h. } \mathfrak{l} < \mathfrak{n}.$$

Im zweiten Falle ist β und jedes σ ein ϱ, daher nach (2): $\lambda_\beta = \mu_\beta$ und $\lambda_\sigma = \mu_\sigma$, also mit (3) und (4):

$$\lambda_\beta < \nu_\beta \quad \text{und, falls } \sigma < \beta\text{:} \quad \lambda_\sigma = \nu_\sigma, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{l} < \mathfrak{n}.$$

Im dritten Falle ist $\lambda_\alpha < \mu_\alpha < \nu_\alpha$, d. h. *nach dem transitiven Gesetz:* $\lambda_\alpha < \nu_\alpha$, und für jedes $\varrho < \alpha$: $\lambda_\varrho = \mu_\varrho = \nu_\varrho$, d. h. wiederum $\mathfrak{l} < \mathfrak{n}$.

Das transitive Gesetz ist damit ebenfalls auf Folgen übertragen.

198. Aus $\mathfrak{l} < \mathfrak{m}$ folgt, unter Beibehaltung der Bezeichnung (1) und (2) in § 197, für eine nunmehr beliebige Folge $\mathfrak{n}$: *Erstens* $\lambda_\alpha + \nu_\alpha < \mu_\alpha + \nu_\alpha$ aus (1) *nach dem additiven Gesetz*, *zweitens* $\lambda_\varrho + \nu_\varrho = \mu_\varrho + \nu_\varrho$, falls $\varrho < \alpha$ aus (2). Es gilt also $\mathfrak{l} + \mathfrak{n} < \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$.

Auch das additive Gesetz und mit ihm endlich der Satz des § 194 ist hierdurch von Zahlen auf Zahlfolgen übertragen.

199. *Anmerkung.* Dieses Prinzip der „*Ordnung nach ersten Unterschieden*" (ersten „Differenzen", Hausdorff) ist für die Mengenlehre von fundamentaler Bedeutung. Wir wenden es aber schon in den Elementen an: Daß π kleiner ist als $\frac{22}{7}$, erkennen wir aus

$$\left.\begin{cases} \pi = 3{,}14159\ldots \\ \frac{22}{7} = 3{,}14285\ldots \end{cases}\right\} \quad \text{und} \quad 1 < 2.$$

Auch die komplexen Zahlen sind, als geordnete Paare reeller Zahlen, nach diesem Verfahren so geordnet, daß die drei Sätze des § 193 gelten, *und darum bleiben die Betrachtungen dieses Abschnitts wieder gültig für Folgen aus komplexen Zahlen.* Wir haben definitionsgemäß unter $a + bi < c + di$ zu verstehen, daß entweder $a < c$ im gewöhnlichen Sinne oder $a = c$ und $b < d$ im gewöhnlichen Sinne zutreffen soll.

Für die geometrischen Anwendungen — konforme Abbildung, Vektoranalysis usw. — kommt dieses Anordnungsverfahren natürlich nicht in Betracht, weil dort bereits eine völlig verschiedene mehrdimensionale Anordnung gegeben ist.

C. Grundfolgen und Familien.

200. Unter den Gliedern einer Familie, d. h. unter allen verschiedenen Folgen, die man aus einer Menge $\mathfrak{M} = \{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k\}$ bilden kann, ist eines das höchste, da eine Familie nur endlich viele Glieder besitzt. Dieses höchste Glied soll das „*Grundglied*" der Familie heißen. Wenn wir uns fragen, *wie* man die Elemente von $\mathfrak{M}$ anordnen *muß*, um das Grundglied zu erhalten, so nehmen wir dabei bereits an, *daß* das Grundglied als solches durch die Anordnung seiner Elemente charakterisiert werden *kann*, ohne daß man es mit den anderen Gliedern der Familie auf erste Differenzen zu vergleichen braucht. Dies gilt es nunmehr nachzuweisen.

201. Es sei in einer Folge $\mathfrak{m}$ kein Element kleiner als ein nachfolgendes, es gelte also

$$\mu_\alpha \overline{\overline{>}} \mu_\beta \quad \text{für} \quad \alpha < \beta$$

(oder, was hierfür hinreicht, $\mu_1 \overline{\overline{>}} \mu_2 \overline{\overline{>}} \cdots \overline{\overline{>}} \mu_k$); dann nennen wir $\mathfrak{m}$ eine *Grundfolge.* Aus dem additiven Gesetz folgt sogleich:

Die Summe zweier Grundfolgen ist eine Grundfolge,

ein Satz, dessen wir erst später benötigen. Sodann aber gilt:

In jeder Familie ist genau eine Grundfolge enthalten, und diese ist das Grundglied der Familie.

202. Zum Beweise betrachten wir zwei verschiedene Glieder $\mathfrak{m} = [\mu_1, \ldots \mu_k]$ und $\bar{\mathfrak{m}} = [\bar{\mu}_1, \ldots \bar{\mu}_k]$ der zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Familie. Es sei $\mathfrak{m} < \bar{\mathfrak{m}}$, also für ein bestimmtes α als Index:

(5) $\qquad \mu_\alpha < \bar{\mu}_\alpha,$ zugleich, falls $\varrho < \alpha$: $\mu_\varrho = \bar{\mu}_\varrho$. $\qquad$ (6)

Aus (6) folgt, daß die Komplemente der Mengen

$$\mathfrak{M}_\alpha = \{\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}, \cdots \mu_k\} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{M}}_\alpha = \{\bar{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_{\alpha+1}, \cdots \bar{\mu}_k\}$$

in bezug auf $\mathfrak{M}$ gleich sind. Im Falle $\alpha = 1$ sind insbesondere beide leer. Es ist darum (§ 159) auch $\mathfrak{M}_\alpha$ gleich $\bar{\mathfrak{M}}_\alpha$, und speziell muß $\bar{\mu}_\alpha$ einem Element μ_β von $\mathfrak{M}_\alpha$ gleich sein. Da $\bar{\mu}_\alpha$ nicht gleich μ_α selbst ist, ist $\alpha < \beta$, zugleich aber wegen (5): $\mu_\alpha < \mu_\beta$. *Wenn es also zu einer Folge* $\mathfrak{m}$ *eine höhere Verwandte gibt, so ist* $\mathfrak{m}$ *sicher keine Grundfolge.*

203. Wenn umgekehrt $\mathfrak{m} = [\mu_1, \ldots \mu_k]$ keine Grundfolge ist, so gibt es zwei Indizes α, β, so daß $\mu_\alpha < \mu_\beta$ und $\alpha < \beta$ ist. Durch Vertauschung von μ_α und μ_β entsteht aus $\mathfrak{m}$ eine Folge $\bar{\mathfrak{m}} = [\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots \bar{\mu}_k]$, und es wird $\bar{\mu}_\alpha = \mu_\beta$, $\bar{\mu}_\beta = \mu_\alpha$, sonst aber, insbesondere also für $\varrho < \alpha$, stets $\mu_\varrho = \bar{\mu}_\varrho$ sein. Weil zugleich $\mu_\alpha < \bar{\mu}_\alpha$ ist, ist $\mathfrak{m} < \bar{\mathfrak{m}}$, d. h. *zu jeder Folge, die keine Grundfolge ist, gibt es eine höhere Verwandte.*

Demnach muß das Grundglied einer Familie eine Grundfolge sein, und da es nach § 202 auch nur *eine* Grundfolge in einer Familie geben kann, ist unsere Behauptung in vollem Umfange erwiesen.

204. Die *Grundeinheiten* sind Grundfolgen. Wenn irgendeine Folge $\mathfrak{m}$ durch die Grundeinheiten dargestellt ist, so können wir aus den Zahlen a_ϱ, § 186, (5), (6), (7), mehrere Eigenschaften von $\mathfrak{m}$ ablesen.

a) Ist $\mathfrak{m}$ eine Folge ganzer Zahlen, so sind die a_ϱ ganz, und umgekehrt.

b) Ist $\mathfrak{m}$ eine Grundfolge, so sind a_1 bis a_{k-1} nicht negativ, und umgekehrt.

c) Ist $\mathfrak{m}$ eine Grundfolge nichtnegativer Zahlen, so ist auch noch $a_k \overline{\overline{>}} 0$, und umgekehrt.

205. Nennen wir 0, 1, 2, 3, ... die *„natürlichen“* Zahlen, so können wir Folgen natürlicher Zahlen als „natürliche Zahlfolgen“ bezeichnen. Aus a), b), c) zusammen ergibt sich dann, *daß* $\mathfrak{m} = a_1 \mathfrak{g}_1 + a_2 \mathfrak{g}_2 + \cdots + a_k \mathfrak{g}_k$ *stets und nur dann eine natürliche Grundfolge ist, wenn die* a_ϱ *natürliche Zahlen sind. Nach § 184 und 186,* (5) *ist darum jede natürliche Grundfolge* $\mathfrak{m}$ *eine Summe von genau* $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \mu_1$ *Grundeinheiten.*

206. Präzisieren wir dieses Ergebnis noch etwas genauer. Zunächst schließen wir die triviale Nullfolge aus der Betrachtung aus, die dem Fall $\mu_1 = 0$ entsprechen würde. Ist sodann $\mu_1 = 1$, so ist $\mathfrak{m}$ als uneigentliche Summe „*einer*“ Grundeinheit offenbar selbst eine solche. Erst wenn $\mu_1 \geqq 2$ wird, findet eine wirkliche Zerlegung von $\mathfrak{m}$ statt. Ist nun $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$, und sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ natürliche Grundfolgen, so sind sie gewiß höher als $\mathfrak{o}$, also ist $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m} > \mathfrak{q}$. Damit erhalten wir den wichtigen Satz: *Jede natürliche Grundfolge, die keine Grundeinheit ist, ist zerlegbar, d. h. als Summe* ***niederer*** *Folgen gleicher Art darstellbar; diese Zerlegung kann bis auf Grundeinheiten als letzte unzerlegbare Elemente geführt werden.* Beispielsweise wird

$$[5, 3, 2, 0] = 2\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_2 + 2\mathfrak{g}_1.$$

XIV. Allgemeine Exponentialformen.

A. Das formale Rechnen mit Exponentialformen.

207. Es seien a_1^x bis a_k^x k Exponentialfunktionen mit verschiedenen Charakteristiken. Dann soll

$$M = \sum_{\varrho=1}^{m} M_\varrho \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_\varrho}, \qquad \mathfrak{a} = [a_1, a_2, \ldots a_k],$$

eine „*Exponentialform zur Basis* $\mathfrak{a}$“ genannt werden. Glieder mit dem Koeffizienten Null heißen „*unecht*“ und können nach Belieben hinzugesetzt oder getilgt werden. Durch Zusammenziehen von Gliedern mit gleichen Exponenten gewinnt man die „*reduzierte*“ Schreibweise für M, in der je zwei Exponenten verschieden sind. Die Anzahl der echten Glieder der reduzierten Darstellung sei m, dann heißt die Form m-gliedrig. Sie heißt „*echt*“, wenn $m \geqq 1$; die nullgliedrigen Formen heißen „*unecht*“.

208. Zwei Exponentialformen heißen *gleich*, wenn ihre reduzierten Darstellungen in den echten Gliedern übereinstimmen, d. h. wenn sie dieselben Exponenten mit gleichen zugehörigen Koeffizienten enthalten. Alle unechten Formen sind gleich.

Summe, Differenz und Produkt zweier Formen

$$M = \sum_\varrho M_\varrho \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_\varrho}, \quad N = \sum_\sigma N_\sigma \mathfrak{a}^{\mathfrak{n}_\sigma}$$

werden definiert als

$$M \pm N = \sum_\varrho M_\varrho \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_\varrho} \pm \sum_\sigma N_\sigma \mathfrak{a}^{\mathfrak{n}_\sigma},$$

$$MN = \sum_{\varrho,\sigma} M_\varrho N_\sigma \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_\varrho + \mathfrak{n}_\sigma}.$$

Diese Darstellungen sind im allgemeinen nicht reduziert, auch wenn M und N reduziert dargestellt sind.

Die unechte Form O spielt die Rolle der Null. Es ist $M \pm O = M$ $MO = O$. Ist $M = N$, so ist $M - N = O$, und nur dann.

Die Form $\mathfrak{a}^0$ spielt die Rolle der Eins: $M\mathfrak{a}^0 = M$.

209. Der Bereich $\mathfrak{A}$ aller Exponentialformen zur Basis $\mathfrak{a}$, deren Koeffizienten einem Größenbereich $\mathfrak{K}$, deren Exponenten einem Bereich $\mathfrak{M}$ von Folgen entnommen sind, wird ein Integritätsbereich sein, wenn $\mathfrak{K}$ ein solcher ist, und wenn $\mathfrak{M}$ die Folge $\mathfrak{o}$ und zu je zweien, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, seiner Elemente auch $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ enthält. Denn $\mathfrak{A}$ muß die Eins, $\mathfrak{a}^0$, und mit den Formen $M\mathfrak{a}^0$, $N\mathfrak{a}^0$ auch $(M \pm N)\mathfrak{a}^0$, $MN\mathfrak{a}^0$, mit $\mathfrak{a}^{\mathfrak{m}}$ und $\mathfrak{a}^{\mathfrak{n}}$ endlich auch $\mathfrak{a}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$ enthalten. Hierzu fügen wir die weiteren Annahmen:

I. *Im Bereich $\mathfrak{K}$ gelte der Eindeutigkeitssatz* (§ 167), *d. h. unter den Koeffizienten soll es keine Nullteiler geben.*

II. *Im Bereich $\mathfrak{M}$ existiere eine Anordnung, die dem additiven Gesetz* (§ 193) *gehorcht.*

Dann gelten folgende beiden Sätze, die wir unten beweisen werden:

III. *Ein Produkt echter Exponentialformen ist echt, d. h. auch im Bereich $\mathfrak{A}$ gilt der Eindeutigkeitssatz.*

IV. *Ein Produkt von Exponentialformen ist nur — und offenbar auch stets — dann eingliedrig, wenn alle Faktoren eingliedrig sind.*

210. Unter den Exponenten echter Glieder der reduzierten Darstellung $M = \sum M_\varrho \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_\varrho}$ einer echten Form ist nach II. einer der höchste; das zugehörige Glied heiße das *„höchste"* Glied von M. Wir denken es künftig stets an die erste Stelle gesetzt, so daß folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

a) M_1 ist nicht null.

b) Ist $M_\varrho \neq 0$, so ist $\mathfrak{m}_\varrho \leqq \mathfrak{m}_1$.

c) Hierbei gilt $\mathfrak{m}_\varrho = \mathfrak{m}_1$ nur für $\varrho = 1$.

Diese Bedingungen fordern nur, daß $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ usw. *von $\mathfrak{m}_1$ verschieden*, nicht auch, daß sie *untereinander verschieden* seien; sie können also auch in nichtreduzierten Darstellungen von M erfüllt sein. Es ist aber klar, daß bei weiterer Reduktion das Glied $M_1\mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_1}$ nicht mehr verändert werden kann, daß es insbesondere höchstes und echt bleibt. Darum ist jede Form echt, die eine den Forderungen a), b), c) genügende Darstellung besitzt.

Entsprechendes gilt über das *„niederste"* Glied von M, wobei wiederum jede echte Form und nur eine solche ein niederstes Glied besitzt. In eingliedrigen Formen und nur in solchen ist das höchste Glied mit dem niedersten identisch.

211. *Anmerkung.* Wenn man auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ ein und dieselbe Permutation ausübt, so vertauscht man in dem Produkt

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{m}} = a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \ldots a_k^{\mu_k}$$

lediglich die Faktoren $a_\nu^{\mu_\nu}$. Da dies eine rein formale Abänderung der Darstellung ist, wird man auch eine Exponentialform, die aus $M = \sum M_\varrho \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_\varrho}$ durch Ausübung ein und derselben Permutation auf alle Folgen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}_\varrho$ hervorgeht, nur als formal unterschieden von M ansehen.

In der Tat hängen Reduziertheit, Echtheit, Gliederzahl und mit ihnen die Sätze III., IV. in keiner Weise von der Anordnung der Elemente in $\mathfrak{a}$ ab, wohl aber ist diese ausschlaggebend für die Rangordnung der Exponenten $\mathfrak{m}_\varrho$, so daß die Begriffe des höchsten und niedersten Gliedes stets auf eine, an sich willkürliche, aber festzuhaltende Schreibweise der Basis zu beziehen sind.

212. Sind M, N echte Formen, die den Bedingungen a), b), c) genügen, so ist $M_1 N_1 \neq 0$ nach a) und I. Ist ferner $M_\varrho N_\sigma \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_\varrho + \mathfrak{n}_\sigma}$ irgendein *echtes* Glied des Produktes MN, also $M_\varrho N_\sigma \neq 0$, d. h. $M_\varrho \neq 0$, $N_\sigma \neq 0$, so ist $\mathfrak{m}_\varrho \leqq \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_\sigma \leqq \mathfrak{n}_1$ nach b), also nach § 194 (additives Gesetz, vgl. II.) $\mathfrak{m}_\varrho + \mathfrak{n}_\sigma \leqq \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1$, worin das Gleichheitszeichen nur im Falle $\mathfrak{m}_\varrho = \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_\sigma = \mathfrak{n}_1$, d. h. nach c) nur für $\varrho = \sigma = 1$ gilt. Das Glied $M_1 N_1 \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1}$ des Produktes MN genügt hiernach[1]) den Anforderungen a), b), c):

Das höchste Glied eines Produktes ist das Produkt der höchsten Glieder der Faktoren.

Zusatz. Sind also die Formen M, N, P den Anforderungen a), b), c) entsprechend dargestellt, so folgt aus $MN = P$ sogleich $M_1 N_1 = P_1$, $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{p}_1$.

213. Hiermit ist zunächst Satz III. bewiesen, da nur echte Formen höchste Glieder besitzen. Ferner ist klar, daß man wörtlich ebenso das Analoge für die niedersten Glieder von Produkt und Faktoren beweisen kann. Sind also $\mathfrak{m}_\alpha, \mathfrak{n}_\beta$ die Exponenten der niedersten Glieder von M, N, so ist $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{n}_\beta$ Exponent des niedersten Gliedes von MN. Falls MN eingliedrig ist, muß $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{n}_\beta = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1$, nach soeben Bewiesenem also $\alpha = 1$, $\beta = 1$, d. h. auch in M und N müssen die niedersten Glieder zugleich die höchsten sein. Damit ist der Beweis für IV. erbracht.

214. Ist etwa $\mathfrak{K}$ der Bereich der ganzen Zahlen modulo 4, so ist I. nicht erfüllt, vielmehr 2 ein Nullteiler. Das Produkt der *echten* Form $2\mathfrak{a}^0$ mit ihr selbst, $4\mathfrak{a}^0$, ist alsdann *unecht*, das Produkt $\mathfrak{a}^0 - 4\mathfrak{a}^{2\mathfrak{m}}$ der *zweigliedrigen* Formen $\mathfrak{a}^0 \pm 2\mathfrak{a}^{\mathfrak{m}}$ ist *eingliedrig*.

Rechnen wir mit den Exponenten nach dem Modul $2\pi i$, so ist II. nicht erfüllt (§ 195). Die *echten* Formen $e^0 \pm e^{\pi i}$ haben das *unechte* Produkt $e^0 - e^{2\pi i}$, die *zweigliedrigen* Formen $2e^0 \pm e^{\pi i}$ haben das *eingliedrige* Produkt $4e^0 - e^{2\pi i} = 3e^0$.

Jede einzelne der Annahmen I., II. ist also *notwendig* für den Beweis der Sätze III., IV.

B. Teilbarkeitsfragen.

215. Die Eins, $\mathfrak{a}^0$, ist als eingliedrige Form nur durch eingliedrige Formen teilbar (§ 209, IV); ein Trivialwerden der Teilbarkeitsbegriffe

1) Bei singgemäßer Berücksichtigung der Tatsache, daß die Glieder von MN hier durch *zwei* Indizes ϱ, σ gekennzeichnet sind.

(§ 171) tritt also nur in belanglosen Ausnahmefällen ein. Soll $E = E_1\mathfrak{a}^{\mathfrak{e}}$ ein Einheitsteiler in $\mathfrak{A}$ sein, also eine Reziproke $E_1^{-1}\mathfrak{a}^{-\mathfrak{e}}$ besitzen, so muß $-\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{M}$, E_1^{-1} in $\mathfrak{K}$ enthalten sein. Die Darstellung $M = \sum M_\varrho \mathfrak{a}^{\mathfrak{m}_\varrho}$ sei künftig stets reduziert, von unechten Gliedern befreit und nach fallenden Exponenten geordnet ($\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{m}_2 > \cdots$, $M_\varrho \neq 0$). Sind dann M und $M' = EM$ in $\mathfrak{A}$ äquivalent, so ist $M_\varrho' = E_1 M_\varrho$, $\mathfrak{m}_\varrho' = \mathfrak{e} + \mathfrak{m}_\varrho$.

216. Von der Relativität des Teilbarkeitsbegriffes befreit uns in gewissem Umfange der *„Rationalitätssatz“: P* ist durch M, wenn überhaupt, so im Rationalitätsbereich der Koeffizienten P_ϱ, M_ϱ teilbar. Genauer: *Ist $\mathfrak{K}$ ein Körper, und enthält $\mathfrak{M}$ die Exponenten von M und N, so enthält $\mathfrak{A}$ mit M und $P = MN$ auch N.* Denn nach § 212 ist N_1 gleich $M_1^{-1}P_1$, also in $\mathfrak{K}$ (wie in jedem, M_1 und P_1 enthaltenden Körper überhaupt) enthalten. Gilt gleiches von N_1 bis N_k, so ist die Form $N' = N_1\mathfrak{a}^{\mathfrak{n}_1} + \cdots + N_k\mathfrak{a}^{\mathfrak{n}_k}$, also auch $M(N_{k+1}\mathfrak{a}^{\mathfrak{n}_{k+1}} + \cdots) = M(N - N') = P - MN'$ in $\mathfrak{A}$, und darum, genau wie N_1 zuvor, jetzt N_{k+1} in $\mathfrak{K}$ enthalten.

217. Es sei $\mathfrak{K}$ der Körper der rationalen Zahlen. Wie dieser den Integritätsbereich $\mathfrak{G}$ der ganzen Zahlen, so umfaßt der Bereich $\mathfrak{A}$ der *„rationalzahligen“* Formen den Bereich $\mathfrak{A}^*$ der *„ganzzahligen“*. Beide sind Integritätsbereiche (§ 209). Eine ganzzahlige Form, deren Koeffizienten keinen von ± 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler besitzen, heißt *„primitiv“*. Der Bereich $\overline{\mathfrak{A}}$ der primitiven Formen ist, wie wir in § 222 zeigen werden, ein *Teilbarkeitsbereich*. Das gleiche gilt von dem Bereich $\mathfrak{A}^{(1)}$ der *„Hauptformen“*; so mögen die Formen mit dem Koeffizienten 1 im höchsten Gliede genannt werden. Aus $P = MN$ und $M_1 = N_1 = 1$ folgt nämlich $P_1 = 1$ nach § 212. Auch der Bereich $\overline{\mathfrak{A}}^{(1)}$ der *ganzzahligen Hauptformen*, die offenbar zugleich primitiv sind, ist nach § 170 als gemeinsamer Bestandteil von $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{A}^{(1)}$ ein Teilbarkeitsbereich.

218. $E_1\mathfrak{a}^0$ ist Einheitsteiler in $\mathfrak{A}$, also $E_1 M = M'$ zu M äquivalent, wenn E_1 eine rationale Zahl $\neq 0$ ist (da alsdann E_1^{-1} zu $\mathfrak{K}$ gehört). Setzen wir $E_1 = M_1^{-1}$, so ist M' eine *Hauptform* $M^{(1)}$. Sei E_1 der Hauptnenner H_M der Koeffizienten von M, so ist M' eine *ganzzahlige* Form M^*. Ist T_M der größte gemeinsame Teiler ihrer Koeffizienten, so ist $T_M^{-1}M^* = \overline{M}$ eine *primitive* Form (übrigens gleich $M^{(1)*}$). Zu jeder Form M in $\mathfrak{A}$ gibt es also äquivalente Formen in $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^*$ und $\overline{\mathfrak{A}}$. Daher gibt es auch zu jeder Zerlegung $P = MN$ in $\mathfrak{A}$ äquivalente Zerlegungen $P' = M'N'$ in irgendeinem, $\mathfrak{A}'$, der genannten Bereiche. Denn sind die zu M, N in $\mathfrak{A}$ äquivalenten Formen M', N' in $\mathfrak{A}'$ enthalten, so enthält $\mathfrak{A}'$ *als Teilbarkeitsbereich* auch das nach § 172 zu MN in $\mathfrak{A}$ äquivalente $M'N'$. Wir wollen diesen Sachverhalt dahin formulieren, daß $\mathfrak{A}$ zu jedem der Bereiche $\mathfrak{A}^*$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}^{(1)}$ *„äquivalent“* ist.

219. Ein Einheitsteiler $E = E_1\mathfrak{a}^{\mathfrak{e}}$ von $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{A}^*$ *enthalten*, wenn E_1 eine ganze Zahl ist; *Einheitsteiler in* $\mathfrak{A}^*$ ist er jedoch nur, wenn $E_1 = \pm 1$, d.h. Einheitsteiler in $\mathfrak{G}$ ist. In ihren Äquivalenzen *„korrespon-*

dieren" daher die Bereiche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ nicht; in $\mathfrak{A}$ äquivalente Größen von $\mathfrak{A}^*$, z. B. $\mathfrak{a}^0$ und $2\mathfrak{a}^0$ (vgl. auch § 174, a, b) brauchen in $\mathfrak{A}^*$ nicht äquivalent zu sein. *Dagegen korrespondiert* $\mathfrak{A}$ *mit* $\mathfrak{A}^{(1)}$ *und* $\overline{\mathfrak{A}}$. Ein Einheitsteiler E aus $\mathfrak{A}$ ist nämlich in $\mathfrak{A}^{(1)}$ nur für $E_1 = 1$, in $\overline{\mathfrak{A}}$ nur für $E_1 = \pm 1$ enthalten; dann gilt aber gleiches von E^{-1}, *es ist also* E, *wenn in* $\mathfrak{A}^{(1)}$ *oder* $\overline{\mathfrak{A}}$ *enthalten, auch Einheitsteiler daselbst. Sind ferner zwei in* $\mathfrak{A}$ *äquivalente Formen* M *und* $M' = EM$ *Hauptformen, so sind sie in* $\mathfrak{A}^{(1)}$, *sind sie primitiv, so in* $\overline{\mathfrak{A}}$ *äquivalent.* Denn aus $M_1' = M_1 = 1$ folgt nach § 215 sogleich $E_1 = 1$, und auf gleichem Wege, nur etwas umständlicher, folgt $E_1 = \pm 1$, wenn M und M' beide primitiv sind.

220. Infolge des Zusammentreffens von Äquivalenz und Korrespondenz können alle auf $\mathfrak{A}$ bezüglichen Teilbarkeitsfragen bequemer an dem engeren Bereich $\overline{\mathfrak{A}}$ (bzw. $\mathfrak{A}^{(1)}$) erledigt werden: Nicht nur existiert zu jeder Zerlegung in $\mathfrak{A}$ eine äquivalente in $\overline{\mathfrak{A}}$, sondern beide sind auch zugleich eigentlich oder nicht, und in $\mathfrak{A}$ äquivalenten Zerlegungen entsprechen in $\overline{\mathfrak{A}}$ äquivalente und umgekehrt. Diese Zuordnung kann treffend als „*Isomorphismus*" von $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ bezeichnet werden. *Insbesondere ist eine in* $\mathfrak{A}$ *zerlegbare primitive Form auf äquivalente Art in* $\overline{\mathfrak{A}}$ *selbst, d. h. in primitive Formen, zerlegbar.*

221. Hieraus folgt noch das Analoge für $\overline{\mathfrak{A}}^{(1)}$, d. h. *eine rational zerlegbare primitive Hauptform* P *ist äquivalent in primitive Hauptformen zerlegbar.* Denn jedenfalls ist P in *primitive* Formen M, N zerlegbar (§ 220); weil aber (§ 212) $M_1 N_1 = P_1 = 1$ und M_1, N_1 ganz sind, ist $M_1 = N_1 = \pm 1$, d. h. M und N, oder aber $-M$ und $-N$ sind primitive *Hauptformen.*

222. Um noch einzusehen, daß $\overline{\mathfrak{A}}$ ein Teilbarkeitsbereich ist, betrachten wir $\mathfrak{G}$ nach einem Primzahlmodul p. Eine ganzzahlige Form M ist „echt mod p", wenn nicht alle M_ϱ mod p verschwinden, d. h. durch p teilbar sind (§ 177). Da p Primzahl, also in $\mathfrak{G}$ mod p der Eindeutigkeitssatz gültig (§ 179) und somit (§ 209) ein Produkt mod p echter Formen echt mod p ist, bilden die mod p echten Formen einen Teilbarkeitsbereich $\mathfrak{A}_p$. Es sind aber genau die primitiven Formen echt nach *jedem* p, also ist $\overline{\mathfrak{A}}$ *als gemeinsamer Bestandteil aller* $\mathfrak{A}_p$ ein Teilbarkeitsbereich (§ 170), d. h. ein Produkt primitiver Formen ist primitiv.[1])

XV. Algebraische Zahlen.

A. Symmetrische Funktionen.

223. Ganze Funktionen sind Exponentialformen mit natürlichen Folgen als Exponenten. Wir schreiben $\mathfrak{x}$ für die Basis, die Angabe der

1) In dieser Fassung, unter Spezialisierung auf ganze Funktionen eines Argumentes, beweist man seit Gauß den Satz durch wörtliche Durchführung des § 212 an den „*mod p höchsten*" Gliedern.

Charakteristik erübrigt sich (§ 94). Die Koeffizienten sollen reelle oder komplexe Zahlen sein. Sie haben keine Nullteiler, es gibt also auch unter den ganzen Funktionen keine solchen. Daher werden auch dann, wenn nur ein Teil der Argumente zu einer „*Teilbasis*" $\mathfrak{x}$ zusammengefaßt ist, in der Darstellung

$$h(\mathfrak{x}) = h_1 \mathfrak{x}^{\mathfrak{m}_1} + h_2 \mathfrak{x}^{\mathfrak{m}_2} + \cdots + h_m \mathfrak{x}^{\mathfrak{m}_m}$$

unter den „*relativen*" Koeffizienten h_ϱ als *ganzen* Funktionen der übrigen, in ihnen „*versteckten*" Argumente keine Nullteiler vorkommen. Der höchste Exponent $\mathfrak{m}_1$ heißt die „*Ordnung*" von $h(\mathfrak{x})$ relativ zu $\mathfrak{x}$. Das Wort „*Grad*" ist nicht verwendbar. Erstens hat es schon einen anderen Sinn; es bezeichnet nämlich den größten der Werte $\mathfrak{S}\mathfrak{m}_\varrho$. Zweitens ist die Ordnung von der Darstellung nicht unabhängig: für eine verwandte Basis $\bar{\mathfrak{x}}$ kann ja ein anderes Glied das höchste werden (§ 211).

224. Ist $\bar{\mathfrak{x}}$ mit $\mathfrak{x}$ verwandt, so kann $h(\bar{\mathfrak{x}})$ auch als Funktion $\underline{h}(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{x}$ dargestellt werden und heißt als solche mit $h(\mathfrak{x})$ „*verwandt*". Die von $h(\mathfrak{x})$ und untereinander verschiedenen Verwandten von $h(\mathfrak{x})$ bilden mit $h(\mathfrak{x})$ eine Familie von höchstens $k!$ Mitgliedern.

Ist etwa $h(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^{\mathfrak{e}_1} = \mathfrak{x}^{[1, 0, \cdots 0]} = x_1$, so gibt es k verwandte Funktionen: $x_1, x_2, \ldots x_k$. Eine Funktion kann, wie man nebenbei bemerkt, einen Teil ihrer Argumente nur formal enthalten. In der Tat ist ja $\mathfrak{x}^{\mathfrak{o}}$ von allen Argumenten unabhängig.

225. Eine ganze Funktion $h(\mathfrak{x})$ heißt „*symmetrisch in* $\mathfrak{x}$", wenn sie allen ihren Verwandten gleich ist; d. h. wenn sie durch jede Permutation von $\mathfrak{x}$ in sich selbst übergeht.

Enthält die symmetrische Funktion $h(\mathfrak{x})$ das Glied $a\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$, so enthält sie auch $a\mathfrak{x}^{\underline{\mathfrak{m}}}$ für jede mit $\mathfrak{m}$ verwandte Folge $\mathfrak{m}$. Denn $a\mathfrak{x}^{\underline{\mathfrak{m}}}$ läßt sich darstellen als $a\bar{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{m}}$ für ein mit $\mathfrak{x}$ verwandtes $\bar{\mathfrak{x}}$ und ist dergestalt Glied der Funktion $h(\bar{\mathfrak{x}}) = \underline{h}(\mathfrak{x})$, die nach Voraussetzung gleich $h(\mathfrak{x})$ ist. Die Ordnung von $h(\mathfrak{x})$ muß daher als höchster Exponent insbesondere höher sein als alle von ihr verschiedenen Verwandten, die ja sämtlich als Exponenten in $h(\mathfrak{x})$ auftreten: *Sie ist eine Grundfolge, also auch unabhängig von der Anordnung der Basis* $\mathfrak{x}$.

226. Zugleich folgt, daß $h(\mathfrak{x})$ eine Summe von Gliedern der Form $a\sum \mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$ sein muß, wobei in der Summe $\mathfrak{m}$ alle Glieder einer Familie durchläuft. $\sum \mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$ ist eindeutig beschrieben durch Angabe des Grundgliedes $\mathfrak{m}$ und der Basis $\mathfrak{x}$. Wir können diese Summe kurzerhand mit $\mathfrak{m}(\mathfrak{x})$ bezeichnen. Sie ist selbst symmetrisch und heißt eine „*eintypige*" Funktion. *Jede symmetrische Funktion in* $\mathfrak{x}$ *ist eine lineare, und wenn wir* $\mathfrak{o}(\mathfrak{x}) = 1$ *mitrechnen, homogene Verbindung eintypiger Funktionen:*

$$h(\mathfrak{x}) = \sum_\varrho h_\varrho \mathfrak{m}_\varrho(\mathfrak{x}).$$

227. Auch das Produkt $\mathfrak{m}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{n}(\mathfrak{x})$ zweier eintypiger Funktionen muß dergestalt darstellbar sein. Das höchste Glied von $\mathfrak{m}(\mathfrak{x})$ bzw. $\mathfrak{n}(\mathfrak{x})$ ist $\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$ bzw. $\mathfrak{x}^{\mathfrak{n}}$, von $\mathfrak{m}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{n}(\mathfrak{x})$ also nach § 212: $\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$. Da $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ nach § 201 wieder eine Grundfolge ist, ist es zugleich die Ordnung derjenigen eintypigen Funktion, in der das Glied $\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$ auftritt. Es wird daher

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{n}(\mathfrak{x}) = \overline{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{f}(\mathfrak{x}),$$

darin $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ eine symmetrische Funktion von einer Ordnung niederer als $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$. Schreiben wir das Ergebnis:

$$\overline{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{m}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{n}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{f}(\mathfrak{x}),$$

so sehen wir: *Jede eintypige Funktion von zerlegbarer Ordnung ist darstellbar als ganzzahlige Funktion von eintypigen Funktionen niederer Ordnung.*

228. Unterhalb einer natürlichen Grundfolge liegen nur endlichviele natürliche Grundfolgen, da unterhalb einer natürlichen Zahl nur endlichviele natürliche Zahlen liegen. Eine endliche Anzahl von Zerlegungen der beschriebenen Art führt daher schließlich auf eintypige Funktionen *unzerlegbarer Ordnungen.* Solcher Ordnungen gibt es außer $\mathfrak{o}$, wie wir aus § 206 wissen, nur die k Grundeinheiten. Zu ihnen gehören die symmetrischen „*Grundfunktionen*" oder „*elementarsymmetrischen*" Funktionen:

$$\mathfrak{g}_1(\mathfrak{x}) = \sum_\varrho x_\varrho, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots k),$$

$$\mathfrak{g}_2(\mathfrak{x}) = \sum_{\varrho,\sigma} x_\varrho x_\sigma, \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots k;\ \varrho < \sigma),$$

usw. bis $\mathfrak{g}_k(\mathfrak{x}) = x_1 x_2 \ldots x_k$.

Sie sind dadurch charakterisiert, daß in ihren Ordnungen nur Einer und Nullen auftreten, d. h. daß sie in jedem der Argumente x_α vom ersten Grade sind.

229. Aus den Ergebnissen der §§ 227, 228 folgt nun der *Fundamentalsatz der symmetrischen Funktionen:*

Jede eintypige Funktion ist darstellbar als ganzzahlige Funktion der Grundfunktionen.

Jede in $\mathfrak{x}$ symmetrische Funktion $\sum_\varrho h_\varrho \mathfrak{m}_\varrho(\mathfrak{x})$ überhaupt ist darstellbar als ganzzahlige Funktion der Grundfunktionen und der Koeffizienten h_ϱ.

Insbesondere ist also jede ganzzahlige symmetrische Funktion eine ganzzahlige Funktion der Grundfunktionen.

Zum Beispiel erweist sich die symmetrische Funktion

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)$$

mit dem Parameter x als

$$g(x) = x^k - \mathfrak{g}_1(\mathfrak{x})\,x^{k-1} + \mathfrak{g}_2(\mathfrak{x})\,x^{k-2} - + \cdots + (-1)^k \mathfrak{g}_k(\mathfrak{x}),$$

was man durch direktes Ausrechnen oder auch dadurch leicht erkennt, daß $g(x)$ in den Argumenten x_α vom ersten Grade, daher eine lineare Funktion der Grundfunktionen ist.

Anmerkung. Aus der Zerlegung des § 206 schließt man leicht, daß eine symmetrische Funktion von der Ordnung $\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k]$ als Funktion der Grundfunktionen betrachtet vom Gesamtgrade μ_1 ist.

230. Eine ganze Funktion $H(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots)$ kann *„mehrfach symmetrisch"*, d. h. in jedem der Systeme $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ symmetrisch sein. Dann ist sie zunächst eine ganzzahlige Funktion der Grundfunktionen von $\mathfrak{x}$ und der relativen Koeffizienten in bezug auf $\mathfrak{x}$. Von diesen sieht man aber ohne weiteres ein, daß sie ihrerseits in $\mathfrak{y}$ symmetrisch sein, also ganzzahlige Funktionen der Grundfunktionen von $\mathfrak{y}$ und der relativen Koeffizienten in bezug auf $\mathfrak{y}$ sein müssen. So fortschließend erkennt man, daß $H(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots)$ als ganzzahlige Funktion seiner Koeffizienten und der Grundfunktionen der Systeme $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ darstellbar ist.

231. Es bezeichne $\mathfrak{x} = [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_k]$ eine Folge *„zweiter Stufe"*, deren k Elemente $\mathfrak{x}_\nu$ selbst Folgen $[x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots x_{\nu n}]$ zu je n Elementen sind. Diese Folgen bilden das Zeilensystem der Matrix $\|x_{\nu\lambda}\|$ ($\nu = 1$ bis k, $\lambda = 1$ bis n), deren Kolonnen $[x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \ldots x_{k\lambda}]$ wir die *„Querfolgen"* des Systems $\mathfrak{x}$ nennen wollen. Permutieren wir die Elemente $\mathfrak{x}_\nu$, so geht $\mathfrak{x}$ in eine *„verwandte"* Folge zweiter Stufe, $\bar{\mathfrak{x}}$, über; das gleiche gilt im alten Sinne von jeder Querfolge. Ist $\mathfrak{m} = [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots \mathfrak{m}_k]$ das Zeilensystem einer Matrix $\|\mu_{\nu\lambda}\|$ von ebenfalls k Zeilen und n Kolonnen, so werden wir konsequenterweise unter $\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$ das Produkt $\mathfrak{x}_1^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{x}_2^{\mathfrak{m}_2} \ldots \mathfrak{x}_k^{\mathfrak{m}_k}$ verstehen.

232. Wenn die ganze Funktion $H(\mathfrak{x})$ der k Argumentensysteme $\mathfrak{x}_\nu$ bei jeder Permutation derselben unverändert bleibt, so nennen wir sie *„symmetrisch in $\mathfrak{x}$"*. Wir schließen wörtlich wie zuvor, daß sie zu jedem ihrer Glieder $K\mathfrak{x}^{\mathfrak{m}}$ auch alle Verwandten, $K\bar{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{m}}$, enthalten und daher als ganzzahlige Funktion $\sum K_\varrho \mathfrak{m}_\varrho(\mathfrak{x})$ ihrer Koeffizienten K_ϱ und gewisser *„eintypiger"* Funktionen $\mathfrak{m}_\varrho(\mathfrak{x})$ darstellbar sein muß, die ebenfalls in $\mathfrak{x}$ *symmetrisch*, zugleich aber als Summen $\sum \bar{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{m}_\varrho}$ verwandter Potenzen *ganzzahlig* sind.

Anmerkung. Dergestalt *„von zweiter Stufe"* symmetrisch in $\mathfrak{x}$ ist beispielsweise jede ganze Funktion der kn Argumente $x_{\nu\lambda}$, die in jeder Querfolge von $\mathfrak{x}$ im gewöhnlichen Sinne symmetrisch ist. Nach § 230 ist sie eine ganze Funktion der Grundfunktionen dieser Querfolgen.

Ist ferner $f(\mathfrak{x})$ eine beliebige ganze Funktion von n Argumenten, so ist jede symmetrische Funktion $h(\mathfrak{y})$ der k Argumente $y_\nu = f(\mathfrak{x}_\nu)$ symmetrisch in $\mathfrak{x}$. Wählen wir $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^{\mathfrak{e}_\lambda}$, also $y_\nu = x_{\nu\lambda}$, so ist $h(\mathfrak{y})$ eine symmetrische Funktion der Querfolge $[x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \ldots x_{k\lambda}]$ und als solche auch dem zuerst gegebenen Beispiel unterzuordnen.

B. Reduzibilität und Irreduzibilität.

233. Die ganzen Funktionen eines Argumentes x mit reellen oder komplexen Koeffizienten bilden einen Teilbarkeitsbereich $\mathfrak{B}$. Seine Einheitsteiler sind die Funktionen nullten Grades; die Funktionen ersten Grades sind seine Primgrößen; denn sie, und nach dem sogenannten „*Fundamentalsatz der Algebra*“ auch nur sie, sind in $\mathfrak{B}$ unzerlegbar, und die Zerlegung einer Funktion k-ten Grades in k Linearfaktoren kann auf „*nur eine*“ Art (§ 172) ausgeführt werden.

234. Die Gesamtheit aller zueinander äquivalenten Funktionen, unter diesen die „*Hauptfunktion*“, wie wir in Ermangelung eines besseren Wortes nach § 217 wiederum die Funktion mit dem Koeffizienten 1 im höchsten Gliede nennen wollen:

$$g(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\cdots(x-\gamma_k),$$

und die Gesamtheit der Koeffizienten der Hauptprimfaktoren:

$$\mathfrak{C} = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_k\}$$

bestimmen sich gegenseitig eindeutig.

235. Die Teilbarkeitsverhältnisse in $\mathfrak{B}$ spiegeln sich in besonders einfacher Weise in den Beziehungen zwischen den zu den Funktionen $g(x)$, $\bar{g}(x)$, $g_1(x)$, . . . gehörigen Zahlenmengen $\mathfrak{C}$, $\bar{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{C}_1$, . . .

a) Dem Produkt zweier Funktionen $g(x)$, $\bar{g}(x)$ entspricht die Vereinigung $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_k, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \cdots \bar{\gamma}_l\}$ der zugehörigen Mengen $\mathfrak{C}$, $\bar{\mathfrak{C}}$.

b) Einem Teiler $g_1(x)$ von $g(x)$ entspricht eine Untermenge $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{C}$. Ihr Komplement entspricht dem Quotienten $g(x):g_1(x)$.

c) Dem größten gemeinsamen Teiler $g_1(x)$ von $g(x)$ und $\bar{g}(x)$ entspricht der Durchschnitt $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{C}$ und $\bar{\mathfrak{C}}$.

d) Ist insbesondere $\bar{g}(x)$ die Abgeleitete $g'(x)$ von $g(x)$, so entspricht in c) dem Quotienten $g(x):g_1(x)$ der Wertevorrat von $\mathfrak{C}$. Ist nämlich $x-\gamma$ ein genau n-facher Linearfaktor ($n \geqq 1$) von $g(x)$, so ist es genau $(n-1)$-facher von $g'(x)$, also auch von $g_1(x)$; daher enthält $g(x):g_1(x)$ *alle verschiedenen* Linearfaktoren von $g(x)$, und *jeden genau einmal.*

236. Ist $\mathfrak{K}$ ein Rationalitätsbereich reeller oder komplexer Größen und $\mathfrak{A}$ der Bereich aller ganzen Funktionen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, so enthält $\mathfrak{A}$ zu irgend zweien seiner Funktionen

a) als Teilbarkeitsbereich das Produkt,

b) auf Grund des Rationalitätssatzes, wenn eine ein Teiler der andern ist, den Quotienten,

c) auf Grund des Euklidischen Teileralgorithmus den größten gemeinsamen Teiler, insbesondere nach § 235d:

d) zu jeder Funktion $g(x)$ mit mehrfachen Linearfaktoren diejenige Funktion, die jeden Teiler von $g(x)$ zum einfachen Teiler hat. *Nach § 180 sind die in* $\mathfrak{A}$ *irreduziblen Funktionen Primgrößen in* $\mathfrak{A}$.

237. Es sei speziell $\mathfrak{K}$ der Bereich der rationalen Zahlen, $\mathfrak{A}$ der der rationalzahligen Funktionen. Die zugehörigen Zahlenmengen $\mathfrak{C}$ sollen *„Bündel“* heißen; die Elemente eines *„Bündels“* sind *„verbunden“* durch die Eigenschaft, Wurzeln derselben algebraischen Gleichung $g(x) = 0$ mit rationalen Koeffizienten zu sein. Sie sind daher *algebraische* Zahlen. Besteht $\mathfrak{C}$ aus einer einzigen Zahl c, so ist $g(x) = x - c$, $\mathfrak{C}$ also stets und nur dann ein Bündel, wenn c rational ist.

238. Aus § 235 f. lesen wir sofort folgende Sätze ab:

a) Die Vereinigung zweier Bündel ist ein Bündel.

b) Ist ein Teil eines Bündels ein Bündel, so auch sein Komplement.

c) Der Durchschnitt zweier Bündel ist ein Bündel, oder er ist leer.

d) Der Wertevorrat eines Bündels ist ein Bündel.

Ein Bündel heiße *„irreduzibel“*, wenn keiner seiner Teile ein Bündel ist, andernfalls *„reduzibel“*. Nach d) hat ein irreduzibles Bündel keine mehrfachen Elemente; nach c) sind zwei verschiedene irreduzible Bündel *total* verschieden. Jede algebraische Zahl ist also in genau einem irreduziblen Bündel enthalten. Zahlen desselben irreduziblen Bündels heißen *„konjugiert“*.

239. *Nach* § 238 b) *ist jedes reduzible Bündel* $\mathfrak{C}$ *in irreduzible Teile zerlegbar, nach* c) *nur auf eine Art,* da diese Teile durch die Elemente von $\mathfrak{C}$ eindeutig bestimmt sind. Dem entspricht der Primgrößencharakter der in $\mathfrak{A}$ irreduziblen ganzen Funktionen; denn es ist klar, daß zu einer in $\mathfrak{A}$ irreduziblen Funktion ein irreduzibles Bündel gehört und umgekehrt.

C. Algebraisch-ganze Zahlen.

240. Wenn die Grundfunktionen eines Bündels $\mathfrak{C}$ ganze Zahlen sind, d. h. wenn seine Hauptfunktion *ganzzahlig* ist, so heißt $\mathfrak{C}$ ein *ganzzahliges* Bündel. Da die ganzzahligen Hauptfunktionen den Bereich $\mathfrak{A}^{(1)}$ innerhalb $\mathfrak{A}$ bilden, ist nach § 221 eine in $\mathfrak{A}$ reduzible ganzzahlige Hauptfunktion innerhalb $\mathfrak{A}^{(1)}$ selbst reduzibel; *ist also ein Teil eines ganzzahligen Bündels ein Bündel, so ist er ein ganzzahliges Bündel.*

241. Die Fähigkeit, Element eines ganzzahligen Bündels zu sein, ist hiernach an die einzelne algebraische Zahl gebunden, da das durch sie völlig bestimmte *irreduzible* Bündel bereits ganzzahlig sein muß. Ist c rational, so ist die Hauptfunktion $x - c$ von $\{c\}$ stets und nur ganzzahlig, wenn c eine *ganze* Zahl ist. Allgemeiner nennen wir daher eine algebraische Zahl *„algebraisch-ganz“*, wenn sie mit ihren konjugierten zusammen ein ganzzahliges Bündel bildet. Dann ist irgendein Bündel stets und nur dann ganzzahlig, wenn es aus algebraisch-ganzen Zahlen besteht. Eine zugleich algebraisch-ganze und rationale Zahl ist eine ganze Zahl im gewöhnlichen Sinne.

242. Machen wir mit $x = y : z$ und Multiplikation mit z^k die Hauptfunktion $g(x)$ eines beliebigen Bündels $\mathfrak{C}$ homogen:

$$z^k g\left(\frac{y}{z}\right) = (y - \gamma_1 z)(y - \gamma_2 z) \cdots (y - \gamma_k z) = y^k + a_1 z y^{k-1} + \cdots + a_k z^k,$$

und setzen darin für z den Hauptnenner N der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_k$, so werden die Zahlen $a_1 N$, $a_2 N$ bis $a_k N$, und a fortiori $a_\mu N^\mu$ *ganz*. Die Hauptfunktion des Bündels $\{\gamma_1 N, \gamma_2 N, \ldots \gamma_k N\}$ ist also ganzzahlig, die Zahlen $\gamma_\mu N$ sind algebraisch ganz: *Jede algebraische Zahl ist Quotient eines algebraisch-ganzen Zählers und eines rational ganzen Nenners.* Für jedes Bündel läßt sich ein gemeinsamer Nenner angeben, natürlich auch ein kleinster, der nicht immer der Hauptnenner der Koeffizienten zu sein braucht. Wir haben weiter kein Interesse daran, ihn aufzusuchen.

D. Symmetrische Funktionen eines Bündels.

243. Die Definition des Bündels besagt bereits, daß seine Grundfunktionen, daher auch alle seine ganzzahligen symmetrischen Funktionen überhaupt, rationale Werte annehmen, speziell ganzzahlige, wenn das Bündel ganzzahlig ist. Die allgemeinste symmetrische Funktion wird „*rational in ihren Koeffizienten darstellbar*", d. h. eine rationalzahlige (und zwar lineare) Funktion ihrer Koeffizienten, speziell wieder eine ganzzahlige, wenn das Bündel ganzzahlig ist. Das gleiche gilt von einer mehrfach symmetrischen Funktion, wenn für jedes Argumentensystem, in dem sie symmetrisch ist, ein Bündel eingesetzt wird.

244. In der Formel (2) des § 67 ist $G(\mathfrak{x})$ eine ganzzahlige und offenbar symmetrische Funktion in $\mathfrak{x}$. Setzen wir für $\mathfrak{x}$ ein *ganzzahliges* Bündel $\mathfrak{C}$, so wird $G(\mathfrak{C})$ und ebenso $\sum \gamma_\nu$ und $\sum \gamma_\nu^p$ je eine ganze Zahl, und auf Grund des Fermatschen Satzes ist

$$\sum_{\mathfrak{C}} \gamma_\nu^p \equiv \sum_{\mathfrak{C}} \gamma_\nu \pmod{p}.$$

Das Bündel $\mathfrak{C}$, über dessen sämtliche Elemente die Summen zu erstrecken sind, muß ganzzahlig, p eine Primzahl sein. Das Ergebnis ist eine Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes.

E. Symmetrische Funktionen und Bündel zweiter Stufe.

245. Eine Folge zweiter Stufe $\mathfrak{c} = [\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_k]$, d. h. eine Folge von Folgen $\mathfrak{c}_\nu = [c_{\nu 1}, c_{\nu 2}, \ldots c_{\nu n}]$ aus je n Elementen heißt konsequenterweise ein „*Bündel zweiter Stufe*", wenn jede ganzzahlige symmetrische Funktion zweiter Stufe $H(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ einen rationalen Wert annimmt. Die allgemeine symmetrische Funktion zweiter Stufe wird dann für $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ in eine rationalzahlige lineare Funktion ihrer Koeffizienten übergehen.

Ehe wir zeigen, daß es Bündel zweiter Stufe gibt, beachten wir, daß insbesondere die symmetrischen Funktionen der Querfolgen (§ 231) rational werden. Es müssen also alle Zahlen $c_{\nu\lambda}$ algebraisch sein. Wir beweisen daraufhin genauer, *daß jede Folge algebraischer Zahlen Element eines Bündels zweiter Stufe ist.* Um einiger Nebenresultate willen, die wir nur durch Anschneiden der Körpertheorie einheitlich gewinnen könnten, geben wir zwei Beweise.

246. *Erster Beweis.* Es seien $\mathfrak{x}_\lambda = [x_{\lambda 1}, x_{\lambda 2}, \ldots x_{\lambda k_\lambda}]$ insgesamt n Argumentensysteme; $\mathfrak{x}$ sei das irgendwie geordnete System zweiter Stufe der $k = k_1 k_2 \ldots k_n$ Folgen, die entstehen, wenn jedes $\bar{x}_\lambda$ in

$$\bar{\mathfrak{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n]$$

unabhängig die Elemente von $\mathfrak{x}_\lambda$ durchläuft. Permutieren wir in irgendeinem der Systeme $\mathfrak{x}_\lambda$ die Elemente, so permutieren sich auch in $\mathfrak{x}$ die Elemente $\bar{\mathfrak{x}}$. Eine in $\mathfrak{x}$ symmetrische Funktion $H(\mathfrak{x})$ bleibt dabei unverändert; sie ist daher, als Funktion $H^*(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)$ der einzelnen Systeme $\mathfrak{x}_\lambda$ betrachtet, in jedem einzelnen (von erster Stufe) symmetrisch. Setzen wir für jedes $\mathfrak{x}_\lambda$ ein Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$ ein, so wird hiernach

$$H^*(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_n)$$

rational in seinen Koeffizienten darstellbar; *also wird $\mathfrak{x}$ zu einem Bündel $\mathfrak{c}$ zweiter Stufe,* und dieses enthält eine vorgeschriebene Folge $\bar{\mathfrak{c}} = [c_1, c_2, \ldots c_n]$ algebraischer Zahlen, wenn $\mathfrak{C}_1$ bis $\mathfrak{C}_n$ so gewählt werden, daß sie je eine der Zahlen c_1 bis c_n enthalten.

247. *Zweiter Beweis.* Es sei $\mathfrak{x} = [x_1, x_2, \ldots x_k]$ ein System von k Argumenten, $\mathfrak{x}$ das irgendwie geordnete System der $n!\binom{k}{n}$ Variationen $\bar{\mathfrak{x}}$ zur n-ten Klasse aus $\mathfrak{x}$. Permutiert man $\mathfrak{x}$, so permutieren sich (§ 162) die Variationen $\bar{\mathfrak{x}}$ untereinander; eine in $\mathfrak{x}$ symmetrische Funktion $H(\mathfrak{x})$ bleibt dabei unverändert und ist daher auch, als Funktion $H^*(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{x}$ betrachtet, symmetrisch. Setzen wir daher für x_1 bis x_k die Elemente γ_1 bis γ_k eines Bündels $\mathfrak{C}$, so ist das System $\mathfrak{c}$ zweiter Stufe, in das $\mathfrak{x}$ übergeht, ein Bündel zweiter Stufe, weil jede symmetrische Funktion $H(\mathfrak{c})$ in ihren Koeffizienten rational darstellbar wird. Eine vorgeschriebene Folge $\bar{\mathfrak{c}} = [c_1, c_2, \ldots c_n]$ ist Element von $\mathfrak{c}$, wenn sie Untermenge von $\mathfrak{C}$ ist. $\mathfrak{C}$ kann dementsprechend z. B. durch Vereinigung von n Bündeln, deren jedes je ein c_λ aus $\bar{\mathfrak{c}}$ enthält, gebildet werden.

248. *Zusätze.* Die Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$ in § 246 kann man folgenden Forderungen unterwerfen: 1) Ist c_λ algebraisch-ganz, so ist $\mathfrak{C}_\lambda$ ein ganzzahliges Bündel. 2) Ist c_λ nicht null, so enthält $\mathfrak{C}_\lambda$ die Null nicht. Ist c_λ nicht rational, so enthält $\mathfrak{C}_\lambda$ keine rationale Zahl. 3) $\mathfrak{C}_\lambda$ enthält keine mehrfachen Elemente. 4) Ist c_λ zu c_μ konjugiert, so ist $\mathfrak{C}_\lambda = \mathfrak{C}_\mu$, andernfalls sind $\mathfrak{C}_\lambda$ und $\mathfrak{C}_\mu$ total verschieden.

Denn alle diese Forderungen *sind* erfüllt, wenn für $\mathfrak{C}_\lambda$ speziell das c_λ enthaltende *irreduzible* Bündel gewählt wird.

In § 247 kann $\mathfrak{C}$ den Forderungen unterworfen werden: 5) Sind alle c_λ algebraisch-ganz, so ist $\mathfrak{C}$ ganzzahlig. 6) Ist kein c_λ Null, so enthält $\mathfrak{C}$ die Null nicht; ist kein c_λ rational, so enthält $\mathfrak{C}$ keine rationale Zahl. 7) Enthält $\mathfrak{c}$ keine mehrfachen Elemente, so auch $\mathfrak{C}$ nicht.

Den Forderungen 5), 6) genügt die Vereinigung $\mathfrak{C}$ der irreduziblen Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$, denen die Elemente c_λ von $\mathfrak{c}$ angehören, der Forderung 7) wenn nicht $\mathfrak{C}$ selbst, so sein Wertevorrat.

249. Ist $\mathfrak{r} = [\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_k]$ ein Bündel zweiter Stufe, $f(\mathfrak{x})$ eine ganzzahlige Funktion, so bilden die Werte $f(\mathfrak{c}_\nu)$ ein Bündel erster Stufe. Denn ihre ganzzahligen symmetrischen Funktionen sind symmetrisch in $\mathfrak{r}$, also rationalwertig; sie haben insbesondere ganzzahlige Werte, wenn alle Folgen $\mathfrak{c}_\nu$ aus algebraisch-ganzen Zahlen bestehen.

Demnach hat eine ganzzahlige Funktion $f(\mathfrak{x})$ für jedes System algebraischer Argumentwerte einen algebraischen, unter Beachtung der Zusätze 1), 5) für *algebraisch-ganze* Argumente einen *algebraisch-ganzen* Wert. Insbesondere sind Summen, Differenzen und Produkte algebraischer (algebraisch-ganzer) Zahlen wieder algebraische (algebraisch-ganze) Zahlen.

Korollar. Sind $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n\}$ zwei Bündel, so ist das System der mn Folgen $[\alpha_\mu, \beta_\nu]$ ein Bündel zweiter, das der Zahlen $\alpha_\mu + \beta_\nu$ eines erster Stufe.

250. Ist $h(\mathfrak{y})$ eine in $\mathfrak{y}$ *symmetrische* Funktion, so ist für eine *Variation* $\bar{\mathfrak{x}}$ von $\mathfrak{x} = [x_1, x_2, \ldots x_k]$ die Funktion $h(\bar{\mathfrak{x}})$ bereits völlig bestimmt durch Angabe der *Kombination* $\mathfrak{X}_\varrho = \{x_{\varrho_1}, x_{\varrho_2}, \ldots x_{\varrho_n}\}$, deren Elemente in $\bar{\mathfrak{x}}$ vorkommen. Auch die Kombinationen permutieren sich, wenn $\mathfrak{x}$ permutiert wird (§ 156). Eine symmetrische Funktion der Werte $h(\bar{\mathfrak{x}})$, in denen $\bar{\mathfrak{x}}$ von allen verwandten Variationen immer nur je eine durchläuft, wird daher bereits in $\mathfrak{x}$ symmetrisch, und die Werte $h(\bar{\mathfrak{x}})$ bilden ein Bündel, wenn für $\mathfrak{x}$ ein Bündel eingesetzt wird. So sind z. B. die $\binom{k}{n}$ Zahlen $\alpha_{\varrho_1} + \alpha_{\varrho_2} + \cdots + \alpha_{\varrho_n}$, $(1 \leqq \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_n \leqq k)$, die Elemente eines Bündels $\mathfrak{A}^{(n)}$, wenn $\mathfrak{A}^{(1)} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k\}$ ein Bündel ist.

F. Lineare Funktionen.

251. Es sei $h(\mathfrak{c}, \mathfrak{x}) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda x_\lambda$ eine lineare Form der Argumente x_λ mit algebraisch-ganzen Koeffizienten; $\mathfrak{r}$ sei ein Bündel zweiter Stufe, dem $\mathfrak{c} = [c_1, c_2, \ldots c_n]$ angehört. Durchläuft $\bar{\mathfrak{c}} = [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots \bar{c}_k]$ dieses Bündel, so wird jede ganzzahlige symmetrische Funktion der Argumente $h(\bar{\mathfrak{c}}, \mathfrak{x})$ als in $\mathfrak{r}$ symmetrische Funktion $S(\mathfrak{r}, \mathfrak{x})$ eine ganzzahlige Funktion in $\mathfrak{x}$ werden, insbesondere das *Produkt* $H(\mathfrak{x})$ aller Formen $h(\bar{\mathfrak{c}}, \mathfrak{x})$, wobei man sich nach § 248 leicht davon überzeugt, daß bei passender Wahl von $\mathfrak{r}$ mit $h(\mathfrak{c}, \mathfrak{x})$ jede der Formen $h(\bar{\mathfrak{c}}, \mathfrak{x})$, also auch $H(\mathfrak{x})$ echt ist.

252. Bilden wir $\mathfrak{c}$ nach § 246, und sind dabei einige der c_λ, etwa c_1 bis c_m, konjugiert, so können wir nach § 248, Zusatz 4, $\bar{c}_1$ bis $\bar{c}_m$ dasselbe Bündel durchlaufen lassen. Dann vertauscht eine Permutation der Argumente x_1 bis x_m die Formen $h(\bar{\mathfrak{c}}, \mathfrak{x})$ untereinander, wobei $H(\mathfrak{x})$ unverändert bleibt. In diesem Falle, *insbesondere wenn* $c_1 = c_2 = \cdots = c_m$ *ist, wird daher* $H(\mathfrak{x})$ *symmetrisch in den Argumenten* x_1 *bis* x_m.

253. Es seien ε_1 bis ε_k die sogenannten „*k-ten Einheitswurzeln*“, d. h. die Wurzeln der Gleichung $x^k = 1$. Die Null kommt unter ihnen nicht vor, dagegen hat die abgeleitete Funktion kx^{k-1} von $x^k - 1$ nur $x = 0$ zur Nullstelle. Daher ist $x^k - 1$ von mehrfachen Linearfaktoren, $\mathfrak{e} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k]$ von mehrfachen Elementen frei. Die Einheitswurzeln sind algebraisch ganz.

Durch Homogenmachen (wie in § 242) ergibt sich die Identität:

$$(y - \varepsilon_1 z)(y - \varepsilon_2 z) \cdots (y - \varepsilon_k z) = y^k - z^k.$$

254. Ist c_1 eine k-te Einheitswurzel, etwa $c_1 = 1$, und wählen wir, wiederum nach § 246 verfahrend, $\mathfrak{e}$ als das von $\bar{c}_1$ zu durchlaufende Bündel, so wird $H(\mathfrak{x})$ in $x_1{}^k$ ganz sein, d. h. x_1 nur in den Potenzen $x_1{}^k, x_1{}^{2k}, \ldots$ enthalten. Denn bereits je k Formen

$$h(\bar{\mathfrak{c}}, \mathfrak{x}) = \varepsilon_\nu x_1 + (\bar{c}_2 x_2 + \cdots + \bar{c}_n x_n), \quad \nu = 1 \text{ bis } k,$$

die in den Koeffizienten $\bar{c}_2$ bis $\bar{c}_n$ übereinstimmen, ergeben nach § 253 das in $x_1{}^k$ ganze Produkt

$$(\bar{c}_2 x_2 + \cdots + \bar{c}_n x_n)^k - (-1)^k x_1{}^k.$$

255. Durchlaufen daher $\bar{c}_1$ bis $\bar{c}_n$ *alle* das Bündel $\mathfrak{e}$, so ist $H(\mathfrak{x})$ eine ganze Funktion $\bar{H}_k(\mathfrak{y})$ des Argumentes $\mathfrak{y} = [x_1{}^k, x_2{}^k, \ldots x_n{}^k]$. Weil eine der k-ten Einheitswurzeln gleich 1 ist, ist $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ ein Teiler von $H(\mathfrak{x})$. Ferner ist nach § 252 $H(\mathfrak{x})$ symmetrisch in $\mathfrak{x}$, also auch $\bar{H}_k(\mathfrak{y})$ symmetrisch in $\mathfrak{y}$, weil jede Permutation von $\mathfrak{y}$ durch eine solche von $\mathfrak{x}$ bewirkt werden kann.

XVI. Exponentialformen mit algebraischen Bestimmungsstücken.

256. Wir kehren wieder zu dem engeren Begriff der Exponentialform

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

zurück. Wenn die Koeffizienten und Exponenten je einem Integritätsbereich angehören, so bilden nach § 209 die zugehörigen Exponentialformen wiederum einen Integritätsbereich. Nach § 209 ist für die Exponenten sogar erheblich weniger gefordert.

Integritätsbereiche sind nun die Bereiche der algebraischen, der algebraisch-ganzen, der rationalen und der rational-ganzen Zahlen. Ist daher $f(\mathfrak{x})$ eine ganzzahlige Funktion, und setzen wir für ihre Argumente Exponentialformen ein, deren Koeffizienten oder Exponenten einem der genannten vier Bereiche angehören, so entsteht eine Form, von der das gleiche gilt.

257. Wir müssen die so sich ergebenden Bereiche von Exponentialformen noch um einen weiteren vermehren. Wir betrachten zunächst die Zahlenmenge ${}^e\mathfrak{A} = \{e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots e^{\alpha_k}\}$ als *„exponentiales Bild"* der Menge $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k\}$ und untersuchen speziell die exponentialen Bilder von Bündeln, da zu erwarten steht, daß sie bei der Betrachtung von e^α bei algebraischem α eine Rolle spielen werden. Man könnte solche Bilder *„Exponentialbündel"* nennen; doch wird dadurch leicht der Anschein erweckt, als handle es sich um eine besondere Art von Bündeln, während gerade nach dem Lindemannschen Satze e^α nur im Falle $\alpha = 0$ mit α zugleich algebraisch, daher ${}^e\mathfrak{A}$ nur im Falle $\mathfrak{A} = \{0, 0, \ldots 0\}$ mit $\mathfrak{A}$ zugleich ein Bündel sein kann. Da wir ein kurzes Wort mit Vorteil gebrauchen können, sei die Bezeichnung *„Scheinbündel"* für das exponentiale Bild eines Bündels gestattet. Unter einer *„Spur"* schlechthin wollen wir, da wir das Wort in seinem allgemeinen Sinn (§ 187) nicht zu verwenden brauchen, die Spur eines Scheinbündels, $\mathfrak{S}\,{}^e\mathfrak{A} = e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \cdots + e^{\alpha_k}$ verstehen.

258. Ein Bündel $\mathfrak{C}$ kann reduzibel sein und ist alsdann in kleinere Bündel, z. B. irreduzible, $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ zerlegbar, unter denen, falls $\mathfrak{C}$ mehrfache Elemente besitzt, jedes einzelne mehrfach, $\mathfrak{C}_\lambda$ etwa C_λ-fach vertreten sein kann. Dann wird $\mathfrak{S}\,{}^e\mathfrak{C} = C_1\mathfrak{S}\,{}^e\mathfrak{C}_1 + C_2\mathfrak{S}\,{}^e\mathfrak{C}_2 + \cdots$; die Zahlen C_λ sind ganz und positiv. Umgekehrt kann eine lineare Verbindung von Spuren mit ganzzahlig-positiven Koeffizienten als eine einzige Spur aufgefaßt werden, da die Vereinigung zweier Bündel wieder ein Bündel ist (§ 238).

259. Eine lineare Verbindung irgendwelcher Spuren

$$(1) \qquad E = C_1\mathfrak{S}\,{}^e\mathfrak{C}_1 + C_2\mathfrak{S}\,{}^e\mathfrak{C}_2 + \cdots + C_l\mathfrak{S}\,{}^e\mathfrak{C}_l$$

mit *irgendwelchen* Koeffizienten heißt konsequenterweise eine *„Spurenform"*. Durch Zerlegung und Zusammenfassung einzelner Spuren nach § 258 kann man mehrfache Darstellungen der Gestalt (1) gewinnen. Eine Darstellung heißt *reduziert*, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(V_1') *Je zwei Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$, $\mathfrak{C}_\mu$ sind total verschieden.*

(V_1'') *Kein Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$ enthält mehrfache Elemente.*

Daß solche Darstellungen möglich sind, beweist die *„irreduzible"*, bei der alle Bündel bis auf ihre irreduziblen Teile gespalten und Glieder mit gleichen Bündeln in eines zusammengefaßt sind (§ 238). Sind die Koeffizienten in irgendeiner Darstellung ganze Zahlen, so sind sie es nach § 258 auch in jeder reduzierten. Die Form heißt alsdann ganzzahlig. Sind in einer reduzierten Darstellung nicht alle Koeffizienten Null, so gilt das gleiche von jeder Darstellung überhaupt, und die Form heißt *echt*.

260. Eine Spurenform ist eine Exponentialform, und zwar ist sie auch als solche reduziert, wenn sie es als Spurenform ist: Zwei Exponenten α, β sind verschieden nach (V_1'), wenn sie in verschiedenen, nach (V_1''), wenn sie im gleichen Bündel stecken. Die Voraussetzungen (V_1'), (V_1'') ergeben also zusammen (V_1). Daher deckt sich auch der Begriff der „*Echtheit*" für beide Auffassungen.

Ist die reduzierte Exponentialform

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

eine Spurenform, so können wir die einfachen Indizes 1 bis n derart durch Doppelindizes, $\lambda = 1$ bis l, $\varrho = 1$ bis n_λ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n)$ ersetzen, daß die l Mengen $\mathfrak{C}_\lambda = \{c_{\lambda 1}, c_{\lambda 2}, \ldots c_{\lambda n_\lambda}\}$ Bündel und die zugehörigen Koeffizienten $C_{\lambda 1}$ bis $C_{\lambda n_\lambda}$ einander gleich sind. Dabei denken wir uns im folgenden stets die ursprüngliche Bezeichnung so gewählt, daß c_λ für $\lambda = 1$ bis l dem Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$ angehört (etwa $c_\lambda = c_{\lambda 1}$), so daß C_λ für $C_{\lambda\varrho}$ geschrieben werden kann. Dann ist E durch eine Doppelsumme dargestellt:

$$E = \sum_{\lambda=1}^{l} C_\lambda \sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} e^{c_{\lambda\varrho}},$$

deren innere Summen die Spuren $\mathfrak{S}^e\mathfrak{C}_\lambda$ sind.

261. *Die Spurenformen bilden einen Integritätsbereich.* Daß die Summe und Differenz zweier Spurenformen wieder eine Spurenform ist, ist ohne weiteres klar. Für das Produkt ergibt sich das gleiche daraus, daß das Produkt zweier Spuren,

$$\sum_\mu e^{\alpha_\mu} \sum_\nu e^{\beta_\nu} = \sum_{\mu,\nu} e^{\alpha_\mu + \beta_\nu}$$

nach § 249 (Korollar) eine Spur ist.

Hieraus folgt, daß jede symmetrische Funktion eines Scheinbündels eine Spurenform ist. Denn sie ist zunächst eine ganze Funktion der Grundfunktionen, diese aber,

$$\mathfrak{g}_m({}^e\mathfrak{A}) = \sum e^{\alpha_{\varrho_1}} e^{\alpha_{\varrho_2}} \ldots e^{\alpha_{\varrho_m}} = \sum e^{\alpha_{\varrho_1} + \alpha_{\varrho_2} + \cdots + \alpha_{\varrho_m}},$$
$$1 \leqq \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_m \leqq k,$$

sind nach § 250 die Spuren der Scheinbündel ${}^e(\mathfrak{A}^{(m)})$. Eine *ganzzahlige* symmetrische Funktion $h({}^e\mathfrak{A})$ wird zu einer *ganzzahligen* Spurenform.

Fünfter Teil.

Der Lindemannsche Satz und die Transzendenz von π.

XVII. Die Spezialisierung der Problemstellung.

A. Spezialisierung auf algebraisch-ganze Zahlen.

262. Es sei

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

eine Form mit *algebraischen Koeffizienten* und N ein gemeinsamer Nenner für diese. Die Form NE hat alsdann algebraisch-ganze Koeffizienten, ist mit E zugleich echt und reduziert und gehört jedem Integritätsbereich an, dem E angehört. Insbesondere ist sie eine Spurenform, wenn E eine solche ist. Sie hat den Wert Null stets und nur dann, wenn E gleich Null ist. Für unser Problem bedeutet es also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir algebraische Koeffizienten von vornherein als algebraisch-ganz annehmen.

263. Es sei

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

eine Form mit *algebraischen Exponenten*, und k ein gemeinsamer Nenner für diese. Die k^n Formen

$$E_\varrho = C_1 \varepsilon_{\varrho_1} e^{c_1} + C_2 \varepsilon_{\varrho_2} e^{c_2} + \cdots + C_n \varepsilon_{\varrho_n} e^{c_n},$$

worin jedes $\varepsilon_{\varrho\lambda}$ unabhängig von den anderen die k-ten Einheitswurzeln durchläuft, sind sämtlich reduziert und echt, wenn dies von E gilt. E ist eine von ihnen. Ihr Produkt E ist daher wieder eine echte Exponentialform. Nach § 255 ist sie darstellbar als *ganzzahlige* Funktion $\overline{H}_k(\mathfrak{y})$ der Argumente $y_\lambda = (C_\lambda e^{c_\lambda})^k = C_\lambda^k e^{k c_\lambda}$. Da die Zahlen $k c_\lambda$ algebraisch-ganz sind, hat auch E algebraisch-ganze Exponenten. Die Koeffizienten von E gehören als ganzzahlige Funktionen der Werte C_λ^k jedem Integritätsbereich an, der C_1 bis C_n enthält. Sie sind also algebraisch (-ganz bzw. rational), wenn diese algebraisch (-ganz bzw. rational) sind.

264. *Zusatz.* $\overline{H}_k(\mathfrak{y})$ ist symmetrisch in $\mathfrak{y}$ (§ 255), daher auch in jedem Teil von $\mathfrak{y}$, insbesondere in $\mathfrak{y}_\lambda = [y_{\lambda 1}, \cdots y_{\lambda n_\lambda}]$, falls E eine Spurenform ist und entsprechend der Bezeichnung des § 260 $C_{\lambda\varrho}^k e^{k c_{\lambda\varrho}}$ mit $y_{\lambda\varrho}$

bezeichnet wird. Da nun $C_{\lambda\varrho} = C_\lambda$ ist, wird $\overline{H}_k(\mathfrak{y})$ auch symmetrisch in $\mathfrak{z}_\lambda = [e^{kc_{\lambda 1}}, \ldots e^{kc_{\lambda n_\lambda}}]$. Mit $\mathfrak{C}_\lambda$ ist aber auch $k\mathfrak{C}_\lambda = [kc_{\lambda 1}, \ldots kc_{\lambda n_\lambda}]$ ein Bündel, also $\mathfrak{z}_\lambda$ ein *Scheinbündel*, ${}^e(k\mathfrak{C}_\lambda)$. Aus § 261 folgt damit: *Ist E eine Spurenform, so auch* E.

B. Spezialisierung auf symmetrischen Bau.

265. Es sei

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

eine Form mit *algebraisch-ganzen Koeffizienten*. In

$$\overline{E} = \overline{C}_1 e^{c_1} + \overline{C}_2 e^{c_2} + \cdots + \overline{C}_n e^{c_n}$$

durchlaufe jedes $\overline{C}_\lambda$ ein ganzzahliges Bündel, dem C_λ angehört, und das die Null nicht enthält, wenn $C_\lambda \neq 0$ ist.

E ist unter den Formen $\overline{E}$ enthalten. Jede einzelne ist reduziert und echt, wenn dies von E gilt. Ihr Produkt ist daher eine echte Exponentialform E. Nach § 251 ist sie eine ganzzahlige Funktion $H(\mathfrak{x})$ der Argumente $x_\lambda = e^{c_\lambda}$, also eine *ganzzahlige* Form. Ihre Exponenten gehören jedem Integritätsbereich an, der die Exponenten c_λ von E enthält, sind also algebraisch usw., wenn die von E es sind.

266. *Zusatz. Ist E eine Spurenform, so auch* E. Denn $H(\mathfrak{x})$ ist, unter Verwendung der Bezeichnung des § 260, nach § 252 symmetrisch in jedem der Scheinbündel ${}^e\mathfrak{C}_\lambda$.

267. Es sei

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

eine Form mit *algebraischen Exponenten*. Sie sei reduziert und

$$\mathfrak{C} = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_k\}$$

ein Bündel ohne mehrfache Elemente, dem alle c_λ angehören (§ 248, 7). Ist $[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots \bar{c}_n]$ eine Variation von $\mathfrak{C}$ zur n-ten Klasse, so ist

$$\overline{E} = C_1 e^{\bar{c}_1} + C_1 e^{\bar{c}_2} + \cdots + C_n e^{\bar{c}_n}$$

eine reduzierte und, wenn E echt ist, *echte* Form. Das Produkt aller $\binom{k}{n}$ Formen $\overline{E}$ ist daher eine echte, durch E teilbare Exponentialform E. Sie ist eine ganzzahlige Funktion der beiden Argumentensysteme $[C_1, C_2, \ldots C_n]$ und ${}^e\mathfrak{C}$, und zwar in letzterem (übrigens auch in ersterem) eine *symmetrische;* d. h., da ${}^e\mathfrak{C}$ ein Scheinbündel ist: E *ist eine Spurenform.* Sind die Exponenten c_λ von E algebraisch-ganz, so kann $\mathfrak{C}$ ganzzahlig gewählt werden (§ 248, 5), es werden also auch die Exponenten von E algebraisch-ganz sein. Die Koeffizienten von E sind, als ganzzahlige Funktionen derer von E, in jedem Integritätsbereich enthalten, der diese enthält.

C. Zusammenfassung und Zusätze.

268. Auf Grund der vorstehenden Erörterungen kann man zu jeder echten Exponentialform E mit algebraischen Koeffizienten und Exponenten vier weitere echte Formen E_1, E_2, E_3, E_4 bilden, so daß E Teiler[1]) von E_1, E_1 von E_2, E_2 von E_3, E_3 von E_4 ist, und daß jede der Formen gegen die vorhergehende eine der vier Vereinfachungen: algebraisch-ganze Koeffizienten, algebraisch-ganze Exponenten, rationale Koeffizienten, „gespurten" Bau aufweist. In welcher Reihenfolge diese Vereinfachungen angebracht werden, ist gleichgültig; denn unsere Methoden zu ihrer Gewinnung sind, wie wir jeweils ausdrücklich gezeigt haben, so beschaffen, daß keine bereits vorhandene der vier Spezialisierungen durch Hinzufügung einer neuen wieder aufgehoben werden kann. Die Form $E_4 = \mathsf{E}$ besitzt daher alle vier Spezialisierungen, und wenn E selbst bereits über eine oder mehrere von ihnen verfügt, so verringert sich die Zahl der Schritte, die zu E führen.

269. *Hiernach genügt es, den Lindemannschen Satz für* ***ganzzahlige Spurenformen mit algebraisch-ganzen Exponenten*** *zu beweisen.* Denn mit irgendeiner echten Exponentialform E mit algebraischen Exponenten und Koeffizienten müßte auch eine Form E der besonders einfachen genannten Art verschwinden, von der E ein Teiler ist. Die Spezialisierungen von E gestatten uns, sein Nichtverschwinden durch wörtliche Übertragung der Abschätzung des zweiten Teils zu erweisen.

270. *Anmerkung.* Die Vereinfachungsmethoden der §§ 262 ff. erheben nicht den Anspruch, bei praktischer Durchführung der Rechnung die einfachsten möglichen zu sein. Es kommt aber auch hier nicht darauf an, *wie* man am schnellsten zu einer E als Faktor enthaltenden Form E einfacher Bauart gelangt, sondern nur darauf, *daß* es eine solche Form sicher gibt. Um die einfachste zu finden, hätten wir in Kap. XV, E das *kleinste* Bündel zweiter Stufe bestimmen müssen, das eine gegebene Folge $\mathsf{c} = [c_1, c_2, \ldots c_n]$ algebraischer Zahlen als Element enthält, und bereits dort hoben wir hervor, daß dies ohne (offenes oder verstecktes) Hereinziehen der Theorie der algebraischen Körper uns nicht durchführbar erscheint.

271. Infolge dieser Beschränkung haben wir auch da auf rechnerisch kürzere Verfahren verzichtet, wo sie mit unseren Mitteln durchführbar gewesen wären. Wir erwähnen wenigstens die wichtigsten Fälle. In § 263 kann man an Stelle des Generalnenners k die Einzelnenner $k_1, k_2, \ldots k_n$ der Exponenten $c_1, c_2, \ldots c_n$ verwenden, indem man $\varepsilon_{\varrho\lambda}$ die k_λ-ten Einheitswurzeln durchlaufen läßt. Die Anzahl der Formen E_ϱ wird dann $k_1 k_2 \ldots k_n$, also im allgemeinen kleiner als k^n. Ihr Produkt wird eine ganze Funktion der Argumente $e^{k_\lambda c_\lambda}$.

1) Im Bereich der Formen mit algebraischen Exponenten und Koeffizienten.

Ist hierbei die Bezeichnung bereits umständlicher, wie in § 263, so gilt dies umsomehr von dem Nachweis, daß E eine Spurenform wird, wenn E eine solche ist. Jedoch bietet er keine prinzipielle Schwierigkeit.

272. In § 265 kann man zunächst alle Glieder mit gleichen Koeffizienten zusammenfassen, und dann erst die konjugierten Formen bilden. Speziell, wenn E eine Spurenform

$$E = C_1 \mathfrak{S}^e \mathfrak{C}_1 + C_2 \mathfrak{S}^e \mathfrak{C}_2 + \cdots + C_l \mathfrak{S}^e \mathfrak{C}_l$$

ist, wird auch

$$\bar{E} = \bar{C}_1 \mathfrak{S}^e \mathfrak{C}_1 + \bar{C}_2 \mathfrak{S}^e \mathfrak{C}_2 + \cdots + \bar{C}_l \mathfrak{S}^e \mathfrak{C}_l$$

eine solche, und es leuchtet unmittelbar ein (§ 261), daß auch das Produkt E aller $\bar{E}$ eine Spurenform wird.

273. Bemerkenswert ist noch, daß in den meisten Darstellungen die Operation des § 263 überhaupt unterlassen und statt dessen die Abschätzungsmethode soweit verallgemeinert wird, daß sie auch auf gebrochene Exponenten paßt. Wenn wir uns hier, im Anschlusse an Herrn Vahlen, entschlossen haben, die Zahl der vorbereitenden Schritte um einen zu vermehren, so geschah es erstens, um die Analogie zwischen Kap. XV und Kap. XVIII möglichst weit durchzuführen, und zweitens, weil das Mitschleppen eines Nenners in den Exponenten die Durchsichtigkeit der jetzt folgenden Rechnungen wesentlich beeinträchtigt. Wir zeigen jedoch an dem speziellen Beispiel π weiter unten, wie das Verfahren für gebrochene Exponenten zu modifizieren ist.

XVIII. Der Beweis des Lindemannschen Satzes.

274. Wenn die Exponentialform

$$E = C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \cdots + C_n e^{c_n}$$

eine Spurenform mit *algebraisch-ganzen* Exponenten ist, so wird bei reduzierter Darstellung, (V_1), die Funktion

$$g(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n) \tag{1}$$

ganzzahlig sein, da das System $\mathfrak{C} = \{c_1, c_2, \ldots c_n\}$ als Vereinigung ganzzahliger Bündel selbst ein solches ist. Wählen wir daher auch $\psi(x)$ ganzzahlig, so werden die Funktionen

$$\varphi(x) = g(x)\psi(x), \quad f(x) = \varphi(x)^m, \quad F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots \tag{2}$$

genau wie früher ganzzahlig sein. Ist E eine echte Form, so kann $\psi(x)$ nach § 97 wieder derart gewählt werden, daß

$$K(\varphi') = \sum C_\lambda \varphi'(c_\lambda) = \sum C_\lambda g'(c_\lambda)\psi(c_\lambda) = B, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n), \tag{3}$$

von Null verschieden ist. Außerdem wird B eine ganze rationale Zahl.

275. Nunmehr wird die Identität (vgl. § 127 ff.)

$$F(0)E = K(F) + K(R) \tag{4}$$

und hierin für hinreichend großes $m\,(m \geqq m_0)$:

$$|K(R)| < m!, \tag{5}$$

weil es unabhängig von allen speziellen Annahmen über E zutrifft, genau wie früher gelten. Für die Betrachtung von $K(F)$ werden wir dabei zweckmäßig die gewählte Bezeichnung nach § 260 in eine Doppelindizesbezeichnung abändern. Dann stellen sich E und $K(F)$ dar als Doppelsummen:

$$E = \sum_{\lambda=1}^{l} C_\lambda \sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} e^{c_{\lambda\varrho}} \tag{6}$$

$$K(F) = \sum_{\lambda=1}^{l} C_\lambda \sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} F(c_{\lambda\varrho}). \tag{7}$$

276. Wörtlich, bis auf den Ersatz des Index λ durch den Doppelindex $[\lambda, \varrho]$, wiederholt sich jetzt die Betrachtung des § 134: An der Stelle $c_{\lambda\varrho}$ hat $\varphi(x)$ die Entwicklung:

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\lambda\varrho,\nu}(x - c_{\lambda\varrho})^\nu, \tag{8a}$$

darin sind die Koeffizienten

$$a_{\lambda\varrho,\nu} = \varphi^{(\nu)}(c_{\lambda\varrho}) : \nu!, \quad \text{speziell} \quad a_{\lambda\varrho,1} = \varphi'(c_{\lambda\varrho}) \tag{8b}$$

ganzzahlige Funktionen von $c_{\lambda\varrho}$. Für eine *Primzahl* $m = p$ wird daher nach dem polynomischen Satz:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{k} a^p_{\lambda\varrho,\nu}(x - c_{\lambda\varrho})^{\nu p} + p\sum_{\sigma} B_\sigma(c_{\lambda\varrho})\,(x - c_{\lambda\varrho})^\sigma; \tag{9a}$$

darin ist $\sigma > p$ und $B_\sigma(c_{\lambda\varrho})$ eine *ganzzahlige* Funktion von $c_{\lambda\varrho}$.

277. Die Werte $F(c_{\lambda\varrho}) : p!$ summieren wir sogleich über das Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$. Dann wird wie in § 135:

$$\sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} F(c_{\lambda\varrho}) : p! = \sum_{\nu=1}^{k}((\nu p)! : p!)\sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} a^p_{\lambda\varrho,\nu} + p\sum_{\sigma}(\sigma! : p!)\sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} B_\sigma(c_{\lambda\varrho}). \tag{9b}$$

Die über ϱ zu erstreckenden Summen rechts sind ganzzahlige symmetrische Funktionen der ganzzahligen Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$, haben also *ganzzahlige* Werte. Daher ist $\sum F(c_{\lambda\varrho}) : p!$ eine ganze Zahl und, da modulo p wieder der zweite Teil der rechten Seite und alle Glieder des ersten mit $\nu = 2$ bis $\nu = k$ wegfallen:

$$\sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} F(c_{\lambda\varrho}) : p! \equiv \sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} \varphi'(c_{\lambda\varrho})^p \pmod p. \tag{10a}$$

Nach der Erweiterung des Fermatschen Satzes in § 244 folgt

$$\text{(10b)}\qquad \sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} F(c_{\lambda\varrho}) : p! \equiv \sum_{\varrho=1}^{n_\lambda} \varphi'(c_{\lambda\varrho}) \pmod p$$

und, da die Koeffizienten C_λ *ganze* Zahlen sein sollen, nach (7):

$$\text{(11)}\qquad K(F) : p! \equiv K(\varphi') \pmod p.$$

Die Zahl $K(\varphi') = B$ ist *ganz* und, wie bereits in § 274 angenommen, nicht null. Ist daher $p > |B|$, so ist, wie früher $K(F) : p!$ eine ganze, durch p unteilbare, also nichtverschwindende Zahl:

$$|K(F)| \geqq p!,$$

und für $p \geqq m_0 : |K(F)| > |K(R)|$ nach (5), womit das Nichtverschwinden von E erwiesen ist.

XIX. Varianten des Beweises.

A. Varianten des allgemeinen Beweises.

278. Die Kongruenz (10a) gilt auch hier unabhängig von dem Primzahlcharakter des Moduls. Gehen wir nämlich von dem Ansatz

$$f(x) = \varphi(x)^m \chi(x)$$

aus und wählen, wie in § 137, $m+1$ als Modul, so wird

$$\text{(12)}\qquad \sum_\varrho F(c_{\lambda\varrho}) : m! \equiv \sum_\varrho \varphi'(c_{\lambda\varrho})^m \chi(c_{\lambda\varrho}) \pmod{(m+1)}.$$

Für $\chi(x) = \varphi'(x)$ erhält man der Sache nach (vgl. § 140) wieder (10a).

Um jedoch von (10a) zu (10b) überzugehen, bedarf man der Erweiterung des Fermatschen Satzes in § 244, und diese wird mittels des *polynomischen Satzes* gewonnen. Eine Vereinfachung der Hilfsmittel wird also auf diesem Wege jetzt nicht mehr erreicht. (Vgl. z. B.: Lehrbuch der Algebra von H. Weber, Bd. II, § 228).

279. Der Versuch, wie in § 148 $\varphi(x) = g(x)$, $\chi(x) = g(x) : (x - c_1)$ (für $C_1 \neq 0$) zu wählen, scheitert zunächst daran, daß $\chi(x)$ auf diese Weise im allgemeinen nicht ganzzahlig wird, es sei denn, daß einer der Exponenten, der dann mit $c_{11} = c_1$ bezeichnet sei, rational ist. In diesem Falle ist er eine ganze Zahl, und es kann angenommen werden, daß $\mathfrak{C}_1 = \{c_1\}$ aus c_1 allein bestehe; $\chi(x) = g_1(x) = g(x) : (x - c_1)$ verschwindet alsdann für jedes $c_{\lambda\varrho}$ außer c_1, es wird daher nach (12)

$$\text{(13)}\qquad K(F) : m! \equiv C_1 g'(c_1)^{m+1} \pmod{(m+1)}.$$

Wenn nun $m+1$ einen in $C_1 g'(c_1)$ nicht aufgehenden Primfaktor enthält, so ist $C_1 g'(c_1)^{m+1}$ und damit $K(F) : m!$ durch $m+1$ unteilbar, womit für $m \geqq m_0$ (§ 275) das Nichtverschwinden von E ohne den polynomischen und Fermatschen Satz erwiesen ist.

280. Um auch im allgemeinen Falle diese elementare Variante anwenden zu können, nehmen wir E als Form an, in der *positive* Koeffizienten vorkommen. Andernfalls betrachten wir $-E$. Die Glieder mit positiven Koeffizienten bilden eine ganzzahlige Spurenform A, die nach § 258 als Spur, $\sum e^{a_\mu}$, dargestellt werden kann. Die übrigen Glieder bilden eine Form $-B$, und B ist entweder Null oder ebenfalls eine Spur, $\sum e^{b_\nu}$. Im letzteren Falle ist jedes a_μ von jedem b_ν verschieden.

Es sei jetzt $\bar{A} = \sum e^{-a_\mu}$; dann ist auch $\bar{A}$ eine Spur. Die Form $E\bar{A} = A\bar{A} - B\bar{A}$ ist wieder eine ganzzahlige Spurenform, denn $A\bar{A}$ und $B\bar{A}$ sind Spuren nach § 261. In $B\bar{A} = \sum e^{b_\nu - a_\mu}$ kommt der rationale Exponent Null sicher nicht, dagegen in $A\bar{A} = \sum e^{a_\mu - a_\nu}$ sicher für $\mu = \nu$ und vielleicht noch öfter, jedenfalls also mit einem von Null verschiedenen reduzierten Koeffizienten vor. *Auf die Form $E\bar{A}$ ist daher die elementare Variante in* § 279 *anwendbar,* und mit $E\bar{A} \neq 0$ ist auch $E \neq 0$ bewiesen. Die Reduktion von $E\bar{A}$ ist übrigens für diese Variante nur soweit nötig, daß alle Glieder mit dem Exponenten Null in eines zusammengefaßt werden. Denn dann ist $g'(0)$ sicher nicht null, und die anderen Werte $g'(c_{\lambda\varrho})$ treten in (13) nicht auf.[1]) Die Darstellung

$$E = \sum e^{a_\mu} - \sum e^{b_\nu} + a e^0,$$

die z. B. Herr Vahlen verwendet, spart die Zeichen C_λ und verringert die Zahl l der Bündel $\mathfrak{C}_\lambda$ auf drei, wegen der Bevorzugung der Null genau genommen auf *zwei*, $\{a_1, a_2, \ldots\}$ und $\{b_1, b_2, \ldots\}$.

B. Die Transzendenz von π.

281. Für die Transzendenz von π genügt der Nachweis des Nichtverschwindens der (unter Ausschluß des Trivialfalles $\alpha = 0$) zweigliedrigen ganzzahligen Form $e^0 + e^\alpha$ mit *algebraischem* α. Die Operationen der §§ 262, 265 werden hierbei gegenstandslos, diejenigen der §§ 263, 267 vereinfachen sich folgendermaßen: N sei ein Nenner von α, also $N\alpha = \beta$ algebraisch-ganz; ε_1 bis ε_N seien die N-ten Einheitswurzeln, $C = (-1)^{N+1}$ ihr Produkt. $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k\}$ sei ein ganzzahliges, β enthaltendes Bündel, B_ϱ die Spur des Scheinbündels ${}^e(\mathfrak{B}^{(\varrho)})$, §§ 236, 257, 261. Die Produkte

$$E = (e^0 + \varepsilon_1 e^\alpha)(e^0 + \varepsilon_2 e^\alpha) \cdots (e^0 + \varepsilon_N e^\alpha) = e^0 + Ce^\beta,$$

$$\mathsf{E} = (e^0 + Ce^{\beta_1})(e^0 + Ce^{\beta_2}) \cdots (e^0 + Ce^{\beta_k}) = e^0 + CB_1 + C^2 B_2 + \cdots + C^k B_k$$

sind ersichtlich durch $e^0 + e^\alpha$ teilbare, ganzzahlige Formen mit algebraisch-ganzen Exponenten; E ist reduziert und echt, E eine Spurenform. Die Darstellung von E durch die Spuren B_ϱ braucht nicht reduziert zu sein; jedoch ist bei ungeradem N (für $C = +1$) zweifellos der

1) Die Echtheit von E ist auch offenbar dann bereits gewährleistet, wenn der Exponent *eines* echten Gliedes von allen anderen verschieden ist.

reduzierte Koeffizient von e^0 mindestens 1, also E echt und seine Abschätzung nach der elementaren Variante des § 279 durchführbar. Dagegen kann bei geradem N (für $C = -1$) die Echtheit von E nur nach dem allgemeinen Schluß von den Faktoren auf das Produkt (§ 209) und die elementare Abschätzungsvariante nur durch einen weiteren vorbereitenden Schritt (§ 280) gewonnen werden. Denn der Exponent 0 kann herausfallen, beispielsweise für $k = 3$ und $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, und von den anderen Exponenten weiß man nichts näheres.

282. Dieser unbequemen Fallunterscheidung mitsamt ihrem Ursprung, der Operation des § 263, können wir nun ausweichen, indem wir mit einem, α enthaltenden Bündel $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k\}$ sogleich folgende ganzzahlige Spurenform mit dem Faktor $e^0 + e^\alpha$ bilden:

$$E = (e^0 + e^{\alpha_1})(e^0 + e^{\alpha_2}) \cdots (e^0 + e^{\alpha_k}) = e^0 + \mathfrak{S}^e(\mathfrak{A}^{(1)}) + \mathfrak{S}^e(\mathfrak{A}^{(2)}) + \cdots + \mathfrak{S}^e(\mathfrak{A}^{(k)}).$$

In ihr wird (genau wie zuvor bei ungeradem N in E) der reduzierte Koeffizient A von e^0 sicher *positiv* sein, sie ist also echt. Und da der Exponent 0 rational ist, die von ihm verschiedenen differenten Elemente a_1 bis a_n der Bündel $\mathfrak{A}^{(\varrho)}$ also ein Bündel bilden (§ 237 f.), versuchen wir nunmehr, dem allgemein üblichen Transzendenzbeweise für π folgend, *unser Abschätzungsverfahren in der elementaren Variante unmittelbar auf E anzuwenden, ohne erst zu algebraisch-ganzen Exponenten überzugehen.* Wir beginnen mit $F(0)E = K(F) + K(R)$ genau wie bisher, wobei zu setzen ist:

$$\begin{aligned} E &= Ae^0 + e^{a_1} + e^{a_2} + \cdots + e^{a_n}, \\ K(F) &= AF(0) + F(a_1) + F(a_2) + \cdots + F(a_n) \qquad (14) \\ F(x) &= f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots \\ f(x) &= x^m[(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)]^{m+1} \end{aligned}$$

283. Die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ werden rationalzahlig, nicht notwendig aber ganzzahlig sein. Es sei N ein gemeinsamer Nenner der Zahlen a_λ; dann führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$y = Nx, \quad b_\lambda = Na_\lambda,$$
$$h(y) = y^m[(y - b_1)(y - b_2) \cdots (y - b_n)]^{m+1}.$$

Die Zahlen b_λ sind algebraisch ganz, $h(y)$ ist also eine ganzzahlige Funktion. Bezeichnen wir ihren Grad $mn + m + n$ mit k, so wird

$$h(y) = N^k f(x), \quad \text{also} \quad N^\varrho h^{(\varrho)}(y) = N^k f^{(\varrho)}(x),$$

und daher für $b = Na$:

$$(15) \quad N^k F(a) = h(b) + Nh'(b) + N^2 h''(b) + \cdots = \sum_{\varrho=0}^{k} N^\varrho h^{(\varrho)}(b).$$

Man erhält also den Wert $N^k F(a)$, wenn man $h(y)$ an der Stelle $b = Na$ entwickelt und $(y-b)^\varrho$ durch $N^\varrho \varrho!$ ersetzt.

284. An der Stelle b_λ ist

$$h(y) = B_{\lambda 1}(y-b_\lambda)^{m+1} + B_{\lambda 2}(y-b_\lambda)^{m+2} + \cdots,$$

darin ist $B_{\lambda\nu}$ eine ganzzahlige Funktion $B_\nu(b_\lambda)$ von b_λ, nämlich

$$h^{(m+\nu)}(b_\lambda) : (m+\nu)!.$$

Infolgedessen wird nach (15)

$$N^k \sum_{\lambda=1}^{n} F(a_\lambda) = (m+1)!\, N^{m+1}\Big[\sum_{\lambda=1}^{n} B_{\lambda 1} + (m+2)N \sum_{\lambda=1}^{n} B_{\lambda 2} + \cdots\Big].$$

Die Summen in der Klammer sind ganzzahlige symmetrische Funktionen des Bündels $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$, also ganze Zahlen. *Daher ist $N^k \sum F(a_\lambda)$ eine durch $(m+1)!$ teilbare ganze Zahl.*

285. An der Stelle 0 hat $h(y)$ als ganzzahlige Funktion eine Entwicklung mit *ganzzahligen* Koeffizienten:

$$h(y) = B_0 y^m + B_1 y^{m+1} + \cdots;$$

darin ist $B_0 = [(-1)^n b_1 b_2 \ldots b_n]^{m+1}$, und die eckige Klammer hat einen *ganzzahligen, von Null verschiedenen* Wert, den wir zur Abkürzung b_0 nennen. Nunmehr wird nach (15):

$$N^k F(0) = N^m m!\,[b_0^{m+1} + N(m+1)B_1 + \cdots]$$

und nach (14) und § 284:

$$N^k K(F) : m! \equiv A N^m b_0^{m+1} \pmod{(m+1)}.$$

Enthält $m+1$ einen Primfaktor, der in ANb_0 nicht aufgeht, so ist hiernach $N^k K(F) : m!$ eine ganze, nicht verschwindende Zahl, also

$$|K(F)| \geqq m!\, N^{-k}.$$

286. Für ein hinreichend großes m, $m \geqq m_0$, ist aber andererseits $|N^{(n+1)m}\cancel{k}K(R) : m!| < \varepsilon$, speziell für $\varepsilon = N^{-\cancel{k}}$:

$$|K(R)| < m!\, N^{-k},$$

also $|K(F)| > |K(R)|$, womit das Nichtverschwinden von $e^0 + e^\alpha$ für jedes algebraische α, also wegen $e^0 + e^{\pi i} = 0$ die Transzendenz von π erwiesen ist.

Es hält nicht schwer, diese Verallgemeinerung des Verfahrens auch auf den allgemeinen Beweis des Lindemannschen Satzes zu übertragen.

Berichtigung.

In § 286 muß die zweite Zeile statt:

$$|K(R) : m!| < \varepsilon, \text{ speziell für } \varepsilon = N^{-k}:$$

lauten:

$$|N^{(n+1)m} K(R) : m!| < \varepsilon, \text{ speziell für } \varepsilon = N^{-n}:$$

Hessenberg: Transzendenz.

Alphabetisches Verzeichnis.

Die Zahlen bezeichnen die Paragraphen.

Dickson, Leonard Eugene, Ph. D., Assistant Professor of Mathematics in the University of Chicago, Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory. [X u. 312 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. ℳ 12.—

Engel, Dr. Fr., Professor an der Universität Greifswald, und Dr. **P. Stäckel**, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit vielen Figuren. 2 Bände.

I. Band: **Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij**, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedr. Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und 194 Figuren. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Mit 67 Figuren. [XVI, IV u. 476 S.] 1898. Geh. ℳ 14.—, in Halbfranz geb. ℳ 15.40.

II. Band: **Wolfgang und Johann Bolyai**, geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel. Mit einem Bildnisse Wolfgang Bolyais. [Unter der Presse.]

Föppl, Dr. A., Professor an der Techn. Hochschule in München, die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verfassers über die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und zu dessen Ergänzung. [X u. 108 S.] gr. 8. 1897. Geh. ℳ 3.60, in Leinwand geb. ℳ 4.40.

Fricke, Geh. Hofrat Dr. **R.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Mit 102 Figuren. [IX u. 520 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. ℳ 14.—

[Der II. (Schluß-) Teil über Algebra und Geometrie ist in Vorbereitung.]

——— u. Regierungsrat Dr. **F. Klein**, Professor an der Universität in Göttingen, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. 2 Bände.

I. Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen. Mit 192 Figuren. [XIV u. 634 S.] gr. 8. 1897. Geh. ℳ 22.—

II. — Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. 1. Hälfte: Engere Theorie der automorphen Funktionen. Mit 34 Figuren [282 S.] gr. 8. 1901. Geh. ℳ 10.—

Graßmann, H., gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von Friedrich Engel. In 3 Bänden. I. Band. In 2 Teilen. gr. 8. Geh. ℳ 28.—

I. Band. I. Teil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Mit dem Bildnis Graßmanns und 35 Figuren. [XVI u. 435 S.] 1894. ℳ 12.—

I. — II. — Die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Fig. [VIII u. 511 S.] 1896. ℳ 16.—

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Figuren. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber. 2 Bände.

I. Band: Arithmetik. Bearbeitet von Dr. Carl Färber, Professor an der Luisenstädtischen Oberrealschule in Berlin. Mit 9 Figuren. [XV u. 410 S.] 1911. ℳ 9.—

II. — Algebra. Von E. Netto in Gießen. [In Vorbereitung.]

II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von W. Frz. Meyer und H. Thieme. 2 Bände.

I. Band: Die Elemente der Geometrie. Von Professor Dr. Hermann Thieme, Direktor des Realgymnasiums zu Bromberg. Mit 323 Figuren. [XII u. 394 S.] 1909. ℳ 9.—

II. — Die geometrischen Gebilde vom Standpunkte der Verwandtschaften. Von Frz. Meyer in Königsberg i. Pr. [In Vorbereitung.]

Höfler, Dr. A., Professor an der Universität Wien, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Mit 2 Tafeln und 147 Figuren. [XVIII u. 509 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. ℳ 12.—

Jahnke, Dr. **E.**, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren. [XII u. 235 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. ℳ 5.60.

——— u. **F. Emde**, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Mit 53 Figuren. [XII u. 176 S.] gr. 8. 1909. Geb. ℳ 6.—

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.**, Professor an der Universität Göttingen, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Mit 1 Tafel. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1884. Geh. ℳ 8.—

——— autographierte Vorlesungshefte. 4. Geh.

Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie.

Heft 1. [391 S.] (W.-S. 1895/96) } 2. unveränderter Abdruck 1907.
Heft 2. [354 S.] (S.-S. 1896) } zusammen ℳ 14.50.

Kowalewski, Dr. **G.**, Professor an der deutschen Technischen Hochschule in Prag, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Mit 31 Figuren. [VI u. 452 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. ℳ 12.—

——— Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer histor. Übersicht. Mit 18 Figuren. [IV u. 126 S.] 8. 1908. Geh. ℳ 1.—, in Leinw. geb. ℳ 1.25.

Loria, Dr.. **G.**, Professor an der Universität Genua, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von Prof. Fritz Schütte, Oberlehrer am Stiftischen Gymnasium zu Düren. 2. Aufl. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil. Die algebraischen Kurven. Mit 142 Figuren auf 14 Tafeln. [XVIII u. 488 S.] 1910. Geh. ℳ 16.50, in Leinwand geb. ℳ 18.—
II. — Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven. Mit 80 Figuren auf 6 Tafeln. [VIII u. 384 S.] 1911. Geh. ℳ 12.50, in Leinwand geb. ℳ 14.—

Mehmke, Dr. **R.**, Professor an der Techn. Hochschule zu Stuttgart, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. 2 Bände. gr. 8. Geb.
Band I, Punktrechnung, Teil I erscheint im Frühjahr 1912.

Mikami, Y., mathematical Papers from the far East. With 15 Figures. [IV u. 229 S.] gr. 8. 1910. Geh. ℳ 10.—, in Leinwand geb. ℳ 11.—

Netto, Dr. **E.**, Professor der Mathematik an der Universität Gießen, Vorlesungen über Algebra. 2 Bände. gr. 8. Geh. ℳ 28.—, geb. ℳ 30.40.
I. Band: [X u. 388 S.] 1896. Geh. ℳ 12.—, geb. ℳ 13.—
II. — [XII u. 519 S.] 1899. Geh. ℳ 16.—, geb. ℳ 17.40.

——— elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. Geb. ℳ 4.40.

——— die Determinanten. [VI u. 130 S.] 8. 1910. Geh. ℳ 3.20, geb. ℳ 3.60.

Pascal, Dr. **E.**, Professor an der Universität Neapel, die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die Gesamtheit der neuesten Forschungen. Deutsche Ausgabe von H. Leitzmann. [XVI u. 266 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. ℳ 10.—

Repertorium der höheren Mathematik. Von Ernst Pascal, Professor an der Universität Neapel. Zweite, umgearbeitete deutsche Ausgabe. Unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausgegeben von P. Epstein, Professor an der Universität Straßburg, und H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. 2 Bände in 4 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Analysis. Unter Mitwirkung von R. Fricke, Ph. Furthwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, E. Pascal, H. E. Timerding herausgegeben von P. Epstein. I. Hälfte: Algebra, Differential- und Integralrechnung. [XV u. 527 S.] 1910. ℳ 10.— [Die II. Hälfte folgt 1912.]
II. — Die Geometrie. Unter Mitwirkung von L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, F. Dingeldey, F. Enriques, G. Giraud, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler herausgegeben von H. E. Timerding. I. Hälfte: Grundlagen und ebene Geometrie. Mit 54 Figuren. [XVI u. 534 S.] 1910. ℳ 10.— [Die II. Hälfte folgt 1912.]

Rudio, Dr. **F.**, Professor am Polytechnikum zu Zürich, Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Mit vier Abhandlungen über die Kreismessung von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Mit Figuren. [VIII u. 166 S.] gr. 8. 1892. Geh. ℳ 4.—, in Leinwand geb. ℳ 4.80.

Salmon-Fiedler, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Nach George Salmon frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, vorm. Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. 2 Teile. gr. 8. In Leinwand geb. ℳ 19.—

I. Teil. 7. verbess. Aufl. [XXXIV u. 444 S.] 1907. ℳ 10.—
II. — 6. Auflage. [XXIV u. S. 445—854.] 1903. ℳ 9.—

Serret, **J.-A.**, Handbuch der höheren Algebra. Deutsch von G. Wertheim, Lehrer an der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M. 2 Bände. gr. 8. Geh. ℳ 19.—

I. Band. [VIII u. 528 S.] 2. Auflage. 1878. ℳ 9.—
II. — [VIII u. 574 S.] 2. Auflage. 1879. ℳ 10.—

Sommer, Dr. **J.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig, Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Mit 4 Figuren. [VI u. 361 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. ℳ 11.—

Stäckel, Dr. **P.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe und Dr. **F. Engel**, Professor an der Universität Greifswald, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. [X u. 325 S.] gr. 8. 1895. Geh. ℳ 9.—, in Leinwand geb. ℳ 11.—

Study, Dr. **E.**, Professor an der Universität in Bonn, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie.

I. Heft. Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. Mit 9 Figuren. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1911. Geh. ℳ 4.80.

Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertum. 1. Heft: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch von Professor Dr. Ferdinand Rudio in Zürich. Mit einem histor. Erläuterungsbericht. Im Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid. Mit 11 Figuren. [X u. 184 S.] 8. 1907. Kart. ℳ 4.80.

Vahlen, Dr. **K. Th.**, Professor an der Universität Greifswald, Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung. Eine Ergänzung der niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie. Mit 127 Figuren. [XII u. 349 S.] gr. 8. 1911. Geh. ℳ 11.—, in Leinwand geb. ℳ 12.—

Wallenberg, **G.**, Dozent an der Techn. Hochschule zu Charlottenburg, Theorie der linearen Differenzengleichungen. Unter Mitwirkung von Prof. Alf Guldberg in Christiania. Mit 5 Figuren. [XIV u. 288 S.] gr. 8. 1911. Geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—

Weber, Dr. **H.**, und Dr. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1909. ℳ 10.—
II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren [XII u. 596 S.] 1907. ℳ 12.—
III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber (Rostock). In 2 Teilen. 2. Auflage. Teil I. Mathematische Physik. Mit einem Buch über Maxima und Minima von H. Weber und J. Wellstein. Bearbeitet von Rudolf H. Weber, Professor in Rostock. Mit 254 Figuren. [XII u. 536 S.] 1910. Geh. ℳ 12.— Teil II. Praktische Mathematik und Astronomie. [Erscheint Anfang 1912.]

Zeuthen, Dr. **G. H.**, Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. Geh. ℳ 16.—, in Leinwand geb. ℳ 17.—

Hessenberg

TRANSZENDENZ von e und π