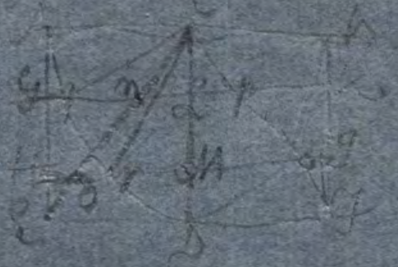
150

Do WWo Borzęckiego [illegible]

5163



rD = $\frac{\pi}{3}h$ [illegible]

$h = (aM +$ [illegible]

$aM \times aC$ [illegible] $(aM^2 +$ [illegible]

nO = $\frac{\pi}{6}h(aM^2 + aC^2)$ [illegible]

gg = [illegible]

go = $\frac{\pi}{3}h(a$ [illegible]

De construendis camaris ellipsoïdicis ope projectionis graphicae.

DISSERTATIO

INAUGURALIS MATHEMATICO-PHILOSOPHICA

quam

pro summis in PHILOSOPHIA honoribus ritè consequendis

EX AUCTORITATE ILLUSTRIS PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

UNIVERSITATE LITT: REGIA VARSAVIENSI,

publico Virorum Doctorum examini submittendam

conscripsit

ADRIANUS KRZYŻANOWSKI.

VARSAVIAE,

EX TYPOGRAPHIA ONUPHRII ŁĄTKIEWICZ, VIA SENATORUM, 467.

1821.

. . . . Tantùm series juncturaque pollet!
Tantum de medio sumptis accedit honoris.

Horat. de Arte Poet: v. 249. 250.

T h e s e s.

1.

Explanandæ conditiones pro contactu ordinis dati duarum curvarum planarum.

2.

Quomodo, ope contactûs ordinis 2^{di}, curvæ osculatrices enucleantur?

3.

Quomodo integrantur functiones differentiales logarithmicæ?

4.

Quomodo integrantur æquationes differentiales duas quantitates variabiles continentes?

5.

Quæ sint commodissimæ formulæ pro integrandis æquationibus differentialibus lineariis cujuslibet ordinis?

Introductio.

Recte, celeberrimus ille Genevensis Philosophus Joannes Jacobus Rousseau, veritatem universalem et abstractam oculum rationis humanæ appellavit. Methodum utique, ut his verbis utar, veritatis universalis, secutus Nicolaus Copernicus Polonus, stare solem jusserat. Hanc quoque methodum, quæ eadem ac analytica est, secuti Geometræ novissimi, problemmata, quæ majores nostri nec mente sunt assecuti, solverunt, maximi momenti respectu praxis et artium theorias creaverunt, ad summumque perfectionis fastigium mathesim evexerunt.

Vastissimos hoc in genere scientiarum animos edidit Franco-gallorum gens insignis. Ut alios transeam silentio, proferam in medium Gabrielum Mongium et disseram de una materiarum quam vir ille doctissimus animo primus concepit.

Est mihi propositum ostendere quomodo ope formularum analyticarum delineentur in plano projectiones camaræ ellipsoïdicæ et quomodo ope eorundem projectionum camara ipsamet ellipsoïdica exstruatur.

Huic proposito congruenter duas in sectiones opusculum dispertiar:

in *priori* de duplici curvatura superficierum curvarum regularium

in *posteriori* de lineis curvaturæ superficiei ellipsoïdicæ rem agam, tandem abhinc ortam methodum pro construenda camara elliptica describam.

Compertum pluribus, qualibus cum difficultatibus mathesis analytica sit conjuncta. Juvat itaque clariorem ac difficultatibus absolutam, tum ritè commentatam reddere materiam a me tractatam.

Theorias inventas reddere simpliciores, difficillimum putavit Condillacus: persuasum autem omnibus, nullam rem magis scientiarum progressus præstare, explanatione quoad fieri potest simplici. Hoc in axiomate occupatus, opus adii.

Inprimis inveniendæ mihi erant formulæ pro valoribus coordinatarum puncti intersectionis duarum normalium ad superficiem curvam et radii curvaturæ, tum demonstrandum lineas duplicis curvaturæ superficiei intersecari sub angulo recto, definiendæ denique proprietates sphæræ osculatricis respectu contactûs ordinis cujusvis. Methodus, qua hæc problemmata solvimus et novas formulas protulimus, quamque figuris (quinque prioribus tabellæ) perspicuitatis gratia auximus, commodissima in parte posteriori apparuit, quà theoria generalis ad casum peculiarem superficiei ellipsoïdicæ accomodatur. Huc quoque, simplicius ac primus inventor, sic dictas curvas auxiliares et constructionem projectionis graphicæ superficiei ellipsoïdæ explanare, sumus conati.

PARS PRIOR.

1. Concipiamus animo superficiem curvam regularem ABC (*fig.* 1.) ad systema orthogonale coordinatarum relatam et æquatione

$$f(x, y, z) = 0$$

designatam. Invenietur æquatio plani ad hanc superficiem tangentis in puncto quodam M, cujus coordinatæ sint x, y, z, modo sequenti. Scimus æquationem generalem plani esse $z' = Ax' + By' + C$, quà x', y', z' coordinatas puncti cujusvis in plano sumpti exprimunt. Ut planum hoc cum superficie punctum M commune habeat; necesse est, sit $z = Ax + By + C$: substituto in hac æquatione loco C valore e præcedenti sumpto, prodibit æquatio plani tangentis

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y')$$

Ponamus, x', y' z' coordinatas esse puncti infinite parum distantis ab M, et ideo communis superficiei, quæ eadem ac polyedri faciebus infinite parvis circumscripti considerari potest, et plano tangenti. Hoc in casu satisfiet ultimæ æquationi valoribus $z' = z + dz$, $y' = y + dy$, $x' = x + dx$, et æquatio illa abit in

$$dz = Adx + Bdy$$

at æquatio superficiei $z = f(x, y)$ præbet

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy \qquad (1)$$

unde $A = \frac{dz}{dx}$, $B = \frac{dz}{dy}$; et æquatio plani tangentis transformabitur in

$$z - z' = (x - x')\frac{dz}{dx} + (y - y')\frac{dz}{dy}. \qquad (A)$$

Ut demum inveniatur æquatio lineæ normalis ad superficiem datam in puncto M, sint

$$x-x'=a(z-z'),\quad y-y'=b(z-z')$$

æquationes lineæ rectæ in spatio sitæ. Ut hæc linea ad planum (A) sit perpendicularis, satisfiat necesse est, ut scimus aliunde, æquationibus

$$\frac{a\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+1=0,\quad \frac{b\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+1=0;\ \text{unde}\ a=-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\ b=-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

æquationes itaque normalis, positis $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=p$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=q$, sunt

$$x-x'+p(z-z')=0,\quad y-y'+q(z-z')=0 \quad \text{(B)}$$

Notandum, normalem ad superficiem datam considerari posse sitam in intersectione communi duorum planorum ad superficiem datam normalium, quorum vestigia lineis Mn, Mm in *fig.* 1. sunt designata.

2. His positis sit MC (*fig.* 2) normalis ad punctum M superficiei; sit aliud punctum N infinite propinquum prioris: respectu hujus puncti crescent quantitates x, y, z, p, q, infinite parvis dx, dy, dz, dp, dq. Ut inveniantur formulæ pro valoribus quantitatum dp, dq, observemus $p=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $q=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ functiones quasdam esse variabilium x et y, tum ponamus

$$r=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\ \text{seu}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2},\quad s=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\quad t=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}$$

ac prodibit

$$\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\ \text{seu}=r\mathrm{d}x+s\mathrm{d}y \quad (2)$$

$$\mathrm{d}q=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}\mathrm{d}z+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}\mathrm{d}y\ \text{seu}=s\mathrm{d}x+t\mathrm{d}y \quad (3)$$

3. Quantitas $\frac{dy}{dx}$ indicat tangentem trigonometricam anguli comprehensi projectione in XY (*fig.* 2.) curvæ MN et axe OX: ut definiatur itaque hæc projectio, quærendus est valor quantitatis $\frac{dy}{dx}$.

Perspiciemus inprimis, si normalis MM' describat curvam MN in superficie ABC ad quam permaneat ubicunque punctorum perpendicularis; coordinatas puncti N infinite propinqui fore $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Substitutis itaque his quantitatibus in locum x, y, z in æquationibus (B) normalis MM'; provenient æquationes normalis NN' ad punctum N: insuper quantitates p, q uti functiones variabilium x, y, abibunt in $p + dp$, $q + dq$ et æquationes normalis NN' erunt

$$x + dx - x' + (p + dp)(z + dz - z') = 0$$
$$y + dy - y' + (q + dq)(z + dz - z') = 0$$

seu quod idem est

$$x - x' + p(z - z') + dx + pdz + dp.dz + dp(z - z') = 0$$
$$y - y' + q(z - z') + dy + qdz + dq.dz + dq(z - z') = 0$$

quæ eædem sunt ac

$$dx + pdz + dp(z - z') = 0, \quad dy + qdz + dq(z - z') = 0. \quad (4)$$

Ope æquationum (B) et (4) definiri possunt coordinatæ x', y', z puncti intersectionis normalium MM' et NN' et absoluta operatione prodibunt æquationes

$$z - z' = \frac{dx + pdz}{dp}, \quad x - x' = \frac{p(dx + pdz)}{dp}$$
$$y - y' = \frac{q(dx + pdz)}{dp} \qquad (C)$$

4. Ut demum formetur æquatio conditionalis pro intersectione normalium MM', NN'; eliminabitur $z - z'$ ex æquationibus (4) et hinc sequens æquatio.

$$(dx + pdz)\, dq - (dy + qdz)\, dp = 0$$

exprimet hanc de qua agitur conditionem intersectionis. Aequatio hæc ope valorum (1) (2) (3) quantitatum dz, dp, dq, abit in

$$(dx+p^2 dx-pq dy)(sdx+tdy)-(dy+pqdx+q^2dy)(rdx+sdy)=0$$

seu divisis terminis per dx et ordinata æquatione respectu quantitatis $\frac{dy}{dx}$, in

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left\{(1+q^2)s-pqt\right\}+\frac{dy}{dx}\left\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\right\}-(1+p^2)s+pqr=0. \quad (D)$$

Substitutis demum in locum quantitatum p, q, r, s, t, valoribus supra datis qui usque erunt finiti; æquatio (D) transmutabitur in aliam formæ sequentis

$$P\frac{dy^2}{dx^2}+Q\frac{dy}{dz}+R=0 \qquad (d)$$

qua P, Q, R, sunt functiones notæ variabilium x, y, z, ac ideo æquatio (d) est integrabilis. Absoluta integratione, inveniemus æquationem cum variabilibus x, y quæ pertinebit ad curvam MN juxta quam normalis MM′ mobilis decussabit se in nova positione NN′ infinite propinqua cum primordiali in puncto C, cujus cordinatæ ope æquationum (C) definiri possunt.

5. Soluta æquatione (d) respectu ignotæ $\frac{dy}{dx}$ e designato alter utro valore ejusdem per M; valor hic inserviet definiendæ positioni curvæ MN eum in modum, ut omnium ad puncta ejusdem curvæ normalium quævis binæ consecutivæ intersecabuntur mutuo in punctis C C′ C″ .... locusque geometricus horum punctorum erit curva C C′ C″ quam *evolutam* respectu *evolventis* NMP appellabimus.

6. Posita æquatione $dy = Mdx$; æquationes $dz = pdx + qdy$, $dp=rdx+sdy$ abibunt ope præcedentis in sequentes.

$$dz=(p+qM)\,dx, \quad dp=(r+sM)\,dx$$

qua-

quarum ope æq: (c) transmutabuntur in

$$z-z' = -\frac{1+p^2+pq}{r+sM}, \; y-y' = p\,\frac{(1+p^2+pq)}{r+sM}$$

$$x-x' = q\,\frac{(1+p^2+pq)}{r+sM} \qquad \text{(E)}$$

substitutis demum in his æquationibus loco variabilium y' z, valoribus earundem in fonctione x ex æquatione superficiei ABC et integrali curvæ MNP extractis, tum eliminata variabili x; provenient duæ æquationes cum quan: x', y', z', quæ pertinebunt ad curvam evolutam $CC'C''$. Valor tandem radii curvaturæ erit

$$\sqrt{\frac{(1+p^2+pq)^2(1+p^2+q^2)}{(r+sM)^2}}$$

7. Designato per M' altero valore pro $\frac{dy}{dx}$; valor hic inserviet ad definiendam positionem alterius curvæ MR eum in modum, ut omnium ad puncta hujus curvæ normalium quævis binæ consecutivæ se decussent mutuo in punctis D, D', locusque geometricus ejusmodi punctorum evadet curva DD', quæ ut in superiori casu erit *evoluta* ad *evolventem* QMR.

Ratione analogiæ concludetur, æquationes ad definiendas coordinatas puncti intersectionis normalium MM' et RD fore

$$z-z' = -\frac{1+p^2+pq}{r+sM'}, \quad y-y' = \frac{p(1+p^2+tpq)}{r+sM'}$$

$$x-x' = q\,\frac{(1+p^2+pq)}{r+sM'} \qquad \text{(e)}$$

e quibus, simili modo ut in casu præcedenti, eliminatis variabilibus x', y, z; provenient duæ æquationes curvæ evolutæ DD'.

Valor tandem radii curvaturæ erit

$$\sqrt{\frac{(1+p^2+pq)^2(1+p^2+q^2)}{(r+sM')^2}}$$

8. Demonstrandum est demum curvas MN, MR intersecari sub angulo recto.

Naturæ ejusmodi propositionis convenienter, concipiamus animo tangentes ad binas curvas in puncto communi M. Si demonstrare queamus, tangentes hasce perpendiculares inter se esse; curvæ MN, MR intersecabuntur eo ipso sub angulo recto. At constat æquationes tangentis ad curvam priorem esse

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x),\quad z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x)$$

seu respectu valorum $\frac{dy}{dx}=M$, $\frac{dz}{dx}=p+qM$

$$y'-y=M\,(x'-x),\quad z'-z=(p+qM)\,(x'-x)$$

seu mutatis formis æquationum

$$x'-x=\frac{1}{p+qM}(z'-z),\quad y'-y=\frac{M}{p+qM}(z'-z)$$

Facile nunc perspici potest æquationes tangentis ad curvam MR fore

$$x'-x=\frac{1}{p+qM'}(z'-z),\quad y'-y=\frac{M'}{p+qM'}(z'-z).$$

Ut hæ duæ tangentes intersecentur sub angulo recto, necesse est, ut scimus aliunde, comprobetur æquatio.

$$1+\frac{1}{(p+qM)(p+qM')}+\frac{MM'}{(p+qM)(p+qM')}=0$$

Seu, multiplicatis terminis per denominatorem;

$$1+p^2+pq\,(M+M')+(1+q^2)\,MM'=0$$

est autem, respectu proprietatum æquationis (D) secundi gradus,

$$-(M+M')=\frac{(1+q^2)\,r-(1+p^2)\,t}{(1+q^2)\,s-pqt},\quad MM'=-\frac{(1+p^2)\,s+pqr}{(1+q^2)\,s-pqt}$$

proinde æquatio conditionalis transmutabitur in

$$(1+p^2)\left\{(1+q^2)s-pqt\right\}-pq\left\{(1+q^2)\,r-(1+p^2)t\right\}+$$
$$+(1+q^2)\left\{-(1+p^2)\,s+pqr\right\}=0$$

et patet eam comprobari; tangentes itaque, eoque ipso curvæ MN, MR intersecantur sub angulo recto.

9. Concipiamus animo sphæram cujus centrum in quovis punctorum C, D situm sit, cujusque superficies per punctum M superficiei propositæ transeat. Sphæra ejusmodi *osculatrix* superficiei propositæ nuncupatur.

Ut hæc sphæra contactum primi ordinis cum superficie data habeat, necesse est elementum infinite parvum superficiei, punctum M circumdans, confundatur cum superficie sphæræ. Si itaque incrementis dx, dy, dz augeantur variabiles x, y, z, æquatio sphæræ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

transmutabitur in

$$(x+dx-a)^2+(y+dy-b)^2+(z+dz-c)^2=R^2$$

et comprobetur necesse est. At hæc æquatio omissis infinite parvis secundi ordinis et respectu præcedentis eadem est ac

$$(x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz=0$$

seu substituto in locum dz valore $pdx+qdy$,

$$\left\{x-a+p(z-c)\right\}dx+\left\{y-b+q(z-c)\right\}dy=0$$

seu $$x-a+p(z-c)+\left\{y-b+q(z-c)\right\}\frac{dy}{dx}=0$$

at hæc ultima duobus valoribus pro $\frac{dy}{dx}$ comprobari potest, ideoque bini termini æquantur nihilo, et prodibunt æquationes

$$x-a+p(z-c)=0, \quad y-b+q(z-c)=0$$

contactûs primi ordinis, eædem, ut patet, ac æquationes (B) normalis ad punctum M: unde concludetur sphæram, unam eandemque normalem et eo ipso idem planum tangens in puncto M habere. Centrum tandem sphæræ situm est in puncto cujus coordinatæ designatæ supra fuerant per x', y', z'.

2*

10. Ut sphæra contactum secundi ordinis cum superficie proposita habeat, necesse est elementum superficiei infinite parvum circumdans elementum præcedens, confundatur cum superficie sphæræ. Si itaque incrementis dx, dy, dz augeantur variabiles x, y, z æquationum

$$x-a+p(z-c)=0, \quad y-b+q(z-c)=0,$$

necesse est, sit

$$dx+p\,dz+(z-c)\,dp=0, \quad dy+q\,dz+(z-c)\,dq=0$$

at hæ æquationes congruunt cum æquationibus (4) (numeri 3) quæ pertinent ad normalem NN′; proinde sphæra et superficies proposita duas habent normales communes, eoque ipso duo plana tangentia communia, eandem unamque curvaturam, denique commune centrum curvaturæ.

11. Hac ex analysi patet, omnem superficiem curvam regularem habere in quovis punctorum *duas varias curvaturas*, quarum sinuamina sita sint in duobus planis normalibus ad se perpendicularibus, hasque curvaturas definiri ope duplicis valoris pro quantitate $\frac{dy}{dx}$ et pro coordinatis x', y', z' centri curvaturæ, et ope duplicis valoris radii curvaturæ; centra denique binarum curvaturarum in una eademque normali sita esse.

12. Quoniam quævis normalis ad superficiem propositam, cum duabus aliis infinite propinquis et sitis in duobus planis normalibus ad se perpendicularibus intersecatur; evidens est, si a prima normali MC ad unam duarum aliarum, puta ad NC, tum ab has ultima ad sequentem infinite propinquam et sic porro in una eademque usque directione progrediamur; omnes normales definire superficiem curvam evolubilem perpendicularem ad datam juxta lineam quandam curvam quæ erit *linea primæ curvaturæ*. Perspicitur tot lineas primæ curvaturæ dari posse quot puncta superficiei, hisque lineis dividi superficiem propositam in zonas latitudinis variabilis.

Simili modo si a prima normali CM ad aliam RD infinite propinquam a præcedenti intersectam, tum ab hac ad sequentem et sic porro progrediamur; omnes hæ normales constituent superficiem evolubilem perpendicularem ad propositam in intersectione quæ *lineam alterius curvaturæ* constituat. Apparet, tot lineas alterius curvaturæ dari posse quot puncta superficiei, hisque denuo dividi superficiem propositam in zonas latitudinis variabilis.

Lineæ denique primæ curvaturæ secantur perpendiculariter a lineis alterius curvaturæ, adeo ut superficies proposita dividatur per curvas duplicis seriei in elementa quæ in rectangulorum numero duci possunt.

13. Quo hæc distinctius exemplo evolvere liceat, concipiamus animo superficiem quandam revolutionis, et vocemus planum *meridianum* quod secet superficiem propositam juxta axem majorem, *parallelum* vero quod secet eandes juxta axem minorem. Si a quovis superficiei puncto progrediamur ad aliud infinite propinquum in perimetro meridiani situm; normales ad hæc duo puncta uno eodemque plano meridiano comprehensæ, intersecabuntur quopiam. Si denuo ab eodem puncto progrediamur juxta directionem plani paralleli ad aliud infinite propinquum, normales ad hæc duo puncta intersecabuntur in axe majori. Sin autem juxta aliam directionem ab uno puncto ad aliud progressi essemus, haud se intersecassent duæ normales sed in duobus variis punctis axi occurrissent. Perimetri meridiani sunt itaque lineæ primæ curvaturæ, paralleli vero alterius: lineæ hæ duplicis generis intersecantur in superficie sub angulo recto et dividunt hancce in elementa quæ in rectangulorum numero duci possunt.

14. Vidimus omni lineæ curvaturæ respondere superficiem evolubilem normalem, quæ locus geometricus omnium normalium linearum considerari potest. Si itaque seriem ejusmodi superficierum, seriei linearum primæ curvaturæ respondentium, concipiamus animo; superficies hæ different inter sese quantitate constanti quæ insit in singulis æquati-

onibus integralibus hasce superficies indicantibus: (6, 7.) a valore quantitatis constantis dependebit positio et forma superficiei evolubilis. Simili modo pro singulis lineis alterius curvaturæ dantur totidem superficies normales quæ differant inter se quantitate constanti.

Insuper omnis superficies normalis unius seriei, occurrit superficiei alterius seriei sub angulo recto. Superficies itaque utriusque seriei ad propositam normales dividunt hancce juxta binas curvaturas in elementa rectangula, volumen vero superficie proposita finitum in elementa prismatica, quorum forma congruit cum natura superficierum normalium.

15. Sit $abcd$ (*fig*: 3) ejusmodi elementum rectangulum superficiei. Lineæ rectæ ductæ per quatuor vertices elementi perpendiculariter ad superficiem datam erunt totidem latera elementorum solidorum, quorum bina quæque consecutiva intersecabuntur in punctis infinite distantibus. Normales utique ad puncta a d intersecabuntur in puncto α, normales ad puncto b et c in γ, normales ad puncta d et c intersecabuntur in puncto δ normales ad puncta a, b in β.

Concipiamus animo elmentum prismaticum de quo agitur, extensum in directione adversa. Pars elementi solidi hoc modo formali basi $abcd$ finiti; consideranda est in nnmero elementorum, volumen superficie concava finitum, procreantium: et ideo *prisma camaroïdicum* (voussoir) nuncupatur, en ejusmodi enim elementis camaræ concavæ construuntur. Superficies laterales prismatis camaroïdici *juncturae* sunt dictæ. Sunt itaque juncturæ perpendiculares ad superficiem camaræ et perpendiculares inter se.

16. Ut dividatur igitur camara concava ope juncturarum in tetragona camaroidica, construentur superficies evolubiles, ad superficiem camaræ normales et distantes in utraque serie quantitate quadam finita naturæ materiæ convenienter, perpendiculares denique inter se. Tali modo volumen camaræ in elementa prismatica, superficies vero concava in tetragona regularia decoraminis capacia, dividetur.

17. Vidimus omnes normales ad lineam primæ curvaturæ se mutuo decussare, puncta vero intersectionis in curva quadam sita esse. Curvam hanc *latus retrogradum* (arête de rebroussement) superficiei normalis nuncupabimus. Concipiamus animo systema laterum retrogradorum superficierum normalium unius seriei: systema hoc definiet superficiem curvam que sit locus geometricus centrorum primæ curvaturæ superficiei datæ. Simili modo systema laterum retrogradorum superficierum normalium alterius seriei definiet superficiem curvam quæ erit locus geometricus centrorum alterius curvaturæ. Hæ binæ superficies centrorum, — quæ in singulis casibus possunt distingui singulis æquationibus, generatim vero sunt mappæ variæ unius ejusdemque superficiei curvæ et una eademque æquatione gradus superioris comprehensæ, — sunt ad superficiem datam quod curvæ evolutæ ad evolventes.

18. Ut formetur æquatio superficiei centrorum primæ curvaturæ, eliminabuntur variabiles x, y, z ex æquationibus (E), (num. 6) et æquatione $f(x, y, z)=0$ superficiei datæ; et æquatio proveniens in functione quantitatum x', y', z' pertinebit ad superficiem centrorum primæ curvaturæ. Similis eliminationis ope inter æquationes (e) (num. 7) et eandem æquationem $f(x, y, z)=0$, obtinebitur æquatio superficiei centrorum alterius curvaturæ.

19. Quoniam omnis normalis in intersectione duarum superficierum normalium sita, tangens est communis laterum retrogradorum earundem superficierum, concludetur illam etiam tangentem esse ad duas mappas centrorum curvaturæ. Insuper quævis harum mapparum obvolvit superficies normales unius seriei, unde concludetur omne planum tangens ad superficiem quamvis normalem tangens quoque esse ad mappam ab illa superficie contactam. Si itaque concipiamus animo duo plana per unam eandemque normalem ducta, tangentia ad duas superficies normales in quarum intersectione normalis illa sita fuerit; hæc duo plana angulo recto ad se inclinata erunt tangentia alterum ad primam mappam su-

perficiei centrorum, alterum ad aliam. Unde apparet, superficiem centrorum curvaturæ hac proprietate notabilem esse, quod uniuscujusque spectatoris oculo in lineamenta extrema sub angulo recto sese intersecantia videatur divisa.

20. Si duæ mappæ centrorum intersecentur, angulus intersectionis erit rectus, et curva intersectionis erit locus geometricus centrorum *curvaturarum sphœricarum* superficiei datæ. Omne enim punctum hujus curvæ, prout commune duabus mappis, erit centrum curvaturarum binarum, punctum respondens superficiei propositæ circumdantium, et æqualium ad instar curvaturæ sphæræ. Si deinceps concipiamus animo tangentes ad curvam intersectionis duarum-mapparum, quævis tangentium erit normalis ad superficiem datam et occurret ei in puncto quà duæ curvaturæ unum eundemque radium idemque centrum habebunt. Linea curva omnia ejusmodi puncta superficiei datæ jungens vocatur linea *curvaturarum sphœricarum:* linea hæc, ut patet, cum nulla linearum curvaturæ coit in unam sed contra scinditur ab illis.

21. Ut inveniatur æquatio lineæ curvaturarum sphæricarum, æquentur necesse est duplices valores radii curvaturæ unde prodibit æquatio (num. 6. 7.)

$$M = M'$$

quæ significat, radices æquationis (D) (num. 4) secundi gradus esse æquales, proinde quantitas signo radicis comprehensa in formula quam obtinuerimus soluta æquatione (D) reducatur ad nihilum necesse est: at hæc quantitas facile invenietur eritque æquatio lineæ curvaturum sphæricarum

$$\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\}^2=4\left(pqr-(2+p^2)s\right)\left((1+q^2)s-pqt\right)$$

22. Evidens est, lineam curvaturarum sphaericarum evolventem esse ad lineam centrorum curvaturæ sphæricæ seu lineæ intersectionis duarum mapparum centrorum.

Sit

Sit itaque curva ACBF (*fig.* 4.) intersectio mapparum et HGI linea curvaturarum sphæricarum. Hæc ultima formabitur motu radii curvaturæ BG tangentis ad AB. Sint *em*, *dn*, CM latera retrograda sita in una mapparum. Extenso filo in curva BC, extremitas G hujus fili mobilis et tangentis ad BC describet curvam HGI. Si idem filum extensum fuerit in curva C*e*A et in uno laterum retrogradorum puta in CM, pars fili MI tangens ad CM describet extremitate I curvam KIL in superficie data positam. Sin annulum occupare consequenter positiones in omnibus lateribus retrogradis duarum mapparum; extremitas hujusce fili describet innumerabiles curvas quarum locus geometricus erit superficies data.

PARS POSTERIOR.

23. Superficies cujus æquationem posuimus generatim

$$f(x, y, z) = 0$$

sit revera ellipsoïdica.

Superficies ellipsoidæ formari potest motu ellipseos EGM *(fig: 5.)* parallelæ plano XY, innixæ constanter ellipsibus *ca*, *cb*, quarum altera in plano ZX altera in ZY sita sit, variantis figura et positione. Ut inveniatur æquatio hujus superficiei, designemus litteris a, b, c, axes Oa, Ob, Oc quorum primus maximus, postremus minimus sit. Sit x' abscissa DM puncti M, y' ordinata DE ejusdem puncti, sit OD$=Z$; erunt

æquationes ellipseos ac, $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

. . . . bc, $\frac{y'^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

sit denique x abscissa DF puncti G ellipseos creatricis MGE et y ordinata GF, tum axes DM $= x'$, DE $= y'$. Aequatio ellipseos creatricis erit

$$\frac{x^2}{x'^2} + \frac{y^2}{y'^2} = 1$$

Substitutis in hac æquatione loco quantitatum x', y' valoribus earundem e duabus præcedentibus extractis, prodibit æquatio superficiei ellipsoidæ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

seu $$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$$

24. Hæc est æquatio respondens generali $f(x, y, z) = 0$, quacum ad instar casûs generalis operationes analyticas subeamus necesse est pro obtinendis æquationibus linearum curvaturæ superficiei ellipsoïdicæ.

Inprimis, inveniendi sunt valores quantitatum

$$p = \frac{dz}{dx}, \; q = \frac{dz}{dy}, \; r = \frac{d^2z}{dx^2}, \; s = \frac{d^2z}{dxdy}, \; t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

Sumpto differentiali singulorum terminorum æquationes ellipsoïdæ, prodibit

$$dz = -\frac{c^2x}{a^2z}dx - \frac{c^2y}{b^2z}dy = pdx + qdy$$

unde $\quad 1^\circ \; p = -\frac{c^2x}{a^2z}, \quad 2^\circ \; q = -\frac{c^2y}{b^2z}$

tum $\quad dp = -\frac{c^2}{a^2z}dx + \frac{c^2x}{a^2z}dz$

seu, substituto valore pro dz

$$dp = -\frac{a^2c^2z^2 + c^4x^2}{a^4z^3}dx - \frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}dy = rdx + sdy$$

unde $\quad r = -\frac{c^2(a^2z^2 + c^2x^2)}{a^4z^3}$

at æquatio ellipsoidæ præbet $a^2z^2 + c^2x^2 = \frac{a^2c^2(b^2 - y^2)}{b^2}$

perinde $\quad 3^\circ \; r = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2b^2z^3}, \quad 4^\circ \; s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$

Ut inveniatur denique valor $t = \frac{dq}{dy}$, erit

$$dq = d\left(-\frac{c^2y}{b^2z}\right) = -\frac{c^2}{b^2z}dy + \frac{c^2y}{b^2z}dz$$

$$= -\frac{c^2}{b^2z}dy - \frac{c^2y}{b^2z}\left(\frac{c^2x}{a^2z}dx + \frac{c^2y}{b^2z}dy\right)$$

$$= -\left(\frac{c^2}{b^2z} + \frac{c^4y^2}{b^4z^3}\right)dy - \frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}dx = tdy + sdx$$

unde $t = -\frac{c^2(b^2z^2+c^2y^2)}{b^4z^3}$

at æq: ellipsoidæ præbet $b^2z^2+c^2y^2 = \frac{b^2c^2(a^2-x^2)}{a^2}$

perinde 5° $t = -\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$

Substitutis demum in locum quinque quantitatum $p.\ q,\ r,\ s,\ t$, quæ insunt in æquatione generali (D) (num: 4), valoribus earundem, obtinebitur æquatio respondens æquationi (d) (n. 4.) Ejusmodi transformationi æquationis (D) quæ est

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left\{(1+q^2)s-pqt\right\}+\frac{dy}{dx}\left\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\right\}-\left\{(1+p^2)s-pqr\right\}=0$$

Sequenti modo satisfiet. Erit inprimis

$$1+p^2=\frac{a^4z^2+c^4x^2}{a^4z^2},\ 1+q^2=\frac{b^4z^2+c^4y^2}{b^4z^2},\ pq=\frac{c^4\,xy}{a^2b^2z^2}=-sz$$

et æq: (D) abit primum, divisis terminis per s, in

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(1+q^2+zt\right)+\frac{dy}{dx}\left\{(1+q^2)\frac{r}{s}-(1+p^2)\frac{t}{s}\right\}-(1+p^2+zr)=0$$

tum in

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(\frac{b^4z^2+c^4y^2}{b^4z^2}-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^2}\right)+\frac{dy}{dx}\left(\frac{(b^4z^2+c^4y^2)}{b^4z^2}\,\frac{(b^2-y^2)}{xy}-\right.$$
$$\left.-\frac{(a^4z^2+c^4x^2)}{a^4z^2}\,\frac{(a^2-x^2)}{xy}\right)-\left(\frac{a^4z^2+c^4x^2}{a^4z^2}-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^2}\right)=0.$$

Primo coefficiens quantitatis $\frac{dy^2}{dx^2}$ exprimetur sic

$$\frac{a^2b^4z^2+c^2(a^2c^2y^2-a^2b^2c^2+b^2c^2x^2)}{a^2b^4z^2}$$

et ope æq: ellipsoidæ reducetur ad $\frac{b^2-c^2}{b^2}$

Secundo ut reducatur coefficiens secundi termini ad expressionem simpliciorem, observandum æq: ellipsoidæ præbere valores

$$\frac{b^2-y^2}{b^4}=\frac{a^2z^2+c^2x^2}{a^2b^2c^2},\quad \frac{a^2-x^2}{a^4}=\frac{b^2z^2+c^2y}{a^2b^2c^2}$$

ope quorum coefficiens dictus abit in

$$\frac{(b^4z^2+c^2y^2)(c^2x^2+a^2z^2)-(a^4z^2+c^2x^2)(c^2y^2+b^2z^2)}{a^2b^2c^2\ xy.\ z^2}$$

seu, reductione, in

$$\frac{b^2c^2x^2(b^2-c^2)+a^2c^2y^2(c^2-a^2)+a^2b^2z^2(b^2-a^2)}{a^2\,b^2\,c^2\ xy}$$

et substituto valore $a^2b^2z^2$ ex æq: ellip: extracto,

$$\frac{b^2x^2(a^2-c^2)+a^2y^2(c^2-b^2)+a^2b^2(b^2-a^2)}{a^2\,b^2.xy}$$

Tertio terminus a quantitate $\frac{dy}{dx}$ independens, est

$$\frac{a^4b^2z^2+b^2c^4x^2-a^2c^4(b^2-y^2)}{a^4b^2z^2}$$

qui, substituto in locum $\frac{b^2-y^2}{a^4b^2}$ valore ex æquatione ellips: extracto et absoluta reductione ope ejusdem æquationis ellipsoidæ, transmutabitur in

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}$$

Ope horum valorum æquatio (D) abit in

$$a^2(b^2-c^2)xy\frac{dy^2}{dx^2}+\left\{b^2x^2(a^2-c^2)-a^2y^2(b^3-c^2)-a^2b^2(a^2-b^2)\right\}\frac{dy}{dx}-b^2(a^2-c^2)xy=o$$

seu divisis terminis per $b^2(a^2-c^2)$ et positis

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A,\quad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B$$

in $$Axy\frac{dy^2}{dx^2}+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=o \qquad (\delta)$$

25. Hæc est æquatio cujus integralis lineam curvaturæ superficiei ellipsoidæ indicabit. Et quoniam æquatio nostra secundi gradus est; integralis duas constantes arbitrarias comprehendet, at unicam tantum contineat necesse est, namque differentialis secundi ordinis non est. Inventa itaque integrali cum duabus constantibus, altera earundem dependeat ab altera necesse erit, quod idem est ac si æquatio integralis quæsita unicam tantum constantem contineret.

26. Demonstratur in calculo integrali, æquationem differentialem secundi ordinis generalem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

duas primi ordinis habere integrales formæ

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0, \quad f\left(y, \frac{dy}{dx}. b\right) = 0$$

unicam autem in functione quantitatum finitarum quæ prodibit eliminata quantitate $\frac{dy}{dx}$ e duabus ultimis, quamque constant esse formæ

$$f\,(x, y, a, b,) = 0.$$

His positis, observabimus æquationem (δ) (n. 24) secundi gradus duos valores quantitatis $\frac{dy}{dx}$ præbere, unde formari poterunt æquationes formæ sequentis

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, A, B\right) = 0 \qquad f,\left(x, y, \frac{dy}{dx}, A, B\right) = 0$$

eliminata itaque quantitate $\frac{dy}{dx}$ ex his ultimis; æquatio hinc proveniens et quantitates x, y, A, B continens, erit integralis cujusdam æquationis secundi ordinis. At hæc secundi ordinis æquatio invenietur sumpto differentiali æquationis (δ) quod erit

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(2Ayx\frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 - B\right) + \left(A\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0$$

27. Integranda demum est hæc ultima æquatio. Ut eo commodius problemmati huic satisfiat, eliminentur quantitates A, B ope æquationis (δ): ut illa æquatio præbet valorem

$$x^2 - Ay^2 - B = \frac{xy\left(1 - A\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{dy}{dx}}$$

ope cujus præcedens abit in

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(2\,Ayx\frac{dy}{dx} + xy\left(1 - A\frac{dy^2}{dx^2}\right)\right) + \frac{dy}{dx}\left(A\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0$$

seu $$\frac{d^2y}{dx^2}\,xy + \frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0$$

seu $$xyd^2y + dy\,(xdy - ydx) = 0$$

seu, divisis terminis per x^2, in

$$\frac{y}{x}d^2y + dy\,\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

quæ respectu valoris $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$ eadem est ac

$$\frac{\left(\frac{d^2y}{dx}\right)}{\frac{dy}{dx}} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)} = 0$$

cujus integralis est

$$\log.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \log.\left(\frac{x}{y}\right) = \log.\ c$$

seu $$\log\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = \log\ c$$

unde prodibit æquatio

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = c,\ \text{seu}\ ydy = c\,xdx$$

cujus integralis est

$$y^2 = \beta x^2 + \gamma$$

28. Aequatio hæc indicat lineam secundi ordinis concentricam ellipsoïdæ, cujus axes in lineis coordinatarum x et y siti sunt, iidemque arbitrarii sicut constantes β et γ. Linea de qua agitur erit ellipsis aut hyperbola juxta signum constantis β: at vidimus unam tantum constantem in æquatione integrali inesse debere, e duobus itaque axibus lineæ secundi ordinis altera dependebit ab altera. Ut inveniatur æquatio quæ ejusmodi duorum axium affinitatem constituat, eliminabuntur y et $\frac{dy}{dx}$ ex æquationibus

$$y^2 = \beta\, x^2 + \gamma, \qquad y\,\frac{dy}{dx} = \beta\, x$$

quarum altera differentialis est prioris, et æquatione

$$Axy\,\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\,(x^2 - Ay^2 - B) - xy = 0$$

Ut operationi huic satisfiat multiplicetur ultima per y et tum substituantur in locum y^2 et $\frac{ydy}{dx}$ valores quos duæ præcedentes præbeant: prodibit æquatio

$$A\beta x^3 + \beta x\left\{x^2 - A(\beta x^2 + \gamma) - B\right\} - x(\beta x^2 + \gamma) = 0$$

quæ reducetur ad

$$A\beta\gamma + \beta B + \gamma = 0.$$

Hæc est æquatio indicans affinitatem axium lineæ secundi ordinis cujus æquationem in numero precedenti invenimus. Si itaque æquationem lineæ reducamus ad formam

$$\frac{y^2}{\gamma} - \frac{x^2}{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)} = 1 \qquad \text{(e)}$$

æqua-

æquationem vero affinitatis axium ad formam

$$A\gamma + \frac{\gamma}{\beta} + B = 0 \qquad (f)$$

altera (e) lineam secundi ordinis cujus axes sint γ et $\frac{\gamma}{\beta}$, altera vero (f) affinitatem horum axium exprimet.

29. His positis facile perspicitur ope æquationis (e) lineæ secundi ordinis, quantitates β, γ in uno eodemque tempore negativas esse non posse. Si itaque

1° Constanti γ valorem positivum n^2 tribuamus, quantitas $\frac{\gamma}{\beta}$ valorem negativum respectu æq: (f) habeat necesse est. Hæc namque æquatio præbet

$$\frac{\gamma}{\beta} = -(A\gamma + B) = -(An^2 + B)$$

quantitas autem $An^2 + B$ positiva est ratione positivorum (num 24.) valorum pro A et B, quapropter quantitas $\frac{\gamma}{\beta}$ est negativa. Ponatur igitur $\frac{\gamma}{\beta} = -m^2$ et æquatio (e) abit in sequentem

$$\frac{y^2}{n^2} + \frac{x^2}{m^2} = 1, \quad \text{seu } n^2x^2 + m^2y^2 = m^2n^2$$

quæ ellipsim indicat. Semiaxes hujusce ellipseos erunt m juxta lineam abscissarum x, et n juxta lineam ordinatarum y, quorum affinitas definitur æquatione (f) seu positis in eadem $\gamma = n^2$, $\frac{\gamma}{\beta} = -m^2$; æquatione

$$m^2 - An^2 = B$$

2° Si contra constanti γ valorem negativum $-n^2$ tribuamus, β erit positiva respectu æquationis (e), perinde quantitas $\frac{\gamma}{\beta}$ erit negativa et $= -m^2$ quaproter æquatio (e) abit in sequentem

$$-\frac{y^2}{n^2} + \frac{x^2}{m^2} = 1 \quad \text{seu } n^2x^2 - m^2y^2 = m^2n^2$$

quæ hyperbolam indicat. Semiaxes hujus hyperbolæ sunt m juxta lineam abscissarum, et n juxta lineam ordinatarum, quorum affinitas definitur æquatione (f) seu positis in eadem $\gamma = -n^2$; $\frac{\gamma}{\varepsilon} = m^2$, æquatione

$$m^2 + An^2 = B.$$

30. Consideremus inprimis æquationem

$$n^2x^2 + m^2y^2 = m^2n^2 \qquad (1)$$

quæ indicat projectionem in plano XY unius linearum curvaturæ superficiei ellipsoïdæ. Patet, projectionem hanc præbere ellipsim cujus semiaxium m, n affinitas, æquatione

$$m^2 - An^2 = B$$

hyperbolam indicante, exprimitur. Reducta hac ultima æquatione ad formam

$$\frac{m^2}{(\sqrt{B})^2} - \frac{n^2}{\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2} = 1 \qquad (2)$$

apparebit semiaxes m, n ellipseos (1), coordinatas esse hyperbolæ (2) cujus semiaxes sint $\sqrt{B}$ juxta lineam abscissarum x, et $\sqrt{\frac{B}{A}}$ juxta lineam ordinatarum y.

31. Consideremus dein æquationem

$$n^2x^2 - m^2y^2 = m^2n^2 \qquad (3)$$

quæ indicat projectionem in plano XY alterius linearum curvaturæ superficiei ellipsoïdæ. Patet projectionem hanc præbere hyperbolam, cujus semiaxium m, n affinitas, æquatione

$$m^2 + An^2 = B$$

ellipsim indicante, exprimitur. Reducta hac ultima æquatione ad formam

$$\frac{m^2}{(\sqrt{B})^2} + \frac{n^2}{\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2} = 1 \qquad (4)$$

apparebit semiaxes m, n hyperbolæ (3), coordinatas esse elipseos (4) cujus semiaxes sint $\sqrt{B}$ juxta lineam abscissarum x, et $\sqrt{\frac{B}{A}}$ juxta lineam ordinatarum y.

32. Methodus itaque construendæ projectionis graphicæ superficiei ellipsoïdæ consistit in resolutione sequentis problemmatis: construantur hyperbola et ellipsis quarum æquationes sint

$$\frac{m^2}{(\sqrt{B})^2} \mp \frac{n^2}{\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2} = 1$$

axes vero

$$\sqrt{B} = \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad \sqrt{\frac{B}{A}} = \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$$

primus juxta lineam abscissarum x, secundus juxta lineam ordinatarum y. En, quapropter curvæ hæ ellipsoïdæ concentricæ, *auxiliares* sint appellatæ.

33. Hac ab analysi oritur methodus construendæ projectionis graphicæ superficiei ellipsoïdæ in plano XY. (*fig.* 6.)

Observabimus inprimis, axem $\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}$ curvæ auxiliaris minorem esse axe x ellipsoïdæ, est namque juxta propositum numeri 23 $a^2-c^2>a^2-b^2$. Si itaque ADBC ellipsim intersectionis ellipsoidæ juxta planum XY et per centrum K, si KB lineam abscissarum x, KG lineam ordinatarum, et K originem axium systematis coordinatarum denotet; transportabimus valorem axis $\sqrt{B}$ hyperbolæ auxiliaris (numero 30 convenienter) a K usque ad O. Alter axis $\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$ erit, ut ex formula valoris patet, major aut minor axe b. Supponamus majorem, et transportemus eundem axem a K usque ad G, tum construamus hyperbolam auxiliarem OHI cujus axes sint KO, KG. Sumamus nunc in ramo OHI puncta quot libuerit. Sit H ejusmodi punctum. Coordinatæ KN, NH hujusce puncti erunt axes ellipseos NMN′M′. Singulæ ellipses hoc modo constructæ quarum semiaxes extendantur in linea abscissarum a KO usque ad KB, in linea vero ordinatarum a nihilo usque ad KD erunt comprehensæ magna ellipsi BDAC: et quoniam minima harum ellipsium cujus semiaxes sunt KO et nihil, confunditur cum linea KO abscissarum, concludetur ellipsim, quæ secet ellipsoïdam juxta planum XZ, esse lineam curvaturæ superficiei ellipsoïdæ. Simili modo, quoniam maxima harum ellipsium confundit sese cum magna ellipsi BDAC, concludetur ellipsim, quæ secet ellipsoïdam juxta planum XY et per centrum, alteram esse lineam curvaturæ.

Facile demonstrari potest valori $m = a = \mathrm{KB}$ respondere valorem $n = b = \mathrm{KD}$. Si enim ponatur a pro m in æquatione hyperbolæ

$$\frac{m^2}{(\sqrt{B})^2} - \frac{n^2}{\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2} = 1$$

hæc abit in

$$\frac{a^2}{(\sqrt{B})^2} - \frac{n^2}{\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2} = 1$$

et ope valorum pro B, A, reducetur ad

$$n = b = \mathrm{KD}.$$

34. Si lineæ KO, KG semiaxes ellipseos auxiliaris (Numero 31 convenienter) considerentur; construetur ejusmodi ellipsis, OLG, sumentur in ramo OLG ellipseos puncta quot libuerit et coordinatæ singulorum horum punctorum erunt totidem axes hyperbolæ, lineæ alterius curvaturæ. Sit L unum ejusmodi punctorum: coordinatæ KP, PL hujus puncti erunt axes hyperbolæ RPS, R′P′S′. Axes omnium hyperbolarum hoc modo constructarum crescent alter juxta lineam abscissarum a nihilo usque ad KO, alter juxta lineam ordinatarum a nihilo, usque ad KG. Maxima hyperbolarum cujus axes sint o et KG confundetur cum

linea KG ordinatarum, unde apparet ellipsim quæ secet ellipsoïdam juxta planum YZ esse lineam curvaturæ ellipsoïdæ. Minima vero hyperbolarum cujus axes sint o et KO confundetur cum linea abscissarum KO, unde denuò apparet, ellipsim quæ secet ellipsoïdam juxta planum XZ alteram esse lineam curvaturæ.

Dum axis m hyperbolæ æquetur nihilo alter ejus axis erit KG, punctum namque G ad ellipsim auxiliarem pertinet. — Simili modo constructioni circa punctum O′ satisfiet.

Quatuor puncta superficiei ellipsoïdæ, alia duo supra, alia duo infra planum projectionis XY posita, quorum projectiones sunt O et O′ *umbilici* seu *foci* sunt appellata.

35. Quoniam tres axes ellipsoïdæ sunt inæquales, evidens est similem constructionem projectionis superficiei in plano maximi et minimi axis posse perfici. Hoc in casu ut continuò videbimus omnes projectiones curvaturæ sunt unius ejusdemque generis, quapropter modus hic constructionis commodior est in praxi et artibus.

Ut obtineatur æquatio projectionis linearum curvaturæ in plano XZ eliminabitur ex æquatione superficiei

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$$

variabilis y ope æquationis

$$n^2 x^2 \pm m^2 y^2 = m^2 n^2$$

quæ projectionem in plano XY indicat. Propterea multiplicetur prima per m^2 et altera per $\mp a^2 c^2$ et addantur invicem: prodibit

$$x^2 (m^2 b^2 c^2 \mp n^2 a^2 c^2) + m^2 a^2 b^2 = m^2 a^2 b^2 c^2 \mp m^2 n^2 a^2 c^2$$

at æq: $m^2 \mp A n^2 = B$ præbet $\mp n^2 = \dfrac{B - m^2}{A}$,

perinde æquatio præcedens abit in

$$x^2 \left\{A m^2 b^2 c^2 + a^2 c^2 (B - m^2)\right\} + A m^2 a^2 b^2 z^2 = A m^2 a^2 b^2 c^2 + m^2 a^2 c^2 (B - m^2)$$

est autem respectu valorum pro A et B.

$$A b^2 + B = \frac{a^2 b^2 - a^2 c^2 + a^4 - a^2 b^2}{a^2 - c^2} = a^2$$

unde $A b^2 = a^2 - B$

et æquatio præcedens, substituto valore pro Ab^2, transmutabitur in sequentem

$$x^2 Bc^2(a^2-m^2)+Am^2a^2b^2z^2=m^2a^2c^2(a^2-m^2)$$

quæ indicat ellipsim projectionis linearum curvaturæ in plano XZ. Quoniam $a>m$, termini æquationis constanter positivi permanebunt, et ideo æquatio ellipsim usquè indicabit.

Reducatur ultima æquatio ad formam

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2m^2}{B}\right)}+\frac{z^2}{\left(\frac{c^2(a^2-m^2)}{Ab^2}\right)}=1$$

et sit $\frac{a^2m^2}{B}=m'^2$, $\frac{c^2(a^2-m^2)}{Ab^2}=n'^2$

æquatio projectionis erit

$$\frac{x^2}{m'^2}+\frac{z^2}{n'^2}=1, \quad \text{seu} \quad n'^2x^2+m'^2z^2=m'^2n'^2$$

cujus axis m' in linea abscissarum x, axis vero n' in linea ordinatarum z positus est. Ut inveniatur æquatio affinitatis horum axium, eliminabitur m ex æquationibus quæ prebent valores eorundem axium m' et n'; prodibit æquatio $c^2Bm'^2+Aa^2b^2n'^2=a^4c^2$

seu

$$\frac{m'^2}{\left(\frac{a^4}{B}\right)}+\frac{n'^2}{\left(\frac{a^2c^2}{Ab^2}\right)}=1$$

quæ indicat ellipsim auxiliarem, cujus axes sint $\frac{a^2}{\sqrt{B}}$ juxta lineam abscissarum x, et $\frac{ac}{b\sqrt{A}}$ juxta lineam ordinatarum z, seu restitutis valoribus pro A, B

$$\frac{a\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ juxta } x, \quad \frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{b^2-c^2}} \text{ juxta } z.$$

56. Hac ab analysi oritur methodus construendæ projectionis superficiei ellipsoïdæ in plano ZX. (*fig.* 7.)

Observabimus inprimis axes ellipseos auxiliaris majores esse axibus ellipseos principalis ellipsoïdæ juxta planum XZ: est namque $a^2-c^2>a^2-b^2$

et $a^2 - c^2 > b^2 - c^2$ juxta propositum numeri 23. Definitis valoribus axium, transportabitur alter juxta x a K ad X, alter juxta z a K ad G. Construetur quadrans ellipticus XHLG, designabuntur in ramo ellipseos puncta, horumque coordinatæ erunt axes ellipsium projectionis linearum curvaturæ superficiei. Ellipsis cujus axis sit KX et o confundetur cum linea KX. Coordinatæ punctorum inter X et H comprehensorum, aliæ juxta x magis magisque decrescent, aliæ juxta z magis magisque crescent. Coordinatæ puncti H præbebunt ellipsim NMN′M′N, ellipsis vero cujus axes sint coordinatæ KB, KE puncti cujusdam ellipseos auxiliaris confundetur cum ellipsi principali in plano XZ ac ideo hæc ultima linea curvaturæ est. Omnes ellipses hoc modo constructæ usquè ad hunc limitem erunt comprehensæ inter E et E′ intus ellipsim principalem. Limes de quo agitur, definietur tangente ad punctum E, quæ intersecabitur cum ellipsi auxiliari in puncto quodam inter quod et punctum G omnia puncta ellipseos auxiliaris comprehensa præbebunt axes ellipsium projectionis quorum alii juxta z majores erunt axe KE, alii juxta x minores axe KB. Proinde ellipses hæ erunt projectiones linearum alterius curvaturæ et intersecabuntur a præcedentibus. Simili modo construentur projectiones respectu alterius quadrantis ellipseos auxiliaris a K usquè ad X′. Minima ellipsium ultimæ seriei confundetur cum linea KG.

Facile demonstrari potest ope præcedentium formularum ellipsim principalem AEBE′ e numero earum esse quas prebeat constructio graphica: id est sumpta abscissa cujusdam puncti ellipseos auxiliaris æquali a, ordinata ejusdem puncti erit c. Ponamus utiquè $m' = a$ in æquatione

$$c^2 \mathrm{B} m'^2 + a^2 b^2 \mathrm{A} n'^2 = a^4 c^2$$

tum $\mathrm{B} = a^2 - \mathrm{A} b^2$; prodibit $n' = c$

Quatuor extremitates A, E, B, E′ axium datorum sunt totidem projectiones quatuor *umbilicorum* seu *focorum* superficiei ellipsoidæ. Puncta hæc in primordiis constructionis continuò apparent.

37. Si per extremitates G et X, X et G′, G′ et X′, X′ et G axium ellipseos auxiliaris ducuntur lineæ rectæ, formabitur parallelogrammum æ-

quilaterum circumscriptum ellipsibus projectionis, cujus latera erunt tangentia ad hasce curvas.

Ut hoc theorema demonstretur, eliminetur m' ex æquatione ellipsium

$$n'^2 x^2 + m'^2 z^2 = m'^2 n'^2$$

ope æquationis ellipseos auxiliaris

$$c^2 B m'^2 + a^2 b^2 A n'^2 = a^4 c^2:$$

orta abhinc et respectu n' ordinata æquatio

$$a^2 b^2 A n'^4 + (c^2 B x^2 - a^2 b^2 A z^2 - a^4 c^2) n'^2 + a^4 c^2 z^2 = 0$$

pertinebit ad ellipses projectionis linearum curvaturæ quæ differant singulis valoribus constantis n'. Ut inveniatur æquatio involucri omnium ellipsium idest lineæ circumscribentis spatium ab hisce in plano proectionis occupatum, sumatur differentiale terminorum ultimæ æquationis respectu quantitatis n': prodibit

$$2 a^2 b^2 A n'^2 + c^2 B x^2 - a^2 b^2 A z^2 - a^4 c^2 = 0,$$

ope valoris pro n'^2 ex hac æquatione extracti, præcedens abit in sequentem

$$(c^2 B x^2 - a^2 b^2 A z^2 - a^4 c^2)^2 - 4 a^6 b^2 c^2 A z^2 = 0$$

cujus primum membrum, uti differentia quadratorum, resolubile est in duos factores, qui æquati nihilo præbent æquationes

$$c^2 x^2 B - (a^4 c^2 - 2 a^3 b c z \sqrt{A} + a^2 b^2 z^2 A) = 0$$

$$c^2 x^2 B - (a^4 c^2 + 2 a^3 b c z \sqrt{A} + a^2 b^2 z^2 A) = 0$$

quarum singularum membra prima exprimunt porrò differentias quadratorum et ideo resolubilia sunt in factores simplices, quibus æquatis nihilo prodibunt quatuor æquationes

$$c x \sqrt{B} + a b z \sqrt{A} + a^2 c = 0$$

$$-c x \sqrt{B} - a b z \sqrt{A} + a^2 c = 0$$

$$-c x \sqrt{B} + a b z \sqrt{A} + a^2 c = 0$$

$$c x \sqrt{B} - a b z \sqrt{A} + a^2 c = 0$$

seu

seu, restitutis valoribus quantitatum A, B,

$$cx\sqrt{a^2-b^2}+az\sqrt{b^2-c^2}+ac\sqrt{a^2-c^2}=0$$
$$-cx\sqrt{a^2-b^2}-az\sqrt{b^2-c^2}+ac\sqrt{a^2-c^2}=0$$
$$-cx\sqrt{a^2-b^2}+az\sqrt{b^2-c^2}+ac\sqrt{a^2-c^2}=0$$
$$cx\sqrt{a^2-b^2}-az\sqrt{b^2-c^2}+ac\sqrt{a^2-c^2}=0$$

quæ indicant quatuor lineas rectas æquales per quatuor extremitates axium ellipseos auxiliaris ductas: quod erat demonstrandum.

38. Umbilici, ut vidimus, sunt puncta in quibus lineæ curvaturæ seriei utriusque confundantur in unam eandemque lineam. In his igitur punctis duo valores pro $\frac{dy}{dx}$, quos præbeat æquatio (δ) curvaturæ (n. 24) sunt æquales: obtinebitur itaque æquatio pro exprimenda ratione coordinatarum umbilicorum, æquatis nihilo terminis signo radicis comprehensis in ambiguo valore pro $\frac{dy}{dx}$, et prodibit æquatio

$$(x^2-Ay^2-B)^2+4Ax^2y^2=0$$

quæ respectu summæ quadratorum primi membri resolubilis est in duas sequentes

$$x^2-Ay^2-B=0, \quad x^2y^2=0$$

e quibus concludetur esse

$$1^\circ \quad y=0,\ x=\sqrt{B}=\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

$$2^\circ \quad x=0,\ y=\sqrt{\tfrac{B}{A}}\sqrt{-1}$$

Prior horum casuum indicat valores reales coordinatarum projectionis umbilicorum; alter exprimit coordinatas puncti imaginarii: alii itaque umbilici præter hos quos consideravimus, dari non possunt.

39. Constructio denique linearum curvaturæ et eo ipso superficiei ellipsoïdicæ ope projectionum datarum, consistet in definiendo valore pro parte axis verticalis comprehensæ inter centrum ellipsoïdæ et pun-

ctum elevationis lineæ curvaturæ supra planum horizontale. Si itaque in singulis casibus valores cogniti axium projectionis substituantur in locum duarum respondentium coordinatarum in æquatione ellipsoïdæ; æquatio hæc unam tantum incognitam quantitatem continebit, cujus valor definitus indicabit hanc de qua agitur partem axis verticalis.

40. Si construenda esset camara concava cujus projectio horizontalis sit elliptica, nulla certe commodior superficies camaræ tribui posset semiellipsoïdica, cujus una ellipsium principalium coiret cum ellipsi creatrici. Si camara illa e saxo sectili esset construenda; prismata camaroïdica formarentur ope linearum curvaturæ definitarum eum in modum, ut superficies laterales prismatum seu juncturæ, evolubiles sint et ad camaram normales. Delineatis vestigiis juncturarum in superficie camaræ, formabuntur areæ tetra-et-orthogonales decoraminis capaces, quæ legi constructionis obnoxiæ nihil imaginarii, nihil phantastici præ se ferent. Adoptandus est denique convenientissimus naturæ ædificii axis verticalis.

Si axis verticalis major sit duobus aliis, camara erit *ascendens* (surmontée), sin minor, camara erit *descendens* (surbaissée), si tandem medianus, camara erit *mediana.* Præstantior reliquis audaciorque est camara ascendens, naturæ aliunde ædificiorum excelsorum consentanea. Camara descendens commodior est voci oratoris.

Si oecus duobus candelabris illuminandus et decorandus sit, puncta suspensioni aptissima erunt duo umbilici, quorum collocationis symetria a convenientibus trium axium valoribus dependebit.

Si camara oeci quatuor aperturas sit habitura, aut quatuor columnis nitatur necesse sit, adoptandum est genus camaræ medianæ, quà quatuor umbilici in primordiis constructionis constituuntur.

F I N I S.

Errata.

Pag:	*linea*	
3	— 13.	*pro* Gabrielum *lege* Gabrielem
„	— 17.	*pro* eorundem *l.* earundem
7	— 21.	*pro* $\frac{dz+pdz}{dp}$, *l.* $-\frac{dx+pdz}{dp}$,
8	— 17.	*pro* e *lege* et; *pro* alter utro *lege* alterutro
9	— „	*pro* pq *lege* pqM in formulis Nr. 6. et 7.
12	— 22.	*pro* has *lege* hac
13	— 14.	*pro* eandes *lege* eandem.
14	— 18.	*pro* formali *lege* formati
14	— 21.	*pro* en *lege* ex
14	— 24.	*pro* perpendicularæ *lege* perpendiculares.
16	— 26.	*pro* $= 4\left(pqr - (2+p^2)s\right)\left((1+q^2)s - pqt\right)$
		lege $= 4\left(pqr - (1+p^2)s\right)\left(pqt - (1+q^2)s\right)$
17	— 8.	*pro* Sin annulum *lege* sinamus filum
17	— 10.	*pro* ejusdem puncti *lege* puncti E
19	— 6.	*pro* æquationes *lege* æquationis
19	— 9.	*pro* $\frac{c^2x}{a^2z}$ *lege* $\frac{c^2x}{a^2z^2}$
19	— 16.	*pro* $+\frac{c^2y}{b^2z}$ *lege* $+\frac{c^2y}{b^2z^2}$
19	— 17.	*pro* $-\frac{c^2y}{b^2z}$ *lege* $-\frac{c^2y}{b^2z^2}$
21	— 5.	*pro* $b^4z^2+c^2y^2$ *lege* $b^4z^2+c^4y^2$
		pro $a^4z^2+c^2x^2$ *lege* $a^4z^2+c^4x^2$
22	— 14.	*pro* constant *lege* constat
23	— 3.	*pro* ut *lege* et

23 — 15. *pro* $\log\left(\frac{x}{y}\right)$ *lege* $\log\left(\frac{y}{x}\right)$

24 — 8. *pro* altera ab altera *lege* alter ab altero.

Extremitas lineæ CM (*fig.* 2.) designanda est littera M′, lineæ vero CN littera N′.

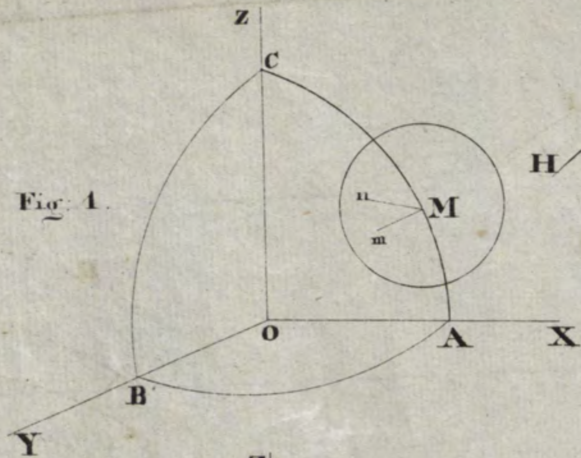


Fig. 1.

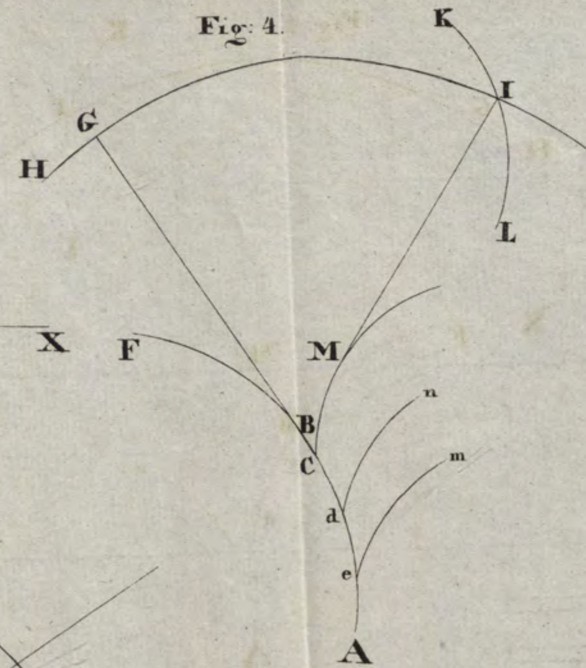


Fig. 4.

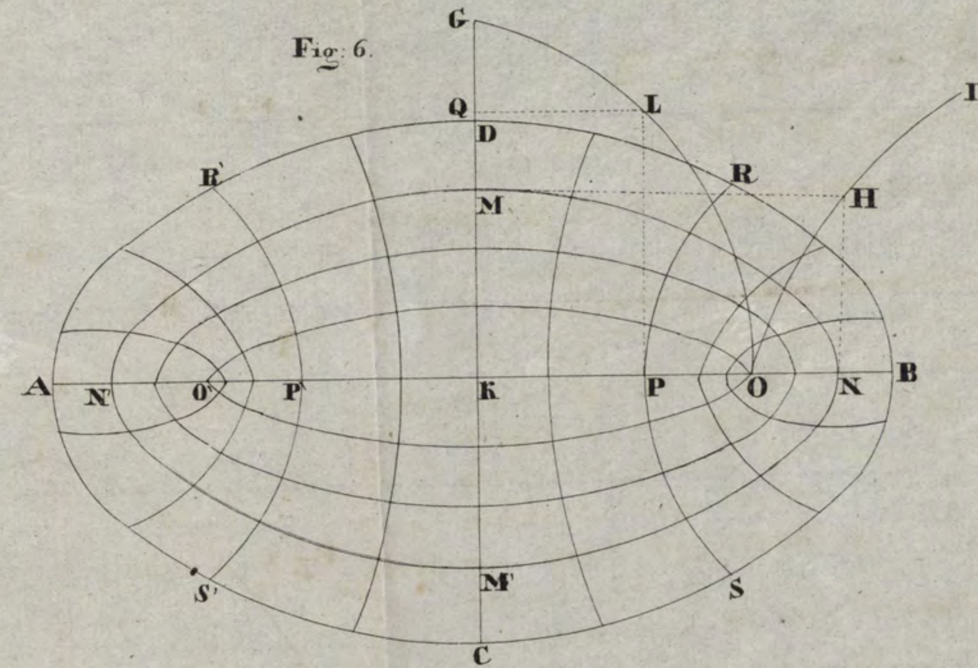


Fig. 6.

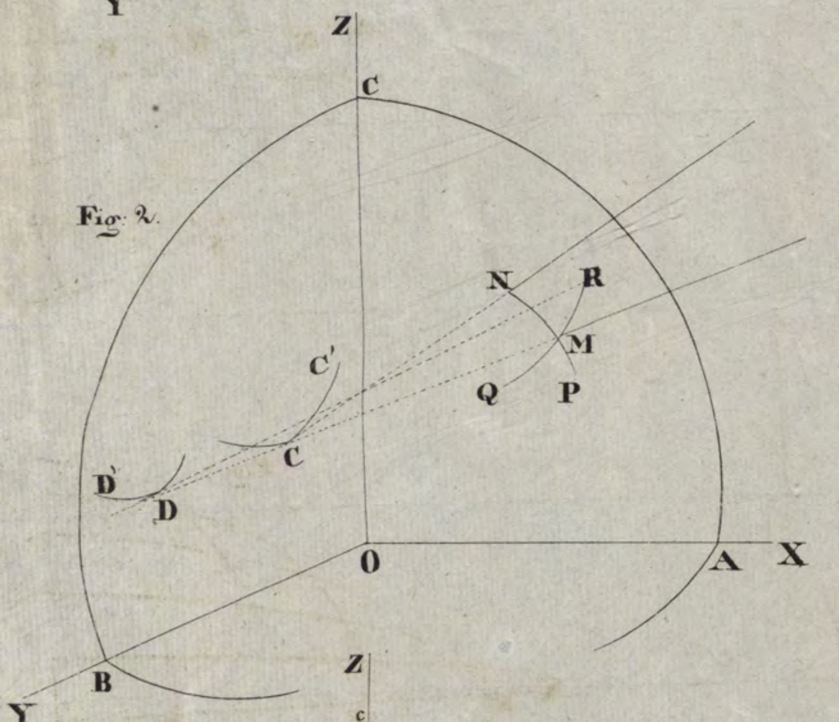


Fig. 2.

Fig. 3.

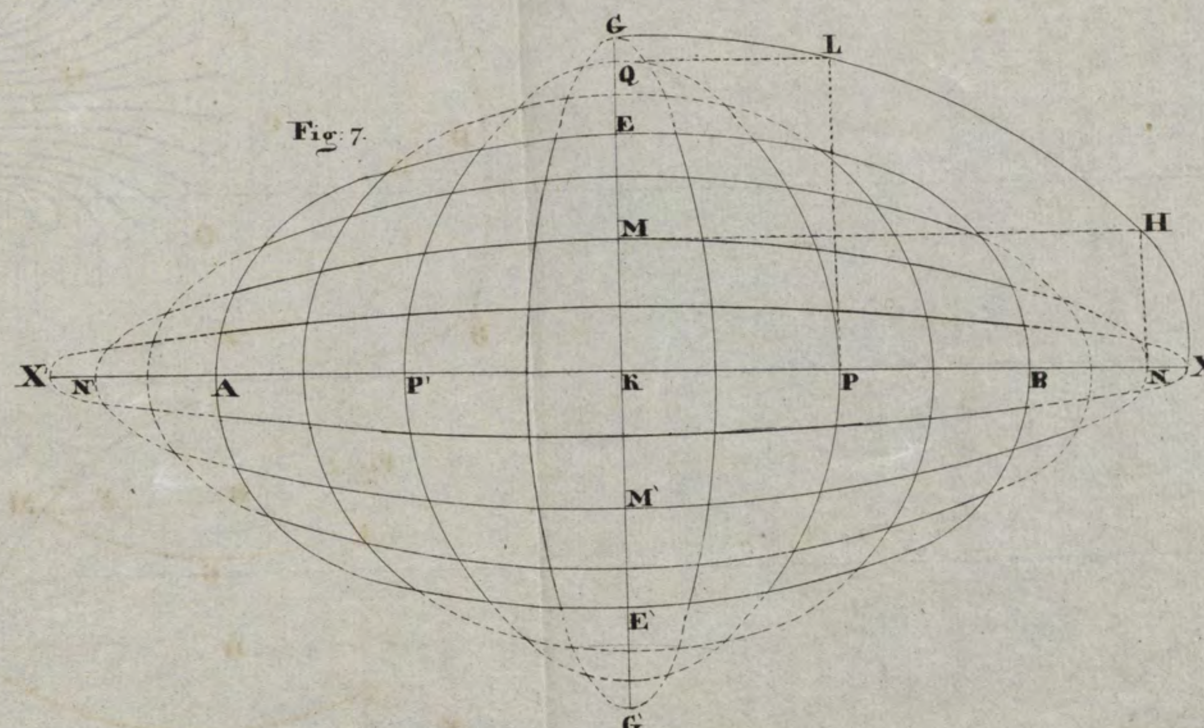


Fig. 7.

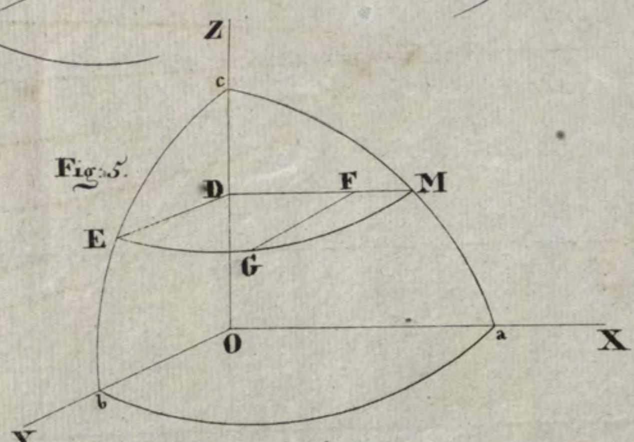


Fig. 5.