DIE

TRIGONOMETRISCHE ANALYSIS

PLANIMETRISCHER KONSTRUKTIONS-AUFGABEN

BEARBEITET

VON

PROF. Dr. F. REIDT,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM UND DER HÖHEREN BÜRGERSCHULE IN HAMM.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

306

DIE

TRIGONOMETRISCHE ANALYSIS

PLANIMETRISCHER KONSTRUKTIONS-AUFGABEN

BEARBEITET

1800

VON

PROF. Dr. F. REIDT,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM UND DER HÖHEREN BÜRGERSCHULE IN HAMM.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

S. Dickstein

Vorwort.

Die Auflösung von Konstruktions-Aufgaben mit Hilfe trigonometrischer Analysis liefert eins der dankbarsten Übungs-Gebiete für die Schüler der obersten Klassen höherer Unterrichts-Anstalten. Indem dieselbe einerseits das Ansetzen und Auflösen von Gleichungen mit mannigfaltigen algebraischen Umformungen, also einen grofsen und wesentlichen Teil des arithmetischen Unterrichts-Pensums zur Anwendung bringt, vereinigt sie damit eine umfassende Übung in dem Gebrauche der Lehren der Trigonometrie und verbindet damit zugleich eine solche in der theoretischen und praktischen Ausführung planimetrischer Konstruktionen. Es kommt also auf diesem Gebiete ein erheblicher Teil des elementar-mathematischen Unterrichts-Pensums zu mehr oder minder eingehender Übung und Wiederholung, und eine derartige Wiederholung durch stete Anwendung des Gelernten auf immer neue Probleme ist wirksamer und anregender als die ermüdende Gleichmäfsigkeit des Abfragens und Repetierens von früher Gelerntem in immer derselben Form und Manier, wenngleich auch letztere nicht ganz entbehrt werden kann.

Gegenüber dieser didaktischen Rücksicht kommt die spezieller wissenschaftliche Frage, ob und in welchen Fällen die Anwendung trigonometrischer Analysis, oder überhaupt der Rechnung, gegenüber der rein geometrischen Behandlung der fraglichen Aufgaben sachlich zweckmäfsig sei, kaum in Betracht. Die letztere soll auch durch den Gebrauch der ersteren keineswegs aus dem Unterricht entfernt oder beschränkt werden; sie kommt vielmehr auf den früheren Stufen jahrelang ausschliefslich zur Anwendung, und wird auch auf den oberen gerade durch Nebeneinanderstellung mit der rechnenden Methode bei den einzelnen Aufgaben in anregender Weise wiederholt und vergleichend gewürdigt werden können.

In betreff jener Frage selbst hat man den rechnenden Methoden wohl den Vorwurf gemacht, dafs die von denselben oft dargebotene verhältnismäfsige Leichtigkeit der Auffindung der Konstruktionen weit überwogen werde durch die Weitläufigkeit der Ausführung der gefundenen Konstruktionen selbst. Ich kann diese Ansicht nicht teilen. Es scheint, dafs es möglich sein müsse, vermittelst der Rechnung immer zu derselben Konstruktion zu gelangen, welche man durch eine der rein geometrischen Methoden findet, nur wird allerdings ein solches Resultat nicht selten eine gröfsere Geschicklichkeit und kompliziertere Rechnungen erfordern, während geringere Mühe bei der Analyse in vielen Fällen durch gröfsere Arbeit bei der Konstruktion wieder ausgeglichen wird. Man kann, wenn diese Ansicht richtig ist, die rechnende Analysis gewissermafsen mit einer Maschine vergleichen, welche die Möglichkeit gewährt, dieselbe Arbeitsgröfse in anderer Weise auf Kraft und Zeit zu verteilen, und welche überall Vorteil bietet, wo eine solche veränderte Verteilung wünschenswert oder notwendig ist. Auch bei der Auflösung von Konstruktions-Aufgaben giebt es Fälle, in denen die Auffindung einer rein geometrischen Analysis von dem Einzelnen mehr Kraft oder Übung erfordert, als er besitzt, und in welchen er sich des Mechanismus der Rechnung bedienen wird, um auf Kosten der Einfachheit in der Ausführung der Konstruktion die verlangte Arbeit leisten zu können. So hat also jede Methode an ihrem Platze ihren Wert, und es ist als eine Einseitigkeit zu betrachten, wenn eine einzelne derselben zum Schaden der andern mehr bevorzugt wird, als ihr zukommt.

Weniger fürchte ich den Einwand, dafs durch den Gebrauch der trigonometrischen Analysis in den obersten Klassen die leider vielfach vorhandene Neigung nach vorwiegend analytischer Behandlung der mathematischen Lehren auf Kosten der weniger mechanischen, die Anschauung und den Formensinn bildenden geometrischen Methoden befördert werde. Im Gegenteil dürfte jener Neigung gerade durch die Verknüpfung einer an sich fast nur rechnenden Disciplin mit den geometrischen Konstruktionen auf einer Stufe, wo letztere sonst kaum noch vorzukommen pflegen, entgegengearbeitet werden. Die Anhänger der von mir auch anderwärts vertretenen Ansicht, dafs ein solches Entgegenarbeiten notwendig sei, weil die Schule nicht vergessen dürfe, dafs sie in erster Reihe pädagogisch-didaktische und nicht einzig und allein rein wissenschaftliche Interessen zu vertreten habe, scheinen freilich gegenwärtig in der Minorität zu sein.

Die vorliegende Schrift stellt sich die Aufgabe, solchen, welche die Ansicht des Verf. teilen, ein ausgedehnteres Material auf dem fraglichen Gebiete zu bieten, als man gewöhnlich findet. Während z. B. die „geometrischen Konstruktionsaufgaben" von Lieber und v. Lühmann, welche in dieser Beziehung meines Wissens bis jetzt mit am meisten boten, 74 Aufgaben für trigonometrische Analysis enthalten, sind in dem vorliegenden Schriftchen mehr als 300 derselben zusammengestellt. Diese Zahl ist allerdings noch bescheiden genug, um erkennen zu lassen, dafs es nicht in der Absicht des Verf. gelegen hat, durch eine erdrückende Menge von Aufgaben zu imponieren; sie wird aber auch völlig hinreichen, um nicht nur einen *Wechsel in verschiedenen Jahrgängen*, sondern auch eine *Auswahl* in betreff des etwa gewünschten Grades der Schwierigkeit u. dgl. zu ermöglichen. Dafs es durchaus nicht die Meinung des Verf. ist, das Büchlein solle seinem ganzen Inhalt nach in fortlaufendem Unterricht in der Schule durchgenommen werden, bedarf wohl kaum der Versicherung, würde man doch, selbst wenn man in jeder Stunde drei Aufgaben behandeln wollte, in diesem Falle allein für das vorliegende Übungs-Gebiet bei zwei wöchentlichen Stunden weit über ein Schuljahr verwenden müssen.

Die vorliegende Schrift soll ferner das Material in systematischer Weise, und zwar in erster Reihe *nach den Arten der Behandlung geordnet* bieten, denn letztere sind es, die an der betreffenden Stelle vorwiegend neu zu lernen sind, nicht aber die besonderen Eigenschaften bestimmter Figuren. Zugleich ist eine ausgeführte allgemeine, durch spezielle Beispiele erläuterte *Anleitung* (Erklärung und Begründung des Verfahrens) in jedem einzelnen Paragraphen den betreffenden Aufgaben vorangeschickt, durch welche das Schriftchen vielleicht auch zum Privatstudium geeignet sein wird. Dagegen sind den einzelnen Aufgaben, abgesehen von den durch vereinzelte, für nötig gehaltene Andeutungen und durch die Beifügung der resultierenden Gleichungen gegebenen Fingerzeigen, keinerlei nähere Angaben über die Auflösungen beigegeben, um der Selbstthätigkeit des Lernenden und der Freude am Finden nicht entgegenzutreten.

Obgleich der Verf. im allgemeinen bemüht gewesen ist, Aufgaben fernzuhalten, für welche rein geometrische Auflösungen einfachster Art sich ohne jede besondere Mühe darbieten, so ist doch diese Rücksicht nicht überall ängstlich beobachtet worden, weil ja gerade die vergleichende Nebeneinanderstellung von Auflösungen derselben Aufgabe nach verschiedenen Methoden von Nutzen sein kann. Ein Fortschritt vom Leichteren zum Schwereren ist in der Aufeinanderfolge der einzelnen Paragraphen und zum Teil auch innerhalb der letzteren in derjenigen der einzelnen Aufgaben eingehalten, in letzterer Hinsicht jedoch nicht streng, zumal der Grad der Schwierigkeit zum Teil auf subjektiven Gründen beruhen kann. — Von den einzelnen Aufgaben hat der Verf. eine grofse Zahl selbst gebildet; aufserdem sind selbstverständlicher Weise auch andere einschlägige Schriften, wie die von Lieber u. Lühmann, Hermes, Gallenkamp und die eigene trig. Aufgabensammlung des Verf.*) benutzt worden. Das ganze Schriftchen kann als ein selbständiger Anhang zu letztgenanntem Werke und zu des Verf. „Planimetrischen Konstruktionen"**) betrachtet werden, welche hierdurch eine Verbindung und Ergänzung erhalten.

*) Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. Zweite Auflage 1877. Leipzig, B. G. Teubner.
**) Verlag von Ed. Trewendt, Breslau 1882.

Hamm, November 1881.

Dr. Reidt.

Inhalts-Verzeichnis.

§ 1.

Erklärung der Methode. Erste Aufgaben-Gruppe.

1. Die Methode der trigonometrischen Analysis geometrischer Konstruktions-Aufgaben ist nicht wesentlich von derjenigen der algebraischen Analysis verschieden; beide weichen nur in den zur Berechnung der zu konstruierenden Gröfsen gebrauchten Hilfsmitteln von einander ab, indem die erstere nicht blofs algebraische Operationen zu dem genannten Zwecke anwendet, sondern daneben auch trigonometrische Funktionen bekannter oder unbekannter Winkel benutzt.

Es sei z. B. die *Aufgabe* gestellt: *Über einer Seite AB eines gegebenen Dreiecks ABC als Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, so dafs die von seinen Durchschnittspunkten mit den beiden anderen Seiten begrenzte Sehne eine gegebene Länge d habe.*

Setzt man zur *Analysis* den bekannten Winkel $ACB = \gamma$, ferner $AC = b$, $BC = a$, seien ferner X, Y bezüglich die Durchschnittspunkte des gesuchten Kreisbogens mit AC, bezw. BC, und $CX = y$, $CY = x$, so erhält man die Gleichungen

$$ax = by,$$
$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma.$$

Aus denselben folgt $y = \frac{ax}{b}$, $d^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{2ax^2}{b} \cos \gamma$, also

$$x^2 = \frac{b^2d^2}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

Da der Nenner der rechten Seite dieser Gleichung zufolge eines bekannten Satzes gleich c^2 ist, so ergiebt sich endlich

$$x = \frac{bd}{c} \text{ und } y = \frac{ad}{c}.$$

Hiernach ist die *Konstruktion* von x oder y leicht in bekannter Weise auszuführen; dieselbe ergiebt den Punkt Y oder X, und durch einen dieser Punkte nebst A und B ist der gesuchte Kreisbogen bestimmt.

Die vorstehende Aufgabe gehört jedoch nur im uneigentlichen Sinne hierher, weil der zur Berechnung gebrauchte Winkel γ in den Resultaten wieder ausgefallen ist, derselbe also bei der Konstruktion selbst nicht gebraucht wird. In derartigen Fällen hat der Gebrauch der trigonometrischen Funktionen also nur den Zweck, der *Rechnung* in der Analysis die Hilfsmittel der goniometrischen und trigonometrischen Lehrsätze zu Gebote zu stellen, bezw. vorkommende mehr oder minder komplizierte Ausdrücke aus bekannten Grössen durch abkürzende trigonometrische Formen darzustellen oder die Auffindung der anzusetzenden Gleichungen zu erleichtern.

Nicht selten weist ein solches Ausfallen der trigonometrischen Funktionen aus den Resultaten darauf hin, dafs die Anwendung derselben ein Umweg ist und daher durch eine kürzere Auflösung vermieden werden kann. So wird beispielsweise bei der vorstehenden Aufgabe die Erwägung, dafs $AXYB$ ein Sehnen-Viereck, also der Winkel CYX gleich CAB ist, auf die kürzere Konstruktion führen, in welcher zwischen CB und CA eine Strecke gleich d unter gegebenem Winkel gegen CB mittelst einer Parallelen zu CB eingetragen wird.

2. Eine andere Behandlung erfordern die Aufgaben, in welchen eine oder mehrere Funktionen bekannter Winkel auch in den Resultaten der Rechnung vorkommen. Es sei z. B. die *Aufgabe* gestellt: *Ein Dreieck aus einer Seite a, der Differenz der ihr anliegenden Winkel $\beta - \gamma = \delta$ und der Differenz der zu den beiden anderen Seiten gehörigen Höhen $h_c - h_b = d$* zu konstruieren.

Um behufs der *Analysis* eine Gleichung zwischen den gegebenen und einem unbekannten Stück aufzustellen, kann man

$$h_c = a \cdot \sin\beta; \quad h_b = a \cdot \sin\gamma,$$

also

$$d = a(\sin\beta - \sin\gamma) = 2a \sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$$
$$= 2a \sin\tfrac{1}{2}\delta \sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

setzen, woraus

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{d}{2a\sin\frac{1}{2}\delta}$$

folgt. Durch $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$ und $\beta - \gamma = \delta$ sind dann β

und γ, und durch a nebst den Winkeln ist das gesuchte Dreieck bestimmt.

Zur *Konstruktion* zeichne man einen Winkel $B = \frac{1}{2}\delta$, mache den einen Schenkel BC desselben gleich a, fälle von C auf den anderen Schenkel die Senkrechte CD, beschreibe über CD als Durchmesser den Kreis, sowie um D mit $\frac{1}{2}d$ als Radius einen zweiten Kreis, welcher den ersteren in E und F schneide, ziehe durch den innerhalb des Dreiecks BCD liegenden Punkt E die Gerade CE und durch B die Parallele zu CF, welche CE in A schneide, so ist CAB das verlangte Dreieck.

Der *Beweis* hat zunächst zu zeigen, dafs der Winkel α gemäfs der für ihn entwickelten Gleichung richtig konstruiert worden ist. Es ist nämlich zufolge der Konstruktion leicht zu zeigen, dafs $CD = a \sin \frac{1}{2}\delta$, ferner das Dreieck DCE ein rechtwinkeliges und folglich

$$\sin DCE = \frac{DE}{DC} = \frac{d}{2a \sin \frac{1}{2}\delta}$$

ist. Nun ist $\sphericalangle BAC = ACF = 2 \cdot DCE$, also für $\sphericalangle CAB = \alpha$

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{d}{2a \sin \frac{1}{2}\delta}.$$

Hieraus folgt dann rückwärts der Beweis, dafs das Dreieck ABC die drei gegebenen Stücke hat. Es ist nämlich 1) $BC = a$ nach Konstruktion; 2) $\sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\delta = 90^0 - BCD = 90^0 - ACB - DCE = 90^0 - \gamma - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma - \gamma = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, also $\beta - \gamma = \delta$; 3) $h_c - h_b$, wie oben gleich $2a \sin \frac{1}{2}\delta \sin \frac{1}{2}\alpha$, und also mittelst der vorstehenden Gleichung für $\sin \frac{1}{2}\alpha$, $h_c - h_b = d$.

3. Allgemein kann man zur Konstruktion der berechneten Ausdrücke die in letzteren vorkommenden trigonometrischen Funktionen bekannter Winkel durch Verhältnisse von Seiten rechtwinkeliger Dreiecke ersetzen, welche letzteren man aus dem betreffenden Winkel und einer beliebig angenommenen oder im Anschlufs an die übrige Konstruktion zweckmäfsig gewählten Seite konstruiert. Man hat dann nur noch den so entstehenden Ausdruck (wie u. A. in des Verf. „Planimetrische Aufgaben", Verlag von E. Trewendt, Breslau, Teil II auf S. 72 ff. gezeigt ist) zu konstruieren.

Ausdrücke von der Form $x = a \cdot \sin \alpha$, $y = a \cdot \cos \alpha$ erhalten hiernach die geometrische Bedeutung der dem Winkel α bezüglich gegenüber- oder anliegenden Kathete eines aus diesem Winkel und der Hypotenuse gleich a konstruierten rechtwinkeligen Dreiecks. Entsprechend dient zur Konstruktion von $a \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $a \cdot \cot \alpha$, $\frac{a}{\sin \alpha}$, $\frac{a}{\cos \alpha}$ ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem Winkel α und einer Kathete gleich a.

Wie konstruiert man hiernach Ausdrücke von der Form: 1) $a \cdot \cos \alpha^2$; 2) $a : \sin \alpha^2$; 3) $a \cdot \cos \alpha : \operatorname{tg} \alpha$; 4) $a \cdot \sin \alpha : \cot \alpha$?

Ebenso: 5) $a \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$; 6) $a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$; 7) $a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$; 8) $a \cdot \cos \alpha : \cos \beta$?

Ebenso: 9) $a \cdot \cos \alpha \,.\, \operatorname{tg} \beta$; 10) $a \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$; 11) $a \cdot \cot \alpha \cdot \sin \beta$?

Ebenso: 12) $a \cdot \cot \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$; 13) $a \cdot \cot \alpha : \operatorname{tg} \beta$?

4. Statt durch rechtwinkelige Dreiecke können endlich berechnete Ausdrücke zuweilen kürzer mittelst schiefwinkeliger Dreiecke oder anderer Figuren konstruiert werden.

Um z. B. einen Ausdruck von der Form $x = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ zu konstruieren, kann man ein Dreieck aus einer Seite $BC = a$, einem ihr anliegenden Winkel $B = \beta$ und dem ihr gegenüberliegenden Winkel $A = \alpha$ zeichnen; die dem Winkel B gegenüberliegende Seite AC ist dann gleich x. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Sinussatz. Entsprechend kann $y = \frac{a \cos \beta}{\sin \alpha}$ als die dem Winkel B gegenüberliegende Seite eines Dreiecks ABC konstruiert werden, in welchem $BC = a$, $\sphericalangle A = \alpha$, $B = 90^0 - \beta$ ist. Ähnlich erhält man $z = \frac{a \cos \beta}{\cos \alpha}$ aus einem Dreieck mit der Seite a und den Winkeln $90^0 - \alpha$, $90^0 - \beta$.

Für $x = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}$ und $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ ist x der Höhe AE eines Dreiecks ABC mit $BC = a$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ gleich, ebenso $y = \frac{a \sin \beta \cos \gamma}{\sin \alpha}$ gleich der Projektion von AC auf BC und $z = \frac{a \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha}$ gleich dem unteren Abschnitt EH der Höhe AE (wenn die Höhen CD und AE einander in H schneiden).

Wie konstruiert man in entsprechender Weise folgende Ausdrücke:

1) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$; $y = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$; $z = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab\cos\frac{1}{2}\gamma^2}$?

2) $x = \frac{a}{\sin\alpha}$; $y = \frac{a\cos\beta}{\sin\alpha}$ mit Hilfe des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises?

3) $x = \frac{a\cdot\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $y = \frac{a\cdot\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha}$; $z = \frac{a\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}$;

$u = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha}$; $v = \frac{a\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$; $w = \frac{a\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}$

für $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$?

Ist ABC ein Dreieck mit den Winkeln 2α, 2β, 2γ und den diesen bezügl. gegenüberliegenden Seiten a, b, c, und ist $a + b + c = 2s$, ϱ der Radius des einbeschriebenen Kreises, welcher die Seite $AB = c$ in C_1, $BC = a$ in A_1 berühre, sind endlich ϱ_a, ϱ_b die Radien der betr. äufseren Berührungskreise, so ist $x = s - a = AC_1$, $y = s - b = BA_1$, $z = s$, $u = \varrho$, $v = \varrho_a$, $w = \varrho_b$.

Aufgaben zu § 1.

Auf der Seite AB eines gegebenen Dreiecks ABC (oder ihrer Verlängerung) einen Punkt X zu bestimmen, so dafs, wenn man von ihm die Senkrechten XY, XZ bezüglich auf CA und CB fällt,

1) $XY + XZ$ gleich einer gegebenen Strecke s ist.

Aufl. Für $AX = x$ erhält man $x = \frac{s - c\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$, woraus auch $x = \frac{c(s - h_a)}{h_b - h_a}$ folgt.

2) $XY - XZ$ gleich einer gegebenen Strecke d ist.

$AX = x = (d + c\sin\beta) : (\sin\alpha + \sin\beta) = c(d + h_a) : (h_b + h_a)$.

3) $XY \cdot XZ = \frac{1}{8} CB \cdot CA = \frac{1}{8} ab$ ist.

$AX = x = \frac{1}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - \frac{1}{2}c^2 : \sin\gamma^2}) = \frac{1}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - 2r^2})$.

4) $XY \cdot XZ = BZ \cdot BC$.

$AX = x = a\cot\beta : \sin\alpha = 2r\cot\beta$.

5) $XY \cdot XZ = BX \cdot BA$.

$AX = x = c : (\sin\alpha \cdot \sin\beta)$.

6) $XY \cdot XZ = \triangle BZX$.

$AX = x = c\cos\beta : (2\sin\alpha + \cos\beta)$.

7) $\triangle BXZ = AXY$.

$$AX = x = c\sqrt{\sin 2\beta} : (\sqrt{\sin 2\alpha} + \sqrt{\sin 2\beta})$$
$$= c(\sqrt{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta} - \sin 2\beta) : (\sin 2\alpha - \sin 2\beta),$$

oder für $c \sin 2\alpha = m$, $c \sin 2\beta = n$ ist $x = c(\sqrt{mn} - n) : (m - n)$.

Zwischen zwei Seiten AC, BC eines gegebenen Dreiecks eine Transversale XY so zu ziehen, dafs

8) beide Teile des Dreiecks gleiche Umfänge haben und aufserdem das abgeschnittene Dreieck einen gegebenen Inhalt f^2 hat.

$$x + y = \tfrac{1}{2}(a + b + c); \; (x - y)^2 = \tfrac{1}{4}(a + b + c)^2 - 8f^2 : \sin\gamma.$$

9) die unteren Abschnitte AX, BY dieser Seiten einander gleich sind und das abgeschnittene Dreieck einen gegebenen Inhalt f^2 hat.

$$x - y = a - b; \; (x + y)^2 = (a - b)^2 + 8f^2 : \sin\gamma.$$

10) beide Teile des Dreiecks gleiche Umfänge haben, wenn aufserdem die Länge d der Transversale gegeben ist.

$$x + y = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = s; \; (x - y)^2 = s^2 - (s^2 - d^2) : \cos\tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

11) die unteren Abschnitte AX, BY dieser Seiten einander gleich sind und die Transversale XY eine gegebene Länge d hat.

$$x - y = a - b; \; (x + y)^2 = (a - b)^2 + [d^2 - (a - b)^2] : \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

12) dieselbe Tangente des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises wird und eine gegebene Länge d hat.

$$x + y = a + b - c - d; \; (x - y)^2 = [d^2 - (x + y)^2 \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2] : \cos\tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

13) dieselbe Tangente des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises wird und von ersterem ein Dreieck abschneidet, dessen Inhalt gleich f^2 gegeben ist.

$$x + y = \frac{(a + b - c)^2 + 4f^2 \cot\frac{1}{2}\gamma}{2(a + b - c)}; \; xy = \frac{2f^2}{\sin\gamma}.$$

14) sich dem Viereck $AXYB$ ein Kreis einbeschreiben läfst, wenn aufserdem die Summe der oberen Seiten-Abschnitte CY, CX, $x + y = \sigma$ gegeben ist.

$$x + y = \sigma; \; (x - y)^2 = \frac{(a + b - c - \sigma)^2 - \sigma^2 \sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}.$$

15) sich dem Viereck $AXYB$ ein Kreis einbeschreiben läfst, wenn aufserdem das Verhältnis der oberen Seiten-Abschnitte CY, CX, $x : y = m : n$ gegeben ist.

$$x = \frac{a + b - c}{4n\cos\frac{1}{2}\gamma^2}(m + n \pm \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\gamma}).$$

In einem Rhombus $ABCD$ sollen von den einander gegenüberliegenden Eckpunkten B und D aus auf den je anliegenden Seiten Stücke von gleicher Länge x abgeschnitten werden. Die Endpunkte dieser Stücke sind die Eckpunkte eines Rechtecks. Das letztere soll einer der in den folgenden Aufgaben 16—19 gestellten Bedingungen genügen. (Man berechne x mit Anwendung eines Winkels α des gegebenen Parallelogramms. Die Maſszahl der Seite AB werde durch a bezeichnet.)

16) Das Rechteck soll einen gegebenen Umfang $4s$ haben.

$$x = \frac{s - a \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha - \cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

17) Die Differenz zweier aneinanderliegender Seiten des Rechtecks soll gleich einer gegebenen Strecke $2d$ sein.

$$x = \frac{d + a \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha + \cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

18) Das Verhältnis zweier aneinanderliegender Seiten des Rechtecks soll gleich $m : n$ gegeben sein.

$$x = \frac{ma \cos \frac{1}{2}\alpha}{m \cos \frac{1}{2}\alpha + n \sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

19) Der Inhalt des Rechtecks soll gleich f^2 gegeben sein.

$$x^2 - ax + \frac{f^2}{2 \sin \alpha} = 0.$$

Anmerkung: Zu den Aufgaben 16—19 können besonders leicht auch Auflösungen mittelst algebraischer Analysis, also ohne trig. Funktionen, gefunden und mit den vorstehenden trigonometrischen zur Vergleichung zusammengestellt werden.

---

20) Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels A eine Gerade XY von gegebener Länge a so zu ziehen, daſs das Dreieck AXY einen gegebenen Inhalt f^2 hat.

Für $AX = x$, $AY = y$, $\sphericalangle\, XAY = \alpha$ ist

$$(x + y)^2 = a^2 + 4f^2 \cot \tfrac{1}{2}\alpha; \quad (x - y)^2 = a^2 - 4f^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Über einer Seite AB eines Dreiecks ABC als Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher die Seiten AC, BC bez. in Y, X so schneide, daſs

21) die Diagonalen des Vierecks $AYXB$ zu einander senkrecht stehen.

Für $CX = x$, $CY = y$, $XY = z$ ergiebt sich mittelst $ax = by$, $c^2 + z^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2$, dafs $x = \frac{b}{\cos\gamma} (1 - \sin\gamma)$ ist.

22) das Viereck $AYXB$ einen gegebenen Umfang $2u$ hat. Bei gleicher Bezeichnung wie vorher und für $a + b + c = 2s$ ist $x = \frac{(s - u)s}{a \cos \frac{1}{2}\gamma^2} = \frac{b(s - u)}{s - c}$.

§ 2.

Analysis mit Hilfe unbekannter Winkel. Einfache Aufgaben.

1. Ist ein unbekannter Winkel φ behufs Auflösung einer Aufgabe zu ermitteln, so hat man eine Gleichung zu suchen, durch deren Auflösung eine Funktion dieses Winkels mittelst gegebener Stücke ausgedrückt wird. Man findet dann im allgemeinen φ ebenfalls durch Konstruktion eines rechtwinkeligen Dreiecks. Wird z. B. für $\sin\varphi$ ein Ausdruck von der Form $\frac{Z}{N}$ gefunden, in welchem Z und N lineare Gröfsen sind, so mache man die Hypotenuse des Dreiecks gleich N, die eine Kathete gleich Z, und es ist dann φ gleich dem der letzteren Seite gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks. Entsprechendes gilt in selbstverständlicher Weise von den übrigen Funktionen des Winkels φ.

Es sei z. B. die *Aufgabe* gestellt, *durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt P zwei zu einander senkrechte Sehnen so zu ziehen, dafs ihre Abstände vom Mittelpunkte zu einander in einem gegebenen Verhältnis $m : n$ stehen.* Setzt man hier den Winkel, welchen die Verbindungslinie MP des gegebenen Punktes und des Mittelpunktes mit einer der gesuchten Sehnen bildet, gleich φ, so erhält man unmittelbar $\tan\varphi = \frac{m}{n}$. Zeichnet man also ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten bezügl. zwei beliebigen in dem gegebenen Verhältnis stehenden Strecken gleich sind, so sind die spitzen Winkel dieses Dreiecks gleich denjenigen, unter welchen man die gesuchten Sehnen an MP anzulegen hat.

2. Um hiernach beispielsweise den Winkel φ zu $\sin\varphi = 1 - \frac{a}{b}$ zu konstruieren, kann man zunächst diese Gleichung in $\sin\varphi = \frac{b - a}{b}$

umformen und dann ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Hypotenuse gleich b und einer Kathete gleich $b - a$ benutzen.

Für $\cos \varphi = \sqrt{\frac{a}{b}}$ forme man zunächst um in $\cos \varphi = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ und benutze ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich b und dessen eine Kathete gleich der mittleren geometrischen Proportionale zwischen a und b, also ein solches, in welchem die Projektion der einen Kathete auf die Hypotenuse gleich a ist.

Für $\operatorname{tang} \varphi = \frac{a^2}{b^2}$ konstruiere man zunächst die dritte Proportionale zu b und a, also $c = \frac{a^2}{b}$, und benutze dann ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten bezüglich gleich b und c sind.

Für $\sin \varphi = \cos \alpha$ zeichne $\varphi = 90^0 - \alpha$ oder $90^0 + \alpha$; für $\operatorname{tang} \varphi = \sin \alpha$ zeichne ein beliebiges rechtwinkeliges Dreieck mit dem Winkel α und dann ein zweites, welches mit dem ersteren in der diesem Winkel gegenüberliegenden Kathete übereinstimmt, und dessen andere Kathete gleich der Hypotenuse des ersteren ist.

3. Wie kann man entsprechend beispielsweise Ausdrücke von folgenden Formen konstruieren?

1) $\cos \varphi = 1 - \frac{a}{b}$; 2) $\operatorname{tang} \varphi = 1 + \frac{a}{b}$; 3) $\sin \varphi = \sqrt{\frac{a}{b}}$;

4) $\cot \varphi = \sqrt{\frac{a}{b}}$; 5) $\sin \varphi = \frac{a^2}{b^2}$; 6) $\cot \varphi = \frac{a^2}{b^2}$;

7) $\cos \varphi = \operatorname{tang} \alpha$; 8) $\sin \varphi = \sin \alpha \cdot \sin \beta$; 9) $\cos \varphi = \sin \alpha \cdot \cos \beta$.

10) $\cot \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta$; 11) $\sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$; 12) $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$.

Ebenso:

13) $\sin \varphi = \frac{a}{b} \sqrt{\sin \alpha}$; 14) $\cos \varphi = \sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$;

15) $\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\sin \alpha + \sin \beta}$; 16) $\cot \varphi = \frac{a \sqrt{\sin \alpha}}{b \cos \beta}$;

17) $\cos \varphi = \sin \alpha \cdot \sqrt{\sin \beta}$; 18) $\sin \varphi = \sin \alpha + \cos \alpha$.

4. In einzelnen Fällen wird die Konstruktion des gesuchten Winkels dadurch vereinfacht, dafs man den unbekannten Winkel unmittelbar gleich einem bekannten oder gleich einem in bekannter Weise konstruierbaren Winkel, z. B. 90^0, 45^0, 60^0 und dergl., findet. Beispiele hierzu bieten die Aufgaben zu diesem § unter Nr. 1—13.

Im übrigen ist noch zu bemerken, dafs bei der Determination von Aufgaben, in welchen ein gesuchter Winkel vorkommt, auf die Zweideutigkeit der Bestimmung eines Winkels durch eine trigonometrische Funktion zu achten ist.

Aufgaben zu § 2.

1) Es sei ein Quadrat $ABCD$ gegeben; man soll von C aus eine Gerade ziehen, welche die Diagonale BD in Y und den dem Quadrate einbeschriebenen Kreis in X und Z so schneide, dafs $CX + CZ = \frac{8}{3} CY$ ist.

$$\sphericalangle ACZ = \varphi, \quad \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \varphi = 30^0.$$

2) Vom Eckpunkt D eines gegebenen Quadrates $ABCD$ aus eine Gerade zu ziehen, welche die Diagonale AC in X und den dem Quadrate umbeschriebenen Kreis in Y so schneide, dafs $DX = 2\,XY$ ist.

$$\sphericalangle BDY = \varphi; \quad \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \varphi = 30^0.$$

3) An einen gegebenen Kreis sei eine Tangente gelegt, welche denselben in A berühre. Man soll vom Mittelpunkte C aus eine Gerade CX so nach der Tangente ziehen, dafs das Dreieck ACX durch die zum Durchschnittspunkt Y von CX mit dem Kreise gehende Gerade AY halbiert wird.

$$\sphericalangle ACX = \varphi; \quad \cos\varphi = \tfrac{1}{2}, \quad \varphi = 60^0.$$

4) In einem Kreise, dessen Mittelpunkt C heifse, sei ein Durchmesser AB gegeben. Man soll eine Sehne XY parallel zu AB so ziehen, dafs, wenn BY und AX einander auf ihren Verlängerungen in U treffen und CU die Sehne XY in Z schneidet, das Trapez $AXYB$ dem Dreieck XYU inhaltsgleich werde.

$$\sphericalangle BCY = \varphi, \quad \operatorname{tg}\varphi = 1, \quad \varphi = 45^0.$$

5) Unter denselben Voraussetzungen wie in der vorigen Aufgabe soll das Dreieck ABU doppelt so grofs werden als das Rechteck aus XY und CZ.

$$\sphericalangle BCY = \varphi, \quad \cos\varphi = \tfrac{1}{2}, \quad \varphi = 60^0.$$

6) Von einem auf der Seite AB eines Quadrates $ABCD$ gegebenen Punkte P aus nach der gegenüberliegenden Seite eine Gerade PX so zu ziehen, dafs, wenn DY und BZ auf PX gefällte Senkrechte sind, $ZY = XY + PZ$ werde.

$$\sphericalangle\, BPX = \varphi,\ \operatorname{tg} 2\varphi = -1,\ \varphi = 67\tfrac{1}{2}^0.$$

7) Im Dreieck ABC die Transversale CX nach AB so zu ziehen, dafs $CX : AC = BX : BC$ ist.

$$\sphericalangle\, BCX = \varphi = \alpha.$$

8) Die Höhe CD eines gegebenen Dreiecks ABC schneide den dem letzteren umbeschriebenen Kreis in E; man soll eine Sehne EZ dieses Kreises ziehen, welche AB in X und BC in Y so schneide, dafs $XY = ZY$ wird.

$$\sphericalangle\, CEZ = \varphi;\ \sin 2\beta = \sin 2\varphi;\ \varphi = \beta \text{ oder } \varphi = 90^0 - \beta.$$

9) Innerhalb eines gegebenen Winkels soll vom Scheitel A aus eine Strecke AP von gegebener Länge a so gezogen werden, dafs, wenn man von P aus die Senkrechten PX, PY auf die Schenkel jenes Winkels fällt, das Dreieck APX doppelt so grofs werde als PXY.

$$\sphericalangle\, PAX = \varphi;\ \operatorname{tg} \varphi = -\cot 2\alpha, \text{ also } \varphi = 2\alpha - 90^0;\ a \text{ unbestimmt.}$$

10) In einem Kreise mit dem Mittelpunkte M seien zwei zu einander senkrechte Durchmesser AB, CD gezogen. Man soll eine Sehne AY, welche CM in X schneide, so ziehen, dafs $AX \cdot XM = CX \cdot XY$ wird.

$$\sphericalangle\, BAY = \varphi;\ \operatorname{tg} 2\varphi = 1;\ \varphi = 22\tfrac{1}{2}^0.$$

11) Vom Eckpunkte A eines gegebenen Quadrates $ABCD$ aus eine Gerade AX nach der Seite CD zu ziehen, welche die Diagonale BD in Y schneide, so dafs $AY \cdot XY = DY^2$ wird.

$$\sphericalangle\, DAX = \varphi,\ \sin 2\varphi = 1,\ \varphi = 45^0;\ AX \text{ fällt mit } AC \text{ zusammen.}$$

12) Ebenso, nur soll $BY - DY = AY$ sein.

$$\sin(45^0 - \varphi) = \tfrac{1}{2} = \sin 30^0;\ \varphi = 15^0.$$

13) In einem Kreise mit dem Mittelpunkte C seien zwei zu einander senkrechte Durchmesser AB, EF gezogen. Man soll auf dem Bogen FB den Punkt X so bestimmen, dafs wenn man die Sehnen AX, BX, EX zieht, von denen die letztgenannte CB in Y schneide, $XA \cdot XB = CY \cdot XE$ wird.

$$\sphericalangle\, BCX = \varphi;\ \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sin\varphi;\ \varphi = 30^0.$$

---

14) Unter denselben Voraussetzungen, wie in der vorigen Aufgabe, soll X so bestimmt werden, dafs $XE = XA - XB$ wird.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = 3 - 2\sqrt{2};\ \cos\varphi = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}.$$

15) Vom Eckpunkte C eines gegebenen Quadrates $ABCD$ aus eine Gerade CU nach der Seite AD zu ziehen, welche den dem Quadrate einbeschriebenen Kreis das erste Mal in X, das zweite Mal in Z schneide, so dafs das Dreieck CZM doppelt so grofs als CXM werde, wobei M den Durchschnittspunkt der Diagonalen bedeute.

$$\sphericalangle ACU = \varphi, \cos\varphi = \tfrac{3}{4}.$$

16) In einem regelmäfsigen Sechseck $ABCDEF$ soll eine Transversale AZ nach der Seite CD gezogen werden, welche den grofsen Radius MB in X schneide, so dafs das Trapez $XBCZ$ ein und einhalbmal so grofs als das Dreieck AXB wird.

$$\sphericalangle BAX = \varphi; \cot\varphi = \tfrac{4}{3}\sqrt{3}.$$

17) Ein Kreis mit dem Mittelpunkte C werde von einer Tangente in A berührt, man soll eine Gerade CX nach der Tangente ziehen, welche den Kreis in Y schneide, so dafs das Dreieck CYA halb so grofs als das Dreieck AYX wird.

$$\sphericalangle ACX = \varphi, \cos\varphi = \tfrac{1}{3}.$$

18) In einem Kreis mit dem Mittelpunkte C sei ein Durchmesser AB gezogen; man soll eine zu AB parallele Sehne XY ziehen, so dafs, wenn die Verlängerungen von AX und BY einander in U treffen, das Trapez $ABYX$ viermal so grofs als das Dreieck XYU werde.

$$\sphericalangle YCB = \varphi; \operatorname{tg}\varphi = 2.$$

19) Unter denselben Voraussetzungen, wie in der vorigen Aufgabe, soll das Dreieck CXY doppelt so grofs als das Dreieck XYU werden.

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{3}.$$

20) In den einem gleichseitigen Dreieck ABC umbeschriebenen Kreis eine Sehne XY parallel der Seite BA so zu ziehen, dafs das innerhalb des Dreiecks fallende Stück derselben gleich der Hälfte der Sehne werde.

$\sphericalangle XCB = \varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5}\sqrt{3}$. Teilt also E die Höhe CD, so dafs $ED = \frac{1}{5}CD$, so geht AE verlängert durch X.

21) In den einem gegebenen Quadrate $ABCD$ umbeschriebenen Kreis eine Sehne XY parallel zu der Diagonale AC so zu ziehen, dafs sie durch die Seiten DA, DC in drei gleiche Teile geteilt wird.

$\sphericalangle\ CDY = \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$. Zieht man also $CE \parallel BD$, $DE \parallel AC$, so schneidet EA den Kreis in Y.

22) Über den Seiten CD, AD eines gegebenen Quadrates $ABCD$ als Durchmessern seien nach aufsen Halbkreise beschrieben. Man soll eine von den Bögen dieser Halbkreise begrenzte Gerade XY parallel zu der Diagonale CA so ziehen, dafs sie durch die Seiten CD, AD in drei gleiche Teile geteilt wird.

$\sphericalangle\ XDC = \varphi$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$. Vergl. 21.

---

23) Auf einer Geraden MN sei ein Punkt A gegeben; man soll von letzterem aus eine Strecke AX von gegebener Länge a so ziehen, dafs wenn man von ihrem Endpunkte X die Senkrechte XY auf MN fällt, $XY : AY = m : n$ sei.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{n}.$$

24) Auf dem Bogen AB eines Quadranten ACB (mit dem Mittelpunkte C) den Punkt X so zu bestimmen, dafs die Flächeninhalte der Dreiecke BCX und ACX zu einander in dem gegebenen Verhältnis $m : n$ stehen.

$$\sphericalangle\ XCB = \varphi;\ \operatorname{tg} \varphi = m : n.$$

25) Durch einen innerhalb eines Kreises M gegebenen Punkt P eine Sehne XY zu ziehen, so dafs die Differenz ihrer Abschnitte XP, YP einer gegebenen Strecke d gleich sei.

$$MP = a,\ \sphericalangle\ XPM = \varphi;\ \cos \varphi = d : 2a.$$

26) Ein Quadrat zu konstruieren, so dafs jede Seite oder deren Verlängerung durch je einen von vier in gerader Linie gegebenen Punkten geht.

Sind A, B, C, D der Reihe nach die gegebenen Punkte und trifft die Seite XY des Quadrats auf ihrer Verlängerung AD in D unter dem Winkel φ, so ist für $BC = a$, $AD = b$, $AB = d$, $CD = c$, $\operatorname{tang} \varphi = a : b$ oder $\operatorname{tg} \varphi = (b - c) : (b - d)$ oder $\operatorname{tg} \varphi = d : c$.

27) Von einem aufserhalb eines Kreises C gegebenen Punkte A seien an C die Tangenten AB, AD gezogen. Man soll AX so ziehen, dafs, wenn X der dem Punkt A am nächsten liegende Durchschnittspunkt dieser Geraden mit dem Kreise ist, $XD^2 - XB^2 = r \cdot AX$ ist.

$$\sphericalangle\ CAX = \varphi;\ \sin \varphi = \frac{a}{4b} \text{ für } AC = a,\ AB = b.$$

28) Zwischen zwei parallelen Geraden sei ein Kreis gegeben; man soll an letzteren eine Tangente ziehen, so dafs das zwischen den Parallelen liegende Stück derselben eine gegebene Länge habe.

Sei a der Abstand der Parallelen, b die Länge der Tangente, φ der Winkel zwischen dem zum Berührungspunkt gehenden und dem zu einer der Parallelen senkrechten Radius, so ist $\sin\varphi = \frac{a}{b}$.

29) Von einem aufserhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte C gegebenen Punkte A aus eine Sekante AXY zu dem Kreise zu ziehen, so dafs das Dreieck CXY dreimal so grofs als das Dreieck AXC wird.

$\sphericalangle\, CAX = \varphi$; $\cos\varphi = \frac{5b}{4a}$ für $AC = a$ und die Tangente von A aus gleich b.

30) An einem gegebenen Punkte E der Bande AB eines rechtwinkeligen Billards $ABCD$ liegt ein Ball; derselbe soll so gestofsen werden, dafs er, nachdem er der Reihe nach an AD, DC, CB angeprallt ist, nach E zurückkehrt. Den Weg des Balls zu konstruieren.

$AB = a$, $BC = b$, $\sphericalangle\, AEX = \varphi$, X auf AD; $\cot\varphi = \frac{a}{b}$.

31) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 30, soll der Ball, nachdem er AD in X, DC in Y getroffen hat, nach dem Eckpunkt B gehen.

$AE = c$, $AB = a$, $BC = b$, $\sphericalangle\, AEX = \varphi$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2b}{a+c}$.

32) Es sei ein Kreis M und innerhalb desselben ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine Sehne XY so legen, dafs, wenn man den Durchmesser XZ zieht, ZY eine gegebene Länge b erhält.

$$MP = a,\ \sphericalangle\, MPY = \varphi;\ \sin\varphi = \pm\frac{b}{2a}.$$

33) Zwischen zwei parallelen Geraden MN, $M'N'$ sei ein Punkt P gegeben und durch P die Senkrechte zu den Parallelen gezogen, welche MN in A, $M'N'$ in B treffe. Man soll durch P zwischen MN und $M'N'$ die Gerade XY so ziehen, dafs $AX + BY$ gleich einer gegebenen Strecke c sei.

Für $AP = a$, $BP = b$, $\sphericalangle\, APX = \varphi$ ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{c}{a+b}$.

34) Ebenso wie in 33, nur soll $AX - BY = c$ sein.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c}{a-b}.$$

35) Ebenso wie in 33, nur soll $PX - PY = c$ sein.

$$\cos\varphi = \frac{a-b}{c}.$$

36) Ebenso wie in 33, nur soll AX zu PY in einem gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen.

$$\sin\varphi = \frac{mb}{na}.$$

Auf einer Geraden CD sei im Punkte C nach der einen Seite die Senkrechte $CA = a$, nach der anderen die Senkrechte $CB = b > a$ errichtet. Man soll innerhalb des Winkels BCD eine Strecke CX von gegebener Länge c so ziehen, dafs, wenn XY senkrecht auf CD ist,

37) $AY = BX$ wird.

$$\sphericalangle XCY = \varphi;\ \sin\varphi = \frac{b \pm a}{c}.$$

38) Ebenso dafs $AY^2 + BY^2 = AX^2 + BX^2$ wird.

$$\sin\varphi = \frac{b-a}{c}.$$

Zwei gegebene Kreise sollen einander in den Punkten A und B schneiden; es wird eine durch A gehende Gerade verlangt, welche den einen Kreis in X, den anderen in Y schneide, so dafs, wenn man BX und BY zieht,

39) $BX \pm BY$ gleich einer gegebenen Strecke s ist.

$$\sphericalangle YAB = \varphi,\ \sin\varphi = \frac{s}{2(R \pm r)}.$$

40) Ebenso dafs $BX \cdot BY$ gleich einem gegebenen Quadrate p^2 ist.

$$\sin\varphi = \frac{p}{2\sqrt{Rr}}.$$

41) Ebenso, dafs $BX^2 \pm BY^2 = p^2$ ist.

$$\sin\varphi = \frac{p}{2\sqrt{R^2 \pm r^2}}.$$

42) Ebenso, dafs XY eine gegebene Länge s hat.

$$AB = a;\ \sin\varphi = \frac{s}{\sqrt{4R^2 - a^2} \pm \sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

43) Auf einer Geraden seien die Strecken $AB = a$, $BC = b$ neben einander abgetragen. Man soll in gegebener Entfernung r

von B einen Punkt X bestimmen, so dafs AB und BC an demselben unter gleichen Gesichtswinkeln erscheinen.

$$\sphericalangle\, ABX = \varphi, \ \cos\varphi = \frac{r(b-a)}{2ab}.$$

An zwei gegebene, einander von aufsen berührende Kreise, deren Mittelpunkte B und C seien, sei eine äufsere gemeinschaftliche Tangente gezogen, und man habe die Centrale CB über B bis zu ihrem Durchschnittspunkt A mit der Tangente verlängert. Man soll von A aus eine Transversale, welche den Kreis B in X und Y, den Kreis C in Z und U schneide, ziehen, so dafs (wenn R, r bezüglich die Radien von C und B sind)

44) $UX : YZ = R : r$ ist.

$$\sphericalangle\, CAU = \varphi; \ \cos\varphi^2 = \frac{(R+r)^2}{2(R^2+r^2)}.$$

45) Ebenso, dafs $UX \cdot YZ = BC^2 \cdot \frac{r}{R}$ ist.

$$\sin\varphi = \frac{R-r}{2R}.$$

46) Ebenso, dafs $UX \cdot YZ = Rr$ ist.

$$\sin\varphi = \frac{R-r}{2(R+r)}.$$

47) Ebenso, dafs $UX \cdot YZ = AB^2$ ist.

$$\sin\varphi^2 = \frac{r}{4R}.$$

48) Ebenso, dafs $UX \cdot YZ = XY \cdot UZ$ ist.

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{R-r}{R+r}.$$

49) Es seien zwei einander von aufsen berührende Kreise mit den Mittelpunkten A, B und bezüglich den Radien R, r gegeben; man soll auf dem Kreise A einen Punkt X bestimmen, so dafs die von letzterem an den Kreis B gezogene Tangente XY gleich der durch X senkrecht zur Centrale AB in den Kreis A gelegten Sehne ist.

$$\sphericalangle\, XAB = \varphi; \ \cos\varphi = -\frac{R-r}{2R}.$$

50. Von einem aufserhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte C gegebenen Punkte A aus eine Sekante AXY zu dem Kreise zu ziehen, so dafs die Dreiecke CXY und ACX inhaltsgleich werden.

Ist die von A an den Kreis gehende Tangente gleich b, $AC = a$, $\sphericalangle\, CAX = \varphi$, so ist $\cos\varphi = \frac{3b\sqrt{2}}{4a}$.

51) Von einem auf der Seite AB eines Quadrates $ABCD$ gegebenen Punkte P soll nach der gegenüberliegenden Seite eine Transversale PX gezogen werden, so dafs die von den Eckpunkten D und B auf dieselbe gefällten Senkrechten zu einander in einem gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen.

$$\sphericalangle\, XPB = \varphi,\ AB = a,\ AP = b;\ \cot\varphi = \frac{m(a-b) - nb}{na}.$$

Insbesondere für α) $m = n$; $\cot\varphi = \frac{a-2b}{a}$; β) $m = 2n$; $\cot\varphi = \frac{2a-3b}{a}$.

52) In einem Kreise mit dem Mittelpunkte C sei eine Sehne $AB = a$ gezogen, und durch A sei die Tangente an den Kreis gelegt; man soll eine Sehne BY, deren Verlängerung die Tangente in X schneide, so ziehen, dafs $XY = BY$ wird.

$$CA = r,\ \sphericalangle\, ABY = \varphi,\ \sin\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{4r}.$$

53) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 52), soll $BY = AX$ werden.

$\sin\varphi = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4r}$. Wird a nach dem goldenen Schnitt geteilt und ist x der gröfsere Abschnitt, so ist $2r\sin\varphi = x = AY$.

54) Zwischen zwei parallelen Geraden MN, $M'N'$ sei ein Punkt P gegeben, und von demselben seien auf jene Geraden bezüglich die Senkrechten $PA = a$, $PB = b$ gefällt. Man soll durch P eine Gerade legen, welche MN in X, $M'N'$ in Y treffe, so dafs $AX \cdot BY$ gleich einem gegebenen Quadrate p^2 wird.

$$\sphericalangle\, APX = \varphi;\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{\sqrt{ab}}.$$

55) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 54), soll $AX^2 \pm BY^2 = p^2$ werden.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{\sqrt{a^2 \pm b^2}}.$$

56) Auf einer Geraden CD sei in C nach der einen Seite die Senkrechte $CA = a$, nach der anderen die Senkrechte $CB = b$ errichtet; man soll innerhalb des Winkels BCD die Strecke CX von gegebener Länge c so ziehen, dafs, wenn XY senkrecht auf CD gefällt wird, $AX^2 - BX^2 = XY^2$ ist.

$$\sphericalangle\, XCY = \varphi;\ c\cdot\sin\varphi = a + b \pm \sqrt{2a(a+b)}.$$

57) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 56), soll CX^2 gleich dem arithmetischen Mittel aus AY^2 und BY^2 sein.

$$2c^2 \sin\varphi^2 = a^2 + b^2.$$

58) In einem gegebenen Kreise mit dem Mittelpunkte C einen Radius CY zu ziehen, welcher eine gegebene Sehne AB so in X schneide, dafs $CX^2 = AX \cdot XB$ ist.

Ist $CD = a$ senkrecht zu AB, $\sphericalangle\, XCD = \varphi$, so ist $r^2 \cos\varphi^2 = 2a^2$.

---

59) In einem Kreissektor ACB, dessen Mittelpunkt C sei, soll ein Radius CX so gezogen werden, dafs, wenn man von X auf CA und CB bezüglich die Senkrechten XX_1, XX_2 fällt und die Gerade $X_1 X_2$ zieht, $X_1X_2 : CA = XX_2 : XX_1$ sei.

$$\sphericalangle\, ACB = \alpha,\ ACX = \varphi;\ \cot\varphi = 1 + \cot\alpha.$$

60) In einen gegebenen Kreissektor ein Quadrat $XYZU$ zu beschreiben, so dafs XU auf dem einen, Z auf dem anderen der begrenzenden Radien und Y auf dem Bogen liegt.

Ist M der Mittelpunkt, $\sphericalangle\, XMZ = \alpha$, $YMX = \varphi$, so ist $\cot\varphi = 1 + \cot\alpha$.

61) Ebenso wie in 60), jedoch sollen X und U auf dem Bogen, Y und Z auf je einem der begrenzenden Radien liegen.

$$\sphericalangle\, YMZ = 2\alpha,\ \sphericalangle\, XMU = 2\varphi;\ \cot\varphi = 2 + \cot\alpha.$$

62) In einen Kreis sei ein gleichschenkeliges Dreieck ABC einbeschrieben; man soll eine Sehne XY parallel zur Basis AB so ziehen, dafs dieselbe durch die Schenkel in drei gleiche Teile geteilt wird.

$$\sphericalangle\, XAC = \varphi,\ ABC = \alpha;\ \operatorname{tg}\varphi = \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

63) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 62), soll der innerhalb des Dreiecks fallende Abschnitt der Sehne gleich der Summe der beiden anderen Abschnitte sein.

$$\operatorname{tg}\varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

64) Von dem Eckpunkte B eines Dreiecks ABC eine Gerade zu ziehen, welche AC in X und den dem Dreieck umbeschriebenen Kreis in Y schneide, so dafs $XY = \frac{1}{2}CY$ sei.

$$\sphericalangle\, ABY = \varphi;\ \operatorname{tg}\varphi = \sin\alpha : (2 - \cos\alpha).$$

65) Durch einen auf einem Kreise gegebenen Punkt P zwei Sehnen PX, PY unter gegebenem Winkel α zu einander zu ziehen, so dafs $PX : PY = m : n$ wird.

$$\sphericalangle MPX = \varphi;\ \operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{n}{m} - \cos\alpha\right) : \sin\alpha.$$

66) Es sei ein Dreieck ABC und auf AB ein Punkt D gegeben; man soll ein Quadrat $XYZU$ so zeichnen, dafs UZ durch C, ZY durch B, XY durch D und die Verlängerung von UX durch A geht.

$$BD = d,\ \sphericalangle DBY = \varphi;\ \operatorname{tg}\varphi = (d - a\cos\beta) : (c - a\sin\beta).$$

67) Um ein gegebenes Viereck ein Quadrat zu beschreiben.

$$\operatorname{tg} DAX = (d - a\cos\alpha - c\sin\delta) : (d - a\sin\alpha - c\cos\delta).$$

68) Es sei ein Rhombus $ABCD$ und auf der Verlängerung von AB ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine Gerade ziehen, welche BC in X, AD in Y schneide, so dafs $XY = AY$ ist.

$$\sphericalangle BAD = \alpha,\ AB = a,\ BP = b,\ \sphericalangle APY = \varphi;\ \sin\varphi = a\sin\alpha : (a + b).$$

---

69) In einem Kreise mit dem Mittelpunkte C seien zwei zu einander senkrechte Radien CA, CB gegeben; man soll eine Sehne BX ziehen, welche CA in Y so schneide, dafs $CY^2 = XY \cdot BY$ ist.

$$\sphericalangle ACX = \varphi;\ \sin\varphi = \tfrac{1}{3}.$$

70) Aufserhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte C sei ein Punkt A gegeben. Man soll auf dem Kreise einen Punkt X bestimmen, so dafs, wenn man AC und von A aus die Tangenten AB, AD, sowie AX, BX und DX zieht, $DX^2 - BX^2 = \frac{1}{n} \cdot AC \cdot AX$ ist.

$$\sphericalangle CAB = \alpha,\ CAX = \varphi;\ \sin\varphi = \frac{2}{2n\sin 2\alpha}.$$

71) Von dem Eckpunkte C eines Quadrates $ABCD$ aus soll eine Gerade gezogen werden, welche den dem Quadrate einbeschriebenen Kreis zuerst in X, dann in Z und die Diagonale BD in Y so schneide, dafs $XY = 9\,YZ$ ist.

$$\sphericalangle XCA = \varphi;\ \sin\varphi^2 = \tfrac{2}{3}\left(\sqrt{6} - 2\right).$$

72) In dem einem Quadrate $ABCD$ umbeschriebenen Kreis eine Sehne DY zu ziehen, welche die Diagonale AC in X so schneide, dafs XY halb so grofs als die Seite des Quadrates wird.

$$\sphericalangle XDB = \varphi;\ \cos\varphi = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{2} + \sqrt{34}\right) = \tfrac{1}{8}\left(a\sqrt{2} + \sqrt{9a^2 + 25a^2}\right) : a.$$

73) Auf der Verlängerung eines Durchmessers CB eines

Kreises M sei ein Punkt A gegeben; man soll von demselben aus eine Sekante AXY so zu dem Kreis ziehen, dafs das Viereck $CBXY$ gleich dem Dreieck ACX wird.

$$MA = a, \sphericalangle CAX = \varphi; \cos\varphi = \frac{3a + r}{2a}\sqrt{\frac{a - r}{2a}}.$$

74) Es sei eine Gerade MN nebst zwei auf derselben Seite dieser Geraden liegenden Punkten A, B gegeben. Man soll auf MN einen Punkt P bestimmen, so dafs $\sphericalangle BPN = 2\,APM$ ist.

Sind $AC = a$, $BD = b$ senkrecht auf MN, $CD = c$, $\sphericalangle APM = \varphi$, so ist $\cot\varphi = \frac{1}{b \pm 2a}\,(c + \sqrt{c^2 \pm 2ab + b^2})$.

In einem Kreise seien zwei parallele Sehnen CD, EF gegeben, zwischen welchen der Mittelpunkt M liegt; der zu ihnen senkrechte Durchmesser AB schneide CD in H, EF in G. Man soll eine Sehne AZ ziehen, welche CD in P, EF in Q schneide, so dafs

75) $AP = QZ$ ist.

$MH = a$, $MG = b$, $\sphericalangle BAZ = \varphi$; $\sin\varphi = \sqrt{\frac{a - b}{2r}}$. Ist $BL = a - b$ auf BA abgetragen, so schneidet die in L auf AB senkrechte Gerade den Kreis in Z.

76) Ebenso, dafs PQ das arithmetische Mittel zwischen AP und QZ ist.

$\cos\varphi = \sqrt{\frac{3(a + b)}{2r}}$. (Wie vorher, wenn $AL = 3(a + b)$ gemacht ist.)

77) Ebenso, dafs $PQ = QZ$ ist.

$\cos\varphi^2 = \frac{r + 2b + a}{2r}$; ($\cos 2\varphi = \frac{2b + a}{r}$; $AL = r + 2b + a$; vgl. 76).

78) Ebenso, dafs $PQ^2 = AP \cdot QZ$ ist.

$$\cos\varphi^2 = \frac{(a + b)^2 : (r - a) + r + b}{2r}.$$

79) Ebenso, dafs $CP = EQ$ ist.

Setzt man $CD = 2a'$, $EF = 2b'$, so ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b' - a'}{b + a}$.

80) Ebenso, dafs $CP = GQ$ ist.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a'}{(r - a) + (r + b)}.$$

81) Auf einem Kreise einen Punkt P zu bestimmen, so dafs, wenn seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte M eine ge-

gebene Sehne AB in Q schneidet und C der Halbierungspunkt der Sehne ist, $PQ = QC$ wird.

$$MC = a, \sphericalangle PCA = \varphi; \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{r}.$$

82) Von der Spitze C eines Dreiecks ABC soll nach der Grundlinie AB eine Transversale CP gezogen werden, so daſs die den Dreiecken ACP, BCP einbeschriebenen Kreise die Gerade CP in demselben Punkte berühren.

$$\sphericalangle CPA = \varphi, \operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma + \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

83) Von einem Punkte A gehen vier Strahlen aus; auf dem ersten derselben ist ein Punkt B gegeben. Man soll von B aus eine Transversale ziehen, welche die anderen Strahlen der Reihe nach in X, Y, Z schneidet, so daſs $XY = YZ$ wird.

$$AB = a, \sphericalangle BAX = \alpha, XAY = \beta, YAZ = \gamma, \alpha + \beta + \gamma = BAZ = \varepsilon,$$
$$ABZ = \varphi; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \beta \sin \varepsilon - \sin \alpha \sin \gamma}{\cos \alpha \sin \gamma - \sin \beta \cos \varepsilon}.$$

84) In dem einen von zwei einander schneidenden Kreisen einen Radius zu ziehen, welcher durch den anderen halbiert wird.

Ist die Centrale $AB = c$, der Radius von A gleich r, der von B gleich R, XB der gesuchte Radius und der Winkel zwischen letzterem und BA gleich φ, so ist $4cR \cos \varphi = R^2 - 4r^2 + 4c^2$.

85) Von dem Mittelpunkt B des einen von zwei einander schneidenden Kreisen A, B eine Sekante BZ zu dem anderen zu ziehen, so daſs der zwischen beiden Kreisen liegende Abschnitt derselben gleich dem vierten Teile der ganzen Sekante werde.

Ist R der Radius von B, r der Radius von A, die Centrale $AB = c$ und $\sphericalangle ABZ = \varphi$, so ist $4c \cos \varphi = 5R - 3\sqrt{R^2 + r^2 - c^2}$.

86) Auf dem äuſseren von zwei koncentrischen Kreisen sei ein Punkt A gegeben; man soll durch denselben eine Sehne AZ ziehen, deren innerhalb des inneren Kreises fallendes Stück XY gleich AX ist.

Ist C der Mittelpunkt, $\sphericalangle CAZ = \varphi$, so ist $4R \cos \varphi = 3\sqrt{2(R^2 - r^2)}$.

87) Um einen auf der Kathete AC eines bei C rechtwinkeligen Dreiecks ABC zu bestimmenden Punkt P einen Kreis zu beschreiben, der AB in U berührt und BC, bezw. deren Verlängerung unter einer Sehne YZ schneidet, so daſs $YZ = PU$ wird.

$$\sphericalangle PBA = \varphi; \cot \varphi = \frac{\sqrt{3} + 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

88) Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt zwei zu einander senkrechte Sehnen zu ziehen, so dafs dieselben in einem gegebenen Verhältnis zu einander stehen.

Ist M der Mittelpunkt, P der gegebene Punkt, $MP = a$, XY die eine Sehne, $\sphericalangle MPX = \varphi$, so ist $(m^2 + n^2)\, a^2 \cos\varphi^2 = (m^2 - n^2)\, r^2 + n^2 a^2$.

89) Ein Sehnenviereck aus den vier Seiten zu konstruieren.

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)}.$$

90) Auf der Verlängerung der Seite BA eines Dreiecks ABC sei ein Punkt P gegeben; man soll durch denselben eine Transversale ziehen, welche AC in X, BC in Y so schneidet, dafs $BY = 2AX$ ist.

$AP = d$, $\sphericalangle BPX = \varphi$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{(c + d)\sin\alpha - 2d\sin\beta}{(c + d)\cos\alpha + 2d\cos\beta}$. Ist insbesondere $d = c$, so wird $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

91) Auf der Halbierungslinie eines Winkels A sei ein Punkt P gegeben; man soll durch letzteren eine Gerade so ziehen, dafs die durch dieselbe von den Schenkeln abgeschnittenen Stücke AX, AY eine gegebene Summe s haben.

$$AP = a,\ \sphericalangle XAP = \alpha,\ APY = \varphi;\ \sin\varphi^2 = \frac{s \cdot \sin\alpha^2}{s - 2a\cos\alpha}.$$

92) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 91), soll $AX - AY = d$ werden.

$$\operatorname{tg}\varphi^2 - \frac{2a\operatorname{tg}\alpha}{d\cos\alpha}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha^2.$$

93) Durch ein Rechteck $ABCD$ soll eine Transversale gezogen werden, welche die Diagonalen AC, BD bezüglich in X und Y, die Seiten BC, AD bezüglich in P und Z so schneide, dafs $PX : XY : YZ = 1 : 3 : 2$ werde.

Für $CP = x$, $BC = a$, $\sphericalangle ACB = \alpha$, $ZPB = \varphi$ ist $\operatorname{tg}\varphi = 3\operatorname{tg}\alpha$, $x = \frac{1}{5}a$.

94) Von dem Endpunkte A eines Durchmessers AB eines Kreises soll in letzteren eine Sehne AY gezogen werden, welche einen zu jenem Durchmesser senkrechten Radius in X so schneidet, dafs $AX - XY$ gleich einer gegebenen Strecke d ist.

$\sphericalangle BAY = \varphi$; $2r\cos\varphi^2 + d\cos\varphi = 2r$; $\cos\varphi = \dfrac{1}{4r}\left(\sqrt{d^2 + 16r^2} - d\right)$.

95) Unter derselben Voraussetzung, wie in 94), soll $AX^2 + XY^2 = p^2$ sein.

$$4r^2\cos\varphi^4 - (p^2 + 4r^2)\cos\varphi^2 + 2r^2 = 0.$$

In einem Kreise C sei ein Durchmesser AB gegeben, und durch A sei die Tangente an den Kreis gelegt. Man soll auf dem Kreise einen Punkt X bestimmen, so dafs, wenn man von ihm die Senkrechte XY auf die Tangente fällt und BX zieht, eine der folgenden Bedingungen 96)—98) erfüllt sei.

$$(\sphericalangle\, ABX = \varphi).$$

96) $BX = XY$;

$$(\cos\varphi^2 + \cos\varphi = 1).$$

97) $BX + XY = a$;

$$\left(\cos\varphi^2 - \cos\varphi = \frac{2r - a}{2r}\right).$$

98) $BX - XY = d$;

(Analog 97).

---

§ 3.

Aufgaben mit zusammengesetzten Winkeln.

1. Statt des zunächst gesuchten Winkels φ kann auch durch die Gleichung ein von demselben abhängiger Winkel, wie $\frac{1}{2}\varphi$, $\varphi \pm \alpha$, wenn α ein gegebener Winkel ist, u. dgl. m. berechnet werden, dessen Konstruktion weiterhin in leicht ersichtlicher Weise zu derjenigen des Winkels φ selbst führt.

Wird z. B. die im vorigen § zur Erläuterung benutzte *Aufgabe* dahin abgeändert, *dafs die Abstände der durch einen gegebenen Punkt P gelegten zu einander senkrechten Sehnen eines Kreises vom Mittelpunkte M eine gegebene Summe s haben sollen,* so hat man bei gleicher Bezeichnung wie vorher, und wenn $MP = a$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} s &= a\sin\varphi + a\cos\varphi = a\,[\sin\varphi + \sin(90^0 - \varphi)] \\ &= 2a\sin 45^0\cos(\varphi - 45^0) = a\sqrt{2}\cos(\varphi - 45^0), \end{aligned}$$

also $\cos(\varphi - 45^0) = \dfrac{s}{a\sqrt{2}} = \dfrac{s\sqrt{2}}{2a}$.

Beschreibt man hiernach über einer Strecke $AB = s$ als Durchmesser einen Halbkreis, halbiert AB in C, zieht den zu AB senkrechten Radius CD und durch A und D die Gerade, beschreibt um B mit MP als Radius einen Kreisbogen, der die Verlängerung von AD in E schneide, und zieht BE, so ist $\sphericalangle ABE = \varphi$, denn es ist $BD = AD = \frac{1}{2} s\sqrt{2}$, $\cos DBE = BD : BE = \frac{1}{2} s\sqrt{2} : a$, also $\sphericalangle DBE = \varphi - 45^0$, mithin $ABE = \varphi$.

2. Es können ferner statt eines unbekannten Winkels zwei oder mehr solche in die Rechnung eingeführt werden. Insbesondere empfiehlt es sich häufig zu der bekannten Summe zweier unbekannten Winkel die Differenz der letzteren zu berechnen, um dann die Winkel selbst in bekannter Weise aus der Summe und der Differenz zu konstruieren.

Es sei z. B. die *Aufgabe* gestellt, *ein Dreieck aus einer Seite c, dem ihr gegenüberliegenden Winkel γ und dem Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises zu konstruieren,* so hat man für die beiden unbekannten Winkel α, β des gesuchten Dreiecks die Gleichungen

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma,$$

$$c = \varrho\left(\cot \tfrac{1}{2}\alpha + \cot \tfrac{1}{2}\beta\right).$$

Aus der letzteren folgt

$$c = \varrho\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + \frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\right) = \frac{\varrho \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta},$$

$$2c \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta = 2\varrho\cos\tfrac{1}{2}\gamma;$$

$$c\left[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right] = 2\varrho\cos\tfrac{1}{2}\gamma;$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{2\varrho\cos\frac{1}{2}\gamma + c\sin\frac{1}{2}\gamma}{c}.$$

Konstruiert man nun zunächst einen Winkel $C = \gamma$ und in denselben mit dem Radius ϱ den beide Schenkel berührenden Kreis O, so ist die Berührungssehne DE desselben gleich $2\varrho\cos\frac{1}{2}\gamma$. Trägt man nun auf CD die Strecke $CF = c$ ab, beschreibt über CF als Durchmesser den Halbkreis, welcher die Halbierungslinie des Winkels C in G schneide, zieht FG, verlängert FG um $GH = DE$, beschreibt um F mit FH den Kreis, welcher den Halbkreis in K schneide, und zieht FK, so ist $\sphericalangle CFK = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, und da $\sphericalangle CFG = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ist, so ist $\sphericalangle KFH = \beta$, u. s. w.

Aufgaben zu § 3.

1) Auf einer Geraden MN sei ein Punkt A gegeben; man soll von letzterem aus eine Strecke AX von gegebener Länge a

so ziehen, dafs, wenn man von ihrem Endpunkte X aus die Senkrechte XY auf MN fällt, $XY \cdot AY$ gleich einem gegebenen Quadrate b^2 sei.

$$\sin 2\varphi = 2b^2 : a^2.$$

2) Auf dem Bogen AB eines Quadranten ACB einen Punkt P zu bestimmen, so dafs die Inhalte der Dreiecke APB und PCB in einem gegebenen Verhältnis $m : n$ zu einander stehen.

$$\sphericalangle PCB = \varphi, \ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = (n - m) : n.$$

3) Innerhalb eines Kreises K sei ein Punkt A gegeben; man soll die Punkte P und Q auf dem Kreise so bestimmen, dafs $\sphericalangle PAQ = 90^0$ und $AP = 2AQ$ ist.

$$\sphericalangle PAK = \varphi, \ AK = a; \ 20a^2 \cdot \sin 2\varphi = 25a^2 - 9r^2.$$

4) Um jeden der Eckpunkte A, B eines gleichseitigen Dreiecks ABC sei über der gegenüberliegenden Seite als Sehne ein Kreisbogen beschrieben. Man soll zwischen diesen Kreisbogen eine Gerade XU parallel zu AB ziehen, welche AC in Y, BC in Z schneide, so dafs YZ gleich $\frac{1}{2}XU$ werde.

$$\sphericalangle XBC = \varphi; \ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{9}\sqrt{3} = \frac{2h}{9a} = \frac{a}{6h}.$$

5) Zu einem gegebenen Durchmesser AB eines Kreises soll eine parallele Sehne XY gezogen werden, so dafs das Trapez $ABYX$ doppelt so grofs ist als das Quadrat über seiner Höhe.

$$\sphericalangle AMX = \varphi, \ \cot \tfrac{1}{2}\varphi = 2.$$

6) In einem Kreise seien zwei zu einander senkrechte Radien CA, CB gegeben; man soll eine Sehne AX ziehen, welche CB in Y so schneidet, dafs das Dreieck CAY gleich dem Quadrate über XY wird.

$$\sphericalangle CAX = \varphi, \ 8 \cdot \sin 2\varphi = \sqrt{65} - 1.$$

7) Von einem zu bestimmenden Punkte des einen von zwei Kreisen, die einander von aufsen berühren, soll eine Tangente an den anderen gelegt werden, welche gleich der Projektion des zu jenem Punkte gehörigen Radius auf die Centrallinie ist.

$\sin \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3R+r}{R}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R+r}{R}}$. ($\varphi$ der Winkel zwischen dem Radius und der Projektion.)

8) Ein Trapez, in welches sich ein Kreis beschreiben läfst, zu konstruieren, wenn die beiden parallelen Seiten a, c und ein

an der gröfseren a dieser Seiten liegender Winkel α desselben gegeben ist.

Ist β der andere Winkel an a, so ist $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = c \cdot \cot \frac{1}{2} \alpha : a$.

Innerhalb eines gegebenen spitzen Winkels soll vom Scheitel A aus eine Strecke AP von gegebener Länge a so gezogen werden, dafs, wenn man die Senkrechten PM, PN auf die Schenkel jenes Winkels fällt, und b eine gegebene Strecke bedeutet,

9) $PM \cdot PN = b^2$ ist.

$\sphericalangle\, PAM = \varphi$, $PAN = \psi$, $MAN = \alpha$; $\varphi + \psi = \alpha$, $\cos(\varphi - \psi)$
$$= \frac{2b^2}{a^2} + \cos\alpha \text{ od. } \cos(2\varphi - \alpha) = \frac{2b^2}{a^2} + \cos\alpha.$$

10) $PM^2 - PN^2 = b^2$ ist.
$$\varphi + \psi = \alpha; \ \sin(\varphi - \psi) = \frac{b^2}{a^2 \sin\alpha} = \sin(2\varphi - \alpha).$$

11) der Inhalt des Vierecks $ANPM$ gleich b^2 ist.
$$\cos(\varphi - \psi) = \cos(2\varphi - \alpha) = \frac{2b^2}{a^2 \sin\alpha}.$$

12) das Viereck $ANPM$ halb so grofs als das Rechteck aus AM und AN ist.
$$\cos(\varphi - \psi) = \cos(2\varphi - \alpha) = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha - 1}; \ (a \text{ unbestimmt}).$$

13) das Viereck $ANPM$ doppelt so grofs als das Rechteck aus PM und PN ist.
$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{2\cos\alpha}{2 - \sin\alpha}; \ (a \text{ unbestimmt}).$$

14) das Dreieck AMN doppelt so grofs als PMN ist.
$$\cos(\varphi - \psi) = 3\cos\alpha; \ (a \text{ unbestimmt}).$$

15) das Dreieck AMN sich zu PMN wie $m : n$ verhält.
$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{m + n}{m - n} \cos\alpha.$$

16) das Dreieck PMN gleich b^2 ist.
$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{4b^2}{a^2 \sin\alpha} + \cos\alpha.$$

17) das Dreieck AMN gleich dem Rechteck aus PM und PN ist.
$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{2 + \sin\alpha}{2 - \sin\alpha} \cos\alpha.$$

18) Innerhalb eines gegebenen Winkels vom Scheitel A aus eine Gerade so zu ziehen, dafs, wenn zwischen die Schenkel des Winkels eine andere Gerade XY von gegebener Länge c so eingetragen wird, dafs sie zu der ersteren (in P) senkrecht steht, die Differenz der Abschnitte $XP - PY$ gleich einer gegebenen Strecke d sei.

$$\sphericalangle A = \alpha,\ PAY = \varphi,\ XAP = \psi;\ \sin(\alpha - 2\varphi) = \sin(\psi - \varphi) = d \sin\alpha : c.$$

19) Innerhalb eines gegebenen Winkels vom Scheitel A aus eine Gerade AP von gegebener Länge a zu ziehen, so dafs, wenn die in P auf AP errichtete Senkrechte die Schenkel des Winkels bezüglich in M und N schneidet, $PM \cdot PN = b^2$ ist.

$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \cos\alpha.$$

---

20) Durch den Berührungspunkt A einer Tangente eines Kreises sei eine Sehne $AB = a$ gelegt; man soll eine zweite Sehne BY ziehen, deren Verlängerung über Y die Tangente in X schneidet, so dafs $\triangle ABY = b^2$ ist.

$$\sphericalangle ABY = \varphi;\ \sin\vartheta = \frac{a}{2r};\ \cos(2\varphi + \vartheta) = \cos\vartheta - \frac{2b^2}{ar}.$$

21) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 20), soll $\triangle ABY = AYX$ werden.

$$\cos 2\varphi = \cos\vartheta^2 = \frac{4r^2 - a^2}{4r^2}.$$

---

22) In einem Kreise mit dem Mittelpunkte C seien zwei einander unter dem Winkel α schneidende Durchmesser AB, DE gegeben; man soll eine Sehne EX ziehen, welche CB in Y so schneide, dafs die Dreiecke DXY und ECY inhaltsgleich werden.

$$\sphericalangle DEX = \varphi;\ \sin(\alpha + 2\varphi) = \tfrac{1}{2}\sin\alpha.$$

23) In einem bei C rechtwinkeligen Dreieck ABC eine Transversale AX nach BC so zu ziehen, dafs $AX^2 = AC \cdot BX$ wird.

$$\sphericalangle CAX = \varphi;\ \sin(\alpha - 2\varphi) = 2\cos\alpha - \sin\alpha.$$

24) Ein Winkel A sei in zwei Teile α, β geteilt; auf dem einen Schenkel desselben (der zugleich Schenkel des Teiles α ist) sei eine

Strecke AB abgetragen. Man soll durch B eine Gerade ziehen, welche den anderen Schenkel in Y und die Teilungslinie in X schneidet, so dafs AX das geometrische Mittel zwischen BX und XY ist.

$\sphericalangle ABY = \varphi$; $\cos(\alpha + \beta + 2\varphi) = 2\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$; AB beliebig.

25) Auf einer Geraden MN sei ein Punkt A gegeben; man soll von letzterem aus eine Strecke $AX = a$ so ziehen, dafs, wenn man von X aus XY unter gegebenem Winkel $XYA = \alpha$ gegen MN zieht und b eine gegebene Strecke bedeutet, $AY \cdot XY = b^2$ sei.

$$\cos(\alpha + 2\varphi) = \cos\alpha - \frac{2b^2 \sin\alpha^2}{a^2}.$$

Durch einen auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt M gegebenen Punkt P die Sehnen PX, PY zu ziehen, welche mit einander einen den Mittelpunkt einschliefsenden Winkel gleich α bilden, so dafs, wenn a eine gegebene Strecke bedeutet, eine der folgenden Bedingungen 26)—31) erfüllt ist.

26) $PX + PY = 2a$.

$\sphericalangle MPX = \varphi$, $MPY = \psi$; $\cos\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \cos(\varphi - \frac{1}{2}\alpha) = \dfrac{a}{2r\cos\frac{1}{2}\alpha}$.

27) $PX - PY = 2a$.

$$\sin\tfrac{1}{2}(\psi - \varphi) = \sin(\tfrac{1}{2}\alpha - \varphi) = \frac{a}{2r\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

28) $PX \cdot PY = a^2$.

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos(2\varphi - \alpha) = \frac{a^2}{2r^2} - \cos\alpha.$$

29) $PX^2 - PY^2 = a^2$.

$$\sin(\psi - \varphi) = \sin(\alpha - 2\varphi) = \frac{a^2}{4r^2\sin\alpha}.$$

30) $PX^2 + PY^2 = a^2$.

$$\cos(\alpha - 2\varphi) = \frac{a^2 - 4r^2}{4r^2\cos\alpha}.$$

31) $PX + PY + XY = a$.

$$2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{a}{2r\cos\frac{1}{2}\alpha} - 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt zwei zu einander senkrechte Sehnen zu ziehen, welche

32) eine gegebene Summe $2b$, oder

33) eine gegebene Differenz $2b$ haben.

Zu 32) u. 33): $a^4 \cos 2\varphi^2 = b^2 (4r^2 - 2a^2 - b^2)$.

34) eine gegebene Differenz ihrer Quadrate haben.

$$\cos 2\varphi = \tfrac{1}{4} b^2 : a^2.$$

35) ein gegebenes Produkt haben.

$$a^4 \sin 2\varphi^2 = b^4 - 4r^2 (r^2 - a^2).$$

---

36) Durch einen gegebenen Punkt in einen gegebenen Kreis zwei zu einander senkrechte Sehnen so zu ziehen, dafs ihre Abstände vom Mittelpunkte eine gegebene Differenz haben.

$$\sin(\varphi - 45^0) = \frac{d\sqrt{2}}{2a}.$$

37) Ein Quadrat zu zeichnen, welches innerhalb eines gegebenen Quadrats so liegt, dafs man jeden Eckpunkt des ersteren mit je einem Eckpunkt des letzteren so verbinden kann, dafs die Verbindungslinien mit je einer Seite des letzteren gleiche Winkel bilden, und dafs dieselben, ebenso wie die Seiten des neuen Quadrats, halb so lang sind als die Seiten des gegebenen.

Bestimme den genannten Winkel. $\cos(45^0 - \varphi) = \frac{5}{8}\sqrt{2}$.

---

38) Durch einen in einem Kreise gegebenen Punkt zwei Sehnen zu ziehen, welche mit einander einen gegebenen Winkel α bilden, so dafs die Summe ihrer Abstände vom Mittelpunkte gleich einer gegebenen Strecke s ist.

$$\cos(\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{s}{2a \sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

39) Ebenso wie 38), nur soll die Differenz der Abstände gleich einer gegebenen Strecke d sein.

$$\sin(\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{d}{2a \cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

40) Auf dem kleineren der zu einer gegebenen Sehne AB gehörigen Kreisbogen den Punkt X so zu bestimmen, dafs $AX \cdot BX$ gleich einem gegebenen Quadrate b^2 wird.

$\sphericalangle BAX = \varphi$, $AB = a = 2r \sin \alpha$; $\cos(2\varphi - \alpha) = \dfrac{b^2}{2r^2} + \cos \alpha$.

41) Ebenso dafs, wenn durch X der Durchmesser XY ge-

zogen wird, die Flächeninhalte der Dreiecke AXB, AYB sich zu einander wie $m:n$ verhalten.

$$\cos(2\varphi - \alpha) = \frac{n+m}{n-m}\cos\alpha.$$

42) Ebenso dafs, wenn C der Mittelpunkt ist, $\triangle AXB : ACB = m:n$ ist.

$$\cos(2\varphi - \alpha) = \frac{m+n}{n}\cos\alpha.$$

43) Auf der Höhe CD eines Dreiecks ABC ist ein Punkt P gegeben; durch denselben soll eine Transversale gelegt werden, welche BC in X, AC in Y schneide, so dafs das Viereck $CYDX$ ein Sehnenviereck wird.

$$CP = e,\ PD = f,\ \alpha - \beta = \delta,\ \sphericalangle\, CPY = \varphi;\ \cos(2\varphi - \delta) = \frac{h\cos\gamma - e\cos\delta}{f}.$$

44) Es sei ein Dreieck ABC mit dem ihm umbeschriebenen Kreis und der Höhe CD gegeben, deren Verlängerung den Kreis in E schneide. Man soll eine Sehne EZ dieses Kreises ziehen, welche BD in X so schneide, dafs $XE = CZ$ werde.

$$\sphericalangle\, CEZ = \varphi;\ \sin 2\varphi = 2\cos\alpha\cos\beta = DE : r.$$

45) Es sei ein Dreieck ABC mit dem ihm umbeschriebenen Kreis und dem Durchmesser AE dieses Kreises gegeben; man soll eine Sehne EZ des letzteren ziehen, welche CB in X und AB in Y so schneide, dafs $XY = YZ$ wird.

$$\sphericalangle\, AEZ = \varphi;\ \sin(\beta - \gamma + 2\varphi) = \sin\alpha + 2\sin(\beta - \gamma).$$

Auf einem gegebenen Kreisbogen AB einen Punkt P zu bestimmen, so dafs, wenn PP_1, PP_2 bezüglich senkrecht zu den Radien CA, CB gezogen werden, und P_1P_2 von CP in Q geschnitten wird,

46) $P_1P_2^{\,2} = PP_1 \cdot PP_2$ ist.

$$\sphericalangle\, ACB = \alpha,\ ACP = \varphi;\ \cos(2\varphi - \alpha) = 2\sin\alpha^2 + \cos\alpha.$$

47) $P_1Q - P_2Q = d$ ist.

$$\operatorname{tg}(2\varphi - \alpha) = \frac{d}{r\cos\alpha}.$$

48) $PP_1 - PP_2 = d$ ist.

$$\sin(\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{d}{2r\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

49) Im Dreieck ABC die Transversale CX nach AB so zu ziehen, dafs $CX = \frac{1}{2}(AX + AC)$ wird.

$$\sphericalangle\, BCX = \varphi;\ \cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma + 2\varphi) = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

50) Ein Dreieck ABC aus dem Umfang $2s$, der Höhe h auf AB und dem Radius ϱ_c des der Seite AB anbeschriebenen äufseren Berührungskreises zu konstruieren.

$$\varrho_c : s = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma;\ \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = (h \cos \tfrac{1}{2}\gamma + s \sin \tfrac{1}{2}\gamma) : s.$$

Ein Dreieck zu konstruieren aus

51) $h_a + h_c = s,\ b,\ \beta;$

$$\left(\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{s}{2b \cos \tfrac{1}{2}\beta}\right).$$

52) $h_c - h_a = d,\ b,\ \beta;$

$$\left(\sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{d}{2b \sin \tfrac{1}{2}\beta}\right).$$

53) $h_c - h_a = d,\ a + c = s,\ \beta;$

$$(a - c = d : \sin\beta;\ \cot \tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 2s \sin \tfrac{1}{2}\beta^2 : d).$$

54) $b + c = s,\ r,\ \alpha;$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{s}{4r \cos \tfrac{1}{2}\alpha}\Big).$$

55) $a + b = s,\ c,\ h_c;$

$$(\cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s^2 - c^2}{2ch_c};\ \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{s}{c} \sin \tfrac{1}{2}\gamma).$$

56) $a + b + c = 2s,\ h_c,\ \gamma;$

$$(\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{h}{s} \cos \tfrac{1}{2}\gamma + \sin \tfrac{1}{2}\gamma).$$

57) $h_c,\ r,\ \gamma;$

$$(\cos(\alpha - \beta) = \frac{h}{r} - \cos\gamma).$$

58) $a,\ b + c = s,\ \varrho;$

$$\left(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2\varrho}{s - a};\ \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{s \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha}{a}\right).$$

59) $b + c = s,\ \varrho,\ \alpha;$

(vgl. 58).

60) $\varrho,\ h_c,\ \gamma;$

$$(\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = (h - \varrho) \sin \tfrac{1}{2}\gamma : \varrho).$$

61) $\varrho,\ a,\ \alpha;$

$$(\cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{2\varrho}{a} \cos \tfrac{1}{2}\alpha + \sin \tfrac{1}{2}\alpha).$$

62) $\varrho,\ r,\ a;$

$$\left(\sin\alpha = \frac{a}{2r};\ \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{a + 2\varrho \cot \tfrac{1}{2}\alpha}{4r \cos \tfrac{1}{2}\alpha}\right).$$

63) $\varrho,\ \varrho_a,\ a;$

$$(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = (\varrho_a - \varrho) : a;\ \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = (\varrho_a + \varrho) \cos \tfrac{1}{2}\alpha : a).$$

64) c, $a:b = m:n$ und der den Winkel γ halbierenden Transversale w.

$$\left(\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = \frac{w(n^2 - m^2)}{2cmn};\ \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{n + m}{n - m} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\right).$$

65) w, h_c, γ;

$$(\cos \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = h : w).$$

Durch die Spitze C eines Dreiecks eine die Grundlinie nicht schneidende Gerade zu ziehen, so dafs, wenn AA_1, BB_1 bezügl. die von den anderen Eckpunkten A, B des Dreiecks auf diese Gerade gefällten Senkrechten sind,

66) $CA_1 \cdot CB_1$ gleich einem gegebenen Rechteck $p \cdot q$ sei.

$$\sphericalangle CAA_1 = \varphi;\ \cos(\gamma + 2\varphi) = \cos\gamma - \frac{2pq}{ab}.$$

67) $AA_1 \cdot BB_1 = p \cdot q$ sei.

$$\cos(\gamma + 2\varphi) = \frac{2pq}{ab} - \cos\gamma.$$

68) In einem Dreieck ABC eine Transversale zu ziehen, welche AC in X, BC in Y schneide, so dafs $AX = XY = YB$ ist.

$$\sphericalangle BAY = \varphi;\ \sin(2\varphi - \alpha) = \sin\beta - \sin\alpha.$$

69) In einem Dreieck ABC eine Transversale von gegebener Länge d zu ziehen, welche AC in X, BC in Y schneide, so dafs $\sphericalangle XYA = CBA$ und $BY = AX$ ist.

$$\sphericalangle BAY = \varphi;\ \cos(2\varphi + \gamma) = \cos\gamma - 2\sin\beta^2.$$

---

§ 4.

Konstruktion von Winkeln durch schiefwinkelige Dreiecke.

1. Die Konstruktion eines gesuchten Winkels geschieht zuweilen vorteilhaft, statt durch unmittelbare Anwendung rechtwinkeliger Dreiecke, durch solche von schiefwinkeligen Dreiecken oder anderen Figuren, wie nachstehendes Beispiel zeigt:

Aufgabe: Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, von dem zwei Eckpunkte auf gegebenen parallelen Linien liegen und der dritte ein zwischen letzteren gegebener Punkt ist.

Analysis: Es seien L_1, L_2 die gegebenen parallelen Geraden und X auf L_1, Z auf L_2, P zwischen L_1 und L_2 die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks; ferner sei durch P die Senkrechte AB zu den zwei Parallelen gezogen, und die Maſszahlen der betreffenden Abschnitte $AP = a$, $BP = b$ seien als gegebene Gröſsen betrachtet. Die Lage von PX und damit dann auch das gesuchte Dreieck selbst wird bestimmt sein, wenn der Winkel $APX = \varphi$ bekannt ist. Setzt man nun $XP = PZ = x$, so ist

$$a = x \cos\varphi,\; b = x \cos(180^0 - \varphi - 60^0) = x \cos(120^0 - \varphi),$$

also

$$b : a = \cos(120^0 - \varphi) : \cos\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\frac{b}{a} = \frac{\cos 120^0 \cos\varphi + \sin 120^0 \sin\varphi}{\cos\varphi} = \cos 120^0 + \sin 120^0 \cdot \operatorname{tang}\varphi,$$

also

$$\operatorname{tang}\varphi = \left(\frac{b}{a} - \cos 120^0\right) : \sin 120^0 \text{ oder } \cot\varphi = \frac{a \cdot \sin 120^0}{b - a \cdot \cos 120^0}.$$

Die Vergleichung dieses Resultats mit einer bekannten Formel der Trigonometrie zeigt, daſs $90^0 - \varphi$ gleich einem Winkel eines Dreiecks ist, in welchem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bezüglich gleich a, b, 120^0 sind, und führt somit zu folgender

Konstruktion: Vom Punkte P fälle man auf die Parallelen die Senkrechte, welche L_1 in A, L_2 in B schneide; darauf konstruiere man über AP als Seite ein gleichseitiges Dreieck APC, verbinde C mit B, fälle auf CB die Senkrechte PD, verlängere dieselbe über P, bis sie L_1 in X schneidet, lege an XP in P eine Gerade unter einem Winkel $XPZ = 60^0$ an und verbinde den Durchschnittspunkt Z dieser Geraden und der Linie L_2 mit X. Das Dreieck XPZ ist das verlangte.

Beweis: Behält man die in der Analysis gebrauchten Bezeichnungen für AP, PB, XP und den Winkel APX bei, so ist

$$PZ \cdot \cos(180^0 - \varphi - 60^0) = b, \text{ also } PZ = b : \cos(120^0 - \varphi).$$

Nun ist

$$\sphericalangle PBC = 90^0 - DPB = 90^0 - \varphi,\; \operatorname{tg} PBC = \frac{a \sin 120^0}{b - a \cos 120^0},$$

also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b - a \cos 120^0}{a \sin 120^0}.$$

Ferner ist

$$x \cos\varphi = a, \text{ also } \cos\varphi = \frac{a}{x} \text{ und } \sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$= \frac{b - a\cos 120^0}{x \sin 120^0}; \cos(120^0 - \varphi) = \cos 120^0 \cos\varphi + \sin 120^0 \sin\varphi$$

$$= \cos 120^0 \cdot \frac{a}{x} + \frac{b - a\cos 120^0}{x} = \frac{b}{x},$$

also endlich

$$PZ = b : \frac{b}{x} = x.$$

Mithin ist das Dreieck XPZ gleichschenkelig, und da der Winkel ZPX desselben gleich 60^0 ist, so ist es gleichseitig.

Diskussion: Das Dreieck XPZ läſst sich auch auf der anderen Seite von AB konstruieren, erhält aber dabei dieselbe Gröſse, wie vorher. Die Konstruktion ist stets ausführbar. Ist P von den beiden Parallelen gleichweit entfernt, so wird $\varphi = 60^0$, und die Konstruktion vereinfacht sich hiernach erheblich.

2. In ähnlicher Weise kann man die Ausdrücke

$$\sin x = \frac{a \sin\beta}{b}, \quad \sin y = \frac{a\cos\beta}{b}, \quad \cos z = \frac{a\cos\beta}{b},$$

wie folgt konstruieren: In einem Dreieck ABC mit den Seiten $BC = a$, $AC = b$ und dem Winkel $B = \beta$ ist der Winkel A gleich x. Konstruiert man das Dreieck statt mit dem Winkel β mit $B = 90^0 - \beta$, so ist $\sphericalangle A = y$ und z gleich dem Komplement von A.

Konstruiert man ferner ein Dreieck ABC aus den Abschnitten $BD = p$, $AD = q$, welche die Höhe auf AB bestimmt, und dem Winkel $B = \beta$ oder dem Winkel $A = \alpha$, so ergiebt sich, daſs zur Konstruktion von

$$\operatorname{tg} x = \frac{p \cdot \operatorname{tg}\beta}{q}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{p}{q \cdot \operatorname{tg}\alpha}, \quad \cot z = \frac{p \cdot \operatorname{tg}\beta}{q}, \quad \cot u = \frac{p \cdot \cot\alpha}{q},$$

$$\sphericalangle A = x, \; BCD = y, \; ACD = z, \; B = u \text{ ist.}$$

Wie konstruiert man entsprechend

$$1) \quad \cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \cos y = \frac{a^2 + b^2}{2ac}, \quad \cos z = \frac{a^2 - b^2}{2ac}?$$

Die Konstruktion von y und z wird auf die von x mittelst der Substitution $b^2 = c^2 - d^2$, bezw. $b^2 = d^2 - c^2$ zurückgeführt.

2) $\sin x = \sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos y = \sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos z = \cos\alpha \pm \cos\beta$.

Konstruiert man um ein Dreieck ABC mit den Winkeln α, β den umbeschriebenen Kreis, so sind die zur Sehne $a \pm b$ gehörigen Peripheriewinkel des letzteren gleich x und der kleinere derselben ist gleich $90^0 - y$. z erhält man in entsprechender Weise, wenn man die Winkel z, α, β durch ihre Komplemente ersetzt.

Aufgaben zu § 4.

1) Durch den Eckpunkt C eines gegebenen Dreiecks soll innerhalb des letzteren eine Gerade so gezogen werden, dafs, wenn man auf dieselbe die Senkrechten AA_1, BB_1 fällt, $AA_1 : BB_1$ gleich einem gegebenen Verhältnis $m : n$ ist.

$$\sphericalangle ACA_1 = \varphi;\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{a \cdot \sin(180^0 - \gamma)}{\frac{n}{m} b - a\cos(180^0 - \gamma)}.$$

2) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 1), soll $CA_1 : CB_1 = m : n$ sein.

$\operatorname{tg} A_1AC$ analog $\operatorname{tg}\varphi$ in 1).

3) Durch einen gegebenen Punkt P eines Kreises in letzteren zwei Sehnen PX, PY zu ziehen, welche mit einander den Winkel α bilden, so dafs $PX : PY = m : n$ ist.

$$\sphericalangle KPY = \psi;\ \operatorname{tg}(90^0 - \varphi) = n\sin\alpha : (m - n\cos\alpha).$$

Auf einer Geraden sei ein Punkt A gegeben. Man soll eine Strecke $AX = a$ so ziehen, dafs, wenn XY unter gegebenem Winkel $XYA = \alpha$ gegen jene Gerade gezogen wird,

4) $AY : XY = m : n$ ist.

$\operatorname{tg}\varphi$ entsprechend wie $\operatorname{tg}(90^0 - \varphi)$ bei 3) oder $\sin\psi : \sin\varphi = m : n$, $\varphi + \psi = 180^0 - \alpha$.

5) $AY + XY = b$ ist.

$$\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha) : \sin\tfrac{1}{2}\alpha = b : a.$$

6) $AY - XY = b$ ist.

$$\cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha) : \cos\tfrac{1}{2}\alpha = b : a.$$

7) Im Dreieck ABC die Transversale CX nach einem Punkte von AB so zu ziehen, dafs $CX : BX = AB : AC$ wird.

$$\sphericalangle BCX = \varphi;\ \sin\varphi : \sin\beta = b : c.$$

8) Auf der Hypotenuse AB eines rechtwinkeligen Dreiecks ABC einen Punkt X so zu bestimmen, dafs $CX^2 = AX^2 - BX^2$ ist.

$$\sphericalangle\, BCX = \varphi;\ \sin\varphi : \sin\beta = b : c.$$

9) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a : b = m : n$, c, r.

$$\sin\gamma = \frac{c}{2r};\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{m-n}{m+n}\cot\tfrac{1}{2}\gamma.$$

10) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a : b = m : n, c, \alpha - \beta = \delta$.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{m-n}{m+n}\cot\tfrac{1}{2}\delta.$$

11) Auf dem Bogen AB eines Kreissektors ACB soll ein Punkt X bestimmt werden, so dafs die Verbindungslinie der Fufspunkte der von X auf die begrenzenden Radien gefällten Senkrechten durch CX in einem gegebenen Verhältnis $m : n$ geteilt werde.

$$\sphericalangle\, ACX = \varphi;\ \operatorname{tg} 2\varphi = m \cdot \sin 2\alpha : (n + m \cdot \cos 2\alpha).$$

12) Innerhalb eines gegebenen spitzen Winkels soll vom Scheitel A aus eine Strecke AP von gegebener Länge a so gezogen werden, dafs, wenn man die Senkrechten PM, PN auf die Schenkel jenes Winkels fällt, $\triangle\, APM : APN = m : n$ ist.

$$\sphericalangle\, PAM = \varphi,\ MAN = \alpha;\ \operatorname{tg} 2\varphi \text{ wie in 11)}.$$

Anmerkung: Hierher läfst sich auch ein Teil der Aufgaben des § 3. ziehen, z. B. die Nummern 55), 58)—60), 63) u. a. m.

---

§ 5.

Konstruktion von Winkeln aus unentwickelten Gleichungen.

1. Ein den vorigen ähnlicher Fall findet statt, wenn für zwei gesuchte Winkel Gleichungen von der Form

$$\varphi + \psi = \sigma;\ \sin\varphi : \sin\psi = m : n$$

gefunden werden. Man sieht dann unmittelbar ein, dafs φ und ψ bezüglich gleich zwei Winkeln eines Dreiecks sind, in welchen der dritte Winkel gleich $180^0 - \sigma$ ist (für $\sigma < 2R$) und die jenen Winkeln gegenüberliegenden Seiten sich zu einander verhalten wie $m : n$. Man konstruiert also die gesuchten Winkel unmittelbar, indem man zwei beliebige Strecken a, b so bestimmt, dafs $a : b = m : n$ ist, und aus ihnen als Seiten und dem eingeschlossenen Winkel gleich $180^0 - \sigma$ ein Dreieck konstruiert. Der Winkel dieses Dreiecks, welcher der Seite a gegenüberliegt, ist dann gleich φ, der der Seite b gegenüberliegende gleich ψ. Der Beweis ergiebt sich leicht mit Hilfe des Sinussatzes.

Ist $\sigma > 2R$, so benutze man die Supplemente von φ und ψ.

Das vorstehende Beispiel ergänzt zugleich als solches die frühere Besprechung des Falles, dafs mehr als *ein* unbekannter Winkel gesucht wird. Aufserdem zeigt dafselbe, dafs es nicht immer erforderlich ist, die für unbekannte Winkel gefundenen Gleichungen auf je eine Funktion der ersteren aufzulösen, indem man zuweilen die Konstruktion der Winkel auch aus *unentwickelten Gleichungen* abzuleiten vermag. Dieser letztere Fall soll im folgenden noch näher besprochen werden; hier sei in dieser Beziehung noch bemerkt, dafs man die obigen Gleichungen, die man auch in der Form

$$\varphi + \psi = \sigma; \quad a \sin \varphi = b \sin \psi$$

gegeben voraussetzen darf, beispielsweise noch durch folgende Konstruktionen auflösen kann, so dafs man bei jeder einzelnen bezüglichen Aufgabe die für letztere vorteilhafteste auszuwählen imstande ist:

α) Konstruiere ein Dreieck ABC, in welchem $CB = a$, $CA = b$ und $\sphericalangle C = \sigma$ ist, und ziehe in ihm die Mittellinie CD, dann ist $\sphericalangle BCD = \varphi$, $ACD = \psi$.

β) Zeichne $AD = b$, verlängere AD um $DB = a$, konstruiere über AB ein gleichschenkeliges Dreieck ACB, so dafs $\sphericalangle ACB = \sigma$, ziehe CD, so ist $\sphericalangle ACD = \varphi$, $BCD = \psi$.

Die Beweise der Richtigkeit dieser Konstruktionen können als Übungsaufgaben dienen.

2. Auf analoge Weise, wie die vorstehenden, können die folgenden Gleichungen durch Konstruktion aufgelöst werden:

$$a) \quad \varphi - \psi = \delta; \quad \sin \varphi : \sin \psi = a : b.$$

Führt man hier statt φ den Winkel $180^0 - \varphi$ ein, so wird die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt und kann demnach, wie folgt, gelöst werden:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $CB = a$, $CA = b$, $\sphericalangle C = \delta$, so ist der Nebenwinkel von A gleich φ und der Winkel $B = \psi$.

$$b) \quad \varphi \pm \psi = \delta; \quad \cos \varphi : \cos \psi = a : b.$$

Zweckmäfsiger als die Zurückführung dieser Aufgabe auf die unter 1. gelöste mittelst der Einführung der Komplemente von φ und ψ ist die folgende Konstruktion:

Zeichne ein Dreieck ABC aus $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle C = \delta$ und in demselben die Höhe CD. Dann ist $\sphericalangle ACD = \varphi$, $BCD = \psi$, und zwar ist, wenn CD die Grundlinie AB selbst trifft, $\varphi + \psi = \delta$, wenn aber CD die Verlängerung der Grundlinie trifft, $\varphi - \psi = \delta$.

$$c) \quad \varphi \pm \psi = \delta; \quad \operatorname{tg} \varphi : \operatorname{tg} \psi = p : q.$$

Konstruiere ein Dreieck ABC aus dem Winkel $C = \delta$ und den durch die Höhe auf AB gebildeten Abschnitten $AD = p$, $BD = q$, so ist $\sphericalangle ACD = \varphi$, $BCD = \psi$, und zwar, je nachdem D zwischen A und B oder auf der Verlängerung von AB liegt, $\varphi + \psi = \delta$ oder $\varphi - \psi = \delta$.

$$d) \quad \varphi \pm \psi = \delta; \quad \cot \varphi : \cot \psi = p : q.$$

Kann in entsprechender Weise, wie c) behandelt werden; $\sphericalangle CAD = \varphi$, $CBD = \psi$.

3. Eine dritte Gruppe häufig vorkommender Gleichungen ist

$$(1) \; a \cos \varphi + b \sin \varphi = c; \qquad (2) \; a \cos \varphi - b \sin \varphi = c;$$
$$(3) \; b \sin \varphi - a \cos \varphi = c,$$

deren Auflösung mittelst Rechnung ohnedies auf Weitläufigkeiten führen würde. Zur Auffindung der betreffenden unmittelbaren Konstruktionen führt folgender Gedankengang:

Konstruiert man ein rechtwinkeliges Dreieck ABC, dessen Katheten $BC = a$ und $AC = b$ sind, denkt man sich dann an BC in C den Winkel φ so angelegt, dafs sein freier Schenkel das Dreieck ABC nicht trifft, und fällt auf diesen Schenkel, bezw. seine Verlängerung die Senkrechten AA_1, BB_1, so ist $CB_1 = a \cos \varphi$, $CA_1 = b \sin \varphi$, also $A_1B_1 = a \cos \varphi + b \sin \varphi$, also für den Fall (1) $A_1B_1 = c$. Zieht man dann durch B die Parallele BX zu B_1A_1 bis zum Durchschnitt mit A_1A oder deren Verlängerung, so ist auch $BX = c$, X liegt auf dem über AB als Durchmesser beschriebenen Kreis, und $\sphericalangle CBX$ ist gleich φ. Legt man dagegen an CB in C den Winkel φ so an, dafs sein freier Schenkel den rechten Winkel BCA teilt, und fällt wieder die Senkrechten AA_1, BB_1 auf diesen Schenkel, so ist $CB_1 = a \cos \varphi$, $CA_1 = b \sin \varphi$, und im Falle (2), in welchem $a \cos \varphi > b \sin \varphi$, also $\operatorname{tg} \varphi < \frac{a}{b}$, d. h. für einen spitzen Winkel φ, $\varphi < BAC$ vorausgesetzt ist, $A_1B_1 = a \cos \varphi - b \sin \varphi$, dagegen im Falle (3), in welchem $b \sin \varphi > a \cos \varphi$, also $\operatorname{tg} \varphi > \frac{a}{b}$, bezw. $\varphi > BAC$ vorausgesetzt ist, $A_1 B_1 = b \sin \varphi - a \cos \varphi$. In beiden Fällen ist, wenn man wieder BX parallel zu $B_1 A_1$ bis nach AA_1 oder deren Verlängerung zieht, $BX = c$, X liegt auf dem über AB als Durchmesser beschriebenen Kreis, und es ist $\sphericalangle CBX$ im Falle (2) gleich φ, im Falle (3) gleich $180^0 - \varphi$. Hiernach ergiebt sich folgende Konstruktion:

Man zeichne in allen Fällen das Dreieck ABC, wie oben angegeben, beschreibe über AB als Durchmesser den Kreis, sowie um B mit c den Kreis, welcher den ersteren in X und X_1 schneide; X liege auf dem Halbkreis BCA, X_1 auf dem anderen Halbkreis. Fällt nun X zwischen A und C, so ist $\sphericalangle CBX$ gleich φ für den Fall (1), fällt dagegen X zwischen B und C, so ist $\sphericalangle CBX = \varphi$ für den Fall (2). Der Punkt X_1 liefert, wenn $\sphericalangle CBX_1 < 90^0$ wird, ebenfalls einen Wert von φ für (1) im Winkel CBX_1, ist aber $CBX_1 > 90^0$, so ist sein Nebenwinkel gleich φ für den Fall (3).

φ wird immer als spitzer Winkel vorausgesetzt werden dürfen, denn ist beispielsweise φ stumpf, so führt die Substitution $\varphi = 180^0 - \psi$ für ψ wieder auf einen der Fälle (1)—(3).

Als *Beispiel* diene die *Aufgabe: Ein Dreieck aus dem Umfang $a + b + c = 2s$, einem Winkel γ und der Differenz der Radien derjenigen äufseren Berührungskreise, welche den anliegenden Seiten anbeschrieben sind, $\varrho_a - \varrho_b = d$ zu konstruieren.*

Nach bekannten Lehrsätzen der Trigonometrie ist

$$\varrho_a = s \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha, \quad \varrho_b = s \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \beta,$$

also

$$\varrho_a - \varrho_b = s\left(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta\right) = s\left(\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} - \frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\beta}\right)$$

$$= s \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta} = \frac{2s \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

Setzt man $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \varphi$, so ergiebt sich hieraus

$$2s \cdot \sin \varphi - d \cos \varphi = d \sin \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Man konstruiere hiernach ein rechtwinkeliges Dreieck ACB aus den Katheten $AC = 2s$, $BC = d$, beschreibe über AB als Durchmesser nach aufsen, und ebenso über BC als Durchmesser nach aufsen einen Halbkreis, lege an BC in C innerhalb des letzteren Halbkreises einen Winkel $BCD = \frac{1}{2}\gamma$ an, ziehe BD, beschreibe mit BD um B einen Kreisbogen, der den anderen Halbkreis in X schneide, ziehe die Gerade durch X und B, welche den Halbkreis über BC in Y schneide, so ist der Winkel DBY gleich einem zweiten Winkel β des gesuchten Dreiecks, und daher die Aufgabe auf die bekannte zurückgeführt, ein Dreieck aus dem Umfange und den Winkeln zu konstruieren. Es ist nämlich nach der vorhergehenden Erklärung der Nebenwinkel YBC von CBX gleich $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, und da $\sphericalangle DBC = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$ ist, so folgt leicht, $\sphericalangle DBY = DBC - YBC = \beta$.

Die obige geometrische Auflösung der Gleichungen (1)—(3) entspricht der bekannten trigonometrischen mittelst eines Hilfswinkels und kann auch durch diese aufgefunden, bezw. begründet werden. Setzt man z. B. in jenen Gleichungen $a = n \sin \vartheta$, $b = n \cos \vartheta$, so ist $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{a}{b}$, $n^2 = a^2 + b^2$, welche Gröfsen mittelst des oben benutzten rechtwinkeligen Dreiecks konstruiert werden. Dann ist für (1) $\sin(\varphi + \vartheta)$, für (2) $\sin(\vartheta - \varphi)$, für (3) $\sin(\varphi - \vartheta)$ gleich $\frac{c}{n}$ bestimmt, u. s. w.

4. Es seien ferner die Gleichungen:

$$(1)\quad \varphi + \psi = \sigma,\ a \cos \varphi + b \cos \psi = s,$$

$$(2)\quad \varphi + \psi = \sigma,\ a \sin \varphi + b \sin \psi = s,$$

$$(3)\quad \varphi + \psi = \sigma,\ a \cos \varphi - b \cos \psi = s$$

durch Konstruktion aufzulösen.

Konstruiert man ein Dreieck ABC aus $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle C = 180^0 - \sigma$, beschreibt über AB als Durchmesser einen Halbkreis, trägt in diesen eine Sehne $BE = s$ ein und zieht $CF \parallel BE$, so teilt CF den Nebenwinkel ACG von BCA in die Winkel φ und ψ für die Gl. (1). (Zwei Lösungen!)

Ändert man diese Konstruktion dahin ab, dafs $\sphericalangle C = \sigma$ und $CF \parallel AE$ gezogen wird, so teilt CF den Winkel BCA entsprechend den Gleichungen (2), wenn $BE = s$, und entsprechend den Gleichungen (3), wenn $AE = s$ gemacht wird. Analoges gilt für $a \sin \varphi - b \sin \psi = s$. (Diskussion der Resultate im einzelnen Fall!)

5. Zur Auflösung von $\varphi + \psi = \sigma$, $a \cos \varphi \cos \psi = b$ zeichne man einen Winkel $BCA = \sigma$ mit den Schenkeln $CB = a$, $CA = b$, beschreibe über CB als Durchmesser den Kreis und errichte auf CA in A die Senkrechte, welche den Kreis in D schneide. Die Gerade CD teilt den Winkel BCA in $BCD = \varphi$, $DCA = \psi$.

Für $\varphi + \psi = \sigma$, $a \sin\varphi \sin\psi = b$ benutze man die Komplemente von φ und ψ und verfahre mit denselben entsprechend wie vorher.

Ähnlich verfahre man auch, wenn $a \sin\varphi \cos\psi = b$ sein soll.

Aufgaben zu § 5.

1) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite c, dem ihr gegenüberliegenden Winkel γ und der Summe $a + b = s$ der beiden anderen Seiten.

Die Mollweidesche Formel $(a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma = c \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ führt auf

$$\sin [90^0 - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)] : \sin \tfrac{1}{2}\gamma = (a + b) : c,$$

und die hierdurch angezeigte Konstruktion eines Hilfsdreiecks aus den Seiten $a + b$, c und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel $\frac{1}{2}\gamma$ auf eine mit der bekannten rein planimetrischen (nach der Methode der Hilfsfiguren) identische Konstruktion des gesuchten Dreiecks. — In entsprechender Weise behandele man die zunächst folgenden Aufgaben:

Ein Dreieck zu konstruieren aus

2) c, $\alpha - \beta$, $a + b$.

3) c, $a - b$, γ.

4) c, $\alpha - \beta$, $b - c$.

Ebenso aus

5) c, r, $h_b : h_a = m : n$.

6) $b^2 - c^2 = f^2$, a, α.

$\sin(\beta - \gamma) : \sin\alpha = f^2 : a^2$. Konstruiert man also zunächst $f^2 : a = d$, so ist $\sin(\beta - \gamma) : \sin\alpha = d : a$. Ist in einem Dreieck BCE, $BC = a$, $CE = d$, $\sphericalangle\, CEB = \alpha$ gemacht und um das Dreieck der Kreis beschrieben, sowie AF im Halbierungspunkt F von BE senkrecht, A auf dem zum Winkel BCE gehörigen Bogen, so ist das Dreieck ABC das verlangte.

7) $b^2 - c^2 = f^2$, a, $\beta - \gamma = \delta$.

(Analog 6.)

8) ϱ, γ, h_c.

Für $\alpha - \beta = \delta$ ist $\sin(90^0 - \frac{1}{2}\delta) : \sin\frac{1}{2}\gamma = (h - \varrho) : \varrho$.

Innerhalb eines Dreiecks ABC soll von C aus eine Transversale so gezogen werden, daſs, wenn AX und BY auf dieselbe senkrecht gefällt sind, eine der folgenden Bedingungen 9)—15) erfüllt wird:

9) $AX = BY$.

(Für $\sphericalangle\, ACX = \varphi$, $BCX = \psi$ ist $\sin\varphi : \sin\psi = a : b$, $\varphi + \psi = \gamma$.)

10) $AX : BY = m : n$;
$$(\sin\varphi : \sin\psi = ma : nb;\ \varphi + \psi = \gamma).$$

11) $CX : CY = m : n$;
$$(\cos\varphi : \cos\psi = ma : nb;\ \varphi + \psi = \gamma).$$

12) $CX = BY$;
$$(\cos\varphi : \sin\psi = a : b).$$

13) $CX : BY = m : n$;
$$(\cos\varphi : \sin\psi = ma : nb).$$

14) $AX + BY = CX + CY$;
$$(\sin(\varphi - 45^0) : \sin(45^0 - \psi) = a : b).$$

15) $\triangle ACX = BCY$;
$$(\sin 2\varphi : \sin 2\psi = a^2 : b^2).$$

Von einem Punkte C aufserhalb eines Kreises M seien an denselben die Tangenten CA, CB gezogen; man soll auf dem kleineren Bogen AB einen Punkt P so bestimmen, dafs, wenn man PQ senkrecht auf CA, PN senkrecht auf CB fällt, eine der folgenden Bedingungen 16)—17) erfüllt wird.

16) $PQ : PN = m : n$;
$$(\sphericalangle AMP = \varphi,\ BMP = \psi;\ \varphi + \psi = 180^0 - ACB;\ \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 : \sin\tfrac{1}{2}\psi^2 = m : n).$$

17) $AQ : BN = m : n$;
$$(\sin\varphi : \sin\psi = m : n).$$

18) Es sei ein Kreis C und eine Gerade MN gegeben; man soll auf MN einen Punkt P so bestimmen, dafs eine von P an C gezogene Tangente mit MN den gegebenen Winkel α bilde.

Ist $CA = a$ senkrecht auf MN, $\sphericalangle ACP = \varphi$, so ist $\cos(\alpha + \varphi) : \cos\varphi = r : a$.

Durch einen zwischen zwei parallelen Geraden L, L_1 gegebenen Punkt P sei eine Gerade gezogen, welche L in A, L_1 in B schneide. Man soll durch P eine zweite Gerade ziehen, welche L in Q, L_1 in M schneide, so dafs

19) $AQ + BM$ gleich einer gegebenen Strecke s sei.
$$\sphericalangle ABM = \alpha,\ AP = a,\ PB = b,\ \sphericalangle APQ = \varphi;\ \sin(\alpha + \varphi) : \sin\varphi = (a + b) : s.$$

20) $AQ \cdot BM$ gleich einem gegebenen Quadrate q^2 sei.
$$\sin(\alpha + \varphi) : \sin\varphi = \sqrt{ab} : q.$$

21) $\triangle PAQ + PBM = q^2$ sei.
$$\sin(\alpha + \varphi) : \sin\varphi = (a^2 + b^2)\sin\alpha : (2q^2).$$

22) $\triangle PAQ - PBM = q^2$ sei.

$$\sin(\alpha + \varphi) : \sin\varphi = (a^2 - b^2)\sin\alpha : (2q^2).$$

Auf dem Bogen AB eines Kreissektors AMB den Punkt P so zu bestimmen, dafs, wenn PN, PQ bezüglich senkrecht auf MA, MB sind, eine der folgenden Bedingungen 23)—27) erfüllt ist:

23) $PN : PQ = m : n$;

$$(\sphericalangle\, AMB = \alpha,\ AMP = \varphi,\ PMB = \psi;\ \sin\varphi : \sin\psi = m : n,\ \varphi + \psi = \alpha).$$

24) $MN : MQ = m : n$;

$$(\cos\varphi : \cos\psi = m : n,\ \varphi + \psi = \alpha).$$

25) $AN : BQ = m : n$;

$$(\sin\tfrac{1}{2}\varphi : \sin\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{m} : \sqrt{n}).$$

26) $MN : PQ = m : n$;

$$(\cos\varphi : \sin\psi = m : n).$$

27) $\triangle MNP : MQP = m : n$.

28) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn ein Winkel γ desselben und die Abstände m, n des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises von den anliegenden Seiten gegeben sind.

$$\cos\alpha : \cos\beta = m : n;\ \alpha + \beta = 180^0 - \gamma.$$

29) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn die Abstände m, n des Mittelpunktes des demselben einbeschriebenen Kreises von zwei Eckpunkten und der Winkel γ am dritten Eckpunkt gegeben sind.

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha : \sin\tfrac{1}{2}\beta = n : m.$$

30) Durch einen auf einem Kreise gegebenen Punkt P zwei Sehnen PX, PY unter gegebenem Winkel α zu einander zu ziehen, so dafs, wenn r der Radius des Kreises ist, $XY : PX = r : PY$ wird.

$$\sphericalangle\, MPX = \varphi,\ MPY = \psi;\ \cos\varphi : \cos\psi = 2\sin\alpha : 1;\ \varphi + \psi = \alpha.$$

31) In einem Kreis sei eine Sehne $AB = a$ gegeben; man soll eine zweite Sehne AX so ziehen, dafs das Dreieck ABX dem Quadrate über BX gleich werde.

$$\sphericalangle\, BAX = \varphi,\ ABX = \psi,\ AXB = \alpha;\ \sin\varphi : \sin\psi = \sin\alpha : 2 = a : 4r.$$

32) Um einen auf der Kathete AC eines bei C rechtwinkeligen Dreiecks ABC zu bestimmenden Punkt P einen Kreis zu beschreiben, der AB in U berührt und BC, bezw. deren Verlängerung unter einer Sehne YZ schneidet, so dafs $YZ = CP$ wird.

$$\sphericalangle\, PBA = \varphi,\ PBC = \psi;\ \varphi + \psi = \beta;\ \sin\varphi : \sin\psi = \sqrt{5} : 2.$$

33) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 32), soll $YZ = 2AU$ werden.

$$\sin\varphi : \sin\psi = \cos\beta : \sqrt{\cos 2\beta}.$$

Zwischen zwei an einen Kreis M gezogenen Tangenten CA, CB soll eine dritte Tangente gezogen werden, welche CA in X, CB in Y schneide und den Kreis in Z berühre, so dafs

34) $XZ : YZ = m : n$ ist.

$$\sphericalangle\, AMZ = \varphi,\ BMZ = \psi,\ ACB = \gamma;\ \varphi + \psi = 180^0 - \gamma;$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi = m : n.$$

35) $XZ \cdot YZ = q^2$ ist.

$$r^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi = q^2 \text{ oder } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi : \operatorname{tg}(90^0 - \tfrac{1}{2}\psi) = q^2 : r^2;$$
$$(90^0 - \tfrac{1}{2}\psi) - \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Auf dem Bogen AB eines Kreissektors ACB einen Punkt Z zu bestimmen, so dafs, wenn man durch denselben die Tangente an den Kreis zieht, welche die Verlängerung von CA in X, die von CB in Y schneide,

36) $XZ : YZ = m : n$ ist.

$$\sphericalangle\, ACB = \alpha,\ ACZ = \varphi,\ ZCB = \psi;\ \operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\psi = m : n;\ \varphi + \psi = \alpha.$$

37) $XZ \cdot YZ = p^2$ ist.

$$r^2 \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi = p^2;\ \operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}(90^0 - \psi) = p^2 : r^2;\ (90^0 - \psi) - \varphi = 90^0 - \alpha.$$

38) Ein Dreieck zu konstruieren aus ϱ_a, ϱ_b, γ.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \varrho_a : \varrho_b.$$

39) Innerhalb eines Dreiecks ABC von C aus eine Transversale zu ziehen, so dafs, wenn AX und BY senkrecht auf dieselbe gefällt sind, das Rechteck aus AX und BY zum Rechteck aus CX und CY in einem gegebenen Verhältnis $m : n$ stehe.

$$\sphericalangle\, ACX = \varphi;\ BCY = \psi;\ \varphi + \psi = \gamma;\ \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi = m : n.$$

40) Ebenso dafs $(AX \cdot CY) : (CX \cdot BY) = m : n$ sei.

$$\operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\psi = m : n.$$

Auf einer Geraden MN sei ein Punkt A gegeben; man soll von letzterem aus eine Strecke AX von gegebener Länge a so ziehen, dafs, wenn man die Senkrechte XY auf MN fällt,

41) $XY + AY$ gleich einer gegebenen Strecke b sei.

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{b}{a}.$$

42) $XY - AY = b$ sei,

43) $AY - XY = b$ sei.

44) In einen gegebenen Kreisabschnitt ein Rechteck zu beschreiben, dessen Diagonalen einander unter einem gegebenen Winkel α schneiden.

Ist φ der Winkel zwischen dem zur Sehne des Segments senkrechten und dem nach einem auf dem Bogen liegenden Eckpunkte des Rechtecks gehenden Radius, so ist $r \cos \varphi - 2r \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \sin \varphi = \pm a$.

45) In einen gegebenen Kreisabschnitt ein Rechteck zu beschreiben, dessen Seiten in gegebenem Verhältnis $m : n$ stehen.

Bei gleicher Bezeichnung, wie in 44), ist $r \cos \varphi - \frac{2n}{m} r \sin \varphi = \pm a$.

46) In ein gegebenes Kreissegment ein Quadrat zu beschreiben.

Bezeichnung entsprechend wie in 44), $r \cos \varphi - 2r \sin \varphi = \pm a$.

47) In ein gegebenes Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, so dafs beide Figuren einen Eckpunkt gemeinsam haben.

$$\cos \varphi - \sin \varphi = \tfrac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Im Dreieck ABC die Transversale CX nach AB so zu ziehen, dafs

48) $CX = AX - BX$ wird.

$\sphericalangle BCX = \varphi$; $a \sin \beta = c \sin \beta \cos \varphi - (2a - c \cos \beta) \sin \varphi$.

49) $AX^2 - BX^2 = CX^2$ wird.

$$\left(\cos 2\gamma - \frac{a^2}{b^2}\right) \cos 2\varphi + \sin 2\gamma \sin 2\varphi = \cos 2\alpha - \frac{a^2}{b^2}.$$

50) $AX = \frac{1}{2}(BX + CX)$ wird.

$$2b \sin \gamma \cos \varphi - (a + 2b \cos \gamma) \sin \varphi = a \sin \beta.$$

Zwei Kreise haben eine Sehne AB gemeinsam; man soll durch A eine Gerade legen, welche den einen Kreis in X, den anderen in Y schneide, so dafs

51) $AX - AY = d$ ist.

$\sphericalangle YAB = \varphi$; $\sin \varphi \left(\sqrt{4R^2 - a^2} - \sqrt{4r^2 - a^2}\right) - 2a \cos \varphi = d$.

52) $AX \cdot AY = p^2$ ist.

Für $\sqrt{4R^2 - a^2} = b$, $\sqrt{4r^2 - a^2} = c$ ist

$$(bc + a^2) \cos 2\varphi + a(c - b) \sin 2\varphi = bc - a^2 - 2p^2.$$

53) $AX^2 + AY^2 = p^2$ ist.

Vgl. 52); $(b^2 + c^2 - 2a^2) \cos 2\varphi + 2a(b - c) \sin 2\varphi = b^2 + c^2 + 2a^2 - 2p^2$.

Durch den Eckpunkt C eines Dreiecks ABC eine AB nicht schneidende Gerade so zu ziehen, dafs, wenn AA_1 und

BB_1 die von A, bezw. B auf diese Gerade gefällten Senkrechten sind,

54) $CA_1^2 + CB_1^2 = d^2$ ist.

$$\sphericalangle ACA_1 = \varphi;\ (b^2 + a^2 \cos 2\gamma) \cos 2\varphi - a^2 \sin 2\gamma \sin 2\varphi = 2d^2 - b^2 - a^2.$$

55) $AA_1^2 + BB_1^2 = d^2$ ist.

$$a^2 \sin 2\gamma \sin 2\varphi - (b^2 + a^2 \cos 2\gamma) \cos 2\varphi = 2d^2 - b^2 - a^2.$$

56) $AA_1^2 - BB_1^2 = d^2$ ist.

$$(a^2 \cos 2\gamma - b^2) \cos 2\varphi - a^2 \sin 2\gamma \sin 2\varphi = 2d^2 - b^2 + a^2.$$

57) $CA_1^2 - CB_1^2 = d^2$ ist.

$$(b^2 - a^2 \cos 2\gamma) \cos 2\varphi + a^2 \sin 2\gamma \sin 2\varphi = 2d^2 - b^2 + a^2.$$

58) Um jeden von zwei einander gegenüberliegenden Eckpunkten B, D eines Quadrates $ABCD$ sei mit der Seite des letzteren als Radius ein Kreisbogen beschrieben. Man soll eine Gerade parallel zu DB ziehen, welche AD in X, AB in U und die Kreisbogen bezügl. in Y und Z schneide, so dafs $XY = YZ = ZU$ ist.

$$\sphericalangle YBA = \varphi;\ 2 \cos \varphi + \sin \varphi = 2.$$

Innerhalb eines gegebenen hohlen Winkels soll vom Scheitel A aus eine Strecke AP von gegebener Länge a so gezogen werden, dafs, wenn man die Senkrechten PX, PY auf die Schenkel des Winkels fällt, eine der folgenden Bedingungen 59)—62) erfüllt wird.

59) $PX + PY = b$.

$$\sphericalangle PAX = \varphi,\ XAY = \alpha;\ \cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi\,(1 - \cos \alpha) = \frac{b}{a}\,.$$

60) $PX - PY = b$.

Analog 59).

61) $PX^2 + PY^2 = b^2$.

$$\cos 2\varphi\,(1 + \cos 2\alpha) + \sin 2\varphi \sin 2\alpha = 2 - \frac{2b^2}{a^2}\,.$$

62) $\triangle PXY = AX^2 - AY^2$.

$$\cos(\alpha - 2\varphi) - 4 \sin(\alpha - 2\varphi) = \cos \alpha,$$

$$\text{oder } \varphi + \psi = \alpha;\ \cos(\psi - \varphi) - 4 \sin(\psi - \varphi) = \cos \alpha.$$

Auf einer Geraden MN sei ein Punkt A und aufserhalb derselben ein Punkt P gegeben; man soll eine Gerade PX nach MN so ziehen, dafs eine der folgenden Bedingungen 63)—65) erfüllt wird.

63) $PX + AX = s$.

$AP = d$, $\sphericalangle PAX = \alpha$, $APX = \varphi$; $s \cdot \sin\alpha \cos\varphi + (s\cos\alpha - d)\sin\varphi$
$= d\sin\alpha.$

64) $PX - AX = s.$

$$s \cdot \sin\alpha \cos\varphi + (s\cos\alpha + d)\sin\varphi = d\sin\alpha.$$

65) $PX^2 \pm AX^2 = p^2.$

$$(p^2\cos 2\alpha \mp d^2)\cos 2\varphi - p^2 \sin 2\alpha \sin 2\varphi = p^2 - 2d^2\sin\alpha^2 \mp d^2.$$

66) In einem bei C rechtwinkeligen Dreieck ABC eine Transversale AX nach CB zu ziehen, so dafs $AB - BX = AX - CX$ wird.

$$\sphericalangle XAC = \varphi;\ (c - a)\cos\varphi + 2b\sin\varphi = b.$$

67) Durch einen zwischen zwei parallelen Geraden MN, M_1N_1 gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche MN in X, M_1N_1 in Y schneide, so dafs, wenn PA auf MN senkrecht gefällt ist, $AX + PY = c$ wird.

$$c\cos\varphi - a\sin\varphi = b.$$

In einem Kreise mit dem Mittelpunkte C sei eine Sehne $AB = 2b$ gegeben, welche von dem zu ihr senkrechten Radius in D geschnitten werde. Man soll einen Radius CY ziehen, welcher AB in X schneide, so dafs eine der folgenden Bedingungen 68)—70) erfüllt wird.

68) $XY = AX.$

$$\sphericalangle YCD = \varphi,\ CD = a;\ (r - b)\cos\varphi + a\sin\varphi = a.$$

69) $XY = DX.$

$$r\cos\varphi - a\sin\varphi = a.$$

70) $CX : XY = AX : XD.$

$$br\cos\varphi - ar\sin\varphi = ab.$$

Auf der Seite AB eines Quadrats $ABCD$ sei ein Punkt P gegeben; man soll eine Transversale PX nach CD ziehen, so dafs, wenn die Senkrechten DY und BZ auf PX gefällt werden, eine der folgenden Bedingungen 71)—73) erfüllt wird.

71) $DY^2 + BZ^2 = p^2.$

$\sphericalangle XPB = \varphi$, $AP = b$, $AB = a$; $ab\sin 2\varphi + (a - b)\,b\cos 2\varphi$
$= p^2 - a^2 - b^2 + ab.$

72) $DY^2 - BZ^2 = p^2.$

$$a(a - b)\cos 2\varphi + ab\sin 2\varphi = p^2 - ab.$$

73) $DY \cdot BZ = p^2.$

$$a\sin 2\varphi - b\cos 2\varphi = \frac{2p^2}{a - b} - b.$$

Ein Dreieck zu konstruieren aus

74) $a + b - c = 2d$, $h_c - \varrho = e$, r.

$$re \cos\gamma - rd \sin\gamma = d^2 - re.$$

75) w_c, ϱ, $a + b + c = 2s$.

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma + \frac{\varrho}{s} \cos \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2\varrho}{w}.$$

76) w_c, ϱ_c, $a + b - c = 2d$.

$$w_c d \sin \tfrac{1}{2}\gamma + w_c \varrho_c \cos \tfrac{1}{2}\gamma = 2d\varrho_c.$$

77) $a + b = s$, ϱ_a, h_a;

$$(s \cdot \sin\beta + 2\varrho_a \cos\beta = 2\varrho_a + h_a).$$

78) $a + b = s$, ϱ_a, h_b;

$$(s \cdot \sin\alpha - 2\varrho_a \cos\alpha = 2\varrho_a - h_b).$$

79) $a - b = d$, ϱ, h_a;

$$(2\varrho \cos\beta - d \sin\beta = h_a - 2\varrho).$$

Ähnlich $a - b$, ϱ, h_b; $a - b$, ϱ_c, h_a; $a - b$, ϱ_c, h_b, u. s. w.

80) r, $a + b + c = 2s$, $h_c + \varrho_c = e$.

$$rs \sin\gamma + re \cos\gamma = s^2 - re.$$

81) An den Bogen AB eines Kreissektors ACB eine Tangente zu ziehen, welche die Verlängerungen von CA und CB bez. in X, Y schneide, so dafs, wenn Z der Berührungspunkt ist, $XZ - YZ$ gleich einer gegebenen Strecke d sei.

$\sphericalangle\, ACZ = \varphi$, $ZCB = \psi$, $ACB = \alpha$; $2r \sin(\varphi - \psi) - d \cos(\varphi - \psi)$
$= d \cos\alpha$.

In einem Dreieck ABC durch C eine Transversale zu ziehen, so dafs, wenn AX und BY senkrecht auf dieselbe gefällt sind, eine der folgenden Bedingungen 82)—85) erfüllt wird.

($\sphericalangle\, ACX = \varphi$, $BCY = \psi$, $\varphi + \psi = \gamma$.)

82) $CX + CY = s$;

$$(b \cos\varphi + a \cos\psi = s).$$

83) $AX + BY = s$;

$$(b \sin\varphi + a \sin\psi = s).$$

84) $AX - BY = d$;

$$(b \sin\varphi - a \sin\psi = d).$$

85) $XY = d$;

$$(a \cos\psi - b \cos\varphi = d).$$

An einen Kreis M seien zwei Tangenten CA, CB gezogen; man soll auf dem kleineren Bogen AB einen Punkt X so bestimmen, dafs, wenn von ihm auf CA und CB bez. die Senkrechten XY, XZ gefällt werden, eine der folgenden Bedingungen 86)—89) erfüllt wird.

($\sphericalangle ACB = \gamma$, $AMX = \varphi$, $XMB = \psi$; $\varphi + \psi = 180^0 - \gamma$.)

86) $CY : CZ = m : n$;

$$(n r \sin\varphi - m r \sin\psi = c(n - m))$$

87) $XY = BZ$;

$$(\cos\varphi + \sin\psi = 1).$$

88) $2\,XY = CZ$;

$$(2r\cos\varphi - r\sin\psi = 2r - c).$$

89) $AY = CZ$;

$$(r\sin\varphi + r\sin\psi = c).$$

Ein Dreieck zu konstruieren aus

90) r, $ab = p^2$, γ;

$$(4r^2 \sin\alpha \sin\beta = p^2).$$

91) r, F, γ;

$$(2r^2 \sin\alpha \sin\beta = F : \sin\gamma).$$

92) h, $\varrho_a + \varrho_b = s$, γ;

$$(s \cdot \sin\alpha \sin\beta = 2h \cos\tfrac{1}{2}\gamma^2).$$

93) F, $\varrho_a + \varrho_b = s$, γ;

$$(s^2 \cdot \sin\alpha \sin\beta = 4F \cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 \cot\tfrac{1}{2}\gamma).$$

94) r, ϱ, γ;

$$(4r \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta = \varrho : \sin\tfrac{1}{2}\gamma).$$

95) $a + b + c = 2s$, $\varrho_a + \varrho_b = e$, α;

$$(e\cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta = s \cdot \cos\tfrac{1}{2}\gamma).$$

96) a, ϱ_a, α;

$$(a\cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \varrho_a \cos\tfrac{1}{2}\alpha).$$

97) a, ϱ_b, α;

$$(a\sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \varrho_b \sin\tfrac{1}{2}\alpha).$$

98) Auf dem Bogen AB eines Kreissektors einen Punkt P zu bestimmen, so dafs, wenn von ihm auf die Radien CA, CB bez. die Senkrechten PN, PQ gefällt sind, $CN \cdot CQ = p^2$ wird.

$\sphericalangle ACB = \gamma$, $ACP = \varphi$, $PCB = \psi$; $r^2 \cos\varphi \cos\psi = p^2$.

99) Auf dem Bogen AB eines Kreissektors ACB einen Punkt P zu bestimmen, so dafs, wenn auf die in A, bez. B an

den Kreis gelegten Tangenten die Senkrechten PX, PY gefällt werden, $PX \cdot PY = p^2$ ist.

$\sphericalangle ACP = \varphi$, $PCB = \psi$; $\varphi + \psi = 180^0 - \gamma$; $2r \sin \frac{1}{2}\varphi \sin \frac{1}{2}\psi = p$.

100) Unter denselben Voraussetzungen, wie in 99), soll $AX \cdot BY = p^2$ sein.

$$r^2 \sin\varphi \sin\psi = p^2.$$

Ein Winkel BCA soll durch eine Gerade so geteilt werden, dafs, wenn man von den auf den Schenkeln gegebenen Punkten A, B auf diese Gerade die Senkrechten AX, BY fällt, eine der folgenden Bedingungen 101)—103) erfüllt wird.

($\sphericalangle ACB = \gamma$, $ACX = \varphi$, $XCB = \psi$, $AC = b$, $BC = a$.)

101) $AX \cdot BY = q^2$;

$$(ab \sin\varphi \sin\psi = q^2).$$

102) $CX \cdot CY = q^2$;

$$(ab \cos\varphi \cos\psi = q^2).$$

103) $AX \cdot CY = q^2$;

$$(ab \sin\varphi \cos\psi = q^2).$$