

83

v581

1979

1979



# Einleitung

in die

## Theorie der bestimmten Integrale

von

**Dr. J. Thomae,**

Professor an der Universität Freiburg in Baden.

~~GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

~~GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~



S. DICKSTEIN

Halle a/S.

Verlag von Louis Nebert.

1875.

*Dickstein*

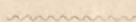
opis nr 48416

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen bleibt vorbehalten.



7182

## V o r w o r t.



Durch die allgemeine Definition des bestimmten Integrales, welche Riemann seinen Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe voraufgeschickt hat, und durch Mittheilungen, welche Schüler des Herrn Weierstrass aus dessen Vorlesungen gemacht haben, hat die Discussion der Principien der Infinitesimalrechnung einen lebhafteren Anstoss in mathematischen Kreisen erhalten, und es sind hierdurch Untersuchungen herbeigeführt, durch welche jene Principien, die durch Dirichlet's Arbeiten für ewig festgestellt zu sein schienen, nicht unwesentliche Abänderungen erfahren haben. Es sind zwar Dirichlet's Grundlagen nicht geradezu hinfällig geworden, aber es hat sich gezeigt, dass in ihnen manchmal Voraussetzungen enthalten sind, welche der Leser übersieht, so dass er die Beweise für allgemeiner hält, als sie sind. In Bezug auf die Fourier'sche Reihe hat Dirichlet selbst die Tragweite seiner Beweise überschätzt. Der strenge Beweis des grundlegenden Satzes, dass eine stetige Function, in welcher für abnehmende  $h$   $\lim [f(x+h) - f(x)] : h$  in einem Intervalle überall Null ist, in diesem Intervalle einen unabänderlichen Werth habe, auf welchen Satz die Integralrechnung aufgebaut werden muss, ist von Dirichlet gegeben, aber er findet sich, wenigstens in den von Herrn Meyer herausgegebenen Vorlesungen, mehr gelegentlich an einer Stelle, an der man seine Wichtigkeit nicht vermuthet. Uebrigens sind jene Vorlesungen in Bezug auf die Integration durch Reihen und auf die Zulässigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen von wirklichen Irrthümern in den Principien nicht ganz frei. Diese Umstände machen es, wie ich glaube, wünschenswerth, die neuern Methoden einem grösseren Publicum im Zusammenhange zugänglich zu machen, was hier versucht wird. Die nachfolgenden Bogen beschäftigen sich damit, die strenge Theorie der Quadratur und die Hilfsmittel der Auswerthung bestimmter Integrale in Kurzem zusammenzufassen. Zu diesen Hilfsmitteln gehören auch die Doppelintegrale, und es musste ihnen deshalb ein Kapitel gewidmet werden, in welchem jedoch nur das Nöthigste Platz gefunden hat. Ebenso fruchtbringend für die Auswerthung von Quadraturen ist die Integration zweigliedriger Differentialien, welche merkwürdiger Weise in den meisten Lehrbüchern eine sehr oberflächliche Behandlung findet. Der Beweis des Cauchy'schen Satzes oder, was dasselbe ist, der Beweis, dass das Integral eines zwei- oder mehrgliedrigen Differentialis bis auf eine additive Constante bestimmt sei, der meist mit Hilfe der Doppelintegrale (Riemann's Beweis) bewiesen wird, kann mit denselben Mitteln geführt werden, als der für das eingliedrige Differential. Die Theorie der Integration zweigliedriger Differentialien hat deshalb ebenfalls in einem Kapitel Platz

\*

gefunden. Hierbei musste von Functionen mehrerer Veränderlichen die Rede sein. Die Stetigkeit dieser Functionen ist schon immer richtig definirt worden, aber bei den Anwendungen dieser Definition ist gleichwohl gefehlt worden, was zu einer Bemerkung des Herrn Heine Veranlassung gegeben hat, die mitgetheilt ist. Dies ist der Inhalt dieses Büchleins. Es wurde neben meinen Vorlesungen über bestimmte Integrale an hiesiger Universität im Winter-Semester von 1874 zu 1875 angefertigt. Möge es seinen Zweck erreichen, ein grösseres Publicum für die neue Methode zu interessiren.

Freiburg, im März 1875.

J. Thomae.



## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
§ 1. Der Gleichheitsbegriff für algebraische Grenzgebilde . . . . .	1
§ 2. Die Grenze einer nicht ab- oder nicht zunehmenden Zahlenreihe mit endlichen Termen . . . . .	1
§ 3. Die obere und untere Grenze einer zu- und abnehmenden Zahlenreihe mit endlichen Termen . . . . .	3
§ 4. Der allgemeine Functionsbegriff. Beispiele unstetiger Functionen . . . . .	4
§ 5. Obere und untere Grenze einer endlichen Function. Grösste Schwankung in einem Intervalle . . . . .	4
§ 6. Stetigkeit einer Function in einem Punkte. Stetigkeit in einem Intervalle. Heine's Bemerkung über die Stetigkeit in einem Intervalle . . . . .	5
§ 7. Schluss auf die Gleichheit zweier stetigen Functionen aus der in unendlich vielen Punkten, oder aus der im Innern eines Intervalls auf die Gleichheit an den Grenzen. $f(x+0)$ und $f(x-0)$ . . . . .	6
§ 8. Eine stetige Function besitzt ein Maximum und ein Minimum, d. h. sie nimmt ihre obere und untere Grenze mindestens einmal wirklich an . . . . .	7
§ 9. Eine stetige Function nimmt jeden Werth zwischen der obern und untern Grenze mindestens einmal an. $g + \xi(G-g) = f[a + \xi'(b-a)]$ . . . . .	7
§ 10. Vorwärts genommener und rückwärts genommener Differentialquotient. Ist der vorwärts oder rückwärts genommene Differentialquotient einer zwischen $a$ und $b$ stetigen Function gleich Null, so ist diese Function eine Constante . . . . .	8
§ 11. Eine stetige Function, deren vorwärts (oder rückwärts) genommener Differentialquotient eine bestimmte Function ist, ist bis auf eine additive Constante bestimmt . . . . .	9
§ 12. Bezeichnung des bestimmten Integrals. Elementare Sätze. Partielle Integration . . . . .	9
§ 13. Erster Mittelwerthsatz. Auf ihn stützt sich die Taylor'sche Reihe. Verallgemeinerung des Mittelwerthsatzes für ein Product zweier Functionen . . . . .	9
§ 14. Zerlegung des Integrationsintervalles in mehrere . . . . .	10
§ 15. Anwendung des Mittelwerthsatzes auf das zerlegte Integral . . . . .	11
§ 16. Hilfssatz. Der Mittelwerth einer Summe von Producten, in denen ein Factor immer dasselbe Zeichen hat . . . . .	11
§ 17 und § 18. Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe. Wenn der Grenzwert der kritischen Summe $\Sigma(a_{\mu+1} - a_{\mu})(G_{\mu} - g_{\mu})$ Null ist, so existirt ein Grenzwert und die Existenz des Integrals ist erwiesen . . . . .	11
§ 19. Aufzählung der Fälle, in welchen die kritische Summe die Grenze Null hat, mithin das Integral existirt . . . . .	14
§ 20. Beispiele integrabler unendlich oft unstetiger Functionen. Es giebt unendlich viele Functionen, deren Integral zwischen zwei beliebigen Grenzen erstreckt Null ist . . . . .	14
§ 21. Zwei stetige Functionen, von denen die eine den vorwärts genommenen, die andere den rückwärts genommenen Differentialquotienten $f(x)$ hat, können sich nur durch eine additive Constante unterscheiden . . . . .	16
§ 22. Der erste Mittelwerthsatz gilt auch für das durch eine Summe definirte Integral . . . . .	16
§ 23. Der Differentialquotient eines durch den Grenzwert einer Summe definirten Integrales $\int_a^x f(x)dx$ , genommen nach der oberen Grenze $x$ , ist $f(x+0)$ oder $f(x-0)$ , je nachdem er vor- oder rückwärts genommen wird, und ist nur so lange vorhanden, als diese Grössen bestimmt sind . . . . .	16
§ 24. Das Integral ist immer eine stetige Function seiner Grenzen . . . . .	17
§ 25. Der Integralbegriff aus der Summe definirt ist in gewisser Beziehung weiter als der aus dem Differentialquotienten hergeleitete . . . . .	18
§ 26. Ist $\int_a^x f(x)dx = \int_a^x \varphi(x)dx$ , so ist $f(x+0) = \varphi(x+0)$ , $f(x-0) = \varphi(x-0)$ , so lange diese Grössen existiren . . . . .	18

	Seite
§ 27. Zweiter Mittelwerthsatz (von Du Bois Reymond) . . . . .	18
§ 28. Das Wallis'sche Product . . . . .	19
§ 29. Differentiation eines Integrals nach einem Parameter . . . . .	20
§ 30. Beispiel einer Function, in der die Differentiation unter dem Integralzeichen ein anderes Resultat als die Differentiation des Integrals liefert . . . . .	20
§ 31. Genaue Bedingungen, unter deren Voraussetzung unter dem Integralzeichen differenzirt werden darf. Ein häufig vorkommender Fall . . . . .	21
§ 32. Ausreichende Bedingungen für die Richtigkeit des Satzes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ . . . . .	22
§ 33. Allgemeine Differentiation eines Integrals . . . . .	22
§ 34. Substitution. Willkürlichkeit der Grenzen . . . . .	23
§ 35. Ausdehnung der Substitution auf Functionen ohne durchgehenden Differentialquotienten . . . . .	24
§ 35 a. Das Product zweier integrabeln Functionen ist integabel . . . . .	24
§ 36. Das Integral unendlich gross werdender Functionen nach Dirichlet . . . . .	24
§ 37. Einige allgemeine Fälle, in denen dies Integral einen Sinn hat . . . . .	24
§ 38. Allgemeine Regeln über die Integrität von Functionen, deren absoluter Betrag unendlich wird, die aber unendlich oft ihre Zeichen wechseln, giebt es nicht. Beispiele von integrabeln Functionen, die in unendlich hoher Ordnung unendlich gross werden, und die unendlich oft unendlich gross werden. Versuch eine integrabele Function zu construiren, die in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich gross wird . . . . .	25
§ 39. Die Substitution, wenn in dem Ausdrücke $dx = \varphi'(y)dy$ $\varphi'(y)$ unendlich gross wird . . . . .	27
§ 40. Der Sinn des Integrals, wenn die Grenzen unendlich sind. Allgemeine Kriterien . . . . .	27
§ 41. Beispiele zwischen unendlichen Grenzen integrabeler Functionen, die den allgemeinen Kriterien nicht genügen, aber unendlich oft ihre Zeichen wechseln . . . . .	28
§ 42. Differentiation eines Integrals mit unendlichen Grenzen, oder eines Integrals einer unendlich werdenden Function, etc. . . . .	28

**Doppelintegrale.**

§ 43. Zweifach unendliche Zahlenreihen unterscheiden sich von einfach unendlichen nur durch die Anordnung . . . . .	30
§ 44. Obere und untere Grenze einer Function von zwei Veränderlichen . . . . .	30
§ 45. Definition der Stetigkeit einer Function zweier Veränderlichen. Versteckte Unstetigkeiten. Beispiele unstetiger Functionen. . . . .	30
§ 46. Eine stetige Function zweier Veränderlichen besitzt ein Maximum und Minimum . . . . .	32
§ 47. Functionen von beliebig vielen Veränderlichen . . . . .	32
§ 48. Mittelwerthe einer Function zweier Veränderlichen . . . . .	32
§ 49. Heine's Bemerkung über die Stetigkeit einer Function (vergl. § 6.) . . . . .	33
§ 50. Definition des Doppelintegrals durch den Grenzwert einer Summe. Die kritische Summe . . . . .	33
§ 51. Aufzählung der Fälle, in denen dieser Grenzwert vorhanden, oder die kritische Summe Null ist . . . . .	33
§ 52. Mittelwerthsatz für Doppelintegrale . . . . .	34
§ 53. Zurückführung des Doppelintegrals auf zwei aufeinanderfolgende Quadraturen. Vertauschung der Reihenfolge . . . . .	34
§ 54. Einführung neuer Veränderlichen . . . . .	34
§ 55. Das Product zweier Quadraturen kann als Doppelintegral aufgefasst werden . . . . .	35
§ 56. Integration unendlich werdender Functionen . . . . .	35
§ 57. Integration über unendlich grosse Gebiete . . . . .	36
§ 58. Singuläre Doppelintegrale . . . . .	36

**Integration zweigliedriger Differentialien.**

§ 59. Differentialquotient in der Richtung $\varphi$ . . . . .	36
§ 60. Partielle Differentialquotienten . . . . .	36
§ 61. Definition des vollständigen zweigliedrigen Differentialien. . . . .	37
§ 62. Eine stetige Function $w$ ist constant, wenn $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \text{Null}$ ist . . . . .	37
§ 63. Sie ist in einem einfachzusammenhängenden Gebiete $T$ bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn dort $\frac{\partial w}{\partial x} = p$ , $\frac{\partial w}{\partial y} = q$ ist . . . . .	38
§ 64. Definition des Integrals $\int_{x_0 y_0}^{x' y'}$ $p dx + q dy$ . . . . .	38

	Seite
§ 65. Zerlegung in mehrere Integrale . . . . .	38
§ 66. Integrationsmethoden, wenn das Gebiet $T$ ein Rechteck ist . . . . .	39
§ 67. Integrationsmethoden, wenn das Gebiet $T$ beliebig ist . . . . .	39
§ 68. Definition des Integrals als Grenzwert. Integrationsweg . . . . .	39
§ 69. Beispiel eines nichtintegrabeln Differentials . . . . .	40
§ 70. Herleitung der Integrabilitätsbedingungen . . . . .	41
§ 71. Das Integral über einen geschlossenen Weg ist Null . . . . .	42
§ 72. Riemann's Beweis desselben (Cauchy'schen) Satzes . . . . .	42
§ 73. Wenn $w$ in einem Gebiete stetige partielle Differentialquotienten besitzt, so besitzt sie dort auch ein vollständiges erstes Differential . . . . .	43
§ 74. Differentiation unter dem Integralzeichen . . . . .	44
§ 75. Der Cauchy'sche Satz für den Fall unendlicher $p$ und $q$ . . . . .	44
§ 76. Die partielle Differentialgleichung einer Function einer complexen Veränderlichen . . . . .	45
§ 77. Integral einer Function zwischen complexen Grenzen . . . . .	45
§ 78. $\int \frac{\omega(z)}{z-z_0} dz$ über eine geschlossene Contour um $z_0$ ist gleich $2\pi i w(z_0)$ . . . . .	45
§ 79 und 80. Auswerthung einiger specieller bestimmter Integrale mittelst des Cauchy'schen Satzes . . . . .	46
§ 81. Integration durch Reihen. Gleichmässige Convergenz . . . . .	48
<b>Nachtrag.</b> Du Bois Reymond's Erweiterung der partiellen Integration . . . . .	48

### Errata.

§ 1 Zeile 15 lies „ungleich“ statt „gleich“. § 3 Zeile 1 lies „in denen“ statt „in der“. § 4 Zeile 25 lies „muss  $y$ “ statt „muss  $n$ “. § 7 Zeile 19 lies „ $\xi$  und  $\xi'$ “ statt „ $\xi$  um  $\xi'$ “. § 8 Zeile 23 lies „ $x_0+h$ “ statt „ $x+h$ “. § 10 Zeile 3 von unten lies „ $(1-x)^n + (1-x)^{-n} + n$ “ statt „ $x^n + x^{-n} + n$ “. § 20 letzte Zeile lies „sind, endlich“ statt „ist, endlich“. § 30 Zeile 7 von unten lies „ $f^{(m)}(x, 1)$ “ statt „ $f(x, 1)$ “. § 36 letzte Zeile lies „ $\xi$ “ statt „ $\xi'$ “. § 37 Zeile 8 lies „klein werden“ statt „klein sein“. Zeile 13 lies „ $\int_{c-\varepsilon}^{c-\xi}$ “ statt „ $\int_{c-\varepsilon}^{c+\xi}$ “. § 42 Zeile 14 lies „ $\alpha > 1$ “ statt „ $\alpha < 1$ “. Seite 30 nach der Aufschrift „Doppelintegrale“ ergänze „§ 43“. Seite 31 Zeile 1 lies „ $h$ “ statt „ $\delta$ “. § 59 letzte Zeile lies „ $y + h \sin \varphi$ “ statt „ $y + k \sin \varphi$ “. § 71 Zeile 1 lies „Ist“ statt „Is“. Seite 42 Zeile 2 lies „Rechtecke so einschreiben“ statt „Rechtecke einschreiben“. Nachtrag Zeile 2 lies „dessen“ statt „seine“.

## Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.

§ 1. Das Gebiet der reellen Zahlen kann zerfällt werden in positive und negative rationale Zahlen einerseits, und positive und negative irrationale Zahlen andererseits. Die Rechnung mit den irrationalen Zahlen, welche durch rationale Zahlen nur mittels einer unendlichen Reihe von Operationen, also eigentlich nicht dargestellt werden können, und sich demnach von den rationalen Zahlen wesentlich unterscheiden, beruht auf einer Ausdehnung des Gleichheitsbegriffes. *Zahlen heissen gleich, wenn man von ihnen nachweisen kann, dass sie sich um weniger als jede dem absoluten Betrage nach noch so klein vorgegebene (zunächst rationale) Zahl unterscheiden.* Die Gleichheit analytischer Gebilde, die durch eine unendliche Reihenfolge von Operationen definiert sind, kann offenbar nie vollständig bewiesen werden, wenn man nicht diese Ausdehnung des Gleichheitsbegriffes zulässt. Denkt man sich in jedem Falle die Zahlen durch Decimalzahlen ausgedrückt, so sind zwei Zahlen gleich, wenn sie aus gleich vielen Ganzen, gleich vielen Zehnteln, gleich vielen Hundertsteln, gleich vielen Tausendsteln etc. bestehen. Vermöge dieser Definition der Gleichheit nimmt jede Zahl, gleichviel ob sie durch eine Decimalzahl mit einer endlichen Anzahl von Stellen im Bruchtheil dargestellt ist, oder ob ihre Darstellung eine unbegrenzte Anzahl Stellen erfordert, einen bestimmten Platz im Zahlensystem ein. Denn vergleicht man zwei Zahlen mit einander, so müssen sie sich in irgend einer Decimalstelle unterscheiden, wenn sie <sup>un</sup>gleich sind, wenn aber alle Decimalstellen übereinstimmen, so weit man sie auch bilden mag, so können sich die Zahlen offenbar nur um weniger unterscheiden, als jede noch so kleine vorgegebene Zahl, und sie sind deshalb gleich zu nennen.

Unterscheiden sich zwei Dezimalzahlen in irgend einer Stelle, so sind sie ungleich, ausgenommen in dem Fall:

$$\alpha + 0, \beta \gamma \dots \mu(v+1) = \alpha + 0, \beta \gamma \dots \mu v 999 \dots,$$

wenn nun lauter Neunen folgen. Die Zahl 1 enthält 9 Zehntel, 9 Hundertstel, 9 Tausendstel u. s. w.

Die Algebra lehrt\*), dass man auf diese im Grunde zum Theil idealen Zahlen die Rechnungsregeln, der Zahlen mit endlich vielen Ziffern ausdehnen kann, ohne dass man dabei zu neuen Hypothesen Zuflucht nehmen müsste. Hier kann darauf nicht weiter eingegangen werden, es soll nur voraufgeschickt werden, dass in dieser Schrift es ein häufig angewandtes Beweismittel für die Existenz einer unbekanntenen Grösse als Zahl ist, dass man zeigt, dass, wenn sie existirt, sie sich von einer Decimalzahl in keiner angebbaren Decimalstelle unterscheiden könne. Diese Decimalzahl ist dann die unbekanntene Zahl. Der Sinn dieses Satzes wird sogleich an dem folgenden Beispiele klar werden.

§ 2. **Lehrsatz.** Wenn die Terme einer Zahlenreihe,  $a_1, a_2, a_3 \dots a_\mu \dots$  von einem bestimmten ab mit dem Index fortwährend wachsen, oder wenigstens nicht abnehmen, so wachsen diese Terme entweder

\*) Man vergleiche einen Aufsatz von Herrn Heine: „Die Elemente der Functionenlehre“ in Crelle's Journal für Math. Bd. 74. pag. 172.

über alle Grenzen, oder wenn dies nicht stattfindet, so kommen sie einer bestimmten Zahl  $a$ , welche die Grenze der Zahlenreihe heisst, beliebig nahe. Man schreibt dies so:

$$\lim_{n=\infty} a_n = a.$$

**Beweis.** Dass die Terme über alle Grenzen wachsen können, bedarf keines Beweises, also ist nur nachzuweisen, dass sie sich einer bestimmten Zahl  $a$  unaufhörlich nähern müssen, wenn sie über eine gewisse Zahl  $M$  niemals hinausgehen.

Dass man bei der Untersuchung der Grenze einer Zahlenreihe beliebig viele Terme von Anfang an fortlassen kann, ist evident, und wir nehmen deshalb an, wir hätten so viele Terme fortgelassen, dass dieselben mit dem Index nur noch zunehmen, oder wenigstens nicht mehr abnehmen, oder wir nehmen an, dass die Terme gleich vom Anfange an niemals abnehmen. Ist nun  $u$  diejenige ganze Zahl, die kleiner als  $a_1$  ist, aber möglichst wenig davon verschieden, so bilden wir die endliche Reihe der ganzen Zahlen

$$u, u + 1, u + 2, \dots u + v,$$

in welcher  $u + v \cong M$  ist, so sind die Terme  $a_1, a_2 \dots$  von einem bestimmten ab nothwendig, wie weit man sie auch bilden mag, sämmtlich zwischen zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen  $\alpha$ , und  $\alpha + 1$  enthalten, welche sich unter den Zahlen  $u, u + 1, \dots u + v$  befinden, oder sie fallen von einem bestimmten ab sämmtlich auf eine solche Zahl  $\alpha$ , welche dann die Grenze der Reihe ist. Hat nämlich irgend ein Term die Zahl  $\alpha$  überschritten, so sind auch alle\*) folgenden grösser als  $\alpha$ , und da kein Term über  $u + v$  hinausgeht, so müssen diese von einem bestimmten ab zwischen  $u + v - 1$  und  $u + v$  liegen, oder wenn  $u + v - 1$  nicht erreicht wird, zwischen  $u + v - 2$  und  $u + v - 1$  u. s. w., also zwischen zwei ganzen Zahlen  $\alpha$  und  $\alpha + 1$ . Natürlich kann  $\alpha$  auch negativ oder 0 sein.

Ist nun keine ganze Zahl die Grenze, liegen aber die Terme von einem bestimmten ab zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + 1$ , so dass  $\alpha + 1$  niemals erreicht oder überschritten wird, so bilden wir die Zahlen

$$\alpha, \alpha + 0,1, \alpha + 0,2, \dots \alpha + 0,9, \alpha + 1$$

und lassen bei der weiteren Untersuchung alle Terme, die kleiner sind als  $\alpha$ , fort. Dann müssen die Terme der restirenden Zahlenreihe von einem bestimmten ab alle zwischen zwei Zahlen  $\alpha + 0,\beta$  und  $\alpha + 0, (\beta + 1)$  liegen, worin  $\beta$  höchstens = 9 ist, wenn sie nicht auf eine der Zahlen  $\alpha + 0,\beta$  selbst fallen, welche dann die Grenze der Reihe ist. Denn entweder wird  $\alpha + 0,9$  überschritten, und dann liegen sie von dem ersten überschreitenden Terme ab sämmtlich zwischen  $\alpha + 0,9$  und  $\alpha + 1$ , oder  $\alpha + 0,9$  wird nicht erreicht. Dann wird entweder  $\alpha + 0,8$  überschritten und sie liegen von dem überschreitenden ab zwischen  $\alpha + 0,8$  und  $\alpha + 0,9$ , oder  $\alpha + 0,8$  wird nicht erreicht u. s. w. Da aber  $\alpha$  nothwendig überschritten wird, so liegen sie also von einem bestimmten ab zwischen  $\alpha + 0,\beta$  und  $\alpha + 0, (\beta + 1)$ . Ist nun keine Zahl  $\alpha + 0,\beta$  die Grenze selbst, so bilden wir die Zahlen

$$\alpha + 0,\beta, \alpha + 0,\beta 1, \alpha + 0,\beta 2, \dots \alpha + 0,\beta 9, \alpha + 0, (\beta + 1)$$

und untersuchen nun von der Zahlenreihe den Rest der Terme, die  $\alpha + 0,\beta$  überschreiten. Dann liegen ans denselben Gründen wie vorher die Terme der Zahlenreihe von einem bestimmten ab sämmtlich zwischen zwei Zahlen  $\alpha + 0,\beta\gamma$  und  $\alpha + 0,\beta (\gamma + 1)$ , worin  $0 \cong \gamma \cong 9$ , oder sie fallen von einem bestimmten ab sämmtlich auf eine Zahl  $\alpha + 0,\beta\gamma$ , welche dann die Grenze der Reihe ist. Ist aber eine solche Grenze nicht vorhanden, so theile man das Intervall zwischen  $\alpha + 0,\beta\gamma$  und  $\alpha + 0,\beta (\gamma + 1)$  wieder in 10 Theile und fahre so fort. So gelangt man zu dem Resultat, dass die Terme von einem bestimmten ab zwischen zwei Zahlen

$$\alpha + 0,\beta\gamma\delta \dots \mu\nu\rho \quad \text{und} \quad \alpha + 0,\beta\gamma\delta \dots \mu\nu (\rho + 1)$$

liegen oder auf eine solche Decimalzahl selbst fallen, welche dann die Grenze der Reihe ist. Gelangt man auf diese Weise nie zu einem Ende, so liefert doch die fortgehende Untersuchung eine Methode, von einer Decimalzahl  $\alpha + 0,\beta\gamma\delta \dots \mu\nu\rho\sigma\tau \dots$  immer mehr Stellen zu bilden, gerade so wie der Algorithmus der Quadratwurzelausziehung eine Methode liefert, von einer Decimalzahl Stelle auf Stelle hinzuschreiben, man gelangt also so zu einer bestimmten Zahl  $a = \alpha + 0,\beta\gamma\delta \dots \mu\nu\rho\sigma\tau \dots$  und diese ist dann die Grenze

\*) Die Wörter „sämmtlich“, „alle“ und ähnliche sind bei diesen Untersuchungen nur mit Mühe zu vermeiden. Sie bedeuten nur: „so viel man auch bilden mag oder kann“.

der Reihe. Man kann immer einen Term  $a_n$  angeben, so dass dieser und alle folgenden sich von dieser Decimalzahl um weniger unterscheidet als jede noch so kleine vorgegebene Zahl.

Die Zahl  $a$  selbst wird in vielen Fällen von keinem Term erreicht, selbst dann nicht, wenn die Grenze eine Zahl  $\alpha + 0, \alpha\beta \dots \mu\nu\rho$  ist. Dann wird die Methode der Bestimmung dieser Grenze offenbar die Zahl  $\alpha + 0, \alpha\beta \dots \mu\nu(\rho - 1)9999 \dots$  liefern, welche  $\alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu\rho$  gleich ist. Der ähnliche

**Lehrsatz:** In einer Zahlenreihe, in welcher die Terme fortwährend abnehmen (oder wenigstens nicht zunehmen), aber nicht unter eine bestimmte positive oder negative Zahl herabsinken, nähern sich die Terme einer bestimmten Zahl, welche die Grenze der Zahlenreihe heisst, beliebig, braucht wohl nun nicht noch besonders bewiesen werden.

§ 3. Mit denselben Mitteln beweist man einen Satz über Zahlenreihen, in der die Terme nicht der Grösse nach geordnet sind:

**Lehrsatz.** Liegen die Terme einer Zahlenreihe  $a_1 a_2 \dots a_n \dots$  alle zwischen zwei endlichen Zahlen  $P$  und  $Q$  (die positiv oder negativ sein können), so giebt es eine bestimmte Zahl  $G$  von der Beschaffenheit, dass kein Term über  $G$  hinausgeht, dass aber Terme angegeben werden können, die sich von  $G$  beliebig wenig unterscheiden, und es giebt eine bestimmte Zahl  $g$ , unter welche keine Term herabsinkt, aber es können Terme angegeben werden, die sich von  $g$  beliebig wenig unterscheiden.  $G$  heisst die obere Grenze,  $g$  die untere Grenze der Zahlenreihe. Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass Terme diesen Grenzen wirklich gleich sind. (Wachsen die Terme einer Zahlenreihe von Anfang an, so ist die obere Grenze derselben das, was wir vorhin schlechthin Grenze nannten.)

Nehmen wir eine ganze Zahl  $u$ , die kleiner ist als einer der Terme, die in der Zahlenreihe stehen und nehmen wir an, dass kein Term grösser als die ganze Zahl  $u + v$  sei ( $u + v \cong Q$ ), so bilden wir wieder die endliche Reihe ganzer Zahlen  $u, u + 1, u + 2, \dots u + v$ . Dann giebt es entweder Terme, die über  $u + v - 1$  liegen oder nicht. Im ersten Falle giebt es Terme zwischen  $u + v - 1$  und  $u + v$ . Im letzten Falle giebt es entweder Terme, die  $u + v - 2$  übersteigen und dann giebt es also Terme zwischen  $u + v - 2$  und  $u + v - 1$  und darüber hinaus keine, u. s. w. Da aber Terme vorhanden sind, die  $u$  übersteigen oder wenigstens gleich  $u$  sind, so muss es zwischen  $u$  und  $u + v$  zwei ganze um Eins verschiedene Zahlen  $\alpha$  und  $\alpha + 1$  geben, so dass es Terme über  $\alpha$  giebt, diese aber sämmtlich unter  $\alpha + 1$  liegen, oder endlich, es fallen Terme auf eine solche ganze Zahl  $\alpha$  und es geht keiner darüber hinaus. Dann ist  $\alpha$  die obere Grenze der Reihe. Ist dies nicht der Fall, so theilen wir das Intervall zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + 1$  in 10 Theile  $\alpha, \alpha + 0,1, \alpha + 0,2, \dots \alpha + 0,9, \alpha + 1$ . Dann giebt es, wie dieselbe Schlussmethode zeigt, entweder Terme die  $\alpha + 0, \beta$  übersteigen und  $\alpha + 0, (\beta + 1)$  nicht übersteigen, oder es fallen Terme auf  $\alpha + 0, \beta$  und keiner geht darüber hinaus ( $0 \cong \beta \cong 9$ ), in welchem Falle  $\alpha + 0, \beta$  die obere Grenze der Reihe ist. So fährt man fort, das Intervall  $\alpha + 0, \beta$  bis  $\alpha + 0, (\beta + 1)$  in 10 Theile zu theilen wie vorhin, und gelangt zu dem Schluss: Es giebt entweder Terme zwischen  $\alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu\rho$  und  $\alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu(\rho + 1)$  und keiner geht über die letzte Zahl hinaus; oder es fallen Terme auf eine Zahl  $\alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu\rho$  und keiner geht darüber hinaus, in welchem Falle diese Zahl die obere Grenze der Zahlenreihe ist. Kommt man aber auf diese Weise nie zu einem Ende, so liefert doch die Untersuchung einen Algorithmus zur Bildung einer Decimalzahl  $\alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu\rho\sigma\tau \dots$  welche die obere Grenze der Reihe ist, die vielleicht von einem bestimmten Term erreicht ( $\alpha_x$  ist kein Term), vielleicht nicht erreicht wird, jedenfalls nicht überschritten wird. Denn gäbe es einen grössern Term, so müsste der Werth derselben sich in irgend einer Decimale von  $G = \alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu\rho\sigma\tau \dots$  unterscheiden und zwar grösser sein, dann wäre also bei Construction der Zahl  $G$  der Algorithmus falsch angewendet worden. Sollte etwa  $\alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu(\rho + 1)$  die obere Grenze sein, die nicht erreicht würde, so würde offenbar unser Algorithmus die Zahl  $\alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu\rho 999 \dots$ , die  $\alpha + 0, \beta\gamma \dots \mu\nu(\rho + 1)$  gleich ist, für  $G$  liefern.

Dass ebenso eine untere Grenze  $g$  vorhanden ist, bedarf wohl nun keines besonderen Beweises.

Als Beispiel diene die Zahlenreihe

$$1 - \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2^2}, -1 + \frac{1}{2^2}, 1 - \frac{1}{2^3}, -1 + \frac{1}{2^3}, \dots 1 - \frac{1}{2^\mu}, -1 + \frac{1}{2^\mu}, \dots$$

Die obere niemals erreichte Grenze ist 1, die untere  $-1$ .

§ 4. **Der Functionsbegriff.** Der Functionsbegriff pflegt in seiner allgemeinsten Bedeutung zum ersten Male bei der Lehre von den bestimmten Integralen aufzutreten, und es ist deshalb gerechtfertigt, denselben hier zu besprechen, obgleich er denen, die diese Lehre studiren, im Allgemeinen schon bekannt sein muss.\*)

Die Grösse  $y$  heisst in dem Intervalle von  $a$  bis  $b$  eine Function von  $x$ , wenn jeder Zahl  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  eine Zahl  $y$  zugeordnet ist.

Also eine Function von  $x$  ist eine Art Tabelle, in welche zu jeder Zahl  $x$  eine correspondirende Zahl  $y$  eingezeichnet ist; von einem analytisch darstellbaren Gesetz ist dabei gar nicht die Rede, wenngleich eine Methode erfordert wird, zu jedem Werth von  $x$  den betreffenden  $y$  in eindeutiger Weise zu bilden, weil eine Tabelle unmöglich alle rationalen und irrationalen Zahlen in einem noch so kleinen Intervalle enthalten kann. Es können aber diese Methoden für einzelne Theile der Intervalle oder für gewisse Classen von Zahlen s. B. für rationale und irrationale sehr verschiedene sein. Umkehrbar ist im Allgemeinen eine solche Function nicht, denn einerseits brauchen die Werthe von  $y$  gar nicht ein Intervall zusammenhängend auszufüllen, andererseits können zu einem  $y$  eine unzählige Menge von Werthen  $x$  gehören, so dass also zu einem  $y$  das  $x$  nicht eindeutig bestimmt ist.

Es scheint nöthig, einige Beispiele allgemeiner, nicht durch die gemeinen Methoden bestimmter Functionen zu geben.

Denkt man sich, es sei  $y$  für Zahlwerthe von  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  gleich 0, wenn der Zahlwerth \*) durch eine Decimalzahl mit endlich vielen Stellen ausgedrückt wird, aber gleich 1, wenn dazu unendlich viele Stellen nöthig sind (also für unendlich viele rationale Zahlen, und für alle irrationalen), so ist  $y$  für jedes  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  bestimmt, also  $y$  eine vollkommen definirte Function von  $x$ .

Eine Function, die für alle  $x$  ausser für  $x = +1$  und  $x = -1$  den Werth 0 hat, und an diesen beiden Stellen den Werth  $A$ , kann im Allgemeinen durch die Gleichung

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A \cdot n}{x^n + x^{-n} + n}$$

bestimmt werden, nur muss  $n$  für  $x = 0$  besonders definirt werden, weil  $0^{-n}$  nichts ist. Eine solche besondere Definition muss auch schon bei sehr einfachen Functionen an einzelnen Stellen angewendet werden, wenn die Rechnungsoperationen dort keinen Sinn haben. So ist zum Beispiel  $y = x : x$  im Allgemeinen gleich Eins, für  $x = 0$  aber ist sie durch die Gleichung nicht definirt. Bestimmt man sie für  $x = 0$  nicht besonders, so versteht man wohl meist den Grenzwert  $\lim x : x$  für dem absoluten Betrage nach abnehmende  $x$  darunter. Oft aber giebt es einen solchen Grenzwert nicht, oder er ist von der Richtung der Annäherung abhängig. Allein correct ist es, an solchen Stellen die Function besonders zu definiren.

Eine Function, die für alle positiven  $x$  den Werth  $\frac{1}{2}\pi$ , für alle negativen den Werth  $-\frac{1}{2}\pi$ , für  $x = 0$  den Werth 0 hat, ist

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(nx).$$

Diese Beispiele mögen genügen.

§ 5. **Obere und untere Grenze.** Eine Function von  $x$  ( $y = f[x]$ ), die zwischen  $a$  und  $b$  endlich bleibt, d. h. zwischen zwei angebbaren Zahlen  $P$  und  $Q$  liegt, und für jedes angebbare  $x$  in dem Intervalle bestimmt ist, hat eine obere Grenze  $G$  und eine untere Grenze  $g$ , so dass für keinen Werth von  $x$  die Function grösser als  $G$  oder kleiner als  $g$  ist, dass aber entweder für Werthe von  $x$  die Function  $y$  wirklich gleich  $G$  und  $g$  wird, oder dass Werthe von  $x$  angegeben werden können, für welche  $y$  sich von  $G$  und andere, für welche sich  $y$  von  $g$  beliebig wenig d. h. um weniger als eine dem absoluten Betrage nach noch so kleine Grösse  $\sigma$  unterscheidet.  $G$  und  $g$  sind bestimmte Zahlen.

Beweis. Da  $f(x)$  endlich ist, so gehen die Werthe für kein  $x$  über eine gewisse ganze Zahl  $u+v$  hinaus und sinken unter eine angebbare ganze Zahl  $u$  nicht herunter. Nun giebt es entweder Werthe

---

\*) Hier wird zunächst von reellen Functionen gesprochen. Eine complexe kann in zwei Theile  $y = \varphi(x) + i\psi(x)$  zerlegt werden, und  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  sind dann gesondert zu behandeln.



der Function, welche die ganze (positive oder negative) zwischen  $u$  und  $u+v$  gelegene Zahl  $\alpha$  übersteigt, und keinen der über  $\alpha+1$  hinausgeht, oder es giebt solche, die auf  $\alpha$  fallen, aber keinen der  $\alpha$  übersteigt. Im letzten Falle ist  $\alpha$  die obere Grenze, die also für ein bestimmtes  $x$  erreicht wird. Tritt dieser Fall nicht ein, so muss der erste eintreten, nach der im § 3 angewendeten Schlussmethode. Nun theilt man das Intervall zwischen  $\alpha$  und  $\alpha+1$  in die 10 Theile

$$\alpha+0,0, \alpha+0,1, \alpha+0,2, \dots \alpha+0,9, \alpha+1,$$

so tritt wieder die Alternative ein: entweder giebt es Werthe von  $f(x)$ , d. h. man kann  $x$  so bestimmen, dass  $y$  über  $\alpha+0,\beta$  hinausgeht, aber keinen für welchen  $y \cong \alpha+0, (\beta+1)$  ist, wenn  $0 \cong \beta \cong 9$  ist, oder es giebt Werthe, für welche  $y$  gleich  $\alpha+0,\beta$  wird, und es giebt keinen für welchen  $y$  über diese Zahl hinausgeht. Dann ist diese Zahl  $\alpha+0,\beta$  obere Grenze, die für ein bestimmtes  $x$  erreicht wird. Im andern Falle aber muss das Intervall von  $\alpha+0,\beta$  bis  $\alpha+0, (\beta+1)$  wieder in 10 Theile getheilt werden u. s. w. ganz wie im § 3. So gelangt man nach und nach zu einer bestimmten Zahl  $\alpha+0,\beta\gamma\dots\mu\nu\rho, \dots$  die die obere Grenze ist, welche vielleicht für irgend einen Werth von  $x$  erreicht wird, vielleicht auch nicht. Aber jedenfalls lassen sich Werthe von  $x$  angeben, die von dieser Zahl  $G$  um weniger als die beliebig klein vorgegebene Grösse  $\sigma$  kleiner sind. Denn ginge  $f(x)$  nicht über  $G-\sigma$  hinaus, so müsste der Algorithmus, der zur Herleitung von  $G$  diente, falsch angewendet sein, die obere Grenze wäre kleiner als  $G-\sigma$ , oder gleich  $G-\sigma$ . Die Schlüsse für die untere Grenze sind analog.

Theilt man das Intervall von  $a$  bis  $b$  in beliebige viele kleinere Intervalle  $a$  bis  $a_1$   $a_1$  bis  $a_2 \dots a_{n-1}$  bis  $b$ , so hat die Function in jedem Intervalle (die Grenzen jedesmal eingeschlossen) eine obere und untere Grenze. Die Differenz der obern und untern Grenze einer Function in einem bestimmten Intervalle soll die grösste Schwankung der Function in dem Intervalle genannt werden.

Die obere Grenze der Function  $\sin \pi x$  in dem Intervalle von 0 bis 2 ist 1 und sie wird für  $x=1$  erreicht. Die obere Grenze der Function

$$y = \sin x\pi - \lim_{n=\infty} \frac{n}{x^n + x^{-n} + n}$$

die für  $x=0$  Null sein soll, ist ebenfalls Eins, sie wird aber für keinen Werth von  $x$  zwischen 0 und 2 erreicht. Aber man kann  $x$  so wenig von 1 verschieden annehmen, dass auch  $y$  beliebig wenig von 1 verschieden ist.

§ 6. Lässt sich für jedes  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  eine bestimmte Zahl  $h$  so angeben, dass der absolute Betrag von

$$f(x+\xi h) - f(x) \cong \sigma$$

ist, worin  $\sigma$  eine dem absoluten Betrage nach beliebig klein vorgegebene Zahl ist, und worin  $\xi$  jede zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet, und worin für  $x=a$  nur das positive, für  $x=b$  nur das negative Zeichen vor  $\xi$  genommen werden soll, wenn  $a < b$  ist, (umgekehrt wenn  $a > b$  ist), so heisst  $f(x)$  in dem Intervall von  $a$  bis  $b$  stetig. Man kann die Stetigkeitsdefinition auch so fassen: Lässt sich in dem Intervall von  $a$  bis  $b$  für jedes  $x$  ein Intervall, welches  $x$  im Innern enthält, so bestimmen, dass die grösste Schwankung der Function  $f(x)$  in demselben kleiner als  $\sigma$  wird, so ist  $f(x)$  in dem Intervall von  $a$  bis  $b$  einschliesslich der Grenzen stetig. (Die Grenzen  $a$  und  $b$  können natürlich nur an der Grenze eines Intervalles liegen.)

Die Grösse eines Intervalles von  $x_1$  bis  $x_2$  sei die Differenz  $x_2-x_1$  absolut genommen.

**Lehrsatz.** Ist die Function  $f(x)$  in dem Intervall von  $a$  bis  $b$  stetig, so giebt es eine Grösse  $\delta$ , unter welche kein Intervall zwischen  $a$  und  $b$  herabzusinken braucht, wenn es an einer beliebigen Stelle so bestimmt werden soll, dass die grösste Schwankung kleiner als  $\sigma$  wird, oder was dasselbe ist, man kann das Intervall von  $a$  bis  $b$  in so viele gleiche Theile zerlegen, dass in jedem der hierdurch erhaltenen Intervalle die grösste Schwankung kleiner als  $\sigma$  wird.

**Beweis.\*** Vom Punkte  $a$  an ( $a$  sei der Bequemlichkeit halber kleiner als  $b$ ) giebt es ein solches Intervall  $\delta_1$  dass die grösste Schwankung darin kleiner als  $\frac{1}{2}\sigma$  ist; an dieses anstossend ein solches Intervall

\*) Auf die Nothwendigkeit, einen solchen Satz aufzustellen und zu beweisen, hat Herr E. Heine zuerst aufmerksam gemacht.

$\delta_2$ , so dass in ihm die grösste Schwankung kleiner als  $\frac{1}{2}\sigma$  ist u. s. w.  $\delta_3 \delta_4 \dots$ . Die Zahlen  $a + \delta_1, a + \delta_1 + \delta_2, \dots$  seien  $a_1, a_2, \dots$ , sie wachsen immerfort. Wenn man diese Zahlenreihe fortbildet, so kann diese Zahlenreihe, die fortwährend wächst,  $b$  so erreichen, dass die Anzahl ihrer Terme endlich bleibt, etwa  $n$  ist. Dann muss es nothwendig unter diesen Intervallen  $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$  ein kleinstes geben, welches mit  $\delta$  bezeichnet werden mag. Dann braucht an keiner Stelle zwischen  $a$  und  $b$  ein Intervall kleiner als  $\delta$  gemacht zu werden, damit die grösste Schwankung in dem Intervalle kleiner als  $\sigma$  sei. Denn die Grenzen eines solchen Intervalles können entweder in einem der Intervalle  $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$  liegen, und dann ist die grösste Schwankung  $< \frac{1}{2}\sigma$  oder sie können in zwei benachbarten liegen, und dann ist die grösste Schwankung immer noch kleiner als  $\sigma$ .

Der andere Fall aber, dass die Zahlenreihe  $a_1, a_2 \dots a_n \dots$  sich einer Zahl  $c \equiv b$  unaufhörlich nähert, ohne sie zu erreichen, wird ad absurdum geführt. Die Intervalle  $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$  müssten dann offenbar von einem bestimmten ab kleiner als eine noch so klein vorgegebene Grösse  $\varepsilon$  werden. Nun aber giebt es eine bestimmte Zahl  $\varepsilon$ , für welche  $f(c - \xi\varepsilon) - f(c)$  absolut genommen  $< \frac{1}{2}\sigma$  wird, und da die Zahlenreihe  $a_1 a_2 \dots$ , wenn sie sich  $c$  nähert, mit einem bestimmten Term  $a_n$  die Zahl  $c - \varepsilon$  überschreitet, so brauchen mithin nicht noch zwischen  $a_n$  unendlich viele Zahlen  $a_{n+1} a_{n+2} \dots$  eingeschaltet zu werden, damit in den Intervallen  $a_n$  bis  $a_{n+1}$ ,  $a_{n+1}$  bis  $a_{n+2}$ ,  $a_{n+2}$  bis  $a_{n+3} \dots$  die grösste Schwankung unter  $\frac{1}{2}\sigma$  bleibt, sondern es kann sofort für  $a_{n+1}$  die Zahl  $c$  gesetzt werden. Also muss immer der erste Fall eintreten, die Anzahl der  $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$  muss endlich sein. ( $\xi \equiv 1$ ).

Wäre in einer Function überall nur  $f(x + \xi h) - f(x) < \sigma$ , nicht nothwendig auch  $f(x - \xi h) - f(x) < \sigma$ , so wäre der hier aufgestellte Satz nicht richtig. Denn in der Function

$$y = \lim_{n=\infty} \arctg(xn) + \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \frac{n\pi}{(1-x)^n + (1-x)^{-n} + n} = f(x)$$

ist für jedes  $x$  ein  $h$  angebar, so dass  $f(x + \xi h) - f(x) < \sigma$  wird, dieses  $h$  muss aber unter jede noch so kleine Zahl herabsinken, wenn  $x$  sich von der negativen Seite her der 0 nähert.

§ 7. Hieraus folgt leicht, dass wenn zwei zwischen  $a$  und  $b$  stetige Functionen  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  für alle Zahlen  $x$  von der Form  $a + (2)^{-m}$  gleich sind, wenn  $a$  eine beliebige ganze, und  $m$  jede ganze positive Zahl ist, so sind sie für alle  $x$  gleich.

Nehmen wir die Einfachheit, für  $a$  die Null, und für  $b$  die Eins, so kann man die Zahl  $m$  so gross annehmen, dass die Zahlen

$$0, \frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, \frac{3}{2^m} \dots \frac{2^m - 1}{2^m}, \frac{2^m}{2^m}$$

Intervalle bestimmen, die kleiner als jede noch so klein vorgegebene Zahl  $\Delta$  sind. Nimmt man nun  $\Delta$  so klein, dass die grösste Schwankung der Functionen  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  in allen Intervallen von der Grösse  $\Delta$  weniger als  $\sigma$  beträgt, was nach vorigem Paragraphen möglich ist, so können sich die Werthe von  $f$  und  $\varphi$  für ein beliebiges  $x$  zwischen 0 und 1 nur um weniger als  $\sigma$  unterscheiden und müssen also, wenn der Gleichheitsbegriff nach § 1 gefasst wird, da  $\sigma$  beliebig klein genommen werden kann, einander gleich sein.

Ebenso müssen zwei stetige Functionen einander überall gleich sein, wenn sie es für alle Decimalzahlen sind oder für alle irrationalen Zahlen etc.

Ein vielfach angewendeter, hierher gehörender Satz ist der: Wenn zwei Functionen im Intervall von  $a$  bis  $b$  stetig sind und für alle  $x < b$  im Intervall übereinstimmen, so sind sie auch für  $x = b$  einander gleich. Oder auch wenn sie für  $x > a$  übereinstimmen, so sind sie auch für  $x = a$  einander gleich.

Sind nämlich  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  die Functionen, so ist

$$f(b-h) = f(b) \pm \xi\sigma, \quad \varphi(b-h) = \varphi(b) \pm \xi'\sigma'$$

worin  $\sigma, \sigma'$  absolut genommen beliebig klein sind, wenn  $h$  klein genug genommen wird, und  $\xi$  um  $\xi'$  zwischen 0 und 1 liegen. Nun ist aber, wie klein auch  $h$  sein mag,  $f(b-h) = \varphi(b-h)$ , also  $f(b) \pm \xi\sigma = \varphi(b) \pm \xi'\sigma'$  und also  $f(b) - \varphi(b) = \mp \xi\sigma \pm \xi'\sigma'$  also absolut genommen kleiner als  $\sigma + \sigma'$ . Also können sich diese Werthe, da  $\sigma$  und  $\sigma'$  beliebig klein genommen werden können, dem absoluten Betrage nach um weniger als jede noch so kleine vorgegebene Zahl unterscheiden, mithin sind sie gleich. Ebenso  $f(a) = \varphi(a)$ .

Unstetige Functionen können für einen Werth  $c$  leicht andere Werthe erhalten als diejenigen sind, die man erhält, wenn  $x$  zunehmend, oder wenn  $x$  abnehmend dem Werthe  $c$  sich nähert. Dirichlet bezeichnet die Grenzwerte  $\lim_{h=0} f(x+h)$  und  $\lim_{h=0} f(x-h)$  bez. mit  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$ , was hier auch geschehen soll. Ist  $f(x) = \lim_{u=\infty} \text{arc tg}(ux)$ , so ist  $f(+0) = \frac{1}{2}\pi$ ,  $f(-0) = -\frac{1}{2}\pi$ ,  $f(0) = 0$ . Auch können bei einer vollkommen bestimmten Function  $f(x+0)$  oder  $f(x-0)$  unbestimmt sein. Die Function  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x-a}\right)$  die für  $x=a$  gleich Null sein soll, ist für jeden Werth von  $x$  bestimmt, aber  $f(a+0)$  und  $f(a-0)$  haben keinen Sinn.

§ 8. **Maxima und Minima.** Eine in dem Intervalle von  $a$  bis  $b$  stetige Function hat in demselben mindestens ein Maximum und mindestens ein Minimum, d. h. es giebt mindestens einen bestimmten Werth von  $x$ , für welchen sie ihre obere Grenze erreicht, und mindestens einen Werth von  $x$ , für welchen sie ihre untere Grenze erreicht.

Beweis. Wir begnügen uns, den Satz für das Intervall 0 bis 1 zu beweisen, weil durch die Substitution  $x' = (x-a):(b-a)$  die zwischen  $a$  und  $b$  vorgegebene Function in eine andere verwandelt wird, welche in dem Intervall von 0 bis 1 stetig ist. Jedem Werthe von  $x'$  aber entspricht ein und nur ein Werth von  $x$ .

Das Intervall von 0 bis 1 theilen wir in zehn Theile durch die Zahlen 0, 0,1, 0,2, ... 0,9, 1. So muss wenigstens in einem die obere Grenze  $G$  dieselbe sein als in dem Intervalle von 0 bis 1. Dies Intervall 0,  $\alpha$  bis 0,  $(\alpha+1)$  theilen wir in 10 Theile durch die Zahlen 0,  $\alpha 0$ , 0,  $\alpha 1$ , 0,  $\alpha 2$ , ... 0,  $\alpha 9$ , 0,  $(\alpha+1)$ . So muss wenigstens in einem dieser Intervalle die obere Grenze  $G$  sein, etwa zwischen 0,  $\alpha\beta$  und 0,  $\alpha(\beta+1)$ . So theilen wir wieder in 10 Theile und fahren so fort zu schliessen, und gelangen so nach und nach zu einer Zahl 0,  $\alpha\beta\gamma \dots \mu\nu\rho \dots$  von der Beschaffenheit, dass zwischen 0,  $\alpha$ , und 0,  $\alpha+1$ , zwischen 0,  $\alpha\beta$  und 0,  $\alpha(\beta+1)$ , zwischen 0,  $\alpha\beta \dots \mu\nu\rho$  und 0,  $\alpha\beta \dots \mu\nu(\rho+1)$  die obere Grenze  $G$  ist. Ich behaupte für  $x_0 = 0, \alpha\beta \dots \mu\nu\rho \dots$  ist  $f(x_0) = G$ . Wäre  $f(x_0) = G - \Delta$  (grösser als  $G$  kann  $f(x_0)$  nicht sein, weil  $G$  die obere Grösse ist), so kann man auf beiden Seiten von  $x_0$  ein so kleines Intervall  $h$  abschneiden, dass in diesem Intervall  $f(x_0 \pm \xi h) = f(x_0) \pm \xi' \frac{1}{2} \Delta$  ist, wie klein auch  $\Delta$  wäre, wobei  $\xi, \xi'$  zwischen 0 und 1 liegen. Also wäre  $f(x_0 \pm \xi h) < G - \Delta + \xi' \frac{1}{2} \Delta < G - \frac{1}{2} \Delta$ . Andererseits aber kann man so viel Stellen von der Zahl  $x_0$  abschneiden, dass die beiden Zahlen 0,  $\alpha\beta \dots \mu\nu\rho$  und 0,  $\alpha\beta \dots \mu\nu(\rho+1)$  ins Innere des Intervalles  $x_0 - h$  bis  $x_0 + h$  fallen; in diesem Intervalle aber ist die obere Grenze  $G$ , d. h. man kann Werthe von  $x$  angeben, für welche  $f(x) > G - \frac{1}{2} \Delta$  (nach § 6) wird. Also einmal folgt, dass  $f(x)$  im Intervall von  $x_0 - h$  bis  $x_0 + h$  kleiner als  $G - \frac{1}{2} \Delta$  sein müsste, ein andermal, dass in dem ganz im Innern von  $x_0 - h$  bis  $x_0 + h$  liegenden Intervalle zwischen 0,  $\alpha\beta \dots \mu\nu\rho$  und 0,  $\alpha\beta \dots \mu\nu(\rho+1)$  die Function Werthe haben müsse, die grösser als  $G - \frac{1}{2} \Delta$  sind. Dieses ist aber nicht vereinbar, wenn nicht  $\Delta = 0$  ist, also wenn nicht  $f(x_0) = G$  ist.

§ 9. **Lehrsatz.** Eine zwischen  $a$  und  $b$  stetige Function von  $x$  nimmt jeden Werth zwischen ihrem Maximum und Minimum mindestens einmal an.

Liegt die Zahl  $M$  zwischen  $g$  und  $G$  ( $g \cong M \cong G$ ), so muss die Function  $[f(x) - M]^2$ , die stetig ist, für irgend einen Werth von  $x$  ihre untere Grenze annehmen. Diese sei  $\Delta^2$ . Wäre  $\Delta = 0$ , so heisst das, für einen bestimmten Werth von  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  ist  $f(x) = M$ . Wäre aber  $\Delta$  von 0 verschieden, so könnte  $f(x)$  keinen Werth zwischen  $M - \Delta$  und  $M + \Delta$  annehmen, weil sonst  $[f(x) - M]^2 < \Delta^2$  wäre. Nun kann man aber das Intervall von  $a$  bis  $b$  in eine so grosse Zahl gleicher Theile zerlegen, dass in jedem die grösste Schwankung kleiner als  $\Delta$  wird, wenn  $\Delta$  nicht 0 ist. Sind die Theilpunkte  $a, a_1, \dots, a_{n-1}$ , so bilden die Werthe  $f(a), f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{n-1}), f(b)$  eine endliche Anzahl von Zahlen, von denen je zwei auf einander folgende, höchstens um  $\Delta$  von einander verschieden sind und von denen dann mindestens eine grösser als  $G - \Delta$ , eine kleiner als  $g + \Delta$  ist, weil in irgend einem Intervall  $f(x) = G$ , in einem andern  $f(x) = g$  ist. Also muss auch unter der endlichen Anzahl von Zahlen  $f(a), f(a_1) \dots$  eine vorhanden sein, die von  $M$  um weniger als  $\Delta$  verschieden ist, so dass  $[f(a_\mu) - M]^2 < \Delta^2$  ist, wenn  $f(a_\mu)$  jene Zahl ist. Also

kann es eine von 0 verschiedene untere Grenze der Function  $[f(x) - M]^2$  nicht geben. Man schreibt dies so: Ist  $f(x)$  stetig zwischen  $a$  und  $b$ , so kann immer

$$g + \xi(G-g) = f[a + \xi'(b-a)] = f[b + \xi''(a-b)]$$

gesetzt werden, wobei  $\xi, \xi', \xi''$  zwischen 0 und 1 liegen.

§ 10. **Lehrsatz.** Wenn eine in dem Intervall von  $a$  bis  $b$  stetige Function so beschaffen ist, dass ein positives  $h$  für jedes  $x$  so bestimmt werden kann, dass

$$[w(x+h) - w(x)]:h$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als  $\sigma$  ist, wie klein auch  $\sigma$  vorgegeben sein mag, wenn also ( $\lim h = 0$ )

$$\lim [w(x+h) - w(x)]:h = 0$$

ist, so ist für alle  $x$  zwischen  $a$  und  $b$

$$w(x) = w(a) = w(b) = \text{Const.}$$

Weun nicht bloss  $[w(x+h) - w(x)]:h$ , sondern auch  $[w(x-h) - w(x)]:-h$  die Grenze 0 hat, wenn also überall der in gewöhnlicher Weise genommene Differentialquotient zwischen  $a$  und  $b$  Null ist, so ist die Forderung der Stetigkeit der Function  $w(x)$  überflüssig, weil sie in der Gleichung

$$w(x \pm h) - w(x) \text{ absolut genommen } \equiv h \sigma$$

schon enthalten ist.

Es ist nicht unwichtig, auch Functionen in der Integralrechnung zu betrachten, in denen der vorwärts genommene Differentialquotient, wie wir den Ausdruck  $\lim [w(x+h) - w(x)]:h$  nennen wollen, von dem rückwärts genommenen Differentialquotienten  $\lim [w(x-h) - w(x)]:-h$  verschieden ist, oder in denen der eine oder andere gar nicht existirt.

Es sind demnach die beiden Sätze zu beweisen:

Ist  $w(x)$  eine in dem Intervalle von  $a$  bis  $b$  stetige Function, und ist entweder

erstens der vorwärts genommene Differentialquotient überall gleich Null,

oder ist zweitens der rückwärts genommene Differentialquotient überall gleich Null,

so ist  $w(x) = w(a) = w(b)$ , wenn  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt.

Beweis.\*) Der Einfachheit halber sei  $a < b$ , und der vorwärts genommene Differentialquotient von  $w(x)$  sei Null. Wir setzen

$$w(x) - w(a) + \alpha(x-a) = \varphi(x), \quad w(x) - w(a) - \alpha(x-a) = \psi(x)$$

dann ist der vorwärts genommene Differentialquotient von  $\varphi(x) = \alpha$ , der von  $\psi(x) = -\alpha$  ausgenommen für  $x = b$ , wo dieser Differentialquotient nicht gebildet werden kann,  $\alpha$  sei positiv. Dann ist, so lange  $a \leq x < b$  ist,  $\varphi(x+h) = \varphi(x) + \alpha h \pm \varepsilon h$ , worin  $\varepsilon$  mit  $h$  gegen Null convergirt, weil  $\lim [\varphi(x+h) - \varphi(x)]:h = \alpha$  ist, also immer kleiner als  $\alpha$  gemacht werden kann, so dass also  $\varphi(x+h) > \varphi(x)$  ist. Betrachten wir demnach die stetige Function  $\varphi(x)$  in dem Intervalle von  $a$  bis  $x'$  ( $x' < b$ ), so muss sie ihre obere Grenze nach § 8 irgendwo erreichen, weil sie stetig ist, da aber im Innern des Intervalles an jeder Stelle  $x$  ein benachbarter Werth  $x+h$  gefunden werden kann, für den sie grösser ist, so muss sie ihr Maximum für  $x = x'$  erreichen, während ihr Minimum  $\varphi(a) = 0$  ist. Daraus folgt, dass  $\varphi(x') \geq \varphi(a)$  also  $\varphi(x') \geq 0$  sein muss. Da  $\psi(x+h) - \psi(x) = -\alpha h \pm \varepsilon h$  ist, und  $\varepsilon$  so klein gemacht werden kann, dass  $\psi(x+h) - \psi(x)$  negativ ist, so ergiebt eine analoge Schlussweise, dass die stetige Function  $\psi(x)$  in dem Intervall von  $a$  bis  $x'$  ihr Minimum für  $x = x'$  erreicht, ihr Maximum aber für  $x = a$ , so dass also  $\psi(x') \leq \psi(a)$  oder  $\psi(x') \leq 0$  sein muss. Nun ist

$$\varphi(x') > 0 \quad \text{oder} \quad w(x') - w(a) > -\alpha(x'-a)$$

$$\psi(x') < 0 \quad \text{oder} \quad w(x') - w(a) < \alpha(x'-a)$$

oder es ist

$$-\alpha(x'-a) \leq w(x') - w(a) \leq \alpha(x'-a),$$

und da  $\alpha$  beliebig klein gemacht werden kann, so kann sich  $w(x')$  von  $w(a)$  um weniger als jede noch so kleine absolute Zahl unterscheiden, sie sind mithin gleich, so lange  $a \leq x' < b$ , wie nahe  $x'$  auch an  $b$  genommen wird. Da aber  $w(x)$  stetig ist, so muss nach § 7 auch  $w(b) = w(a)$  sein, w. z. b. w.

---

\*) Der beifolgende Beweis ist schon von Dirichlet gegeben. Man vergleiche Meyer: Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale. pagg. 27. 28.

Der Beweis für den Fall, dass der rückwärts genommene Differentialquotient Null ist, ist nicht wesentlich von dem gegebenen verschieden.

In der Function  $w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(nx) + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n}{x^n + x^{-n} + n}$  ist in dem Intervall von  $-1$  bis  $+1$  der vorwärts genommene Differentialquotient überall gleich 0. Die Function  $w(x)$  ist aber nicht constant, sondern hat zwei verschiedene Werthe. Sie ist aber unstetig.

§ 11. Wenn eine stetige Function  $w(x)$  existirt, deren vorwärts genommener Differentialquotient in dem Intervalle von  $a$  bis  $b$  überall gleich  $f(x)$  ist, so kann sie sich von einer andern stetigen Function  $\omega(x)$  mit derselben Eigenschaft, nur durch eine additive Constante unterscheiden.

Denn setzt man  $w(x) - \omega(x) = \varphi(x)$ , so ist  $\varphi(x)$  eine stetige Function, die in dem Intervall den vorwärts genommenen Differentialquotienten Null hat, also ist  $\varphi(x) = \varphi(a)$ , also im Intervall  $w(x) = \omega(x) + \varphi(a) = \omega(x) + \text{Const.}$ , w. z. b. w. Ob  $f(x)$  stetig ist oder nicht, kommt hierbei nicht in Betracht, wenn nur  $f(x)$  für jedes  $x$  vorhanden ist. Auch braucht in einer völlig bestimmten Function von  $x$   $f(x+0)$  oder  $f(x-0)$  nicht bestimmt zu sein, denn davon ist im Beweise nicht die Rede. Eine andere, später zu erledigende Frage ist freilich die, ob für Functionen  $f(x)$ , in denen  $f(x \pm 0)$  unbestimmt ist, die Annahme der Existenz einer Function  $w(x)$  zulässig ist.

Wenn die beiden stetigen Functionen  $w(x)$  und  $\omega(x)$  zwischen  $a$  und  $b$  überall denselben rückwärts genommenen Differentialquotienten  $f(x)$  haben, so können  $w(x)$  und  $\omega(x)$  ebenfalls nur um eine Constante verschieden sein. Der Beweis ist derselbe.

Es wird sich später zeigen, dass zwei stetige Functionen  $w(x)$  und  $\omega(x)$ , von denen der vorwärts genommene Differentialquotient der einen und der rückwärts genommene der andern in einem Intervalle einander gleich sind (so weit dies überhaupt möglich ist), sich nur um eine additive Constante unterscheiden können. Ebenso zeigt erst eine spätere Untersuchung, in welchen Fällen eine Function  $w(x)$  existirt, deren vor- oder rückwärts genommener Differentialquotient  $f(x)$  ist.

§ 12. In dem Falle, in welchem eine stetige Function  $w(x)$  existirt, deren vor- oder rückwärts genommener Differentialquotient zwischen  $a$  und  $b$  gleich  $f(x)$  ist, pflegt man sie mit  $\int f(x) dx$  zu bezeichnen, und die Differenz  $w(x) - w(a)$  mit  $\int_a^x f(x) dx$ . In dem Ausdrücke  $\int_a^x f(x) dx$  ist also die additive Constante so eingerichtet, dass die Function  $w(x)$ , das Integral von  $f(x)$ , für  $x = a$  verschwindet. Die Differenz  $w(x) - w(a)$  schreibt man oft auch  $[w(x)]_a^x$ ,  $\int_a^b f(x) dx = w(b) - w(a)$ . Der Werth eines Integrals ist nur von der unteren Grenze  $a$  und der oberen Grenze  $b$  derselben, nicht vom Integrationsbuchstaben  $x$  abhängig. Man pflegt freilich oft für die obere Grenze und den Integrationsbuchstaben dieselbe Bezeichnung zu wählen. Differenzirt man ein Integral nach der oberen Grenze, so ist das Resultat die unter dem Integrationszeichen stehende Function, wenn man für die Veränderliche darin die obere Grenze einsetzt.

War das Integral durch den vorwärts genommenen Differentialquotienten definiert, so kann man zunächst nur vorwärts, im andern Falle nur rückwärts differenziren.

Aus den Elementen der Integralrechnung sind die Sätze bekannt, die wir hier einfach hinschreiben,

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx,$$

$$\int_a^b \text{Const.} f(x) dx = \text{Const.} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(b) \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \frac{\partial f(x)}{\partial x} \int_a^x \varphi(x) dx dx = f(a) \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \frac{\partial f(x)}{\partial x} \int_x^b \varphi(x) dx dx,$$

wenn  $f$  und  $\varphi$  integrable Functionen sind, und wenn  $f$  im Intervalle von  $a$  bis  $b$  überall einen Differentialquotienten besitzt.

§ 13. **Erster Mittelwerthsatz.** Der Werth des bestimmten Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  (gelesen das Integral der Function  $f(x)$  von  $a$  bis  $b$ ), gleichviel ob es die Differenz der Werthe einer stetigen Function

$w(x)$  für  $x$  gleich  $b$  und  $x$  gleich  $a$ , also  $w(b) - w(a)$  ist, deren vorwärts genommener Differentialquotient gleich  $f(x)$  ist, oder deren rückwärts genommener Differentialquotient gleich  $f(x)$  ist, kann gleich

$$[g + \xi(G - g)](b - a)$$

gesetzt werden, wenn  $G$  die obere,  $g$  die untere Grenze der Function  $f(x)$  in dem Intervalle von  $a$  bis  $b$  ist.\*) Ist  $f(x)$  zwischen  $a$  und  $b$  stetig, so kann man dann auch setzen:

$$\int_a^b f(x) dx = f(a + \xi \overline{b - a})(b - a),$$

worin  $\xi$  zwischen Null und Eins liegt.

Beweis. Die Integrale

$$\int_a^x [f(x) - G] dx = \Phi(x) - \Phi(a), \quad \int_a^x [f(x) - g] dx = \Psi(x) - \Psi(a)$$

haben die Eigenschaft, dass der vorwärts (eventuell rückwärts) genommene Differentialquotient des ersten nie positiv, der des zweiten nie negativ ist. Also ist  $\Phi(x) - \Phi(a) \cong 0$ ,  $\Psi(x) - \Psi(a) \cong 0$  für alle Werthe von  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  (man vergleiche § 10). Nun ist

$$\int_a^x [f(x) - G] dx = \int_a^x f(x) dx - G(x - a) = \Phi(x) - \Phi(a) \cong 0,$$

$$\int_a^x [f(x) - g] dx = \int_a^x f(x) dx - g(x - a) = \Psi(x) - \Psi(a) \cong 0,$$

also

$$G(x - a) \cong \int_a^x f(x) dx \cong g(x - a),$$

also liegt das Integral zwischen  $G(x - a)$  und  $g(x - a)$ , w. z. b. w.

Dieser Satz bildet die Grundlage der Entwicklung einer Function in die Taylorsche Reihe. Hat nämlich die stetige Function  $f(x)$  in dem Intervalle von  $x$  bis  $x + h$  den vorwärts (oder rückwärts) genommenen Differentialquotienten  $f'(x)$ , so ist  $f(x + h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(x) dx = hf'(x + \xi h)$  und also ist

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \xi h),$$

worin  $h$  positiv oder negativ sein kann.

**Verallgemeinerung.** Wechselt die Function  $\varphi(x)$  in dem Intervalle von  $a$  bis  $b$  ihr Zeichen nicht, so ist

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = [g + \xi(G - g)] \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Beweis. Es sei  $\varphi(x)$  positiv, so ist

$$\int_a^b [f(x) - G] \varphi(x) dx \cong 0, \quad \int_a^b [f(x) - g] \varphi(x) dx \cong 0,$$

$$g \int_a^b \varphi(x) dx \cong \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \cong G \int_a^b \varphi(x) dx,$$

woraus der zu beweisende Satz unmittelbar folgt.

§ 14. **Zerlegung des Intervalles.** Sind  $a, b, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  Zahlen, welche von der kleinsten unter ihnen bis zur grössten ein Gebiet umfassen, in welchem eine stetige Function

$$w(x) - w(a) = \int_a^x f(x) dx$$

existirt, deren vorwärts (oder auch rückwärts) genommener Differentialquotient gleich  $f(x)$  ist, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^b f(x) dx,$$

weil  $w(b) - w(a) = w(a_1) - w(a) + w(a_2) - w(a_1) + \dots + w(b) - w(a_{n-1})$  ist.

\*) Hat  $f(x)$  keine obere oder untere Grenze, weil es über jede angebbare Zahl wächst, oder unter jede, absolut genommen noch so grosse, negative Zahl herabsinkt, so hat der Satz keinen Sinn. In den zunächst folgenden Untersuchungen wird  $f(x)$  immer als endlich vorausgesetzt.

§ 15. **Ausdehnung des ersten Mittelwerthsatzes.** Liegen die Zahlen  $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$  zwischen  $a$  und  $b$ , so ist

$$\int_a^b f(x) dx = (a_1 - a)[g_0 + (G_0 - g_0)\xi_0] + (a_2 - a_1)[g_1 + (G_1 - g_1)\xi_1] + \dots + (b - a_{n-1})[g_{n-1} + (G_{n-1} - g_{n-1})\xi_{n-1}],$$
 wenn  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  zwischen 0 und 1 liegen, und  $G_\mu$  die obere,  $g_\mu$  die untere Grenze von  $f(x)$  im Intervalle von  $a_\mu$  bis  $a_{\mu+1}$  ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar, wenn man auf die Glieder der rechten Seite in der Gleichung

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^b f(x) dx$$

den Mittelwerthsatz des § 13 anwendet.

Ist  $f(x)$  zwischen  $a$  und  $b$  stetig, so kann man schreiben

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} (a_{\mu+1} - a_\mu) f[a_\mu + \xi_\mu(a_{\mu+1} - a_\mu)],$$

wobei  $a_0 = a, a_n = b$  zu setzen ist.

§ 16. **Hilfssatz.** Sind die Grössen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  entweder sämmtlich positiv, oder sämmtlich negativ, und sind  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  beliebige Zahlen, deren grösste  $B$ , deren kleinste  $b$  sein mag, so ist

$$\sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu \beta_\mu = [b + \xi(B - b)] \sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu.$$

Man kann den Beweis auf den Fall positiver  $\alpha$  beschränken, weil man im Fall negativer  $\alpha$  das gemeinsame negative Zeichen vor das Summenzeichen setzen kann. Dann ist:

$$b \sum \alpha_\mu \equiv \sum \alpha_\mu \beta_\mu \equiv B \sum \alpha_\mu$$

oder

$$\sum \alpha_\mu \beta_\mu = [b + \xi(B - b)] \sum \alpha_\mu,$$

worin  $\xi$  zwischen 0 und 1 liegt, w. z. b. w.

§ 17. **Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe.** Es fragt sich nun, ob, oder in welchen Fällen in dem ausgedehnten Mittelwerthsatz im § 15  $n$  über alle Grenzen wachsen darf. Wenn die Existenz einer stetigen Function  $w(x)$  vorausgesetzt wird, deren vorwärts genommener oder deren rückwärts genommener Differentialquotient in dem Intervalle von  $a$  bis  $b$  gleich  $f(x)$  ist, so muss natürlich, wie gross auch  $n$  sei, und wie klein auch die Intervalle  $a_{\mu+1} - a_\mu$  sein mögen, die Gleichung des § 15 richtig sein. Allein es sind dann die  $\xi$  zwar unbekannt, zwischen 0 und 1 liegende, aber bestimmte Grössen. Für die Theorie der bestimmten Integrale ist aber jener Ausdruck

$$\sum_{(\mu)} (a_{\mu+1} - a_\mu) [g_\mu + \xi_\mu(G_\mu - g_\mu)]$$

nur dann von Nutzen, wenn er für abnehmende Intervalle von den Grössen  $\xi_\mu$  unabhängig wird, und das trifft in der That in einer wichtigen Reihe von Fällen zu.\*

Wir beweisen nun in diesem und dem folgenden Paragraph die beiden Sätze:

Wenn die Summe

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} (a_{\mu+1} - a_\mu)(G_\mu - g_\mu), \quad (a_0 = a, a_n = b)$$

\* Ob es möglich ist, dass eine Function  $f(x)$  der vorwärts oder rückwärts genommene Differentialquotient einer stetigen Function  $w(x)$  in dem Intervall von  $a$  bis  $b$  ist, ohne dass der Grenzwert der obigen Summe von den  $\xi$  unabhängig wäre, darüber sind mir keine Untersuchungen bekannt.

dadurch dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden kann, dass man die Intervalle  $a_{\mu+1} - a_{\mu}$  hinlänglich klein macht, so ist der Grenzwert der Summe

$$S_n = \sum_0^{n-1} (a_{\mu+1} - a_{\mu}) [g_{\mu} + \xi_{\mu}(G_{\mu} - g_{\mu})]$$

erstens von der Wahl der  $\xi$  unabhängig,

zweitens von der Wahl der Theilpunkte  $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$  unabhängig,

wenn nur sämtliche  $a_{\mu+1} - a_{\mu}$  hinlänglich klein werden, und es hat also die Summe  $S_n$  einen bestimmten Grenzwert, welcher nach § 15 dem Integral  $\int_a^b f(x) dx$  gleich sein muss.

Bei dem Beweise dieser Sätze setzen wir voraus, dass  $b > a$  sei, was man durch Umkehr der Grenzen immer erreichen kann, ohne die Allgemeinheit zu beschränken. Dann theilen wir das Intervall so ein, dass die Theilintervalle

$$\begin{aligned} a_1^1 - a, \quad a_2^1 - a_1^1, \quad a_3^1 - a_2^1, \quad \dots, \quad b - a_{n-1}^1 & \text{ sämtlich } < d_1, \\ a_1^2 - a, \quad a_2^2 - a_1^2, \quad a_3^2 - a_2^2, \quad \dots, \quad b - a_{n-1}^2 & \text{ sämtlich } < d_2, \\ \dots & \dots \\ a_1^v - a, \quad a_2^v - a_1^v, \quad a_3^v - a_2^v, \quad \dots, \quad b - a_{n-1}^v & \text{ sämtlich } < d_v, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

sind, und zwar so, dass  $d_1, d_2 \dots d_v, \dots$  eine fortwährend abnehmende, unter jede noch so kleine vorgegebene Zahl herabsinkende Reihe positiver Grössen sind, und dass die zweite Theilung  $a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots$  sämtliche Theilpunkte der ersten Theilung  $a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots a_{n-1}^1$  mit enthält, und so weiter jede folgende Theilung sämtliche Theilpunkte jeder vorhergehenden Theilung ebenfalls als Theilpunkte enthält, so dass natürlich  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  ist. Es sei ferner die obere Grenze der Function  $f(x)$  im Intervall von  $a_{\mu}^v$  bis  $a_{\mu+1}^v$   $G_{\mu}^v$  die untere  $g_{\mu}^v$ . Nun bilden wir die Zahlenreihen

$$\begin{aligned} A_1, A_2, A_3, \dots, A_v \dots \\ B_1, B_2, B_3, \dots, B_v \dots \end{aligned}$$

worin

$$A_v = \sum_0^{n_v-1} (a_{\mu+1}^v - a_{\mu}^v) G_{\mu}^v, \quad B_v = \sum_0^{n_v-1} (a_{\mu+1}^v - a_{\mu}^v) g_{\mu}^v$$

ist, so nehmen die Terme der ersten Zahlenreihe nie zu, die der zweiten niemals ab, und es ist  $A_1 \geq B_1 \dots A_v \geq B_v$ , so dass auch  $A_v \geq B_1, B_v \leq A_1$  ist, und mithin  $A_v, B_v$ , wie gross auch  $v$  sein mag, bez. unter die endliche Zahl  $B_1$  nicht herabgehen, und über die endliche Zahl  $A_1$  nicht hinausgehen können. Nach § 2 besitzen demnach diese Zahlenreihen bestimmte Grenzen, die mit  $A$  und  $B$  bezeichnet werden mögen.

Es ist nämlich  $G_{\mu}^1$  das Maximum unter den Grössen  $G_{\rho}^2, G_{\rho+1}^2, \dots, G_{\rho+\psi}^2$ , wenn  $a_{\rho}^2, a_{\rho+1}^2 \dots a_{\rho+\psi}^2$  zusammen das Intervall  $a_{\mu}^1$  bis  $a_{\mu+1}^1$  ausmachen, so dass  $a_{\rho}^2 = a_{\mu}^1, a_{\rho+\psi}^2 = a_{\mu+1}^1$  ist. Und da die Differenzen  $a_{\lambda+1}^2 - a_{\lambda}^2$  sämtlich positiv sind, so ist nach dem Hilfssatz des § 16

$$(a_{\mu+1}^1 - a_{\mu}^1) G_{\mu}^1 \geq (a_{\rho+1}^2 - a_{\rho}^2) G_{\rho}^2 + (a_{\rho+2}^2 - a_{\rho+1}^2) G_{\rho+1}^2 + \dots + (a_{\rho+\psi}^2 - a_{\rho+\psi-1}^2) G_{\rho+\psi-1}^2,$$

woraus folgt, dass

$$\sum_0^{n_1-1} (a_{\mu+1}^1 - a_{\mu}^1) G_{\mu}^1 \geq \sum_0^{n_2-1} (a_{\mu+1}^2 - a_{\mu}^2) G_{\mu}^2 \quad \text{oder} \quad A_2 \geq A_1$$

ist. In derselben Weise ist  $A_2 \geq A_1, A_v \geq A_{v-1}, \dots$ . Eine analoge Schlussweise zeigt, dass  $B_2 \leq B_1, B_3 \leq B_2, \dots$  ist.

Um ein Beispiel zu haben, sei  $f(x)$  eine Function, die für alle rationalen  $x$  gleich 1, für alle irrationalen gleich  $-1$  ist, so ist  $A_1 = A_2 = \dots A_v = \dots A = 1, B_1 = B_2 \dots = B_v \dots = B = -1$ .



Wenn aber  $A_\nu - B_\nu = \sum_0^{n_\nu-1} (\mu)(a_{\mu+1}^\nu - a_\mu^\nu)(G_\mu^\nu - g_\mu^\nu)$  dadurch dem absoluten Betrage nach kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Zahl  $\sigma$  gemacht werden kann, dass man  $d_\nu$  klein genug ( $\nu$  gross genug) nimmt, so ist der Grenzwert

$$\lim A_\nu = \lim B_\nu = A = B$$

und mithin auch  $S = \lim S_\nu =$

$$\lim \sum_0^{n_\nu-1} (\mu)(a_{\mu+1}^\nu - a_\mu^\nu)[g_\mu^\nu + \xi_\mu^\nu(G_\mu^\nu - g_\mu^\nu)] = \lim B_\nu + \lim \sum_0^{n_\nu-1} (\mu)(a_{\mu+1}^\nu - a_\mu^\nu)\xi_\mu^\nu(G_\mu^\nu - g_\mu^\nu).$$

Wendet man auf die letztere Summe, in der die  $\xi_\mu^\nu$  zwischen 0 und 1 liegen, den Hilfssatz des § 16 an, so folgt, dass ihr Grenzwert Null ist, weil sie immer absolut genommen  $\equiv \Sigma(a_{\mu+1}^\nu - a_\mu^\nu)(G_\mu^\nu - g_\mu^\nu)$  ist.

Also ist

$$S = \lim S_\nu = \lim \sum_0^{n_\nu-1} (\mu)(a_{\mu+1}^\nu - a_\mu^\nu)[g_\mu^\nu + \xi_\mu^\nu(G_\mu^\nu - g_\mu^\nu)] = \lim A_\nu = \lim B_\nu = A = B$$

oder einfacher, es ist

$$S = \lim \sum_0^{n-1} (a_{\mu+1} - a_\mu)[g_\mu + \xi_\mu(G_\mu - g_\mu)] = \int_a^b f(x) dx$$

eine von der Wahl der Grössen  $\xi_\mu$  unabhängige bestimmte Grösse, wenn die Differenzen  $a_{\mu+1} - a_\mu$  sämtlich kleiner als  $d$  gemacht werden und wenn  $\lim d = 0$  ist, in dem Fall, in welchem

$$\lim \sum_0^{n-1} (a_{\mu+1} - a_\mu)(G_\mu - g_\mu) = 0$$

ist. Es wird demnach das Integral durch den Grenzwert dieser Summe eindeutig definiert sein, wenn noch bewiesen wird, dass dieser Grenzwert auch von der Art, die Theilpunkte  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  zu wählen, unabhängig ist, was sogleich geschieht.

§ 18. Nachdem die Unabhängigkeit des Grenzwertes der Summe von den Grössen  $\xi$  unter gewissen Voraussetzungen nachgewiesen ist, ist es erlaubt, statt  $[g_\mu + \xi_\mu(G_\mu - g_\mu)] f(a_\mu)$  oder  $f(a_{\mu+1})$  oder  $f[a_\mu + \xi_\mu(a_{\mu+1} - a_\mu)]$  selbst in den Fällen zu setzen, in welchen  $f(x)$  zwischen  $a$  und  $b$  unstetig ist, wenn nur jene Voraussetzungen erfüllt sind. Es braucht daher nur noch gezeigt zu werden, dass der Ausdruck  $\lim \Sigma(a_{\mu+1} - a_\mu)G_\mu$  von der Art der Theilung des Intervalles von  $a$  bis  $b$  in die kleineren  $a_1, a_2, \dots$  unabhängig ist, wobei wir Dirichlets Methode folgen können.

Es sei  $S_n$  die Summe  $\Sigma(a_{\mu+1} - a_\mu)G_\mu$ ,  $S'_n$  die Summe  $\Sigma(a'_{\mu+1} - a'_\mu)G'_\mu$ , worin  $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b$ ;  $a'_1, a'_2, \dots, a'_{n-1}, b$  zwei verschiedene Arten der Theilung sind und  $G_\mu, G'_\mu$  die oberen Grenzen von  $f(x)$  in den Intervallen zwischen  $a_\mu, a_{\mu+1}$  bez.  $a'_\mu, a'_{\mu+1}$ .

Diese Theilungen mögen nach der Methode des vorigen Paragraphen schon so weit getrieben sein, dass  $S_n$  von seinem Grenzwert  $S$  nur noch um die Grösse  $\varepsilon$ ,  $S'_n$  von seinem Grenzwert  $S'$  um die Grösse  $\varepsilon'$  verschieden ist, wo  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  absolut genommen kleiner als  $\frac{1}{2}\sigma$  sind. Bilden wir nun die Summe  $S''_n = \sum_0^{n''-1} (a''_{\mu+1} - a''_\mu)G''_\mu$ , in welcher  $a, a_1'', a_2'', \dots, a''_{n''-1}, b$  die der Grösse nach geordneten Punkte sowohl der Theilung  $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b$  als auch der Theilung  $a, a_1', a_2', a_3', \dots, b$  sämtlich sind und  $G''_\mu$  die obere Grenze von  $f(x)$  zwischen  $a''_\mu$  und  $a''_{\mu+1}$  ist, so muss nach der Schlussweise des vorigen Paragraphen  $S''_n$ , weil es eine weitere Theilung der Intervalle  $a_1, a_2, \dots$  ist, von  $S$  nur um eine Grösse  $\eta$ , von  $S'$ , weil es eine weitere Theilung der Intervalle  $a_1', a_2', \dots$  ist, von  $S'$  nur um eine Grösse  $\eta'$  verschieden sein, welche Grössen  $\eta, \eta'$  absolut genommen kleiner als  $\frac{1}{2}\sigma$  sind. Also ist

$$S = \lim S_n = S''_n + \eta, \quad S' = \lim S'_n = S''_n + \eta', \quad S - S' = \eta - \eta' < \sigma, \quad \text{also} = 0,$$

weil  $\sigma$  beliebig klein gewählt werden kann. Also ist  $S = S'$  d. h. die Grenzwerte sind von der Art der Theilung unabhängig, w. z. b. w.

§ 19. Es können nun drei Fälle unterschieden werden, in denen die Forderung „Es muss absolut genommen

$$\sum_0^{n-1} (a_{\mu+1} - a_{\mu})(G_{\mu} - g_{\mu}) < \sigma$$

dadurch gemacht werden können, dass die Intervalle  $a_{\mu+1} - a_{\mu}$  klein genug genommen werden, wenn  $\sigma$  beliebig klein vorgegeben ist“, erfüllt ist.

Erstens wenn  $f(x)$  eine zwischen  $a$  und  $b$  stetige Function ist.

Zweitens wenn  $f(x)$  nur für einzelne Werthe von  $x$  unstetig ist, und die Function bei Annäherung an diese Stellen zwar nicht nothwendig bestimmt, aber doch in endlichen Grenzen enthalten ist.\*)

Drittens wenn die Function  $f(x)$  zwar unendlich oft unstetig wird, wenn aber die Summe  $s$  der Intervalle  $a_{\mu+1} - a_{\mu}$ ,  $a_{\nu+1} - a_{\nu}$ , ... in denen die grössten Schwankungen der Function grösser als die beliebig klein vorgebbare Zahl  $\sigma$  sind, dadurch kleiner als jede noch so klein vorgegebene Zahl gemacht werden kann, dass man die Intervalle klein genug nimmt. Auch hier muss (was aus der Bedingung eigentlich von selbst folgt)  $f(x)$ , wenn  $f(x+0)$  oder  $f(x-0)$  unbestimmt sein sollten, durchgehend in endlichen Grenzen bleiben.

Es ist klar, dass, wenn die dritte Behauptung erwiesen ist, es die beiden ersten auch sind.

Nun liefern aber zur Summe  $\sum (a_{\mu+1} - a_{\mu})(G_{\mu} - g_{\mu})$  diejenigen Intervalle, in denen Schwankungen grösser als  $\sigma$  sind, einen Beitrag, der kleiner ist als die Summe  $s$  der Intervalle multiplicirt in die grösste Schwankung zwischen  $a$  und  $b$  überhaupt, die  $Q$  sein mag. Mithin ist absolut genommen

$$\sum_0^{n-1} (a_{\mu+1} - a_{\mu})(G_{\mu} - g_{\mu}) < \sigma(b-a) + s \cdot Q$$

und hat mithin zur untern Grenze Null, weil erst  $\sigma$  und dann  $s$  so klein genommen werden kann, dass  $\sigma(b-a) + sQ$  unter jede noch so kleine Zahl herabsinkt.

Es ist klar, dass die Anzahl  $m$  der Intervalle, in denen  $G - g > \sigma$  ist, mit  $n$  über alle Grenzen wachsen kann, und die Summe doch zur Grenze Null haben kann, wenn nur  $m:n$  beliebig klein wird.

§ 20. **Beispiele unendlich oft unstetiger integrabler Functionen.** Beispiele von Integralen stetiger und in einzelnen Punkten unstetiger Functionen sind hier überflüssig, aber wichtig ist, einige unendlich oft unstetige Functionen anzuführen, die integrabel sind.

In dem Integral  $\int_0^1 f(x) dx$  soll die Function  $f(x)$  für alle irrationalen Werthe von  $x$  den Werth 0 haben, ebenso für  $x=0$  und  $x=1$ . Für rationale  $x$  soll sie den Werth  $1:q$  haben, wenn  $x$  in kleinster Benennung  $p:q$  ist. Dann ist die Anzahl aller Werthe von  $x$ , für welche  $f(x) \cong 1:Q$  ist, kleiner als  $1+2+3+\dots+Q-1$  oder kleiner als  $Q^2$ , wenn  $Q$  eine beliebig gross vorgegebene, also  $1:Q = \sigma$  eine beliebig kleine Zahl ist. Denn nur für die Zahlenwerthe

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \dots; \frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}, \dots, \frac{Q-1}{Q},$$

also für weniger als  $1+2+3+\dots+Q-1$  Werthe ist  $f(x) \cong 1:Q$ .

Theilt man nun das Intervall von 0 bis 1 in  $m \cdot Q^2$  gleiche Theile, so kann höchstens in  $Q^2$  Intervallen, deren Summe  $s = Q^2 : (mQ^2) = 1:m$  ist,  $f(x) \cong 1:Q$  sein, und diese Summe  $s$  kann daher, wenn  $m$  klein genug genommen wird, jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen. Das Integral ist also bestimmt, und hat, wie man sofort erkennt, (weil  $g_{\mu}$  in jedem Intervalle Null ist) den Werth Null.

Man kann unzählige Beispiele von unstetigen integrablen Functionen bilden, deren Integral von einem Punkte eines Intervalles bis zu einem beliebigen andern erstreckt, den Werth Null hat. Im angeführten Beispiele ist  $f(x+0)$  überall gleich  $f(x-0)$  gleich Null. In einer Function, welche überall den Werth

\*) Wie z. B.  $\sin \frac{1}{x}$  an der Stelle  $x=0$ , wenn ihr für  $x=0$  ein bestimmter endlicher Werth, vielleicht 0, beigelegt wird.

1 hat, wo  $\sin \frac{1}{x}$  den Werth 1 hat, sonst aber Null ist, ist  $f(+0)$  und ebenso  $f(-0)$  unbestimmt, und wenn man  $f(0)$  endlich voraussetzt, so ist  $f(x)$  doch integrabel und das Integral über ein beliebiges Intervall erstreckt gleich Null.

Ein anderes Beispiel ist das von Riemann gegebene folgende. Man bezeichne der Kürze wegen durch  $(x)$  den positiven oder negativen Ueberschuss von  $x$  über die nächste ganze Zahl, oder, wenn  $x$  zwischen zweien in der Mitte liegt, und diese Bestimmung zweideutig wird, den Mittelwerth aus den beiden Werthen  $\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$  (also die Null), ferner durch  $m$  eine ganze Zahl, durch  $p$  eine ungerade Zahl, und bilde alsdann die Reihe

$$f(x) = \frac{(x^2)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + \dots = \sum_1^{\infty} (m) \frac{(mx)}{m^2},$$

so ist die Reihe, wie leicht zu sehen, für jeden Werth von  $x$  unbedingt convergent; ihr Werth nähert sich sowohl, wenn der Argumentwerth stetig abnehmend, als auch wenn er stetig zunehmend gleich  $x$  wird, stets einem festen Grenzwert und zwar ist, wenn  $x = p : 2n$  (wo  $p$  und  $n$  relative Primzahlen sind)

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2n^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \dots\right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2n^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \dots\right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16}$$

und sonst ist überall  $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ .

Diese Function ist also für jeden rationalen Werth von  $x$ , der in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ein Bruch mit geradem Nenner ist, unstetig, also zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft, so jedoch, dass die Zahl der Sprünge, welche grösser als eine gegebene Grösse sind, immer endlich ist. Mithin lässt die Function eine Integration zwischen zwei beliebigen Grenzen zu.

Die Function  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , wenn sie für  $x = 0$  der Null gleich genommen wird, ist unstetig und  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$  sind unbestimmt. Da sie sonst stetig ist, so kann sie von jeder negativen Zahl  $a$  bis  $-\varepsilon$  und von  $+\eta$  bis zu jeder positiven Zahl integrirt werden und wie klein  $\varepsilon$  und  $\eta$  auch sein mögen. Also ist  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\eta}^b f(x) dx + (\varepsilon + \eta) \xi$ , wo  $\xi$  eine zwischen  $-1$  und  $1$  gelegene Zahl ist, weil die obere Grenze von  $\sin \frac{1}{x}$  gleich  $1$ , die untere  $-1$  ist. Der Grenzwert von  $(\varepsilon + \eta)\xi$  für verschwindende  $\varepsilon$  und  $\eta$  ist aber Null, also ist das Integral bestimmt.

Die Function

$$f(x) = \sin \frac{1}{\sin \frac{\pi}{x}}$$

kann zwischen  $-a$  und  $+b$  integrirt werden, wenn ihr für  $x = 0$  und  $x = 1 : m\pi$  für jede ganze positive oder negative Zahl  $m$  der Werth Null beigelegt wird, obgleich sie unendlich oft unstetig wird, und unendlich oft  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$  unbestimmt sind. Sind z. B. die Grenzen  $0$  und  $1$ , so nehmen wir die Werthe von  $0$  bis  $\frac{2}{2m+1}$  als erstes und  $1 - \frac{1}{2m+1}$  als letztes Intervall, der Beitrag, den diese Intervalle zur kritischen Summe  $\Sigma(a_{\mu+1} - a_{\mu})(G_{\mu} - g_{\mu})$  liefern, ist gleich  $\frac{2}{2m+1} \cdot 2 + \frac{1}{2m+1} \cdot 2$ , weil die obere Grenze von  $f(x)$  gleich  $+1$ , die untere gleich  $-1$ , also die grösste Schwankung gleich  $2$  ist. Die Function wird aber ausser in diesen beiden Intervallen noch für die  $m-2$  Werthe von  $x : \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m-1}$  unstetig und unbestimmt. Bilden wir Intervalle von der Breite  $\frac{1}{m \cdot m-2}$ , in deren Mitte die Zahlen  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m-1}$  liegen, so ist der Beitrag, den diese Intervalle zur kritischen Summe liefern, gleich  $2(m-2) : m(m-2)$

= 2 : m, weil der Beitrag eines jeden einzelnen Intervalles gleich 2 : m(m-2) ist. Also ist der Beitrag, den alle Intervalle zur kritischen Summe liefern, in denen f(x) unstetig und f(x ± 0) unbestimmt ist, gleich 6 : (2m + 1) + 2 : m oder weniger als 5 : m. Dieser kann dadurch beliebig klein gemacht werden, dass m gross genug genommen wird. Der Beitrag der übrigen Intervalle zur kritischen Summe aber kann, wie gross auch m sein mag, weil die Function f(x) darin stetig ist, dadurch beliebig klein gemacht werden, dass diese Intervalle klein genug genommen werden, also hat die kritische Summe die Grenze Null, wie es zur Integrabilität hinreichend ist.

Man kann aber auch noch leicht solche integrabele Functionen von x construiren, in denen f(x ± 0) in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich oft unbestimmt wird. Eine solche Function ist die unendliche Reihe

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x} + \frac{1}{(10)^3} \sum_0^9 (\mu) \left( \sin \frac{\pi}{10x-\mu} \right) + \frac{1}{(100)^3} \sum_0^{99} (\mu) \left( \sin \frac{\pi}{100x-\mu} \right) + \frac{1}{(1000)^3} \sum_0^{999} (\mu) \left( \sin \frac{\pi}{1000x-\mu} \right) + \dots$$

worin  $\sin \frac{\pi}{ax-b}$  für x = b : a den Werth 0 haben soll. In dieser Function ist f(x ± 0) für jedes x von der Form einer Decimalzahl 0,αβγ... μνρ unbestimmt, aber es ist die Anzahl der Stellen x, für welche die Grenzen der Unbestimmtheit von f(x+0) und f(x-0) grösser als eine noch so klein vorgegebene Zahl ist, endlich. Die Reihe ist unbedingt convergent für jeden Werth von x.

§ 21. Wenn eine stetige Function w(x) existirt, deren vorwärts genommener Differentialquotient gleich der stetigen Function f(x) ist, und wenn in einem Intervalle von a bis b eine andere stetige Function ω(x) existirt, deren rückwärts genommener Differentialquotient gleich f(x) ist, so ist nach § 19

$$\omega(x) - \omega(a) = \lim \sum_0^{n-1} (\mu) (a_{\mu+1} - a_{\mu}) f(a_{\mu}) = w(x) - w(a),$$

$a_n = x, \quad a_0 = a, \quad x \text{ zwischen } a \text{ und } b,$

mithin können sich ω(x) und w(x) nur um eine additive Constante unterscheiden.

§ 22. Der erste Mittelwerthsatz (§ 13) wurde aus der Definition des § 11 hergeleitet. Derselbe gilt aber ebensogut für das als Grenzwert einer Summe definirte Integral, wie sogleich gezeigt wird.

Da in dem Ausdruck

$$\sum_0^{n-1} (\mu) (a_{\mu+1} - a_{\mu}) [g_{\mu} + \xi_{\mu} (G_{\mu} - g_{\mu})], \quad a = x, \quad a_0 = a,$$

die Intervalle  $a_{\mu+1} - a_{\mu}$  alle einerlei Zeichen haben, so ist derselbe nach dem Hilfsatz des § 16 absolut genommen kleiner als  $G \sum_0^n (\mu) (a_{\mu+1} - a_{\mu})$  und absolut genommen grösser als  $g \sum_0^n (\mu) (a_{\mu+1} - a_{\mu})$ , also absolut genommen

$$G(x-a) > \int_a^x f(x) dx > g(x-a), \quad \int_a^x f(x) dx = [g + \xi(G-g)](x-a),$$

w. z. b. w.

§ 23. Die Definition des Integrals  $\int_a^x f(x) dx$  war zunächst die, dass es eine stetige, für x = a verschwindende Function sein sollte, deren vorwärts oder deren rückwärts genommener Differentialquotient gleich f(x) sei, ob eine solche Function f(x) existirt, blieb dahingestellt. Es fragt sich nun, ob vielleicht durch den Ausdruck

$$\int_a^x f(x) dx = \lim \sum_0^{n-1} (\mu) (a_{\mu+1} - a_{\mu}) f(a_{\mu}), \quad a_n = x, \quad a_0 = a,$$

bewiesen wird, dass eine solche Function w(x) existirt. Hierzu brauchen wir den

**Hilfssatz.** Es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

wenn das Integral durch eine Summe definirt wird, wenn nur die kritische über die Integrabilität entschei-

dende Summe  $\Sigma(a_{\mu+1} - a_{\mu})(G_{\mu} - g_{\mu})$  in dem Intervalle, welches die drei Punkte  $abc$  enthält, zur Grenze Null hat. ( $c$  braucht nicht zwischen  $a$  und  $b$  zu liegen.) Der Beweis dieses Satzes kann unterdrückt werden, weil er äusserst einfach ist.

Demnach ist

$$\frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \right\} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx = \frac{w(x+h) - w(x)}{h}.$$

Ist nun erstens  $f(x)$  stetig an der Stelle  $x$ , so ist nach dem ersten Mittelwerthsatz (§ 22)  $[w(x+h) - w(x)] : h$  gleich  $f(x + \xi h)$  und der Grenzwert ist  $f(x)$  sowohl wenn sich  $h$  positiv, als auch wenn sich  $h$  negativ der Grenze Null nähert, weil bei einer stetigen Function  $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$  ist.

Ist zweitens  $f(x)$  an der Stelle  $x$  unstetig, haben aber  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$  an dieser Stelle bestimmte Werthe, so kann gesetzt werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx &= \lim \frac{1}{h} [x_1 - x f(x_1) + \overline{x_2 - x_1} f(x_2) + \dots + (x+h - x_{n-1}) f(x+h)] \\ &= \lim \frac{x_1 - x}{h} f(x_1) + \lim \frac{1}{h} [(x_2 - x_1) f(x_2) + \dots + (x+h - x_{n-1}) f(x+h)], \end{aligned}$$

und da  $\lim \frac{x_1 - x}{h} f(x_1)$  Null ist, gleich

$$\lim \frac{1}{h} [(x_2 - x_1) f(x_2) + (x_3 - x_2) f(x_3) + \dots + (x+h - x_{n-1}) f(x+h)]$$

und nach Hilfssatz 16, wenn  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  zwischen  $x$  und  $x+h$  so eingeschaltet sind, dass die Intervalle  $x_1 - x, x_2 - x_1; \dots, x_n - x_{n-1} = x+h - x_{n-1}$  gleich  $h : n$  sind, und  $n$  zur Grenze  $\infty$  übergeht, gleich

$$\lim \left( \frac{x+h-x_1}{n} \right) M = f(x+0),$$

wenn  $h$  positiv und  $f(x-0)$ , wenn  $h$  negativ ist.  $M$  bedeutet hier einen Mittelwerth der Function  $f(x)$  in dem Intervalle  $x_1$  bis  $x+h$  und die Grenze dieses Mittelwerthes ist offenbar  $f(x+0)$ , wenn  $h$  positiv, und  $f(x-0)$ , wenn  $h$  negativ ist.\*) Also ist der vorwärts genommene Differentialquotient  $f(x+0)$ , der rückwärts genommene  $f(x-0)$ .

Ist  $f(x)$  eine zwischen  $a$  und  $b$  integrabele unstetige Function, bei der aber  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$  bestimmte Werthe haben, so giebt es eine Function und sie lässt sich als Grenzwert einer Summe darstellen, deren vorwärts genommener Differentialquotient zwischen  $a$  und  $b$  überall gleich  $f(x+0)$  und der rückwärts genommene gleich  $f(x-0)$  ist. Aber eine Function, deren Differentialquotient schlechthin  $f(x)$  wäre, ist nicht darstellbar.

Das angewandte Verfahren lehrt nun unmittelbar, wenn  $f(x+0)$  oder  $f(x-0)$  unbestimmt und  $f(x)$  gleichwohl integrabel ist, so hat die durch den Grenzwert definirte Summe wohl überall da, wo  $f(x \pm 0)$  bestimmt ist, einen bestimmten vorwärts genommenen und rückwärts genommenen Differentialquotienten, aber wo dies nicht statt hat, wo entweder  $f(x+0)$  oder  $f(x-0)$  oder  $f(x \pm 0)$  unbestimmt sind (und dies kann bei einer integrablen Function in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich oft geschehen), hat die Function  $w(x)$  entweder keinen bestimmten vorwärts oder keinen rückwärts genommenen Differentialquotienten, oder keinen von beiden\*\*), obgleich sie stetig ist, wie der folgende Paragraph zeigt.

§ 24. Dass auch das durch den Grenzwert einer Summe definirte Integral stetig sei, ist leicht zu ersehen. Denn es ist

\*) Aus der Annahme, dass  $f(x)$  an der Stelle  $x$  stetig ist, und  $f(x+0)$  einen Werth hat, folgt nicht, dass man den Mittelwerth in dem Intervalle von  $x$  bis  $x+h$  gleich  $f(x+\xi h)$  setzen kann. Die Function  $f(x)$ , welche für negative  $x$  Null ist, für positive  $x$  aber in dem Intervall von  $\frac{1}{m}$  bis  $\frac{1}{m+1}$  den Werth  $\frac{1}{m}$  hat, ist für  $x=0$  stetig und  $f(+0) = 0$ , aber  $f(x+\xi h)$  nimmt nicht alle Werthe zwischen Null und  $f(h)$  an.

\*\*) Als eine stetige Function von  $x$ , die an keiner Stelle einen Differentialquotienten hat, ist nach Angabe des Herrn Du Bois Reymond im 79. Bande des Crelleschen Journals pag. 28 die Function  $\sum_{(m)} \frac{\sin(m^2 x)}{m^2}$  von Riemann angegeben worden.

$$\int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_a^{x+h} f(x) dx = h[g + \xi(G-g)],$$

wenn  $G, g$  die obere und untere Grenze von  $f(x)$  im Intervalle von  $x$  bis  $x+h$  ist. Es kann aber sowohl  $hG$  als  $hg$  beliebig klein gemacht werden, wenn  $h$  klein genug genommen wird, weil  $f(x)$ , also  $G$  und  $g$ , als endlich vorausgesetzt wurden, also ist das Integral stetig.

§ 25. Wir bemerken übrigens, dass der Begriff des Integrals etwas weiter ist; wenn er aus der Grenze defintirt wird, als aus dem Differentialquotienten. Denn im letzten Sinne giebt es ausser  $f(x) = 0$  keine Function, deren Integral constant wäre; legt man aber die Summendefinition zu Grunde, so giebt es unendlich viele unstetige Functionen, deren Integral Null ist. (Vgl. § 20.) Es wird hier nun überall der zweite Begriff zu Grunde gelegt.

§ 26. Ist für alle Werthe von  $x$  zwischen  $a$  und  $b$

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x \varphi(x) dx,$$

so folgt durch vorwärts oder rückwärts Differenziren, dass überall  $f(x+0) = \varphi(x+0)$ ,  $f(x-0) = \varphi(x-0)$  sei. Sind demnach  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  stetige Functionen, so ist überall  $f(x) = \varphi(x)$ , ist aber wenigstens eine von ihnen unstetig, so können sie sich um eine unstetige Function unterscheiden, deren Integral Null ist.

§ 27. **Zweiter Mittelwerthsatz.** Aus der Summendefinition ergibt sich noch ein zweiter brauchbarer Mittelwerthsatz.\*)

Wenn die Function  $f(x)$  zwischen  $a$  und  $b$  nie zunimmt, oder nie abnimmt, so dass in diesem Intervall  $f(x+h) - f(x)$  für positive  $h$  immer dasselbe Zeichen hat oder 0 ist, so ist

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(a) \int_a^{a+\xi(b-a)} \varphi(x) dx + f(b) \int_{a+\xi(b-a)}^b \varphi(x) dx, \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

Beim Beweise dieses Satzes wird die Allgemeinheit nicht beschränkt, wenn  $a < b$  vorausgesetzt wird. Da nun  $f(x)$  entweder niemals ab- oder niemals zunimmt, so müssen  $f(a+0)$  und  $f(b-0)$  bestimmte vielleicht von  $f(a)$  bez.  $f(b)$  verschiedene Zahlen sein. Ist  $f(x)$  sowohl bei  $a$  als bei  $b$  unstetig, so kann man, um den Beweis zu vereinfachen, über eine der Grenzen etwa  $b$  hinaus die Function constant fortsetzen, so dass in dem Intervalle von  $b$  bis  $b'$ ,  $b' > b$ ,  $f(x) = f(b)$  ist. Zugleich soll dann  $\varphi(x) = 0$  sein,  $b < x \leq b'$ . Dann ist

$$\int_a^{b'} f(x) \varphi(x) dx = \int_a^{b'} f(x) \varphi(x) dx = \sum_0^{n-1} (a_{\mu+1} - a_\mu) f(a_\mu) \varphi(a_\mu) + A,$$

worin  $a_n = b'$ ,  $a_0 = 0$  ist und  $A$  mit abnehmenden Intervallen  $a_{\mu+1} - a_\mu$  zu Null herabsinkt. Die Intervalle nehmen wir als einander gleich und zwar gleich  $\delta$  an. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^{b'} f(x) \varphi(x) dx &= \delta \sum_0^{n-1} f(a+\delta\mu) \varphi(a+\delta\mu) + A \\ &= \delta f(a) \varphi(a) + f(a+\delta) [\varphi(a) + \varphi(a+\delta) - \varphi(a)] \\ &\quad + \delta f(a+\delta\mu) [\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \dots + \varphi(a+\mu\delta) - \varphi(a) - \varphi(a+\delta) - \dots - \varphi(a+\overline{\mu-1}\delta)] + \dots \\ &\quad + \delta f(a+\delta\overline{n-1}) [\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \dots + \varphi(a+\overline{n-1}\delta) - \varphi(a) - \varphi(a+\delta) - \dots - \varphi(a+\overline{n-2}\delta)] \\ &= \delta [f(a) - f(a+\delta)] \varphi(a) + \delta [f(a+\delta) - f(a+2\delta)] [\varphi(a) + \varphi(a+\delta)] \\ &\quad + \dots + \delta [f(a+\overline{n-2}\delta) - f(a+\overline{n-1}\delta)] [\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \dots + \varphi(a+\overline{n-2}\delta)] \\ &\quad + \delta f(a+\overline{n-1}\delta) \cdot [\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \dots + \varphi(a+\overline{n-1}\delta)] \end{aligned}$$

\*) Herr Weierstrass hat denselben seinen Zuhörern mitgetheilt, veröffentlicht ist er zuerst von Herrn Du Bois Reymond. Den hier gegebenen Beweis hat ungefähr ebenso, doch nicht ganz streng, Hankel in Schlämilchs Zeitschrift 1869 veröffentlicht. Ein von Herrn G. F. Meyer in Neumanns Annalen Band VI pag. 315 geführter Beweis setzt voraus, dass  $\varphi$  nicht in jedem Intervalle sein Zeichen unendlich oft wechselt.

$$= [f(a) - f(a + \delta)] \left[ \int_a^{a+\delta} \varphi dx + \Delta_1 \right] + [f(a + \delta) - f(a + 2\delta)] \left[ \int_a^{a+2\delta} \varphi dx + \Delta_2 \right] + \dots$$

$$+ [f(a + \overline{n-2}\delta) - f(a + \overline{n-1}\delta)] \left[ \int_a^{a+(n-1)\delta} \varphi dx + \Delta_{n-1} \right] + f(a + \overline{n-1}\delta) \left[ \int_a^{b'} \varphi dx + \Delta_n \right] + \Delta,$$

worin die Grössen  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  mit  $\delta$  gegen Null convergiren. Da nun die Differenzen  $f(a + \overline{\mu-1}\delta) - f(a + \mu\delta)$  sämmtlich einerlei Zeichen haben, so ist nach dem Hilfssatz des § 16 dieser Ausdruck gleich

$$[f(a) - f(a + \overline{n-1}\delta)] M + f(a + \overline{n-1}\delta) \int_a^{b'} \varphi(x) dx + \Delta_n f(a + \overline{n-1}\delta) + \Delta,$$

worin  $M$  einen Mittelwerth zwischen den Grössen  $\int_a^{a+\delta} \varphi dx + \Delta_1, \int_a^{a+2\delta} \varphi dx, \dots, \int_a^{a+(n-1)\delta} \varphi dx + \Delta_{n-1}$  bedeutet. Da aber das Integral  $\int_a^x \varphi(x) dx$  eine stetige Function ist, so kann man

$$M = \int_a^{a + \xi(a'-b)} \varphi dx + \Delta'$$

setzen, wenn  $\xi$  zwischen 0 und 1 liegt und  $\Delta'$  als Mittelwerth zwischen  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$  mit  $\delta$  gegen Null convergirt. Gehen wir nun mit  $\delta$  zur Grenze 0 über, so erhalten wir

$$\int_a^{b'} f(x) \varphi(x) dx = \lim_{\delta=0} [f(a) - f(a + \overline{n-1}\delta)] \left[ \int_a^{a + \xi(b'-a)} \varphi(x) dx + \Delta' \right] +$$

$$\lim_{\delta=0} f(a + \overline{n-1}\delta) \left[ \int_a^{b'} \varphi(x) dx + \Delta_n \right] + \Delta$$

$$= [f(a) - f(b'-0)] \int_a^{a + \xi(b'-a)} \varphi(x) dx + f(b'-0) \int_a^{b'} \varphi(x) dx$$

$$= [f(a) - f(b)] \int_a^{a + \xi(b-a)} \varphi(x) dx + f(b) \int_a^b \varphi(x) dx,$$

weil  $f(b'-0) = f(b)$  und  $\int_b^{b'} \varphi(x) dx = 0$  ist. Dies kann noch gleich

$$f(a) \int_a^{a + \xi(b-a)} \varphi(x) dx + f(b) \int_{a + \xi(b-a)}^b \varphi(x) dx$$

gesetzt werden, was der zu beweisende Satz war.

§ 28. Ist in dem Intervall von  $a$  bis  $b$   $f(x) \cong \varphi(x)$ , so ist auch  $\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b \varphi(x) dx$ , denn es ist  $\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \cong 0$ , weil kein Glied der Summe  $\sum_0^{n-1} (a_{\mu+1} - a_\mu) [f(a_\mu) - \varphi(a_\mu)]$ , kein Element, wie man sagt, negativ ist.

Mit diesem Satze pflegt man das Product von Wallis für  $\frac{1}{2}\pi$  herzuleiten. In dem Intervall von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$  ist  $\sin^n x \cong \sin^{n+1} x$ , also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \cong \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx.$$

Nun aber ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2m-1}{2m}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m+1},$$

also ist

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cong \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2m-1}{2m} \cong \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m+1}$$

und wenn man den Factor von  $\frac{1}{2}\pi$  fortschafft,

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2m-2}{2m-3} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cong \frac{\pi}{2} \cong \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m-2}{2m-3} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1}.$$

Setzen wir den Werth des letzten Products gleich  $A_m$ , so folgt

$$A_m \frac{2m+1}{2m} \cong \frac{\pi}{2} \cong A_m.$$

Die Grössen  $A_m, A_{m+1} \dots$  bilden eine zunehmende Zahlenreihe, weil  $A_{m+1} = A_m \frac{4m^2}{4m^2-1}$  ist, deren Terme immer unter  $\frac{1}{2}\pi$  bleiben. Andererseits kann man aber  $m$  so gross nehmen, dass sich  $A_m$  von  $\frac{1}{2}\pi$  beliebig wenig unterscheidet, weil  $A_m \frac{2m+1}{2m} = A_m(1 + \frac{1}{2m}) > \frac{1}{2}\pi$  ist, weil man also zu  $A_m$  nur die sehr kleine Grösse  $A_m : 2m$  hinzuzufügen braucht, um über  $\frac{1}{2}\pi$  hinauszukommen, folglich ist  $\frac{1}{2}\pi$  die Grenze der Zahlenreihe  $A_1 A_2 \dots A_m \dots$ , und es ist also

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \text{in infinitum.}$$

§ 29. **Differentiation unter dem Integralzeichen.** Der vorwärts oder rückwärts genommene Differentialquotient einer Function  $w(x, y) - w(a, y) = \int_a^x f(x, y) dx$  nach der Grösse  $y$  wird in vielen Fällen dadurch erhalten, dass man die Function unter dem Integralzeichen differenzirt. Also:

$$\frac{\partial w(x, y) - w(a, y)}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Die Beweisführung ist folgende: Es ist

$$\frac{w(x, y+h) - w(x, y)}{h} - \frac{w(a, y+h) - w(a, y)}{h} = \int_a^x \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx,$$

wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass  $f(x, y)$  und  $f(x, y+h)$  für ein hinreichend kleines  $h$  integrabel seien. Wenn nun für alle Werthe von  $x$  zwischen  $a$  und  $x$  ein Differentialquotient nach  $y$  existirt, also wenn

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + H(x, y)$$

gesetzt werden kann, so dass  $H$  mit  $h$  verschwindet, so ist

$$\frac{w(x, y+h) - w(x, y)}{h} - \frac{w(a, y+h) - w(a, y)}{h} = \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \int_a^x H(x, y) dx$$

und dieser Ausdruck, so pflegt man zu schliessen, convergirt mit abnehmendem  $h$  gegen

$$\frac{\partial w(x, y) - w(a, y)}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx,$$

wenn  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  integrabel ist, w. z. b. w.

Eine andere Beweismethode ist die: Ist  $w(x, y) - w(x, a)$  diejenige Function, deren nach  $x$  vor oder rückwärts genommener Differentialquotient  $f(x, y)$  ist, so ist

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$$

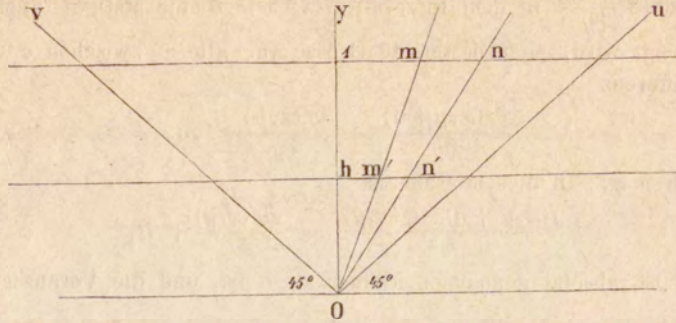
nach dem Satze von der Vertauschung der Differentiationsreihenfolge. Durch Integration erhält man

$$\int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial w(a, y)}{\partial y} = \frac{\partial w(x, y) - w(a, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x f(x, y) dx,$$

w. z. b. w. Ehe wir diese Schlussweisen näher prüfen, geben wir sofort ein

§ 30. *Beispiel einer Function, für welche die Differentiation eines Integrals nach einem Parameter, nicht durch Differentiation unter dem Integralzeichen ersetzt wird.* Um eine Vorstellung zu gewinnen, denke man sich  $xy$  als Coordinaten der Punkte einer Ebene, die auch noch durch die Polarcordinaten  $r, \varphi$  dargestellt werden sollen, so dass  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  ist. Nun sei  $f(0, 0) = 0, f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0$ , so lange  $\varphi \cong \frac{3\pi}{4} \varphi \cong \frac{9\pi}{4}$ , so dass sie nur in dem Winkel  $uov$  (der  $\frac{1}{2}\pi$  gleich ist) von 0 verschieden ist. Ferner sei, die Wurzel immer positiv genommen,  $f(x, 1) = (1-x^2)\sqrt{x^2}$  so lange  $-1 \cong x \cong +1$  oder  $\varphi$  zwischen  $\frac{1}{2}\pi$  und  $\frac{3}{2}\pi$  liegt. Längs jedes Radiusvector, der vom Punkte 0 ausgeht (z.B.  $Om$ ) sei sie constant, abgesehen davon, dass sie für  $x = 0, y = 0$  den Werth Null hat. Also wird  $f(x, y) = f(\cotg \varphi, 1)$  sein.





Diese Function besitzt die Eigenschaft, dass für jeden Werth von  $x$  zwischen  $-1$  und  $+1$   $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})_{y=0} = f_2(x,0) = 0$  ist. Denn für  $x=0$  hat man  $f(0,y) = 0$  und ist  $x$  beliebig klein, so kann doch  $h$  so klein genommen werden, dass  $f(x,h) - f(x,0) = 0$  ist. Also liefert die Differentiationsregel des vorigen Paragraphen

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^{+1} f(x,y) dx = \int_{-1}^{+1} f_2(x,0) dx = 0.$$

Andererseits aber ist

$$\int_{-1}^{+1} f(x,h) dx = h \int_{-1}^{+1} f(x,1) dx = 2h \int_0^1 (x-x^3) dx = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})h = \frac{1}{2}h,$$

so lange  $h$  positiv und kleiner als  $1$  ist, wie klein auch  $h$  sein mag. Das Element  $mn$  nämlich liefert zu dem Integral  $\int_{-1}^{+1} f(x,1) dx$  den Beitrag  $\overline{mn} \cdot f^{(m)}(x,1)$ , wenn  $f^{(m)}(x,1)$  der Werth von  $f(x,1)$  im Punkte  $m$  ist. Das Element  $\overline{m'n'}$  liefert zu  $\int_{-1}^{+1} f(x,h) dx$  den Beitrag  $\overline{m'n'} \cdot f^{(m')}(x,h) = \overline{m'n'} \cdot f^{(m')}(x,1) = h \cdot \overline{mn} \cdot f^{(m)}(x,1)$ , weil  $f^{(m')}(x,h) = f^{(m)}(x,1)$  ist und also ist  $h \cdot \int_{-1}^{+1} f(x,1) dx = \int_{-1}^{+1} f(x,h) dx$ . Bilden wir nun den Grenzwert der Differenz

$$\frac{1}{h} \left\{ \int_{-1}^{+1} f(x,h) dx - \int_{-1}^{+1} f(x,0) dx \right\} = \frac{1}{h} (\frac{1}{2}h - 0) = \frac{1}{2},$$

so ergibt sich, dass derselbe nicht Null, sondern  $\frac{1}{2}$  ist. Hierbei hat  $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})_{y=0}$  für alle  $x$  einen Werth,  $f(x,h)$  ist integrabel und gleichwohl erhalten wir durch Differentiation unter dem Integralzeichen ein falsches Resultat. Es müssen deshalb die Bedingungen der Regel des § 29 genauer untersucht werden.

§ 31. Damit wirklich die Differentiation und Integration vertauscht werden können, muss  $[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2(x,y)$  gesetzt]  $f(x,y+h) - f(x,y) = hf_2(x,y) + h \cdot H(x,y)$  sein, worin durchgehend, d. h. für alle  $x$  im Integrationsintervalle, ein bestimmtes (von  $x$  unabhängiges)  $h$  angegeben werden kann, für welches  $\int_a^b H(x,y) dx < \sigma$  ist, wenn  $\sigma$  beliebig klein vorgegeben ist. Hierzu ist nicht durchaus nöthig, dass  $H$  selbst durchgehend unter jeden Grad von Kleinheit herabsinke, sondern  $H$  kann für unendlich viele Werthe von  $x$  grösser als  $\Delta$  sein, wenn nur (s. § 19) die Summe der Intervalle, in welche die Strecke  $ab$  behufs der Integration zu theilen ist, in denen dies statt hat, wie klein auch  $\Delta$  vorgegeben sein mag, durch hinlänglich kleine Annahme dieser Intervalle beliebig klein gemacht werden kann. Es kann sogar, wie sich später zeigen wird,  $H$  bei Annäherung an einzelne Punkte über alle Grenzen wachsen, ohne dass der Satz aufhört richtig zu sein.

Ist die Vertauschung der Vorwärts-Differentiation mit der Integration zulässig, so braucht dies noch nicht mit der Rückwärts-Differentiation der Fall zu sein. Auch reicht die Stetigkeit und Differenzirbarkeit der Function  $f(x,y)$  in dem Intervalle  $a \leq x \leq b$  in Bezug auf  $y$  nicht aus.

Wenn die Function  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$  in dem Intervalle  $a \leq x \leq b$  eine stetige Function von  $x$  und  $y$  ist, so lässt sich, wie später gezeigt wird, eine bestimmte Grösse für alle  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  angeben, so dass absolut genommen die Differenz

$$\frac{\partial f(x, y \pm \delta)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < \sigma$$

ist, wie klein auch  $\sigma$  sein mag. In diesem Falle ist

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + H,$$

worin  $H$ , so lange  $h \leq \delta$  ist, absolut genommen kleiner als  $\sigma$  ist, und die Voraussetzung ist also erfüllt.

§ 32. Der zweite Beweis der Vertauschbarkeit beruht auf dem Satze, dass  $\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y \partial x}$  ist. Seine Schwäche ist aber die, dass dieser Satz nicht überall richtig ist. Von Herrn H. A. Schwarz\*) sind neuerdings Bedingungen für die Anwendbarkeit derselben angegeben worden. Ich sage Bedingungen und nicht die Bedingungen, weil die Eigenschaft

$$\begin{aligned} & \lim_{h=0} \lim_{k=0} [w(x+h, y+k) - w(x+h, y) - w(x, y+k) + w(x, y)]: h \cdot k \\ & = \lim_{k=0} \lim_{h=0} [w(x+h, y+k) - w(x+h, y) - w(x, y+k) + w(x, y)]: h \cdot k \end{aligned}$$

von andern Eigenschaften ganz unabhängig sein kann. Wir können hier folgende ausreichende (nicht nothwendige) Bedingungen für die Möglichkeit der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge aufstellen.

Ist  $f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  in einem Gebiete, wie klein dies auch sei, eine stetige Function von  $x$  und  $y$  und liegt der Punkt  $xy$  im Innern dieses Gebietes  $T$ , oder auf dessen Rande, und ist  $f_{12}(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y}$  ebenfalls stetig, so kann man die Differentiationsreihenfolge vertauschen.

Ist  $a$  ein solcher Werth von  $x$ , dass die Aufeinanderfolge von Zahlen  $a \dots x$  für den festen Werth  $y$  in  $T$  liegt, so ist unter dieser Bedingung

$$\int_a^x f_{12}(x, y) dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x f_1(x, y) dx = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) - f(a, y) = f_2(x, y) - f_2(a, y),$$

und wenn man die Gleichung  $\int_a^x f_{12}(x, y) dx = f_2(x, y) - f_2(a, y)$  vorwärts oder rückwärts nach  $x$  differenzirt, so folgt

$$f_{12}(x \pm 0, y) = \frac{\partial f_2(x, y) - f_2(a, y)}{\partial x} = f_{21}(x, y)$$

oder, wenn  $f_{12}(x, y)$  an jener Stelle eine stetige Function von  $x$  und  $y$  ist, so ergibt sich

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y).$$

Liegt  $x, y$  am Rande des Gebietes  $T$ , so braucht nicht nothwendig ein System von Werthen  $a \dots x$  für das feste  $y$  (eine der  $x$ -Achse parallele kleine Gerade) vorhanden zu sein, welches in  $T$  liegt. Dann bleibt aber die Richtigkeit bis in jede beliebige Nähe des Randes bestehen und deshalb auch noch am Rande, wenn  $f_{12}(x, y)$  und  $f_{21}(x, y)$  stetig sind. Im Innern ist es unnöthig vorauszusetzen, dass  $f_{21}(x, y)$  stetig ist. Die Bedingung, dass  $f_{12}(x, y)$  in einem Gebiete  $T$  stetig ist, kann offenbar durch die weitere ersetzt werden, dass  $\frac{\partial}{\partial y} \int_a^x f_1(x, y) dx = \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) dx$  ist.

§ 33. Die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter, der auch in den Grenzen enthalten ist, geschieht nach den Regeln der Differentiation der Functionen von Functionen.

$$\frac{d}{dy} \Phi(x, a, b, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{da}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{db}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

\*) Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 1873, pag. 239.

Also ist

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = -f(a, y) \frac{da}{dy} + f(b, y) \frac{db}{dy} + \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx,$$

wenn die Differentiation unter dem Integralzeichen zulässig ist.

§ 34. **Substitution.** Ein wirksames Hilfsmittel zur Auswerthung bestimmter Integrale ist die Substitution. Setzt man  $x = \varphi(y)$ ,  $dx = \varphi'(y)dy$  und ist für  $x = a$   $y = \alpha$ , so hat man die Gleichung

$$\int_a^x f(x) dx = \int_\alpha^y f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy.$$

Differenzirt man die rechte Seite nach  $x$ , so folgt in der That

$$\frac{d}{dx} \int_\alpha^y f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy = \frac{d}{dy} \int_\alpha^y f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy \frac{dy}{dx} = f[\varphi(y)] \varphi'(y) \frac{1}{\varphi'(y)} = f(x).$$

also ist

$$= \int_\alpha^y f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy$$

eine Function, deren nach  $x$  genommener Differentialquotient  $f(x)$  liefert, also gleich  $\int_a^x f(x) dx$ . Hierbei darf, wenigstens vorläufig,  $y$  als Function von  $x$  in dem Intervalle von  $a$  bis  $b$  kein Maximum oder Minimum haben. Denn in einem solchen Falle ist  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $\varphi'(y) = \infty$ , also hat das Integral keinen Sinn.

Mittelst der linearen Substitution

$$x = \frac{a\beta - ab + y(b-a)}{\beta - \alpha}, \quad dx = \frac{b-a}{\beta - \alpha} dy$$

verwandelt sich das Integral

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{in} \quad \frac{b-a}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f\left(\frac{a\beta - ab + y(b-a)}{\beta - \alpha}\right) dy,$$

und man kann also durch diese Substitution die Grenzen  $a, b$  in beliebige andere  $\alpha, \beta$  verwandeln.

§ 35. Die Beweisführung des vorigen Paragraphen ist jedoch dann unzureichend, wenn eine Function  $w(x)$ , deren vor- oder rückwärts genommener Differentialquotient  $f(x+0)$  oder  $f(x-0)$  ist, nicht existirt, wie dies bei unendlich vielen integrablen Functionen  $f(x)$  (§ 20) der Fall ist. Die Substitution kann aber so ausgedehnt werden, dass die Variable  $x$  als Function der neuen Veränderlichen  $y$  unendlich oft keinen Differentialquotienten besitzt, ich meine, dass die Gleichung  $x = \varphi(y)$  unendlich oft weder vor- noch rückwärts differenzirbar ist. Setzen wir nämlich  $x = a + \int_\alpha^y \psi(x) dy$  und legen der Function  $\psi(y)$  die Bedingung auf, zwischen  $\alpha$  und  $y$  integrabel zu sein, und erhalten wir zum ersten Male den Werth  $b$  für  $x$ , wenn bis  $\beta$  integrirt wird, so behaupte ich, dass

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f\left[a + \int_\alpha^y \psi(y) dy\right] \psi(y) dy \quad \text{sei,}$$

wenn  $f$  und  $\psi$  integrabele Functionen sind.

Beweis. Wir theilen die Strecke  $ab$  in  $n$  Theile  $a a_1 a_2 \dots a_{n-1} b$  und nennen den Werth von  $y$ , für welchen  $a + \int_\alpha^y \psi(y) dy$  zum ersten Male gleich  $a_\mu$  wird,  $\alpha_\mu$ . Da das Integral stetig ist, so giebt es immer ein  $\alpha_\mu$  und wenn die  $a_\mu$  dichter werden, so werden es auch die  $\alpha_\mu$  und die Differenzen  $a_{\mu+1} - a_\mu$  und  $\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu$  verschwinden gleichzeitig. Nun ist

$$\int_a^b f(a + \int_\alpha^y \psi dy) \psi(y) dy = \lim \sum_0^{n-1} (\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu) f(a_\mu) \psi(\alpha_\mu)$$

und

$$a_{\mu+1} - a_\mu = \int_{\alpha_\mu}^{\alpha_{\mu+1}} \psi(y) dy = [\psi(\alpha_\mu) + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)] (\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu),$$

wenn  $\xi_\mu$  zwischen  $-1$  und  $1$  liegt, und  $g_\mu$  die untere,  $G_\mu$  die obere Grenze von  $\psi(y)$  im Intervalle von  $\alpha_\mu$  bis  $\alpha_{\mu+1}$  ist. Also ist

$$\psi(\alpha_\mu)(\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu) = a_{\mu+1} - a_\mu - \xi_\mu(\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu)(G_\mu - g_\mu)$$

und folglich

$$\int_a^b f(a + \int_a^y \psi dy) \psi dy = \lim \sum_0^{n-1} (\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu) f(\alpha_\mu) - \lim \sum_0^{n-1} (\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu) \xi_\mu (G_\mu - g_\mu) f(\alpha_\mu) = \int_a^b f(x) dx,$$

weil der letzte Grenzwert  $0$  ist, wie aus der Integrabilität der Function  $\psi(y)$  folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 35 a. Die Beweismethode des vorigen Paragraphen zeigt zugleich, dass  
das Product zweier integrablen Functionen ebenfalls eine integrable Function ist.\*)

§ 36. **Definition des Integrals, wenn  $f(x)$  zwischen  $a$  und  $b$  unendlich wird.** Beide Definitionen des bestimmten Integrales werden hinfällig, wenn  $f(x)$  bei Annäherung an eine oder einige Stellen  $c, c', c'', \dots, c^{(v)}$  über alle Grenzen wächst, gleichviel ob  $f(c), f(c') \dots$  selbst endlich oder unendlich \*\*) sind. Für diesen Fall versteht man mit Dirichlet unter dem bestimmten Integrale einen Grenzwert, nämlich ( $a < b$  vorausgesetzt, was die Allgemeinheit nicht beschränkt)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \int_a^{c-\varepsilon} f dx + \int_{c+\eta}^{c'-\varepsilon'} f dx + \int_{c'+\eta'}^{c''-\varepsilon''} f dx + \dots + \int_{c^{(v)}+\eta^{(v)}}^b f dx,$$

worin sich das limes-Zeichen darauf bezieht, dass  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots, \eta, \eta', \dots$  gegen Null convergiren sollen. Dabei sind die  $\varepsilon$  und  $\eta$  positiv.

Man liess früher (Cauchy) neben diesem Grenzwert noch einen sogenannten Hauptwert zu, in welchem  $\varepsilon = \eta, \varepsilon' = \eta' \dots$  war; dann können noch Integrale einen Sinn haben, die bei der allgemeinen Definition nichts bedeuten. Es lässt sich zuweilen Anwendung von solchen Integralen machen.\*\*\*) Allein diese Definition hat nicht die Allgemeinheit, welche für Grundlagen eines so grossen Rechnungsgebietes, wie die Lehre von den bestimmten Integralen ist, vorhanden sein muss. Der Hauptwert bleibt z. B. nicht bei allen Substitutionen Hauptwert. Es sind deshalb Betrachtungen, die sich darauf stützen, als Untersuchungen von Singularitäten anzusehen.

Es ist nun klar, dass der Grenzwert  $\lim \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$  einen Sinn hat, wenn in  $\int_{c-\varepsilon}^{c-\zeta} f(x) dx$   $\varepsilon$  so klein genommen werden kann, dass dieses Integral, wie klein auch  $\zeta$  sein mag ( $\zeta < \varepsilon$ ), kleiner als jede noch so klein vorgegebene Grösse  $\sigma$  wird. Ebenso muss das Integral  $\int_{c+\zeta}^{c+\eta} f(x) dx$  kleiner als  $\sigma$  gemacht werden können dadurch, dass man  $\eta$  klein genug nimmt, wie klein auch  $\zeta$  sein mag ( $\zeta < \eta$ ).

§ 37. Man stellt zunächst einige allgemeine Regeln für Fälle auf, in welchen diese Grenzwerte einen Sinn haben. Es genügt, nur eine Stelle  $c$  anzunehmen. Es lässt sich leicht zeigen, dass bei abnehmenden  $x-c$  die Grösse  $(x-c)f(x)$  nicht absolut genommen fortwährend grösser als eine endliche Zahl  $A$  bleiben darf. Denn dann wäre

$$\int_{c-\varepsilon}^{c-\zeta} f(x) dx > A \int_{c-\varepsilon}^{c-\zeta} \frac{dx}{x-c} > A \lg \frac{\zeta}{\varepsilon},$$

welche Grösse jedwede Werte annehmen kann, wenn man  $\varepsilon$  und  $\zeta$  in passenden Verhältnissen gegen Null convergiren lässt. Es muss also, wenn  $f(x)$  nicht unendlich viele Maxima und Minima hat,  $(x-c)f(x)$

\*) Zuerst von Herrn Du Bois Reymond ausgesprochen in Crelles Journal Band 79 pag. 21. Es ist hier immer noch von endlich bleibenden Functionen die Rede. Der Satz gilt auch für solche, die unendlich werden, wenn das Integral des absoluten Betrages von  $f(x)$  einen Sinn hat.

\*\*) Da Unendlich eigentlich kein Werth ist, sondern nur  $f(x)$  bei Annäherung an eine Stelle  $c$  über alle Grenzen wachsen kann, so hat die Gleichung  $f(c) = \infty$  nur den Sinn, dass  $1 : f(c) = 0$  ist.

\*\*\*) Herr Worpitzky hat solche Untersuchungen in seiner Schrift über die Endlichkeit bestimmter Integrale und Reihensummen Berliu 1867 mitgeteilt. Diese Schrift wird nachher noch erwähnt werden.

eine stetige Function von  $x, y, \xi, \eta$ , so lange  $x + \xi h, y + \eta h$  im Gebiete  $T$  bleiben und  $\xi^2 \leq 1, \eta^2 \leq 1$  ist. Hierdurch ist ein Gebiet  $Q$  für die vier Veränderlichen  $x, y, \xi, \eta$  bestimmt, in welchem  $\Delta$  eine stetige Function derselben ist. In demselben hat aber  $\Delta$  eine obere Grenze, (und nimmt sie auch an). Diese obere Grenze ist eine stetige Function von  $h$ , weil  $\Delta$  selbst eine stetige Function von  $h, x, y$  ist, und sie verschwindet mit  $h$ . Also muss die obere Grenze für irgend einen Werth von  $h$  einen kleineren Werth als  $\sigma^2$  annehmen, und dieser ist der Werth von  $h$ , für welchen in allen Punkten von  $T$  absolut genommen

$$f(x + \xi h, y + \eta h) - f(x, y) < \sigma$$

ist.\*)

§ 50. **Definition des Doppel-Integrales.** Zerlegt man ein Gebiet  $T$ , welches aus einem oder mehreren Stücken bestehen kann, in  $n$  kleine Theile (Flächenelemente)  $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$ , welche der Bedingung unterworfen sind, in allen ihren Ausdehnungen und also auch ihrem Flächeninhalte nach kleiner und kleiner zu werden, und ist die obere Grenze einer in  $T$  gegebenen Function  $f(x, y)$  in  $\tau_\mu$  gleich  $G_\mu$ , die untere  $g_\mu$ , und ist  $\xi_\mu$  eine zwischen Null und Eins gelegene Zahl, so versteht man unter dem über das Gebiet  $T$  ausgedehnten Integrale

$$\int f(x, y) dT$$

den Grenzwert

$$\sum_{(\mu)} \tau_\mu [g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)],$$

den man erhält, wenn die  $\tau$  der Grenze Null zustreben.

Dieser Grenzwert hat aber dann einen Sinn, wenn die kritische Summe

$$\sum_{(\mu)} \tau_\mu (G_\mu - g_\mu)$$

mit abnehmenden  $\tau$  der Grenze Null zustrebt.

Der Beweis ist genau so, wie beim einfachen Integrale. Theilt man erst auf eine bestimmte Art  $T$  in die Theile  $\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_n^0$ , dann diese Theilflächen in neue  $\tau_1^1, \tau_2^1, \dots, \tau_n^1$ , so dass die ersten Elemente immer eine ganze Anzahl der zweiten enthalten, und fährt so fort diese wiederum zu theilen in  $\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_n^2$ , etc.  $\tau_1^m, \tau_2^m, \dots, \tau_n^m$  und setzt

$$A_m = \sum_\mu \tau_\mu^m G_\mu^m, \quad B_m = \sum_\mu \tau_\mu^m g_\mu^m,$$

so bilden die  $A_m$  eine abnehmende, die  $B_m$  eine zunehmende Zahlenreihe, und nähern sich beide einer und derselben Grenze, wenn  $\lim A_m - B_m = \sum_\mu \tau_\mu^m (G_\mu^m - g_\mu^m)$ , also die kritische Summe der Grenze Null zustrebt.

Auch der Beweis, dass bei verschiedenen Arten der Theilung derselbe Grenzwert erhalten wird, ist genau wie der im § 18. Man legt zwei verschiedene Arten von Theilungen übereinander, und erhält so ein neues Netz, welches als eine weitere Theilung sowohl des ersten Netzes, als auch des zweiten angesehen werden kann. Der Werth der Summe für diese neue Theilung unterscheidet sich sowohl von dem ersten, als auch von dem zweiten beliebig wenig, wenn nur beide Theilungen schon weit genug getrieben waren, und also müssen beide Theilungen zu demselben Grenzwert führen.

§ 51. Die kritische Summe ist Null, und das über  $T$  erstreckte Integral  $\int f(x, y) dT$  hat einen Sinn,

erstens, wenn  $f(x, y)$  stetig ist. Denn dann werden die Schwankungen  $G_\mu - g_\mu$  mit  $\tau_\mu$  unendlich klein;

zweitens, wenn  $f(x, y)$  nur in einzelnen Punkten und Linien unstetig wird;

drittens, wenn  $f(x, y)$  zwar unendlich oft unstetig wird, wenn aber die Summe der Flächenelemente  $\tau$ , in denen  $G_\mu - g_\mu > \sigma$  ist, wie klein auch  $\sigma$  vorgegeben sein mag, dadurch beliebig klein gemacht werden kann, dass man die Elemente  $\tau$  klein genug nimmt. Beweis wie in § 19.

\*) Statt dessen könnte man auch die Methode des § 6 anwenden. Einen andern Beweis hat Herr Lüroth in den Leipziger Annalen Band 6 pag. 313 gegeben.

§ 52. **Mittelwerthsatz.** Ist  $\varphi(x, y)$  in einem Gebiet  $T$  überall mit demselben Zeichen behaftet oder Null, so ist

$$\int f(x, y) \varphi(x, y) dT = [g + \xi(G - g)] \int \varphi(x, y) dT,$$

wenn das Integral über  $T$  erstreckt wird, und  $G$  die obere,  $g$  die untere Grenze von  $f(x, y)$  in  $T$  und  $\xi$  eine zwischen Null und Eins gelegene Zahl bedeutet.

Beweis wie in § 13.

§ 53. Das hauptsächlichste Mittel zur Auswerthung bestimmter Doppelintegrale ist die Zurückführung derselben auf zwei hintereinander folgende Integrationen.

Zerlegt man das Gebiet  $T$  durch eine Schaar der  $x$ -Achse, und eine andere der  $y$ -Achse paralleler Geraden in Rechtecke, so können diese Rechtecke, die nur am Rande eine abweichende Gestalt haben, als Elemente  $\tau$  angesehen werden.

Wir zerlegen nun zuerst das Stück  $T$  in solche Theile  $T_1 T_2 \dots$ , dass in jedes Stück sowohl die Schaar der der  $x$ -Achse, als der der  $y$ -Achse parallelen Geraden nur einmal eintritt und nur einmal austritt, und betrachten ein solches Stück. Das Integral über  $T$  ist die Summe der Integrale über  $T_1 T_2 \dots$ . Deshalb nehmen wir gleich an, dass die Begrenzung von  $T$  von jedem Individuum der beiden Schaaren nur zweimal geschnitten werde.

Das Doppelintegral kann dann geschrieben werden

$$\lim \sum_{\mu} \sum_{\nu} (x_{\mu+1} - x_{\mu})(y_{\nu+1} - y_{\nu}) f(x_{\mu}, y_{\nu}),$$

wenn  $x_{\mu}, y_{\nu}$  die Ecke irgend eines kleinen Rechteckes in  $T$  ist. Statt eines beliebigen Mittelwerthes der Function  $f(x, y)$  in dem Rechteck  $x_{\mu}, y_{\nu}; x_{\mu+1}, y_{\nu}; x_{\mu}, y_{\nu+1}; x_{\mu+1}, y_{\nu+1}$  ist der Werth der Function in der Ecke  $x_{\mu}, y_{\nu}$  gewählt. Dieser Ausdruck kann nun geschrieben werden

$$\lim \sum_{\mu} (x_{\mu+1} - x_{\mu}) \left\{ \int_{y_{\mu}^0}^{y'_{\mu}} f(x, y) dy + \Delta_{\mu} \right\}$$

wenn die Gerade  $x = x_{\mu}$  bei  $y = y_{\mu}^0$  in  $T$  ein und bei  $y = y'_{\mu}$  heraustritt. Denkt man sich aber den Grenzübergang in Bezug auf  $y_{\nu+1} - y_{\nu}$  ausgeführt, so ist  $\Delta_{\mu} = 0$  und es ist nur noch

$$\int f(x, y) dT = \lim \sum_{\mu} (x_{\mu+1} - x_{\mu}) \int_{y_{\mu}^0}^{y'_{\mu}} f(x, y) dy,$$

$y_{\mu}^0$  und  $y'_{\mu}$  hängen nun offenbar von  $x_{\mu}$  ab und man kann daher  $y_{\mu}^0 = \varphi(x_{\mu})$ ,  $y'_{\mu} = \psi(x_{\mu})$  setzen und so ergibt sich, wenn  $x_0$  das kleinste in  $T$  vorkommende  $x$ ,  $x'$  das grösste bedeutet,

$$\int f(x, y) dT = \int_{x_0}^{x'} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Tritt die Gerade  $y = y_{\nu}$  bei  $x_{\nu}^0$  in  $T$  ein, bei  $x'_{\nu}$  aus  $T$  heraus und ist  $x_{\nu}^0 = \chi(y_{\nu})$ ,  $x'_{\nu} = \omega(y_{\nu})$  und  $y_0$  das kleinste in  $T$  vorkommende  $y$ ,  $y'$  das grösste, so ist nach derselben Schlussweise

$$\int f(x, y) dT = \int_{y_0}^{y'} dy \int_{\chi(y)}^{\omega(y)} f(x, y) dx.$$

Ist das Gebiet  $T$  ein Rechteck, so ist  $\varphi(x) = g$ ,  $\psi(x) = g'$ ,  $\chi(y) = h$ ,  $\omega(y) = h'$  und also

$$\int f(x, y) dT = \int_g^{g'} dy \int_h^{h'} dx f(x, y) = \int_h^{h'} dx \int_g^{g'} dy f(x, y),$$

oder in einem Doppelintegrale mit constanten Grenzen kann die Integrationsreihenfolge ohne Weiteres vertauscht werden.

§ 54. **Einführung neuer Veränderlichen.** Die Elemente  $\tau$  können auf unendlich viele verschiedene Arten gewählt werden.

Sind durch die Gleichungen  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  zwei Schaaren von Curven gegeben, durch deren Schnittpunkte das Ebenenstück  $T$  im Elemente  $\tau$  getheilt wird, so sind die Schnittpunkte der Curven

$$\varphi(u, v) = x, \quad \psi(u, v) = y; \quad \varphi(u+du, v) = x_1, \quad \psi(u+du, v) = y_1;$$

$$\varphi(u, v+dv) = x_2, \quad \psi(u, v+dv) = y_2; \quad \varphi(u+du, v+dv) = x_3, \quad \psi(u+du, v+dv) = y_3$$

und der Flächeninhalt des hierdurch bestimmten kleinen Parallelogrammes ist

$$\pm \begin{vmatrix} x_1 - x, & x_2 - x \\ y_1 - y, & y_2 - y \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = \pm \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) du dv = \pm \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv.$$

Dieser Ausdruck tritt an die Stelle des Elementes  $dT$ .

Ist z. B.  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi,$$

so ist  $dT^*) = r dr d\varphi$ .

Ist das vorgegebene Gebiet  $T$  ein Viereck, so kann man leicht constante Grenzen erhalten. Legt man nämlich durch die beiden äusseren Ecken je eine Schaar Gerader,  $x - x_1 = \xi(y - y_1)$  und  $x - x_2 = \eta(y - y_2)$ ,  $x = \frac{\xi \eta (y_1 - y_2) + \xi x_2 - \eta y_2}{\xi - \eta}$ ,  $y = \frac{(x_1 - x_2) + \eta y_2 - \xi y_1}{\eta - \xi}$ , und entsprechen die Seiten des Vierecks, welche durch  $x_1 y_1$  gehen, den Werthen  $\xi = \alpha$ ,  $\xi = \beta$ , und die beiden andern Seiten den Werthen  $\eta = \alpha'$ ,  $\eta = \beta'$ , so werden  $\alpha, \beta$  die Grenzen der Integration in Bezug auf  $\xi$ ,  $\alpha', \beta'$  die in Bezug auf  $\eta$ .

§ 55. Das Product zweier bestimmter Integrale  $\int_a^b f(x) dx \cdot \int_{a'}^{b'} \varphi(y) dy$  kann gleich einem Doppelintegrale gesetzt werden, nämlich gleich  $\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} dy [f(x) \varphi(y)]$ , und umgekehrt, ist in einem Doppelintegrale mit constanten Grenzen  $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ , so kann dasselbe in das Product zweier einfachen Integrale zerlegt werden.

Folgt unmittelbar aus der Definition.

Mit Zuhilfenahme der Einführung neuer Variablen gestattet dieser Satz oft Anwendungen zur Umformung einfacher Integrale.

§ 56. Wird die Function  $f(x, y)$  in einem Punkte oder einer Linie des Gebietes  $T$  unendlich, so versteht man unter dem Integrale den Grenzwert, gegen welchen das Integral convergirt (wenn es convergirt), wenn man ein kleines Flächenstück um diese Stelle ausscheidet, und dann, die Begrenzung derselben willkürlich lassend, das ausgeschiedene Stück kleiner und kleiner macht.

Wird sie für  $x = a$ ,  $y = b$  unendlich, so folgt durch Einführung von Polarcoordinaten  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ,  $x-a = r \sin \varphi$ ,  $y-b = r \cos \varphi$ ,

$$\iint f(x, y) dT = \iint f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

und es kann, wenn die Function nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, das Integral keinen Sinn haben, wenn nicht  $f(x, y) r^2$  verschwindet. Denn wäre in einer irgendwie kleinen Umgebung des Punktes  $a b$   $f(x, y) > c$ , so müsste nach dem Mittelwertsatze des § 52 das über einen Ring, der den Punkt  $a b$  umgiebt, ausgedehnte Integral  $\iint f dT > c \int_0^{2\pi} \int_\rho^r \frac{dr d\varphi}{r} > c \int_0^{2\pi} (\lg r - \lg \rho) d\varphi$  sein, und dieser Ausdruck wächst mit abnehmendem  $\rho$  über alle Grenzen.

Dieselbe Methode zeigt aber, dass das Integral einen Sinn hat, wenn  $f(x, y) r^\alpha$  für ein  $\alpha$  kleiner als 2 mit  $r$  gegen Null convergirt.

Wird aber die Function  $f(x, y)$  längs einer Linie unendlich, so hat das Integral dann noch einen Sinn, wenn  $f(x, y) \cdot [\varphi(x, y)]^\alpha$  für ein  $\alpha$ , welches kleiner als Eins ist, endlich bleibt, wenn  $\varphi(x, y) = 0$  die Gleichung der Linie ist.

Auf schärfere Kriterien soll hier nicht eingegangen werden.

§ 57. Wenn sich das Gebiet  $T$  ins Unendliche erstreckt, sei es in einer, sei es in mehreren Richtungen, so versteht man unter dem Integral  $\iint f dT$  den Grenzwert, wenn ein solcher existirt, gegen wel-

\*) Die Bezeichnung  $dx dy = r dr d\varphi$  ist ungenau.

chen dieser Ausdruck strebt, wenn man von dem Gebiete  $T$  ein grosses Stück abschneidet, und dann dasselbe grösser und grösser werden lässt, während die Begrenzung, so weit sie nicht durch die Begrenzung von  $T$  bestimmt ist, willkürlich bleibt. Bestimmt man die Punkte von  $T$  durch Polarcordinaten, so ist das Integral  $\int f dT = \int \int f r dr d\varphi$ . Wird nun  $f$  mit wachsendem  $r$  unendlich klein, so dass  $fr^\alpha$  in  $T$  endlich bleibt, so hat das Integral einen Sinn, wenn  $\alpha > 1$  ist, es hat aber keinen Sinn, wenn  $f$  nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, wenn  $\alpha < 1$  genommen werden muss.

Mittels der Transformation durch reciproke Radii vectores  $\left(r = \frac{1}{\rho}\right)$  kann der Fall auf den zurückgeführt werden, in welchem das Gebiet endlich ist, aber die zu integrende Function in einem Punkte im Innern oder am Rande des Integrationsgebietes unendlich wird.

Man kann, wie unmittelbar einleuchtet, auch bei unendlich grossem  $T$  willkürliche Coordinaten nehmen, wenn man das Integral auf zwei hintereinander folgende Integrationen zurückführen will, und, wenn sich dabei constante Grenzen ergeben, die Reihenfolge vertauschen.

§ 58. **Singuläre Doppel-Integrale.** Wenn ein Integral  $\int f dT$  nur dadurch convergirt, dass  $f$  unendlich viele Maxima und Minima hat, also wenn  $f$  in einer höhern als der zweiten Ordnung in einem Punkte, oder in einer höhern als der ersten Ordnung längs einer Linie, unendlich gross wird, oder wenn  $T$  unendlich wird, so können sich oft verschiedene Werthe des Integrals ergeben bei verschiedener Wahl der Coordinaten, welche die Punkte von  $T$  bestimmen. Es kann zuweilen nur bei bestimmter Wahl derselben, bei bestimmter Reihenfolge der Integration ein brauchbares Resultat erzielt werden. Solche singuläre Integrale sind wichtig (z. B. die Fourier'schen Integrale), hier soll jedoch nicht darauf eingegangen werden. Der Satz ist unmittelbar klar, dass die Integrationsreihenfolge, oder überhaupt die Wahl der Coordinaten willkürlich ist, sobald das Integral  $\int (f) dT$  einen Sinn hat, wenn  $(f)$  den absoluten Betrag von  $f$  bedeutet.

### Integration zweigliedriger Differentialien.

§ 59. Wenn sich der Ausdruck

$$\frac{w(x+h \cos \varphi, y+h \sin \varphi) - w(x, y)}{h}$$

mit abnehmendem  $h$  einem bestimmten Grenzwerte nähert, so wollen wir denselben den in der Richtung  $\varphi$  genommenen Differentialquotienten von  $w(x, y)$  nennen. Ist  $w(x+h, y+h)$  in die Taylor'sche Reihe so weit entwickelbar, dass

$$w(x+h, y+k) = w(x, y) + \frac{\partial w}{\partial x} h + \frac{\partial w}{\partial y} k + H$$

gesetzt werden kann und  $H$  durch  $\sqrt{h^2+k^2}$  dividirt mit abnehmenden  $h$  und  $k$  noch zur Grenze Null strebt, so ist

$$\lim_{h=0} \frac{w(x+h \cos \varphi, y+k \sin \varphi) - w(x, y)}{h} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \sin \varphi.$$

§ 60. Die Grössen  $\frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$ , die wir häufig auch mit  $w_1(x, y)$  bez.  $w_2(x, y)$  bezeichnen,

heissen die nach  $x$  bez.  $y$  genommenen partiellen Differentialquotienten von  $w(x, y)$ , sie sind die beiden Specialfälle der allgemeinen Differentiation, wenn einmal  $\varphi = 0$ , das andere Mal  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  gesetzt wird. Bei der Differentiation nach  $x$  ist  $y$ , bei der nach  $y$  ist  $x$  als constant anzusehen. Aber aus der Existenz dieser partiellen Differentialquotienten folgt noch nicht, dass

$$\frac{w(x+h \cos \varphi, y+h \sin \varphi) - w(x, y)}{h} \text{ gegen } \frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi$$

convergire. In der Function z. B.

$$w(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin 2\varphi,$$

welche für  $x = 0, y = 0$  den Werth 0 haben soll, und in welcher  $\varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$  ist, ist  $w_1(0, 0) = 0$ ,



$w_2(0, 0) = 0$ , hingegen der in der Richtung  $\varphi$  genommene Differentialquotient ist nicht für alle  $\varphi$  Null, sondern gleich  $\sin 2\varphi$ , nimmt also im ersten Quadranten alle Werthe zwischen 0 und 1 zweimal an, und ist für  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  gleich Eins.

§ 61. Wenn sich für alle Werthe von  $\varphi$  ein einziger bestimmter Werth von  $h$  so angeben lässt, dass

$$\frac{w(x + h \cos \varphi, y + h \sin \varphi)}{h} = w_1(x, y) \cos \varphi + w_2(x, y) \sin \varphi + \delta$$

ist, und  $\delta$  für dieses  $h$  und jedes  $\varphi$  dem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig klein vorgegebene Grösse  $\sigma$  ist, so sagt man, die Function  $w(x, y)$  besitze ein vollständiges (erstes) Differential und schreibt

$$dw(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} dy = w_1 dx + w_2 dy.$$

Zur Existenz eines vollständigen ersten Differentials reicht es nicht aus, dass in jeder Richtung der Differentialquotient von  $w(x, y)$  gleich  $w_1 \cos \varphi + w_2 \sin \varphi$  ist, sondern es muss ein von Null verschiedenes Minimum für  $h$  geben, so dass

$$\frac{w(x + h \cos \varphi, y + h \sin \varphi) - w(x, y)}{h} = w_1 \cos \varphi + w_2 \sin \varphi \pm \xi \sigma \quad (\xi \cong 1)$$

ist, wie klein auch  $\sigma$  vorgegeben ist, und was auch  $\varphi$  sein mag.

In einer Function  $w(x, y)$  z. B., welche im Innern und am Rande eines durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = 2k_1x$  gegebenen Kreises  $K_1$  Null ist, und ebenso ausserhalb und am Rande eines durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = 2k_2x$  gegebenen grösseren Kreises  $K_2$  ( $k_2 > k_1$ ) gleich Null ist, kann man noch die Werthe in dem Gebiete zwischen  $K_1$  und  $K_2$  willkürlich wählen. Aber wie sie auch gewählt werden mögen, immer ist

$$\frac{w(h \cos \varphi, h \sin \varphi) - w(0, 0)}{h} = 0, \quad (w_1 = 0, w_2 = 0)$$

denn wie sehr sich auch  $\varphi$  dem Werthe  $\pm \frac{1}{2}\pi$  nähert, es lässt sich doch ein so kleines  $h$  angeben, dass  $w(h \cos \varphi, h \sin \varphi) = 0$  ist. Für  $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi$  aber findet dies für jedes  $h$  statt. Es giebt aber bei passender Wahl der Werthe von  $w(x, y)$  zwischen  $K_1$  und  $K_2$  kein Minimum für  $h$ , wenn  $\varphi$  alle Werthe annehmen kann, sondern  $h$  muss sich, wenn  $\varphi$  sich  $\pm \frac{1}{2}\pi$  nähert, immer mehr dem Werthe Null nähern (ohne diesen Werth zu erreichen), wenn  $h$  der Gleichung gemäss  $[w(h \cos \varphi, h \sin \varphi) - w(0, 0)] : h \cong \sigma$  bestimmt wird. Also besitzt die Function  $w(x, y)$  an der Stelle  $x = 0, y = 0$  kein vollständiges Differential, kann sogar daselbst unstetig sein.

§ 62. Ist  $w(x, y)$  eine in dem Gebiete  $T$  stetige Function von  $x$  und  $y$ , und ist überall in  $T$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = 0,$$

so ist in  $T$

$$w(x, y) = \text{Const.}$$

Das Gebiet  $T$  sei zunächst,  $x, y$  als rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt, ein Rechteck mit den Ecken  $x_0, y_0; x_0, y'; x', y_0; x', y'$ , so ist für jedes angebbare  $y$  zwischen  $y_0$  und  $y'$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0, \quad w(x, y) = w(x_0, y) = f(y),$$

d. h. es ist  $w(x, y)$  für jedes angebbare  $y$  von  $x$  unabhängig. Da  $w(x, y)$  stetig ist, so ist auch  $w(x, y \pm 0) = w(x, y) = f(y)$ , also auch bei Annäherung von  $y$  an bestimmte Werthe, kann  $w(x, y)$  nicht von  $x$  abhängen. Da nun aber auch  $\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} = 0$  ist für alle  $y$  zwischen  $y_0$  und  $y'$ , so ist  $w$  auch von  $y$  unabhängig, also

$$w(x, y) = \text{Const.} = w(x_0, y_0) = w(x', y').$$

Ist aber das Gebiet  $T$  kein Rechteck, so kann man doch (siehe die Figur auf folg. Seite) in  $T$  Rechtecke einschreiben, welche  $T$  so weit erschöpfen, dass nur am Rande Stücke von  $T$  übrig bleiben, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann. In jedem einzelnen Rechtecke und am Rande derselben hat die Function  $w(x, y)$  denselben Werth, also, da immer der Rand des einen zugleich ein Rand eines andern ist, hat sie in allen Rechtecken denselben constanten Werth, also in einem Gebiete, welches  $T$  so weit man will, erschöpft. Da mithin  $w(x, y)$  bis zu jeder beliebigen Nähe des Randes constant ist, da ferner

$w(x, y)$  der Voraussetzung nach stetig ist, so muss  $w(x, y)$  in ganz  $T$  und am Rande constant sein.

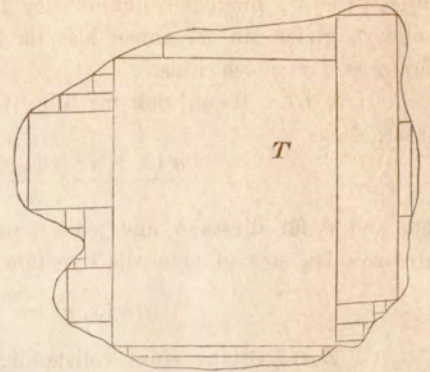
§ 63. Wenn eine Function  $w(x, y)$  in einem Gebiete  $T$ , in welchem sie stetig ist, die partiellen Differentialgleichungen befriedigt

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = q(x, y),$$

so ist sie in diesem Gebiete bis auf eine additive Constante völlig bestimmt.

Beweis. Wäre  $f(x, y)$  eine andere Function von derselben Beschaffenheit, so wäre  $\omega(x, y) = f(x, y) - w(x, y)$  eine stetige Function in  $T$ , deren partielle Differentialquotienten  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$ ,

$\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$  wären. Also müsste  $\omega(x, y) = \text{Const.}$ ,  $f(x, y) = w(x, y) + \text{Const.}$  sein, w. z. b. w.



§ 64. Eine in einem Gebiete  $T$  stetige Function  $w(x, y)$ , deren partielle Differentialquotienten

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = q(x, y)$$

sind, nennt man das Integral des Differentials  $p(x, y)dx + q(x, y)dy$  und schreibt

$$w(x, y) - w(x_0, y_0) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} p(x, y) dx + q(x, y) dy,$$

worin die untere Grenze  $x_0, y_0$  und die obere Grenze  $x, y$  Punkten im Gebiete  $T$  angehören. Ob dann auch wirklich  $dw = p dx + q dy$  geschrieben werden kann, d. h. ob  $p dx + q dy$  ein vollständiges Differential sei im Sinne des § 62, soll weiter unten entschieden werden, und ebenso die Frage, ob oder wann eine Function  $w(x, y)$  existirt, deren partielle Differentialquotienten  $p$  und  $q$  sind.

§ 65. Liegen die Punkte  $x_0, y_0; x_1, y_1; \dots; x_n, y_n$  in einem Gebiete  $T$ , in welchem die partiellen Differentialquotienten der stetigen Function  $w$  gleich  $p$  und  $q$  sind, so ist

$$\int_{x_0, y_0}^{x_n, y_n} p(x, y) dx + q(x, y) dy = \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} p dx + q dy + \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} p dx + q dy + \dots + \int_{x_{n-1}, y_{n-1}}^{x_n, y_n} p dx + q dy.$$

Denn es ist

$$w(x_1, y_1) - w(x_0, y_0) + w(x_2, y_2) - w(x_1, y_1) + \dots + w(x_n, y_n) - w(x_{n-1}, y_{n-1}) = w(x_n, y_n) - w(x_0, y_0).$$

Ebenso beweist man die Gleichung

$$\int_{x_0, y_0}^{x', y'} p(x, y) dx + q(x, y) dy = - \int_{x', y'}^{x_0, y_0} p(x, y) dx + q(x, y) dy.$$

§ 66. Hieraus ergeben sich Integrationsmethoden. Ist zuerst das Gebiet  $T$  ein Rechteck, oder lässt sich in  $T$  ein Rechteck mit den Ecken  $x_0, y_0; x_0, y'; x', y_0; x', y'$  vollständig einschreiben, so ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen

$$\begin{aligned} \int_{x_0, y_0}^{x', y'} p dx + q dy &= \int_{x_0, y_0}^{x', y_0} p dx + q dy + \int_{x', y_0}^{x', y'} p dx + q dy \\ &= w(x', y_0) - w(x_0, y_0) + w(x', y') - w(x', y_0) \\ &= \int_{x_0}^{x'} p(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y'} q(x', y) dy. \end{aligned}$$

Eine analoge Schlussweise liefert den Satz

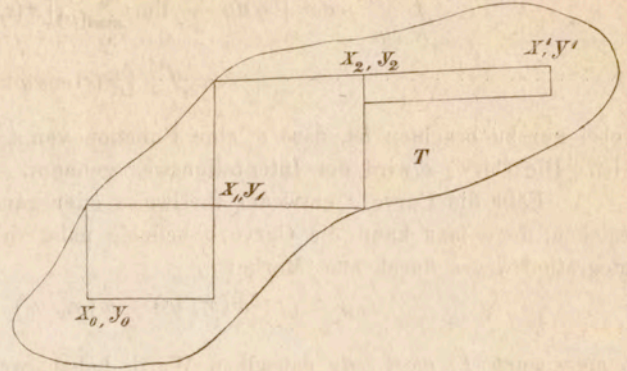
$$\int_{x_0, y_0}^{x', y'} p(x, y) dx + q(x, y) dy = \int_{y_0}^{y'} q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^{x'} p(x, y') dx$$

immer unter Voraussetzung der Existenz der Function  $w(x, y)$ .

Wir wollen im ersten Falle die Geraden  $x_0, y_0$  bis  $x', y_0$  und  $x', y_0$  bis  $x', y'$  den Integrationsweg, im zweiten  $x_0, y_0$  bis  $x_0, y'$  und  $x_0, y'$  bis  $x', y'$  den Integrationsweg nennen.

§ 67. Ist aber zweitens  $T$  ein beliebiges Gebiet, in welches das Rechteck  $x_0, y_0; x_0, y'; x', y'; x', y_0$  nicht eingeschrieben werden kann, so liefert die Methode des vorigen Paragraphen doch das Integral, wenn man nur durch Einschalten von Punkten  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_{n-1}, y_{n-1}$  zwischen  $x_0, y_0$  und  $x', y'$  die Integration in mehrere zerlegt. In nebenstehender Figur z. B. liefert die Einschaltung von zwei Punkten das Integral. Man schreibt also

$$\begin{aligned} & \int_{x_0, y_0}^{x', y'} p dx + q dy \\ &= \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} p dx + q dy + \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} p dx + q dy \\ & \quad + \int_{x_2, y_2}^{x', y'} p dx + q dy, \end{aligned}$$



und wendet nun auf die einzelnen Integrale diese Methode an.

Liegen die Punkte  $x_0, y_0; x', y'$  beide oder einer von ihnen am Rande von  $T$ , so lässt sich nicht immer die Integration über Rechtecke anwenden, aber jedenfalls kann diese Methode auf Integrationen bis zu Punkten angewendet werden, die dem Rande beliebig nahe liegen, und da  $w$  eine stetige Function ist, so kann in jedem Falle die Integration auf diese Weise bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit ausgeführt werden.

§ 68. Die Methode des § 66 liefert unter der Voraussetzung der Existenz der Function  $w(x, y)$  ein Mittel zur Darstellung des Integrals  $\int p dx + q dy$  durch einen Grenzwert oder durch eine Quadratur.

Ziehen wir von  $x_0, y_0$  zum Punkte  $x', y'$  eine beliebige nur nicht unendlich oft un stetig gekrümmte Curve  $s$  in  $T$ , und wählen auf ihr Punkte  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_{n-1}, y_{n-1}$  so nahe an einander, dass alle Rechtecke, deren gegenüberliegende Ecken  $x_\mu, y_\mu; x_{\mu+1}, y_{\mu+1}$  sind, ins Innere von  $T$  fallen, und lassen die Distanzen von  $x_\mu, y_\mu$  bis  $x_{\mu+1}, y_{\mu+1}$  sämtlich kleiner werden als eine beliebig klein vorgegebene Grösse  $d$ , so haben wir

$$\begin{aligned} \int_{x_0, y_0}^{x', y'} p dx + q dy &= \sum_0^{n-1} (\mu) \int_{x_\mu, y_\mu}^{x_{\mu+1}, y_{\mu+1}} p dx + q dy \\ &= \sum_0^{n-1} (\mu) \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} p(x, y_\mu) dx + \sum_0^{n-1} (\mu) \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} p(x_{\mu+1}, y) dy. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Strecke zwischen  $x_\mu, y_\mu$  und  $x_{\mu+1}, y_{\mu+1}$  mit  $s_{\mu+1} - s_\mu$ , und den Winkel, den sie mit der positiven  $x$ -Achse macht, mit  $\varphi_\mu$ , und sind  $p, q$  stetige Functionen in  $T$  (auf welchen Fall wir uns zunächst beschränken wollen) und liegen  $\xi_\mu, \eta_\mu$  zwischen Null und Eins, so ist

$$\begin{aligned} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} p(x, y_\mu) dx &= p(x_\mu + \xi_\mu \overline{x_{\mu+1} - x_\mu}, y_\mu) \cos \varphi_\mu (s_{\mu+1} - s_\mu) \\ &= p(x_\mu, y_\mu) \cos \varphi_\mu (s_{\mu+1} - s_\mu) + \Xi_\mu (s_{\mu+1} - s_\mu), \\ \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} q(x_{\mu+1}, y) dy &= q(x_{\mu+1}, y_\mu + \eta_\mu \overline{y_{\mu+1} - y_\mu}) \sin \varphi_\mu (s_{\mu+1} - s_\mu) \\ &= q(x_\mu, y_\mu) \sin \varphi_\mu (s_{\mu+1} - s_\mu) + H_\mu (s_{\mu+1} - s_\mu), \end{aligned}$$

worin  $\Xi_\mu, H_\mu$  mit abnehmendem  $d$  gegen Null convergiren. Geht man mit  $d$  zur Grenze Null über, so ist auch  $\Sigma(\Xi_\mu + H_\mu)(s_{\mu+1} - s_\mu)$  Null, wenn die Curve eine endliche Länge  $s' - s_0$  hat. Sonst aber kommen in dem Grenzwert

$$\int_{x_0, y_0}^{x', y'} p dx + q dy = \lim \sum [p(x_\mu, y_\mu) \cos \varphi_\mu + q(x_\mu, y_\mu) \sin \varphi_\mu] (s_{\mu+1} - s_\mu)$$

nur Werthe von  $p$  und  $q$  in Betracht, die auf der Curve  $s$  liegen. Man kann also  $p(x, y) = \pi(s)$ ,  $q(x, y) = \alpha(s)$  setzen und hat so

$$\begin{aligned} \int_{x_0, y_0}^{x', y'} p dx + q dy &= \lim \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu) [\pi(s_\mu) \cos \varphi_\mu + \alpha(s_\mu) \sin \varphi_\mu] (s_{\mu+1} - s_\mu) \\ &= \int_{s_0}^{s'} [\pi(s) \cos \varphi + \alpha(s) \sin \varphi] ds, \end{aligned}$$

wobei nur zu beachten ist, dass  $\varphi$  eine Function von  $s$ , und zwar eine im Allgemeinen stetige Function von  $s$  ist. Die Curve  $s$  wird der Integrationsweg genannt.

Fällt die Curve  $s$  entweder theilweise oder ganz auf den Rand von  $T$ , so bleibt der Satz auch noch bestehen, denn man kann die Curve  $\sigma$  beliebig nahe an den Rand legen. Ist nun (unter Bezeichnung des Integrationsweges durch eine Marke)

$$w(x', y') - w(x_0, y_0) = \int_{(\sigma)} p dx + q dy,$$

so muss auch  $\int_{(s)} p dx + q dy$  denselben Werth haben, wenn  $p$  und  $q$  stetig sind, denn da  $\sigma$  beliebig nahe an den Rand gebracht werden kann, so müssen die beiden Integrale sich um weniger unterscheiden als jede noch so kleine vorgegebene Grösse. Also sind sie gleich.

§ 69. Man darf die Darstellung des Integrales  $\int_{x_0, y_0}^{x', y'} p dx + q dy$  durch eine Quadratur, die unter der Voraussetzung der Existenz desselben gemacht wurde, nicht umgekehrt als einen Beweis für die Existenz der Function  $w$  ansehen. Denn man sieht leicht ein, dass bei willkürlichen  $p$  und  $q$  auf jedem andern Integrationswege zwischen  $x_0, y_0, x', y'$  im Allgemeinen ein anderer Werth des Integrals erhalten wird, dass dasselbe also als eine Function der Grenzen nicht angesehen werden kann.

Es sei z. B.  $p = a, q = x, x_0 = 0, y_0 = 0, x' = 1, y' = 1$ .

so ist

$$\int_{0,0}^{1,1} a dx + x dy = \int_0^1 a dx + \int_0^1 dy = a + 1,$$

aber auch gleich  $\int_0^1 a dy + \int_0^1 a dx = a$ . Hier sind die Integrationswege einmal die  $x$ -Achse von 0 bis 1 und von dort die der  $y$ -Achse parallele Gerade bis zum Punkte 1, 1. Das zweite Mal die  $y$ -Achse von 0 bis 1 und von dort die der  $x$ -Achse parallele Gerade bis zum Punkt 1, 1. Nehmen wir noch als Integrationsweg die Diagonale dieses Rechtecks, so ist die Länge dieser Geraden  $\sqrt{2}$ ,  $x$  ist auf ihr gleich  $s \sqrt{\frac{1}{2}}$ ,  $y = s \sqrt{\frac{1}{2}}$  ( $\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sin \varphi$ ) und also

$$\int_{0,0}^{1,1} a dx + x dy = \int_0^{\sqrt{2}} (a \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} s) ds = a + \frac{1}{2}.$$

Man erhält also auf drei verschiedenen Wegen drei verschiedene Werthe. Eine Function  $w$ , deren partielle Differentialquotienten  $\frac{\partial w}{\partial x} = a, \frac{\partial w}{\partial y} = x$  wären, existirt demnach nicht.

§ 70. Damit die Function  $w$ , deren partielle Differentialquotienten  $w_1 = p, w_2 = q$  sind, in einem Rechteck mit den Ecken  $x_0, y_0; x_0, y'; x', y_0; x', y'$  existire, ist nothwendig, dass

$$F = \int_{x_0}^x p(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y q(x, y) dy$$

diese partiellen Differentialquotienten besitze. Dass diese Function stetig sei, erkennt man leicht. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x+h} p(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y+k} q(x+h, y) dy - \int_{x_0}^x p(x, y_0) dx - \int_{y_0}^y q(x, y) dy \\ &= \int_x^{x+h} p(x, y_0) dx + \int_y^{y+k} q(x+h, y) dy + \int_{y_0}^y [q(x+h, y) - q(x, y)] dy \\ &= h p(x + \xi h, y_0) + k q(x+h, y + \eta k) + (y - y_0) \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

worin  $\xi, \eta$  kleiner als Eins sind,  $\varepsilon$  aber einen Mittelwerth der Function  $q(x+h, y) - q(x, y)$  im Intervalle von  $y_0$  bis  $y$  bei festem  $x$ , also eine Grösse bedeutet, die wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von  $p$  und  $q$ , was auch  $k$  sein mag, dadurch kleiner als jede noch so klein vorgegebene Zahl dem absoluten Betrage nach gemacht werden kann, dass man  $h$  klein genug nimmt. Dieselbe Eigenschaft besitzen offenbar die Ausdrücke  $hp(x+\xi h, y_0)$ ,  $kq(x+h, y+\eta k)$  so lange  $x, y; x+h, y+k$  im Innern des Rechtecks liegen. Also ist diese Function stetig und zwar im Sinne des § 45. Differenziren wir diese Function nach  $x$ , so folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y q(x, y) dy.$$

Kann man nun die Aufeinanderfolge der Differentiation und Integration vertauschen, was nach § 31 jedenfalls dann zulässig ist, wenn  $\frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$  eine stetige Function von  $x$  und  $y$  ist, auf welchen Fall wir uns beschränken wollen\*) so folgt weiter

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} dy,$$

und dieser Ausdruck soll gleich  $p(x, y)$  sein. Differenziren wir nochmals nach  $y$ , so folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} dy = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}.$$

Es ergibt sich also, dass

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$$

sein muss, im ganzen Gebiete, und dass diese Ausdrücke, wenigstens vorläufig, stetig sein müssen. Die Bedingung ist aber auch ausreichend, denn umgekehrt folgt aus ihr durch Integration nach  $y$  von  $y_0$  bis  $y$ , dass

$$p(x, y) - p(x, y_0) = \int_{y_0}^y \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} dy, \text{ also } \frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y)$$

sei. Die Symmetrie gestattet die Ersparung des Beweises, dass auch  $\frac{\partial F}{\partial y} = q(x, y)$  unter denselben Bedingungen ist.

In diesem Rechtecke existirt also eine stetige Function  $w(x, y)$  und es ist demnach das Integral von  $x_1 y_1$  bis  $x_2 y_2$ , auf beliebigen Wegen in diesem Rechtecke erstreckt, eine einzige bestimmte Grösse, und das Integral über eine geschlossene Contour gleich Null. Aus denselben Gründen ist das Integral über die vier Seiten des ganzen Rechtecks in derselben Richtung erstreckt gleich Null, denn es ist ja ein Weg, der den Punkt  $x_0 y_0$  mit ihm selbst verbindet.

§ 71. Is das Integral  $\int p dx + q dy$  über die ganze Begrenzung  $s_1$  eines Ebenenstückes  $T_1$  erstreckt gleich 0, und das Integral über die ganze Begrenzung  $s_2$  eines Stückes  $T_2$  erstreckt ebenfalls Null und haben die Begrenzungen  $s_1, s_2$  ein continuirliches Stück  $l$  gemein, so ist auch das Integral über die Begrenzung  $s$  des Stückes  $T = T_1 + T_2$  erstreckt, welches aus  $s_1 + s_2 - l$  besteht, gleich Null. Denn integrirt man über  $s_1$  und  $s_2$  in derselben Richtung (man pflegt diejenige Richtung die positive zu nennen, bei welcher das begrenzte Stück zur Linken bleibt), so hat man ganz über  $s$  und über die Linie  $l$  zweimal in entgegengesetzter Richtung integrirt. Diese Integrationen aber zerstören sich gegenseitig und liefern also Null.

Sind nun  $p$  und  $q$  in einem beliebig begrenzten Gebiete  $T$  stetige Functionen und ist darin  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$  und sind auch diese Grössen stetig, so ist das Integral über eine geschlossene in  $T$  verlaufende

\*) Dadurch wird allerdings die Integration zweigliedriger Differentialien mehr als nöthig eingeschränkt; jedoch ein Theil der Fälle, in welchen  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$  in Punkten oder Linien ist, oder in denen diese Ausdrücke unstetig sind, erledigt sich später von selbst.

Linie gleich Null, wenn in dem von dieser Linie allein begrenzten Stücke die Bedingungen wie in  $T$  erfüllt sind. Das begrenzte Stück sei  $\Sigma$ , die Begrenzung  $\sigma$ . Man kann dann in  $\Sigma$  Rechtecke einschreiben, dass  $\Sigma$  wie im § 62 so weit durch dieselben erschöpft wird, als man es erschöpfen will. Das Integral über die Begrenzung jedes dieser Rechtecke ist Null. Nimmt man das Integral über zwei aneinanderstossende Rechtecke, die ein Begrenzungsstück gemein haben, so ist das Integral über die nicht gemeinsame Begrenzung Null. Der Rest dieser Begrenzung besteht dann wieder aus einem Stück. Fügen wir ein neues Rechteck hinzu, welches mit dem vorhergehenden ein Stück der Begrenzung gemein hat, so ist das Integral über die nicht gemeinsame Begrenzung Null. Diese Begrenzung besteht dann wieder aus einem ununterbrochenen Wege, und im Innern sind die Bedingungen wie in  $T$  erfüllt. So kann man durch Hinzufügen von neuen und neuen Rechtecksseiten der Begrenzung  $\sigma$  von  $\Sigma$  beliebig nahe kommen und dann die Integration über die Rechtecksseiten nach der Definition des § 68 durch die über die Linie  $\sigma$  ersetzen.

Spätere Rechtecke können mit früheren auch nichtzusammenhängende Stücke gemein haben, wovon man sich überzeugt, wenn man in ein ringförmiges Gebiet Rechtecke einschreibt. Tilgt man dann sämtliche gemeinsamen Stücke als Integrationsweg, so behält der Satz noch immer seine Richtigkeit, obgleich die Begrenzung nicht aus einem Zuge besteht. Es ist aber festzuhalten, dass dann das Integral über die ganze Begrenzung in derselben Richtung (d. h. so, dass das begrenzte Stück immer auf derselben Seite bleibt) zu erstrecken ist. Das Integral von einem Punkte der Begrenzung bis zu einem andern über die beiden sie verbindenden Stücke braucht dann nicht denselben Werth zu haben, weil diese beiden Stücke nicht die ganze Begrenzung eines Ebenenstückes bilden, in dessen Inneren die Bedingungen der Integrabilität erfüllt sind.

Besteht aber die Begrenzung von  $T$  aus einem einzigen geschlossenen Wege\*), so begrenzen auch zwei in  $T$  verlaufende Wege zwischen zwei Punkten dieses Stückes stets vollständig ein Gebiet, in welchem die Bedingungen wie in  $T$  erfüllt sind, und das Integral ist unabhängig vom Integrationswege. Um dasselbe auch in einem ringförmigen Stücke vom Wege unabhängig zu machen, muss man das Stück durch einen die beiden Begrenzungsstücke verbindenden Querschnitt in ein einfach zusammenhängendes Gebiet, d. h. in ein Gebiet verwandeln, welches mit Hinzunahme der beiden Ufer des Querschnitts durch einen einzigen Zug begrenzt ist. In einem solchen Gebiete ist man berechtigt, das Integral

$$\int_{x_0 y_0}^{x' y'} p dx + q dy$$

als eine Function der oberen und unteren Grenze anzusehen.

§ 72. Diese Sätze und ihre Beweise lassen sich auf mehrgliedrige Differentialien ausdehnen, hierauf wollen wir jedoch verzichten, und noch den Riemann'schen Beweis des Hauptsatzes des vorigen Paragraphen, der aus der Theorie der complexen Functionen unter dem Namen des Cauchy'schen Satzes bekannt ist, hinzufügen.

Es soll also bewiesen werden, dass das über die ganze Begrenzung  $s$  eines Gebietes  $T$ , in dessen Innern

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

ist, und diese Ausdrücke, wenn auch nicht stetig, so doch integrabel sind, erstreckte Integral Null ist.

Da aber im Gebiete  $T$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

ist, so ist auch das über alle Elemente  $dx \cdot dy$  des Stückes  $T$  (im gewöhnlichen Sinne eines Flächenintegrals) erstreckte Doppelintegral

$$\iint \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) dy \cdot dx = 0.$$

\*) Bei ebenen Gebietsstückchen ist der Riemann'sche Begriff „einfach zusammenhängend“ einerlei mit dem Begrenztsein durch einen einzigen continuirlichen Zug ohne Doppelpunkte.

Um das Integral  $\iint \frac{\partial p}{\partial y} dy dx$  zu transformiren, zerlegen wir das Flächenstück  $T$  durch ein System der  $x$ -Achse paralleler Linien in Elementarstreifen von der Breite  $dx$ . Der Beitrag eines unbestimmten dieser Flächenstreifen zu dem Werthe von  $\iint \frac{\partial p}{\partial y} dy dx$  wird dann offenbar  $dx \cdot \int \frac{\partial p}{\partial y} dy$ , wenn die Integration über eine der  $y$ -Achse parallele Gerade erstreckt wird, welche dem Flächenstreifen angehört. Tritt nun (in der Richtung der wachsenden  $y$ ) diese Linie bei  $O_1$  in die Fläche  $S$  ein, bei  $O'$  aus derselben herans, bei  $O''$  wieder ein, bei  $O'''$  aus u. s. w. bei  $O''''$ ,  $O''''$ ,  $\dots$ , und sind die Werthe von  $p$  dort bez.  $p_1, p', p'', p''', p''''$ ,  $\dots$ , und bezeichnen wir mit  $ds_1, ds', ds'', ds''', ds''''$ , etc. die Stücke der Begrenzung  $s$ , welche der betrachtete Elementarstreifen aus ihr herauschneidet, und die Winkel, welche diese mit der  $y$ -Achse machen, mit  $\varphi_1, \varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi''''$ ,  $\dots$ , wobei  $s'$  immer in derjenigen Richtung zu nehmen ist, bei der das begrenzte Stück  $T$  zur Linken bleibt, so liegen offenbar diese Winkel im ersten und vierten Quadranten bei  $O_1, O''$ ,  $O''''$ ,  $\dots$ , im zweiten und dritten bei  $O', O''', O''''$ ,  $\dots$ , so dass die positive Grösse

$$\begin{aligned} dx &= \cos \varphi_1 ds_1 = \cos \varphi'' ds'' = \cos \varphi'''' ds'''' = \dots \\ &= -\cos \varphi' ds' = -\cos \varphi''' ds''' = -\cos \varphi'''' ds'''' = \dots \end{aligned}$$

ist. Ferner ist

$$\int \frac{\partial p}{\partial y} dy = p_1 + p'' + p'''' + \dots - p' - p''' - p'''' - \dots$$

und also

$$dx \cdot \int \frac{\partial p}{\partial y} dy = - \sum p \cos \varphi ds,$$

worin sich die Summation auf alle Begrenzungselemente bezieht, welche von dem betrachteten Elementarstreifen aus  $s$  ausgeschnitten werden. Durch die Integration über sämtliche Elementarstreifen wird nun das Integral  $\iint \frac{\partial p}{\partial y} dy dx$  erhalten, und die rechte Seite der erlangten Gleichung verwandelt sich in  $-\int p \cos \varphi ds$ , worin die Integration über die ganze Begrenzungslinie  $s$  zu erstrecken ist.

Durch ganz ähnliche Schlüsse findet man

$$\iint \frac{\partial q}{\partial x} dx dy = \int q \sin \varphi ds,$$

und folglich

$$\iint \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx dy = -\int (p \cos \varphi + q \sin \varphi) ds = 0.$$

Und demnach endlich

$$\int_{(s)} (p \cos \varphi + q \sin \varphi) ds = \int_{(s)} p dx + q dy = 0,$$

w. z. b. w.

§ 73. Wenn eine Function  $w(x, y)$  in einem Gebiete  $T$  die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial w}{\partial x} = p, \frac{\partial w}{\partial y} = q$  besitzt, und wenn  $p$  und  $q$  stetige Functionen von  $x$  und  $y$  in  $T$  sind, so ist

$$p dx + q dy$$

ein vollständiges Differential im Sinne des § 61.

Die Existenzfrage der Function

$$w(x, y) - w(x_0, y_0) = \int_{x_0 y_0}^{x y} p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

fällt hier fort. Es ist aber dann,

$$\begin{aligned} \frac{w(x_0 + h \cos \varphi, y_0 + h \sin \varphi) - w(x_0, y_0)}{h} &= \int_{x_0}^{x_0 + h \cos \varphi} p(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_0 + h \sin \varphi} q(x_0 + h \cos \varphi, y) dy \\ &= p(x_0 + \xi h \cos \varphi, y_0) \cos \varphi + q(x_0 + h \cos \varphi, y_0 + \eta h \sin \varphi) \sin \varphi \\ &= p(x_0, y_0) \cos \varphi + \Xi \cos \varphi + q(x_0, y_0) \sin \varphi + H \sin \varphi, \end{aligned}$$

worin  $\xi$  und  $\eta$  kleiner als Eins sind, und

$$\Xi = p(x_0 + \xi h \cos \varphi, y_0) - p(x_0, y_0), \quad H = q(x_0 + h \cos \varphi, y_0 + \eta h \sin \varphi) - q(x_0, y_0).$$

Da aber  $p$  und  $q$  als stetig vorausgesetzt werden, so kann man für alle  $\varphi$  ein einziges  $h$  angeben, so dass  $\Xi$ ,  $H$ , oder dass  $\Xi \cos \varphi + H \sin \varphi$  kleiner als eine beliebig klein vorgegebene Zahl  $\sigma$  wird. Also sind die Forderungen des § 61 erfüllt.

§ 74. Sind  $p(x, y)$  und  $q(x, y)$  Functionen eines Parameters  $\alpha$ , so wird der nach  $\alpha$  genommene Differentialquotient des über eine Linie  $s$  erstreckten Integrals

$$\int p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

durch Differenziren der Functionen  $p$  und  $q$  unter dem Integralzeichen gefunden, wenn  $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$  und  $\frac{\partial q}{\partial \alpha}$  längs  $s$  stetige Functionen von  $x, y, \alpha$  sind. Dies erhellt sofort, wenn man die Länge der Curve  $s$  als Integrationsvariable einführt, wodurch die Integration in eine mit einer Veränderlichen verwandelt wird. Es ist also unter dieser Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int p dx + q dy = \int \frac{\partial p}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial q}{\partial \alpha} dy.$$

§ 75. Wird eine der Functionen  $p$  und  $q$  in einem Punkte des Gebietes  $T$  unendlich gross, so kann auf Integrationswegen zwischen denselben Grenzen, welche diesen Punkt einschliessen, das Integral  $\int p dx + q dy$  verschiedene Werthe erlangen. Ist z. B.

$$p = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

so sind in der ganzen Ebene die Integrationsbedingungen erfüllt, abgesehen davon, dass für  $x = 0, y = 0$   $p$  und  $q$  unendlich werden.

Integrirt man aber von  $x = 1, y = 0$  bis  $x = -1, y = 0$  einmal über einen Halbkreis, welcher den Punkt  $0, 0$  zur Linken lässt, und dann über den Halbkreis, welcher diesen Punkt zur Rechten lässt, so wächst im ersten Falle das Integral  $\arctg \frac{y}{x}$  um  $\pi$ , im zweiten um  $-\pi$ , so dass man einen um  $2\pi$  verschiedenen Werth je nach dem Integrationswege erhält.

Werden aber die Functionen  $p$  und  $q$  in einem Punkte  $a, b$  des Gebietes  $T$  in einer niedern als der ersten Ordnung unendlich, so dass  $p\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, q\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  verschwinden, wenn  $x, y$  sich den Werthen  $a, b$  bez. nähern, so ist das Integral  $\int p dx + q dy$  über jede geschlossene Curve in  $T$  Null, wenn sie auch diesen Punkt mit einschliesst.

Zieht man nämlich um den Punkt mit dem Radius  $\rho$  einen beliebig kleinen Kreis, so ist das Integral über die geschlossene Curve gleich dem Integral über den kleinen, beliebig kleinen Kreis, weil zwischen ihnen die Bedingungen der Integrabilität erfüllt sind. Das letzte Integral ist aber nach Einführung des Bogens jenes kleinen Kreises gleich  $\int_0^{2\pi} (p \cos \varphi + q \sin \varphi) \rho d\varphi$  und dieser Ausdruck ist kleiner als jede noch so klein vorgegebene Grösse, weil  $\rho$  beliebig klein gemacht werden kann, und nach der Voraussetzung  $p\rho$  und  $q\rho$  mit  $\rho$  verschwinden. Also ist das Integral Null.

Liegt ein solcher Punkt am Rande von  $T$ , so ist das über denselben erstreckte Integral ebenfalls Null, sofern es überhaupt einen Sinn hat.

Dieselben Sätze finden statt, wenn  $p$  und  $q$  in einem oder einigen Punkten unstetig werden, indem sich diese Functionen bei Annäherung an diese Punkte in verschiedenen Richtungen verschiedenen Werthen nähern, oder wenn sie in diesen Punkten einen um eine endliche Grösse von den Werthen der Umgebung verschiedenen Werth besitzen, wenn nur die Ausdrücke  $p\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, q\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  verschwinden.

Unter derselben Bedingung kann auch in beliebig vielen Punkten die Differentialgleichung  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$  nicht erfüllt sein. Diese braucht sogar längs Linien nicht erfüllt zu sein, wenn  $p$  und  $q$  dort stetig sind.



§ 76. Die Integration zweigliedriger Differentialien findet vorzügliche Anwendung auf die Integration von Functionen einer Veränderlichen zwischen complexen Grenzen.

Jede complexe Function  $w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  kann als Function der complexen Veränderlichen  $z = x + yi$  angesehen werden. Denn wenn  $z$  gegeben ist, so ist sowohl  $x$  als auch  $y$  gegeben, wenn also zu jedem Werthepaare  $x, y$  ein Werth von  $u$  und von  $v$  gehört, so gehört zu jedem  $z$  ebenfalls ein  $u$  und ein  $v$ , also ein  $w$ , und damit ist dem Functionsbegriffe Genüge gethan.

Allein der Sprachgebrauch hat sich dahin entschieden, nur solche Functionen  $w(x, y)$  in einem Gebiete  $T$  Functionen der complexen Veränderlichen  $z = x + yi$  zu nennen, welche abgesehen von einzelnen Punkten die partielle Differentialgleichung befriedigen

$$\frac{i \partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y},$$

worin die partiellen Differentialquotienten im Allgemeinen stetige Functionen sind. Dieser Differentialgleichung genügen alle Potenzen  $z^\alpha = (x + yi)^\alpha$  ausser, wenn der reelle Theil von  $\alpha$  kleiner als 1 oder negativ ist, im Punkte 0, und alle Potenzreihen

$$A_0 + A_1(z - a) + A_2(z - a)^2 + \dots + A_n(z - a)^n + \dots$$

im ganzen Convergenzgebiete.

§ 77. Hat man ein Integral  $\int_{x_0 y_0}^{x' y'} p dx + q dy$  auszuführen, so kann man dasselbe auch  $\int_{z_0}^{z'} p dx + q dy$  schreiben, denn wenn  $z_0 = x_0 + y_0 i$ ,  $z' = x' + y' i$  gegeben ist, so sind  $x_0, y_0, x', y'$  gegeben. Sind aber  $p$  und  $q$  selbst complexe Functionen,  $p = u + vi$ ,  $q = u_1 + v_1 i$ , so hat man das Integral in zwei zu zerlegen,  $\int_{z_0}^{z'} u dx + u_1 dy + i \int_{z_0}^{z'} v dx + v_1 dy$  und es muss also sowohl  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$ , als auch  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial x}$  sein. Indessen ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u + vi}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial u_1 + v_1 i}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

mit den beiden partiellen Differentialgleichungen gleichbedeutend, und es wird also auch, wenn  $p$  und  $q$  complex sind, gleichsam nur die eine Differentialgleichung  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$  als Bedingung der Integrabilität erfordert.

Wenn nun  $\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = i \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$  ist, so wollen wir  $w(x, y) = \omega(z) = \omega(x + yi)$  setzen. Dann ist in einem einfach begrenzten (einfach zusammenhängenden) Gebiete  $T$ , in welchem die partielle Differentialgleichung erfüllt ist, und die Differentialquotienten stetig sind,

$$\int_{z_0}^{z'} \omega(z) dx + i \omega(z) dy = \int_{z_0}^{z'} \omega(z) (dx + i dy) = \int_{z_0}^{z'} \omega(z) dz$$

eine Function der Grenzen allein, und vom Integrationswege nach § 71 unabhängig, Das Integral über die ganze Begrenzung eines Gebietes  $T$ , in dessen Innern dieselben Bedingungen erfüllt sind, ist Null.

Wenn die Function  $\omega(z)$  im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebietes  $T$  überall die partielle Differentialgleichung erfüllt, so sagt man sie habe dort den Charakter einer ganzen Function.

§ 78. Hat die Function  $\omega(z)$  in einem Gebiete  $T$ , dessen Begrenzung  $s$  aus einem continuirlichen Zuge besteht, den Charakter einer ganzen Function, so hat auch  $\omega(z) : (z - z_0)$  denselben Charakter, ausgenommen im Punkte  $z_0$ . Zieht man um denselben einen kleinen Kreis  $k$  mit dem Radius  $\rho$ , so ist das über  $s$  erstreckte Integral dieser Function gleich dem über den Kreis  $k$  erstreckten Integrale (nach § 71), weil zwischen  $k$  und  $s$  die Function  $\omega(z) : (z - z_0)$  den Charakter einer ganzen Function besitzt, also ist

$$\int_{(s)} \frac{\omega(z) dz}{z - z_0} = \int_k \frac{\omega(z) dz}{z - z_0} = \int_k \frac{\omega(z) (\cos \varphi + i \sin \varphi) d\rho \varphi}{\rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)},$$

worin  $\varphi$  der Winkel des Bogenelementes (§ 68)  $\rho\varphi$  mit der positiven  $x$ -Achse,  $\vartheta$  der Winkel des Radius  $\rho$  mit der positiven  $x$ -Achse ist. Es ist folglich  $\varphi = \vartheta + \frac{1}{2}\pi$  und also

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\omega(z) dz}{z - z_0} &= \int_k \frac{\omega(z) dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} \omega[z_0 + \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)] d\vartheta \\ &= i \int_0^{2\pi} \omega(z_0) d\vartheta + i \int_0^{2\pi} \left\{ \omega[z_0 + \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)] - \omega(z_0) \right\} d\vartheta, \end{aligned}$$

wie klein auch  $\rho$  genommen werden mag. Da nun  $\omega(z)$  als stetig vorausgesetzt ist (denn die partiellen Differentialquotienten sollen stetig sein), so muss das zweite Integral kleiner als jede noch so klein vorgegebene Grösse sein, weil  $\omega[z_0 + \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)] - \omega(z_0)$  beliebig klein (sowohl im reellen Theile, als auch im imaginären Theile) gemacht werden kann, also ist das letzte Integral Null und folglich

$$\int_s \frac{\omega(z) dz}{z - z_0} = i \omega(z_0) \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i \omega(z_0).$$

Aus dieser Gleichung, welche nach  $z_0$  differenzirt werden kann, werden in der Theorie der complexen Functionen die Eigenschaften der Functionen einer complexen Veränderlichen hergeleitet. Sie gestattet die Werthe der Function  $\omega(z)$  im Innern von  $T$  aus den Werthen am Rande zu bestimmen. Sie ist aber auch zugleich ein ausgiebiges Hilfsmittel zur Herleitung bestimmter Integrale, wofür ein Beispiel gegeben werden soll.

§ 79. Um das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{axi}}{x - bi} dx$  auszuwerthen, in welchem  $a$  und  $b$  positiv reell sind, kann

man das Integral von  $-m$  bis  $+m$  und von da über einen Halbkreis erstrecken, welcher die Linie von  $-m$  bis  $+m$  zum Durchmesser hat, und  $bi$  im Innern enthält. Wie gross auch  $m$  sein mag, im Innern dieser Begrenzung ( $s$ ) hat  $e^{axi}$  den Charakter einer ganzen Function, denn es kann in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden. Also ist nach § 78

$$\begin{aligned} \int_{(s)} \frac{e^{axi}}{z - bi} dz &= \int_{-m}^{+m} \frac{e^{axi}}{x - bi} dx + i \int_0^{\pi} \frac{e^{ami(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} \cdot m(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) d\vartheta}{m(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) - bi} \\ &= 2\pi i e^{-ab} = \int_{-m}^{+m} \frac{e^{axi}}{x - bi} dx + i \int_0^{\pi} \frac{e^{-am \sin \vartheta} \cdot e^{iam \cos \vartheta} \cdot d\vartheta}{1 - \frac{b}{m}(\sin \vartheta - i \cos \vartheta)}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral aber convergirt mit wachsendem  $m$ , wenn  $a$  positiv ist gegen Null, und man hat also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{axi}}{x - bi} dx &= 2\pi i e^{-ab} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + i \sin ax}{x - bi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos ax - b \sin ax + i(x \sin ax + b \cos ax)}{x^2 + b^2} dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos ax - b \sin ax}{x^2 + b^2} dx &= 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax + b \cos ax}{x^2 + b^2} dx = 2\pi e^{-ab}, \\ \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax + b \cos ax}{x^2 + b^2} dx &= \pi e^{-ab}, \end{aligned}$$

wobei  $a$  und  $b$  als positiv vorausgesetzt sind.

Für  $a = 0$  ist das Integral  $\int_0^{\infty} \frac{b dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2}$ , es ist also unstetig in Bezug auf  $a$ .

Ist in dem Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{axi}}{x - bi} dx$   $a$  negativ, so ist das Integral über eine Linie von  $-m$  bis  $+m$ , und von da über einen Halbkreis, der diese Linie zum Durchmesser hat und  $bi$  ausschliesst, gleich

Null, weil im Innern derselben  $e^{azi} : (z-bi)$  den Charakter einer ganzen Function hat. Daraus ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-axi}}{x-bi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax - i \sin ax}{x-bi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos ax + b \sin ax + ib(\cos ax - x \sin ax)}{x^2 + b^2} dx = 0.$$

Also 
$$\int_0^{\infty} \frac{b \cos ax - x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = 0.$$

Oder das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax + b \cos ax}{x^2 + b^2} dx$$

hat für negative  $a$  den Werth Null.

Durch Addition erhält man für positive  $a$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax + b \cos ax}{x^2 + b^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax - b \cos ax}{x^2 + b^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \pi e^{-ab}.$$

Lässt man hierin  $b$  stetig gegen 0 abnehmen, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2}\pi \text{ für positive, } = -\frac{1}{2}\pi \text{ für negative } a \text{ und gleich } 0 \text{ für } a = 0.$$

§ 80. Eine andere Anwendung des Cauchy'schen Satzes ist die folgende.

Ist  $a$  eine complexe nicht rein reelle Zahl und  $1 > \mu > -1$ , so hat das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^\mu(x^2 - a^2)}$

einen Sinn. Wir nehmen bei der Auswerthung desselben an, dass der imaginäre Theil von  $a$  positiv sei, wodurch die Allgemeinheit nicht beschränkt wird, weil der Werth des Integrals offenbar ungeändert bleibt, wenn  $a$  in  $-a$  verwandelt wird. Die Curve  $s$  bestehe aus der mit der Achse des Reellen von  $-R$  bis  $+R$  zusammenfallenden geraden Linie und einem mit dem Radius  $R$  um den Nullpunkt geschlagenen Halbkreise, der im Punkte  $x = R$  beginnt und über  $x = +iR$  geht und in  $-R$  endigt. Dann ist nach dem Satze (§ 78)  $\int_{(s)} \frac{w(x)}{x-x_0} dx = 2\pi i w(x_0)$ , wenn man  $w(x) = 1 : x^\mu(x+a)$ ,  $x_0 = a$ ,  $a = \rho e^{\varphi i}$  setzt,

$$\begin{aligned} \int_s \frac{1 : x^\mu(x+a)}{x-a} dx &= \int_{-R}^0 \frac{dx}{x^\mu(x+a)} + \int_0^R \frac{dx}{x^\mu(x+a)} + i \int_0^\pi \frac{R e^{\vartheta i} d\vartheta}{R^\mu e^{\mu \vartheta i} (R^2 e^{2\vartheta i} - \rho^2 e^{2\varphi i})} \\ &= \int_{-R}^0 \frac{dr}{e^{\mu \pi i} (-r)^\mu (r^2 - a^2)} + \int_0^R \frac{dr}{r^\mu (r^2 - a^2)} + \frac{i}{R^{\mu+1}} \int_0^\pi \frac{e^{-(1+\mu)\vartheta i}}{1 - \frac{\rho^2}{R^2} e^{2(\varphi - \vartheta)i}} \\ &= (1 + e^{-\mu \pi i}) \int_0^R \frac{dr}{r^\mu (r^2 - a^2)} + \frac{i}{R^{\mu+1}} \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{e^{(1+\mu)\vartheta i} (1 - \frac{\rho^2}{R^2} e^{2(\varphi - \vartheta)i})} = \frac{\pi i}{a^{1+\mu}}. \end{aligned}$$

Geht man in der letzten Gleichung mit  $R$  zur Grenze  $\infty$  über, ersetzt  $r$  durch  $x$ , und beachtet, dass die Grenze des absoluten Betrages von  $e^{(1+\mu)\vartheta i} [1 - (\rho^2 : R^2) e^{2(\varphi - \vartheta)i}]$  gleich Eins ist, so findet man endlich:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\mu(x^2 - a^2)} = \frac{\pi i}{a^{\mu+1}(1 + e^{-\mu \pi i})} = \frac{i \cdot e^{\frac{1}{2}\mu \pi i}}{2a^{1+\mu} \cos \frac{1}{2}\mu \pi},$$

und wenn man  $\sqrt{x}$  als Veränderliche einführt,  $\mu = 2\lambda - 1$  und  $a^2 = \alpha$  setzt,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda(x - \alpha)} = \frac{\pi e^{\lambda \pi i}}{\alpha^\lambda \sin \lambda \pi}.$$

Setzt man weiter  $a = i$ ,  $\alpha = -1$ , so folgt



$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^\lambda} = \frac{\pi}{\sin \lambda\pi}$$

und wenn man  $1+x = \frac{1}{y}$ ,  $dx = -\frac{dy}{y^2}$  setzt, so ergibt sich weiter

$$\int_0^1 \frac{dy}{y\left(\frac{1}{y}-1\right)^\lambda} = \int_0^1 y^{\lambda-1}(1-y)^{-\lambda} dy = \frac{\pi}{\sin \lambda\pi},$$

welche Relation auch direct mit demselben Cauchy'schen Satze bewiesen werden kann.

§ 81. **Integration durch Reihen.** Bei Auswerthung bestimmter Integrale ist man oft genöthigt, die zu integrende Function in unendliche Reihen aufzulösen, deren einzelne Terme die Integration leicht zulassen. Ist  $f(x) = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$  in dem ganzen Integrationsintervalle, und lässt sich eine Zahl  $N$  angeben, so dass dem absoluten Betrage nach

$$f - \varphi_0 - \varphi_1 - \dots - \varphi_N < \sigma$$

ist, wie klein auch  $\sigma$  vorgegeben sei, und welche Werthe des Integrationsintervalles (oder, bei complexen Integrationen) auf dem Integrationswege,  $x$  auch annehmen mag, so ist offenbar absolut genommen

$$\int f dx - \int \varphi_0 dx - \int \varphi_1 dx - \dots - \int \varphi_N dx < \int \sigma dx$$

und da dieser Ausdruck beliebig klein gemacht werden kann,

$$\int f dx = \int \varphi_0 dx + \int \varphi_1 dx + \dots + \int \varphi_n dx + \dots \text{ in infinitum.}$$

Eine Reihe, welche die angegebene Eigenschaft besitzt, nennt man gleichmässig convergent, und man kann mit Einführung dieses Wortes den Satz aussprechen:

*Das Integral einer unendlichen Reihe, welche im Integrationsintervalle, oder auf dem Integrationswege gleichmässig convergent ist, wird durch Integration der Glieder erhalten.*

Eine Potenzreihe ist im Innern ihres Convergencekreises immer gleichmässig convergent, und eine Integration derselben kann daher ohne Weiteres gliedweise ausgeführt werden, so lange der Integrationsweg im Innern des Convergencekreises verläuft. Erstreckt sich aber ein Theil des Integrationsweges über den Rand, wo die Potenzreihe in eine trigonometrische Reihe (Fourier'sche Reihe) übergeht, so kann dieselbe dort leicht in allen Punkten convergiren und eine integrabele Function darstellen ohne gleichmässig convergent zu sein. Die Integration ist dann nicht ohne Weiteres zulässig, und es ist kein Kriterium für die Anwendbarkeit gliedweiser Integration, dass die dadurch erhaltene Reihe wieder convergirt.

**Nachtrag.** Nachdem der grösste Theil der vorliegenden Bogen schon gedruckt war, erhielt ich von Herrn Du Bois Reymond seine in den Abhandlungen der bayrischen Akademie Bd. XII veröffentlichte Abhandlung über die Fouriersche Reihe. In einem Anhange derselben befindet sich der Beweis des Satzes der in § 23 dieser Schrift enthalten ist. Sodann giebt Herr Du Bois Reymond im Art. 12 der citirten Abhandlung eine Erweiterung der partiellen Integration, welche bemerkenswerth ist.

Derselbe zeigt nämlich, dass die Gleichung:

$$\int_a^b \left\{ \varphi(x) \int_c^x \psi(x) dx \right\} dx = \int_c^b \psi(x) dx \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \left\{ \psi(x) \int_a^x \varphi(x) dx \right\} dx,$$

welche mit der Formel für partielle Integration dann identisch ist, wenn  $\frac{d}{dx} \int_c^x \psi(x) dx = \psi(x) = \frac{df(x)}{dx}$

gesetzt werden kann, weiter keine Beschränkung erfordert, als dass  $\varphi$  und  $\psi$  integrabel seien. Für den Fall, dass  $\varphi$  und  $\psi$  endliche Functionen sind, lässt sich dieser Satz mit denselben Mitteln als der zweite Mittelwerthsatz in § 27 beweisen, und dann auf Fälle des Unendlichwerdens in einzelnen Punkten ausdehnen.





