

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III.

XIX Année 1926.

Fascicule 7—9.

SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematycznych i przyrodniczych.

Rok XIX 1926

Zeszyt 7—9



WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1 9 2 6

TREŚĆ ZESZYTU 7—9.

(Table des matières).

W. Sierpiński. Uwaga o twierdzeniu Borela	283
Otton Nikodym. Przykład zbioru zamkniętego w przestrzeni trójwymiarowej, dla którego zbiór jego punktów odcinkowo dostępnych jest niemierzalny w sensie Borela	285
Otton Nikodym. O pewnych własnościach operacji A.	294
Adolf Lindenbaum i Alfred Tarski. Komunikat o badaniach z zakresu teorii mnogości	299
H. Szpidbaum. Samarytanie. Studium antropobiologiczne	331
Józef Grzybowski. O kostnym namiocie mózdzku.	357
Włodzimierz Chylewski. Głowa łokciowa m. nawrotnego oblego (m. pronator teres) w szeregu Naczelných	367
M. Konopacki. Zachowanie się mitochondriów w czasie rozwoju zarodków żaby	376
T. J. Wojno. Badania krystalograficzne dwusiarczku benzoilu $(C_6H_5CO)_2S_2$	386
Antoni Morawiecki. Piorunowce	387
Antoni Morawiecki. Cenomańskie warstwy fosforytonośne okolic Niżniowa nad Dniestrem	388
A. Łaskiewicz. Studja mineralogiczne	391

W. Sierpiński. Remarque sur le théorème de Borel	283
Otton Nikodym. Sur un ensemble fermé (à 3 dimensions), dont les points accessibles forment un ensemble qui n'est pas mesurable (B).	285
Otton Nikodym. Sur quelques propriétés de l'opération A.	294

SPRAWOZDANIE Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III nauk matematycznych i przyrodniczych.

Posiedzenie

w dniu 11 listopada 1926.

W. Sierpiński.

Uwaga o twierdzeniu Borela.

Autor wykazuje, że pewien warunek Fréchet'a na to, żeby zbiór posiadał własność Borela, nie jest konieczny.

W. Sierpiński.

Remarque sur le théorème de Borel.

Dans sa „*Remarque sur le théorème de Borel*”¹⁾ M. Fréchet a signalé que pour qu'un ensemble (situé dans un espace (V) quelconque) possède la propriété de Borel, il suffit qu'il soit compact en soi au sens *très strict*²⁾. Le but de cette note est de prouver que cette condition *n'est pas nécessaire*.

Désignons par K_1 l'ensemble de tous les nombres ordinaux de la 1^{re} classe, et par K_2 — l'ensemble de tous les nombres ordinaux de la deuxième classe. Définissons la classe K par la

¹⁾ Communication du 26 juin 1926; v. ce volume.

²⁾ Un ensemble E est dit *compact en soi au sens très strict* si tout sous-ensemble infini E_1 de E admet au moins un point d'accumulation a appartenant à E , tel que tout voisinage de a contienne à son intérieur une infinité de points de E_1 .



formule $K = K_1 + K_2$. Tout élément de K aura, par définition, un seul voisinage.

Si p est un élément de K_1 , le voisinage $V(p)$ de p est formé du nombre p et de l'ensemble K_2 . Si α est un élément de K_2 , $V(\alpha)$ est formé de tous les nombres ordinaux ξ , tels que $0 < \xi \leq \alpha$.

Je dis que l'ensemble $F = K$ jouit de la propriété de Borel.

En effet, soit U_1, U_2, U_3, \dots une famille dénombrable d'ensembles couvrant F . Or, F étant non dénombrable, un au moins des ensembles U_n , soit U_m , contient à son intérieur une infinité non dénombrable de points. α étant un nombre transfini donné quelconque $< \Omega$, il existe donc à l'intérieur de U_m un nombre $\beta > \alpha$: donc U_m contient le voisinage $V(\beta)$ de β . (Puisque, si un élément q est intérieur à un ensemble E , E contient au moins un voisinage de q , et dans le cas actuel il n'y a qu'un seul voisinage de β . Donc U_m contient tous les nombres ordinaux $\xi \leq \beta$. Il en résulte (α étant un nombre transfini quelconque $< \Omega$, et β étant $> \alpha$) que U_m contient tous les nombres transfinis $< \Omega$, donc que U_m contient la classe K toute entière, et par suite couvre l'ensemble F . Donc F jouit de la propriété de Borel.

Or, je dis qu'aucun voisinage ne contient à son intérieur plus qu'un point de K_1 . En effet, le voisinage $V(p)$ d'un point p de K_1 ne contient de K_1 que le point p (d'après sa définition), et le voisinage $V(\alpha)$ d'un point α de K_2 ne contient à son intérieur aucun point p de K_1 , puisque $V(p) \supset K_2$ et $V(\alpha)$ ne contient pas K_2 .

Donc, l'ensemble F (dont K_1 est un sous-ensemble infini) n'est pas compact en soi au sens très strict.

Or, il importe de remarquer qu'on pourrait démontrer sans peine que pour qu'un ensemble possède la propriété de Borel-Lebesgue, il faut qu'il soit compact en soi au sens très strict.

Otton Nikodym.

Przykład zbioru zamkniętego w przestrzeni trójwymiarowej, dla którego zbiór jego punktów odcinkowo dostępnych jest niemierzalny w sensie Borela.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 11 listopada 1926 r.

Sur un ensemble fermé (à 3 dimensions), dont les points accessibles forment un ensemble qui n'est pas mesurable (B).

§ 1. Dans le tome VII des *Fundamenta Mathematicae*¹⁾ j'ai indiqué un exemple d'un ensemble fermé, situé dans l'espace à 3 dimensions, cet exemple étant tel que tout ses points qui sont rectilinéairement accessibles, forment un ensemble qui n'est pas mesurable (B). Le but de cette communication est d'en donner la démonstration²⁾. Je démontrerai de plus que l'ensemble en question fournit en même temps un exemple d'un ensemble fermé, pour lequel l'ensemble de tous ses points, qui sont accessibles par des arcs simples, n'est pas mesurable (B).

§ 2. Soit E un ensemble (A) borné mais quelconque, situé sur l'axe $r=0$ d'un système des coordonnées cylindriques (x, r, φ)

1) *Sur les points rectilinéairement accessibles des ensembles (A) plans.*

2) Pendant les corrections des épreuves de mon article cité ci-dessus, M. P. Alexandroff communiqua dans une lettre écrite à M. Sierpiński (comparez la note en bas de page dans mon article en ce qui concerne une lettre de M. P. Alexandroff, envoyé antérieurement, avant que le travail cité ne fut donné à l'impression) un exemple presque identique avec le mien. Je ne pas pu citer le contenu de cette lettre à cause du manque de place et surtout, parce que l'exemple ne m'a pas paru suffisamment clair. Cet exemple du à P. Urysohn est à présent publié par M. Alexandroff dans les *Koninklijke Aeademie Van Wetenschappen Te Amsterdam, Proceeding Vol XXVIII Nr. 10*. P. Urysohn: *Sur les points accessibles des ensembles fermés* p. 984—993. Dans une note en bas p. 984 dans cet article, rédigé par M. Alexandroff, on trouve que P. Urysohn connaissait avant moi l'exemple en question et même en 1923. M. Alexandroff a indiqué l'exemple en question sans en avoir donné la démonstration.

On y lit: p. 992 ligne 4—7: „une analyse facile montre que les deux ensembles L et L_d coïncident dans notre cas et que l'ensemble de ceux-là parmi les points accessibles de l'ensemble F , qui sont situés sur l'axe OZ , est précisément l'ensemble (A) que nous venons de placer sur cette axe”.

de l'espace euclidien à trois dimensions (r désigne la distance de l'axe x , φ l'azimut).

$$\text{Soit } \{\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}\} \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

un système déterminant, (dont le noyau est E) formé d'intervalles fermés $\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, situés sur l'axe x et régulier c'est-à-dire:

$$\delta_{i_1 \dots i_{k+1}} \subset \delta_{i_1 \dots i_k} \quad (1)$$

$$\text{et la longueur de } \delta_{i_1 \dots i_k} \leq \frac{1}{k} \quad (2)$$

Posons $\delta_{i_1 \dots i_k} = \langle a_{i_1 \dots i_k}, b_{i_1 \dots i_k} \rangle$ et formons un nouveau système déterminant, composé d'intervalles ouverts.

$$\delta'_{i_1 \dots i_k} = (a_{i_1 \dots i_k} - \frac{1}{k}, b_{i_1 \dots i_k} + \frac{1}{k})^1)$$

On a évidemment:

$$\delta'_{i_k \dots i_k i_{k+1}} \subset \delta'_{i_1 \dots i_k} \quad (2 \text{ bis})$$

Définissons $P_{i_1 \dots i_k}^{(k=1, 2, \dots)}$ ($i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots$) comme l'ensemble de tous les nombres irrationnels > 0 et < 1 , dont le développement en une fraction continue et infinie (ayant les numérateurs = 1 et les dénominateurs naturels) commence par:

$$\frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \dots + \frac{1}{i_k}$$

Or, on s'aperçoit facilement que cela n'est pas nécessairement vrai dans le cas, où le système déterminant y considéré, contient des suites d'intervalles

$$(\alpha_{i_1 \dots i_k}, \beta_{i_1 \dots i_k}), \text{ telles que p. e. :}$$

$$\alpha_{i_1 \dots i_s} = \alpha_{i_1 \dots i_{s+1}} = \alpha_{i_1 \dots i_s, i_{s+1}, i_{s+2}} = \dots$$

Les considérations développées ci-dessous sont trouvées par moi indépendamment de P. Urysohn et proviennent des temps de la rédaction de mon article cité, excepté § 6, qui est écrit tout-à-fait récemment.

¹⁾ Nous désignerons parfois par la même lettre le point situé sur l'axe $r = 0$ et sa x — coordonnée, ce qui ne produit pas des confusions dans la suite. En ce qui concerne les notations adoptées ici voir mon article cité ci-dessus.

Envisageons dans l'espace $xr\varphi$ le système d'ensembles ouverts:

$$\Delta_{i_1, \dots, i_k} \stackrel{\text{df}}{=} \widehat{xr\varphi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k+2} < r < \frac{1}{k} \\ x \in \delta'_{i_1 \dots i_k} \\ \varphi \in (\langle P_{2i_1, \dots, 2i_k} \rangle) \end{array} \right\} \dots \quad (3)$$

$$(i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots), (k = 1, 2, \dots),$$

et posons

$$M \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k/1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots} \Delta_{i_1 \dots i_k} \quad (4)$$

Nous démontrerons que l'ensemble fermé $co M$ a la propriété en question¹⁾. Il suffit de démontrer que 1^o tous les points de $co M$ qui sont accessibles par des arcs simples situés dans M et appartiennent à l'axe x , appartiennent aussi à E et que 2^o tout point de E est accessible par un segment droit situé dans M .

§ 3. Soit $x_o \in E$. Il existe une suite infinie d'indices i_1, i_2, \dots , telle que $x_o \in \delta'_{i_1}, \delta'_{i_1, i_2}, \dots$

Envisageons le segment ouvert l défini que voici:

$$l \stackrel{\text{df}}{=} \widehat{xz\varphi} \left\{ \begin{array}{l} 0 < r < 1 \\ x = x_o \\ \varphi = \varphi_o \end{array} \right\} \quad (5)$$

où:

$$\varphi_o \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{|2i_1|} + \frac{1}{|2i_2|} + \dots$$

Soit $p_o(x_o, \varphi_o, r_o) \in l$. Il existe un nombre naturel k , tel que $\frac{1}{k+2} < r_o < \frac{1}{k}$

On a: $x_o \in \delta'_{i_1, \dots, i_k}, \varphi_o \in (\langle \varphi_{2i_1, \dots, 2i_k} \rangle)$; donc en vertu de (3): $p_o \in \Delta_{i_1, \dots, i_k}$; donc d'après (4): $p_o \in M$. Il s'ensuit que $l \subset M$, c'est-à-dire que le point x_o de l'ensemble E est linéairement accessible dans

¹⁾ La définition donnée ci-dessus paraît être moins simple que celle donnée par P. Urysohn. Néanmoins elle semble être plus commode pour le but de démonstration.

M. Tout point de *E* est donc rectilinéairement accessible dans *M*.

§ 4. Supposons maintenant que le point x_0 situé sur l'axe x soit accessible par un arc simple situé dans *M*, et démontrons que x_0 appartient à *E*. Faisons pour ce but deux remarques préliminaires.

I. Si $(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)$ et $(i'_1, i'_2, \dots, i'_{\lambda'})$ où $\lambda = \lambda'$ sont deux groupes différents d'indices, on a:

$$\Delta_{i_1, \dots, i_\lambda} \Delta_{i'_1, \dots, i'_{\lambda'}} = 0 \quad (6)$$

En effet, pour qu'il soit:

$$\langle \varphi_{s_1, \dots, s_\lambda} \rangle \cdot \langle \varphi_{t_1, \dots, t_{\lambda'}} \rangle \neq 0,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$s_1 = t_1, \dots, s_{\lambda-1} = t_{\lambda-1}, |s_\lambda - t_\lambda| = 1.$$

II. (i_1, \dots, i_λ) et $(i'_1, \dots, i'_{\lambda'})$ (où $\lambda < \lambda'$) étant deux groupes d'indices, pour qu'on ait:

$$\Delta_{i_1, \dots, i_\lambda} \cdot \Delta_{i'_1, \dots, i'_{\lambda'}} \neq 0,$$

il faut et il suffit que $\lambda' = \lambda + 1$ et

$$i_1 = i'_1, \dots, i_\lambda = i'_\lambda. \quad (7)$$

La démonstration est facile et s'appuie sur le fait que:

$$\langle \varphi_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}} \rangle \subset \langle \varphi_{i_1, \dots, i_k} \rangle$$

Lemme: Soit i_1, i_2, \dots une suite infinie d'indices et x_1, x_2, \dots une suite infinie de points telle que

$$x_k \in \delta'_{i_1, \dots, i_k}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Nous démontrerons que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \delta_{i_1} \cdot \delta_{i_1, i_2} \cdot \dots \quad (9)$$

En effet, d'après (1), l'ensemble $\delta_{i_1} \cdot \delta_{i_1, i_2} \cdot \dots$ n'est pas vide, les intervalles $\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ étant fermés. Cet ensemble se réduit à un seul point d'après (2).

Posons donc:

$$I \ x'_0 \stackrel{df.}{=} \delta_{i_1} \delta_{i_1, i_2} \cdot \dots \quad (10)$$

En vertu de (2) on a:

$$\delta_{i_1, \dots, i_{k+s}} \subset \left\langle x'_o - \frac{1}{k}, x'_o + \frac{1}{k} \right\rangle$$

pour tous les $s \geq 0$ et $k > 0$;

donc

$$\delta'_{i_1, \dots, i_{k+s}} \subset \left\langle x'_o - \frac{2}{k}, x'_o + \frac{2}{k} \right\rangle,$$

donc d'après (8): $x_{k+s} \in \left\langle x'_o - \frac{2}{k}, x'_o + \frac{2}{k} \right\rangle$ c'est-à-dire:

$$|x_{k+s} - x'_o| \leq \frac{2}{k} \text{ pour tous les } s \geq 0$$

et pour tous les k , d'où on tire que $x'_o = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, ce qui nous donne, par égard de (10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \delta_{i_1} \cdot \delta_{i_1, i_2} \cdot \dots$$

§ 5. Cela posé, soit p_o un point de l'axe $r=0$ et soit $(p_o p_1) = l$ un arc simple situé dans M .

La définition (4) nous montre qu'il existe le plus petit nombre $k \geq 1$ tel que, pour au moins un groupe de k indices s_1, s_2, \dots, s_k , on ait:

$$l \cdot \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_k} \neq 0. \tag{11}$$

Convenons, pour un moment, de dire d'une manière générale qu'un point α situé dans M , appartient au groupe (s_1, s_2, \dots, s_k) de k indices, s'il existe au moins un groupe

$$(t_1, t_2, \dots, t_\lambda), \text{ tel que } \lambda \geq k, \\ s_1 = t_1, \dots, s_k = t_k; \alpha \in \Delta_{t_1, t_2, \dots, t_\lambda}.$$

Si α appartient à deux groupes $(s'_1, s'_2, \dots, s'_k)$ et $(s''_1, s''_2, \dots, s''_k)$, on a (d'après la remarque 1) que $s'_1 = s''_1, \dots, s'_k = s''_k$; c'est-à-dire, un point α ne peut appartenir qu'à un seul groupe de k indices. Désignons ce groupe par $G(\alpha)$. De la définition du nombre k il résulte que pour chaque point p de l , le groupe $G(p)$ est bien déterminé.

Ja vais démontrer que $G(p) = \text{const.}$ pour tous les points p de l .

Pour démontrer cela, supposons qu'il y existe deux points q et q' situés sur l et tels que $G(q) \neq G(q')$.

Ordonnons tous les points de l'arc l dans la direction de p_1 à p_0 .

Comme $q \neq q'$, on peut évidemment supposer que q précède q' dans l'ordre indiqué sur l : $q < q'$.

Désignons par q_0 la limite supérieure des points p du segment $\langle q, q' \rangle$ de l'arc l , pour lesquels on a: $G(p) \neq G(q')$. On a $G(q) \neq G(q')$, d'où le point q_0 existe nécessairement et on a:

$$q \leq q_0 \leq q'.$$

Mais on voit que $G(q_0) \neq G(q')$.

S'il était $G(q_0) = G(q')$, on aurait $q_0 \in \Delta(G(q') \dots)$, où $(G(q') \dots)$ désigne un groupe d'indices commençant par $G(q')$ mais qui peut être identique avec $G(q')$.

$\Delta_{(G(q') \dots)}$ étant un ensemble ouvert, il s'ensuit qu'il existe un point q'_0 tel que $q < q'_0 < q_0 \leq q'$ et que l'arc $\langle q'_0, q_0 \rangle$ fait partie de $\Delta_{(G(q') \dots)}$. Tous les points de $\langle q'_0, q' \rangle$ appartiennent donc à $G(q')$, ce que est en contradiction avec le fait que q_0 est la limite supérieure de tous les points p de $\langle q, q' \rangle$ pour lesquels $G(p) \neq G(q')$.

Nous avons ainsi démontré que

$$G(q_0) \neq G(q').$$

Il y en résulte que $q_0 < q'$.

On a $q_0 \in \Delta_{(G(q_0) \dots)}$, d'où, comme $\Delta_{(G(q_0) \dots)}$ est un ensemble ouvert, on en conclut l'existence d'un point q''_0 , pour lequel:

$$q_0 < q''_0 < q'$$

et

$$\langle q_0, q''_0 \rangle \subset \Delta_{(G(q_0) \dots)}.$$

Par conséquent, quelque soit le point p appartenant à l'arc $\langle q_0, q''_0 \rangle$, on a toujours

$$G(p) = G(q_0) \neq G(q'),$$

ce qui exprime que q_0 ne peut pas être la borne supérieure des points p du segment $\langle q, q' \rangle$, pour lesquels $G(p) \neq G(q')$.

La contradiction obtenue démontre que $G(q) = G(q')$, d'où il résulte qu'il n'y existe qu'un seul groupe de k indices, auquel appartiennent tous les points de l'arc l .

Soit $i_1, i_2 \dots i_k$ ce groupe, donc $l \cdot \Delta_{i_1, i_2 \dots i_k} \neq 0$.

L'arc l s'étendant jusqu'à l'axe $r=0$, il y existe nécessairement sur l le point p_k , qui est la borne supérieure de tous les points de l , pour lesquels

$$l \cdot \Delta_{i_1 \dots i_k} \neq 0.$$

On démontre comme plus haut que $p_k \text{ non-} \in \Delta_{i_1 \dots i_k}$, l'ensemble $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ étant un ensemble ouvert.

Il s'ensuit qu'il existe un indice i_{k+1} tel que:

$$p_k \in \Delta_{i_1 \dots i_k, i_{k+1}}.$$

En effet, $G(p_k) = (i_1 \dots i_k)$, donc il existe un groupe d'indices $(i'_1 \dots i'_l)$ tel que $l \geq k$, $i'_1 = i_1, \dots, i'_k = i_k$,

$$p_k \in \Delta_{i_1 \dots i_l}.$$

Mais on a $l > k$ et d'après la remarque II:

$$|l - k| = 1.$$

En considérant l'arc $\langle p_0 p_k \rangle$ au lieu de l , on voit d'après ci-dessus que $k+1$ est le plus petit nombre d'indices d'un groupe J , pour lequel

$$\langle p_0 p_k \rangle \cdot \Delta_J \neq 0.$$

On peut donc y appliquer le même raisonnement, ce qui nous donne l'existence d'un point bien déterminé p_{k+1} et l'existence d'un indice i_{k+2} , pour lequel

$$p_{k+1} \in \Delta_{i_1 \dots i_k, i_{k+1}, i_{k+2}}$$

et ainsi de suite.

On obtient ainsi (par induction) une suite infinie de points:

$$p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+p}, \dots$$

et une suite infinie d'indices:

$$i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_{k+t}, \dots \quad \text{où:}$$

$$p_{k+t} \in l \cdot \Delta_{i_1 \dots i_{k+t+1}}.$$

Soient x_{k+t} , r_{k+t} , φ_{k+t} les coordonnées de p_{k+t} . On a évidemment:

$$\frac{1}{k+t+3} < r_{k+t} < \frac{1}{k+t+1},$$

d'où il s'ensuit que $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{k+t} = x_o$. On a de plus:

$$x_{k+t} \in \delta'_{i_1 \dots i_{k+t+1}},$$

d'où il s'ensuit, en vertu du lemme démontré que:

$$x_o = \lim x_{k+t} \in \delta_{i_1} \cdot \delta_{i_1 i_2} \dots;$$

c'est-à-dire que: $x_o \in E$.

Tous les points de l'axe x , accessibles dans M par des arcs simples appartiennent donc à E . L'axe x toute entière étant contenue dans $co M$, on voit enfin que l'ensemble de points de $co M$, rectilinéairement accessibles dans M , et se trouvant sur l'axe $r=0$ coïncide avec E . Il en est de même pour les points situés sur l'axe $r=0$ et accessibles par des arcs simples. E était seulement supposé d'être un ensemble (A). Donc si l'on envisage un ensemble E non mesurable (B), on obtient que l'ensemble de tous les points de $co M$ qui sont rectilinéairement accessibles, forment un ensemble non mesurable (B). Il y en est de même pour les points accessibles par des arcs simples.

§ 6. L'ensemble $co M$ peut être modifié en un ensemble punctiforme pour lequel tous ses points, qui sont rectilinéairement accessibles, forment un ensemble non mesurable (B). Il suffit de construire dans un cube Q un ensemble punctiforme Q' , tel que chaque droite coupant Q , ne peut y pénétrer sans rencontrer des points de Q' que jusqu'aux points, dont la distance de la frontière de Q est inférieure à un nombre positif $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

Ensuite en envisageant un ensemble E non dense, il faudrait remplacer $co M$ d'une manière convenable par la somme

des ensembles punctiformes, comme Q' , et y ajouter des points limites.

En utilisant une remarque que M. N. Lusin m'a bien voulu communiquer, on peut probablement faire passer par l'ensemble punctiforme ainsi obtenu un arc simple, jouissant de propriété que tous les points, qui sont rectilinéairement accessibles forment un ensemble non mesurable (B). Nous n'entrerons pas ici ni dans des détails de la construction ni dans ceux de la démonstration.

Otton Nikodym.

O pewnych własnościach operacji A .

Przedstawił W. Sierpiński dn. 11 listopada 1926 r.

Autor rozwija pewną metodę, pozwalającą dowodzić różnych własności operacji (A).

Sur quelques propriétés de l'opération A .

Dans le *T. VII* de *Fund. Math.* ¹⁾ j'ai donné la démonstration du théorème suivant:

L'opération A effectuée sur un système d'ensembles jouissant de la propriété de Baire, donne toujours un ensemble jouissant de la même propriété.

Je me propose de donner ici une autre démonstration, en indiquant une méthode simple, qui permet en même temps obtenir la proposition suivante, trouvée par MM. Lusin et Sierpiński:

L'opération A effectuée sur un système d'ensembles mesurables (L), donne toujours un ensemble mesurable (L) ²⁾.

Je m'appuis sur le fait que chaque ensemble (A) jouit de la propriété de Baire: ³⁾

Nous nous bornerons ici au cas des ensembles linéaires, le cas des ensembles dans l'espace à n dimensions pouvant être traité d'une manière analogue:

Soit Z une classe d'ensembles, ⁴⁾ jouissant des propriétés suivantes:

¹⁾ p. 149 — 154. M. Ruziewicz m'a bien voulu d'avertir que dans la dite démonstration, page 151, ligne 10—13 se trouve une inexactitude, qui doit être corrigée comme il suit:

„En effet, l'ensemble de tout les points de E , en lesquels E est de 1^{re} catégorie est lui-même de 1^{re} catégorie, donc $E - Q$ est de 1^{re} catégorie. L'ensemble Q étant parfait, il en résulte que l'ensemble $Q + (E - Q) = Q + E$ est un β . L'ensemble $M = HQ + E = H(Q + E)$, comme" ... etc.

²⁾ N. Lusin et W. Sierpiński: *Sur quelques propriétés des ensembles (A)*, Bulletin de l'Acad. de Sciences ce Cracovie 1918, p. 47 et 48.

³⁾ N. Lusin et W. Sierpiński: *Journal de Mathem. 7^e série* t. II. p. 68 ss.

⁴⁾ Je doi l'introduction de cette classe à une conversation avec M. A. Tarski.

(A) Z n'est pas vide

(B) Si E_1, E_2, \dots , en nombre au plus dénombrable, appartiennent à Z , on a aussi:

$$\sum_k E_k \in Z$$

(C) Si $E \in Z$, $E \subset E'$, on a $E' \in Z$.

On voit p. e. que la classe Z' de tous les ensembles de 1^{re} catégorie par rapport à un ensemble parfait donné, et aussi la classe Z'' de tous les ensembles de mesure 0, satisfont aux conditions (A), (B), (C).

Définition. Disons que les ensembles A et B sont *équivalents par rapport à la classe Z* :

$$A \underset{Z}{\equiv} B,$$

si

$$(A - B) + (B - A) \in Z.$$

On démontre par un calcul bien facile que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit $A \underset{Z}{\equiv} B$ est qu'il existe deux ensembles p, q appartenant à la classe Z et tels que

$$A = B + p - q \tag{1}$$

On démontre de même que dans l'énoncé précédent la formule (1) peut être remplacée par une autre:

$$A = B - p + q.$$

La notion d'équivalence de deux ensembles par rapport à Z possède toutes les propriétés caractéristiques de l'identité.

1. Lemme. Soit M un ensemble arbitraire, à chaque élément α duquel correspondent deux ensembles (de points) A_α et B_α ; dans ces conditions on a:

$$\sum_{\alpha \in M} A_\alpha - \sum_{\alpha \in M} B_\alpha \subset \sum_{\alpha \in M} (A_\alpha - B_\alpha).$$

2. Lemme. Dans les mêmes conditions on a:

$$\prod_{\alpha \in M} A_\alpha - \prod_{\alpha \in M} B_\alpha \subset \sum_{\alpha \in M} (A_\alpha - B_\alpha).$$

3. Lemme. Si

$$\sum_{\alpha \in M} [(A_\alpha - B_\alpha) + (B_\alpha - A_\alpha)] \in Z$$

on a

$$\sum_{\alpha \in M} A_\alpha \equiv_Z \sum_{\alpha \in M} B_\alpha.$$

Le démonstration est basée sur le lemme 1.

1. Théorème. Soient $\{A_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$ et $\{B_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$ deux systèmes déterminants, pour lesquels on ait:

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_k} \equiv_Z B_{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots), (k = 1, 2, \dots);$$

dans ces conditions les noyaux de ces deux systèmes déterminants sont équivalents par rapport à Z .

En effet, posons:

$$C \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} [(A_{i_1, \dots, i_k} - B_{i_1, \dots, i_k}) + (B_{i_1, \dots, i_k} - A_{i_1, \dots, i_k})].$$

D'après l'hypothèse on a:

$$(A_{i_1, \dots, i_k} - B_{i_1, \dots, i_k}) + (B_{i_1, \dots, i_k} - A_{i_1, \dots, i_k}) \in Z.$$

Le nombre de tous les groupes d'indices étant dénombrable, la propriété (B) de la classe Z nous donne

$$C \in Z.$$

En vertu du lemme 2 on a:

$$(A_{i_1} \cdot A_{i_1, i_2} \dots) - (B_{i_1} \cdot B_{i_1, i_2} \dots) \subset (A_{i_1} - B_{i_1}) + (A_{i_1, i_2} - B_{i_1, i_2}) + \dots$$

et

$$(B_{i_1} \cdot B_{i_1, i_2} \dots) - (A_{i_1} \cdot A_{i_1, i_2} \dots) \subset (B_{i_1} - A_{i_1}) + (B_{i_1, i_2} - A_{i_1, i_2}) + \dots$$

quelque soit la suite infinie d'indices i_1, i_2, \dots

Par conséquent

$$\sum_{i_1, i_2, \dots} \{[(A_{i_1} \cdot A_{i_1, i_2} \dots) - (B_{i_1} \cdot B_{i_1, i_2} \dots)] + [(B_{i_1} \cdot B_{i_1, i_2} \dots) - (A_{i_1} \cdot A_{i_1, i_2} \dots)]\} \subset C \varepsilon Z,$$

en vertu de la propriété (C) de la classe Z. (La sommation est ci-dessus étendue à toutes les suites infinies d'indices).

En y appliquant le lemme 3, on obtient:

$$\sum_{i_1, i_2, \dots} A_{i_1} \cdot A_{i_1, i_2} \dots \equiv_Z \sum_{i_1, i_2, \dots} B_{i_1} \cdot B_{i_1, i_2} \dots,$$

ce qui démontre le théorème.

Rappelons tout court les notions concernant „la propriété de Baire”.

Soit F un ensemble parfait et $\langle \alpha, \beta \rangle$ ¹⁾ un intervalle. On dit qu'un ensemble E est dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ de 1^{re} catégorie de Baire par rapport à F , si $E \cdot F \cdot \langle \alpha, \beta \rangle$ est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses (dans aucune portion) par rapport à F . S'il n'existe dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ aucun sous-intervalle $\langle \gamma, \delta \rangle$ dans lequel E soit de 1^{re} catégorie par rapport à F , on dit que E est partout de 2^e catégorie dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ et par rapport à F . On dit que E satisfait à la condition de Baire par rapport à F , s'il n'existe aucun intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ dans lequel E et son complémentaire²⁾ soient tous les deux partout de 2^e catégorie par rapport à F .

On démontre aisément que, si E satisfait à la condition de Baire par rapport à F , il y existe un ensemble E' du type (F_δ) , tel que $E \equiv_{z'} E'$, où Z' désigne la classe de tous les ensembles qui sont de 1^{re} catégorie par rapport à F . D'une manière analogue, si E est mesurable (L), il y existe un ensemble E_1 du type (F_σ) , tel que $E \equiv_{z''} E_1$, où Z'' désigne la classe de tous les ensembles de mesure O .

Du théorème démontré plus haut il résulte immédiatement que l'opération (A), exécutée sur un système déterminant, composé d'ensembles satisfaisant à la condition de Baire par rapport

1) $\langle \alpha, \beta \rangle$ désigne un intervalle fermé.

2) Par rapport à la totalité de points.

à un ensemble parfait F fixe, donne comme noyau, un ensemble jouissant de la même propriété.

En effet, soit $\{E_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$ le système déterminant en question et E son noyau.

Il existe un système $\{E_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$ composé d'ensembles (F_σ) et tel que:

$$E_{i_1, i_2, \dots, i_k} \stackrel{z'}{=} E_{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

pour chaque cortège d'indices. Soit E' le noyau du second système déterminant. On a:

$$E \stackrel{z'}{=} E',$$

donc il y existe deux ensembles p et q de 1^{re} catégorie par rapport à F et tels que

$$E = E' - p + q.$$

L'ensemble E' c'est un ensemble (A) comme le noyau d'un système déterminant d'ensembles du type (F_σ) . D'après le théorème de M. M. Lusin et Sierpiński E' satisfait à la condition de Baire. Par conséquent E y satisfait aussi.

Pour des ensembles mesurables le raisonnement est analogue

Adolf Lindenbaum i Alfred Tarski.

Komunikat o badaniach z zakresu teorii mnogości.

Przedstawił W. Sierpiński.

Streszczenie.

W komunikacie tym są zreferowane wyniki, osiągnięte przez obu autorów w ciągu ostatnich kilku lat i dotąd nie opublikowane. Wyniki te dotyczą różnych działów teorii mnogości: teorii równości mocy i liczb kardynalnych, teorii odwzorowań jednoznacznych, teorii uporządkowania i typów porządkowych, podstaw arytmetyki liczb porządkowych, wreszcie teorii mnogości punktowych. Wszystkie twierdzenia podane są bez dowodów; autorowie zamierzają uzasadnić i rozwinąć swe wyniki w przyszłych pracach o charakterze specjalnym.

A. Lindenbaum et A. Tarski.

Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles.

Nous nous proposons de communiquer ici les résultats de nos recherches obtenus au cours de dernières années, qui portent sur différentes parties de la Théorie des Ensembles, mais n'ont pas été publiés jusqu'à présent. Nous allons les présenter sans démonstrations, remettant leur exposé complet aux travaux ultérieurs plus spéciaux.

Ces résultats peuvent être développés *mutatis mutandis* dans les systèmes déductifs différents: donc aussi bien dans celui des „*Principia Mathematica*“ de MM. Russell et Whitehead ou dans l'Ontologie de M. Leśniewski¹⁾ que dans la Théorie des Ensembles de M. Zermelo. Les cas exceptionnels où ces systèmes ne vont pas d'accord seront expressément indiqués.

Quant à l'axiome du choix, les résultats en question ont été obtenus pour la plupart sans en faire appel; lorsqu'il inter-

¹⁾ Le système de M. Leśniewski n'a pas été publié, mais une communication relative va paraître prochainement.

vient dans la démonstration d'un théorème, celui-ci sera muni d'un astérisque (p. ex. 97*).

Pour renseigner les lecteurs à qui des deux auteurs de cette *Communication* doit être attribué tel ou autre théorème, son numéro d'ordre sera suivi de la lettre *L* ou *T*.

Nous employons les notations que M. Sierpiński a adoptées dans ses „*Eléments de la Théorie des Ensembles*“¹⁾ et les notations courantes des „*Fundamenta Mathematicae*“. En particulier, les caractères gothiques désignent des nombres cardinaux; les caractères grecs — des types ou nombres ordinaux; les minuscules latines — des points, des fonctions ou des nombres cardinaux et ordinaux finis (naturels — 0 inclus); les majuscules — des ensembles. Le symbole „ $I_f(A)$ “ désigne l'image (la transformée) de l'ensemble *A* obtenue à l'aide de la fonction (univoque) *f* — en d'autres termes: l'ensemble de toutes les valeurs *f*(*x*) correspondantes aux éléments *x* de l'ensemble *A* (la fonction étant supposée définie sur l'ensemble *A* tout entier).

Les termes: „fini“ et „transfini“ concernant ensembles, nombres cardinaux etc. seront utilisés dans le sens que MM. Russell et Whitehead attribuent aux termes: „inductif“ et „réfléchi“²⁾. Lorsqu'un ensemble transfini peut être mis en bon ordre, le nombre cardinal qui lui correspond est dit un aleph.

§ 1. Théorie des nombres cardinaux.

A. Résultats obtenus sans l'aide de l'axiome du choix.

M. Tarski est parvenu (en 1923—1926) à une série de nouveaux théorèmes de la théorie des nombres cardinaux — nouveaux dans ce sens que leurs démonstrations antérieures étaient basées sur l'axiome du choix. Tous les résultats de M. Tarski se trouvent recueillis dans un mémoire plus étendu, destiné à paraître sous le titre: „*L'arithmétique des nombres cardinaux*“ dans le volume prochain du journal „*Fundamenta Mathematicae*“; ici, nous n'en présentons que les résultats plus importants.

1) En polonais: „*Zarys teorii mnogości*“, 1-re partie, 2 éd. (1923).

2) Cf. „*Principia Mathematica*“. Vol. II (1912), pp. 207 et 278.

Les théorèmes de M. Tarski concernent le problème de la comparabilité des nombres cardinaux et la question des opérations fondamentales avec eux, à savoir: addition, soustraction, multiplication et élévation en puissance.

Pour le premier de ces problèmes, M. Tarski utilise, outre les relations classiques introduites encore par Cantor: $\leq, <$ etc., certaines relations analogues $\leq^*, <^*$ etc., négligées jusqu'à présent. Voici la définition de la relation fondamentale \leq^* :

1. On a: $m \leq^* n$, lorsque $m=0$, ou bien, lorsque chaque ensemble de puissance n peut être décomposé en m ensembles non-vides et disjoints (ou — ce qui revient au même — lorsqu'il peut être transformé d'une façon univoque en un ensemble de puissance m).

La relation \leq^* possède beaucoup de propriétés analogues à celles de \leq (elle est p. ex. réflexive, transitive et monotone par rapport à l'addition et à la multiplication). En admettant l'axiome du choix, on peut même démontrer que les deux relations sont identiques. Sans cela, on obtient seulement les théorèmes:

2 (T). Si $m \leq n$, on a: $m \leq^* n$.

3 (T). n étant un nombre fini ou un aleph, ou bien — m un nombre fini, si $m \leq^* n$, on a: $m \leq n$.

4 (T). Si $m \leq^* n$, on a: $2^m \leq 2^n$ (et en général, pour $p \neq 0$: $p^m \leq p^n$).

Un lemme, qui ne paraît pas trop intéressant par lui-même, joue cependant un grand rôle dans les recherches de M. Tarski concernant l'addition et la soustraction:

5 (T). Si $A \sim B$, il existe des ensembles C_1, C_2, D_1 et D_2 remplissant les conditions: $A - B = C_1 + C_2$, $B - A = D_1 + D_2$, $C_1 \cdot C_2 = 0 = D_1 \cdot D_2$, $C_1 \sim D_1$, $C_2 + A \cdot B \sim A \cdot B \sim D_2 + A \cdot B$.

Traduit en langage de la théorie des nombres cardinaux, le lemme **5** prend la forme suivante:

6 (T). Si $m + p = m + q$, il existe des nombres n, p_1 et q_1 tels que l'on a: $p = n + p_1$, $q = n + q_1$, $m + p_1 = m = m + q_1$.

En remplaçant dans la thèse du th. **6** la dernière égalité double par la condition équivalente: $p_1 \cdot \aleph_0 \leq m$ et $q_1 \cdot \aleph_0 \leq m$, on arrive à une proposition qui permet de déduire d'une façon élémentaire et purement arithmétique les théorèmes connus et importants de la théorie des nombres cardinaux, comme p. ex. le théorème de M. Zermelo: lorsque $m = m + n$, alors $m = m +$

$\vdash n \cdot \aleph_0$; le théorème de Schröder-Bernstein: lorsque $m = n + p$ et $n = m + q$, alors $m = n$; et le théorème de M. Bernstein: lorsque $m + m = m + n$, alors $n \leq m$. Parmi les théorèmes qui vont suivre il y en a plusieurs qui s'appuient aussi sur le lemme 6.

L'égalité $m + p = m + q$ qui constitue l'hypothèse du lemme donne — comme on sait — à l'aide de l'axiome du choix une conclusion plus forte: soit $p \leq m$ et $q \leq m$ (et de plus: $m + p = m = m + q$), soit $p = q$. Dans cet ordre d'idées, M. Tarski a établi les théorèmes suivants:

7 (T). Si $m + p = m + q$, $m \leq p$ et $m \leq q$, on a: $p = q$.

8 (T). Si $k \cdot m + p = k \cdot m + q$, on a: $m + p = m + q$.

9 (T). Si $m + p = m + q$ et $p \leq q - p$ (ou $q \leq p - q$), on a: $m = m + p = m + q$.

Quant à la différence de deux nombres cardinaux, qui figure dans l'énoncé du th. 9, sa définition sera donnée dans 47.

10 (T). Si $m + p = m + 2^p$, on a: $m = m + p = m + 2^p$.

11 (T). α et β étant des alephs, si l'on a: $m + \alpha = m + \beta$, alors: $\alpha = \beta$ ou bien $\alpha \leq m$ et $\beta \leq m$ ($m = m + \alpha = m + \beta$).

Les mêmes conclusions (pourtant sans l'égalité $m = m \cdot \alpha = m \cdot \beta$) peuvent être tirées de l'hypothèse: $m \cdot \alpha = m \cdot \beta$.

12 (T). Pour que m soit un nombre non-transfini, il faut et il suffit que, p et q étant deux nombres arbitraires, les conditions: $m + p = m + q$ et $p = q$ soient équivalentes.

Ce théorème est plus fort que le th. *120.41 des „*Principia Mathematica*“.

Dans l'énoncé du th. 12 le signe „ $=$ ” peut être remplacé partout par „ \leq ” ou „ $<$ ”.

Passons aux théorèmes concernant la transformation de l'inégalité: $m + p \leq m + q$.

13 (T). Si $m + p \leq m + q$, il existe un nombre cardinal r tel que $m + p = m + r$ et $r \leq q$.

Le théorème analogue subsiste pour la relation \geq .

A l'aide de 13, M. Lindenbaum a démontré le théorème suivant (en résolvant un problème posé par M. Tarski):

14 (L). Lorsque $A \subset B \subset C$, $A_1 \subset C$ et $A \sim A_1$, il existe un ensemble B_1 tel que l'on a: $A_1 \subset B_1 \subset C$ et $B \sim B_1$ ¹⁾.

¹⁾ Comme nous avons cependant remarqué, c'est déjà en 1911 que M. Korselt (*Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes*, Math. Ann. 70 (1911), p. 296) a esquissé (d'ailleurs d'une façon très concise) une démonstration du th. 14.

M. Lindenbaum a donné d'ailleurs une autre démonstration du th. **14**, indépendante du théorème de Schröder-Bernstein et basée directement sur les propriétés des transformations univoques (cf. th. **3** du § 2); il a observé d'autre part que celui-ci peut être déduit du th. **14** comme un cas particulier (en y posant: $A_1 = C$). D'après la remarque de M. Tarski tout cela s'applique également au th. **13**.

M. Lindenbaum a encore constaté qu'on peut établir un théorème (**14 bis**) correspondant à **14** par dualité (en y remplaçant le signe „ \subset ” par „ \supset ”) et qui constitue aussi une généralisation du théorème de Schröder-Bernstein. M. Tarski a enfin énoncé un théorème général dont les théorèmes précédents (**14** et **14 bis**) sont des cas particuliers:

15 (T). Lorsque $A \subset B \subset C$, $A_1 \subset C_1$, $A \sim A_1$ et $C \sim C_1$, il existe un ensemble B_1 tel que l'on a: $A_1 \subset B_1 \subset C_1$ et $B \sim B_1$.

En appliquant **13**, on obtient encore d'autres théorèmes qui s'y rattachent:

16 (L). Lorsque $A \subset C$, $\overline{A.K} \leq \overline{A.L}$ et $\overline{C.K} \geq \overline{C.L}$, il existe un ensemble B tel que l'on a: $A \subset B \subset C$ et $\overline{B.K} = \overline{B.L}$ (c.-à-d. $B.K \sim B.L$).

17 (T). Si $m + p \leq s \leq m + q$ et $p \leq q$, il existe un nombre cardinal r tel que l'on a: $s = m + r$ et $p \leq r \leq q$.

La problème des transformations de l'inégalité $m + p \leq m + q$ conduit ensuite aux théorèmes:

18 (T). Lorsque $m + p \leq m + q$ et $m \leq q$, alors $p \leq q$.

19 (T). Lorsque $m + p \leq m + q$ et $q \leq m$, alors $p \leq m$.

20 (T). Lorsque $k.m + p \leq (k + 1).m + q$, alors $p \leq m + q$.

Les théorèmes **21** — **23** traitent le problème plus général, à savoir celui d'établir les conditions pour que l'inégalité $m + p \leq n + q$ entraîne l'inégalité $p \leq q$.

21 (T). Si $m + p \leq n + q$ et le nombre cardinal $m - n$ existe, alors on a: $p \leq q$.

22 (T). Si $2^n + p \leq n + q$, alors on a: $p \leq q$.

23 (T). α étant un aleph, si $\alpha + p \leq \beta + q$ et $\beta \leq \alpha$, alors on a: $p \leq q$.

Dans l'étude de la relation \leq^* , on aura au lieu du lemme 6 une proposition analogue:

24 (T). Si $m + p \leq^* m + q$, il existe des nombres n et p_1 que $p = n + p_1$, $n \leq^* q$ et $m + p_1 \leq^* m$.

Moyennant le lemme précédent, on peut arriver à une série des théorèmes analogues à **18**, **19** et **20**.

25 (T). Lorsque $m + p \leq^* m + q$ et $m \leq q$, alors $p \leq^* q$.

26 (T). Lorsque $m + p \leq^* m + q$ et $q \leq^* m$, alors $p \leq^* m$.

27 (T). Lorsque $m + p \leq^* m + m$, alors $p \leq^* m$.

28 (T). Lorsque $k \cdot m + p \leq^* (k + 1) \cdot m + q$, alors $p \leq^* m + q$.

Il est à remarquer que le signe „ \leq^* ” peut être partout dans les théorèmes **13** et **17** — **23** remplacé par „ $<$ ” (d'ailleurs, dans **18** on peut conserver la condition: $m \leq q$ et dans **19** — $q \leq m$). En ce qui concerne les relations réciproques entre les inégalités: $p < q$ et $m + p < m + q$, les théorèmes suivants sont à signaler:

29 (T). Si $m + p < q$, alors $(k + 1) \cdot m + p < k \cdot m + q$.

30 (T). Pour que l'on ait: $m + p < m + q$, il faut et il suffit que l'on ait: $m + m + p < m + m + q$.

31 (T). Si des deux nombres: $p - m$ et $q - m$, un au moins existe, les conditions: $p < q$ et $m + p < m + q$ sont équivalentes.

Dans le th. précédent le signe „ $<$ ” peut être remplacé par „ \leq^* ” ou „ $=$ ”.

32 (T). Pour que l'on ait: $p < 2^m$, il faut et il suffit que l'on ait: $m + p < m + 2^m$.

Das ce théorème, le signe „ $<$ ” peut être aussi remplacé par „ $>$ ”, „ \leq^* ”, „ \geq^* ” ou „ $=$ ”.

33 (L). Lorsque $m + p < m + q$ et $q \leq \aleph_0$, alors $p < q$.

En passant au problème de l'addition des inégalités, notons les théorèmes suivants:

34 (T). Si $p < q$ et le nombre cardinal $n - m$ existe, on a: $m + p < n + q$.

35 (T). Si $p < q$, alors $m + p < 2^m + q$; en particulier: $m + p < 2^m + 2^p$.

36 (T). Lorsque $m < n$ et $p < q$, deux au moins parmi les nombres m , n , p et q étant des alephs, alors on a: $m + p < n + q$.

37 (T). Lorsque $m < n$ et $p < q$, où parmi les nombres m , n , p et q un au moins soit est égal à \aleph_0 , soit n'est pas transfini, alors on a: $m + p < n + q$.

38 (T). Lorsque $m < n$ et $k \neq 0$, alors $k \cdot m < k \cdot n$.

Il est à remarquer qu'il ne serait pas difficile de déduire ce dernier théorème et certains théorèmes antérieurs (**7, 8, 18—20, 29, 30**) de ceux que M. Bernstein démontra dans sa Thèse ¹⁾.

M. Tarski a posé le problème d'établir la réciproque du th. **38** et de prouver le théorème plus général qui suit:

39 (L). Lorsque $k \cdot m \leq k \cdot n$ et $k \neq 0$, alors $m \leq n$.

M. Tarski (1924) a démontré cette proposition pour le cas de $k = 2$. Le problème a été résolu dans toute sa généralité par M. Lindenbaum (1926). On en déduit ces conséquences:

40 (L). Lorsque $k \cdot m = k \cdot n$ et $k \neq 0$, alors $m = n$.

41 (L). Lorsque $k \cdot m < k \cdot n$, alors $m < n$.

Pour $k = 2$ le th. **40** a été démontré, comme on sait, par M. Bernstein ²⁾, une démonstration plus simple et basée sur une idée différente a été donnée ensuite par M. Sierpiński ³⁾. M. Bernstein esquisse aussi, dans sa Thèse citée, une démonstration du th. **40** dans le cas général; toutefois, ici le raisonnement de M. Bernstein est loin d'être convaincant, car, bien que l'idée principale soit entièrement claire, sa réalisation rencontre de sérieux obstacles. C'est pourquoi M. Lindenbaum fut conduit à chercher la démonstration des th. **39** et **40** sur une voie tout à fait différente.

M. Lindenbaum est parvenu à étendre aux nombres cardinaux arbitraires le théorème d'Euclide (*théorème fondamental de l'Arithmétique*) bien connu dans la Théorie des Nombres:

42 (L). Lorsque k et l sont des nombres finis premiers entre eux et $k \cdot m = l \cdot n$, alors un nombre cardinal p existe tel que l'on a: $m = l \cdot p$ et $n = k \cdot p$.

Le problème dit „de la décomposition”, c'est-à-dire celui de l'existence des nombres transfinis représentables sous forme d'une somme (resp. d'un produit) de deux nombres plus petits—est d'une grande importance dans la théorie des nombres cardinaux. En rapport avec lui, M. Tarski a obtenu les résultats suivants:

¹⁾ Math. Ann. 61 (1905).

²⁾ L. c., p. 122 ss.

³⁾ Fund. Math. 3 (1922), pp. 1—6.

43 (T). m étant un nombre cardinal tel que $m = 2 \cdot m$, il n'existe aucune décomposition de la forme: $m = p + q$, $p < m$ et $q < m$, si p et q remplissent au moins une des conditions suivantes:

(a) p et q sont comparables, c.-à-d.: $p \leq q$ ou $q \leq p$; (b) l'un du moins de nombres p et q n'est pas transfini; (c) $p = \aleph_0$ ou bien $q = \aleph_0$.

44 (T). m étant un nombre cardinal tel que $m = m^2$, il n'existe aucune décomposition de la forme: $m = p + q$, $p < m$ et $q < m$, si p et q remplissent au moins une des conditions suivantes:

(a) $m \text{ non-} \leq^* p$ ou $m \text{ non-} \leq^* q$; (b) $2^p < 2^m$ ou $2^q < 2^m$ ou $2^p \neq 2^q$; (c) l'un du moins de nombres p et q est un aleph.

En particulier, on peut appliquer tous les deux théorèmes au problème de la décomposition de la droite en deux ensembles de puissance plus petite.

Le problème général de la décomposition, on le sait, ne peut être résolu définitivement sans l'aide de l'axiome du choix que dans le cas des alephs. On a, d'après cela:

45 (T). α étant un aleph quelconque, si $\alpha \leq p + q$ ou $\alpha \leq p \cdot q$, on a: $\alpha \leq p$ ou $\alpha \leq q$.

46 (T). α étant un aleph quelconque, si $\alpha \leq^* p + q$, on a: $\alpha \leq^* p$ ou $\alpha \leq^* q$.

En appelant le nombre m *indécomposable*, lorsqu'il ne peut être représenté sous forme: $m = p + q$, $p < m$ et $q < m$, M. Lindenbaum remarqua que l'on peut étendre à la classe de tous les nombres indécomposables certaines propositions se rapportant à des alephs: p. ex. les théorèmes: **45** dans le cas de $\alpha \leq p + q$, **11**, **23**, **46** et **53**.

La proposition suivante a servi à M. Tarski de définition de la différence des nombres cardinaux:

47. $p = n - m$, lorsque p est le seul nombre cardinal r pour lequel: $n = m + r$.

La notion de la différence chez M. Tarski a donc un sens plus étroit que chez MM. Russell et Whitehead¹⁾; en particulier, si $n = m$, alors pour que la différence $n - m$ au sens de la définition **47** existe, il faut et il suffit que m ne soit pas transfini.

¹⁾ Op. cit., Vol. II, p. 201.

Dans la théorie de la soustraction, les lois associatives suivantes jouent un rôle primordial:

48 (T). Si $n - p$ existe, le nombre $(m + n) - p$ existe aussi et est égal à $m + (n - p)$.

49 (T). Si un de nombres $m - (n + p)$ et $(m - n) - p$ existe, l'autre existe aussi et on a: $m - (n + p) = (m - n) - p$.

50 (T). Si les nombres $m - n$ et $n - p$ existent, le nombre $m - (n - p)$ existe aussi et on a: $m - (n - p) = (m - n) + p$.

Le th. **48** constitue un complément essentiel du th. *119.45 des „*Principia Mathematica*“.

De plus, en s'appuyant, entre autres, sur les th. **39** et **40**, M. Tarski a démontré que

51 (T). Si $k \neq 0$ et l'un de nombres $m - n$ et $k \cdot m - k \cdot n$ existe, l'autre existe aussi et $k \cdot (m - n) = k \cdot m - k \cdot n$.

En général, sans l'axiome du choix, il n'est pas possible de conclure de l'inégalité $m < n$ que la différence $n - m$ existe (cf. th. **82**, A_3). Cependant, on peut établir les propositions:

52 (T). Si, m n'étant pas transfini, on a: $m \leq n$, alors $n - m$ existe; et si $n = 2 \cdot n$, on y a: $n = n - m$.

53 (T). Si α est un aleph et $m < \alpha$, alors $\alpha = \alpha - m$.

54 (T). Si $n = n^2$, $m < n$ et de plus: (a) n non- $\leq^* m$, ou bien: (b) $2^m < 2^n$, ou bien: (c) m est un aleph, — alors $n = n - m$.

55 (T). La différence $2^m - m$ existe pour tous les nombres cardinaux m (et l'on a: $m < 2^m - m$, à moins que $m > 2$).

56 (T). Lorsque m est transfini, on a: $2^m = 2^m - m (= 2^m + m)^1$.

Dans la théorie générale des ensembles, on en tirera la conséquence suivante:

57 (T). \mathbf{N} étant la classe de tous les sous-ensembles d'un ensemble transfini M et \mathbf{P} — une sous-classe de \mathbf{N} de puissance égale à celle de M , on a $\mathbf{N} \sim \mathbf{N} - \mathbf{P}$.

On peut considérer le th. **57** comme une forme plus forte du fameux théorème de Cantor (sur la puissance de la classe de tous les sous-ensembles de M) qui ne donnait que la thèse: $\mathbf{N} - \mathbf{P} \neq 0$.

Dans le domaine de la multiplication, les résultats à obtenir sans l'axiome du choix sont très peu nombreux. Les tentatives

¹⁾ Ce résultat (avec les th. **4**, **6**, **58**, sur lesquels il s'appuie) a été présenté par M. Tarski à la Séance du. 23.X.1925 de la Soc. Pol. de Math. (Section de Varsovie). Cf. Ann. Soc. Pol. Math. V, 1926.

de démontrer p. ex. les propositions analogues à **6, 7, 13, 18** etc. restent inefficaces.

Les théorèmes suivants établissent certaines relations entre l'addition et la multiplication des nombres cardinaux:

58 (T). Si $p, q \leq m + n$, on a: $p \leq m$ ou bien $q \leq *n$ (et $2^q \leq 2^n$).

59 (T). Si $p, q \leq m + n$ et un au moins parmi les nombres m, n, p et q est un aleph, on a: $p \leq m$ ou $q \leq n$.

60 (T). Si $p, q \leq *m + n$, on a: $p \leq *m$ ou bien $q \leq *n$.

La dernière proposition entraîne le théorème suivant, qui correspond au célèbre théorème de Bolzano-Weierstrass:

61 (T). Si un ensemble borné A de points de l'espace euclidien peut être décomposé en 2^{\aleph_0} ($=c$) ensembles non-vides et disjoints, il existe dans cet espace un point p tel que l'ensemble de points de A situés dans un entourage quelconque de p peut être décomposé en 2^{\aleph_0} ensembles disjoints.

Dans la proposition **62** on reconnaîtra un cas particulier du théorème connu de J. König établissant certaine inégalité générale entre les sommes et les produits des nombres cardinaux:

62 (T). Si $m < p, n < q$, et, de plus, une des conditions suivantes est remplie:

(a) $p \text{ non-} \leq *m$, resp. $2^m < 2^p$; (b) $q \text{ non-} \leq *n$, resp. $2^n < 2^q$; (c) parmi les nombres m, n, p et q , au moins un est un aleph, — alors on a: $m + n < p, q$.

M. Tarski a trouvé une démonstration nouvelle du théorème fondamental sur les alephs:

α étant un aleph quelconque, $\alpha^2 = \alpha$.

La démonstration est une modification de celle de Hessenberg¹⁾, mais se distingue par son caractère d'effectivité. M. Tarski a défini notamment dans le domaine des nombres ordinaux une fonction de deux variables $\varphi(\xi, \eta)$ jouissant des propriétés suivantes (dont le théorème considéré est une conséquence immédiate):

(a) ξ et η étant des nombres ordinaux quelconques, il existe un (et un seul) nombre ζ tel que l'on a: $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$.

(b) ζ étant un nombre ordinal quelconque, il existe une paire et une seule des nombres ξ et η telle que l'on a: $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$.

¹⁾ *Grundbegriffe der Mengenlehre* (1906), § 77.

(c) Si $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ et α est un nombre initial (ou, en général, une puissance de ω), alors pour que l'on ait: $\zeta < \alpha$, il faut et il suffit que l'on ait en même temps: $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$.

Quant à l'élévation en puissance, on peut établir un théorème plus fort de celui de Cantor:

63 (T). Si k est un nombre fini et m — un nombre non-fini, on a: $k \cdot m < 2^m$.

La condition imposée au nombre m dans l'hypothèse de ce théorème pourrait être remplacée par la suivante: $m > k$.

64 (T). m étant un nombre cardinal quelconque, on a: $m < * 2^m$, c'est-à-dire: $m \leq * 2^m$, mais $2^m \text{ non-} \leq * m$.

En termes de la théorie générale des ensembles, la proposition **64** s'énonce ainsi:

65 (T). Aucun ensemble de puissance m ne peut être décomposé en 2^m ensembles disjoints non-vides.

Nous passons à quelques théorèmes concernant les propriétés des nombres \aleph_0 et 2^{\aleph_0} .

66 (T). Si $m \leq 2^{\aleph_0}$, alors on a: $m < \aleph_0$ et $2^m < \aleph_0$ (m et 2^m finis), ou bien on a: $\aleph_0 \leq * m$, $2^{\aleph_0} \leq 2^m$ (et $\aleph_0 < 2^m$).

67 (T). Pour aucun nombre m on n'a: $\aleph_0 \leq 2^m < 2^{\aleph_0}$, $n \cdot 2^{2^m} = 2^{\aleph_0}$.

68 (T). Si $\aleph_0 \leq 2^m$, on a: $\aleph_0 \leq * m$ et $2^{\aleph_0} \leq 2^m$ (donc $\aleph_0 < 2^m$).

69 (T). Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) m est un nombre cardinal non-fini; (b) $\aleph_0 \leq * 2^m$; (c) 2^{2^m} est un nombre transfini; (d) $2^{\aleph_0} < 2^{2^m}$.

Le th. **68** résulte d'un lemme de M. Kuratowski¹⁾ et du th. **4**. Le th. **69** complète le th. *124.57 des „*Principia Mathematica*”.

A côté du th. **62**, le théorème suivant peut être considéré comme cas particulier du théorème précité de König:

70 (T). Si, pour un aleph α quelconque, un ensemble de puissance α peut être décomposé en m ensembles disjoints de puissance plus petite que α , alors on a: $\alpha < \alpha^m$.

Voici deux conséquences de **70** qui se rattachent à l'hypothèse du continu:

1) V. A. Tarski, Fund. Math. 6 (1924), p. 94.

71. Si le nombre ordinal α est final avec ω , alors pour aucun m on n'a: $\aleph_\alpha = 2^m$; en particulier: $\aleph_\omega \neq 2^{\aleph_0}$.

72 (T). Le nombre ordinal α étant final avec Ω , si $\aleph_\alpha = 2^m$ (en particulier, si $\aleph_\Omega = 2^m$), on a: $m = \aleph_0$.

Il est à remarquer que le th. **71** avait été énoncé dans la forme moins générale par König; et M. Sierpiński a déjà fait observer que pour établir la formule $\aleph_\omega \neq 2^{\aleph_0}$, on peut se passer sans l'axiome du choix¹⁾.

Les deux derniers théorèmes que nous allons présenter ici avaient été publiés antérieurement: **73** par M. Banach²⁾, et **74** par M. Tarski³⁾. A présent, M. Tarski a réussi d'affranchir les démonstrations de ces théorèmes de l'axiome du choix. Mais il importe de remarquer que toutes les deux propositions discutées ne peuvent être prouvées que dans le système d'axiomes de M. Zermelo, et même sous condition d'y adjoindre l'axiome de M. Fränkel dit „l'axiome de substitution“⁴⁾.

73 (T). Pour tout nombre transfini m , il existe un nombre n tel que l'on a: $m < n$ et $m^n = n^m$ ($= n^{\aleph_0} = 2^m$).

74 (T). Pour tout nombre transfini m , il existe de tels nombres n, p et q que l'on a: $m < n, p < q$ et $p^m = q^n$.

B. Résultats concernant les relations logiques entre l'axiome du choix et d'autres propositions de la Théorie des Ensembles.

Dans ses recherches relatives à ce sujet, M. Tarski s'est servi des propriétés de la fonction $\aleph(m)$ définie comme il suit:

75. $\alpha = \aleph(m)$, lorsque m est un nombre non-fini, et α — le plus petit parmi tous les alephs r pour lesquels on a: $r \text{ non-} \leq m$.

¹⁾ V. W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo...*, Bull. de l'Ac. des Sc. de Cracovie, 1919, p. 111.

²⁾ V. W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości*, I (1923), p. 181.

³⁾ Fund. Math. 7 (1925), p. 10 (le texte cité contient une erreur typographique).

⁴⁾ Cf. A. Fränkel, Math. Ann. 86 (1922), p. 231.

C'est à M. H a r t o g s¹⁾ que nous devons l'idée d'introduire la fonction mentionnée et aussi la démonstration qu'à tout nombre non-fini m correspond une valeur de cette fonction.

M. T a r s k i a établi (entre autres) les suivantes propriétés de la fonction $\aleph(m)$ (évidemment, sans avoir recours à l'axiome du choix):

76 (T). On a: $\aleph(m+n) = \aleph(m) + \aleph(n) = \aleph(m \cdot n) = \aleph(m) \cdot \aleph(n)$.

77 (T). Si $m \leq n$, alors $\aleph(m) \leq \aleph(n)$.

78 (T). Les suivantes conditions sont équivalentes:

(a) m est un aleph; (b) $m < \aleph(m)$; (c) m et $\aleph(m)$ sont comparables, c.-à-d.: $m \leq \aleph(m)$ ou bien $\aleph(m) \leq m$; (d) $[m + \aleph(m)] - m = \aleph(m)$; (e) $m + \aleph(m) = m \cdot \aleph(m)$; (f) $m + \aleph(m) = [m + \aleph(m)]^2$.

79 (T). $\aleph(m) \leq *2^{2^m}$, et par suite $2^{\aleph(m)} \leq 2^{2^{2^m}}$ (et $\aleph(m) < 2^{2^m}$).

80. $\aleph(m) \leq *2^{m^2}$, et par suite $2^{\aleph(m)} \leq 2^{m^2}$ (et $\aleph(m) < 2^{m^2}$).

L'inégalité $\aleph(m) < 2^{m^2}$ du dernier théorème a été établie par M. S i e r p i ń s k i.

Lorsque $m = \aleph_\alpha$, $\aleph(m) = \aleph_{\alpha+1}$; donc on peut considérer la proposition suivante comme corollaire du th. **80**:

81 (T). α étant un nombre ordinal arbitraire, $\aleph_{\alpha+1} \leq *2^{\aleph_\alpha}$; donc $2^{\aleph_{\alpha+1}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ (et $\aleph_{\alpha+1} < 2^{2^{\aleph_\alpha}}$).

On connaît une décomposition effective de l'ensemble de tous les nombres réels (de puissance 2^{\aleph_0}) en \aleph_1 parties disjointes non-vides²⁾. L'analyse de la démonstration du th. **81** conduit au résultat de nature plus générale: à une décomposition effective de l'ensemble de puissance 2^{\aleph_α} (α étant un nombre ordinal arbitraire) en $\aleph_{\alpha+1}$ parties disjointes non-vides.

En complétant les résultats précédemment publiés de M. T a r s k i³⁾, on peut prouver (entre autres) que:

82. L'axiome du choix équivaut à chacune des propositions suivantes:

¹⁾ Math. Ann. 76 (1914), pp. 436-443; cf. aussi W. S i e r p i ń s k i, Fund Math. 2 (1921), p. 118.

²⁾ H. L e b e s g u e, Journ. de Math. (6) 1 (1905), p. 213.

³⁾ Fund. Math. 5 (1923), pp. 147-154.

(T) A_1 . Si $m + p = m + q$, alors on a: $p = q$ ou bien: $p \leq m$ et $q \leq m$.

(T) A_2 . Si $m + m < m + n$, alors $m < n$.

(T) A_3 . Si $m < n$, le nombre cardinal $n - m$ existe.

(T) A_4 . Si $p^m < q^m$, on a: $p < q$.

(T) A_5 . Si $m^p < m^q$ et $m \neq 0$, on a: $p < q$.

(L) A_6 . $m \leq * n$ ou bien $n \leq * m$.

(T) A_7 . Si $\{M_k\}$ est une suite d'ensembles disjoints non-vides et N — un ensemble arbitraire de puissance plus petite que celle de $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$, alors il existe un nombre naturel l tel que N est de puissance plus petite que celle de $\sum_{k=0}^l M_k$.

Il importe de remarquer qu'à proprement parler, l'équivalence entre les propositions $A_1 - A_6$ et l'axiome du choix ne peut être fondée que sur la base du système de M. Zermelo. Dans le système de MM. Russell et Whitehead, resp. dans l'Ontologie de M. Leśniewski, on peut montrer que ces propositions, formulées relativement aux nombres cardinaux d'un certain rang, impliquent l'axiome du choix pour les ensembles d'un autre rang et réciproquement; cependant, comme il nous semble, on ne saurait établir d'équivalence complète entre l'axiome du choix et aucune des propositions $A_1 - A_6$, si l'on voulait leur attribuer des rangs tout à fait déterminés. Des remarques analogues se rapportent à quelques-uns parmi les résultats suivants (th. 83, 94—96). Enfin, quant à l'équivalence de la proposition A_7 avec l'axiome du choix, nous constatons que la démonstration ne réussit qu'à la base des axiomes de Zermelo-Fränkel.

Il est à observer que, par opposition à A_2 qui équivaut à l'axiome du choix, la proposition analogue concernant la relation $>$ (si $m + m > m + n$, alors $m > n$), de même que la proposition inverse à A_2 (si $m < n$, alors $m + m < m + n$) sont démontrables sans l'aide de cet axiome.

Parmi les propositions dont le rapport avec l'axiome du choix n'est élucidé jusqu'à présent, citons les suivantes:

B_1 . Chaque nombre cardinal est fini ou transfini ($m < \aleph_0$ ou $\aleph_0 \leq m$).

C_1 . Si $m \leq * n$, on n'a pas: $n < m$.

Or, on sait que:

83. La proposition B_1 est équivalente à chacune des suivantes:

(L) B_2 . Si l'on a: $m + \aleph_0 < m + n$, on a: $\aleph_0 < n$.

(L) B_3 . Si l'on a: $\aleph_0 + p < \aleph_0 + q$, on a: $p < q$.

(T) B_4 . Si l'on a: $\aleph_0 \leq * n$, on a: $\aleph_0 \leq n$.

(T) B_5 . Si l'on a: $\aleph_0 + p = \aleph_0 + q$, on a: $p \leq \aleph_0$ et $q \leq \aleph_0$

ou bien: $p = q$.

B_2 et B_3 sont à confronter avec le th. **33**.

84 (T). On peut déduire de la proposition C_1 (sans faire intervenir l'axiome du choix) les conséquences que voici:

C_2 . L'ensemble de points d'une droite ne peut être décomposé en deux ensembles de puissance plus petite (en d'autres termes: 2^{\aleph_0} est un nombre indécomposable).

C_3 . Il existe des ensembles non-dénombrables de points ne contenant aucun sous-ensemble parfait.

C_4 . Il existe des fonctions de variable réelle non mesurables (L).

Les propositions $C_2 - C_4$ résultent de certaines propositions plus générales qui peuvent être déduites de C_1 , mais que nous ne citons pas ici.

M. Lindenbaum a posé le problème de rechercher les relations logiques entre l'axiome du choix et les propositions suivantes qui expriment de différentes manières l'hypothèse dite „hypothèse généralisée du continu” (ou „hypothèse de Cantor sur les alephs”):

D_1 . m étant un nombre transfini quelconque, il n'y a aucun nombre r qui satisfasse à la formule: $m < r < 2^m$.

D_2 . α étant un aleph quelconque, il n'y a aucun nombre r tel que l'on ait: $\alpha < r < 2^\alpha$.

D_3 . α étant un nombre ordinal arbitraire, on a: $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

MM. Lindenbaum et Tarski ont résolu ensemble (1925) ce problème (v. **94 — 96**), en partant de quelques théorèmes généraux sur les nombres cardinaux; pour formuler ces

théorèmes, il sera commode de se servir de la notion auxiliaire suivante:

85. Le nombre cardinal m jouit de la propriété P , lorsque aucun nombre r ne satisfait à la formule: $m < r < 2^m$.

Voici, maintenant, les résultats plus importants de MM. Lindenbaum et Tarski (obtenus, il est clair, sans l'axiome du choix):

86. Si m jouit de la propriété P et $m < n$, on a $2^m < 2^n$.

87. Si m jouit de la propriété P et $n < 2^m$, on a $n \leq m$.

88. Si m et $m + n$ jouissent de la propriété P , on a: $m \leq n$ ou $n \leq m$.

89. Si les nombres m , 2^m et 2^{2^m} jouissent de P , ils sont des alephs.

90. Si les nombres m^2 et 2^{m^2} ($m \neq 0$) jouissent de P , ils sont des alephs (donc aussi m et 2^m le sont).

91. Si 2^{\aleph_α} jouit de la propriété P , on a: $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$.

92. Si \aleph_α et 2^{\aleph_α} jouissent de P , on a $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

93. Si \aleph_α et \aleph_β ($\alpha < \beta$) jouissent de P , on a $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

94. L'hypothèse D_1 entraîne l'axiome du choix.

95. L'hypothèse D_1 équivaut au système (au produit logique) de deux propositions: de l'axiome du choix et de l'hypothèse D_2 (resp. D_3).

96. Les hypothèses D_2 et D_3 sont équivalentes.

C. Résultats obtenus à l'aide de l'axiome du choix.

En 1923—1926, M. Tarski a obtenu les résultats suivants qui complètent ses recherches antérieurement publiées¹⁾ sur la multiplication et sur les puissances des alephs.

97* (T). α et β étant des nombres ordinaux de seconde espèce, si $\alpha = \lim_{\xi < \beta} \sigma_\xi$, il existe un tel reste ρ du nombre β ($\rho \neq 0$) que l'on a:

$$\prod_{\xi < \beta} \aleph_{\sigma_\xi} = \aleph_\alpha^\rho.$$

¹⁾ Fund. Math. 7 (1925), pp. 1—14.

Dans les théorèmes suivants le symbole „ $cf(\alpha)$ ” sera utilisé pour désigner l'indice du plus petit nombre ordinal avec lequel le nombre ω_α est confinal.

98* (T)¹⁾. Si $\beta < cf(\alpha)$, il existe un tel nombre γ que: $\gamma < \alpha$ et

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

99* (T). Si $cf(\alpha) \leq \beta$ et $\alpha \neq 0$, il existe un tel nombre γ que: $\gamma < \alpha$ et

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{cf(\gamma)} \cdot \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

100* (T). α et β étant des nombres ordinaux arbitraires, il existe un tel nombre γ de seconde espèce que: $\gamma \leq \alpha$, $cf(\gamma) \leq \beta$ et

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha \cdot 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\gamma^{cf(\gamma)}.$$

La formule du dernier théorème pourrait être appelée „formule générale de récurrence”.

Nous dirons que

101. Les nombres cardinaux m et n forment un couple irréductible par rapport à l'élévation en puissance, lorsqu'il n'existe aucun couple de nombres m_1 et n_1 satisfaisant à la fois aux conditions: $m_1^m = m^n$, $m_1 \leq m$, $n_1 \leq n$, et, de plus, $m_1 \neq m$ ou bien $n_1 \neq n$.

En vertu de cette définition, nous obtenons le corollaire du th. **100**:

102* (T). Si m^n est un nombre transfini, et m avec n forment un couple irréductible par rapport à l'élévation en puissance, alors on a: $m = 2$, ou $n = 1$, ou bien il existe un nombre ordinal de seconde espèce α que l'on a: $m = \aleph_\alpha$ et $n = \aleph_{cf(\alpha)}$.

En terminant, remarquons que les théorèmes **97—100** (et **81**), pour être démontrés dans le système de MM. Russell et Whitehead, resp. dans l'Ontologie de M. Leśniewski,

²⁾ Le th. **98** fut connu déjà à M. Tarski à la fin de 1923; il figurait dans le manuscrit de sa note précitée (comme un corollaire du th. 7 de ce travail), présenté à la Rédaction des „Fund. Math.”, mais à cause de la nécessité de faire certaines abréviations, définitivement, il fut omis. Indépendamment de M. Tarski, M. L. Patai a démontré récemment le th. **98** pour un cas particulier ($\alpha = \omega$, $\beta = 0$).

exigent non seulement l'emploi de l'axiome du choix, mais aussi des postulats à part qui auraient pour but de garantir l'existence des alephs figurant dans ces théorèmes.

§ 2. Propriétés des transformations univoques.

Dans leurs travaux dernièrement publiés, MM. Banach, König et Kuratowski¹⁾ ont fait une observation intéressante: les démonstrations de certains théorèmes de la théorie de l'égalité des puissances et des nombres cardinaux renferment implicitement comme lemmes certains théorèmes généraux sur les transformations biunivoques; or, ces derniers se prêtent aux différentes applications aussi bien dans d'autres branches de la théorie des ensembles qu'en dehors de cette science.

M. Tarski (1924—1925) a constaté que cette observation peut être étendue à une série des autres théorèmes de la théorie de l'égalité des puissances et des nombres cardinaux, tout particulièrement à ceux, où l'on ne rencontre que les notions de somme des nombres cardinaux, de produit d'un nombre cardinal par un nombre fini ou \aleph_0 , les relations \leq, \leq^* etc., et dont les démonstrations ne s'appuient pas sur le théorème de bon-ordre (*Wohlordnungssatz*) de M. Zermelo. Tels sont p. ex. les théorèmes: **5—8, 13, 17—20, 24—28** du § précédent, un théorème de M. Zermelo (si $m = m + \aleph_k$ pour tout k fini, alors

$m = m + \sum_{k=0}^{\infty} \aleph_k$) et beaucoup d'autres. En analysant leurs démonstrations, M. Tarski a obtenu certains théorèmes sur les propriétés des transformations biunivoques, mais qui ne présentaient pas toujours le même degré d'élégance et de simplicité que ceux des auteurs cités. D'autres théorèmes appartenant au même cycle ont été obtenus récemment (1926) par M. Lindenbaum.

MM. Lindenbaum et Tarski ont remarqué en outre que dans plusieurs théorèmes sur les transformations, aussi bien dans les nouveaux que dans les théorèmes publiés antérieurement, l'hypothèse de biunivocité des transformations n'est

¹⁾ S. Banach, Fund. Math. 6 (1924), pp. 236—239; D. König, Fund. Math. 8 (1926), pp. 114—134 (où l'on trouve cités les travaux précédents de cet auteur); C. Kuratowski, Fund. Math. 6 (1924), pp. 240 - 243.

point essentielle. Dernièrement M. Lindenbaum est allé plus loin, en étendant quelques-uns de ces théorèmes, aux „transformations” arbitraires, même non-univoques; le rôle des fonctions y est joué par des relations arbitraires (tel est le cas de la généralisation des énoncés des théorèmes 3 et 4).

Les résultats des recherches dans ce domaine ne sont pas encore convenablement systématisés. Nous ne citons donc qu'à titre d'exemple quelques théorèmes, d'ailleurs sans en donner toujours la forme la plus générale que nous connaissons à l'heure actuelle.

M. Tarski a démontré le lemme suivant:

1 (T). Si $I_f(A) = B$, alors il existe deux suites $\{C_k\}$ et $\{D_k\}$ des ensembles et deux ensembles E et F vérifiant les conditions:

(a) $A - B = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$, $B - A = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$, $E + F \subset A \cdot B$; (b) les ensembles de la suite $\{C_k\}$ sont disjoints; (c) $I_f(C_0 + E) = E$, $I_f(F) = D_0 + F$, et, lorsque $k \neq 0$, $I_{f^k}(C_k) = D_k$; (d) si f est une fonction biunivoque, les ensembles de la suite $\{D_k\}$ sont disjoints aussi.

Ce lemme est utilisé dans les démonstrations des théorèmes 5, 6 et 24 du § 1. D'autres applications de ce lemme, hors de la théorie générale des ensembles, sont données au § 5.

2 (T). Si $I_f(A) = C$ et $A \subset B \subset C$, il existe des ensembles D , D_1 , E et E_1 tels que:

(a) $A = D + E$, $B = D_1 + E$, $C = D_1 + E_1$; (b) $D \cdot E = D_1 \cdot E (= D \cdot E_1) = D_1 \cdot E_1 = 0$; (c) $I_f(D) = D_1$ et $I_f(E) = E_1$.

Lorsque la fonction f est biunivoque, ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème de M. Banach sur les correspondances (voir sa note citée); réciproquement, le théorème de M. Banach peut être déduit aisément de 2. Remarquons que l'hypothèse du théorème de M. Banach peut être rendue plus faible: il suffit de postuler, en effet, qu'une seule des deux fonctions qui y figurent soit biunivoque; de plus, même cette condition pourrait être omise (comme l'a remarqué M. Tarski), si l'on ne désire pas éviter l'axiome du choix.

3 (L). Si $I_f(A) = A_1$, $A \subset B \subset C$ et $A_1 \subset C$, il existe quatre ensembles: B_1, D, D_1 et E tels que:

(a) $A_1 \subset B_1 \subset C$; (b) $B = D + E$, $B_1 = D_1 + E$; (c) $D \cdot E = D_1 \cdot E = 0$; (d) $I_f(D) = D_1$.

Ce théorème a été appliqué pour obtenir une de démonstrations du th. **14** du § 1; on peut également en déduire le théorème mentionné de M. Banach.

M. Lindenbaum a aussi établi un théorème (**4**) correspondant par dualité à **3** et constituant une généralisation du théorème **14 bis** qui correspondait par dualité au th. **14** (du § 1):

4 (L). Si $I_g(C_1) = C$, $A \subset B \subset C$ et $A \subset C_1$, il existe quatre ensembles: B_1, D, E et E_1 tels que:

(a) $A \subset B_1 \subset C_1$; (b) $B = D + E$, $B_1 = D + E_1$; (c) $D \cdot E = D \cdot E_1 = 0$; (d) $I_g(E_1) = E$.

Enfin, M. Tarski a énoncé le théorème plus général, correspondant au th. **15** du § 1 et contenant **3** et **4** comme deux cas particuliers:

5 (T). Si $I_f(A) = A_1$, $I_g(C_1) = C$, $A \subset B \subset C$ et $A_1 \subset C_1$, il existe cinq ensembles: B_1, D, D_1, E et E_1 tels que:

(a) $A_1 \subset B_1 \subset C_1$; (b) $B = D + E$, $B_1 = D_1 + E_1$; (c) $D \cdot E = D_1 \cdot E_1 = 0$; (d) $I_f(D) = D_1$ et $I_g(E_1) = E$.

Comme l'ont déjà constaté dans leurs notes citées MM. Banach et Kuratowski, quelques-uns de théorèmes sur la relation de l'égalité des puissances peuvent être étendus, grâce aux lemmes sur les transformations biunivoques, à une vaste classe **K** de certaines relations entre les ensembles. Cette classe est formée de relations symétriques, transitives, transformantes (c.-à-d. jouissant de la propriété (α) au sens de M. Banach¹⁾) et additives (c.-à-d. jouissant de la propriété (β) de M. Banach²⁾). En particulier, les théorèmes **3** et **5** permettent d'étendre les théorèmes **14** et **15** du § précédent à toutes les relations de la classe **K**. Toutefois, il y a plusieurs propriétés de la relation

1) L. c., p. 238.

2) L. c., p. 239.

de l'égalité de puissance qui ne subsistent que pour une classe \mathbf{K}_1 plus étroite, à savoir, composée de relations R de la classe \mathbf{K} qui, en outre, sont complètement additives, c-à-d. remplissent la condition:

(7) Si l'on a: $C_k R D_k$ pour tout k naturel, $\{C_k\}$ et $\{D_k\}$ étant des suites d'ensembles disjoints, alors on a: $\sum_{k=0}^{\infty} C_k R \sum_{k=0}^{\infty} D_k$.

Donc, le th. 5 du § précédent peut être, conformément au lemme 1, étendu à toutes les relations de la classe \mathbf{K}_1 , mais non pas à toutes les relations de la classe \mathbf{K} , comme l'a observé M. Tarski.

Afin de pouvoir généraliser d'une manière analogue les théorèmes arithmétiques sur les nombres cardinaux, il faut, d'après une remarque de M. Tarski, procéder comme il suit. La relation arbitraire R de la classe \mathbf{K} (resp. \mathbf{K}_1) étant symétrique et transitive, on peut diviser tous les ensembles entre lesquels cette relation subsiste en classes disjointes, en rangeant dans une même classe deux ensembles X et Y dans ce cas et seulement dans ce cas quand on a: $X R Y$. Les classes ainsi obtenues sont dites types de la relation R ; relativement à ces types, on définit: les notions de somme, de produit par un nombre fini (resp. \aleph_0), la relation \leq etc., comme on le fait d'ordinaire dans l'arithmétique des nombres cardinaux. On peut transporter dans „l'arithmétique des types“ ainsi construite une foule de théorèmes de celle-là, tels que p. ex. les lois élémentaires de l'addition et de la comparabilité, le théorème de Schröder-Bernstein, les théorèmes 13, 18, et, à l'aide de l'axiome du choix, 39—41 du § précédent. En outre, dans la théorie des types correspondant aux relations de la classe \mathbf{K}_1 , les théorèmes suivants conservent encore leur validité: le th. 6 avec toutes ses conséquences (7, 8, 18—20, 29, 30 et 38), ensuite — dans ce cas sans avoir recours à l'axiome du choix — les théorèmes 39—41, et quelques théorèmes de MM. Bernstein et Zermelo.

§ 3. Théorie des types ordinaux ¹⁾.

Les recherches de M. Lindenbaum (1926) dans le domaine de la théorie des types ordinaux, très peu développée jusqu'à présent, portent avant tout sur les problèmes de nature

¹⁾ Les résultats de ce § ont été présentés par M. Lindenbaum à la Séance du 23.IV. 1926 de la Soc. Pol. de Math. (Section du Varsovie). Cf. Ann. Soc. Pol. Math. V, 1926.

arithmétique liés aux opérations ordinaires de l'addition et de la multiplication; elles l'ont conduit aux résultats dont quelques-uns seront exposés ci-dessous.

Le lemme suivant jouait dans ces recherches un rôle essentiel:

1 (L). Pour que l'on ait: $\alpha = \sigma + \alpha + \rho$, il faut et il suffit qu'il existe un tel type ξ que $\alpha = \sigma \cdot \omega + \xi + \rho \cdot \omega^*$.

On en obtient aisément le théorème:

2 (L). Pour que l'on ait: $\alpha = \sigma + \alpha + \rho$, il faut et il suffit que l'on ait: $\alpha = \sigma + \alpha$ et $\alpha = \alpha + \rho$.

Comme un corollaire immédiat de **2**, on a:

3 (L). Si $\alpha = \sigma + \beta$ et $\beta = \alpha + \rho$, on a: $\alpha = \beta$.

Le th. **3**, analogue au théorème connu de Schröder-Bernstein¹⁾, traduit en langage de la théorie générale des Ensembles, prend la forme que voici:

4 (L). Lorsqu'un ensemble ordonné A est semblable à un segment de l'ensemble ordonné B , et l'ensemble B est semblable à un reste de l'ensemble A , les ensembles A et B sont semblables²⁾.

Comme l'a encore remarqué M. Lindenbaum, les formules: $\alpha = \sigma + \beta$ et $\beta = \rho + \alpha$ n'entraînent pas en général l'égalité: $\alpha = \beta$ (soit p. ex. $\alpha = \omega^* \cdot \omega$, $\beta = 1 + \omega^* \cdot \omega$, $\sigma = \omega^*$, $\rho = 1$); on peut énoncer cependant le théorème suivant:

5 (L). Si $\alpha = \sigma + \beta$ et $\beta = \rho + \alpha$, alors pour que l'on ait: $\alpha = \beta$, il faut et il suffit que l'on ait: $(\sigma + \rho) \cdot \omega = (\rho + \sigma) \cdot \omega$.

On en conclut que

6 (L). Si $\alpha = \sigma + \beta$ et $\beta = \sigma + \alpha$, alors $\alpha = \beta$.

On remarquera que l'on peut formuler le théorème analogue à **5** (resp. **6**), en y remplaçant „ $\sigma + \beta$ ”, „ $\rho + \alpha$ ” et „ ω ” respectivement par „ $\beta + \sigma$ ”, „ $\alpha + \rho$ ” et „ ω^* ”. Nous omettrons ici les théorèmes que l'on obtient de cette manière par dualité.

Les deux théorèmes suivants concernent les types inverses; le premier de ces théorèmes est une conséquence de **3**:

7 (L). Si $\alpha = \sigma + \alpha^*$ ou $\alpha = \alpha^* + \rho$, alors $\alpha = \alpha^*$.

¹⁾ Un autre théorème de la théorie de l'ordre, analogue au théorème de Schröder-Bernstein, se trouve dans la note citée de M. Banach (p. 239).

²⁾ Les termes „segment” et „reste” ont ici le même sens que M. Hausdorff attribue aux termes „Anfangsstück” et „Endstück”; cf. *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), p. 88.

8 (L). Pour que l'on ait: $\alpha = \alpha^*$, il faut et il suffit qu'il y ait un type ξ tel que: $\alpha = \xi^* + \xi$ ou bien $\alpha = \xi^* + 1 + \xi$.

En s'appuyant (entre autres) sur le th. **3**, M. Tarski a montré que:

9 (T). Si $\alpha. (\kappa + \lambda) + \beta = \alpha. (\kappa + \lambda) + \gamma$, κ étant un nombre ordinal et $\lambda \neq 0$, alors on a: $\alpha. \lambda + \beta = \alpha. \lambda + \gamma$.

Donc, en particulier:

10 (T). Si $\alpha. k + \beta = \alpha. k + \gamma$, k étant un nombre fini, alors $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$.

On peut donner quelques généralisations, d'ailleurs assez proches, de ce théorème.

A l'aide de **10**, on établit la proposition:

11* (T). Pour que l'on ait; $\alpha = \sigma + \alpha + \rho$, il faut et il suffit qu'il existe pour tout k fini un type ξ_k tel que $\alpha = \sigma. k + \xi_k + \rho. k$.

Un corollaire de **11** constitue la solution d'un problème de M. Sierpiński:

12* (T). Si, quel que soit k fini, l'ensemble ordonné A admet des segments du type $\sigma. k$, il admet aussi un segment du type $\sigma. \omega$.

On a enfin une série des théorèmes sur la division des égalités (le premier d'entre eux s'appuie sur le th. **3**, le second — sur les th. **3** et **10**):

13 (L). Si $\alpha. k = \beta. k$ et $k \neq 0$, alors $\alpha = \beta$.

14 (L). Si $\alpha. k = \beta. l$, où k et l sont deux nombres finis premiers entre eux, il existe un type ξ tel que $\alpha = \xi. l$ et $\beta = \xi. k$.

15 (L). π ou π^* étant un nombre ordinal $\neq 0$, si $\pi. \alpha = \pi. \beta$, on a $\alpha = \beta$.

On peut généraliser ce théorème de beaucoup, en réduisant l'hypothèse faite sur le nombre π .

16 (L). k et l étant des nombres finis premiers entre eux, si $k. \alpha = l. \beta$, il existe un type ξ tel que $\alpha = l. \xi$ et $\beta = k. \xi$.

Notons, en terminant, que parmi les théorèmes signalés, il y a (p. ex. **1** — **3**) qui pourraient — d'après la remarque de M. Tarski — être énoncés pour les „nombres relationnels“ arbitraires — „relation-numbers“ au sens de MM. Russell et

Whitehead¹⁾; on sait, en effet, que les types ordinaux ne sont qu'un cas spécial de cette espèce des nombres.

§ 4. Fondements de l'Arithmétique des nombres ordinaux (transfinis).

L'Arithmétique des nombres ordinaux peut être considérée comme un système déductif à part ayant ses propres notions primitives et tout à fait indépendant d'un tel ou autre système de la Théorie des Ensembles. M. Tarski développa (en 1923—1924)²⁾ les fondements de l'Arithmétique ainsi conçue. La construction du système d'Arithmétique des nombres ordinaux n'exige, dans cette conception, que la connaissance de la logique mathématique limitée à la théorie de déduction et à celle des variables apparentes des „*Principia Mathematica*”³⁾ ou bien à la Logistique et l'Ontologie de M. Leśniewski.

La base du système est formée par quatre axiomes [I—IV] où le signe „<” figure comme l'unique terme primitif. Nous allons donner deux énoncés parallèles de ces axiomes: l'un dans le langage courant et l'autre dans la forme symbolique, intelligible pour qui connaît „*Principia Mathematica*”⁴⁾. Si l'on formule ces axiomes dans le langage courant, il est commode de se servir de la notion du nombre ordinal, préalablement définie comme suit:

α est un nombre ordinal, lorsqu'il existe un tel ξ que $\alpha < \xi$ ou $\xi < \alpha$.

$$\text{Ord}(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} \cdot [\exists \xi] : \alpha < \xi \vee \xi < \alpha.$$

Voici les axiomes de M. Tarski:

I (axiome du bon ordre). Si un nombre ordinal possède une propriété donnée, il existe un nombre ordinal μ possédant

¹⁾ Op. cit., Vol. II, p. 331.

²⁾ Ces résultats ont été présentés par M. Tarski à la Séance du 9.V.1924 de la Soc. Pol. de Mathématique (Section de Varsovie). Cf. Annales Soc. Pol. Math. III, 1924, p. 148.

³⁾ Vol. I, Part I, Sections A, B.

⁴⁾ Le deuxième mode d'énoncer les axiomes présente certaines simplifications par rapport au premier.

également cette propriété et satisfaisant à la condition suivante: si un nombre ordinal ζ jouit de la propriété considérée, on a $\zeta \text{ non-} < \mu$ et, en outre, $\mu < \zeta$ ou $\mu = \zeta$.

$$\varphi(\alpha) \cdot \alpha < \xi : \supset \dots [\exists \mu] : \dots \varphi(\mu) : \dots [\zeta, \eta] : \dots \varphi(\zeta) \cdot \zeta < \eta : \\ : \supset : \sim (\zeta < \mu) : \mu < \zeta \cdot \vee \cdot \mu = \zeta.$$

II (*axiome de l'infini*). Il existe un nombre ordinal α satisfaisant aux conditions: (a) il existe un ξ tel que $\xi < \alpha$; (b) si $\zeta < \alpha$, il existe un η tel que $\zeta < \eta < \alpha$.

$$[\exists \alpha, \xi] : \dots \xi < \alpha : \dots [\zeta] : \dots \zeta < \alpha \cdot \supset : [\exists \eta] : \zeta < \eta \cdot \eta < \alpha.$$

III (*axiome de puissance*). Pour tout nombre ordinal α il existe un tel nombre ordinal π qu'aucune fonction f ne remplit simultanément les conditions: (a) si $\xi < \pi$, on a $f(\xi) < \alpha$; (b) si $f(\zeta) = f(\eta)$, on a $\zeta = \eta$.

$$[\exists \pi] : \dots [f] : \dots [\xi] : \xi < \pi \cdot \supset \cdot f(\xi) < \alpha : \supset : [\exists \zeta, \eta] : f(\zeta) = \\ = f(\eta) \cdot \sim (\zeta = \eta).$$

IV (*axiome de la limite*). Pour tout nombre ordinal α et toute fonction f il existe un nombre transfini λ satisfaisant à la condition suivante: si $\xi < \alpha$ et $f(\xi)$ est un nombre ordinal, on a $f(\xi) < \lambda$.

$$[\exists \lambda] : \dots [\xi, \eta] : \xi < \alpha \cdot \eta < f(\xi) : \supset \cdot f(\xi) < \lambda.$$

M. Tarski a montré de quelle manière on peut définir, à l'aide du signe „<”, toutes les notions traitées dans l'Arithmétique des nombres ordinaux, sans que l'on ait à faire usage des définitions par récurrence. Pour remplacer ces dernières par des définitions ordinaires, M. Tarski s'est servi d'une méthode dont l'idée est due à Dedekind⁴⁾. Cette méthode avait été développée d'abord par M. Leśniewski — en ce qui concerne l'induction mathématique ordinaire, et M. Tarski l'a rendue applicable au cas de l'induction transfinitie. Afin qu'on puisse se rendre compte en quoi consiste cette méthode, nous donnons ici, à titre d'exemple, une définition de l'expression

4) *Was sind und was sollen die Zahlen?*, III Aufl. (1911), p. 33—40.

„ $\alpha + \beta$ ” („la somme des nombres α et β ”), en supposant que les expressions „0” („zéro”) et „ $\min_{\xi} \{\varphi(\xi)\}$ ” („le plus petit nombre ordinal ξ ayant la propriété donnée”) aient été définies au préalable:

$\gamma = \alpha + \beta$, lorsque α, β et γ sont des nombres ordinaux et lorsqu'il existe une fonction f satisfaisant aux conditions: (a) $f(0) = \alpha$; (b) si $\eta < \beta$ ou $\eta = \beta$, $f(\eta)$ est le plus petit nombre ordinal ξ tel que pour tout $\zeta < \eta$ on a: $f(\zeta) < \xi$; (c) $f(\beta) = \gamma$.

$$\gamma = \alpha + \beta \stackrel{df}{=} :: \text{ord}(\alpha) \cdot \text{ord}(\beta) \cdot \text{ord}(\gamma) :: [\exists f] :: f(0) = \alpha :: [\eta] : \cdot \eta < \beta \cdot \vee \cdot \eta = \beta : \supset \cdot f(\eta) = \min_{\xi} \{[\zeta] : \zeta < \eta \cdot \supset \cdot f(\zeta) < \xi\} :: f(\beta) = \gamma$$

Il ne faut pas croire que la définition qui précède soit un schéma de toutes les définitions possibles qui s'emploient pour remplacer celles par récurrence. Certaines différences peuvent se manifester dans des détails: il est nécessaire parfois de distinguer p. ex. dans l'énoncé de la condition (b) deux cas suivant que η est par hypothèse un nombre de 1-ère ou de 2-de espèce. Toutefois ces différences ne sont pas essentielles.

A la base du système d'axiomes qui précède, M. Tarski développa ensuite les chapitres principaux de l'Arithmétique, montrant ainsi d'une façon explicite, par voie — pour ainsi dire — empirique, que le système considéré suffit à établir toute l'Arithmétique actuelle des nombres ordinaux. Ce mode de procéder semble être d'ailleurs le seul admissible, étant donné que la discipline en question n'a pas été jusqu'à présent axiomatisée d'une façon convenable.

Enfin, M. Tarski a examiné ce système d'axiomes (que nous appellerons pour abrégé „système U ”) au point de vue d'exigences de la Méthodologie des sciences déductives. Voici les résultats les plus importants de cette étude:

1 (T). Les axiomes du système U sont compatibles, si seulement il en est de même des axiomes du système de la Théorie des Ensembles de M. Zermelo sans l'axiome du choix, mais augmenté de l'axiome de substitution de M. Fraenkel¹⁾.

1) Cf. note 4) de la page 310.

On peut montrer notamment, en se basant sur les résultats de M. Neumann¹⁾, que le système U admet une interprétation dans celui de MM. Zermelo-Fraenkel.

2 (T). Si les axiomes du système U sont compatibles, chacun d'eux est indépendant des autres (en d'autres termes: n'est pas une conséquence des autres).

Pour justifier cette assertion, M. Tarski a donné les interprétations dans le système U de chacun des systèmes [I', II, III, IV], [I, II', III, IV], etc. („ P' ” désignant d'une façon générale la négation de la proposition P); il a défini notamment quatre relations: $\zeta <_{\text{I}} \eta$, $\zeta <_{\text{II}}$, etc. dont chacune satisfait à trois axiomes du système U sans en satisfaire au quatrième. Voici les définitions de ces relations:

$\zeta <_{\text{I}} \eta$ veut dire que $\zeta < \eta$, ou $\zeta = \eta$, où ζ et η sont des nombres ordinaux.

$\zeta <_{\text{II}} \eta$ veut dire que $\zeta < \eta$ et $\eta < \omega$.

$\zeta <_{\text{III}} \eta$ veut dire que $\zeta < \eta$ et $\eta < \Omega$.

$\zeta <_{\text{IV}} \eta$ veut dire que $\zeta < \eta$ et $\eta < \omega_{\omega}$.

Il est à remarquer que la démonstration de l'indépendance de l'axiome III (à savoir, la démonstration que la relation $<_{\text{III}}$ vérifie l'axiome IV) nécessite l'application de l'axiome du choix.

Le problème si le système U est catégorique (au sens de M. Veblen²⁾) ou non—est intimement lié à celui de l'existence des nombres initiaux réguliers à indices de 2-de espèce³⁾, qui n'est pas résolu jusqu'à présent. Nous appellerons „hypothèse H ” la proposition qui en affirme l'existence. M. Tarski a établi les faits suivants:

3 (T). Si les axiomes du système U sont compatibles, l'hypothèse H est indépendante de ce système.

Voici la définition de la relation $<_H$ qui vérifie tous les axiomes du système U sans vérifier l'hypothèse H :

$\zeta <_H \eta$ veut dire que l'on a à la fois: (a) $\zeta < \eta$; (b) si les nombres initiaux réguliers à indices de 2-de espèce existent et ξ en est le plus petit, on a $\eta < \xi$.

1) Acta litt. scient. Univ. Fr.-Jos., Sectio scient. math., I, Szeged 1923, pp. 199—208.

2) Trans. Am. Math. Soc. 5 (1904), p. 346.

3) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), p. 131.

4 (T). Si les axiomes du système U sont compatibles, il faut et il suffit pour qu'il soit catégorique que l'hypothèse H' (c'est-à-dire la négation de l'hypothèse H) soit une conséquence de ce système.

Il semble donc très douteux que le système U soit catégorique.

En terminant, il n'est peut-être pas sans intérêt d'envisager le rôle des résultats de M. Tarski, qui viennent d'être exposés, pour divers systèmes de la Théorie des Ensembles. A la base des „*Principia Mathematica*“ ou de l'Ontologie de M. Leśniewski, ces résultats permettent de résoudre le problème suivant: quels postulats faudrait-il ajouter aux axiomes considérés pour qu'ils suffisent au développement de l'Arithmétique Cantorienne des nombres ordinaux dans toute son étendue? Les axiomes II — IV donnent une réponse à cette question. La signification des recherches de M. Tarski pour le système de MM. Zermelo-Fraenkel peut être plutôt méthodologique; elles montrent qu'après avoir défini dans ce dernier système les nombres ordinaux et la relation „ $<$ “ et démontré les théorèmes pris plus haut comme axiomes du système U ¹⁾, la construction ultérieure de l'Arithmétique des nombres ordinaux peut se passer sans notions et théorèmes de la Théorie générale des Ensembles. Il est à noter d'autre part que les deux systèmes, à savoir le système U et celui de MM. Zermelo-Fraenkel, comportent les mêmes difficultés et problèmes de nature méthodologique²⁾; il semble cependant que l'étude de ces problèmes dans le système U est plus commode à cause de sa structure plus simple.

§ 5. Théorie des ensembles de points.

Dans le t. 6 des „*Fundamenta Mathematicae*“³⁾, a paru le mémoire de MM. Banach et Tarski „*Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement con-*

1) La possibilité d'une telle interprétation du système U a été signalée plus haut (p. 325).

2) Cf. C. Kuratowski, Ann. Soc. Pol. Math. III, 1924, p. 146.

3) 1924, pp. 244—277.

gruentes“, dans le t. 8 du même journal¹⁾ — la première partie du travail de M. Lindenbaum sous le titre: „*Contributions à l'étude de l'espace métrique*“.

Nous allons présenter quelques résultats non publiés de MM. Lindenbaum et Tarski (1923—1926) se rattachant à ces travaux. Ces résultats, qui, à notre avis, ne sont peut-être pas assez intéressants par eux-mêmes, attirent toutefois l'attention sur certains domaines jusqu'à présent négligés²⁾.

Les théorèmes en question s'appliquent à un espace métrique quelconque, à moins de mention expresse; le th. 4 est valable pour l'espace euclidien quelconque.

1 (*L*). Si A est un ensemble linéaire, B et C — ses sous-ensembles superposables avec lui, alors $B.C$ contient encore un ensemble superposable avec A .

2 (*L*). Si A est un ensemble plan borné, B et C — ses sous-ensembles superposables avec lui, alors $B.C$ contient encore un ensemble superposable avec A .

On sait que les théorèmes analogues pour les ensembles plans non bornés ou pour les ensembles situés à la surface d'une sphère (donc aussi pour les ensembles bornés à 3 dimensions) seraient faux, car il y existe des ensembles superposables avec leurs „moitiés“³⁾. De plus:

3* (*L*). Pour tout $m \leq 2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble plan qui se décompose en m parties disjointes superposables avec lui.

Un ensemble pareil pourrait être construit aussi sur la surface d'une sphère.

MM. Kirszbraun et Lindenbaum ont établi le théorème:

4. Soit B un ensemble linéaire borné, A — un ensemble de diamètre $\geq \delta(B)$, f — une fonction définie pour les points de A de façon que l'on ait: $I_f(A) = B$ et $\rho(f(a_1), f(a_2)) \geq \rho(a_1, a_2)$.

¹⁾ 1926, pp. 209—222. La note contient une erreur (pp. 212 et 214), d'ailleurs sans conséquences.

²⁾ Cf. A. Lindenbaum, l. c., p. 209. Dernièrement, nous avons appris que les travaux de tendance analogue ont été entrepris par M. Menger.

³⁾ V. Lindenbaum, l. c., p. 218, note 1), où l'on cite les exemples trouvés par MM. Hausdorff, Mazurkiewicz et Sierpiński.

Alors f est une transformation isométrique (c.-à.-d.: $\rho(f(a_1), f(a_2)) = \rho(a_1, a_2)$) et $A \cong B$.

Les résultats de MM. Kirszbraun et Lindenbaum conduisent aussi au théorème suivant:

5 (L). Soit A un ensemble borné dans l'espace euclidien, et f — une fonction définie pour les points de A de façon que l'on ait: $I_f(A) \subset A$ et $\rho(f(a_1), f(a_2)) \geq \rho(a_1, a_2)$. Alors f est une transformation isométrique et $I_f(A) \cong A$.

Pour aller plus loin, nous introduisons quelques notions:

$A \stackrel{m}{\equiv} B$ veut dire qu'il existe un nombre $n \leq m$ tel que les ensembles A et B se décomposent en n parties disjointes (vides ou non) respectivement congruentes.

Donc $A \stackrel{1}{\equiv} B$ signifie que $A \cong B$.

$A \stackrel{m}{\equiv} B$ ¹⁾: il existe un nombre fini m tel que $A \stackrel{m}{\equiv} B$.

On établit aisément les propriétés fondamentales des relations ainsi définies ²⁾:

6. $\stackrel{m}{\equiv}$ est une relation symétrique et transformante. Pour $m \geq \aleph_0$, elle est encore transitive et complètement additive ³⁾.

En utilisant les théorèmes du § 2, on arrive aux propriétés plus profondes des relations considérées; donc, p. ex.:

7. Si $A \stackrel{m_1}{\equiv} A + B_1$ et $A \stackrel{m_2}{\equiv} A + B_2$, alors $A \stackrel{m_1(m_2+2)}{\equiv} A + B_1 + B_2$ (si $B_1 \cdot B_2 = 0$, on peut remplacer $m_2 + 2$ par $m_2 + 1$).

8. Si $A \stackrel{m}{\equiv} M \subset B$ et $B \stackrel{n}{\equiv} N \subset A$, alors $A \stackrel{m+n}{\equiv} B$ et $M \stackrel{m+n}{\equiv} N$. D'où, le cas spécial le plus important:

9. Si $A \subset B \subset C$ et $A \stackrel{m}{\equiv} C$, alors $A \stackrel{m+1}{\equiv} B \stackrel{m+1}{\equiv} C$.

On aura même:

10. Si $A \subset B \subset C$, $A_1 \subset C_1$, $A \stackrel{m}{\equiv} A_1$ et $C \stackrel{n}{\equiv} C_1$, alors il existe un ensemble B_1 tel que l'on a: $A_1 \subset B_1 \subset C_1$ et $B \stackrel{m+n}{\equiv} B_1$.

De plus, si $A \subset B \subset C$, et A et C sont „presque équiva-

¹⁾ Banach et Tarski, l. c., Déf. 2, p. 246.

²⁾ L'axiome du choix intervient souvent dans les th. **6—12** dans un cas spécial, lorsqu'il s'agit des nombres m, n etc. non-finis. Cependant, nous n'en ferons mention que dans ces cas où il intervient en outre d'une façon plus essentielle.

³⁾ Cf. § 2.

lents par décomposition dénombrable”¹⁾, A et B ou B et C le sont aussi; car on a le théorème:

11 (L). Si $A \subset B \subset C$, $A = A_1 + A_2$, $C = C_1 + C_2$, $A_1 \cdot A_2 = 0 = C_1 \cdot C_2$, $A_1 \equiv C_1$, et A_2 avec C_2 appartiennent à une classe \mathbf{K} d'ensembles qui remplit les conditions:

si $X \in \mathbf{K}$ et $X_1 \subset X$, alors $X_1 \in \mathbf{K}$; si $X_i \in \mathbf{K}$ (pour $i = 0, 1, 2, \dots$), alors $\sum_{i=0}^{\infty} X_i \in \mathbf{K}$; si $X \in \mathbf{K}$ et $X \equiv Y$, alors $Y \in \mathbf{K}$; —

on a alors les décompositions: $A = A_3 + A_4$, $B = B_3 + B_4$, $A_3 \cdot A_4 = 0 = B_3 \cdot B_4$, $A_3 \equiv B_3$, $A_4 \in \mathbf{K}$, $B_4 \in \mathbf{K}$ (de même, pour B et C on obtient une décomposition semblable).

12*. Si $A_1 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$, $A_1 \cdot A_2 = 0 = B_1 \cdot B_2$ et $A_1 + A_2 \equiv B_1 + B_2$, on a: $A_1 \equiv B_1$.

Un ensemble linéaire borné, comme on voit sans peine, n'est pas superposable avec son vrai sous-ensemble. Cependant:

13 (L). Il existe un ensemble linéaire borné A dont un vrai sous-ensemble B remplit la formule: $A \stackrel{2}{\equiv} B$.

(Soit, à cet effet, A — l'ensemble de tous les points $x_k = ka - Eka$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; a — irrationnel), B — l'ensemble obtenu de A , en y supprimant le point $x_0 = 0$).

14 (L). Pour qu'un ensemble soit équivalent à son vrai sous-ensemble, il faut et il suffit qu'il contienne un sous-ensemble dénombrable avec la même propriété.

15 (T). Si A et B sont des ensembles linéaires bornés et superposables, on a: $A - B \equiv B - A$.

Plus généralement:

16 (T). Si A et B sont des ensembles bornés dans l'espace euclidien à 3 dimensions, et s'il existe une transformation isométrique de A en B qui n'est ni une rotation d'un angle incommensurable avec π , ni une telle rotation combinée avec la symétrie par rapport à un plan, — alors $A - B \equiv B - A$.

17 (T). Si A et B sont des ensembles compacts fermés et congruents, on a: $A - B \equiv B - A$.

C'est une généralisation du th. 8 de la note citée de M. Lindenbaum. M. Tarski a obtenu, avec le concours de

¹⁾ V. Banach et Tarski, l. c., Déf. 3, p. 270.

M. Kuratowski, le th. **18** qui est une généralisation du th. (II) de la même note au cas de 2 dimensions:

18. Si A et B sont des ensembles F_σ et G_δ à la fois, plans bornés et congruents, on a: $A - B \stackrel{\aleph_0}{=} B - A$.

Les propositions précédentes (**15—18**) peuvent être rendues plus générales à l'aide du théorème suivant:

19 (T). Si une classe \mathbf{K} d'ensembles remplit la condition; si $A \in \mathbf{K}$ et $A \cong A_1$, alors $A_1 \in \mathbf{K}$ et $A - A_1 \overline{=} A_1 - A$ (resp $A - A_1 \stackrel{n}{=} A_1 - A$),

alors elle remplit aussi la condition:

si $A \in \mathbf{K}$, $A \cong A_1$, $C \cong C_1$, $A \subset C$ et $A_1 \subset C_1$, alors on a: $C - A \overline{=} C_1 - A_1$ (resp. $C - A \stackrel{n+1}{=} C_1 - A_1$).

Citons comme exemples des classes \mathbf{K} remplissant l'hypothèse du th. **19** les suivantes: classe d'ensembles finis; d'ensembles linéaires bornés (th. **15**); fermés compacts (th. **17**) etc.

H. Szpidbaum.

Samarytanie.

Studjum antropobiologiczne.

Przedstawił K. Stolyhwo dn. 11 listopada 1926 r.

W S T Ę P.

Niegdyś bardzo liczny, obecnie będący na wymarciu szczep Samarytan, stanowi istne curiosum — jest jakby żywym wykopaliskiem z odległych czasów biblijnych. Dzieje tego szczepu obejmują blisko 2800 lat, przytem godnym podkreślenia jest fakt, iż Samarytanie nigdy nie opuszczali Palestyny. Bliższe poznanie ich przyczyni się niewątpliwie do wyjaśnienia wielu zawiłych zagadnień, dotyczących antropologii dawnych mieszkańców Chanaanu i do pewnego stopnia i współczesnych Żydów.

Dane dotyczące antropologii Samarytan są nader skąpe. Na początku b. stulecia (1901) Amerykanin Henry Minor Huxley zbadał 35 Samarytan, w kilka lat później Weissenberg sprawdził te badania. Jakkolwiek obaj uczeni otrzymali zgodne wyniki pomiarów, doszli jednak do różnych wniosków. Podczas gdy Huxley pisze, że „ogólny typ fizjognomiczny Samarytan jest stanowczo żydowski, szczególnie zaś nos... Samarytanie zachowali stary typ w całkowitej czystości i są obecnie jedynymi, jakkolwiek zdegenerowanymi przedstawicielami starożytnych Hebrzejczyków”, Weissenberg, a za nim Fishberg uważają, iż typy żydowskie nie występują wśród Samarytan częściej, aniżeli wśród pozostałych mieszkańców Syrii, do których też antropologicznie najbardziej się zbliżają. Gdy weźmiemy pod uwagę, że stopień opracowania materiału tych badaczy nie przekraczał poziomu średnich arytmetycznych, nie będziemy się dziwili różnicom w subiektywnych sądach obydwu autorów. Poza temi pracami istnieją liczne opisy podróżników jak Wackernagla, Orelliego, Beaulieu, które jednak większej wartości naukowej nie posiadają.

Nim przejdę do opisu wyników moich badań, przedstawię krótki zarys historyczny powstania omawianego szczepu.

Ze Starego Testamentu wiadomo, iż 722 r. przed Narodz. Chrystusa Sargon, król Assyryjski, zdobył Samaryję. 27.290 miesz-

kańców z pośród warstw bogatych i rządzących skazał na wygnanie, a na ich miejsce królowie Sargon i Assurbanipal osiedlili kolonistów z Babilonii i Assyrii. Ci koloniści zmieszali się z ludnością hebrajską i wśród nich ugruntowała się religja nawpół monoteistyczna, nawpół pogańska. Na zasadzie więc danych biblijnych Samarytanie są mieszańcami hebrajsko-assyryjsko-babilońskimi. W następstwie Syryja i Palestyna przeszły pod panowanie perskie. Żydowski charakter religji Samarytan został ugruntowany około 430 r. przez Chr., kiedy młody kapłan hebrajski *Menasseh*, ożeniony z córką zarządcy Samarytańskiego *Sabaelath'a* nie chciał na rozkaz proroka *Nechemjasza* opuścić żony i przeniósł się całkowicie do Samarytan. Ci ostatni nie uznali późniejszych reform religijnych *Ezry*, trzymając się ściśle przepisów Starego Testamentu. Sto lat później wybudowali na górze *Gerizim* świątynię, którą po 200 latach zburzył *Hyrkanus*, król *Judei*. Szczątki tej świątyni znajdują się po dziś dzień na *Gerizim*, na której to górze Samarytanie spędzają siedem dni do roku w święta *Wielkanocne*, składając zgodnie z rytuałem ofiarę Bogu w postaci wołu. Samarytanie zawsze odnosili się wrogo do Żydów i w czasie wojen stawali czynnie po stronie nieprzyjaciół — tak było np. za czasów *Heroda*. Dalsze dzieje polityczne Samarytan pokrywają się z dziejami Syryji i Palestyny, religja zaś ich nie ulegała żadnej ewolucji, strzeżona pilnie z pokolenia w pokolenie przez stojącego na czele sekty wielkiego kapłana t. zw. *Kohen Hagadol*. Wypada jeszcze zaznaczyć, iż Samarytanie uważają siebie za jedyńych czystych przedstawicieli dawnych Hebrajczyków, nazywając siebie „*Bnej Izrael*”, co znaczy — synowie *Izraela*; dowodzą, iż są potomkami biblijnego *Józefa*, a kapłani mają pochodzić z pokolenia *Lewitów*.

Obecnie Samarytanie mieszkają w mieście *Nablus* (bibl. *Szchem*) przy „*Chart Asumra*”, co znaczy po arabsku ulicy Samarytan. Większość ich żyje w nędzy i złych warunkach higienicznych. Trudnią się drobnym handlem, część z nich wynajmuje się do robót rolnych, niektórzy pracują w policji i na niższych urzędach państwowych. Jedyńie kapłani nie opuszczają swych domostw, nauczając dzieci zasad religji, resztę zaś czasu poświęcają przepisywaniu biblii, używają pisma aramejsko-hebrajskiego. Księgi te sprzedają turystom, lub wysyłają do muzeów europejskich i amerykańskich. Swoim majestatycznym patriarchalnym

wyglądem, subtelniejszemi rysami twarzy, kapłan wyróżniają się od reszty Samarytan.

Ilość kobiet wynosi 80,4⁰/₀ ilości mężczyzn. Liczba urodzeń dla kobiet jest jeszcze mniejsza — na 100 urodzeń męskich przypada 65,5 kobiecych (większy odestek dorosłych kobiet tłumaczy się znacznie większą śmiertelnością wśród chłopców).

Samarytanie sami uważają siebie za szczerp wymierający i przyczynę zła widzą w niedostatecznej ilości kobiet¹⁾. W związku z tą ostatnią kwestją dzieją się wśród Samarytan rzeczy dla nas Europejczyków co najmniej dziwne. Gdy dorosły 30 — 35-letni mężczyzna po osiągnięciu stanowiska, postanawia się ożenić, nie znajduje najczęściej wśród żyjących współwyznawców towarzyszkę życia. Wówczas czeka na narodziny dziewczynki, ubija z jej ojcem targu, w dalszym ciągu czeka, aż nowonarodzona oblubienica dorośnie do odpowiedniego wieku. Ceny kobiet są dość wysokie tak, że ożenek dla Samarytanina stanowi pewien luksus, na który nie każdy może sobie pozwolić. Za wiek za najodpowiedniejszy dla zamążpójścia Samarytanie uważają 9 i 10 rok życia. O tak wczesnym rozpoczynaniu życia płciowego wśród ludów pierwotnych donosi Buschan („Das sexuelle in der Völkerkunde”): i tak dziewczęta z Atjeh, z Kamerunu (żyją płciowo od 7 roku życia), Połudn. Australji (8—12 r. życia), z Brytyjskiej Guiany (10 rok życia), indjanki Khechna, dziewczęta Sioux’ów, Dakotów, Samojedów, Shangalla (od 11—12 r. życia). Skutki tego mają się wyrażać u mężczyzn przedwczesną impotencją, u kobiet szybkim zwiędnięciem, starzeniem się za młodu i wczesnym wygasaniem płodności.

Przy badaniach spotykałem się z oporem (szczególnie kapłanów), wynikającym z niskiego poziomu kulturalnego i przesądów religijnych Samarytan, które niezawsze udawało mi się przezwyciężyć nawet odpowiedniej wysokości „bakszyszem”. Materiał zebrany obejmuje 94 osobniki płci obojga, dorosłych i dzieci (27 ♂ 27 ♀ dorosłych i dzieci 24 ♂ i 16 ♀). Jest to prawie cały szczerp, nie pozwoliło się zbadać tylko kilku kapłanów. Mierzyłem tylko osobników powyżej lat 20. Tabela I uzmysławia rozdział osobników według wieku.

¹⁾ Samarytanie starają się ostatnio o zawieranie małżeństw mieszanych z Żydówkami; dotychczas istnieje tylko 1 małżeństwo tego rodzaju.

Tab. I. Wiek.

	Mężczyźni	Kobiety
Między 20—30 r. życia	37 ⁰ / ₀	33,3 ⁰ / ₀
„ 30—40 r. „	29,7 ⁰ / ₀	29,7 ⁰ / ₀
„ 40 i powyżej	33,3 ⁰ / ₀	37,0 ⁰ / ₀

Przy zbieraniu spostrzeżeń posługiwałem się ogólnie przyjętymi metodami, zestawionymi przez R. Martina (1914) i E. Lotha; przy opracowaniu materiału stosowałem metody bjometryczne, wyłożone w pracach Czekanowskiego, Czubera, Youla.

Główne cechy antropologiczne.

Średnie wzrostu dla Samarytan wynoszą:

$$M \text{ } \sigma = 171.07 \pm 0,85$$

$$M \text{ } \text{ } \text{ } = 156.11 \pm 0,58$$

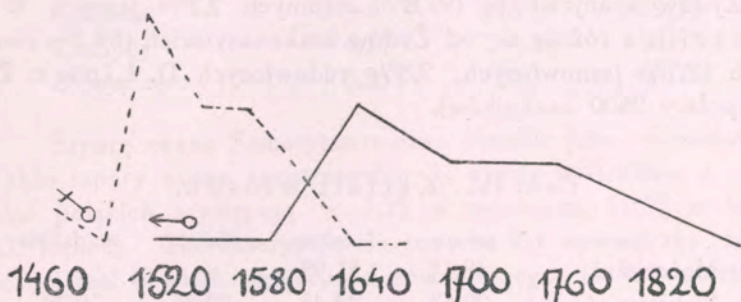
Dimorfizm płciowy jest wybitnie zaznaczony i bjometrycznie udowodniony, gdyż różnica kilkakrotnie przewyższa potrójny błąd prawdopodobny. Wzrost kobiet wynosi 91,8⁰/₀ wzrostu mężczyzn. Różnica płciowa, która przeciętnie wynosi 7⁰/₀ jest u Samarytan większa, wynosi bowiem 8,2⁰/₀. Fakt ten stwierdzono i u innych wysokorosłych ludów.

Zgodnie z podziałem Martina należy Samarytan zakwalifikować do grupy ludzi o wroście wysokim (kobiety wyżej średniego). W zakresie wzrostu, jak nas o tem przekonywa bliższe przyjrzenie się krzywej liczebności (Rys. 1), a jeszcze lepiej rozdziałowi na klasy wzrostu według tablicy E. Schmidta, Tab. II), wśród Samarytan występuje kilka elementów antropologicznych.

Tab. II. Wzrost.

	Mężczyźni	Kobiety
Bardzo nizcy	3,7 ⁰ / ₀	—
Nizcy	14,8 ⁰ / ₀	7,4 ⁰ / ₀
Poniżej średniego	22,2 ⁰ / ₀	37,0 ⁰ / ₀
Wzrostu średniego	7,4 ⁰ / ₀	14,8 ⁰ / ₀
Powyżej średniego	11,1 ⁰ / ₀	29,6 ⁰ / ₀
Wysocy	37,1 ⁰ / ₀	11,2 ⁰ / ₀
B. wysocy	3,7 ⁰ / ₀	—

Tak znacznych różnic między poszczególnymi jednostkami wytłumaczyć warunkami bytowania, które w tym przypadku są mniej więcej jednakowe dla całej badanej populacji, nie uda się.



Rys. 1. Szeregi liczebności wzrostu Samarytan.

Pigmentacja.

Włosy. Barwę włosów Samarytan ilustruje poniższa tablica.

Tab. III. Barwa włosów.

	czarne	brunet	szatynowe	blond	rude
Mężczyźni	18,5 ⁰ / _o	51,8 ⁰ / _o	26 ⁰ / _o	3,7 ⁰ / _o	—
Kobiety	18,5 ⁰ / _o	48,2 ⁰ / _o	25,9 ⁰ / _o	—	7,4 ⁰ / _o
Chłopcy	—	20,8 ⁰ / _o	62,6 ⁰ / _o	8,3 ⁰ / _o	8,3 ⁰ / _o
Dziewczęta	—	47,2 ⁰ / _o	35,2 ⁰ / _o	8 ⁰ / _o	11,8 ⁰ / _o

Przeważna część osobników, zarówno męskich, jak i żeńskich jest ciemna. Wyraźnie jednak występuje element jasnowłosy, u dzieci liczniej reprezentowany, niż u dorosłych. Różnic płciowych w barwie włosów z całą pewnością stwierdzić nie można, za wyjątkiem może tylko osobników rudowłosych, które zarówno u dorosłych, jak i dzieci liczniej występują u płci żeńskiej. Mężczyzn o rudych włosach głowy nie widziałem, natomiast u 29,6⁰/_o osobników męskich stwierdziłem ognisto rude brody. Według Topinarda i Ripleya rudy barwnik włosów jest odmianą blond. Kwestja rudowłosych wśród Żydów jest jedną z najbardziej spornych: obecność ich wśród Samarytan, wśród Żydów aszkenazyjskich i spanjolskich pozwala mi twierdzić, iż element ten (zarówno jak jasnowłosy i niebieskooki) występował już wśród starożytnych hebrejczyków. Rudowłosymi według podania, byli

Ezaf, Saul, Absalon, Judasz Iskarjota, Marja Magdalena. Blondynami mieli być Chrystus i król Dawid.

Pod względem barwnika włosów Samarytanie zbliżają się do Żydów spanjolskich, (97,8⁰/₀ ciemnych 2,2⁰/₀ jasnych W agenseil), a różnią się od Żydów aszkenazyjskich (84,5⁰/₀ ciemnych 12,7⁰/₀ jasnowłosych, 2,8⁰/₀ rudowłosych D. Lipiec, Żydzi polscy 2600 osobników).

Tab. IV. Kształt włosów.

	proste	l. faliste	faliste	m. faliste
Mężczyźni	48,1 ⁰ / ₀	51,9 ⁰ / ₀	—	—
Kobiety	29,6 ⁰ / ₀	44,4 ⁰ / ₀	22,3 ⁰ / ₀	2,7 ⁰ / ₀
Chłopcy	63,1 ⁰ / ₀	24,6 ⁰ / ₀	8,2 ⁰ / ₀	4,1 ⁰ / ₀
Dziewczęta	12,6 ⁰ / ₀	43,7 ⁰ / ₀	43,7 ⁰ / ₀	—

Kształt włosów wykazuje duże różnice płciowe: podczas gdy połowa liczby osobników męskich posiada włosy proste, u kobiet występuje wyraźna tendencja ku falowaniu się włosów. Zjawisko to uwydatnia się już w wieku dziecięcym.

O c z y .

Tab. V. Barwa oczu.

	Samarytanie				Żyd. spanjol.		Żydzi polscy	
	♂	♀	Chłopcy	Dziewcz.	♂	♀	♂	♀
Niebieskie	11.1%	7.4%	12.3%	6.3%	6.4%	8.1%	27.8%	21.2%
Szare	—	3.7%	4.1%	—	7.0%	17.8%	21.3%	14.7%
Zielonawe	48.2%	55.6%	32.8%	25.0%	6.3%	4.8%	—	6.5%
Piwne	40.7%	33.3%	50.8%	68.7%	80.3%	69.3%	50.9%	57.6%

Barwa tęczówki Samarytan jest przeważnie pośrednia. Niebieskookie osobniki są liczniejsze wśród mężczyzn, różnica powyższa zaznacza się wybitniej u dzieci. O stanowisku Samarytan pod względem barwy tęczówki w stosunku do 2 wielkich grup żydowskich, można zaznaczyć to samo, co było powiedziane przy rozpatrywaniu barwy włosów.

Żydzi polscy (D. Lipiec) są grupą najbardziej jasnooką.

Tab. VI. Kształt szpary ocznej.

	Wrzecionowata	Mieszana	Migdałowata
Mężczyźni	3,7 ₀ ^{0/0}	55,6 ₀ ^{0/0}	40,7 ₀ ^{0/0}
Kobiety	—	40,7 ₀ ^{0/0}	59,3 ₀ ^{0/0}
Chłopcy	4,1 ₀ ^{0/0}	4,1 ₀ ^{0/0}	91,8 ₀ ^{0/0}
Dziewczęta	6,25 ₀ ^{0/0}	25 ₀ ^{0/0}	68,75 ₀ ^{0/0}

Szparę oczną Samarytan można określić jako migdałowatą. Takie szpary oczne spostrzegałem b. często u Arabów, a u Żydów polskich występują w 7,2₀^{0/0} u mężczyzn, 12,5₀^{0/0} u kobiet (D. Lipiec). Charakteryzuje się tem, że kąt wewnętrzny szpary ocznej jest o wiele większy od zewnętrznego (w przeciwstawieniu do wrzecionowatej, gdzie kąty są równe) i schodzi nieco niżej na korzeń nosa. Uwarunkowany ten kształt jest tem, że górna powieka unosi się prawie prostopadle nad kątem wewnętrznym szpary. Często oko takie przypomina epicanthus, lecz bez fałdy mongolskiej. Pozatem występują formy mieszane pośrednie między szparą migdałowatą, a wrzecionowatą. W agenseil podaje, iż formę tę szpary ocznej spostrzegał rzadko wśród Żydów spanjolskich. Szpara oczna Samarytan przebiega przeważnie poziomo.

G ł o w a.

Wskaźnik główny charakteryzuje kształt głowy. Wyraża on szerokość głowy w procentach długości. Średnie wskaźników Samarytan wynoszą:

$$M \text{ } \sigma = 77.64 \pm 0.43$$

$$M \text{ } \text{ } \text{ } = 80.84 \pm 0.68$$

Różnica płciowa wynosi $3,2 \pm 0,8$. Fakt, iż różnica przekracza swój trójkątny błąd prawdopodobny pozwala uważać większość krótkogłowość kobiet za biometrycznie dowiedzioną. Frets na podstawie swoich badań nad dziedziczeniem wskaźnika głównego (przeszło 400 rodzin) twierdzi, iż znacznieszą brachycephalję kobiet należy uważać za trzeciorzędną cechę płciową.

Tab. VII. Wymiary głowy.

	Samaritanie		Żydzi spanjolscy		Żydzi polscy	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀
Długość głowy	191.07 ± 0.87	179.96 ± 0.87	181.9 ± 0.53	180.9 ± 0.63	184	176
Szerokość głowy	148.4 ± 0.64	145.25 ± 0.77	147.6 ± 0.45	142.7 ± 0.45	151	146
Wysokość głowy	127.03 ± 0.57	119.11 ± 0.6	123.1 ± 0.46	117.4 ± 0.72	124	118
Obwód głowy	54.72 ± 0.31	52.94 ± 0.15	—	—	55.3	53.6
Wskaznik główny	77.64 ± 0.43	80.84 ± 0.68	78.9 ± 0.24	78.9 ± 0.31	81.89	82.92
Wsk. wysok. dług.	66.40 ± 0.33	66.21 ± 0.46	65.1 ± 0.25	64.9 ± 0.39	67.39*	67.04*
Wsk. wysok. szerok.	85.72 ± 0.46	82.01 ± 0.52	83.5 ± 0.32	82.3 ± 0.5	—	—

Średnie szerokości i długości głowy (Tab. VII) pouczają, iż różnica płciowa w kształcie głowy zależy głównie od różnicy w długości głowy, która wynosi 11,11 mm. i przewyższa dziewięciokrotnie swój błąd prawdopodobny.

Krzywa liczebności wskaźnika głównego (Rys. 2) posiada dwa maxima: jedno przy 76,5 drugie przy 83,5. Pierwsze wskazuje na obecność liczego elementu mesocephalicznego, drugie—brachycephalicznego. Krzywa kobiet wykazuje poza temi jeszcze jedno maximum przy hyperbrachycephalji. Bliższą analizą tych składnikw naszej populacji zajmiemy się później.



Rys. 2. Szeregi liczebności wskaźnika głównego.

Samarytanie poza Żydami z Jemenu na połudn. zachodzie półwyspu Arabskiego (M—74,3 Weissenberg) i Żydami z Sachary, Mzab (M—72,9 Huguet) stanowią najbardziej długogłową grupę żydowską. W Tab. VII zestawilem wymiary głowy Samarytan z wymiarami na Żydach sefardyjskich (Wagenseil) i aszkenazyjskich. Za przedstawicieli tych ostatnich wybrałem Żydów polskich, jakkolwiek rozporządzam tylko badaniami Elkinda (1897), które nie odpowiadają pod wieloma względami wymogom współczesnej udoskonalonej metodyce antropologicznej.

Tab. VIII.

	Samarytanie		Żydzi spanyjscy		Żydzi polscy	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀
Dolichocephal. (x—75.9)	29.63%	14.82%	19.7%	11.29%	1.0%	—
Mesoccephal. (76—80.9)	48.15%	40.74%	65.5%	69.36%	22.0%	15.2%
Brachycephal. (81.0—85.4)	18.52%	22.22%	12.7%	19.35%	64.0%	66.4%
Hyperbrachycephal. (85.5—91.9)	3.7%	18.52%	2.1%	—	13.0%	18.4%
Izobrachycephal. (92-x)	—	3.7%	—	—	—	—

Bardziej wymowną jest Tab. VIII, za podstawę której wziąłem charakter wskaźnika głównego. Liczba krótkogłowych wśród Żydów polskich przewyższa trój i pięciokrotnie liczbę tychże wśród Samarytan i Żydów spanjolskich.

Wysokość głowy wykazuje poważną różnicę płciową zarówno w wymiarach bezwzględnych, jak i wskaźniku wysokościowo-szerokościowym; natomiast w zestawieniu z pozostałymi grupami średnie nie wykazują zbyt wielkich różnic.

Tab. IX.

	Samarytanie		Żydzi spanjolscy	
	♂	♀	♂	♀
Chamaecephal. (x—57.9)	—	—	—	—
Ortocephal. (58—62.9)	3.7 ⁰ / ₀	18.5 ⁰ / ₀	22 ⁰ / ₀	29.1 ⁰ / ₀
Hypsicephal. (63—x)	96.3 ⁰ / ₀	81.5 ⁰ / ₀	78 ⁰ / ₀	70.9 ⁰ / ₀

Tab. IX ilustruje znacznie przewagę elementów wysokogłowych wśród Samarytan w porównaniu z Żydami spanjolskimi. A więc i pod tym względem istnieją poważne różnice grupowe, które zostały zniwelowane przez średnie arytmetyczne.

Różnica płciowa obwodu głowy wynosi $1,78 \pm 0,35$. W porównaniu z innymi grupami Żydów Samarytanie posiadają obwód głowy najmniejszy.

Analiza współczynników zmienności daje nam obraz największej zmienności dla wskaźnika głównego ($v = 4,22$ i $6,53$), znacznie mniejszej dla samych wymiarów, a mianowicie dla długości ($v = 3,5$ i $3,8$) wysokości ($v = 4,1$ i $4,3$) szerokości ($v = 3,3$ i $4,1$), a najmniejszej dla obwodu ($v = 2,9$ i $2,18$).

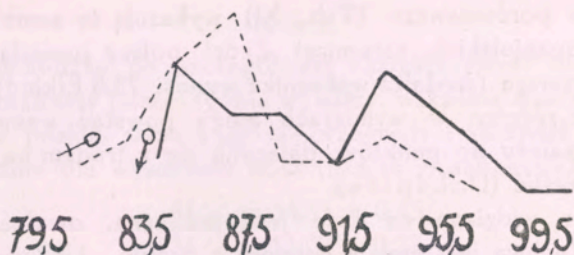
T w a r z .

Średnie wskaźnika morfologicznego twarzy wynoszą:

$$M \text{ ♂} = 89.7 \pm 0.65$$

$$M \text{ ♀} = 86.61 \pm 0.48$$

różnica płciowa — 3.09 ± 0.81 . Różnicę powyższą ilustruje Rys. 3, przedstawiająca rozsiew liczebności wskaźnika twarzowego. Krzywa męczyzn przesunięta jest na prawo ku wyższym wskaźnikom i wskazuje na przewagę elementów wąskotwarzowych.



Rys. 3. Wskaźnik morfologiczny twarzy.

Średnie wysokości twarzy mierzone od punktu nasion do gnation wynoszą:

$$M \text{ ♂} = 120.0 \pm 0.94$$

$$M \text{ ♀} = 109.51 \pm 0.73$$

Różnica płciowa wynosi 10.49 ± 1.18 .

Średnie szerokości twarzy równają się:

$$M \text{ ♂} = 133.85 \pm 0.79$$

$$M \text{ ♀} = 126.44 \pm 0.85$$

różnica płciowa wynosi 7.41 ± 1.14 . Różnica płciowa zarówno w długości jak i szerokości twarzy jest pozytywnie stwierdzona, wybitniejsza jednak dla długości twarzy.

Tab. X. Kształt twarzy Samarytan.

	♂	♀
Hypereuryprosop	—	—
Euryprosop	7.4 ⁰ / ₀	18.5 ⁰ / ₀
Mesoprosop	37.0 ⁰ / ₀	55.5 ⁰ / ₀
Leptoprosop	40.7 ⁰ / ₀	18.5 ⁰ / ₀
Hyperleptoprosop	14.9 ⁰ / ₀	7.5 ⁰ / ₀

Ogółem wąskotwarzowych mężczyzn jest 55.6⁰/₀, kobiet zaś 26⁰/₀, a więc mniej niż połowa.

Analiza współczynników zmienności wskaźnika twarzowego i poszczególnych wymiarów wykazuje znaczne współczynniki dla wskaźnika ($v=5.62$ i 4.26) i długości twarzy ($v=6.05$ i 5.3), mniejsze dla szerokości ($v=4.6$ i 3.5). Różnorodność elementów rasowych, wchodzących w skład badanej populacji, wpłynęła na znaczne wahania tych wymiarów.

Dane porównawcze (Tab. XI) wykazują te same stosunki u Żydów spanjolskich, natomiast Żydzi polscy posiadają twarze znacznie szersze (średnica wskaźnika wynosi 73.6 Elkind). Zresztą nieznaczne różnice w wymiarach mogą powstać wskutek tego, iż nasion należy do punktów, dających się z trudem na osobniku żywym określić (D. Lipiec).

Twarz widziana en face jest podłużna, owalna o ostrej bródce. Żuchwa jest mała i cofnięta z profilu. Uwłosienie twarzy obfite.

Tab. X. Wymiary twarzy.

	♂			♀		
	Wskaźnik	Długość	Szerokość	Wskaźnik	Długość	Szerokość
Samarytanie	89.7	120.0	133.85	86.61	109.0	126.44
Żydzi polscy	73.69	120.0	136.0	75.69	112.0	129.0
Żydzi spanjolscy	89.5	121.4	135.7	87.5	111.7	127.8

Czoło. Średnie najmniejszej szerokości czoła wynoszą:

$$M_{\text{♂}} = 104.3 \pm 0.65$$

$$M_{\text{♀}} = 100.15 \pm 0.69$$

Różnica płciowa wynosi 4.15 ± 0.95 .

Średnie wskaźnika czołowo-licowego (Jugofrontalindex) wynoszą:

$$M_{\text{♂}} = 77.98 \pm 0.42$$

$$M_{\text{♀}} = 79.17 \pm 0.36$$

a różnica płciowa wynosi 1.19 ± 0.55 i nie może być uważana za bjometrycznie stwierdzoną. Wskazuje ona jednak na tendencję ku szerokoczołowości u kobiet. Wniosek powyższy potwierdza i tab. XI, która wskazuje przewagę osobników szerokoczołowych wśród kobiet. Nie jest jednak wykluczone, iż względna szerokość czoła kobiet jest zjawiskiem pozornym i zależnym od znacznie (w wymiarach bezwzgl.) węższej twarzy kobiecej.

Tab. XI. Czoło.

	♂	♀
Wąskoczołowi (x — 70.99)	—	—
Miernoczołowi (71—74.99)	26.0 ₀ %	7.4 ₀ %
Szerokoczołowi (75 — x)	74.0 ₀ %	92.6 ₀ %

N o s.

Przechodząc do szczegółowej charakterystyki nosa Samarytan, rozpatrzmy poszczególne wymiary, wskaźnik nosowy, kształt grzbietu z profilu, zachowanie się przegrody i skrzydeł nosowych.

Średnie dla wysokości nosa (nasion — subnasale) wynoszą:

$$M \text{ ♂} = 54.33 \pm 0.45$$

$$M \text{ ♀} = 51.07 \pm 0.37$$

a różnica płciowa 3.26 ± 0.58 .

Odpowiednie wartości dla szerokości nosa wynoszą:

$$M \text{ ♂} = 37.77 \pm 0.54$$

$$M \text{ ♀} = 32.30 \pm 0.5$$

a różnica płciowa 5.47 ± 0.73 . Nosi mężczyzn są dłuższe i szersze. Różnica w szerokości nosa jest znaczniejsza i to wpływa na charakter wskaźnika nosowego, którego średnie wynoszą:

$$M \text{ ♂} = 69.87 \pm 0.95$$

$$M \text{ ♀} = 63.31 \pm 0.59$$

a różnica płciowa 6.56 ± 1.14 . Przewagę elementów wąskonosych wśród kobiet uwydatnia również tab. XII:

Tab. XII. N o s.

	♂	♀
Chamaerrhin (85 — x)	3.7%	—
Mesorrhin (70 — 84.9)	51.9%	3.8%
Leptorrhin (x — 69.9)	44.4%	96.2%

Rys. 4, przedstawiający krzywe szeregów liczebności wskaźnika, ilustruje znakomicie powyższy fakt. Krzywa mężczyzn przesunięta jest znacznie ku stronie prawej i wskazuje na wyższą liczebność elementu szerokonosego.

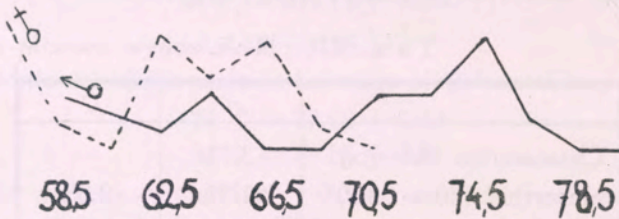
Jest to rezultat poniekąd nieoczekiwany; należałoby się raczej spodziewać, iż równolegle z przewagą elementów długogłowych i wąskolichych wśród mężczyzn pójdzie i wskaźnik nosowy, tymczasem leptorhinja stała się typową dla bardziej krótkogłowych i szerokolich kobiet. To samo zjawisko jak wynika z tabel XIII i XIV stwierdził Wagenseil i na Żydach spanyjskich i Elkind dla polskich.

T a b. XIII.

	Samarytanie		Żydzi spanjolcy		Żydzi polscy	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀
Leptorrhin	44.4%	96.2%	89.4%	95.2%	87.1%	96%
Mesorrhin	51.9%	3.8%	10.6%	4.8%	12.9%	4%
Chamaerrhin	3.7%	—	—	—	—	—

T a b. XIV.

	♂			♀		
	Wsk. nosowy	Wysokość nosa	Szerokość nosa	Wsk. nosowy	Wysokość nosa	Szerokość nosa
Samarytanie	69.87	54.33	37.77	63.31	51.07	32.3
Żydzi spanjolcy	61.5	58.2	35.6	60.2	53.8	32.0
Żydzi polscy	62.05	56.0	34.4	60.71	52.0	32.0



Rys. 4. Szeregi liczebności wsk. nosowego.

Z powyższych tabel widocznem jest, iż Samarytanie mają nosy krótsze i szersze od Żydów spanjolskich i polskich. We wszystkich jednak rozpatrywanych grupach element wąskonosy jest dominujący za wyjątkiem grupy męskiej Samarytan, posiadającej tylko 44.4% wąskonosych.

Współczynniki zmienności dla wskaźnika nosowego ($v = 10.46$ i 7.07) są dardzo duże. Znajduje się to w zgodzie z faktem, iż wskaźnik nosowy jest dla poszczególnych typów antropologicznych cechą w wysokim stopniu zróżniczkowaną i wskutek tego otrzymujemy obraz znacznej dyspresji w obu serjach męskiej i kobiecej.

Przechodzimy do rozpatrywania profilu nosa. W tym celu zestawilem tabele.

Tab. XV. Profil nosa Samarytan.

P l e ć	Wklęsły	Prosty	Wypukły	Falisty	Garbaty
Mężczyźni	—	63.0 ⁰ / ₀	29.6 ⁰ / ₀	3.7 ⁰ / ₀	3.7 ⁰ / ₀
Kobiety	—	74.0 ⁰ / ₀	18.6 ⁰ / ₀	3.6 ⁰ / ₀	3.7 ⁰ / ₀
Chłopcy	41.7 ⁰ / ₀	58.3 ⁰ / ₀	—	—	—
Dziewczęta	37.5 ⁰ / ₀	50.0 ⁰ / ₀	6.2 ⁰ / ₀	6.3 ⁰ / ₀	—

Typowym dla Samarytan jest nos prosty. Profile wypukłe występują nieco częściej u mężczyzn aniżeli u kobiet. Nosa wklęsłe spostrzegałem tylko u dzieci. Z wiekiem kości nosowe rozwijają się i po dojrzałości płciowej form wklęsłych nie spotyka się.

Tab. XVI. Profil nosa Żydów.

Grupa	wklęsły		prosty		wypukły		Autor
	♂	♀	♂	♀	♂	♀	
Samarytanie	—	—	63%	74%	37%	26%	Szpidbaum
Żyd. spanjol.	13.4%	35.5%	37.3%	29%	49.3%	35.5%	Wagenseil
Żydzi polscy	5%	15.9%	55%	60.4%	40%	23.7%	Lipiec

Dzięki powyższej tabeli widzimy, iż Żydzi spanjolscy i polscy posiadają z jednej strony większą procentowo ilość nosów wypukłych, a z drugiej pewien odsetek nosów wklęsłych, których wśród dorosłych Samarytan brak zupełnie.

U Samarytan tylko rzadko występują nosy, uważane za specyficzne dla Żydów, mianowicie nosy o grubych mięsistych skrzydłach, o dużej objętości i mocno zakrzywionym, wypukłym profilu. Wręcz przeciwnie nosy Samarytan są delikatne, średniej wielkości, o cienkich skrzydłach lekko wypukłe. Nosa takie uchodzą jako greckie wzgl. rzymskie. To samo donosi Wagenseil w odniesieniu do Żydów spanjolskich. Luschan uważa, iż charakterystyczne nosy Żydzi zawdzięczają elementowi hetyckiemu, czyli armenoidalnemu, dla którego one są typowe. „Solche

echte Judennasen”, pisze Luschan, „und gleichzeitig ganz extrem kurze, hohe Schädel finden wir im frühestem Altertum in Vorderasien auf Denkmälern ausgebildet, die den hethitischen Kulturkreise angehören”. Inni natomiast badacze jak prof. Schleich i Fishberg uważają, iż nosy t. zw. żydowskie występują również i wśród ludności Europy (u Bawarczyków w 31% R a n k e).

U s z y.

Charakterystykę uszu Samarytan rozpocznę od podania średnich długości fizjognomicznej ucha, które wynoszą:

$$M \text{ ♂} = 66.18 \pm 0.66$$

$$M \text{ ♀} = 61.48 \pm 0.54$$

a różnica płciowa 4.7 ± 0.85 . Średnie szerokości ucha wynoszą:

$$M \text{ ♂} = 36.9 \pm 0.37$$

$$M \text{ ♀} = 35.48 \pm 0.41$$

a różnica płciowa 1.42 ± 0.55 . Średnie wskaźnika usznego wynoszą:

$$M \text{ ♂} = 55.93 \pm 0.61$$

$$M \text{ ♀} = 57.77 \pm 0.57$$

a różnica płciowa 1.84 ± 0.83 .

Z zestawienia widać, iż uszy Samarytan są długie i szerokie. Pozytywna różnica płciowa stwierdza się tylko dla długości ucha. Uszy Żydów spanjolskich są nieco szersze, w serji kobiecej różnica ta nie występuje. Z danych Elkinda dla Żydów polskich wynika, iż mają oni uszy nieco krótsze i węższe od pozostały grup.

Stopień odstawania uszu ilustruje Tab. XVII.

Tab. XVII. Stopień odstawania uszu.

	Przy- legające	Słabo odstawające	Średnio odstawające	Mocno odstawające	Autor
Mężczyźni	—	29.6 ⁰ / ₀	29.6 ⁰ / ₀	40.8 ⁰ / ₀	Szpidbaum
Kobiety	18.5 ⁰ / ₀	22.2 ⁰ / ₀	44.4 ⁰ / ₀	14.9 ⁰ / ₀	
Chłopcy	—	12.5 ⁰ / ₀	37.5 ⁰ / ₀	50 ⁰ / ₀	
Dziewczęta	18.8 ⁰ / ₀	18.7 ⁰ / ₀	31.25 ⁰ / ₀	31.25 ⁰ / ₀	Wagenseil Liptówna
Spanjolscy Żydzi	31.7 ⁰ / ₀	27.3 ⁰ / ₀	35 ⁰ / ₀	6.0 ⁰ / ₀	
Polscy Żydzi	3.1 ⁰ / ₀	12.9 ⁰ / ₀	48.1 ⁰ / ₀	35.9 ⁰ / ₀	

Uszy mężczyzn zarówno dorosłych jak i nieletnich są bardziej odstające od kobiecych. Uszu przylegających wśród mężczyzn zupełnie niema. Mniej więcej te same stosunki stwierdził Wagenseil dla Żydów spanyolskich. Żydów polskich charakteryzują natomiast uszy mocno odstające (D. Lipiec).

Wzgórek Darwina jest słabo zaznaczony; płatki uszne dobrze wykształcone, modelacja ucha ładna.

Tab. XVIII. Wymiary uszu.

Grupa	♂			♀		
	Wskaźnik	Długość	Szerokość	Wskaźnik	Długość	Szerokość
Samarytanie	55.93	66.18	36.9	57.77	61.48	35.48
Żydzi spanyolscy	59.0	65.2	38.4	58.2	60.9	35.4
Żydzi polscy	56.25	63.0	35.0	54.62	58.0	32.0

Wargi.

Grubość warg badanej populacji ilustruje Tab. XIX.

Tab. XIX. Grubość warg.

Płeć	Cienkie	Mierne	Grube
Mężczyźni	4.7 ^{0/0}	59.3 ^{0/0}	37 ^{0/0}
Kobiety	14.8 ^{0/0}	51.8 ^{0/0}	33.4 ^{0/0}
Chłopcy	20.8 ^{0/0}	24.9 ^{0/0}	54.3 ^{0/0}
Dziewczęta	11.5 ^{0/0}	31.3 ^{0/0}	56.2 ^{0/0}

Największa ilość mężczyzn i kobiet posiada wargi mierne. Uderza jednak znaczny odsetek warg grubych. Dzieci mają na ogół wargi grubsze.

Średnie dla szerokości szpary ustnej wynoszą:

$$M_{\text{♂}} = 52.55 \pm 0.62$$

$$M_{\text{♀}} = 50.37 \pm 0.45$$

a różnica płciowa, wynosząca 2.18 ± 0.76 , nie da się pozytywnie ustalić. Żydzi polscy mają szparę ustną szerszą ($M = 56$).

Uzębienie i zgryz¹⁾.

Stan zdrowotny zębów Samarytan jest naogół bardzo dobry — u osobników 30—40-to letnich uzębienie jest prawie pełne. Próchnica zębów u mniejszości nie jest daleko posunięta. Uzębienie Samarytan całym szeregiem cech różni się od uzębienia przeciętnego Europejczyka.

Barwa zębów jest żółtawa. Zęby są naogół duże, proste lub skośne, szczególnie górne. Poniższa tabela zestawia wymiary dokonane na prawych, górnych i dolnych siekaczach i kłach. W nawiasach podana jest skala wahań, poza nawiasami średnie.

Tab. XX. Wymiary zębów.

Wymiary	Mężczyźni	Kobiety
Długość I_1 górnego	9.6 (7—12)	9.8 (8—11)
Szerokość I_1 górnego	8.6 (8—10)	8.4 (7.5—10)
Długość I_1 dolnego	8.5 (7.5—12)	9.1 (6—12)
Szerokość I_1 dolnego	5.3 (5—6)	5.1 (4—6)
Długość I_2 górnego	7.9 (6.5—11)	8.2 (6—10.5)
Szerokość I_2 górnego	6.2 (4—8)	6.3 (5—7.5)
Długość I_2 dolnego	9.0 (5.5—12)	9.2 (7—12.5)
Szerokość I_2 dolnego	5.8 (6—6.5)	5.7 (5—6.5)
Długość C górnego	9.7 (7—11.5)	9.1 (6.5—12)
Szerokość C górnego	7.6 (6.5—9)	7.4 (6—9)
Długość C dolnego	11.1 (8—15)	10.8 (8.5—15)
Szerokość C dolnego	6.8 (6—8)	6.5 (6—7.5)

Różnic płciowych z całą pewnością stwierdzić nie można. Sądząc z wymiarów absolutnych, możemy przypuszczać, iż siekacze u mężczyzn są nieco krótsze, ale cokolwiek szersze, natomiast kły są i dłuższe i szersze od kobiecych. Co się tyczy poszczególnych zębów to zaznaczyć należy, iż szczególnie J_1 robią wrażenie zębów dużych (skala wahań zębów J_1 inf. przekracza nawet skalę podaną u Martina dla hominidów lo. 8), na-

¹⁾ Uprzejmie dziękuję lek.-dent. S. Markowiczównie za pomoc przy zbieraniu spostrzeżeń, dotyczących uzębienia i zgryzu Samarytan.

tomiast I_1 są małe i pod tym względem odcinają się od reszty uzębienia.

Zmniejszanie się trzonowców od M_1 poprzez M_2 do M_3 jest właściwie wszystkim rasom ludzkim i występuje oczywiście i u Samarytan z tą tylko osobliwością, że zmniejszanie się trzonowców nie jest stopniowe, jak u Europejczyków, lecz skokowe: M_1 jest znacznie większe niż M_2 , ten ostatni zaś od M_3 tak, że przy oglądaniu otrzymuje się wrażenie schodków.

Proces redukcji guzków na trzonowcach jest u Samarytan daleko posunięty: M_2 posiada 4 lub 3 guzki, M_3 przeważnie 3, jakkolwiek występują i formy 4-ro guzkowe, tylko u jednego osobnika na całą populację badaną, stwierdziłem na M_3 zaznaczony piąty guzek.

W 24% przypadków u mężczyzn, a w 12% u kobiet zęby mądrości nie wyklęły się zupełnie. U Europejczyków zdarza się to w 12% (Martin). Jak widzimy zmiany progresywne w uzębieniu są u Samarytan wybitne, szczególnie dotyczy to zębów trzonowych.

Stosunki ilościowe form zgryzu, występujących wśród naszej populacji ilustruje poniższa tabela:

T a b. XXI. Z g r y z.

	♂	♀
Stegodontja	24%	28%
Psalidodontja	16%	4%
Opistodontja	56%	68%
Orthodontja	—	—
Progenja	—	—
Hiatodontja	4%	—

Typową dla Samarytan jest zatem opistodontja. Przy tym zgryzie, ani brzeg sieczny, ani wargowa ściana dolnych siekaczy nie stykają się przy artykulacji z językową ścianą górnych siekaczy — jak to się dzieje przy stegodontji — lecz z brzegiem dziąsła górnych siekaczy (od strony podniebiennej). Często przy tej formie zgryzu artykulacja jest niezupełna tak, że przy zamknięciu ust powstaje szpalt między górnymi i dolnymi szerokości od 2—10 mm, długością sięgający od C do C, lub od P_1 do P_1 . Opistodontja występuje stosunkowo często u Chińczyków i Ja-

pończyków w 33%, u Malajczyków 18.9%, w Europie zdaje się być rzadkością: wśród Niemców — 1.2%, wśród Żydów polskich do 8%. Uderza zupełny prawie brak form patologicznych zgryzu, jak orthodontji (zgryz prosty) i progenji (które to formy u Żydów polskich sięgają 20%).

Cechy t. zw. degeneracyjne.

Cały szereg autorów, jak Schalmayer, Mayet, Feer, Kraus, Bayer, Martius, występuje przeciwko małżeństwom krewniaczym, wykazując, iż takie małżeństwa z konieczności prowadzą do zwyrodnienia fizycznego i umysłowego. Doświadczenie uczy, iż wśród dzieci rodziców spokrewnionych duży odsetek cierpi na idjotję, epilepsję, głuchoniemotę, retinitis pigmentosa, albinizm i inne. Eksperymentalnie dowiedziono, Baur na roślinach, Plate na wyższych zwierzętach, a ostatnio Crzellizer (*Biologische Folgen der Blutsverwandschaft. Zsch. f. Sexualwissenw. Febr. 1915*), iż krzyżówki pomiędzy blisko spokrewnionymi osobnikami nawet bez patogennych zawiązków, prowadzą po 10—20 generacjach do pogorszenia konstytucji i płodności. Samarytanie, wśród których małżeństwa krewniacze mają miejsce od setek lat, tak że obecnie wszyscy są ze sobą wielokrotnie spokrewnieni, mogą służyć jako klasyczne potwierdzenie badań, o których była mowa poprzednio. Wśród Samarytan spostrzegłem mnóstwo cech, które imponują jako objawy degeneracji fizycznej i umysłowej.

Przedewszystkiem więc:

1. Znaczne obniżenie płodności:

Tab. XXII.

Małżeństw nieplodnych 3 na 28 zbadanych t. j.	10.7%
3 małżeństwa po 1 dziecku mające	„ 10.7%
5 „ „ 2 dzieci „	„ 18%
4 „ „ 3 dzieci „	„ 14.4%
4 „ „ 4 dzieci „	„ 14.4%
10 „ powyżej 4 dzieci „	„ 32.4%

T a b. XXIII.

Początek menstruacji	%
12 rok życia	9
13 „ „	9
14 „ „	27
15 „ „	36
16 „ „	9
17 „ „	5
18 „ „	—
19 „ „	—
20 „ „	5

Blisko połowa małżeństw ma mniej jak 4-oro dzieci w tem 10.7% bezpłodnych, jakkolwiek żyją już wiele lat po ślubie. Przytem zbytecznem jest podkreślać jak bardzo Samarytanom zależy na licznej potomstwie.

2. Zwyrondnienie gruczołów płciowych kobiecych (prawdopodobnie brak należytego rozwoju pęcherzyków Graafa), objawiające się bardzo późnym jak na stosunki podzwrotnikowe występowaniem menstruacji.

Średnio początek menstruacji przypada na koniec 15 roku życia (14 lat 8 mies.); jednak powyżej 15-ego roku — 18% Samarytanek. Niektóre dopiero w 18-ym i 20-ym roku życia. Żydówki ze wschodniej Europy — 13 l. 2 mies., a urodzone w Ameryce 12 l. i 1 mies. Koniec menstruacji przypada na 55 rok życia.

3. Wczesne siwienie i łysienie zarówno wśród mężczyzn jak i kobiet.

4. Znaczna ilość martwych płodów.

5. Znaczny odsetek umysłowo chorych.

6. Znaczny odsetek głuchoniemych dzieci od urodzenia.

7. Osłabienie konstytucji fizycznej, wyrażające się w ogromnej śmiertelności wśród dzieci, dochodzącej do 51.5% wśród chłopców, a 50% wśród dziewcząt. (Z pośród 64 noworodków męskich zmarło 31, a 42 żeńskich — 21).

8. Zastanawiająca jest również znaczna przewaga urodzeń chłopców, która występuje jak wykazują statystyki czasu wojny, głodu i ogólnego upadku sił fizycznych.

Niektóre z wymienionych spostrzeżeń szczególnie w punktach 2), 3) i 4), gdzie mowa o wyłysieniu, które nosiło charakter

alopecia syphilitica (wysepkowate) mogłoby nasunąć przypuszczenie, iż są to zmiany związane z kiłą wrodzoną; jednak brak zębów Hutchinsona i danych dotyczących reakcji Wassermana z jednej, a wyniki doświadczeń (Crzelizer) z drugiej strony przemawiają za tem, iż w tym wypadku mamy do czynienia ze zwyrodnieniem spowodowanym zawieraniem przez liczne pokolenia małżeństwami krewniaczemi.

WNIOSKI.

Badania, przeprowadzone na Samarytanach płci obojga, porównane z rezultatami na Żydach aszkenazyjskich i spanjolskich, prowadzą do następujących wniosków natury ogólnobologicznej i antropologicznej:

I. Ogólnobologiczne rezultaty:

1. Znaczny wpływ wieku, znajdujący swój wyraz w dużych różnicach między dorosłymi Samarytanami i ich dziećmi.

2. Wyraźny dimorfizm płciowy na skutek którego samarytanka są znacznie niższego wzrostu, bardziej rudo — i falistowłose, ciemnoookie, w silniejszym stopniu krótkogłowe, szeroko-twarzowe i wąskonose od Samarytan.

3. Zwyrodnienie fizyczne i psychiczne prawdopodobnie jako rezultat małżeństw krewniaczych.

II. Rezultaty antropologiczne:

1. Pod względem przeważającej ilości cech antropologicznych Samarytanie zbliżają się do Żydów spanjolskich, a znacznie się różnią od aszkenazyjskich.

2. Wśród Samarytan występuje najczęściej typ średnio lub wysokogłowy, średniogłowy, ciemno pigmentowany, średniotwarzowy, o nosie wypukłym lub prostym, o wargach miernych lub grubych.

Sporadycznie spotykany jest element jasnooki.

Na zakończenie pozwalam sobie wyrazić szczerze podziękowanie pani doktor D. Lipcównie za kierownictwo w pracy powyższej oraz panom profesorom E. Lothowi i K. Stołyhwie za cenne wskazówki. Wreszcie panom dr. Z. Bychowskiemu i dr. A. Ruppinowi za ułatwienia przy uzyskaniu materiału.



Kapłan samarytański



Dziewczeta samarytańskie



Wielki Kapłan



Samarytanka

POMIARY NA SAMARYTANACH.

	M Ę Ż C Z Y Z N I					K O B I E T Y					D(M-M ₁)± ± E(DM)
	M ± m	σ	v	V	M ₁ ± m ₁	σ ₁	v ₁	V ₁			
Wzrost	171.07±0.85	6.52	3.8	153.2-188.5	156.11±0.58	4.48	2.87	146.8-168.2	14.95±1.02		
Długość głowy	191.07±0.87	6.64	3.5	175-204	179.96±0.87	6.84	3.8	165-195	11.11±1.22		
Szerokość głowy	148.40±0.64	4.97	3.3	138-160	145.25±0.77	6.0	4.1	134-159	3.15±1.0		
Wysokość głowy	127.03±0.67	5.22	4.1	116-158	119.11±0.6	5.11	4.3	111-130	7.92±0.89		
Obwód głowy	54.7±0.31	1.6	2.9	51.5-57.8	52.94±0.15	1.16	2.18	50.0-55.0	1.78±0.35		
Szerokość czoła min.	104.3±0.65	5.07	4.8	95-118	100.15±0.69	5.35	5.3	89-111	4.15±0.95		
Szerokość twarzy	138.85±0.79	6.17	4.6	122-147	126.44±0.85	4.46	3.5	117-136	7.41±1.14		
Odległ. kątów zewn. oczu	93.11±0.55	4.3	4.6	82-100	88.30±0.65	5.06	5.7	79-98	4.81±0.85		
Odległ. kątów wew. oczu	30.63±0.41	3.21	10.5	21-36	30.29±0.34	2.69	8.8	26-33	0.34±0.53		
Szerokość nosa	37.77±0.54	2.81	7.4	34-46	32.30±0.5	2.56	7.9	28-37	5.47±0.72		
Wysokość nosa	54.33±0.45	3.58	6.6	49-63	48.26±0.45	3.56	7.3	41-58	3.26±0.58		
Długość nosa	52.0±0.52	4.1	7.8	45-63	51.07±0.37	2.86	5.6	44-58	3.74±0.68		
Wypukłość nosa	20.55±0.29	2.28	11.06	17-25	19.4±0.24	1.9	9.7	16-25	1.15±0.37		
Szerokość szpary ustnej	52.55±0.62	3.25	6.1	47-60	50.37±0.45	3.49	6.9	42-57	2.18±0.76		
Wysokość ucha rzeczc.	66.18±0.66	5.15	7.7	57-79	61.48±0.54	4.1	6.6	55-72	4.70±0.85		
Szerokość ucha "	36.9±0.37	2.9	7.8	32-44	35.48±0.41	3.23	9.1	29-43	1.42±0.55		
Wysokość twarzy	120.0±0.94	7.26	6.05	106-132	109.51±0.73	5.86	5.3	99-123	10.49±1.18		
Wskaźnik głowny	77.64±0.43	3.28	4.22	71.87-85.71	80.84±0.68	5.28	6.53	72.30-92.35	3.20±0.8		
Wsk. wysok.-dług. głowy	66.40±0.33	2.56	3.85	59.90-72.22	66.21±0.46	3.57	5.39	60.52-73.93	0.19±0.57		
Wsk. morf. twarzy	89.70±0.65	5.05	5.62	81.61-100.81	86.61±0.48	3.71	4.26	79.60-90.09	3.09±0.81		
Wsk. nosowy	69.87±0.95	7.31	10.46	57.14-86.79	63.31±0.59	4.48	7.07	54.90-70.83	6.56±1.14		
Wsk. uszny	55.93±0.61	4.24	7.58	47.82-66.1	57.77±0.57	4.37	7.56	48.61-68.25	1.84±0.83		
Wsk. wysok.-szer. głowy	85.72±0.46	3.59	4.2	77.33-92.47	82.01±0.52	4.04	4.9	73.38-91.37	3.71±0.69		
Wsk. czołowo-licowy	77.98±0.42	3.3	4.23	72.79-85.44	79.17±0.36	2.8	3.5	73.55-85.37	1.19±0.55		

H. Szpidbaum.

Samaritaner in Anthropologischer Beziehung.

Der Verfasser stellt in der obigen Arbeit die Resultate seiner anthropologischen Untersuchungen an dem aussterbenden Stamm der Samaritaner, der die Stadt Nablus in Palästina bewohnt, zusammen. Es wurde beinah der ganze Stamm untersucht (94 Individuen beiderlei Geschlechts). Aus der Zusammenstellung der deskriptiven und somatometrischen Merkmale folgt, dass bei den Samaritanern am häufigsten folgender Typus hervortritt: mittelwüchsig, dunkeläugig und dunkelhaarig, dolicho — oder mesocephal, lepto oder mesoprosop, lepto — oder mesorrhin, mit einer mandelförmigen Augenspalte, geraden oder konvexen Nasenprofil, mittelmässigen oder dicken Lippen. Ausser diesen Typus wird auch ein dunkelpigmentiertes brachycephales Element angetroffen. Das einzige hellhaarige und hellhäugige Individuum war von mittlerer Statur und mesocephal.

Die Frauen sind bedeutend kleiner, mehr brachycephal und leptorrhin. Die samaritanische Kinder sind viel heller pigmentiert und nur sie weisen konkave Nasen auf.

Aus dem Vergleich der Samaritaner mit anderen jüdischen Gruppen folgt, dass die Samaritaner in Bezug auf fast alle anthropologischen Merkmale (mit Ausnahme der Körpergrösse) den spaniolischen Juden (Wagenseil) am nächsten stehen und stark von den polnischen Juden (Lipiec) differieren.

Es ist bemerkenswert, dass eine ganze Reihe von physischen und psychischen Degenerationsmerkmalen bei den Samaritaner eine häufige Erscheinung ist; der Verfasser will die letzte als Folge der Verwandtenehen, die unter den Samaritanern seit Jahrhunderten geschlossen werden, ansehen.

PIŚMIENICTWO.

- Bunak. Raboty A. D. Elkinda i. t. d. Ruskij antrop. žurnal. T. II. 1922.
Czekanowski J. Zarys metod statystycznych. Warszawa, 1913.
Czuber E. Die statistischen Forschungsmethoden. Wien, 1921.
Davenport. Inheritance of Stature, Cold Spies. Harbor, 1917.
Elkind A. D. Jewreji. Moskwa, 1903.
Judt M. Żydzi jako rasa fizyczna.

- Fishberg M. Die Rassenmerkmale der Juden.
Fischer E. Rehbother Bastards.
Lipiec D. Les traits du visage juif, Congrès de Prague, 1926.
Huxley H. M. The Samaritans, Jewish Encyclopedia.
Loth E. Wskazówki do badań antropologicznych. Warszawa, 1914.
Martin R. Lehrbuch d. Anthropologie. Jena 1914.
Wagenseil F. Beiträge zur physischen Anthropologie d. spaniolischen Juden
und zur jüdischen Rassenfrage, Zsch. f. Morph. n. Anth. Bd. XXIII.
Weissenberg S. Die autochtone Bevölkerung Palästinas in anthropogischen
Beziehung, Zsch. f. Demographien. Statistik d. Juden V Jhg. 1909.
Weninger J. Die physisch-antropologischen Merkmale der vorderasiatischen
Rasse usw., Wien 1920.

Tu podałem tylko spis dzieł, które zużytkowałem przy pisaniu niniejszej pracy.

Józef Grzybowski.

O kostnym namiocie mózdzku.

(*Tentorium cerebelli osseum*).

(przedstawił E. Loth, na posiedzeniu III wydz. dn. 11.XI 1926 r.).

W piśmiennictwie anatomicznem niezwykle mało uwagi udzielono badaniom nad kostnym namiotem mózdzku.

Tentorium osseum jest ciekawe z punktu widzenia filogenetycznego i, jak się zdaje, ma ono znaczenie dla pojmowania filogenezy czaszki.

O istnieniu kostnego namiotu mózdzkowego u zwierząt wiadomo już od dawna. Krótkie wzmianki o tem znajdujemy u Meckla i Josephi (Gruber 2), inni autorzy poprzestają na stwierdzeniu li tylko obecności tego organu.

Pierwsze i jedyne gruntowniejsze badania z tego zakresu wykonał Gruber (1859 r.). On też pierwszy stwierdził obecność śladów kostnego namiotu mózdzkowego u człowieka.

Główną uwagę skierowuje Gruber na to, aby odróżnić kostny namiot mózdzku od innych wyrosły kostnych na górnej krawędzi piramidy kości skalistej, a w szczególności od t. zw. „*vagina nervi trigemini*” i jej pozostałości.

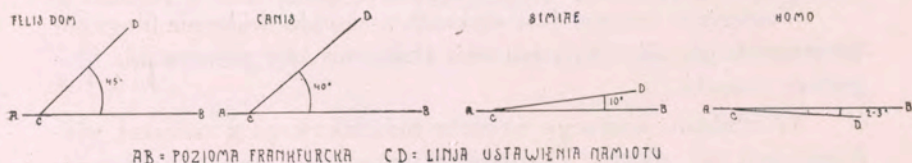
Na dwóch czaszkach małpich (*Cebus apella* i *Lemur rufiventris*) Gruber stwierdził na grzebieniu kości skalistej wyrostki, które on określa jako „*starke Spuren eines dem Felsenbeinrande angehörigen Tentorium osseum...*” (Gruber st. 13). Wyrostki te znajdowały się na zewnątrz od wcięcia dla n. trójdzielnego.

Na czaszkach innych zwierząt Gruber bardzo niechętnie zalicza do *tentorium osseum* wyrostki na grzebieniu kości skalistej.

A więc, opisując kostny namiot psa Gruber zwraca uwagę na to, że płytki kostne, wyrastające od piramidy kości skalistej, nie można uważać za część *tentorium osseum* (... *der scharfe und sehr vorspringende Theil des oberen Felsenbeinrandes... kan wohl nicht als Spur eines dritten und vom Felsenbeine kommenden Theiles des Tent. osseum angesehen werden...*) Płytki te mogą być, zdaniem Grubera, przedłużeniem górnej krawędzi piramidy, lub blaszki kostnej, pokrywającej górnoprzodną powierzchnię piramidy kości skalistej na zewnątrz od wcięcia dla n. trójdzielnego,

lub nawet, zwyczajnem przedłużeniem wyrostka odgraniczającego to wcięcie od zewnątrz (*processus lateralis vaginae n. trigemini*).

Podług Grubera kostny namiot mózdzku zazwyczaj rozpoczyna się od kości sąsiednich — potylicznej i ciemieniowej, może się wydłużać w kierunku przednim, przykrywając część zewnętrzną piramidy kości skalistej, może dochodzić nawet do dużych skrzydeł kości klinowej i łuski kości ciemieniowej.



Rys. 1.

Po za Grubera w dostępnem mi piśmiennictwie nie znalazłem dokładniejszych badań nad *tentorium osseum*. Organ ten nie jest zbadany nawet na czaszkach małpich, pomimo omyłkowego (patrz niżej) twierdzenia Josephi, jakoby kostny namiot mózdzku u małp był zjawiskiem nader rzadkiem (Gruber, str. 13).

Moje badania opieram na 435 zbadanych czaszkach małpich, znajdujących się w paryskim „*Museum d'Histoire naturelle*” w „*Laboratoire d'Anatomie comparée*”, oraz na zbadanych czaszkach zwierząt z Zakładu Anatomii Opisowej i Zakładu Anatomii Porównawczej Uniwersytetu Warszawskiego.

W przeciwieństwie do Grubera, z niżej podanych względów, za *tentorium osseum*, lub jego ślady uważałem wszystkie wyrosłe kostne rozpoczynające się od krawędzi piramidy kości skalistej na zewnątrz od wcięcia dla n. trójdzielnego i podążające w kierunku tylnym dla przykrycia jamy mózdzkowej, oraz wyrosłe kostne, przykrywające wspomnianą jamę, lecz pochodzące od kości potylicznej lub ciemieniowej. Wyniki moich badań na czaszkach małpich były następujące:

R O D Z A J		Ogólna ilość zbadanych czaszek	Brak <i>tentorium</i> <i>osseum</i>	Obečne <i>tentorium</i> <i>osseum</i>	$\frac{0}{0}$ obecne	
Prosimiae	Fam. Lemnures	Brachiteles	2	—	2	100 $\frac{0}{0}$
		Ateles	10	—	10	100 $\frac{0}{0}$
		Perodicticus Potto	2	1	1	50 $\frac{0}{0}$
		Nycticebus	5	5	—	0 $\frac{0}{0}$
		Nyctipithecus	1	—	1	100 $\frac{0}{0}$
		Propithecus	2	2	—	0 $\frac{0}{0}$
		Chirogale	2	1	1	50 $\frac{0}{0}$
		Hapalemur	1	1	—	0 $\frac{0}{0}$
		Lemur	30	11	19	63 $\frac{0}{0}$
Platyrrhina	Fam. Hapalidae	Hapale	8	2	6	75 $\frac{0}{0}$
	Fam. Cebidae	Chrisotrix	6	6	—	0 $\frac{0}{0}$
		Cebus	50	15	35	70 $\frac{0}{0}$
Catarrhina	Subfam. Cercopithecinae	Cynocephalus	46	44	2	4 $\frac{0}{0}$
		Cercocebus	7	7	—	0 $\frac{0}{0}$
		Macacus	121	121	—	0 $\frac{0}{0}$
		Cercopithecus	71	69	2	3 $\frac{0}{0}$
	Subfam. Semnopithecinae	Semnopithecus	30	30	—	0 $\frac{0}{0}$
Anthropomorphae	Subfam. Hylobatidae	Hylobates	10	10	—	0 $\frac{0}{0}$
	Subfam. Anthropomorphae	Orang - Utan	5	5	—	0 $\frac{0}{0}$
		Gorilla gina	14	14	—	0 $\frac{0}{0}$
		Chimpanse	12	12	—	0 $\frac{0}{0}$
<u>Z E S T A W I E N I E:</u>						
	Prosimiae	55	21	34	62 $\frac{0}{0}$	
	Platyrrhina	64	23	41	64 $\frac{0}{0}$	
	Catarrhina	245	241	4	1 $\frac{0}{0}$	
	Anthropomorphae	71	71	0	0 $\frac{0}{0}$	

Jak widać z powyższego zestawienia, twierdzenie Josephi, jakoby kostny namiot mózdzku u małp był zjawiskiem rzadkiem, jest mylne, przeciwnie, istnieje szereg gatunków, u których *tentorium osseum* spotyka się w 50% przypadków, lub nawet jeszcze częściej.

Kostny namiot mózdzku na czaszkach małpich jest stale jednego typu. Rozpoczyna się (na czaszkach już skostniałych) od górnej krawędzi piramidy kości skalistej, przykrywając zatokę skalistą górną i, na mniejszej, lub większej przestrzeni, jamę mózdkową. Różnica w kostnych namiotach małp zachodzi li tylko w wielkości blaszek kostnych. Pod tym względem można obserwować cały szereg form przejściowych.

Najbardziej rozrosły kostny namiot odpowiada wielkością namiotowi opony twardej i przykrywa całkowicie jamę mózdkową, pozostawiając tylko otwór dla trzonu mózgu, dochodząc aż do guzowatości potylicy.

Taką formę kompletnego kostnego namiotu stwierdziłem we wszystkich przypadkach rodzaju *Ateles*, *Brachiteles*, *Nyctipithecus*, u jednego *Lemura*, oraz u 11 małp z rodziny *Cebus* (22%). (Tabl. I, II Rys. 1, 2 i 3).

Namioty kostne mniej wykształcone u małp wyższych (*Cebus*, *Cynocephalus*) są częstokroć grubsze i posiadają brzegi bardziej tępe. Zwraca uwagę, że u małp wązkonosych i szerokonosych, w razie gdy one nie posiadają kostnego namiotu mózdzku, krawędź piramidy jest bardzo ostra, gdy tymczasem u gibbonów i małp człekokształtnych omawiana krawędź jest zazwyczaj zaokrąglona.

Sąsiednie kości, jak to — kość potyliczna, ciemienna i łuska kości skroniowej nie biorą udziału w tworzeniu kostnego namiotu mózdkowego u małp; tylko w okolicy nasady piramidy namiot kostny jest połączony z kośćmi sąsiednimi za pośrednictwem szwu.

Przy dokładnem obejrzeniu blaszek kostnych namiotu można z łatwością spostrzedz, że nie kończą się one przy krawędzi piramidy, lecz pokrywają jej górno-przednią powierzchnię i ześlizgują się ku przodowi, do środkowej jamy czaszkowej, tworząc, niejako, częściowe pokrycie dla ujść nerwów skalistych i zwoju *Gassera*, zaś nazewnątrz zespalają się z łuską kości skroniowej i skrzydłami dużymi kości klinowej.

Odmienny rodzaj namiotu mózdkowego posiadają inne ssaki. Z dostępnych moim badaniom zwierząt, kostny namiot mózdku stwierdziłem u następujących:

Carnivora: *Nasua socialis*, *Mustela martes*, *Viverra malouensis*, *Herpestus poludosus*, *Hyaena striata*, *Lynx cervarius*, *Lutra vulgaris*, *Galictis barbara*, *Meles taxus*, *Canis domest.*, *Canis vulpes*, *Felis pardalis*, *Felis domest.*, *Felis tigris*, *Otaria*, *Ursus*, *Lupus*, *Mustela zibellinus*, *Enhydris marina*.

Rodentia: *Lepus singapora*.

Ungulata: *Equus caballus*, *Dicotyles labiatus*, *Sus scropha*.

U wszystkich tych zwierząt można z łatwością spostrzedz dwa różnorodne typy kostnego namiotu.

Typ pierwszy, najlepiej wykształcony, przedstawia się w postaci podkowy, której końce wolne opierają się o zewnętrzną część piramidy kości skalistej, a część wypukła o guzowatość wewnętrzną potylicy. W ten sposób, namiot kostny rozpoczyna się od kości potylicznej, ciemiennych i zrasta się z piramidą kości skalistej. Części pochodzące od różnych kości są na czaszce dorosłej zrośnięte ze sobą, tworząc jedną całość.

Typowym przedstawicielem posiadającym podkowiasty kształt namiotu mózdkowego jest kot (*Felis domestica*). Na czaszce miesięcznego kociaka kostny namiot już przedstawia jedną całość bez widocznych szwów. Można obserwować, że część przytwierdzona do piramidy kości skalistej jest jak gdyby na nią nałożona. W sposób podobny jak to wyżej opisałem u małp, przechodzi ona na przednio-górną powierzchnię piramidy, opuszcza się do środkowej jamy czaszki, dochodząc do łuski kości skroniowej i do skrzydeł dużych kości klinowej.

Typ drugi namiotu kostnego znajdujemy u psa. Został on dokładnie opisany przez Grubera. Podkreślę tylko, że część potyliczna łączy się z częściami ciemiennymi, te zaś nie łączą się z blaszką pochodzącą od piramidy kości skalistej. Tą blaszkę Gruber nie zalicza w skład kostnego namiotu, odróżniając w namiocie psa tylko trzy części: potyliczną i dwie ciemieniowe.

Przeoglądając szereg czaszek różnych zwierząt, małp i człowieka, można z łatwością spostrzedz, że potyliczny przyczep namiotu mózdkowego w szeregu filogenetycznym obsuwa się ku dołowi, i jednocześnie cały namiot mózdku zajmuje coraz bardziej poziome ustawienie. W sto-

sunku do linii poziomej frankfurckiej, linja namiotu (łącząca przyczep potyliczny namiotu z przyczepami przy siodelku) stanowi u kota kąt rozwarty ku górze około $+45^0$, u psa — około $+40^0$, u małp niższych około $+10^0$, u człowieka stanowią omawiane linje kąt rozwarty ku dołowi, wielkości $-2-3^0$. (rys. 1 w tekście.)

Obsunięcie się potylicznego przyczepu namiotu mózdkowego stoi w zależności od rozrostu potylicznych płatów mózgu.

Jeżeli można trzy wyżej podane typy kostnego namiotu mózdkowego powiązać w jedną całość filogenetyczną i rozpatrywać je jako formy przejściowe tego samego organu, należało by odmienne formy namiotu kostnego postawić w ścisły związek z obsuwaniem się namiotu mózdkowego.

Jeśli stać na tym stanowisku, to namiot o kształcie podkowistym należało by uważać za formę prymitywną. Bardziej postępową formą byłby namiot typu psa, gdzie części pochodzące od kości skalistej są mocne i dobrze wykształcone, natomiast, części pochodzące od potylicy i kości ciemieniowych są bezporównania skłabsze, cieńsze, częstokroć siateczkowato podziurawione i utraciły związek z częściami pochodzącymi od piramid.

Bardziej progresywnym typem kostnego namiotu jest namiot małpi. Mamy tu całkowity zanik części potylicznej i ciemieniowych, natomiast, blaszki wyrastające od piramid kości skalistych wybitnie się rozrastają, być może dla podtrzymania szybko rozrastających się u małp płatów potylicznych mózgu. U małp wyższych następuje skrócenie się namiotu kostnego (Tabl. II rys. 3) aż do zachowania się tylko zaostzonego brzegu piramidy, wreszcie u człekokształtnych i u człowieka i ten brzeg się zaokrągla, pozostawiając tylko niekiedy przypadkowe ślady kostnego namiotu mózdku w postaci małych wyrosli.

Gruber miał wątpliwości co do zaliczenia do *tentorium osseum* blaszek kostnych pochodzących od piramid u psa. Niżej podkreślam, że omawiane blaszki u psa, sądząc z rozwoju, są niezależne od pochwy n. trójdzielnego, (*vagina n. trigemini*) i rozwijają się z chrząstek samodzielnych, ułożonych o wiele na zewnątrz od wcięcia dla n. trójdzielnego, zaś przy zewnętrznym brzegu, *incisurae n. trigemini* znajduje się inna chrząstka z której to rozwija się wyrostek zewnętrzny stanowiący pochwę n. trójdzielnego. A zatem blaszka kostna pochodząca od piramidy

u psa nie jest wydłużoną krawędzią piramidy, ani wybujałym *processus externus vaginae n. trigemini*, jak so sądził Gruber (patrz wyżej).

Z tego powodu uważam omawianą płytkę kostną za twór homologiczny z namiotem kostnym u małp i z tą częścią namiotu podkowiastego, która pokrywa piramidę.

Przechodząc do rozpatrzenia sprawy co może oznaczać namiot kostny mózdzku, chciałbym zaznaczyć, że odpowiedź, na to pytanie jest trudna, chociażby ze względu na nieznaną jeszcze definitywnie filogenezę czaszki.

Na to pytanie nie znalazłem odpowiedzi w piśmiennictwie. Tylko Merkel (5 str. 62) słusznie podkreśla ścisły związek kostnego namiotu mózdzku ze szkieletem czaszki, zaznaczając, że jest to organ kostny, a nie zwapniały.

Również Fischer (3, str. 389) zlekka dotyka tej kwestji, zapytując, czy, przypadkiem, kostny namiot nie jest „*eine Parallelform*“ do grzbietu siodelka tureckiego, lecz dalej sam powstaje przeciwko tej myśli (str. 389).

Wydaje mi się, że chcąc wyjaśnić, choć trochę, omawianą kwestję, należało by stwierdzić, jakie znaczenie wogóle ma namiot mózdzku. Ogólnie wśród anatomów panuje zdanie, że jednym z głównych zadań namiotu mózdzku jest podtrzymywanie płatów potylicznych. Przypuszczam, że namiot istotnie posiada tą ważną czynność lecz nie u wszystkich zwierząt. Zwierzęta czworonożne posiadają namiot, którego kierunek, w normalnem ustawieniu głowy, zbliża się do płaszczyzny pionowej. W tych warunkach nie może być mowy o podtrzymywaniu płatów potylicznych, a tymczasem właśnie u czworonożnych namiot mózdzku zyskuje niezwykle trwałą podstawę w postaci szkieletu kostnego.

Prawdopodobnie czynność podtrzymywania mózgu przez namiot została nabyta w miarę rozrostu płatów potylicznych, rozrostu części potylicznej czaszki i przesunięcia się otworu potylicznego ku przodowi.

Mam wrażenie, że musimy się zwrócić do filogenezy czaszki. Część skalista namiotu kostnego znajduje się w okolicy granicy praczaszki („*paleocranium*“ i „*neocranium*“ podług terminologii Froiepa.)

Granica tych dwóch części jest zatarta i tylko w okolicy nasady siodełka tureckiego i krawędzi piramidy kości skalistej na czaszkach płodów różnych zwierząt stwierdzono ślady granicy dawnej czaszki (*primäre Schädelswand*“).

Za resztki dawnej bocznej ściany czaszki przyjmują G a u p p (1900, str. 540) *Pila prootica* na czaszce *Lacerta agilis*; ma ona odpowiadać *processus clinoides posterior* ssaków.

M. Voit (1906) stwierdził na czaszce płodu królika trzy chrząstki: „*Restknorpel a, b i c*“. „*Restknorpel b*“ znajduje się w miejscu wcięcia dla n. trójdzielnego i ma odpowiadać *pila prootica* na czaszce *Lacerta agilis* (str. 548). „*Restknorpel a*“ znajduje się bardziej nazewnątrz od *incisura n. trigemini*. Wszystkie trzy wymienione chrząstki szczątkowe (Tabl. II rys. 4) Voit uważa za pozostałość bocznej ściany dawnej czaszki. Również pozostałością bocznej ściany jest *crista transversa* na grzbiecie siodełka (Voit, str. 548).

Toeplitz (Matthes 1921) stwierdził u *Dydelphys* podobną chrząstkę w postaci laseczki (str. 854); chrząstka ta sięgała aż do *commisura suprafacialis* i ma odpowiadać „*Restknorpel a*“ Voit'a. Na czaszkach płodów starszych chrząstki te znikają.

Terry (Matthes 1921 str. 906) stwierdził na czaszkach płodów kocich wyraźną granicę dawnej czaszki w postaci błony łącznotkankowej, przebiegającej od *commisura orbito-facialis*, poprzez *commisura suprafacialis* do *crista transversa* i stąd ku przodowi z boku od siodełka tureckiego. Prócz tego, od *crista transversa* odbiegały pasma łącznotkankowe w kierunku ujścia n. odwodzącego, aż do pnia n. trójdzielnego. Na czaszkach płodów starszych w tych pasmach łącznotkankowych znajdowały się chrząstki, które Terry identyfikuje z „*Rostknorpel b*“ Voit'a (Matthes str. 906). Od *crista transversa* odbiegały silne więzy łącznotkankowe do *septum transversum* i wciskały się poprzecznie w przestrzeń pomiędzy *diencephalon* i *mesencephalon*. Nawiasem mówiąc ta przegroda podobna jest do namiotu mózdkowego.

Mnie się również udało stwierdzić na czaszkach nowonarodzonych szczeniaków dwie chrząstki przy górnej krawędzi piramidy kości skalistej. Jedna znajdowała się przy zewnętrznym brzegu wcięcia dla n. trójdzielnego, druga bardziej nazewnątrz.

Na szczeniakach czterotygodniowych obie chrząstki były zlane ze sobą.

Prawdopodobnie druga z tych chrząstek odpowiada pojęciu „*Restknorpel a*“ Voit'a.

Przypuszczam, że część kostnego namiotu mózdzku, rozpoczynająca się od piramidy kości skalistej, rozwija się z opisanej chrząstki zewnętrznej, zaś chrząstka wewnętrzna rozwija się w pochwę n. trójdzielnego (*vagina n. trigemini*) i *processus lateralis vaginae* (Gruber).

Gdyby przypuszczenie moje istotnie odpowiadało rzeczywistości, można by było przyjąć, że część skalista kostnego namiotu mózdzku psa rozwija się z chrząstki odpowiadającej „*Restknorpel a*“ Voit'a i, prawdopodobnie, błonie łącznotkankowej Terry u kota, respective tej części, która się znajduje na zewnątrz od wcięcia dla n. trójdzielnego.

J. Grzybowski.

De la tente osseuse du cervelet chez les Primates.

Résumé.

L'auteur a examiné au Museum d'Histoire naturelle à Paris et à Varsovie 435 crânes de singes et un certain nombre de crânes d'animaux.

Il existe parmi les Prosimiens des espèces nombreuses qui possèdent une tente osseuse du cervelet dans 50—100% des cas.

L'auteur constate trois types différents de la tente osseuse. Le type le plus développé en forme de fer à cheval (chat), le deuxième type composé de trois parties séparées (chien), et le troisième type — une plaque osseuse venant de la pyramide et couvrant la fosse cérébrale postérieure (singes).

L'auteur considère les trois types décrits de la tente osseuse comme trois formes phylogéniques de ce même organe. La forme la plus progressive est celle du singe, elle est pourvue de parties provenant de l'occipital et du temporal sans doute par l'abaissement de la tente du cervelet qui devient, dans l'ordre phylogénique de plus en plus horizontale.

Quand à l'origine de la tente osseuse, l'auteur a constaté sur les crânes des chiens nouveau-nés deux cartilages au bord supérieur de la pyramide, l'un près de l'échancre du nerf tri-

jumeau, l'autre plus externe. Le cartilage externe ressemble au „*Restknorpel a*“ de Voit. N'est-il pas un cartilage homologue? Si cette supposition était juste, on aurait pu admettre, que la partie de la tente osseuse du chien, provenant de la pyramide, se développe d'un cartilage homologue au „*Restknorpel a*“ de Voit et probablement à la membrane conjonctive, que Terry a constaté chez le chat, ou, plus exactement, de sa partie qui se trouve à l'extérieur de l'échancrure du nerf trijumeau.

* * *

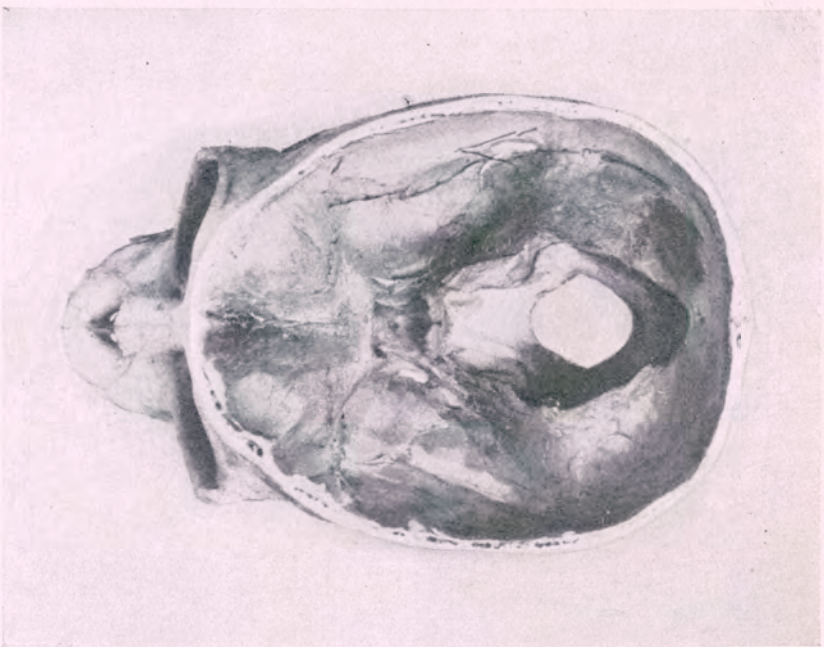
J'ai examiné à Paris, au Laboratoire de l'Anatomie comparée la plus grande partie des crânes de signes. Je tiens à exprimer mes remerciements sincères à M. le prof. R. Anthony, et à M. H. Neuville. Grâce à leur complaisance j'ai pu prendre mes notes.

PIŚMIENICTWO.

1. Gaupp E. Das Chondrocranium von *Lacerta agilis*. Anat. Hefte. H.49. 1900.
2. Gruber W. Menschliches Analogon der thierischen Vagina nervi Trigemini ossea am Felsenbeine. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersburg 1859.
3. Fischer E. Zur Entwicklungsgeschichte des Affenschädels. Zeitschr. f. Morph. und Anthrop. Ad. V. H. 3. 1900.
4. Matthes E. Neuere Arbeiten über das Primordialkranium der Säugetiere. Ergebn. der Anat. und Entwicklungsgeschichte B. 23. 1921.
5. Merkel F. Handbuch der Topogr. Anatomie. Bd. I. 1885—90.
6. Schwalbe G. Über das Gehirnrelief der Schlefengegend des menschlichen Schädels. Zeitschr. f. Morph. und Anthrop. Bd. 10. H. 1.
7. Voit M. Das Primordialkranium des Kaninchens unter Berücksichtigung der Deckknochen. Anat. Hefte. H. 116. 1906.
8. Voit M. Die Abducensbrücke beim Menschen, ein Rest der primären Schädeldwand. Anat. Anz. Bd. 52. N. 1. 2.

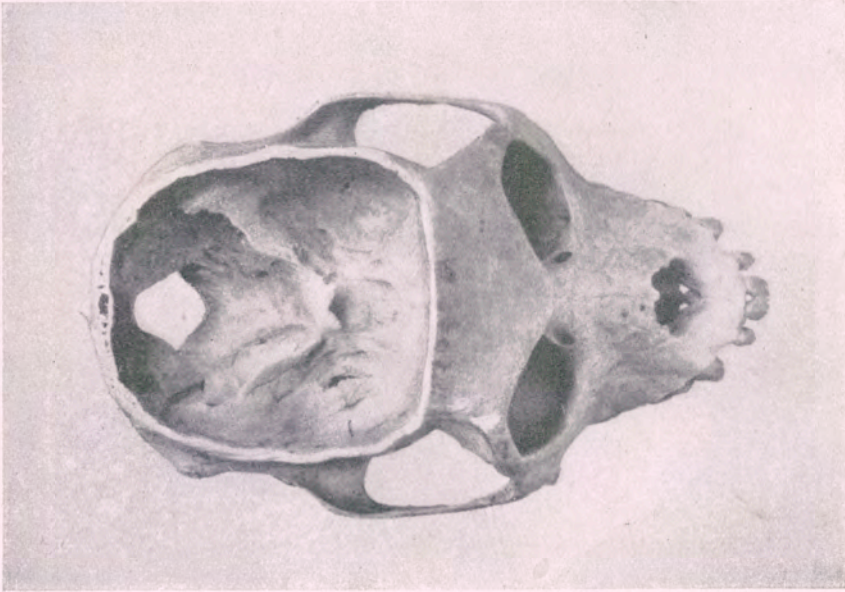


Rys. 1. *Ateles variegatus* Wag.
(Muséum d'Hist. Nat. Nr. 1886—107).

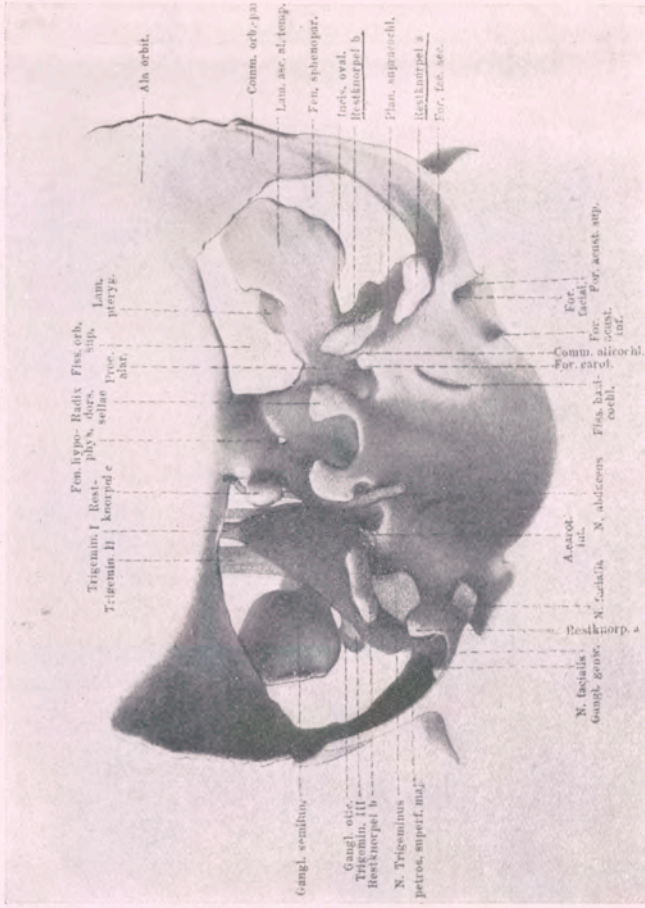


Rys. 2. *Cebus* (?)
(Muséum d'Hist. Nat. Nr. 1887—80).

TABLICA II.



Rys. 3. *Mycetes seniculus*
(Muséum d'Hist. Nat. Nr. 1880—1026).



Rys. 4. Rekonstrukcja części podstawy czaszki
plodu królika podług Voita.

Włodzimierz Chylewski

**Głowa łokciowa m. nawrotnego obłego
(m. pronator teres) w szeregu naczelnych.**

(przedstawił E. Loth, na posiedzeniu III wydz. dn. 11.XI 1926 r.).

Praca niniejsza ma na celu przedstawienie procentowej statystyki obecności głowy łokciowej m. nawrotnego obłego wśród naczelnych.

Jak wiadomo, głowa ta występuje niezawsze, i to nawet u człowieka i dlatego też początkowy mój zamiar ograniczenia się w mych badaniach do rodzaju *Homo sapiens Europeanus* — rozszerzyłem na inne ssaki, uwzględniając przede wszystkim i wyłączenie małpozwierze oraz małpy wyższe, jako stojące najbliżej człowieka.

Osiągnięte dane statystyczne pozwoliły mi wyciągnąć ciekawy wniosek, jakim jest przypisanie obecności głowy łokciowej m. nawrotnego obłego — cechy progresji rozwojowej.

W pracy swej korzystałem z materiału prosektoryjnego U. W., oraz kilkudziesięciu małp ze zbiorów prof. E. Lotha.

Materiał ten stanowią:

Małpozwierze (<i>Prosimiae</i>):	Lemur macaco	8	spozrzeżeń
Naczelne (<i>Primates</i>):	Macacus cynomolgus	6	„
	Semnopithecus entellus	2	„
	Hylobates syndactylus	10	„
(<i>Anthropoidea</i>):	Simia satyrus	2	„
	Troglodytes niger	2	„
	Homo Europeanus	100	„

Razem ze spostrzeżeniami innych autorów dało mi to możliwość przeprowadzenia statystyki, którą podaję w odnośnym miejscu tekstu.

Preparowałem zawsze po obu stronach i dlatego liczę każdą kończynę, jako jednostkę statystyczną. Co do innych autorów, to w tych razach, gdzie nie zaznaczono wyraźnie w jaki sposób prowadzono spostrzeżenia, na obu kończynach, czy na jednej, obliczam zbadaną małpę za 1 jednostkę statystyczną.

Wiadomo, że m. nawrotny obły u niektórych wyższych małp i u człowieka posiada dodatkowy przyczep górny głę-

boki, rozpoczynający się na bocznej stronie wyrostka dziobiastego kości łokciowej — zwany głową łokciową (*Caput ulnare, portio coronoidea*).

Ta część mięśnia, krótko po odejściu od wyrostka dziobiastego, łączy się z główną głową ramienną, powierzchowną — poczem już obie głowy przebiegają wspólnie.

Niezależność kompletna obu głów od początku aż po przyczep końcowy, bądź aż po wspólne ścięgno promieniowe, notowana była przez Albinusa, Theile'go, Soemmeringa, Meckel'a, Wood'a, Macalistera i przez Le Doubla (Nr. 24 str. 80).

Podział wspomnianej *portio coronoideae* na 2 części opisał: M. Macalister w 1868 r. i Kelly w 1870 r. (l. c).

W przypadku Macalistera — tętnica ramienna przechodziła między obydwoma pęczkami części łokciowej.

W przypadku Kelly'ego — podwójny pęczek łokciowy leżał poza n. pośrodkowym, z tyłu.

Brak głowy łokciowej stale występuje według Kohlbrugge'go (Nr 23 str. 78.): u rodzaju *Semnopithecus*, a także u innych małp, jak *Cebus capucinus*, *Cercopithecus*, *Macacus nemestrinus*, *Cynocephalus*; ja osobiście nie znajdowałem głowy łokciowej ani razu u:

<i>Lemur macaco</i> w	8 przypadkach
<i>Macacus cynomolgus</i> w	6 „
<i>Semnopithecus entellus</i> w	2 „

Kolster w swej pracy o m. nawrotnym obłym u ssaków (Nr 27 str. 782), zaznacza wszędzie brak głowy łokciowej, a po raz pierwszy opisuje ją dopiero u małp wyższych (szympanś l. c. str. 765).

Według Le Doubla (Nr. 24 str. 79) głowa łokciowa nie występuje u:

Cynocephalus anubis (Champneys), *Troglodytes Aubryi* (Alix, Gratiolet), *Gorilla gina* (Duvernoy, Chapman, Hepburn), *Hylobatidae* (Bischoff, Deniker, Hepburn) *Simia satyrus* (Testut).

W drabinie zoologicznej spotyka się po raz pierwszy ślad włókien mięsnych, odchodzących od wyrostka dziobiastego, lecz

nie oddzielonych wyraźnie od głowy ramiennej-u gibbonów (*Hylobatidae*).

Zdaniem Kohlbrugge'go (Nr 18 t I. str. 247) występują u rodzaju *Hylobates* 2 głowy, od kości ramiennej i od kości łokciowej, nie są one jednak od siebie oddzielone, tak, że n. p o s r o d k o w y, jak to jest regułą, nie przechodzi między nimi, lecz pod nimi. Według Kolstera (Nr 27 str. 783) ten gatunek ssaków stanowi wyjątek jedyny w swoim rodzaju. Jakkolwiek, ze względu na obecność tej głowy łokciowej, możnaby uważać gibbony za szczebel przejściowy od niższych małp do człekokształtnych, nie czynię, tego, pomny na zdanie Kohlbrugge'go (Nr 18 t II. str. 205), który w swej wyczerpującej pracy nad tym gatunkiem pisze, po uprzednim umotywowaniu:

... „ist dem g. *Hylobates* zwar eine Stellung zwischen Anthropomorphen und niederen Affen zuzuweisen, aber keineswegs darf er als ein Zwischenglied oder als Uebergangstufe betrachtet werden”.

Głowy więc łokciowa i ramienna u gibbonów nie są wyraźnie od siebie oddzielone, gdyż n. p o s r o d k o w y nie przechodzi między obydwiema głowami, lecz pod „głową łokciową”.

Piszę w cudzysłowie, gdyż właściwie jej niema t. j. nie daje się wyosobnić, jakkolwiek włókna mięsne, odchodzące od wyrostka dziobiastego niewątpliwie istnieją w pewnej liczbie przypadków.

I tak w 10 przezemnie zbadanych przypadkach z rodzaju *Hylobates syndactylus* stwierdziłem obecność włókien pęczka łokciowego trzykrotnie.

Kohlbrugge opisuje b. szczegółowo zachowanie się m. nawrotnego obłego u *genus Hylobates* a uwzględnia, aż 3 rodzaje: *Hylobates syndactylus*, *H. agilis*, *H. leuciscus*.

Poniżej przytaczam odnośny wyjątek z Kohlbrugge'go (Nr 18 t I. str. 248):

„M. pronator teres odchodzi od masy mięsnej zginaczy, a więc od kłykcia przyśrodkowego, a także od torebki stawowej. W dalszym ciągu otrzymuje włókna od kości łokciowej, od wyrostka dziobiastego, lecz te nie są oddzielone od pozostałej części mięśnia ani przez ścięgno m. brachialis internus, ani przez n. medianus.

Te same stosunki stwierdził Deniker“.

Z zestawienia różnych autorów, statystyka dla gibbonów przedstawia się, jak następuje:

	Ilość przypadków.	Obecna gł. łokc.
Kohlbrugge (Nr. 18 str. 148)	3	3
Deniker (Nr. 18 l. c Nr. 25 str. 105)	2	1
Bischoff (Nr. 25 str. 105)	1	0
Hepburn (Nr. 25 l. c)	1	0
Autor	$\frac{10}{17}$	$\frac{3}{7}$

co wynosi **41.1%**

Ugoryla Bischoffa (Nr. 27 str. 783) niema głowy łokciowej.

Zgodni z tym zdaniem są: Duvernoy, Chapman (Nr 25 str 105), Hepburn, (Nr 24 str. 79).

Widzieli ją natomiast u goryla Macalister, Deniker, Hepburn, Symington (Nr 25 str. 105). Kohlbrugge (Nr 23 str. 78) podaje 11 przypadków, z których 4 krotnie występowała głowa łokciowa, 6 — brak, 1 raz niepewne dane.

Własnych danych o *gorylu* nie posiadam wcale, gdyż nie rozporządzałem tym materiałem.

Opierając się na wspomnianych autorach obliczyłem dla *goryla*:

	Ilość przypadków.	Obecn. gł. łokc.
Bischoff (Nr. 27 str. 783)	1	0
Duvernoy (Nr. 24 str. 79)	1	0
Chapman (Nr. 24 l. c.)	1	0
Hepburn (Nr. 24 l. c.)	2	1
Macalister (Nr. 25 str. 105)	1	1
Deniker (Nr. 25 l. c.)	1	1
Symington (Nr. 25 l. c)	1	1
Kohlbrugge (Nr. 23 str. 78)	$\frac{10}{18}$	$\frac{4}{8}$

co wynosi **44.4%**

Orang-Utan Testut'a i Beddarda (Nr 25 str. 105) nie posiadali głowy łokciowej:

Inni autorzy jak Hepburn, Fick (Nr 25 l. c) twierdzą, że głowa ta istnieje.

Kohlbrugge (Nr 23 str. 78) na 6 spostrzeżeń u orang, podaje: 3 krotnie obecna głowa łokciowa, 1 raz nieobecna, 2 razy brak dokładnych danych.

W moich 2 przypadkach orang-utana stwierdziłem obecność głowy łokciowej.

Wypada więc:

	Ilość przyp.	Obecn. głowy łokc.
Testut (Nr 25 str 105)	1	0
Beddard (Nr l. c.)	1	0
Hepburn (Nr 25 l. c.)	1	1
Fick (Nr 25 l. c.)	1	1
Kohlbrugge (Nr 23 str 78)	4	3
Autor	<u>2</u>	<u>2</u>
	10	7

co wwnosi **70%**

Troglodytes niger. Zgodna opinia wszystkich autorów przypisuje temu rodzajowi szympansa obecność głowy łokciowej.

Co do innego rodzaju, a mianowicie *Troglodytes Aubryi*, to Alix i Gratiolet głowy łokciowej nie spotykali (Nr 24 str. 79) Kohlbrugge na 11 przypadków podaje: 10 krotnie obecność głowy łokciowej, 1 raz — brak.

Własnych spostrzeżeń dokonałem 8. Z tego 6 było przeprowadzonych swego czasu przez prof. Różyckiego, dlatego liczę tylko 2.

Dla szympansa więc stosunki przedstawiają się tak:

	Ilość przypadek.	Obecn. gł. łokc.
Macalister (Nr 15 str 434)	1	1
Champneys (Nr l. c str 434)	1	1
Humphry (Nr l. c. str 434)	1	1
Testut (Nr l. c. str 434)	1	1
Kolster (Nr 27 str 765)	1	1
Tyson (Nr 25 str 105)	1	1
Chapman (Nr l. c. str 105)	1	1
Hepburn (Nr l. c. str 105)	1	1
Symington (Nr l. c. str 105)	1	1
Beddard (Nr. l. c. str 105)	1	1
Dwight (Nr l. c. str 105)	1	1
Sperino (Nr l. c. str 105)	1	1
Kohlbrugge (Nr 23 str 78)	11	10
Różycki (Nr 29 str 3)	12	12
Vrolik (Nr 25 str 105)	1	0
Alix i Gratiolet (Nr l. c. str 105)	1	0
Macalister (Nr l. c. str 105)	1	0
Autor	<u>2</u>	<u>2</u>
	40	36

co wynosi 90%

Chapman pisze o szympansie: (Nr 27 str 766)... „In the forearm the pronator radii teres arose by two heads, the median nerve passing between them as in Man, whereas I found only one head in the Gorilla”.

A oto wyjątek z Hepburna (Nr 27 str 768)... „Pronator radii teres: In all this muscle was well developed, but in the Gorilla and Gibbon no coronoid head was found. In the Chimpanzee and Orang the coronoid head was well represented...”

Homo sapiens Europeanus. Posiadam własnych spostrzeżeń 100 (sto). Z tego raz jeden nie znalazłem głowy łokciowej, co wynosi 99% obecności tej głowy.

Należy jednak zaznaczyć, że w 3 przypadkach stwierdziłem, pomimo dobrze rozwiniętej ogólnej muskulatury, głowę łokciową, słabo zaznaczoną, wąską, płaską, lub półścięgnistą. Dwa osobniki były płci żeńskiej, 1 męskiej.

Reasumując otrzymujemy:

Małpozwierze (<i>Prosimiae</i>).	Liczba przyp.	% obec. gł. łokc.
<i>Galeopithecus volans</i> (Nr. 27 str. 752)	1	0%
<i>Lemur macaco</i> (Nr. 27 str. 753 i Autor)	9	0%

Szerokonose (*Platyrrhina*)

<i>Ateles Belzebub</i> (Nr. 27 str. 799)	1	0%
<i>Cebus capucinus</i> (Macalister, Höfer Nr. 23 str. 78)	2	0%
<i>Cebus spec?</i> (Nr. 27 str. 758)	1	0%

Wąskonose (*Catarrhina*)

<i>Cynocephalus</i> (Macalister, Höfer Nr. 23 str. 78)		
Champneys (Nr. 24 str. 79)	3	0%
<i>Papio anubis</i> (Nr. 27 str. 760)	1	0%
<i>Cercopithecus</i> (Macalister, Höfer Nr. 23 str. 78 oraz Nr. 27 str. 761)	3	0%
<i>Macacus</i> (Macalister, Höfer Nr. 23 str. 78, Kolster Nr. 27 str. 762-3 Autor)	10	0%

<i>Semnopithecus</i> (Kohlbrugge Nr. 23 str. 78 Kolster Nr. 27 str. 764. Autor)	4	0 $\frac{0}{0}$
Gibbony (<i>Hylobatidae</i>)	17	41,1 $\frac{0}{0}$
Człękokształtne (<i>Anthropoidea</i>)		
<i>Goryl</i>	18	44,4 $\frac{0}{0}$
<i>Orang-Utan</i>	10	70 $\frac{0}{0}$
<i>Szympan</i>	40	90 $\frac{0}{0}$
<i>Homo Europeus</i>	100	99 $\frac{0}{0}$

Wyciągając wnioski, moglibyśmy uważać obecność głowy łokciowej m. obłego nawrotnego za cechę progresywną.

Uderza jedynie porównanie stosunków u goryla i orang-utana. Goryla przyjęliśmy stawiać na wyższym szczeblu rozwoju niż orang; z powyższej zaś statystyki nad obecnością głowy łokciowej m. nawrotnego obłego, czemu ośmieliłem się przypisać cechę progresji — wynikałoby, że goryl w tym względzie ustąpił pierwszeństwa orang-utanowi.

Włodzimierz Chylewski.

Resumé.

Über das Vorkommen des *Caput ulnare* des *M. pronator teres* in der Primatenreihe.

Meine Untersuchungen befolgen den Zweck die Anwesenheit des *Caput ulnare* des *M. pronator teres* bei den Primaten und dem Menschen statistisch festzustellen.

Mein Material bestand aus:

Prosimiae:	<i>Lemur macaco</i>	8 Fälle
Primates:	<i>Macacus cynomolgus</i>	6 „
	<i>Semnopithecus entellus</i>	2 „
Hylobatidae:	<i>Hylobates syndactylus</i>	10 „
Anthropoidea:	<i>Simia satyrus</i>	2 „
	<i>Troglodytes niger</i>	2 „
	<i>Homo sapiens</i>	100 „

Zusammen mit den Literaturangaben anderer Autoren, konnte ich die folgende Statistik zusammenstellen

		Zahl der Beobacht.	$\frac{0}{100}$
Prosimiae:	<i>Lemur macaco</i>	9	0 $\frac{0}{100}$
Platyrrhina:	<i>Cebus capucinus</i>	2	0 $\frac{0}{100}$
Catarrhina:	<i>Cynocephalus</i>	3	0 $\frac{0}{100}$
	<i>Macacus</i>	10	0 $\frac{0}{100}$
	<i>Semnopithecii</i>	4	0 $\frac{0}{100}$
Hylobatidae:	<i>Hylobates synd., leuciscus, agilis</i>	17	41,1 $\frac{0}{100}$
Anthropoidea:	<i>Gorilla</i>	18	44,4 $\frac{0}{100}$
	<i>Orang-utan</i>	10	70 $\frac{0}{100}$
	<i>Schimpanse</i>	40	90 $\frac{0}{100}$
	<i>Homo Europeus</i>	100	99 $\frac{0}{100}$

Es ist daraus zu schliessen dass der Mensch in dieser Beziehung eine am meisten vorgerückte Stellung einnimmt. Auch scheint das Fehlen des *Caput ulnare* beim Menschen eine recht seltene Variatät zu sein.

PIŚMIENNICTWO.

w porządku chronologicznym.

1. W. Vrolik. Recherches d'anatomie comparée sur le Chimpansé. Amsterdam 1841.
2. G. L. Duvernoy. Des caractères anatomiques des grands singes. Arch. des. Mus. Hist. Nat. T. III. Paris 1855.
3. J. C. Mayer. Zur Anatomie des Orang — Utang u. des Schimpanse. Arch. f. Naturgesch. v. Troschel. Bd. XXII 1856.
4. Gratiolet et Alix. Recherches sur l'anatomie du Troglodytes Aubryi. Nouv. Arch. du Mus. Hist. Nat. T. II 1866.
5. J. Wood. On human muscular variations and their relation to comparative anatomy. Journ. of Anat. and. Physiol. Vol I 1867.
6. G. M. Humphry. On some points in the Anatomy of the Chimpanzee. Journ. of. Anat. a. Physiol. Vol. I 1867.
7. A. Macalister. The Arrangement of the pronator muscle in the limbs of the vertebrate animals. Journ. of Anat a. Physiol. Vol. III 1869.
8. A. Macalister. The muscular anatomy of the Gorilla. Proc. of the roy. irish Academy Ser. II Vol I. Dublin 1870.
9. Th. L. W. Bischoff. Beiträge zur Anatomie des Hylobates leuciscus und zu einer vergleich Anat. der Muskeln der Affen u. des Menschen. Abh. d. bayerisch. Akad. d. Wissensch. Bd. X München 1870.
10. Brühl. Myologisches ueber die Extremitäten des Schimpanse. Wiener med. Wochenschr. 1871.

11. F. Champneys. On the muscles and nerves of a Chimpanzee. Journ. of Anat. a. Physiol. vol. VI 1872.
12. H. C. Chapman. On the structure of the Gorilla and Chimpanzee. Proc. Ac. Nat. Sc. of Philadelphia 1878, 1879.
13. C. Langer Die Muskeln der Extremitäten des Orangs als Grundlage einer vergleichend Myologischen Untersuchungen. Math. Naturwiss. Cl. Akad. Wiss. in Wien Bd. L. XXIX Abth 3. 1879.
14. Th. Bischoff. Beiträge zur Anatomie des Gorilla. Abh. der Math. physic. Classe der König. bay. Akad. der Wissensch. Bd XIII. München 1880.
15. L. Testut. Les anomalies musculaires chez l'homme. Paris 1884.
16. J. Deniker. Recherches anatomiques et embriologiques sur les singes anthropoides. Arch. de Zool. exp. et gen. 2^{ème} ser. tom III Paris 1885
17. J. Symington. Observations on the Myologie of the Gorilla ♀ and Chimpanzee ♂ Rep. Brit. Assoc. London 1889—90.
18. J. H. Kohlbrugge Versuch einer Anatomie des Genus Hylobates. Zoolog. Ergebn. einer Reise in Niederländisch Ost—Indien T. I, II Herg. v. M. Weber. Leiden 1890.
19. D. Hepburn. The comparative Anatomy of the muscles and nerves of the superior and inferior extremities of the anthropoid Apes Journ. of Anat. a. Physiol. XXVI 1892.
20. R. Fick. Vergleichende Anatomische Studien an einem erwachsenen Orang — Utang. Arch. f. Anat. u. Entwicklungsgeschichte 1895, Heft I.
21. R. Fick. Beobachtungen an einem zweiten erwachsenen Orang-Utang und einem Schimpansen. Arch. f. Anat. u. Entwickelg. 1895.
22. F. E. Beddard. Contributions to the Anatomy of the authropoid Apes. Transactions of the Zoological Society of London vol. XIII 1895.
23. J. H. Kohlbrugge. Muskeln und periphere Nerven der Primaten mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anomalien. Verhand. der Konink. Akad. van Wetenschappen. Amsterdam 1897.
24. Le Double. Variations du système musculaire de l'homme. Paris. 1897.
25. G. Sperino. Anatomia del Cimpanzé. Torino 1897.
26. T. Chudziński. Observations sur les variations musculaires dans les races humaines. Memoir. de la Societé d'anthropol. de Paris. 1898.
27. R. Kolster. Vergleichend Anatomische Studien über den M. pronator teres der Säugetiere Anat. Hefte LVI/LVII. BdXVII Heft 3/4 Wiesbaden 1901.
28. A. Schüeck. Beiträge zur Myologie d. primaten Morph. Jahrb. 1913.
29. St. Różycki. Morfologja układu mięśniowego szympansa. Pozn. Tow. przyj. Nauk. Poznań 1922.

M. Konopacki

Zachowanie się mitochondriów w czasie rozwoju zarodków żaby.

Przedstawione na posiedzeniu Wydziału III. T. N. W. w dniu 11 listopada 1926.

I. Owogeneza.

Sprawę mitochondriów w owogenezie płazów poruszało już kilku badaczy, jak Schmidt (25) i Jörgensen (12) u odmieńca, Benda (1) i Gajewska (8) u traszki, a głównie Lams (15) u żaby. Wszyscy powyżsi autorowie upatrywali siedlisko mitochondriów bądź w t. zw. jądrze żółtkowem, bądź w t. zw. masie żółtkotwórczej, lecz bliżej ani morfologią chondriomu, ani też jego czynnością nie zajmowali się. Zresztą metody, stosowane przez tych autorów, nie były wystarczające dla przeprowadzenia dokładnej analizy powyższych zagadnień.

To też w związku z pracami nad mikromorfologią przemiany materji w rozwoju żaby (13 i 14) zająłem się w pracy niniejszej zbadaniem zachowania się chondriomu i jego stosunkiem do tworzenia się materiałów zapasowych w oocycie, a także zachowaniem się jego podczas zużywania się tych materiałów w zarodkach starszych do dni dziesięciu.

W tym celu zastosowałem kilka metod utrwalania i barwienia chondriomu, lecz zatrzymałem się jedynie na metodzie Regaud (picroformol — 5 cz. formolu na 100 cz. nasyconego wodnego roztworu kwasu pikrynowego) i na metodzie Champyego (kw. chromowy, kw. osmowy i dwuchromian potasu) z dalszem chromowaniem według Bendy, gdyż one dawały mi najładniejsze rezultaty.

Do barwienia używałem bądź hematoksyliny Regaud z podbarwianiem zielenią jasną, bądź fuksyny kwaśnej według metody Altmanna, albo modyfikacji Kulla. Te ostatnie metody po utrwaleniu w płynie Champyego dawały najpiękniejsze rezultaty, gdyż pozwalały obok zaczernionych kwasem osmowym lipidów wybarwić żółtko i mitochondria.

Po zastosowaniu powyższych metod na jajniki żaby w miesiącach jesiennych i zimowych można spostrzec w oocytach

o kilkunastu mikronach średnicy wokoło jąder półksiężycowate skupienia ziarnistości, barwiące się metodami mitochondrialnymi. Na preparatach, utrwalanych metodą Champyego, dało się wśród tych ziarnistości wykazać obecność zaczernionych kw. osmowym ziarenek lipidów.

Mitochondria w tych oocytach składają się jedynie z ziarenek, różnych jednakże wielkości i gęsto bardzo ułożonych. W oocytach około 80—100- μ mitochondria, skupione w postaci dość dużej ziarnistej kuli, leżą na jednym biegunie jądra, oddalając się nieco od niego.

Cokolwiek później ta kula mitochondrialna, którą Lams, Schmidt, Gajewska i inni autorowie analogizowali z jądrem żółtkowem Balbianiego, zaczyna się nieco rozluźniać, co pozwala już rozróżnić w niej dwie postacie mitochondriów. Jedna — to drobne ziarenka, druga, to krotkie, lecz dość grube pałeczki. Zwykle występuje jedna taka kula mitochondrialna, choć niekiedy mogą występować dwie, a nawet trzy.

W oocytach powyżej 100- μ ziarenka w t. zw. jądrze żółtkowem przyjmują postać nitkowatą, a cała masa ich zaczyna się rozluźniać, tak iż przybiera ona wygląd kłębka mniej lub więcej zbitego, przyczem poszczególne niteczki lub też grupy ich wywędrowują z tego kłębka ku obwodowi oocytu, tworząc wachlarzowatą figurę. Przesuwają się one i ku stronie przeciwnej jądra, tak że w oocytach ok. 220- μ już widzimy je porozrzucane w całej ooplazmie.

Wraz z chondriosomami nitkowatymi przesuwają się chondriokonty pałeczkowate, które jednak rozmieszczają się przeważnie na obwodzie ooplazmy, podczas gdy chondriosomy nitkowate znajdujemy w całej reszcie oocytu, gdzie układają się bądź pojedynczo, bądź skupiając się w większe lub mniejsze sploty. W miarę wzrostu oocytu t. zw. masa żółtkotwórcza, a raczej mitochondrialna wzrasta bardzo znacznie i pomimo rozsiania się po całej ooplazmie wielkie skupienie jej w postaci gęstego splotu pozostaje w bliskości jądra, otaczając je początkowo w postaci półksiężyca, a potem prawie koła i tworząc w ten sposób pas mitochondrialny okołojądrowy.

Drugi taki pas mitochondrialny, bardziej może zbity, występuje na obwodzie przeważnie na przeciwnym biegunie od pierwotnego jądra żółtkowego.

Między obu pasami ciągną się promieniste połączenia mitochondrialne, które na przekrojach poprzecznych wyglądają jak wysepki między gromadzącymi się materiałami zapasowymi.

Tego rodzaju układ widzimy już w oocytach ok. 500 i więcej mikronów. W miarę jednak dalszego wzrostu i nagromadzenia się żółtka ilość ich stopniowo się zmniejsza.

Jak z powyższego opisu widać t. zw. jądro żółtkowe i masa żółtkotwórcza u żaby byłaby niczem innym, jak skupieniem mitochondriów, które w miarę wzrostu oocytu rozmieszczałyby się w pewien charakterystyczny sposób w całej ooplazmie, biorąc czynny udział w nagromadzaniu materiałów zapasowych.

Powyższe dane zgadzają się częściowo z opisami Lamsa, Bandy, Gajewskiej i Schmidta u płazów, lecz w dużej mierze uzupełniają je pod względem czystości i jasności obrazów.

Pod tym względem zgadzają się w zupełności z obrazami, opisanymi przez Bulliarda (3) podczas owogenezy u *Emys lutaria*.

Różnicą, którą uważam za wskazane podnieść, byłoby spostrzeżenie przezemnie dwu postaci mitochondriów. Różnią się one bowiem nie tylko kształtem i umiejscowieniem w ooplazmie, ale również i pod względem fizyologicznym, jak to wykażemy dalej.

II. Rola mitochondriów w tworzeniu materiałów zapasowych.

Sprawa udziału mitochondriów w wytwarzaniu żółtka była obserwowaną i dyskutowaną wielokrotnie. Co się tyczy literatury, odnoszącej się do płazów, to jedynie Gajewska u traszki opisuje szczegółowiej powstawanie płytek żółtkowych z mitochondriów. Sądząc jednak z opinii innych autorów, zajmujących się tą sprawą u różnych zwierząt, mamy pod tym względem dwa zdania.

Jedni autorowie, jak bracia Zoja (28), Russo (24) Loyez (16), Faurè — Fremiet (7), Gajewska (8), Hirschler (10), Zakolska (27). Bulliard i inni, przyjmują bezpośrednie przekształcanie się mitochondriów w płytki lub ziarna żółtka. Inni zaś jak Bluntschli (2), Van der Stricht (26), Emberger (5 i 6) i Noël (20 i 21), przyjmują raczej pośredni udział mitochondriów w tym procesie lub przypisują im rolę katalizatorów (Emberger). W pracy nad mikromorfologią przemiany materji

w rozwoju żaby (14), nie badając nawet zachowania się mitochondriów podczas owogenezy, lecz opierając się jedynie na skomplikowanym chemizmie genezy żółtka przychylił się do zdania ostatniego. To też w obecnej pracy szukałem poparcia faktycznego dla naszego przypuszczenia. W pracy tej wykazaliśmy, że owogenezę u żaby należy podzielić na dwa okresy: pierwszy — lipidotwórczy, gdy lipoidy, zjawiając się już w bardzo wczesnych oocytach, powoli wypełniają ooplazmę podobnie, jak opisane powyżej t. zw. jądro żółtkowe i masa mitochondrialna, czyli żółtkotwórcza; i drugi, począwszy od 300- μ mniej więcej średnicy, gdy zjawia się w ooplazmie glikogen i zaczynają tworzyć się płytki żółtkowe. Poprzednio zauważyliśmy też, że początkowo płytki żółtkowe wykazywały zabarwienie wyraźnie kwasochłonne, barwiąc się intensywnie zielenią jasną, po pewnym jednak czasie zmieniły się raczej na zasadochłonne.

Stosując obecnie metody mitochondrialne, szczególnie po pikroformolu i barwiąc bądź hematoksyliną Rega u d i zielenią jasną, bądź safraniną i tąż zielenią, można spostrzec, jak od strony błony jajowej zjawiają się w ooplazmie drobne ziarenka, dające się elektywnie zabarwić na zielono, a które rosnąc odsuwają się nieco od błony, lecz poza pewien obręb pasa brzeżnego prawie nie wychodzą. Porównując preparaty przygotowane powyższymi metodami z preparatami, utrwalanymi według Ciaccio i barwionymi Sudanem III możemy stwierdzić, że w tym właśnie pasie schodzą się z jednej strony ziarenka białkowe zieleniochłonne, z drugiej zaś lipoidy pasa obwodowego oocytu. Obserwując obecnie zachowanie się mitochondriów w tym właśnie pasie możemy spostrzec, że tam wśród powyżej wzmiankowanych zieleniochłonnych ziaren znajdują się prawie wyłącznie mitochondria pałeczkowate (chondriokonty) i że one właśnie i, zdaje mi się, jedyne biorą czynny udział w wytwarzaniu właściwych płytek żółtkowych, czerpiąc materiał potrzebny bądź z substancji białkowych, bądź z lipoidów.

Na preparatach barwionych metodą Altmanna lub Kulla widać, jak owe chondriokonty grubieją, zaokrąglają się, zmieniając stopniowo swe zabarwienie. Z czerwonych po fuksynie stają się żółtawe w środku, zachowując tylko brzeg bądź w kształcie półksiężyca, bądź w kształcie koła wybitnie fuksynochłonnego.

Jednakże to zabarwienie stale słabnie w miarę wzrostu płytki żółtkowej.

Na preparatach, utrwalanych w płynie Regaud (picroformol) i barwionych hematoksyliną i zielenią jasną, można obserwować w pasie obwodowym wśród zielonych ziaren białkowych czarne chondriokonty, które również, zmieniając swój kształt i powiększając się, układają się bardziej nawewnątrz od zielonych ziarenek i tworzą już właściwe żółtko, witelinę, zbudowaną z lipoproteidów.

W ten sposób tworzące się na obwodzie płytki żółtkowe dają w miarę wzrostu nieco jaśniejsze zabarwienie hematoksylinowe i przesuując się do wnętrza ooplazmy, już w oocytach ok. 600- μ średnicy wypełniają ją prawie całkowicie z wyjątkiem pasa wewnętrznego mitochondrialnego. Lecz tutaj stykają się z licznymi kulkami lipidów, jak i z mitochondriami nitkowatymi. Co się tyczy mitochondriów nitkowatych, to nie udało mi się zaobserwować udziału ich w wytwarzaniu właściwego żółtka. Wprawdzie dochodzą one do samego obwodu oocytu i do pasa zieleniochłonnego, lecz zarówno tutaj, jak i wewnątrz ooplazmy rozpadają się na drobne ziarenka lub na twory paciorkowate. W takich to chondriomitach można spostrzedz zabarwione osmem drobne ziarenka lipidów, lub tylko białe pęcherzyki, podobnie, jak to stwierdził Bulliard u Emys. W opisanych powyżej splótach mitochondriów nitkowatych ziarna lipidów zlewają się w większe kule, dochodzące niekiedy do dość znacznych rozmiarów.

Początkowo wokoło czarnych kropelek lipoidalnych widać jeszcze różową obwódkę, barwiącą się fuksyną, która jednakże później zanika i nie jest widoczna nawet po rozpuszczeniu kropelek lipoidalnych.

Na podstawie powyższych danych moglibyśmy przyjść do wniosku, że w oocytach żaby mamy do czynienia z dwiema postaciami mitochondriów, różniących się nie tylko co do kształtu, ale i co do czynności. O ile bowiem jedne przekształcają się całkowicie w kropelki lipidów, to drugie — pobierają raczej różne substancje z otoczenia, syntetyzują je w lipoproteidy, lecz same nie zużywają się, a tylko, rozciągając się wokoło skupiającego się ciała, tworzą jakgdyby osłonkę mitochondrialną, dającą przez czas długi właściwą reakcję barwną i ginącą dopiero na bardzo dużych płytkach.

III. Zachowanie się mitochondriów w dalszych stadiach rozwojowych.

O ile mi wiadomo, to dalszych losów płytek żółtkowych w stosunku do ich pochodzenia mitochondrialnego nie badano zupełnie. Prace Mevesa (18), Duesberga (4), Rubaszki na (23) i Hirschlera (11), którzy badali mitochondria w blastomerach, listkach zarodkowych i narządach pierwotnych dotyczyły zwierząt, u których było mało żółtka wewnątrz komórek, czy to przy bródkowaniu częściowem u kurczęcia i mięczaków, czy też u zwierząt ssących. Stąd autorowie ci już w bardzo wczesnych okresach rozwojowych znajdowali liczne mitochondria i rozmaitego kształtu.

Inaczej sprawy te przedstawiają się podczas rozwoju u żaby. Już wspominałem, że w czasie owogenezy ilość mitochondriów stale się zmniejsza, tak że w jajach dorosłych, jak i w blastomerach, a nawet w blastuli pomiędzy żółtkiem i lipidami widoczne są zaledwie nieliczne drobne ziarenka, barwiące się fuksyną, a tylko dość liczne osłonki mitochondrialne — również fuksynochłonne na mniejszych płytkach żółtkowych.

Zwiększa się nieco ilość mitochondriów w stadium gastruli, a wyraźnie dopiero wzrasta w zarodkach od neuruli w narządach zużywających płytki żółtkowe.

Obserwując jednakże zarodki starsze — specjalnie zaś 10 dniowe, gdzie z żółtka zostały już tylko resztki, można było spostrzec, jak w miarę zmniejszania się płytki osłonka mitochondrialna wokoło niej barwiła się coraz intensywniej fuksyną, potem płytki przyjmowały kształty nieregularne z wyraźnym półksiężycem fuksynochłonnem, a tylko reszta substancji barwiącej się kwasem pikrynowem lub aurancją i wreszcie pozostawały tylko pałeczki fuksynochłonne, zupełnie podobne do istniejących już w komórce chondriokontów. Takie obrazy w bardzo piękny i przejrzysty sposób można obserwować w komórkach nabłonka jelitowego, który zawiera u zarodków 10 dniowych liczne chondriokonty.

Obrazy powyższe wydają mi się bardzo ważne, gdyż przemawiają niedwuznacznie na korzyść zapatrywań co do roli pośredniej mitochondrium w procesie tworzenia się żółtka.

W literaturze francuskiej dotyczącej mitochondriów w ostatnich latach toczy się spór o rolę czynnościową mitochondriów

i mamy już pewne przypuszczenia co do tego, iż mitochondrium może regenerować z powrotem po wypełnieniu swej czynności w komórce.

Zwolennikami tych zapatrywań są A. Prenant (22) a głównie Noël (20) odnośnie do komórek zwierzęcych, a Guillaumon (9), Mangenot (17) i Emberger (5 i 6) odnośnie do komórek roślinnych. O ile jednak botanicy dostarczyli już szeregu faktów, popierających ich twierdzenia, to jedynie Noël (19) ma pewne dane, przemawiające na korzyść jego zapatrywania. Fakty, podane w niniejszej pracy, nie tylko całkowicie popierałyby stanowisko Noël'a co do komórek zwierzęcych, lecz i wykazywałyby bardzo wyraźnie cykliczność czynności mitochondriów.

Noël (20) w komórkach wątroby wykazał cykliczną zmianę formy w chondriosomach, którą on nazywa „cycle evolutif secretoire du chondriome.” Lecz Emberger, a za nim Guillaumon i Mangenot obserwowali w licznych bardzo komórkach roślinnych istnienie dwojakiego rodzaju chondriomu. Jeden rodzaj, w postaci mniejszych ziarnistości i pałeczek, nie bierze udziału w czynności wytwarzania substancji zapasowych rośliny (chondriom obojętny) i drugi rodzaj, składający się z pałeczek większych, wewnątrz których wytwarzają się rozmaitego rodzaju substancje, jak białkowe, węglowodany i tłuszcze t. zw. amyloplasty, chloroplasty, oleoplasty i inne. Gdy plast taki przekształci się w kulkę skrobi wówczas widać na niej zwykle resztkę plastu w postaci t. zw., „ecorce mitochondriale.” Ta reszta daje nowy plast po zużyciu się substancji zapasowych.

Fakty, dotyczące cyklu przemian płytki żółtkowej w zupełności odpowiadałyby temu, co spotykamy u plastów roślinnych, i w ten sposób wykazywałyby jeszcze jedno zasadnicze podobieństwo między komórką roślinną i zwierzęcą.

Co się tyczy ziarenek lipidów, to w zarodkach starszych nie widziałem około nich osłonki mitochondrialnej, widocznie tam zużywały się one całkowicie.

Reasumując zatem powyższe wyniki możemy przyjść do wniosku, że w oocytach żaby mamy do czynienia z dwoma rodzajami mitochondriów tak pod względem morfologicznym, jak i fizjologicznym. Jedne z nich nitkowate całkowicie przekształcają się w kulki lipidów, gdy drugi rodzaj pałeczkowaty odpowiada pojęciu botanicznemu plastów i mogłyby być nazwane vitelloplastem.

Czynność vitelloplastu byłaby jednak tylko pośrednią i cykliczną i odpowiadałaby raczej czynności katalitycznej, podobnie jak to przyjmuje Embarger.

(Z Zakładu Histologii i Embrjologii
Wydziału Lekarskiego Uniw. Warsz.).

M. Konopacki.

Sur le comportement des mitochondries au cours de développement de la grenouille.

L'auteur a pu confirmer sur les ovaires de la grenouille, pendant les mois d'automne et d'hiver, des observations de Lams, lequel a trouvé, que le noyau vitellin et la masse vitellogène sont constitués par les mitochondries, localisés dans l'oocyte d'une manière caractéristique.

En effet dans les oocytes de 100- μ . environ l'auteur a constaté (méthode de Regaud et de Champy - Kull) l'existence de deux catégories de mitochondries. Les unes en forme de grains et qui se transforment plus tard en filaments (chondriomites), les autres en forme de bâtonnets (chondriocontes). Les chondriocontes sont localisés sur la périphérie de l'ooplasmе — tandis que les chondriomites forment deux amas presque sphériques: l'un interne, circumnucléaire — et l'autre périphérique. Parmi ces amas, on trouve des chondriomites réunis en faisceaux. Les deux catégories des mitochondries diffèrent aussi physiologiquement: les chondriomites, en se fragmentant en partie en grains, se transforment en lipoides et leur écorce mitochondriale, qui est visible encore dans les premiers moments sur la périphérie des lipoides, disparaît plus tard. Les chondriocontes, au contraire, localisés sur la périphérie de l'oocyte parmi les gouttes des lipoides et les grains des proteiques, provenant de l'épithelium folliculaire, absorbent ces substances et synthétisent le vitellus proprement dit.

Les chondriocontes se gonflent, s'arrondissent et perdent alors à leur intérieur la réaction fuchsinophile, tandis que l'écorce de ces formations se teint toujours en rouge par la fuchsine. Ce n'est que les plaquettes très grosses qui perdent entièrement la propriété de se colorer par la fuchsine.

Dans l'oeuf, au cours de la segmentation, ainsi que dans l'embryon, les mitochondries diminuent considérablement. Ce n'est que dans les cellules de l'ectoderme de la gastrule, qu'on observe l'apparition des grains fuchsinophiles, dont le nombre s'accroît fortement au fur et à mesure de l'utilisation du vitellus.

Dans les embryons plus âgés (10 jours), notamment dans l'épithélium intestinal, l'auteur a constaté la réapparition des écorces mitochondriales sur les plaquettes vitellines, et, au fur et à mesure de l'utilisation du vitellus ces écorces acquièrent successivement la forme de croissants et ensuite de bâtonnets identiques aux chondriocotes libres, disséminés dans le plasme.

Les observations sus-citées tendent à démontrer que les chondriomites des oocytes de la grenouille peuvent se transformer directement en grains des lipoides, tandis que les chondriocotes ne jouent qu'un rôle indirect dans la formation des plaquettes vitellines. A ce point de vue, ces constituants de l'ooplasmе de la grenouille, correspondent au plastes des cellules végétales (Emberger, Guilliermond et Mangenot). L'auteur propose de donner à ces structures protoplasmiques le nom de vitelloplastes.

SPIS LITERATURY.

1. Benda C. Verhandlungen d. physiol. Gesellsch. zu Berlin, 1898—99 i 1899—1900.
2. Bluntschli. Morphol. Jahrbuch. T. 32, 1904.
3. Bulliard H. C. R. de l'Assoc. des Anatom. 1924.
4. Duesberg J. Arch. f. Zellforsch. T. IV, 1910.
5. Emberger L. Arch. de Morph. experim. 1921.
6. " Bull. d'Histol. appliquée T. II — 1925.
7. Fauré-Fremiet. Arch. d'anat. microsc. T. XI, 1910.
8. Gajewska H. Arch. f. Zellforsch. T. XIV i XV, 1915 i 1921.
9. Guilliermond A. Arch. d'anat. microsc. T. XX.
10. Hirschler J. Arch. f. microsc. Anat. T. 89, 1917.
11. " " " " T. 91, 1918.
12. Jörgensen M. Festschr. f. R. Hertwig, 1910.
13. Konopacki M. C. R. Soc. de Biol. T. XCII, 1924.

14. Konopacki M. i Konopacka B. Bull. de l'Acad. Polonaise de Sc. Cracovie, 1926.
 15. Lams H. Arch. d'Anat. microsc. T. IX, 1906/7.
 16. Loyez M. Arch. d'Anat. microsc. T. VIII i X.
 17. Mangenot G. Arch. de Morphol. exper. 1922.
 18. Meves Fr. Arch. f. mikr. Anat. T. 72, 1908.
 19. Noël R. Arch. d'Anat. microsc. T. XIX, 1923.
 20. Noël R. Bull. d'Histol. appliquée T. I, 1924.
 21. Noël R. et Mangenot G. tamże T. II, 1925.
 22. Prenant A. według Noëla.
 23. Rubaszkin W. Anatom. Hefte T. 41, H—3—1910.
 24. Russo według Bulliarda.
 25. Schmidt W. Anat. Hefte T. 27, 1905.
 26. van der Stricht. C. R. de l'Assoc. des Anat. Gand, 1922.
 27. Zakolska Z. Kosmos — Lwów, 1920.
 28. Zoja według Bulliarda.
-

Posiedzenie

z dnia 9 grudnia 1926.

T. J. Woyno.

Badania krystalograficzne dwusiarczku benzoilu ($C_6H_5CO)_2S_2$.¹⁾

Komunikat zgłoszony na posiedzeniu III Wydziału Tow. Nauk. Warsz.
w dniu 9 grudnia 1926 r.

Przedstawił p. St. J. Thugutt.

Streszczenie.

Kryształy otrzymane przez prof. L. Szperla są jednoskośne. $a:b:c = 0.7510:1:1.0236$, $\beta = 107^{\circ}10\frac{1}{2}'$. Główne ściany: $c(001)$, $o(111)$, $\omega(1\bar{1}\bar{1})$, $b(010)$, podrzędne: $a(100)$ $m(110)$, $q(011)$, $s(201)$. Do uzgodnienia ze sobą pomiarów otrzymanych na poszczególnych kryształach obliczano azymuty zerowe dla każdego kryształu z azymutów ścian głównych i $a(100)$. Badania optyczne: $2V = 84 - 85^{\circ}$, określone metodą graficzną autora z kąta znikania światła na ścianie $(11\bar{1})$, kąt $z:\gamma = +18^{\circ}$ (w ostrym kącie β). Oś optyczna wychodząca na (001) tworzy z normalną tej ściany kąt $8^{\circ}51'$.

¹⁾ Szczegółowy opis ukaże się w Archiwum Pracowni Mineralog. Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

Antoni Morawiecki.

Piorunowce.

Komunikat zgłoszony dn. 9 grudnia 1926 r.

Przedstawił p. St. J. Thugutt.

(Streszczenie).

Materiał badany pochodził z piaszczystych wydmy, położonych w okolicach Warszawy (Pustelnik, Ząbki, Świder, Jabłonna, Marki, Tłuszcz, Nieporęt, Pocięcha w puszczy Kampinowskiej i t. d.) i na południowy — zachód od Rakowa na wyżynie Kielecko — Sandomierskiej (Drogowola).

Piorun, uderzając w piasek, tworzy szczególne utwory zwane piorunowcami. Mają one wygląd długiej rurki, pokrytej krótszemi bądź dłuższemi podłużnemi karbami, o powierzchni zewnętrznej szorstkiej i chropowatej, oblepionej ziarenkami piasku, wewnętrznej zaś gładkiej i szklistej.

Piorunowce zasadniczo dzielimy na trzy części: na stożkowego kształtu kielich wpadowy, na właściwą rurkę piorunowcową, czyli pień piorunowca i na zakończenie. Pień piorunowca tworzy często odgałęzienia i pętlice. Zakończenie wygląda różnie. Długość piorunowca jest naogół znaczna i zwykle przenosi 4 m. Grubość ścianek nie przekracza 4 mm. Średnica przewodu wynosi nieraz 1,5 cm.

Mineralogicznie właściwa substancja, tworząca piorunowce czyli szkło piorunowcowe (leszateljeryt), jest bezbarwnem przezroczystym szklivem o c. wł. zmieniającem się od 2,14 do 2,205. Wynosi ona 80—90% całej masy piorunowca. Pozostałość stanowią niezmienione, względnie częściowo lub całkowicie zmienione ziarna piasku (kwarcu, skaleni i t. d.).

Pod mikroskopem szkło piorunowcowe wykazuje cechy substancji izotropowej, a więc jest bezpostaciowe lub regularne. Tkwią w niem liczne eliptyczne, kuliste lub owalne pęcherze gazowe.

W stosunku do elektromagnesu piorunowce zachowują się różnie. Jedne są nań wrażliwe, inne zaś nie. Niewrażliwe mają zazwyczaj barwę śnieżno — białą, inne zaś szarą, brudną różową, niekiedy prawie czarną. Czemu przypisać tę różnicę w ich zachowaniu się, niewiadomo, wahania bowiem w ich składzie chemicznym są niewielkie. Może wywiera tu wpływ odmienna ich budowa?

Analiza chemiczna wykazała, iż piorunowce składają się z SiO_2 —95—98%, $\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3$ —1—2%, CaO —0,06% max. także z MnO , MgO i Na_2O w ilościach niewielkich.

Ilość krzemionki rozpuszczalnej w NaOH w ciągu 2 godzin wynosi 80—85% całej masy substancji piorunowca.

Piorunowce są genetycznie związane z podłożem, w którym występują. Potwierdzają to: naoczne obserwacje prowadzone w chwili powstawania piorunowców, petrograficzne podobieństwo niezmiennych ziarn, okludowanych przez szkło piorunowcowe, do ziarn piasku otaczającego piorunowce, wreszcie zgodność składu chemicznego piorunowców i wyż wspomnianych piasków.

Antoni Morawiecki.

Cenomańskie warstwy fosforytonośne okolic Niżniowa nad Dniestrem.

Komunikat zgłoszony dn. 9 grudnia 1926 r.

Przedstawił p. St. J. Thugutt.

(Streszczenie)

Cenomańskie warstwy fosforytonośne okolic Niżniowa nad Dniestrem spoczywają wszędzie na jurze. Strop ich stanowi biała kreda z czarnymi krzemieniami, zaliczana przez geologów do turonu i senonu.

Mięszkość warstw waha się od 2 do 10 m. Podzielić je możemy na piaskowce, piaski i margle. U dołu występują warstwy piaskowców. Nad nimi leżą piaski, wreszcie margle. Mięszkość piaskowców jest nieznaczna i nie przenosi zwykle 0,5 m. Mięszkość piasków waha się w granicach 2—6 m., nie przekraczając nigdy 6 m. Mięszkość margli wynosi średnio 2 m. i urasta niekiedy w dwójnasób.

Piaski i piaskowce są złożone głównie z kwarcu, krzemieni, fosforytów i węglanu wapnia. Jako domieszki mamy: glaukonit, granaty, turmaliny, amfibole, augity, cyrkony, rutyle i t. d. Skład mineralogiczny i chemiczny dla różnych warstw (lub ich poziomów), występujących w różnych miejscowościach, podlega dużym wahanom.

Z pomiędzy minerałów, tworzących materiał tych warstw, bezsprzecznie najciekawsze są fosforyty. Występują one najliczniej w środkowej i górnej części warstwy piasków.

Fosforyty pod względem cech fizycznych możemy podzielić na brunatne i szare, twarde i miękkie. Zwykle fosforyty twardsze zawierają większą ilość fosforanu wapniowego niż fosforyty miększe. Fosforyty twardsze występują najczęściej w górnym poziomie piasków, fosforyty zaś najmiększe w dolnym. Badania mikroskopowe stwierdzają, iż kongregacje fosforytowe są skupieniami ziarn piasku, spojonych substancją fosforytową. Pomędzy kongregacjami piaszczysto—fosforonośnymi, trafiają się dość rzadko „pseudomorfozy” po szkieletach gąbek, zębach rybich i t. d. jak również ośrodki muszli złożone z substancji fosforytowej.

Analizy chemiczne fosforytów, pochodzących z różnych miejscowości i warstw, pozwoliły na wyprowadzenie wniosku, że im słabiej są ziarna piasku substancją fosforytową zlepione — innymi słowy im kruchsze i miększe są kongregacje — tem mniej właściwej substancji one zawierają. I odwrotnie, im bardziej zbitą i zwięzłą strukturę mają kongregacje, bądź „pseudomorfozy”, tem większą jest w nich zawartość kwasu fosforowego. Wniosek ten nie da się zastosować jedynie w tych przypadkach, gdy obok substancji fosforytowej, jako lepiszcza, występuje jeszcze inna substancja, również w charakterze lepiszcza (np. węgiel wapniowy, biorący znaczny udział w tworzeniu się kongregacji znajdujących w najwyższej części warstwy piasków).

Analizy chemiczne żółto — brunatnych, najmniejszych kongregacji, występujących w najniższej części warstwy piasków, dały średnio:

cz. nier. — 82, 98%; P_2O_5 — 5, 07%; CO_2 — 1, 41%; i t. d.

Analizy ciemno — brunatnych twardszych, mniej kruchych kongregacji ze środkowej części warstwy piasków dały:

cz. nier. — 55, 13%; P_2O_5 — 11, 83%; CO_2 — 4, 45%; i t. d.

Analizy twardych, zbitych, szarych kongregacji z części górnej warstwy piasków dały:

cz. nier. 18, 74%; P_2O_5 — 19, 79%; CO_2 — 19, 31%; i t. d.

Wreszcie analizy, wykonane na możliwie oczyszczonej substancji fosforytowej, dały średnio:

cz. nier. 2, 29%; P_2O_5 — 29, 15%; CO_2 — 7, 42%; i t. d.

Jakościowo stwierdzono we wszystkich fosforytach zmienne ilości fluoru i SO_3 . Fluoru nie oznaczano.

Oczyszczona substancja fosforytowa, pochodząca z różnych fosforytów, zbieranych w różnych warstwach i miejscowościach wykazuje mniej więcej jednakowy skład chemiczny. Przyjąć przeto należy, iż lepszycze wszystkich konkrety jest jednakowe, a tylko zmienna jest jego ilość.

Pod mikroskopem substancja fosforytowa wygląda jak jasno — względnie ciemno-żółta, lub brunatnawa masa, miejscami przyprószona czarnym organicznym pigmentem. W masie tej tkwią zaokrąglone ziarna bezbarwnego kwarcu granitowego, zielone ziarna glaukonitu, całkowicie skaolinizowane nieliczne zresztą skalenie, duże kryształy kalcytu, rzadkie cyrkony, rutyle, turmaliny, granaty i t. d. Ponieważ materiał spojony substancją fosforytową, jest identyczny z minerałami znajdującymi się w piasku, przeto musimy przyjąć iż fosforyty utworzyły się w warstwach cenomańskich, które są ich złożem pierwotnym.

Materiału do tworzenia się warstw cenomańskich dostarczyły warstwy jurajskie, w mniejszej mierze górną — dewońskie (a może nawet dolną — kredowe). Przemawiają za tem utwory zlepieńcowe cenomańskie złożone z wapieni jurajskich i piaskowców dewońskich. Następnie obecność w wapieniach jurajskich ułamków krzemieni, zupełnie analogicznych z krzemieniami znajdującymi się w warstwach cenomańskich, wreszcie obecność w piaskach otoczków wapienia jurajskiego, a nawet czerwonego piaskowca dewońskiego jest dostatecznym dowodem, stwierdzającym powyższe przypuszczenia.

Jedynie warstwa środkowa i górna piasków ze względu na znaczną zawartość konkrety fosforytowych nadać się może do eksploatacji górniczej. Grubość warstwy środkowej wynosi 30—50 cm. zaś warstwy górnej 1—2 m. Najbogatsze w konkrety fosforytowe zdają się być warstwy położone na południowy — wschód od Niżniowa w okolicach wsi Kutyska. Tu warstwa górna zawiera średnio 20⁰/₀, warstwa zaś dolna 30—35⁰/₀ konkrety fosforytowych. Zasiąg tych warstw wynosi średnio 10 km². Łatwość oddzielenia konkrety od piasków, jak też bliskość Dniestru i kolei (5—7 km). skłoniły dyr. W. Gottlieba do podjęcia próbnej eksploatacji tych złóż.

A. Łaszkiewicz.

Studja mineralogiczne.

Komunikat zgłoszony dn. 9 grudnia 1926 roku.

Przedstawił p. St. J. Thugutt.

Zjawisko polaryzacji obrotowej właściwe kwarcowi pozwala przypuszczać, że zbudowany on jest analogicznie do kombinacji mikowych Reusch'a, naśladujących polaryzację obrotową, i że składa się z submikroskopowych przerostów włókien dwuosiowej krzemionki. Takie przenikanie się włókien krzemionki było dostrzeżone, przyczem w miejscach ich przecięcia się można było obserwować zjawiska optyczne właściwe kwarcowi. Również na drodze rentgenogramometrycznej stwierdzono tożsamość sieci przestrzennej tak dla kwarcu jak i dla włóknistych odmian krzemionki. Fakt ten potwierdza powyższe przypuszczenia teoretyczne.

Ponieważ w różnie zabarwionych odmianach kwarcu nie stwierdzono domieszek ciał obcych, stale w jednej i tej samej odmianie występujących, przypuszczać należy, że przyczyną zabarwienia różnych odmian jest obecność w kwarcu ciał koloidalnych w stanie znacznego rozproszenia.

Co się tyczy morfologii kwarców polskich, to zaobserwowano na nich prócz słupa, dwóch romboedrów, piramidy wtórej s {1121} jeszcze szereg ostrych romboedrów. Ogólną cechą kwarców zbadanych jest ich hydrogeniczne pochodzenie. Pomimo to słup i romboedry osiągały rozmaity stopień rozwoju, a na niektórych kryształach nie obserwowano wcale ścian słupa. Wynika stąd, że postać bipiramidalna lub krótkopryzmatyczna kwarcu, przypisywana powszechnie kryształom powstałym w wyższej temperaturze, właściwa jest również kwarcowi z niskich temperatur.

Prócz kwarcu badane były pod względem morfologicznym minerały towarzyszące mu w Kieleckiem, mianowicie hematyt, kalcyt, baryt, azuryt i cerusyt.

Szczegółowe dane, wyniki pomiarów, rysunki i fotografie dołączone będą do pracy, która pod tym samym tytułem co niniejszy referat zostanie ogłoszona w tomie II Archiwum Pracowni Mineralogicznej T. N. W.

A. Lindenbaum et A. Tarski.	Communication sur les recherches de la théorie des ensembles	299
H. Szpidbaum.	Samaritaner in anthropologischer Beziehung . . .	355
J. Grzybowski.	De la tente osseuse du cervelet chez les Primates	365
Włodzimierz Chylewski.	Über das Vorkommen des Caput ulnare des M. pronator teres in der Primatenreihe . . .	373
M. Konopacki.	Sur le comportement des mitochondries au cour de développement de la grenouille	383
T. J. Wojno.	Sur les propriétés cristallographiques de disulfure de benzyle (C_6H_5CO) ₂ S ₂	386
Antoni Morawiecki.	Les fulgorites	387
Antoni Morawiecki.	Les couches cénomaniennes à phosphorites des environs de Nizniów sur le Dniester.	388
A. Łaskiewicz.	Etudes minéralogiques	391

Redaktor

Edward Loth.

Adres Redakcji: Śniadeckich 8.
