

# SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

## TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematycznych i przyrodniczych

Rok XXI 1928

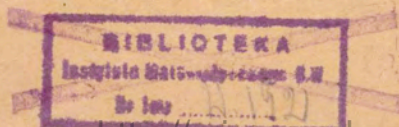
Zeszyt 7—9



WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1 9 2 9



ARCADIA  
BIBLIOTEKA  
KRAJOWA  
WARSZAWA

<http://rcin.org.pl>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES  
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III.

XXI Année 1928.

Fascicule 7—9.

# SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

# TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematycznych i przyrodniczych

Rok XXI 1928

Zeszyt 7—9



WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1 9 2 9

Tłoczono w Zakł. Graf.-Introlig.  
J. Dziewulski, Warszawa, Złota 29

## TREŚĆ ZESZYTU 7—9.

(Table de matières).

	Str.
<b>B. Karbowski.</b> W sprawie istniejących dróg między przestrzenią podpajęczynówkową mózgu i narządem słuchu u zwierząt i u człowieka . . . . .	181
<b>Z. Sujkowski.</b> Uwagi o pochodzeniu materiału klastycznego górnego cenomanu Solcy i Wolbromia . . . . .	191
<b>Z. Sujkowski.</b> W sprawie lessów Nowogródzkich z 2 rys. . . . .	205
<b>Z. Sujkowski.</b> Kilka nowych wierceń na kresach północno-wschodnich . . . . .	213
<b>W. Sierpiński.</b> Przyczynek do ugruntowania teorii zbiorów rzutowych	219
<b>J. Poprużenko.</b> O rozszerzeniu funkcji Baire'a określonych na podzbiorach zamkniętych . . . . .	234
<b>Z. Mizgierówna.</b> O strukturze lublinitu. Z 3-ma rys. . . . .	245
—	
<b>B. Karbowski.</b> Zur Frage einer offenen Verbindung zwischen dem subarachnoidalen Raum des Gehirns und dem Gehörorgan bei Tieren und beim Menschen. . . . .	187
<b>Z. Sujkowski.</b> Recherches sur la roche-mère des dépôts clastiques du cenomanien sup. de Solca et Wolbrom . . . . .	204
<b>Z. Sujkowski.</b> Notes sur le loess de Novogródek . . . . .	212
<b>Z. Sujkowski.</b> Quelques sondages dans la partie N. E. de la Pologne . . . . .	218
<b>W. Sierpiński.</b> Contribution à fondation de la théorie des ensembles projectifs . . . . .	219
<b>G. Poprougénko.</b> Sur l'extension des fonctions de Baire définies dans les sous-ensembles fermés . . . . .	234
<b>Z. Mizgierówna.</b> La structure de la lublinité . . . . .	250



SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ  
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III nauk matematycznych i przyrodniczych.

---

Posiedzenie

z dn. 26 października 1928 r.

B. Karbowski.

**W sprawie istniejących dróg między przestrzenią  
podpajęczynówkową mózgu i narządem słuchu  
u zwierząt i u człowieka.**

Przedstawił E. Flatau dn. 26 października 1928 r.

Jednym z aktualnych zagadnień otologii jest sprawa drogi bezpośredniej między przestrzenią podpajęczynówkową, a przestrzenią perylimfatyczną ucha wewnętrznego. Chodzi mianowicie o to, czy istnieje droga w postaci otwartego kanału wogóle, w szczególności zaś — kanału błoniastego, umieszczonego w kanale kostnym. Przedmiotem badań był, oczywiście, wodociąg ślimakowy, przez który mógłby sobie ewentualnie torować drogę kanał błoniasty.

Godnem jest uwagi, że anatomowie, na zasadzie swoich badań czysto anatomicznych nad wodociągiem ślimakowym, nie doszli do wyników pozytywnych. Michałowicz mówi o małym lejkowatym zagłębieniu, które prowadzi do wnętrza kości skalistej, gdzie umiejscowiony jest ślimak. Zagłębienie to zawiera żyłę i tkankę łączną. Lenhossek jest zdania, że brak jest dostatecznie przekonujących faktów anatomicznych, któreby przemawiały za istnieniem wolnego drożnego kanału, przez który ciecz przychłonkowa mogłaby się łączyć z płynem mózgowordzeniowym. Spaltenholz wspomina o przewodzie przychłonkowym (*ductus perilymphaticus*), który wraz z żyłą przebiega poprzez wodociąg ślimakowy i tworzy połączenie między przestrzenią przychłonkową ślimaka, a przestrzenią podpajęczynówkową.

G. Aleksander w podręczniku neurologji ucha, wydanym w r. 1924, pisze o zajmującej nas sprawie, jak następuje:

„Ze wszystkich kostnych kanałów ucha wewnętrznego u człowieka żywego drożnym jest tylko wodociąg ślimakowy. Wązki jednak kanał, który przez tkankę łączną zwięza się do zupełnego zaniku światła nie może służyć jako połączenie między uchem wewnętrznem, a przestrzenią podtwardówkową podstawy czaszki, gdzie na tylnej powierzchni kości skalistej znajduje się ujście zewnętrzne wodociągu ślimakowego”.

Aleksander Reitö wypowiada się w formie stanowczej w tym sensie, że u człowieka nie istnieje przewód przychłonkowy (*ductus perilymphaticus*) i że niema otwartej drogi między przestrzenią podpajęczynkową, a uchem wewnętrznem.

W celu wyświetlenia tej sprawy spornej przeprowadził badania odnośnie Grünberg (Zeitschr. f. Hals 1922). Na serii preparatów kości skalistej u 7-letniego chłopca, Grünberg wykazał, że wodociąg ślimakowy, na całej rozciągłości, od schodów bębenka do ujścia na dolnej powierzchni kości skalistej, pokrytej oponą twardą, jest kanałem wolnym, otwartym. Tegoż samego dowiódł Grünberg na czterech kościach skalistych noworodków. W jednym przypadku wylew krwawy oponowy przedostał się do schodów bębenka przez wodociąg ślimakowy. Z badań tych wynika, że wodociąg ślimakowy jest drożny. Badania te nie dają nam jednak pojęcia o tem, jaki jest stosunek wodociągu ślimakowego do przestrzeni podpajęczynkowej. Według Cloquet'a wodociąg ślimakowy jest drożny u noworodków i w młodym bardzo wieku; w wieku późniejszym wodociąg ślimakowy ma zanikać.

Widzimy więc, że poglądy badaczy są nader rozbieżne. W pracach dawniejszych nie starano się ustalić dokąd prowadzi wodociąg ślimakowy. W wyżej przytoczonych spostrzeżeniach często jest mowa o przestrzeni podtwardówkowej.

Pozwolę sobie podać wyniki badań własnych, które przeprowadzone zostały zarówno na zwierzętach, jak i na zwłokach udzkich.

Moje doświadczenia przeprowadzone zostały za pomocą mieszanki karminu z żelatyną.

Mieszanka została przyrządzona w sposób następujący: sześć gramów żelatyny pozostawiamy w 80 cm<sup>3</sup> wody na 1—2 godzin.



Po odlaniu pozostałej wody, ogrzewamy napęczniałą żelatynę. Do rozpuszczonej pod wpływem ciepła żelatyny dodajemy masy karminowej, przygotowywanej z góry, przed kilkoma dniami, w sposób następujący: do 7 gr, dokładnie sproszkowanego karminu dodajemy kilka kropel kwasu octowego i cedzimy przez flanelę.

Karminżelatynę, przyrządzoną w sposób wyżej opisany i dostatecznie ogrzaną, wprowadzamy zapomocą nakłucia podpotylicznego do przestrzeni podpajęczynówkowej. Królik taki po kilku lub kilkunastu sekundach padał. Badanie sekcyjne wykazało, że masa karminżelatynowa wypełniała całą przestrzeń podpajęczynówkową, jak również komory mózgu; masa ta przedostawała się wszędzie, gdzie znajduje się płyn mózgowordzeniowy. Łatwo się też przekonać, że wyłącznie przestrzeń podpajęczynówkowa była nim wypełniona.

Na zdjętej oponie twardej nigdzie nie znajdujemy zastrzykniętej masy. Badanie pod drobnowidzem wykazuje również, że przestrzeń podtwardówkowa jest wolna, nie nastrzyknięta. Lekkie różowawe zabarwienie niektórych części twardówki spowodowane jest przez zjawiska osmotyczne.

Badanie makroskopowe kości skalistych wykazuje obecność masy karminżelatynowej w tylnej powierzchni kości skalistej w 2 tylko miejscach: 1) w przewodzie wewnętrznym słuchowym, 2) w zagłębieniu, w którym znajduje się ujście wodociągu ślimakowego.

Badanie serji, przygotowanej według ogólnie przyjętych metod, dało wyniki następujące:

Na skrawkach, zawierających pień nerwu słuchowego, widzimy wzdłuż nerwu dwa pasemka karminowe, które ściśle przylegają do nerwu, zaś bardziej proksymalnie zlewają się ze sobą, tworząc dość pokaźną warstwę karminżelatynową w pochewce pajęczynowej nerwu. W tych miejscach, gdzie pień dzieli się na nerw ślimakowy i przedsionkowy, spostrzega się również masy karminżelatynowe w postaci odosobnionych, mniejszych lub większych wysepek o nieprawidłowych kształtach. Widoczne jest, że masa karminżelatynowa wypełnia tylko pochewkę pajęczynową nerwu. W przewodzie wewnętrznym słuchowym przestrzeń podtwardówkowa jest wolna.

Badanie ślimaka wykazało obecność karminżelatyny w schodach bębena dolnego i środkowego zakrętu. Na przekroju karminżelatyna przedstawia się w postaci wąskiego klina, ściśle przylegającego do błony podstawnej i blaszki węzownicowatej. Przy dokładnem zbadaniu serji nie udało się nigdzie znaleźć połączenia między karminżelatyną, stwierdzoną w przewodzie słuchowym wewnętrznym, a karminżelatyną w schodach bębena. Jeżeli zaś prześledzić na całej serji skrawków karminżelatynę, stwierdzoną w schodach bębena, to ujrzyć można, że w miarę zbliżania się do okienka ślimakowego, ilość karminżelatyny zwiększa się, i tuż przy okienku ślimakowym znajdujemy dużych rozmiarów trójkąt, wypełniający  $\frac{1}{3}$  część widocznego na preparacie zakrętu dolnego.

Na następnych skrawkach widzimy, że ta masa karminżelatynowa łączy się z karminżelatyną, znajdującą się w ujściu wodociągu ślimakowego, przez który karminżelatyna dostała się do schodów bębena. Na preparatach, w których znajdujemy wodociąg ślimakowy, widzimy na przekroju kanał kostny, którego światło zawiera czop karminżelatynowy. Czop ten wypełnia mniej więcej  $\frac{2}{3}$  światła. Kanał kostny ma swoją wyściółkę, która wykazuje bardzo słabe zabarwienie karminowe. Czop karminżelatynowy posiada własną otoczkę, którą z trudnością udaje się dostrzedz. Że kanał błoniasty istnieje — o tem przekonać się można na preparatach królików nie nastrykniętych.

Z wyżej przytoczonego doświadczenia wynika że:

1) u królika istnieje wolna droga, która prowadzi z przestrzeni podpajęczynówkowej do przestrzeni perylimfatycznej ucha wewnętrznego;

2) drogą tą jest kanał błoniasty, który przechodzi przez wodociąg kostny ślimaka i prowadzi do dolnego zakrętu schodów bębena, gdzie w postaci tworzywa łącznotkankowego, o budowie siatkowatej, zrasta się z błoną ślimakową z jednej strony, z drugiej zaś — z wyściółką zakrętu dolnego;

3) masa karminżelatynowa z przestrzeni podpajęczynówkowej dostaje się przez wodociąg błoniasty do ślimaka, dochodzi do zakrętu środkowego i umiejscawia się przy błonie podstawnej oraz blaszce węzownicowatej.

Tę samą metodę zastosowaliśmy u psów i otrzymaliśmy wyniki następujące: pochewka pajęczynowata n. słuchowego

jest szczelnie wypełniona masą karminżelatynową. W schodach bębena znajdujemy minimalne ślady żelatyny w tym miejscu, gdzie wiąz łącznotkankowy, wypełniający częściowo wodociąg ślimakowy kostny, zrasta się z błoną ślimakową. Badanie wodociągu ślimakowego wykazało, że wiąz łącznotkankowy był nastrzyknięty karminżelatyną od ujścia wewnętrznego, do ujścia zewnętrznego. Między wiązem nastrzykniętym, a wyściółką kanału kostnego pozostała dość szeroka szczelina nie nastrzyknięta. Przestrzeń ta nie nastrzyknięta, prowadziła do przestrzeni podtwardówkowej mózgu.

Z doświadczeń tych wynika, że 1) u psa w wodociągu ślimakowym kostnym znajduje się wiąz łącznotkankowy, zawierający dość szerokie szczeliny, które łączą przestrzeń podpajęczynówkową z przestrzenią przychłonkową schodów bębena, 2) że wodociąg kostny jest tą drogą, która łączy przestrzeń przychłonkową schodów bębena z przestrzenią podtwardówkową.

Przeprowadzone w ten sam sposób doświadczenia za pomocą karminżelatyny na zwłokach ludzkich dały wyniki ujemne, albowiem karminżelatyna w zimnych zwłokach prędko zastyga i nie wypełnia całej przestrzeni podpajęczynówkowej. Zamiast żelatyny wprowadzona została zawiesina tuszu chińskiego również za pomocą przekłucia podpotylicznego. Na sekcji można było się przekonać, że tusz chiński wypełnia przestrzeń podpajęczynówkową do jej najdrobniejszych szczelin, natomiast przestrzeń podtwardówkowa pozostaje wolna.

Badanie narządu słuchu wykazało: pochwka n. słuchowego zawiera dużo tuszu chińskiego. Tusz znajdujemy w pochewkach pajęczynowatych poszczególnych gałązek n. ślimakowego i n. przedśionkowego, wykrywamy tusz chiński tuż na granicy pasma węzownicowatego, dziurkowatego (*tractus spiralis foraminosus*), również w kanale przeznaczonym dla n. twarzowego. W schodach przedśionka nie znaleziono ziarenek tuszu, w schodach bębena natomiast znajdujemy pojedyncze ziarenka, których liczba zwiększa się w miarę tego, jak się zbliżamy do ujścia wewnętrznego wodociągu ślimakowego. Na granicy między wodociągiem, a schodami bębena znajdujemy większe skupienia tuszu chińskiego. W miarę tego, jak się oddalamy od schodów bębena i zbliżamy do ujścia zewnętrznego, natrafiamy na miejsca,

gdzie większa część światła kanału jest wypełniona gęsto skupiającymi się ziarenkami tuszu.

Jakie są warunki anatomiczne w lejku, gdzie znajduje się ujście zewnętrzne wodociągu?

Badanie, które przeprowadziłem w tym kierunku wykazało, że pajęczynówka zrasta się z twardówką. Warunki anatomiczne są takie same, jakie znajdujemy w miejscach, gdzie zwoje śródkręgowe opuszczają worek oponowy.

Z badań tych, z zastosowaniem tuszu chińskiego wnioskować można, że u ludzi niema wodociągu błoniastego, że istnieje natomiast wodociąg kostny, wysłany twardówką, z którą już w lejku zrasta się pajęczynówka, tworząc wyściółkę jednolitą. Powierzchnia wewnętrzna wyściółki wykazuje w wodociągu kostnym nierówności. Gdzieniedzie widać złogi wapienne.

Czy wodociąg ślimakowy we wszystkich przypadkach jest jednakowo drożny?

Badania przeprowadzone na 14 kościach skalistych wykazały, że w dwóch przypadkach wodociąg od ujścia zewnętrznego do ujścia wewnętrznego był o tyle drożny, że światło jego było dobrze widzialne gołym okiem; w większości przypadków światło było bardzo wąskie i widoczne tylko pod drobnowidzem. Często światło było wypełnione pasemkami łącznotkankowymi, w pojedynczych zaś przypadkach światło zanikało zupełnie. Naczynia krwionośne (żyły ślimakowej) w wodociągu nie znajdowałem; żyła kanaliku ślimaka przebiega w blizkiem bardzo sąsiedztwie w osobnym kanale kostnym. Z badań wyżej wspomnianych wynika, że w tych przypadkach, w których wodociąg jest drożny, mamy bezpośrednie połączenie między przestrzenią pajęczynówkową, a schodami bębenka. Drogi bezpośredniej między przestrzenią podtwardówkową, a schodami bębenka u ludzi nie udało mi się wykryć.

W badaniach powyższych udało mi się spostrzedz wbrew wszelkim oczekiwaniom, 1) połączenie między przestrzenią podpajęczynówkową, a szpikiem kostnym, 2) — między przestrzenią podpajęczynówkową, a uchem środkowym. Tusz chiński, wprowadzony za pomocą przekłucia podpotylicznego do przestrzeni podpajęczynówkowej udało mi się wykryć w szpiku kostnym kości skalistej. Widać było tutaj dość liczne ziarenka tuszu, przeważnie wzdłuż naczyń, a mianowicie żył, które jak wiadomo,

dosięgają w szpiku kostnym znacznych rozmiarów i posiadają b. cienką, ledwie dostrzegalną ściankę.

Fakt ten dotychczas nie znany tłumaczy nam częste powikłania wewnątrzczaszkowe, w przypadkach, w których kość skroniowa ma budowę gąbczastą, albowiem czem więcej będzie szpiku w kości skalistej, tem liczniejsze będą drogi prowadzące do przestrzeni podpajęczynówkowej.

W uchu środkowym tusz chiński znajdował się w śluzówce, w szczelinach błony zewnętrznej naczyń ścianki, należącej do żyły szyjnej (*paries jugularis*). W kanale dla nerwu bębenkowego również udało się wykryć liczne skupienia ziarenek tuszu. Należy przypuszczać, że właśnie drogą poprzez kanał n. bębenkowego tusz przedostaje się do ucha środkowego. Stwierdzone połączenie między przestrzenią podpajęczynówkową, a uchem środkowym tłumaczy nam piorunujące niekiedy wystąpienie powikłań wewnątrzczaszkowych już w pierwszych dniach istnienia sprawy usznej, zanim zdołały się rozwinąć głębsze zmiany zapalne. Stwierdzone połączenia między przestrzenią podpajęczynówkową, a uchem środkowym tłumaczy też częste powikłanie ucha środkowego w przebiegu drętwicy karku.

Z otrzymanych wyników wypływa, że narówni z ziarniną Pacchiona również i pochewki pajęczyniaste narządu słuchu oraz szpik kostny są drogami odpływu dla płynu mózgowordzeniowego.

Z pracowni neurobiologicznej T. N. W.

B. Karbowski.

### **Zur Frage einer offenen Verbindung zwischen dem subarachnoidalen Raum des Gehirns und dem Gehörorgan beim Tieren und beim Menschen.**

Mémoire présenté par Mr E. Flatau le 26 octobre 1928.¶

In meinen experimentellen Untersuchungen über Labyrinth-erkrankungen meningogener Art (Neurobiologisches Institut der Warschauer Gesellschaft der Wissenschaften, Vorstand Dr. E. Flatau, Ersch. in d. Mon. f. Ohr. H. 6 J. 1921) konnte ich feststellen, dass beim Hunde der Überleitungsweg ausschliesslich die Schneckenwasserleitung darstellt. Mit dem Auftreten der ersten klinischen

Erscheinungen seitens der Hirnhäute, konnte man entzündliche Erscheinungen in der Schneckenwasserleitung und in der unteren Windung der Scala Tympani feststellen. Bei Hunden, die für den Pneumokokkus wenig empfindlich waren und die Hirnhäute eine leichte Reizung aufwiesen, entstanden in der Scala Tympani und in der Schneckenwasserleitung ebenfalls nur sehr geringe entzündliche Veränderungen. Aus diesen Tatsachen folgt, dass der Bindegewebsstrang, der den grössten Teil der Schneckenwasserleitung beim Hunde ausfüllt, im engsten Connex mit den weichen Hirnhäuten sich befindet.

Es blieb jedoch übrig festzustellen, wie sich dieser Strang zum Subarachnoidalraum verhält, ob es eine freie offene Verbindung zwischen Subarachnoidalraum und perilymphatischem Raum des inneren Ohres gibt. Es wurden an lebenden Hunden und Kaninchen folgende experimentelle Untersuchungen angestellt. Den narcotisierten Kaninchen und Hunden wurde eine Carmingelatinelösung vermittelt eines suboccipitalen Stiches in den subarachnoidalen Raum injiziert. Nach 15—30 Sekunden fielen die Tiere. Bei der Sektion konnte man sich überzeugen, dass die Carmingelatinelösung den Subarachnoidalraum bis in seine feinsten Spalten ausgefüllt hat. Diesen Tieren entnommene Schläfenbeine wurden entsprechend vorbereitet und in Serien geschnitten. Die Untersuchungen zeigten, dass beim Kaninchen die Carmingelatinelösung vom Subarachnoidalraum in den membranösen Aquaeductus cochleae und von hier aus in die untere Windung der Scala Tympani gelangte. In der unteren Windung bildete die Carmingelatinelösung ein Dreieck, der mit der Basis der Basilmembran anliegt; in der mittleren Windung sehen wir einen schmalen Streifen. Im meatus acusticus internus erblickt man die subarachnoidale Scheide des VIII Nervenpaares ausgefüllt. In den knöchernen Kanälen des Tractus spiralis foraminosus und Areae vestibularis findet man keine Carmingelatinelösung, sondern eine feine rosarote Verfärbung der Nervenäste.

In derselben Weise angestelltes Experiment an Hunden ergab folgendes: der Bindegewebsstrang, der den knöchernen Aquaeductus passiert, ist stark mit Carmingelatinelösung imbibiert. Deutliche Spuren findet man an der Einmündungsstelle des Stranges in die untere Windung der Scala Tympani. Freie Carmingelatinelösung in der Scala Tympani ausserhalb des Stranges

find man nicht. Im meatus acusticus int. war ebenfalls nur die Subarachnoidalscheide des VIII Nervenpaares ausgefüllt. Aus diesen Experimenten folgt, das bei Tieren eine freie offene Verbindung zwischen Subarachnoidalraum und perilymphatischem Raum des inneren Ohres besteht.

Untersuchungen an menschlichen Leichen von Neugeborenen (mit derselber Technik bearbeitet) fielen negativ aus. Die Gellatinlösung erstarrt in der abgekühlten Leiche ziemlich schnell und es gelang bisjetzt nicht den ganzen Subarachnoidalraum auszufüllen. Aus diesem Grunde benutzte ich zu demselben Zwecke die chinesische Tusche, welche den ganzen Subarachnoidalraum bis in seine feinsten Spalten ausfüllt.

Die Untersuchungen der Schläfenbeine, die eine kontinuierliche Serie darstellen, ergab, dass die arachnoidale Scheide des VIII Nervenpaares mit chinesischer Tusche gefüllt ist. Die chinesische Tusche reicht bis zum Tractus spiralis foraminosus und bis zur Areae vestibularis. Die chinesische Tusche überschreitet nirgends die Grenze der arachnoidalen Scheiden der einzelnen Nervenäste. In den knöchernen Kanälen des Tractus spiralis foraminosus und im Canalis spiralis Modioli finden wir keine Tusche. Im endolymphatischen Raum konnte man ebenfalls nirgends chinesische Tusche auffinden. Im perilymphatischen Raum dagegen, namentlich in der unteren Windung der Schnecke finden wir einzelne, ebenfalls in Gruppen angeordnete Körnchen. An der Einmündungsstelle der Schneckenwasserleitung nimmt die Menge der chinesischen Tusche zu. Im Inneren der Schneckenwasserleitung in der Richtung der Ausmündungsstelle sehen wir Wolkenartige Gebilde, die sich, bei genauere Untersuchung, als fein gepulverte chinesische Tusche entpuppten.

Wie gestalten sich die anatomischen Verhältnisse in der Nische, wo sich die Ausmündungsstelle der Schneckenwasserleitung befindet?

Die anatomischen Verhältnisse sind dieselben, die man an den Austrittsstellen der Spiralnerven aus dem Duralsacke findet; die Arachnoidea ist mit der Dura verwachsen. In der Schneckenwasserleitung selbst finden wir keinen Ductus membranous perilymphaticus. Die Duraauskleidung der Schneckenwasserleitung

ist uneben, hie und da finden wir Kalkablagerung in Form von Stäbchen und Lamellen.

Folgendes sei noch hervorgehoben: In einzelnen Knochenmarksräumen und Gefässkanälen des Felsenbeins sammelte sich in beträchtlicher Menge chinesische Tusche. Bei genauer Betrachtung konnte man sich überzeugen, dass die Tusche entlang den Venen gelegen ist. Noch auffallender war es, dass man in den Gefässkanälen der *cellulae Tympanicae* der unteren Wand (*paries jugularis*) ebenfalls chinesische Tusche vorfand.

Aus meinen Untersuchungen folgt:

1) dass auch beim Menschen einen freie offene Verbindung zwischen dem subarachnoidalen Raum und dem perilymphatischen Raum des inneren Ohres vorhanden ist,

2) dass zwischen dem subarachnoidalen Raume und dem Knochenmark eine offene Verbindung möglich ist,

3) dass eine freie Verbindung zwischen dem subarachnoidalen Raum des Gehirns und den Gefässen der Mittelohrerschleimhaut vorhanden ist.

Die freie Verbindung zwischen den subarachnoidalen Raume des Gehirns und den Blutgefässkanälen der *Paries jugularis* und der *cellulae Tympanicae*, erklärt einerseits das Entstehen von intrakraniellen Komplikationen, im Frühstadium der Mittelohrentzündungen, andererseits die Mittelohrentzündung im Verlaufe der epidemischen Genickstarre. Der festgestellte Verbindungsweg zwischen dem Knochenmark und dem subarachnoidalen Raum erklärt uns das häufige Auftreten von intrakraniellen Komplikationen bei diploetischen Schläfenbeinen.

Aus dem neuro-biologischen Laboratorium der Ges. f. Wissenschaften  
in Warschau. *Sté des Sciences et des Lettres de Varsovie.*



Zbigniew Sujkowski.

## Uwagi o pochodzeniu materiału klastycznego górnego Cenomanu Solcy i Wolbromia.

Przedstawił J. Lewiński dn. 26-go października 1928 r.

### WSTĘP.

W swojej pracy o budowie geologicznej okolic Wolbromia<sup>1)</sup> wyraziłem przypuszczenie, iż gruby materiał żwirów Cenomanu tutejszego pochodzi z kajpru, leżącego po drugiej zachodniej stronie kuesty jurajskiej.

Bliższe badania materiału piasków, piaskowców, żwirów i zlepieńców z górnego Cenomanu wschodniego zbocza Jury Krakowsko-Wieluńskiej okolic Wolbromia i Solcy zmuszają mnie do zmiany wówczas wypowiedzianego poglądu.

Próbki do analizy brałem z poziomu górno-cenomańskiego, który został wybrany do badań z całej serji klastycznej reprezentującej Cenoman i prawdopodobnie Alb, jako najlepiej i najściślej określony stratygraficznie.

Badania dokonałem w pracowni geologicznej Collège de France w Paryżu u prof. L. Cayeux, za którego cenne rady i wskazówki miło mi złożyć podziękowanie.

Prof. J. Lewińskiemu dziękuję za uprzejme przeczytanie rękopisu i krytykę.

### Występowanie i budowa warstw górnocenomańskich.

Od okolic Krakowa aż za Koniecpol na północy poziom górnocenomański jest znany.

Nie występuje on ciągłym pasem wzdłuż pasma Jury Krak.-Wieluńskiej, gdyż miejscami wyższe ogniwa kredy leżą bezpośrednio na Jurze.

Zgrubsza możnaby wyróżnić cztery obszary wychodni skał środkowo kredowych (Cenoman i prawdopodobnie Alb) na za-

1) Sujkowski Zbigniew — O utworach jurajskich, kredowych i czwartorzędowych okolic Wolbromia. Spraw. Państw. Inst. Geolog. t. III. 1926.

chodnim brzegu niecki Nidziańskiej. Mianowicie są to obszary: Krakowski, Wolbromski, Solecki i Lelowski.

Czy na północ od okolic Koniecpola pod pokrywą morenową nie będziemy mieli następnych obszarów pozostaje rzeczą niepewną, a zresztą nie będzie to już prawdopodobnie obszar wchodzący w ramy niecki Nidziańskiej sensu stricto.

We wszystkich tych czterech grupach występuje mniej lub więcej gruba serja skał klastycznych, trudna do ścisłego rozpozniomowania, obejmująca Cenoman i przynajmniej część Albu, która wszędzie kończy się poziomem górnó cenomańskim. Miejscami widać dobrze, iż poziom ten jest transgredujący w stosunku do niżej leżących piasków i piaskowców, a nawet zawiera wyraźnie dolno- czy środkowo- cenomańskie skamieniałości na wtórnem złożu (Śławniów, Głanów).

Poziom ten stanowi więc bardzo samodzielne ogniwo, nadające się do wyróżnienia.

Petrograficznie facja jest zmienna. Cenoman górny, tam gdzie leży na piaskach rozwinięty jest również jako piaski, lub też jako żwirki, lub żwiry czyste lub z piaskiem, różniące się od niższych poziomów większem bogactwem glaukonitu<sup>1)</sup> i obecnością często obfitej fauny.

Tam gdzie leży na wapieniach jurajskich, poziom górnó cenomański jest reprezentowany najczęściej przez zlepieńce żwirowe lub krzemieniste o lepiszczu marglowem, przez piaski margliste, przez margle żwirkowate i t. d. Wyjątkowo przez czyste margle. Glaukonit spotyka się we wszystkich tych facjach przeważnie jako naloty na krzemieniach, żwirach i t. p.

W tej facji zlepieńcowej fauna jest jeszcze obfitsza, tam gdzie widać strop, to kosztantuje się, iż zlepieńce, żwiry, piaski i t. d. górnó-cenomańskie leżą zgodnie z wyżej leżącymi marglami dolnego turonu. Na Jurze zaś leżą wyraźnie niezgodnie.

W przerwach między czterema obszarami wychodni poziom opisywany jest schowany pod transgresywnymi warstwami Turonu i Senonu.

---

<sup>1)</sup> Serja albsko-cenomańska zaczyna się utworami bardzo bogatymi w glaukonit, które ku górze przechodzą w piaski i piaskowce prawie lub zupełnie bezglaukonitowe, Cenoman górny znów zaznacza się obfitością glaukonitu.

Naogół opisywany poziom górno-cenomański jest niegruby i waha się od  $1\frac{1}{2}$  do 3 metrów (tam gdzie można grubość ustalić to znaczy, gdzie jest widoczny i spąg i strop).

### Profile, z których brane były próbki<sup>1)</sup>.

Próbki do badań użyte były z następujących odsłoneń.

Glanów<sup>1)</sup>. Zlepieniec g.-cenomański grubości 1— $1\frac{1}{2}$  m. leży niezgodnie na jurze płytowej, przykryty zgodnie margłami dolnego Turonu (niezgodność kątowna 20<sup>0</sup>).

Poręбка<sup>2)</sup> Piaski przykryte żwirem i konkrecjami krzemienistymi.

Wolbrom-Brzozówka. Żwiry górne.

Poręba-Dzięzna<sup>2)</sup>. W dolinie, we wsi Cenoman górny jako margle ze żwirem leży pod margłami dolnego Turonu zgodnie. Gruby na  $1\frac{1}{2}$ —2 m.

W 1927 r. miałem możność obserwować w wykopie spąg tej warstwy przedtem nieznaną, reprezentowaną przez  $\frac{3}{2}$  m. glaukonitowych piasków i niżej przez przeszło 2 m. grubą serię sypkich, białych, bardzo oryginalnych piaskowców kaolinowych z ciemnym glaukonitem, z fauną małży i jeżowców trudno określalnych z których oznaczyłem: *Holaster suborbicularis* Defr., *Discoidea subaculus* Klein, *Discoidea* sp., *Catapygus* sp., *Pyrina inflata* d'Orb., *Terebratula* cf. *phaseolina* Lam., *Terebratulina* sp., *Modiola* sp., *Inoceramus* sp., *Pecten orbicularis* Sow., *Lima* cf. *semiornata* d'Orb. *Opis* cf. *neocomiensis* d'Orb., *Cyprina* (?) sp.

Najliczniejszym elementem są małże bliżej nieokreślone. Cała fauna jest zachowana w odlewach, czasami są skorupki zachowane ale wtedy całkowicie skrzemionkowane. Prawdopodobnie jest to fauna dolno-cenomańska (może początek środkowego Cenomanu).

<sup>1)</sup> Profile nie opisane w literaturze podałem obszerniej, o innych tylko wspominam.

<sup>2)</sup> Sujkowski Zb. — ibidem.

Oprócz fauny podanej w pracy poprzedniej w zlepieniu Glanowskim znalazłem: *Ostrea* cf. *hialitoidea* Sow., *Actinocamax plenus* Bl., *Pileolus* (?) cf. *Orbigny* Geinitz, *Cidaris* sp., *Holaster* cf. *carinatus* Lam., *Terebratulina* cf. *striatula* Mant.

Sławniów. Odkrywka koło traktu nienotowana w literaturze. Zlepieniec żwirowy górnocenomański bardzo twardy, przykryty zgodnie również twardymi (szczególnie u dołu) marglami dolnego Turonu. Upad koło 12<sup>0</sup> ku wschodowi. Spotykanne w zlepieńcu fosforyty wypełniają odlewy małży i leżą na wtórnym złożu. Zlepieniec leży na jurze skalistej, niezgodność niewyraźna, ale jest. Fauna tego typu co w Głanowie tylko różni się większą ilością form większych.

Oznaczyłem: *Actinocamax plenus* Bl., *Pecten* sp., *Ostrea* cf. *diluviana* L., *Ostrea* sp., *Inoceramus* sp., *Avellana cassis* d'Orb., *Rhynchonella depressa* Sow., *Terebratula* cf. *depressa* Lam., *Terebratula* sp., *Micraster* sp., *Serpula* sp., zęby rybie i t. d.

Siadczą. Piaskowce i kwarcyty Albsko-Cenomańskie zakończone piaskami marglistymi z fauną górnocenomańską.

Solca. Serja piaskowców kredowych (Albsko-Cenomańskich) kończy się serją zielonych, lekko marglistych piasków sypkich z fauną górnocenomańską (*Ac. Mantelli*, *Inoceramus*, cf. *concentricus*, *Lima* sp., zęby rybie i t. d.).

Odkrywki widoczne w drodze na NO. Od środka wsi w wykopie i w szeregu punktów wzdłuż następnego wzgórza na N, równoległego do wsi, którego grzbiet zbudowany jest z margli Turonu, a na wszystkich zboczach sypie górny Cenoman, a niżej piaski dolnych poziomów Cenomanu.

Dobraków. 0,25 m. piasków g.-cenomańskich z pod margli turońskich.

### Metody badania materiału.

Próbki na terenie opisywanym były zbierane osobiście.

Pozatem z Krakowskiego posiadam 2 próbki dzięki uprzejmości D-ra A. Gawła. Oprócz tego zarówno dla terenów badanych jak i dla Lelowskiego czerpałem również ze zbiorów St. Kontkiewicza, B. G. Puscha i innych, znajdujących się w Zakładzie Geologii i Paleont. U. W.

Badania materiału szło dwiema drogami: analizą mineralogiczną piasków i badaniem szlifów mikroskopijnych wykonanych ze skał twardych i większych otoczków żwirów.

## Badanie piasków.

Analiza piasków polegała na rozdzieleniu badanej próbki (ca 50—100 gr.) na pięć części. Najpierw bromoformem rozdzielałem na części cięższe i lżejsze niż 2,85. Granica ta jest niezmiernie charakterystyczna dla minerałów skał osadowych. W części cięższej zostawały prawie wszystkie minerały rzadkie. Każda część została rozdzielona silnym elektromagnesem na minerały elektromagnetycznie wrażliwe i obojętne.

Wreszcie od minerałów ciężkich wrażliwych na elektromagnes zwyczajnym magnesem oddzielałem minerały magnetyczne jak magnetyt.

Z wszystkich 5 frakcji robiłem preparaty w balsamie kanadyjskim i poddawałem obserwacji mikroskopowej.

Próbki do tej analizy były brane z wyżej wymienionych profili, z poziomu górno-cenomańskiego obszarów Solcy i Wolbromia.

Na tej drodze dało się ustalić następujące listy minerałów spotykanych w piaskach cenomańskich ułożone według częstości występowania: kwarc, glaukonit, muskowit i biotyt (ostatni nieświeży, żółto rudawej lub złocistej barwy), skalenie, rutil, andaluzyt, turmalin (większość ziarn o pleochroizmie szaro-czarnym, b. rzadko niebiesko-białym), minerały czarne (głównie magnetyt), cyrkon, limonit, granat (biały, rzadziej jasno-różowy w ziarnie), cjanit (przeważnie o słabym pleochroizmie niebiesko-białym, lub bezbarwne), staurobit (z wrostkami), anataz, brukit, epidot (nie we wszystkich próbkach), korund, piroksen (w jednej próbce), kasyteryt (?). Kilka minerałów nieoznaczonych: ciemnoczerwony krwisty, izotopowy — może spinel, metaliczny, czarny nie magnetyt i nie ilmenit.

Uderza iż kwarcze posiadają częste dość wrostki stałe magnetytu lub jasnych minerałów, zato do rzadkości należą wrostki gazowe i ciekłe.

Większość ziarn kwarcu jest słabo otoczona lub poobijana.

Wśród minerałów rzadkich większość ziarn połamana i ma zaledwie słabo otoczone krawędzie.

Niektóre jak cyrkon, a częściowo brukit, rutil, mają dobrze zachowane kształty krystaliczne, przeważnie o zaokrąglonych

krawędziach. Cyrkony przeważnie jako dość krótkie słupy zakończone piramidami (jeśli można sądzić z literatury — zbliżone do typu Sudeckiego<sup>1)</sup>), Większość jednego typu.

Zwraca uwagę większa obfitość rutyli niż cyrkonów.

Rutyle często zbliżniane (prawo bliźniacze kolankowe — *mâche en genoux*). Zachowania dobre tak nietrwałych kształtów mogłoby świadczyć o niezbyt dalekim transporcie.

Rutyle oprócz ziarn dwu typów (ciemno brązowe i żółto brązowe). Spotykają się jako wzrostki w andaluzycie, rzadziej kwarcu.

Ilość minerałów ciężkich waha się w granicach 0,2—0,5%.

### Pochodzenie materiału.

Jeśli poszczególne materiały tak cyrkon, rutil, turmalin i t. d. mogą występować w różnych skałach krystalicznych i nie są charakterystyczne dla poszczególnych typów skalnych, to inne składniki piasków cenomańskich jak andaluzyt, cjanit, granat, epidot, staurolit, korund są charakterystycznymi minerałami akcesorycznymi skał metamorficznych. Jeśli poszczególne z tych minerałów mogą występować i w innych skałach, to zespół cały jest bardzo charakterystyczny i należy przypuszczać iż skały metamorficzne dostarczyły materiału klastycznego dla piasków górnio cenomańskich.

Brak apatyty tak pospolitego minerału akcesorycznego granitów również potwierdza ten wniosek.

Na korzyść jego przemawia również charakter kwarców o licznych wzrostkach stałych, a bardzo rzadko płynnych i gazowych, liczne kwarcy wykazują faliste znikanie światła.

Wyłania się zagadnienie czy minerały ciężkie, a wraz z tem i inne pochodzą bezpośrednio ze zniszczenia skał krystalicznych, czy też są na wtórnym lub dalszym złożu?

Odpowiedź na to bardzo ciekawe pytanie jest ogromnie trudne. Kwestja zaś dla wniosków paleogeograficznych jest pierwszorzędno znaczenia.

---

1) Zerndt J. Cyrkony jako minerały przewodnie. Spraw. Ak. Um. Nr. 6. str. 23. Kraków 1927.

Jednolity zespół minerałów, odmienność cyrkonów od cyrkonów z pobliskiego Triasu<sup>1)</sup>, inność otoczków (patrz niżej omówienie grubego materiału) często dobre zachowanie konturów krystalograficznych minerałów rzadkich, słaby stopień otoczenia, zachowanie tak kruchych form jak — bliźniaki rutilu skłaniają mnie do opinii, iż mamy tutaj do czynienia z materiałem, który przeważnie pochodzi bezpośrednio ze skał krystalicznych (nie uwzględniam tutaj zagadnienia czy nie pochodzą z bezpośrednio niżej leżącego dolnego cenomanu — bo wtedy całe rozważanie przesuwa się na materiał dolno-cenomański, nie zmieniając w niczym całości poglądów)

Ostatnia praca Radziszewskiego<sup>2)</sup> jest z tego względu bardzo ciekawa, iż pozwala stwierdzić, iż materiał klastyczny dolnego kambru gór Świętokrzyskich jest zupełnie obcy materiałowi piasków badanych Cenomanu. Radziszewski stwierdził bowiem, iż materiał dla dolnego kambru dostarczyły przede wszystkim skały ogniowe, głównie granity, a tylko w drobnej mierze skały z rodziny sjenitów, gabbra, częściowo i łupki krystaliczne. Odbija się to na zupełnie innym zespole minerałów rzadkich. Z tego wynika iż dolny kambr gór Świętokrzyskich nie może być ani głównym ani częściowym źródłem dla materiału skał badanych. Osobiście przypuszczam, iż gdyby nasz materiał badany pochodził z gór Świętokrzyskich, w odległości przeszło 100 klm. mielibyśmy mieszaninę materiału klastycznego, w którym możnaby oczekiwać, iż będzie reprezentowany i dolny kambr. Brak jego, jeśli nie dowodzi, to w każdym razie zgadza się z wnioskiem, iż nie w tym starym masywie leżało źródło skał badanych.

### Badania żwirów.

Jeśli przejdziemy teraz do drugiej części badania, dokonanej na szlifach mikroskopowych z otoczków ze żwiru i zlepieńców z tego samego poziomu górnocenomańskiego, to uzyskamy pewne obserwacje popierające dotychczasowe wnioski.

Mianowicie szlify wykazały, iż wśród żwiru obok dominujących ziarn kwarcu, składającego się z jednego lub kilku osobników krystalicznych, spotykamy zrzadka otoczki ze skał różnych. Do nich należą otoczki conajmniej dwu typów kwarcytów. Powtarzają się one w żwirze stale, choć stanowią drobną do-

1) W próbkę żwiru Triasowego z Błędowa widziałem mieszaninę kilku typów cyrkonów, obok form à la cenomańskie, krótkie ziarna z zatartymi konturami i długie wąskie słupy.

2) Radziszewski P. Przyczynek do petrografii dolnego kambru we wschodniej części gór Świętokrzyskich. Spraw. P. I. G. t. IV. zes. 3—4 str. 499—535 r. 1928.

mieszkę w żwirze. Jeden z tych kwarcytów (ciemny) jest wyraźnie zwykłym kwarcytem osadowym (pewno paleozoicznym) drugi (jasny) być może jest kwarcytem, który podlegał metamorfozie, choć rozpoznanie to nie jest pewne (bardzo drobnoziarnisty z mika, która czyni wrażenie nowotworów).

Ciekawsze od otoczków z kwarcytów są czasami spotykane otoczki z gneisu. Są one silnie rozłożone (zmienione skalenie, jeden okaz przesiąknięty opalem). Spotkałem tylko kilka ziarn.

Pozatem są otoczki z innych skał krystalicznych, również bardzo rzadkie, których określić nie udało mnie się (dominującym elementem kwarc i skaień).

Otoczki z gneisu potwierdzają więc wniosek, iż skały metamorficzne dostarczyły materiału na piaski i żwiry g.-cenomańskie. Tu możnaby dodać, iż oprócz skał metamorficznych przed chwilą wspomniane kwarcyty brały udział w budowie tego nieznanego masywu, który dostarczył materiałów dla piasków badanych.

Oprócz tego wśród żwirów górno-cenomańskich, szczególnie tam gdzie leży on bezpośrednio na skałach jurajskich, częste są otoczki z krzemieni jurajskich, pochodzące z bezpośrednio niszczonego podłoża i powleczone zazwyczaj glaukonitem. Procent tych krzemieni w żwirach wzrasta w miarę posuwania się ku północy.

Rzadsze są otoczki wapienne nieraz pokryte dendrytami.

Nowym jeszcze elementem w żwirach są fosforyty występujące na terenie badanym głównie w Głanowie i Sławniowie, w tymże poziomie górno-cenomańskim. Nie wdając się w ich opis, zaznaczę tylko cechę istotną dla obecnych rozważań, to jest iż fosforyty wypełniające często odlewy małży i innych organizmów przeważnie również cenomańskich są mniej lub więcej toczone i ięzą prawdopodobnie na wtórnym złożu.

Jest to więc znów odrębny materiał klastyczny pochodzący również z bezpośredniej bliskości<sup>1)</sup>.

Dla uzupełnienia listy skał, z których otoczki leżą na górno-cenomańskim złożu, wspomnę pokrótce o bardzo ciekawych konkrekcjach żelazistych, barwy ciemno czerwonej, zazwyczaj jaśniejszych i znacznie miększych w środku, czasami jednolicie

1) Wylania się tu więc kwestja niszczenia przez transgresję górno-cenomańskich utworów ewentualnie dolno-cenomańskich, do której to kwestji wrócę kiedyindziej.



twardych, czasami zaś zawierających w środku ziarna żwiru kwarcowego. Otóż znaczna część tych konkretyj jest toczona i leży na wtórnym złożu. Większość ich waha się od orzecha laskowego do pięści, czasami osiągając większe rozmiary.

Zewnętrznie i pod mikroskopem przypominają bardzo tak zwane syderolity (Siderolithe) z Cause s. Francji<sup>1)</sup>, lub z Szwajcarskiej molasy gdzie występują w trzeciorzędzie, często już na wtórnym złożu. Tylko dokładne badanie chemiczne kwestję tę rozstrzygnie w przyszłości. Jeśli jednak podobieństwo to potwierdzi się, to będzie można mówić o podobnym pochodzeniu, a więc iż będą to produkty wietrzenia powierzchniowego wapieni w klimacie gorącym i wilgotnym. Byłaby to ciekawa wskazówka dla paleoklimatu środkowej ewentualnie dolnej kredy.

Reasumując powyżej przytoczone obserwacje można postawić hipotezę iż większość materiału klastycznego piasków i żwirów badanych, po odtrąceniu materiału lokalnego, pochodzi ze zniszczenia starego trzonu, którego głównym składnikiem były jakieś skały metamorficzne.

Żwiry kajpru, ze swą ogromną przewagą otoczków ze skał klastycznych, jak zlepieńce, kwarcyty, piaskowce, łupki skrzemionkowane, łupki żelaziste, czasami wapienie, a ubóstwem kwarcu czystego mogącego pochodzić z żył skał ogniowych lub metamorficznych, który jest obfity w żwirach cenomańskich szczególnie na pld. obszaru badanego, nie są prawdopodobnie materiałem macierzystym żwirów cenomańskich.

Należy szukać jakiegoś wówczas niszczonego ładu o przewadze skał metamorficznych.

Gdzie należy umieścić ten hipotetyczny masyw krystaliczny? Wobec tego, iż znamy trzy obramienia kredowej niecki Nidziańskiej, i że w tych trzech bokach szukanych niema go, nasuwa się wniosek szukania go z czwartej strony, to znaczy na S. od uskoku Zawihost—Kurdwanów, gdzie może być zagrzebany pod masą utworów młodszych.

Czy są dane obserwacyjne potwierdzające tego rodzaju przypuszczenie?

Częściowo tylko można odpowiedzieć. Mianowicie skały klastyczne zaczynające transgresję kredową (Cenoman i Alb) przedstawiają serję zmiennej grubości, wyklinowując się nawet

<sup>1)</sup> Znacznie rzadziej przybierają budowę pisolityczną, bardzo często w Szwajcarii, rzadsze na Cause, i w Morwanie.

miejscami całkowicie, ale z wyraźną tendencją grubienia ku północy.

$1/2$  — 4 metry pod Krakowem<sup>1)</sup>, 8—15 m. pod Wolbromiem, przeszło 25 m. w obszarze Solcy, przeszło 30 m. w obszarze Lelowa.

Obserwacja ta jest raczej sprzeczna z szukaniem źródła grubego materiału na południu.

Ale jest obserwacja inna. W każdym bowiem profilu skał klastycznych zaczynających serję kredową na zachodnim obrzeżeniu niecki Nidziańskiej możemy spotkać różne wielkości ziarn, zaczynając od grubego żwiru, a kończąc na miłym piasku. Lecz w miarę posuwania się od okolic Częstochowy—Koniecpola na południe procentowy udział materiału grubego wzrasta wyraźnie. Drobne, kilkucentymetrowe ławice żwiru w północnej części obszaru stają się liczniejsze i grubsze ku południowi.

Za to maleje w nich ilość materiału jurajskiego (krzemienie), a wzrasta ilość otoczków kwarcu. Koło Wolbromia stanowią już żwiry około połowy skały (na pld. od stacji). Udział żwirów koło Krakowa [wzrasta znacznie. Jednocześnie wzrasta średnia grubość ziarna żwirów, które koło Koniecpola przeciętnie wynoszą 3—4 mm., koło Lelowa 4 mm., koło Solcy 5—7 mm., koło Wolbromia 8—10 mm., koło Krakowa, sądząc po posiadanych próbkach, 1 cm. do 3 cm. (Naturalnie są to średnie wielkości, poszczególne żwiry wszędzie zdarzają się i znacznie większe).

Otóż mamy dwie sprzeczne obserwacje. Grubość serji wzrasta ku północy, grubość ziarna wzrasta ku południowi. Jest pole do dwojakiej interpretacji. Jak wynika z badań L. C a y e u x, w razie sprzeczności między kierunkiem grubienia serji a grubieniem ziarna, wskazówką decydującą o kierunku pochodzenia materiału klastycznego jest grubość ziarna. Jako przykład można przytoczyć brzegi pld. Kanału La Manche. Materiał klastyczny pochodzi ze starego masywu Bretanii, wędruje na wschód, w samym kanale prawie się nie osadza, miejscami gromadzą się żwiry, miejscami przeważa tylko erozja, osad się nie gromadzi, za to na brzegach Holandji powstaje gruba serja skał klastycznych — piasków, które przewędrowały przeszło 500 kl. wzdłuż kanału.

<sup>1)</sup> Z a r ę c z n y S t. O średnich warstwach kredowych w okol. Krakowa. — Spraw. Kom. Fizjograficznej A. U. tabl. 5, otr. 176—247, t. XII. — 1878. Kraków.

Na wschodnim zboczu niecki Nidziańskiej, dla którego dane czerpię z literatury, pomimo bliskości starego masywu Świętokrzyskiego grubego materiału (żwirów, otoczaków) w serji klasycznej kredowej (Alb. Cenoman) jest bardzo mało, żwiry stanowią znikomy procent skały.

Obserwacje co do udziału żwirów w skałach klastycznych kredy potwierdzałyby hipotezę zakładającą, iż źródła grubego materiału należy szukać gdzieś na S. lub SO. od pasma Jury Krakowsko-Wieluńskiej, powiedzmy w pobliżu Krakowa.

Otóż istnieją pewne dane, pozwalające szukać w tych stromach bezpośredniego źródła dla cenomańskiego materiału zachodniego zbocza Jury Krakowsko-Wieluńskiej. Mianowicie są niemi egzotyki z fliszu karpackiego, a przede wszystkim rezultat wiercenia w Rzeszotarach<sup>1)</sup>, a 10 kl. na SO. od Krakowa. Rezultat wiercenia podaje Nowak według Petrascheck'a. Profil przedstawia się tak:

- od 0 do 795 m. — flisz
- „ 795 „ 819 m. — Jura biała
- „ 819 „ 833 m. — serja zlepieńca z łupku miko-  
wego i kwarcu, którą Petrascheck  
przyjmuje jako ewentualny Perm
- „ 833 „ 838 m. — rozłożony łupek zielony, łupki  
chlorytowe zawierające wapien
- „ 838 „ 840 m. — muskowitowy gnejs czerwony,  
w którym przerwano wiercenie.

Prof. Kreutz podaje szczegółowy opis skał wydobytych z głębokości 832—840 m. Znalazł on tam mianowicie, iż: „wszystkie skały są silnie prasowane i uległy dynamo-metamorfizmowi i wykazują stosunkowo niski stopień metamorfozy regionalnej i pochodzą z piętra średniego (mezo), częściowo z piętra najwyższego (epi). Są tu zarówno skały zmienione magmowe, jak i osadowe. Gnejs czerwony powstał jak się zdaje z granitu, w chlorytową skałę przeobraziły się zaś jakieś skały typu diabazowego, które poprzednio zmieniły się w łupek amfibolowy”. Gneisy czerwone podobnego typu odgrywają według tego autora dużą rolę w budowie Gór Kruszcowych.

<sup>1)</sup> Nowak J. Zarys tektoniki Polski. II zjazd Słowiańskich Geografów w Polsce. Kraków 1927, rozdział opracowany przez prof. Kreutz'a.

Również podobne gneisy czerwone obok innych skał krystalicznych są pospolite jako egzotyki we fliszu okolic Bochni, Baraniej Góry, i szeregu punktów Beskidu Zachodniego (patrz Nowak — tamże), charakteryzujące się czerwoną barwą biotytów.

(Bardziej żółta barwa biotytów z piasków badanych może być rezultatem zwietrzenia).

Mamy więc bardzo ciekawe dowiercenie się do skał krystalicznych metamorficznych pod Krakowem.

Naturalnie punkt w Rzeszotarach posiada trzon krystaliczny przykryty przez perm(?) i jurę choć już bardzo cienką, ale uniemożliwiającą odsłonięcie tego miejsca na powierzchni cenomańskiej. Ale ważne jest, iż skały tego typu odszukane zostały. Jeśli pod samym prawie Krakowem pokrywa jury grubej w samym mieście na setki metrów jest już zredukowana do 24 m., Triasu brak już, to jeszcze dalej na płd. wolno nam przypuścić, iż pokrywa ta w czasie cenomańskim nie istniała.

Słowem, iż masyw metamorficzny był na ówczesnej kredowej powierzchni i podlegał niszczącemu działaniu fal morskich.

Hipoteza taka, która oddzielałaby morze kredowe niecki Nidziańskiej od geosynkliny karpackiej, ułatwiałaby dobrze zrozumienie różnic i braku komunikacji między temi tak sobie obcemi obszarami w okresie cenomańskim.

Materiał klastyczny więc wędrowałby na północ, aż do Częstochowy ewentualnie i dalej jeszcze, od tego nieznanego masywu. Otóż przypuszczenie, każące wędrować tak daleko na póln. materiałowi piasków i żwirów, niema w sobie nic nieprawdopodobnego. Dla przykładu przypomnę przykład przytoczony powyżej Kanału La Manche, gdzie piaski wybrzeży Holandji pochodzą ze skał masywu armorykańskiego, czyli podlegają transportowi przeszło 500 kl. wzdłuż całego kanału.

Możnaby postawić zarzut, iż wobec tego i nasz materiał nie pochodzi z pod Krakowa czy innych niedalekich miejscowości, lecz pochodzi z dalszych masywów, w grę wchodzi przedewszystkiem Sudecki masyw, ten jednak przeważnie był oddzielony skałami paleozoicznymi od morza kredowego, a jeżeli w części był niszczone przez abrazję cenomańską, to w takiej odległości, iż trudno by wytłomaczyć zachowanie materiału pochodzącego tak wybitnie ze skał metamorficznych a zniszczenie materiału skał innych, wchodzących w skład masywu Sudeckiego. Przeciwno dalekiemu trans-

portowi przemawia również stan zachowania materiału i duży procent żwirów w serji klastycznej.

Hipoteza wysunięta w tej pracy, szukająca źródła materiału klastycznego na pld. od linii tektonicznej Zawichost—Kurdwanów nie jest pierwszym tego rodzaju przypuszczeniem.

S a m s o n o w i c z wypowiedział bowiem pogląd, iż materiał klastyczny kambru wschodniej części gór Świętokrzyskich został przyniesiony z pld., [a więc poza linią uskokuwą leżało źródło grubego materiału.

Naturalnie obszar jest odległy, okres jeszcze odleglejszy, ale jest to jedyny pogląd jaki znam, tyżący wnioskowania o charakterze zagrzebanego pod rowem Chrobackim podłoża starszego, wywnioskowany z charakteru skał istniejących po drugiej północnej stronie uskokuwej linii.

Znacznie więcej zagrzebanemi i zniszczonemi masywami staroimi na miejscu dzisiejszych Karpat zajmowali się badacze Karpat. Istnienie starych łańcuchów górskich na miejscu dzisiejszych Karpat przyjęte jest dziś powszechnie. Badanie egzotyków wydobytych z fliszu rzuca czasami trochę światła na budowę tych starych trzonów. Poważny udział skał metamorficznych w budowie Prakarpat na miejscu dzisiejszego Beskidu Zachodniego jest niewątpliwy<sup>1)</sup>.

Nie wdając się jednak w dalsze przypuszczenia, zaznaczę, iż przyjęcie istnienia barjery w postaci starego trzonu, sterczącego na powierzchni w czasie cenomańskim, i rozdzielającego morze kredowe Nidziańskie od geosynkliny karpackiej, ogromnie ułatwia zrozumienie charakteru basenu kredowego Nidy i tłomaczy różnicę od mórż karpackich.

Pracownia Geologii w Collége de France w Paryżu  
i Zakład Geologii i Paleontologii Uniwersytetu Warszawskiego.

---

<sup>1)</sup> N o w a k — ibidem.

Zbigniew Sujkowski.

## Recherches sur la roche-mère des dépôts clastiques au cenomanien sup. de Solca et Wolbrom.

Mémoire présenté par Mr. J. Lewiński le 26 octobre 1928.

R e s u m é.

Une analyse microscopique des sables et des grès provenant des environs de Wolbrom et de Solca (le versant occidental du Bassin de la rivière Nida) était exécutée par l'auteur sous la direction de M. Cayeux dans le laboratoire du Collège de France à Paris.

La composition des minéraux lourds était la plus intéressante et permettait de décider que les matériaux provenaient en majorité sinon exclusivement des roches métamorphiques. La composition du sable Cenomanien diffère de composition des grès Triassiques qui se trouvent dans les terrains voisins.

Les sables ne proviennent non plus du vieux massif de St. Croix, car les éléments communs y manquent.

Le caractère des grains, la présence des formes cristallographiques montrent que les sables ne pouvaient être transportés de loin. L'auteur suppose que les roches-mères des sédiments du Cenomanien supérieur en question devaient se trouver au S. O. de Cracovie cachés aujourd'hui sous les nappes Carpathiques.

Cette hypothèse est d'autant plus vraisemblable que: 1) les observations en place de la diminution de la dimension des éléments vers le Nord indiquent que les matériaux clastiques sont arrivés du Sud. 2) de l'autre côté un sondage profond placé à 10 kl. SE. de Cracovie a pénétré à la profondeur de 833 m. dans des roches cristallines: ce sont des gneiss rouges et des schistes métamorphiques. Ce n'est pas impossible qu'on ait ici à faire avec les traces du massif recherché.

Exécuté dans Laboratoire de Géologie de Collège de France à Paris  
et dans Laboratoire de Géologie et Paléontologie de l'Université de Varsovie.

Zbigniew Sujkowi.

## W sprawie lessów Nowogródzkich.

Przedstawił J. Lewiński dn. 26 października 1928 r.

### WSTĘP.

Od lat ciągnie się w literaturze przedmiotu dyskusja: istnieją, czy nie istnieją lessy w Nowogródzczyźnie?

Pierwszą wzmiankę dał A. Giedroyć<sup>1)</sup>. Naprawdę postawiła kwestję Missuna<sup>2)</sup>. Zaprzeczył istnieniu lessów w Nowogródzkim Miklaszewski<sup>3)</sup>. Zabierali w tej sprawie głos i inni, przeważnie ubocznie. Ostatnio bardzo kategorycznie zaprzeczył istnieniu lessów w tej części kresów Wołosowicz<sup>4)</sup>, uznając, bez uzasadnienia zresztą swego poglądu, dyskutowany utwór za bardzo drobne piaski wodnego pochodzenia.

Podczas ostatnich badań nad podłożem dyluwjum na Białej Rusi miałem możność zapoznać się z wąwozami okolic Korelicz, zarówno jak i z innymi wychodniami tej skały, której zakwalifikowanie nie jest bez znaczenia dla całości badań dyluwjalnych u nas.

Pozwalam sobie wobec tego przytoczyć moje obserwacje.

### Typowe wychodnie.

Przytoczę jako przykłady kilka profili bardziej typowych skały badanej:

Rawiny: we wschodniej części wsi w stromem zboczu wzgórza o częściowo pionowych ściankach odsłania się

0,15 m. gleba  
4 m. less żółty  
> 1/2 m. morena (grubość nieznana)

---

<sup>1)</sup> Giedroyć A. — Geol. izsled. w gub. Wilenskoj, Grodniejskoj, Minskoj, Wołyńskiej i siewiernych czastiach carstwa Polskiego. Materiały dla geol. Rossiji. tom. XVII, 1895.

<sup>2)</sup> Missuna A. — Przyczynek do geologii Nowogródzkiego pow. Guberniji Mińskiej — Kosmos 1910.

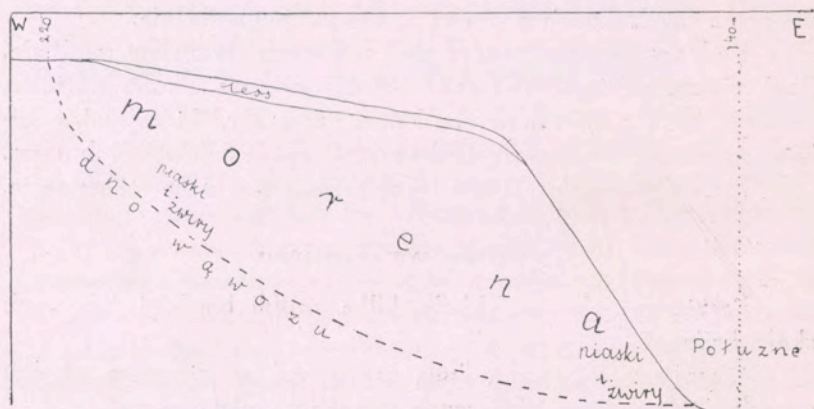
<sup>3)</sup> Miklaszewski Sł. — Bielice nadrzeczne (lessy rzekome) w pow. Nowogródzkim gub. Mińskiej. Spraw. z posiedzeń Tow. Nauk. Warsz. zes. 9. Warszawa 1912 r.

<sup>4)</sup> Wołosowicz St. — Les dépôts glaciaires de la Pologne orientale Scient. Results of the voyage of Orbis. Kraków 1928.

Kaczyce: we wszystkich okolicznych wąwozach less. Typowe odsłonięcia w płd. części wsi: 0,20 m gleba, 3—4 m less jasno żółty z licznymi kukielkami ułożonemi w trzech poziomych. Niżej o 100 m. na drodze morena.

Droga Kaczyce-Korelicze: 0,2 m. gleba  
2 m. less  
5 m. morena  
> 2 m. piaski przekątnie  
[warstwowane.]

Połuże: bardzo głębokie wąwozy, miejscami przeszło 30 m. (do 40 m) less wszędzie na zboczu gruby 2—4 m. cienieje i zanika ku szczytowi 220 m., pod nim morena, miejscami z pod niej żwiry i piaski przekątnie warstwowane.



Rys. 1.

Minutycze: długi wąwóz na 3 kl., co chwila odsłonięcie lessu 2—4 rzadko 5m. Tylko miejscami widać z pod nich morenę wyraźnie czerwonej barwy (blisko wsi).

Tupały płn. droga ze wsi na wschód, w nią wcięty młody wąwóz, gleba 0,15 m. less 8m. gruby. Bezpośrednio spągu nie widać, w bok od wylotu wąwozu do doliny czerwona morena pokryta brukiem.

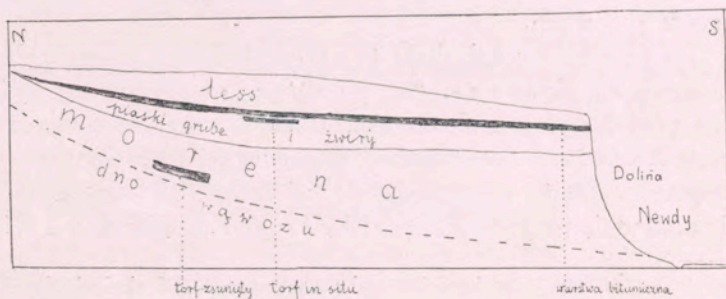
Rutkiewicze górne. W samej wsi w części dolnej naprzeciwko pierwszych chałup 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> m. ścianka lessu pokryta glebą 0,15 m. Są kukielki i rurki pionowe. Spągu nie widać.



W dużym wąwozie głębokim przeszło 15m. równoległym do wsi od strony wschodniej, bardzo komplikowany pakiet dyluwjalny z moreną szarą i czerwoną z grubą na 10 m. serją żwirów i piasków powciskaną w morenę z pod której wylaniają się zielone gliny i zielone piaski Oligoceńskie, które znów zalegają na żwirach z materiałem północnym, tak że nie wiadomo, czy mamy do czynienia z krą czy tylko z prasowanym i wciśniętym trzeciorzędem w morenę ale nieoderwanym od podłoża, z gniazdami kredy pod trzeciorzędem robiącemi wrażenie, iż nie leżą in situ, choć pewno kreda in situ blisko. Cały pakiet dyluwjalny przykryty od 5— $1\frac{1}{2}$  m. grubym i zanikającym ku szczytowi pogórza tak iż w wierzchowiskach wąwozu tylko morena czerwona.

Siódma-Cimoszkowice. (Wąwozy między temi wsiami) Ten ciekawy opisany już i przez Missunę profil odsłania na przestrzeni 1,5 kl:

od góry	gleba	0,15 m.	
	less	2—4 m.	
	warstwy bitumiczne	$\frac{1}{2}$ — $1\frac{1}{2}$ m.	wyklinowuje ku płn.
	żwiru i piasek	$\frac{1}{2}$ —1 m.	(pod warstwą humusową białą wskutek redukcji)
	torf	1 m.	wskutek osypania trudno powiedzieć czy między nim i warstwą bitumiczną górną jest piasek czy też niema.
	morena	> 2—8 m.	



Rys. 2.

UWAGA: (blisko środka wąwozu nad wodą leży warstwa torfu, która zsunęła się z góry i daje złudzenie leżenia pod moreną).

### Charakter skały.

Skała drobnopylkowata złożona w głównej masie z nieotoczonych lub źle otoczonych ziarn mineralnych. Wśród nich składnikiem głównym jest kwarc, ale domieszka innych minerałów jest dość znaczna (skalenie, miki, hornblenda, cyrkony, i t. d.).

Z wyjątkiem gleby i podglebia skała w całej miąższości burzy się z  $HCl$ , co wskazuje na stałą domieszkę  $CaCO_3$ . Miklaszewski twierdził, iż w badanych próbkach nie znalazł śladu węglanu wapniowego w miejscowościach, w których spotykałem  $CaCO_3$ . Widocznie autor ten analizował tylko glebę i podglebie.

Ziarna wielkości poniżej 0,1 mm., większość poniżej 0,05 mm<sup>1)</sup> Barwa skały od jasno żółtej do jasno brunatnej, czasami z czerwonym odcieniem.

Skała jednolita, niewarstwowana naogół, czasami niewyraźnie warstwowana w części dolnej (Siohda).

Prawie we wszystkich profilach można spotkać (czasami dość licznie) np. w Rawinach, Kaczycach, lekkie, zzewnątrz brunatne konkracje, wielkości orzecha włoskiego mniejwięcej, które burzą się z kwasem solnym, wewnątrz zaś wykazują białą porowatą strukturę.

Kształty zewnętrzne przerastających się zaokrąglonych brył i wszystkie tylko co wymienione cechy każą uznać utwory te za kukielki lessowe, których istnieniu w tych stronach przeczył Sł. Miklaszewski. Istnieją również pionowe rurki, tak częste w lessach typowych.

Giedroyc uważał skałę tę za less jeziorny, zaprzeczyła temu słusznie A. Missuna. Ani położenie, ani budowa skały nie wskazują na jeziorne pochodzenie. Skała ta wszędzie w wąwozach i wciętych drogach daje strome pionowe ścianki. Sposób półpodziemnego często rozrastania się wierzchowisk wąwozów zupełnie dokładnie przypomina zjawiska okolic Kazimierza nad Wisłą.

<sup>1)</sup> Dla orjentacji w składzie mechanicznym materiał skały badanej był przesiany przez sita. W literaturze i Missuna i Miklaszewski podają analizę mechaniczną skały lessowej Nowogródzkiej, analizy te odbiegają od siebie.

Tam gdzie wąwozy nie dociągają się do podłoża skały, są suche, dopiero w wąwozach głębszych, wcinających się w morenę, można spotkać stałe strumyki.

Na powierzchni skała opisywana staje się po deszczach grząska i śliska, pod tym względem przypominając więcej lessy podolskie, niż np. Miechowskie. Ilość jednak części ilastych stanowi znikomy procent.

Na zakończenie omówienia charakteru skały dodam, iż w jednym miejscu (Kaczyce-wieś) na 60 cm. od powierzchni znalazłem zęby jakiegoś gryzonia (prawdopodobnie stepowego).

Na podstawie wszystkich powyższych obserwacji, jako też położenia, skałę badaną uważam za lessy.

Różnice drobne, jakie się zauważa, jak np. trochę większy niż w większości lessów Lubelskich i Miechowskich procent ziarn między 0,1 i 0,05 mm., nie zmieniają zasadniczo charakteru skały. Również podkreślana przez Miklaszewskiego obserwacja braku dzeikenterów (graniaków) w spągu lessów, nie jest argumentem, któremu by należało przypisać nadmierną rolę, szczególnie, iż *Missuna* twierdzi stanowczo (?) iż graniaki pod lessami spotykała.

Lessy Nowogródzkie nie różnią się mojem zdaniem od lessów z innych obszarów Polski bardziej niż te ostatnie między sobą. Należy to podkreślić tembardziej, że lessy Miechowskie, Lubelskie, Sandomierskie i Podolskie są prawdopodobnie sobie w głównej masie współczesne, podczas gdy Nowogródzkie, jak to za chwilę okaże się znacznie od nich późniejsze.

### Rozpostarcie.

Jedyną mapę dotyczącą opisywanej części lessów białoruskich dała *A. Missuna*<sup>1)</sup> na swej cennej mapie geol. pow. Nowogródzkiego (w granicach przedwojennych). Powłoka lessowa przedstawiona jest tu wprawdzie zbyt zwarcie, wysepki lessów na *SO* od obszaru głównego są opuszczone, piaski warstwowane pod Baranowiczami nie wspólnego z lessami nie mające są w mylący sposób nazwane piaskami lessowemi. Daje ona jednak pojęcie o przybliżonym zasięgu lessów w Nowogródzkiem. Mapkę dokładną można będzie dać dopiero po skartowaniu dokładnem obszarze.

Główna część niezwartego płaszcza skały badanej występuje na *S* i *W* od Korelicz i na *W* od od rzeki Serweczka.

<sup>1)</sup> *Missuna* A. Ibidem.

Płaszczyzna ta zanika stopniowo ku szczytom pogórza Nowogródzkiego na zachodzie.

Oprócz tego pojedyncze plamki zdarzają się daleko jeszcze ku SO., spotykałem je bowiem jeszcze koło Nieświeża i Klecka (o 60—70 kl. od Korelicz).

Z rosyjskiej powojennej literatury wiadomo o istnieniu lessów po drugiej stronie granicy na S od Mińska i w Słuczczynie.

Lessy więc nie są ograniczone na terenie Białorusi do wyżej wymienionego obszaru, tu jednak zajmują specjalnie ciekawie dość zwartą przestrzeń. Tutaj bowiem tylko na S od Korelicz spotykamy sieć wąwozów nadających krajobrazowi tak charakterystyczne dla lessów piętno. Prawie nigdzie po za tym obszarem wąwozy w lessach Nowogródzkich nie są znane.

N. B. Wąwozy kotelickie rozwijają się wyraźnie ku dolinie Serweczy i jej lewych dopływów, nacinając nie tylko lessy, lecz wcinając się głęboko w morenę. Wgłęb wyżyny wąwozy maleją i zanikają. Te bardzo ciekawe młode formy erozyjne rozwinięte na kontakcie z bardzo starą morfologicznie, zatorfiałą doliną stanowią jedno z ciekawszych zagadnień morfologicznych Białorusi, przekraczających ramy niniejszego artykułu. Tutaj jedynie poruszę w paru słowach kwestję położenia morfologicznego samych lessów.

### Położenie morfologiczne.

Naogół skała opisywana występuje na wschodnim zboczu pogórza morenowego Nowogródzkiego.

Leży ona przeważnie dość wysoko, nie dochodząc jednak najwyższych wzniesień.

Przeważnie płaszcz tej warstwy nie jest ciągły. W przekrojach wąwozów widać, iż skała wypełnia płytkie zagłębienia i części niższe pogórza morenowego, wyrównywując powierzchnię i modyfikując w ten sposób morfologię wschodniej części Nowogródzkiego pogórza. Dzięki temu część ta jest bardziej płaska, mniej falista niż zachodnia.

Płaszczyzna pokrywy cienki na brzegach zakłębień powierzchni morenowej osiąga wewnątrz nich grubość 5—6 m. a czasami przeszło 10 m.

Szczyty wzgórz morenowych nie są niczem przykryte. W zakłębieniach less spoczywa bądź bezpośrednio na morenie, bądź (Cimoszkowice, Siohda) na kopalnym torfie i glebie, rzadko na grubych, żwirkowatych przeważnie piaskach.

### Położenie stratygraficzne.

Strop skały, opisywanej jest nieznanym, gdyż stanowi ona najwyższą warstwę niczem nie przykrytą.

Spąg — skała badana, tam gdzie widziałem podłoże, zalega na:

- 1 — glinie morenowej czerwonej,
- 2 — na torfie i (glebie kopalnej) warstwie bitumicznej,
- 3 — na żwirkach i gruboziarnistych piaskach
- 4 — na bruku przemytej moreny (obserwacja Miklaszewskiego)

### Wiek skały.

Wobec tego, iż less leży na morenie, która według wszelkiego prawdopodobieństwa odpowiada wiekiem morenie środkowopolskiej, a raczej któremś stadjum cofania się drugiego polskiego zlodowacenia, znakowanego u nas zazwyczaj jako  $L_4$ , jest więc od zlodowacenia tego młodszy.

Fakt, iż miejscami na morenie a pod lessem zdążyły się osadzić piaski warstwowe i żwirki (okres intensywnego mycia moreny) a na nich torf grubości około 1 m., wyżej zaś warstwa humusowa grubości  $\frac{1}{2}$ —1 m.,<sup>1)</sup> i dopiero ostatnia warstwa została pokryta lessem, dowodzi, iż między cofnięciem się lodowca, zostawiającego morenę, a osadzeniem się powłoki lessu musiał upłynąć b. długi okres czasu.

Na razie nie mam obserwacji, pozwalających rozstrzygnąć, czy okres osadzania się pyłowatej skały w Nowogródzkim odpowiada zbliżaniu się zlodowacenia Bałtyckiego (jeśli takowe rozumieć, jako samodzielne zlodowacenie — co wydaje się prawdopodobnym), czy też osadzanie płaszczki lessowej wypadło w czasach postglacjalnych wogóle.

Botaniczne zbadanie torfów podlessowych, wyjaśniające, czy mamy tu do czynienia z utworami inter-, czy postglacjalnymi, może rzucić dużo światła i na kwestję wieku lessów.

W każdym razie lessy tutejsze nie są współczesne lessom wyżyn środkowopolskich, są od nich conajmniej o jedno zlo-

---

<sup>1)</sup> W literaturze warstwa ta została nazwana glebą kopalną; mam poważne wątpliwości, czy nazwa ta jest słuszną — nazywam więc aż do czasu botanicznego zbadania tej czarnej, miękkiej, wilgotnej warstwy, posiadającej około połowy składu substancji organicznej a resztę mineralnej, przytem ilość części mineralnych maleje ku środkowi wąwozu — warstwą humusową.

dowacenie młodsze, gdyż tamte bywają pokryte moreną drugiego polskiego zlodowacenia<sup>1)</sup>, Nowogródzkie zaś lessy leżą na morenie tegoż zlodowacenia.<sup>2)</sup>

N. B. Missuna opisuje pod lessem w Cimoszkowicach dwa torfy kopalne, rozdzielone miejscami moreną. Miałem możność sprawdzić w jednym miejscu, gdzie dwa poziomy nad sobą znalazłem, iż ten drugi poziom niższy, podmorenowy jest w rzeczywistości wielkim zsuwem torfu z górnej części zbocza, leży koło moreny a nie pod nią i zachował jeszcze strzęp lessu na sobie.

Zbigniew Sujkowski.

### Notes sur le loess de Nowogródek.

Mémoire présenté par Mr. J. Lewiński le 26 octobre 1928.

#### Résumé.

Les observations de l'auteur concernant le limon du plateau de Nowogródek lui permettent de se prononcer en faveur de l'opinion (souvent discutée) que ce sont de vrais loess.

Les différences entre les loess des environs de Nowogródek et ceux de la majorité d'autres loess de la Pologne ne sont pas grandes ni essentielles.

Ils s'expliquent suffisamment par le fait que les premiers sont beaucoup plus jeunes.

Les loess du Sud du pays proviennent de l'époque précédant la seconde glaciation de la Pologne.

Quant aux loess des environs de Nowogródek ils reposent sur la morène de la même (seconde) glaciation.

Souvent ils sont séparés d'elle encore par une épaisse couche de tourbe fossile qui répond à une longue période de temps.

Les loess de Nowogródek occupent la partie orientale du plateau morenique de Nowogródek et forment en Pologne un îlot isolé de loess placé si loin au nord.

<sup>1)</sup> Samsonowicz znalazł lessy pod moreną na lewym brzegu Wisły, naprzeciwko Puław. (wykłady 1926-7 w Uniw. Warsz.).

<sup>2)</sup> Morena Nowogródzka prawdopodobnie odpowiada fazie cofania się drugiego polskiego zlodowacenia. W każdym razie jeśli ją wyróżnić od stadium maksymalnego zasięgu tego zlodowacenia, to jako utwór młodszy, z drugiej strony jest on niewątpliwie starszy od moren Bałtyckich.

Zbigniew Sujkowski.

**Kilka nowych wierceń na kresach  
północno-wschodnich.**

Przetawil J. Lewiński dn. 26 października 1928 r.

LISTA 1.

Dzięki uprzejmości szeregu osób, instytucji i urzędów pracujących na kresach posiadam materiały z kilku wierceń wykonanych w ostatnich latach na kresach białoruskich. Podaję je do druku, sądząc, iż rzeczą cenną jest, żeby materiał praktyczny z wierceń stawał się jaknajprędzej wspólną własnością pracujących geologów, bez względu na to, czy poszczególne profile są pierwszorzędnej wagi, czy też tylko mogą służyć jako materiał pomocniczy.

Jest to specjalnie słuszne dla kresów, gdzie wiercenia są takim podstawowym elementem naszej znajomości budowy geologicznej terenu.

Do druku podaję materiał z wierceń, dla których posiadam próbki, z tego względu zostały pominięte 2 nowe wiercenia w Nowogródku, wiercenie w Lubczy, w Baranowiczach i t. d., które znam tylko z profili wiertniczych. Znaczenie tych wierceń dla znajomości budowy geologicznej omówię w artykule o budowie dorzecza g. Niemna.

Bylina (strażnica K. O. P.) pow. Łuniniec.  $\pm$  145—150 m.  
n. p. m.

- od 0 do 7 m. — piasek miałki żółty
- „ 7 „ 8 „ — piasek z grubym żwirem
- „ 8 „ 10 „ — piasek gliniasty z otoczakami
- „ 10 „ 13 „ — piasek z gładzikami.
- „ 13 „ 15 „ — glina piaszczysta
- „ 15 „ 19 „ — żwir z gładzikami nieotoczonymi ale zwietrzałymi na powierzchni
- „ 19 „ 35 „ — piasek biały drobny
- „ 35 „ 55 „ — glina czerwono-żółta piaszczysta
- „ 55 „ 66 „ — piasek drobny białawy
- „ 66 „ 69 „ — piasek białawy wodonośny.

Dyluwjum nie przebito.

Helenowo (strażnica K.O.P.) pow. Łuniniec.  $\pm$  160 m. n. p. m.

- od 0 do 2 m. — piasek rdzawo-żółty
- „ 2 „ 5 „ — piasek żółty
- „ 5 „ 6 „ — piasek z kamykami
- „ 6 „ 9 „ — piasek drobny rdzawy
- „ 9 „ 10 „ piasek rdzawy
- „ 10 „ 13 „ żwir drobny mieszany (obfite skalenie)
- „ 13 „ 15 „ drobny mułek ilasty warstwowany, szary
- „ 15 „ 18,5 „ piasek z wkładką żwirów.
- „ 18,5 „ 21,5 „ gruby żwir z gładzikami (liczne krzemienie) i drobną ilością piasku.
- „ 21,5 „ 23 „ piasek mułkowany żółty

Dyluwjum nie przebite. Dominuje rdzawo-żółty kolor w serji piaszczystej.

Morocz (strażnica K. O. P.) pow. Łuniniec,  $\pm$  155—160 m. n. p. m.

- od 0 do 3 m. — piasek drobny rdzawo-żółty
- „ 3 „ 5 „ — piasek żółty
- „ 5 „ 6 „ — żwirek żółty
- „ 6 „ 10 „ — piasek rdzawy
- „ 10 „ 13 „ — żwir drobny ze skaleniami częstymi
- „ 13 „ 15 „ — drobny mułek ilasty biały, warstwowany
- „ 15 „ 18,5 „ — piaski z wkładkami żwirków (rdzawe)
- „ 18,5 „ 22 „ — gruby żwir z piaskiem. Obfite skalenie i minerały ciemne.

Dyluwjum nie przebito. Dominuje rdzawo-żółty kolor serji piaszczystej.

Ludwikowo-Czudzin (Szwadron). Wiercenia wykonano budując koszary K. O. P. pow. Łuniniec.  $\pm$  145 m. n. p. m.

- od 0 do 6 m. — piasek z wkładkami żwirków
- „ 6 „ 10 „ — drobny, żółty piasek z mułkiem
- „ 10 „ 12 „ — piasek żółty (rdzawy) ze żwirkiem.
- „ 12 „ 17 „ — żwir żółto-rdzawy z gładzikami
- „ 17 „ 19 „ — żwir żółty
- „ 16 „ 21 „ — piasek gruby
- „ 21 „ 23 „ — żwir różnorodny
- „ 23 „ 24 „ — piasek białawy
- „ 24 „ 26 „ — piasek ze żwirkiem
- „ 26 „ 32 „ — piasek szarawy
- „ 32 „ 35 „ — glina piaszczysta
- „ 35 „ 39 „ — żwir jednej wielkości 3—4 mm. średnicy ziaren jako wkładki w piasku
- „ 39 „ 40 „ — żwir bez piasku jednej wielkości ziarn 3—4 mm.
- „ 40 „ 53 „ — piasek drobny białawy
- „ 53 „ 58 „ — piasek ze żwirkiem.



Dyluwjum nie przebito. Dominuje żółto- złocisto- rdzawy kolor serji piaszczystej.

Rachowicze (strażnica K. O. P.) pow. Łuniniec ca 140 m. n. p. m.

- od 0 do 9 m. — piasek miałki żółtawy
- „ 9 „ 15 „ — piasek biały, miałki z okładkami żwirów obfitych w skalenie
- „ 15 „ 16,5 „ — glina zielona z kamieniami
- „ 16,5 „ 18 „ — piasek lekko ilasty
- „ 18 „ 23,5 „ — piasek kwarcowy otoczony z drobną domieszką ilastą. Spotykają się glaukonity
- „ 23,5 „ 30 „ — drobny piasek ze zwietrzalami gładzikami czerwonego piaskowca, gneisu i skalenia. Ziarna piasku bardzo dobrze otoczone.

Dyluwjum nie przebito.

Nowogródek, rzeźnia miejska 285 m. n. p. m.

- od 0 do 27,30 m. — glina morenowa żółtawo-czerwonawa z gładzami
- „ 27,30 „ 29,10 „ — żwir i kurzawka
- „ 29,10 „ 34,90 „ — glina morenowa żółtawo-czerwona z gładzami
- „ 34,90 „ 65 „ — il warwowy siwy
- „ 65 „ 68 „ — glina morenowa z gładzami żółto-szara
- „ 68 „ 74 „ — mułek
- „ 74 „ 75,60 „ — glina morenowa szaro-czerwonawa z gładzami
- „ 75,60 „ 82 „ — piasek słabo zcementowany gliniasty siwej barwy
- „ 82 „ 87,46 „ — mułek przesycony wodą
- „ 87,46 „ 95,65 „ — żwir gruby wodonośny z materiałem krystalicznym.
- „ 95,65 „ 100,20 „ — piasek wodonośny.

Cała serja przedstawia utwory dyluwialne, które przebite nie zostały. Wśród nich można wyróżnić 34 m. grubości morenę górną, następnie 30,10 m. ilów warwowych, 10,60 m. moreny niższej, 25,30 m. — serję warstwowaną wieku dyluwjalnego, w której poziomy niższe mogą reprezentować fluwjogłacjał.

Wiercenie jest położone o niecały kilometr od środka miasta u stóp wzgórza o 35 m. niżej poziomu rynku.

Wiercenie w Sierhiejczykach (Siergiejczykach) na strażnicy K. O. P. (pow. Dżisna, gm. Jazno) wysokość nad poziomem morza ca. 150 m.

- od 0 do 1 m. — gleba i glina piaszczysta
- „ 1 „ 9 „ — glina morenowa czerwona, twarda z gładzami
- „ 9 „ 10,30 „ — „ „ szaro-czerwona z gładzami
- „ 10,30 „ 11,55 „ — „ „ miękka, szaro-czerw. z gładzami

od 11,55 do 14	„	—	piasek mułkowaty, marglisty, szaro-czerwona- wy ze żwirkiem.
„ 14 „ 16,50	„	—	mulek ciemno-szary piaszczysty, marglisty z głazami
„ 16,50 „ 18	„	—	żwir z głazami
„ 18 „ 22	„	—	glina morenowa czerwonawa, piaszczysta
„ 22 „ 24,50	„	—	glina morenowa czewono-szara, mułkowata
„ 24,50 „ 27	„	—	glina morenowa, twarda, piaszczysta, czerwona- nawa z głazami
„ 27 „ 33,35	„	—	glina morenowa szaro-czerwona z głazami
„ 33,35 „ 38,50	„	—	mulek szaro-czerwony z głazami
„ 38,50 „ 58,85	„	—	glina morenowa, szaro-czerwona z głazami
„ 58,85 „ 60,15	„	—	głazy i piasek gliniasty, scementowany
„ 60,15 „ 63,65	„	—	glina morenowa, czerwonawa z głazami
„ 63,65 „ 65,20	„	—	glina morenowa, twarda, czerwonawa z głazami
„ 65,20 „ 69,50	„	—	glina czerwonawa, piaszczysta, scementowana z głazami
„ 69,50 „ 80	„	—	jasny piasek drobnoziarnisty z kamieniami, marglisty
„ 80 „ 94,50	„	—	jasny, drobny piasek ze żwirkiem, lekko marglisty
„ 94,50 „ 107,95	„	—	piasek jasny, gruby (wodonośny)
„ 107,95 „ 108,80	„	—	piasek arkozowy, biały, silnie skaolinizowany z drobną domieszką muskowitu.

Warstwy od 0 do 69,50 m. odpowiadają jednolitej serji morenowej o przeważającej czerwonej barwie.

„	„	69,50 „ 94,50 „	piaski dyluwjalne — prawdopodobnie fluwjogłaciał.
„	„	94,50 „ 107,95 „	piaski dyluwjalne lub preglacjalne.
„	„	107,95 „ 108,80 „	d e w o n.

W serji morenowej uderzają następujące cechy charakterystyczne, silna marglistość, przeważający w całej miąższości czerwony koloryt skały, wśród głazów minimalny procent skał ksystalicznych, niewielki udział wapieni i dominujący udział kilku typów kwarcytów i piaskowców, prawdopodobnie głównie dewońskich. Materiał gruby jest zazwyczaj kanciasty o ogładzonych narożach i ścianach, otoczków bardzo mało. Kamienistość serji morenowej naogół znaczna.

Stołpce, między 155 i 160 m. n. p.

od 0 do 23 m.	—	piasek żółty
„ 23 „ 24,4 „	—	glina żółta morenowa
„ 24,4 „ 27 „	—	glina szara
„ 27 „ 30 „	—	mulek, szary tłusty
„ 30 „ 30,7 „	—	mulek, szary chudy
„ 30,7 „ 31,7 „	—	mulek, szary tłusty
„ 31,7 „ 34 „	—	piasek ze żwirkiem
„ 34 „ 36 „	—	piasek mulisty ze żwirkiem
„ 36 „ 48 „	—	piasek brunatnawo-różowy typu piasków półn. poleskich
„ 48 „ 57 „	—	gruby piasek gliniasty
„ 57 „ 62 „	—	miałki, jasny piasek marglisty
„ 62 „ 84,4 „	—	piasek miałki czysty, wodonośny
„ 84,4 „ 85 „	—	żwir drobny, otoczony, pół na pół materiał paleozoiczny i krystaliczny
„ 85 „ 89,6 „	—	żwir gruby wodonośny, źle otoczony, przewaga materiału paleozoicznego
„ 89,6 „ 93 „	—	drobny, czysty, biały piasek z obfitem drzewem zwęglonem (lignitem), bezwapienne, źle otoczone z domieszką glaukonitu i drobnej miki.

Od 0 do 89,6 m. — mamy do czynienia z serją lodowcową; w całej miąższości wykazuje domieszkę węglanu wapnia. W serji tej morena jest bardzo cienka i pojedyncza, a dominują przeróżne piaski i mułki, co do których niema żadnych danych, żeby zaliczyć je do glacjałów lub interglacjałów.

Od 89,6 m. wgląd idą piaski z lignitem, niewątpliwie trzeciorzędowe. Jesteśmy już po za wypiętrzeniem Nowogródzkim. Kreda niedowiercona do ca 65 m. nad poziom morza.

Napotkany trzeciorzęd należy zaliczyć do środkowego Oligocenu (piętro połtańskie, na podstawie podobieństwa do utworów tego typu z niecki ukraińskiej). Prawdopodobnie zaznacza on tu przedłużenie niecki ukraińskiej.

Jeszcze dalej ku Nowogródkowi występuje w tej samej facji w Lubczy w wierceniu.

Zdziencioł. Otwór wiertniczy założono wewnątrz dawnego pałacu Sołtyków, dziś mieszczącego szkołę rzemieślniczą żeńską. Ca 170 m. n. p. m.

od 0 do 4 m.	—	piasek żółty
„ 4 „ 10 „	—	piasek i kurzawka z głazami
„ 10 „ 56 „	—	kurzawka z wkładkami żwirków
„ 56 „ 63 „	—	piasek żółty z otoczkami, wodonośny.

Miasteczko leży u stóp pogórza morenowego — większość przebitych warstw zaliczyć wypadnie do fluwjoglacjałów. Dyluwjum nie przebite.

Zbigniew Sujkowski.

**Quelques sondages nouveaux dans la partie N. E.  
de la Pologne.**

Mémoire présenté par J. Lewiński le 26 octobre 1928.

Resumé.

L'article contient une description de 9 sondages nouveaux éütés dans la partie N. E. de la Pologne.

Tous sont placés dans les terrains quaternaires.

Deux d'entre eux ont traversé la serie quaternaire.

Ces sont: le sondage de Stołpce qui a arrivé à la profondeur de 89 m. aux sables blancs contenant le lignite de l'Oligocène moyen; et le sondage de Sierhiejczyki où après avoir traversé la serie morénique d'une épaisseur de 107 m. on est entré directement dans les arcoses du Devonier.

Les autres sondages donnent une idée seulement sur la structure du quaternaire du pays.

---

## Posiedzenie

z dnia 14 grudnia 1928 r.

W. Sierpiński.

### Przyczynek do ugruntowania teorii zbiorów rzutowych.

Komunikat przedstawiony dn. 14 grudnia 1928 r.

W. Sierpiński.

### Contribution à la fondation de la théorie des ensembles projectifs.

Présenté le 14 décembre 1928.

Dans le vol. X des „*Fundamenta Mathematicae*” (p. 40—41) M. N. Lusin a donné une démonstration nouvelle des théorèmes de Souslin, d’après lesquels une somme et un produit d’une infinité dénombrable d’ensembles analytiques est un ensemble analytique. Dans le vol. XI du même journal (p. 123—125), j’ai montré comment l’idée de la démonstration de M. Lusin pourrait être appliquée aux propriétés analogues des images continues des complémentaires analytiques. Dans le  $n^{\circ}1$  du mémoire présent, tout en utilisant l’idée de M. Lusin, je prouverai un théorème général concernant les familles quelconques d’ensembles linéaires satisfaisant aux certaines conditions simples et naturelles. En spécialisant ces familles, nous en obtiendrons le théorème de M. Lusin et des théorèmes analogues concernant les ensembles projectifs de classes supérieures ( $n^{\circ}2$ ). Dans un mémoire qui

paraîtra dans *Fund. Math.* t. XIII, je démontre un théorème connexe concernant certaines familles formées d'ensembles de points appartenant aux espaces euclidiens à un nombre fini quelconque de dimensions (variable pour les ensembles d'une même famille). Ici je me borne aux ensembles linéaires, ce qui permet de simplifier considérablement les raisonnements. Dans le  $n^o$  3 je démontre un théorème général sur les familles d'ensembles linéaires qui établit une relation entre l'opération (A) et les images continues. Enfin, dans le  $n^o$  4 je prouve que pour certaines familles d'ensembles toutes les images continues d'ensembles peuvent être obtenues à l'aide d'une fonction continue fixe d'une variable réelle.

1.  $F$  étant une famille d'ensembles linéaires, nous désignerons par  $C(F)$  la famille de tous les ensembles linéaires complémentaires aux ensembles de la famille  $F$ , et par  $\Phi(F)$  — la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des images continues des ensembles de la famille  $F$ .

Nous dirons que la famille  $F$  d'ensembles linéaires jouit de la propriété  $P$ , si elle satisfait aux quatre conditions suivantes:

- 1) Tout intervalle (fermé) appartient à  $F$ ,
- 2) Si les ensembles  $E_1, E_2, E_3, \dots$  appartiennent à  $F$ , leur somme  $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$  appartient à  $F$ ,
- 3) Si les ensembles  $E_1, E_2, E_3, \dots$  appartiennent à  $F$ , leur produit  $E_1 E_2 E_3 \dots$  appartient à  $F$ ,
- 4) Si les ensembles  $E$  et  $H$  appartiennent à  $F$  et si  $f(x)$  est une fonction définie et continue dans  $E$ , l'ensemble  $E[x \in E, f(x) \in H]$ <sup>1)</sup> appartient à  $F$ .

**Théorème 1:** Si la famille  $F_0$  d'ensembles linéaires jouit de la propriété  $P$ , les familles  $C(F_0)$  et  $\Phi(F_0)$  jouissent aussi de la propriété  $P$ .

**Démonstration.** Soit  $F_0$  une famille d'ensembles linéaires jouissant des propriétés 1) — 4). La démonstration que la famille  $F = C(F_0)$  jouit des propriétés 1, 2) et 3) n'offre pas de difficultés<sup>2)</sup>. Nous allons démontrer que la famille  $F = C(F_0)$  jouit de la propriété 4).

1)  $E[W(x)]$  désigne l'ensemble de tous les nombres  $x$  satisfaisant à la condition  $W(x)$ .

2) Cf. mon mémoire qui paraît dans les *Fund. Math.* t. XIII.

Soient donc  $E_0$  et  $H_0$  deux ensembles de la famille  $C(F_0)$ : on a donc  $CE_0 \varepsilon F_0$  et  $CH_0 \varepsilon F_0$ .

Soit  $f_0(x)$  une fonction définie et continue dans l'ensemble  $E_0$ . Comme on sait, il existe un ensemble  $G_\delta$ , soit  $\Gamma$ , contenant  $E_0$ , et une fonction  $f(x)$ , définie et continue dans  $\Gamma$ , telle que  $f(x) = f_0(x)$  pour  $x \varepsilon E_0$ <sup>1)</sup>.

Des propriétés 1), 2) et 3) de la famille  $F = F_0$  résulte que tout ensemble linéaire mesurable ( $B$ ), donc, en particulier, l'ensemble  $\Gamma$ , appartient à  $F_0$ : d'après  $CE_0 \varepsilon F_0$  et la propriété 4) de la famille  $F = F_0$  (appliquée aux ensembles  $E = \Gamma$  et  $H = CH_0$ ) il en résulte que l'ensemble

$$E_x[x \varepsilon \Gamma, f(x) \varepsilon CH_0]$$

appartient à  $F_0$ . Or, on a évidemment (d'après  $E_0 \subset \Gamma$ ):

$$E_x[x \varepsilon E_0, f_0(x) \varepsilon H_0] = E_0 \cdot CE_x[x \varepsilon \Gamma, f(x) \varepsilon CH_0]:$$

le côté droit de cette formule étant un produit de deux ensembles de  $C(F_0)$ , donc, d'après la propriété 3) de la famille  $F = C(F_0)$ , un ensemble de  $C(F_0)$ , elle prouve que la famille  $F = C(F_0)$  jouit de la propriété 4).

Tout ensemble étant évidemment sa propre image continue, on a, pour toute famille  $F$  d'ensembles:  $\Phi(F) \supset F$ , et il en résulte tout de suite, d'après la propriété 1) de la famille  $F = F_0$  que la famille  $F = \Phi(F_0)$  jouit de la propriété 1). Nous allons maintenant démontrer que la famille  $F = \Phi(F_0)$  jouit de la propriété 2).

Désignons par  $N$  l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle  $(0, 1)$ . Je dis que tout ensemble  $E$  de la famille  $F_0$  est une image continue d'un ensemble  $Q$  de  $F_0$  contenu dans  $N$ .

En effet, soit  $E$  un ensemble de  $F_0$ . L'ensemble  $X$  de tous les nombres réels est, comme on sait, une image continue de l'ensemble  $N$ , soit  $X = \psi(N)$ . Posons  $Q = E_x[x \varepsilon N, \psi(x) \varepsilon E]$ : l'ensemble  $N$  étant mesurable  $B$ , il en résulte, d'après la propriété 4) de la famille  $F = F_0$ , que l'ensemble  $Q$  appartient à  $F_0$ ;

1) Voir p. e. *Fund. Math.* t. IV, p. 317 (Lemme).

or on a évidemment  $Q \subset N$  et (d'après  $\psi(N) = X$ ):  $\psi(Q) = E$ , ce qui prouve notre assertion.

Soit maintenant  $E_1, E_2, E_3, \dots$  une suite infinie d'ensembles de la famille  $\Phi(F_0)$ .

Soit  $n$  un nombre naturel donné.  $E_n$  étant un ensemble de la famille  $\Phi(F_0)$ , il existe un ensemble  $H_n$  de  $F_0$  et une fonction  $g_n(x)$  continue dans  $H_n$ , telle que  $E_n = g_n(H_n)$ . Or, de  $H_n \in F_0$  résulte, comme nous venons de démontrer, l'existence d'un ensemble  $X_n$  de  $F_0$ , contenu dans  $N$ , et d'une fonction  $\psi(x)$  continue dans  $X$ , telle que  $H_n = \psi(X_n)$ . Posons, pour  $x \in X_n$ ,  $f_n(x) = g_n(\psi(x))$ : ce sera une fonction continue dans  $X_n$  et nous aurons

$$(1) \quad E_n = f_n(X_n).$$

Posons

$$(2) \quad Z_n = E_x [x \in X, x - n \in X_n]:$$

d'après  $X \in F_0$ ,  $X_n \in F_0$  et d'après la propriété 4) de la famille  $F = F_0$ , l'ensemble (2) appartient à  $F_0$ .

Posons:

$$\psi_n(x) = f_n(x - n), \quad \text{pour } x \in Z_n:$$

nous aurons évidemment, d'après (2):

$$\psi_n(Z_n) = f_n(X_n),$$

donc, d'après (1):

$$(3) \quad E_n = \psi_n(Z_n).$$

Posons:

$$(4) \quad Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots,$$

et définissons pour  $x \in Z$  la fonction  $f(x)$  par les conditions:

$$(5) \quad f(x) = \psi_n(x), \quad \text{si } x \in Z_n.$$

L'ensemble  $Z_n$  étant formé de nombres irrationnels de l'intervalle  $(n, n + 1)$ , on voit sans peine que la fonction  $f(x)$  sera définie et continue dans l'ensemble  $Z$ . Or, d'après  $Z_n \in F_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), et d'après la propriété 2) de la famille  $F = F_0$ , l'ensemble (4) appartient à  $F_0$ . D'autre part, la formule (4) donne, d'après (5):

$$f(Z) = \psi_1(Z_1) + \psi_2(Z_2) + \psi_3(Z_3) + \dots,$$

donc, d'après (3):

$$(6) \quad f(Z) = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$



La fonction  $f$  étant continue dans l'ensemble  $Z \in F_0$ , la formule (6) prouve que  $E_1 + E_2 + E_3 + \dots \in \Phi(F_0)$ . Nous avons ainsi démontré que la famille  $F = \Phi(F_0)$  jouit de la propriété 2).

Nous allons maintenant démontrer que  $E = E_1 E_2 E_3 \dots \in \Phi(F_0)$ .

Soit  $x$  un nombre irrationnel de l'intervalle (0,1),

$$(7) \quad x = \frac{1}{\mu(1, x)} + \frac{1}{\mu(2, x)} + \frac{1}{\mu(3, x)} + \dots$$

— son développement en fraction continue. Posons (pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$(8) \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\mu(1 \cdot 2^{n-1}, x)} + \frac{1}{\mu(3 \cdot 2^{n-1}, x)} + \frac{1}{\mu(5 \cdot 2^{n-1}, x)} + \dots$$

Les fonction  $\varphi_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) seront évidemment définies et continues dans l'ensemble  $N$ .

La fonction  $\varphi_n(x)$  étant continue dans  $N$ , et  $X_n$  appartenant à  $F_0$ , il résulte de la propriété 4) de la famille  $F = F_0$  que l'ensemble

$$N_n = E [x \in N, \varphi_n(x) \in X_n]$$

appartient à  $F_0$ . D'après la propriété 3) de la famille  $F = F_0$ , l'ensemble

$$(9) \quad N_0 = N_1 N_2 N_3 \dots$$

appartient donc aussi à  $F_0$ .

Désignons par  $X_0$  l'ensemble de tous les nombres  $x$  de  $N_0$ , tels que

$$f_n(\varphi_n(x)) = f_1(\varphi_1(x)), \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots;$$

nous aurons donc

$$f_n(\varphi_n(X_0)) = f_1(\varphi_1(X_0)), \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Les fonctions  $f_n(\varphi_n(x))$  étant continues dans  $N_0$ , on voit sans peine que l'ensemble  $X_0$  est fermé dans  $N_0$ , c'est-à-dire  $X_0$  est un produit de  $N_0$  par un ensemble fermé. Or, d'après les propriétés 1), 2) et 3) de  $F = F_0$ , tout ensemble fermé appartient à  $F_0$ , et il en résulte, d'après  $N \in F_0$  et la propriété 2) de  $F_0$ , que  $X_0 \in F_0$ .

Or, on a l'égalité:

$$(10) \quad f_1(\varphi_1(X_0)) = E^{-1}.$$

L'ensemble  $X_0$  appartenant à  $F_0$  et la fonction  $f_1(\varphi_1(x))$  étant continue dans  $X_0$ , la formule (10) prouve que l'ensemble  $E$  appartient à  $\Phi(F_0)$ . Nous avons ainsi démontré que la famille  $F = \Phi(F_0)$  jouit de la propriété 3).

Nous allons maintenant à démontrer que la famille  $\Phi(F_0)$  jouit de la propriété 4).

Soient donc  $E_1$  et  $E_2$  deux ensembles de la famille  $\Phi(F_0)$ ,  $f(x)$  — une fonction définie et continue dans  $E_1$ . Il existe, comme nous savons, deux ensembles  $X_1$  et  $X_2$  de  $F_0$ , contenus dans  $N$ , et deux fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ , définies et continues resp. dans  $X_1$  et  $X_2$ , telles qu'on a pour  $n=1$  et  $n=2$  les formules (1).

En conservant les significations des fonctions  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$  et des ensembles  $N_1$  et  $N_2$ , désignons par  $Q$  l'ensemble de tous les nombres  $x$  de  $N_1 N_2$ , tels que

$$ff_1 \varphi_1(x) = f_2 \varphi_2(x).$$

Les fonctions  $ff_1 \varphi_1(x)$  et  $f_2 \varphi_2(x)$  étant continues dans  $N_1 N_2$ , l'ensemble  $Q$  sera fermé dans  $N_1 N_2$ , donc (d'après  $N_1 \in F_0$ ,  $N_2 \in F_0$  et la propriété 2) de  $F = F_0$ ) appartiendra à  $F_0$ . Par conséquent, l'ensemble  $f_1 \varphi_1(Q)$  appartient à  $\Phi(F_0)$ . Or, je dis que

$$(11) \quad E[x \in E_1, f(x) \in E_2] = f_1 \varphi_1(Q).$$

En effet, si  $x \in f_1 \varphi_1(Q)$ , on a  $x = f_1 \varphi_1(t)$ , où  $t \in Q$ , donc, d'après la définition de l'ensemble  $Q$ :

$$(12) \quad t \in N_1 N_2$$

et

$$(13) \quad ff_1 \varphi_1(t) = f_2 \varphi_2(t).$$

La formule (12) donne, d'après la définition de  $N_1$  et  $N_2$ :  $\varphi_1(t) \in X_1$ ,  $\varphi_2(t) \in X_2$ , donc, d'après la définition de  $X_1$  et  $X_2$ :  $f_1 \varphi_1(t) \in E_1$  et  $f_2 \varphi_2(t) \in E_2$ , et, d'après  $x = f_1 \varphi_1(t)$  et la formule (13):  $x \in E_1$  et  $f(x) \in E_2$ .

1) Pour la démonstration de cette égalité, voir *Fund. Math.* t. XI, p. 124 (formule (5)).

D'autre part, soit  $x$  un nombre, tel que  $x \in E_1$  et  $f(x) \in E_2$ . D'après (1) (pour  $n=1$  et  $n=2$ ), il existe un nombre  $x_1$  de  $X_1$  et un nombre  $x_2$  de  $X_2$ , tels que

$$(14) \quad x = f_1(x_1) \quad \text{et} \quad f(x) = f_2(x_2).$$

D'après  $X_1 \subset N$  et  $X_2 \subset N$ , les nombres  $x_1$  et  $x_2$  sont irrationnels et appartiennent à l'intervalle  $(0,1)$ : soient

$$x_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots$$

et

$$x_2 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3} + \dots$$

leurs développements en fraction continue. Posons:

$$t = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots,$$

où

$$p_{2k-1} = m_k, \quad p_{4k-2} = n_k \quad \text{et} \quad p_{4k} = 1, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

D'après la définition des fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , nous aurons, comme on vérifie sans peine:

$$(15) \quad \varphi_1(t) = x_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = x_2,$$

ce qui donne

$$\varphi_1(t) \in X_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) \in X_2,$$

et prouve, d'après  $t \in N$  et d'après la définition de  $N_1$  et  $N_2$ , que  $t \in N_1$  et  $t \in N_2$ , donc  $t \in N_1 N_2$ .

Or, de (14) et (15) résulte que

$$ff_1 \varphi_1(t) = f_2 \varphi_2(t):$$

d'après  $t \in N_1 N_2$  et d'après la définition de  $Q$  nous concluons donc que  $t \in Q$ .

Or, d'après (14) et (15),  $x = f_1 \varphi_1(t)$ : la formule  $t \in Q$  donne donc:  $x \in f_1 \varphi_1(Q)$ .

La formule (11) est ainsi établie. Le côté droit de (11) appartenant à  $\Phi(F_0)$ , il en est de même du côté gauche, ce qui prouve que la famille  $\Phi(F_0)$  jouit de la propriété 4).

Notre théorème est ainsi démontré complètement.

**2.** Nous prouverons maintenant que la famille de tous les ensembles linéaires mesurables ( $B$ ) jouit de la propriété  $P$ .

La famille  $B$  de tous les ensembles linéaires mesurables ( $B$ ) étant la plus petite famille  $F$  d'ensembles linéaires jouissant des propriétés 1), 2) et 3), il nous reste seulement à démontrer que la famille  $B$  jouit de la propriété 4).

Soit  $E$  un ensemble donné de la famille  $B$ ,  $f(x)$  — une fonction définie et continue sur  $E$ . Désignons par  $F_1$  la famille de tous les ensembles linéaires  $H$ , tels que

$$E[x \in E, f(x) \in H] \in B.$$

Il est évident qu'il suffira, pour démontrer que la famille  $F=B$  jouit de la propriété 4), de prouver que la famille  $F=F_1$  jouit des propriétés 1), 2) et 3).

Si  $H$  est un ensemble fermé et borné, l'ensemble  $E[x \in E, f(x) \in H]$  est évidemment fermé dans  $E$ , donc mesurable ( $B$ ). Il en résulte que la famille  $F=F_1$  jouit de la propriété (1).

Or, soit  $H_1, H_2, H_3, \dots$  une suite infinie d'ensembles appartenant à la famille  $F_1$ : les ensembles

$$E[x \in E, f(x) \in H_n] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

sont donc tous mesurables ( $B$ ). Or, on a évidemment les formules

$$(16) \quad E[x \in E, f(x) \in H_1 + H_2 + H_3 + \dots] = \sum_{n=1}^{\infty} E[x \in E, f(x) \in H_n],$$

$$(17) \quad E[x \in E, f(x) \in H_1 H_2 H_3 \dots] = \prod_{n=1}^{\infty} E[x \in E, f(x) \in H_n],$$

d'où résulte que les ensembles (16) et (17) sont mesurables ( $B$ ), c'est-à-dire les ensembles  $H_1 + H_2 + H_3 + \dots$  et  $H_1 H_2 H_3 \dots$  appartiennent à  $F_1$ . La famille  $F=F_1$  jouit donc des propriétés 2) et 3).

La formule  $F_1 \supset B$  est ainsi établie, c. q. f. d.

La famille  $A$  de tous les ensembles analytiques peut être définie comme égale à la famille  $\Phi(B)$ : la famille  $B$  jouissant de la propriété  $P$ , il résulte tout de suite de notre théorème 1 que la famille  $A$  jouit de la propriété  $P$ .

Posons  $P_1 = A$  et, pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ :  $C_n = C(P_n)$ ,  $P_{n+1} = \Phi(C_n)$ . La famille  $A$  jouissant de la propriété  $P$ , on déduit

facilement de notre théorème par l'induction que les familles  $P_n$  et  $C_n$  jouissent de la propriété  $P$ , pour  $n=1, 2, 3, \dots$  <sup>1)</sup>).

Il est à remarquer que la famille  $F_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$  est la plus petite famille  $F$  contenant les ensembles (linéaires) fermés et satisfaisant aux conditions:  $F \supset C(F)$  et  $F \supset \Phi(F)$  <sup>2)</sup>. Les ensembles (linéaires) appartenant à la famille  $F_0$  sont dits *projectifs*. En particulier, les ensembles de la famille  $P_n + C_n$  coïncident avec les ensembles projectifs de classe  $\leq n$  de M. N. Lusin <sup>3)</sup>. (Or, on pourrait démontrer que la famille  $F_0$  ne jouit pas des propriétés 2) et 3) <sup>4)</sup> et qu'aucune des familles  $P_n + C_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) ne jouit pas des propriétés 2) et 3)).

**3.** Si l'on a fait correspondre à tout système fini d'indices  $n_1, n_2, \dots, n_k$  un ensemble  $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , on dit, d'après Souslin, qu'on a défini un système déterminant  $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ . On appelle *noyau* du système  $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$  l'ensemble

$$(18) \quad E = \sum_{(n_1, n_2, \dots)} E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \dots,$$

où la sommation s'étend à toutes les suites infinies de nombres naturels  $n_1, n_2, n_3, \dots$ .

$F$  étant une famille donnée d'ensembles linéaires, nous désignerons par  $A(F)$  la famille de tous les ensembles qui sont noyaux des systèmes déterminants  $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$  formés des ensembles  $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  de la famille  $F$ .

**Théorème 2:** Si la famille  $F_0$  d'ensembles linéaires jouit de la propriété  $P$ , on a la formule  $A(F_0) \subset \Phi(F_0)$ .

*Démonstration.* Soit  $F_0$  une famille d'ensembles linéaires jouissant de la propriété  $P$ . D'après le théorème 1, la famille  $\Phi(F_0)$  jouit de la propriété  $P$ , donc, en particulier, elle satisfait (pour  $F=F_0$ ) à la condition 2) et elle contient tout ensemble au plus dénombrable. Or, il résulte de la définition

<sup>1)</sup> Cf. ma note dans les *Fund. Math.* t. XI, p. 126.

<sup>2)</sup> Cf. ma note dans les *Fund. Math.* t. VII, p. 237.

<sup>3)</sup> Pour la définition de ces ensembles, voir p. e. N. Lusin: *Fund. Math.* t. X, p. 90.

<sup>4)</sup> voir p. e. *Fund. Math.* t. VII, p. 242.

de la famille  $\Phi(F_0)$  que si  $E \in \Phi(F_0)$  et si  $H$  est un ensemble superposable avec,  $E$ , on a  $H \in \Phi(F_0)$ .

Or, il résulte tout de suite de la définition de la famille  $A(F_0)$  que si  $E \in A(F_0)$  et si  $H \in F_0$ , on a  $EH \in A(F_0)$ .

Soit maintenant  $E$  un ensemble donné  $\in A(F_0)$ . Désignons par  $E_n$  la partie de  $E$  située dans l'intervalle  $(k, k+1)$ :  $E_k$  sera évidemment le produit de l'ensemble  $E \in A(F_0)$  par l'intervalle  $(k, k+1)$ , donc (d'après la propriété 1) de la famille  $F = F_0$ , par un ensemble  $\in F_0$ , d'où résulte, comme nous savons, que  $E_k \in A(F_0)$ . Or, on a évidemment

$$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_k :$$

d'après la propriété 2) de  $F = \Phi(F_0)$  il suffira donc, pour démontrer que  $E \in \Phi(F_0)$ , de démontrer que  $E_k \in \Phi(F_0)$ , pour  $k = 1, 2, 3, \dots$

D'après la propriété 4) de la famille  $F = F_0$ , tout ensemble superposable avec un ensemble de la famille  $F_0$  appartient à  $F_0$ , et il en résulte tout de suite, d'après la définition de la famille  $A(F_0)$ , que tout ensemble superposable avec un ensemble de  $A(F_0)$  appartient à  $A(F_0)$ . L'ensemble  $E_k \in A(F_0)$  est donc superposable avec un ensemble  $\in A(F_0)$ , contenu dans l'intervalle  $(0,1)$ , soit  $H$ . Désignons par  $D$  l'ensemble de tous les nombres rationnels contenus dans  $H$ : nous aurons évidemment

$$H = D + NH,$$

où  $NH$ , comme produit de l'ensemble  $N \in A(F_0)$  par l'ensemble  $H \in A(F_0)$ , appartient à  $A(F_0)$ . D'après les propriétés mentionnées de la famille  $\Phi(F_0)$ , pour démontrer que  $E_k \in \Phi(F_0)$ , il suffira de démontrer que l'ensemble  $NH$  appartient à  $\Phi(F_0)$ .

Il suffira donc, pour démontrer notre théorème, de prouver que tout ensemble de la famille  $A(F_0)$  contenu dans  $N$ , appartient à  $\Phi(F_0)$ .

Soit donc  $E$  un ensemble donné  $\in A(F_0)$  et  $\subset N$ . Il existe donc un système déterminant  $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ , formé des ensembles  $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  de la famille  $F_0$ , tel qu'on a la formule (18).

$n_1, n_2, \dots, n_k$  étant un système fini donné de nombres naturels, désignons par  $X_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  l'ensemble de tous les nombres  $x$  de  $N$ , tels que

$$(19) \quad \nu(2i, x) = n_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, k.$$

On voit sans peine que les ensembles  $X_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  sont fermés dans  $N$ , donc qu'ils sont des  $G_\delta$  et par suite appartiennent à  $F_0$ .

Posons, pour tout système fini  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , d'indices:

$$(20) \quad Z_{n_1, n_2, \dots, n_k} = E \left[ x \in X_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \varphi_1(x) \in E_{n_1, n_2, \dots, n_k} \right]$$

et

$$(21) \quad Z = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} Z_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

où

$$(22) \quad \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} Z_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \dots \sum_{n_k=1}^{\infty} Z_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Les ensembles  $X_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  et  $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  appartenant à  $F$  et la fonction  $\varphi_1(x)$  étant continue dans  $N \supset X_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , on conclut de (20) et de la propriété 4) de  $F = F_0$ , que les ensembles (20) appartiennent à  $F_0$ , et il en résulte, d'après (21), (22) et les propriétés 2) et 3) de  $F = F_0$ , que  $Z \in F_0$ .

Or, dis que

$$(23) \quad E = \varphi_1(Z).$$

En effet, soit  $x_0 \in E$ . Il existe donc, d'après (18), une suite infinie d'indices  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , telle que

$$(24) \quad x_0 \in E_{m_1, m_2, \dots, m_k}, \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots,$$

Posons

$$(25) \quad \xi = \frac{1}{|\nu(1, x_0)|} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{|\nu(2, x_0)|} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{|\nu(3, x_0)|} + \frac{1}{m_3} + \dots;$$

nous aurons évidemment

$$(26) \quad \xi \in Z_{m_1, m_2, \dots, m_k}, \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots, \text{ et } \varphi_1(\xi) = x_0,$$

donc, d'après (24) et (20):

$$\xi \in Z_{m_1, m_2, \dots, m_k}, \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots,$$

et par suite, d'après (21):  $\xi \in Z$ , ce qui donne, d'après (26):

$$x_0 \in \varphi_1(Z).$$

D'autre part, soit  $x_0 \in \varphi_1(Z)$ : il existe donc un nombre  $\xi$  de  $Z$ , tel que  $x_0 = \varphi_1(\xi)$ .

D'après  $\xi \in Z$  et (21) il existe pour tout  $k$  naturel un système de  $k$  indices  $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}$ , tel que

$$(27) \quad \xi \in Z_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Or, de (20) et (27) résulte que

$$(28) \quad \xi \in X_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}}, \text{ pour } k=1, 2, 3, \dots$$

D'après la définition des ensembles  $X_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , la formule

$$X_{p_1, p_2, \dots, p_k} X_{q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1}} \neq 0$$

entraîne:

$$p_i = q_i, \text{ pour } i=1, 2, \dots, k$$

D'après (28) nous avons

$$X_{n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_k^{(k)}} \cdot X_{n_1^{(k+1)}, n_2^{(k+1)}, \dots, n_k^{(k+1)}} \neq 0,$$

donc

$$n_i^{(k)} = n_i^{(k+1)}, \text{ pour } i=1, 2, \dots, k,$$

et, en particulier:

$$n_k^{(k)} = n_k^{(k+1)}$$

pour tout  $k$  naturel, ce qui donne

$$(29) \quad n_n^{(k)} = n_k^{(s)}, \text{ pour } k < s.$$

Posons

$$m_k = n_k^{(k)}, \text{ pour } k=1, 2, 3, \dots:$$

nous aurons donc, d'après (29):

$$Z_{m_1, m_2, \dots, m_s} = Z_{n_1^{(s)}, n_2^{(s)}, \dots, n_s^{(s)}}, \text{ pour } s=1, 2, 3, \dots,$$

donc, d'après (27):

$$\xi \in Z_{m_1, m_2, \dots, m_s}, \text{ pour } s=1, 2, 3, \dots,$$

ce qui donne, d'après (20):

$$\varphi_1(\xi) \in E_{m_1, m_2, \dots, m_s}, \text{ pour } s=1, 2, 3, \dots,$$

donc, d'après (18):

$$\varphi_1(\xi) \in E,$$

c'est-à-dire, d'après  $x_0 = \varphi_1(\xi) : x_0 \in E$ .



La formule (23) est ainsi établie;  $\varphi_1(x)$  étant une fonction continue dans l'ensemble  $N \supset Z$ , la formule (23) prouve que  $E \in \Phi(F_0)$ .

Le théorème 2 est ainsi démontré.

**Corollaire:** Si la famille  $F_0$  d'ensembles linéaires jouit de la propriété  $P$ , on a la formule

$$(30) \quad A(\Phi(F_0)) = \Phi(F_0).$$

En effet, si la famille  $F_0$  jouit de la propriété  $P$ , la famille  $F = \Phi(F_0)$  en jouit aussi, d'après le théorème 1, et par suite on a, d'après le théorème 2 (appliqué à la famille  $\Phi(F_0)$  au lieu de  $F_0$ ):

$$(31) \quad A(\Phi(F_0)) \subset \Phi(\Phi(F_0));$$

or, on a évidemment  $\Phi(\Phi(F_0)) = \Phi(F_0)$  et, d'autre part,  $A(\Phi(F_0) \supset \Phi)(F_0)$ : la formule (31) donne donc la formule (30) c. q. f. d.

En particulier, pour  $F_0 = B$ , resp. pour  $F_0 = C_{n-1}$  (où  $n > 1$ ), notre corollaire donne, d'après  $P_1 = \Phi(B)$ , resp.  $P_n = \Phi(C_{n-1})$

$$A(P_n) = P_n, \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Il en résulte que le résultat de l'opération  $A$ , effectuée sur les ensembles de la famille  $P_n$ , est toujours un ensemble de la famille  $P_n$ <sup>1)</sup>.

Or, on ne sait pas, si  $A(C_1) = C_1$ , et, d'après M. N. Lusin, on peut douter si l'on le saura. Remarquons encore que si  $F$  est une famille d'ensembles linéaires mesurables ( $L$ ), il en est de même de la famille  $A(F)$ <sup>2)</sup>. Pareillement, si  $F$  est une famille d'ensembles linéaires jouissant de la propriété de Baire, il en est de même de la famille  $A(F)$ <sup>3)</sup>.

4.  $F$  étant une famille d'ensembles linéaires et  $f(x)$  — une fonction définie dans l'ensemble  $X$  de tous les nombres réels, nous désignerons par  $f(F)$  la famille de tous les ensembles de la forme  $f(E)$ , où  $E \in F$ .

<sup>1)</sup> J'ai déjà signalé ce théorème dans *Fund. Math.* t. XI.

<sup>2)</sup> Voir p. e. N. Lusin et W. Sierpiński *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 47; aussi: O. Nikodym: *Comptes rendus des séances de la Soc. des Sc. et de lettres de Varsovie*, XIX (1926), p. 294.

<sup>3)</sup> O. Nikodym l. c., et *Fund. Math.* t. VII, p. 149.

**Théorème 3:** Il existe une fonction  $\psi(x)$  définie et continue dans l'ensemble de tous les nombres réels, telle qu'on a, pour toute famille  $F$  d'ensembles linéaires jouissant de la propriété  $P$ , la formule:  $\psi(F) = \Phi(F)$ .

*Démonstration.* Soit  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  la courbe continue de M. Peano remplissant le plan ( $\varphi(t), \psi(t)$  est donc un système de deux fonctions continues d'une variable réelle  $t$ , tel que,  $(a, b)$  étant un système donné quelconque de deux nombres réels, il existe au moins un nombre réel  $t$ , tel que  $\varphi(t) = a$  et  $\psi(t) = b$ ). Je dis que la fonction  $\psi(x)$  satisfait aux conditions de notre théorème.

En effet, soit  $F$  une famille donnée d'ensembles linéaires jouissant de la propriété  $P$ . De la définition des familles  $\Phi(F)$  et  $\psi(F)$  résulte tout de suite que  $\psi(F) \subset \Phi(F)$ . Il reste donc à démontrer que  $\Phi(F) \subset \psi(F)$ .

Soit donc  $E$  un ensemble de la famille  $\Phi(F)$ . Il existe donc un ensemble  $H$  de  $F$  et une fonction  $f$ , définie et continue dans  $H$ , telle que

$$(32) \quad E = f(H)$$

Posons

$$(33) \quad Q = E \underset{x}{\ni} [x \in X, \varphi(x) \in H]$$

La fonction  $\varphi(x)$  étant continue dans  $X$  et l'ensemble  $H$  appartenant à  $F$ , il résulte de la propriété 4) de la famille  $F$  que l'ensemble (33) appartient à  $F$ .

D'après (33) on a  $\varphi(x) \in H$  pour  $x \in Q$ : la fonction  $\varphi(x)$  étant continue dans  $X \supset Q$ , et la fonction  $f(x)$  étant définie et continue dans  $H \supset \varphi(Q)$ , nous en concluons que la fonction  $f(\varphi(x))$  est définie et continue dans  $Q$ .

Désignons par  $Z$  l'ensemble de tous les nombres  $x$  de  $Q$ , tels que

$$(34) \quad \psi(x) = f(\varphi(x)) :$$

l'ensemble  $Z$  sera évidemment fermé dans  $Q$ , donc d'après  $Q \in F$ , et les propriétés 1), 2) et 3) de  $F$ , nous aurons  $Z \in F$ . Or, je dis que

$$(35) \quad E = \psi(Z).$$

En effet, si  $x_0 \in E$ , il existe, d'après (32), un nombre  $\xi$  de  $H$ , tel que

$$(36) \quad x_0 = f(\xi).$$

D'après la propriété des fonctions  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ , il existe un nombre  $\zeta$ , tel que

$$(37) \quad \varphi(\zeta) = \xi \text{ et } \psi(\zeta) = f(\xi),$$

ce qui donne  $\psi(\zeta) = f(\varphi(\zeta))$  et prouve que le nombre  $\zeta$  satisfait à l'équation (34). Or, d'après  $\xi \in H$  et (37), nous avons  $\psi(\zeta) \in H$ , ce qui donne, d'après (33):  $\zeta \in Q$ .

D'après la définition de l'ensemble  $Z$  nous avons donc  $\zeta \in Z$  et par suite, d'après (36) et (37):

$$x_0 = f(\xi) = \psi(\zeta) \in \psi(Z).$$

D'autre part, soit  $x_0 \in \psi(Z)$ . Il existe donc un nombre  $\zeta$  de  $Z$ , tel que

$$(38) \quad x_0 = \psi(\zeta).$$

D'après  $\zeta \in Z$  et d'après la définition de  $Z$ , nous avons  $\zeta \in Q$  et  $\psi(\zeta) = f(\varphi(\zeta))$ , donc d'après (38):  $x_0 = f(\varphi(\zeta))$ . Or, de  $\zeta \in Q$  et de (33) résulte que  $\varphi(\zeta) \in H$ : nous avons donc, d'après (32),  $f(\varphi(\zeta)) \in f(H) = E$ , c'est-à-dire  $x_0 \in E$ .

La formule (35) est ainsi démontrée, ce qui prouve, d'après  $Z \in F$ , que  $E \in \psi(F)$ . Nous avons ainsi établi que  $\Phi(F) \subset \psi(F)$  et notre théorème est démontré.

J. Popruženko.

## O rozszerzeniu funkcji Baire'a, określonych na podzbiorach zamkniętych.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 14 grudnia 1928.

Streszczenie.

Autor wprowadza pojęcie rozszerzalności doskonałej funkcji Baire'a, określonej na podzbiórze względnie zamkniętym dowolnego zbioru przestrzeni euklidesowej  $n$ -wymiarowej, i dowodzi, że każda funkcja Baire'a może być rozszerzona w sposób doskonały z podzbioru na cały zbiór.

G. Poprougénko.

## Sur l'extension des fonctions de Baire définies dans les sous-ensembles fermés.

Mémoire présenté par Mr. W. Sierpiński le 14 decembre 1928.

M. W. Sierpiński a démontré<sup>1)</sup> que les ensembles de l'espace  $I$  des nombres irrationnels possèdent la propriété suivante: Toute partie relativement fermée d'un tel ensemble est son image continue.

Soit  $A \subset I$  un ensemble arbitraire,  $B = \overline{AB}$  — sa partie relativement fermée. Il résulte de la propriété indiquée<sup>2)</sup> qu'il existe, pour toute fonction  $f(\xi)_{\xi \in B}$  de Baire définie dans  $B$ , une fonction  $F(\xi)_{\xi \in A}$  définie dans  $A$  et remplissant les conditions très spéciales qui nous énumérons ci-dessous:

- I  $F(\xi) = f(\xi)$ , pour  $\xi \in B$ .
- II Si  $f(\xi)$  est une fonction  $u_\alpha(l_\alpha)$ <sup>3)</sup> de Young sur  $B$ ,  $F(\xi)$  est une fonction  $u_\alpha(l_\alpha)$  sur  $A$ .
- III  $F(A) = f(B)$ ,  $f(B)$  et  $F(A)$  désignant les ensembles de valeurs de  $f$  et  $F$ .

<sup>1)</sup> W. Sierpiński. Sur les projections des ensembles complémentaires aux ensembles (A). Fund. Math. XI.

<sup>2)</sup> La démonstration (par l'induction transfinie) est immédiate.

<sup>3)</sup> Quant à la signification de ces symboles, voir p. ex. W. Sierpiński. Fonctions représentables analytiquement, 1925 (en polonais), p. 28.

IV Si  $f(\xi)$  est continue au point  $\xi = \xi_0$  sur  $B$ ,  $F(\xi)$  est continue au point  $\xi_0$  sur  $A$ .

V La fonction  $F(\xi)$  est continue sur  $A$  en tout point  $\xi \in A - B$ .

Le but de ce travail est de démontrer que ces relations subsistent, si nous remplaçons l'espace  $I$  par l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions: il ne faut qu'introduire dans ce cas, au lieu de la condition V, la condition suivante:

Va La fonction  $F(\xi)$  est continue sur  $A$  en tout point  $\xi \in A - B$ , à un ensemble de mesure nulle près<sup>1)</sup>.

Nous définissons par les conditions I—Va la notion de l'extensibilité parfaite d'une fonction de Baire, définie dans un sous-ensemble, et énonçons le théorème suivant:

#### Théorème.

Soit  $E_n$  l'espace euclidien à  $n$  dimensions,  $A \subset E_n$  — un ensemble arbitraire,  $B = \overline{AB}$  — sa partie relativement fermée, et soit  $f(\xi)_{\xi \in B}$  une fonction  $u_\alpha(I_\alpha)$  sur  $B$  (finie ou non). Cette fonction est extensible au sens parfait de l'ensemble  $B$  à l'ensemble  $A$ .

#### Démonstration.

En premier lieu, il suffit de démontrer le théorème pour les ensembles bornés.

En effet, soit  $A \subset E_n$  un ensemble arbitraire,  $B = \overline{AB}$  — sa partie relativement fermée,  $f(\xi)_{\xi \in B}$  — une fonction  $u_\alpha(I_\alpha)$  sur  $B$ , et soit  $\Phi(\xi) = \xi^*$  une fonction biunivoque et bicontinue définie dans  $E_n$ ,  $\Psi(\xi^*) = \xi$  — la fonction inverse de  $\Phi$ .

Nous pouvons supposer:

1) la fonction  $\Phi$  transforme  $E_n$  en un intervalle (de  $E_n$ ) ouvert et borné.

2) elle transforme tout ensemble de mesure nulle en un ensemble de mesure nulle, et la même chose a lieu par rapport à  $\Psi$ .

Posons:

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= A^*, & \Phi(B) &= B^*, \\ \Psi(A^*) &= A, & \Psi(B^*) &= B. \end{aligned}$$

1) La nature de cet ensemble, d'ailleurs très simple, se déterminera au cours de la démonstration.

Définissons dans l'ensemble  $B^*$  la fonction  $f(\xi^*)_{\xi^* \in B^*}$  par l'égalité suivante :

$$f^*(\xi^*) = f^*[\Phi(\xi)] = f(\xi)_{\xi \in B}.$$

On s'assure facilement, que les ensembles  $A^*$  et  $B^*$  et la fonction  $f^*(\xi^*)$  ainsi définie, satisfont aux conditions du théorème en même temps que les ensembles  $A$  et  $B$  et la fonction  $f(\xi)$ . Or, ce théorème étant supposé vrai pour les ensembles bornés, il existe une fonction  $F^*(\xi^*)_{\xi^* \in A^*}$ , définie dans  $A^*$ , qui présente l'extension parfaite de la fonction  $f^*(\xi^*)$  de l'ensemble  $B^*$  à l'ensemble  $A^*$ . Posons pour tout  $\xi \in A$  :

$$F(\xi) = F[\Psi(\xi^*)] = F^*(\xi^*)_{\xi^* \in A^*}.$$

La fonction  $F(\xi)$ , définie dans l'ensemble  $A$ , est une extension parfaite cherchée de  $f(\xi)_{\xi \in B}$ . La démonstration résulte immédiatement des propriétés de la transformation  $\Phi - \Psi$  et de la définition des fonctions  $f^*$ ,  $F^*$  et  $F$ .

Cela posé, soit  $A \subset E_2$  un ensemble borné plan,  $B = \overline{AB}$  — sa partie relativement fermée. L'ensemble  $A$  étant borné, il existe un intervalle ouvert  $I$ , tel que  $\overline{A} \subset I$ .

Considérons l'ensemble  $\overline{CB} \cdot I$ . Cet ensemble étant lui-même ouvert et borné, nous le pouvons décomposer en une somme dénombrable de carrés  $Q_n$  :

$$(1) \quad \overline{CB} \cdot I = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n,$$

remplissant les conditions suivantes :

- 1<sup>0</sup>. Les carrés  $Q_n$  sont fermés et non empiétants.
- 2<sup>0</sup>. Tout point de  $\overline{CB} \cdot I$  appartient à un au moins, à 4 au plus carrés de (1).
- 3<sup>0</sup>. Si on désigne par  $d_n$  la longueur des côtés de  $Q_n$ , on a :

$$d_n \geq d_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0.$$

Nous pouvons supposer de plus, que cette décomposition est bien déterminée; il suffit de supposer les  $Q_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) provenir des réseaux quadratiques  $R_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) formés par les droites

$$x = \frac{p}{2^k}, \quad y = \frac{q}{2^k} \quad (p=1, 2, \dots, q=1, 2, \dots)$$

et jetés successivement sur le plan  $E_2$ .

Définissons maintenant dans l'ensemble de carrés  $Q_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), donné par la relation (1), une fonction du carré  $\psi(Q_n)$ , satisfaisant en premier lieu à la condition suivante :

$$(2) \quad \psi(Q_n) = \beta \in B.$$

Les ensembles  $Q_n$  et  $\bar{B}$  étant fermés, compacts et disjoints, on a :

$$\rho(Q_n, \bar{B}) = c_n > 0.$$

Il existe de plus, pour tout  $n$  naturel, un ensemble non vide  $B_n \subset \bar{B}$ , pour lequel la relation

$$\bar{\beta} \in B_n$$

entraîne :

$$\rho(Q_n, \bar{\beta}) = \rho(Q_n, \bar{B}) = c_n,$$

et on voit tout de suite que les ensembles  $B_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) sont fermés. Or, l'axiome du choix n'étant qu'un théorème pour les ensembles euclidiens fermés, il existe, d'après ce théorème, une suite infinie bien déterminée de points :

$$\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n, \dots,$$

qui satisfont aux conditions suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}_n \in B_n \subset \bar{B} \\ \rho(Q_n, \bar{\beta}_n) = c_n. \end{array} \right.$$

Posons :

$$(4) \quad \psi(Q_n) = \bar{\beta}_n,$$

si on a :  $\bar{\beta}_n \in B$ .

Supposons maintenant qu'il y a :

$$\bar{\beta}_n \in \bar{B} - B.$$

L'ensemble  $B$  étant séparable, il existe un sous-ensemble dénombrable

$$(5) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, \dots,$$

dense dans  $B$  et, en conséquence, dense, dans  $\bar{B}$ .

Or,  $\bar{\beta}_n$  appartenant toujours à  $\bar{B}$ , posons dans ce cas :

$$(6) \quad \psi(Q_n) = \beta_{p_n},$$

où  $\beta_{p_n}$  est le premier terme de (5) qui satisfait à la condition :

$$(7) \quad \beta_p \in U(\bar{\beta}_n, c_n)^1).$$

Nous voyons donc que la fonction  $\psi(Q_n)$  est définie par (4) et (6) pour tout  $Q_n$  et qu'elle remplit la relation (2).

Cela posé, considérons l'ensemble  $A - B$ ,

$B$  étant fermé dans  $A$ , on voit que cet ensemble satisfait à la condition suivante :

$$(8) \quad A - B \subset \overline{CB} \cdot I,$$

d'où il résulte que tout point  $\xi \in A - B$  jouit de la propriété 2<sup>o</sup> de la décomposition (1). Désignons par  $F_\xi$ , pour tout  $\xi \in A - B$ , l'ensemble-somme de tous les carrés  $Q_n$  de (1), contenant le point  $\xi$ .

Si  $\xi$  est un point intérieur d'un carré  $Q_{n_0}$  quelconque,  $F_\xi$  se réduit à  $Q_{n_0}$ ;  $F_\xi$  se compose, au cas contraire, de 2, 3 ou 4 au plus carrés voisins de (1), et on voit, d'après ce qui précède, que  $F_\xi$  est défini univoquement (la décomposition (1) étant donnée) pour tout  $\xi \in A - B$ , et qu' on a toujours :

$$(9) \quad \xi \in J(F_\xi),$$

où  $J(F_\xi)$  désigne l'intérieur de l'ensemble  $F_\xi$ .

De cette définition (et de la propriété 3<sup>o</sup> des carrés de (1)) résultent 2 propriétés de la figure régulière  $F_\xi$ , importantes pour la démonstration de notre théorème.

### Propriété 1.

Soit  $\xi_0 \in B \cdot (A - B)'$  un point arbitraire. Il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, un nombre positif  $\delta = \delta(\xi_0, \varepsilon)$ , tel que la condition :

$$\xi \in (A - B) \cdot U(\xi_0, \delta)$$

entraîne :

$$F_\xi \subset U(\xi_0, \varepsilon).$$

### Propriété 2.

Il existe, le point  $\bar{\xi} \in A - B$  étant donné, un nombre positif  $\eta = \eta(\bar{\xi})$ , tel que pour tout point  $\xi \in (A - B) \cdot U(\bar{\xi}, \eta)$  la figure régulière  $F_\xi$  ou bien se compose de mêmes carrés que  $F_{\bar{\xi}}$ , ou

<sup>1)</sup> Nous désignons par  $U(\alpha, r)$  le voisinage sphérique ouvert du point  $\alpha$  dont le rayon =  $r$ .



bien, si  $F_{\xi} \neq F_{\xi}^{-}$ ,  $F_{\xi}$  se compose en tout cas de carrés de (1) appartenants à  $F_{\xi}^{-}$ .

La Propriété 2. résulte immédiatement de la construction précédente et de la relation (9), la démonstration de la première ne présente aucune difficulté.

Nous avons ainsi obtenu toutes les prémisses nécessaires pour la démonstration du théorème et pouvons maintenant procéder à la construction de la fonction, désignée pour l'accomplissement de la transformation principale.

Soit  $f(\xi)_{\xi \in B}$  une fonction  $u_{\alpha}(I_{\alpha})$  de Baire définie dans  $B$ . Définissons dans  $A$  deux fonctions  $F_1(\xi)$  et  $F_2(\xi)$  par les conditions suivantes :

$$(10) \quad F_1(\xi) = F_2(\xi) = f(\xi),$$

pour  $\xi \in B$ ;

$$(11) \quad F_1(\xi) = \text{Max } f[\psi(Q_m)],$$

$$Q_m \subset F_{\xi}^{-}$$

$$(12) \quad F_2(\xi) = \text{min } f[\psi(Q_m)],$$

$$Q_m \subset F_{\xi}$$

pour  $\xi \in A - B$ ,  $m$  prenant 4 au plus valeurs naturels.

On voit que les relations (10), (11) et (12) définissent  $F_1$  et  $F_2$  univoquement dans tout  $A$ . Je dis que les fonctions  $F_1(\xi)$  et  $F_2(\xi)$  remplissent les conditions I, III, IV et Va de l'extensibilité parfaite.

En effet, les conditions I et III résultent immédiatement de la définition. Les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont (d'après la définition de  $F_{\xi}$  et de la fonction  $\psi(Q_n)$ ) constantes à l'intérieur de tout carré  $Q_n$ <sup>1)</sup>; de là résulte, que tous les points de discontinuité de  $F_1$  et  $F_2$  appartenants à  $A - B$  doivent appartenir à l'ensemble  $C = \sum_{n=1}^{\infty} B(Q_n)$  où  $B(Q_n)$  désigne la frontière du carré  $Q_n$ , ce qui donne évidemment la propriété Va.

Soit  $\xi_0 \in B$  un point de continuité de  $f(\xi)$  sur  $B$ . Il est clair qu'il suffit de supposer qu' on a :

$$\xi_0 \in B \cdot (A - B)', \quad |f(\xi_0)| < \infty,$$

1) Car on a, pour  $\xi \in J(O_n)$  :

$$\text{Max } f[\psi(Q_m)] = \text{min } f[\psi(Q_m)] = f[\psi(Q_n)]$$

$$Q_m \subset F_{\xi}^{-} \qquad Q_m \subset F_{\xi}$$

dans le cas  $|f(\xi_\sigma)| = \infty$  la démonstration ne se différencie pas par l'idée de la présente.

Soit  $\varepsilon > 0$  un nombre donné. Il existe un nombre  $\delta > 0$ , tel qu'on a :

$$(13) \quad |f(\xi_o) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

pour tout  $\xi \in B \cdot U(\xi_o, \delta)$ .

Il existe aussi (d'après la Propriété 2. de  $F_\xi$ ), pour le nombre  $\frac{\delta}{3}$ , un  $\eta > 0$ , tel que la relation :

$$(14) \quad \xi \in (A - B) \cdot U(\xi_o, \eta)$$

entraîne :

$$(15) \quad F_\xi \subset U\left(\xi_o, \frac{\delta}{3}\right).$$

Or, il résulte de (15) et des relations :

$$\xi_o \in \bar{B},$$

$$F_\xi \subset \bar{CB},$$

qu'on a :

$$0 < \rho(Q_m, \bar{B}) = c_m < \frac{\delta}{3},$$

pour tout  $Q_m \subset F_\xi$ ,  $\xi$  remplissant (14), ce qui donne, d'après (3) :

$$\bar{\beta}_m \in U\left(\xi_o, \frac{2\delta}{3}\right),$$

et, d'après (6) et (7) :

$$(16) \quad \psi(Q_m) \in U(\bar{\beta}_m, c_m) \subset U\left(\bar{\beta}_m, \frac{\delta}{3}\right) \subset U(\xi_o, \delta).$$

On a donc (d'après (13) et (16)) :

$$|f[\psi(Q_m)] - f(\xi_o)| < \varepsilon,$$

d'où il suit, d'après (10), (11) et (12) :

$$(17) \quad \begin{cases} |F_1(\xi) - F_1(\xi_o)| < \varepsilon, \\ |F_2(\xi) - F_2(\xi_o)| < \varepsilon, \end{cases}$$

pour tout  $\xi$  remplissant (14).

Les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  étant continues (d'après (10)) sur  $B$  au point  $\xi_o$ , nous pouvons regarder la propriété IV comme démontrée. Considérons maintenant la condition II.

Supposons que  $\alpha = 1$ ,  $f(\xi)$  est semi-continue supérieurement sur  $B$ . Je dis que  $F_1(\xi)$  présente l'extension parfaite cherchée de la fonction  $f(\xi)$ . Il ne reste qu'à démontrer:  $F_1(\xi)$  satisfait à la condition II, c'est à dire:  $F_1(\xi)$  est semi-continue supérieurement sur  $A$ .

Soit  $\xi_1$  un point tel que

$$\xi_1 \in C_o = (A - B) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B(Q_n).$$

Il existe, d'après la Propriété 2. de  $F_\xi$ , un voisinage ouvert  $U_{\xi_1}$  de  $\xi_1$ , tel que pour tout  $\xi$  remplissant la condition:

$$(18) \quad \xi \in (A - B) \cdot U_{\xi_1},$$

on a:

$$F_\xi \subset F_{\xi_1},$$

$F_\xi$  étant composé de carrés appartenants à  $F_{\xi_1}$ .

De la résulte, d'après la définition de  $F_1(\xi)$ :

$$(19) \quad F_1(\xi) = \text{Max } f[\psi(Q_m)] \leq \text{Max } f[\psi(Q_m)] = F_1(\xi_1),$$

$$Q_m \subset F_\xi \qquad Q_m \subset F_{\xi_1}$$

pour tout  $\xi$  satisfaisant à (18).

Soit maintenant  $\xi_1 \in B$ ,  $\varepsilon > 0$  — un nombre donné. Nous pouvons supposer de nouveau qu'il est:

$$\xi_1 \in B \cdot (A - B)', \quad |f(\xi_1)| < \infty.$$

Il existe un nombre  $\delta > 0$ , tel que la condition:

$$\xi \in B \cdot U(\xi_1, \delta)$$

entraîne:

$$f(\xi) < f(\xi_1) + \varepsilon.$$

En appliquant le raisonnement tout à fait analogue à ce de la démonstration des relations (17), on démontre qu'il existe un voisinage ouvert  $U_{\xi_1}$  du point  $\xi_1$ , tel que la relation:

$$(20) \quad \xi \in A \cdot U_{\xi_1}$$

entraîne:

$$(21) \quad F_1(\xi) < f(\xi_1) + \varepsilon = F_1(\xi_1) + \varepsilon,$$

d'où il résulte,  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire, que  $F_1(\xi)$  est semi-continue supérieurement au point  $\xi_1$  sur  $A$ .

Les relations (18), (19), (20) et (21) prouvent ( $F_1(\xi)$  étant continue sur  $A$  à tout point  $\xi$  de  $A$  appartenant à l'ensemble  $\sum_{n=1}^{\infty} J(Q_n)$ ) que  $F_1(\xi)$  satisfait à la condition II, *c q f d*.

On démontre pareillement que  $F_2(\xi)$  est une extension parfaite de  $f(\xi)$  dans le cas où  $f(\xi)$  est semi-continue inférieurement sur  $B$ .

Le théorème est donc vrai pour  $\alpha=1$ . Supposons maintenant qu'on a  $\alpha \geq 2$ ,  $f(\xi)$  étant une fonction  $u_\alpha(l_\alpha)$  sur  $B$ , soit  $u_\alpha$ . Je dis que les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  toutes deux satisfont à la condition II.

En effet, les ensembles  $A-B$  et  $B$  sont (d'après  $B = \overline{AB}$ ) les ensembles  $Q_1$  et  $P_1$  de Lebesgue relativement à  $A$ , ce qui nous désignons par  $Q_1(A)$  et  $P_1(A)$ . On a, comme on sait (pour  $\alpha \geq 2$ ):

$$(22) \quad Q_\alpha(A-B) = Q_\alpha(A) \cdot (A-B) = Q_\alpha(A) \cdot Q_1(A) = Q_\alpha(A)$$

et pareillement :

$$(23) \quad Q_\alpha(B) = Q_\alpha(A) \cdot B = Q_\alpha(A) \cdot P_1(A) = Q_\alpha(A).$$

Or, les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont semi-continues sur  $A-B$  et de classe  $u_\alpha$  sur  $B$ ; le criterium de Lebesgue prouve donc dans un instant (d'après (22), (23) et la relation :

$$E[\xi \in A, F(\xi) < x] = E[\xi \in A-B, F(\xi) < x] + E[\xi \in B, F(\xi) < x],^1)$$

pour tout  $x$  réel), que  $F_1$  et  $F_2$  sont les fonctions  $u_\alpha$  sur  $A$ .

Le théorème est donc vrai pour tout ensemble  $A \subset E_2$ . Or, les espaces euclidiens  $E_n$  ( $n > 2$ ) jouissent de toutes les propriétés nécessaires pour la démonstration précédente; de plus, on s'assure facilement, que la démonstration du théorème pour  $A \subset E_1$  n'est qu'une application simplifiée de la méthode, développée plus haut. De là résulte que le théorème est vrai sans aucune restriction.

*C Q F D.*

*Remarque I.*

Si  $f(\xi)$  est continue sur  $B$ , ils existent toujours 2 fonctions: la fonction semi-continue supérieurement sur  $A$ , définie par les conditions (10) et (11) et la fonction semi-continue inférieurement

<sup>1)</sup> Le symbole  $E[\xi \in A, F(\xi) < x]$  désignant l'ensemble de tous les points de  $A$  pour lesquels on a:  $F(\xi) < x$ .

sur  $A$ , définie par (10) et (12), dont chacune présente l'extension parfaite de  $f(\xi)$ .

Si l'espace est, linéaire, on voit, d'après ce qui précède, que l'ensemble de points de discontinuité de chacune d'elles se compose d'un nombre fini ou de l'infinité dénombrable de points rationnels de  $A - B$ , (qui peuvent être d'ailleurs supposés de la forme  $\frac{n}{g^m}$ ,  $g$  étant un nombre naturel fixe  $\geq 2$  donné à priori).

Remarquons que cette dernière propriété est *caractéristique* pour l'espace  $E_1$ . Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant: *Pour que l'espace euclidien  $E$  soit linéaire, il faut et il suffit qu'il existe, pour toute fonction  $f(\xi)$ , définie et continue dans un ensemble fermé  $F \subset E$  quelconque, une fonction  $\varphi(\xi)$ , définie dans l'espace entier, remplissant les conditions:  $\varphi(\xi) = f(\xi)$ , pour  $\xi \in F$ , et  $\varphi(E) = f(F)$ , et continue partout dans  $E$ , sauf peut être dans un ensemble dénombrable de points.*

Observons encore qu'en omettant dans l'énoncé ci-dessus cette dernière restriction on obtient *la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace métrique séparable soit de dimension 0 au sens de M. Menger:*

En général, si on a  $A \subset E_n$  ( $n \geq 1$ ),  $A$  borné, l'ensemble de points de discontinuité de  $F(\xi)$  appartenants à  $A - B$  fait une partie de l'ensemble-somme dénombrable de plans  $(n - 1)$  — dimensionnels parallèles aux plans principaux du système des coordonnées. Dans le cas où  $A$  n'est pas borné, la transformation  $\Phi - \Psi$  transforme ces plans parallèles. Mais en compliquant un peu les constructions précédentes, on pourrait l'éviter et démontrer le théorème immédiatement sans restriction du texte. Il en résulterait que cet „ensemble de mesure nulle” de la condition  $V_a$  conserve sa nature indépendamment de la borneté de l'ensemble  $A$ .

### *Remarque II.*

En considérant les raisonnements précédents on voit que l'axiome du choix n'intervient qu'une fois au plus: au moment de la détermination de l'ensemble (5). Il en résulte que la fonction  $F(\xi)$  peut être construite effectivement, si l'ensemble (5) nous est effectivement donné.

Zofja Mizgierówna.

### O strukturze lublinitu.

Przedstawił S. Pieńkowski dn. 14 grudnia 1928.

W r. 1905 L. Iwanoff<sup>1)</sup> odkrył w okolicy Puław, w ziemi lubelskiej, nową odmianę węglanu wapnia, którą zaliczył do układu jedno- lub trójskośnego, uważając ją za przyrodzony wodzien węglanu wapnia. W roku 1907 J. Morozewicz<sup>2)</sup> nadał minerałowi temu nazwę „lublinit”, ze względu na to, że dzięki swym własnościom zasługiwał on na odróżnienie od innych gatunków szpatu wapiennego. Lublinit występuje dość często w Lubelskiem i na Podolu; stanowi on białą powłokę na głazach z epoki górnokredowej, powłokę, mniej lub więcej puszystą, przypominającą pleśń lub watę. Znany też pewną jego odmianę, tworzącą cienkie, białe naskorupienia o powierzchni powyginanej, lekko przytwierdzone do skały.

Dane, dotyczące lublinitu, przytoczone poniżej, znajdujemy w pracach Tschirwinsky'ego<sup>3)</sup>, Müggego<sup>4)</sup>, Langa<sup>5)</sup>, i Opolskiego<sup>6)</sup> oraz poprzednio wspomnianych badaczy.

Dane te dotyczą przedewszystkiem wymiarów cienkich, kruchych igieł, z których składa się omawiany minerał. Przeciętna grubość igieł zawiera się w granicach od 1  $\mu$ . do 2  $\mu$ ., a dla najcieńszych spada, zdaniem Opolskiego, poniżej 0,001 mm. Maksymalna długość igieł dochodzi do 0,27 mm., a wyjątkowo dla odmiany puszystej do 1 mm.

W celu określenia struktury lublinitu posługiwano się dwiema metodami: optyczną i mikrochemiczną.

Pierwsza z tych metod polegała na mierzeniu dwójłomności i współczynnika załamania światła minerału, na badaniu obrazów

---

<sup>1)</sup> Iwanoff. *Annuaire géol. et min. de la Russie* 8. s. 23 1905-6. *Neues Jahrb. f. Min.* 2. s. 358. 1907.

<sup>2)</sup> Morozewicz J. „Przyczynki do znajomości węglanu wapniowego”. *Kosmos*. XXXII s. 487. 1907.

<sup>3)</sup> Tschirwinsky. *Doelter. Handbuch d. Mineralchemie* I. s. 356. 1911.

<sup>4)</sup> Mügge. *Centralblatt f. Min.* s. 673. 1914.

<sup>5)</sup> Lang. *Neues Jahrbuch f. Min.* XXXVIII s. 121. 1915. *Centralblatt f. Min.* s. 298. 1915.

<sup>6)</sup> Opolski. *Kosmos*. Lwów. s. 549. 1921.

interferencyjnych w świetle zbieżnym, oznaczaniu kąta zaćmienia kryształu względem kierunku jego wydłużenia, lub wreszcie na mierzeniu maksymalnego kąta zaćmienia (Opolski).

Z prac tych wynikało, że lublinit jest ciałem optycznie ujemnym, o znacznej dwójłomności, niezbyt różniącej się od dwójłomności kalcytu, oraz o takim, jak kalcyt spółoścywniku załamania<sup>1)</sup>.

Metody chemiczne, stosowane przez Lang a i Mügg e go, polegały na ogrzewaniu minerału przez czas dłuższy w temperaturze 430<sup>o</sup>, rozpuszczaniu w kwasie octowym (Mügge), oraz na reakcjach barwnych (Lang). Jedna z tych ostatnich reakcyj dała wyniki podobne, jak dla kalcytu, dwie inne przebiegały o wiele wolniej, niż w wypadku kalcytu.

W kwestji struktury lublinitu wszystkie powyższe badania nie dały niestety zgodnej odpowiedzi. Przeciwnie, istniała pod tym względem wielka różnorodność zapatrywań.

Iwanoff uważał lublinit za minerał jedno- lub trójskośny, Mügge za pseudomorfozę po resztkach organicznych, Lang— za kryształ układu jednoskośnego. Odmienne stanowisko zajął Morozewicz, twierdząc, że jest to szpat wapienny, wydłużony silnie w kierunku krawędzi biegunowej romboedru. Do podobnego wniosku doszedł Opolski w swej pracy z r. 1921. Podług niego lublinit jest kalcytem, występuje jednak w rombościanach różnego rodzaju, jedne są ostrzejsze, inne spłaszczone. Z tych więc dwóch prac wynikało, że lublinit, tak jak kalcyt, należy do układu romboedrycznego.

Ta różnorodność zapatrywań na budowę tego minerału przekonywa nas, że wszystkie wyżej przytoczone metody nie wystarczają do jednoznacznego określenia struktury tak drobnych kryształów, jak igły lublinitu. Ostateczną i kategoryczną odpowiedź mogło w tym wypadku dać tylko użycie metody, pozwalającej wnikać w najsubtelniejszą budowę kryształów, — użycie analizy zapomocą promieni rentgenowskich.

Ze względu na występowanie lublinitu w postaci drobnych igieł należało zastosować metodę Debye-Scherrera.

Zamiast starać się określić strukturę lublinitu drogą ogólną, polegającą na mierzeniu sinusów kątów ugięcia i obliczaniu

---

<sup>1)</sup> Zeitschrift für Kristallographie 56. s. 227. 1921.

wskaźników ścian — postanowiono rozwiązać zagadnienie drogą porównania rentgenogramów lublinitu z diagramami innych znanych kryształów.

Do tych porównawczych fotografii używano przedewszystkiem szpatu islandzkiego oraz lublinitu. Ten ostatni był dwójakiego pochodzenia: z Kazimierza nad Wisłą (postać płatków), i z Góry Puławskiej (postać pleśni).

Kryształy przeznaczone do badania kontrolowano pod mikroskopem, usuwając wszelkie dostrzeżone zanieczyszczenia. Następnie należało dany minerał jaknajdrobniej sproszkować w specjalnym agatowym moździerzu. Jeśli sproszkowanie nie było dostateczne, otrzymywano na filmie na tle pierścieni punkty Lauego — ślady odbicia promieni X od ścian większych kryształów.

Po tych przygotowaniach umieszczano proszek krystaliczny na jedwabnej nici, pokrytej lepłą warstwą żelatyny, której użycie, jak wiadomo, nie komplikuje rentgenogramów. Nici ową zawieszano następnie w mosiężnej komorze prostopadłościenną tak, aby po wsunięciu do niej mosiężnego walca z filmem, oś jego zlewała się z kierunkiem nici. (Promień podstawy walca  $R = 23,91$  mm.).

Przednia ściana komory zrobiona była z warstwy ołowiu grubości jednego centymetra z niewielkim pośrodku otworem, do którego wkręcano mosiężny kolimator 3,46 cm. długości. Średnica jego otworu równała się 1 mm.

Jako źródła promieniowania używano rury jonowej typu Haddinga z miedzianą antikatodą. Napięcie wynosiło średnio 50.000 woltów. Okienka rury, zarówno jak otwór kolimatora komory zasłonięte były cienkimi blaszkami z glinu. Promienie stosowane do analizy kryształu tworzyły, jak to wynika z powyższych danych, cienką wiązkę w przybliżeniu monochromatyczną ( $K_{\alpha}$  i słabe  $K_{\beta}$  Cu). Czas ekspozycji wynosił 45—50 godzin.

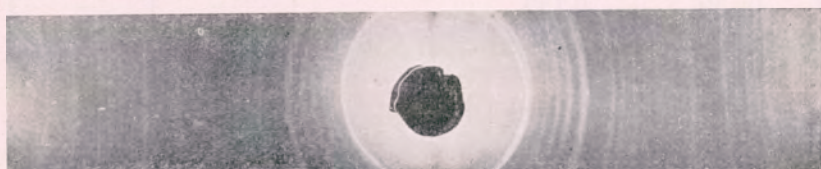
Główne trudności wynikały ze słabej zdolności rozpraszającej badanych minerałów. Fotografje wymagały długiego naświetlania, co znowu wpływało na zaciemnienie tła całej kliszy i bardzo utrudniało odczytywanie. Poza tem trzeba było nakładać na nitkę sporo kryształów i posługiwać się kolimatorem o średnicy 1 mm. (nie zaś  $1/2$  mm.), przez co pierścienie nieco się rozszerzały.



Rentgenogramy otrzymane w tych samych ściśle warunkach i w tej samej komorze dowiodły, że kalcyt i lublinit mają budowę identyczną.



Rys. 1. Kalcyt.



Rys. 2. Lublinit.

Aby upewnić się co do tego, że wyżej podane rentgenogramy odpowiadają rzeczywistości kryształom o zupełnie jednokowej strukturze, wymierzono na filmie odległości łuków, leżących symetrycznie,

$$\text{Korzystając ze wzoru } ^1) \quad \theta = \frac{L}{2R}$$

gdzie:  $\theta$  = kąt promienia padającego z płaszczyzną sieciową  
 $2L$  = odległość środków dwóch łuków na filmie, leżących symetrycznie

$R$  = promień filmu cylindrycznego,

można było określić wartości  $\theta$ , a następnie  $\sin^2 \theta$ , zawarte w dwóch pierwszych rubrykach załączonej poniżej tablicy. W trzeciej rubryce umieszczono dla porównania wartości  $\sin^2 \theta$ , obliczone dla kilku ścian kalcytu na zasadzie wzorów:

$$n\lambda = d_{pqr} \sin \theta \quad (\lambda = 1,5370) \quad ^2)$$

$$3,85 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

$$\text{oraz} \quad d_{pqr} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + qr + rp) \cos 101^\circ 9'}$$

<sup>1)</sup> Mauguin. La structure des cristaux s. 121. Paris. 1924

<sup>2)</sup> Mauguin La structure des cristaux s. 110. Paris. 1924.

$\sin^2 \theta$			wskazniki ściany <i>pqr</i>	rząd ugięcia <i>n</i>
I lublinit	II kalcyt	III kalcyt		
0,041	0,044	0,040	100	1
0,055	0,055	—	—	—
0,067	0,067	0,064	110	1
—	—	—	—	—
0,098	0,100	—	—	—
0,116	0,117	—	—	—
—	—	—	—	—
0,139	0,139	—	—	—
0,167	0,168	—	—	—
0,189	0,189	—	—	—
0,214	0,213	—	—	—
0,232	0,233	—	—	—
0,257	0,261	0,257	110	2
0,289	0,291	0,293	111	2
0,326	0,329	—	—	—
0,351	0,358	0,359	100	3
0,385	0,388	—	—	—
0,424	0,427	—	—	—
0,445	0,448	—	—	—
0,468	0,470	—	—	—
—	—	—	—	—
0,522	0,523	—	—	—
0,538	0,544	—	—	—
0,571	0,574	0,578	110	3
0,604	0,608	—	—	—
0,630	0,633	—	—	—
0,658	0,663	—	—	—

Różnice między odpowiednimi wartościami  $\sin^2 \theta$  dla szpatu i lublinitu wynikają z powodu trudności dokładnego odczytania odległości  $2L$ , wobec tego, że pierścienie były względnie szerokie i zaczernieniem mało różniły się od tła.

Przytoczona powyżej tablica obejmuje wartości  $\sin^2 \theta$  dla wszystkich zauważonych łuków, prócz kilku bardzo już rozmytych,

odpowiadających największym kątom ugięcia. Kreski w rubryce drugiej (kalcytu) oznaczają istnienie bardzo słabych pierścieni, których brakowało na filmach lublinitu. Możliwe, że pierścienie te pochodzą od słabego promieniowania  $K\beta$ , i że zdołały się uwidatnić tylko na filmach kalcytu, nieco dłużej naświetlanych.

Robiono pozatem rentgenogramy porównawcze kalcytu włóknistego, pochodzącego z Korondfürdo (Węgry) — otrzymano pierścienie takie, jak dla szpatu islandzkiego, tylko słabsze i w mniejszej ilości, gdyż jako źródła promieniowania używano innej rury o niższym napięciu. Natomiast diagram aragonitu (węglanu wapnia o budowie rombowej) wypadł, jak to było do przewidzenia, zupełnie inaczej.



Rys. 3. Aragonit.

Po stwierdzeniu identyczności kalcytu i lublinitu należało jeszcze zająć się kwestją, czy ten ostatni tworzy rombościany różnego rodzaju, jak to twierdził O polski. Gdyby jednak tak było, to pierścienie lublinitu stanowiłyby wypadkowe wielu pobliskich pierścieni, pochodzących wskutek odbicia promieni od ścian rozmaicie w różnych kryształach nachylonych. Łuki te powinny być zatem znacznie bardziej rozmyte od łuków na filmach kalcytu. Tego jednak przy porównywaniu rentgenogramów nie dało się zauważyć.

Analiza zapomocą promieni X mogła dać odpowiedź na jedno jeszcze zagadnienie, a mianowicie, czy lublinit występujący w naskorupieniach posiada strukturę włóknistą. Wiadomo, że ciała o takiej budowie dają tak zwane rentgenogramy Polanyi'ego w postaci punktów i kresek. Przy naświetlaniu płatków lublinitu otrzymano jednak tylko pierścienie, co dowiodło:

1) zupełnie bezładnego ułożenia igieł w mineralu w stanie naturalnym,

2) nadzwyczaj drobnych rozmiarów tychże igieł, skoro nie otrzymano ani jednego punktu powstałego wskutek odbicia promieni X od ściany pojedynczego większego kryształu.

Próbowano pozatem uporządkować igły lublinitu tak, aby można było otrzymać figury Polanyi'ego. Zawieszano w tym celu pewną ilość igieł w cienkim naczyniu szklanem o ściankach płasko-równoległych, wypełnionem wodą i ustawionem pionowo. Przy pomocy mikroskopu obserwowano, czy igły nie ułożą się równolegle pod wpływem siły ciężkości. Jednak po kilku dniach położenie igieł były równie bezładne, jak z początku.

Ostatecznie możemy zatem uważać za stwierdzone, że:

- 1) lublinit jest kalcytem,
- 2) lublinit występujący w postaci płatków nie posiada struktury włóknistej.

Pozostaje mi jeszcze wyrazić serdeczne podziękowanie P. Profesorowi dr. S. Pieńkowskiemu za cenne rady i wskazówki, których mi nigdy nie szczędził. Pragnę też złożyć wyrazy wdzięczności PP. Profesorom: dr. S. Thuguttowi i dr. T. Woynię za łaskawe udzielenie mi minerałów przeznaczonych do badań.

Zofja Mizgierówna.

### La structure de la lublinite.

Mémoire présenté par Mr S. Pieńkowski le 14 decembre 1928.

Sommaire.

En 1905, Ivanoff a découvert dans la province de Lublin, un nouveau type de carbonate de calcium, qui plus tard a été nommé par Morozewicz „lublinite”. Ce minéral apparaît sur les roches, sous la forme d'une couche duvetée qui rappelle la moisissure ou l'ouate, ou bien encore sous la forme de couches minces, présentant une surface courbe.

Le minéral en question est composé d'aiguilles blanches, fragiles, de dimensions extrêmement petites: épaisseur moyenne 1 à 2 $\mu$ , longueur à peu près 0,27 mm.

Tschirwinsky, Lang, Mügge, Opolski, ainsi que les auteurs mentionnés ci-dessus ont effectué une série d'expériences sur la lublinite, en se servant de méthodes optiques et microchimiques. Ces recherches n'ont pas donné des réponses concordantes sur la structure du minéral.

Tandis que certains auteurs le classifient comme appartenant au système monoclinique ou triclinique, d'autres déclarent que

c'est un cristal pseudomorphotique, provenant de quelques substances organiques; d'autres encore supposent que c'est un minéral du système rhomboédrique, dont la forme des rhomboèdres se rapproche de la calcite.

On ne pouvait résoudre le problème, qu'en se servant d'une méthode permettant d'atteindre la structure intime des cristaux. Une telle méthode est l'analyse à l'aide des rayons X.

A cause des dimensions très petites des aiguilles de la lublinité, ou devait se servir de la méthode Debye-Scherrer.

Au lieu de définir la structure de la lublinité en mesurant les angles de la diffraction et en calculant les caractéristiques entières des faces, on a décidé de résoudre le problème en comparant les clichés obtenus pour la lublinité avec les diagrammes des autres cristaux connus. Pour obtenir ces photographies comparatives on s'est servi du spath d'Islande et de la lublinité (en 2 formes).

Les cristaux nettoyés et pulvérisés étaient suspendus sur un fil de soie dans une chambre photographique Debye-Scherrer, contenant une pellicule cylindrique.

Le rayonnement provenait d'un tube à afflux, type Had-ding, muni d'une anticathode de cuivre.

Les rayons employés pour l'analyse des cristaux formaient un mince faisceau approximativement monochromatique ( $K_{\alpha}$  et faible  $K_{\beta}$  Cu). Le tube fonctionnait sous une tension de 50 KV, durée d'exposition 45—50 heures.

Les clichés obtenus exactement dans les mêmes conditions et dans la même chambre photographique ont prouvé que la lublinité et la calcite ont une structure identique. Comme preuve, peut servir aussi le tableau qui contient les valeurs de  $\sin^2\theta$  évaluées d'après les diagrammes des deux minéraux.

Les différences entre les valeurs relatives de  $\sin^2\theta$  proviennent de la difficulté de préciser sur la pellicule la distance entre deux raies symétriques, car les raies sont relativement larges et faibles.

Les essais effectués en vue d'obtenir des figures de Polanyi par l'exposition des écailles de la lublinité n'ont pas donné des résultats positifs.

On peut donc admettre définitivement que: 1) la lublinité est la calcite, 2) qu'apparaissant sous la forme de carapaces, elle ne possède pas la structure fibrillaire.





Redaktor

**Bolesław Hryniewiecki.**

Adres Redakcji: Śniadeckich 8.

---