RZECZ

o dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego.

Przez

Gustawa Krammera.

(Tabl. VI i VII).

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydziału mat.-przyr. dnia 20 Grudnia 1878 r.).

1. Ponieważ krzywa rzędu drugiego oznaczona jest jednoznacznie:

a). pięciu rzeczywistémi punktami;

b). cztérema rzeczywistémi punktami i promieniem, przechodzącym przez jeden z tych punktów;

c). trzema rzeczywistémi punktami i dwoma rzeczywistémi promieniami, z których każdy przechodzi przez jeden z trzech danych punktów;

d). parą urojonych i trzema rzeczywistémi punktami;

e) parą urojonych punktów, dwoma rzeczywistémi punkta-

a). pięciu rzeczywistémi promieniami;

b). cztérema rzeczywistémi promieniami i punktem, znajdującym się na jednym z tych promieni;

c). trzema rzeczywistémi promieniami i dwoma rzeczywistémi punktami, z których każdy znajduje się na jednym z trzech danych promieni;

d). parą urojonych i trzema rzeczywistémi promieniami;

e). parą urojonych promieni, dwoma rzeczywistémi promie-

http://rcin.org.pl

mi i promieniem przechodzącym przez jeden z dwóch danych rzeczywistych punktów;

f). dwoma parami urojonych punktów i rzeczywistym punktem;

g). parą urojonych punktów, parą urojonych promieni, przechodzących przez dane urojone punkty i rzeczywistym punktem;

niami i punktem znajdującym się na jednym z dwóch danych rzeczywistych promieni;

f). dwoma parami urojonych promieni i rzeczywistym promieniem;

g). parą urojonych promieni, parą urojonych punktów, znajdujących się na danych urojonych promieniach i rzeczywistym promieniem;

przeto mogą dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego mieć:

1). cztéry rzeczywiste wspólne punkty téj własności, iż którekolwiek dwa mają oddalenie skończone;

2). cztéry rzeczywiste wspólne punkty, z których trzy bezpośrednio po sobie następują;

3). cztéry rzeczywiste bezpośrednio po sobie następujące punkty;

4) cztéry rzeczywiste wspólne punkty, z których dwa bezpośrednio po sobie następują;

5). cztéry rzeczywiste wspólne punkty, ułożone w dwie pary bezpośrednio po sobie następujących punktów;

6) parę rzeczywistych wspólnych punktów o oddaleniu

1). cztéry rzeczywiste wspólne promienie téj własności, iż którekolwiek dwa mają nachylenie mniéjsze od 180°;

2). cztéry rzeczywiste wspólne promienie, z których trzy bezpośrednio po sobie następują;

3). cztéry rzeczywiste bezpośrednio po sobie następujące promienie;

4). cztéry rzeczywiste wspólne promienie, z których dwa bezpośrednio po sobie następują;

5). cztéry rzeczywiste wspólne promienie, ułożone w dwie pary bezpośrednio po sobie następujących promieni;

6). parę rzeczywistych wspólnych promieni o nachyleniu

http://rcin.org.pl

skończoném i parę urojonych wspólnych punktów;

7). parę rzeczywistych bezpośrednio po sobie następujących wspólnych punktów i parę urojonych wspólnych punktów;

8). dwie pary bezpośrednio po sobie następujących urojonych wspólnych punktów;

9). dwie pary urojonych wspólnych punktów.

mniéjszém od 180° i parę urojonych wspólnych promieni;

7). parę rzeczywistych bezpośrednio po sobie następujących wspólnych promieni i parę urojonych wspólnych promieni;

8). dwie pary pezpośrednio po sobie następujących urojonych wspólnych promieni;

9). dwie pary urojonych wspólnych promieni.

Rzeczywiste lub urojone wspólne punkty,

Rzeczywiste lub urojone wspólne promienie,

dwóch na płaszczeni znajdujących się krzywych rzędu drugiego, pojawiają się zawsze parami, przeto ażeby rozstrzygnąć nasuwające się pytanie: czy istnieją oprócz przytoczonych jeszcze inne przypadki? zastanowić się potrzeba nad następującemi pytaniami:

a). Mogąli dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego mieć tylko

dwa, rzeczywiste albo urojone, wspólne punkty?

dwa, rzeczywiste albo urojone, wspólne promienie?

b). Sąli możliwe dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego, któreby nie posiadały

ani rzeczywistych ani urojonych wspólnych punktów?

ani rzeczywistych ani urojonych wspólnych promieni?

Stanowcze odpowiedzi na przedłożone pytania zależą od pewnych własności przypadających dwom na płaszczeni leżącym krzywym rzędu drugiego, które z tego powodu poprzednio omówimy.

http://rcin.org.pl

2. Inwolucyja punktów na promieniu p, łączącym parę rzeczywistych lub parę urojonych wspólnych punktów dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego K i K', zupełnie oznaczona témi punktami, stanowiącémi jéj punkty podwójne, jest wspólną obydwu zauważanym krzywym. Odpowiedne promienie współkréślnych wiązek, utworzonych z biegunowych wszystkim punktom promienia p ze względu na krzywą K i K' przypadających, których środkami są bieguny P i P' promienia p, są biegunowe, przypadające punktowi promienia p. Biegunowa n dowolnego punktu N promienia p, wykréślona ze względu na krzywą K, przecina promień p w punkcie N'', stanowiącym z punktem N parę wspólnych sprzężonych punktów zauważanych krzywych, przez który przechodzi także biegunowa n' punktu N wykréślona ze względu na krzywą K'. Współkréślne wiązki P i P' mają więc położenie współkréślne, a promieniem, łączącym punkty przecięcia się ich odpowiednych promieni, jest promień p. Na promieniu, łączącym środki P i P' tych współkréślnych wiązek o położeniu współkréślném, znajdują się dwie odpowiedne biegunowe b i b' zauważanych krzywych, przez które rozumiémy dwie biegunowe przypadające punktowi na płaszczeni dwóch krzywych rzędu drugiego, przeto jest pomieniony promień bb' wspólną biegunową, a biegun jego wspólnym biegunem krzywych K i K' — I dwoiście:

Własności wspólnéj biegunowéj i wspólnego bieguna dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego są, według podanych objaśnień, następujące:

http://rcin.org.pl

Na wspólnéj biegunowéj znajdują się bieguny przypadające promieniowi, który łączy dwa danym krzywym wspólne punkty.

Przez wspólny biegun przechodzi promień łączący dwa danym krzywym wspólne punkty.

Każdy punkt wspólnéj biegunowéj stanowi ze wspólnym, jéj przypadającym, biegunem parę wspólnych sprzężonych punktów zauważanych krzywych rzędu drugiego.

3. Punktom wspólnéj biegunowéj bb' przypadające biegunowe, ze względu na krzywe K i K', tworzą w wspólnym biegunie BB' dwie współkréślne wiązki B i B', których promienie podwójne stanowią na sobie leżące odpowiedne biegunowe. Promienie podwójne współkréślnych wiązek B i B' w spólnym biegunie BB' są zatém także wspólnemi biegunowemi krzywych K i K'.

Ale wiązka biegunowych B jest zarazem inwolucyją promieni krzywéj K w punkcie

Przez wspólny biegun przechodzą biegunowe przypadające punktowi, w którym przecinają się dwa danym krzywym wspólne promienie.

Na wspólnéj biegunowéj znajduje się punkt przecięcia się dwóch danym krzywym wspólnych promieni.

Każdy promień wspólnego bieguna stanowi ze wspólną, jemu przypadającą, biegunową parę wspólnych sprzężonych promieni zauważanych krzywych rzędu drugiego.

Promieniom wspólnego bieguna BB' przypadające bieguny, ze względu na krzywe K i K', tworzą na wspólnéj biegunowéj bb' dwa współkréślne rzędy b i b', których punkty podwójne stanowią na sobie leżące odpowiedne bieguny. Punkty podwójne współkréślnych rzędów b i b' na wspólnéj biegunowéj bb' są zatém także wspólnémi biegunami krzywych K i K'.

Ale rzęd biegunów b jest zarazem inwolucyją punktów krzywéj K na promieniu

http://rcin.org.pl

BB', wiązka biegunowych B' inwolucyją promieni krzywéj K' w punkcie BB',

bb', rzęd biegunów b inwolucyją punktów krzywéj K' na promieniu bb',

a inwolucyja promieni B i inwolucyja punktów b, inwolucyja promieni B' i inwolucyja punktów b' mają położenie współkréślne, przeto są:

wspólne sprzężone promienie tych inwolucyj promieniami podwójnémi wiązek współkréślnych B i B', a ich punkty przecięcia ze wspólną biegunową bb' wspólnémi biegunami krzywych K i K'.

Inwolucyje promieni, w wspólnym biegunie dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, mogą być przeciwbieżnemi, równobieżnemi, jedna równo, druga przeciwbieżną; lub nareszcie jednę i drugą inwolucyję promieni stanowi szczególny rodzaj inwolucyi, którę tworzą współkréślna wiązka promieni i $\infty + 1$ na sobie leżących promieni.

Wspólny biegun, dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, znajdujący się na promieniu łączącym dwa danych krzywych rzeczywiste lub urojone wspólne

wspólne sprzężone punkty tych inwolucyj punktami podwójnémi rzędów współkréślnych b i b', a promienie łączące je ze wspólnym biegunem BB' wspólnemi biegunowemi krzywych K i K'.

Inwolucyje punktów, na wspólnéj biegunowéj dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, mogą być przeciwbieżnemi, równobieżnemi, jedna równo, druga przeciwbieżną; lub nareszcie jednę i drugą inwolucyję punktów stanowi szczególny rodzaj inwolucyi, którę tworzą współkréślny rzęd punktów i $\infty + 1$ na sobie leżących punktów.

Wspólna biegunowa, dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, przechodząca przez punkt przecięcia dwóch danych krzywych rzeczywistych lub urojonych wspól-

http://rcin.org.pl

Punkty, jest przeto punktem przecięcia się dwóch rzeczywistych, dwóch urojonych, albo nieskończenie wielu więcéj jeden rzeczywistych wspólnych biegunowych, które biegunową, temu wspólnemu biegunowi przynależną, przecinają w dwóch rzeczywistych, w dwóch urojonych albo w nieskończenie wielu więcéj jeden rzeczywistych wspólnych biegunach.

Urojone wspólne biegunowe oznaczone są przeciwbieżnemi inwolucyjami promieni B i B' w pomienionym wspólnym biegunie zauważanych krzywych.

Nieskończenie wiele więcéj jeden wspólnych biegunowych w wspólnym biegunie i jednę wspólną biegunową w oddaleniu skończoném od wspólnego bieguna

nych promieni, jest przeto promieniem łączącym dwa rzeczywiste, dwa urojone, albo nieskończenie wiele więcéj jeden rzeczywistych wspólnych biegunów, które połączone z biegunem, téj wspólnéj biegunowéj przynależnym, stanowią dwie rzeczywiste, dwie urojone, albo nieskończenie wiele więcéj jeden rzeczywistych wspólnych biegunowych.

Urojone wspólne bieguny oznaczone są przeciwbieżnemi inwolucyjami punktów b i b' na pomienionéj wspólnéj biegunowéj zauważanych krzywych.

Nieskończenie wiele więcéj jeden wspólnych biegunów na wspólnéj biegunowéj i jeden wspólny biegun w oddaleniu skończoném od wspólnéj biegunowéj

mają dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego, jeżeli

inwolucyje promieni B i B' | inwolucyje punktów b i b'

są indentyczne, czyli innemi słowy:

jeżeli dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego mają cztéry, lecz tak ułożone, wspólne promienie, iż stanowią dwie pary bezpośrednio po sobie następujących promieni, a zarazem cztéry, lecz tak ułożone, wspólne punkty, iż stanowią dwie pary bez-

http://rcin.org.pl

pośrednio po sobie następujących punktów. Pomienione cztéry wspólne promienie i cztéry wspólne punkty są rzeczywistémi, jeżeli inwolucyja promieni w wspólnym biegunie BB' i inwolucyja punktów na wspólnéj biegunowéj bb', jako inwolucyje wspólne obydwu krzywym, są przeciwbieżnemi; urojonémi zaś, jeżeli te inwolucyje są równobieżnemi.

Jest oddalenie wspólnego bieguna BB', przez który przechodzi $\infty + 1$ wspólnych biegunowych, od wspólnéj biegunowéj bb', na któréj znajduje się $\infty + 1$ wspólnych biegunów, nieskończenie małe; w takim razie, stają się identyczne inwolucyje B i B' i identyczne inwolucyje b i b' o położeniu współkréślném parabolicznemi, a obydwie pary bezpośrednio po sobie następujących rzeczywistych lub urojonych wspólnych punktów i obydwie pary bezpośrednio po sobie następujących rzeczywistych lub urojonych wspólnych promieni układają się przy wspólnym biegunie BB' i przy wspólnéj biegunowéj bb' tak, iż stanowią cztéry bezpośrednio po sobie następujące, rzeczywiste, wspólne punkty i cztéry bezpośrednio po sobie następujące, rzeczywiste, wspólne promienie krzywych K i K'.

Dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego, o cztérych bezpośrednio po sobie następujących wspólnych punktach i cztérych bezpośrednio po sobie następujących wspólnych promieniach, mają więc tylko $\infty + 1$ wspólnych biegunów i tylko $\infty + 1$ wspólnych biegunowych.

Parą wspólnych sprzężonych promieni przeciwbieżnych inwolucyi promieni B i B' w wspólnym biegunie BB',	Parą wspólnych sprzężonych punktów przeciwbieżnych inwolucyi punktów b i b' na wspólnéj biegunowéj, przecho-

http://rcin.org.pl

znajdującym się na promieniu p, mogą być ich na sobie leżące promienie podwójne, a ponieważ promień podwójny inwolucyi krzywéj rzędu drugiego jest promieniem téj krzywéj;

dzącéj przez punkt P, mogą być ich na sobie leżące punkty podwójne, a ponieważ punkt podwójny inwolucyi krzywéj rzędu drugiego jest punktem téj krzywéj;

przeto mają w tym przypadku zauważane krzywe dwa bezpośrednio po sobie następujące rzeczywiste wspólne promienie i dwa bezpośrednio po sobie następujące rzeczywiste wspólne punkty.

Tak na płaszczeni ułożone krzywe rzędu drugiego K i K' posiadają trzy rzeczywiste wspólne bieguny i trzy rzeczywiste wspólne biegunowe, tworzące trójkąt o dwóch bezpośrednio po sobie następujących, punktem P i promieniem bb' oznaczonych wiérzchołkach i dwóch bezpośrednio po sobie następujących, promieniem p i punktem BB' oznaczonych bokach, którego wiérzchołek trzeci BB', znajdujący się na promieniu p, ma od wiérzchołków wspomnianych oddalenia skończone, a bok trzeci bb', przechodzący przez punkt P, zawiéra z bokami pomienionémi kąty skończone.

Do tego wyniku dojdziemy także inną drogą, a nadto poznamy dalsze dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego własności.

Na promieniu p, łączącym dwa bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty M i M' krzywych K i K', tworzą bieguny, przypadające promieniom wiązki w punkcie

W punkcie przecięcia się P, dwóch bezpośrednio po sobie następujących wspólnych promieni m i m' krzywych K i K', tworzą biegunowe, przypadające punktom rzędu na

http://rcin.org.pl

P, dwa współkréślne rzędy ABC.. i $A'B'C'$.., których punkty podwójne są wspólnémi biegunami. Jednym z dwóch punktów podwójnych jest punkt CC', którego położenie oznaczone jest punktem P i wspólną biegunową bb'; drugi BB' ma w ogóle od punktn CC' oddalenie skończcne; trzecim wspólnym biegunem jest punkt P.

Są współkréślne rzędy ACB i $A'B'C'$.. równobieżnémi i stanowią punkt podwójny ich odpowiedne punkty G i G' albo H i H', w takim razie jest punkt podwójny BB' (właściwie GG' lub HH') punktem bezpośrednio po punkcie CC' następującym, którego położenie wskazuje punkt P i kierunek promienia, bezpośrednio po promieniu p następującego; ponieważ podczas zbliżania się punktu BB' do punktu P zbliża się promień bb' do promienia p, a w chwili gdy BB' stąje się bezpośrednio po punkcie P następującym punktem staje się i bb' bezpośrednio

promieniu p, dwie współkréślne wiązki abc.. i $a'b'c'$.., których promienie podwójne są wspólnemi biegunowemi. Jednym z dwóch promieni podwójnych jest promień cc', którego położenie oznaczone jest promieniem p i wspólnym biegunem BB', drugi bb' zawiéra w ogóle z promieniem cc' kąt skończony; trzecią wspólną biegunową jest promień p.

Są współkréślne wiązki abc.. i $a'b'c'$.. równobieżnemi i stanowią promień podwójny ich odpowiedne promienie g i g' albo h i h', w takim razie jest promień podwójny bb' (a właściwie gg' lub hh') promieniem bezpośrednio po promieniu cc' następującym, którego położenie wskazuje promień p i zwrot punktu, bezpośrednio po punkcie P następującego; ponieważ podczas zbliżania się promienia bb' do promienia p zbliża się punkt BB' do punktu P, a w chwili gdy bb' staje się bezpośrednio do promienia p przylegającym pro-

http://rcin.org.pl

do promienia p przylegającym promieniem,

mieniem staje się i BB' bezpośrednio po punkcie P następującym punktem,

co jednak znaczy:

Dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego, o trzech bezpośrednio po sobie następujących wspólnych punktach i trzech bezpośrednio po sobie następujących wspólnych promieniach (patrz l. 8 przypadek M), mają trzy wspólne bieguny i trzy wspólne biegunowe, tworzące trójkąt, o nieskończenie małéj powiérzchni.

Jest nareszcie oddalenie punktu podwójnego BB' od punktu CC' nieskończenie wielkie, natenczas są wskółkréślne rzędy $ABC\ldots$ i $A'B'C'\ldots$ podobnémi, a wspólne bieguny i wspólne biegunowe krzywych K i K' znamionują własności następujące:

Trzy wspólne bieguny i trzy wspólne biegunowe dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego o dwóch bezpośrednio po sobie następujących wspólnych punktach, dwóch bezpośrednio po sobie następujących wspólnych promieniach i dwóch podobnych rzędach na promieniu, łączącym pomienione dwa bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty, tworzą trójkąt o dwóch bezpośrednio po sobie następujących wiérzchołkach i dwóch bezpośrednio po sobie następujących bokach, którego wiérzchołek trzeci stanowią dwa na sobie leżące środki a bok trzeci dwie na sobie leżące średnice [1]).

[1]) Płaska krzywa rzędu drugiego posiada $\infty + 1$ środków w nieskończonéj dali i jeden środek w skończoności, $\infty + 1$ średnic w skończoności i jednę średnicę w nieskończonéj dali.

http://rcin.org.pl

4). Wspólne sprzężone promienie inwolucyi B i B' są wspólnémi sprzężonémi promieniami krzywych K i K', a wspólna biegunowa bb' biegunową ich punktu przecięcia się ze względu na krzywe K i K' — i dwoiście.

Z tych uwag wynikają jeszcze następujące własności wspólnych biegunów i wspólnych biegunowych:

Trzy wspólne biegunowe jako promienie łączące trzy wspólne bieguny, z których dwa są wspólnémi sprzężonémi punktami dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, trzeci zaś biegunem promienia je łączącego ze względu na jednę i drugą zauważaną krzywę, stanowią wspólną trójkę o trzech rzeczywistych albo jednym rzeczywistym i dwóch urojonych sprzężonych promieniach.

Trzy wspólne bieguny jako punkty przecięcia trzech wspólnych biegunowych, z których dwie są wspólnémi sprzężonémi promieniami dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, trzecia zaś biegunową ich punktu przecięcia ze względu na jednę i drugą zauważaną krzywę, stanowią wspólną trójkę o trzech rzeczywistych albo o jednym rzeczywistym i dwóch urojonych sprzężonych punktach.

5). Wszystkie punkty, które z punktami promienia x, przechodzącego przez wspólny biegun BB', stanowią wspólne sprzężone punkty krzywych K i K', otrzymamy jako punkty przecięcia się odpowiednych biegunowych, punktom promienia x przypadających. Odpowiedne biegunowe, wszystkich punktów promienia x, są jednak odpowiednémi promieniami dwóch współkréślnych wiązek o położeniu współkréślném, ponieważ para odpowiednych biegunowych, przypadających wspólnemu biegunowi, znajduje się na wspólnéj biegunowéj bb', na któréj leżą także ich środki;

http://rcin.org.pl

a więc znajdują się punkty, które z punktami promienia *x* stanowią wspólne sprzężone punkty krzywych *K* i *K'*, zawsze na dwóch promieniach. Jednym jest promień *x'*, łączący punkty przecięcia się promieniowych odpowiednych biegunowych, który przejść musi przez wspólny biegun *BB'*, gdyż punkt, stanowiący z punktem przecięcia się promieni *x* i wspólnéj biegunowéj *bb'* parę wspólnych sprzężonych punktów danych krzywych, jest wspólnym biegunem *BB'*; — drugim zawsze wspólna biegunowa *bb'*. Wiązce promieni *xyz*.. w wspólnym biegunie *BB'* przypada zatém po wyłączeniu wspólnéj biegunowéj *bb'*, w tym samym wspólnym biegunie wiązka promieni *xyz*...., któréj własności bliżéj zbadać wypada.

Wszystkie punkty, które z punktami przecięcia się *X*, *Y*, *Z*,.. promienia *l* z promieniami wiązki *xyz*.. stanowią wspólne sprzężone punkty krzywych *K* i *K'*, znajdują się na krzywéj rzędu drugiego *K"*, jeżeli promień *l* nie przechodzi przez wspólny biegun *BB'* danych krzywych; ponieważ, w takim razie, współkréślne wiązki promieni w biegunach *L* i *L'* promienia *l* (oznaczonych ze względu na krzywe *K* i *K'*), utworzone z biegunowych punktom promienia *l* przypadających, mają położenie różnokréślne. Krzywa *K"* przechodzi przez wspólny biegun *BB'*, gdyż punkt przecięcia się promienia *l* ze wspólną biegunową *bb'* i wspólny biegun *BB'* są zauważanych krzywych wspólnémi sprzężonémi punktami. Wiązka biegunowych *L* i rzęd punktów *XYZ*.. na promieniu *l*, mający z wiązką promieni *xyz*.. położenie współkréślne, są utworami współkréślnémi a punkty przecięcia się biegunowych w punkcie *L* przynależnych punktom

http://rcin.org.pl

$X, Y, Z, ..$ z krzywą K'' rzędem stopnia drugiego $X'' Y'' Z''..$, który z wiązką biegunowych L ma położenie współkréślne; — przeto są wiązka promieni $xyz...$ i rzęd punktów stopnia drugiego $X'' Y'' Z''...$ utworami współkréślnémi. Przez punkty $X'', Y'', Z''..$ krzywy K'', które z punktami $X, Y, Z, ..$ na promieniach $x, y, z, ..$ stanowią wspólne sprzężone punkty danych krzywych K i K', przechodzą promienie $x', y', z', ..$ wiązki $x' y' z'..$, któréj środkiem jest wspólny biegun BB' a więc punkt krzywéj K''; przeto są wiązka promieni $xyz...$ i wiązka promieni $x'y'z'...$ utworami współkréślnémi o odpowiednych promieniach x i x', y i y', z i $z', ...$

Odpowiednym promieniem promienia x' wiązki $xyz..$ jest wszakże promień x wiązki $x'y'z'..$, która okoliczność upoważnia do następującego orzeczenia:

Wiązki promieni $xyz...$ i $x'y'z'..$, w wspólnym biegunie BB', tworzą inwolucyję promieni, która może być przeciwbieżną, równobieżną albo szczególnym rodzajem inwolucyi, którę tworzą wiązka promieni $xyz..$ i $\infty + 1$ na sobie leżących promieni $x', y', z', ..$

Na promieniu podwójnym inwolucyi $xx'\ yy'\ zz'..$ znajdujące się wspólne sprzężone punkty tworzą inwolucyję punktów, wspólną obydwu krzywym K i K'. Takim promieniem jest promień p, łą-

Rzędy punktów $XYZ..$ $X'Y'Z'..$, na wspólnéj biegunowéj bb', tworzą inwolucyję punktów, która może być przeciwbieżną, równobieżną albo szczególnym rodzajem inwolucyi, którę tworzą rzęd punktów $XYZ..$ i $\infty + 1$ na sobie leżących punktów $X', Y', Z', ..$

Przez punkt podwójny inwolucyi $XX'\ YY'\ ZZ'..$ przechodzące wspólne sprzężone promienie tworzą inwolucyję promieni, wspólną obydwu krzywym K i K'. Takim punktem jest punkt przecięcia się

http://rcin.org.pl

czący dwa danych krzywych wopólne punkty, a ponieważ inwolucyja promieni posiada dwa promienie podwójne;	P dwóch danych krzywych wspólnych promieni, a ponieważ inwolucyja punktów posiada dwa punkty podwójne;

przeto mają:

Dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego, posiadające jednę, zawsze drugą parę wspólnych punktów.	Dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego, posiadające jednę, zawsze drugą parę wspólnych promieni.

Przytoczone zdania są odpowiedzią na piérwsze z dwóch pytań umieszczonych pod l. 1.

Promień, łączący dwa wspólne punkty dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, jako promień podwójny inwolucyi $xx'yy'zz'$.., jest przeto rzeczywistym albo urojonym. Promień łączący dwa rzeczywiste lub dwa przynależne urojone albo dwa bezpośrednio po sobie następujące rzeczywiste wspólne punkty dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, jako promień, na którym znajduje się inwolucyja punktów wspólna obydwu krzywym, a któréj punkty podwójne są właśnie ich wspólnémi punktami, jest rzeczywistym. Położenia takich promieni oznaczone są rzeczywistémi promieniami podwójnémi inwolucyj przeciwbieżnych $xx'yy'zz'$.. Urojone promienie, oznaczone parami inwolucyją równobieżną $xx'yy'zz'$., łączą więc nieprzynależne urojone wspólne punkty albo urojone z bezpośrednio po sobie następującémi punktami dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego.

Z podanych objaśnień wynikają następujące zdania:

http://rcin.org.pl

Punkt przecięcia się dwóch promieni, z których każdy łączy parę wspólnych punktów dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, jest wspólnym biegunem, jeżeli pomienionemi dwiema parami zastąpione są ich cztéry wspólne punkty.

Promień, łączący dwa punkty, z których każdy jest przecięciem się dwóch wspólnych promieni dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, jest wspólną biegunową, jeżeli pomienionemi dwiema parami zastąpione są ich cztéry wspólne promienie.

Oprócz przytoczonych otrzymamy, pomni na własności inwolucyjnych wiązek promieni i inwolucyjnych rzędów punktów, jeszcze następujące zdania:

Dwa promienie, łączące dwie pary wspólnych punktów dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, przedzielają harmonijnie dwa wspólne sprzężone punkty zauważanych krzywych, jeżeli punktem przecięcia się pomienionych promieni jest wspólny biegun.

Dwa promienie, łączące dwie pary wspólnych punktów, których punktem przecięcia się jest wspólny biegun dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, stanowią ze wspólnémi biegunowémi, przecinającémi się w pomienionym wspólnym biegunie, harmonijny układ promieni.

Dwa punkty przecięcia się dwóch par wspólnych promieni, dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, przedzielają harmonijnie dwa wspólne sprzężone promienie zauważanych krzywych, jeżeli promieniem, łączącym pomienione punkty, jest wspólna biegunowa.

Dwa punkty przecięcia się dwóch par wspólnych promieni, które łączy wspólna biegunowa dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, stanowią ze wspólnémi biegunami, znajdującémi się na pomienionéj wspólnéj biegunowéj, harmonijny układ punktów.

http://rcin.org.pl

6. Punkty, które z punktami promienia l, leżącego na płaszczeni dwóch krzywych rzędu drugiego, stanowią sprzężone punkty wspólne obydwu krzywym znajdują się według l. 5 na dwóch promieniach t i u (jako szczególnym przypadku krzywéj rzędu drugiego, z których jeden np. u albo obydwa są wspólnémi biegunowémi) albo, są punktami krzywéj rzędu drugiego K''.

Na promieniach t i u albo na krzywéj K'' znajdują się zauważanych krzywych wszystkie wspólne bieguny, ponieważ punkt, który z punktem przecięcia się promieni l i wspólnéj biegunowéj stanowi parę wspólnych sprzężonych punktów, jest wspólnym biegunem i punktem promienia t albo u a względnie punktem krzywéj K''; wszystkie zaś możliwe wspólne biegunowe zauważanych krzywych przecinają promień l, leżący w ich płaszczeni. Innemu promieniowi l', na płaszczeni danych krzywych rzędu drugiego, przypadają albo promienie t' i u' (z których u' albo t' i u' są wspólnémi biegunowémi) lub krzywa rzędu drugiego K''', za pomocą których, zważywszy, że one przez te same wspólne przechodzą bieguny, które znajdują się na promieniach t i u a względnie na krzywéj K'', będziemy w stanie oznaczyć liczbę wszystkich wspólnych biegunów dwóch na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego. W tym celu zastanówmy się kolejno nad następującémi możliwémi przypadkami:

α). Promieniom l i l' przypadają promienie t i u, t' i u'. Fig. 1α.	α). Punktom L i L' przypadają punkty T i U, T' i U'. Fig. 1β.
β). Promieniowi l przypadają promienie t i u, promieniowi l' krzywa K'''.	β). Punktowi L przypadają punkty T i U, punktowi L' krzywa K'''.

http://rcin.org.pl

γ). Promieniom l i l' przypadają krzywe K'' i K'''.

γ). Punktowi L i L' przypadają krzywe K'' i K'''.

W przypadku α) mogą promienie l, t, u, i l', t', u', tylko następujące mieć położenia:

1). Na wspólnym biegunie lt znajduje się wspólny biegun $l't'$, a w takim razie, według l. 5, znajduje się na wspólnéj biegunowéj u wspólna biegunowa u';

2) wspólny biegun $l't'$ znajduje się na wspólnéj biegunowéj u, a wspólna biegunowa u' przechodzi przez wspólny biegun lt, w obydwu przypadkach bowiem przechodzą promienie t' i u' przez wspólne bieguny, znajdujące się na promieniach t i u.

W piérwszym przypadku nie można z położenia promieni l, t, l', t' wywnioskować liczbę wspólnych biegunów, znajdujących się na promieniach t i u i zbędném jest dalsze nad tym przypadkiem zastanawianie się, ponieważ po piérwsze: omówiliśmy go już należycie, patrz l. 3; po drugie: promień l' na płaszczeni dwóch krzywych rzędu drugiego, niezawiérający punktu przecięcia się promieni l i t, zawsze obrany być może; a w takim razie, z położenia promieni l, t, u i l', t', u' (jeżeli promieniowi l' przypadają promienie t, i u') lub z położenia promieni l, t, u i krzywéj K''', odgadnąć można liczbę wspólnych biegunów, które łączą promienie t i u. Przystępujemy więc do przypadku drugiego.

Jeżeli się promienie t i t' przecinają w punkcie A, Fig. 1α, którego oddalenia od punktów B i C są skończone, natenczas stanowi on z punktem przecięcia się A promieni l i l' parę zwyczajnych wspólnych sprzężonych punktów, a punkty B, B', B'' są zauważanych krzywych rzeczywiste wspólne bieguny.

http://rcin.org.pl

Jeżeli punktem przecięcia się promieni t i t' jest punkt C, w takim razie, stanowi on nietylko z punktem A ale także z punktem B, jako punkt wspólnéj biegunowéj u, parę wspólnych sprzężonych punktów. Punkt C jest więc wspólnym biegunem, a l wspólną biegunową; przeto, nietylko punkty B, B', B'', ale także C i C' i wszystkie inne punkty wspólnéj biegunowéj u rzeczywistémi wspólnémi biegunami.

Jeżeli promień t' łączy punkty B i B', natenczas jest on wspólną biegunową; promień l' jest w tym przypadku albo wspólną biegunową u, a wtedy mają zauważane krzywe trzy rzeczywiste wspólne bieguny B, B', B''; lub promieniowi l' przypada oprócz promienia t', łączącego punkty B i B', jeszcze wspólna biegunowa u', te same łącząca punkty a w takim razie jest BB' wspólnym promieniem obydwu krzywych, których rzeczywiste wspólne bieguny są: B, B' i B'', następujące bezpośrednio po punkcie B'.

Jeżeli się na promieniu, łączącym punkty B i B', nietylko t' i u' ale także t i u znajdują, natenczas są wszystkie punkty promienia BB' rzeczywistémi wspólnémi biegunami.

Jeżeli nareszcie, pod warunkami właśnie co przytoczonémi, punkt B wpada na punkt B', na którym znajduje się także B'', w takim razie mają dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego trzy rzeczywiste, bezpośrednio po sobie następujące, wspólne bieguny. Nie rozbiéramy szczegółowo przypadku obejmującego promienie l, t, u i l', t', u', tak ułożone, iż punktem przecięcia się promieni l' i t' jest punkt przecięcia się promieni l i u, gdyż z małą zmianą zmuszeni byli-

http://rcin.org.pl

byśmy do powtórzenia wszystkiego, cośmy właśnie omówili; — lecz uwzględniamy przypadek β.

Krzywa K''', przypadająca promieniowi l', przechodzi przez punkt przecięcia się promieni l i t, który, jako wspólny biegun, musi być punktem krzywéj K''' i przecina promień t w punkcie A', stanowiącym z punktem przecięcia się A promieni l i l' parę zwyczajnych wspólnych sprzężonych punktów. Promień u' przecina krzywą K''' w dwóch rzeczywistych, w dwóch bezpośrednio po sobie następujących albo w dwóch urojonych punktach; a według tego, posiadają dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego trzy rzeczywiste wspólne bieguny, których oddalenia są skończone, trzy rzeczywiste wspólne bieguny, z których dwa bezpośrednio po sobie następują albo jeden rzeczywisty i dwa urojone wspólne bieguny oznaczone inwolucyją punktów równobieżną na wspólnéj biegunowéj u, przypadającą krzywéj K'''. (Są to te same urojone wspólne bieguny, których istnienia dowiedliśmy pod l. 3 przeciwbieżnemi inwolucyjami punktów na wspólnéj biegunowéj, które jéj ze względu na jednę i drugą daną krzywą przypadają).

Otrzymany wynik żadnéj istotnéj nie ulega zmianie, chociażby, co się zdarzyć może, pnnktem przecięcia się promieni l i l' był punkt wspólnéj biegugunowéj u; w takim razie bowiem, zamiast punktu przecięcia się A' promienia t z krzywą K''', otrzymalibyśmy punkt lt.

Jeżeli promieniowi l', który przechodzi przez wspólny biegun B, przypadają promienie t i u, leżące na promieniu l; natenczas jest l promieniem krzywéj K''', B punktem krzywéj K''' i punktem promienia l, a wspól-

http://rcin.org.pl

na biegunowa u przecina krzywą K''' w dwóch nieskończenie blizko punktu B leżących punktach.— Zauważane krzywe mają w tym przypadku trzy rzeczywiste, bezpośrednio po sobie następujące, wspólne bieguny.

W przypadku γ muszą krzywe K'' i K''' mieć jeden rzeczywisty wspólny punkt A'; ponieważ punkt, który z punktem przecięcia się A promieni l i l' stanowi parę zwyczajnych wspólnych sprzężonych punktów, jest nietylko punktem krzywéj K'' ale i punktem krzywéj K'''; a więc mają i drugi, który jest rzeczywistym wspólnym biegunem B, a oprócz tych, jeszcze dwa rzeczywiste, albo dwa bezpośrednio po sobie następujące (znajdujące się nieskończenie blizko punktu B albo oddalone od niego o długości skończone), lub dwa urojone wspólne punkty, jako dalsze wspólne bieguny zauważanych krzywych. (Urojone wspólne bieguny oznaczone są zupełnie równobieżną inwolucyją punktów wspólną krzywym K'' i K''').

Jeśli punkt przecięcia się promieni l i l' jest punktem wspólnéj biegunowéj; natenczas mają krzywe K'' i K''' dwa bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty, a oprócz tych jeszcze dwa rzeczywiste lub urojone wspólne punkty — albo trzy bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty, a oprócz tych jeszcze jeden wspólny punkt oddalony od nich i długości skończone — lub nareszcie cztéry bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty. W piérwszym przypadku, posiadają zauważane krzywe trzy rzeczywiste, albo jeden rzeczywisty i dwa urojone wspólne bieguny; — w przypadku drugim, trzy rzeczywiste wspólne bieguny, z których dwa bezpośrednio po so-

http://rcin.org.pl

bie następują; w przypadku trzecim, trzy rzeczywiste bezpośrednio po sobie następujące wspólne bieguny.

7. Z tych objaśnień wynika, że dwie krzywe rzędu drugiego, jakkolwiekbądź na płaszczeni ułożone, posiadają zawsze

jeden rzeczywisty wspólny biegun, a w nim inwolucyję promieni $xx'yy'zz'$.. któréj promienie podwójne łączą tychże cztéry różne wspólne punkty;	jednę rzeczywistą wspólną biegunowę, a na niéj inwolucyję punktów $XX'YY'ZZ'$... w któréj punktach podwójnych przecinają się tychże cztéry różne wspólne promienie;

przeto:

Nie istnieją na płaszczeni dwie krzywe rzędu drugiego, któreby nie posiadały wcale

wspólnych punktów.	wspólnych promieni.

Jest to odpowiédź na drugie z dwóch pytań umieszczonych pod l. 1.

Na ogólne pytanie, umieszczone pod l. 1, możemy teraz stanowczą dać odpowiédź, która opiéwa:

Oprócz przypadków wymienionych pod l. 1 nie istnieją żadne inne przypadki. Dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego mają więc zawsze

cztéry wspólne punkty,	cztéry wspólne styczne,

z czego bezpośrednio wynika:

8. Dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego posiadają zawsze cztéry wspólne punkty i cztéry wspólne styczne i przedstawiają jeden z przypadków objętych następującém zestawieniem.

Dwie na płaszczeni leżące krzywe rzędu drugiego mogą mieć:

A). cztéry rzeczywiste wspólne punkty i cztéry rzeczywiste wspólne styczne;

http://rcin.org.pl

B). cztéry rzeczywiste wspólne punkty i cztéry urojone wspólne styczne;

C). cztéry urojone wspólne punkty i cztéry rzeczywiste wspólne styczne;

D). cztéry urojone wspólne punkty i cztéry urojone wspólne styczne;

E). dwa rzeczywiste i dwa urojone wspólne punkty, a zarazem dwie rzeczywiste i dwie urojone wspólne styczne;

F). cztéry rzeczywiste wspólne punkty, z których dwa mają oddalenie nieskończenie małe i cztéry rzeczywiste wspólne styczne, z których dwie zawiérają kąt nieskończenie mały;

G). cztéry rzeczywiste wspólne punkty, z których dwa mają oddalenie nieskończenie małe a zarazem dwie rzeczywiste bezpośrednie po sobie następujące i dwie urojone wspólne styczne;

H). dwa rzeczywiste bezpośrednio po sobie następujące i dwa urojone wspólne punkty, a zarazem cztéry rzeczywiste wspólne styczne, z których dwie zawiérają kąt nieskończenie mały;

I). dwa bezpośrednio po sobie następujące rzeczywiste i dwa urojone wspólne punkty, a zarazem dwie bezpośrednio po sobie następujące rzeczywiste i dwie urojone wspólne styczne;

K). dwie pary bezpośrednio po sobie następujących rzeczywistych wspólnych punktów i dwie pary bezpośrednio po sobie następujących rzeczywistych wspólnych stycznych;

L). dwie pary bezpośrednio po sobie następujących urojonych wspólnych punktów i dwie pary bez-

http://rcin.org.pl

pośrednio po sobie następujących urojonych wspólnych stycznych;

M). cztéry rzeczywiste wspólne punkty, z których trzy bezpośrednio po sobie następują i cztéry rzeczywiste wspólne styczne, z których trzy bezpośrednio po sobie następują;

N). cztéry rzeczywiste bezpośrodnio po sobie następujące wspólne punkty i cztéry rzeczywiste bezpośrednio po sobie następujące wspólne styczne.

W przypadku *A*:

są wspólne punkty M, M', M''. M''', dane wraz z krzywemi K, K'. wiérzchołkami czworokąta zupełnego wpisanego w obydwie krzywe. boki jego p, p', p'', p''', p^{IV}, p^{V}. promieniami łączącémi zauważanych krzywych wspólne punkty, punkty przekątne B. B'. B'' wspólnémi biegunami. a przekątnie b, b', b'' wspólnemi biegunowemi. Sześć punktów podwójnych P. P', P''. P''', P^{IV}, P^{V}, trzech przeciwbieżnych inwolucyj punktów $XX'YY'ZZ'$.. na wspólnych biegunowych b, b', b'', są punktami przecięcia się cztérych wspólnych stycznych m, m', m'', m''', jako promieni podwójnych inwolucyj promieni wspólnych obydwu krzywym K i K' w pomieni onych sześciu punktach.

W przypadku *B*:

jest jedna z trzech inwolucyj punktów XX' $YY'ZZ'$.. na wspólnych biegunowych b, b', b''. przeciwbieżną, dwie zaś równobieżnemi; przeto dwa z sześciu punktów podwójnych P. P', P'', P''', P^{IV}, P^{V}, rzeczywistémi, cztéry zaś urojonémi punktami. W rzeczywistych punktach podwójnych przecinają się przynależne urojone wspólne styczne, oznaczone równobieżnemi inwolucyjami promieni wspólnemi obydwu

http://rcin.org.pl

krzywym K i K'; — urojone punkty podwójne są punktami przecięcia się nieprzynależnych urojonych wspólnych stycznych.

W przypadku C

oznaczyć należy wspólne bieguny B, B', B'', za pomocą krzywych K'' i K''', przypadających promieniom l i l' na płaszczeni danych krzywych K i K'. Punkty podwójne przeciwbieżnych inwolucyj punktów $XX'YY'ZZ'$.. na wspólnych biegunowych b, b', b'' są punktami przecięcia się P, P', P'', P''', P^{IV}, P^{V}, cztérech wspólnych stycznych m, m', m'', m''', jako boków czworoboku zupełnego, opisującego obydwie krzywe. Jedna z trzech inwolucyj promieni $xx'yy'zz'$. w wspólnych biegunach B, B', B'' jest przeciwbieżną, dwie zaś równobieżnemi. Rzeczywiste promienie podwójne inwolucyi przeciwbieżnéj $xx'yy'zz'$.. łączą przynależne urojone wspólne punkty M, M', M'', M'''; — urojone promienie podwójne równobieżnych inwolucyj promieni $xx'yy'zz'$.... łączą nieprzynależne urojone wspólne punkty.

Przypadek D.

Po oznaczeniu trzech wspólnych biegunów B, B', B'', sposobem nadmienionym w przypadku poprzedzającym, otrzymamy, na rzeczywistych promieniach podwójnych p i p' przeciwbieżnéj inwolucyi promieni $xx'yy'zz'$.. w wspólnym biegunie B urojone wspólne punkty, oznaczone równobieżnemi wspólnemi inwolucyjami punktów zauważanych krzywych, a w rzeczywistych punktach podwójnych P i P' przeciwbieżnéj inwolucyi punktów $XX'YY'ZZ'$.. na wspólnéj biegunowéj b, wspólne urojone styczne, oznaczone równobieżnemi wspólnemi inwolucyjami promieni krzywych

http://rcin.org.pl

K i K'. Równobieżnemi inwolucyjami promieni $xx'yy'zz'$.. we wspólnych biegunach B' i B'' oznaczone są urojone promienie p'', p''', p^{IV}, p^{V}, łączące nieprzynależne urojone wspólne punkty; równobieżnemi zaś inwolucyjami punktów $XX'YY'ZZ'$.. na wspólnych biegunowych b' i b'' oznaczone są urojone punkty P'', P''', P^{IV}, P^{V}, w których przecinają się nieprzynależne urojone wspólne styczne.

W przypadku E

łączy rzeczywista wspólna biegunowa b bieguny promienia p, przechodzącego przez danych krzywych K i K' rzeczywiste wspólne punkty M i M'; rzeczywistym wspólnym biegunem B zauważanych krzywych jest punkt przecięcia się biegunowéj, przypadającéj dowolnemu punktowi wspólnéj biegunowéj b, ze względu na krzywą K albo K', z promieniem p. Promienie podwójne przeciwbieżnéj inwolucyi $xx'yy'zz'$.. w wspólnym biegunie B łączą danych krzywych wspólne punkty; — jednym jest promień p; drugim promień p', łączący dwa urojone wspólne punkty M'' i M''', oznaczone na nim znajdującą się wspólną inwolucyją krzywych K i K'. W punktach podwójnych P i P' przeciwbieżnéj inwolucyi $XX'YY'ZZ'$.. na wspólnéj biegunowéj b przecinają się dwie rzeczywiste i dwie urojone wspólne styczne; — piérwsze oznaczone przeciwbieżną, drugie równobieżną inwolucyją promieni, wspólną obydwu krzywym. Urojone wspólne biegunowe b' i b'' oznaczone są dwiema przeciwbieżnemi inwolucyjami promieni, przypadającemi krzywym K i K' w punkcie B; — urojone wspólne bieguny B' i B'' oznaczone są dwiema przeciwbieżnemi inwolucyjami

http://rcin.org.pl

punktów, przypadającémi krzywym K i K' na promieniu b.

Przypadki F, G, H, I.

Wspólny biegun B, na promieniu p, łączącym bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty M i M', w którym przecinają się bezpośrednio po sobie następujące wspólne biegunowe b' i b'', w przypadkach F i G, jest punktem przecięcia się promienia p', łączącego wspólne punkty M'' i M''' z promieniem p; Wspólnym biegunem B, w przypadkach H i I, jest drugi punkt podwójny współkréślnych rzędów ABC... i $A'B'C'$..., na promieniu p utworzonych z biegunów, przypadających promieniom wiązki w punkcie przecięcia się P dwóch bezpośrednio po sobie następujących wspólnych stycznych m i m' ze względu na jednę i drugą krzywę, rozumiejąc przez piérwszy punkt podwójny pomienionych rzędów punkt, oznaczony punktem P i wspólną biegunową b, która, łącząc bezpośrednio po sobie następujące wspólne bieguny B' i B'', we wszystkich cztérech przypadkach, jest biegunową wspólnego bieguna B wykréśloną ze względu na krzywę K albo K'. Urojone wspólne punkty M'' i M''', urojone i rzeczywiste wspólne styczne m'', m''' oznaczone są, jak w przypadkach poprzedzających, inwolucyjami wspólnemi obydwu krzywym.

W przypadku K

jest promień, łączący punkty przecięcia się jednéj i drugiéj pary bezpośrednio po sobie następujących rzeczywistych wspólnych stycznych, wspólną biegunową b, na któréj znajduje się $\infty + 1$ wspólnych biegunów, a punkt przecięcia się dwóch promieni, z których każdy łączy parę bezpośrednio po sobie na-

http://rcin.org.pl

stępujących rzeczywistych wspólnych punktów, wspólnym biegunem B, przez który przechodzi $\infty + 1$ wspólnych biegunowych.

Przypadek L.

Celem wykréślenia wspólnéj biegunowéj b, na któréj znajduje się $\infty + 1$ wspólnych biegunów i oznaczenia wspólnego bieguna B, przez który przechodzi $\infty + 1$ wspólnych biegunowych dwóch krzywych rzędu drugiego wskazanych tym przypadkiem (który, zważywszy, że jedna krzywa w wewnętrznym polu drugiéj znajdywać się musi, w tym względzie nie różni się od przypadku D), uwzględnijmy w ich płaszczeni dwa promienie l, l', którym przypadają promienie t i u, t' i u' o własnościach, zależnych od położenia promieni l i l'.

Jeżeli każdy z promieni l i l' zawiéra jeden biegun wspólnéj biegunowéj b; w takim razie są na sobie leżące promienie t i t' wspólną biegunową b, a punkt przecięcia się promieni u i u' wspólnym biegunem B.

Jeżeli promień l tylko jeden wspólny biegun zawiéra, który jest punktem wspólnéj biegunowéj b, promień l' zaś nietylko wspólny biegun, znajdujący się na wspólnéj biegunowéj b, ale zarazem wspólny biegun B, natenczas są na sobie leżące promienie t' i u' wspólną biegunową b, a punkt przecięcia się trzech promieni l', t', u wspólnym biegunem B.

Jeżeli nietylko l' ale i l przechodzi przez wspólny biegun B, w takim razie stanowią wspólną biegunowę b na sobie leżące promienie u i u', a wspólnym biegunem B jest punkt przecięcia się promieni l, t, l', t'.

Jeżeli na promień l wpada promień t, wtedy jest l wspólną biegunową b; wspólny biegun B oznaczony

http://rcin.org.pl

jest punktem przecięcia się promieni u i u', jeżeli l i l' zawiéra tylko wspólny biegun wspólnéj biegunowéj b, zaś punktem przecięcia się promieni l', t', u, jeżeli l' przechodzi przez wspólny biegun B.

Dwiema równobieżnemi wspólnemi obydwu krzywym inwolucyjami o położeniu współkréślném, t. j. inwolucyją promieni we wspólnym biegunie B i inwolucyją punktów na wspólnéj biegunowéj b, oznaczone są dwie pary bezpośrednio po sobie następujących urojonych wspólnych stycznych i dwie pary bezpośrednio po sobie następujących urojonych wspólnych punktów.

Przypadki M i N.

Konstrukcyje krzywych K', mających z krzywemi K trzy bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty, trzy bezpośrednio po sobie następujące wspólne styczne; cztéry bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty i cztéry bezpośrednio po sobie następujące wspólne styczne, zniewalają nas do rozwiązania zagadnień:

wykréślić krzywę rzędu drugiego

przechodzącą przez pięć rzeczywistych punktów, z których dwa, dwa i dwa, trzy, trzy i dwa albo cztéry bezpośrednio po sobie następują.	dotykającą się pięciu rzeczywistych promieni, z których dwa, dwa i dwa, trzy, trzy i dwa albo cztéry bezpośrednio po sobie następują.

Na nasuwające się pytanie: Jakim sposobem można oznaczyć bezpośrednio po sobie następujące punkty i bezpośrednio po sobie następujące promienie? damy należytą odpowiedź, po dokładnem zastanowieniu się nad inwolucyjami parabolicznemi, których naturę dotychczas nie zbadano; znane bowiem własności:

http://rcin.org.pl

Paraboliczną inwolucyję punktów tworzą rzęd punktów ABC... promienia o i $\infty + 1$ na dowolnym punkcie promienia o znajdujących się punktów A', B', C',..,	Paraboliczną inwolucyję promieni tworzą wiązka promieni abc.. punktu O i $\infty + 1$ na dowolnym promieniu punktu O znajdujących się promieni a', b', c',..,

dowodzą tylko istnienia tych szczególnego rodzaju inwolucyj.

Inwolucyja punktów (promieni) przeciwbieżna albo równobieżna (hyperboliczna albo eliptyczna) jest zupełnie oznaczoną, jeżeli, dla któregokolwiek z jéj punktów (promieni), jesteśmy w stanie wskazać pewien punkt (promień), jako jego punkt (promień) sprzężony. Jasną więc rzeczą, iż należy poprzednio rozdzielić punkt na $\infty + 1$ na sobie leżących punktów i rozszczepić promień na $\infty + 1$ na sobie leżących promieni o położeniu dokładnie oznaczoném, które jak wiadomo pojawiają się w inwolucyjach parabolicznych, i tym sposobem umożebnić dalsze nad témi utworami poszukiwania; — co w następujący uskuteczniamy sposób:

Punkt Φ promienia o', który na $\infty + 1$ punktów rozdzielić mamy, uważamy jako środek wiązki promieni abc..., i oznaczamy współkréślność wiązki abc.. i rzędu ABC.. na promieniu o trzema parami odpowiednych składników a i A, b i B, c i C,	Promień φ punktu O', który na $\infty + 1$ promieni rozszczepić mamy, uważamy jako promień rzędu ABC.., i oznaczamy współkréślność rzędu ABC.. i wiązki abc.. w punkcie O trzema parami odpowiednych składników A i a, B i b, C i c,

w takim razie bowiem, jeżeli, jako

http://rcin.org.pl

punkt, odpowiedny punktowi np. D rzędu o, uważamy punkt przecięcia się D' promienia o' z promieniem d wiązki $abc..$ odpowiednym punktowi D, przypada $\infty + 1$ punktom A, B, C.. rzędu o, $\infty + 1$ na sobie leżących dokładnie oznaczonych punktów A', B', C',.., na które punkt Φ[1]) promieniami a, b, c,.. rozdzielono.

Dwa tego rodzaju współkréślne rzędy ABC.. i $A'B'C'$.. leżą na sobie jeżeli na promieniu o znajduje się promień o'.

promień, odpowiedny promieniowi np. d wiązki O, uważamy promień d', łączący punkt O' z punktem D rzędu ABC.., odpowiednym promieniowi d, przypada $\infty + 1$ promieniom a, b, c,.. wiązki O, $\infty + 1$ na sobie leżących dokładnie oznaczonych promieni a', b', c',.., na które promień φ[1]) punktami A, B, C,.. rozszczepiono.

Dwie tego rodzaju współkréślne wiązki abc.. i $a'b'c'$.. leżą na sobie, jeżeli na punkcie O znajduje się punkt O'.

Ażeby daléj zbadać warunki, którym te szczególnego rodzaju na sobie leżące współkréślne rzędy i współkréślne wiązki zadość uczynić muszą, jeżeli mają być inwolucyjnémi, rozważmy, że inwolucyja

punktów o (przeciwbieżna albo równobieżna) oznaczona jest zupełnie krzywą rzędu drugiego, znajdującą się na płaszczeni, która przez zau-

promieni O (przeciwbieżna albo równobieżna) oznaczona jest zupełnie krzywą rzędu drugiego, znajdującą się w płaszczeni, która przez zauwa-

[1]) Punkt w nieskończonéj dali Φ_∞ rozdziela na $\infty + 1$ punktów wiązka promieni równoległych; promień w nieskończonéj dali φ_∞ rozszczepia na $\infty + 1$ promieni wiązka promieni, któréj środek jest punktem w skończoności.

http://rcin.org.pl

ważany przechodzi promień; gdyż jesteśmy w stanie oznaczyć punkt sprzężony, przypadający któremukolwiek punktowi promienia o, którym jest przecięcie się biegunowéj zauważanego punktu z promieniem o,

żany przechodzi punkt, gdyż jesteśmy w stanie wykréślić promień sprzężony, przypadający któremukolwiek promieniowi punktu O, którym jest połączenie bieguna zauważanego promienia z punktem O,

z czego wynika, że za pomocą krzywéj rzędu drugiego K i jéj dowolnego

promienia m, na którym znajduje się ta szczególnego rodzaju inwolucyja punktów,

punktu M. przez który przechodzi ta szczególnego rodzaju inwolucyja promieni,

własności inwolucyj parabolicznych zbadać należy.

Sprzężonémi punktami punktów A, B, C,.. promienia m krzywéj K są punkty A', B', C',.., na które rozdzielają biegunowe a, b, c,.. punktom A, B, C,.. przynależne punkt styczności M promienia m, a ponieważ rzęd punktów ABC.. i wiązka biegunowych abc.. są utworami współkréślnémi, przeto sposób oznaczania sprzężonych punktów inwolucyi punktów parabolicznéj zupełnie zgodny ze sposobem, którym oznaczyliśmy poprzednio odpowiedne punkty dwóch szczególnego rodzaju dowolnie na płaszczeni le-

Sprzężonémi promieniami promieni a, b, c,.. punktu M krzywéj K są promienie a', b', c',.., na które rozszczepiają bieguny A, B, C,.., promieniom a, b, c,.. przynależne styczną m w punkcie M, a ponieważ wiązka promieni ab c.. i rzęd biegunów ABC.. są utworami współkréślnémi, przeto sposób oznaczania sprzężonych promieni inwolucyi promieni parabolicznéj, zupełnie zgodny ze sposobem, którym oznaczyliśmy poprzednio odpowiedne promienie dwóch szczególnego rodzaju dowolnie na płaszczeni leżących

http://rcin.org.pl

żących rzędów. Punktowi styczności M przypada jako biegunowa, styczna m,

wiązek. Stycznéj m przypada jako biegun punkt styczności M,

a, że m i M są odpowiednémi składnikami wiązki abc.. i rzędu ABC.., przeto:

Dwa na sobie leżące współkréślne rzędy ABC.. i $A'B'C'$.., z których rząd $A'B'C'$.. stanowi $\infty + 1$ na sobie leżących punktów,

Dwie na sobie leżące współkréślne wiązki abc.. i $a'b'c'$.. z których wiązkę $a'b'c'$.. stanowi $\infty + 1$ na sobie leżących promieni,

a które, według poprzednio podanych objaśnień, tak są na płaszczeni ułożone,

iż na promieniu o rzędu ABC.. znajduje się promień o' rzędu $A'B'C'$.., tworzą inwolucyję, jezeli na punkcie piérwszego znajduje się odpowiedny punkt rzędu drugiego;

iż na punkcie O wiązki abc.. znajduje się punkt O' wiązki $a'b'c'$.., tworzą inwolucyję, jeżeli na promieniu piérwszéj znajduje się odpowiedny promień wiązki drugiéj;

nadto jasną jest rzeczą, że paraboliczną inwolucyją punktów oznaczona jest zarazem paraboliczna inwolucyja promieni i odwrotnie, z czego wynika, że paraboliczna inwolucyja punktów i paraboliczna inwolucyja promieni zawsze razem występują. Współkréślnémi utworami, t. j. rzędem ABC... na promieniu m i wiązką abc.., któréj środek M jest punktem rzędu ABC.., odpowiednym promieniowi m wiązki abc.. oznaczona jest paraboliczna inwolucyja punktów i promieni; a ponieważ do zupełnego oznaczenia współkréślności pomienionych utworów niezbędne są trzy pary odpowiednych składników, n. p. a i A, b i B, c i C, dwiema zaś parami a i A, b i B, oznaczone są odpowiedne składniki M i m, przeto:

http://rcin.org.pl

Paraboliczna inwolucyja punktów i promieni oznaczona jest zupełnie dwiema parami sprzężonych składników.

Te własności parabolicznych inwolucyj umożliwiają oznaczenie bezpośrednio po sobie następujących punktów i bezpośrednio po sobie następujących promieni, najrozmaiciéj na płaszczeni ułożonych i to w sposób następujący:

Po wyłączeniu z inwolucyi $aAbBmM$...

paraboliczněj inwolucyi promieni $aa'bb'mm'$.. pozostaje paraboliczna inwolucyja punktów $AA'BB'MM'$.., któréj punktem podwójnym MM' i promieniem m, wyłączyć się niedającym, oznaczone są dwa bezpośrednio po punkcie MM' następujące punkty albo dwa bezpośrednio po promieniu m następujące promienie.

paraboliczněj inwolucyi punktów $AA'BB'MM'$.. pozostaje paraboliczna inwolucyja promieni $aa'bb'mm'$.., któréj promieniom podwójnym mm' i punktem M, wyłączyć się niedającym, oznaczone są dwa bezpośrednio po promieniu mm' następujące promienie albo dwa bezpośrednio po punkcie M następujące punkty.

Na który z dwóch możliwych punktów bezpośrednio po punkcie MM' a względnie M następujących i dwóch możliwych po promieniu mm' a względnie m bezpośrednio następujących promieni wskazuje paraboliczna inwolucyja punktów $AA'BB'MM'$.. a względnie paraboliczna inwolucyja promieni $aa'bb'mm'$.., o tém rozstrzyga kierunek rzędu ABC.. i zwrot wiązki abc..

Inwolucyją $aAbBmM$.., złożoną z paraboliczněj inwolucyi punktów $AA'BB'MM'$.. i paraboliczněj inwolucyi promieni $aa'bb'mm'$.., oznaczone są cztéry

http://rcin.org.pl

bezpośrednio po sobie następujące punkty i cztéry bezpośrednio po sobie następujące promienie.

Wyłączmy z inwolucyi $aA\ bBmM$.. tylko rzęd punktów $A'B'M'$.. to jest rzęd, utworzony z $\infty + 1$ na sobie leżących punktów, a pozostanie paraboliczna inwolucyja promieni $aa'bb'mm'$.. i rzęd punktów ABM..., którémi oznaczone są trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty; dwa z nich oznaczone są paraboliczną inwolucyją promieni $aa'bb'mm'$.., trzeci, punktem rzędu ABM.., oddalonym od pomienionych o długości nieskończenie małe.

Wyłączmy z inwolucyi $aA\ bBmM$.. tylko wiązkę promieni $a'b'm'$.. to jest wiązkę, utworzono z $\infty + 1$ na sobie leżących promieni, a pozostanie paraboliczna inwolucyja punktów $AA'BB'MM'$,.. i wiązka promieni abm.., którémi oznaczone są trzy bezpośrednio po sobie następujące promienie; dwa z nich oznaczone są paraboliczną inwolucyją punktów $AA'BB'MM$.., trzeci, promieniem wiązki abm..., zawiérającym z pomienionémi kąty nieskończenie małe.

Położenie dwóch, trzech i cztérech bezpośrednio po sobie następujących punktów i dwóch, trzech i cztérech bezpośrednio po sobie następujących promieni zależy więc od położenia punktu M, promienia m, kierunku rzędu ABM.. i zwrotu wiązki abm.. i od natury współkréślnych utworów ABM.. i abm..

Przypada punktowi S_∞ rzędu ABM.. promień s wiązki abm.., zawiérający z promieniem m kąty proste, natenczas paraboliczna inwolucyja punktów i promieni są symetrycznemi; gdyż w takim razie przypadają symetrycznie względem punktu M ułożonym punktom rzędu ABM.. promienie wiązki abm.., ułożone symetrycznie względem promienia m.

http://rcin.org.pl

Punkty M i M' dwóch na sobie leżących parabolicznych inwolucyj punktów $aAbBmM$.. i $a'A'b'B'm'M'$.. są ich wspólną parą sprzężonych punktów, jeżeli długosć MM' jest skończóną. Znajduje się na punkcie M parabolicznéj inwolucyi punktów $aAbBmM$.. punkt M' parabolicznéj inwolucyi punktów $a'A'b'B'm'M'$..; w takim razie mają na sobie leżące inwolucyje punktów jednę wspólną parę sprzężonych punktów o oddaleniu skończoném, dwa na sobie leżące wspólne sprzężone punkty lub nieskończenie wiele par wspólnych sprzężonych punktów, którémi są punkty podwójne współkréślnych rzędów ABM.. i $A'B'M'$.. patrz l. 3,

Promienie m i m' dwóch na sobie leżących parabolicznych inwolucyj promieni $aA bBmM$.. i $a'A'b'B'm'M'$... są ich wspólną parą sprzężonych promieni, jeżeli kąt mm' jest mniéjszy od 180°. Znajduje się na promieniu m parabolicznéj inwolucyi promieni $aAbBmM$.. promień m' parabolicznéj inwolucyi promieni $a'A'b'B'm'M'$..; w takim razie mają na sobie leżące inwolucyje promieni jednę wspólną parę sprzężonych promieni o nachyleniu mniéjszém od 180°, dwa na sobie leżące wspólne sprzężone promienie lub nieskończenie wiele wspólnych par sprzężonych promieni, któremi są promienie podwójne współkréślnych wiązek abm... i $a'b'm'$... patrz l. 3.

Krzywa rzędu drugiego K, która przechodząc przez punkt M ma zarazem i kierunek zgodny z kierunkiem promienia m, przechodzi przez drugi bezpośrednio po nim następujący punkt M', oznaczony inwolucyją promieni aA

Krzywa rzędu drugiego K, która dotykając się promienia m ma zarazem i zwrot zgodny ze zwrotem punktu M, dotyka się drugiego bezpośrednio po nim następującego promienia m', oznaczonego inwolucyją punktów $aAbB$

http://rcin.org.pl

bBmM.., jeżeli rzęd punktów przecięcia się A'', B'', M'',.. stycznych wykréślnych w punktach, w których promienie wiązki *abm* ... zauważaną przecinają krzywę, z promieniem *m* i rzęd punktów *AB* *M*.., oprócz punktu podwójnego *M*, mają jeszcze i drugi, oddalony od niego o długość skończoną lub nieskończenie wielką.

Przechodzi krzywa rzędu drugiego przez punkt *M* parabolicznéj inwolucyi promieni *aAbBmM*.., zgadzając się z kierunkiem promienia *m*, a mają rzęd punktów $A''B''$ M''.. i rzęd punktów *ABM*.. jeden punkt podwójny M'', którego oddalenia od punktów *M* i M' są nieskończenie małe; natenczas są, trzy bezpośrednio po sobie następujące inwolucyją promieni *aAbB* *mM*.. i rzędem punktów *AB* *M*... oznaczone punkty M', M', M'', punktami krzywéj *K*.

mM.., jeżeli wiązka promieni a'', b'' m'',.. łączących punkty styczności oznaczone na promieniach, które przechodząc przez punkty rzędu *ABM*.. zauważanéj dotykają się krzywéj, z punktem *M* i wiązka promieni *abm*, oprócz promienia podwójnego *m*, mają jeszcze i drugi, nachylony do niego pod kątem mniejszym lub równym 90°.

Dotyka się krzywa rzędu drugiego promienia *m* parabolicznéj inwolucyi punktów *aAbBmM*.., zgadzając się ze zwrotem punktu *M*, a mają wiązka promieni $a''b''m''$.. i wiązka promieni *abm* jeden promień podwójny m'', którego nachylenia do promieni *m* i m' są nieskończenie małe; natenczas są, trzy bezpośrednio po sobie następujące inwolucyją punktów *aAbBmM* i wiązką promieni *abm*.. oznaczone promienie *m*, m', m'', promieniami krzywéj *K*.

Krzywa *K* przechodzi przez cztéry bezpośrednio po sobie następujące punkty *M*, M', M'', M''' i dotyka się cztérech bezpośrednio po sobie następujących promieni *m*, m', m'', m''', oznaczonych paraboliczną

http://rcin.org.pl

inwolucyją punktów i promieni $aAbBmM$, jeżeli zauważana krzywa przechodząc przez punkt M dotyka się promienia m, a współkréślne rzędy $A''B''M''$.. i ABM ... i współkréślne wiązki $a''b''m''$ .. i abm.. są identycznemi. Paraboliczna inwolucyja punktów i paraboliczna inwolucyja promieni są w takim razie inwolucyjami krzywéj rzędu drugiego K. Po tych objaśnieniach, przystępujemy do konstrukcyi krzywych rzędu drugiego oznaczonych pięciu

punktami, z których dwa, dwa i dwa, trzy, trzy i dwa, lub cztéry bezpośrednio po sobie następują.

promieniami, z których dwa, dwa i dwa, trzy, trzy i dwa, lub cztéry bezpośrednio po sobie następują.

a) Jeżeli dane są:

paraboliczna inwolucyja promieni $aAbBmM$.. i punkty M'', M''', M^{I}, Fig 2α, oznaczmy za pomocą równań:

$$(ABMC) = (abmc),$$
$$(ABMD) = (abmd),$$
$$(ABME) = (abme),$$

punkty C. D, E, odpowiedne promieniom c, d, e; punkty zaś F i I, odpowiedne punktom F'' i I'' za pomocą równań: $(DMEF) = 1$, $(CMDI) = 1$, uważając D i E, jakotéż C i D jako punkty sprzężone. Oznaczmy daléj, po wykréśleniu w punkcie M^{IV} dowolnego promienia $M^{IV}L''$, zważywszy, że utwory rzędu piérwszego

paraboliczna inwolucyja punktów $aAbBmM$.. i promienie m'', m''', m^{IV}, Fig 2β, wykréślmy za pomocą równań:

$$(abmc) = (ABMC),$$
$$(abmd) = (ABMD)$$
$$(abme) = (ABME),$$

promienie c, d, e, odpowiedne punktom C, D, E; promienie zaś f i i, odpowiedne promieniom f'' i i'' za pomocą równań: $(dmef) = -1$, $(cmdi) = -1$, uważając d i e, jakotéż c i d jako promienie sprzężone. Wykréślmy daléj, po oznaczeniu na promieniu m^{IV} dowolnego punktu $m^{IV}l''$, zważyw-

http://rcin.org.pl

FIM.., i $F''I''M$.. i fim.. są współkréślnémi, punkt P'', uiszczający równanie:

$(ME''L''P'') = -1$,

uważając M i L'' jako punkty sprzężone i wykréślmy promień, p odpowiedny punktowi P''; a punkt przecięcia się M^V promienia p z promieniem $M^{IV}L''$ będzie punktem krzywéj K, przechodzącéj przez pięć punktów M, M', M'', M''', M^{IV}, z których dwa bezpośrednio po sobie następują.

szy, że utwory rzędu piérwszego fim..,$f''i''m$.. i FIM.. są współkréślnémi, promień p'' uiszczający równanie:

$(me''l''p'') = -1$,

uważając m i l'' jako promienie sprzężone i oznaczmy punkt P, odpowiedny promieniowi p''; a promień m^V, łączący punkt P z punktem $m^{IV}l''$, będzie promieniem krzywéj K, dotykajacéj się pięciu promieni, m, m', m'', m''', m^{IV}, z których dwa bezpośrednio po sobie następują.

b) Podana konstrukcyja staje się nierównie prostszą, jeżeli nietylko

punkty M i M' ale i M'' i M''' oznaczone są inwolucyją promieni paraboliczną.

promienie m i m' ale i m'' i m''' oznaczone są inwolucyją punktów paraboliczną.

W takim razie bowiem, naznaczywszy

promień, łączący punkty M i M'', literą d, jest punkt przecięcia się promienia $M''M'''$, to j. stycznéj krzywéj K z promieniem m, punktem D'', odpowiednym promieniowi d i punktowi D.

punkt przecięcia się promieni m i m'' literą D, jest promień, łączący punkt $m''m'''$, to j. punkt krzywéj K z punktem M, promieniem d'', odpowiednym punktowi D i promieniowi d.

c) Zanim przystąpimy do opisania konstrukcyi krzywéj K oznaczonéj pięciu punktami, z których trzy bezpośrednio po sobie następują i krzywéj K oznaczonéj pięciu promieniami, z których trzy bezpośre-

http://rcin.org.pl

dnio po sobie następują, udowodnić nam poprzednio wypada jednoznaczną współkréślność dwóch

rzędów $ABG\ldots$ $A'B'G'\ldots$, oznaczonych punktami A, B, G i A', G', i warunkiem, że jedynym punktem podwójnym tych równobieżnych rzędów ma być punkt GG'. Po wykréśleniu dwóch promieni o i o' o dowolném nachyleniu, przenieśmy punkty A, B, G, w porządku w jakim po sobie następują, na promień o, uważając przecięcie się promieni o i o' jako punkt G; punkt A zaś na promień o', nazpaczywszy przecięcie się promieni o i o' także literą G' Fig. 4α i oznaczmy punkt przecięcią się C promienia AA' z promieniem d, dzielącym kąt oo', albo z promieniem d' dzielącym spełnienie tego kąta na dwie równe części, a promień, łączący punkt b z punktem B, przetnie promień o' w punkcie B', odpowiednym punktowi B. Który z dwóch

wiązek $abg\ldots$ i $a'b'g'\ldots$, oznaczonych promieniami a, b, g i a', g' i warunkiem, że jedynym promieniem podwójnym tych równobieżnych wiązek ma być promień gg'. Po obraniu dwóch punktów O i O' o dowolném oddaleniu, wykréślmy w punkcie O promienie a, b, g, w porządku w jakim po sobie następują, uważając połączenie punktów O i O' jako promień g; promień a' zaś w punkcie O' naznaczywszy połączenie punktów O i O' także literą g' Fig. 4β i wykréślmy promień c, łączący punkt aa' z punktem D, dzielącym długość [1]) OO', albo z punktem D'_∞, dzielącym spełnienie téj długości na dwie równe części, a promień b', łączący punkt przecięcia się promieni b i c z punktem O', będzie odpowiednym promieniowi b. Któ-

[1]) OO' jest łukiem kąta, którego wierzchołek jest punktem w nieskończonéj dali, spełnienie jego jest odcinek $OD'_\infty O'$. — Odcinki $OD'_\infty = O'D'_\infty$ są łukami kątów prostych.

http://rcin.org.pl

możliwych promieni, czy promień d, dzielący kąt oo', albo promień d', dzielący spełnienie tego kąta na dwie równe części, uwzględnić powinniśmy, o tém rozstrzyga równobieżność, któremu warunkowi współkréślne rzędy ABG.. i $A'B'G'$.., po sprowadzeniu w piérwotne położenie, zadość uczynić muszą.

ry z dwóch możliwych punktów, czy punkt D dzielący długość OO', albo punkt D'_∞, dzielący spełnienie téj długości na dwie równe części, uwzględnić powinniśmy, o tém rozstrzyga równobieżność, któremu warunkowi współkréślne wiązki abg.. i $a'b'g'$.., po sprowadzeniu w piérwotne położenie, zadość uczynić muszą.

Punktowi B odpowiada więc jednoznacznie punkt B', promieniowi b jednoznacznie promień b', czém udowodniliśmy jednoznaczną współkréślność rzędów ABG.. i $A'B'G'$.. a względnie wiązek abg.. i $a'b'g'$..

Ażeby wykréślić krzywę K oznaczoną pięciu

punktami M, M', M'', M''', M^{IV}, z których trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty M, M', M'' oznaczone są paraboliczną inwolucyją promieni $aAbBmM$... i rzędem punktów ABM.., dwa punkty zaś M''' i M^{IV} mają oddalenie skończone Fig. 3α, oznaczmy punkt F, odpowiedny punktowi F'', za pomocą równania:

$$(CMDF) = -1,$$

uważając C i D jako punkty sprzężone, i rozważmy, że punktami D, F, M, i M'' F'',

promieniami m, m', m'', m''', m^{IV}, z których trzy bezpośrednio po sobie następujące promienie m, m', m'' oznaczone są paraboliczną inwolucyją punktów $aAbBmM$.. i wiązką promieni abm.. dwa promienie zaś m''' i m^{IV} mają nachylenie skończone Fig. 3β, wykréślmy promień f, odpowiedny promieniowi f'', za pomocą równania:

$$(cmdf) = -1,$$

uważając c i d jako promienie sprzężone, i rozważmy, że promieniami d, f, m i. m'',

http://rcin.org.pl

oznaczone są zupełnie dwa przeciwbieżne rzędy o jednym punkcie podwójnym GG'' albo HH''. Po oznączeniu punktu D'', odpowiednego punktowi D według Fig. 4α, oznaczmy punkt E'' stanowiący z punktami M'', D'' i punktem przecięcia się dowolnie w punkcie M^{IV} wykréślonego promienia $M^{IV} I''$ z promieniem m (uważając punkty M'' i I'' jako sprzężone), harmonijny układ punktów, a więc punkt E'' zadość czyniący równaniu:

$$(M''D''I''E'') = -1.$$

Wykréślmy nareście promień e, odpowiedny punktowi E'', zważywszy, że utwory $DFM..$, $D''F''M''..$ i $dfm..$ są współkréślnémi, a punkt przecięcia się M^{V} promienia e z promieniem $M^{IV}I''$ będzie punktem żądanéj krzywéj K.

d). Mają punkty M''' i M^{IV} oddalenie nieskończenie małe, w takim razie jest $M''' M^{IV}$ styczną krzywéj K, a punktowi F'', w którym przecina styczna $M'''M^{IV}$ promień m,

f'' oznaczone są zupełnie dwie przeciwbieżne wiązki o jednym promieniu podwójnym gg' albo hh'. Po wykréśleniu promienia d'', odpowiednego promieniowi d według 4β, wykréślmy promień e'', stanowiący z promieniami m'', d'' i promieniem, łączącym dowolnie na promieniu m^{IV} obrany punkt m^{IV} i'' z punktem M (uważając promienie m'' i i'' jako sprzężone), harmonijny układ promieni, a więc promień e'' zadość czyniący równaniu.

$$(m''d''i''e'') = -1$$

Oznaczmy nareszcie punkt E, odpowiedny promieniowi e'', zważywszy, że utwory $dfm..$, $d''f''m''..$ i $DFM..$ są współkréślnémi, a promień m^{V}, łączący punkt E z punktem $m^{IV}i''$, będzie promieniem żądanéj krzywéj K.

d). Mają promienie m''' i m^{IV} nachylenie nieskończenie małe, w takim razie jest m''' m^{IV} punktem krzywéj K, a promieniowi f'', który łączy punkt $m'''m^{IV}$ z punktem M,

http://rcin.org.pl

przypada, jako odpowiedny punkt rzędu $ABM..$, punkt F, odpowiedny promieniowi f, który łączy punkt M''' z punktem M. Po oznaczeniu punktu F, odpowiedniego punktowi F'', należy, celem oznaczenia punktu M^{V} krzywéj K, zastósować postępowanie opisane w przypadku c).

e). Punkt M^{V} krzywéj K, oznaczonéj paraboliczną inwolucyją punktów i promieni $aAbBmM..$ i punktem M^{IV} czyli pięciu punktami M, M', M'', M''', M^{IV}, z których cztéry: M, M', M'', M''', bezpośrednio po sobie następują, znajdujący się na dowolnym promieniu $M^{IV}D$ punktu M^{IV} Fig. 5α,

przypada, jako odpowiedny promień wiązki $abm..$, promień f, odpowiedny punktowi F, w którym przecina promień m''' promień m. Po wykreśleniu promienia f, odpowiedniego promieniowi f'', należy, celem wykreślenia promienia m^{V} krzywéj K, zastósować postępowanie opisane w przypadku c).

e). Promień m^{V} krzywéj K, oznaczonéj paraboliczną inwolucyją promieni i punktów $aAbBmM..$ i promieniem m^{IV}, czyli pięciu promieniami m, m', m'', m''', m^{IV}, z których cztéry: m, m', m'', m''', bezpośrednio po sobie następują. przechodzący przez dowolny punkt m^{IV} d promienia m^{IV} Fig. 5β,

otrzymamy sposobem następującym:

Po oznaczeniu punktu C, zadość czyniącego równaniu:

$$(ABMC) = (abmc),$$

oznaczmy punkt E, uiszczający równanie: $(MCDE) = -1$ (uważając M i D jako punkty sprzężone), a punkt przecięcia się promienia e wiązki $abm..$, odpowiednego punk-

Po wykreśleniu promienia c, zadość czyniącego równaniu:

$$(abmc) = (ABMC),$$

wykreślmy promień e, uiszczający równanie: $(mcde) = -1$ (uważając m i d jako promienie sprzężone), a promień, łączący punkt E rzędu $ABM..$, odpowiedny promieniowi e

http://rcin.org.pl

towi E rzędu $ABM..$, z promieniem $M^{IV}D$ będzie żądanym punktem M^{V}.	wiązki $abm..$, z punktem $m^{IV}d$ będzie żądanym promieniem m^{V}.

Pomnąc na powyżéj przytoczone własności krzywéj, przechodzącéj przez trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty i krzywéj, dotykającéj się trzech bezpośrednio po sobie następujących promieni, nie ulega żadnéj wątpliwości,

że krzywa K', mająca z krzywą K trzy bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty,	że krzywa K', mająca z krzywą K trzy bezpośrednio po sobie następujące wspólne styczne,

oznaczona jest zupełnie, jeżeli dane są:

styczna p i punkt M krzywéj K, a nadto dwa na płaszczeni danéj krzywéj dowolne punkty M''' i M^{IV} o oddaleniu skończoném Fig. 6α lub,	punkt P i styczna m krzywéj K, a nadto dwa na płaszczeni danéj krzywéj dowolne promienie m''' i m^{IV} o nachyleniu mniéjszém od 180^0 Fig. 6β lub,
styczna p i punkt M krzywéj K, a nadto na płaszczeni danéj krzywéj dowolny punkt M''' na dowolnym promieniu p' Fig. 7α.	punkt P i styczna m krzywéj K, a nadto na płaszczeni danéj krzywéj dowolny promień m''' w dowolnym punkcie P' Fig. 7α.

W piérwszym przypadku bowiem

dane są styczną p i punktem M dwa, punktem podwójnym GG' dwóch współkréślnych, równobieżnych, punktami A, B, G i A', G' oznaczonych rzędów, trzeci z trzech bezpośrednio po sobie następują-	dane są punktem P i styczną m dwa, promieniem podwójnym gg' dwóch współkréślnych, równobieżnych, promieniami a, b, g i a', g' oznaczonych wiązek, trzeci z trzech bezpośrednio po sobie następują-

http://rcin.org.pl

cych punktów M, M', M'', które wraz z punktami M''' i M^{IV} oznaczają zupełnie krzywę K';

cych promieni m, m', m'', które wraz z promieniami m''' i m^{IV} oznaczają zupełnie krzywę K';

w przypadku drugim, dane są

styczną p i punktem M dwa, punktem podwójnym GG' dwóch współkréślnych, równobieżnych, punktami A, B, G i A', G' oznaczonych rzędów, trzeci z trzech bezpośrednio po sobie następujących punktów M, M', M''; styczną p' zaś i punktem M''' dwa bezpośrednio po sobie następujące punkty M''' i M^{IV},

punktem P i styczną m dwa, promieniem podwójnym gg' dwóch współkréślnych, równobieżnych, promieniami a, b, g i a', g' oznaczonych wiązek, trzeci z trzech bezpośrednio po sobie następujących promieni m, m', m''; punktem zaś P' i styczną m''' dwa bezpośrednio po sobie następujące promienie m''' i m^{IV},

które do oznaczania krzywych K' zupełnie wystarczają.

Konstrukcyje pomienionych krzywych K', których piérwsze i najgłówniéjsze części stanowią podane konstrukcyje punktu B' i promienia b' Fig. 4α i Fig. 4β, opiéwają:

Naznaczmy punkty przecięcia się promieni $N'''\ N^{IV}$ $M'''M^{IV}$ i promienia $N'''\ N^{V}$ ($N'''N^{V}$ łączy punkt N''' z dowolnym punktem N^{V} krzywéj K) z promieniem p Fig. 6α, kolejno literami A, A', B i oznaczmy Fig. 4α, zważywszy, że A i A', G i G' są odpowiednémi punktami dwóch

Naznaczmy promienie, łączące punkty $n'''n^{IV}$, $m'''m^{IV}$ i punkt $n'''\,n^{V}$ ($n'''\,n^{V}$ jest przecięciem się promienia n''' z dowolnym promieniem n^{V} krzywéj K) z punktem P Fig. 6β, kolejno literami a, a', b i wykréślmy Fig. 4β, zważywszy, że a i a', g i g' są odpowiednémi promieniami dwóch

http://rcin.org.pl

współkréślnych, równobieżnych rzędów o jednym punkcie podwójnym, punkt B', odpowiedny punktowi B. Wykréślmy daléj promień, łączący punkt B' z punktem M^{IV}, i promień, łączący punkt N^{V} z punktem M, a ich punkt przecięcia się M^{V} będzie punktem krzywéj K'. Za uwzględnieniem innych promieni punktu N^{IV}

współkréślnych, równobieżnych wiązek o jednym promieniu podwójnym, promień b', odpowiedny promieniowi b. Oznaczmy daléj punkt przecięcia się promienia b' ze styczną m^{IV} i punkt przecięcia się promienia n^{V} ze styczną m, a promień m^{V}, je łączący będzie styczną krzywéj K'. Za uwzględnieniem innych punktów promienia n^{IV}

otrzymamy, postępując drogą wskazaną, inne krzywéj K'

punkty.

promienie.

W Fig. 7α i 7β, przeprowadzono konstrukcyję krzywéj K',

mającej trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty wspólne z krzywą K a przechodzącéj nadto przez dwa bezpośrednio po sobie następujące punkty M''' i M^{IV}.

posiadającéj trzy bezpośrednio po sobie następujące styczne wspólne z krzywą K a dotykającéj się nadto dwóch bezpośrednio po sobie następujących promieni m''' i m^{IV}.

Przytoczone konstrukcyje żadnéj nie ulegają zmianie, jeżeli mamy rozwiązać zagadnienia:

Wykréślić krzywę K', przechodzącą przez cztéry punkty krzywéj K, z których trzy bezpośrednio po sobie następują.

Wykréślić krzywę K', dotykającą się cztérech promieni krzywéj K, z których trzy bezpośrednio po sobie następują.

Wspólne bieguny B, B', B'' i wspólne biegunowe b, b', b'', tak na płaszczeni ułożonych krzywych rzędu drugiego K i K', znajdują się nieskończenie blizko trzech bezpośrednio po sobie następujących

http://rcin.org.pl

wspólnych punktów i trzech bezpośrednio po sobie następujących wspólnych stycznych. Czwartą wspólną styczną krzywych K i K' otrzymamy, po oznaczeniu drugiego punktu podwójnego (piérwszym jest punkt M a względnie punkt P) inwolucyi punktów $XX' \, YY' \, ZZ'$.. na promieniu p a względnie na promieniu m, jako drugi promień podwójny (piérwszym jest p a względnie m) inwolucyi promieni wspólnéj zauważanym krzywym w pomienionym drugim punkcie podwójnym.

Celem wykréślenia krzywéj K', mającéj z krzywą K cztéry wspòlne bezpośrednio po sobie następujące punkty M, M', M'', M''', i cztéry wspólne bezpośrednio po sobie następujące styczne m, m', m'', m''', jeżeli dane są: krzywa K, jéj styczna m w punkcie M i punkt N^{IV} albo promień n^{IV} krzywéj K Fig. 8α i Fig. 8β.,

połączmy punkt N^{IV} z punktem M promieniem c, wykréślmy promień $M^{IV} \, M^{V}$, który przecina styczną m w punkcie D, i oznaczmy punkt przecięcia się N^{V} promienia DN^{IV} z promieniem e, który łączy punkt M^{V} krzywéj K z punktem M.	przetnijmy promieniem n^{IV} styczną m w punkcie C, oznaczmy punkt $m^{IV} \, m^{V}$, przez który przechodzi promień d punktu M, i wykréślmy promień n^{V}, łączący punkt dn^{IV} z punktem E, w którym przecina promień m^{V} krzywéj K promień m.

Każdy punkt stycznéj m, tak na płaszczeni ułożonych krzywych rzędu drugiego K i K', jest wspólnym biegunem; a każdy promień punktu M ich wspólną biegunową.

http://rcin.org.pl

Podane konstrukcyje krzywych K' są konstrukcyjami. przytoczonemi pod lit: c, d, e, lecz znacznie daną krzywą K uproszczonemi.

9. Promieniom a i b, inwolucyi promieni parabolicznéj $aAbBmM$.., w dowolnym punkcie koła, ułożonym symetrycznie względem stycznéj w zauważanym punkcie, przypadają, jako odpowiednie punkty, punkty A i B inwolucyi punktów parabolicznéj $aAbB$ mM.. na pomienionéj stycznéj, ułożone symetrycznie względem jéj punktu styczności z kołem i odwrotnie; czyli: paraboliczna inwolucyja punktów, na którymkolwiek promieniu koła i paraboliczna inwolucyja promieni, w dowolnym punkcie koła, są symetrycznemi.

Punktem odpowiednym promieniowi s, który, przechodząc przez punkt M krzywéj K, zawiéra ze styczną m w tym punkcie krzywéj kąt prosty, jest przeto Fig. 9α punkt S_∞ promienia m oddalony o długość nieskończenie wielką od punktu M, jeżeli krzywą rzędu drugiego K', przechodzącą przez trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty M, M', M'' krzywéj K, ma być koło. Punktem przecięcia się S'' stycznéj, wykréślonéj w punkcie, w którym przecina promień s krzywę K, z promieniem m, punktem przecięcia się A'' stycznéj, wrkréślo-

Promieniem odpowiednym punktowi S_∞, który, znajdując się na promieniu m krzywéj K, oddalony jest od punktu styczności M tego promienia z krzywą o długość nieskończenie wielką, jest przeto Fig. 9β promień s punktu M, zawiérający z promieniem m kąt prosty, jeżeli krzywą rzędu drugiego K', dotykającą się trzech bezpośrednio po sobie następujących promieni m, m', m'' krzywéj K, ma być koło. Promieniem s'', łączącym punkt styczności stycznéj, wykréślonéj z punktu S_∞ do krzywéj K, z punktem M, promieniem a'', łączącym punkt

http://rcin.org.pl

néj w punkcie, w którym przecina promień a krzywę K, z promieniem m i punktami S_∞, G, G'', oznaczona jest zupełnie współkréślność rzędów równobieżnych AGS_∞.. i $A''G''S''$.., o jednym punkcie podwójnym GG'' (patrz Fig. 10α, w któréj oznaczono punkt A odpowiedny punktowi A''); a rzędem punktów $A''G''S''$.. i inwolucyją promieni paraboliczną $aA''sS''mM$.. koło K', przechodzące przez trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty M, M', M'', (przez M'' rozumiemy punkt podwójny współkréślnych rzędów AGS_∞.. i $A''G''S''$.. naznaczony także literami G, G'') krzywéj K.

styczności stycznéj, wykréślonéj z punktu A, z punktem M i promieniami s, g, g'', oznaczona jest zupełnie współkréślność wiązek równobieżnych ags.. i $a''g''s''$.. o jednym promieniu podwójnym gg'' (patrz Fig. 10β, w któréj wykreślono promień a odpowiedny promieniowi a''); a wiązką promieni $a''g''s''$... i inwolucyją punktów paraboliczną $a''As''S_\infty mM$.. koło K', dotykające się trzech bezpośrednio po sobie następujących promieni m, m', m'' (przez m'' rozumiemy promień podwójny współkréślnych wiązek ags.. i $a''g''s''$.. naznaczony także literami g i g'') krzywéj K.

Środek O, tego jedynie możliwego koła, jest przecięciem się promienia, wykréślonego w punkcie A prostopadle do promienia a, z promieniem s.

10. Inwolucyje promieni w wiérzchołkach i inwolucyje punktów na stycznych wiérzchołkowych krzywéj rzędu drugiego są parabolicznemi, a koło K, zakréślone promieniem OM z punktu O, w którym przecina promień, wykréślony w dowolnym punkcie A stycznéj wiérzchołkowéj m, prostopadle do promienia łączącego wiérzchołek M, znajdujący się na stycznéj m, z punktem styczności stycznéj, wykréślonéj z punk-

http://rcin.org.pl

tu A do danéj krzywéj K, oś główną, przechodzącą przez wiérzchołek M, przechodzi przez cztéry bezpośrednio po sobie następujące punkty i dotyka się cztérech bezpośrednio po sobie następujących stycznych zauważanéj krzywéj; ponieważ symetryczna paraboliczna inwolucyja promieni w wiérzchołku M i symetryczna paraboliczna inwolucyja punktów na stycznéj wiérzchołkowéj m krzywéj K przypadają także kołu K'.

Elipsa posiada cztéry tego rodzaju koła, których promienie mają długość skończoną; środki dwóch z cztérech kół, mających z hyperbolą cztéry bezpośrednio po sobie następujące wspólne punkty i cztéry bezpośrednio po sobie następujące wspólne styczne, które przechodzą przez wiérzchołki w skończoności są punktami w skończoności; środki kół, przechodzących przez wiérzchołki w nieskończonéj dali t. j. przez punkty, w których trzecia oś [1]) główna w nieskończonéj dali hyperboli, hyperbolę przecina, są punktami w nieskończonéj dali, których położenia wskazują promienie, wykréślone prostopadle do ledwoniestycznych; parabola ma tylko jedno tego rodzaju koło o promieniu skończonym; drugiém kołem bowiem nie jest jéj promień w nieskończonéj dali, gdyż powyżéj przytoczona konstrukcyja, przeprowadzona z uwzględnieniem symetrycznéj parabolicznéj inwolucyi promieni w wiérzchołku M_{∞} i symetrycznéj parabolicznéj inwolucyi punktów na sty-

---

[1]) Płaska krzywa rzędu drugiego ma jednę trójkę sprzężonych promieni na sobie prostopadle stojących (trzy osie główne) i jednę trójkę sprzężonych punktów oddalonych od siebie o łuki, przypadające kątom prostym (trzy środki główne).

http://rcin.org.pl

cznéj wiérzchołkowéj m_∞, wskazuje, jako koło K', równocześnie punkt M_∞ i promień m_∞, która okoliczność orzeka stanowczo, iż promień w nieskończonéj dali paraboli łączy jéj dwa bezpośrednio po sobie następujące punkty w nieskończonéj dali. Tym sposobem odkrywamy następujące hyperboli własności:

Hyperbola posiada dwa razy po cztéry

bezpośrednio po sobie następujące punkty, znajdujące się na promieniu. Jeden z punktów w każdéj czwórce jest wiérzchołkiem w nieskończonéj dali a promieniem, łączącym taką czwórkę punktów, — ledwoniestyczna.

bezpośrednio po sobie następujące styczne, przecinające się w punkcie. Jedna ze stycznych w każdéj czwórce jest ledwoniestyczną a punktem przecięcia się takiéj czwórki stycznych — wiérzchołek w nieskończonéj dali.

Konstrukcyja hyperboli Fig. 11, oznaczonéj pięciu

punktami, z których trzy M_∞, M', M'' albo cztéry M_∞, M', M'', M''' bezpośrednio po sobie następujące punkty znajdują się na promieniu m

promieniami, z których trzy m, m', m'' albo cztéry m, m', m'', m''' bezpośrednio po sobie następujące promienie przecinają się w punkcie M_∞

i konstrukcyja paraboli Fig. 12, oznaczonéj pięciu

punktami, jeżeli pomiędzy trzema albo cztérema bezpośrednio po sobie następującémi punktami znajduje się wiérzchołek w nieskończonéj dali M_∞,

promieniami, jeżeli pomiędzy trzema albo cztérema bezpośrednio po sobie następującémi promieniami znajduje się styczna w nieskończonéj dali m_∞,

nie ulegają, według l. 8, żadnym trudnościom.

11. Wszystko, cośmy dotychczas omówili, odnosi się bez żadnéj zmiany do dwóch algebraicznych powiérzchni walcowych rzędu drugiego na punkcie

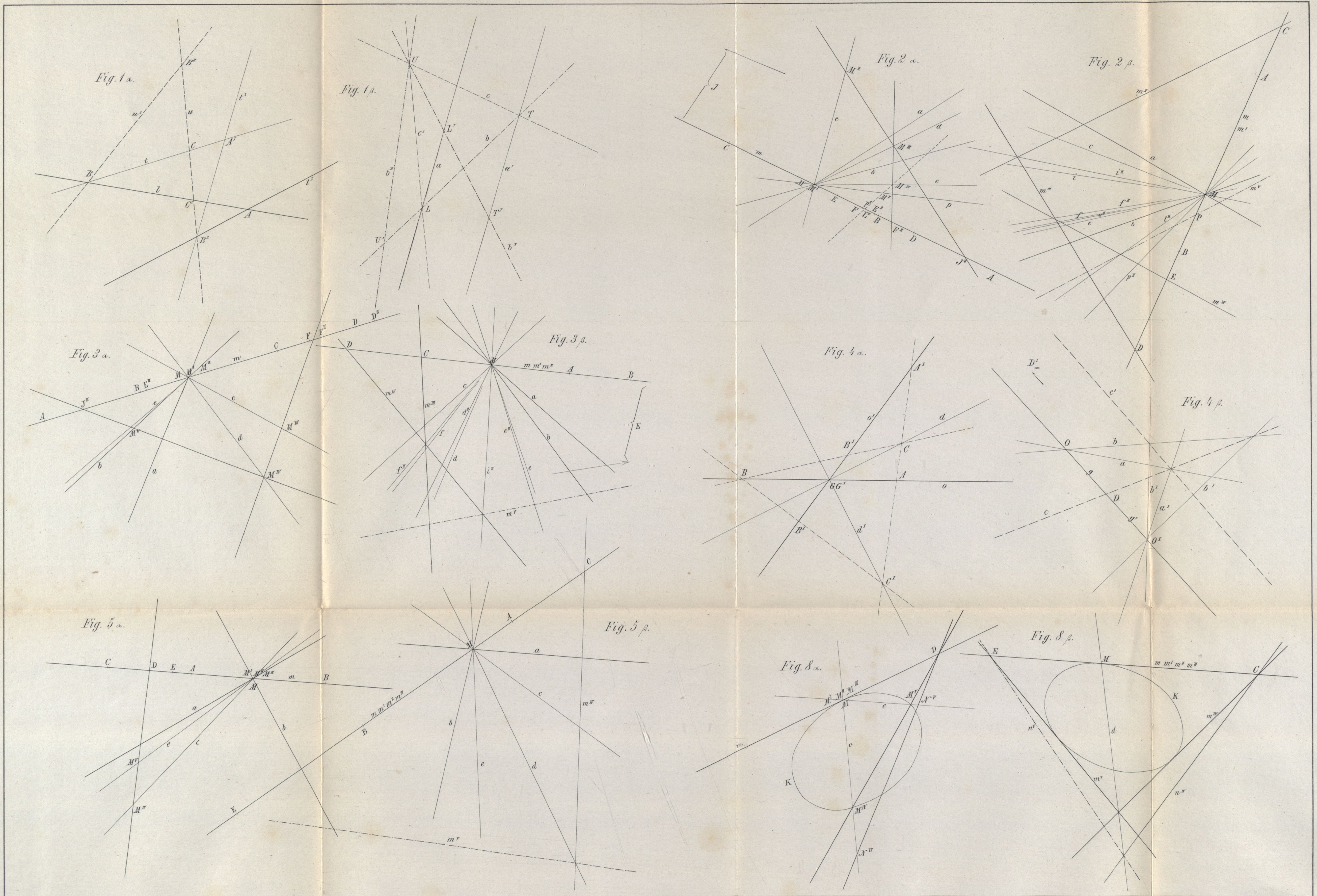
http://rcin.org.pl

w nieskończonéj dali, jeżeli w przytoczonych zdaniach i konstrukcyjach, pomni na prawo postępności, podstawimy zamiast punktu i promienia — promień i płaszczeń pomienionego punktu w nieskończonéj dali i t. d.

12. Na powiérzchni kulistéj istnieje tylko jeden rodzaj algebraicznych krzywych rzędu drugiego, (krzywe kuliste jakiegokolwiekbądź rzędu nie rozpadają się na gatunki, lecz tylko na rodzaje), który stanowią elipsy kuliste o zwyczajnych punktach i promieniach, przeto podane pod l. 10 własności hyperboli nie tyczą się elips kulistych. Zdania i konstrukcyje, tyczące się krzywych płaskich rzędu drugiego, przeistaczamy na zdania i konstrukcyje, odnoszące się do krzywych kulistych rzędu drugiego, podstawiwszy w nich, bacząc na prawo postępności, na miejsce punktu i promienia płaszczeni—punkt i promień powiérzchni kulistéj.. i t. d.

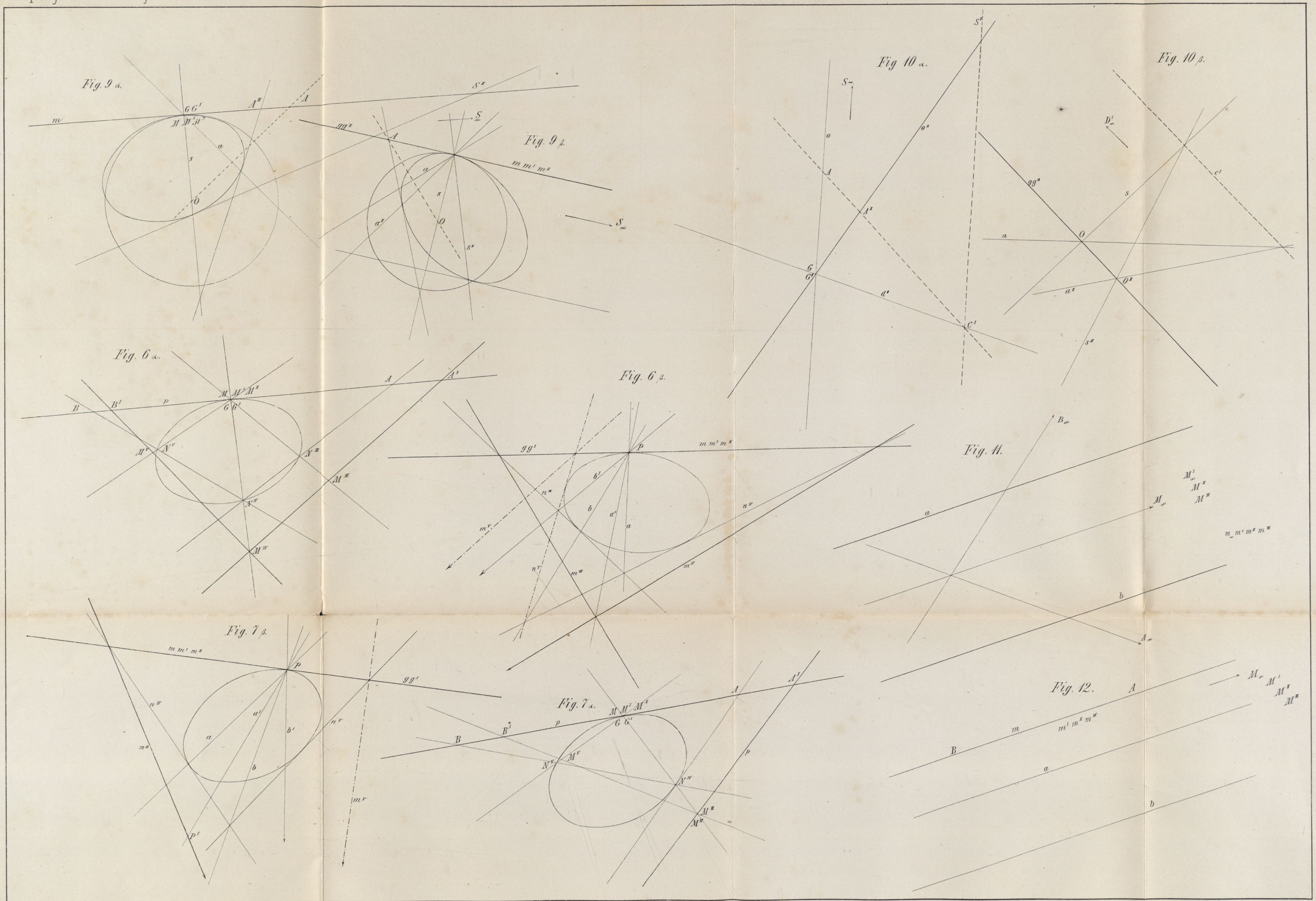
Uwagi właśnie co przytoczone odnoszą się do powiérzchni stożkowych rzędu drugiego na punkcie w skończoności i krzywych rzędu drugiego na płaszczeni w nieskończonéj dali.

http://rcin.org.pl



Litogr. M. Salba w Krakowie.

http://rcin.org.pl



Litogr. M. Salba w Krakowie

http://rcin.org.pl