Nowy wzór
do
całkowania za pomocą szeregów

przez

Józefa Tetmajera.

I.

Dwa wzory mamy do całkowania szeregami. Niech będzie ogólnie różniczka dana

$$F'(x)\,dx.$$

Piérwszy z tych wzorów:

$$\int F'(x)\,dx = C + F'(0)\,x + F''(0)\,\frac{x^2}{1.\,2} + F'''(0)\,\frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \ldots$$

jest prostém zastósowaniem wzoru Maclaurena. Daje on ten sam szereg, który otrzymujemy rozwijając daną różniczkę według rosnących potęg ilości x, i całkując z osobna każdy wyraz szeregu. A że wykonanie tego działania jest ogólnie łatwiejszém, powyższy wzór rzadko bywa użytym.

Tak atoli otrzymana całka daje tylko wtedy wartość zcałkowanéj różniczki, jeżeli ilość x jest względnie bardzo małą. W przeciwnym bowiem razie szereg jest rozbieżnym, lub zbiega tak powoli, iż zbyt trudno jest osięgnąć dostatecznie przybliżoną wartość funkcyi, którą on wyraża.

Nie może też być użytym kiedy dla $x = 0$ pochodne $F'(0)$, $F''(0)$, . . . stają się nieskończonemi.

Drugi z tych dwóch wzorów tak się daje wyprowadzić:

$$F(x) = F(x + \Delta x - \Delta x)$$

$$= F(x + \Delta x) - F'(x + \Delta x)\Delta x + F''(x + \Delta x)\frac{\Delta x^2}{1.\ 2}$$

$$- F'''(x + \Delta x)\frac{\Delta x^3}{1.\ 2.\ 3} + \cdots,$$

a zatém

$$F(x + \Delta x) = F(x) + F'(x + \Delta x)\Delta x - F''(x + \Delta x)\frac{\Delta x^2}{1.\ 2}$$

$$+ F'''(x + \Delta x)\frac{\Delta x^3}{1.\ 2.\ 3} - \cdots$$

co nam daje dla $x = 0$, $\Delta x = x$.

$$\int F'(x)\, dx = C + F'(x)\, x - F''(x)\frac{x^2}{1.\ 2}$$

$$+ F'''(x)\frac{x^3}{1.\ 2.\ 3} - \cdots$$

Tu już nie można uniknąć wyprowadzania pochodnych $F''(x)$, $F'''(x)$..., które najczęściéj postępują ciągle zwiększającémi się wielomianami, tak, że obliczenie piérwszych cztérech lub pięciu wyrazów szeregu już długiego rachunku wymaga. Nie starano się też z tego wzoru wyprowadzić szczególnych wzorów, którychby wyraz ogólny od rachunku funkcyj pochodnych raz na zawsze uwolnił.

Z tego to powodu ten wzór drugi, pomimo tego że nie sprowadza niedogodności wzoru piérwszego, mniéj jeszcze używanym bywa.

Do tych dwóch wzorów przyczyniam trzeci.

W rozprawie mojéj *Principes fondamentaux du calcul transcendant*, ogłoszonéj w Paryżu w r. 1857 dałem nieznane jeszcze rozwinięcie funkcyi $F(x+\Delta x)$.

Pomijając zasady, z których tam wyszedłem wyłożę je tu w następujący sposób:

$$F(x+\Delta x) = F\left(x+\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= F\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) + F'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2} + \frac{F''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.\,2}\,\frac{\Delta x^2}{2^2}$$

$$+ \frac{F'''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.\,2.\,3}\,\frac{\Delta x^3}{2^3} + \ldots$$

$$F(x) = F\left(x+\frac{\Delta x}{2}-\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= F\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - F'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2} + \frac{F''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.\,2}\,\frac{\Delta x^2}{2^2}$$

$$- \frac{F'''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.\,2.\,3}\,\frac{\Delta x^3}{2^3} + \ldots,$$

a przeto

$$F(x+\Delta x) - F(x) = 2\left(F'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{F'''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.\,2.\,3}\,\frac{\Delta x^3}{2^3} + \frac{F^{V}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\,\frac{\Delta x^5}{2^5} + \ldots\right)$$

$$F(x+\Delta x)=F(x)+2\left(F'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{F'''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.\ 2.\ 3}\frac{\Delta x^3}{2^3}+\frac{F^{\mathrm{V}}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\frac{\Delta x^5}{2^5}+\dots\right)$$

i nareszcie kładąc 0 w miejscu x a x w miejscu Δx otrzymuję:

$$\int F'(x)\,dx=C+2\left(F'\left(\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{F'''\left(\frac{x}{2}\right)}{1.\ 2.\ 3}\frac{x^3}{2^3}+\frac{F^{\mathrm{V}}\left(\frac{x}{2}\right)}{1.2.3.4.5}\frac{x^5}{2^5}+\dots\right)$$

II.

Teraz porównaniem całek, jakie dają te trzy wzory, pokrótce wykażę, że do całkowania różniczek funkcyj przestępnych użycie tego ostatniego wzoru jest najskuteczniejszém.

Zacznijmy od całki:

$$\int\frac{dx}{x}=log\,x.$$

Wzór piérwszy daje:

$$\int\frac{d\,z}{1+z}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots$$

a dla $z=x-1$,

$$\int\frac{d\,x}{x}=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots$$

drugi

$$\int\frac{d\,z}{1+z}=\frac{z}{1+z}+\frac{z^2}{2\,(1+z)^2}+\frac{z^3}{3\,(1+z)^3}$$

$$+\frac{z^4}{4\,(1+z)^4}+\dots$$

a dla $z=x-1$,

$$\int\frac{dx}{x}=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\ldots;$$

trzeci

$$\int\frac{dz}{1+z}=2\left(\frac{z}{2+z}+\frac{z^3}{3(2+z)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{z^5}{5(2+z)^5}+\frac{z^7}{7(2+z)^7}+\ldots\right)$$

a dla $z=x-1$,

$$\int\frac{dx}{x}=2\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7+\ldots\right)$$

Widzimy już, że te ostatnie dwa szeregi są zawsze zbieżne; ale ich względną zbieżność liczebněm tylko zastósowaniem ocenić możemy. Weźmyż na przykład log 2.

Biorąc tylko piérwsze cztéry wyrazy każdego z tych trzech szczególnych wzorów, otrzymujemy następujące przybliżone ilości:

1) $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=0{,}58333\ldots$

2) $\log 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.8}+\frac{1}{4.16}=0{,}68228\ldots$

3) $\log 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}\ldots\right)=0{,}69313\ldots$

a jest

$$\log 2=0{,}693147180.$$

Mamy więc do wyrachowania logarytmów wzór nagle zbieżny:

$$log\ x = 2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \ldots\right)$$

Jednakowoż dla wielkich wartości x, zbieżność jego słabnie. Należy wtedy położyć $x = n + z$, tak, aby $log\ n$ był wiadomym, a ilość z jak najmniejsza. I będzie

$$log\ (n+z) = log\ n + 2\left(\frac{z}{2n+z} + \frac{z^3}{3(2n+z)^3} + \frac{z^5}{5(2n+z)^5} + \ldots\right)$$

Ten szereg oddawna znany, wynika także bezpośrednio z naszego trzeciego wzoru.

III.

Przystąpmy teraz do całki:

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

Powyższe trzy wzory dają:

$$1)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots$$

$$2)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + \frac{2x^3}{2(1+x^2)^2} + \frac{3x^5 - x^3}{3(1+x^2)^3} + \frac{4x^7 - 4x^5}{4(1+x^2)^4} + \frac{5x^9 - 10x^7 + x^5}{5(1+x^2)^5} + \ldots$$

$$3)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = 2\left(\frac{2x}{4+x^2} + \frac{(6x^2-8)x^3}{3(4+x^2)^3} + \frac{(10x^4 - 80x^2 + 32)x^5}{5(4+x^2)^5} + \frac{(14x^6 - 280x^4 + 672x^2 - 128)x^7}{7(4+x^2)^7}\right.$$

$$+\frac{(18\,x^8-672\,x^6+4032\,x^4-4408\,x^2+512)\,x^9}{9\,(4+x^2)^9}\,\ldots\Big)$$

Dla ocenienia względnéj zbieżności tych trzech szeregów, połóżmy $x=1$ i weźmy w każdym piérwsze pięć wyrazów. A tak otrzymujemy:

$$1)\ arc\ 45^0=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=0{,}83492\ \ldots$$

$$2)\ arc\ 45^0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3.\ 2^3}+0-\frac{5}{5,\ 2^5}=0{,}80205\ \ldots$$

$$3)\quad arc\,45^0=2\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3.5^3}-\frac{38}{5.5^5}+\frac{278}{7.\ 5^7}\right.$$

$$\left.-\frac{718}{9.\ 5^9}\right)=0{,}78540\ \ldots$$

a jest

$$arc\ 45^0=\frac{3{,}141592653}{4}=0{,}785398\ \ldots$$

Kiedy jest $x>1$, piérwszy z tych trzech wzorów szczególnych jest rozbieżnym; ale drugi i trzeci pozostają zbieżnemi.

Gdy ten szczególny wzór trzeci uzupełnionym jest wyrazem ogólnym składnie urządzonym, użycie onego najmniejszéj nie ulega trudności. Lecz zanim przystąpię do ostatecznego wykazania wzoru tego, piszę tu jeszcze dla łatwiejszego sprawdzenia wykonanego rachunku, jedénaście funkcyj pochodnych, których piérwszą jest:

$$\frac{1}{1+x^2};$$

$$1)\quad \frac{1}{1+x^2}$$

2) $-\dfrac{2\,x}{(1+x^2)^2}$

3) $1.\ 2\ \dfrac{3\,x^2-1}{(1+x^2)^3}$

4) $-1.\ 2.\ 3\ \dfrac{4\,x^3-4x}{(1+x^2)^4}$

5) $1.\ 2.\ 3.\ 4\ \dfrac{5\,x^4-10\,x^2+1}{(1+x^2)^5}$

6) $-1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \dfrac{6\,x^5-20\,x^3+6\,x}{(1+x^2)^6}$

7) $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \dfrac{7\,x^6-35\,x^4+21\,x^2-1}{(1+x^2)^7}$

8) $-1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7\ \dfrac{8\,x^7-56\,x^5+56\,x^3-8\,x}{(1+x^2)^8}$

9) $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8\ \dfrac{9\,x^8-84\,x^6+126\,x^4-36\,x^2+1}{(1+x^2)^9}$

10) $-1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9$

$$\frac{10\,x^9-120\,x^7+252\,x^5-120\,x^3+10\,x}{(1+x^2)^{10}}$$

11) $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10$

$$\frac{11\,x^{10}-165\,x^8+462\,x^6-330\,x^4+55\,x^2-1}{(1+x^2)^{11}}$$

Ztąd biorę pochodne nieparzystéj wskazówki, kładę $\frac{x}{2}$ w miejscu x i według trzeciego ogólnego wzoru otrzymuję ostatecznie:

$$Arc\ (tang. = x)$$

$$= \int \frac{dx}{1+x^2} = 2\left(\frac{2x}{4+x^2} + \frac{(6x^2-8)x^3}{3(4+x^2)^3}\right.$$

$$+ \frac{(10x^4 - 80x^2 + 32)x^5}{5(4+x^2)^5}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{n+1}{1} 2x^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} 2^3 x^{n-2}\right.$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} 2^5 x^{n-4}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6.7} 2^7 x^{n-6}$$

$$\left. + \ldots . 2^{n+1}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4+x^2)^{n+1}} + \ldots\left.\right)$$

gdzie n jest liczbą parzystą.

IV.

Zastósowanie ogólnego trzeciego wzoru do obliczenia całki:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

staje się mniéj ważném, ponieważ szereg

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

wynikający z piérwszego ogólnego wzoru jest już dostatecznie zbieżnym, jednakowoż ów

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\left(\frac{x}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(x^2+2)x^3}{3(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}\right.$$

$$\left. + \frac{(x^4+12x^2+6)x^5}{5(4-x^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{(x^6+30x^4+90x^2+20)x^7}{7(4-x^2)^{\frac{13}{2}}} + \ldots\right)$$

wyprowadzony z trzeciego ogólnego wzoru, naglęj zbiega.

Niech będzie $x = \frac{1}{2}$, i weźmy cztéry tylko piérwsze wyrazy w każdym z tych dwóch szeregów To nam daje:

$$Arc\, 30^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5}$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} = 0{,}5235254$$

$$arc\, 30^0 = 2\left(\frac{1}{15^{\frac{1}{2}}} + \frac{9}{3.15^{\frac{5}{2}}} + \frac{145}{5.15^{\frac{9}{2}}}\right.$$

$$\left.+ \frac{2841}{7.15^{\frac{13}{2}}}\right) = 0{,}5235944 \ldots.$$

a jest

$$arc\, 30^0 = \frac{3{,}141592653}{6} = 0{,}5235987 \ldots$$

Tu funkcyje pochodne:

$$1)\quad \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$2)\quad \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$3)\quad \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$4)\quad \frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$5)\quad \frac{24x^4+72x^2+9}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}$$

$$6)\ \frac{120\,x^5 + 600\,x^3 + 225\,x}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}},$$

$$7)\ \frac{720\,x^6 + 5400\,x^4 + 4050\,x^2 + 225}{(1-x^2)^{\frac{13}{2}}},$$

$$8)\ \frac{5040\,x^7 + 52920\,x^5 + 66150\,x^3 + 11025\,x}{(1-x)^{2\frac{15}{2}}},$$

$$9)\ \frac{40320\,x^8 + 56448\,x^6 + 1058400\,x^4 + 352800\,x^2 + 11025}{(1-x^2)^{\frac{17}{2}}},$$

$$10)\ \frac{362880\,x^9 + 6531840\,x^7 + 17146080\,x^5 + 9525600\,x^3 + 893025\,x}{(1-x^2)^{\frac{19}{2}}},$$

$$11)\ \frac{3628800\,x^{10} + 81648000\,x^8 + 285668000\,x^6 + 238140000\,x^4 + 44651250\,x^2 + 893025}{(1-x^2)^{\frac{21}{2}}},$$

są więcéj powikłane niż w poprzedzającym razie; a wyraz ogólny szeregu jest jeszcze prostszym. Jest bowiem ostatecznie:

$$\begin{aligned}
&Arc\ (sin = x) \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\left(\frac{x}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(x^2+2)\,x^3}{3\,(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}\right. \\
&\quad + \frac{(x^4 + 12\,x^2 + 6)\,x^5}{5\,(4-x^2)^{\frac{9}{2}}} \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + \left(x^n + \frac{n\,(n-1)}{1^2}\,x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2.\,2^2}\,x^{n-4}\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1^2\;2.^2\;3^2}\,x^{n-6}$$

$$+\frac{n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.^2\;2.^2\;3.^2\;4^2}\,x^{n-8}$$

$$+\ldots+\left.\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2.\,1}{1.^2\;2.^2\;3^2\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}\right)^2}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,(4-x^2)^{2n+1}}$$

$$+\;\ldots\ldots\Big),$$

gdzie n jest liczbą parzystą.

Z tego co poprzedza widzimy, że trzeci wzór ogólny do wyprowadzenia wielu innych całek skutecznie użytym być może, byle tylko szereg wyrażający całkę zawiérał łatwy do zastosowania wyraz ogólny.

V.

Dwumian $(a + x^v)^m$ rozwinięty według wzoru naszego daje szereg taki:

$$(a+x)^m = a^m + \frac{1}{2^{m-1}}\Big(m\,(2a+x)^{m-1}\,x$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(2a+x)^{m-3}\,x^3}{1.\;2.\;3}$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)\,(2a+x)^{m-5}\,x^5}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}+\cdots\Big);$$

ten szereg w niektórych poszukiwaniach analitycznych może być wielce użytecznym.

I tak kiedy mamy wyznaczyć piérwszą pochodną funkcyi $F\,(x)$, kładziemy

$$\frac{F\,(x+\Delta x)-F\,(x)}{\Delta\,x}$$

i wykonawszy tak wskazane działanie czynimy $\Delta x = 0s$. Jeżeli więc funkcyja dana jest a^x, będzie

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Funkcyja $a^{\Delta x} = (1 + a - 1)^{\Delta x}$, według wzoru Newtona tak się rozwija:

$$a^{\Delta x} = 1 + \Delta x(a-1) + \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(a-1)^2}{1.\ 2}$$
$$+ \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)(a-1)^3}{1.\ 2.\ 3} + \cdots$$

Jest przeto

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a - 1 + \frac{(\Delta x - 1)(a-1)^2}{1.\ 2}$$
$$+ \frac{(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)(a-1)^3}{1.\ 2.\ 3} + \cdots$$

i czyniąc $\Delta x = 0$, otrzymujemy żądaną pochodną:

$$(a^x)' = a^x\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots\right).$$

W ten sposób zadanie nie jest skutecznie rozwiązaném, ponieważ szereg:

$$K = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots$$

w rzadkich tylko przypadkach jest zbieżnym.

Lagrange starał się temu zaradzić. Zważając że

$$\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots = \log a$$

i że

$$log\ a = m\ log\ \sqrt[m]{a},$$

dla zastąpienia powyższego szeregu, dał następujący:

$$log\ a = m\ log\ e \left(\frac{\sqrt[m]{a} - 1}{1} - \frac{(\sqrt[m]{a} - 1)^2}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{(\sqrt[m]{a} - 1)^3}{3} - \ldots\right),$$

który atoli nie został powszechnie przyjętym; zapewne dlatego że bezpośrednio z danéj funkcyi nie wynika.

Zastosujmyż teraz do funkcyi:

$$a^{\Delta x} = (1 + a - 1)^{\Delta x}$$

rozwinięcie dwumianu z naszego wzoru wyprowadzone. Będzie:

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{2^{\Delta x - 1}}\left(\Delta x\ (a + 1)^{\Delta x - 1}\ (a - 1)\right.$$

$$+ \frac{\Delta x\ (\Delta x - 1)(\Delta x - 2)\ (\Delta x - 3)^{\Delta x - 3}\ (a - 1)^3}{1.\,2.\,3}$$

$$\frac{\begin{array}{c} + \Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)(\Delta x - 3)(\Delta x - 4) \\ \left. + (a + 1)^{\Delta x - 5}\ (a - 1)^5 \ldots\right) \end{array}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} \ldots.$$

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{1}{2^{\Delta x - 1}}\left((a + 1)^{\Delta x - 1} (a - 1)\right.$$

$$+ \frac{(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)(a + 1)^{\Delta x - 3}\ (a - 1)^3}{1.\,2.\,3}$$

$$+ \frac{(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)(\Delta x - 3)(\Delta x - 4)(a+1)^{\Delta x - 5}(a-1)^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} + \cdots \Bigg);$$

a dla $\Delta x = 0$,

$$K = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\right).$$

I tak otrzymujemy żądaną pochodną:

$$\left(a^x\right)' = 2\, a^x \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a-1}\right) + \cdots\right)$$

wyrażoną szeregiem łatwym do rachunku, zawsze zbieżnym i z danéj funkcyi bezpośrednio wynikającym.