PRZYBYLSKI

JEOMETRYA POCZĄTKOWA

opis: 44859

JEOMETRYA

POCZĄTKOWA

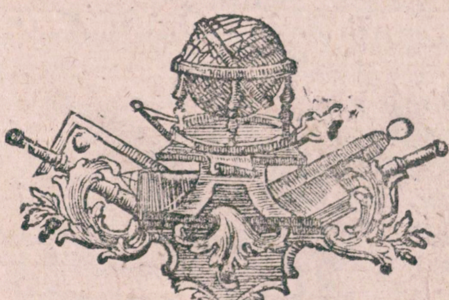
ułożona

PRZEZ

X. IGNACEGO PRZYBYLSKIEGO

Rektora Szkoł Woiewodzkich

Kaliskich.



w WARSZAWIE

w Drukarni XX. Piiarów 1823.

Wolno Drukować.

w Warszawie dnia $\frac{8}{6}$ 1823.

J. K. Szaniawski.

R. S. D. J. W. R. K. O. P.

CZĘŚĆ I.

ROZDZIAŁ I.

O linii prostéy.

§ I.

Z nauki rachunkowéy znamy iuż *Kwadrat* i *Prostokąt* tudzież Sześcian i *Równoległościan*.

Obwody pierwszych składaią się z liniy; krawędzie drugich są także liniiami. Wszystkie te liniie mierzą się calem, ćwiercią, stopą, łokciem, prętem, łańcuchem, sznurem, i t. d., stosownie do ich mnieyszéy lub większéy długości.

Końce linii nazywamy *Punktami*; końce więc cala, ćwierci stopy, łokcia i t. d, są *punktami*; końce *długości*, *szerokości*, lub *podstawy i wysokości* prostokąta są *punktami*; końce także *krawędzi* kwadratu i równoległościanu są *punktami*.

Punkt więc iest mieyscem gdzie się liniia zaczyna lub kończy; na przykład

A iest *punktem* i B *punktem*; bo na A liniia zaczyna się, na B kończy się. (Figura 1.

Miara więc odległości dwóch punktów iest liniia prosta, która ie łączy, więc liniia prosta iest naykrótszą drogą między dwoma punktami.

I. Zagadnienie.

Wykreślić liniią między dwoma punktami A, B. (Fig: 2.)

Rozwiązanie. Przyłoż liniiał, czyli iak mówią Rzemieślnicy, prawidło do dwóch punktów A, B; potém prowadź liniią ołówkiem lub piórkiem.

Uwaga. Jeżeli się chcesz przekonać, czy prawidło lub liniiał iest dobry, doświadczysz tego tak:

Poprowadziwszy liniią od A ku B, przewróć liniiał i przyłoż do A koniec liniiału, który był przy B; potém pociąguiy liniią. Jeśli druga liniia przykryie zupełnie piérwszą, tak, że te dwie liniie uczynią tylko iednę, prawidło będzie dobre:

Więc od punktu do punktu iednę tylko liniią prowadzić można.

Na ziemi poprowadzisz liniią tak:

Jeżeli odległość nie zbyt iest wielka *np*: w ogrodzie robiąc zagony, wyciągniesz sznurek od iednego punktu do drugiego. Końce sznurka utwierdź kołkami w punkłach; potem wedle sznurka zrobisz kiykiem rowek. Ten rowek pokaże liniią prostą lub drogę naykrótszą między dwoma punktami.

Pytanie. 1. Jak Pilarze naznaczaią liniie na klocu, maiąc rżnąć bale, deski, łaty lub ryglowkę?

2. Jak Mularze prowadzą liniią, wynosząc mur coraz wyżey?

3. Jak znowu wyciągaią liniią, muruiąc wzdłuż, aby mogli cegłę układać w iednym kierunku?

Na te pytania staray się sam odpowiedzieć; następuiące także rozwiąż zagadnienia.

Zagadnienie 2.

Przedłużyć liniią A B *np:* do punktu C na papierze lub na ziemi? (Fig: 3.)

Zagad: 3. Dowiedzieć się, ile liniia iaka zamyka miar, czyli cali, ćwierci, stop i t. d; lub też, iak wymierzysz liniią iaką na papierze, biórku w pokoiu, lub na ziemi.

Zagad: 4. Co iest mierzyć liniią?

Uwaga. Zrobisz pręt drewniany i podzielisz go na stop 15, maiąc czas wolny, wymierzysz długość, szerokość i wysokość pokoiu, domu; wymierzysz także długość i szerokość dziedzińca, ogrodu, i t. d. Wprawisz się nieznacznie w coraz dokładnieysze mierzenie, a nawet przywykniesz do sądzenia o odległościach za pierwszém rzutem oka; prócz tego przyzwyczaisz się wcześnie do takiey zabawy, która ruch ciała z pożytecznémzatrudnieniem duszy łączy, o co się zawsze starać powinieneś.

§ 2.

Dotąd mówiliśmy o iednéy tylko linii; weźmy teraz dwie i porównywaymy ie z sobą.

O dwóch liniiach iednakowo długich mówimy, iż są równe. Takowe liniie, gdy iednę na drugą przeniesiemy, przykryią sie zupełnie czyli, *przystaną do siebie.*

Niechby *np*: liniia AB była równa linii CD. (Fig: 4.)

Przenieśmy CD na AB tak, iżby punkt C padł na A. Ponieważ te dwie liniie są równe; więc D padnie na B.

Odwrotnie.

Jeśli dwie liniie przykryią się zupełnie, czyli przystaną, liniie te będą równe.

Prawdę tę znaią nayprostsze kobiety. Gdy maią kupić płótna lub wstążek, a łokieć kupca wydaie im się bydź zakrótki, porównywaią swóy łokieć z łokciem kupca. Na ten koniec przykładaią początek swego łokcia do początku łokcia kupieckiego; łokieć swóy przenoszą na kupiecki. Jeśli koniec pierwszego przypadnie na koniec drugiego, łokcie będą równe.

W tym przypadku względu nie mamy na szerokość i grubość łokci, równie iak podróżny względu nie ma na szerokość drogi, tylko na długość i iednostayny *kierunek.*

W linii więc nie uważamy szerokości, ani grubości, tylko długość.

Uwaga. Do następuiącego Rozdziału nie przystąpisz, dopokąd poprzedzaiącego dokładnie nie obeymiesz, i iasno się z niego wytłumaczyć nie potrafisz. Wszystkiego zaraz doświadczay, co przeczytasz. Tak ucząc się, nie na dziś tylko uczyć się będziesz. Ołówek, liniiał i cyrkiel, o którym niżey, zawsze pod ręką bydź powinny, gdy tę xiążkę czytać będziesz. Na końcu każdego rozdziału, zbierz krótko, coś w nim czytał; poprzedzaiące Rozdziały zawsze powtarzay, a na końcu Xiążki powtórz krótko całą.

ROZDZIAŁ II.

O linii krzywey czyli o Okręgu Koła.

§ 3.

Widziałeś zapewne farfurki, talerze, koła u wozów, taczek i t. d.

Brzeg farfurki iest liniią krzywą, którą zowiemy *Okręgiem*. Dzwona koła składaią także *okrąg*.

Malarze na sufitach zwykli tym sposobem okrąg robić.

Wynalazłszy środek sufitu, utwierdzaią wnim gwóźdź na którym iest sznurek a na końcu sznurka maią ołówek. Sznurek mocno wyciągaią a ołówkiem kreślą *Okrąg*, oprowadzaiąc na około sznurek z ołówkiem.

Na tablicy lub stole podobnym sposobem wykreślisz okrąg. Na końcu sznurka miey kawałek kredy.

Niechby był okrąg ABCD. (Fig:5.) Mieysce to, które okrąg ogranicza, nazywa się *Kołem*; więc okrąg iest granicą koła, iak punkt granicą iest linii.

Punkt S, około którego sznurek obraca się, nazywa się *Srodkiem* koła.

Liniie SA, SB, SC, SD nazywaią się *Promieniami*.

Cóż więc iest promień?

Wszystkie promienie iednego koła są równe. Bo wszystkie punkta, które mogą bydź wzięte na okręgu koła, są iednakowo odległe od środka koła. Dla czego?

Okrąg kreśli się na papierze cyrklem. Koniec iedney nóżki cyrkla iest środkiem, a końcem drugiey nóżki zakreśla się okrąg; więc odległość końców nóżek cyrkla iest Promieniem.

§ 4.

Liniia przechodząca przez szrodek koła a kończąca się z obu stron na okręgu, nazywa się średnicą. CA iest srzednica; podobnież B D.

Z ilu promieni składa sie srzednica.

Dla czego wszystkie srzednice iednego koła są równe?

§ 5.

Każda środnica dzieli okrąg na dwie części równe.

Miey koło z papieru. Prowadź po niem średnicę C A i złóż koło podług téy średnicy. Wszystkie punkta części ABC przypadną na punkta CDA drugiey części; bo iak pierwsze tak drugie iednakowo są odległe od srzodka; więc część okręgu ABC równa iest cześci okręgu CDA *więc srednica dzieli okrąg na dwie części równe.* (Fig: 5.)

§ 6.

Część okręgu nazywa się *łukiem np:* A B C. (Fig: 6.)

Liniia idąca od iednego końca łuku do drugiego zowie się cięciwą *np*: C A.

Któraż cięciwa iest naywiększa? Która podwięzuie dwa łuki równe?

§ 7.

Część koła między łukami i cięciwą zowie się *Odcinkiem np*: A B C.

Która cięciwa robi dwa odcinki równe?

§ 8.

Jeśli dwa łuki ABC, DEF, zakreślone równym promieniem są równe, cięciwy AC, DF podwięzuiące te łuki będą równe. (Fig: 7.)

Przenieśmy łuk DEF na ABC. Łuki te są zakreślone równym promieniem; więc wszystkie punkta łuku DEF przypadną na punkta łuku ABC; że zaś łuki także są równe; więc końce D, F padną na końce A, C; więc cięciwa DF iest równa cięciwie AC; *więc łuki równe zakreślone rownym promieniem maią cięciwy równe.*

§ 9.

Odwrotnie, *Jeśli cięciwy AC, DF, dwóch łuków promieniem równym zakreślonych, są równe, łuki ich ABC, DEF będą równe.*

Jakoż przenieśmy cięciwę DF na AC. Te dwie liniie, będąc równe, przystaną do siebie; więc końce łuku DEF są na końcach łuku ABC; więc wszystkie punkta łuku DEF przypadną na punkta łuku ABC inaczey nie byłyby iednakowo odległe od srzodka koła; więc te łuki są równe.

Wnieśmy ztąd, *że kiedy łuki równym promieniem zakreślone są nierówne, ich cięciwy będą także nierówne.*

Odwrotnie, *Kiedy cięciwy łuków równym promieniem zakreślonych są nierówne, ich łuki będą także nierówne.*

§ 10.

Zwykliśmy dzielić okrąg każdego koła na 360 łuczków równych, które zowiemy *stopniami*, kazdy stopień dzielimy na 60 *minut*, każdą minutę na 60 *sekund*. Łuk zamykaiący *np*; 8 stopni, 16 minut, 20 sekund piszemy tak 8°, 16', 20".

ROZDZIAŁ III.

O Liniiach przecinaiących się.

§ 11.

W prostokącie ABCD liniia AD (Fig:8) iest prostopadłą do AB, podobnież AD iest prostopadłą do DC; DC do CB; nakoniec CB do AB i wzaiemnie. To znamy z nauki rachunkowey.

Nachylenie takowe prostopadłe dwóch liniy do siebie nazywamy *kątem prostym.*

Więc w prostokącie mamy kątów prostych cztery.

Pierwszy kąt prosty iest DAB czyli A.

2gi kąt prosty iest ADC czyli D.

3ci kąt prosty iest DCB czyli C.

4ty kąt prosty iest CBA czyli B.

Liniie czyniące kąt prosty nazywamy *Ramionami.*

Punkt, w którym się ramiona przecinaią, nazywa się wierzchołkiem kąta prostego.

Jle iest kątów prostych w kwadracie?

Za pomocą głosek iak ie będziesz czytał?

Sciany sześcianu ile zamykaią kątów prostych?

Jle zamykaią kątów prostych ściany Równoległościanu?

Rzemieslnicy używaią do rysowania kątów prostych lub przekonania się; czyli ściany stoią pod kątem prostym, narzędzia które nazywaią *Węgielnicą.*

Jest to kąt prosty, którego ramionami są dwie liniie żelazne.

§ 12.

Niechby był kąt prosty BAC. Gdyby

się ramie AB nachylało bardziéy ku C, i wzięło położenie linii AD; kąt DAC byłby mnieyszy od prostego. (Fig: 9.)

Takowy kąt DAC mnieyszy od prostego zowie się *Ostry*.

Czy na téy figurze iest ieszcze iaki kąt ostry?

Gdyby znowu ramie AB oddalało się od linii AC i wzięło położenie EA; kąt EAC stałby się większy od prostego. Takowy kąt EAC większy od prostego zowie się *roztwarty*.

Kąty ostre mogą bydź rozmaite, podobnież i kąty roztwarte.

§ 13.

Kąty tylko proste zawsze są równe; ztąd *mogą do siebie przystać*.

Jakoż niech będą kąty proste BAC, DEF. (Fig: 10.)

Przenieśmy kąt DEF na BAC, tak iżby wierzchołek E padł na A, a ramie EF żeby szło po AC.

Gdyby ED nie przykryło AB, poszłoby iak AG lub AK. W pierwszym przypadku byłby kąt prosty DEF równy ostremu GAC; w drugim kąt DEF byłby równy roztwartemu KAC, co bydź niemoże; więc ramie DE póydzie po AB; więc kąty proste przystaią do siebie.

Kąty ostre mogą także przystać, i kąty roztwarte, ale tylko wtedy, gdy są równe.

Jakże to pokażesz?

Znaią to dobrze cieśle i stolarze. Gdy pierwsi podłogę robią a drudzy kładą posadzkę, probuią naprzod węgielnicą, czy ściany nachylone są do siebie pod kątem prostym.

Jeśli znayduią kąt ostry lub roztwarty, używaią *Węgielnicy ruchomey*. Roztwieraią ią lub zwężaią, iak kąt ścian każe, potem tak otwartą węgielnicę przenoszą na deski lub tafle; prowadzą wzdłuż ramion liniie ołówkiem; podług tych linii zrzynaią ie. Tak zerżnięte przykładaią potem do kątów ścian.

§ 14.

Szukaymy teraz miary kątów, czyli sposobu mierzenia onych.

Niechby był dany kąt CDA. Wystaw sobie, że liniia CD obraca się koło punktu D, i w czasie obrotu punkt C *np:* łuk kreśli. (Fig: 11.)

Łuk CA tém większy będzie, im bardziey ramie CD oddali się od DA mnieyszy zaś łuk będzie, im bardziey się do do DA zbliży.

Jeżeli się więc kąt powiększa, powiększa się łuk zakreślony z wierzchołka iakby ze środka koła.

Jeżeli się kąt zmnieysza, zmnieyszy się łuk pod tymże warunkiem kreślony; ztąd bierzemy *łuk nakreślony z wierzchołka kąta iakby ze srzodka koła za miarę kąta.*

Jeśli *np:* łuk kąta zamyka 30° mówimy o kącie, że zawiera 30° czyli, że ten kąt można podzielić na 30 kącików, z których każdy ma za miarę łuczek, który iest 30tą częścią całego okręgu.

Obrawszy więcey punktów na DC, każdy nakreśli łuk, który się zaczyna lub kończy w tym samym czasie, iak łuk CA nakreślony przez C, i każdy z tych łuków tyle stopni zawiera, ile łuk CA; każdy więc z tych łukow może mierzyć kąt CDA; więc *wielkość kąta nie zależy od długości ramion, tylko od ich otwartości.*

§ 15.

W kole ABCD (Fi: 12.) widzimy cztery kąty proste. Każdy z nich ma za miarę czwartą część okręgu czyli 90°; więc kąt ostry zamyka mniey niż 90° a kąt roztwarty więcey niż 90°; kąty zaś dwa proste zawieraią 2 × 90° czyli 180°.

Uwaga. Staray się o półkole mosiężne podzielone na 180°. Nazywa się *Ką-*

tomiarem. Nakreśl rozmaite kąty i mierz ie za pomocą kątomiaru. Jeżeliś dobrze obiął, co dotąd było, łatwo potrafisz tego narzędzia użyć.

§ 16.

Liniia DB czyni z AC dwa kąty, które się nazywaią *przyległemi.* (Fig: 13.)

Jak będziesz czytał te kąty?

Kąty przyległe zamykaią tyle stopni, ile ich dwa kąty proste maią,

Z punktu B nakreśl promieniem *np:* AB półokrąg na AC iakby na srednicy.

Kąt ABD ma za miarę łuk AD; kąt zaś DBC ma za miarę łuk DC. Więc obadwa maią za miarę półokręgu; więc obadwa zamykaią tyle stopni, ile ich dwa kąty proste maią.

Jeżeli kąty przyległe są równe, cóż o nich twierdzić można?

§ 17.

Kąty DBC, ABE są *wierzchołkiem przeciwległe.* (Fig: 13.)

Czy ich iest więcey na téy figurze?

Kąty wierzchołkiem przeciwległe są sobie równe, *np*: ABE = DBC.

Kąty EBA, ABD są przyległe; więc ich sumich summa równa się summie dwóch kątów prostych.

Kąty znowu ABD, DBC są przyległe; więc także ich summa równa się summie dwóch katów prostych.

Więc odiąwszy od tych dwóch summ równych kąt ABD, zostaną reszty ABE DBC równe; więc *Kąty wierzchołkiem przeciwległe* ABE, DBC *są równe*.

§ 18.

Wnieść ztąd można, że cztery kąty które czynią dwie liuiie przecinaiące się zawieraią 360° a w powszechności wszystkie kąty koło punktu iakiego czynią zawsze cztery kąty proste.

Zagadnienie. Danemu kątowi BAC zrobić równy przy punkcie D na linii DE. (Fig: 14.)

Rozwiązanie. Promieniem *np:* AK z wierzchołka danego kąta zakreślam łuk KJ zawarty między ramionami kąta; potém prowadzę cięciwę KJ.

Promieniem znowu AK zakreślam z punktu D na linii DE łuk HG nieograniczonéy długości. Nakoniec biorę cięciwę JK w cyrkiel i przenoszę ią na łuk HG z punktu H; poprowadziwszy linią DG będzie kąt GDH równy danemu; bo łuki KJ, HG są równe z przyczyny równości cięciw KJ, HG.

ROZDZIAŁ IV.

O Prostopadłych i Pochyłych.

§ 19.

Jeśli liniia AB ma dwa punkta A i B równo oddalone od dwóch iakich punktów C i D wziętych na linii OP, którą przecina, będzie AB do OP prostopadłą. (Fig: 15.)

Wszystkie punkta linii AB są w kierunku punktów A i B. Że zaś punkta A i B są równo oddalone od punktów C i D; więc wszystkie punkta linii AB są równo oddalone od punktów C i D; więc liniia AB nie nachyla się bardziey ku C iak ku D; więc kąty przyległe BAO, BAD są równe; więc są proste; zatem liniia AB iest prostopadła do OP.

Wniosek. Z Punktu wziętego na iakiey linii może bydź tylko iedna prostopadła wyprowadzona.

Wszelkie liniie EA, EC, ED wyprowadzone z punktu E, z którego spuszczona iest prostopadła do AD nazywaią się *pochyłemi* względem AD. (Fig: 16.)

§ 20.

Dwie pochyłe równo oddalone od prostopadłey są sobie równe, np: AB iest równa BC, pochyła AE będzie równa EC.

Dwa kąty proste EBA, EBC przystaną; że zaś BA = BC; więc punkt C przypadnie na A; więc punkta E, C są na punktach E i A; więc pochyła EC iest równa pochyłey EA.

§ 21.

Z dwóch pochyłych EC, ED poprowadzonych do linii AD do którey EB iest prostopadłą, daley leżąca ED od prostopadłey EB, iest dłuższa od EC.

Promieniem równym pochyłey EC, zakreślmy łuk CF z punktu E, więc pochyła EC równa iest linii EF; że zaś EF iest tylko częścią ED; więc iest mnieysza od ED, więc i pochyła EC iest mnieysza od ED; zatem pochyła ED daley leżąca od prostopadłey, iest dłuższa od pochyłey EC bardziey ku prostopadłey zbliżoney.

§ 22.

Odwrotnie. *Z dwóch pochyłych EC, ED, dłuższa oddalona iest bardziey od prostopadłey.*

Bo BC iest tylko częścią linli BD; więc BC iest mnieysza od BD; więc pochyła dłuższa ED bardziey iest oddalona od prostopadłey niż EC.

§ 23.

Jeśli dwie pochyłe są równe, będą także równo oddalone od prostopadłey, np: EA = EC będzie AB = BC.

Kąty proste EBA, EBC przystaną; więc AB póydzie po BC; ieżeli punkt A nie padnie na C, przypadnie przed C lub za C; w obudwoch przypadkach pochyłe EA, EC nie byłyby równe, co iest przeciw założeniu; więc punkt A padnie na C; więc AB = BC.

§ 24.

Ze wszystkich liniy prowadzonych z punktu iakiego do linii daney, prostopadła iest naykrótsza. (Fig: 17.)

Prostopadła BD ma bydź krótszą od BA lub BC.

Prostopadłą BD przedłużmy do E, tak żeby przedłużenie DE było równe BD i prowadźmy pochyłe EC, AE

Pochyłe BC, EC są równe. Pochyłe znowu AB, AE są równe; że zaś między punktami B i E naykrótszą iest drogą liniia BE; więc BE iest krótsza od summy linii BC, CE; także iest krótsza od summy linii AB, AE; więc połowa BE czyli BD iest krótsza od połowy summy linii BC, CE czyli od BC, i znowu BD iest krótsza od połowy summy linii BA, AE czyli od AB.

§ 25.

Wniosek. Od punktu iakiego do linii daney poprowadziwszy liniie proste, naykótsza z nich będzie prostopadłą, wszystkie zaś inne będą pochyłe.

§ 26.

Ponieważ prostopadła iest naykrótsza ze wszystkich liniy prowadzonych z punktu iakiego do linii daney; więc *z punktu wziętego za liniią można tylko iednę prostopadłą spuścić na liniią.*

Bo droga naykrótsza może bydź tylko iedna. Następuie ieszcze z tey prawdy że prostopadła iest prawdziwą miarą odległości punktu iakiego od linii daney.

§ 27.

Zagadnie: Z punktu C linii AB wynieść prostopadłą. (Fig: 18.)

Na linii AB szukam dwóch punktów D i E iednakowo odległych od C.

Potem z punktu D promieniem większym od połowy linii DE zakreślam łuk; z punktu E tenże przecinam tym samym promieniem. Punkt F łączę z punktem C. Liniia FC iest prostopadła. Dla czego?

§ 28.

Z punktu G spuścić prostopadłą na AB.

Szukam na linii AB dwóch punktów C i D równoległych od G. (Fig: 19.)

Od punktów C i D szukam punktu E równoległego. Punkt G i E łączę liniią GE. Ta iest prostopadłą do AB.

Tegoż spósobu możesz użyć do dzielenia linii na dwie równe części.

ROZDZIAŁ V.

O Liniiach Równoodległych.

§ 29.

Brzegi przeciwne stołów, ławek, tablic są *liniiami równoodległemi.*

Brzegi także teraznieyszych dróg bitych w niektórych mieyscach są *liniiami równoodległemi.*

Liniie więc równoodległe są te, które

się nigdzie spotkać nie mogą, choćby były naydaley przedłużone, więc żadnego z sobą kąta robić nie mogą; więc we wszystkich punktach odpowiadaiących sobie iednakowo są od siebie oddalone, więc *prostopadłe między równoodległemi są równe np:* w prostokącie dwie liniie przeciwne prostopadłe są równe między dwiema równoodległemi.

§ 30.

Wystawmy sobie, że liniia AB leży na CD. Prowadźmy prostopadłą EG do CD, oraz pochyłą FH.

Niech AB oddala się od CD równoodlegle. Wiakieykolwiek odległości będzie zostawała względem CD, zawsze EG musi bydź prostopadła do AB; kąt zaś JHB musi bydź rowny kątowi HFD.

Więc *kiedy liniia iaka iest prostopadłą do iedney z równoodległych, iest oraz prostopadłą do drugiéy.*

Nadto, *kiedy pochyła iaka przecina dwie równoodległe: kąty, pod któremi iest do nich nachylona, są równe, np:* JK przecina równoodległe AB, CD; kąty JHB, HFD są równe.

Te kąty nazywaią się *jednostronne* Liniia zaś JK zowie się *sieczną.*

Szukay więcéy kątów iednostronnych.

§ 31.

Kąty BHF, DFH nazywaią się *Wewnętrzne.*

Kiedy *liniie są równoodległe, kąty wewnętrzne równaią się dwom prostym.*

Kąty BHJ, BHF są przyległe więc ich summa równa się summie dwóch kątów prostych. (16)

Że zaś kąt JHB = HFD; bo są iednostronne z przyczyny liniy równoodległych AB, CD; więc i summa kątów BHF, DFH równa się summie dwóch kątów prostych.

§ 32.

Kąty BHF, CFH nazywaią się *Naprzemianległe.*

Kąty naprzemianległe są równe, gdy linie AB, CD są równo odległe więc kąty iednostronne JHA, HFC są równe.

Że zaś kąt JHA równy iest BHF bo są wierzchołkiem przeciwległe; (17) więc kąt BHF iest równy HFC.

§ 33.

Więc kiedy liniie są równoodległe.

1° *Kąty iednostronne są równe.*

2° *Kąty wewnętrzne czynią dwa proste.*

3° *Kąty naprzemianległe są równe.*

Odwrotnie. *Kiedy kąty iednostronne są równe, liniie są równoodległe.*

Kiedy kąty wewnętrzne czynią dwa proste, liniie są równoodległe.

Kiedy kąty naprzemianległe są równe, liniie są równoodległe.

Weźmy ostatni przypadek. Kąty naprzemianległe AHF, DFH są równe, liniie AB, CD będą równoodległe.

Kąt AHF = JHB; bo są wierzchołkiem przeciwległe.

Więc kąt JHB = JFD, że zaś te kąty są iednostronne więc liniie AB, CD są równoodległe.

Innych przypadków łatwo sam potrafisz dowieśdź.

Kąty zawarte między liniiami równoodległemi, maiące otwartość w iednę stronę, są równe.

Kąt A (Fig: 20:) druga ma bydź równy E, że ramiona AB, AC są równoodległe względem ED, EF.

Przedłużmy ramiona AC do J, ED do G.

Kąty iednostronne BAC, GHJ są równe.

Kąty także iednostronne GHJ, DEF są równe; więc kąt A = E.

§ 34.

Zagadnienie. Przez punkt C poprowadzić liniią równoodległą od AB (Fig: 21).

Rozwiązanie. Od punktu C prowadź liniią w którąkolwiek stronę ku AB. Zrób potem przy C albo kąty iednostronne równe, albo naprzemianległe równe i t. d. wtedy liniia idąca przez C będzie równoodległą od AB.

Naykrótszy sposób iest spuścić prostopadłą od C do AB; potem do tey prostopadłéy wynieść drugą prostopadłą. Ta będzie równoodległą od AB.

Na ziemi używa się zawsze tego sposobu.

ROZDZIAŁ VI.

O Liniiach przecinaiących okrąg koła.

§ 35.

Liniia ST, która się dotyka okręgu koła nie przecinaiąc go, nazywa się *styczną.* Liniia zaś AB przecinaiąca okrąg zowie się *Sieczną koła.* (Fig: 22)

Styczna ma tylko ieden punkt spólny z okręgiem.

Gdyby Styczna mogła mieć dwa punkta spólne z okręgiem, możnaby do nich promienie prowadzić.

Spuściwszy potem prostopadłą ze środka koła do styczney; ta prostopadła między dwoma promieniami iuż prowadzonemi byłaby promieniem krótszym od pierwszych, co bydź nie może; (24) więc *Styczna dotyka się tylko w iednym punkcie okręgu koła, a wszystkie inne punkta ma za okręgiem.*

§ 36.

Promień prowadzony do punktu dotknięcia się styczney z kołem, iest do niey prostopadły. (Fig: 22.)

CD iest prostopadły do ST. Bo wszystkie punkta stycznéy są za okręgiem, wyiąwszy punkt dotknięcia się D; więc promień CD, który łączy śrzodek koła z punktem dotknięcia się, iest naykrótszy ze wszystkich liniy, które ze środka prowadzić można do styczney; więc iest prostopadły do styczney. (25)

§ 37.

Linia ST prostopadła do promienia iest styczną. (Fig: 22)

Promień CD iest miarą odległości D do C, (1) więc iest naykrótszy ze wszystkich linii CE, CF; więc wszystkie punkta E, F, są za okręgiem; więc ST dotyka się tylko w iednym punkcie D okręgu; więc prostopadła do promienia iest styczną.

Więc chcąc prowadzić styczną, maiąc punkt dany na okręgu, dosyć iest do tego punktu prowadzić promień, potem do końca promienia wyprowadzić prostopadłą. Ta będzie styczną z kołem.

§ 38.

Prostopadła do styczney wyniesiona z punktu dotknięcia przechodzi przez środek koła.

Gdyby ta prostopadła nie przechodziła przez środek koła, możnaby drugą wynieść. Wtedy byłyby dwie prostopadłe z iednego punktu wyprowadzone, co bydź nie może, (19) więc prostopadła wyprowadzona do styczney z punktu dotknięcia iest promieniem.

§ 39.

Prostopadła DE wyprowadzona ze środka E cięciwy AB, przechodzi przez środek koła i przez środek łuku ADB, który cięciwa AB podwięzuie. (Fig: 23)

Liniia DE lub DS będąc prostopadłą do AB, przechodzi przez wszystkie punkta iednakowo odległe od A i B; (19) że zaś środek koła iest równo oddalony od A i B; więc DS przezeń przechodzi.

Punkt D na prostopadłey iest także

równo oddalony od końców cięciwy; więc D iest środkiem łuku ADB, więc prostopadła i t. d.

§ 40.

Wnieśmy ztąd, że środek cięciwy, środek iey łuku i środek koła są na linii prostopadłey do cięciwy. Że zaś z punktu tylko iednę prostopadłą wyprowadzić można; więc promień prostopadły do cięciwy dzieli ią na dwie równe części, tudzież łuk, który podwięzuie.

§ 41.

Łuki iednego koła zawarte między cięciwami równoodległemi, są równe. (Fi: 24.)

Promień EF prostopadły do cięciw równoodległych AB, CD dzieli łuki AFB, CFD na dwie równe części; więc łuk AF iest równy łukowi FB; także łuk CF iest równy łukowi FB; więc i ich różnice AC, BD są równe: więc łuki i t. d.

§ 42.

Zagad: Podzielić kąt na dwie równe części. (Fig: 25.)

Rozwiąza: W kącie BAC zakreślam iakimkolwiek promieniem łuk zawarty między iego ramionami. Ten łuk iest miarą tego kąta. Do cięciwy łuku wyprowadzam z zwierzchołka prostopadłą. Ta przedłużona podzieli łuk, a zatem i kąt na dwie równe części.

Dzieląc znowu każdą połowę na dwie i t. d., podzielisz kąt na 4, 8, 16 i t. d, części równych.

§ 43.

Zagad: Przez trzy punkta nie w linii prostéy dane nakreślić okrąg koła. (Fig: 26.)

Trzy punkta A, B, C łączę liniiami. Ze środków ich wyprowadzam dwie prostopadłe. Punkt przecięcia się onych będzie srodkiem koła żądanego. Tym samym sposobem możesz znaleśdź srzodek iakiego koła.

ROZDZIAŁ VII.

O miarze kątów na okręgu, za okręgiem i t. d.

§ 44.

Kąt zawarty między styczną AB i cięciwą BC nazywa się *kątem odcinka.* (Fig: 27.)

Kąt odcinka ma za miarę połowę łuku, który cięciwa podwięzuie.

Kąt ABC ma mieć za miarę połowę łuku BC.

Prowadzę średnicę EF równoodległą od cięciwy BC; potem promień prostopadły SD do BC; także promień SB do styczney AB. Kąt ABS iest prosty; więc iest równy prostemu DSE.

Że zaś CBS iest równy BSE; bo są naprzemianległe; więc kąt ABC iest równy DSB; że zaś DSB ma za miarę łuk DB, więc kąt odcinka ma za miarę połowę łuku, który cięciwa podwięzuie. (39.)

§ 45.

Kąt maiący wierzchołek na okręgu ma za miarę połowę łuku, na którym stoi.

Kąt ATB ma za miarę połowę łuku AB. (Fig: 28.)

Prowadźmy styczną ST. Kąt odcinka STB ma za miarę połowę łuku TAB (44). Podobnież kąt odcinka STA ma za miarę połowę łuku TA więc ich różnica czyli kąt ATB ma za miarę połowę łuku AB.

Wnieśmy ztąd: 1°. Że kąt, ATB maiący wierzchołek na okręgu iest połową kąta ACB maiącego wierzchołek w środku, a ten sam łuk obeymuiącego.

2º. Że kąty w iednym odcinku ACB, ADB są równe. (Fig: 29.)

3º Że kąty w półkolu są proste, *np*: ABD, ADC. (Fig: 30.)

§ 46.

Kąt maiący wierzchołek między środkiem i okręgiem ma za miarę połową łuku, na którym stoi, więcéy połowę łuku, który ramiona przedłużone zawieraią. (Fig; 31.)

Kąt ABC ma mieć za miarę połowę łuku AC i połowę łuku ED.

Przedłużmy liniią AC do D, CB do E i prowadźmy cięciwę DF równoodległą od BC.

Kąt ADF równy, iako iednostronny, kątowi ABC ma za miarę połowę łuku AF, czyli połowę łuków AC i CF, że zaś łuk CF równy iest łukowi ED; bo są między cięciwami równoodległemi; (41) więc kąt ABC ma za miarę połowę łuku AC i ED.

§ 47.

Kąt maiący wierzchołek za okręgiem ma za miarę połowę łuku, na którym stoi, mniey połową łuku, za którym iest wierzchołek. (Fig: 32.)

Kąt ABC

Kąt ABC ma mieć za miarę połowę łuku AC mniey połową ED.

Prowadźmy DF cięciwę równoodległą od AB.

Kąt ABC równy iest FDC; bo są iednostronne.

Że zaś FDC ma za miarę połowę łuku FC; więc ABC ma za miarę połowę łuku FC mniey połową łuku AF lub ED. (41)

§ 48.

Z tego łatwo wnieść można że kąt ABE (Fig: 33.) ma za miarę połowę łuku AFD mniey połową łuku CD; tudzież że kąt ACE (Fig: 34.) ma za miarę połowę łuku BFD mniey połową łuku BD.

ROZDZIAŁ VIII.

O Wielokątach, tudzież o miarze ich kątów.

§ 49.

Mieysce, które liniie proste przecinaiące się ograniczaią, nazywa się *Wielokątem*. Liniie w wielokątach nazywamy *Bokami*.

Wielokąt naymnieyszą liczbę boków maiący iest Troykąt.

W tróykącie ABC postrzegamy trzy boki AB, BC, CA i trzy kąty A, B, C. (Fig: 35.)

Summa kątów A, B, C równa się dwom kątom prostym.

Przedłużmy bok AC *np:* do D i prowadźmy równoodległą CE od AB. (34) Kąt ECD = A; bo są iednostronne. Kąt BCE = B; bo są naprzemianległe; więc kąt BCD równy iest kątom A i B; że zaś BCD ze swoim przyległym BCA czyni dwa kąty proste; więc *trzy kąty tróykąta czynią dwa kąty proste.*

Kąt BCD nazywa się *Zewnętrzny* względem tróykąta ABC.

Wnieśmy ztąd, że *kąt zewnętrzny tróykąta równa się dwom wewnętrznym na przeciwko niego leżącym*; więc *od któregokolwiek z nich iest większy.*

§ 50.

Ponieważ w każdym tróykącie trzy kąty czynią dwa proste; więc kiedy ieden kąt w tróykącie iest prosty, dwa drugie muszą bydź ostre. Tróykąt maiący kąt prosty, nazywa się *Prostokątny.*

Kiedy w tróykącie ieden kąt iest roztwarty, dwa inne muszą bydź ostre. Tróykąt maiący kąt roztwarty nazywa się *roztwartokątny.*

Tróykąt maiący kąty trzy ostre nazywa się *ostrokątny.*

W tróykącie maiąc wiadome dwa kąty, będzie wiadomy i trzeci iako czyniący z dwoma wiadomemi dwa kąty proste.

§ 51.

Wielokąt maiący cztery boki nazywa się *Czworokątem.* Prostokąt więc i Kwadrat należą do czworokątów.

Wielokąt maiący pięć boków nazywa się *Pięciokątem*, maiący sześć boków nazywa się *Sześciokątem i t. d.*

Koło można uważać za wielokąt którego liczba boków iest bez granic wielka.

§ 52.

W wielokącie przeciągnąwszy boki w iednę stronę, kąty za nim tworzące się nazywaią się *zewnętrznemi, np*: w pięciokącie przedłużmy AB do G, BC do H, CD do J, DE do K, EA do F. Kąty zewnętrzne są GBC, HCJ, JDK, KEF i t. d. (Fig: 36.)

W każdym wielokącie summa kątów zewnętrznych czyni cztery kąty proste.

W pięciokącie ABCDE obierzmy gdziekolwiek punkt S i z niego prowadźmy liniie równoodległe od boków wielokąta SL od BG, SM do CH i t.d.

Kąty między równoodległemi zawarte są równe, (33) *np:* $a = a$, $b = b$, $c = c$ i t. d.

Że zaś kąty koło punktu S ważą cztery kąty proste, więc kąty zewnetrzne wielokąta czynią cztery kąty proste.

§ 53.

W każdym wielokącie summa kątów wewnętrznych równa się summie dwóch kątów prostych tyle razy powtorzoney, ile wielokąt ma boków, mniey czterema.

np. W pięciokącie wewnętrzne kąty są EAB, ABC, BCD, CDE, DEA. Boków iest 5, ta liczba podwoiona czyni 10. Odiąwszy 4, zostanie 6. Otóż summa kątów wewnętrznych czyni 6 kątów prostych.

W każdym wielokącie poprzedłużawszy boki w iednę stronę spostrzeżemy tyle par kątów przyległych, które składaią kąty wewnętrzne z zewnętrznemi, ile wielokąt ma boków.

Każda para czyni dwa kąty proste, więc wszystkie czynią tyle kątów prostych, ile iest boków dwa razy wziętych.

Że zaś kąty zewnętrzne każdego wielokąta równaią się czterem kątom prostym; więc summa wewnętrznych równa się summie dwóch kątów prostych tyle razy powtórzoney ile wielokąt ma boków mniey czterema.

§ 54.

Wielokąt maiący boki i kąty równe nazywa się *foremny*, wszystkie inne nazywaią się *nieforemne*.

W wielokątach nieforemnych możemy wiedzieć w powszechności, ile kąty wewnętrzne, lub zewnętrzne czynią kątów prostych.

W foremnych zaś możemy nadto dowiedzieć się, ile każdy kąt w szczególności czy zewnętrzny czy wewnętrzny czyni kątów prostych *np:*

W pięciokącie foremnym kąt wewnętrzny ile czyni kątów prostych?

Kąty wewnętrzne pięciokąta zamykaią sześć kątów prostych; więc ieden iest piątą częścią 6ściu kątów prostych czyli $\frac{5}{6}$ iednego kąta prostego. Szukay stopni.

Podobnież doydziesz ważności kąta zewnętrznego.

Chcąc doyśdź ważności kąta wewnętrznego z ważności zewnętrznego, postąpisz tak. Kąt zewnętrzny pięciokąta ma $\frac{4}{5}$ kąta prostego, że zaś zewnętrzny z wewnętrznym zamyka dwa kąty proste; więc odiąwszy $\frac{4}{5}$ od 2 kątów prostych czyli od

$\frac{10}{5}$ reszta $\frac{6}{5}$ pokaże wartość kąta wewnętrznego.

Naodwrot z ważności kąta wewnętrznego możesz doyśdź ważności zewnętrznego.

Więcey wielokątów zadaway sobie i czterema wspomnionemi sposobami szukay ważności kątów.

ROZDZIAŁ IX.

O Tróykątach.

§ 55.

Dane są dwa Tróykąty ABC, DEF. (Fig: 37.)

Wtych gdy bok AB = DE, bok BC = EF, i kąt B zawarty między bokami AB, BC równy iest kątowi E zawartemu między bokami DE, EF.

Trzeba pokazać, że bok AC będzie równy bokowi DF, kąt A będzie równy kątowi D a kąt C = F, czyli że te tróykąty przykryią się zupełnie, czyli że przystaną.

Przenieśmy w myśli tróykąt ABC, na DEF, tak żeby punkt B padł na E, bok BA żeby szedł po ED; ponieważ mu iest równy z założenia; więc punkt A padnie na D.

Kąt B równy iest z założenia kątowi E, a bok BA iuż leży na ED; więc bok BC póydzie po EF; ażе mu iest równy z założenia; więc punkt C padnie na F.

Punkta A i C są na punktach D i F; więc AC = DF i leży na nim.

Boki BA, AC są na bokach ED, DF więc kąt A = D. Boki BC, CA są na bokach EF, FD; więc kąt C = F.

Więc dwa tróykąty maiące dwa boki względnie sobie równe i kąt między niémi zawarty równy, przystaną do siebie.

Jeżeli ci to rozumowanie trudność robi, wyrżniy z papieru takowe tróykąty i następnie pomału zastanów się nad każdą rzeczą. Lecz zdaie mi się, że po tylu iuż rozumowaniach rozdział ten trudności wiele sprawić ci nie powinien.

§ 56.

W tróykącie ACB (Fig. 38) zakładam, że bok AC = BC. Trzeba dowieśdź, że kąt B będzie równy A.

Bok CA przedłużmy do D a CB do E, lecz tak, żeby przedłużenie AD było równe BE.

Prowadźmy ieszcze linii DB; AE. Zastanowmy się teraz nad tróykątami DCB, CAE.

Bok CD w tróykącie CBD = bokowi CE w tróykącie CAE częścią z założenia, częścią z przedłużenia.

Bok CB tróykąta CBD równy iest bokowi CA tróykąta CAE z założenia. Nadto kąt C zawarty między bokami DC, CB równy iest kątowi C zawartemu między bokami CA, CE: czyli kąt C iest spólny tym dwom troykątom, więc te troykąty przystaną do siebie podług poprzedzaiącey prawdy czyli twierdzenia; więc bok DB = EA, i kąt D = E.

Weźmy teraz tróykąty ADB, ABE.

Bok AD = BE z przedłużenia. Bok DB = AE z dowodzenia i kąt D = E; więc te tróykąty przystaią; więc kąt BAD = ABE.

Kąty BAD, BAC są przyległe; więc ich summa równa summie dwóch kątów prostych.

Kątów podobnież ABC, ABE summa równa się dwom prostym.

Że zaś BAD = ABE; więc CAB = CBA.

Więc kiedy w tróykącie dwa boki są równe, kąty przeciwne bokom równym są równe.

Tróykąt maiący dwa boki równe nazywa się *równoramienny*.

§ 57.

W tróykącie ABC bok BC (Fig: 39) iest większy od BA; wniesiemy ztąd, że kąt A przeciwny większemu bokowi BC, będzie większy od C przeciwnego mnieyszemu AB.

Bok mnieyszy BA przenieśmy na większy BC od B, prowadźmy AD.

Tróykąt ABD iest równoramienny; więc kąt BAD = BDA. Kąt BDA iest zewnętrzny względem tróykąta DAC; więc iest większy od kąta C (49) więc i kąt BAD iest większy od C; więc tem bardziey cały kąt A iest większy od C.

Więc *w tróykącie kąt na przeciwko boku większego leżący większy iest od kąta leżącego naprzeciwko boku mnieyszego.*

Kiedy w tróykącie trzy boki są równe, będą trzy kąty równe.

Tróykąt maiący trzy boki równe nazywa się *równoboczny.*

§ 58.

Zagad: Maiąc dane dwie linije BA, BC, i kąt ABC zrobić tróykąt tak aby boki dane obeymowały kąt dany. (Fig: 40.)

Na ramie AB Kąta ABC przenoszę liniią BA, na ramie BC przenoszę liniią BC. Punkta A i C łączę liniią AC. Tróykąt ABC czyni warunkom zadosyć.

§ 59.

Zagad: Maiąc dane dwie liniie różney długości wystawić tróykąt równoramienny tak aby bok większy był iednym z dwóch równych boków tróykąta. (Fig: 41.)

Liniią dłuższą biorę za *podstawę*. Tak nazywamy bok, na którym tróykąt stoi.

Potém drugą liniią zakreślam z końców boku większego dwa łuki, punkt ich przecięcia łączę z końcami podstawy, tróykąt ten będzie równoramienny.

Uwaga. Dla wyznaczenia tróykąta trzeba żeby summa dwóch boków była większa od trzeciego. (1)

Maiąc daną iednę liniią iak wystawisz tróykąt równoboczny?

§ 60.

(Fig: 42.) Gdy w dwóch tróykątach ABC, DEF, bok AC = DF, kąt A = D i kąt C = F.

Dowiedziemy że iest także bok AB równy DE, bok BC = EF i kąt B równy E.

Tróykąt ABC przenieśmy w myśli na tróykąt DEF, tak aby punkt A padł na D i liniia AC, aby szła po DF, ponieważ iéy iest równa z założenia; więc punkt C padnie na F.

Kąt A z założenia iest równy kątowi D; więc bok AB póydzie po DE.

Kąt C = F z założenia; więc bok CB póydzie po FE.

Boki AB; BC są na bokach DE, EF więc punkt przecięcia się pierwszych padnie na punkt przecięcia się drugich czyli B iest na punkcie E.

Ponieważ punkt A iest na D, punkt B na E; więc bok AB = DE.

Punkt C iest na F, punkt B na E więc bok BC = EF.

Nadto boki AB, BC są na bokach DE, EF; więc kąt B = E.

Więc *dwa tróykąty przystaną, gdy maią po iednym boku równym i po dwa kąty przy nim leżące równe.*

§ 61.

Gdy w tróykącie ACB kąt A = B; dowiedziemy, że bok CB iest równy AC, czyli że ten tróykąt iest równoramienny. (Fig: 38.)

Bok AC przedłużam do D a CB do E, iżby przedłużenie BE było równe AD.

Kąty CAB, BAD są przyległe. Podobnież kąty CBA, ABE są przyległe.

Że zaś kąt CAB = CBA z założenia; więc BAD = kątowi ABE.

Prowadźmy teraz liniie DB, AE. Uważmy tróykąty ADB, BAE. Bok AD = BE z przedłużenia. Bok AB = AB czyli iest spólny. Nadto kąt DAB = ABE, więc te tróykąty przystaią; (55) więc kąt D = E, kąt BAE = ABD i bok DB = AE.

Uważmy teraz tróykąty CBD, CAE. Bok DB = AE z dowodzenia. Kąt D = E; nakoniec kąt CBD = CAE częścią z założenia, częścią z dowodzenia; więc te tróykąty przystaią podług poprzedzaiącego twierdzenia; więc bok CD = CE. Że zaś AD = BE z przedłużenia; więc AC = CB.

Więc *gdy tróykąt ma dwa kąty równe, iest równoramienny.*

§ 62.

(Fig: 43.) W tróykącie ACB kąt B iest większy od A; wniesiemy ztąd że bok AC leżący naprzeciwko większego kąta B będzie większy od CB leżącego na przeciwko mnieyszego kąta A.

Prowadźmy liniią BE z AB czyniącą kąt EBA równy A; (18 Zagad:) więc AE = BE.

Summa liniy BE i EC iest większa od BC; bo między dwoma punktami B i C liniia prosta naykrótszą iest drogą. (1)

Że zaś BE = AE; (61) więc i AC iest większa od BC.

Więc *w tróykącie na przeciwko kąta większego leży bok większy, a na przeciwko kąta mnieyszego leży bok mnieyszy.*

Gdy tróykąt ma trzy kąty równe iest równoboczny.

§ 63.

Zagad: Maiąc dane dwa kąty i linią, zrobić tróykąt tak, aby kąty dane były przyległe linii daney.

Linią daną biorę za podstawę przy końcach iéy kreślę kąty równe danym. Ten tróykąt uczyni warunkom zadosyć.

§ 64.

(Fi: 44.) Gdy w tróykątach ABC, DEF boki AB, DE są równe, tudzież BC = EF, AC = DF, dowiedziemy że przystaną do siebie, czyli że kąt A będzie = D, kąt B = E, kąt C = F.

Przenieśmy tróykąt DEF pod tróykąt ABC, tak iżby DF przykryło AC a DE wzięło położenie AG zaś EF położenie GC.

Prowadźmy BG.

Bok AB iest równy z założenia DE czyli AG; więc tróykąt ABG iest równoramienny; więc kąt ABG = AGB.

Podobnież BC = EF lub GC; więc tróykąt BCG iest równoramienny: więc kąt CBG = BGC.

Więc cały kąt ABC = AGC. Uważmy teraz dwa tróykąty ABC, AGC.

Bok AB = AG. Bok BC = GC. Kąt ABC = AGC, więc przystaią podług pierwszego przypadku; więc kąt BAC = GAC lub D, kąt BCA = ACG lub F. Kąt zaś B był z dowodzenia wyższego równy E; więc *dwa tróykąty przystaią, gdy trzy boki iednego są równe względnie trzem bokóm drugiego.*

Z trzech przypadków o przystawaniu tróykątów wnieśmy, że tróykąty, które przystaią, nie różnią się od siebie tylko położeniem mieysca.

§ 65.

Zagad: Maiąc dane trzy liniie zrobić z nich tróykąt różnoboczny. (Fig: 45.)

Naydłuższą AB biorę za podstawę. Potem promieniem równym BC zakreślam łuk z B. Promieniem równym AC przecinam łuk z A. Punkt C łączę z A i z B, i otrzymam troykąt żądany.

§ 66.

Tróykąt ABC przerysować. (Fig: 42) To zagadnienie troiakim sposobem rozwiązać można.

Albo 1. robię kąt równy któremukolwiek z trzech kątów i przenoszę na iego ramiona boki wziętego kąta.

Albo 2. biorę bok iakikolwiek tróykąta danego i przy nim przerysuię dwa iego kąty.

Albo nakoniec przerysuiesz tróykąt podług zagadnienia pod liczbą 65. We wszystkich trzech przypadkach dwa te tróykąty przystaną i mieyscem tylko od siebie będą się różniły.

§ 67.

Zagad: Danemu kątowi zrobić kąt równy na linii daney przy punkcie danym.

To zagadnienie iuż wyżéy rozwiązane było (18) Uważay, iaka różnica między dwoma temi sposobami będzie. (Fi:46.)

Na ramionach kąta BAC odcinam dwie części równe AF, AG.

Tym samym promieniem zakreślam łuk HJ z punktu D na linii daney. Liniią FG przenoszę na łuk HJ. Prowadzę potem liniie DJ, JH.

Dwa tróykąty AFG, DJH przystaną podług trzeciego przypadku; więc kąt D = A.

Zagad: Podzielić AB na dwie równe części. (Fig: 47.)

I to zagadnienie iuż było. (28)

Szukam dwóch punktów równoodległych od A i B z iedney i z drugiey strony linii AB.

Te dwa punkta są C, D. Liniia CD łącząca te dwa punkta podzieli AB w punkcie E na dwie równe części.

Poprowadźmy AC, CB, BD, DA. Uważmy tróykąty CAD, CDB. Bok AC = CB, bok AD = BD i bok CD = CD czyli iest spólny; więc kąt ACD = DCB.

Uważmy teraz tróykąty ACE, ECB. Bok AC = CB, bok CE iest spólny. Kąt ACE równy ECB, więc te tróykąty przystaią; więc AE = EB; więc AB przecięta iest przez CD w punkcie E na dwie równe częsci.

Zagad: Podzielić kąt na dwie równe części. (Fig: 48.)

I to zagadnienie było. (42)

Na ramionach kąta BAC odcinam liniie AD, AE równe. Od punktów D i E szukam trzeciego F równoodległego. Łączę wierzchołek kąta A z punktem F liniią AF. Liniia AF dzieli kąt na dwie równe części. Poprowadziwszy liniie DF, FE uważam troykąty DAF, AFE.

Boki trzy pierwszego są równe względnie bokom drugiego; więc przystaią; więc kąt DAF = FAC.

Rozdział X.

ROZDZIAŁ X.

O Wielokątach wpisanych w koło i na niém opisanych.

§ 68.

Wszełki tróykąt można kołem opisać. (Fig: 50.)

Wierzchołki trzy kątów tróykąta są trzema punktami nie w linii prostey będącemi. Aże przez takowe trzy punkta można zakreślić okrąg; (43) więc tróykąt można kołem opisać.

§ 69.

W tróykąt każdy można koło wpisać.

Dzielmy kąty A i B na dwie równe części. (42) (Fig: 51.) Z punktu S przecięcia się liniy BS, AS, spuśćmy prostopadłe do boków tróykąta SD, SE, SF. (28) Którakolwiek z tych może bydź promieniem koła maiącego się wpisać w tróykąt.

Uważmy tróykąty BSD, ESB. Przystaią. Bok BS iest spólny. Kąt SBD = EBS z roboty. Kąt D prosty = prostemu E. Że zaś trzy kąty tróykąta ważą dwa kąty proste; więc reszta w obudwu tróykątach musi bydź równa, czyli kąt BSD = BSE

(50) więc te tróykąty przystaią podług 2go przypadku; więc SD = SE, tym sposobem pokazać można że SE = SF, więc którąkolwiek z prostopadłych wziąwszy za promień i zakreśliwszy koło, okrąg będzie się dotykał boków tróykąta.

Uwaga. Kąt, który z dwomą innemi lub z iednym kątem spełnia dwa proste, nazywa się spełnieniem.

§ 70.

Wszelki wielokąt foremny można opisać kołem.

(Fi:52) Niech będzie Sześciokąt ABCDEF. Ten sześciokąt iest foremny; więc podzieliwszy kąty na dwie równe części liniiami ES, DS, CS i t. d, wszystkie tróykąty przystaną, *np*: EDS, FES. Bo bok FE = ED. Bok ES spólny. Kąt FES z podzielenia równy DES; więc wszystkie linie ES, DS, SC, i t. d. są równe, więc którąkolwiek wziąwszy za promień i z punktu S zakreśliwszy koło, okrąg iego przeydzie przez wszystkie wierzchołki wielokąta, więc każdy *wielokąt foremny można opisać kołem*.

Każdy bok w tym przypadku iest cięciwą łuku zawieraiącego tyle stopni, ile wypadnie z podzielenia 360° przez liczbę boków. (18)

np: Sześciokąt ma 6 boków. Podzieliwszy 360° przez 6, iloraz iest 60° więc bok sześciokąta iest cięciwą łuku zamykaiącego 60°; więc kąt przy środku sześciokąta waży 60°.

§ 71.

Bok Sześciokąta foremnego wpisanego w koło równa się promieniowi. (Fi:52)

Weźmy *np*: tróykąt SAB. Kąt przyśrodku ASB zamyka 60° (14) więc kąty SAB, SBA będąc spełnieniem do dwóch prostych zamykaią 120°.

Że zaś troykąt ASB iest równoramienny z przyczyny promieni AS, SB; więc kąty A i B są równe; więc każdy z nich zamyka po 60°.

Że więc trzy kąty S, A, B, są równe; więc tróykąt ASB iest równoboczny; więc AB = AS; więc *bok Sześciokąta foremnego. i t. d.*

Chcąc zatem sześciokąt w koło wpisać, dosyć iest promień koła 6 razy przenieść na okrąg i punkta liniiami połączyć.

§ 72.

Zagad: Łuk zamykaiący 90° (Fi: 53) podzielić na 3 części równe.

Promieniem AC zakreślam łuk CD

z punktu C. Łuk CD zamyka 60°; więc DB zawiera 30°.

Tym samym promieniem zakreślam łuk BE z punktu B. Łuk BE podobnież ma 60°; więc EC zawiera 30°; więc także DE zawiera 30°.

Jak wpiszesz w koło dane, tróykąt równoboczny, kwadrat?

§ 73.

W każdy wielokąt foremny można koło wpisać. (Fig: 54.)

Podzieliwszy kąty wielokąta na dwie równe części (42) liniiami AS, BS, CS, i t. d. i spuściwszy z punktu ich przecięcia się prostopadłe (28) SD, SE te wszystkie prostopadłe padną na środki boków wielokąta i będą między sobą równe (40) Bo wszystkie tróykąty ASD, SDB przystaną, więc którąkolwiek z prostopadłych wziąwszy za promień i zakreśliwszy koło, okrąg iego dotykać się będzie wszystkich boków wielokąta, a tém samem będzie wpisane koło w wielokąt foremny.

ROZDZIAŁ XI.

O wynaydowaniu powierzchni Wielokątów.

§ 74.

Wiemy iuż, że mieysce ograniczone

czterema liniiami przecinaiącemi się nazywa się czworokątem. (Fig: 55.)

Liniia łącząca wierzchołki przeciwne czworokąta lub wielokąta iakiego, nazywa się *Przekątną*.

Czworokąt zwykliśmy czytać przez przekątną; mówimy *np*: czworokąt AC lub DB.

Czworokąt maiący boki przeciwne równoodległe, nazywa się *Równoległobokiem*.

§ 75.

W równoległoboku boki przeciwne i kąty są równe. (Fig: 56)

Bok DC ma bydź równy AB, AD = BC.

Kąt D ma bydź równy B; kąt A = C.

Prowadźmy przekątną AC. Uważmy tróykąty ADC, CAB. Ponieważ z założenia ten czworokąt iest równoległobokiem; więc kąt DCA = CAB; bo są naprzemian ległe z przyczyny równoodległych DC, AB.

Boki także AD i BC są równoodległe więc kąt DAC = ACB. Nadto przekątna iest spólna obudwom tróykątom; więc te tróykąty przystaią podług 2go przypadku; (60) więc bok DC = AB, DA = CB. Kąt D = B, kąt A = C.

Wnieśmy ztąd, że *przekątna dzieli Równoległobok na dwa tróykąty, które mogą przystać do siebie.*

Że Równoległobok maiący kąt ieden prosty, ma wszystkie inne proste. Równoległobok maiący kąt prosty nazywa się *Prostokątem.* (Fig: 57.)

Że prostokąt maiący dwa boki przyległe równe, ma wszystkie równe. Takowy prostokąt nazywa się. *Kwadratem.* (Fig: 58)

Wszystkie te prawdy zasadzaią się na téy, że w czworokącie maiącym boki przeciwne równoodległe, *czyli że w Równoległoboku* boki przeciwne i kąty są równe.

§ 76.

Czworokąt maiący dwa boki przeciwne równe i równoodległe iest równoległobokiem. (Fig: 56.)

Czworokąt AC ma *np*: DC = AB i toż DC równoodległe od AB, trzeba pokazać, że AD będzie równe BC i równoodległe od BC.

Prowadźmy przekątną AC. Zważmy tróykąty ADC, ABC. Przekątną AC maią spólną, bok DC z założenia równy AB; że zaś także iest równoodległy; więc kąt

DCA = CAB; bo są naprzemianległe; więc te tróykąty przystaią podług 1go przypadku (55) więc AD = CB, także kąt DAC = ACB; że zaś te kąty są naprzemianległe; więc AD iest równoodległa od CB, więc czworokąt maiący dwa boki przeciwne równe i równoodległe iest Równoległobokiem.

§ 77.

Czworokąt maiący boki przeciwne równe, iest Równoległobokiem. (Fig: 56)

Bok DC z założenia = AB; bok AD = BC.

Trzeba pokazać, że te boki przeciwne będą równoodległe.

Prowadźmy przekątną AC. Zważmy tróykąty DCA, ACB. Trzy boki iednego są równe względem trzech boków drugiego; więc przystaią (64) więc kąt D = B. Kąt DCA = CAB; aże są na przemianległe; więc DC równoodległa od AB.

Także z przystania wypada, że kąt DAC = ACB: a że są naprzemianległe; więc AD iest równoodległa od BC: więc *czworokąt maiący boki przeciwne równe iest równoległobokiem.*

Czworokąt więc może bydź w trzech przypadkach równoległobokiem.

1. Gdy ma boki przeciwne równoodległe.

2. Gdy ma dwa boki przeciwne równe i równoodległe.

3. Gdy ma boki przeciwne równe.

§ 78.

Zagad: Maiąc dany kąt i dwie liniie zrobić Równoległobok.

Zagad: Maiąc daną liniią zrobić kwadrat.

Wszystkie te zagadnienia łatwo rozwiązesz, ieżeliś prawdy tu wyłuszczone dobrze obiął.

§ 79.

W równoległoboku i w tróykącie nazywamy bok, wzięty za ieden z wymiarów, *Podstawą*; liniią zaś prostopadłą spuszczoną z wierzchołka kąta przeciwnego na podstawę nazywamy Wysokością. (Fig: 59.) *np*: AD iest wysokością równoległoboku, także AD wysokością troykąta.

Gdy dwa równoległoboki stoią na iedney podstawie i są zakończone przez liniią równoodległą, mówimy o nich że maią równą wysokość, bo prostopadłe między równoodległemi są równe (29).

Podobnież o tróykątach mówimy, że *maią iednakową wysokość*, gdy stoią na spólney podstawie, a wierzchołki maią na równoodległéy od podstawy, bo między równoodległemi prostopadłe zawsze są równe.

§ 30.

Dwa równoległoboki (Fig: 60.) AC, AE maiące równe podstawy i wysokości, maią równe powierzchnie.

Podstawa AD = AD.

Przenieśmy równoległobok AE, na AC, tak iżby podstawa AD przykryła AD; ponieważ te równoległoboki maią równą wysokość; więc równoodległa FE weźmie położenie BC, i obie te liniie mieć będą iednakowy kierunek BFCE. (29.)

Teraz zważmy tróykąty ABF, DCE.

Bok AB = DC; bo są boki iednego równoległoboku AC. Z téy samey przyczyny AF = DE. (75)

Nadto kąty BAF, CDE są równe. Bo zawarte między równoodległemi, i maią otwartość w iednę stronę; (33) więc te dwa tróykąty przystaią podług 1go przypadku (55) więc ich powierzchnie są równe, czyli te mieysca płaskie, które boki tych tróykątów ograniczaią.

Dodawszy więc do tych tróykątów w szczególności czworokąt AFCD, zrobią się dwa równoległoboki AC, AE, zaymuiące iednakową rozległość mieysca, czyli maiące równą powierzchnią.

Więc *dwa równoległoboki maiące równe podstawy i wysokość maią powierzchnie równe.*

Może bydź troiakie położenie tych równoległoboków.

Na figurze 61 toż samo iest dowodzenie, co wyżey było.

Na fig: 62 troche iest odmienne, *np*: równoległobok AC ma bydź równy co do powierzchni równoległobokowi AD. Maią równą podstawę AB i wysokość.

Zważmy tróykąty DAE, CBD. Przystaią; bo dopełniaią warunków wyżéy wzmiankowanych.

Odiąwszy od obudwu tròykąt CGE a dodawszy tróykąt AGB, zrobią się równoległoboki AC, AD równe co do powierzchni.

Te prawdy bardzo się przydadzą w nauce o podziale gruntów, która w Jeometryi praktycznéy nazywa się *Geodezyą.*

§ 81.

(Fig. 63.) Tróykąt stoiący z równoległobokiem na iednéy podstawie AB, i maiący wierzchołek na linii równoodległéy od podstawy iest iego połową.

Od boku AE prowadźmy równoodległą BF aż do spotkania się z DC przedłużoną w punkcie F. (34)

Przekątna EB dzieli równoległobok AF na dwa tróykąty, które mogą przystać; (75) więc tróykąt AEB iest połową równoległoboku AF.

Że zaś równoległobok AF iest równy co do powierzchni równoległobokowi AC, (80) więc tróykąt AEB*iest połową równoległoboku AC, z którym ma równą podstawę i wysokość.*

Wnieśmy ztąd, *że tróykąty stoiące na iedney podstawie i maiące wierzchołki na równoodległéy od podstawy są równe co do powierzchni.* (Fig: 64.)

§ 82.

Powierzchnia prostokąta w miarach kwadratowych równa się iloczynowi podstawy przez wysokość.

(Fig: 65.) Niech *np:* wysokość AB prostokąta zamyka 3 cale, podstawa AC 7 cali, prostokąt ten da się podzielić na trzy prostokąty, z których każdy ma w wysokości cal 1. a w podstawie ma 7 cali liniiowych, więc w powierzchni ma 7 cali kwadratowych; więc trzy prostokąty maią 3 × 7 cali kwadratowych czyli, 21 calów kwadratowych.

Kwadratu powierzchnia tym samym sposobem wynaydzie się.

Równoległoboku powierzchnia wynaydzie się mnożąc wysokość czyli prostopadłą przez podstawę. Tróykąta powierzchnia wynaydzie się mnożąc wysokość przez podstawę i tego iloczynu biorąc połowę, lub też mnożąc połowę wysokości przez całą podstawę lub połowę podstawy przez całą wysokość.

Ten ostatni prypadek obiaśnia się na fig: 66.

§ 83.

(Fig: 67.) Powierzchnia czworokąta maiącego dwa równoodległe boki równa się iloczynowi z połowy równoodległych przez całą wysokość?

Ten czworokąt daie się dzielić na dwa tróykąty ADC, CAB, które między równoodległemi maią równą wysokość DE. (29)

Każdego tróykąta powierzchnia równa się iloczynowi z połowy podstawy przez wysokość DE; więć powierzchnia czworokąta tego równa się summie iloczynow $\frac{DC \times DE}{2}$ i $\frac{AB \times DE}{2}$

czyli $= \left(\frac{DC + AB}{2}\right) DE.$

§ 84.

Chcąc powierzchnią iakiego wielokąta nieforemnego wynaleśdź, trzeba wielokąt przez przekątne na tróykąty podzielić, każdego tróykąta w szczególności powierzchnią wynaleśdź, potem wypadki te dodadź. Summa ich okaże powierzchnią wielokąta danego.

§ 85.

(Fig: 68.) *Powierzchnia wielokąta foremnego równa się połowie iloczynu z obwodu przez prostopadłą spuszczoną ze środka iego na bok którykolwiek.*

Ze środka wielokąta S (70) poprowadziwszy liniie do wierzchołków, te podzielą wielokąt na tróykąty mogące do siebie przystać.

Każdego tróykąta powierzchnia równa się połowie iloczynu z podstawy przez wysokość SG; (83) więc powierzchnia cała, złożona z tych tróykątów, równa się połowie iloczynu z obwodu wielokąta przez prostopadłą spuszczoną ze środka na bok którykolwiek.

§ 86.

Koło iest wielokątem foremnym, którego obwód czyli okrąg składa się z bardzo wielkiey liczby boków. W takim wielokącie prostopadła spuszczona na bok którykolwiek nie różni się od promienia; więc powierzchnia koła równa się iloczynowi z połowy okręgu koła przez promień czyli równa się iloczynowi z połowy promięnia przez okrąg.

Uwaga. Tym czasem przestaniesz na tém dowodzeniu. Swego czasu zgłębiaiąc tę naukę, znaydziesz inne. Tu tylko staray się nabydź o powierzchni koła wyobrażenia dokładnego.

ROZDZIAŁ XII.

O Proporcyach tudzież o liniiach proporcyonalnych.

§ 87.

Z nauki rachunkowey znamy regułę trzech. Weźmy teraz iaki przykład i zastanówmy się nad nim pod innym względem.

Przykład. Za 3 jabłka dano 6 groszy; za 12 iabłek ile się da?

Jlość iabłek w drugim razię iest 4 razy większa; więc zapłacimy za nię 4 razy 6 groszy czyli 24 grosze. Mamy więc liczby 3, 6, 12, 24.

Widzimy tu, że, ile razy 3 mieści się w 6, tyle razy 12 mieści się w 24.

§ 88.

Gdy porównywamy dwie liczby z sobą, nie maiąc względu na ich znaczenie, abyśmy się dowiedzieli, *ile razy liczba iedna mieści się w drugiey*, nazywamy *takowe porównywanie stosunkiem np*: 3 i 6 iest stosunkiem, 12 i 24 iest stosunkiem.

Czytamy stosunek tak; 3 do 6, 12 do 24.

Widzimy ztąd, że stosunek iest tylko znakiem dzielenia, i na ten koniec daiemy dwie kropki między liczby *np*: 3:6; podobnież 12: 24.

Liczba 6 ma bydź dzielona przez 3, a 24 przez 12.

Widzieliśmy w Arytmetyce, że ułomek iest podobnież okolicznością dzielenia; mamy wiąc teraz drugą okoliczność dzielenia, którą nazywamy stosunkiem; więc *dzielenie. ułomek i stosunek iedno znaczą*. Liczby tylko w tych trzech działaniach pod innym uważane są względem, właśnie iak ramie, promień, cięciwa, średnica i bok, co do początku swego są tylko liniiami.

Cośmy w dzieleniu nazywali dzielnikiem, w ułomku mianownikiem, to w stosunku nazywamy *Poprzednikiem*.

Cośmy w dzieleniu nazywali podzielną, w ułomku licznikiem, to w stosunku nazywamy *Następnikiem*.

Jloraz dzielenia, lub wartość ułomku nazywamy w stosunku *Wykładnikiem*.

§ 89.

Stosunek pierwszy mieliśmy 3 : 6, drugi 12 : 24.

Obadwa maią za wykładnik 2.

O takich stosunkach mówić zwykliśmy, że są równe.

Dwa równe stosunki składaią proporcyą: Piszemy proporcyą tak 3 : 6 = 12 : 24. Czytamy ią tak:

Ma się 3 do 6, iak 12 do 24. Rozumiemy przez to, ile razy 3 mieści się w 6, tyle razy 12 mieści się w 24 czyli ma się poprzednik pierwszego stosunku do swego następnika, iak poprzednik drugiego stosunku do swego następnika. Poprostu wyrażamy to; wykładnik pierwszego stosunku równy iest wykładnikowi drugiego, czyli 2 = 2 czyli $\frac{6}{3} = \frac{24}{12}$; ztąd proporcya zwykła się ieszcze w kształcie dwóch równych ułomków wyrażać.

§ 90.

Czwarty wyraz w proporcyi nazywamy czwartym proporcyonalnym. Gdy

Gdy w proporcyi następnik pierwszego stosunku równy iest poprzednikowi drugiego, nazywamy takową proporcyą *Ciągłą* *np*: $3:6 = 6:12$.

Wyraz zaś śrzedni 6 nazywamy średnią proporcyonalną.

§ 91.

W proporcyi pierwszy i ostatni wyraz zowiemy *skraynemi* pozostałe dwa *średniemi*.

W każdéy proporcyi iloczyn z wyrazów skraynych równa się iloczynowi z wyrazów średnich.

W proporcyi $3:6 = 12:24$ ma bydź $3 \times 24 = 6 \times 12$.

Proporcyą daną wyraźmy tak:

$$\frac{6}{3} = \frac{24}{12}$$

Wiemy z Arytmetyki, że, mnożąc wyrazy ułomku przez iakąkolwiek liczbę wartości iego nie odmieniamy.

Wyrazy ułomku $\frac{6}{3}$ mnóżmy przez 12, Wypadnie $\frac{6 \times 12}{3 \times 12}$.

Wyrazy ułomku $\frac{24}{12}$ mnóżmy przez 3; wypadnie $\frac{3 \times 24}{3 \times 12}$

Te nowe ułomki są sobie równe, czyli $\frac{6 \times 12}{3 \times 12} = \frac{3 \times 24}{3 \times 12}$.

Pomnożmy teraz te ułomki przez 3×12 będzie.

$$\frac{6 \times 12 \times 3 \times 12}{3 \times 12} = \frac{3 \times 24 \times 3 \times 12}{3 \times 12},$$

Podzielmy teraz wyrazy ułomków przez 3×12, wypadnie $6 \times 12 = 3 \times 24$. Czyli iloczyn z wyrazów średnich równy iest iloczynowi z wyrazów skraynych.

W następuiących proporcyach powtarzay toż samo, dopóki się dokładnie o wszystkiem nie przekonasz.

$2 : 4 = 6 : 12 \qquad 6 : 2 = 12 : 4$

$3 : 5 = 8 : \frac{40}{3} \qquad 8 : 4 = 6 : 3$

$6 : 5 = 7 : \frac{35}{6} \qquad 5 : 10 = 10 : 20$ itd.

§ 92.

Ponieważ iloczyn z wyrazów skraynych równy iest iloczynowi z wyrazów średnich, więc *maiąc dane trzy wyrazy proporcyi*, łatwo znaleśdź można czwarty proporcyonalny.

Mnożyć potrzeba dwa średnie, a ten iloczyn przez pierwszy wyraz podzielić. Jloraz będzie wyrazem czwartym proporcyonalnym.

§ 93.

Na mocy téy prawdy, że *iloczyn z wyrazów skraynych równy iest iloczynowi z wyrazów średnich*, można siedm razy w proporcyi wyrazom mieysce odmienić; a proporcya zawsze będzie dobra. Bo powyższa prawda zawsze się utrzyma.

np: $2 : 4 = 6 : 12$ będzie $2 \times 12 = 4 \times 6$.

$2 : 6 = 4 : 12.$

$4 : 2 = 12 : 6.$

$4 : 12 = 2 : 6.$

$6 : 2 = 12 : 4.$

$6 : 12 = 2 : 4.$

$12 : 4 = 6 : 2.$

$12 : 6 = 4 : 2.$ $12 \times 2 = 6 \times 4.$

§ 94.

Niech będą dwie proporcye.

$2 : 4 = 6 : 12.$

$2 : 4 = 5 : 10.$

Widzimy w nich stosunek spólny 2 : 4, czyli że 6 : 12 iest równe 2 : 4 i 5 : 10 temuż stosunkowi iest równy; oczywista ztąd że *dwa stosunki równe trzeciemu, są równe między sobą*, czyli że 6 : 12 = 5 : 10.

§ 95.

Ponieważ stosunek toż samo znaczy, co dzielenie lub ułomek; więc *wyrazy stosunku można mnożyć lub dzielić przez iakąkolwiek liczbę, a wykładnika nieodmienimy.*

Uwaga. Inne własności proporcyi w tedy wyłuszczę, gdy nam będą potrzebne. Te, któreśmy dotąd mieli, kilka razy powtarzay i rozmaite sobie zadaway przykłady. Przystąpmy teraz do liniy.

§ 96.

Powierzchnie tróykątów maią się do siebie, iak iloczyny z podstaw przez wysokość.

Powierzchnia tróykąta ABC niech będzie = P. (Fig: 69.)

Powierzchnia drugiego DEF = p.

Ma bydź P : p = AC × BD : DF × HE.

Powierzchnia tróykąta ABC równa się iloczynowi $\frac{AC \times BD}{2}$ (83).

Podobnież powierzchnia tróykąta DEF $= \frac{DF \times EH.}{2}$

Więc iest $P : p = \frac{AC \times BD}{2} : \frac{DF \times EH}{2}$

to iest, ma się tróykąt do tróykąta, iak pierwszy w miarach kwadratowych do drugiego w tychże miarach.

Pomnożmy wyrazy drugiego stosunku przez 2; będzie.

$P : p = AC \times BD : DF \times EH$, czyli ile razy powierzchnia pierwszego tróykąta zamyka w sobie powierzchnią drugiego, tyle razy pierwszy iloczyn z podstawy przez wysokość, zamyka w sobie drugi.

Niech będzie BD $= 6$ cali, AC $= 8$ c. więc P $= 24$ c. □ Iloczyn zaś z podstawy przez wysokość $= 48$.

Znowu HE $= 10$ c. DF $= 12$ c, więc p $= 60$ □ iloczyn $= 120$.

Więc iest 24 □ : 60 □ $= 48$ □ : 120 □.

§ 97.

Tróykąty maiące równą wysokość maią się do siebie iak podstawy. (Fig: 69)

Założmy, że BD $=$ EH.

Podług poprzedzaiącego iest:

$P : p = AC \times BD : DF \times EH$. że zaś BD $=$ EH z założenia; więc podzieliwszy wyrazy drugiego stosunku przez BD lub EH, będzie P : p = AC : DF. Naznacz sobie przykład i rozwiąż. W następuiących przypadkach toż samo uczyń.

§ 98.

Powierzchnie tróykątów maiących równe podstawy są w stosunku wysokości.

Załóżmy AC = DF. (Fig: 69.)

Było P : p = AC × BD : DF × EH; (96) że zaś AC = DF; więc podzieliwszy wyrazy drugiego stosunku przez AC lub DF, będzie:

P : p = BD : EH.

§ 99.

Tróykąty będące w stosunku podstaw, maią równe wysokości. (Fig: 69.)

Z założenia mamy P : p = AC : DF. mamy pokazać, że BD = EH.

Wyżey mieliśmy, że:

P : p = AC × BD : DF × EH. (96.)

Z założenia mamy

P : p = AC : DF; więc ponieważ w tych proporcyach dwa stosunki są równe trzeciemu, iest AC × BD : DF × EH = AC : DF. Mnożmy skrayne i średnie będzie: AC × BD × DF = DF × EH × AC.

Podzieliwszy oba wyrazy przez AC × DF, będzie BD = EH.

§ 100.

Tróykąty będące w stosunku wysokości maią równe podstawy. Z założenia mamy $P : p = BD : EH$ ma bydź $AC = DF$. (Fig: 69.)
Wyżey było $P : p = AC \times BD : DF \times HE$. (96) Z założenia iest $P : p = BD : EH$; więc $AC \times BD : DF \times HE = BD : EH$, więc $AC \times BD \times EH = DF \times HE \times BD$ więc $AC = DF$.

Cośmy dotąd powiedzieli o tróykątach, można przystosować do prostokątów i równoległoboków. Bo tróykąty są ich połowami, gdy maią z niemi równą podstawę i wysokość. (81.)

Zagad: Znaleśdź stosunek tróykąta, którego podstawa zamyka 7 cali a wysokość 4, do tróykąta, którego podstawa zamyka także 7 cali, a wysokość 20 cali.

Roz: Te tróykąty maią równą podstawę; więc maią się do siebie iak wysokości czyli $P : p = 4 : 20$. Podzieliwszy wyrazy drugiego stosunku przez 4, będzie.

$P : p = 1 : 5$, więc pierwszy tróykąt iest $\frac{1}{5}$ drugiego.

§ 101.

(Fig: 70.) *Liniia która przecina dwa boki tróykąta AC, AE równoodlegle od* *trzeciego boku CE, przecina te dwa boki proporcyonalnie*, czyli będzie AB : BC = AD : DE.

Poprowadziwszy liniie CD, BE zważmy, że tróykąty BCD, BDE są równe co do powierzchni; bo maią spólną podstawę i równą wysokość; gdyż ich wierzchołki są na równoodległéy CE od podstawy BD. (81)

Nadto tróykąty ABD, BDC maiąc równą wysokość; więc maią się iak podstawy czyli

tróy. ABD : tróy. BDC = AB : BC

Podobnież tróykąty DBA, DBE maią się iak AD : DE.

Wypiszmy te dwie proporcye

ABD : BDC = AB : BC

ABD : BDE = AD : DE.

Ponieważ BDC = BDE; więc dwa stosunki równe trzeciemu są równe między sobą; więc:

AB : BC = AD : DE.

§ 102.

Odwrotnie. *Gdy dwa boki tróykąta przecięte są przez iaką liniią proporcy-*

onalnie, liniia one przecinaiąca będzie równoodległą od boku trzeciego. (Fi: 70)

Z założenia mamy, że

AB : BC = AD : DE, liniia BD ma bydź równoodległa od CE.

Prowadźmy BE, CD.

Tróykąty ABD, BDC maią wspólny wierzchołek D; więc maią równą wysokość; więc

ABD : BDC = AB : BC

podobnież ABD : DBE = AD : DE.

Że zaś z założenia mamy

AB : BC = AD :DE

więc iest także.

ABD : BDC = ABD : DBE.

Że zaś poprzednik ABD = poprzednikowi ABD; więc i następnik BDC = następnikowi DBE, czyli tróykąt BDC równy co do powierzchni tróykątowi BDE. Że zaś maią równą podstawę BD; więc także równą wysokość mieć muszą; a że wierzchołki maią na CE; więc EC iest równoodległa od BD; więc i t d.

Uwaga. Od tych dwoch twierdzeń zależy cała nauka o liniiach proporcyonalnych; staray się więc one dokładnie zrozumieć.

§ 103.

Weźmy proporcyą

2 : 4 = 3 : 6.

dodaymy następniki do poprzedników i stosuymy te summy do następników lub poprzedników. Proporcya nie zepsuie się. *np*: 6 : 4 = 9 : 6. podobnież.

6 : 2 = 9 : 3

w obudwóch razach iloczyn skraynych iest równy iloczynowi średnich, czego możesz dowieśdź wyższym sposobem.

(Fig: 70.) W tróykącie ACE mieliśmy: AB : BC = AD : DE.

Dodaymy następniki do poprzedników i stosuymy do następników będzie AB + BC : BC = AD + DE : DE. czyli 1° AC : BC = AE : DE.

Stosuymy teraz do poprzedników: będzie.

AB + BC : AB = AD + DE : AD

czyli 2° AC : AB = AE : AD.

więc *liniia równoodległa od boku iakiego w tróykącie, przecina dwa inne tak, że całe te boki są proporcyonalne względem swych części.*

Na téy saméy figurze można ieszcze mieć te proporcye, w które się chciey wprawić.

AC : AE = AB : AD.

AC : AE = BC : DE i t d.

§ 104.

W tróykącie niech liniia BD dzieli

kąt ABC na dwie równe części. (Fig: 71)

Z punktu A prowadźmy równoodległą AE do spotkania się z bokiem CB przedłużonym.

Mamy więc CB : BE = CD : DA.

Że zaś BE = BA; bo kąt DBC = BEA (33) a kąt ABD = EAB (33) więc zamiast BE weźmy BA; więc CB : BA = CD : DA więc *liniia dzieląca kąt w tróykącie na dwie równe części przecina bok na dwa odcinki proporcyonalne ramionom odpowiadaiącym kąta podzielonego.*

(Fi: 72) *Zagad*: Maiąc dane trzy liniie AB, AC, AD, za trzy wyrazy proporcyi, szukać potrzeba czwartéy proporcyonalnéy.

Kreślę kąt iakikolwiek FAG, potém przenoszę AB na ramie AF, AC na ramie AG i prowadzę liniią BC.

Nakoniec AD przenoszę na AF i z punktu D poprowadzę równoodległą ED od BC.

Liniia AE iest czwartą proporcyonalną. Bo iest AB : AC = AD : AE.

ROZDZIAŁ XIII.

O tróykątach podobnych.

§ 105.

(Fi: 73) Tróykąty ABC, DEF maiące kąty B = E, A = D, C = F, maią boki przeciwne kątom równym proporcyonalne. Będzie.

BA : ED = BC : EF = CA : FD.

Tym końcem bok ED przenoszę na BA. Przypadnie w punkcie G.

Bok EF przenoszę na BC, Skończy się w H. Prowadzę GH.

Tróykaty BGH, EDF przystaną podług pierwszego przypadku; więc kąt G = D, kąt H = F; więc i kąt G = A, kąt H = C; więc AC iest równoodległe od GH (33) więc BA : BG = BC : BH.

Poprowadziwszy równoodległą HJ od BA, będzie AJ = GH; bo to są boki przeciwne równoległoboku.

Więc BC : BH = CA : HG.

Że zaś boki tróykąta BGH są rówe względem boków tróykąta DEF. więc iest:

BA : ED = BC : EF = CA : FD.

Więc tróykąty równokątne maią boki przeciwne kątom równym proporcyonalne.

§ 106.

Niech będą dwie proporcye.

2 : 4 = 3 : 6.

2 : 4 = 3 : 6.

Zakładam, że trzy wyrazy 2, 4, 3 pierwszey proporcyi są równe względem trzech wyrazów 2, 4, 3 drugiey proporcyi, czwarty wyraz 6 pierwszey, musi bydź także równy czwartemu wyrazowi 6 drugiey proporcyi. Gdyby nie były równe, iloczyn skraynych nie byłby równy iloczynowi średnich (91).

§ 107.

(Fig: 73.) *Dwa tróykąty BAC, EDF maiące boki proporcyonalne są równokątne.*

Z założenia mamy, że iest:

BA : ED = BC : EF = AC : DF, trzeba pokazać, że kąty przeciwne bokom proporcyonalnym będą równe, kąt A będzie = D, B = E, C = F.

Bok ED przenieśmy na BA. Niech się skończy w G. Prowadźmy GH równoodległą od AC.

Mamy więc z przyczyny równoodległey, BA : BG czyli DE = BC : BH. z założenia było BA : DE = BC : EF.

Że trzy wyrazy pierwszéy proporcyi, są równe względem trzech wyrazów drugiéy; więc BH = EF.

Z przyczyny równoodległéy HJ iest, BC : BH czyli EF = CA : GH. Z założenia iest BC : EF = CA : DF; więc tróykąty BGH, EDF przystaią podług trzeciego przypadku; (64) więc B, G, H są równe względem kątów D, E, F. więc i kąty B, A, C, są równe względem kątów E, D, F; więc tróykąty maiące boki proporcyonalne są równokątne.

§ 108.

(Fig: 73.) Dwa tróykąty maiące po iednym kącie równym i dwa boki czyniące ten kąt proporcyonalne, są równokątne.

Kąt B = E; iest także z założenia BA : DE = BC : EF.

Przeniosłszy boki ED, EF na boki BA, BC i poprowadziwszy liniią GH, widzimy, że GH iest równoodległą od AC. Bo iest.

BA : BG czyli ED = BC : BH czyli EF więc kąt G = A, kąt H = C.

Że zaś tróykąty BGH, EDF przystaią podług pierwszego przypadku (55) więc i kąt A = D, C = F. więc tróykąty maiące kąt równy i t d.

§ 109.

O wielokątach równą liczbę boków maiących mówimy, że *że są podobne*, *gdy maią kąty odpowiadaiące sobie równe i* *boki proporcyonalne*, ztąd wypada że *wielokąty foremne, równą liczbę boków maiące są podobne.*

Tróykąty zawsze są podobne, gdy iednę z trzech własności wyłuszczonych maią. (105, 107, 108.)

Mogą bydź także tróykąty podobne, gdy dwa kąty iednego są równe względem dwóch kątów drugiego; bo trzecie są spełnieniem do dwóch kątów prostych; więc te tróykąty maią boki proporcyonalne.

Mogą bydź ieszcze tróykąty podobne, gdy maią boki względem siebie równoodległe; bo wtedy kąty maiąc otwartość w iednę stronę, są sobie równe (Figura 74.)

Nakoniec tróykąty są podobne gdy trzy boki iednego są prostopadłe względem trzech boków drugiego.

Bo obróciwszy drugi tróykąt względem pierwszego na ćwierć okręgu, boki tych tróykątów będą względem siebie równoodległe.

Uwaga. Zwiadomości nabytych w poprzedzaiących Rozdziałach łatwo poznasz naczem zależy figur *równość, podobieństwo i przystawanie. Równość* dwóch figur ściąga się tylko do ich wielkości nie zaś do ułożenia ich boków: widzieliśmy *np*: że dwa tróykąty lub dwa równoległoboki maiące równe podstawy i wysokości są między sobą równe co do powierzchni chociaż ich boki nieiednakowo są ułożone. *Podobieństwo* zależy na tém aby figury miały iednakową liczbę boków, kąty równe, i boki proporcyonalne. *Przystawanie* zamyka w sobie *równość i podobieństwo*.

Zagad: 1. Maiąc dany tróykąt ABC, i liniią DE, wystawić na niey tróykąt podobny danemu. (Fig: 75.)

1szy sposób. Przy końcach linii DE robię kąty równe kątom A i C tróykąta danego.

Tróykąty te są podobne podług pierwszego przypadku. (105)

2gi sposób. Do linii AC, DE i AB szukam czwartéy proporcyonalnéy. Tą proporcyonalną zakreślam łuk z punktu D.

Znowu do linii AC, DE i BC szukam podobnież czwartéy proporcyonalnéy i nią przecinam pierwszy łuk z punktu E.

Te tróykąty są podobne podług 2go przypadku. (107)

3ci sposób. Przy D robię kąt równy A Potém do AC, DE i AB szukam czwartéy proporcyonalnéy i tę przenoszę na ramie kąta, koniec iego łączę z E.

Te

Te tróykąty są podobne podług 3go przypadku. (108)

Te zagadnienia kilka razy powtórz.

§ 110.

Zagad: 2. Liniią BC *np:* na 3 części równe podzielić. (Fig. 76.)

Z punktu B prowadzę liniią BE pod iakimkolwiek kątem. Z punktu B przenoszę na tę liniią trzy iakiekolwiek części równe BF, FG, GH.

Punkt H łączę z C, i od HC prowadzę równoodległe GM, FN.

Liniia BC tym sposobem iest podzielona na części równe BN, MN, MC.

Bo tróykąty BFN BGM są podobne z przyczyny równoodległych; więc BN, NM są równe, że BF, FG są równe.

Znowu tróykąty BGM, BHC, są podobne; więc iak GH iest połową BG, tak MC iest połową BM.

Tym sposobem można liniią na iakąkolwiek liczbę części równych podzielić.

Następuiący iednakowoż sposób chciéy dobrzé obiąć.

§ 111.

(Fig: 77.) Liniią AB podzielić na 10 części równych.

Z punktu A wyprowadzam prostopadłą AC do AB, i przenoszę na nię dziesięć iakichkolwiek części równych. Z końców tychże prowadzę równoodległe od AB do spotkania się z liniią 10 B.

Tróykąty C9a, C8b, i t d. są podobne tróykątowi CAB, więc iak C9 iest $\frac{1}{10}$ CA; tak 9a iest $\frac{1}{10}$ AB; 8b iest $\frac{2}{10}$ AB i t d.

§ 112.

(Fig: 78.) Liniią AB podzielić na 100 części.

Z końców iéy wyprowadzam dwie prostopadłe AD, BE, i przenoszę na nie dziesięć iakichkolwiek części równych. Łączę ie potem liniiami.

Nakoniec DE lub AB dzielę na dziesięć równych części, i prowadzę liniie Da, eb, fc i t. d.

Tym sposobem AB iest podzielona na 100 części równych.

Bo liniia 1 k iest $\frac{1}{10}$ A 1; więc $\frac{1}{100}$ A B.

Możesz AB przedłużyć 3 lub 4 razy. Liniia tak podzielona zowie się *Podziatką.*

Używać iéy często przychodzi; ztąd trzeba ią doskonale poznać.

Jeometrowie zwykli dzielić pręt zamykaiący 15 stóp czyli 180 cali na dziesięć części równych, które nazywaią *stopami Jeometrycznemi* lub *pręcikami*; pręcik więc zamyka 18 cali czyli półtoréy stopy zwyczaynéy.

Pręcik dzieli się znowu na 10 części, które zowią się *ławkami* naprzykład piszemy 5 prętów, 8 ławek, 4 ławeczki tak: 5', 8", 4'''. lub 5',84.

(Fig: 78.) Jeśli AB iest prętem; więc JL 1 pręt 2" i 9'''.

§ 113.

W tróykącie prostokątnym bok przeciwny kątowi prostemu zowie się *przeciwprostokątną*. (Fig: 79.)

W tróykącie prostokątnym spuściwszy z wierzchołka kąta prostego B prostopadłą BD na przeciwprostokątną AC, będzie.

1. *Ramie każde kąta prostego średnią proporcyonalną między przeciwpro-*

stokątną i odcinkiem sobie przyległym czyli będzie.

AC : AB = AB : AD,

AC : BC = BC : DC.

2. *Wysokość tróykąta BD będzie średnią proporcyonalną między odcinkami przeciwprostokątnéy* czyli będzie, AD : BD = BD : DC.

1. Tróykąty ABD, ABC są podobne. Bo kąt A maią spólny; kąt ADB prosty równy prostemu ABC; więc trzeci ABD = BCA; więc ma się AC : AB czyli boki przeciwne kątom prostym równym, iak AB w wielkim tróykącie naprzeciwko kąta C do AD w małym na przeciwko ABD, które to kąty są równe, czyli iest AC : AB = AB : AD.

Z drugiéy strony iest toż samo; więc AC : BC = BC : DC,

2. Tróykąty ABD, BDC są podobne; bo były podobne tróykątowi ABC; więc AD na przeciwko kąta ABD ma się do BD naprzeciwko kąta C, iak BD na przeciwko kąta A do DC naprzeciwko kąta DBC czyli AD : DB = DB : DC.

§ 114.

Było AC : AB = AB : AD. Jloczyn czyli prostokąt z skraynych, równa się iłoczynowi czyli kwadratowi z śrzedniéy czyli iest.

AC × AD = AB × AB czyli kwadrat z ramienia AB kąta prostego ABC równa się prostokątowi z przeciwprostokątnéy AC przez odcinek przyległy AD.

Pobobnież BC × BC = AC × DC. Porównaymy teraz te dwa równania:

AB × AB = AC × AD

BC × BC = AC × DC.

Dodaymy ie do siebie; więc

AB × AB + BC × BC = AC (AD + DC)

Że zaś AD + DC = AC; więc

AB × AB + BC × BC = AC × AC;

więc *summa kwadratow z ramion kąta prostego w tróykącie równa się kwadratowi z przeciwprostokątnéy*.

Ponieważ ta prawda bardzo iest ważna, staray się i następuiącym sposobem o niéy przekonać.

(Fig: 80) Spuśćmy z wierzchołka kąta prostego B prostopadłą BH i przedłużmy ią do spotkania się z bokiem KL kwadratu zrobionego z przeciwprostokątnéy AC. Wystawmy także kwadraty na bokach AB, BC.

Pokazać trzeba, że prostokąt HK będzie równy kwadratowi AF; prostokąt zaś HL kwadratowi CE tém samém pokażemy, że kwadrat z przeciwprostokątnéy AC równy będzie summie kwadratów z AB, z BC.

Prowadźmy liniie DA, BL. Weźmy tróykąty DAC, BCL. Bok DC pierwszego = CB drugiego tróykąta; bo są boki iednego kwadratu.

Znowu bok AC pierwszego = CL drugiego z téyże przyczyny.

Kąt ACD=BCL bo się składaią z prostych BCD, ACL i z części spólnéy BCA; więc te tróykąty przystaią podług pierwszego przypadku; więc ich powierzchnie są równe.

Tróykąt ACD iest połową kwadratu CE; bo stoią na podstawie CD, i maią równą wysokość? (81)

Z téyże przyczyny tróykąt BCL iest połową prostokąta HCLJ; więc połowa kwadratu CE równa połowie prostokąta HL; więc kwadrat CE równy prostokątowi CJ. Z drugiéy strony można toż samo pokazać, że kwadrat AF równy prostokątowi AJ; ztąd kwadrat z AC równy summie kwadratów z AB i z BC.

§ 115.

Zagad: Maiąc dane dwie liniie, znaleśdź między niemi średnią proporcyonalną. (Fig: 81)

Liniie AB, AC przenoszę na iakąkolwiek BC. Na BC iako na średnicy kreślę półkole.

Z punktu A wynoszę prostopadłą do BC; ta będzie średnią proporcyonalną między BA i AC.

Bo poprowadziwszy DB, DC kąt BDC iest prosty (45.); więc iest BA : AD = AD : AC. (113)

ROZDZIAŁ XIV.

O Liniiach proporcyonalnych w kole.

§ 116.

Wiemy iuż, że prostopadła spuszczona z okręgu na średnicę iest średnią proporcyonalną między odcinkami średnicy.

(Fig: 82.) *Dwie cięciwy przecinaiące się maią odcinki odwrotnie proporcyonalne; będzie.*

AC : CB = CD : CE.

Prowadźmy AD, BE.

Tróykąty ADC, BCE są podobne, bo kąty przy C iako wierzchołkiem przeciwległe równe; kąty przy D i E są równe; bo w iednym odcinku. (45)

Więc iest AC naprzeciwko kąta D do BC napzeciwko kąta E, który iest równy D, iak CD w pierwszym tróykącie na przeciwko kąta A do CB na przeciwko kąta B.

§ 117.

(Fig: 83.) Gdyby te cięciwy były prostopadłe, i iedna z nich średnicą, byłaby CD, lub DE średnią proporcyonalną między AD i DB. (45)

§ 118.

Dwie sieczne wychodzące z iednego punktu są w stosunku odwrotnym z częściami za kołem; będzie: (Fig: 84.)

AC : CE = CD : CB.

Prowadźmy AD, BE.

Tróykąty ACD, CEB są podobne, bo kąt C spólny; kąt A = E. więc kąt EBC = CDA; bo są spełnieniem dwóch prostych; więc CA : CE = CD : CB.

Uważmy dobrze, iaka iest różnica między stosunkiem prostym i odwrotnym.

§ 119.

Gdyby iedna z siecznych była styczną, *byłaby styczna średnią proporcyonalną między sieczna i częścią za kołem;* będzie. (Fig: 85.)

DB : AB = AB : CB.

Prowadźmy AD, AC.

Tróykąty BAC, BAD są podobne; bo kąt B spólny; kąt BAC odcinka równy kątowi D w odcinku (44) więc kąt ACB = BAD więc BD : AB : CB; bo boki przeciwne kątom równym są proporcyonalne.

ROZDZIAŁ XV.

O Wielokątach podobnych.

§ 120.

(Fig 86.) *Wielokąty podobne można podzielić przez przekątne na tróykąty podóbne.*

Pięciokąty AC, FJ są podobne, czyli maią kąty odpowiadaiące równę, A = F, B = G, C = H i t d., boki także odpowiadaiące są proporcyonalne, czyli AB : FG = BC : GH = CD : HJ = DE : JK = EA : KF.

Prowadźmy przekątne z wierzchołków kątów równych.

Tróykąty EAB, KFG są podobne; bo maią kąty A i E równe, tudzież boki te kąty czyniące z założenia proporcyonalne, (108) więc kąty AEB, FKG są równe; podobnież EBA = KGF; tudzież przekątne EB, KG są w stosunku boków AB, FG lub EA, KF.

Tróykąty EBC, KHG są także podobne; bo kąt cały ABC iest z założenia równy FGH; że zaś EBA iest równy KGF z dowodzenia, więc EBC = KGH.

Nadto Przekątne EB, KG są w stosunku AB, FG, lub lub BC, GH; więc kąt BEC = GKH, kąt ECB = KHG; nadto przekątne EC, KH są w stosunku BC, GH lub CD, HJ.

Tróykąty nakoniec EDC, KJH są podobne; bo maią boki względem siebie proporcyonalne.

§ 121.

(Fig: 86.) Odwrotnie, ieśli *dwa wie-*

lokąty złożone są z tróykątów podobnych, będą podobne.

Ponieważ tróykąty składaiące wielokąty, są podobne; więc 1. kąty odpowiadaiące równe maią (107) że zaś kąty wielokątów złożone są z kątów tróykątów; więc wielokąty maią kąty odpowiadaiące równe.

2. Boki tróykątów podobych są proporcyonalne (105)

Że zaś te boki składaią obwody wielokątów; więc boki odpowiadaiące wielokątów są proporcyonalne.

Te więc wielokąty maią kąty odpowiadaiące równe i boki proporcyonalne; więc sa podobne.

(Fig: 87.) *Zagad:* Danemu wielokątowi ABCDEF wystawić podobny na linii danéy GH.

Prowadzę w wielokącie przekątne AE, AD, AC.

Do linii AB, GH, i BC szukam czwartéy proporcyonalnéy (104 Zagad:) i nią zakreślam z punktu H łuk.

Potém do linii AB, GH i AC znowu szukam czwartéy proporcyonalnéy i tą przecinam łuk pierwszy z puntku G.

Tak postąpisz póki figury nie dopełnisz. Te wielokąty bądą podobne; bo się składaią z tróykątów podobnych. (120.)

§ 122.

Krótszy daleko sposób iest następuiący, którego w przerysowaniu Mapp na mnieysze naywygodniéy używać można. (Fig: 88 i 87.) Na linii iakiéy AC kreślę z punktu A bokiem AB łuk BE. Na ten łuk przenoszę od B liniią GH, na któréy ma bydź wielokąt podobny danemu wystawiony, ta skończy się *np:* na punkcie E. Prowadzę potem AE.

Kąt pod temi warunkami zrobiony zowie się *kątem redukcyi.*

Chcąc teraz wielokąt postawić podobny na linii GH postąpisz sobie tak:

Przekątną AC zakreślisz łuk na kącie redukcyi, cięciwę iego weźmiesz w cyrkiel i z punktu G zekreślisz łuk, potem bokiem BC zakreślisz znowu łuk na kącie redukcyi a cięciwą iego przetniesz łuk z punktu H.

Wszystkiemi bokami Wielokąta danego będziesz kreślił łuki a cięciwy ich będą czwartemi proporcyonalnemi. Tym sposobem z naywiększą łatwością znaydziesz tyle stosunków, ile ich będziesz potrzebował a wszystkie będą równe czyli będą iak AB : GH.

Ponieważ przez częste kreślenie łuków, wierzchołek kąta psuie się, dobrze iest, aby za iednym razem zrobić kilka kątów redukcyi. Bo gdy ieden nadpsuie się, drugi i trzeci będą gotowe.

Na poprzedzaiącéy prawdzie zasadza się cała Jeometrya Praktyczna. Bo iéy celem iest zrobić wielokąt podobny na papierze wielokątowi na ziemi.

Zaczniy od małych rzeczy.

Podłoga pokoiu, w którym mieszkasz zapewne iest prostokątem; więc wymierzysz tylko dwa boki przyległe. Załóżmy, że długość zamyka 8 łokci a szerokość 5.

Wyrysuiesz potém kąt prosty i na ramie iedno przeniesiesz 5 równych części iakichkolwiek a na ramie drugie takich 8. Dopełnisz potem prostokąta, który będzie podobny podłodze.

Bo dwie te figury maią kąty proste a zatém równe i boki odpowiadaiące proporcyonalne.

Postąpisz potém do dziedzińca i t d. i zrobisz figury podobne czyli Mappy.

(Fig: 89.) *np:* Dziedziniec niech ma figurę iak 89. Pociągniesz sznur lub łańcuch albo pręt drewniany *np:* w kierunku AD.

Z wierzchołków B, C, E, F spuść prostopadłe na liniią AD.

Te prostopadłe wymierz, tudzież uważay, w iakich miarach linii AD przypadaią, czyli, ile miar zamykaią AG, AH, AJ, AK.

Maiąc to wszystko zrobisz sobie podziałkę stósowną do wielkości mappy, iaką zamyślasz robić.

Pociągniesz naprzod liniią na papierze wyobrażaiącą AD i przeniesiesz z podziałki na nię tyle części równych, ile AD ma miar.

Punkta także G, H, J, K na téy linii z podziałki wyznaczysz.

Wyprowadzisz potém z nich prostopadłe i z podziałki ich długość wyznaczysz, końce ich złączysz nakoniec liniiami i będziesz miał figurę podobną dziedzińcowi.

Tu się obeszło bez mierzenia kątów A, B, C i t d.

Tego sposobu bardzo wygodnie używać można gdy rozległość do wymierzenia nie iest zbyt wielka.

Gdy będzie większa, każesz sobie prosty stoliczek zrobić na iednéy nodze żelazem na końcu okutéy.

Przylepiwszy arkusz papieru na nim opłatkiem, pociągniesz liniią AD ołówkiem i wyznaczysz iéy długość z podziałki.

Potém nogę stolika utwierdzisz w A. Wzdłuż linii AD na stoliku połoź mały liniiał, na końcach którego powinieneś mieć dwie szpilki prostopadłe.

W kierunku tych szpilek patrz ku D, gdzie powinieneś mieć iaki znak, i obracay powoli stolikiem, póki liniia AD na stoliku nie odpowie linii AD na ziemi.

Potém nie ruszaiąc stolika, w A utwierdzisz igiełkę i przy niéy kieruy liniiałem, póki nie będzie w kieruku AB na ziemi.

Z drugiéy strony ku AF możesz toż samo zrobić.

Wymierzywszy AB na ziemi i przeniosłszy na AB na stolik, przeniesiesz stolik na punkt B i tak postąpisz iak w A, z tą różnicą, stolik tu ustawisz w kierunku BA i potém celować będziesz ku C.

Ten stolik do początkowych robót iest dostateczny, staray się tylko iak nayświększéy łatwości nabydź w małych robotach.

Potém będziesz zdatny do używania zwyczaynego stolika, łatwo i bez opisania iego dasz sobie z nim radę.

§ 123.

Niechby było kilka stosuków równych.

4 : 2

6 : 3

8 : 4

12 : 6

18 : 9, i t d.

Wszystkich tych stosunków wykładnik iest $\frac{1}{2}$.

Doday poprzedniki do siebie, potém następniki, będzie summa poprzedników do summy następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika, czyli będzie $4+6+8+12+18 : 2+3+4+6+9 = 4 : 2$ czyli $48 : 24 = 4 : 2$.

Jakoż ile razy poprzednik którykolwiek zamyka swóy następnik, tyleż razy summa poprzedników powinna summę następników zawierać; bo stosunki wszystkie z założenia są równe.

§ 124.

Obwody wielokątów podobnych są w stosunku dwóch iakichkolwiek boków odpowiadaiących.

(Fig: 90.) Ponieważ pięciokąty AC, FH są podobne; więc stosunki następuiące są sobie równe.

AB : FG.

BC : GH.

CD : HJ.

DE : JK.

EA : KF.

Dodawszy

Dodawszy poprzedniki do siebie, potem następniki będzie.

Obwód pięciokąta AC : obwodu pięciokąta FH = AB : FG.

§ 125.

(Fig: 91.) Niechby były dwa wielokąty foremne iednakową liczbę boków maiące. Ze środka ich poprowadziwszy liniie do wierzchołków kątów, porobią się tróykąty podobne (54). Spuściwszy na boki liniie prostopadłe, te także podzielą tróykąty na części sobie podobne; (70) więc obwody wielokątów foremnych iednakową liczbę boków maiących są w stosunku boków odpowiadaiących, albo w stosunku dwóch prostopadłych z ich śrzodka na boki spuszczonych, albo nakoniec w stosunku dwóch liniy z ich środka do wierzchołków kątów wyprowadzonych.

§ 126.

Ponieważ koła uważaliśmy za wielokąty foremne wielką bardzo liczbę boków maiące; więc okręgi kół są wstosunku promieni, lub średnic.

Łuki podobnież iednakową liczbę stopni maiące są w stosunku promieni lub średnic.

Chcąc więc okrąg 3, 4, 5 i t d. razy większy nakreślić, trzeba wziąść promień 3, 4, 5 i t d. razy większy.

ROZDZIAŁ XVI.

O powierzchni wielokątów podobnych.

§ 127.

(Fig: 92) *Tróykąty podobne maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących np*: $= AC \times AC : DF \times DF$.

Nazwiymy podstawy P, p, a wysokości tych tróykątów W, w; powierzchnie zaś ich T, t; ma bydź $T : t = P \times P : p \times p$.

Ponieważ tróykąty ABC, DEF są podobne; więc i tróykąty prostokątne ABG, DEH są podobne; więc iest $AB : DE$ czyli $AC : DF = BG : EH$ czyli $P : p = W : w$, więc iest $\frac{P}{p} = \frac{W}{w}$. (89)

Pomnożmy liczniki tych ułomków równych przez P. Będą ułomki równe

$$\frac{P \times P}{p} = \frac{P \times W}{w}.$$

Pomnożmy mianowniki ostatnich ułomków przez p; będą znowu równe czyli $\frac{P \times P}{p \times p} = \frac{P \times W}{p \times w}$. czyli

$$P \times P : p \times p = P \times W : p \times w.$$

Że zaś powierzchnie tróykątów maią się iak iloczyny z podstaw przez wysokości (90) czyli.

$T : t = P \times W : p \times w$, zaś $P \times W : p \times w = P \times P : p \times p$ więc.

$T : t = P \times P : p \times p$.

Takowy iloczyn $P \times P$ zwykliśmy inaczéy pisać P^2, podobnież $p \times p = p^2$ więc prawdę powyższą można tak wyrazić $T : t = P^2\ p^2$

Wymawiamy to $T : t = P$ do drugiego stopnia do p do drugiego, czyli że P dwa razy wzięte iest za czynnik.

W każdéy proporcyi zrobiwszy kwadraty z wyrazów iéy, kwadraty te podobnież składać będą proporcyą *np*:

$$2 : 4 = 3 : 6 \text{ będzie } 2^2 : 4^2 = 3^2 : 6^2.$$

Jloczyn skraynych będzie zawsze równy iloczynowi średnich.

Ponieważ boki tróykątów podobnych składaią stosunki równe, więc $T : t = AB^2 : DE^2 = BC^2 : EF^2 = AC^2 : DF^2$, lub $BG^2 : EH^2$. Bo te wszystkie stosunki są sobie równe.

§ 128.

Tróykąty są połowami równoległoboków lub prostokątów maiących też samę podstawę i wysokość; więc *i równoległoboki lub prostokąty podobne są w stosunku kwadratów z podstaw lub wysokości.*

§ 129.

Wielokąty podobne są także w stosunku kwadratów z boków odpowiadaiących.

Bo wielokąty podobne daią się dzielić na tróykąty podobne. (120.)

Te tróykąty są w stosunku kwadratów z boków odpowiadaiących; więc summa tróykątów iednego wielokąta będzie do summy tróykątów drugiego wielokąta, iak kwadraty z dwóch boków odpowiadaiących, czyli wielokąty podobne są iak kwadraty z boków odpowiadaiących.

Chcąc zatém wiedzieć, ile razy wielokąt zamyka drugi podobny, wymierzam dwa boki odpowiadaiące. Jeżeli bok pierwszego zamyka bok drugiego 3 razy; więc powierzchnia pierwszego zamyka powierzchnią 2go 9 razy.

§ 130.

Powierzchnie wielokątów foremnych równą ilość boków maiących na tymże fundamencie maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących.

Podobnież koła maią się do siebie iak kwadraty z promieni lub średnic.

§ 131.

Niechby była proporcya ciągła $2 : 4 = 4 : 8$.

Kwadraty z dwóch wyrazów pierwszego stosunku będą się miały do siebie iak pierwszy do 3ciéy ciągło proporcyonalnéy czyli $4 : 16 = 2 : 8$ czyli $2^2 : 4^2 = 2 : 8$.

Iloczyn skraynych równy iloczynowi śrzednich czyli $2 \times 8 = 4 \times 4$.

Wyżéy było $2^2 : 4^2 = 4^2 : 8^2$.

Że zaś $4^2 = 2 \times 8$; więc zamiast 4^2 weźmy 2×8; więc będzie

$$2^2 : 4^2 = 2 \times 8 : 8 \times 8.$$

Podzieliwszy drugiego stosunku wyrazy przez 8, będzie.

$$2^2 : 4^2 = 2 : 8.$$

Niech będzie więcéy proporcyy

$$3 : 6 = 6 : 12$$

$$5 : 10 = 10 : 20$$

$$8 : 4 = 4 : 2. \text{ i t d.}$$

Wprawiay się dobrze w to.

(Fig: 93.) *Zagad:* Maiąc dany wielokąt wystawić drugi podobny, iżby pierwszy do drugiego był iak 3 : 2.

Rozwią: Bok AB wielokąta przenoszę gdzieindziéy i dzielę go na trzy równe części. Przedłużam potem liniią AB i na to przedłużenie przenoszę dwie ieszcze takie części

Na téy linii AC iako na średnicy kreślę półkole. Z punku B wyprowadzam prostopadłą BD; ta iest średnią proporcyonalną między AB i BC; (45 i 113) iest więc AB : BD = BD : BC; więc iest $AB^2 : BD^2 = AB : BC$.

Że zaś AB : BC = 3 : 2; więc i $AB^2 : BD^2 = 3 : 2$.

Wystawiwszy zatém na BD wielokąt podobny danemu; będzie dany zamykał 3 części takowe w powierzchni, iakich dwie będzie miał nowy, czyli pierwszy wielokąt będzie do drugiego iak 3 : 2.

Inne przykłady.

Wystawić wielokąty podobne iak 5 : 4, iak 2 : 1, 3 : 1, iak 7 : 5 i t d.

§ 132.

Powiedzieliśmy wyżéy, że okręgi kół są w stosunku promieni (126) powierzchnie zaś iak kwadraty z promieni. (130)

Gdybyśmy znali stosunek średnicy do okręgu, moglibyśmy dokładnie powierzchnią koła wyznaczyć, to wyznaczenie powierzchni koła nazywaią pospolicie *Kwadrówaniem koła.*

Archimedes naysławniéyszy w starożytności Matematyk wpisał i opisał na kole wielokąty o 96 bokach.

Porównywaiąc obwody ich z okręgiem znalazł stosunek średnicy do okręgu $1 : 3\frac{10}{70}$, który był cokolwiek mnieyszy, zaś $1 : 3\frac{10}{71}$, który był większy.

Przestano pospolicie na stosunku $1 : 3\frac{1}{7}$ czyli $7 : 22$.

Późniéy znaleziony został dokładniéyszy stosunek $113 : 355$.

Jakim zaś sposobem znayduie się, dowiesz się, ieżeli na tych początkach nię przestaniesz.

Przydatki

PRZYDATKI
DO CZĘŚCI I.

I.

O podniesieniu liczb do Kwadratu, i o wyciąganiu pierwiastku.

I. *Z rozmnożenia dwóch czynników powstaie* iloczyn.
Iloczyn powstały z rozmnożenia dwóch równych czynników zowie się Kwadratem: *czynnik takowy względem kwadratu zowie się iego* Pierwiastkiem.

II. *Niech będą liczby*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Kwadraty tych liczb są:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Te kwadraty inaczéy tak się wyrażaią np; *Kwadrat* 9, *albo* 3×3 *albo* 3^2

Kwadrat 25, *albo* 5×5 *albo* 5^2 *Kwadrat* 49, *albo* 7×7 *albo* 7^2, *liczba* 2 *nad* 7 *położona pokazuie, że* 7 *dwa razy wzięte iest za czynnik.*

Pierwiastki, z których kwadraty powstały, inaczéy tak się piszą: Pierwiastek kwadratu np: 49 *iest* 7 *albo* $\sqrt{49}$.

Ten znak $\sqrt{}$ *iest początkową głoską łacinskiego wyrazu* radix, *którym nazywamy pierwiastek.*

Kwadratu 81 *pierwiastek* 9 *albo* $\sqrt{81}$ *i t. d.*

III. *Dziesiątki są:*

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, *i t. d.*

Kwadraty ich są:

100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, *i t. d.*

Widzimy ztąd, że, kiedy pierwiastek składa się z cyfry i z zera, kwadrat iego składa się z kwadratu cyfry i z dwóch zer. Więc gdy z takowey liczby wypada kwadrat zrobić, dosyć go źrobić z cyfry i dwa zera dodadź.

IV. *Sta są:*

100, 200, 300, 400, *i t. d.*

Kwadraty stów są:

10000, 40000, 90000, 160000 *i t d.*

Tu widzimy znowu dwa razy więcéy zer w kwadratach niż w pierwiastkach.

V. *Tysiące są:*

1000, 2000, 3000

Kwadraty są:

1000000, 4000000, 9000000 *i t* d.

Wnieśmy w powszechności, że kwadrat z pierwiastku złożonego z cyfry i zer, składa się z kwadratu cyfry i z dwoyga tyle zer.

VI. *Zróbmy teraz kwadrat z* 12. *Zwyczaynie* 12 *przez* 12 *mnożymy, zaczynaiąc od iedności tak:*

$$
\begin{array}{r}
12 \\
12. \\
\hline
24 \\
12 \\
\hline
144.
\end{array}
$$

W robieniu kwadratów zaczynamy od dziesiątków i postępuiemy ku iednościom.

Robimy naprzód kwadrat z 10, *czyli mnożymy* 10 *przez* 10.

Ten kwadrat iest 100.

Mnożymy potém 10 *przez* 2 *i ieszcze raz* 10 *przez* 2; *co czyni* 40.

Nakoniec mnożymy 2 *przez* 2 *czyli robimy kwadrat z* 2, *który iest* 4.

Summa więc wszystkiego iest

$$\begin{array}{r} 100 \\ 40 \\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

VII. *Więc kwadrat, którego pierwiastek składa się z dwóch cyfr, zamyka.*

1. Kwadrat z dziesiątków.
2. Podwóyny iloczyn z dziesiątków przez iedności.
3. Kwadrat z iedności.

Na kwadracie ieometrycznym możesz sobie toż samo lepiéy wystawić.

Zrób teraz kwadraty zaczynaiąc od 12 *aż do* 99, *co dzień* np: *po pięć iak ci czas pozwoli.*

Gdy się wprawisz co raz lepiéy, spostrzeżesz, że w pierwszéy linii zawsze znayduią się dwa zera, w drugiéy iedno w trzeciéy nie masz żadnego.

Z tąd wniesiesz, że bez tych zer obeyśdż się można, np: *kwadrat z* 12 *można było tak pisać.*

1
4
4.

144.

Kwadraty wszystkie od 12 *do* 99 *napiszesz sobie na osobnéy kartce do dalszego użycia.*

VIII. *Zróbmy teraz kwadrat z pierwiastku maiącego trzy cyfry, to iest sta, dziesiątki i iedności*, np: z 134.

1. *Kwadrat* z 100 *iest* 10000.

2. *Podwóyny iloczyn* z 100 *przez* 30 *iest* 6000.

3. *Kwadrat* z 30 *iest* 900.

4. *Podwóyny iloczyn ze stów dziesiątków przez iedności czyli* z 130 *przez* 4 *iest* 1040, *nakoniec kwadrat z iedności czyli* z 4. *Summa więc będzie.*

10000
6000
900
1040
16.

17956.

IX. *Kwadrat więc z pierwiastku maiącego sta, dziesiątki, i iedności, składa się.*

1. *Z kwadratu stów;*

2. *Z podwóynego iloczynu słów przez dziesiątki.*

3. *Z kwadratu z dziesiątków.*

4. *Z podwóynego iloczynu stów dziesiątków przez iedności.*

5. *Z kwadratu z iedności.*

Zrobisz teraz sobie kwadraty zacząwszy od 101 *do* 999.

Daléy nie postąpisz, póki tych nie skończysz.

Codzień możesz ich zrobić po pięć lub więcéy, według tego, iak będziesz miał ochotę.

Względem zer toż samo postrzeżesz co w kwadratach powstałych z dwóch cyfr. Bez zer znowu zaczniesz kwadraty robić od 101 *do* 999. *Nie postąpisz daléy, póki tych nie skończysz.*

Jeżeliś dobrze obiął, co do tych czas wyłożyliśmy, łatwo potrafisz zrobić kwadraty z pierwiastków maiących tysiące, sta, dziesiątki i iedności, i t, d.

Zadasz sobie wiele przykładów i one odrobisz. Chcąc się przekonać o prawdzie wypadku, zwyczaynym sposobem mnożyć możesz liczby.

X. *Wyciąganie pierwiastków z kwadratów danych, iest przeciwne robieniu kwadratów.*

Kwadrat z 12 był

100	*albo*		1
40			4
4			4
144			144

Widzimy, że pierwsze 4 od prawéy ręki iest Kwadratem z iedności, zaś 1 iest kwadratem ze sta kwadraty więc kończą się na nieparzystych mieyscach.

Weźmy kwadrat z 134.

10000	1
6000	6
900	9
1040	104
16	16
17956	17956

Kwadraty w tym przykładzie podobnież kończą się na pierwszém, trzeciém i piątém mieyscu; więc maiąc dany iaki kwadrat, odcinaiąc przecinkiem po dwie cyfry od prawéy ręki, łatwo dowiedzić się można, z ilu cyfr składa się pierwiastek kwadratu, np: *w ostatnim kwadracie widzimy trzy oddziały; więc pierwiastek składa się z trzech cyfr, czyli ze stów, dziesiątków i iedności.*

XI. *Weźmy* np: *kwadrat* 144 *i wyciągniymy z niego pierwiastek, czyli doydźmy pierwiastek iego.*

Porobiwszy w nim oddziały, widzimy że pierwiastek składać się będzie zdwóch cyfr, czyli z dziesiątków i iedności

W drugim oddziale iest 1 *czyli sto. pierwiastek* 100 *iest* 10. *Odciągnąwszy kwadrat z* 10 *czyli* 100 *od* 144 *zostanie* 44.

W téy liczbie 44 *iest podwóyny iloczyn z dziesiątków przez iedności i kwadrat z iedności.*

Dziesiątki iuż znaleźliśmy; podwoiwszy one, będziemy mieli na dzielnik 20.

Podzielmy teraz przèz 20, *liczbę* 44, *wypadnie iloraz dwa.*

Zrobiwszy zaraz z 2 *kwadrat i dodawszy do iloczynu z* 2 *przez* 20, *odciągniymy to wszystko od* 44; *będzie więc pierwiastek* 12.

Wzór działania.

Z zerami.		1,44	10. *bez zer.*		1,44	12
		1,00			1	
	20	44	2	22	44	
		44			44	
		· ·				

Ten wzór kilka razy powtórz; potem wyciągniy pierwiastki z kwadratów dawniéy zrobionych, zacząwszy od 13 *do* 99.

Wzór drugi.

Z zerami

```
    | 1,79,56 | 100
    | 1 00 00 |
200 | 79 00   | 30
 30 | 69 00   |
      10 00
260 | 10 56   | 4
  4 | 10 56   |
      . . . .
```

Bez zer

```
    | 1,79,56 | 134
    | 1       |
 23 | 79
    | 69
264 | 10 56
    | 10 56
      . . . .
```

Wprawiay się teraz na kwadratach od 101 *do* 999. *Potrafisz potem bez cudzéy pomocy z kwadratów naywiększych pierwiastki wyciągać.*

XII. *W Jeometryi można mieć kwadraty dwa, trzy, siedm, iedenaście i t. d. razy większe od drugich, w Arytmetyce tego nie dokażemy.*

I tak liczba 2 *nie iest kwadratem. Pierwiastek iego nie może bydź* 1, *bo kwadrat z* 1 *iest* 1.

Pierwiastek nie może bydż także 2; *bo kwadrat z* 2 *iest* 4.

Więc pierwiastek kwadratu 2 *iest większy od iedności a mnieyszy od* 2; *musi więc bydż ułomkiem.*

Takowe

Takowe ilości $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ *i t d. nazywaią się* niespółmierne, *czyli, że nie masz takiéy ilości ani całkowitéy ani ułomkowéy, któraby się zupełnie w tych ilościach mieścić mogła.*

Z takowych ilości wyciąga się pierwiastek przez przybliżenie takim sposobem.

Do 2 np: *dodaie się po dwa zera.*

$$\begin{array}{r|l|l} & 2,00,00\ldots & 1,41 \\ & 1 & \\ \hline 24 & 100, & \\ & 96 & \\ \hline 281 & -400 & \\ & 281 & \\ \hline & 119 \text{ i t d.} & \end{array}$$

Pierwiastek więc przybliżony kwadratu 2 *iest* 1 *całkowita i* 41 *setnych. Możesz tę robotę daléy pociągnąć i będziesz miał pierwiastek co raz bardziéy do prawdziwego zbliżony.*

Z tego pierwiastku 1, 41 *robiąc kwadrat, spostrzeżesz różnicę zachodzącą między nim a prawdziwym kwadratem* 2.

Więcéy się nauczysz o niespółmiernych ilościach, gdy zechcesz naukę tę zgłębić.

Chcąc z ułomku kwadrat zrobić, trzeba go robić osóbno z licznika, osóbno z mianownika.

Gdy ułomek iest kwadratem nieprawdziwym, trzeba obrócić na ułomek dziesiątny i zwyczaynym sposobem iak z ilości niespółmiernych pierwiastek wyciągać.

II.

TRYGONOMETRYA.

Mieliśmy w Rozdziale IX. podane sposoby kreślenia tróykątów: lecz nie można przestać na samem tylko kreśleniu, dokładność wyznaczenia boków lub kątów tróykąta wymaga szczególnych rachunków. Do tego podaie sposoby Trygonometrya, przez które z sześciu części tróykąta, to iest trzech boków i trzech kątów, maiąc wiadome trzy części, a między niémi ieden przynaymniéy bok, można inne trzy wyznaczyć.

Tym końcem staraymy się poznać liniie, iakich w trygonometryi używamy.

§ 1.

O Wstawach i Dostawach.

1. Weźmy łuk EC. (Fi:94) Z końca iego E spuśćmy prostopadłą EF na promień BC przechodzący przez drugi koniec C łuku EC.

Prostopadła EF nazywa się *wstawą* łuku EC, lub kąta EBC, którego miarą iest łuk EC.

Wstawa więc łuku iest prostopadła spuszczona z iednego końca łuku na promień przechodzący przez drugi koniec łuku.

Łuk DE nazywa się *dopełnieniem* łuku EC do 90 stopni. Wstawę zaś EG łuku DE albo kąta DBE nazywamy wstawą dopełnienia czyli *dostawą* łuku EC; albo kąta EBC: wzaiemnie wstawę EF łuku EC albo kąta EBC nazywamy dostawą łuku ED albo kąta DBE.

2. W prostokącie GEFB, liniia GE równa iest BF. Kąt także BEF równy iest DBE; więc BF iest wstawą kąta BEF albo dostawą kąta EBF.

Podobnież EF iest wstawą kąta EBF albo dostawą kąta BEF.

Więc w troykącie prostokątnym BEF wziąwszy przeciwprostokątną BE za promień, ramiona kąta prostego będą wstawami kątów na przeciw nich leżących, a dostawami kątów przyległych.

3. Wstawy rosną zacząwszy od C do D. Wstawa DB ćwierci okręgu albo kąta prostego iest naywiększa.

Od D ku A wstawy zmnieyszaią się, w A zupełnie giną.

Więc wstawa EF łuku EC lub kąta EBF, iest także wstawą łuku EDA lub kąta EBA, który iest spełnieniem pierwszego do dwóch kątów prostych.

Uważay dobrze na różnicę między dopełnieniem i spełnieniem.

Pierwsze oznacza dodatek do kąta prostego; drugie dodatek do dwóch kątów prostych.

4. Wstawa EF iest połową cięciwy EN łuku dwa razy większego ECN; *wstawa więc iakiegokolwiek łuku iest połową cięciwy łuku dwa razy większego.*

Gdybyśmy mieli wyrachowane wstawy i dostawy podług promienia iednego koła, łatwobyśmy znaleśdź mogli wstawy i dostawy innego koła, maiąc promień iego wiadomy.

(Fig: 94 i 95.) Weźmy *np*: łuk LJ podobny łukowi EC czyli że *np*: po 30 stopni zamykaią; więc tróykąty EBF, LHM są podobne; bo kąty F, M są proste; kąt EBF = LHM; więc iest

BE : EF = LH : LM i znowu

BE : BF = LH : HM, więc gdybyśmy wstawy i dostawy mieli wyrachowane podług promienia BE, łatwobyśmy ie wyrachować mogli podług promienia HL za pomocą reguły trzech.

Promień iakiego koła wystawiamy sobie podzielony na 10 000 000 000 części równych; podług tego promienia kalkuluią się wstawy i dostawy łuków, zacząwszy od 1 sekundy.

Że zaś z téy rachuby liczby wielkie wypadaią, z któremi mnożenie i dzielenie byłoby bardzo trudne; wynaleziono układ innych liczb z któremi działania są daleko łatwiéysze i prędsze które się tylko dodaią i odeymuią, zowią się one *logarytmami.*

Gdy się liczby wstaw i dostaw maią mnożyć, logarytmy ich dodawaią się. Gdy się tamte dzielić maią, logarytmy ich odeymuią się.

Lecz, iakim sposobem wynayduią się liczby wstaw i dostaw tudzież ich logarytmy, dowiesz się, gdy będziesz chciał zgłębić tę naukę.

Tym czasem staray się tylko obiąć dokładnie zasady trygonometryi.

Łatwo swego czasu dopełnisz czego braknie.

6. (Fig: 96.) *Zagad:* 1. *Maiąc wiadomą z rozmiaru albo z rachunku przeciwprostokątną AB i kąt np: A lub B, trzeba wynaleśdź boki* BC *i AC.*

Wystawmy sobie, że podług promienia AD są wyrachowane wstawy i dostawy; więc stosunek promienia AD do iakiéykolwiek wstawy DF iest zawsze znaiomy.

Tróykąty ADF, ABC są podobne; więc ma się promień z rachunków wiadomy czyli tablicowy (: tak go nazwiymy:) do wstawy kąta A wiadomego czyli DF; iak przeciwprostokątna AB z rozmiaru wiadoma, do czwartéy proporcyonalnéy czyli BC; więc z tego rachunku dóydziemy boku BC w tych miarach, w iakich nam bok AB był dany.

Podług podobnéy proporcyi dóydziemy boku AC:

Promień tablicowy AD do wstawy tablicowéy kąta D czyli AF = AB : AC.

Aby rachunek sprawdzić można ieszcze te proporcye ułożyć:

Pro. : dostawy kąta ADF = AB : AC.

Pro. : dostawy kąta A = AB : BC.

7. *Zagad: 2. Maiąc przeciwprostokątną wiadomą AB i bok np: BC, znaleśdź kąty.* (Fig: 96.)

Aby znaleśdź kąt A, układam taką proporcyą:

AB : BC = Pro. tablicowy do wstawy kąta A.

Albo też: AB : BC = Pro. : dostawy kąta B.

Maiąc ieden z tych dwóch kątów łatwo znaydziemy drugi odciągaiąc go od kąta prostego.

8. *Zagad 3. Maiąc wiadome kąty, np: A lub B i bok BC, znaleśdź przeciwprostokątną.*

Znaydziemy ią przez tę proporcyą: wstawa A : Prom. = BC : AB albo dostawa B : Prom. = BC : AB. Staray się co dotąd było, dobrze zrozumieć.

§ 2.

O Stycznych, Siecznych. i t, d.

9. (Fig: 97.) Styczna AB wyprowadzona z punktu A do spotkania się z promieniem CE przedłużonym przechodzącym przez drugi koniec E łuku AE, zowie się *Styczną* łuku AE lub kąta ACB.

Promień zaś CE przechodzący przez koniec łuku AE, przedłużony do spotkania się z styczną w punkcie B zowie się *Sieczną* łuku AE lub kąta ACB.

Więc w każdym tróykącie prostokątnym ramie iedno *np:* AC kąta prostego wziąwszy za promień, drugie ramie kąta prostego AB będzie wtedy styczną kąta C; przeciwprostokątna zaś BC będzie sieczną tegoż kąta C.

10. Styczna DF łuku DE lub kąta DCF zowie się *dostyczną* łuku AE; zaś sieczna CF łuku DE zowie się *dosieczną* łuku AE lub kąta ACB.

Widzimy ztąd, że w tróykącie prostokątnym, w ktòrym ramie kąta prostego bierzemy za promień, mamy tylko styczną; dostycznéy zaś i dosiecznéy nie mamy.

Styczne i sieczne, dostyczne i dosieczne podobnież są wyrachowane podług promienia iednego koła.

Załóżmy, iż AH iest pronieniem tablicowym; więc HG (Fig: 96.) iest iego styczną; więc podług innego promienia AC można znaleśdź wszelką inną styczną CB; bo iest

AH : HG = AC : CB.

11. *Zagad*: 4. *Maiąc wiadomy bok AC w tróykącie prostokątnym i kąty, znaleśdź bok drugi BC.* (Fig: 96.)

Znaydziemy go przez tę proporcyą: Pro: Stycznéy kąta A = AC : CB.

12. *Zagad*: 5. *Maiąc wiadome boki AC i BC znaleśdź kąty A i B.* (Fig: 96)

Układam proporcyą:

AC : BC = Pro: Stycznéy kąta A; maiąc kąt A znaydziemy B.

13. *Zagad:* 6. *Maiąc wiadome boki AC, CB znaleśdź przeciwprostokątną.*

Szukam naprzód kąta A.

AC : BC = Pr. : Styczney A. (Fi: 96)

Teraz szukaymy przeciwprostokątney.

Wstawa kąta B : prom. = AC : AB.

Z temi wszystkiemi prawdami chciey się iak naydokładniey oswoić przez częste ich powtarzanie.

Daley nie postąpisz, póki się iak nayzrozumialey nie potrafisz ze wszystkiego wytłumaczyć.

Wiemy teraz, na iakich zasadach można wyrachować boki i kąty tróykątów prostokątnych.

Przystąpimy teraz do tróykątów nieprostokątnych.

§ 3.

Prawdy za pomocą których rachuią się boki i kąty tróykątów nieprostokątnych.

14. *W każdym tróykącie maią się boki, iak wstawy kątów im przeciwnych np: AB : BC = wst. C : wst. A.* (Fig: 98)

Tróykąt opiszmy kołem. Boki tróykąta są cięciwami łuków; więc ich połowy są wstawami kątów przeciwnych: *np:*

DB iest wstawą kąta C; BE iest wstawą kąta A; AF iest wstawą kąta B.

Połowy maią ten sam stosunek, iak i całe rzeczy; więc iest AB : BC = DB : BE to iest AB : BC = wstawa kąta C : wst. Kąta A; znowu AB : AC = wst. C : wst. B.

15. (Fig: 98.) *Zagad:* 7. Maiąc wiadomy bok AC zrachunków lub z rozmiaru i dwa przy nim leżące kąty A i C, znaleśdź boki AB, BD.

Ponieważ boki tróykątów maią się iak wstawy kątów im przeciwnych; więc przez te proporcye znaydziemy boki AB, BC.

wst. kąta B : wst. C = AC : AB.

wst. B : wst. A = AC : BC.

16. Gdybyśmy w tróykącie mieli dwa boki wiadome i kąt między niemi zawarty, nie moglibyśmy doyśdź reszty za pomocą powyższéy prawdy.

Znaydziemy na to inny sposób, wprzód zastanówmy się nad tą prawdą; że. *maiąc dane dwie ilości, większa składa się z połowy summy i z połowy różnicy, mnieysza składa się z połowy summy mniéy* połową różnicy *np.* 8 i 6 są dwie ilości.

Summa ich iest 14; więc połowa summy iest 7.

Różnica ich iest 2, więc połowa różnicy iest 1.

Otóż 8 = 7 + 1 zaś 6 = 7 — 1.

Toż samo na kątach pokazać można. (Fig: 99.) Kąt BAC niech wystawia summę kątów BAD i DAC.

Podzielmy liniią AE kąt BAC na dwie równe części BAE, EAC.

Kąt mnieyszy dany BAD przenieśmy na drugą stronę; więc CAF = BAD; więc DAF iest różnicą kątów danych.

Że zaś BAE = EAC; tudzież BAD = FAC; więc kąt DAE = EAF; więc DAE lub EAF iest połową różnicy kątów danych.

Oczywista więc, że kąt większy DAC składa się z połowy summy EAC i z połowy różnicy DAE.

Kąt zaś mniéyszy BAD składa się z połowy summy BAE mniéy połową różnicy DAE.

17. (Fig: 100) Maiąc w tróykącie dwa boki wiadome i kąt między niemi zawarty znaydziemy reszty przez następuiącą proporcyą. Boki AB, BC są wiadome i kąt B; więc kąt B odciągnąwszy od dwóch prostych znaydziemy summę; więc i połowę summy kątów BAC, BCA.

Summa boków BC + AB ma się do ich różnicy BC — AB, iak styczna połowy summy kątów BAC, ACB czyli Sty.

$\frac{A+C}{2}$ do styczné́y połowy ich różnicy czyli Sty. $\frac{A-C}{2}$

Z punktu B promieniem BA zakreślmy koło i przedłużmy CB do D; więc BD = BA; więc CD iest summą boków AB, BC.

BD = BF; więc FC iest różnicą boków AB, BC.

Prowadźmy DA i AF.

Kąt DAF w półkolu iest prosty, więc DA iest prostopadła do AF.

Z punktu C poprowadźmy równoodległą od AF do spotkania się z DA przedłużoną w E; więc DE iest także prostopadła do EC.

Kąt DBA iest zewnętrznym względem tróykąta ABF; więc iest równy summie kątów BAF i BFA. (49)

Kąt DBA iest także zewnętrzny, względem tróykąta ABC; więc równa się summie kątów BAC i BCA; więc summa kątów BAF, BFA równa iest summie kątów BAC, BCA.

Że zaś kąty BAF, BFA są sobie równe; więc którykolwiek z nich iest połową summy kątów BAC, BCA *np:* BFA $= \frac{BAC + BCA}{2}$.

Kąt BFA iest równy BCE, bo są iednostronne; więc kąt DCE iest połową summy kątów ABC i BCA.

Kąt BAC iest większy od BCA (57) a że BAF iest połową summy kątów BAC, BCA; więc kąt FAC iest połową różnicy tychże.

Kąt FAC równy iest ACE; bo są naprzemianległe; więc kąt ACE iest połową różnicy kątów BAC, BCA.

Kąt DCE iest połową summy kątów A i C; zaś ACE iest połową różnicy tychże kątów.

W tróykącie prostokątnym DEC wziąwszy EC za promień, będzie DE styczną kąta DCE czyli styczną połowy summy kątów.

W tróykącie prostokątnym AEC wziąwszy EC za promień, będzie AE styczną kąta ACE czyli styczną połowy róznicy.

W tróykącie DEC iest AF równoodległa od EC; więc iest.

DC : FC = DE : AE czyli

Summa boków wiadomych do ich różnicy, iak styczna połowy summy kątów tym bokom przeciwnych do styczney połowy ich różnicy.

Na téy zasadzie znaydziemy styczną połowy różnicy kątów, gdy mamy dwa boki wiadome i kąt między niemi zawarty.

Dodawszy tę połowę różnicy do połowy summy kątów, znaydziemy kąt większy. Odiąwszy połowę różnicy od połowy summy kątów, znaydziemy kąt mnieyszy.

18. *Maiąc w tróykącie trzy boki wiadome, kątów iego trzeba doyśdź.*

(Fig: 101.) Spuśćmy prostopadłą BF. Z następuiącéy proporcyi doydziemy odcinków podstawy.

Pwdstawa AC ma się do summy boków BC + AB iak różnica tychże boków do różnicy odcinków podstawy czyli FC — AF.

Promieniem AB zakreślmy koło; więc AB = BD; więc DC iest różnicą boków AB, BC, zaś GC summa tychże.

BF iest prostopadła do cięciwy AE; więc AF = FE, więc EC iest różnicą odcinków podstawy AF, FC.

Ma się sieczna koła AC do sieczném GC iak DC do EC (118) czyli podstawa tróykąta do summy dwóch boków, iak różnica tychże boków do różnicy odcinków podstawy.

Ponieważ podstawa iest wiadoma więc i iéy połowa; dodawszy do téy połowy połowę różnicy znaydziemy odcinek większy. Odiąwszy od połowy summy połowę różnicy, znaydziemy odcinek mnieyszy.

Maiąc odcinki AF, FC łatwo znaydziemy w tróykątach prostokątnych ABF, BFC kąty A, B, C.

CZĘŚĆ II.

ROZDZIAŁ I.

O Płaszczyznach.

§ 133.

Wiemy, że wielokąty są powierzchnie płaskie ograniczone liniiami, które się w nich bokami nazywaią.

Gdy powierzchnia iakiego wielokąta iest wiadomą w miarach kwadratowych, nazywa się *Polem.*

Powierzchnia zaś nieograniczona zowie się *Płaszczyzną*; więc wyrazy te, *Płaszczyzna*, *Powierzchnia*, *Pole*, iednę i też samę rzecz oznaczaią. Różnica między niemi zachodzi ta, że *Płaszczyzna iest powierzchnią bez granic*, *Powierzchnia ma granice*, *Pole zaś wyraża ilość miar kwadratowych powierzchni.*

§ 134.

Liniia prosta maiąca dwa punkta na iakiéy płaszczyznie, ma wszystkie inne na téyże płaszczyznie, czyli cała się na téy płaszczyznie mieści.

Liniia z założenia iest prosta, i ma dwa punkta na płaszczyznie; więc wszystkie iéy punkta muszą bydź w kierunku dwóch punktów danych; więc wszystkie te punkta są na płaszczyznie, na któréy znayduią się dwa punkta dane; więc cała liniia iest na iednéy płaszczyznie; więc liniia maiąca dwa punkta na iakiéy płaszczyznie, iest na téy płaszczyznie.

§ 135.

(Fig: 102) *Dwie liniie proste AC, DE przecinaiące się są na iednéy płaszczyznie.*

Liniia DE niech się posuwa wzdłuż AC zaczynaiąc od A ku C równoodlegle od siebie saméy. Oczywista ztąd, że ta liniia przebieży płasczyznę mieszczącą na sobie obiedwie liniie przecinaiące się.

Wnieść ztąd można, że liniie równoodległe od siebie są na iednéy płaszczyznie.

Wnieść także można, że ramiona kąta są na iednéy płaszczyznie.

§ 136.

(Fig: 103.) *Trzy punkta A, B, C nie w linii prostéy dane są na iednéy płaszczyznie.*

Ramiona *np*: kąta BAC są na iednéy płaszczyznie; więc punkta B i C są na téy saméy płaszczyznie, więc trzy punkta są na iednéy płaszczyznie.

Więc także trzy boki tróykąta są na iednéy płaszczyznie.

Lud prosty dobrze zna tę prawdę. Używa stołków na trzech nogach.

Gdziekolwiek one postawi czy na dworze czy na nierównéy podłodze, zawsze na nich mocno siedzi. Bo trzy punkta stanowią płaszczyznę.

Jeometrowie także, czyli iak mówią pospolicie Konduktorowie używaią stolika na iednéy nodze, która się na trzy odnogi rozkłada. Takowy stolik zawsze mocno stoi, bo na iednéy płaszczyznie.

§ 137.

(Fig: 104.) Przecięcie dwóch płaszczyzn ED, AC iest liniią prostą BG.

Na płaszczyznie ED weźmy punkta B i G. Te należą także do płaszczyzny A C.

Od punktu do punktu można tylko iednę liniią prostą prowadzić; więc liniia BG należy do obudwóch płaszczyzn więc płaszczyzny przecinaią się w linii prostéy.

Sexterny, xiążki, stoły i t, d. pokazuią ci to oczywiście.

Gdyby się więcéy płaszczyzn przecinało, ich przecięcie byłoby liniią prostą. (Fig: 105.)

Z punktu A linii AB prowadźmy liniie AC, AD, AE i t, d.

Liniia AB niech się posuwa równoodlegle od siebie wzdłuż linii AC, AD, AE, przebieży następnie płaszczyzny CB, DB, EB a spólném ich przecięciem iest A B.

§ 138.

(Fig: 106.) *Liniia prostopadła do płaszczyzny iest prostopadłą do wszystkich liniy AB, BD, BC, które z punktu spadku B poprowadzone są po płaszczyznie.*

Liniia iest prostopadła do płaszczyzny gdy się nie bardziéy na iednę iak na drugą stronę płaszczyzny nachyla. Gdyby z pomiędzy liniy AB, BD, BC iedna była, do któréyby EB nie była prostopadłą, nachylałaby się mniey lub więcéy ku téy linii, zatém także ku płaszczyznie; więc przestałaby bydź prostopadłą do pła-

§ 139.

szczyzny: więc liniia prostopadła do płaszczyzny iest prostopadłą do wszystkich liniy przez punkt spadku przechodzących.

§ 139.

(Fig: 106) *Gdy liniia iest prostopadła do dwóch liniy w punkcie ich przecięcia, iest także prostopadłą do płaszczyzny przez te dwie liniie przechodzącéy.*

Liniia EB iest prostopadłą do AB, i BC; więc nie przestanie bądź prostopadłą *np:* do AB, gdy ta koło EB będzie się obracała tak aby w każdém położeniu została prostopadłą do EB. W tym obrocie liniia AB spotka BC, do któréy EB iest także prostopadłą; więc BC znayduie się na płaszczyznie opisanéy przez AB; więc EB iest prostopadłą do płaszczyzny ABC; więc prostopadła do dwóch liniy w punkcie ich przecięcia, iest prostopadłą do płaszczyzny przez nie przechodzącéy.

§ 140.

Z punktu E wziętego nad płaszczyzną można tylko iednę prostopadłą spuścić. (Fig: 106.)

Gdybyśmy z punktu E mogli spuścić dwie prostopadłe BE, EA, złączywszy ich punkta spadku liniią AB, mielibyśmy dwie prostopadłe do AB, co bydź nie może. (26)

§ 141.

Z punktu E wziętego na płaszczyznie CB można tylko iednę prostopadłą EG do płaszczyzny wynieść. (Fig: 107.)

Gdybyśmy z punktu E mogli dwie prostopadłe EG, EH wynieść, przeprowadziwszy przez te liniie płaszczyznę GHEF, taby przecinała płaszczyznę CB w linii EF, do któréy EG, EH byłyby prostopadłe; co bydź nie może. (19. Wniosek)

Ztąd wnieść można, że prostopadła iest odległością punktu iakiego od płaszczyzny. Bo iest naykrótszą ze wszystkich pochyłych które z punktu iakiego do płaszczyzny prowadzić można.

§ 142.

(Fig: 107.) *Dwie liniie EG, FH prostopadłe do płaszczyzny CB są od siebie równoodległe.*

Złączmy końce prostopadłych liniią EF.

Liniie GE, HF są także prostopadłe do EF. Gdy się więc GE posunie równoodlegle od swego pierwszego położenia ku HF, póki się nie zniydzie z FH, liniie EG, FH i EF będą na iednéy płaszczyznie; a że EG, FH są prostopadłe do EF; więc są od siebie równoodległe.

§ 143.

(Fig: 107.) *Płaszczyzna GF przechodząca przez liniią JK prostopadłą do płaszczyzny CB iest do ostatniéy prostopadłą.*

Płaszczyzna GF przechodząca przez prostopadłą JK nie może nachylić się bardziéy do płaszczyzny CB z iednéy iak z drugiéy strony; więc płaszczyzna EH iest prostopadłą do płaszczyzny CB.

§ 144.

(Fig: 108.) *Spólne przecięcie dwóch płaszczyzn prostopadłych do trzeciéy, iest do téyże płaszczyzny prostopadłém.*

Z końca A spólnego przecięcia A B płaszczyzn CA, EA prostopadłych do GH wynieśmy prostopadłą. Ta i na iednéy i na drugiéy płaszczyznie znaydować się musi; ta prostopadła iest więc liniią AB czyli spólném przecięciem dwóch płaszczyzn; więc spólne przecięcie dwóch płaszczyzn prostopadłych do trzeciéy iest do ostatniéy prostopadłém.

§ 145.

Kąt, który dwie płaszczyzny przecinaiące się tworzą, nazywa się *dwuścienny,* *np*: xiążka otwarta pokazuie ci kąt dwuścienny.

Kąta dwuściennego iest miarą kąt, którego ramiona są prostopadłe do przecięcia ścian i na tychże znayduią się.

(Fig: 109.) Wyprowadźmy dwie prostopadłe JG, JH z punktu J do przecięcia FC po ścianach BF, FD.

Płaszczyzna BF niech leży na FD więc i GJ iest na JH.

Niech potém płaszczyzna BF obraca się koło FC.

W iakiémkolwiek będzie położeniu FB względem płaszczyzny FD, zawsze GJ będzie prostopadłą do FC; punkt zaś *np*: G większy lub mnieyszy łuk GMH opisze, podług tego, iak się płaszczyzna BF będzie oddalała od płaszczyzny FD, lub iak się do niéy zbliżać będzie; więc iako łuk GMH iest miarą kąta prostokreślnego, tak też iest miarą kąta dwuściennego; więc kąt zawarty między prostopadłemi spuszczonemi po płaszczyznach do ich spólnego przecięcia, iest miarą kąta dwuściennego.

Tę prawdę znaią rzemieślnicy. Gdy mierzą kąty ścian iakiego budynku, przykładaią wierzchołek węgielnicy ruchoméy do przecięcia ścian, ramiona węgielnicy zastępuią wtedy mieysce prostopadłych do tegoż przecięcia.

§ 146.

Jeśli dwie płaszczyzny równoodległe przecięte są przez trzecią, przecięcia ich także będą równoodległe.

Gdyby przecięcia tych płaszczyzn nie były równoodległe, spotkałyby się gdziekolwiek z sobą; więc musiałyby się także gdziekolwiek spotkać i płaszczyzny przedłużone. Że zaś z założenia płaszczyzny są równoodległe; więc się spotkać nie mogą, więc i ich przecięcia nigdy się nie zeydą, czyli są równoodległe.

ROZDZIAŁ II.

§ 147.

O kątach wielościennych.

Trzy, cztery lub więcéy płaszczyzn przecinaiących się tak po dwie, że wszystkie ich przecięcia schodzą się w ieden punkt, tworzą *kąt wielościenny*, czyli *kąt bryłowy*.

Kąty zaś prostokreślne, które składaią kąt wielościenny, nazywaią się *kątami płaskiemi*.

Róg stołu iest kątém wielościennym; że zaś z trzech kątów płaskich składa się, zowie się kątem *tróyściennym*.

Gdyby się kąt wielościenny składał ze czterech kątów płaskich, zwałby się kątem *czworościennym*: z pięciu, *pięciościennym i t, d.*

§ 148.

(Fig: 110.) *Summa kątów płaskich składaiących kąt wielościenny np: A iest zawsze mnieysza od czterech kątów prostych.*

Przetniymy płaszczyzny kąta wielościennego inną płaszczyzną; przecięcie to iest wielokątém GFEDCB.

Zwierzchołka A kąta wielościennego spuśćmy prostopadłą do wielokąta. (28) Od punktu spadku J prostopadłéy AJ prowadźmy liniie do wierzchołków wielokąta JC, JF, JE i t, d.

Kąty koło punktu J w wielokącie czynią cztery kąty proste.(18) Że zaś każdy kąt GJF iest większy od kąta płaskiego GAF; bo stoią na boku iednym GF, ale pierwszy ma wierzchołek J bliżéy boku GF, niż kąt płaski GAF; więc summa kątów płaskich GAF; FAE i t, d., iest mnieysza od summy czterech kątów prostych.

§ 149.

Teraz zróbmy kąty wielościenne z kąttów wielokątów foremnych. Weźmy 1od. Tróykąt równoboczny. Trzy kąty tróykąta czynią dwa kąty proste; (49) że zaś w tróykącie równobocznym kąty są równe; więc każdy iest trzecią częścią 2 kątów prostych czyli $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego; więc z trzech kątów tróykąta równobocznego można zrobić kąt tróyścienny.

Jeśli ieszcze każda ściana kąta tróyściennego będzie tróykątem równobocznym i dla zapełnienia mieysca dodamy czwarty tróykąt, zrobi się bryłka maiąca 4 kąty kąty tróyścienne i cztery ściany.

Takowa bryła zowie się *czworościanem*.

Z tektury zrobisz czworościan i następuiące bryły.

2. Cztery kąty tróykąta równobocznego czynią $\frac{8}{3}$ kąta prostego a zatém mniéy niż cztery kąty proste.

Bryłka maiąca kąty wielościenne złożone z czterech kątów płaskich tróykąta równobocznego i zakończona 8 tróykątami równobocznemi *ma* 8 *ścian ztąd* zowie się *ośmiościanem*.

3. Pięć kątów tróykąta równobocznegd czynią $\frac{10}{3}$; więc mniéy niż cztery kąty, proste.

Bryłka maiąca kąty wielościenne złożone z pięciu kątów płaskich tróykąta równobocznego i zakańczona 20 tróykątami równobocznemi *ma* 20 *ścian*; *ztąd* zowie się Dwudziestościanem.

Dotąd ściany brył były tróykątami równobocznemi.

4. Trzy kąty kwadratu nie czynią czterech kątów prostych.

Bryła maiąca kąty wielościenne złożone z trzech kątów prostych kwadratu, i zakończona 6 ścianami kwadratowemi, zowie się *sześcianem*. Znamy iuż sześcian zkądinąd i wiemy, że każda ściana iest kwadratem.

5. Kąt pięciokąta foremnego waży $\frac{6}{5}$ kąta prostego; (54) więc 3 kąty ważą $\frac{18}{5}$ kąta prostego. Otóż z trzech kątów pięciokąta foremnego można zrobić kąt wielościenny.

Bryła maiąca kąty wielościenne złożone z trzech kątów pięciokąta foremnego ma 12 ścian, z których każda iest pięciokątém i zowie się *dwunastościanem*.

Kątów sześciokąta foremnego używać nie można do zrobienia kątów wielościennych. Bo z dwóch nie zrobi się kąt wielościenny: gdyż miéysce pewne byłoby próżne a trzy kąty sześciokąta foremnego czynią cztery kąty proste.

Możnaby mieszać kąty rozmaitych figur i z nich bryłki robić; lecz ta rzecz bardziéy iest ciekawa, niż pożyteczna.

Co dotąd znasz, przyda ci się w Mineralogii a w szczególności w nauce o soli.

ROZDZIAŁ III.

O bryłach zamkniętych powierzchniami płaskiemi.

§ 150.

Weźmy iakikolwiek wielokąt foremny *np*: pięciokąt.

Podnieśmy ten pięciokąt, ale tak iżby zawsze był w równoodległém położeniu od pierwszego.

Mieysce przez ten pięciokąt przebieżone zowie się *Graniastosłupem*, albo z greckiego *Przyzmatem*.

Przecięcia ścian Graniastosłupa nazywaią się krawędziami.

Wielokąt; na którym graniastosłup stoi, zowie się *pódstawą*.

Prostopadła spuszczona z płaszczyzny równoodległéy od podstawy na podstawę nazywa się *Wysokością Graniastosłupa*.

Jeżeli krawędzie są prostopadłe do podstawy, zowie się graniastosłup *prostym* W tym przypadku krawędzie równaią się wysokości.

W przeciwnym razie graniastosłup nazywa się *Pochyłym*, i krawędzie są większe od wysokości.

§ 151.

Gdy graniastosłup ma podstawę tróykątną, zowie się *graniastosłupem tróykątnym*.

Gdy ma podstawę prostokątną zowie się *Równoległościanem*.

Gdy ma podstawę kwadratową i wysokosć równą krawędzi kwadratu, zowie się *sześcianem*.

We wszystkich graniastosłupach podstawy przeciwne są sobie równe.

Sciany w prostych graniastosłupach są prostokątami, w pochyłych zaś równoległobokami.

§ 152.

Gdziekolwiek przetniemy graniastosłup płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to zawsze będzie równém podstawie.

Boki podstawy są równe względnie bokom przecięcia; bo są bokami czworokątów maiących boki przeciwne równoodległe. (75)

Kąty przecięcia są równe względnie

kątom podstawy; bo są między równoodległemi (29) więc przecięcie graniastosłupa równoodległe od podstawy iest równe podstawie.

§ 153.

Weźmy iakikolwiek wielokąt foremny i ze środka iego wynieśmy prostopadłą (27) Na téy obierzmy gdziekolwiek punkt i prowadźmy od niego liniie do wierzchołków wielokąta. Na koniec przez te liniie przeprowadźmy płaszczyzny. Miéysce tak ograniczone zowie się *Ostrosłupem*, a z greckiego *Piramidą*.

Ponieważ w tym ostrosłupie prostopadła z wierzchołka spuszczona pada na śrzodek podstawy, nazywa się *ostrosłupem prostym*.

W przeciwnym razie iest *pochyłym*.

Prostopadła spuszczona z wierzchołka na wielokąt czyli na podstawę, nazywa się wysokością ostrosłupa.

W prostym ostrosłupie krawędzie wszystkie idące od wierzchołka ku podstawie są sobie równe.

§ 154.

Ostrosłup maiący za podstawę tróykąt, nazywa się *ostrosłupem tróykątnym*, maiący za podstawę czworokąt, pięciokąt i t d, nazywa się *czworokątnym*, *pięciokątnym i t d.*

(Fig: 111.) *Przecięcie ostrosłupa zrobione przez płaszczyznę równoodległą od podstawy iest podobnem podstawie.*

I tak sześciokąt b e ma bydź podobnym sześciokątowi BE.

Tróykąty *np:* CAD, cAd są podobne; bo kąt A maią spólny, liniie cd, CD iako równoodległe robią kąty iednostronne Acd, ACD i t d., równe; więc Ac : AC = cd : CD.

Toż samo o wszystkich innnych liniiach de, DE, fe, FE i t d, mówić można; więc te sześciokąty maią boki proporcyonalne.

Kąty także odpowiadaiące b c d, BCD i t. d, maią równe; bo są zawarte między równoodległemi bc, BC, cd, CD; maią więc te wielokąty kąty odpowiadaiące równe i boki proporcyonalne; więc są podobne. (109).

(Fi: 111) Boki odpowiadaiące przecięć ostrosłupa są w stosunku krawędzi; *np*: AC : Ac = CD : cd i t d. (101)

Więc podzieliwszy krawędź iednę ostrosłupa na kilka równych części i przez punkta podziału przeciąwszy ostrosłup płaszczyznami

szczyznami równoodległemi od podstawy, stosunek zawsze będzie iednakowy między częściami krawędzi i bokami przecięć.

Nadto przecięcia te będąc wielokątami podobnemi, są w stosunku kwadratów z boków odpowiadaiących, (129) czyli w stosunku kwadratów z odległości od wierzchołka ostrosłupa.

Będą więc przecięcia te, iak 1, 4, 9, 16, 25 i t d., które to kwadraty powstały z liczb 1, 2, 3, 4, 5 i t d.

Tę prawdę chciéy dobrze zrozumieć. W odległości iak 1 przecięcia, powierzchnia będzie iak 1.

W odległości 2 będzie powierzchnia iak 4; czyli będzie cztery razy większa od powierzchni pierwszego przecięcia.

W odległości iak 3 będzie powierzchnia przecięcia 9 razy większa od powierzchni przecięcia pierwszego i t d.

ROZDZIAŁ IV.

O Bryłach zamkniętych powierzchniami krzywemi.

§ 156.

Niech się prostokąt obraca koło iednego boku, póki nie powróci na mieysce pierwsze. W tym obrocie podstawa prostokąta i bok przeciwny podstawie przebiegły koła, zaś wysokość prostokąta opisała powierzchnią krzywą.

Mieysce ograniczone tą powierzchnią krzywą i dwoma kołami, nazywa się *Walcem* czyli z greckiego *Cylindrem*.

Liniia łącząca środki dwóch kół zowie się *Osią Walca*.

Prostopadła spuszczona z iednego koła do drugiego, zowie się *Wysokością Walca*.

Gdy oś Walca prostopadłą iest do dwóch iego podstaw, wtedy walec iest prosty.

Oczywista iest, że w walcu prostym wysokość równa się osi.

Walec iest ukośny, gdy oś nie iest prostopadła do podstąw, i w tym razie oś iest większa od wysokości walca.

Oczywista iest także, że przecięcie walca płaszczyzną równoodległą od podstawy zrobione, iest kołem równém podstawie.

Przeciąwszy zaś walec płaszczyzną równoodległą od osi, przecięcie to będzie prostokątem w walcu prostym; równoległobokiem w walcu ukośnym.

Ponieważ koło uważać można za wielokąt maiący wielką bardzo liczbę boków z tąd walec brać można za Graniastosłup.

§ 157.

Weźmy tróykąt prostokątny i niech się obraca około iednego boku, póki nie powróci na pierwsze mieysce. (Fig: 112).

Podstawa tróykąta opisała koło; przeciwprostokątna zaś krzywą powierzchnią. Mieysce ograniczone tém kołem i powierzchnią krzywą zowie się Ostrokręgiem.

Liniia łącząca wierzchołek ostrokręgu z śrzodkiem podstawy, zowie się *osią ostrokręgu.*

Gdy oś iest prostopadła do podstawy, ostrokrąg iest prosty i takowa oś iest oraz wysokością Ostrokręgu.

Ukośny iest, gdy oś iest pochyła do podstawy. W tym przypadku wysokość iest mnieysza od osi.

Liniia prowadzona od wierzchołka ostrokręgu do okręgu podstawy zowie się bokiem ostrokręgu.

§ 158.

Przetniymy ostrokrąg prosty płaszczyzną przechodzącą przez oś. Przecięcie to będzie tróykątem.

Przetniymy potém tenże ostrokrąg płaszczyzną równoodległą od podstawy, albo prostopadłą do osi, przecięcie to będzie kołem.

(Fig: 112.) Podzielmy bok BA ostrokręgu na 6 *np*: części równych i przez punkta podziałów prowadźmy płaszczyzny równoodległe od podstawy, przecięcia te są kołami. Koła wszystkie będąc podobne, maią się iak kwadraty z promieni 1 f, 2 g, 3 h. i t. d.

Zaś tróykąty B 1 f, B 2 g, B 3 h i, t, d. są podobne, więc iest.

B 1 : B 2 = 1 f : 2 g; więc koło, którego promień 1 f do koła którego promień 2 g iak kwadrat z B 1 do kwadratu z B 2 : czyli powierzchnia drugiego koła iest 4 razy większa od powierzchni pierwszego koła, powierzchnia trzeciego koła iest 9 razy większa od powierzchni pierwszego; więc podzieliwszy bok ostrokręgu na kilka części równych i poprowadziwszy przez podziały płaszczyzny równoodległe od podstawy, przecięcia te będą w stosunku kwadratów z odległości od wierzchołka.

Staray się tę prawdę dobrze zgłębić. Gdy będzie mowa w Fizyce o głosie i świetle, będzie ci bardzo potrzebna.

§ 159.

(Fig: 113.) Przetniymy ostrokrąg płaszczyzną pochyłą do osi; przecięcie ztąd wynikaiące nazywa się *Ellipsą*, *np:* DE.

(Fig: 114.) Przetniymy ostrokrąg płaszczyzną równoodległą od osi, krzywa liniia ztąd wynikaiąca zowie się *Hyperbolą np:* EF.

(Fig: 115.) Przetniymy nakoniec ostrokrąg płaszczyzną równoodległą od boku Ostrokręgu, liniia krzywa ztąd wynikaiąca zowie się *Parabolą np:* DE.

Pięć więc mamy przecięć ostrokręgowych, tróykąt, koło, Ellipsę, Hyperbolę i Parabolę.

O Ellipsie, Hiperboli i Paraboli w następuiącym Rozdziale mówić będziemy.

§ 160.

Niech się półkole AFB obraca, póki nie powróci na pierwsze mieysce. (Fig: 116.)

Taką powierzchnią krzywą ograniczone mieysce nazywa się *kulą.*

Srzednica około któréy półkole obracało się, zowie się *Osią kuli.*

Końce osi nazywaią się *biegunami.*

Wszystkie punkta półokręgu podczas obrotu były iednakowo odległe od środka kuli; ztąd wszystkie liniie ze środka kuli prowadzone do powierzchni są równe, czyli wszystkie promienie kuli są równe.

(Fig. 116.) Prostopadłe DE, CF, JH do średnicy półkoła, opisały wczasie obrotu iego, koła; ztąd wszystkie przecięcia kuli przez płaszczyzny prostopadłe do osi zrobione, są kołami.

Wszystkie liniie przechodzące przez śrzodek kuli a kończące się z obustron na iéy powierzchni są sobie równe i osi kuli: bo są złożone z dwóch promieni; ztąd można też samę kulę uważać iakby powstałą przez obrot innego półkoła, którego średnica iest *np:* KL; więc *iakokolwiek przetniemy kulę zawsze to przecięcie będzie kołem.*

Nazywamy wielkiemi kołami te, których płaszczyzny przechodzą przez środek kuli. Oczywista iest, że wszystkie koła wielkie iednéy kuli są równe.

Małemi kołami zowiemy te, które nie przechodzą przez śrzodek kuli: koła małe tém mnieysze bydź muszą, im bardziéy się od środka kuli oddalaią.

Te tylko koła małe są równe które równo są oddalone od śrzodka kuli.

ROZDZIAŁ V.

O niektórych własnościach Ellipsy, Hiperboli i Paraboli.

I. O ELLIPSIE.

§ 161.

(Fig: 117.) Niech będzie liniia AB przecięta prostopadle od linii DE. Weźmy AC = CB, CD = CE ale AC niech będzie większa od CD. Z punktu C promieniem CA nakreślmy koło, poprowadźmy cięciwy prostopadłe do AB, to iest: MN, M' N', M"N", M"' N"'... i. t. d.

Zróbmy AC : CD = PM : Pm...(104 Zag:)
i znowu AC : CD = P'M' : P'm'
AC : CD = P"M" : P"m" i. t. d.

Przez punkta m, m', m" i. t. d. z iednéy i drugiéy strony linii A B, tudzież przez punkta A, D, B, E, idąca liniia krzywa zowie się *Ellipsa.*

AB nazywa się *oś większa.* DE *oś mniéysza.* Punkt C środek Ellipsy. Punkta A, B iéy wierzchołki. Pm, P'm' i t. d. nazywaią się *rzędne.* AP, PB i t. d. zowią się *odcięte* odpowiadaiące rzędnéy Pm, uważane od wierzchołków Ellipsy A, B. CP, CP' są także odcięte uważane od środka Ellipsy C i należące do rzędnych Pm, P'm'.

§ 162.

Ponieważ AC : CD = PM : Pm
więc $AC^2 : CD^2 = PM^2 : Pm^2$ (127)
a że $PM^2 = AP \times PB$ . . (113: 2re)
więc $AC^2 : CD^2 = AP \times PB : Pm^2$

To iest: *Kwadrat z pół osi większéy ma się do kwadratu z pół osi mnieyszéy, iak iloczyn z odciętych do kwadratu z ich rzędnéy.*

§ 163.

Ponieważ $AC^2 : CD^2 = AP \times PB : Pm^2$
i znowu $AC^2 : CD^2 = AP' \times P'B : P'm'^2$
więc $Pm : P'm'^2 = AP \times PB : AP' \times P'B$

To iest: *Kwadraty z rzędnych są iak iloczyny z odciętych im odpowiadaiących.*

§ 164.

Wziąwszy proporcyą $AC : CD = PM : Pm$
i znowu $AC : CD = P'M' : P'm'$
wypada z nich, że: $Pm : P'm' = PM : P'M'$

To iest: *Rzędne Ellipsy są iak rzędne koła.*

§ 165.

Z proporcyi $PM : Pm = P'M' : P'm'$
iest $PM - Pm : Pm = P'M' - P'm' : P'm'$
czyli $Mm : Pm = M'm' : P'm'$.
będzie także $Mm : PM = M'm' : P'M'$

To iest: *Różnice rzędnych koła i Ellipsy tak się maią, iak rzędne Ellipsy, albo iak rzędne koła.*

Azatém, im mnieysza iest różnica między liniiami DC i AC, tém bardziéy przybliża się Ellipsa do koła: ieśli DC równa iest AC, wtedy nie będzie Ellipsy tylko koło.

Bo iest AC : CD = PM : Pm
Więc ieśli AC = CD, będzie PM = Pm

§ 166.

Ponieważ rzędne koła tak się maią iak rzędne Ellipsy, więc za powiększeniem pierwszych powiększaią się drugie, a za zmnieyszeniem pierwszych, zmnieyszaią się drugie. A że w punktach A i B, koło nie ma swoich rzędnych; więc nie ma ich i ellipsa. Więc: *Ellipsa tak iak koło iest liniią krzywą zamkniętą.*

§ 167.

Gdy iest AC : CD = PM : Pm
i znowu AC : CD = PN : Pn
a że PM = PN
więc Pm = Pn.

To iest: *Oś większa dzieli iakąkolwiek rzędną Ellipsy na dwie części równe.*

stąd wnieśmy że i Ellipsa dzieli się przez oś większą na dwie części równe. Podobnie dzieli ią na dwie równe części i oś mnieysza.

§ 168.

Założywszy że CP = CP', będzie PM = P'M' azatém będzie Pm = P'm'

To iest: *Rzędne Ellipsy w iednakowéy odległości od iéy środka są sobie równe.*

§ 169.

Z punktów D lub E promieniem AC naznaczmy na osi większéy punkta O, o: te punkta zowią się ogniskami Ellipsy, a zaś ich odległość od środka Ellipsy iako to OC, oC zowie się *mimośród.*

Własność Ellipsy iest, iż od iakiegokolwiek punktu wziętego na iéy obwodzie poprowadziwszy liniie proste do iéy ognisk, summa tych liniy równa będzie osi większéy. Stąd drugi iest sposób kreślenia Ellipsy. Wziąwszy nitkę równą długości osi większéy AB, końce téy nitki przytwierdzić w ogniskach O, o: potém trzeba ołowek trzymać przy nitce tak, aby iéy części Om, om były iednostaynie wyciągnięte, i kreślić linią krzywą od punktu A do B, będzie połowa Ellipsy: podobnie wykreśli się druga iéy połowa: w każdém bowiem mieyscu drogi przebytéy przez ołowek, summa liniy Om, om równa będzie AB. Liniie Om, om zowią się promienie wodzące.

Do nakreślenia koła iedna tylko liniia iest potrzebna, to iest promień: do nakreślenia zaś Ellipsy, trzeba dwóch promieni wodzących, gdy wiadoma iest oś większa i mnieysza, albo oś większa i ogniska i t. d.

§ 170.

Przez iakikolwiek punkt M (Fi: 118) wzięty na obwodzie Ellipsy poprowadziwszy do ogniska liniią Mo i przedłużywszy ią do punktu D tak aby MD była równa MO, ieżeli przez punkt M i środek linii OD to iest przez E poprowadzimy liniią MET, ta dotykać się będzie obwodu Ellipsy w iednym tylko punkcie czyli będzie do niéy styczną.

Ponieważ MD = MO i ED = EO; więc ME iest prostopadła do DO. Weźmy punkt m na linii TM; ten nie będzie na obwodzie Ellipsy. Poprowadźmy mo, mO, mD.

Gdyby punkt m był na obwodzie Ellipsy, tedy summa liniy

mo + mO byłaby równa Mo + MO
czyli mo + mD byłaby równa Mo + MD
czyli mo + mD byłaby równa oD, co bydź nie może (1) więc liniia TM iest styczną.

Maiąc prowadzić styczną z punktu *np:* m wziętego za obwodem Ellipsy, trzeba promieniem mO z punktu m kreślić łuk koła idący od O ku D, a z punktu o otwartością cyrkla równą AB przeciąć ten łuk w punkcie D: poprowadzić cięciwę DO: liniia mMET idąca przez środek cięciwy będzie styczną.

Tróykąty OME, DME przystaią, bo trzy boki iednego równe trzem bokom drugiego, więc kąty OME, EMD są sobie równe, aże kąt EMD = kątowi oMm; więc kąt OME = kątowi oMm.

Prawda ta potrzebna iest w Fizyce do tłumaczenia odbiiania się głosu i światła od powierzchni Elliptycznych: to iest, że rozchodzące się promienie głosu lub światła z iednego ogniska Ellipsy zgromadzaią się w drugiém iéy ognisku.

II.

O HIPERBOLI.

§ 171.

Niech będzie liniia Aa (Fig: 119.) podzielona na dwie równe części w punkcie C, i dwa punkta F, f, na przedłużeniu téy linii z obudwu stron wzięte w iednakowéy odległości od punktu C, szukaymy wielu punktów M tak położonych względem punktów f, F, aby różnica między Mf i MF była równa Aa; liniia krzywa przechodząca przez te punkta nazywa się *Hiperbola*.

Stąd wypada, że można kreślić podług danéy linii Aa dwie razem Hiperbole, to iest M, A, m, i M, a, m,: bo równie można ze strony a, i f, znaleść wiele punktów też samę maiących własność iaką maią punkta znalezione ze strony A, i F. Dwie te liniie krzywe zowią się Hiperbole przeciwległe.

Liniia Aa zowie się pierwszą osią Hiperbol przeciwległych. Punkta A, a, zowią się wierzchołkami Hiperbol. Punkta F, f, wzięte w iednakowéy odległości od ich wierzchołków zowią się ogniskami Hiperbol. Punkt C ich środkiem. Liniia idąca przez ten środek prostopadle nieoznaczonéy długości, zowie się drugą osią nieoznaczoną: odległością zaś cyrkla CF naznaczywszy od wierzchołka A dwa punkta B, b, będzie liniia Bb nazywała się drugą osią oznaczoną. Liniie CP i. t. d., zowią się odcięte odśrodka: linie PM i. t. d. są rzędne.

Aby wykreślić hiperbolę iednę lub dwie przeciwległych, trzeba z punktu f, otwartością cyrkla większą od fA *np*: fG nakreślić łuk nieoznaczony MGm: wziąwszy potém na pierwszéy osi ku punktowi C, liniią Ax równą AF, z punktu F otwartością cyrkla równą xG przeciąć łuk MGm w punktach M, m. Podobnym sposobem wyznaczywszy wiele punktów; liniia krzywa przez nie przechodząca, będzie Hiperbolą.

Bo liniie AF, Ax, af, są między sobą równe, więc fx = Aa aże fG — xG = fx, więc fG — xG = Aa, a że z wykreślenia fG = fM, a zaś xG = FM więc fM — FM = Aa.

Ponieważ promień fG iest nieoznaczonéy długości, więc Hiperbola ma odnogi nieskończenie od siebie oddalaiące się czyli iest liniią krzywą niezamkniętą.

Drugi sposób kreślenia Hiperboli iest następuiący (Fig: 120) Liniiał długi JMF przyłożyć do punktu F tak aby koło niego mógł się obracać. Wziąść nitkę krótszą od liniiału JMF tak aby różnica między długością liniiału i długością nitki była równa osi pierwszéy, ieden koniec téy nitki przytwierdzić do końca liniiału w punkcie J a drugi utwierdzić w ognisku f. Obracać potém liniiał JMF koło punktu F i trzymać ołowek przy nici iednostaynie wyciągniętéy nakreśli się iedna odnoga hiperboli AMX, podobnie nakreśli się i druga odnoga AMZ przewróciwszy Liniiał tak żeby nitka była z drugiéy strony osi pierwszéy. Druga hiperbola nakreśli się utwierdzaiąc liniiał w ognisku f.

§ 172.

Przez punkt m *wzięty na Hiperboli* (Fig: 119.) *poprowadzić styczną.* Poprowadźmy mF, mf, weźmy mD równą mF, poprowadźmy FD, liniia TEm idąca przez środek linii DF iest styczną: bo fD = fm — mD, aże mD = mF więc fD = fm — Fm = Aa.

Kąt FmT iest równy kątowi KmM. Przystosowanie tego będzie w Fizyce o odbiianiu się głosu lub światła, to iest, promienie idące z ogniska F *np:* kierunkiem Fm, odbiiaią się kierunkiem mK, który przedłużony myślą w przeciwną stronę padałby w drugie ognisko f.

III.

O PARABOLI.

§ 173.

Parabola iest krzywa liniia któréy każdy punkt iest iednakowo odległy od stałéy linii BJ (Fig: 121.) ktora nazywa się kierunkową, i od stałego punktu F który zowie się ogniskiem Paraboli.

Więc z każdego punktu M wziętego na paraboli poprowadzona MH prostopadła do linii kierunkowéy BJ iest równa odległości tegoż punktu od ogniska: to iest MH = MF.

Z ogniska F idąca prostopadła FE do linii kierunkowéy, wyznacza na Paraboli punkt A który się zowie iéy wierzchołkiem. Przez wierzchołek Paraboli A i iéy ognisko F idąca liniia AFP nieskończenie; nazywa się osią Paraboli. Od iakiegokolwiek punktu M na paraboli wziętego liniia idąca do ogniska F *np:* MF, zowie się promieniem wodzącym.

§ 174.

Kreśli się Parabola następuiącym sposobem. Weźmy A E równe AF. Przez

punkt

punkt E poprowadźmy prostopadłą do EF: do téy prostopadłéy przyłożmy liniią kierunkową BJ. Do linii kierunkowéy przytkniymy węgielnicę GHO, wziąść nitkę długości HO, ieden iéy koniec przytwierdzony bydź powinien do końca ramienia węgielnicy w punkcie O, a zaś drugi koniec przytwierdzony w ognisku F. Przysunąwszy węgielnicę do osi AF trzeba ią od niéy odsuwać trzymaiąc ołówek przy nitce zawsze iednostaynie wyciągniętéy, nakreśli się iedna odnoga Paraboli AMX. Przełożywszy węgielnicę na drugą stronę osi, i robiąc toż samo, wykreśli się druga odnoga Paraboli AMZ. Zawsze bowiem będzie MH = MF.

§ 175.

Przez punkt M (Fig: 122.) poprowadzić styczną do paraboli. Poprowadźmy promień wodzący MF, i prostopadłą z punktu M do linii kierunkowéy XZ to iest MH. Poprowadźmy FH, Liniia idąca przez punkt M i punkt O środek linii FH to iest MOT iest styczną do Paraboli.

Wszelki bowiem punkt G wzięty na stycznéy oprócz punktu M iest za parabolą. Z punktu G poprowadźmy liniie GF, GH i prostopadłą GZ do linii kierunkowéy XZ, Liniia GZ iest mnieysza od GH a zatem iest mnieysza od GF, więc punkt G nie iest na paraboli.

Kąt FMO, równy iest kątowi OMH, aże kąt OMH równy iest kątowi fMG więc kąt fMG równy iest kątowi FMO.

Z téy prawdy iest przystosowanie w Fizyce: że promienie głosowe lub światła odbiiaiąc się od wklęsłości paraboli zgromadzaią się w iéy ognisku.

ROZDZIAŁ VI.

O wynaydowaniu powierzchni

Brył.

§ 176.

Powierzchnia boczna lub wypukła graniastostupa prostego równa się iloczynowi z obwodu podstawy przez iego wysokość.

Powierzchnią wypukłą graniastosłupa prostego składaią prostokąty, z tych każdego prostokąta powierzchnia równa się iloczynowi z boków podstawy przez krawędź czyli wysokość graniastosłupa prostego. (82)

Wszystkie te prostokąty maią równą wysokość, więc zrobi się z nich ieden, którego wysokością będzie krawędź lub wysokość graniastosłupa, a podstawą summa boków wielokąta podstawy; więc powierzchnia wypukła graniastosłupa równa się iloczynowi z wysokości iego przez obwód podstawy.

Dodawszy więc ieszcze powierzchnie dwóch podstaw graniastosłupa prostego do iego powierzchnij wypukłéy, będziemy mieli całą powierzchnią graniastosłupa prostego.

Ponieważ walec iest tylko gatunkiem graniastosłupów; więc powierzchnia krzywa walca równa się iloczynowi z wysokości walca przez okrąg podstawy.

Dodawszy ieszcze powierzchnie dwóch kół, walca prostego, będziemy mieli całą powierzchnią iego.

§ 177.

(Fig: 123.) *Powierzchnia graniastosłupa ukośnego równa się iloczynowi z krawędzi przez obwód przecięcia prostopadłego do krawędzi.*

Równoległoboki składaią powierzchnią wypukłą graniastosłupa ukośnego. Krawędzie wszystkie CD, AE, BF są równe; można więc iednę z nich wziąć za podstawę równoległoboku, zaś summę liniy HG, GJ JH za wysokość iego; więc powierzchnia wypukła graniastosłupa ukośnego równa się iloczynowi z krawędzi przez obwód przecięcia prostopadłego do teyże krawędzi.

Więc także powierzchnia walca ukośnego równa się iloczynowi z boku walca przez okrąg koła prostopadłego do tegoż boku.

§ 178.

Powierzchnia wypukła ostrosłupa foremnego równa się połowie iloczynu z obwodu podstawy przez prostopadłą spuszczoną z wierzchołka ostrosłupa na bok podstawy.

Tróykąty równe składaią powierzchnią ostrosłupa foremnego. Każdego z nich powierzchnia równa się połowie iloczynu z podstawy przez wysokość (81) więc summa powierzchni tych tróykątów czyli powierzchnia wypukła ostrosłupa foremnego równa się połowie iloczynu z obwodu podstawy przez prostopadłą spuszczoną z wierzchołka ostrosłupa do boku którego kolwiek podstawy.

Więc także powierzchnia wypukła ostrokręgu prostego równa się połowie iloczynu z okręgu podstawy przez bok ostrokręgu.

Chcąc mieć całkowitą powierzchnią ostrosłupa lub ostrokręgu prostego, trzeba powierzchnią podstawy dodadź do powierzchni wypukłéy.

Chcąc powierzchnią wynaleśdź ostrosłupa ukośnego, trzeba powierzchnią każdego w szczególności tróykąta wynaleśdź, a potem dodadź. Summa powierzchni tych tróykątów będzie także powierzchnią ostrosłupa ukośnego wypukłą.

§ 179.

Odetniymy od ostrokręgu część, płaszczyzny równoodległą od podstawy. Część ostrokręgu zawarta między podstawą i przecięciem równoodległém zowie się ostrokręgiem ściętym.

Powierzchnia ostrokręgu ściętego prostego wypukła równa się połowie iloczynu z summy okręgów podstaw przez bok ostrokręgu ściętego.

Wystawmy sobie że, powierzchnia wypukła ostrokręgu ściętego prostego podzielona iest na małe czworokąty maiące boki przeciwne równoodległe. (Fig: 124)

Wiemy, że powierzchnia takiego czworokąta równa się połowie iloczynu z równoodległych podstaw przez wysokość. (83)

Wszystkie te czworokąty maią bok ostrokręgu za wysokość; więc summa powierzchni tych czworokątów, czyli powierzchnia ostrokręgu prostego ściętego równa się połowie iłoczynu z summy okręgów równoodległych przez bok tegoż ostrokręgu.

Wczworokącie maiącym dwa boki równoodległe połową summy boków równoodległych iest liniia równoodległa od tychże z połowy boku trzeciego wyprowadzona.

(Fig: 124) Czworokąt AC ma boki DC, AB równoodległe. Bok DA podzielmy w E na dwie równe części, i poprowadźmy EG równoodległą od AB. Będzie EG połową summy liniy DC i AB. Prowadźmy DB.

Z podobności tróykątów DEJ, DAB wypada, że EJ iest połową AB. Z podobności tróykątów BJG, BDC wypada, że JG iest połową DC, więc EG iest połową summy liniy AB i DC.

Więc poprowadziwszy płaszczyznę równoodległą od podstaw ostrokręgu ściętego przez połowę iego boku, *powierzchnia krzywa równa będzie iloczynowi z boku ostrokręgu ściętego przez okrąg koła w równéy odległości będącego od dwóch podstaw.*

§ 180.

(Fig: 125.) *Powierzchnia kuli równa*

się iloczynowi z okręgu wielkiego koła przez iego średnicę.

Przetniymy kulę płaszczyznami prostopadłemi od osi AB a zatém równoodległemi od siebie, na cząsteczki nieskończenie małe, tak iżby można łuki *np:* CD uważać za linije proste.

Tak byłaby podzielona kula na ostrokręgi ścięte z podstawami równoodległemi.

Powierzchnie tych ostrokręgów składaią powierzchnią kuli.

Powierzchnia ostrokręgu ściętego, którego bok iest CD, równa się iloczynowi z CD przez okrąg, którego promień iest EG z połowy boku CD wyprowadzony.(179)

Prowadźmy teraz promień ES i spuśćmy prostopadłą CJ, która równa iest FH. Nadto z połowy boku CD prowadźmy równoodległą EG.

Tróykąty CDJ, EGS są podobne; bo maią boki prostopadłe względem siebie, więc iest

$$ES : EG = CD : CJ \text{ czyli } FH.$$

Że zaś promienie maią się do siebie iak okręgi; więc zamiast promieni ES i EG weźmy okręgi O, i o; więc

$$O : o = CD : FH;$$ więc iloczyn $O \times FH$ równy $o \times CD$.

Dwa więc tu mamy wyrażenia powierzchni ostrokręgu ściętego, O $\times$ FH iest iloczyn z okręgu wielkiego koła przez FH czyli wysokość ostrokręgu ściętego.

o $\times$ CD iest iloczyn z boku ostrokręgu przez okrąg koła, którego promień iest EG.

Każdego więc ostrokręgu ściętego, będącego cząstką kuli, powierzchnia równa się iloczynowi z okręgu wielkiego koła przez wysokość *np*: FH; więc summa powierzchni wszystkich ostrokręgów ściętych, czyli powierzchnia kuli równa się iloczynowi z okręgu wielkiego koła przez śrzednicę,

§ 181.

Ponieważ powierzchnia wielkiego koła równa się iloczynowi z połowy promienia przez okrąg; (86) średnica zaś iest cztery razy większa od połowy promienia; więc powierzchnia kuli iest cztery razy większa od powierzchni wielkiego koła.

§ 182.

(Fig: 125) Powierzchnia krzywa walca opisanego na kuli, którego przecięciem iest prostokąt YZ, równą się iloczynowi z średnicy przez okrąg wielkiego koła; więc powierzchnia kuli iest równa powierzchni krzywéy walca.

Że zaś powierzchnia dwóch podstaw walca równa się iloczynowi z promienia przez okrąg wielkiego koła kuli; więc cała powierzchnia walca opisanego na kuli równa się iloczynowi z trzech promieni przez okrąg wielkiego koła; a że powierzchnia kuli równa iest iloczynowi z dwóch promieni przez okrąg wielkiego koła; więc powierzchnia kuli iest $\frac{2}{3}$ powierzchni walca opisanego na kuli.

ROZDZIAŁ VII.

O porównaniu powierzchni Brył.

§ 183.

Powierzchnie boczne lub wypukłe dwóch brył iednego gatunku są w stosunku iloczynów z podstaw przez wysokości.

Podstawy niech będą P, p; wysokości W, w.

Powierzchnia boczna pierwszéy bryły iest $P \times W$ lub $\frac{P \times W}{2}$,

Powierzchnia drugiéy $p \times w$ lub $\frac{p \times w}{2}$. Oczywista iest, że ma się powierzchnia wypukła pierwszéy bryły do drugiéy $= P \times W : p \times w$.

Założywszy teraz, że podstawy są równe, czyli $P = p$; więc powierzchnie te będą w stosunku wysokości, czyli $= W : w$.

Założywszy znowu, że wysokości są równe, powierzchnie będą w stosunku podstaw czyli iak $P : p$.

Założywszy nakoniec, że powierzchnie wypukłe są równe, będą iloczyny $P \times W$, $p \times w$, równe, czyli

$$P \times W = p \times w;$$

Rozłożywszy czynniki tych iloczynów na proporcyą, będzie $P : p = w : W$. czyli kiedy powierzchnie wypukłe dwóch brył są równe, maią podstawy w stosunku odwrotnym wysokości.

Stosuy to wszystko do dwóch graniastosłupów, walców, ostrosłupów lub ostrokręgów.

§ 184.

Bryły te nazywamy podobnemi, które maią wymiary wszystkie odpowiadaiące proporcyonalne czyli $P : p = W : w$.

Powierzchnie brył podobnych są w stosunku kwadratów z wymiarów odpowiadaiących.

Nazwiymy powierzchnie A, a
Było $A : a = P \times W : p \times w$ . . .
(183)
Że zaś z założenia mamy

$$P : p = W : w.$$

Więc rozmnożywszy wyrazy proporcyi pierwszéy przez wyrazy proporcyi drugiéy, będzie.

$$AP : ap = PW^2 : pw^2$$

$$\text{albo } AW : aw = P^2W : p^2w$$

W pierwszéy proporcyi podzieliwszy poprzedniki przez P
a następniki przez p;
W drugiéy proporcyi podzieliwszy poprzedniki przez W
a następniki przez w;
będą następuiące dwie proporcye

$$A : a = W^2 : w^2$$

$$A : a = P^2 : p^2$$

§ 185.

Powierzchnie dwóch kul są w stosunku kwadratów z promieni lub średnic.

Powierzchnia kuli iest cztery razy większa od powierzchni wielkiego koła; więc ma się powierzchnia pierwszéy kuli do powierzchni drugiéy kuli iak czwarta część powierzchni pierwszéy kuli do czwartéy części powierzchni drugiéy kuli, czyli iak koło wielkie pierwszéy do koła wielkiego drugiéy kuli.

Że zaś te koła maią się do siebie iak kwadraty z promieni lub z średnic, więc i powierzchnie dwóch kul maią się do siebie iak kwadraty z promieni lub średnic.

Jeśli więc kula iaka ma 4 razy większy promień od drugiéy, będzie miała 16 razy większą powierzchnią.

ROZDZIAŁ VIII.

O wynaydowaniu obiętości bryt.

§ 186.

Mieysce ograniczone liniiami nazwaliśmy *powierzchnią*, powierzchnią wiadomą w miarach kwadratowych *polèm*.

Mieysce ograniczone powierzchnią zowiemy *Bryłowatością* albo *Obiętością*.

Maiąc iaką bryłę, *np:* Graniastosłup, Walec, Ostrosłup, Ostrokrąg lub kulę, chcemy się dowiedzić, ile obeymuie liniy sześciennych, lub cali, łokci i t. d, sześciennych, czyli iaką te bryły maią *obięo٩ść*.

§ 187.

Bryłowatość graniastosłupa prostokątnego, czyli równoległościanu, równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość czyli iloczynowi z szerokości, długości i wysokości, czyli *iloczynowi z trzech krawędzi kąta tróyściennego.*

Załóżmy, że długość podstawy zamyka 5 cali liniiowych, szerokość 3, wysokość zaś 8 cali liniiowych.

Długość podstawy zamyka 5 cali li: szerokość podstawy ma 3 c. l; więc pole podstawy iest 15 cali kwadratowych czyli 3 × 5 cali □.

Gdyby graniastosłup dany miał tylko ieden cal w wysokości, zmieściłoby się tylko na podstawie 15 cali sześciennych.

Że zaś ma w wysokości 8 cali liniiowych, więc można go rozdzielić na 8 graniastosłupow z których każdy mieć będzie 15 cali sześciennych więc ośm graniastosłupów zamykać będzie 8 × 15 c. s. czyli 120 cali sześciennych czyli 3 × 5 × 8 c. sześciennych.

§ 188.

Dwa graniastosłupy maiące równe wysokości i równe podstawy co do powierzchni, nie zważaiąc na ilość boków tychże, maią równe bryłowatości.

Podstawy tych graniastosłupów co do powierzchni są sobie równe z założenia;

więc równa ilość miar sześciennych zmieści się na tych podstawach. Te miary sześcienne maią iedność za wysokość; więc te dwa graniastosłupy maiące iedność za wysokość są sobie równe co do bryłowatości.

Ponieważ z założenia graniastosłupy maią wysokości równe; więc można ie podzielić na równą ilość graniastosłupów równych co do bryłowatości, maiących iedność za wysokość; więc bryłowatości dwóch graniastosłupów maiących równe wysokości i podstawy bez względu na liczbę ich boków są równe.

§ 189.

(Fig: 126.) *Bryłowatości dwóch ostrosłupów maiących równą wysokość są w stosunku podstaw, nie zważaiąc na liczbę ich boków.*

Wysokości ostrosłupów AH, JP podzielmy na równą ilość części równych *np*: Ax równa Jz.

Przez punkta podziałów poprowadźmy płaszczyzny równoodległe od podstaw *np*: GFE, OQ, przecięcia są równoodległe od podstaw BDC, RM.

Ostrosłupy tym sposobem podzielone zostały na bryłki maiące iedność za wysokość.

Powierzchnią przecięcia GFE nazwiymy p; powierzchnią podstawy BDC nazwiymy P.

Powierzchnia przecięcia OQ niech będzie s, powierzchnia podstawy RM niech będzie S.

Przecięcie GFE iest równoodległe od BDC; więc mu iest podobne; więc są w stosunku kwadratów z boków odpowiadaiących lub z wysokości Ax, AH czyli iest $p : P = Ax^2 : AH^2$. Podobnież iest $s : S = Jz^2 : JP^2$.

Że zaś wysokości Ax, Jz są równe, także AH, JP są równe z założenia; więc iest $p : P = s : S$. czyli $p : s = P : S$. więc bryłka maiąca za wysokość iedność a za podstawę powierzchnią p, ma się do bryłki maiącéy za wysokość iedność a za podstawę powierzchnią s, iak podstawa P czyli BDC do podstawy S czyli KN; więc summa wszystkich bryłek maiących za wysokość iedność a za podstawę p, czyli Ostrosłup pierwszy ma się do summy wszystkich bryłek maiących za wysokość iedność a za podstawę S, czyli do ostrosłupa drugiego, iak podstawa pierwszego do podstawy drugiego bez względu na liczbę boków podstaw.

Ztąd wnieśmy, że dwa Ostrosłupy maiące równe wysokości i równe podstawy bez względu na liczbę ich boków maią równe bryłowatości.

§ 190.

Graniastosłup tróykątny daie się dzielić na trzy ostrosłupy tróykątne równe co do bryłowatości; bo maią podstawy i wysokości równe; więc bryłowatość ostrosłupa tróykątnego iest trzecią częścią bryłowatości graniastosłupa tróykątnego.

§ 191.

Podstawy graniastosłupów są wielokątami, które można na tróykąty podzielić, więc każdy graniastosłup wielokątny można na graniastosłupy tróykątne podzielić; ztąd każdy ostrosłup wielokątny iest trzecią częścią graniastosłupa wielokątnego maiącego z nim równą wysokość i podstawę.

§ 192.

Graniastosłupa iakiegokolwiek bryłowatość równa się iloczynowi z powierzchni podstawy przez wysokość. Bo graniastosłup iakikolwiek równa się równoległościanowi, prostokątnemu, gdy maią równą wysokość i podstawę.

Więc

Więc bryłowatość ostrosłupa równa się trzeciéy szęści iloczynu z powierzchni podstawy przez wysokość.

§ 193.

Walec iest gatunkiem graniastosłupów; więc bryłowatość walca równa się iloczynowi z powierzchni podstawy przez wysokość.

Ostrokrąg iest gatunkiem ostrosłupów; więc ostrokrąg iest trzecią częścią walca maiącego z nim równą wysokość i podstawę; więc bryłowatość ostrokręgu równa iest trzeciéy części iloczynu z powierzchni podstawy przez wysokość.

§ 194.

Bryłowatość kuli równa się trzeciéy części iloczynu z powierzchni kuli przez promień.

Kulę można sobie wystawić podzieloną na wielką liczbę ostrokręgów małych, maiących wspólny wierzchołek w środku kuli; więc wszystkie te ostrokręgi maią za wysokość promień.

Podstawami tych ostrokręgów są części powierzchni kuli.

Dodawszy wszystkie te ostrokręgi do siebie, powstanie ieden, który będzie miał za wysokość promień kuli, a za podstawę powierzchnią téyże.

Ten ostrokrąg równa się bryłowatości kuli; więc bryłowatość kuli równa się trzeciéy części iloczynu z powierzchni kuli przez promień, czyli równa się iloczynowi z powierzchni kuli przez $\frac{1}{3}$ promienia.

Więc bryłowatość kuli iest $\frac{2}{3}$ bryłowatości walca opisanego na kuli.

§ 195.

Chcąc bryłowatość wynaleśdź iakiéy bryły nieforemnéy, trzeba ią na ostrosłupy podzielić, każdego ostrosłupa w szczególności bryłowatość wynaleśdź, summa bryłowatości wszystkich ostrosłupów pokaże bryłowatość bryły nieforemnéy.

§ 196.

Znaleśdź obiętość ziemi naszéy w milach sześciennych.

Obiętość ziemi równa się iloczynowi z powierzchni ziemi przez trzecią część promienia.

Szrednica ziemi zamyka 2865 mil; więc $\frac{1}{3}$ promienia iest $477\frac{1}{2}$ mil liniowych.

Okrąg wielkiego koła kuli naszéy zamyka 9000 mil; powierzchnia więc ziemi zamyka mil kwa: 25785000; rozmnożywszy te powierzchnią przez $477\frac{1}{2}$; wypadnie 12 312 337 500; więc ziemia nasza zamyka mil sześciennych

12 312 337 500.

ROZDZIAŁ IX.

O porównaniu obiętości Brył.

§ 197.

Wiemy, że bryłowatość czyli obiętość iest iloczyném z trzech wymiarów; więc obiętości dwóch brył są w stosunku iloczynów z trzech wymiarów.

Nazwiymy bryłowatości dwóch brył B, b.

Długość podstawy D, d, szerokość podstawy S, s, wysokości brył W, w; więc będzie

$$B : b = D \times S \times W : d \times s \times w.$$

Założmy, że wysokości dwóch brył są równe; więc iest

$$B : b = D \times S : d \times s.$$

W tym przypadku są bryły w stosunku podstaw.

Jeśli podstawy będą równne, czyli $D \times S = d \times s$; wtedy bryły będą iak wysokości czyli $B : b = W : w$, więc ieżeli dwa graniastosłupy, lub dwa walce, lub też graniastosłup i walec maią wysokości równe, bryłowatości ich będą w stosunku podstaw.

Jeżeli podstawy maią równe, bryłowatości będą w stosunku wysokości.

Toż samo powiedzieć można o dwóch ostrosłupach, ostrokręgach, lub o ostrosłupie i ostrokręgu.

§ 198.

Założmy teraz, że wysokości są w stosunku odwrotnym podstaw czyli że $W : w = d \times s : D \times S$; w tym przypadku bryłowatości będą równe.

Jest z założenia $W : w = d \times s : D \times S$. więc iest $W \times D \times S = w \times d \times s$.

$W \times D \times S$ iest wyrażeniem bryłowatości pierwszéy bryły: $w \times d \times s$ iest wyrażeniem bryłowatości drugiéy bryły.

Że zaś bryłowatości maią się do siebie iak iloczyny z trzech wymiarów; więc iest $B : b = W \times D \times S : w \times d \times s$.

Że zaś poprzednik drugiego stosunku

iest równy następnikowi; więc i $B = b$ czyli, gdy bryły maią wysokości w stosunku odwrotnym podstaw, maią wtedy bryłowatości równe.

§ 199.

Bryły podobne są w stosunku sześcianów z boków odpowiadaiących.

Ponieważ bryły są podobne;

więc $W : w = D : d = S : s$.

Proporcya ta

$$B : b = W \times D \times S : w \times d \times s.$$

zamienia się więc w tę:

$$B : b = D \times D \times D : d \times d \times d = W \times W \times W : w \times w \times w = S \times S \times S : s \times s \times s.$$ czyli

$$B : b = W^3 : w^3 = D^3 : d^3 = S^3 : s^3$$

Dwie kule *np*: maią się do siebie iak sześciany z promieni lub średnic.

Jeżeli promień kuli iakiéy dwa razy iest większy od promienia drugiéy kuli, bryłowatość będzie 8 razy większa od drugiéy.

Dotąd zastanawialiśmy się nad liniiami, powierzchniami i bryłowatością czyli obiętością ciał.

Liniy bez powierzchni nigdzie nie ma, również powierzchni bez ciała. Oderwaliśmy nieiako, że tak powiem, liniią od powierzchni a powierzchnią od ciała abyśmy tém lepiéy własności onych poznać mogli.

Sama natura nasza każe nam to czynić. Podróżny *np*: nie pyta się, iak szeroka iest droga którą ma przebydź, tylko iak iest długa.

Właściciel włości bynaymniéy nie stoi o głębokość roli, tylko o obszerną powierzchnią téyże.

Zwracaiąc uwagę na rozmaite stany ludzkie, spostrzeżesz tysiące przykładów prawd przytoczonych.

Powierzchnia iest granicą ciała, liniia granicą powierzchni, a punkt granicą iest linii.

Ciało iest rozległością maiącą trzy wymiary, *długość*, *szerokość i głębokość* lub *wysokość*.

Powierzchnia iest rozległością maiącą dwa wymiary, *długość i szerokość*.

Lininiia nakoniec iest rozległością maiącą ieden wymiar, *długość*.

Punkt iest końcem linii czyli granicą téyże; punkt więc nie iest rozległością.

Punkt naturalny albo fizyczny ma swoię rozległość, równie iak liniia naturalna albo fizyczna *np*: sznur, łańcuch, pręt drewniany i t. d. maią swoię rozległość.

Nauka któréy początki tu wyłożyliśmy, nazywa się pospolicie *Geometryą*, lub *Jeometryą*.

Geometrya iest więc nauką o rozległości.

Wyraz Geometrya składa się z dwóch wyrazów greckich, *ge*, ziemia i *metreo*, mierzę.

Część pierwszą nazywaią pospolicie *Planimetryą*. Wyraz łaciński *Planum* znaczy, Płaszczyzna.

Część drugą nazywaią *Solidometryą* lub *Stereometryą*.

Wyraz łaciński *Solidus* znaczy to samo, co grecki *Stereos*, stały, mocno stoiący, tak iak ciało stałe.

Nauki zaś te wszystkie, iak Arytmetyka, Geometrya i Algiebra zowią się *Matematyką*.

Wyraz grecki *Mathematikos*, znaczy, bydź sposobnym do uczenia się; więc ten, który zna gruntownie początki téy nauki, lepiéy pozna inne, i gruntowniéy one obeymie; bo do porządnego myślenia, a zatém do rozumowania iest przyzwyczaiony.

KONIEC.

PRZYDATEK
DO CZĘŚCI II.

O robieniu Sześcianów i wyciąganiu pierwiastków.

Sześcian ma trzy równe wymiary; więc chcąc z liczby iakiéy sześcian zrobić, trzeba ią trzy razy wziąść za czynnik.

Liczb pierwszych sześciany są

1, 8, 27, 64, 125, 216 *i t, d.*

Inaczéy piszą się sześciany te tak:

1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, *i t, d.*

Wymawia się to tak np: 2^3 *podniesione do trzeciego stopnia.*

Pierwiastki ich piszą albo

1, 2, 3, 4 *i t, d. albo* $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{125}$ *i t, d.*

Zróbmy np: sześcian z 12.

Sześcian ten składać się będzie,

1od. Z sześcianu dziesiątków, który iest 1.

2º *Z iloczynu trzy razy wziętego z kwadratu dziesiątków przez iedności, który iest* 6.

3º *Z iloczynu trzy razy wziętego dziesiątków przez kwadrat iedności, który iest* 12.

Nakoniec z sześcianu z iedności czyli 8, *cały więc sześcian iest*

$$\begin{array}{r} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Zrób teraz sześciany, iakeś dawniéy kwadraty robił, od 13 *do* 99. *Wprawisz się w prędkie bardzo mnożenie, a nay-bardziéy uwagę swoię wzmocnisz, co ci w różnych okclicznościach życia bardzo będzie pożytecznem.*

W kwadratach odcinaliśmy po dwie cyfry; w sześcianach odcinać będziemy po 3; *bo sześcian z dziesiątków w przykładzie przytoczonym kończy się na* 4*tém mieyscu a sześcian z iedności na pierwszem.*

Jeżeli się nauczysz dobrze sześciany robić, łatwo potrafisz wyciągać pierwiastki.

Wyciągniymy pierwiastek z przykładu powyższego 1,728.

Sześcian ten ma dwa oddziały więc pierwiastek będzie się składał z dwóch cyfr, z dziesiątków i iedności.

Sześcian dziesiątków ma za pierwiastek 1. Odciągnąwszy to 1, zostanie 728.

W tych 728 mieści się potróyny iloczyn z kwadratu dziesiątków przez iedności; nadto potróyny iloczyn z kwadratu iedności przez dziesiątki i sześcian z iedności.

Dziesiątek tu 1 mamy; kwadrat z 1 iest 1; potróyny iest 3.

Ten dzielnik 3 mieści się w 7, razy 2. Jloczyn z nich iest 6.

Teraz zróbmy z 2 kwadrat; ten iest 4. rozmnożony przez dziesiątki czyni 4; trzy razy wzięty iest 12.

Nakoniec zrobiwszy z 2 sześcian 8; i dodane te wszystkie iloczyny odciągnąwszy od 728, nic nie zostanie.

Wzór	1,728	12
	1	
3	· 728	
	728	
	• • • •	

Zrobisz potém sześciany z trzech cyfr i t, d. Sposób postępowania iest ten sam.

Umieiąc dobrze wyciągać pierwiastki z prawdziwych sześcianów, łatwo wyciągniesz z innych przybliżone pierwiastki, dodawaiąc zawsze po trzy zera.

= o =

REIESTR

ROZDZIAŁOW.

Część I.

Koniec Reiestru Rozdziałów.

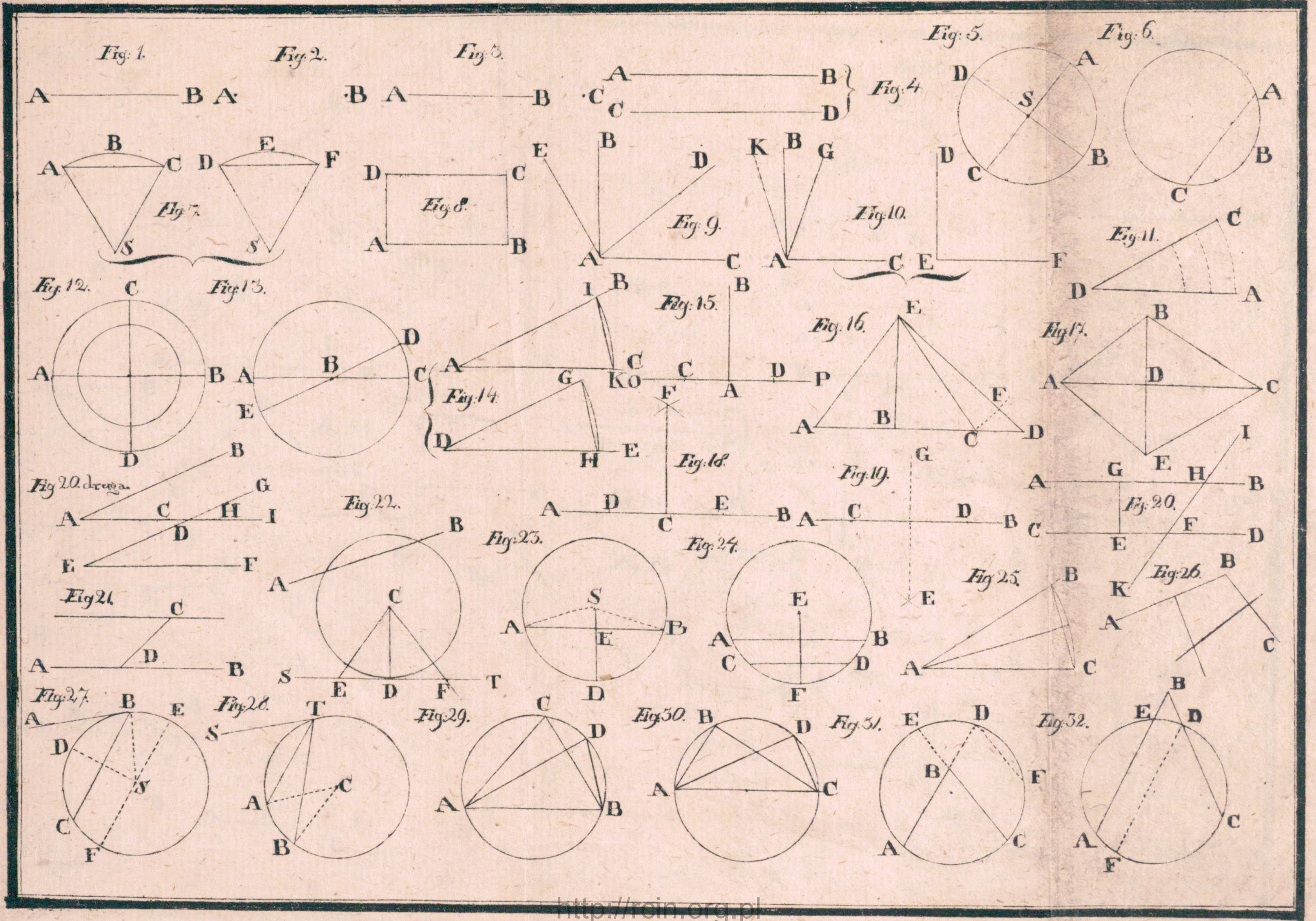


Fig: 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 20. druga.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.

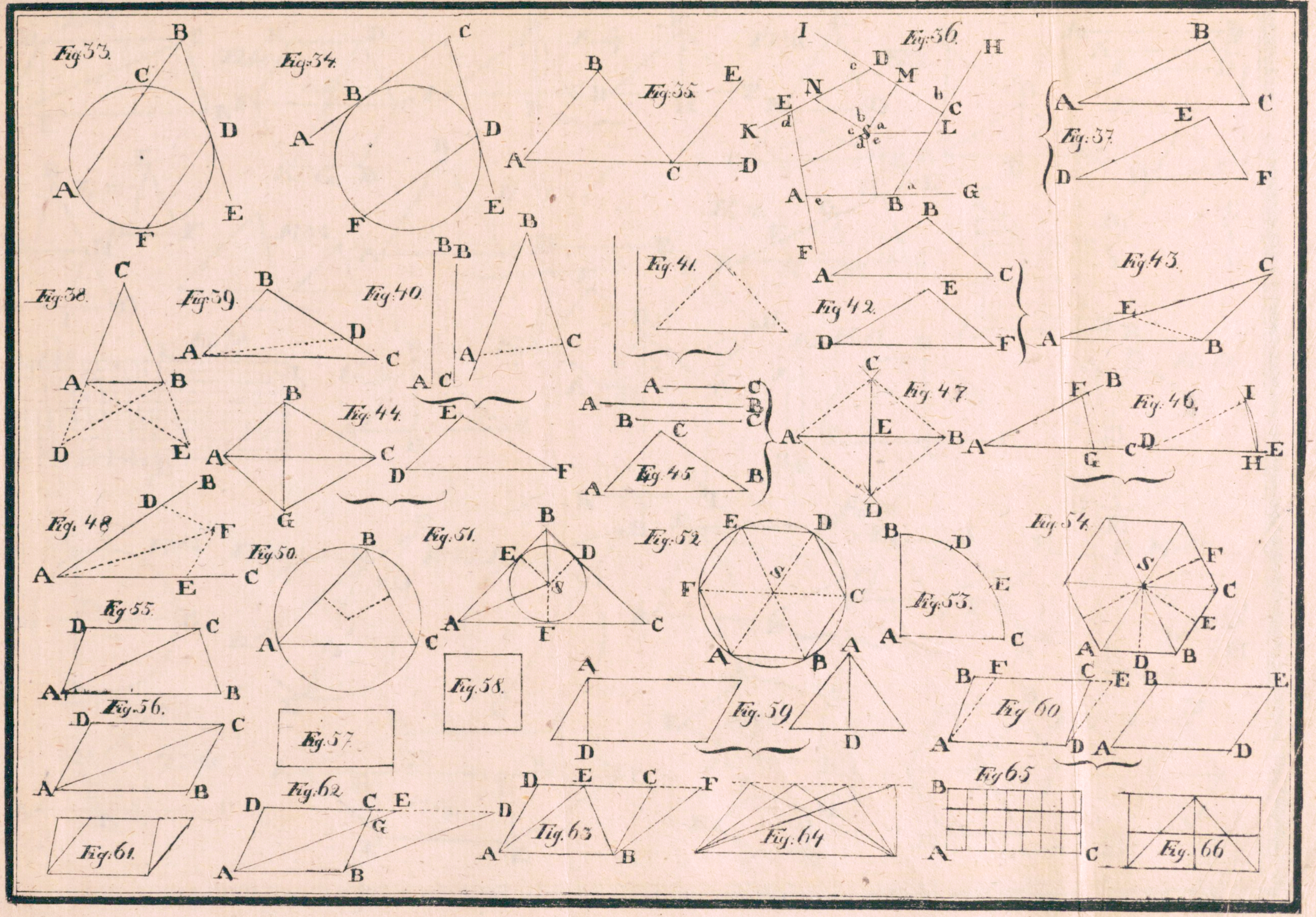
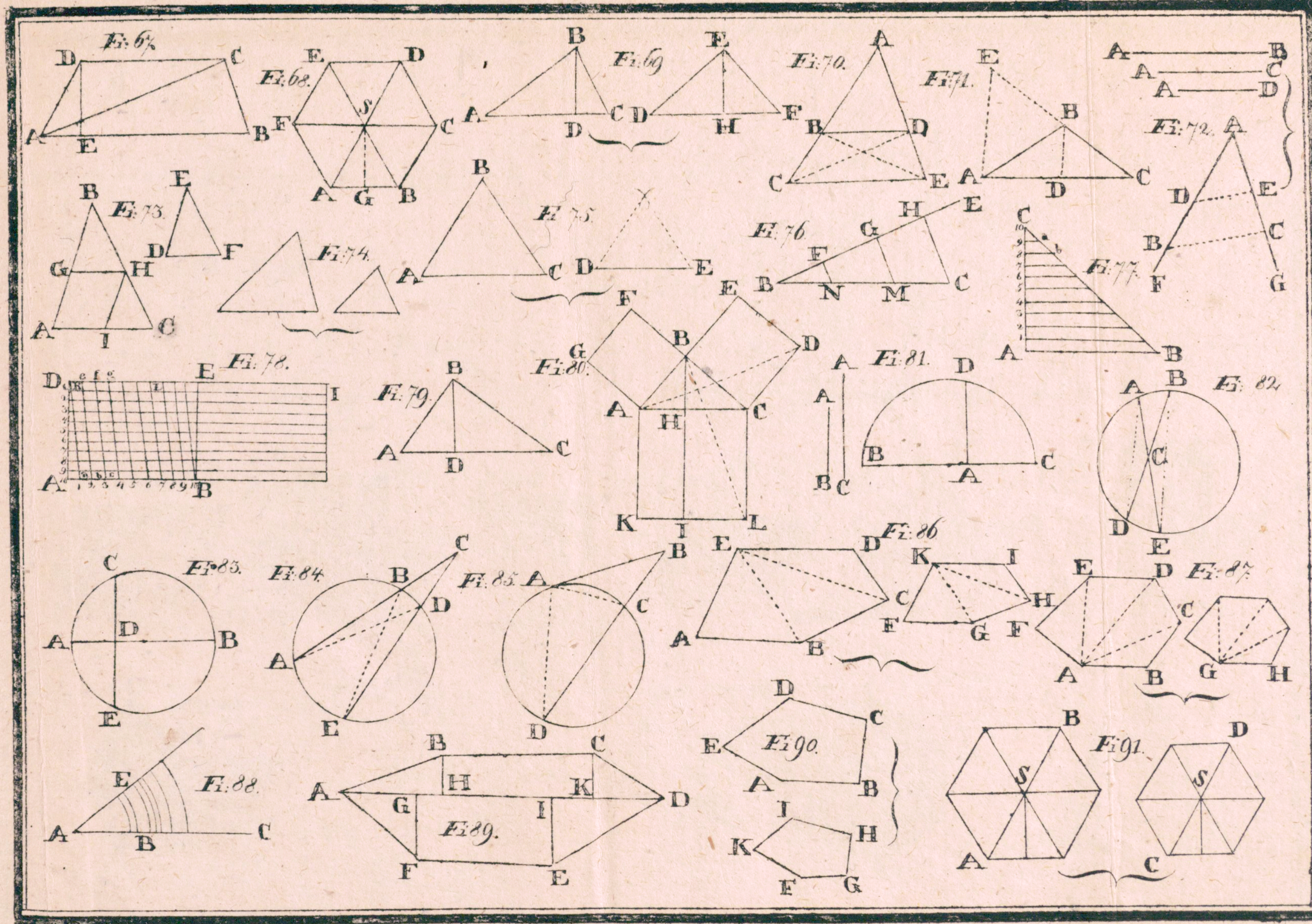
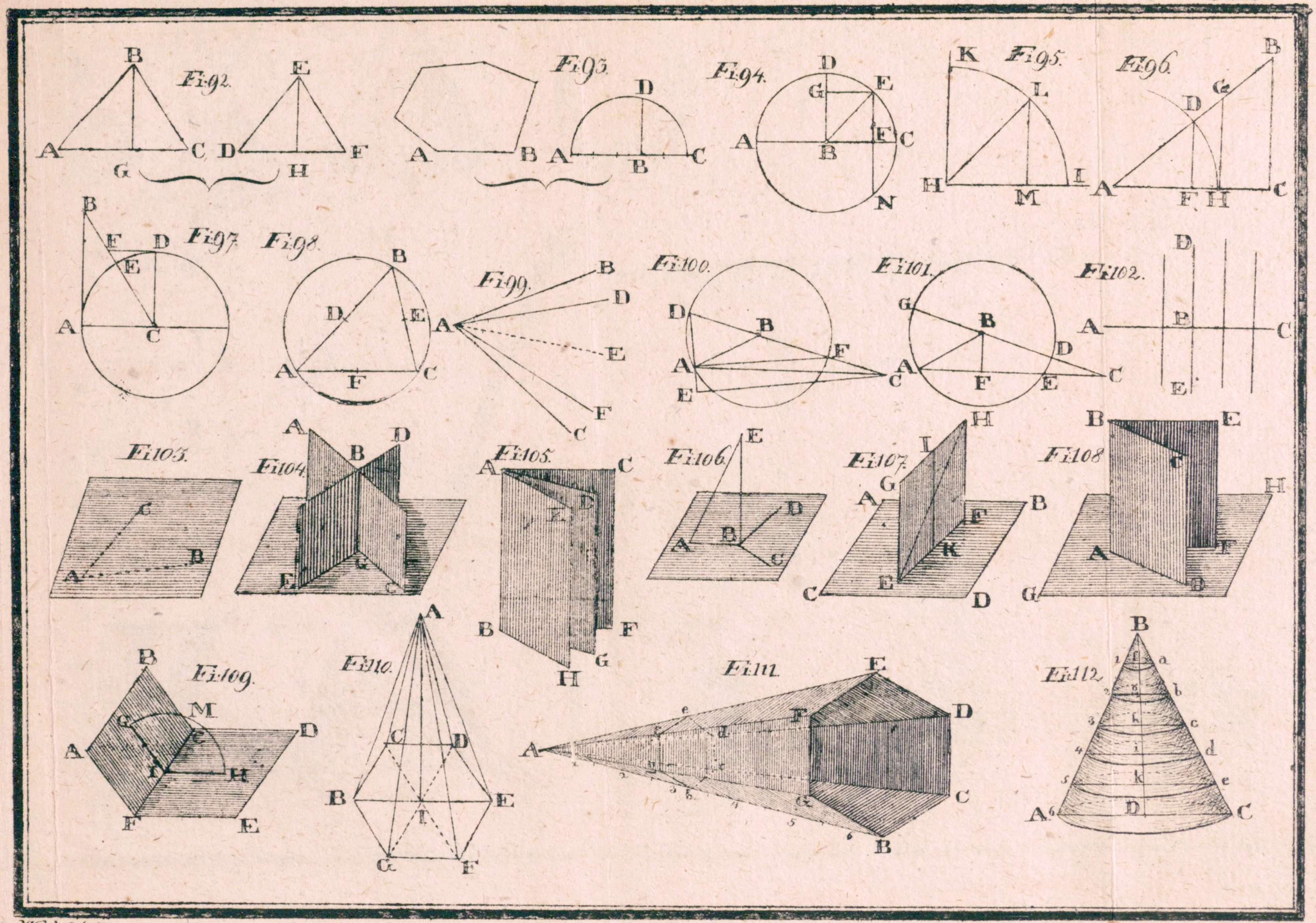


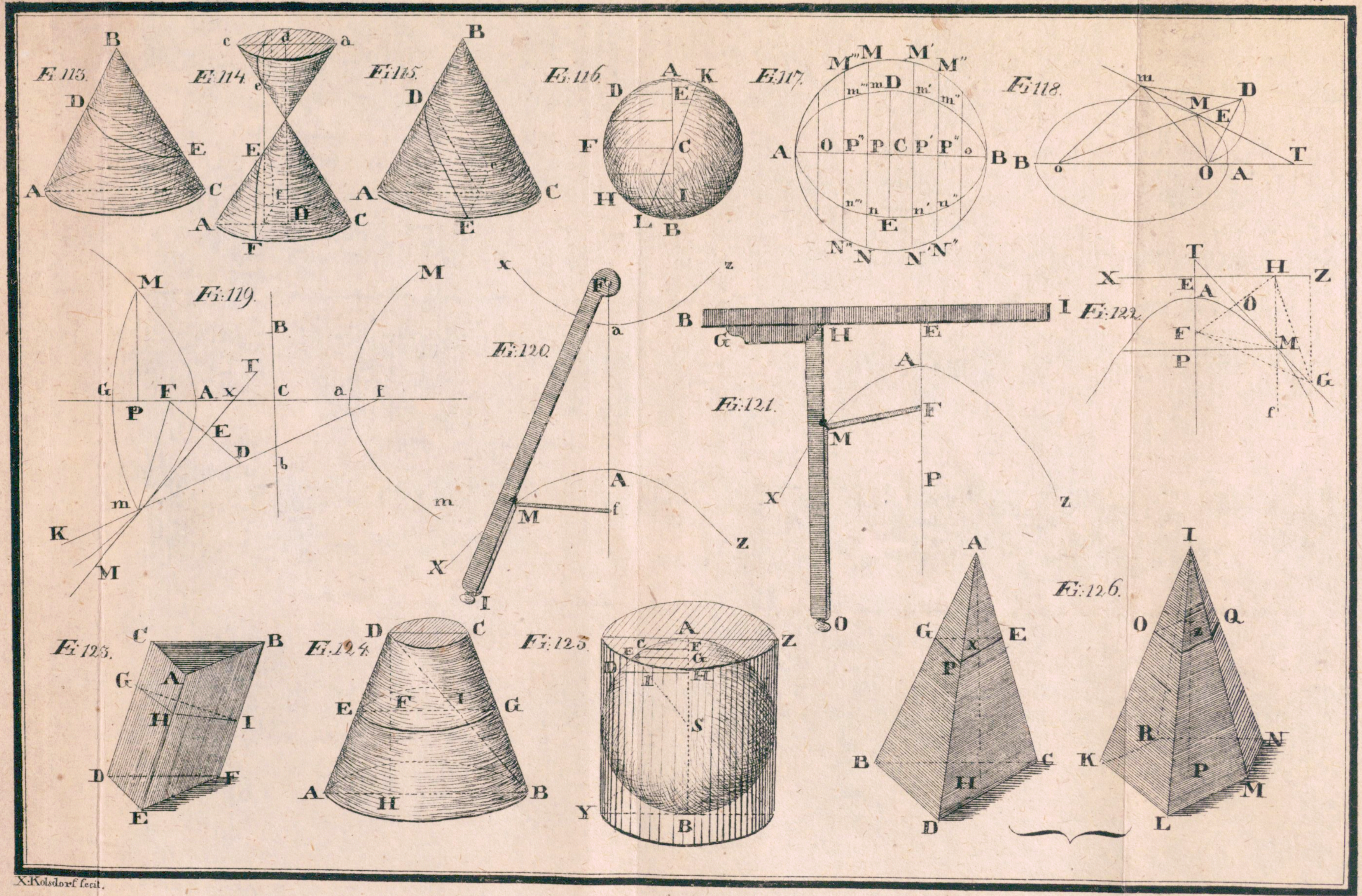
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.



A. Kelsdorf fecit



X.Kilodzel fecit.



X. Kolsdorf fecit.

Vr