WYRWICZ — POCZĄTKI GEOMETRYI

# POCZĄTKI
# GEOMETRYI
## DLA SZKÓŁ POWIATOWYCH.

NA KLASSĘ TRZECIĄ.

Z TRZEMA TABLICAMI FIGUR.

Cena z oprawą w papier srebrem kop. dwadzieścia.

W WILNIE

NAKŁADEM I DRUKIEM A. MARCINOWSKIEGO.

1829.

*Dozwala się drukować z warunkiem aby po wydrukowaniu złożone były trzy exemplarze w Komitecie Cenzury. Wilno 1829 d. 13 lipca.*

*Cenzor L. Borowski.*

# POCZĄTKI GEOMETRYI.

## XIĘGA CZWARTA.

### WIELOBOKI FOREMNE, I MIARA KOŁA.

OPISANIE.

Wielobok, który jest razem równokątnym i równobocznym, nazywa się *wielobokiem foremnym*. Wieloboki foremne są o wszelkiey liczbie boków. Troykąt równoboczny, jest wielobokiem foremnym o trzech bokach; kwadrat, jest wielobokiém foremnym o czterech bokach.

### PODANIE PIERWSZE.

TWIERDZENIE.

*Dwa wieloboki foremne o jedney liczbie boków, są figurami podobnemi.*

Niech będą naprzykład dwa sześciokąty foremne ABCDEF, *abcdef*, (fig. 1); summa kątów w jedney i drugiey figurze jest taż sama, i ró-

*1

wna się ośmiu kątom prostym (28,1); kąt A jest szóstą częścią téy summy, tak jak i kąt *a*; a zatém kąty A i *a* są równe sobie, i toż samo jest z kątami B i *b*, z kątami C i *c*, i t. d..

Nadto, ponieważ z natury wieloboków foremnych, boki AB, BC, CD i t. d., są równe sobie, oraz są równe sobie boki *ab*, *bc*, *cd*, i t. d.; przeto między niemi te proporcye zachodzą: AB: *ab* : : BC : *bc* : : CD : *cd* i t. d.; więc figury, o których mówimy, mają kąty równe i boki odpowiedne proporcyonalne, a zatém są podobne (opis. 2 xięg. 3).

*Wniosek.* Obwody dwóch wieloboków foremnych o jednakiey liczbie boków, mają się do siebie, jak ich boki odpowiedne, a powierzchnie zamknięte niemi, jak kwadraty z tychże boków (27,3).

*Uwaga.* Kąt wieloboku foremnego tak się oznacza przez liczbę jego boków, jak kąt wieloboku równokątnego (20,1).

---

Przestroga, liczby nawiasami objęte oznaczają podania do których się odwołuje. Jedna liczba w nawiasach, znaczy podanie tey xięgi która się traktuje: gdy zaś są dwie liczby komą oddzielone, tedy pierwsza oznacza podanie, a druga xięgę.

## PODANIE II.

### TWIERDZENIE.

*Każdy wielobok foremny może bydź wpisany w koło, i niém opisany.*

Niech będzie ABCDE i t. d. (fig. 2), wielobok foremny: wyobraźmy sobie poprowadzony okrąg koła przez trzy punkta A, B, C; niech O, będzie środkiém jego, a OP prostopadła spuszczona na środek boku BC; daymy AO, i OD.

Czworoboki OPCD, OPBA, przystać mogą do siebie ; jakoż bok OP jest wspólny, kąt OPC = OPB, jako proste ; więc bok PC położy się na bok sobie równy PB, i punkt C, padnie na B; nadto z natury wieloboku, kąt PCD = PBA, a zatém CD weźmie kierunek BA; aże CD = BA, więc punkt D padnie na A, i dwa czworoboki całkiem do siebie przystaną. Odległość więc OD jest równa AO; a następnie okrąg koła przechodzącego przez trzy punkta A, B, C, przeydzie także przez punkt D. Podobnie rozumiejąc dowiedziemy, że okrąg koła przechodzącego przez trzy wierzchołki B, C, D; przeydzie także przez wierzchołek następny E, i tak daley. Tenże sam więc okrąg koła, który przechodzi przez trzy punkty A, B, C, przeydzie przez wszystkie wierzchołki kątów wieloboku, a zatém wielobok będzie wpisany w ten okrąg.

Powtóre. Wszystkie boki AB, BC, CD, i t. d. dla tego okręgu, są cięciwami równemi; a zatém są równie oddalone od środka (8,2); jeżeli więc z punktu O, jako środka, promieniem OP, zakreśli się okrąg koła, ten dotknie boku BC, jako i wszystkie inne boki wieloboku w ich środkach, a zatém okrąg ten wpisany będzie w wielobok, czyli wielobok opisany będzie na okręgu koła.

*Uwaga I.* Punkt O, środek wspólny koła wpisanego i opisanego, może bydź uważany jako środek wieloboku, i dla tey to przyczyny, kąt AOB, utworzony przez dwa promienie, do końców jednego boku AB, poprowadzone, nazwano *kątem w środku.*

Ponieważ wszystkie cięciwy AB, BC i t. d. są równe; przeto wszystkie kąty w środku są równe sobie; a zatém wartość każdego z nich wynaydzie się, dzieląc cztery kąty proste przez liczbę boków wielokąta.

*Uwaga II.* Aby w dany okrąg koła wpisać wielobok foremny, o pewney liczbie boków, dosyć jest podzielić okrąg na tyle części równych, ile wielobok ma boków; Jakoż, ponieważ łuki są równe, cięciwy AB, BC, CD i t. d. (fig. 4) będą równe, a zatém troykąty ABO, BOC, COD, i t. d. jako równo~~kątne~~, będą także równe, więc wszystkie kąty ABC, BCD, CDE i t. d. będą równe; a zatém figura ABCDE, będzie wielobokiem foremnym.

## PODANIE III.

### ZAGADNIENIE.

*W dany okrąg koła wpisać kwadrat.*

Poprowadźmy dwie średnice AC, BD, (fig. 3), przecinające się z sobą pod kątém prostym; połączmy końce A, B, C, D, a figura ABCD, będzie kwadratem wpisanym; jakoż, ponieważ kąty AOB, BOC i t. d. są równe, cięciwy AB, BC, i t. d. są także równe.

*Uwaga.* Ponieważ tróykąt BOC, jest prostokątny i równoramienny, przeto będzie (11,3) BC : BO : : $\sqrt{2}$ : 1, azatém, *bok kwadratu wpisanego ma się do promienia, jak pierwiastek kwadratowy z 2, do jedności.*

## PODANIE IV.

### ZAGADNIENIE.

*W dany okrąg koła wpisać sześciobok foremny, i troykąt równoboczny.*

Przypuśćmy że zagadnienie jest rozwiązane, i niech AB (fig. 4) będzie jednym bokiem sześcioboku wpisanego; jeżeli poprowadzimy promienie AO, OB, powiadam: że troykąt AOB, będzie równobocznym.

Jakoż, kąt AOB, jest szóstą częścią czterech kątów prostych; wziąwszy więc kąt prosty za jedność, mieć będziemy AOB $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: dwa inne kąty ABO, BAO, tegoż troykąta, ważą razem $2 - \frac{2}{3}$ czyli $\frac{4}{3}$; aże są równe, przeto każdy z nich $= \frac{2}{3}$, więc troykąt ABO, jest równoboczny; azatém bok sześciokąta wpisanego jest równy promieniowi.

Z tego wypada, ża chcąc wpisać sześciobok foremny w dany okrąg koła, potrzeba promień sześć razy odciąć na tém okręgu, co przywiedzie do tego samego punktu, skąd zaczęliśmy odcinać.

Gdy sześciobok ABCDEF, jest wpisany, jeżeli się połączą wierzchołki kątów naprzemian, utworzy się troykąt równoboczny ACE.

*Uwaga.* Figura ABCO, jest równoległobokiem, nawet jest kwadratem ukośnym, bo $AB = BC = CO = AO$; azatém (14,3), summa kwadratów z przekątnych to jest $\overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$, jest równa summie kwadratów z boków, którą tu jest $4\,\overline{AB}^2$ czyli $4\,\overline{BO}^2$; gdy od jedney i drugiey odciągniemy $\overline{BO}^2$, zostanie $\overline{AC}^2 = 3\,\overline{BO}^2$, a zatém $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2 :: 3 : 1$, czyli $AC : BO :: \sqrt{3} : 1$, a zatém, *bok troykąta równobocznego wpisanego w koło, ma się do promienia, jak pierwiastek kwadratowy z 3, do jedności.*

(*) [illegible]: Dajmy, że AB jest bok 10kąta foremnego wpisanego w koło, mającego środek w O, i poprowadźmy prom. OA, OB. Kąt AOB powinien być $= \frac{4}{10}R$ $= \frac{2}{5}R$; stąd $OAB + OBA = (2 - \frac{2}{5})R = \frac{8}{5}R$; $OAB = OBA = \frac{4}{5}R$. Gdy zatem podzielę kąt ABO, linią BM na dwie części $= R$, będzie każdy z kątów OBM i MAB $= \frac{2}{5}R$, zatem w tr. BOM kąty przy podstawie $= \frac{2}{5}R$, a zatem ma być powinny być sobie równe, a zatem OM = BM. Że w tr. ABM, kąt $AMB = 2R - (MAB + MBA) = 2R - (\frac{4}{5} + \frac{2}{5})R = (2 - \frac{6}{5})R = \frac{4}{5}R = BAM$, a zatem powinno być $BM = AB$,

# PODANIE V.

## ZAGADNIENIE.

*W koło dane wpisać dziesięciobok foremny, potém pięciobok i piętnastobok.*

Rozwiązanie

(X) Dzieli się promień AO, (fig. 5) na średni i skrayny stosunek w punkcie M. (zagad. 4 xięg. 3), bierze się cięciwa AB, równa większemu ucinkowi OM; a AB, będzie bokiem dziesięcioboku foremnego, który dziesięć razy przenieść potrzeba na okrąg koła.

Jakoż, daymy MB: z wykreślenia mamy AO : OM : : OM : AM; czyli, że AB = OM, mamy AO : AB : : AB : AM; a zatém troykąty ABO, AMB, mają kąt wspólny A, zawarty między bokami proporcyonalnemi; więc są podobne (20,3); troykąt OAB, jest równoramienny, więc takim jest i troykąt AMB, i AB = BM : aże AB = OM, więc także MB = OM; azatém troykąt BMO, jest równoramienny.

Kąt AMB, zewnętrzny względem troykąta równoramiennego BMO, jest równy dwa razy wziętemu kątowi wnętrznemu O (19,1); aże kąt AMB = MAB, azatém troykąt OAB, jest takim, że każdy z kątów, na podstawie OAB, czyli OBA, jest równy dwa razy wziętemu kątowi w wierzchołku O, trzy więc kąty troykąta, ważą pięć razy wzięty kąt O: azatém kąt O, jest piątą częścią dwóch kątów prostych, czyli dziesiątą częścią czterech

a tém samém AB = OM. Ponieważ w Δcie ABO, linia BM dzieli kąt B na dwie równe części, jest przeto AM : OM : : AB : OB czyli AM : MO : : MO : OA. więc AB równa się = części większej promienia podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

kątów prostych: łuk więc AB, jest dziesiątą częścią okręgu koła, a cięciwa AB, jest bokiem dziesięcioboku foremnego.

*Wniosek I.* Jeżeli się połączą po dwa wierzchołki kątów dziesięcioboku foremnego, utworzy się pięciobok foremny ACEGI.

*Wniosek II.* Gdy AB, jest bokiem pięcioboku, a AL bokiem sześcioboku, wówczas łuk BL będzie względem okręgu koła $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ czyli $\frac{1}{15}$; azatém cięciwa BL, będzie bokiem piętnastoboku, czyli wieloboku foremnego o piętnastu bokach. Widzimy razem, że łuk CL, jest trzecią częścią CB.

*Uwaga.* Gdy wielobok foremny jest wpisany, jeżeli się podzielą łuki podparte przez jego boki, na dwie równe części, i gdy się dadzą cięciwy podpierające te połowy łuków, cięciwy te utworzą nowy wielobok foremny o podwóyney liczbie boków. Widzimy przeto, że kwadrat użyty bydź może do wpisania koleją wieloboków foremnych o 8, 16, 32 i t. d. bokach. Podobnie sześciobok służy do wpisania wieloboków foremnych o 12, 24, 48 i t. d., bokach: dziesięciobok, do wpisania wieloboków o 20, 40, 80 i t. d., bokach: piętnastobok do wpisania wieloboków o 30, 60, 120, i t. d., bokach. (1)

(1) Długo mniemano, że wymienione tu wielokąty są (jedynemi) wielokątami foremnemi dającemi się wpisać w koło za pomocą takich sposobów, jakich wymaga geometrya elementarna, czyli, przez rozwiązanie równań pierwszego tylko i drugiego stopnia: Gauss atoli, w dziele Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae, 1801, dowiódł, że takiemiż sposoby można w koło wpisać 17kąt foremny, i w ogólności wielokąt foremny o $2^n+1$ bokach, byleby liczba $2^n+1$ była liczbą (bez uwzględnienia) pierwszą.

# PODANIE VI.

## ZAGADNIENIE.

*Mając dany wielobok foremny wpisany* na tymże okręgu *ABCD i t. d.* (fig. 6), *opisać tenże okrąg koła wielobokiem podobnym.*

Przez punkt T, środek łuku AB, daymy styczną GH, która będzie równoległą do AB, (10,2), toż samo uczyńmy w środku każdego innego łuku BC, CD i t. d.; te styczne przez swe przecięcia się utworzą wielobok foremny, opisany GHIK i t. d., podobny wielobokowi wpisanemu.

Łatwo jest naprzód widzieć, że trzy punkta O, B, H, są w linii prostey; gdyż troykąty prostokątne OTH, OHN, mają przeciwprostokątną wspólną OH, i bok OT = ON, azatém są one równe (18,1.), kąt więc TOH = HON, a zatém następnie linija OH przechodzi przez punkt B, środek łuku TN: dla teyże samey przyczyny punkt I, znayduie się na przedłużeniu OC; i t. d.. Ponieważ zaś GH, jest równoległa do AB, a HI do BC, kąt GHI = ABC (26,1) także HIK = BCD, i t. d.; przeto kąty wieloboku opisanego, są równe kątóm wieloboku wpisanego. Nadto, z przyczyny tychże równoległych, mamy GH : AB : : OH : OB, i HI : BC : : OH : OB, a zatém GH : AB : : HI : BC. Aże AB = BC, więc GH = HI.

Podzielenie ćwierci okręgu na 90 części zwykłe (stopnie) wywodzi się do podzielenia łuku 3° na trzy części równe. Gdy 1° trzeba raz przeprowadzić, jako uczyniono, podzieliwszy 90° na 3 części równe, każda po 30°, a z tego łatwo mieć i łuk 15°. Bok 10kąta foremnego odetnie 36°, a stąd łatwo mieć 18°. Pozostanie więc jeszcze różnica 18°–15° = 3° podzielić na 3 części równe.

[*] Sposób 2gi Przez wierzchołki wielokąta wpisanego prowadzę styczne, każdą do przecięcia się z następującą: te styczne utworzą wielokąt opisany równokątny; a zatem foremny.



Dla podobney przyczyny HI = IK, i t. d.; boki więc wieloboku opisanego, są równe sobie, a zatém ten wielobok jest foremny i podobny wielobokowi wpisanemu. [*]

*Wniosek I.* Wzajemnie, gdyby był dany wielobok opisany GHIK i t. d., i gdyby potrzeba było, za pomocą jego narysować wielobok wpisany ABC i t. d, widzimy, iż dosyć byłoby do wierzchołków G, H, I, i t. d. wieloboku danego poprowadzić linije OG, OH, i t. d., które spotkają okrąg koła w punktach A, B, C, i t. d.; połączylibyśmy potém te punkta cięciwami AB, BC, i t. d., a te utworzyłyby wielobok wpisany. Moglibyśmy także w tymże przypadku wprost połączyć z sobą wszystkie punkta dotknięcia T, N, P, i t. d., cięciwami TN, NP, i t. d., które utworzyłyby równie wielobok wpisany podobny opisanemu.

*Wniosek II.* Azatém, można opisać na kole danem wszystkie wieloboki foremne, które tylko wpisać umiemy w koło, i wzajemnie.

## PODANIE VII.

### TWIERDZENIE.

*Powierzchnia wieloboku foremnego jest równa jego obwodowi, rozmnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego.*

Niech będzie naprzykład wielobok foremny

GHIK i t. d. (fig. 6); troykąt GOH, ma za miarę $GH \times \frac{1}{2} OT$; troykąt OHI ma za miarę $HI \times \frac{1}{2} ON$; aże $ON = OT$, więc dwa troykąty złączone razem mają za miarę $(GH + HI) \times \frac{1}{2} OT$. Ciągnąc tym sposobem wynaydowanie miary innych troykątów, znaydziemy że summa wszystkich troykątów, czyli wielobok cały, ma za miarę summę podstaw GH, HI, IK, i t. d., czyli obwód wieloboku, rozmnożony przez $\frac{1}{2}$ OT, połowę promienia koła wpisanego.

*Uwaga.* Promień OT koła wpisanego jest to prostopadła spuszczona ze środka na jeden z boków wieloboku; nazywają czasami ją *apotemą* (l'apathéme) wieloboku.

Uwaga 2. Powierzchnia wielokąta dającego się opisać na kole, jest = obwodowi tegoż wielokąta przez $\frac{1}{2}$ promienia koła wpisanego.

## PODANIE VIII

### TWIERDZENIE.

*Obwody wieloboków foremnych o jedney liczbie boków mają się do siebie jak promienie kół opisanych, lub też jak promienie kół wpisanych: a zaś powierzchnie ich, jak kwadraty z tychże promieni.*

Niech będzie AB (fig. 7) bok wieloboku o jakim jest mowa, O jego środek, a zatém OA, promień koła opisanego, a OD, prostopadła do AB, promień koła wpisanego: niech będzie podobnie, *ab* bok innego wieloboku podobnego pierwszemu, *o* jego środek, *oa* i *od*, promienie kół opisanego i wpisanego. Obwody dwóch wieloboków mają się do siebie, jak boki AB i $ab$, aże kąty A i $a$, są równe, jako każdy z nich jest połową kąta wieloboku, i toż samo jest z kątami B i $b$; więc troykąty ABO, $abo$, są podobne, oraz troykąty prostokątne ADO, $ado$; a zatém, AB : $ab$ : : AO : $ao$ : : DO : $do$; obwody więc wieloboków mają się do siebie, jak promienie AO, $ao$, kół opisanych, i także jak promienie kół wpisanych.

Powierzchnie tychże wieloboków mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednych AB, $ab$; a zatém mają się także do siebie jak kwadraty z promieni AO, $ao$, koł opisanych, albo jak dwa kwadraty z promieni OD, $od$, kół wpisanych.

## PODANIE IX.

### PODANIE PRZYBRANE.

*Wszelka linija krzywa albo wielobok* wielokątna *obeymujący od jednego do drugiego końca, liniją wypukłą* AMB, *jest dłuższy od linii objętey* AMB (fig. 8)

Powiedzieliśmy już byli, że przez liniją wypukłą rozumieć będziemy liniją krzywą albo wielobok, albo w części krzywa a w części wielobok, taką ~~liniją~~, którą ~~liniją prosta~~ linii prostey niemoże ~~przeciąć~~ być przecięta więcey jak w dwóch punktach. Gdyby linija

[…]zeli jest wielokątna, miała kąty wskakujące, albo też, gdyby krzywa AMB miała przegięcia, śpiczastości (punkta zwrotu) lub węzły,



AMB, miała części ~~wskakujące, czyli~~ ~~krzywie-nia,~~ niebyłaby wypukłą; gdyż łatwo jest widzieć, że linija prosta mogłaby ją w więcey niż w dwóch punktach przeciąć. Łuki koła rzeczywiście są wypukłe; lecz podanie teraźnieysze ściąga się do jakieykolwiek linii dopełniającey tego wymagana warunku.

To założywszy, uważam, iż gdyby linija AMB nie była mnieyszą od wszystkich tych, które ją obeymują, tedy pomiędzy temi ostatniemi byłaby linija krótsza od wszystkich innych, i ta byłaby mnieyszą od AMB albo przynaymniey jey równą. Niech będzie ACDEB ~~tą liniją~~ obeymującą; ACDEB i AMB między dwiema linijami poprowadźmy w jakimkolwiek mieyscu liniją prostą PQ, któraby zgoła nie spotykała linii AMB, albo tylko jey dotykała. Linija prosta PQ jest krótszą od PCDEQ; a zatém gdy za część PCDEQ podstawi się linija prosta PQ, będzie linija obeymująca APQB krótsza od APDQB. Aże z założenia ta ostatnia powinna bydź krótszą od wszystkich, więc to przypuszczenie ostaćby się nie mogło; a zatém wszystkie linije obeymujące, są dłuższe od objętey AMB.

*Uwaga.* Podobnym zupełnie sposobem dowiedlibyśmy, że linija wypukła i zachodząca na siebie AMB (fig. 9), jest krótszą od wszelkiey linii któraby ją zewsząd obeymowała, bądź to linija obeymująca FHG dotyka AMB w jednym lub więcey punktach, bądź to że ją tylko obeymuje bez dotknięcia.

# PODANIE X.

## PODANIE PRZYBRANE.

*Mając dane dwa okręgi współśrodkowe, można zawsze w większy wpisać wielobok foremny, któregoby boki niespotykały okręgu mnieyszego, i także opisać można na mnieyszym okręgu wielobok foremny, któregoby boki niespotykały okręgu większego; tak iż w obudwóch tych przypadkach, boki wieloboku opisanego i wpisanego, będą zamknięte między dwoma okręgami kół.*

Niech będą CA, CB (fig. 10) promienie dwóch okręgów danych. Przez punkt A poprowadźmy styczną DE, kończącą się na większym okręgu w D i E; wpiszmy w większy okrąg koła jeden z wieloboków foremnych, co zrobić można zapomocą poprzedzających zagadnień; podzielmy potém łuki podparte przez boki na dwie części równe, i poprowadźmy cięciwy do tych połow łuku, tym więc sposobem mieć będziemy wielobok o podwóyney liczbie boków; ciągniymy ten podział łuku na połowy póty, aż ~~nie~~ przyydziemy do łuku mnieyszego od DBE. Niech tym łukiém będzie MBN (którego środek przypuśćmy że jest w B): jasno jest, że cięciwa MN, będzie bardziey oddaloną od środka niż DE, i że wielobok foremny, którego MN jest bokiém nie może spotkać okręgu, którego promień jest CA.

Przy takiém założeniu poprowadźmy CM, i CN, które spotkają styczną DE w P i Q; PQ będzie bokiem wieloboku opisanego, na małym okręgu koła, podobnego wielobokowi wpisanemu w wielki, którego bokiém jest MN. Jasno więc jest, że wielobok opisany, mający za bok PQ, nie może spotkać wielkiego okręgu koła, bo CP jest mnieysze od CM.

A zatém przez podobne wykreślenie można nakreślić wielobok foremny wpisany w wielki okrąg koła i wielobok podobny opisać na mnieyszym, a te wieloboki mieć będą swe boki zawarte między dwoma okręgami kół.

*Uwaga.* Gdy dane są dwa wycinki spółśrodkowe FCG, ICH, można podobnie wpisać w większy *część wieloboku foremnego*, albo opisać na mnieyszym część wieloboku podobnego, tak, że obwody tych dwóch wieloboków zawarte będą między dwóma okręgami kół: dosyć jest dzielić łuk FBG koleją na 2, 4, 8, 16 i t. d. części równych, aż ~~nie~~przyydzie ~~się~~ do części mnieyszey od DBE.

Tu nazywamy *część wieloboku foremnego*, figurę zakończoną szeregiem cięciw równych, wpisanych w łuk FG, od jednego do drugiego jego końca. Ta część ma własności główne wieloboków foremnych, ma ona kąty równe i boki równe, i razem może bydź wpisaną i opisaną na kole; jednak nie jest ona ~~częścią~~ właściwie zwanego wielołoboku foremnego, ~~tylko wtenczas~~, gdy łuk podparty przez jeden z boków jego, jest wielokrotną częścią całego okręgu.

## PODANIE XI.

### TWIERDZENIE.

*Okręgi dwóch kół mają się do siebie jak promienie, a powierzchnie ich, jak kwadraty z promieni.*

Oznaczmy dla skrócenia przez *okr.* CA, okrąg koła mający za promień CA (fig. 11): powiadam, że mieć będziemy *okr.* CA : *okr.* OB : : CA : OB.

Bo gdyby to podanie nie (było prawdziwem) zachodziło, tedyby CA miało się do OB jak *okr.* CA do czwartego (wyrazu) terminu większego lub mnieyszego od *okr.* OB: przypuśćmy, że jest mnieyszy i niech będzie, jeżeli to bydź może, CA : OB : : *okr.* CA : *okr.* OD.

Wpiszmy w okrąg koła, którego promień jest OB, wielobok foremny EFGKLE, tak, iżby boki zgoła nie spotykały okręgu koła, którego promień jest OD (10); wpiszmy także wielobok podobny MNPTSM w okrąg koła, którego promień jest CA.

Ponieważ te wieloboki są podobne, przeto obwody ich MNPSM, EFGKE, mają się do siebie jak promienie CA, OB kół opisanych (8); i mieć będziemy MNPSM : EFGKE : : CA : OB. Aże z założenia CA : OB : : *okr.* CA : *okr.* OD; azatém

MNPSM : EFGKE : : *okr.* CA : *okr.* OD. Ta proporcya jest niepodobna: bo obwód MNPSM jest mnieyszy od *okr.* CA (9); a przeciwnie EFGKE jest większy od *okr.* OD: więc niepodobieństwem jest, aby CA miało się do OB, jak *okr.* CA do okręgu mnieyszego, niż jest *okr.* OB; czyli mówiąc w wyrazach ogólnieyszych, niepodobieństwem jest, aby promień miał się do promienia, jak okrąg koła, nakreślony pierwszym promieniem, do okręgu koła mnieyszego od okręgu nakreślonego drugim promieniem.

Stąd wnosimy także, iż bydź nie może CA do OB, jak *okr.* CA do okręgu większego od *okr.*OB; bo gdyby to było, mielibyśmy, przewracając stosunki, OB do CA jak okrąg koła większy od *okr.* OB, do *okr.* CA; albo co toż samo jest, jak *okr.* OB do okręgu mnieyszego od *okr.* CA; zatém promień miałby się do promienia, jak okrąg koła nakreślony pierwszym promieniem do okręgu koła mnieyszego od okręgu nakreślonego drugim promieniem: co dowiedliśmy że jest niepodobieństwem.

Ponieważ czwarty termin proporcyi CA : OB : : *okr.*CA : X, nie może bydź ani mnieyszy, ani większy od *okr.*OB, a zatém bydź musi równy *okr.*OB; przeto okręgi kół mają się do siebie jak ich promienie.

Zupełnie podobne rozumowanie i wykreślnie, posłużą do dowiedzenia, że powierzchnie kół mają się do siebie jak kwadraty z ich promieni.

Nie będziemy wchodzili w inne szczegóły te-

Drugi dowód mniej ścisły, ale prostszy, [illegible] przy twierdz. 9. i 10 nie potrzebujący, obacz w [illegible]

Które wrócić
go podania, ~~bo~~ jest ~~ono~~ tylko wnioskiem następnego.

*Wniosek.* Łuki podobne AB, DE (fig. 12), mają się do siebie jak ich promienie AC, DO, a wycinki podobne ACB, DOE mają się do siebie jak kwadraty z tychże promieni.

Jakoż, ponieważ łuki są podobne, kąt C jest równy kątowi O (*opis. 3. xięg. 3*); aże kąt C ma się do czterech kątów prostych jak łuk AB do całego koła nakreślonego promieniem AC (7.2.); a kąt O, ma się do czterech kątów prostych, jak łuk DE do okręgu nakreślonego promieniem OD; a zatém te łuki AB, DE, mają się do siebie jak okręgi kół których one są częścią; że zaś te okręgi mają się jak promienie AC, DO, przeto *łuk* AB : *łuku* DE : : AC : DO.

Dla teyże samey przyczyny wycinki ACB, DOE, mają się do siebie jak całe koła, te zaś jak kwadraty z promieni; azatém *wyci.* ACB: *wyci.* DOE : : $\overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$,

## PODANIE XII.

### TWIERDZENIE.

*Powierzchnia koła jest równa mnogości z okręgu jego, przez połowę promienia.*

Oznaczamy przez *pow.* CA, powierzchnią koła, którego promień jest CA, (fig. 13); powiadam że mieć będziemy *pow.* CA $= \frac{1}{2}$ CA $\times$ *okr.* CA.

Bo, gdyby $\frac{1}{2}$ CA× *okr.* CA, nie była powierzchnią koła, którego promieniem jest CA, tedy ta ilość byłaby miarą koła większego lub mnieyszego; przypuśćmy naprzód że jest miarą koła większego, i niech będzie, jeżeli to bydź może, $\frac{1}{2}$ CA × *okr.* CA=*pow.* CB.

Koło, którego promieniem jest CA, opiszmy wielobokiem foremnym DEFG i t. d., któregoby boki nie spotykały okręgu koła, mającego za promień CB (10); powierzchnia tego wieloboku równać się będzie jego obwodowi DE+EF+FG+ i t. d., mnożonemu przez $\frac{1}{2}$ CA, (7); aże obwód wieloboku jest większy od okręgu koła wpisanego, bo ten obeymuje go ze wszystkich stron, a zatém powierzchnia wieloboku DEFG i t. d., jest większą od $\frac{1}{2}$ AC×*okr.* AC, która to ilość przez założenie, jest miarą koła promienia CB; wielobok więc byłby większy od koła; aże przeciwnie jest on mnieyszy, bo w nim jest zawarty, przeto niepodobieństwém jest, żeby $\frac{1}{2}$ CA × *okr.* CA, była większa od *pow.* CA; czyli inaczey mówiąc, niepodobieństwém jest, aby okrąg koła, mnożony przez połowę jego promienia, był miarą koła większego.

Powiadam powtóre: że taż sama mnogość, niemoże bydź miarą koła mnieyszego. Aby zaś nieodmieniać figury, przypuśćmy, że idzie rzecz o koło, którego promieniem jest CB; dowieść więc potrzeba, że $\frac{1}{2}$ CB×*okr.* CB, nie może bydź miarą koła mnieyszego, naprzykład koła, którego promień jest CA: jakoż niech będzie, jeżeli to bydź może, $\frac{1}{2}$ CB×*okr.* CB = *pow.* CA.

Gdy zrobimy to samo wykreślenie co i wyżey, powierzchnia wieloboku DEFG i t. d., mieć będziemy za miarę (DE+EF+FG+ i t. d.) $\times\frac{1}{2}$CA; aże obwód DE + EF + FG + i t. d., jest mnieyszy od *okr*. CB, obeymującego wielobok ze wszystkich stron, a zatém powierzchnia wieloboku jest mnieyszą od $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *okr*. CB, a tym bardziey mnieyszą od $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *okr*. CB; ta ostatnia ilość przez założenie jest miarą koła, którego promień jest CA, wielobok więc byłby mnieyszy od koła wpisanego, co jest niedorzecznością, przeto niepodobieństwem jest, aby mnogość z okręgu koła przez połowę promienia,była miarą koła mnieyszego.

Azatém, nakoniec okrąg koła, mnożony przez połowę jego promienia, jest miarą tegoż koła.

*Wniosek I.* Powierzchnia wycinka równa się łukowi tegoż wycinka, mnożonemu przez połowę promienia.

Bo, wycinek ACB (fig. 14), tak się ma do całego koła, jak łuk AMB do całego okręgu koła ABD (17,2.); albo jak AMB$\times\frac{1}{2}$ AC do ABD$\times\frac{1}{2}$AC. Aże koło całe = ABD$\times$ $\frac{1}{2}$ AC; przeto wycinek ACB, ma za miarę AMB$\times\frac{1}{2}$AC.

*Wniosek II.* Nazwiymy $\pi$, okrąg koła, którego średnicą jest jedność; ponieważ okręgi kół mają się do siebie jak ich promienie lub jak ich średnice,przeto ułożyć możemy tę proporcyą: średnica 1, do okręgu $\pi$, jak średnica 2CA do okręgu promienia CA (fig. 11); tak iż mieć będziemy $1 : \pi :: 2CA : okr. CA$; azatém $okr.\ CA = 2\pi \times CA$. Pomnożywszy obie strony tey równości przez $\frac{1}{2}$ CA, mieć będziemy $\frac{1}{2} CA \times okr.\ CA = \pi \times \overline{CA}^2$, czyli $pow.\ CA = \pi . \overline{CA}^2$; azatém: *powierzchnia koła jest równa mnogości z kwadratu jego promienia przez liczbę stałą π, wyrażającą okrąg koła, którego średnicą jest 1, czyli wyrażającą stosunek okręgu koła do średnicy.*

Podobnym sposobém powierzchnia koła, mającego za promień OB, będzie równa $\pi \times \overline{OB}^2$; aże $\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$; azatém *powierzchnie kół mają się do siebie jak kwadraty z ich promieni*: co się zgadza z poprzedzającém twierdzeniem.

*Uwaga.* Powiedzieliśmy już byli, że *kwadratura* koła, zależy na wynalezieniu kwadratu równego co do powierzchni kołu, którego promień jest znany; teraz zaś dowiedliśmy, że koło jest równoważne prostokątowi wystawionemu na okręgu koła, a mającemu za wysokość połowę promienia; ten zaś prostokąt zamienia się na kwadrat, biorąc średnią proporcyonalną między dwóma jego wymiarami (pod. 6 xięg. 3); azatém, podanie tyczące się kwadrowania koła, przywodzi się do znalezienia okręgu jego, gdy znany jest promień; na to zaś potrzeba poznać stosunek okręgu koła do promienia albo do średnicy.

Dotychczas ten stosunek oznaczono tylko sposobém przybliżonym; lecz to przybliżenie ~~tak~~ posunione ~~było~~ tak daleko, że wiadomość nawet do-

Wniosek 2. Podług pod. 11, okręgi mają się do siebie jak ich promienie; są więc też okręgi w stosunku ich średnic. Oznaczając dwa okręgi przez $C, C'$, a ich średnice przez $D$, $D'$, będzie $C : C' = D : D'$, czyli, odmieniając miejsca wyrazom średnim: $C : D = C' : D'$. To jest: stosunek jednego okręgu do jego średnicy jest tenże sam co i stosunek innego jakiegokolwiek okręgu do jego średnicy, czyli: że stosunek okręgu do jego średnicy jest stosunkiem stałym.

Okrąg takiego koła, którego średnica jest 1, oznacza się powszechnie przez $\pi$; mamy zatem: $C : D = \pi : 1$. Stosunek więc liczby $\pi$ do 1 czyli liczba $\pi$ jest oraz stosunkiem stałym każdego okręgu do jego średnicy.

Z proporcji dopiero napisanej wyprowadzamy: $C = \pi D$ czyli $C = 2\pi R$, oznaczając przez $R = \frac{1}{2}D$ promień ~~okręgu~~ $C$.

+ Mnożąc obie strony równania $C = 2\pi R$ przez $\frac{1}{2}R$, i uważając, że $\frac{1}{2}RC = K$ powierzchni koła z promienia $R$, otrzymujemy $K = \pi R^2$, to jest: powierzchnia koła jest = itd.

Ponieważ $\pi = \frac{C}{D} = \frac{K}{R^2}$; ta sama przeto liczba, która wyraża stos. każdego okręgu do jego średnicy, wyraża oraz stos. powierzchni każdego koła do kwadratu jego promienia.

7

Wniosek 2. Podług pod. 11, okręgi mają się do siebie jak ich promienie; są więc też okręgi w stosunku ich średnic. Oznaczając dwa okręgi przez $C, C'$, a ich średnice przez $D$, $D'$, będzie $C:C'=D:D'$, czyli, odmieniając miejsce wyrazom średnim: $C:D=C':D'$. To jest: stosunek jednego okręgu do jego średnicy jest tenże sam co i stosunek innego jakiegokolwiek okręgu do jego średnicy, czyli: że stosunek okręgu do jego średnicy jest stosunkiem stałym.

Okrąg takiego koła, którego średnica jest 1, oznacza się powszechnie przez $\pi$; mamy zatem: $C:D=\pi:1$. Stosunek więc liczby $\pi$ do 1 czyli liczba $\pi$ jest oraz stosunkiem stałym każdego okręgu do jego średnicy.

Z proporcji dopiero napisanej wypływa: $C=\pi D$ czyli $C=2\pi R$, oznaczając przez $R=\frac{1}{2}D$ promień ~~którego~~ $C$.

+ Mnożąc obie strony równości $C=2\pi R$ przez $\frac{1}{2}R$, i uważając, że $\frac{1}{2}RC=K$ powierzchni koła z promienia $R$, otrzymujemy $K=\pi R^2$, to jest: powierzchnia koła jest = itd.

Ponieważ $\pi=\frac{C}{D}=\frac{K}{R^2}$; ta sama przeto liczba, która wyraża stos. każdego okręgu do jego średnicy, wyraża oraz stos. powierzchni każdego koła do kwadratu jego promienia.

kładnego stosunku, nieprzyniosłaby zgoła większey rzetelnie korzyści, nad wiadomość stosunku przybliżonego. To zagadnienie, które tak wielu zatrudniało Geometrów, wtenczas, gdy sposoby przybliżenia były mniey znane, dzisiay policzone jest do rzędu zagadnień próżnych i jałowych, któremi tylko zatrudniają się ci, którzy zaledwo pierwsze mają wiadomości Geometryi.

*Archimedes* dowiodł, że stosunek okręgu koła do średnicy, zawarty jest między $3\frac{10}{70}$ i $3\frac{10}{71}$; a tak $3\frac{1}{7}$ czyli $\frac{22}{7}$ jest wartością już bardzo przybliżoną do liczby, którąśmy przez $\pi$ mianowali. To pierwsze przybliżenie jest częstego użycia dla swojey prostości. *Meciusz* na tęż samę liczbę znalazł wartość $\frac{355}{113}$, daleko bardziey przybliżoną. Wreszcie wartość $\pi$ rozwiniona aż do pewnego porządku ułamków dziesiętnych, znaleziona była przez innych Rachmistrzów 3,14159265358979 32 i t. d.; i mieli nawet cierpliwość przedłużyć te dziesiętne aż do sto dwódziestego siódmego, owszem nawet aż do sto czterdziestego rzędu liczb dziesiętnych. Oczywiście, takie przybliżenie wyrównywa rzeczywistey wartości, i nieznamy lepiey pierwiastków potęg niedokładnych.

W następnych podaniach wyłożymy dwa nayprostsze początkowe sposoby na otrzymanie tych przybliżeń.

## PODANIE XIII.

### ZAGADNIENIE.

*Maiąc dane powierzchnie wieloboku foremnego wpisanego i wieloboku podobnego opisanego, znaleść powierzchnie wieloboków foremnych wpisanego i opisanego o podwóyney liczbie boków.*

Niech będzie AB (fig. 15), bok wieloboku danego wpisanego; EF równoległe do AB; bok wieloboku podobnego opisanego; C środek koła: gdy damy cięciwę AM, i styczne AP, BQ; cięciwa AM będzie bokiem wieloboku wpisanego o podwóyney liczbie boków, a zaś PQ, podwóyne względem PM, będzie bokiém wieloboku podobnego opisanego (6). Ponieważ toż samo wykreślenie zachodzić będzie we wszystkich kątach równych kątowi ACM, przeto dosyć jest rozważyć sam tylko kąt ACM, a troykąty w nim zawarte, będą się miały do siebie, jak wieloboki całkie. Niech będzie A powierzchnią wieloboku wpisanego; którego bokiem jest AB; B, powierzchnią wieloboku podobnego opisanego; A′ powierzchnią wieloboku, którego AM, jest bokiem; B′, powierzchnią wieloboku podobnego opisanego: A i B są znane; chodzi nam teraz o wynalezienie A′ i B′.

1° Troykąty ACD, ACM, których wierzchołek wspólny jest w A, mają się do siebie jak ich podstawy CD, CM, aże te troykąty mają się także do siebie jak wieloboki A i A′ których są częściami, azatém A : A′ : : CD : CM. Troykąty CAM, CME, których wierzchołek wspólny jest M, mają się do siebie jak ich podstawy CA, CE; też same zaś troykąty mają się do siebie jak wieloboki A′ i B, których są częściami; azatém A′ : B : : CA : CE. Aże z przyczyny równoległości liniy AD, ME, mamy CD : CM : : CA : CE; azatém A : A′ : : A′ : B; więc wielobok A′ jeden z szukanych, jest średnio proporcyonalnym między dwóma wielobokami znanemi A i B; a następnie $A'=\sqrt{A\times B}$.

2° Z przyczyny wspólney wysokości CM, troykąt CPM ma się do troykąta CPE, jak PM do PE; aże linija CP dzieli kąt MCE na dwie równe części, przeto mamy (17,3) PM : PE : : CM : CE : : CD : CA : : A : A′; azatém CPM : CPE : : A : A′, a następnie CPM : CPM + CPE czyli CME : : A : A + A′. Aże CMPA czyli 2 CMP i CME, mają się do siebie jak wieloboki B′ i B, których są częścią; azatém B′ : B : : 2A : A+A′. Już zadeterminowaliśmy A′, to nowe podanie zadeterminuje B′, i będzie $B'=\frac{2\,A\times B}{A+A'}$; za pomocą więc wieloboków A i B łatwo jest znaleść wieloboki A′ i B′, które mają dwa razy więcey boków.

## PODANIE XIV.

### ZAGADNIENIE.

*Znaleść stosunek przybliżony okręgu koła do średnicy.*

Niech będzie promień koła $=1$, bok kwadratu wpisanego będzie $\sqrt{2}$ (3), bok zaś kwadratu opisanego będzie równy średnicy 2; powierzchnia więc kwadratu wpisanego $=2$, a powierzchnia kwadratu opisanego $=4$. Jeżeli teraz położymy $A=2$, $B=4$, znaydziemy przez poprzedzające zagadnienie ośmiobok wpisany $A'=\sqrt{8}$ $=2,8284271$, a ośmiobok opisany $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=$ $3,3137085$. Mając tym sposobém znane ośmioboki wpisany i opisany, znaydziemy za pomocą ich wieloboki o podwóyney liczbie boków; należy znowu założyć $A=2,8284271$, $B=3,3137085$, a mieć będziemy $A'=\sqrt{A\times B}=3,0614674$, a $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}=3,1825979$; Te potém wieloboki 16 bokowe, posłużą do poznania wieloboków o 32 bokach, i tak daley pociągniemy, aż póki rachunek nie przestanie dawać różnicy, między wielobokami wpisanym i opisanym, przynaymniey w porządku liczb dziesiętnych na jakim przestajemy, a który w tym przykładzie jest siódmy. Gdy przyydziemy do tego punktu, wniesiemy, że koło jest równe ostatniemu wypadkowi, gdyż koło zawsze jest zawarte między wielobokiem wpisanym i opisanym; azatém, jeżeli te wieloboki nie różnią się zgoła od siebie, aż do pewnego rzędu liczb dziesiętnych, tedy i koło, aż do tegoż rzędu liczb nie będzie się różniło.

Podajemy tu rachunek tych wieloboków, posuniony tak daleko, iż nieróżnią się zgoła w siódmym rzędzie dziesiętnych.

| *Liczba boków.* | *Wieloboki wpisane.* | *Wieloboki opisane.* |
|---|---|---|
| 4 | 2,0000000 | 4.0000000 |
| 8 | 2,8284271 | 3,3137085 |
| 16 | 3,0614674 | 3,1825979 |
| 32 | 3,1214451 | 3,1517249 |
| 64 | 3,1365485 | 3,1441184 |
| 128 | 3,1403311 | 3.1422236 |
| 256 | 3,1412772 | 3,1417504 |
| 512 | 3,1415138 | 3,1416321 |
| 1024 | 3,1415729 | 3,1416025 |
| 2048 | 3,1415877 | 3,1415951 |
| 4096 | 3,1415914 | 3,1415933 |
| 8192 | 3,1415923 | 3,1415928 |
| 16384 | 3,1415925 | 3,1415927 |
| 32768 | 3,1415926 | 3,1415926. |

Zkąd wnosimy, że powierzchnia koła=3,1415926. Mogłaby wątpliwość zachodzić w ostatniey liczbie dziesiętney, z przyczyny części zaniedbanych; lecz tu rachunek robiony był jedną liczbą więcey dziesiętnych: a to dla tego, aby bydź pewnym o wypadku teraz znalezionym, aż do ostatniey liczby dziesiętney.

Ponieważ powierzchnia koła jest równa pół-okręgowi koła mnożonemu przez promień; gdy zaś promień jest 1; pół okręgu koła jest 3,1415926; albo raczey gdy średnica jest 1, okrąg koła jest 3,1415926; przeto stosunek okręgu koła do średnicy oznaczony wyżey przez $\pi = 3,1415926$.

## *PODANIE XV.

### TWIERDZENIE PRZYBRANE

*Troykąt* CAB (fig. 16), *jest równoważny tróykątowi równoramiennemu* DCE, *mającemu tenże sam kąt* C, *i którego bok* CE *równy bokowi* CD, *jest średnio-proporcyonalny między* CA *i* CB. *Nadto, jeżeli kąt* CAB *jest prosty, prostopadła* CF, *spuszczona na podstawę tróykąta równoramiennego, będzie średnio-proporcyonalną między bokiem* CA *i pół summą boków* CA, CB.

Jakoż 1°, z przyczyny kąta wspólnego C,

---

*Przestroga.* Podania, gwiazdeczką naznaczone, w pierwszém wykładzie tey nauki, bez przerwania ciągu opuszczone bydź mogą: po przeyściu jednak wszystkich xiąg, w czasie powtarzania wyłożone bydź mają.

troykąt ABC ma się do troykąta równoramiennego DCE, jak $AC \times CB : DC \times CE$ czyli $\overline{DC}^2$ (24, 3); te więc troykąty będą równoważne, jeżeli $\overline{DC}^2 = AC \times CB$, czyli jeżeli DC, jest średnio-proporcyonalnym między AC i CB.

2° Ponieważ prostopadła CGF, dzieli kąt ACB, na dwie części równe, przeto mamy (17,3), $AG : GB :: AC : CB$, skąd składając otrzymamy, $AG : AG + GB$ czyli $AB :: AC : AC + CB$; aże AG ma się do AB, jak troykąt ACG do troykąta ACB, czyli 2CDF, nadto jeżeli kąt A jest prosty; tedy troykąty prostokątne ACG, CDF będą podobne i dadzą $ACG : CDF :: \overline{AC}^2 : \overline{CF}^2$, przeto

$$\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2 :: AC : AC + CB.$$

Pomnożywszy drugi stosunek przez AC, poprzedniki staną się równe, a następnie mieć będziemy $2\overline{CF}^2 = AC \times (AC + CB)$; czyli $\overline{CF}^2 = AC \times \left(\frac{AC + CB}{2}\right)$; azatém 2° jeżeli kąt A jest prosty, tedy prostopadła CF jest średnią proporcyonalną między bokiem AC i pół summą boków AC, CB.

## *PODANIE XVI.

### ZAGADNIENIE.

*Znaleść koło tak mało się różniące od wieloboku danego foremnego, ile sami tylko zechcemy.*

Niech będzie naprzykład dany (fig. 17) kwadrat BMNP; ze środka jego C, spuśćmy prostopadłą CA na bok MB, i daymy CB.

Koło zakreślone promieniem CA, będzie wpisane w kwadrat, a koło zakreślone promieniem CB opisane będzie na tymże kwadracie; pierwsze jest mnieysze, a drugie większe od kwadratu: chodzi nam teraz o ścieśnienie tych granic.

Weźmy CD i CE, równe każda w szczególności średniey proporcyonalney między CA i CB, i poprowadźmy ED. Troykąt równoramienny CDE będzie równoważny troykątowi CAB (3,1); toż samo zróbmy z każdym z ośmiu troykątów składających kwadrat; tym sposobem utworzymy ośmiobok foremny równoważny kwadratowi BMNP. Koło zakreślone promieniem CF, średnim proporcyonalnym między CA i $\frac{CA+CB}{2}$ będzie wpisane w ośmiobok, a koło zakreślone promieniem CD, będzie na nim opisane. A tak pierwsze będzie mnieysze, a drugie większe od kwadratu danego. Jeżeli podobnym sposobem zamienimy troykąt prostokątny CDF na troykąt równoramienny jemu równoważny, utworzymy przez to wielobok foremny o szesnastu bokach, równoważny kwadratowi danemu. Koło wpisane w ten wielobok, będzie mnieysze od kwadratu, a opisane na tym wieloboku, będzie większe od kwadratu.

Można tym sposobém ciągnąć daley dopóty, aż póki stosunek między promieniem koła wpisanego i promieniem koła opisanego, nie będzie się tak mało różnił od równości, ile sami zechcemy. A wówczas oba te koła uważane bydź mogą, jako równoważne kwadratowi podanemu.

*Uwaga*. Szukanie koleynych promieni do tego się sprowadza. Niech $a$ będzie promieniem koła wpisanego w jeden z wieloboków znalezionych; $b$, promieniem koła opisanego na tymże wieloboku: niech podobnie będą $a'$ i $b'$ promienie tyczące się wieloboku następnego, mającego dwa razy większą liczbę boków. Podług tego, cośmy dowiedli, $b'$ jest średnio-proporcyonalném między $a$ i $b$, a zaś $a'$ jest średnio-proporcyonalném między $a$ i $\frac{a+b}{2}$; tak iż mieć będziemy $b'=\sqrt{a\times b}$, a zaś $a'=\sqrt{a\times\frac{a+b}{2}}$. Mając więc znane promienie $a$ i $b$ wieloboku, łatwo znaydziemy promienie $a'$ i $b'$ wieloboku następnego: i tak daley pociągniemy, aż póki różnica między promieniami stanie się niewidoczną, a wówczas, którykolwiek z tych promieni, będzie promieniem koła równoważnego kwadratowi, albo wielobokowi podanemu.

Ten sposób łatwo użyty bydź może w liniach, gdyż zasadza się on na wynaydowaniu średnich proporcyonalnych koleynych między liniami znanemi; lecz nie równie lepiey się używa w liczbach, i jest jeden ze sposobów naydogodnieyszych, jakie geometrya początkowa podać nam może do prędkiego wynalezienia stosunku przybliżonego okręgu koła do średnicy. Niech będzie bok kwadratu $= 2$; pierwszy promień wpisany CA będzie 1, a pierwszy promień opisany CB będzie $\sqrt{2}$ czyli 1,4142136. Uczyniwszy więc $a=1$, $b=1,4142136$, znaydziemy $b'=1,1892071$, a $a'=1,0986841$. Te liczby posłużą do wyrachowania następnych promieni podług tegoż prawa.

Przytaczamy tu wypadek rachunku wykonanego aż do 7 lub 8 cyfer przez zwyczayne tablice logarytmowe.

| *Promienie kół opisanych.* | *Promienie kół wpisanych.* |
|---|---|
| 1,4142136 | 1,0000000 |
| 1,1892071 | 1,0986841 |
| 1,1430500 | 1,1210863 |
| 1,1320149 | 1,1265639 |
| 1,1292862 | 1,1279257 |
| 1,1286063 | 1,1282657 |

Ponieważ pierwsza połowa cyfer jest taż sama po obu stronach, przeto zamiast średnich geometrycznych, można brać średnie arytmetyczne, które się tylko w ostatnich znakach dziesiętnych różnić będą. Tym sposobém działanie znacznie się skraca, i wypadki są:

| | |
|---|---|
| 1,1284360 . . . . . . . . . | 1,1283508 |
| 1,1283934 . . . . . . . . . | 1,1283721 |
| 1,1283827 . . . . . . . . . | 1,1283774 |
| 1,1283801 . . . . . . . . . | 1,1283787 |
| 1,1283794 . . . . . . . . . | 1,1283791 |
| 1,1283792 . . . . . . . . . | 1,1283792 |

Azatém 1,1283792 jest prawie promieniem koła, równego co do powierzchni kwadratowi, którego bok jest 2. Stąd łatwo jest znaleść stosunek okręgu koła do średnicy, gdyż mamy dowiedziono, że powierzchnia koła jest równa kwadratowi z jego promienia, mnożonemu przez liczbę $\pi$; gdy więc podzielimy powierzchnią 4, przez kwadrat z liczby 1,1283792, mieć będziemy wartość $\pi$, która z tego rachunku wypadnie taką 3,1415926....; jest to liczba taż sama jakąśmy innym sposobém otrzymali.

## * DODATEK DO KSIĘGI IV.

### OPISANIE.

I. Nazywamy *naywiększość* (maximum), ilość naywiększą między wszystkiemi tegoż gatunku ilościami; *naymnieyszość* zaś (minimum), naymnieyszą.

I tak średnica koła jest naywiększość czyli *maximum*, między wszystkiemi linijami łączącemi dwa punkta okręgu koła; a prostopadła jest naymnieyszość czyli *minimum* między wszystkiemi linijami prostemi z jednego punktu danego poprowadzonemi do linii prostey daney.

II. Nazywamy figurami *równo-obwodowemi* czyli *isoperymetrycznemi* (isoperimetres), te które mają obwody równe.

## * PODANIE PIERWSZE.

### TWIERDZENIE.

*Między wszystkiemi troykątami jedney podstawy i jednego obwodu, troykąt* maximum *jest ten, w którym dwa boki niedeterminowane są równe.*

Niech będzie $AC = CB$, $AM + MB = AC + CB$ (fig. 18); powiadam, że troykąt równoramienny ACB jest większy jak troykąt AMB, mający tęż samę podstawę i tenże sam obwód co i troykąt ACB.

Z punktu C, jako środka promieniem $CA = CB$, zakreślmy okrąg koła, który spotka CA przedłużone w D; daymy DB; kąt DBA wpisany w półkole, będzie prosty (15, 2). Przedłużmy prostopadłą DB ku N, zróbmy $MN = MB$, i daymy AN.

Nakoniec z punktow M i C, spuśćmy MP i CG, prostopadłe do DN. Ponieważ $CB = CD$, a MN = MB, przeto AC + CB = AD, AM + MB = AM + MN. Aże AC + CB = AM + MB, azatém AD = AM + MN; więc AD > AN: jeżeli zaś pochyła AD jest większa od pochyłey AN, tedy pierwsza musi bydź bardziey oddaloną od prostopadłey AB; a zatém DB > BN; a zatém BG połowa BD (12, 1), będzie większa od BP połowy BN. Lecz troykąty ABC, ABM, mające też samę podstawę AB, mają się do siebie jak ich wysokości BG, BP; więc ponieważ BG > BP, przeto troykąt równoramienny ABC, jest większy od troykąta nierównoramiennego ABM teyże podstawy i tegoż obwodu.

× $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

## *PODANIE II.

### TWIERDZENIE.

*Między wielobokami równoobwodowemi o jednakiey liczbie boków, wielobok* maximum *ma boki równe.*

Jakoż niech będzie ABCDEF, (fig. 19), wielobok *maximum*; jeżeli bok BC nie jest równy bokowi CD, zróbmy na podstawie BD, troykąt równoramienny BOD równoobwodowy z troykątém BCD. Troykąt BOD będzie większy od BCD (pod. 1); a następnie wielobok ABODEF będzie większy od ABCDEF, azatém ten ostatni nie będzie *maximum* między temi wszystkiemi wielobokami, które mają tenże sam ob-

$b+a = s$ dane, $b-a = r$ zmienne

$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{\{(s+c)(s-c)(c+r)(c-r)\}}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(s^2-c^2)(c^2-r^2)}$

wód, i tęż samę liczbę boków, co się sprzeciwia założeniu. Więc bydź powinno BC = CD: przez podobne rozumowanie mieć będziemy CD=DE, DE = EF i t. d.; a zatém wszystkie boki wieloboku *maximum*, są równe sobie.

## *PODANIE III.

### TWIERDZENIE

*Ze wszystkich troykątów utworzonych z dwóch boków danych, czyniących między sobą jakikolwiek kąt dowolny,* maximum *jest ten, w którym dwa boki dane czynią kąt prosty.*

Niech będą dwa troykąty BAC, BAD (fig. 20), mające bok AB wspólny, a bok AC = AD; jeżeli kąt BAC jest prosty, powiadam że troykąt BAC będzie większy od troykąta BAD, mającego kąt w A ostry albo rozwarty.

Jakoż, ponieważ podstawa AB jest wspólna, przeto dwa troykąty BAC, BAD, mają się do siebie jak ich wysokości AC, DE: aże prostopadła DE jest krótszą od pochyłey AD albo jey równey AC, azatém troykąt BAD jest mnieyszy od BAC.

## *PODANIE IV.

### TWIERDZENIE.

*Że wszystkich wieloboków utworzonych z boków danych, a ostatniego tylko dowolnie branego, wielobok* maximum *jest taki, że wszystkie jego kąty wpisane bydź mogą w półokrąg koła, w którym bok nieznany jest średnicą.*

Niech będzie ABCDEF (fig. 21), wielobok naywiększy, z wieloboków utworzonych z boków danych AB, BC, CD, DE, EF i boku ostatniego AF, dowolnie wziętego. Poprowadźmy przekątne AD, DF. Jeżeli kąt ADF nie jest prosty, można zachowując części ABCD, DEF, takiemi jakiemi są, powiększyć troykąt ADF, a następnie cały wielobok, czyniąc kąt ADF prostym, stosownie do podania poprzedzającego; lecz ten wielobok nie może bydź powiększony, gdyż zakładamy, że przyszedł do swojego *maximum*; azatém kąt ADF jest kątém prostym. Tożsamo jest z kątami ABF, ACF, AEF; azatém wszystkie kąty A, B, C, D, E, F, wieloboku *maximum*, są wpisane w półokrąg koła, w którém bok nieoznaczony AF jest średnicą jego.

*Uwaga*. To podanie nastręcza nam pytanie, to jest: azali jest wiele sposobów utworzenia wieloboku z boków danych, i jednego nieznanego, któryby był średnicą pół okręgu koła, w które inne boki są wpisane. Nim rozwiążemy to pytanie, uważać potrzeba; że gdy jedna cięciwa AB (fig. 22), podpiera łuki zakréślone różnemi promieniami AC, AD; kąt w środku, wsparty na tey cięciwie, będzie naymnieyszy w kole, którego promień jest naywiększy; tak $ACB < ADB$. Jakoż kąt $ADO = ACD + CAD$ (27,1); azatém $ACD < ADO$; a podwajając obie strony, mieć będziemy $ACB < ADB$.

## *PODANIE V.

### TWIERDZENIE.

*Jeden jest tylko sposób utworzenia wieloboku* ABCDEF (fig. 21), *z boków danych i ostatniego nie znanego, będącego średnicą połokręgu koła, w które inne boki są wpisane.*

Przypuśćmy bowiem że znaleźliśmy koło, zadosyć czyniące temu pytaniu: jeżeli weźmiemy koło większe, cięciwy AB, BC, CD, i t. d. odpowiedzą kątóm w środku mnieyszym. Summa tych kątów w środku, będzie mnieyszą od dwóch kątów prostych; azatém końce boków danych nie padną już na końce średnicy. Nieprzyzwoitość przeciwna zaydzie, gdy wezniemy koło mnieysze; azatém wielobok, o jakim jest mowa, tylko w jedno koło wpisany bydź może.

*Uwaga.* Dowolnie odmieniać można porządek boków AB, BC, CD, i t. d., a średnica koła opisującego zawsze będzie taż sama tak jak i powierzchnia wieloboku: bo jakikolwiek będzie porządek boków AB, BC, i t. d., dosyć jest, aby ich summa składała półokrąg koła, a wielobok zawsze mieć będzie tęż samę powierzchnią: gdyż ta równa się półokręgowi koła mniey ucinkami AB, BC, i t. d., których summa zawsze jest taż sama.

## *PODANIE VI.

### TWIERDZENIE.

*Ze wszystkich wieloboków utworzonych z boków danych, naywiększy czyli* maximum *jest ten, który wpisany bydź może w koło.*

Niech będzie ABCDEFG (fig. 23), wielobok wpisany, i *abcdefg* wielobok niedający się wpisać, utworzone z boków równych, tak, że AB$=$*ab*, BC $=$ *bc*, i t. d., powiadam, że wielobok wpisany jest większy od drugiego.

Daymy średnicę EM, poprowadźmy AM, MB: na *ab* $=$ AB, wystawmy troykąt *abm* $=$ ABM, i poprowadźmy *em*.

Na mocy podania IV, wielobok EFGAM jest większy od wieloboku *efgam*; przynaymniey gdy ten ostatni nie może bydź podobnie wpisany w półokrąg koła, któregoby bok *em* był średnicą; w takim przypadku, na mocy podania v, dwa wieloboki byłyby równe. Dla podobney przyczyny wielobok EDCBM jest większy od wieloboku *edcbm*, wyjąwszy tenże przypadek równości: bo jeden jest wpisany w koło, a drugi przez założenie nie daje się wpisać. Azatém cały wielobok EFGAMBCDE jest większy od *efgambcde*, gdy te nie są całkowicie równe sobie: lecz takiemi nie są, bo jeden jest wpisany w koło, a drugi przez założenie nie daje się wpisać, azatem wielobok wpisany jest większy. Odciągnąwszy od obudwóch tych wieloboków troykąty równe ABM, *abm*, pozostanie wielobok wpisany ABCDEFG większy od wieloboku niedającego się wpisać *abcdefg*.

*Uwaga.* Podobnie się dowiedzie jak w podaniu v, że jedno tylko koło tu bydź może, a następnie, że jeden tylko wielobok jest *maximum*, który zadosyć czyni pytaniu, i ten wielobok będzie jeszcze teyże samey powierzchni, jakimkolwiek bądź sposobém odmieni się porządek boków.

## *PODANIE VII.

### TWIERDZENIE.

*Wielobok foremny jest naywiększy czyli* maximum, *między wszystkiemi wielobokami równoobwodowemi o równey liczbie boków.*

Jakoż podług podania II, wielobok *maximum* ma wszystkie boki równe, a podług podania poprzedzającego, taki wielobok daje się wpisać w koło, azatém jest on foremny.

## * PODANIE VIII.

### ZADANIE PRZYBRANE.

*Dwa kąty w środku, mierzone łukami dwóch różnych kół, mają się do siebie jak łuki między niemi zawarte, dzielone przez ich promienie.*

To jest, że kąt C (fig. 24), ma się do kąta O jak stosunek $\frac{AB}{AC}$ do stosunku $\frac{DE}{DO}$

Promieniem OF, równym AC, nakreślmy łuk FG, zawarty między ramionami przedłużonemi OD, OF. Z przyczyny promieni równych AC, OF, mieć będziemy: $C : O :: AB : FG$ (17) czyli $:: \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Z przyczyny zaś łuków podobnych FG, DE, mamy (11), $FG : DE :: FO : DO$; azatém stosunek $\frac{FG}{FO}$ jest równy stosunkowi $\frac{DE}{DO}$, i mamy następnie $C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$.

## *PODANIE IX.

### TWIERDZENIE.

*Z dwóch wieloboków foremnych równoobwodowych, ten jest naywiększy, który ma naywiększą liczbę boków.*

Niech będzie DE (fig. 25) połową boku jednego z wieloboków, O jego środek, OE *apothema* czyli prostopadła spuszczona ze środka wieloboku na bok jego: niech AB będzie połową boku drugiego wieloboku, którego środkiem jest C, a zaś CB *apothemą*. Przypuszczamy, że środki O i C położone są w jakieykolwiek odległości OC, a zaś *apothemy* OE, CB są w kierunku OC; a tak DOE i ACB, będą połowy kątów w środku wieloboków; a ponieważ te kąty nie są równe, przeto linije CA, OD, przedłużone spotkają się z sobą w punkcie F; z tego punktu spuśćmy na OC prostopadłą FG; z punktów O i C, jako środków zakreślmy łuki GI, GH kończące się na bokach OF, CF.

To założywszy, mieć będziemy, przez poprzedzające podanie przybrane, $O : C :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$, aże DE, ma się do pierwszego obwodu wieloboku, jak kąt O, do czterech kątów prostych, i AB do obwodu drugiego wieloboku, jak kąt C do czterech kątów prostych; azatém, ponieważ obwody wieloboków są równe, DE : AB : : O : C czyli DE : AB : : $\frac{GI}{OG}:\frac{GH}{CG}$. Pomnożywszy poprzedniki przez OG a następniki przez CG, mieć będziemy $DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH$. Tróykąty podobne ODE, OFG dają OE : OG : : DE : FG; skąd wypada $DE \times OG = OE \times FG$; podobnie mieć będziemy $AB \times CG = CB \times FG$; azatém $OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH$, czyli OE : CB : : GI : GH. Jeżeli więc pokażemy, że łuk GI jest większy od łuku GH, stąd wypadnie, że apothema OE jest większą od apothemy CB.

Z drugiey strony boku CF zrobmy figurę CK$x$ całkiem równą figurze CG$x$, tak, że CK = CG, kąt HCK = HCG, i łuk K$x$ = $x$G; linija krzywa K$x$G obeymie łuk KHG, i będzie większą od tego łuku (9); azatém G$x$, połowa linii krzywey, jest większa od GH połowy tego łuku; a tym bardziey GI jest większe od GH.

Z tego wypada, że apothema OE, jest większą od CB: aże dwa wieloboki, jednego obwodu mają się do siebie jak ich apothemy (7), azatém wielobok mający DE za połowę swego boku, jest większy od wieloboku mającego AB za połowę boku. Pierwszy wielobok ma więcey boków, gdyż kąt jego w środku jest mnieyszy; azatém z dwóch wieloboków równoobwodowych, ten jest większy, który ma większą liczbę boków.

# *PODANIE X.

## TWIERDZENIE. [x]

*Koło jest większe od wszelkiego wieloboku równo-obwodowego.*

Dowiedliśmy już, że ze wszystkich wieloboków równoobwodowych o jednakiey liczbie boków, wielobok foremny jest naywiększy; przeto chodzi nam tylko o porównanie koła z jakimkolwiek wielobokiem foremnym równoobwodowym.

Niech będzie AI (fig. 26), połową boku tego wieloboku, którego C niech będzie środkiem. Niech będzie w kole równoobwodowym kąt DOE = ACI, a następnie łuk DE równy połowie boku AI. Wielobok P ma się do koła C, jak troykąt ACI do wycinka ODE; a tak mieć będziemy, $P : C :: \frac{1}{2} AI \times CI : \frac{1}{2} DE \times OE :: CI : OE$. Niech będzie poprowadzona do punku E, styczna EG, która spotka OD przedłużone w punkcie G, a troykąty podobne ACI, GOE dadzą proporcyą, $CI : OE :: AI$ czyli $DE : GE$; azatém $P : C :: DE$ czyli jak $DE \times \frac{1}{2} OE$, co jest miarą wycinka DOE, do $GE \times \frac{1}{2} OE$, co jest miarą troykąta GOE; aże wycinek jest większy od troykąta, przeto P jest większe od C, azatém koło jest większe od wszelkiego wieloboku równoobwodowego.

[x] Dowodzenie tego tw. łatwieysze i niepotrzebuiące podań VIII i IX, obacz w Playfair: [illegible] de Géométrie [illegible] str. 65.

# XIĘGA V.

## PŁASZCZYZNY I KĄTY BRYŁOWE.

### OPISANIE.

I. Linija prosta jest *prostopadłą do płaszczyzny*, gdy jest prostopadłą do wszystkich liniy prostych, przechodzących przez jey *spodek* na płaszczyznie (pod.4): wzajemnie, płaszczyzna jest prostopadłą do linii.

*Spodek* prostopadłey jest to punkt, w którym ta linija spotyka płaszczyznę.

II. Linija prosta jest *równoległą płaszczyźnie*, gdy przedłużone obie naydaley, nie mogą się z sobą spotkać. Wzajemnie, płaszczyzna jest równoległą do linii.

III. Dwie, *płaszczyzny* są *równoległe* sobie, gdy będąc przedłużone naydaley, nie mogą się z sobą spotkać.

IV. Dowiedziemy (pod. 3), że wspólne przecięcie się dwóch płaszczyzn, z sobą się spotykających, jest linija prosta; *kąt* więc, czyli wzajemna *pochyłość dwóch płaszczyzn*, jest ilością mniey lub bardziey wielką, na którą się one oddalają: ta ilość mierzy się (pod. 7) kątém, jaki czynią z sobą dwie prostopadłe, poprowadzone na każdey z tych płaszczyzn, do jednego punktu przecięcia się wspólnego.

Ten kąt może bydź ostry, prosty lub rozwarty.

V. Jeżeli jest prosty, dwie *płaszczyzny* są *prostopadłe* do siebie.

VI. *Kątém bryłowym* nazywamy przestrzeń kątową, zawartą między kilku płaszczyznami, w jednym punkcie łączącemi się.

I tak: kąt bryłowy S (fig. 45) jest utworzony przez połączenie się płaszczyzn ASB, BSC, CSB, DSA.

Do utworzenia kąta bryłowego naymniey trzech płaszczyzn potrzeba.

## PODANIE PIERWSZE.

### TWIERDZENIE.

*Linija prosta nie może bydź w części na płaszczyznie, a w części za płaszczyzną.*

Gdyż podług opisania płaszczyzny, skoro linija prosta ma dwa punkta wspólne z płaszczyzną, tedy leży ona całkiem na tey płaszczyznie.

*Uwaga.* Chcąc poznać czy powierzchnia jest płaską, potrzeba w rozmaitych kierunkach tey powierzchni, przykładać liniją prostą, i uważać czyli ta w całey jey rozciągłości dotyka.

## PODANIE II.

### TWIERDZENIE.

*Dwie linije proste przecinające się, są na jedney płaszczyznie i determinują jey położenie.*

Niech będą AB, AC, (fig. 27) dwie linije proste przecinające się w A. Wyobrazić sobie możemy płaszczyznę, przechodzącą przez liniją prostą AB; jeżeli potém obracać będziemy tę płaszczyznę około AB aż ~~nie~~ naydzie na punkt C; wówczas linija AC, mająca dwa swoje punkta A, C, na tey płaszczyznie, całkiem na niey znaydować się będzie: położenie więc tey płaszczyzny jest determinowane przez ten jeden warunek, iż płaszczyzna ta zawiera dwie linije proste AB, AC.

*Wniosek I.* Troykąt ABC czyli trzy punkta A, B, C nie w linii prostey, determinują położenie płaszczyzny.

*Wniosek II.* A zatém także, dwie linije równoległe AB, CD (fig. 28) determinują położenie płaszczyzny; bo gdy poprowadzimy liniją przecinającą EF, tedy płaszczyzna dwóch liniy prostych AE, AF, będzie płaszczyzną liniy równoległych AB, CD.

## PODANIE III.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli dwie płaszczyzny przecinają się z sobą, spólne ich przecięcie się będzie liniją prostą.*

Bo gdyby w liczbie punktów, wspólnych tym płaszczyznom, znalazły się trzy takie, które nie są w linii prostey, tedy dwie płaszczyzny o których mówimy, jako przechodzące każda przez te trzy punkta, uczyniłyby jednę i tęż samę płaszczyznę (2); co jest przeciwném założeniu.

## PODANIE IV.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli linija prosta* AP (fig. 29) *jest prostopadłą do dwóch innych* PB, PC, *krzyżujących się u jey spodka na płaszczyznie* MN; *~~tedy~~ ta linija* AP *będzie prostopadłą do każdey linii* PQ, *poprowadzoney przez jey spodek na teyże płaszczyznie; a zatém będzie ona prostopadłą do płaszczyzny* MN.

Przez punkt Q, wzięty dowolnie na PQ, daymy liniją prostą BC, w kącie BPC; tak, aby było BQ = QC (pod. 5 xięg. 3); poprowadźmy AB, AQ, AC.

Zmienić dowodzenie jak w po... [illegible]

Ponieważ podstawa BC podzielona jest na dwie równe części w punkcie Q, przeto troykąt BPC da (14,3)

$$\overline{PC}^2+\overline{BP}^2=2\overline{PQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Troykąt BAC podobnie daje

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{QC}^2:$$

odciągnąwszy pierwszą równość od drugiey, i uważając że troykąty APC, APB, oba prostokątne w P, dają $\overline{AC}^2-\overline{CP}^2=\overline{AP}^2$, i $\overline{AB}^2-\overline{PB}^2=\overline{AP}^2$; mieć będziemy

$$\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=2\overline{AQ}^2-2\overline{PQ}^2.$$

Biorąc więc połowę z obudwóch stron, mieć będziemy $\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2$, czyli $\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$; azatém troykąt APQ jest prostokątny w P (13,3); więc AP jest prostopadłą do PQ.

*Uwaga.* Stąd widzimy że nie tylko linija prosta może bydź prostopadłą do wszystkich tych, które przechodzą przez jey spodek na płaszczyznie, lecz że to zachodzi zawsze, ile razy ta linija jest prostopadłą do dwóch liniy prostych, poprowadzonych na płaszczyznie; i to właśnie dowodzi pewności opisania I.

*Wniosek I.* Prostopadła AP jest krótszą od każdey linii pochyłey AQ; azatém ta prostopadła mierzy prawdziwą odległość punktu A, od płaszczyzny PQ.

*Wniosek II.* Przez punkt P, dany na płaszczyznie, jedna tylko prostopadła do płaszczyzny poprowadzoną bydź może: bo gdyby można było wynieść dwie prostopadłe z jednego punktu P, tedy, gdy poprowadzimy, podług tych dwóch prostopadłych, płaszczyznę, którey przecięciem z płaszczyzną MN niech będzie PQ; wówczas dwie te prostopadłe, o których mówimy, byłyby prostopadłe do linii PQ, w tymże samym punkcie i na teyże samey płaszczyznie: co jest niepodobieństwem.

Równie niepodobieństwém jest, spuścić z jednego punktu, danego za płaszczyzną, dwie prostopadłe na tęż płaszczyznę; gdyż niech będą AP, AQ, te dwie prostopadłe; wówczas tróykąt APQ miałby dwa kąty proste, APQ, AQP, co jest niepodobieństwem.

## PODANIE V.

### TWIERDZENIE.

*Linije pochyłe, równie oddalone od prostopadłey, są równe sobie; a z dwóch liniy pochyłych, nie równie oddalonych od prostopadłey, ta jest dłuższą, która więcey od niey jest oddaloną.*

Bo kąty APB, APC, APD (fig. 30) są proste; jeżeli więc założymy, że odległości PB, PC, PD są równe sobie, tedy troykąty APB, APC, APD mieć będą kąt równy, zawarty między bokami równemi; azatém te tróykąty będą równe sobie; przeciwprostokątne więc, czyli liniie pochyłe AB, AC, AD, będą równe między sobą. Podobnie, jeżeli odległość PE jest większą od PD czyli jey równey PB, tedy oczywiście pochyła AE, będzie większą od AB, czyli jey równey AD.

*Wniosek.* Wszystkie linije pochyłe równe AB, AC, AD i t. d. padają na okrąg koła BCD, zakreślonego ze spodka prostopadłey P, jako środka; azatém mając dany punkt A za płaszczyzną, a chcąc znaleść na tey płaszczyznie punkt P, gdzieby padła prostopadła spuszczona z A, potrzeba na tey płaszczyznie naznaczyć trzy punkty B, C, D, równie oddalone od A, i szukać potém środka koła, któreby przez te punkty przechodziło, a tym środkiem będzie punkt szukany P.

*Uwaga.* Kąt ABP, nazywa się *nachyleniem linii pochyłey* AB *do płaszczyzny* MN. Widzimy, że to nachylenie jest równe dla wszystkich liniy pochyłych, AB, AC, AD i t. d. które są równie od prostopadłey oddalone; gdyż wszystkie tróykąty ABP, ACP, ADP i t. d. są równe między sobą.

## PODANIE VI.

### TWIERDZENIE.

*Niech będzie* AP *prostopadła do płaszczyzny* MN (fig. 31) *i* BC *linija na tey płaszczyznie położona; jeżeli ze spodku* P *tey prostopadłey, spuścimy* PD *prostopadłą na* BC, *i poprowadzimy* AD; *powiadam że* AD *będzie prostopadłą do* BC.

Weźmy DB=DC i poprowadźmy PB, PC, AB, AC. Ponieważ DB=DC, pochyła PB=PC; a względem prostopadłey AP, ponieważ PB=PC, pochyła AB=AC (5); linija więc AD ma dwa swoje punkta A i D równie oddalone od końców B i C, azatém AD jest prostopadłą w środku linii BC.

*Wniosek.* Tu razem widzimy, że BC jest prostopadłą do płaszczyzny APD, ponieważ BC jest razem prostopadłą do dwóch liniy prostych AD, PD.

*Uwaga.* Dwie linije AE, BC, ~~sławią~~ przedstawiają przykład dwóch liniy prostych, które się zgoła z sobą nie spotykają, gdyż te linije nie znaydują się na jedney płaszczyznie. Naykrótsza odległość tych liniy jest prostopadła PD, która razém jest prostopadłą do linii AP i do linii PC; odległość PD jest naykrótszą między temi dwiema linijami; bo gdy połączymy dwa inne punkta, jak na-

Tu można dodać 2gi sposób spuszczania prostopadłej do płas., z punktu na tej płas. danego.

przykład A i B, będzie AB>AD, AD>PD; azatém tém bardziey AB>PD.

Lubo dwie linije AE, CB, nie są na jedney płaszczyznie, ~~czynią jednak~~ z sobą kąt prosty; gdyż AD i równoległa przez jeden z jey punktów poprowadzona do linii BC, czynią między sobą kąt prosty. Podobnie linije AB i PD, wystawujące dwie jakiekolwiek linije proste, nie leżące na jedney płaszczyznie, uważają się, że czynią z sobą tenże sam kąt, jakiby uczyniła AB równoległa do PD, poprowadzona przez ~~jeden~~ którykolwiek z punktów linii AB. ([illegible])

## PODANIE VII.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli linija* AP *jest prostopadłą do płaszczyzny* MN (fig. 32), *wszelka linija* DE *równoległa do* AP, *będzie prostopadłą do teyże płaszczyzny.*

~~W kierunku~~ Przez liniy ~~równoległych~~ AP, DE poprowadźmy płaszczyznę, którey przecięciem się z płaszczyzną MN będzie PD: na płaszczyznie MN poprowadźmy BC prostopadłą do PD, i daymy AD.

Podług wniosku poprzedzającego twierdzenia, BC jest prostopadłą do płaszczyzny APDE, azatém kąt BDE jest prosty; lecz kąt EDP jest także prosty, bo AP jest prostopadłą do PD i że DE jest równoległą do AP; azatém linija DE jest prostopadłą do dwóch liniy prostych PD i DB: azatém jest ona prostopadłą do ich płaszczyzny MN.

*Wniosek I.* Wzajemnie, jeżeli dwie linije proste AP, DE, są prostopadłe do jedney płaszczyzny MN, takie linije będą równoległe sobie; bo gdyby nie były równoległemi, tedy, poprowadzona przez punkt D linija równoległa do AP, byłaby prostopadłą do płaszczyzny MN; azatém z jednego punktu D, możnaby było wynieść dwie prostopadłe do jedney płaszczyzny; co jest niepodobieństwém (4).

*Wniosek II.* Dwie linije A i B równoległe trzeciey C, są równoległe sobie; bo gdy wyobrazimy płaszczyznę prostopadłą do linii C, linije A i B równoległe do tey prostopadłey, będą prostopadłe do teyże płaszczyzny; azatém, przez wniosek poprzedzający, są równoległe sobie.

Rozumiemy, że trzy linije, nie są na jedney płaszczyznie; inaczey bowiem to podanie byłoby już znane (25,1).

## PODANIE VIII.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli linija* AB (fig. 33) *jest równoległą do linii prostey* CD, *poprowadzoney na płaszczyznie* MN; *ta linija będzie równoległą do tey płaszczyzny.*

Bo, gdyby linija AB, będąca na płaszczyznie

ABCD, spotkała płaszczyznę MN, to spotkanie przypadłoby w jakimkolwiek punkcie linii CD, przecięcia wspólnego dwóch płaszczyzn; aże AB nie może spotkać CD, bo do niey jest równoległą; przeto nie może spotkać i płaszczyzny MN; azatém jest równoległą do płaszczyzny (opis. 2)

## PODANIE IX.

### TWIERDZENIE

*Dwie płaszczyzny* MN *i* PQ (fig. 34) *prostopadłe do jedney linii prostey* AB, *są równoległe sobie.*

Bo gdyby się z sobą gdziekolwiek spotkały, i niech będzie O jednym z ich punktow wspólnych; daymy OA, OB; linija AB, prostopadła do płaszczyzny MN, jest prostopadłą do linii prostey OA, na teyże płaszczyznie przez jey spodek poprowadzoney; dla teyże samey przyczyny AB jest prostopadłą do BO; azatém OA i OB byłyby dwie prostopadłe, z jednego punktu O spuszczone na liniją prostą; co jest niepodobieństwém, przeto płaszczyzny MN, PQ nie mogąc się z sobą spotkać, są równoległe sobie.

## PODANIE X.

### TWIERDZENIE.

*Przecięcia* EF, GH, *dwóch płaszczyzn równoległych* MN, PQ, *przez trzecią płaszczyznę* FG, *są równoległe* (fig. 35).

Bo gdy linije EF, GH, leżące na jedney płaszczyznie, nie być są równoległe, tedy przedłużone zbiegą się z sobą; azatém i płaszczyzny MN i PQ, na których one się znayduią, zbiegłyby się także, a więc nie byłyby równoległe.

## PODANIE XI.

### TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie pł. są [illegible] od siebie [illegible]; ~~każda~~ [illegible] pr. prostopadła do jednej z tych dwóch pł., będzie oraz i do drugiey z nich prostopadła.

*Linija* AB (fig. 34) *prostopadła do płaszczyzny* MN, *jest prostopadłą do płaszczyzny* PQ *równoległey* MN.

Pociągniymy dowolnie liniją BC na płaszczyznie PQ; przez AB i BC poprowadźmy płaszczyznę ABC, którey przecięciem się z płaszczyzną MN niech będzie AD: to przecięcie AD, będzie równoległe do BC, (10); aże linija AB, prostopadła do płaszczyzny MN, jest prostopadłą do linii AD; ~~a~~zatém AB będzie prostopadłą do jey równoległey BC; a ~~ponieważ~~ linija nie AB, jako jest prostopadłą do każdey linii BC, przechodzącey przez jey spodek na płaszczyznie PQ,

~~stąd przeto idzie, iż ta linija~~ jest prostopadłą do płaszczyzny PQ.

## PODANIE XII.

### TWIERDZENIE.

*Linije równoległe* EG, FH (fig. 35) *~~zajęte~~ między dwiema płaszczyznami równoległemi* MN, PQ, *są równe sobie.*

Przez linije równoległe EG, FH przeprowadźmy płaszczyznę EGHF, która spotka płaszczyzny równoległe podług kierunków EF i GH. Przecięcia EF, GH są równoległe sobie (10), oraz takiemi są linije EG, FH, azatém figura EGHF jest równoległobokiem; a więc EG=FH.

*Wniosek.* Z tego wypada, że dwie płaszczyzny równoległe, są wszędzie równo od siebie oddalone; bo jeżeli EG i FH, są prostopadłe do dwóch płaszczyzn MN, PQ, tedy są one równoległe sobie (7); azatém są równe.

## PODANIE XIII.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli dwa kąty* CAE, DBF (fig. 36) *nieleżące na jedney płaszczyznie, mają swe ramiona równoległe, i skierowane w jednę stronę, kąty takie są równe, a ich płaszczyzny równoległe.*

Weźmy AC= BD, AE = BF, i poprowadźmy

CE, DF, AB, CD, EF. Ponieważ AC jest równe i równoległe do BD, przeto figura ABDC jest równoległobokiem (1,3); azatém CD jest równe i równoległe do AB. Dla teyże samey przyczyny EF, jest równe i równoległe do AB; więc także CD jest równe i równoległe do EF; azatém figura CEFD jest równoległobokiem; przeto bok CE jest równy i równoległy DF; więc tróykąty CAE, DBF, są równoboczne z sobą, azatém kąt CAE=DBF.

*Powtóre.* Powiadam, że płaszczyzna ACE jest równoległą płaszczyznie BDF; bo przypuśćmy że płaszczyzna równoległa do BDF, poprowadzona przez punkt A, spotyka linije CD i EF w innych punktach, niż są C i E, naprzykład w punktach G i H; wówczas podług podania XII; trzy linije AB, GD, FH, będą równe; aże trzy linije AB, CD, EF już są równe, więc byłoby CD=GD i FH = EF; co jest niedorzecznością; azatém płaszczyzna ACE jest równoległą do płaszczyzny BDF.

*Wniosek* Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe MN, PQ, są przecięte przez dwie inne płaszczyzny CABD, EABF, kąty CAE, DBF, utworzone przez przecięcia płaszczyzn równoległych, będą równe; bo przecięcie AC jest równoległe do BD (10), AE równoległe do BF; azatém kąt CAE= DBF.

## PODANIE XIV.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli trzy linije proste* AB, CD, EF (fig. 36) *nie leżące na jedney płaszczyznie, są równe i równoległe sobie;* ~~*tedy*~~ *troykąty* ACE, BDF *utworzone z jedney i drugiey strony, łącząc końce tych liniy prostych, będą równe, a ich płaszczyzny będą równoległe sobie.*

Jakoż, ponieważ AB jest równą i równoległą CD, figura ABDC jest równoległobokiem; azatém bok AC jest równy i równoległy BD. Dla podobney przyczyny boki AE i BF są równe i równoległe; oraz takiemi są boki CE i DF: dwa więc troykąty ACE, BDF są równe. Nadto podobnie się dowodzi, jak w podaniu poprzedzającém, że płaszczyzny tych troykątów są równoległe.

## PODANIE XV.

### TWIERDZENIE.

*Dwie linije proste, zawarte między trzema płaszczyznami równoległemi, przecięte są na części proporcyonalne.*

Przypuśćmy że linija AB (fig. 37) spotyka płaszczyzny równoległe MN, PQ, RS, w punktach

A, E, B, i że linija CD, spotyka też same płaszczyzny w punktach C, F, D: powiadam, że mieć będziemy AE : EB : : CF : FD.

Poprowadźmy AD, która spotka płaszczyznę PQ w punkcie G: i daymy AC, EG, GF, BD: przecięcia EG, BD, płaszczyzn równoległych PQ, RS, przez płaszczyznę ABD, są równoległe (10): azatém AE : EB : : AG : GD: podobnie przecięcia AC, GF, jako równoległe, dają AG : GD : : CF : FD: z przyczyny więc wspólnego stosunku AG : GD, będzie AE : EB : : CF : FD.

## *PODANIE XVI.

### TWIERDZENIE.

*Niech będzie* ABCD (fig. 38), *jakikolwiek czworobok, nie leżący na jedney płaszczyznie; jeżeli boki przeciwległe przetną się proporcyonalnie przez dwie linije proste* EF, GH, *tak, że jest* AE : EB : : DF : FC; i BG: GC = AH: HD; *powiadam, że linije proste* EF, GH, *przetną się z sobą w punkcie* M *tak, że będzie* HM : MG : : AE : EB; i EM : MF : : AH : HD.

Poprowadźmy przez AD, jakąkolwiek płaszczyznę A*b*H*c*D, tak jednak, żeby nie przechodziła przez GH: przez punkta E, B, C, F, daymy do GH równoległe E*e*, B*b*, C*c*, F*f*; które spotkają tę płaszczyznę w punktach *e*, *b*, *c*, *f*. Z przyczyny równoległości liniy B*b*, GH, C*c*. (15,3)

Dowodzenie zależy na okazaniu:
1° że trójkąty AHb i DHc są podobne
2° że punkta b, H, c są na jedney l. prostey

mieć będziemy $bH : Hc :: BG : GC :: AH : HD$, azatém (20,3) tróykąty $AHb$, $DHc$, są podobne. Mieć potém będziemy $Ae : eb :: AE : EB$: i $Df : fc :: DF : FC$; azatém $Ae : eb :: Df : fc$; albo składając, będzie $Ae : Df :: Ab : Dc$. Aże z przyczyny podobieństwa tróykątów $AHb$, $DHc$, mamy $Ab : Dc :: AH : HD$; azatém $Ae : Df :: AH : HD$: nadto, ponieważ z przyczyny podobieństwa tychże tróykątów $AHb$ i $DHc$, kąt $HAe = HDf$; przeto tróykąty $AHe$, $DHf$ są podobne (20,3); azatém kąt $AHe = DHf$. Z tego naprzód wypada, że $eHf$, jest liniją prostą; azatém że trzy równoległe $Ee$, $GH$, $Ff$ leżą na jedney płaszczyznie, która zawierać będzie linije $EF$, $GH$: więc *te linije przecinać się muszą w punkcie* M. Powtóre, z przyczyny równoległości liniy $Ee$, $MH$, $Ff$, mieć będziemy $EM : MF :: eH : Hf :: AH : HD$.

Przez podobne wykreślenie, odniesione do boku AB, dowiedziemy, że $HM : MG :: AE : EB$.

Tu dodać wyjaśnienie [illegible], jako [illegible]

## PODANIE XVII.

### TWIERDZENIE.

*Kąt zawarty między płaszczyznami* MAN *i* MAP (fig. 39) *może bydź mierzony, stosownie do opisania, kątém* NAP, *jaki czynią z sobą dwie prostopadłe* AN, AP *poprowadzone na każdey z tych płaszczyzn, do przecięcia wspólnego* AM.

Dla przekonania się o rzetelności tey miary,

[illegible] przez l. prostą EF, ślizgającą się po liniach AB, CD, tak, aby w [illegible] była [illegible] równoległą do [illegible] BC i AD; tak też [illegible] prostą GH, ślizgającą się po liniach BC i AD tak, aby [illegible] była [illegible] równoległą [illegible] liniy AB i CD dowieśdź potrzeba 1°, że jest ona stałą, czyli że będzie tąż samą w każdym punkcie wspólnego przecięcia, skąd się wyprowadzają dwie prostopadłe.

Jakoż, jeżeli wezmiemy inny punkt M, i gdy poprowadzimy MC na płaszczyznie MN, i MB na płaszczyznie MP, prostopadłe do wspólnego przecięcia AM; tedy, ponieważ MB i AP są prostopadłe do jedney linii AM, przeto są równoległe sobie. Dla teyże samey przyczyny MC jest równoległe do AN: więc kąt BMC = PAN (13): azatém obojętną jest rzeczą, prowadzić prostopadłe ~~do~~ z punktu M lub ~~do~~ z A, kąt między niemi tami prostopadłemi zawarty zawsze będzie ten sam.

2° Dowieśdź potrzeba, że gdy kąt dwóch płaszczyzn powiększy się lub zmnieyszy w pewnym stosunku, tedy i kąt PAN, powiększy się lub zmnieyszy w tymże samym stosunku.

Na płaszczyznie PAN, z punktu A, promieniem dowolnym, zakreślmy łuk NDP: ze środka M, promieniem równym, zakreślmy łuk CEB; poprowadźmy dowolnie AD. Ponieważ dwie płaszczyzny PAN, BMC są prostopadłe do jedney linii MA, przeto są równoległe sobie (9): przecięcia więc AD, ME, tych dwóch płaszczyzn przez trzecią AMD są równoległe; azatém kąt BME będzie równy PAD (13).

Nazwiymy na moment ~~węgieł~~ tem kąt utworzony przez dwie płaszczyzny MP, MN. Teraz, gdyby kąt DAP był równy kątowi DAN, tedy oczywiście węgieł DAMP, byłby równy węgłowi DAMN;

gdyž podstawa PAD położyłaby się zupełnie na sobie równą DAN, wysokość AM zawsze byłaby taž sama: więc te dwa węgły zupełnieby do siebie przystały. Widzimy nawet, iž gdyby kąt DAP zawierał się dokładnie pewną liczbą razy w kącie PAN, tedy i węgieł DAMP tyležby się razy zawierał w węgle PAMN. Aže ze stosunku liczby całey wnosimy o stosunku jakimkolwiek, jak tego w zupełnie podobném zdarzeniu dowiedliśmy (17,2); azatém jakikolwiek będzie stosunek kąta DAP do kąta PAN; węgieł DAMP, będzie w tymže stosunku z węgłem PAMN: azatém kąt NAP može bydź wzięty za miarę węgła PAMN, czyli kąta, jaki czynią dwie płaszczyzny MAP, MAN.

*Uwaga.* ~~Tož same jest~~ Z kątami przez dwie płaszczyzny utworzonemi, ~~co~~ i z kątami utworzonemi przez dwie linije proste. Azatém, gdy dwie płaszczyzny wzajemnie się krzyžują, kąty w wierzchołku są równe, a kąty przyległe razem wzięte wažą dwa kąty proste; azatém ježeli jedna płaszczyzna jest prostopadłą do drugiey, tedy ta wzajemnie jest prostopadłą do pierwszey. Podobnie w spotkaniu dwóch płaszczyzn równoległych przez trzecią płaszczyznę, zachodzą też same równości i też same własności; co i w spotkaniu dwóch liniy równoległych przez trzecią.

## PODANIE XVIII.

### TWIERDZENIE.

*Gdy linija* AP *jest prostopadła do płaszczyzny* MN, *wszelka płaszczyzna* APB *prowadzona przez tę prostopadłą* AP, *będzie prostopadłą do płaszczyzny* MN (fig. 40).

Niech będzie BC przecięcie płaszczyzn AB, MN: jeżeli na płaszczyznie MN, poprowadzi się DE prostopadła do BP; linija AP, jako prostopadła do płaszczyzny MN, jest prostopadłą do każdey z dwóch liniy BC, DE: aże kąt APD, utworzony przez linije PA, PD prostopadłe do wspólnego przecięcia BP, mierzy kąt dwóch płaszczyzn AB, MN; przeto, ponieważ ten kąt jest prosty, dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe (opis. 5).

*Uwaga.* Gdy trzy linije proste AP, BP, DP, są do siebie prostopadłe, każda z tych liniy jest prostopadłą do płaszczyzny dwóch innych, a trzy płaszczyzny są wzajemnie prostopadłe do siebie.

## PODANIE XIX.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli płaszczyzna* AB *jest prostopadłą do płaszczyzny* MN, *i gdy na płaszczyznie pierwszey* AB, *poprowadzi się* PA *prostopadła do wspólnego przecięcia* PB; *powiadam, że* PA *będzie prostopadłą do płaszczyzny* MN (fig. 40).

Jakoż gdy na płaszczyznie MN poprowadzi się PD prostopadła do PB, kąt APD będzie prosty; gdyż płaszczyzny są prostopadłe do siebie; więc linija AP, jest prostopadłą do dwóch liniy PB, PD, zatém ~~są one~~ jest ona prostopadłą do ich płaszczyzny MN.

*Wniosek.* Jeżeli płaszczyzna AB, jest prostopadłą do płaszczyzny MN, i gdy z punktu P wspólnego ich przecięcia, wyniesie się prostopadła do płaszczyzny MN, powiadam, że ta prostopadła będzie na płaszczyznie AB; bo gdyby ona nie była na niey, moglibyśmy poprowadzić na płaszczyznie AB prostopadłą AP do wspólnego przecięcia BP, która byłaby razem prostopadłą do płaszczyzny MN: azatém w jednym punkcie byłyby dwie prostopadłe do płaszczyzny MN; co jest niepodobieństwem (4).

## PODANIE XX.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli dwie płaszczyzny* AB, AD (fig. 40), *są prostopadłe do trzeciey* MN, *tedy i wspólne ich przecięcie* AP, *prostopadłe będzie do tey trzeciey płaszczyzny.*

Bo gdy z punktu P wyniesiemy prostopadłą do płaszczyzny MN, ta prostopadła znaydować się musi razém, tak na płaszczyznie AB jako i na płaszczyznie AD (wnio. 19); azatém jest ona wspólném ich przecięciem AP.

## PODANIE XXI.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli kąt bryłowy utworzony jest przez trzy kąty płaskie, summa jakichkolwiek dwóch z tych kątów będzie większą od kąta trzeciego.*

Należy nam dowieść tylko to podanie gdy kąt płaski, który z summą dwóch innych porównywamy, jest większy od każdego z tych ostatnich. Niech więc będzie kąt bryłowy S (fig. 41) utworzony przez trzy kąty płaskie ASB, ASC i BSC; i przypuśćmy że kąt ASB, jest naywiększy ze trzech kątów, powiadam że mieć będziemy ASB<ASC+BSC.

Na płaszczyznie ASB zróbmy kąt DSB=BSC; poprowadźmy dowolnie liniją prostą ADB, a wziąwszy SC=SD, daymy AC, BC.

Dwa boki BS, SD, są równe dwóm bokom BS, SC; kąt BSD=BSC; azatém dwa troykąty BSD, BSC są równe, więc BD=BC. Mamy zaś AB<AC+BC; odciągnąwszy z jedney strony BD a z drugiey strony BC równe BD, otrzymamy AD<AC. Dwa boki AS, SD są równe dwóm bokóm AS, SC, trzeci AD jest mnieyszy od trzeciego AC; azatém (10,1) kąt ASD<ASC. Dodając BSD=BSC, mieć będziemy ASD+BSD czyli ASB<ASC+BSC.

## PODANIE XXII.

### TWIERDZENIE.

*Summa kątów płaskich, składających kąt bryłowy, jest zawsze mnieyszą od czterech kątów prostych.*

Przetniymy kąt bryłowy S (fig. 42) jakąkolwiek płaszczyzną ABCDE; z punktu O, wziętego na tey płaszczyznie, poprowadźmy do wszystkich kątów linije OA, OB, OC, OD, OE.

Summa kątów tróykątów ASB, BSC i t. d. utworzonych przy wierzchołku S, równa jest summie kątów podobneyże liczby tróykątów AOB, BOC i t. d. utworzonych przy wierzchołku O. Lecz w punkcie B, kąty ABO, OBC, wzięte razém czynią kąt ABC mnieyszy od summy kątów ABS, SBC (21); podobnie w punkcie C, mamy BCO + OCD < BCS + SCD; toż samo jest, ze wszystkiemi kątami wieloboku ABCDE. Z tego wypada, że w troykątach, których wierzchołkiem jest O, summa kątów na podstawie jest mnieyszą od summy kątów na podstawie w tróykątach, których wierzchołkiem jest S; azatém summa kątów utworzonych przy punkcie O, jest większą od summy kątów przy punkcie S. Aże summa kątów przy punkcie O jest równą czterém kątóm prostym (5,1); a zatém summa kątów płaskich składających kąt bryłowy S, jest mnieyszą od czterech kątów prostych.

*Uwaga.* W tém dowodzeniu przypuszczamy że kąt bryłowy jest wypukły, czyli że płaszczyzna jedney ściany przedłużona nigdy przeciąć nie może kąta bryłowego; w przeciwnym razie summa kątów płaskich niemiałaby granic, i mogłaby bydź jakąkolwiek wielkością.

## PODANIE XXIII.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli dwa kąty bryłowe złożone są ze trzech kątów płaskich równych, każdy każdemu; ~~tedy~~ płaszczyzny, na których leżą te kąty równe, będą równo do siebie nachylone.*

Niech będzie kąt ASC=DTF, kąt ASB=DTE, i kąt BSC = ETF (fig. 43); powiadam, że dwie płaszczyzny ASC, ASB takie mieć będą nachylenie do siebie, jakie mają i płaszczyzny DTF, DTE.

Weźmy dowolnie SB, i poprowadźmy BO prostopadłą do płaszczyzny ASC; z punktu O, gdzie ta prostopadła spotyka płaszczyznę, poprowadźmy OA, OC, prostopadłe do SA, SC, i daymy AB, BC; weźmy potém TE = SB; poprowadźmy EP prostopadłą do płaszczyzny DTF; z punktu P poprowadźmy PD, PF prostopadłe do TD, TF, nakoniec daymy DE, EF.

Tróykąt SAB jest prostokątny w A, a tróykąt DTE prostokątny w D (6), a ponieważ kąt ASB=DTE, przeto także kąt SBA=TED. Nadto SB = TE; więc tróykąt SAB jest równy tróykątowi TDE (5, 1); azatém SA = TD, a AB = DE. Podobnym sposobém dowiedzie się że SC = TF, a BC = EF. Czworobok SAOC jest równy czworobokowi TDPF, bo gdy położymy kąt ASC na jemu równy DTF, tedy z przyczyny SA = TD, a SC = TF, punkt A padnie na D, a punkt C na F, a w tymże czasie AO, prostopadła do SA, padnie na DP prostopadłą do DT, i podobnie OC padnie na OF; azatém punkt O padnie na punkt P, i będzie AO = DP. Aże tróykąty AOB, DPE są prostokątne w O i P, przeciwprostokątna AB = DE i bok AO = DP; przeto te troykąty są równe (18, 1); azatém kąt OAB = PDE. Kąt OAB jest nachyleniem dwóch płaszczyzn ASB, ASC; kąt PDE jest nachyleniem dwóch płaszczyzn DTE, DTF; azatém te dwa nachylenia są równe sobie.

Uważać tu jednak należy że kąt A, tróykąta prostokątnego OAB, nie jest właściwie nachyleniem dwóch płaszczyzn ASB, ASC, tylko wtenczas, gdy prostopadła BO pada, względem SA, z teyże samey strony, co i SC; jeżeli ta prostopadła pada z drugiey strony, wówczas kąt dwóch płaszczyzn byłby rozwarty, a przyłączony do kąta A tróykąta OAB, uczyniłby dwa kąty proste. Lecz w tymże samym przypadku, kąt dwóch płaszczyzn TDE, TDF, byłby także rozwarty, a przyłączony do kąta D, tróykąta DPE, uczyniłby dwa kąty proste; azatém, ponieważ kąt A zawsze byłby równy kątowi D, wnieślibyśmy także, że nachylenie dwóch płaszczyzn ASB, ASC jest równe nachyleniu dwóch płaszczyzn TDE, TDF.

*Uwaga*. Gdy dwa kąty bryłowe są złożone z trzech kątów płaskich, równych każdy każdemu, i gdy ~~razem~~ kąty równe czyli odpowiedne są *jednakim sposobém rozłożone* w dwóch kątach bryłowych; wówczas te kąty są równe sobie, i przyłożone do siebie przystaną. Jakoż widzieliśmy już, że czworobok SAOC może bydź położony na jemu równy TDPF; a tak kładąc, SA na TD, SC padnie na TF, a punkt O na punkt P. Lecz z przyczyny równości tróykątów AOB, DPE, OB, prostopadła do płaszczyzny ASC, jest równa PE, prostopadłey do płaszczyzny TDF: nadto tu prostopadłe są skierowane w jednę stronę; azatém punkt B padnie na E, linija SB na liniją TE, i dwa kąty bryłowe zupełnie do siebie przystaną.

To jednak przystawanie wtenczas zachodzi, gdy zakładamy, że kąty płaskie równe, są *rozłożone jednakim sposobém* w obudwóch kątach bryłowych; bo gdyby kąty płaskie równe, *rozłożone były w* odwrotnym ~~*wsteczym*~~ *porządku*, albo co na jedno wychodzi, gdyby prostopadłe OB, PE, zamiast kierowania się w tęż samę stronę względem płaszczyzn ASC, DTF, były skierowane w stronę przeciwną, wówczas niepodobne byłoby przystawanie do siebie dwóch kątów bryłowych. A jednak zgodnie z twierdzeniem ~~niebyłoby mniey prawdziwym~~, podług twierdzenia, ~~gdyby~~ płaszczyzny, na których są kąty równe, były równo nachylone do siebie; tak, że dwa kąty bryłowe byłyby równe we wszystkich swych częściach składających, niemogąc jednak do siebie przystać. Ten rodzay równości, który nie jest bezwzględny, czyli przystawanie, zasługuje na rozróżnienie przez szczególne nazwanie; ~~my to~~ nazywać będziemy *równością przez symetryą*.

~~I tak~~ dwa kąty bryłowe, o których ~~jest~~ mowa, utworzone przez trzy kąty płaskie równe każdy każdemu, lecz rozłożone w porządku wstecznym, nazywać ~~się będą~~, *kątami równemi przez symetryą*, czyli krócey, *kątami symetrycznemi*.

Ta sama uwaga stosuje się do kątów bryłowych, utworzonych z więcey niż trzech kątów płaskich; i tak jeden kąt bryłowy utworzony przez kąty płaskie A, B, C, D, E, i kąt drugi bryłowy utworzony przez te same kąty w porządku wstecznym A, E, D, C, B, mogą bydź takie, że płaszczyzny na których znaydują się te kąty równe, są równie nachylone do siebie; te kąty bryłowe, które będą równe, chociaż przystawanie ich jest niepodobne, nazywają się *kątami bryłowemi równemi przez symetryą* czyli *kątami bryłowemi symetrycznemi*.

W figurach płaskich, właściwie mówiąc, zgoła niema równości przez symetryą, i wszystkie ~~te~~ równości, którebyśmy tak nazywać chcieli, byłyby równościami bezwzględnemi albo przystawaniem; przyczyną tego jest, że można przewrócić figurę płaską, i bez różnicy wziąć górę za spód. Całkiém inaczey się dzieje w bryłach, gdzie trzeci wymiar może bydź wzięty w dwóch kierunkach różnych.

[ Dać przykład kątów bryłow. symetrycznych: 1) [illegible] w [illegible] przeciwległych; 2) na [illegible] kąta [illegible] na [illegible] 3) [illegible] w [illegible] płaskiém.

## PODANIE XXIV.

### ZAGADNIENIE.

*Mając dane trzy kąty płaskie składające kąt bryłowy, wynaleźć, przez wykreślenie płaskie, kąt, jaki dwie z tych płaszczyzn czynią z sobą.*

Niech będzie S (fig. 44) dany kąt bryłowy w którym znane są trzy kąty płaskie ASB, ASC, BSC; szukaymy kąta jaki czynią z sobą dwie z tych płaszczyzn, naprzykład płaszczyzny ASB, ASC.

Wyobraźmy, że zrobiliśmy to samo wykreślenie co w podaniu poprzedzającém; kąt OAB będzie kątém szukanym. Chodzi więc tylko o znalezienie tegoż samego kąta przez wykreślenie płaskie, czyli kreślone na jedney płaszczyznie.

Na ten koniec zrobmy na jedney płaszczyznie kąty B'SA, ASC, B''SC, równe kątóm BSA, ASC, BSC, w figurze bryłowey: weźmy B'S i B''S równe w szczególności BS figury bryłowey. Z punktów B' i B'' spuśćmy B'A i B''C prostopadłe na SA i SC, które się zbiegą z sobą w punkcie O. Z punktu A, jako środka, promieniem AB' zakreślmy półokręgu koła B'*b*E; z punktu O wynieśmy O*b* prostopadłą do B'E, która spotka okrąg koła w *b*; daymy A*b*; a kąt EA*b* będzie nachyleniem szukaném dwóch płaszczyzn ASC, ASB, kąta bryłowego.

Cała rzecz się sprowadza do pokazania, że tróykąt $AOb$ figury płaskiey, jest równy tróykątowi $AOB$ figury bryłowey. Dwa tróykąty $B'SA$, $BSA$, prostokątne są w $A$, kąty w $S$ są równe, azatém kąty $B'$ i $B$ są równe. Aże przeciwprostokątna $SB'$ jest równa przeciwprostokątney $SB$, przeto te tróykąty są równe, azatém bok $SA$ figury płaskiey jest równy $SA$ figury bryłowey, i także $AB'$ czyli jemu równy $Ab$, w figurze płaskiey, jest równy $AB$ w figurze bryłowey; podobnie się dowiedzie, że bok $SC$ jest równy w jedney i drugiey figurze; skąd wypada, że czworobok $SAOC$ w obu tych figurach jest równy, azatém że $AO$ figury płaskiey jest równy $AO$ figury bryłowey; więc w obu tych figurach tróykąty prostokątne $AOb$, $AOB$, mają przeciwprostokątną równą i bok jeden równy; więc są równe sobie, azatém kąt $EAb$, znaleziony przez wykreślenie płaskie, jest równy nachyleniu dwóch płaszczyzn $SAB$, $SAC$ w kącie bryłowym.

Gdy punkt $O$ pada między $A$ i $B'$ w figurze płaskiey, kąt $EAb$ staje się rozwartym, i mierzy zawsze prawdziwe nachylenie dwóch płaszczyzn, i dla tego to oznaczyliśmy przez $EAb$ a nie przez $OAb$ nachylenie żądane, w celu ażeby toż samo rozwiązanie służyło wszystkim bez wyjątku przypadkóm.

*Uwaga.* Można zadać sobie pytanie, azali biorąc dowolnie trzy kąty płaskie, można utworzyć z nich kąt bryłowy.

Na sam przód potrzeba, żeby summa trzech kątów danych była mnieyszą od czterech kątów prostych, bo bez tego nie może bydź utworzony kąt bryłowy (22); nadto, gdy wezmiemy dwa kąty dowolnie B'SA, ASC, potrzeba ażeby trzeci CSB" był takiey wielkości, iżby prostopadła CB" na bok SC spuszczona, spotykała średnicę B'E między jey końcami B' i E. Granicami więc wielkości kąta CSB" są te granice, które dozwalają spuścić prostopadłą B"C do punktów B' i E. Z tych punktów spuśćmy na CS prostopadłe B'I i EK, które spotkają okrąg koła nakreślony promieniem SB", w punktach I i K, a granicami kąta CSB" będą CSI i CSK.

W tróykącie równoramiennym B'SI, ponieważ linija CS przedłużona, prostopadłą jest do podstawy B'I, mamy kąt CSI=CSB'=ASC+ASB'. A w troykącie równoramiennym ESK, ponieważ linija SC jest prostopadłą do SK, mamy kąt CSK=CSE. Nadto z przyczyny równości troykątów ASE, ASB', kąt ASE=ASB'; azatém CSE czyli CSK=ASC–ASB'.

Z tego wypada, że zagadnienie będzie podobne tylé razy, ile razy trzeci kąt CSB" będzie mnieyszy od summy dwóch innych ASC, ASB', a większy od ich różnicy. Jest to warunek zgadzający się z podaniem XXI; gdyż na mocy tego podania potrzeba żeby było CSB"<ASC+ASB'; nadto potrzeba, żeby było ASC<CSB"+ASB' czyli CSB">ASC–ASB'.

## PODANIE XXV.

### ZAGADNIENIE.

*Mając dane dwa z trzech kątów płaskich, składających kąt bryłowy, oraz kąt nachylenia tych dwóch płaszczyzn, znaleść trzeci kąt płaski.*

Niech będą ASC, ASB′ (fig. 44) dwa kąty płaskie dane, i przypuśćmy na moment, że CSB″, jest trzecim kątém szukanym. Gdy więc zrobimy wykreślenie to samo, co w poprzedzającém zagadnieniu, kąt, zawarty między płaszczyznami dwóch pierwszych, będzie EA*b*. Jako więc determinuje się kąt EA*b*, za pomocą CSB″ gdy dwa inne są dane, tak podobnie zadeterminować można CSB″, zapomocą EA*b*; co rozwiąże zagadnienie podane.

Wziąwszy dowolnie SB′, spuśćmy na SA prostopadłą nieograniczoną B′E; zróbmy kąt EA*b* równy kątowi dwóch płaszczyzn danych. Z punktu *b*, gdzie bok A*b* spotyka okrąg koła nakreślony ze środka A promieniem AB′, spuśćmy na AE prostopadłą *b*O; z punktu O spuśćmy na SC prostopadłą nieograniczoną OCB″, którą tak oznaczmy w B″, żeby było SB″= SB′. Kąt CSB″ będzie trzecim kątém płaskim szukanym.

Bo gdy utworzymy kąt bryłowy z trzech kątów płaskich B′SA, ASC, CSB″, nachylenie płaszczyzn, gdzie są kąty dane ASB', ASC, będzie równe kątowi danemu EA*b*.

*Uwaga.* Jeżeli kąt bryłowy jest *czworościenny*, czyli złożony z czterech kątów płaskich ASB,BSC, CSD,DSA (fig.45); tedy wiadomość tych ostatnich kątów nie jest dostateczną do oznaczenia wzajemnych do siebie nachyleń płaszczyzn, na których kąty płaskie leżą: gdyż z tychże samych kątów płaskich, nieskończoną liczbę kątów bryłowych utworzyć można. Lecz jeżeli się przyda jeden warunek, naprzykład, jeżeli będzie dane nachylenie dwóch płaszczyzn ASB, BSC, wówczas kąt bryłowy całkiem jest oznaczony, i można znaleść nachylenie dwóch jakichkolwiek jego płaszczyzn. Jakoż wyobraźmy kąt bryłowy troyścienny, utworzony przez kąty płaskie ASB, BSC, ASC; dwa pierwsze kąty są dane, oraz dane jest nachylenie ich płaszczyzn; można więc zadeterminować, przez rozwiązane teraz zagadnienie, kąt trzeci ASC. Jeżeli teraz zważymy kąt bryłowy troyścienny, utworzony przez kąty płaskie ASC,ASD, DSC, te trzy kąty są znane; a tak kąt bryłowy całkiem jest determinowany. Ponieważ kąt bryłowy czworościenny jest utworzony przez połączenie się dwóch kątów troyściennych, o których teraz mówiliśmy, azatém, ponieważ te kąty cząstkowe są znane i determinowane, kąt całkowity podobnie znany i determinowany będzie.

Kąt dwóch płaszczyzn ASD, DSC, wprost się wynaydzie za pomocą drugiego kąta bryłowego cząstkowego. Co się tyczy kąta dwóch płaszczyzn

BSC, CSD, potrzeba w kącie bryłowym cząstkowym szukać kąta czwartego, zawartego między dwiema płaszczyznami ASC, DSC, a w drugim, kąta zawartego między dwiema płaszczyznami ASC, BSC; summa tych dwóch kątów będzie kątém zawartym między płaszczyznami BSC, DSC.

Podobnym sposobém się znaydzie, że dla zadeterminowania kąta bryłowego pięciościennego, potrzeba oprócz pięciu kątów płaskich, składających kąt bryłowy, znać jeszcze dwa wzajemne nachylenia ich płaszczyzn, a zaś trzeba znać ich trzy, w kącie bryłowym sześciościennym, i tak daley.

# XIĘGA VI.

## WIELOŚCIANY.

### OPISANIE.

I. Nazywamy *bryłą wielościenną*, albo krócey *wielościanem*, każdą bryłę zakończoną płaszczyznami czyli ścianami płaskiemi. (Te płaszczyzny zakończone są koniecznie linijami prostemi). Nazywamy wszczególności *czworościanem*; bryłę mającą cztery ściany; *sześciościanem* bryłę zakończoną sześciu ścianami: *ośmiościanem*, zakończoną ośmiu ścianami: *dwónastościanem*, zakończoną dwónastu ścianami: *dwudziestościanem*, zakończoną dwudziestu ścianami, i tak daley.

Czworościan jest nayprostszy z wielościanów; gdyż do utworzenia kąta bryłowego naymniey trzy płaszczyzny są potrzebne: i te płaszczyzny zostawią mieysce próżne, które żeby było zamknięte, przynaymniey jedney jeszcze płaszczyzny potrzebuje.

II. Wspólne przecięcie się dwóch ścian przyległych w wielościanie, nazywa się *bokiem* albo *krawędzią* wielościanu.

III. *Wielościanem foremnym* nazywa się ten, w którym wszystkie ściany są wielobokami foremnemi równemi, i którego wszystkie kąty bryłowe są równe sobie. Tych wielościanów jest pięć (patrz dodatek do xiąg VI, i VII).

IV. *Graniastosłup*, jestto bryła zawarta ~~wie-~~ ~~lu~~ ścianami równoległobocznemi, zakończona z jedney i drugiey strony płaszczyznami wielobocznemi równemi i równoległemi sobie.

Dla wykreślenia tey bryły, niech będzie dany ABCDE (fig. 48) jakikolwiek wielobok: jeżeli na jakieykolwiek płaszczyznie równoległey do ABC, poprowadzą się linije FG, GH, HI, i t. d. równe i równoległe bokom AB, BC, CD, i t. d. które utworzą wielobok FGHIK, równy wielobokowi ABCDE: jeżeli potém połączą się wierzchołki kątów jedney płaszczyzny z wierzchołkami odpowiednich kątów drugiey płaszczyzny, linijami prostemi AF, BG, GH, i t. d. ściany ABGF, BCHG i t. d. będą równoległobokami, a bryła ABCDEFGHIK, tym sposobem utworzona, będzie graniastosłupem.

V. Wieloboki równe i równoległe ABCDE, FGHIK nazywają się *podstawami graniastosłupa*: inne płaszczyzny równoległoboczne wzięte razem, stanowią *powierzchnią boczną* czyli *wypukłą graniastosłupa*. Linije równe AF, BG, CH i t. d., nazywają się (bokami bocznemi) ~~*krawędziami*~~ graniastosłupa.

VI. *Wysokość graniastosłupa*, jestt~~o~~ odległość dwóch jego podstaw, czyli prostopadła spuszczona z punktu podstawy górney na podstawę dolną.

VII. *Graniastosłup* jest *prosty*, gdy krawędzie (boki) jego AF, BG, i t. d. są prostopadłe do płaszczyzn podstaw: a wówczas każda (bok) krawędź jest równą wysokości graniastosłupa. W każdym innym przypadku, graniastosłup jest *pochyły*, i wysokość jego jest mnieyszą od krawędzi.

VIII. *Graniastosłup* jest *tróykątny*, *czworokątny*, *pięciokątny*, *sześciokątny* i t. d., podług tego, jak podstawa jego jest troykątem, czworobokiem, pięciobokiem, sześciobokiem i t. d.

IX. Graniastosłup mający za podstawę równoległobok, wszystkie swe ściany ma równoległoboczne, i nazywa się *równoległościanem* (fig. 49).

*Równoległościan* jest *prostokątnym*, gdy wszystkie ściany jego są prostokątami.

X. Z pomiędzy równoległościanów prostokątnych rozróżniamy *sześcian*, czyli sześciościan foremny, zamknięty sześciu kwadratami równemi.

XI. *Ostrosłup* czyli *piramida* jestto bryła utworzona z wielu płaszczyzn troykątnych, wychodzących z jednego punktu S, a kończących się na rozmaitych bokach jedney płaszczyzny wieloboczney ABCDE (fig. 42).

Wielobok ABCDE nazywa się *podstawą* ostrosłupa, punkt S *wierzchołkiem*, a zbiór tróykątów ASB, BSC i t. d. składa *powierzchnią wypukłą* czyli *boczną* ostrosłupa.

XII. *Wysokością* graniastosłupa jest prostopadła spuszczona z wierzchołka na płaszczyznę podstawy przedłużoney, jeżeliby tego potrzeba było.

XIII. Ostrosłup jest *troykątny*, *czworokątny* i t. d. podług tego, jak podstawą jego jest troykąt, czworobok i t. d.

XIV. Ostrosłup jest *foremny*, gdy podstawa jest wielobokiem foremnym, i razem gdy prostopadła spuszczona z wierzchołka na płaszczyznę podstawy, przechodzi przez środek podstawy: ta linija nazywa się wówczas *osią* ostrosłupa.

XV. *Przekątna* wielościanu, jestto linija prosta, łącząca wierzchołki dwóch kątów bryłowych nie przyległych.

XVI. Nazywać będziemy *wielościanami symetrycznemi*, dwa wielościany mające wspólną podstawę, i podobnie zbudowane jeden nad, drugi pod płaszczyzną podstawy, z tym jednak warunkiem, że wierzchołki kątów bryłowych odpowiednich, położone są w równych odległościach od płaszczyzny podstawy, na jedney linii prostey prostopadłey do teyże płaszczyzny.

Naprzykład, jeżeli ST (fig. 61) jest prostopadłą do płaszczyzny ABC, i gdy w punkcie O, gdzie ta prostopadła spotyka tę płaszczyznę, jest ona podzieloną na dwie równe części; dwa ostrosłupy SABC, TABC, mające wspólną podstawę ABC, są wielościanami symetrycznemi.

XVII. Dwa *ostrosłupy troykątne* są *podobne*, gdy mają dwie ściany podobne każda każdey, podobnie położone i równie do siebie nachylone.

I tak, gdy założémy, że kąty ABC = DEF; BAC = EDF, ABS = DET, BAS = EDT, i gdy nadto nachylenie płaszczyzn ABS, ABC (fig. 64), jest równe nachyleniom im odpowiednych płaszczyzn DTE, DEF; ostrosłupy SABC, TDEF będą podobne.

XVIII. Gdy utworzymy troykąt z wierzchołków trzech kątów wziętych na jedney ścianie, albo podstawie wielościanu, możemy sobie wyobrazić, że wierzchołki różnych kątów bryłowych wielościanu, położone za płaszczyzną tey podstawy; są wierzchołkami tyluż ostrosłupów troykątnych, mających za podstawę wspólną troykąt wzmiankowany, i każdy z tych ostrosłupów zadeterminuje położenie każdego kąta bryłowego wielościanu, względem podstawy. To gdy założymy,

Dwa *wielościany* są *podobne*, gdy mają podstawy podobne, a wierzchołki kątów bryłowych odpowiednych za temi podstawami są determinowane przez ostrosłupy troykątne podobne każdy każdemu.

XIX. Nazywać będziemy *wierzchołkami* wielościanu, punkta położone w wierzchołku rozmaitych kątów bryłowych.

NB. Wszystkie wielościany które rozważamy, są wielościanami o kątach wyskakujących, czyli wielościanami *wypukłemi*. Nazywać będziemy tak wielościany, których powierzchnia nie więcey jak tylko w dwóch punktach przez liniją prostą spotkana bydź może. W tym rodzaju wielościanów, płaszczyzna przedłużona jedney ściany, nie może przecinać bryły; niepodobieństwem więc jest, aby wielościan, był w części nad płaszczyzną jedney ściany, a w części pod tą płaszczyzną; jest on całkiem z jedney strony tey płaszczyzny.

## PODANIE PIERWSZE.

### TWIERDZENIE.

*Dwa wielościany nie mogą mieć ~~też~~ tychże same wierzchołki i jednaką ich liczbę, bez przystania do siebie.*

Jakoż przypuśćmy że mamy wystawiony jeden z wielościanów; jeżeli chcemy wystawić drugi, któryby miał też same wierzchołki i o takieyże liczbie, potrzeba ażeby nie wszystkie płaszczyzny jego przechodziły przez też same punkta jak w pierwszym wielościanie; bo inaczey nieróżniłyby się niczém od siebie; lecz widocznie, iż wówczas niektóre z nowych płaszczyzn przecięłyby pierwszy wielościan; byłyby wierzchołki nad temi płaszczyznami, i wierzchołki pod temi płaszczyznami, co niemoże się godzić z wielościanem wypukłym; azatém jeżeli dwa wielościany mają też same wierzchołki i jednaką ich liczbę, ~~tedy~~ te wielościany muszą koniecznie do siebie przystać.

*Uwaga.* Mając dane, co do położenia swego punkta A, B, C, K i t. d., mające służyć za wierzchołki wielościanowi, łatwo jest nakreślić sam wielościan.

Obierzmy naprzód trzy punkta bliskie siebie D, E, H (fig. 46), tak: ażeby płaszczyzna DEH przechodziła, jeżeli to bydź może, przez nowe punkty[illegible] K, C, zostawując wszystkie inne z jedney strony, to jest nad albo pod płaszczyzną; płaszczyzna DEH czyli DEHKC tym sposobem zadeterminowana, będzie jedną ścianą bryły. Przez jeden z jey boków EH poprowadźmy płaszczyznę, i ~~tak~~ ~~ją~~ obracaymy, aż ~~nie~~ napotka nowego wierzchołka F, albo kilka ich razem F, I; mieć będziemy drugą ścianę FEH czyli FEHI; ciągnąc daley tym sposobém prowadzenie płaszczyzn przez boki znalezione aż póki bryła zupełnie ze wszystkich stron nie będzie zakończoną, otrzymamy bryłę, która będzie wielościanem żądanym; gdyż nie mogą bydź dwie, któreby miały też same wierzchołki.

## PODANIE II.

### TWIERDZENIE.

*W dwóch wielościanach symetrycznych, ściany odpowiedne są równe każda każdey a nachylenie ścian przyległych w jedney z tych bryt, jest równe nachyleniu ścian odpowiednych w drugiey.*

Niech będzie ABCDE (fig. 47) podstawą wspólną dwóch wielościanów: niech M i N będą wierzchołkami dwóch jakichkolwiek kątów bryłowych jednego z wielościanów; a M′ i N′ odpowiedne wierzchołki drugiego wielościanu. Potrzeba, podług opisania, aby linie proste MM′, NN′ były prostopadłe do płaszczyzny ABC, i podzielone na dwie równe części w punktach *m* i *n*, w których tę płaszczyznę spotykają. To założywszy powiadam, że odległość MN jest równą odległości M′ N′.

Jakož gdy obrócimy trapez *m*M′ N′*n* około *mn* tak, aby płaszczyzna jego położyła się na płaszczyznie *m*MN*n*; tedy z przyczyny kątów prostych w *m* i *n*, bok *m*M′ padnie na bok sobie równy *m*M, a zaś *n*N′ na *n*N; azatém te dwa trapezy przystaną do siebie, i mieć będziemy MN=M′N′

Niech będzie P trzecim wierzchołkiem wielościanu górnego, a zaś P′ jemu odpowiednym w dolnym; podobnie mieć będziemy MP=M′P′, a NP=N′P′; azatém *tróykąt* MNP, *łączący jakiekolwiek trzy wierzchołki wielościanu górnego, jest równy tróykątowi* M′N′P′, *łączącemu trzy wierzchołki odpowiedne w dolnym wielościanie.*

Z pomiędzy tych tróykątów, jeżeli zważymy te tylko, które utworzone są na powierzchni wielościanu, wnieść już możemy że powierzchnie dwóch wielościanów, złożone są z jednakiey liczby troykątów równych każdy każdemu.

Powiadam teraz, jeżeli troykąty znaydują się na jedney płaszczyznie powierzchni i składają jednę i tęż samę ścianę wieloboczną, ~~tedy~~ troykąty odpowiedne, będą na jedney ~~teyże~~ płaszczyznie na drugiey powierzchni, i utworzą ścianę wieloboczną równą.

Jakož niech będą MPN, NPQ dwa troykąty

przyległe, które załóżmy, iż leżą na jedney płaszczyznie, i niech będą $M'P'N'$, $N'P'Q'$ troykąty im odpowiedne: mamy kąt $MNP = M'N'P'$; kąt $PNQ = P'N'Q'$, a gdy poprowadzimy $MQ$ i $M'Q'$, troykąt $MNQ$ będzie równy troykątowi $M'N'Q'$, a tak mieć będziemy kąt $MNQ = M'N'Q'$: aże $MPNQ$ jest jedną płaszczyzną, przeto kąt $MNQ = MNP + PNQ$, azatém mieć także będziemy $M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'$. Aże gdyby trzy płaszczyzny $M'N'P'$, $P'N'Q'$, $M'N'Q'$, nie zbiegły się z sobą w jednę, utworzyłyby kąt bryłowy, i mielibyśmy (20.5), kąt $M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q'$; przeto, ponieważ ten warunek niezachodzi, dwa troykąty $M'N'P'$, $P'N'Q'$ leżą na jedney płaszczyznie.

Zostaje nam do pokazania, że nachylenie jakichkolwiek dwóch ścian przyległych w jednym z wielościanów, jest równe nachyleniu dwóch ścian odpowiednych w drugim wielościanie.

Niech będą $MPN$, $NPQ$, dwa troykąty utworzone na krawędzi wspólney $NP$, na płaszczyznach dwóch ścian przyległych: niech będą $M'P'N'$, $N'P'Q'$ im odpowiedne troykąty; w punkcie $N$ wyobrazić możem kąt bryłowy utworzony przez trzy kąty płaskie $MNQ$, $MNP$, $PNQ$, a w punkcie $N'$ kąt bryłowy, utworzony przez trzy kąty $M'N'Q'$, $M'N'P'$, $P'N'Q'$; aże już pokazaliśmy że te kąty płaskie są równe każdy każdemu, azatém nachylenie dwóch płaszczyzn $MNP$, $PNQ$ jest równe nachyleniu im odpowiadających płaszczyzn $M'N'P'$, $P'N'Q'$ (22,5).

Wwielościanach więc symetrycznych, ściany są równe każda każdey, a płaszczyzny dwóch ścian jakichkolwiek przyległych w jedney bryle, mają też same nachylenie, co płaszczyzny dwóch ścian odpowiednych w drugiey bryle.

*Uwaga.* Tu postrzegamy, *że kąty bryłowe jednego wielościanu, są symetryczne z kątami bryłowemi drugiego wielościanu*; bo gdy kąt bryłowy N, utworzony jest przez płaszczyzny MNP, PMQ, QNR i t. d. tedy jemu odpowiedny N′ jest utworzony przez płaszczyzny M′N′P′, P′N′Q′, Q′N′R′ i t. d.. Te ostatnie płaszczyzny zdają się bydź rozłożone w tymże samym porządku co i pierwsze; ale ponieważ dwa kąty bryłowe są w położeniu względem siebie odwróconém, przeto rzeczywisty układ płaszczyzn składających kąt bryłowy N′, jest odwrótny względem układu płaszczyzn zachodzącego w kącie odpowiednym N. Nachylenia płaszczyzn następnie po sobie idących są równe w jednym i drugim kącie bryłowym, azatém te kąty bryłowe są symetryczne względem siebie (*patrz. uwaga pod.* XXIII *xię.* V) Ta uwaga pokazuje, iż *wszelki wielościan, jeden tylko mieć może wielościan sobie symetryczny.* Bo gdybyśmy wystawili na inney podstawie nowy wielościan symetryczny z wielościanem danym, tedyby kąty bryłowe tego wielościanu były zawsze symetryczne z kątami wielościanu podanego; azatém byłyby równe kątom wielościanu symetrycznego wystawionego na pierwszey podstawie. Nadto, ściany odpowiedne byłyby zawsze równe, przeto tę dwa wielościany symetryczne, wystawione na jedney podstawie albo na inney, miałyby ściany równe i kąty bryłowe równe, azatém przyłożone do siebie przystałyby, i utworzyłyby jeden i tenże sam wielościan.

## PODANIE III.

### TWIERDZENIE.

*Dwa graniastosłupy są równe, gdy mają kąt bryłowy zawarty między trzema płaszczyznami równemi każda każdey, i podobnie umieszczonemi.*

Niech będzie podstawa ABCDE, równa podstawie *abcde* (fig. 48) równoległobok ABGF równy równoległobokowi *abgf*, i równoległobok BCHG równy równoległobokowi *bchg*; powiadam że graniastosłup ABCI będzie równy graniastosłupowi *abci*.

Jakoż, gdy podstawę ABCDE położymy na podstawie jey równey *abcde*, te dwie podstawy przystaną do siebie; aże trzy kąty płaskie, składające kąt bryłowy B, są równe trzém kątom płaskim składającym kąt bryłowy *b*, każdy każdemu, tojest ABC = *abc*, ABG = *abg*, i GBC = *gbc*; nadto te kąty są podobnie umieszczone; przeto kąty bryłowe B i *b* są równe; a następnie bok BG padnie na jemu równy *bg*. Widzimy także, iż z przyczyny równoległoboków równych ABGF, *abgf*, bok GF padnie na bok jemu równy *gf*, i podobnie

GH na *gh*; azatém podstawa górna FGHIK zbieży się całkiem z podstawą sobie równą *fghik* i dwie bryły zleją się w jednę, gdyż mieć będą też same wierzchołki (1).

*Wniosek. Dwa graniastosłupy proste, mające podstawy i wysokości równe, są równe sobie.* Bo że bok AB jest równy *ab*, i wysokość BG równa *bg*, prostokąt ABGF będzie równy prostokątowi *abgf*; toż samo jest z prostokątami BGHC, *bghc*; przeto trzy płaszczyzny składające kąt bryłowy B, są równe trzem płaszczyznom składającym kąt bryłowy *b*. Azatém dwa takie graniastosłupy są równe.

## PODANIE IV.

### TWIERDZENIE.

*W każdym równoległościanie, płaszczyzny przeciwległe są równe i równoległe sobie.*

Podług opisania tego gatunku bryły, podstawy ABCD, EFGH (fig. 49) są równoległobokami równemi, a ich boki są równoległe; zostaje więc do dowiedzenia, że toż samo zachodzi i w dwóch ścianach przeciwległych, jak naprzykład w ścianach AEHD, BFGC. Bok AD jest równy i równoległy bokowi BC, bo figura ABCD jest równoległobokiem; dla podobney przyczyny bok AE jest równy równoległy bokowi BF, azatém kąt DAE jest równy kątowi CBF (13, 5), a płaszczyzna DAE jest równoległą płaszczyznie CBF; a przeto także równoległobok DAEH jest równy równoległobokowi CBFG; dowiedzie się podobnym sposobem, że równoległoboki sobie przeciwległe ABFE, DCGH są równe i równoległe.

*Wniosek.* Ponieważ równoległościan jest bryłą zamkniętą sześciu płaszczyznami, z których sobie przeciwległe są równe i równoległe, przeto jakakolwiek i jey przeciwległa mogą bydź wzięte za podstawy równoległościanu.

*Uwaga.* Mając dane trzy linie proste AB, AE, AD, przez jeden punkt A przechodzące, i czyniące z sobą kąty dane, można na tych trzech liniach wystawić równoległościan. Na ten koniec poprowadzić trzeba przez koniec każdey linii prostey, płaszczyznę równoległą do płaszczyzny dwóch innych: to jest przez punkt B płaszczyznę równoległą do DAE, a przez punkt D płaszczyznę równoległą do BAE, a zaś przez punkt E płaszczyznę równoległą do BAD. Wzajemne spotkania się tych płaszczyzn utworzą równoległościan żądany.

# PODANIE V.

## TWIERDZENIE.

*W każdym równoległościanie kąty bryłowe przeciwległe są symetryczne z sobą; a przekątne, przez wierzchołki tych kątów poprowadzone, przecinają się wzajemnie na dwie równe części.*

Porównaymy, naprzykład, kąt bryłowy A, z jemu przeciwległym G (fig. 49): kąt EAB równy kątowi EFB jest także równy kątowi HGC; kąt DAE = DHE = CGF; a kąt DAB = DCB = HGF; azaém trzy kąty płaskie, składające kąt bryłowy A, są równe każdy każdemu trzem kątom składającym kąt bryłowy G: nadto, łatwo jest widzieć że ich rozkład jest różny w obudwóch tych kątach bryłowych: azatém 1° dwa kąty bryłowe A i G są symetryczne względem siebie (23, 5).

Powtóre, wyobraźmy dwie przekątne EC, AG, obie poprowadzone z wierzchołków przeciwległych: ponieważ AE jest równą i równoległą CG, przeto figura AEGC jest równoległobokiem; azatém przekątne EC, AG przetną się wzajemnie na dwie części równe. Podobnym sposobem dowiedzie się, że przekątna EC i druga DF przetną się także na dwie części równe; azatém 2° cztery przekątne wzajemnie się przetną na dwie części równe w jednym punkcie, który uważać można, jako środek równoległościanu.

## PODANIE VI.

### TWIERDZENIE.

*Płaszczyzna* BDHF (fig. 50) *przechodząca przez dwie krawędzie przeciwległe i równoległe sobie* BF, DH, *dzieli równoległościan* AG *na dwa graniastosłupy tróykątne* ABDHEF, GHFBCD *symetryczne względem siebie.*

Naprzód, te dwie bryły są graniastosłupami; gdyż troykąty ABD, EFH, jako mające swe boki równe i równoległe, są równe sobie; a zaś w niey ściany boczne ABFE, ADHE, BDHF są równoległobokami; azatém bryła ABDHEF jest graniastosłupem. Toż samo jest i z bryłą GHFBCD. Powiadam teraz że te dwa graniastosłupy są względem siebie symetryczne.

Na podstawie ABD, wystawmy graniastosłup ABDE'F'H', symetryczny z graniasłosłupem ABDEFH. Podług podania 11, płaszczyzna ABF'E jest równą ABFE, a płaszczyzna ADH'E' jest równą ADHE: lecz gdy porównamy graniastosłup GHFBCD z graniastosłupem ABDH'E'F', podstawa GHF jest równą ABD; równoległobok GHDC, który jest równym ABFE, jest także równym ABF'E':

a równoległobok GFBC, który jest równym ADHE, jest także równym ADH'E': azatém trzy płaszczyzny, składające kąt bryłowy G w graniastosłupie GHFBCD, są równe trzem płaszczyznom, składającym kąt bryłowy A w graniastosłupie ABDH'E'F', każda każdey: nadto, te płaszczyzny są podobnie rozłożone, azatém te dwa graniastosłupy są równe (3) i mogą do siebie przystać. Aże jeden z nich ABDH'E'F' jest symetryczny z graniastosłupem ABDHEF, przeto drugi GHFBCD, jest także symetrycznym z ABDHEF.

## PODANIE VII.

### PODANIE PRZYBRANE.

*W każdym graniastosłupie* ABCI (fig. 51) *przecięcia* NOPQR, STVXY *zrobione przez płaszczyzny równoległe, są wielobokami równemi.*

Jakoż, boki NO, ST są równoległe jako przecięcia dwóch płaszczyzn równoległych przez trzecią płaszczyznę ABGF: te same boki NO, ST są zawarte między linijami sobie równoległemi NS, OT, które są krawędziami graniastosłupa; azatém NO jest równe ST. Dla podobney przyczyny boki OP, PQ, QR i t. d., przecięcia NOPQR, są równe odpowiednie bokom TV, VX, XY i t. d., przecięcia STVXY. Nadto, ponieważ boki równe są razem i równoległe, przeto kąty NOP, OPQ, i t. d. pierwszego przecięcia, są równe odpowiedne kątom STV, TVX, i t. d. drugiego przecięcia. Azatém dwa przecięcia NOPQR, STVXY są wielobokami równemi.

*Wniosek.* Wszelkie przecięcie w graniastosłupie równoległe podstawie, jest równe teyże podstawie.

## PODANIE VIII.

### TWIERDZENIE.

*Dwa graniastosłupy tróykątne symetryczne* ABDHEF, BCDFGH (fig. 52) *na które się rozkłada równoległościan* AG, *są równoważne sobie.*

Przez wierzchołki B i F poprowadźmy prostopadłe do boku BF, płaszczyzny $Badc$, $Fehg$, które spotykają w jedney stronie w $a$, $d$, $c$, w drugiey w $e$, $h$, $g$, trzy inne krawędzie AE, DH, CG tegoż równoległościanu: przecięcia $Badc$, $Fehg$ będą równoległobokami równemi. Przecięcia te są równe, gdyż zrobione są przez płaszczyzny prostopadłe do jedney linii prostey, a następnie równoległe są sobie (7): są one równoległobokami, gdyż dwa przeciwległe boki jednego przecięcia $aB$, $dc$, są przecięciami dwóch płaszczyzn równych ABFE, DCGH, przez tęż płaszczyznę.

Dla podobney przyczyny, figura $BaeF$, jest równoległobokiem, tak jak i wszystkie inne ściany boczne *BFgc*, *chdg*, *adhe*, bryły *BadcFehg*; azatém ta bryła jest graniastosłupem (opis. 4), i ten graniastosłup jest prosty, gdyż krawędź BF jest prostopadłą do płaszczyzny podstawy.

To założywszy, jeżeli płaszczyzną BFHD podzielémy graniastosłup prosty B*h* na dwa graniastosłupy troykątne proste *a*B*de*F*h*, B*dc*F*hg*; powiadam że graniastosłup troykątny pochyły ABDEFH, będzie równoważny graniastosłupowi tróykątnemu prostemu AB*de*F*h*.

Jakoż, ponieważ te dwa graniastosłupy mają jednę część wspólną ABD*he*F, przeto dosyć jest dowieść że pozostałe części, tojest, bryły B*a*AD*d*, F*e*EH*h* są równoważne sobie.

Ponieważ z przyczyny równoległoboków ABFE, *a*BF*e*, boki AE, *ae* jako równe bokowi BF sobie równoległemu, są równe sobie; przeto odciągając od nich część wspólną A*e*, zostanie A*a* = E*e*. Podobnie się dowiedzie że D*d* = H*h*.

Dla wykonania teraz przystawania dwóch brył B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, połóżmy podstawę F*eh* na jey równey B*ad*: wówczas punkt *e* padnie na *a*, a punkt *h* na *d*: boki *e*E, *h*H padną na sobie równe *a*A, *d*D, bo one są prostopadłe do teyże płaszczyzny B*ad*. Dwie więc bryły, o których mówimy, zupełnie zeydą się z sobą; azatém graniastosłup pochyły BADFEH jest równoważny graniastosłupowi prostemu B*ad*F*eh*.

Podobnym sposobém się dowiedzie że graniastosłup pochyły BDCFHG jest równoważny graniastosłupowi prostemu B*dc*F*hg*. Lecz dwa graniastosłupy proste B*ad*F*eh*, B*dc*F*hg* są równe między sobą, gdyż maią też samę wysokość BF a podstawy ich B*ad*, B*dc* są połowami tegoż samego równoległoboku (3). Azatém dwa graniastosłupy troykątne BADFEH, BDCFHG równoważne graniastosłupom równym, są równoważne sobie.

*Wniosek.* Każdy graniastosłup troykątny ABDHEF, jest połową równoległościanu AG, wystawionego z tegoż samego kąta bryłowego A, i z tychże samych krawędzi AB, AD, AE.

## PODANIE IX.

### TWIERDZENIE.

*Jeżeli dwa równoległościany* AG, AL (fig. 53), *maią wspólną podstawę* ABCD, *a podstawy ich górne* EFGH, IKLM, *leżą na jedney płaszczyznie, zawarte między temiż* [illegible] *liniami równoległemi* EK, HL, *takie dwa równoległościany są równoważne sobie.*

Tu zachodzić mogą trzy przypadki: albo EI jest większe od EF, albo mnieysze, albo nakoniec EI równe EF; lecz dowodzenie zawsze będzie toż samo: i powiadam naprzód, że graniastosłup troykątny AEIDHM jest równy graniastosłupowi troykątnemu BFKCGL.

Jakoż, ponieważ AE jest równoległą do BF a HE do GF; kąt AEI = BFK, HEI = GFK a HEA = GFB. Z tych sześciu kątów, trzy pierwsze składają kąt bryłowy E, a trzy drugie składają kąt bryłowy F; azatém, ponieważ kąty płaskie są równe każdy każdemu i podobnie rozłożone, kąty bryłowe E i F są równe. Jeżeli teraz położymy graniastosłup AEM na graniastosłupie BFL, a naprzód podstawę AEI na podstawie BFK, te dwie podstawy, jako równe, przystaną do siebie; a ponieważ kąt bryłowy E jest równy kątowi bryłowemu F, przeto bok EH padnie na bok sobie równy FG. Niepotrzeba już więcey do okazania ~~dowodzić~~, że dwa graniastosłupy zeydą się z sobą w całey swey rozciągłości; bo podstawa AEI i krawędź EH determinują graniastosłup AEM, tak jak podstawa BFK i krawędź FG determinują graniastosłup BFL (3): azatém te graniastosłupy są równe.

Lecz gdy od bryły AL odetniemy graniastosłup AEM, zostanie równoległościan AIL: a gdy od teyże bryły AL odetniemy graniastosłup BFL, zostanie równoległościan AEG: azatém dwa równoległościany AIL, AEG są równoważne sobie.

## PODANIE X.

### TWIERDZENIE.

*Dwa równoległościany jednakiey podstawy i jedney wysokości są równoważne sobie.*

Niech będzie ABCD (fig. 54) podstawa wspólna dwóm równoległościanom AG, AL: ponieważ te równoległościany są jedney wysokości, przeto podstawy ich górne EFGH, IKLM będą na jedney płaszczyznie. Nadto, krawędzie EF i AB są równe i równoległe, toż samo i krawędzie IK, AB; azatém EF jest równa i równoległa krawędzi IK: dla podobney przyczyny, GF jest równą i równoległą LK. Przedłużmy krawędzie EF, HG, oraz krawędzie LK i IM, tak aby te przedłużenia, przez wzajemne swe przecięcia się, utworzyły równoległobok NOPQ. Ten równoległobok oczywiście jest równy każdey z podstaw EFGH, IKLM. Jeżeli więc wyobraziémy sobie trzeci równoległościan na podstawie dolney ABCD, a mający za podstawę górną równoległobok NOPQ; ten trzeci równoległościan będzie równoważny równoległościanowi AG (9): bo mają tęż samę podstawę dolną, a zaś górne leżą na jedney płaszczyznie, między linijami równoległemi GQ, FN. Dla teyże przyczyny ten trzeci równoległościan jest równoważny równoległościanowi AL: azatém dwa równoległościany AG, AL, mające tęż samę podstawę i wysokość, są równoważne między sobą

## PODANIE XI.

### TWIERDZENIE.

*Każdy równoległościan może bydź zamieniony na równoległościan prostokątny równoważny, mający tęż samę wysokość i podstawę równoważną.*

Niech będzie AG (fig. 54) równoległościan dany: z punktow A, B, C, D, poprowadźmy AI, BK, CL, DM, prostopadłe do płaszczyzny podstawy; tym sposobém utworzémy równoległościan AL, równoważny równoległościanowi AG, a w którym ściany boczne AK, BL i t. d. będą prostokątami. Jeżeli więc podstawa ABCD jest prostokątem, równoległościan AL będzie prostokątnym równoważnym równoległościanowi podanemu AG. Lecz jeżeli ABCD nie jest prostokątém (fig. 55), poprowadźmy AO, BN prostopadłe do CD: a potém OQ i NP prostopadłe do podstawy; a tak mieć będziemy bryłę ABNOIKPQ, która będzie równoległościanem prostokątnym. Jakoż z wykreślenia, podstawa ABNO i jey przeciwległa IKPQ, są prostokątami; ściany jey boczne są także prostokątami, bo krawędzie AI, OQ i t. d. są prostopadłe do płaszczyzny podstawy; azatém bryła AP jest równoległościanem prostokątnym. Aże te dwa równoległościany AP, AL, uważać się mogą jako mające jednę podstawę ABKI, i tęż samę wysokość AO; azatém są sobie równoważne; azatém równoległościan AG zamieniony naprzód na równoległościan sobie równoważny AL (fig. 54) został znowu zamieniony na równoległościan prostokątny AP (fig. 55) sobie równoważny, mający tęż samę wysokość AI i podstawę ABNO równoważną podstawie ABCD.

## PODANIE XII.

### TWIERDZENIE.

*Dwa równoległościany prostokątne* AG, AL (fig. 56), *mające tęż samę podstawę* ABCD, *mają się do siebie jak ich wysokości* AE, AI.

Przypuśćmy naprzód, że wysokości AE, AI mają się do siebie jak dwie liczby całkie, naprzykład jak 15 do 8. Podzielmy AE na 15 części równych, jakich AI zawiera 8; i przez punkta podziałów $x$, $y$, $z$ i t. d. poprowadźmy płaszczyzny równoległe podstawie. Te płaszczyzny podzielą bryłę AG na 15 równoległościanow cząstkowych, równych między sobą, jako mających podstawy i wysokości równe: podstawy równe, ponieważ każde przecięcie MIKL, zrobione w graniastosłupie równolegle do jego podstawy ABCD, jest równe podstawie (7): wysokości równe, bo te wysokości są samemi podziałami $Ax$, $xy$, $xz$ i t. d. Ponieważ z tych 15 równoległościanów równych, ośm jest zawartych w bryle AL: azatém bryła AG, tak się ma do bryły AL, jak 15 do 8: czyli w ogólności jak wysokość AE do wysokości AI.

Powtóre, jeżeli stosunek AE do AI nie może się wyrazić w liczbach, powiadam iż nie mniey będzie *bryt.* AG : *bryt.* AL : : AE : AI. Bo jeżeli ta proporcya niema mieysca, założmy tedy iż jest *bryt.* AG : *bryt.* AL : : AE : AO. Podzielmy AE na części równe, z którychby każda była mnieyszą od OI: jeden przynaymniey punkt popodziału *m* przypadnie między O i I. Niech będzie P, równoległościan, który ma za podstawę ABCD, a za wysokość A*m*. Ponieważ wysokości AE, A*m* mają się do siebie jak dwie liczby całkie, przeto będzie *bryt.* AG : P : : AE : A*m*. Lecz z założenia mamy *bryt.* AG : *bryt.* AL : : AE : AO; stąd wypada *bryt.* AL : P : : AO : A*m*. Aże AO jest większe od A*m*, przeto, aby proporcya była prawdziwą, potrzeba żeby bryła AL była większą od P. Przeciwnie zaś, jest ona mnieyszą: azatém niepodobieństwem jest aby czwarty wyraz proporcyi *bryt.* AG: *bryt.* AL : : AE : $x$, był linią większą od AI. Przez podobne rozumowanie dowiedzie się, że czwarty wyraz nie może bydź mnieyszym od AI: azatém równy bydź musi AI: dwa więc równoległościany prostokątne jednakiey podstawy mają się do siebie jak ich wysokości.

## PODANIE XIII.

### TWIERDZENIE.

*Dwa równoległościany prostokątne* AG, AK (fig. 57), *mające jednę wysokość* AE, *mają się do siebie jak ich podstawy* ABCD, AMNO.

Postawiwszy obok siebie dwie bryły, jak figura wystawia, przedłużmy płaszczyznę ONKL aż do spotkania się z płaszczyzną DCGH, podług linii PQ: mieć będziemy trzeci równoległościan AQ, który porównać można z każdym z równoległościanow AG, AK. Dwie bryły AG, AQ, mające jednę podstawę AEHD, mają się do siebie jak ich wysokości AO, AB. Podobnie dwie bryły AQ, AK, mające wspólną podstawę AOLE, mają się do siebie jak ich wysokości AD, AM. A tak mieć będziemy te dwie proporcye

$$\textit{bryt.}\ AG : \textit{bryt.}\ AQ :: AB : AO,$$

$$\textit{bryt.}\ AQ : \textit{bryt.}\ AK :: AD : AM;$$

mnożąc te dwie proporcye w porządku swoim, i opuszczając w wypadku, wspólny mnożnik *bryt.* AQ, otrzymamy

$$\textit{bryt.}\ AG : \textit{bryt.}\ AK :: AB \times AD : AO \times AM.$$

Aże AB×AD wyraża podstawę ABCD, a zaś AO×AM wyraża podstawę AMNO; azatém dwa równoległościany prostokątne równey wysokości mają się do siebie jak ich wysokości.

## PODANIE XIV.

### TWIERDZENIE.

*Dwa jakiekolwiek równoległościany prostokątne, mają się do siebie jak mnogości* (iloczyny) *z ich podstaw przez ich wysokości: czyli jak mnogości z ich trzech wymiarów.*

Bo umieściwszy dwie bryły AG, AZ (fig. 57) tak; aby ich powierzchnie miały kąt wspólny BAE, gdy przedłużemy płaszczyzny potrzebne do utworzenia trzeciego równoległościanu AK jedney wysokości z równoległościanem AG: mieć będziemy na mocy poprzedzającego twierdzenia

*bryt.* AG : *bryt.* AK : : ABCD : AMNO.

Aže dwa równoległościany AK, AZ, mające tęž samę podstawę AMNO, mają się do siebie jak ich wysokości AE, AX, przeto będzie

*bryt.* AK : *bryt.* AZ : : AE : AX.

Množąc przez się w swoim porządku te dwie proporcye, i opuszczając w wypadku množnik wspólny *bryt.* AK, otrzymamy

*bryt.* AG : *bryt.* AZ : : ABCD×AE : AMNO×AX.

W mieyscu podstaw ABCD i AMNO, położyć można AB×AD i AO×AM; przez co otrzymamy *brył.*AG : *brył.*AZ : : AB×AD×AE : AO×AM×AX.

Azatém dwa jakiekolwiek równoległościany prostokątne mają się do siebie i t. d..

*Uwaga.* Stąd wypada, iż za miarę równoległościanu prostokątnego, wziąć można mnogość z jego podstawy przez wysokość, czyli mnogość z trzech jego wymiarów. I na tymto właśnie początku, opieramy obrachunek wszystkich brył innych.

Dla wyrozumienia tey miary, przypomnieć sobie należy, ~~co rozumiemy~~ za przez mnogość dwóch lub więcey liniy, rozumiemy mnogość liczb wyrażających te linie, a te liczby, zawisłe są od jedności liniowey, którą wziąć można od upodobania. Mnogość więc trzech wymiarów równoległościanu, jest liczbą samą przez się nic nieznaczącą, a któraby inną bydź mogła, gdybyśmy inną wzięli jedność liniową. Lecz gdy się pomnożą przez się podobnie trzy wymiary innego równoległościanu, obliczone w teyże jedności liniowey; dwie mnogości mieć się będą do siebie jak bryły, i dadzą wyobrażenie o ich wielkości względney.

Wielkość bryły, jey objętość czyli jey rozciągłość, stanowią to co nazywamy *bryłowatością*: i wyraz *bryłowatość* używa się szczególnie do oznaczenia miary takiey bryły: i tak mówi się, że bryłowatość równoległościanu prostokątnego jest równą mnogości z jego podstawy przez jego wysokość, czyli równą mnogości z trzech jego rozmiarów.

Trzy rozmiary sześcianu, ponieważ są równe sobie przeto jeżeli bok jest 1, bryłowatość jego będzie 1×1×1 czyli 1; jeżeli bok jest 2, bryłowatość jego będzie 2×2×2 czyli 8: jeżeli bok jest 3, bryłowatość jego będzie 3×3×3 czyli 27; i tak daley. A tak gdy krawędzie sześcianów są jak liczby 1, 2, 3, i t. d.; same sześciany czyli ich bryłowatości są jak liczby 1, 8, 27, i t. d. Ztąd pochodzi, iż w Arytmetyce *sześcianem* jakiey liczby, nazywają mnogość wypadającą z trzech mnożników równych téy liczbie.

Gdybyśmy zadali sobie zrobić sześcian podwóyny względem sześcianu danego, potrzeba byłoby, żeby bok sześcianu szukanego miał się do boku sześcianu danego, jak pierwiastek sześcienny z 2 do jedności. Bardzo łatwo znaleźć można, przez wykreślenie geometryczne, pierwiastek kwadratowy z 2; lecz nie można znaleźć pierwiastku sześciennego, a przynaymniey przez proste działania Geometryi początkowéy, które zawisły od użycia samych tylko liniy prostych, których znane są dwa punkty, i koła, których środki i promienie są determinowane.

(x) Z przyczyny téy trudności, zagadnienie o *podwojeniu sześcianu* było sławném u starożytnych geometrów, tak jak zagadnienie *podziału kąta na trzy równe części*, które prawie jest tegoż samego porządku. Lecz od dawna już znano rozwiązania, którym te gatunki zadań są podległe, a które, chociaż mniey proste, jak wykreślenia Geometryi początkowéy, nie są jednak ani mniéy dokładne, ani mniéy ściste.

Mniejsza z dwóch średnich geometrycznie [illegible] bokiem sześcianu [illegible] podwójnego [illegible] jest bokiem sześcianu danego [illegible]. Jakoż

$a:x=x:y=y:b$ daje $x^2=ay$, $bx=y^2$

$x^4=a^2y^2=a^2bx$, $x^3=a^2b$, $x=\sqrt[3]{a^2b}$ | $bx^3=ay^3$ czyli $x^3:y^3=a:b$

Z wartości $x^3=a^2b$ i z proporcyi $x^3:y^3=b:a$ wypływa $y^3=ab^2$, $y=\sqrt[3]{ab^2}$

Jeżeli więc a jest bokiem sześcianu danego, x bokiem sześcianu podwojonego być $x^3 = 2a^3$ czyli $x = \sqrt[3]{a^2 \times 2a}$ to jest x musi być mnieyszą z dwóch średnich między, a i 2a. Co b. d. d.



# PODANIE XV.

## TWIERDZENIE.

*Bryłowatość równoległościanu, a w ogólności, bryłowatość jakiegokolwiek graniastosłupa, jest równa mnogości z jego podstawy przez wysokość.*

Jakož, 1° wszelki równoległościan jest równoważny równoległościanowi prostokątnemu, mającemu tęž samę wysokość i podstawę równoważną (11). Bryłowatość zaś téy ostatniey bryły jest równą mnogości z podstawy przez wysokość: azatém bryłowatość pierwszey bryły jest podobnie równa mnogości z podstawy przez wysokość.

2°. Wszelki graniastosłup troykątny, jest połową równoległościanu jedney z nim wysokości, a dwa razy większéy podstawy (8). Že zaś bryłowatość ostatniéy bryły jest równa podstawie množonéy przez jéy wysokość; azatém bryłowatość pierwszéy bryły, to jest graniastosłupa, jest równa mnogości z jego podstawy, połowy podstawy równoległościanu, množonéy przez jego wysokość.

3°. Wszelki graniastosłup može bydź podzielony na tyle graniastosłupów troykątnych mających jednę wysokość, ile utworzyć možna troykątów w wieloboku służącym mu za podstawę.

Lecz bryłowatość każdego graniastosłupa troykątnego, jest równą jego podstawie mnożoney przez jego wysokość; a ponieważ wysokość jest jedną dla wszystkich graniastosłupów, przeto summa wszystkich graniastosłupów cząstkowych, będzie równą summie wszystkich troykątów służących im za podstawy, mnożonéy przez wysokość im wspólną. Azatém bryłowatość wszelkiego wielokątnego graniastosłupa, jest równą mnogości z jego podstawy przez jego wysokość.

*Wniosek.* Gdy porównamy dwa graniastosłupy mające jednę wysokosć; mnogości podstaw przez wysokości mieć się będą do siebie jak podstawy; a zatém *dwa graniastosłupy jednéy wysokości, mają się do siebie jak ich podstawy:* dla podobney przyczyny, *dwa graniastosłupy jednych podstaw mają się do siebie jak ich wysokości.*

## PODANIE XVI.

### TWIERDZENIE.

*Gdy ostrosłup* SABCDE (fig. 58) *przecięty będzie płaszczyzną* abd *równoległą do jego podstawy*;

1°. *Krawędzie* SA, SB, SC, . . , . *i wysokość* SO, *będą podzielone proporcyonalnie w* a, b, c, . . . *i* o;

2°. *Przecięcie* abcde *będzie wielobokiem podobnym podstawie* ABCDE.

Jakoż 1°, ponieważ płaszczyzny ABC, *abc* są równoległe, przecięcia ich AB, *ab* przez trzecią SAB są równoległe (10,5); azatém troykąty SAB, S*ab* są podobne, i mamy tę proporcyą SA : S*a* : : SB : S*b*: podobnie mieć będziemy SB : S*b* : : SC : S*c* i tak daley. Wszystkie więc krawędzie SA, SB, SC i t. d., przecięte są proporcyonalnie w *a*, *b*, *c*, i t. d. Wysokość SO jest także przeciętą w punkcie *o* w takieyże proporcyi: gdyż BO i *bo* są równoległe; a zatém będzie OS : S*o* : : SB : S*b*.

2°. Bok *ab* jest równoległy do AB, *bc* do BC, a CD do *cd* i t. d., kąt *abc*=ABC, kąt *bcd*=BCD, i tak daley. Nadto, z podobieństwa troykątów SAB, S*ab* mamy AB : *ab* : : SB : S*b*; a z przyczyny podobnych troykątów SBC, S*bc* mamy SB : S*b* : : BC : *bc*; podobnie mieć będziemy BC : *bc* : : CD : *cd*; i tak daley. Wieloboki więc ABCDE, *abcde* mają kąty równe każdy każdemu i boki odpowiedne proporcyonalne: azatém są podobne.

*Wniosek*. Niech będą SABCDE, SXYZ dwa ostrosłupy, mające wspólny ~~których~~ wierzchołek ~~jest wspólny~~, i jedn~~ey~~ aką ~~są~~ wysokość~~i~~, czyli których wierzchołek wspólny podstawy są ~~położone~~ na jedney płaszczyznie: gdy się te ostrosłupy przetną płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstaw, wypadną ztąd przecięcia *abcde*, *xyz*; powiadam, *że przecięcia* abcde, xyz *mieć* się *będą do siebie jak podstawy* ABCDE, XYZ.

Jakoż ponieważ wieloboki ABCDE, *abcde* są podobne, przeto powierzchnie ich mają się do siebie jak kwadraty z boków odpowiednych AB, *ab*; aże AB : *ab* : : SA : S*a*; przeto ABCDE : *abcde* : :

$\overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$. Dla podobney przyczyny XYZ : $xyz$ : : $\overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2$. Lecz że $abcxyz$ jest jedną płaszczyzną, przeto mamy także SA : $Sa$ : : SX : $Sx$; a zatém ABCDE : $abcde$ : : XYZ : $xyz$. Przecięcia więc $abcde$, $xyz$ mają się do siebie jak podstawy ABCDE, XYZ. Azatém jeżeli podstawy ABCDE, XYZ są równoważne, przecięcia zrobione w równych wysokościach, są także równoważne.

## PODANIE XVII.

### TWIERDZENIE.

*Dwa ostrosłupy troykątne, mające podstawy równoważne a wysokości równe, są sobie równoważne.*

Niech będą SABC, $sabc$ (fig. 59) dwa ostrosłupy wysokości jedney AT i o podstawach troykątnych ABC, $abc$, równoważnych, a które przypuszczamy, iż leżą na jedney płaszczyznie. Jeżeli te ostrosłupy nie są równoważne, niech będzie $sabc$ naymnieyszy, a A$x$ niech będzie wysokością graniastosłupa, któryby wystawiony na podstawie ABC, był równy ich różnicy.

Podzielmy wysokość wspólną AT, na części sobie równe, mnieysze od A$x$, i niech będzie $k$ jedną z tych części. Przez punkta podziału wysokości, poprowadźmy płaszczyzny równoległe do płaszczyzn podstaw: przecięcia uczynione przez każdą z tych płaszczyzn w dwóch ostrosłupach będą równoważne (16 wnio.) jak naprzykład DEF i *def*, GHI i *ghi*, i t. d. To zrobiwszy, na troykątach ABC, DEF, GHI i t. d. wziętych za podstawy, wystawmy graniastosłupy zewnętrzne, któreby miały za krawędzie części AD, DG, GK, i t. d. boku SA; podobnie na troykątach *def*, *ghi*, *klm*, i t. d., wziętych za podstawy, wystawmy w drugim ostrosłupie, graniastosłupy wnętrzne, któreby miały za krawędzie odpowiadające części boku *sa*. Wszystkie te graniastosłupy cząstkowe mieć będą wysokość wspólną *k*.

Summa graniastosłupów zewnętrznych ostrosłupa SABC, jest większa od tego ostrosłupa; summa graniastosłupów wnętrznych ostrosłupa *sabc*, jest mnieyszą od tego ostrosłupa. Dla tych dwóch więc przyczyn, różnica między dwiema summami graniastosłupów, powinna bydź większą od różnicy między dwóma ostrosłupami.

Aże idąc od podstaw ABC, *abc*, drugi graniastosłup zewnętrzny DEFG jest równoważny pierwszemu graniastosłupowi wnętrznemu *defa*; bo ich podstawy DEF, *def*, są równoważne, a mają wspólną wysokość *k*; dla teyże samey przyczyny, są równoważne: trzeci graniastosłup zewnętrzny GHIK i drugi wnętrzny *ghid*; czwarty zewnętrzny i trzeci wnętrzny, i t. d., aż do ostatniego, jednych i drugich graniastosłupów. Azatém wszystkie graniastosłupy zewnętrzne ostrosłupa SABC, wyjąwszy pierwszy ABCD, mają sobie równoważne graniastosłupy wnętrzne ostrosłupa *sabc*. Azatém graniastosłup ABCD jest różnicą między summą graniastosłupów zewnętrznych ostrosłupa SABC i summą graniastosłupów wnętrznych ostrosłupa *sabc*; aże ta różnica tych dwóch summ, jest większą od różnicy dwóch ostrosłupów, a zatém potrzeba byłoby, aby graniastosłup ABCD był większy od graniastosłupa ABCX; lecz przeciwnie jest on mnieyszy, ponieważ mają jednę podstawę ABC, a wysokość *k* pierwszego, jest mnieysza od wysokości *Ax* drugiego graniastosłupa. Przypuszczenie więc, od któregośmy do tego wypadku przyszli, nie może mieć mieysca, a zatém dwa ostrosłupy SABC, *sabc* podstaw równoważnych i wysokości równych, są równoważne sobie.

## PODANIE XVIII.

### TWIERDZENIE.

*Wszelki ostrosłup troykątny jest trzecią częścią graniastosłupa troykątnego, mającego też samę podstawę i też samę wysokość.*

Niech będzie SABC (fig. 60) ostrosłup troykątny, a zaś ABCDES, graniastosłup troykątny jedney podstawy i wysokości z ostrosłupem; powiadam, że ostrosłup jest trzecią częścią tego graniastosłupa.

Odetniymy od graniastosłupa ostrosłup SABC, zostanie bryła SACDE, którą uważać można jako ostrosłup czworokątny, którego wierzchołek jest w S, a podstawą jest równoległobok ACDE. Poprowadźmy przekątną CE, i daymy płaszczyznę SCE; która podzieli ostrosłup czworokątny na dwa ostrosłupy troykątne SACE, SDCE. Te dwa ostrosłupy za wysokość wspólną mają prostopadłę spuszczoną z wierzchołka S na płaszczyznę ACDE; mają zaś podstawy równe, bo troykąty ACE, DCE są dwiema połowami jednego równoległoboku: a zatém dwa ostrosłupy SACE, SDCE są równoważne sobie: lecz ostrosłup SDCE i ostrosłup SABC, mają podstawy równe ABC, DES, mają także równą wysokość, bo jest ona odległością płaszczyzn równoległych ABC, DES; dwa więc ostrosłupy SABC, SDCE są równoważne; aże dowiedliśmy, że ostrosłup SDCE jest równoważny ostrosłupowi SACE; a zatém trzy ostrosłupy SABC, SDCE, SACE, składające graniastosłup ABD, są równoważne sobie. A zatém ostrosłup SABC jest trzecią częścią graniastosłupa ABD, mającego tęż samę podstawę i wysokość.

*Wniosek.* Bryłowatość ostrosłupa troykątnego, równą jest trzeciey części mnogości z podstawy przez jego wysokość.

## PODANIE XIX.

### TWIERDZENIE.

*Wszelki ostrosłup* SABCDE (fig. 58), *ma za miarę trzecią część mnogości z jego podstawy* ABCDE *przez jego wysokość* AO.

Jakoż, gdy przeprowadziemy płaszczyzny SEB, SEC, przez przekątne EB, EC, podzielémy przez to ostrosłup wieloboczny SABCDE, na wiele ostrosłupów troykątnych, mających jednę wysokość SO. A że na mocy poprzedzającego twierdzenia, każdy z tych ostrosłupów mierzy się mnogością każdey z podstaw ABE, BCE, CDE, przez trzecią część jego wysokości SO; a zatém summa ostrosłupów troykątnych, czyli ostrosłup wieloboczny SABCDE, mieć będzie za miarę summę troykątów ABE, BCE, CDE, składających podstawę wieloboczną ABCDE, mnożoną przez $\frac{1}{3}$ SO; a zatém wszelki ostrosłup, ma za miarę trzecią część mnogości z jego podstawy przez jego wysokość.

*Wniosek I.* Wszelki ostrosłup jest trzecią częścią graniastosłupa, mającego tęż samę podstawę i wysokość.

*Wniosek II.* Dwa ostrosłupy jedney wysokości, mają się do siebie jak ich podstawy, a dwa ostrosłupy jedney podstawy mają się do siebie jak ich wysokości.

*Uwaga.* Obrachować można bryłowatość każdego ciała wielościennego, rozkładając je na ostrosłupy, i ten rozkład wielu sposobami wykonać się może; nayprostszy jest ten, prowadzić płaszczyzny podziałowe przez wierzchołek jednego kąta bryłowego, a wówczas mieć będziemy tyle ostrosłupów cząstkowych, ile jest ścian w wielościanie, wyjąwszy ściany składające kąt bryłowy, skąd płaszczyzny podziałowe prowadziliśmy.

## PODANIE XX.

### TWIERDZENIE.

*Dwa wielościany symetryczne są równoważne między sobą czyli równe co do bryłowatości.*

Jakoż 1º dwa ostrosłupy tróykątne symetryczne, jakiemi są SABC, TABC (fig. 61), mają, za miarę wspólną, mnogość z podstawy ABC przez trzecią część wysokości SO lub TO; azatém te ostrosłupy są równoważne między sobą. 2º Jeżeli jakimkolwiek sposobém podzielemy jeden z wielościanów symetrycznych na ostrosłupy troykątne, można będzie podzielić podobnie inny wielościan na ostrosłupy troykątne symetryczne; aże ostrosłupy troykątne symetryczne, są równoważne każdy każdemu; azatém i całkowite wielościany będą równoważne między sobą, czyli równe co do bryłowatości.

*Uwaga*. To podanie zdawałoby się wprost wypadać z podania 11, gdzie pokazano, że w dwóch wielościanach symetrycznych, wszystkie części, składające jednę bryłę, są równe częściom składającym drugą bryłę; ~~lecz nie mniey~~ potrzeba było*jednak* by ~~tego~~ *udowodnić* ~~dowieść~~ [illegible] sposobem ścisłym.

## PODANIE XXI.

### TWIERDZENIE.

*Gdy ostrosłup przetniemy płaszczyzną równoległą do jego podstawy, kloc, czyli ostrosłup ścięty pozostały po odjęciu małego ostrosłupa, jest równy summie trzech ostrosłupów, mających za wysokość wspólną wysokość kloca, a za podstawy, podstawę dolną kloca, jego podstawę górną i średnią proporcyonalną między temi dwiema podstawami.*

Niech będzie ostrosłup ABCDE (fig. 62) przecięty płaszczyzną *abd* równoległą do podstawy; niech będzie TFGH ostrosłup troykątny, którego podstawa i wysokość są równe albo równoważne podstawie i wysokości ostrosłupa SABCDE. Można założyć że ~~dwie~~ *obie* podstawy leżą na jedney płaszczyznie: a wówczas płaszczyzna *abd* przedłużona, zadeterminuje, w ostrosłupie troykątnym, przecięcie *fgh*, położone w teyże *samej* odległości nad płaszczyzną wspólną podstaw: skąd znowu wypada, że przecięcie *fgh* ma się do przecięcia *abd*, jak podstawa FGH do podstawy ABD (16). A ponieważ podstawy są równoważne, przeto takiemi są i przecięcia. Ostrosłupy więc S*abcde*, T*fgh* są równoważne, gdyż mają jednę wysokość i podstawy równoważne. Dla teyże samey przyczyny ostrosłupy SABCDE, TFGH są równoważne: azatém kloce ABD*dab*, FGH*hfg* są równoważne, a następnie dosyć będzie dowieśdź podania, wysłowionego tylko na przypadek kloca ostosłupa troykątnego.

Niech będzie FGH*hfg* (fig. 63) kloc ostrosłupa troykątnego o podstawach równoległych. Przez trzy punkta F, *g*, H, poprowadźmy płaszczyznę F*g*H, odcinającą od kloca ostrosłup troykątny *g*FGH. Ten ostrosłup ma za podstawę, podstawę dolną FGH kloca, ma także za wysokość, wysokość kloca; bo wierzchołek *g*, jest na płaszczyznie podstawy górney *fgh*.

Po odcięciu tego ostrosłupa, zostanie ostrosłup czworokątny *gfh*HF, którego wierzchołek *g*, jest na podstawie *fh*HF. Przez trzy punkta *f*, *g*, H, poprowadźmy płaszczyznę *fg*H, która podzieli ostrosłup czworokątny na dwa ostrosłupy troykątne *g*F*f*H, *gfh*H. Ten ostatni ma za podstawę *gfh* podstawę górną kloca, a za wysokość, wysokość tegoż kloca; gdyż wierzchołek jego H, należy do podstawy dolney: a tak mamy już dwa z trzech ostrosłupów mających składać kloc.

Zostaje do rozważenia trzeci ostrosłup *g*F*f*H: jeżeli poprowadziemy *g*K równoległą do *f*F, i gdy wyobraziemy sobie nowy ostrosłup $f$FHK, którego wierzchołkiem jest K, a podstawą F$f$H; te dwa ostrosłupy mieć będą tęż samę podstawę F$f$H, mieć także będą tęż samę wysokość, gdyż wierzchołki $g$ i K położone są na linii $g$K równoległey do $f$F, a następnie równoległey do płaszczyzny podstawy: azatém te ostrosłupy są równoważne. Lecz ostrosłup $f$FKH może bydź uważany jako mający swóy wierzchołek w $f$, a tak mieć on będzie tęż samę wysokość co kloc: co się tycze jego podstawy FKH, powiadam że ta jest średnią proporcyonalną między podstawami FGH, $fgh$. Jakoż troykąty FHK, $fgh$, mają jeden kąt równy F $=$ $f$, i bok FK $=$ $fg$; azatém będzie (24,3) FHK : $fgh$ : : FH : $fh$. Mamy także FHG : FHK : : FG : FK czyli $fg$. Lecz troykąty podobne FGH, $fgh$ dają FG : $fg$ : : FH : $fh$; azatém FGH : FHK : : FHK : $fgh$; a tak podstawa FHK jest średnią proporcyonalną między dwiema podstawami FGH, $fgh$; azatém kloc ostrosłupowy troykątny o podstawach równoległych, równy jest trzem ostrosłupom, mającym za wysokość wspólną wysokość kloca, a których podstawami są: podstawa dolna kloca, jego podstawa górna i średnia proporcyonalna między temi dwiema podstawami.

## PODANIE XXII.

### TWIERDZENIE.

*Gdy graniastosłup troykątny, którego* ABC (fig. 60) *jest podstawą, przetniemy płaszczyzną* DES *nachyloną do téy podstawy, bryła* ABCDES *wypadająca z tego przecięcia, będzie równa summie trzech ostrosłupów, których wierzchołkami są* D, E, S, *a podstawą wspólną* ABC.

Przez trzy punkty S, A, C, poprowadźmy płaszczyznę SAC, która od graniastosłupa ściętego ABCDES, odetnie ostrosłup troykątny SABC: ten ostrosłup ma za podstawę ABC a za wierzchołek punkt S.

Po odięciu tego ostrosłupa, zostanie ostrosłup czworokątny SACDE, którego S jest wierzchołkiem a ACDE podstawą. Przez trzy punkty S, E, C, poprowadźmy jeszcze płaszczyznę SEC, która podzieli ostrosłup czworokątny na dwa ostrosłupy troykątne SACE, SCDE.

Ostrosłup SACE, mający za podstawę troykąt AEC a za wierzchołek punkt S, jest równoważny ostrosłupowi EABC, mającemu za podstawę AEC a za wierzchołek punkt B.

Ponieważ te dwa ostrosłupy mają tęż samę podstaw , przeto mają tęż samę wysokość; bo linia BS, jako równoległa do każdey z liniy

AE, CD, jest równoległa do ich płaszczyzny ACE; a zatém ostrosłup SACE jest równoważny ostrosłupowi EABC, który uważany bydź może, jako mający za podstawę ABC, a za wierzchołek punkt E.

Trzeci ostrosłup SCDE może bydź naprzód zamieniony na ASCD, gdyż te dwa ostrosłupy mają tęż samę podstawę SCD; mają także one tęż samę wysokość, bo AE jest równoległą do płaszczyzny SCD; a zatém ostrosłup SCDE jest równoważny ostrosłupowi ASCD. Potém, ostrosłup ASCD może bydź zamieniony na ABCD, gdyż te dwa ostrosłupy mają podstawę wspólną ACD; są one także i jedney wysokości, bo ich wierzchołki S i B, leżą na linii równoległéy do płaszczyzny podstawy.

A zatém ostrosłup SCDE równoważny ostrosłupowi ASCD, jest także równoważny ostrosłupowi ABCD; ten zaś ostatni może bydź uważany jako mający za podstawę ABC a za wierzchołek punkt D.

A zatém nakoniec, graniastosłup ścięty czyli klocowy ABCDES, jest równy summie trzech ostrosłupów, mających za podstawę wspólną ABC a za wierzchołki sobie odpowiedne punkta D, E, S.

*Wniosek.* Jeżeli krawędzie AE, BS, CD są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, będą one razem wysokościami trzech ostrosłupów składających graniastosłup ścięty; tak, że bryłowatość graniastosłupa ściętego wyrazi się ~~zawsze~~ przez

Blanche (3em Cahier str. 46) dowaje są wiana uwagę:
że Objętość graniastosłupa tr. ~~ściętego~~ ukośnie
ściętego jest zawsze równa jego podstawie, pomnożonej przez
prostopadłą ze środka wielkości przecięcia do tejże podstawy
opuszczoną.

$\frac{1}{3}$ ABC × AE + $\frac{1}{3}$ ABC × BS + $\frac{1}{3}$ ABC × CD; ilość, która się przywodzi do $\frac{1}{3}$ ABC × (AE + BS + CD).

## PODANIE XXIII.

### TWIERDZENIE.

*W dwóch ostrosłupach troykątnych podobnych, ściany odpowiedne są podobne sobie, a kąty bryłowe odpowiedne są równe.*

Podług opisania, dwa ostrosłupy troykątne SABC, TDEF (fig. 64) są podobne, jeżeli dwa troykąty SAB, ABC, są podobne dwóm troykątom TDE, DEF i podobnie umieszczone, to jest jeżeli kąt ABS = DET, BAS = EDT, ABC = = DEF, BAC = EDF, i gdy nadto, nachylenie płaszczyzn SAB i ABC, jest równe nachyleniu płaszczyzn TDE i DEF: to założywszy, powiadam, że te ostrosłupy mają wszystkie ściany podobne każda każdey, i kąty bryłowe odpowiedne są równe.

Weźmy BG=ED, BH=EF, BI=ET, i poprowadźmy GH, GI, IH. Ostrosłup TDEF jest równy ostrosłupowi IGBH: bo wzięliśmy boki GB, BH równe bokom DE, EF, i kąt GBH, z założenia jest równy kątowi DEF: troykąt więc GBH jest równy troykątowi DEF: a zatém dla zdziałania, przystawania dwóch ostrosłupów, można naprzód podstawę DEF położyć na jey równéy GBH; potém, ponieważ płaszczyzna DTE, tyle jest nachylona do płaszczyzny DEF, ile płaszczyzna SAB do płaszczyzny ABC; przeto oczywiście płaszczyzna DET padnie nieoznaczonym sposobem na płaszczyznę ABS. A że z założenia kąt DET = GBI, więc ET padnie na sobie równe BI; a ponieważ cztéry punkta D, E, F, T, padają na cztéry G, B, H, I, przeto (1) ostrosłup TDEF przystanie do ostrosłupa IGBH.

Ponieważ z przyczyny troykątów równych DEF, GBH, kąt BGH=EDF= BAC; więc GH jest równoległe do AC. Dla podobnéy przyczyny GI jest równoległe do AS; a zatém płaszczyzna IGH jest równoległa do SAC (13,5). Ztąd wypada, że troykąt IGH albo jemu równy TDF, jest podobny SAC (15), i że troykąt IBH albo jemu równy TEF, jest podobny SBC: a zatém dwa ostrosłupy troykątne podobne SABC, TDEF mają cztéry ściany podobne każda każdey: nadto, mają one kąty bryłowe odpowiedne równe.

Gdyż umieściliśmy już kąt bryłowy E na jemu odpowiedny B, i toż samo zrobić można z dwóma drugiemi kątami bryłowemi odpowiednemi; lecz wprost widziémy, że dwa kąty bryłowe odpowiedne są równe; naprzykład, kąty T i S, gdyż one są utworzone przez trzy kąty płaskie równe każdy każdemu i podobnie umieszczone.

A zatém dwa ostrosłupy troykątne podobne, mają ściany odpowiedne podobne i kąty bryłowe odpowiedne równe.

*Wniosek* I. Troykąty podobne w dwóch ostrosłupach, dają proporcyą AB : DE : : BC : EF : : AC : DF : : AS : DT : : SB : TE : : SC : TF; a zatém *w ostrosłupach troykątnych podobnych, boki odpowiedne są proporcyonalne.*

II. Ponieważ kąty bryłowe odpowiedne są równe, przeto *nachylenie jakichkolwiek dwóch ścian ostrosłupa jest równe nachyleniu dwóch ścian odpowiednych ostrosłupa podobnego.*

III. Gdy ostrosłup troykątny SABC; przetnie się płaszczyzną GIH, równoległą do jednéy ze ścian SAC, ostrosłup cząstkowy BGIH, będzie podobny ostrosłupowi całemu BASC: bo troykąty BGI, BGH są podobne troykątom BAS, BAC każdy każdemu, i podobnie są umieszczone: nachylenie ich płaszczyzn jest toż samo w obudwóch; a zatém dwa ostrosłupy są podobne.

IV. W ogólności, *gdy jakikolwiek ostrosłup* SABCDE (fig. 58) *przetnie się płaszczyzną* abcde *równoległą do podstawy, ostrosłup cząstkowy* Sabcde *podobny będzie ostrosłupowi całkiemu* SABCDE. Jakoż, podstawy ABCDE, *abcde* są podobne, a gdy poprowadziemy AC, *ac*, dowiedliśmy teraz, że ostrosłup troykątny SABC jest podobny ostrosłupowi *Sabc*: a zatém punkt S tak jest determinowany względem podstawy ABC, jak punkt S determinowany jest względem podstawy *abc* (opis. 18): a zatém dwa ostrosłupy SABCDE, *Sabcde* są podobne.

*Uwaga.* Zamiast pięciu datek potrzebnych, podług opisania, do podobieństwa dwóch ostrosłupów troykątnych, można za nie podstawić pięć innych, stosownie do rozmaitych kombinacyy; a z tego tyleż wypadłoby twierdzeń, z pomiędzy których to tylko rozróżnić możemy: *Dwa ostrosłupy troykątne są podobne, gdy mają krawędzie odpowiedne proporcyonalne.* (i podobnie ułożone?)

Jakoż jeżeli mamy proporcye (fig.64) AB : DE : : BC : EF : : AC : DF : : AS : DT : : SB : TE : : SC : TF, co zawiera pięć warunków, tedy troykąty ABS, ABC będą podobne troykątom DET, DEF i podobnie umieszczone. Mieć będziemy także troykąt SBC podobny troykątowi TEF; a zatém trzy kąty płaskie składające kąt bryłowy B, będą równe kątom płaskim, składającym kąt bryłowy E, każdy każdemu; skąd wypada, że nachylenie płaszczyzn SAB, ABC jest równe nachyleniu sobie odpowiednych płaszczyzn TDE, DEF; a zatém, że dwa ostrosłupy są podobne.

Uwaga II. O ostrosłupach trójkątnych odwrotnie (wspak) jako podobnych (Planche Cam. 3. fig. 47) (*

## PODANIE XXIV.

### TWIERDZENIE.

*Dwa wielościany podobne, mają ściany odpowiedne podobne, i kąty bryłowe odpowiedne równe.*

Niech będzie ABCDE (fig. 65) podstawa wielościanu: niech M i N będą wierzchołkami dwóch kątów bryłowych za tą podstawą, determinowanemi przez ostrosłupy troykątne MABC, NABC, których podstawą wspólną jest ABC:

(* t.j.: Dwa ostrosłupy trójkątne nazywaią się odwrotnie podobnemi, gdy jeden z nich jest podobny symetrycznemu drugiego.
Dwa ostrosł. trójkątne odwrotnie podobne maią ściany odpowiednio podobne, a kąty bryłowe odpowiednie symetryczne.

niech będą w drugim ostrosłupie, *abcde* podstawa, *m* i *n* wierzchołki, odpowiedne wierzchołkom M i N, determinowane przez ostrosłupy *mabc*, *nabc* podobne ostrosłupom MABC, NABC; powiadam naprzód, że odległości MN, *mn*, są proporcyonalne bokom odpowiednym AB, *ab*.

Jakoż, ostrosłupy MABC, *mabc*; ponieważ są podobne, przeto nachylenie płaszczyzn MAC, BAC, jest równe nachyleniu płaszczyzn *mac*, *bac*. Podobnie, ponieważ ostrosłupy NABC, *nabc* są podobne, nachylenie płaszczyzn NAC, BAC, jest równe nachyleniu płaszczyzn *nac*, *bac*. Jeżeli więc odeymiemy pierwsze nachylenia od ostatnich, zostanie nachylenie płaszczyzn NAC, MAC, równe nachyleniu płaszczyzn *nac*, *mac*. Lecz z przyczyny podobieństwa tychże ostrosłupów, troykąt MAC jest podobny *mac*; a troykąt NAC jest podobny *nac*, a zatém dwa ostrosłupy troykątne MNAC, *mnac* mają dwie ściany każda każdéy podobne, podobnie umieszczone i równie nachylone do siebie; a zatém te ostrosłupy są podobne (21); krawędzie więc ich odpowiedne dają proporcyą MN : *mn* : : AM : *am*. Nadto, AM : *am* : : AB : *ab*; a zatém MN : *mn* : : AB : *ab*.

Niech będą P i *p*, dwa inne wierzchołki odpowiedne tychże wielościanów, a podobnie mieć będziemy PN : *pn* : : AB : *ab*, PM : *pm* : : AB : *ab*. Więc MN : *mn* : : PN : *pn* : : PM : *pm*. A zatém *troykąt* PNM, *łączący* *które*kolwiek *trzy wierzchołki wielościanu*, *jest podobny troykątowi* pnm *łą-*

*czącemu trzy wierzchołki odpowiedne drugiego wielościanu.*

Niech będą jeszcze Q i *q* dwa wierzchołki odpowiedne; a troykąt PQN będzie podobny troykątowi *pqn*. Powiadam nadto, że nachylenie płaszczyzn PQN, PMN jest równe nachyleniu płaszczyzn *pqn*, *pmn*.

Bo gdy poprowadziémy QM, i *qm*, mieć będziemy zawsze troykąt QNM, podobny troykątowi *qnm*, a następnie kąt QNM równy kątowi *qnm*. Zważmy w N, kąt bryłowy utworzony przez trzy kąty płaskie QNM, QNP, PNM; a w *n*, kąt bryłowy utworzony przez trzy kąty płaskie *qnm*, *qnp*, *pnm*; ponieważ te kąty każdy każdemu są równe, przeto ztąd idzie, iż kąty bryłowe są równe. A zatém nachylenie dwóch płaszczyzn PNQ, PNM jest równe nachyleniu im odpowiednych płaszczyzn *pnq*, *pnm*: a zatém jeżeliby dwa troykąty PNQ, PNM były na jedney płaszczyznie, w którym to przypadku mielibyśmy kąt QNM = QNP + PNM, mielibyśmy, także *qnm* = *qnp* + *pnm*, i dwa troykąty *qnp*, *pnm* byłyby także na jedney płaszczyznie.

To wszystko cośmy teraz dowiedli ma mieysce, jakiekolwiek będą kąty M, N, P, Q porównywane z sobie odpowiednemi *m*, *n*, *p*, *q*.

Przypuśćmy teraz, że powierzchnia jednego z wielościanów jest podzielona na troykąty ABC, ACD, MNP, NPQ i t. d.; widziémy, iż powierzchnia drugiego wielościanu zawierać będzie równą liczbę troykątów *abc*, *acd*, *mnp*, *npq* i t. d.

podobnych i podobnie umieszczonych: a jeżeli kilka troykątów, jak MPN, NPQ, i t. d. należą do jedney ściany i są na jedney płaszczyznie, tedy im odpowiedne *mpn*, *npq*, i t. d. będą także na jedney płaszczyznie. A zatém wszelka ściana wieloboczna w wielościanie, odpowiadać będzie ścianie wielobocznéy podobney w drugim wielościanie; więc dwa wielościany będą zamknięte jednaką liczbą płaszczyzn podobnych i podobnie umieszczonych. Powiadam nadto, że kąty bryłowe odpowiedne będą równe.

Jakoż, jeżeli kąt bryłowy N. naprzykład, jest utworzony z kątów płaskich QNP, PNM, MNR, QNR, kąt bryłowy odpowiedny *n*, utworzony będzie przez kąty płaskie *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*. A że te kąty płaskie, każdy każdemu są równe, a nachylenie dwóch płaszczyzn przyległych, jest równe nachyleniu sobie odpowiednych płaszczyzn; więc dwa kąty bryłowe są równe, jakżeby mogły przystać do siebie.

A zatém nakoniec, dwa wielościany podobne, mają ściany odpowiedne podobne, a kąty odpowiedne równe.

*Wniosek.* Z poprzedzającego dowodzenia wypada, że gdy z cztérech wierzchołków wielościanu, utworzemy ostrosłup troykątny, i gdy utworzemy drugi z cztérech wierzchołków odpowiednych wielościanu podobnego; te dwa ostrosłupy będą podobne; bo mieć będą boki odpowiedne proporcyonalne (21 uwag.).

Widzimy razem, że dwie odpowiedne przekątne (17, 2), naprzykład AN, *an*, mają się do siebie, jak dwie odpowiedne krawędzie AB, *ab*.

[*]

# PODANIE XXV.

### TWIERDZENIE.

*Dwa wielościany podobne, mogą się podzielić na jednaką liczbę ostrosłupów troykątnych, podobnych każdy każdemu, i podobnie umieszczonych.*

Wiemy już bowiem, że powierzchnia dwóch wielościanów może się podzielić na jednaką liczbę troykątów, podobnych każdy każdemu i podobnie umieszczonych. Zważmy wszystkie troykąty jednego wielościanu, oprócz troykątów składających kąt bryłowy A, jako podstawy tyluż ostrosłupów troykątnych, których wierzchołkiem jest A: te ostrosłupy razem wzięte złożą wielościan. Podzielmy podobnie drugi wielościan na ostrosłupy, któreby miały za wierzchołek wspólny, wierzchołek kąta *a* odpowiednego kątowi A. Oczywiście ostrosłup łączący cztéry wierzchołki jednego wielościanu, będzie podobny ostrosłupowi łączącemu cztéry wierzchołki odpowiedne drugiego wielościanu. A zatém dwa wielościany podobne. [**]
(Planche Cah. 3 dr. 47)

[*] Uw. Mówi się, że dwa wielościany są odwrotnie podobne, gdy jeden z nich jest podobny symetrycznemu względem drugiego. W dwóch wielościanach odwrotnie podobnych, ściany odpowiednie są podobne, a kąty bryłowe odpowiednie są symetryczne względem siebie.

[**] Uw. Dwa wielośc. odwrotnie podobne dają się podzielić na jednaką liczbę ostrosł. troikątnych odwrotnie podobnych.

## PODANIE XXVI.

### TWIERDZENIE.

*Dwa ostrosłupy podobne mają się do siebie jak sześciany z boków odpowiednych.*

Ponieważ dwa osłrosłupy są podobne, przeto mnieyszy może bydź umieszczony w większym tak, aby miały kąt wspólny S (fig. 58). Wówczas podstawy ABCDE, *abcde*, będą równoległe; bo ~~te~~ sciany odpowiedne są podobne (22), kąt *Sab* jest równy kątowi SAB, oraz kąt *Sbc* równy SBC; a zatém płaszczyzna *abc* jest równoległa płaszczyznie ABC (13,5). Niech teraz SO będzie prostopadłą spuszczoną z wierzchołka S na płaszczyznę ABC, i niech *o* będzie punktem w którym ta prostopadła spotyka płaszczyznę *abc;* mieć będziemy, podług tego co się już dowiodło(15), SO : *So* : : SA : *Sa* : : AB : *ab*; a następnie

$$\tfrac{1}{3}\,\text{SO} : \tfrac{1}{3}\,So :: \text{AB} : ab.$$

Lecz podstawy ABCDE, *abcde*, jako figury podobne, dają

$$\text{ABCDE} : abcde :: \overline{\text{AB}}^2 : \overline{ab}^2.$$

Mnożąc terminy odpowiedne tych dwóch proporcyy przez się, otrzymamy proporcyą

$$\text{ABCDE} \times \tfrac{1}{3}\,\text{SO} : abcde \times \tfrac{1}{3}\,So :: \overline{\text{AB}}^3 : \overline{ab}^3;$$

aże ABCDE × ⅓ SO jest bryłowatością ostrosłupa SABCDE (18), a zaś $abcde \times \frac{1}{3}So$ jest bryłowatością ostrosłupa $Sabcde$, a zatém dwa ostrosłupy mają się do siebie, jak sześciany z ich krawędzi odpowiednych.

[illegible] Dwa ostrosł. [illegible] podobne mają się do siebie, jak sześciany z krawędzi odpowiednich sobie.

## PODANIE XXVII.

### TWIERDZENIE.

*Dwa wielościany podobne mają się do siebie jak sześciany z ich krawędzi odpowiednych.*

Jakoż dwa wielościany podobne mogą bydź podzielone na jednaką liczbę ostrosłupów troykątnych, podobnych każdy każdemu (23). Lecz dwa ostrosłupy podobne APNM, *apnm* (fig. 65), mają się do siebie jak sześciany z boków odpowiednych AM, *am*, albo jak sześciany z boków odpowiednych AB, *ab*. Tenże sam stosunek zaydzie między innemi jakiemikolwiek ostrosłupami odpowiednemi; a zatém summa wszystkich ostrosłupów, które składają wielościan, czyli sam wielościan, ma się do drugiego wielościanu, jak sześcian z jakiegokolwiek boku pierwszego wielościanu, do sześcianu z boku odpowiednego wielościanu drugiego.

Uwaga. Tu się mówi o dwuch wielościanach [illegible] podobnych.

*Uwaga ogólna.*

Można wystawić w terminach algebraicznych to jest sposobem nayzwięzleyszym, powtórzenie głównieyszych podań téy xiążki, zamykającéy bryłowatości wielościanów.

Niech B wyraża podstawę graniastosłupa, H jego wysokość: bryłowatość graniastosłupa, będzie $B \times H$ czyli $BH$.

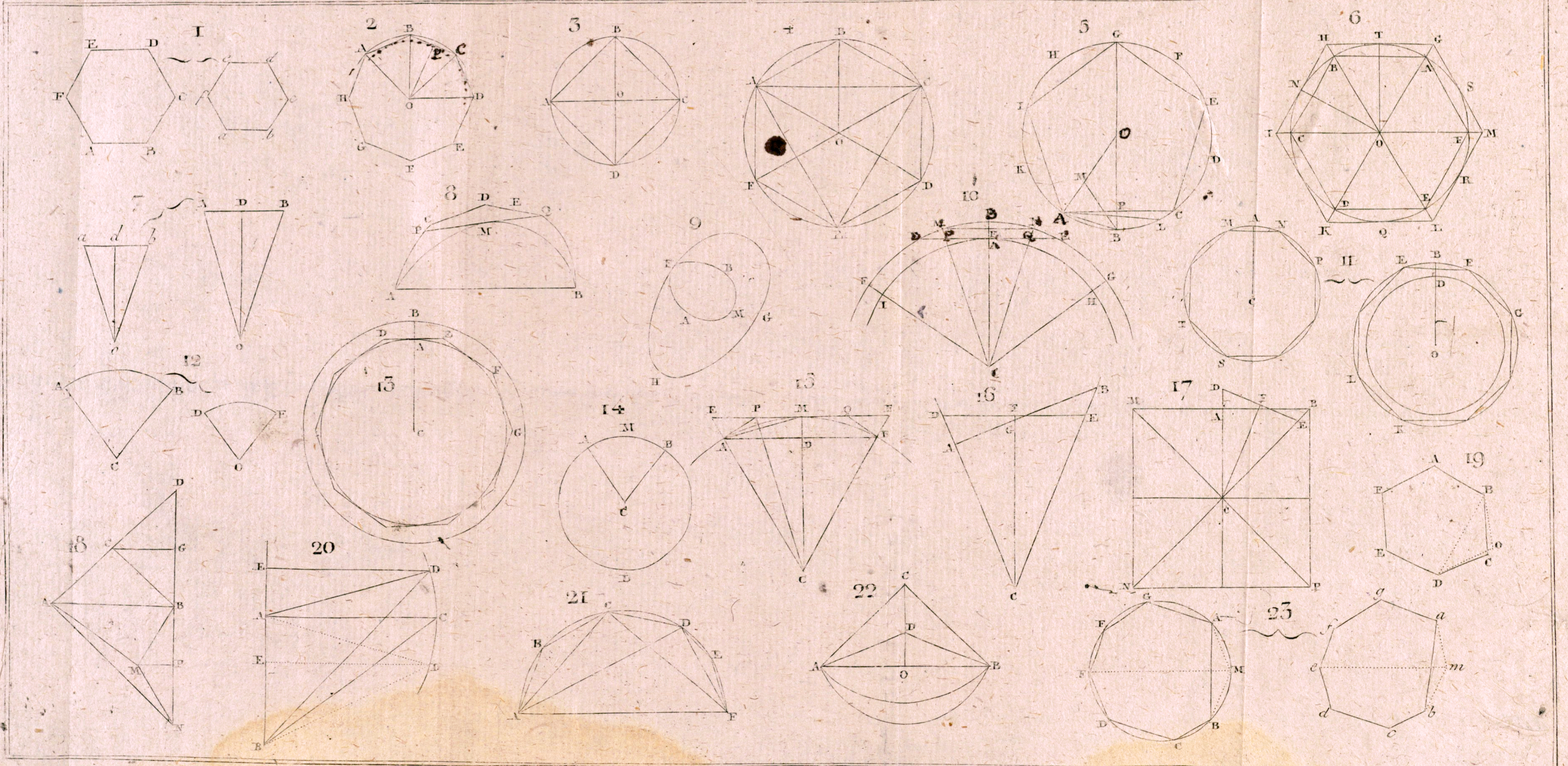
Niech B wyraża podstawę ostrosłupa, a zaś H jego wysokość: bryłowatość ostrosłupa będzie $B \times \frac{1}{3} H$, czyli $H \times \frac{1}{3} B$, czyli $\frac{1}{3} BH$.

Niech będzie H wysokość kloca ostrosłupowego o podstawach równoległych: niech A i B wyrażają podstawy jego: $\sqrt{AB}$ będzie średnią proporcyonalną między podstawami: a bryłowatością kloca będzie $\frac{1}{3} H \times (A + B + \sqrt{AB})$.

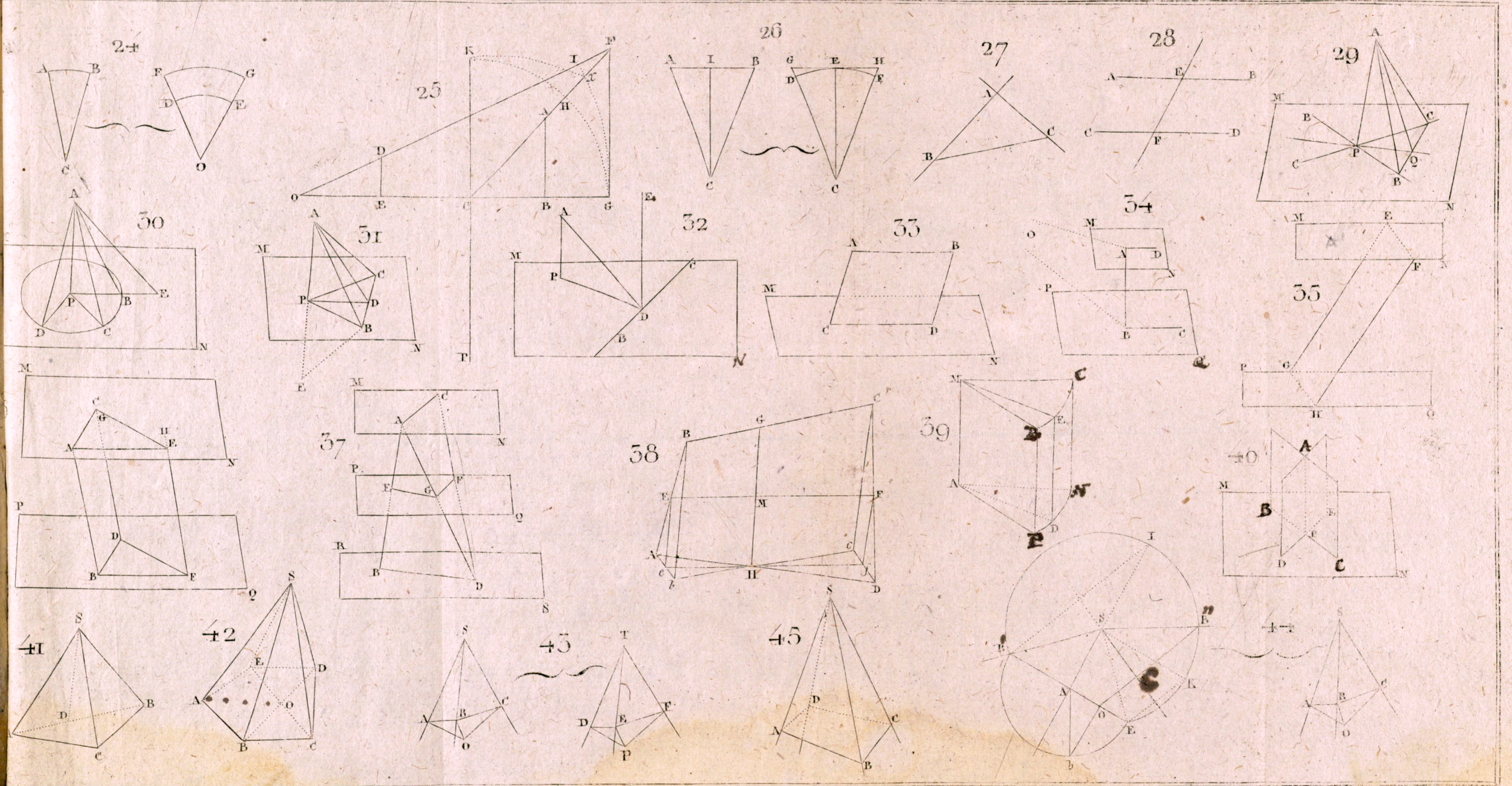
Niech B wyraża podstawę kloca graniastosłupa troykątnego, H, H′, H″, wysokości trzech jego wierzchołków górnych: bryłowatością graniastosłupa ściętego, będzie $\frac{1}{3} B \times (H + H' + H'')$

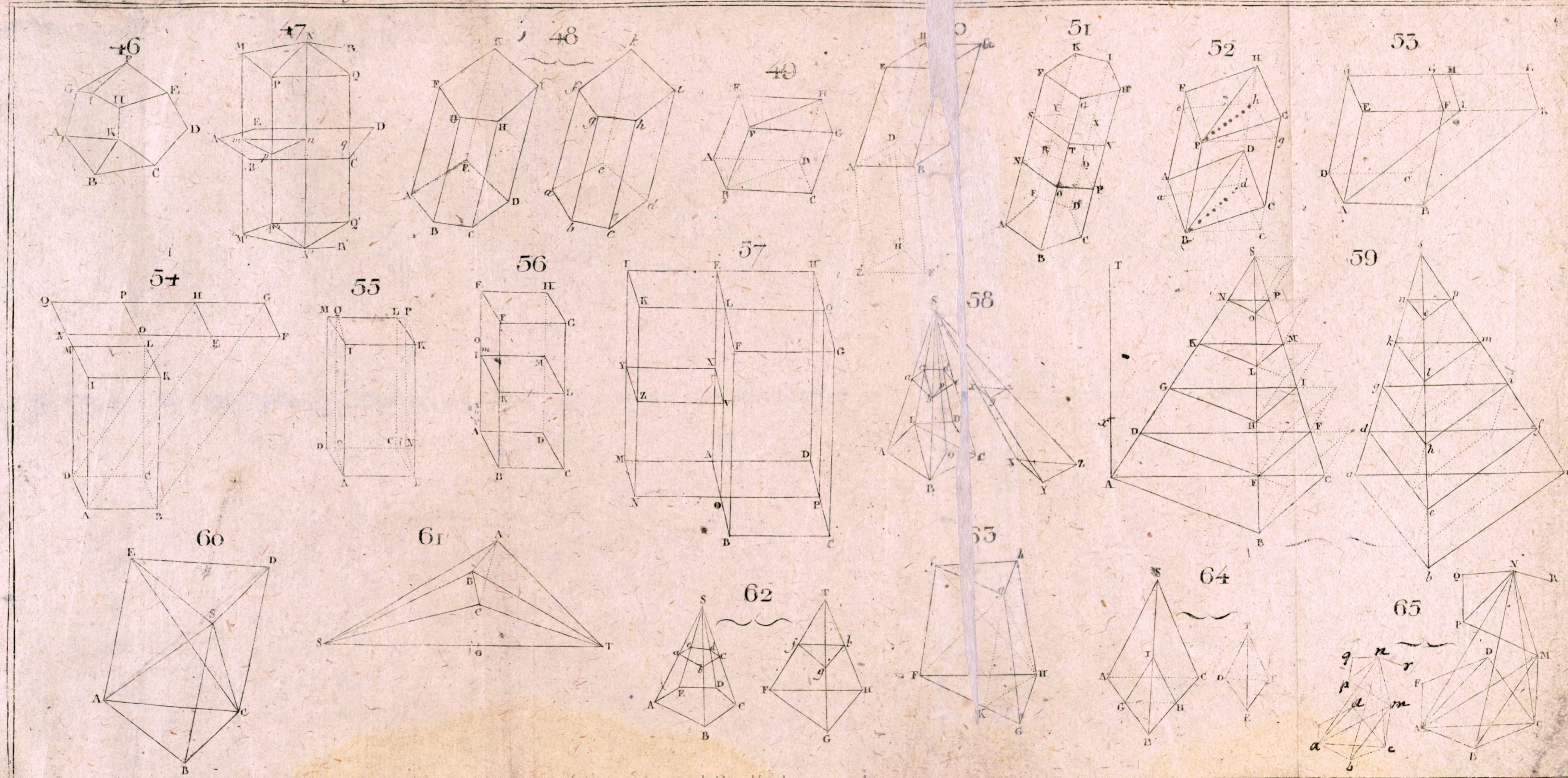
Niech nakoniec P i $p$, wyrażają bryłowatości dwóch wielościanów podobnych, A i $a$ dwa boki albo dwie przekątne odpowiednie tych wielościanów: będzie $P : p :: A^3 : a^3$.

KONIEC.



A. Peli rytował Wilnie


24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
37
38
39
40
41
42
43
44
45


46
47
48
49
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65