Mathematik und Philosophie

454

Abhandlungen

aus dem

Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie

von

J. C. Becker.

Zürich,
Druck und Verlag von Friedrich Schulthess.
1870.

Vorwort.

Es ist in neuerer Zeit eine Wissenschaft entstanden, welche sich mathematische Naturwissenschaft nennt, eigentlich aber speculative Mathematik genannt werden sollte, deren Ziel (nach Herrn Professor C. Neumann) darin besteht, „möglichst wenige (übrigens nicht weiter erklärbare) Principien zu entdecken, aus denen die allgemeinen Gesetze der empirisch gegebenen Thatsachen mit mathematischer Nothwendigkeit emporsteigen.“ Eine solche Wissenschaft würde also, wenn es wirklich gelänge, solche Principien aufzufinden, die Methode der Induction durch die der Deduction ersetzen, und ein Gebäude herstellen, vor dem jeder nach wahrer Einsicht und wirklicher Erkenntniss strebende Kopf einen horror empfinden müsste, gegen den der Widerwille, den manche klare Köpfe vor der Geometrie des Euklid empfinden, verschwinden müsste. Denn eine solche Wissenschaft würde dem wissbegierigen Jünger derselben zumuthen, die klarsten und einfachsten Gesetze, deren Wahrheit unmittelbar vor Augen liegt, auf langem und mühsamem Wege aus einigen wenigen Sätzen abzuleiten, und ihm statt Einsicht in das Wesen der Naturgesetze nichts bieten, als lange Rechnungen mit unbekannten Grössen.

Gegenüber solchen Bestrebungen, welche zwar in manchen Gebieten, sofern sie zugleich mit klarem Blick und genialer Divinationsgabe verbunden waren, Uebersicht und Ordnung herstellten, wo die Mannigfaltigkeit der Thatsachen auf anderm Wege nicht zu bewältigen scheint, wie in der Optik, im Allgemeinen aber auf Abwege führen müssen, ist doch wohl an der Zeit, dass endlich einmal aufmerksam gemacht werde auf die tiefen Untersuchungen der grössten Denker unserer Nation, Kant und Schopenhauer, über die Quellen und Grenzen aller unserer Erkenntniss.

Diess ist der wesentlichste Zweck der vorliegenden Abhandlungen. Dieselben sind nur ein Theil einer Reihe von Untersuchungen aus den Grenzgebieten der Transscendentalphilosophie einerseits, der Mathematik und Naturwissenschaft andererseits, und mögen zunächst daran erinnern, dass alles wahre Wissen aus der Anschauung stammt, und dass die unmittelbar aus ihr schöpfende intuitive Erkenntniss allein es ist, welche wirklich diesen Namen verdient.

Fluntern bei Zürich im April 1870.

J. C. Becker.

I.

Kants und Gaussens Ansichten über die Natur des Raumes.

In der berühmten „Göttinger gelehrten Anzeige“ vom 15. April 1831, worin der grosse Mathematiker Gauss zuerst gezeigt hat, wie den sogenannten imaginären Zahlen ein klarer Sinn beigelegt werden kann, findet sich folgende Stelle (Werke, II. Bd. p. 177):

„Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes Andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen nachweisen können.“

Zu dieser Stelle des Textes gehört eine Anmerkung, mit welcher der grosse Mathematiker den grossen Philosophen Kant eines ihm unbegreiflichen Irrthums zeiht. Sie lautet:

„Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum nur Form unserer äusseren Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset.“

Ich habe vergeblich die ganze Kritik der Vernunft nach jenen Bemerkungen durchsucht: nirgends findet sich eine Stelle, die auch nur annähernd dasselbe aussagt, während die von Gauss angegriffene „Meinung“ selbst durch Gründe nachgewiesen ist, die durch die

Bemerkung, „dass wir den Unterschied zwischen rechts und links Andern nur an wirklich vorhandenen materiellen Dingen nachweisen können,“ nicht im mindesten alterirt werden, wie ich hoffe, in der Folge genügend darzuthun.

Gauss muss demnach eine Stelle aus einem andern Werke Kants vor Augen gehabt haben, und ich fand in der That zwei Stellen, wo solche Bemerkungen gemacht sind.

Die eine ist die kleine 1768, also 13 Jahre vor der Kritik der Vernunft erschienene Abhandlung „von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume.“ Dieses treffliche Schriftchen kann aber Gauss um so weniger meinen, als hierin Kant eine Ansicht vertritt, welche von der von Gauss selbst ausgesprochenen sehr wenig verschieden ist, obwohl auch durch sie schon die Lehre von der Idealität des Raumes gleichsam hindurchschimmert. In dieser Schrift gibt nämlich Kant einen Beweis dafür, „dass der Raum unabhängig von dem Dasein aller Materie eine eigene Realität habe,“ ein Satz, den auch schon Euler (Historie der königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1748) zu beweisen versucht hat. Kant sagt in dieser Schrift wörtlich: „Der Beweis, den ich hier suche, soll nicht den Mechanikern, wie Herr Euler zur Absicht hatte, sondern selbst den Messkünstlern einen überzeugenden Grund an die Hand geben, mit der ihnen gewöhnlichen Evidenz die Wirklichkeit ihres absoluten Raumes behaupten zu können.“

Kant richtet in diesem Beweise hauptsächlich sein Augenmerk darauf, zu zeigen, dass der Raum nicht ein blosser abstracter Begriff sei. Diess leistet er, indem er darthut, „dass der vollständige Bestimmungsgrund einer körperlichen Gestalt nicht lediglich auf dem Verhältniss und der Lage seiner Theile gegeneinander beruhe, sondern noch überdem auf einer Beziehung gegen den allgemeinen absoluten Raum, so wie ihn sich die Messkünstler denken, doch so, dass dieses Verhältniss nicht unmittelbar kann wahrgenommen werden, aber wohl diejenigen Unterschiede der Körper, die einzig und allein auf diesem Grunde beruhen.“ Unter den Beispielen, an welchen er diess zeigt, hebe ich nur den Unterschied zwischen der rechten und linken Hand hervor, die einander völlig gleich und ähnlich und doch so verschieden sind, dass die eine nicht den Raum einnehmen kann, der von der andern eingenommen wird.

Dieser Unterschied ist ein solcher, dass er in keiner Weise sich definiren lässt, und andern darum nur an wirklich vorgehaltenen rechten und linken Händen gezeigt werden kann. Daraus geht aber hervor, dass der Unterschied zwischen der rechten und linken Hand nur in ihrem Verhalten zum absoluten Raume beruhen kann, und dass dieser also etwas sei, was von den in ihm erscheinenden Objecten unabhängig ist, und dass wir von ihm eine unmittelbare anschauliche Erkenntniss haben, da wir, was sich direkt auf ihn bezieht nur anschaulich begreifen können. Dass aber daraus folge, der Raum bestehe auch „unabhängig von unserer Anschauungsweise“, wie Gauss meint, ist Kant nicht eingefallen, und es ist in der That schwer zu begreifen, wie Gauss zu einem solchen Schluss gekommen, der doch auch gar keine Gründe für sich hat.

Nachdem Kant an vielen Beispielen gezeigt, „dass in der Beschaffenheit der Körper Unterschiede angetroffen werden können, und zwar wahre Unterschiede, die sich lediglich auf den absoluten und ursprünglichen Raum beziehen, weil nur durch ihn das Verhältniss körperlicher Dinge möglich ist, und dass, weil der absolute Raum kein Gegenstand einer äusseren Empfindung, sondern ein Grundbegriff ist, der alle diese zuerst möglich macht, wir dasjenige, was in der Gestalt eines Körpers lediglich die Beziehung auf den reinen Raum angeht, nur durch die Gegenhaltung mit andern Körpern vernehmen können,“ kommt er endlich zu dem folgenden Schlusse:

„Ein nachsinnender Leser wird daher den Begriff des Raumes, so wie ihn der Messkünstler denkt und auch scharfsinnige Philosophen ihn in den Lehrbegriff der Naturwissenschaft aufgenommen haben, nicht für ein blosses Gedankending ansehen, obgleich es nicht an Schwierigkeiten fehlt, die diesen Begriff umgeben, wenn man seine Realität, welche dem inneren Sinne anschauend genug ist, durch Vernunftideen fassen will.“

Die andere Stelle, welche ähnliche Bemerkungen enthält, ist der Anfang des § 13 der 1783 erschienenen „Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik“, und ich hege nicht den geringsten Zweifel, dass diess die Stelle ist, auf welche sich Gaussens Bemerkung bezieht. Dieselbe lautet wörtlich:

„Diejenigen, welche noch nicht von dem Begriffe loskommen können, als ob Raum und Zeit wirkliche Beschaffenheiten wären, die den Dingen an sich selbst anhingen, können ihre Scharfsinnigkeit an folgendem Paradoxon üben, und wenn sie dessen Auflösung vergebens versucht haben, wenigstens auf einige Augenblicke von Vorurtheilen frei, vermuthen, dass doch vielleicht die Abwürdigung des Raumes und der Zeit zu blossen Formen unserer sinnlichen Anschauung Grund haben möge."

„Wenn zwei Dinge in allen Stücken, die an jedem für sich nur immer können erkannt werden, (in allen zur Grösse und Qualität gehörigen Bestimmungen) völlig einerlei sind, so muss doch folgen, dass eins in allen Fällen und Beziehungen an die Stelle des andern könne gesetzt werden, ohne dass diese Vertauschung den mindesten kenntlichen Unterschied verursachen würde. In der That verhält sich diess auch so mit ebenen Figuren in der Geometrie; allein verschiedene sphärische zeigen, ohnerachtet jener völligen inneren Uebereinstimmung, doch eine solche im äusseren Verhältniss, dass sich eine an die Stelle der andern gar nicht setzen lässt, z. B. zwei spärische Triangel von beiden Hemisphären, die einen Bogen des Aequators zur gemeinschaftlichen Basis haben, können völlig gleich sein, in Ansehung der Seiten sowohl, als Winkel, so dass an keinem, wenn er allein und zugleich vollständig beschrieben wird, nichts angetroffen wird, was nicht zugleich in der Beschreibung des andern läge, und dennoch kann eines nicht an die Stelle des andern (nämlich auf dem entgegengesetzten Hemisphär) gesetzt werden, und hier ist denn doch eine innere Verschiedenheit beider Triangel, die kein Verstand als innerlich angeben kann, und die sich nur durch das äussere Verhältniss im Raume offenbart. Allein ich will gewöhnlichere Fälle anführen, die aus dem gemeinen Leben genommen werden können."

„Was kann wohl meiner Hand oder meinem Ohr ähnlicher und in allen Stücken gleicher sein, als ihr Bild im Spiegel? Und dennoch kann ich eine solche Hand, als im Spiegel gesehen wird, nicht an die Stelle des Urbildes setzen; denn wenn dieses eine rechte Hand war, so ist jene im Spiegel eine linke, und das Bild des rechten Ohres ist ein linkes, das nimmermehr die Stelle des ersteren vertreten kann. Nun sind hier keine inneren Unterschiede, die irgend ein Verstand nur denken könnte; und dennoch sind die Unterschiede innerlich, so weit die Sinnen lehren, denn die linke

Hand kann mit der rechten, ohnerachtet aller beiderseitigen Gleichheit und Aehnlichkeit, doch nicht zwischen denselben Grenzen eingeschlossen sein (sie können nicht congruiren); der Handschuh der einen Hand kann nicht auf der andern gebraucht werden. Was ist nun die Auflösung? Diese Gegenstände sind nicht etwa Vorstellungen der Dinge, wie sie an sich selbst sind und wie sie der pure Verstand erkennen würde, sondern es sind sinnliche Anschauungen, d. i. Erscheinungen, deren Möglichkeit auf dem Verhältnisse gewisser an sich unbekannten Dinge zu etwas anderem, nämlich unserer Sinnlichkeit beruht. Von dieser ist nun der Raum die Form der äusseren Anschauung, und die innere Bestimmung eines jeden Raumes ist nur durch die Bestimmung des äussern Verhältnisses zu dem ganzen Raume, davon jener ein Theil ist, (dem Verhältnisse zum äusseren Sinne) d. i. der Theil ist nur durchs Ganze möglich, welches bei Dingen an sich selbst, als Gegenständen des blossen Versandes niemals, wohl aber bei blossen Erscheinungen Statt findet. Wir können daher auch den Unterschied ähnlicher und gleicher, aber doch incongruenter Dinge (z. B. widersinnig gewundener Schnecken) durch keinen einzigen Begriff verständlich machen, sondern nur durch das Verhältniss zur rechten und linken Hand, welches unmittelbar auf Anschauung geht."

Wenn man diess freilich, aus dem Zusammenhange herausgerissen, und namentlich ohne Kenntniss der hierher gehörigen Stellen der Kritik der Vernunft liest, zu welcher die „Prolegomena" nur ein erläuternder Anhang sind, so kann man unmöglich begreifen, wie Kant hier aus dem Umstand, dass zwei Dinge gleich und ähnlich, und doch nicht congruent sein können, zu dem Schlusse gelangt, dass der Raum nur die Form unserer sinnlichen Anschauung sei. Denn damit ist zunächst nur dargethan, „dass in der Beschaffenheit der Körper Unterschiede angetroffen werden, die sich nur auf den absoluten und ursprünglichen Raum beziehen," d. h. dass dieser unabhängig von jenem besteht, also nicht eine blosse Beschaffenheit desselben ist. Kant ist aber bei diesem Resultate nicht stehen geblieben. Dass wir die auf den absoluten Raum bezüglichen Unterschiede der Dinge nur an diesen selbst verständlich machen können, war ihm nur einer der Belege dafür, dass der Raum uns unmittelbar als anschauliche Vorstellung bekannt sei, und nicht etwa als ein abstracter Begriff.

Was ist nun dieser unserer unmittelbaren Anschauung klar vorliegende Raum, in dem alles, was unsere Sinne wahrnehmen, erscheint, an sich? Diese Frage hat Kant durch eine Reihe, wie mich dünkt, unwiderlegbarer Schlüsse dahin beantwortet, „dass er weiter nichts sein könne, als die Form unseres äusseren Sinnes," d. h. derjenige Apparat unseres Intellects, welcher allein möglich macht, dass wir Vorstellungen von Dingen ausser uns haben.

Kants Gedankengang, welcher ihn zu diesem Schlusse führte, ist der folgende: *)

„Dass alle unsere Erkenntniss mit der Erfahrung anfange, daran ist gar kein Zweifel, denn wodurch sollte das Erkenntnissvermögen zur Ausübung erweckt werden, geschähe es nicht durch Gegenstände, die unsere Sinne rühren und theils von selbst Vorstellungen bewirken, theils unsere Verstandesfähigkeit in Bewegung bringen, diese zu vergleichen, sie zu verknüpfen oder zu trennen, und so den rohen Stoff sinnlicher Eindrücke zu einer Erkenntniss der Gegenstände zu verarbeiten, die Erfahrung heisst?"

„Wenn aber gleich alle unsere Erkenntniss mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht alle aus der Erfahrung. Denn es könnte wohl sein, dass selbst unsere Erfahrungserkenntniss ein Zusammengesetztes aus dem sei, was wir durch Eindrücke empfangen, und dem, was unser eigenes Erkenntnissvermögen aus sich selbst hergibt."

Solche Erkenntnisse, die also zwar erst durch die Erfahrung ins Bewusstsein gebracht, aber gleichwohl unabhängig von derselben sind, d. h. ihren Erkenntnissgrund nicht in dem haben, was die Erfahrung lehrt, sondern in dem, vermöge dessen überhaupt erst Erfahrung möglich ist, nämlich in der Natur (Form) unseres Erkenntnissvermögens, heissen Erkenntnisse a priori. Gibt es aber solche Erkenntnisse, und wie kann man sie von den aus der Erfahrung geschöpften Erkenntnissen a posteriori unterscheiden?

*) Durch die Anführungszeichen sollen hier immer die eigenen Worte Kants in der Kritik der Vernunft als solche gekennzeichnet werden.

Die Antwort auf diese Fragen ergibt sich durch folgende Bemerkungen:

1) „Erfahrung lehrt uns zwar, dass etwas so oder so beschaffen sei, aber nicht, dass es nicht anders sein könne.“

2) „Erfahrung gibt niemals ihren Urtheilen wahre oder strenge, sondern nur angenommene und comparative Allgemeinheit (durch Induction), so dass es eigentlich heissen muss: so viel wir bisher wahrgenommen haben, findet sich von dieser oder jener Regel keine Ausnahme.“

Nun finden wir gleichwohl häufig, dass einem Dinge nothwendig diese oder jene Eigenschaft zukommen müsse, und dass es gar nicht anders sein könne; z. B. ist jeder überzeugt, dass unmöglich ein Ding eine Farbe habe, ohne wenigstens nach zwei Dimensionen ausgedehnt zu sein, oder dass etwas sich ändere ohne eine vorhergegangene Ursache u. dgl. Auch fällen wir diese und ähnliche Urtheile mit der unerschütterlichen Ueberzeugung, dass ihnen strenge Allgemeinheit zukomme. Diese Urtheile können also nicht in der Erfahrung begründet sein, ebenso wenig wie solche, die über die Grenzen aller möglichen Erfahrung hinaus gehen, wie z. B. dass der Raum unbegrenzt sei, und die Zeit ohne Anfang und Ende.

Sind sie aber nicht in der Erfahrung begründet, woher sollen sie denn stammen, wenn sie nicht etwa alle Irrthümer sind?

Offenbar aus nichts anderem als aus der Natur unseres Erkenntnissvermögens selbst.

Und in der That sind diejenigen Urtheile, welche sich wirklich als ächte Urtheile a priori bewähren, der Art, dass es nicht möglich ist, sie zu leugnen, oder ihre Unfehlbarkeit und Allgemeinheit in Abrede zu stellen, ohne alle übrige Erkenntniss mit über Bord werfen.

„Aber nicht bloss in Urtheilen, sondern selbst in Begriffen zeigt sich ein Ursprung einiger derselben a priori. Lasset von euerem Erfahrungsbegriffe eines Körpers Alles, was daran empirisch ist, nach und nach weg: die Farbe, die Härte oder Weiche, die Schwere, die Undurchdringlichkeit, so bleibt doch der Raum übrig, den er (welcher nun ganz verschwunden ist) einnahm, und den könnt ihr nicht weglassen.“

„Raum ist kein empirischer Begriff, der von äusseren Erfahrungen abgezogen worden. Denn damit gewisse Empfindungen auf etwas ausser mir bezogen werden (d. i. auf etwas in einem anderen Orte des Raumes, als darinnen ich mich befinde), im gleichen, damit ich sie als ausser und neben einander, mithin nicht bloss verschieden, sondern als in verschiedenen Orten vorstellen könne, dazu muss die Vorstellung des Raumes schon zum Grunde liegen. Demnach kann die Vorstellung des Raumes nicht aus den Verhältnissen der äusseren Erscheinung durch Erfahrung geborgt sein, sondern diese äussere Erfahrung ist selbst nur durch gedachte Vorstellung allererst möglich."

„Der Raum ist eine nothwendige Vorstellung a priori, die allen äusseren Anschauungen zum Grunde liegt. Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, dass kein Raum sei, ob man sich gleich ganz wohl denken kann, dass keine Gegenstände darin angetroffen werden. Es wird also als die Bedingung der Möglichkeit der Erscheinungen, und nicht als eine von ihnen abhängende Bestimmung angesehen." „Wäre diese Vorstellung des Raumes ein a posteriori erworbener Begriff, so würde man z. B. nur sagen können: so viel zur Zeit noch bemerkt worden, ist kein Raum gefunden worden, der mehr als drei Abmessungen hätte."

„Der Raum ist kein discursiver oder, wie man sagt, allgemeiner Begriff von Verhältnissen der Dinge überhaupt, sondern eine reine Anschauung. Denn erstlich kann man sich nur einen einzigen Raum vorstellen, und wenn man von vielen Räumen redet, so versteht man darunter nur Theile eines und desselben alleinigen Raumes. *)

Diese Theile können auch nicht vor dem einigen allbefassenden Raume gleichsam als dessen Bestandtheile (daraus seine Zusammensetzung möglich sei), vorhergehen, sondern nur in ihm ge dacht werden."

„Geometrie ist eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori bestimmt. Was muss die Vorstellung des Raumes denn sein, damit eine solche Erkenntniss von ihm möglich sei? Er muss ursprünglich Anschauung sein; denn

*) Die heutige Geometrie pflegt zwar bei einigen Betrachtungen mehrere unendliche Räume auf einander zu beziehen (den einen im andern abzubilden); diess ist aber nur durch Abstraction möglich, und man stellt sich dabei eigentlich nur denselben Raum mehrere Male vor.

aus einem blossen Begriffe lassen sich keine Sätze ziehen, die über den Begriff hinaus gehen, welches doch in der Geometrie geschieht. Aber diese Anschauung muss a priori, d. i. vor aller Wahrnehmung eines Gegenstandes in uns angetroffen werden."

„Wie kann nun eine äussere Anschauung dem Gemüthe beiwohnen, die vor den Objecten selbst vorhergeht, und in welcher der Begriff der letzteren a priori bestimmt werden kann? Offenbar nicht anders, als sofern sie bloss im Subjecte, als die formale Beschaffenheit desselben, von Objecten afficirt zu werden und dadurch unmittelbare Vorstellung derselben, d. i. Anschauung zu bekommen, ihren Sitz hat, also nur als Form des äusseren Sinnes überhaupt."

Dies ist die Kantische Argumentation, und es bedarf wahrlich anderer Gründe, sie zu widerlegen, als der von Gauss angeführte, wenn sie überhaupt widerlegt werden kann. Der Umstand allein, dass wir nicht im Stande sind, zu denken, dass kein Raum wäre, wohl aber, dass kein Object darin angetroffen werde, beweiset schon, dass der Raum mit der Natur unseres Vorstellungsvermögens unzertrennlich verwachsen, also subjectiver, nicht objectiver Natur sei, d. h. eine der Bedingungen vermöge der allein wir Vorstellungen von Dingen ausser uns haben. Es ist aber ein gröbliches Missverständniss, wenn man diesen Umstand etwa mit Trendelenburg (logische Untersuchungen p. 144) dahin deuten wollte, dass zwar allerdings unser Vorstellungsvermögen einen unendlichen Raum als Ort für die Sinnesgegenstände anticipire, der gewissermassen als Form des äusseren Sinnes aufgefasst werden könne, was aber nicht hindere, dass der Raum, in welchem die wirklichen Objecte angetroffen werden, etwas von jenem ganz verschiedenes sei und objective Realität habe. Denn eben dieser objective Raum ist es ja, den wir als mit unserm Vorstellungsvermögen verwachsen erkennen: diesen und keinen andern anticipiren wir als Ort für die nur in ihm anzutreffenden Gegenstände. Ich muss gestehen, dass mir diese Trennung eines inneren und äusseren Raumes, deren einer eine subjective Bedingung unseres Anschauungsvermögens wäre, der andere unabhängig von demselben eine reelle Existenz habe, so widersinnig erscheint, dass ich ihrer nicht erwähnt haben würde, hätte ich diese Auffassung nicht gerade bei

Leuten angetroffen, denen ich eine sehr bedeutende Intelligenz zuerkennen muss.

Ebenso unbegreiflich ist mir die andere Ansicht, welche Gauss in der im Anfange citirten Aeusserung aussprechen zu wollen scheint, und auch wieder Trendelenburg in seinen logischen Untersuchungen als seine eigentliche Ansicht eingehend erörtert an der Stelle, wo er den Kant'schen Beweis zu widerlegen versucht, aber schliesslich nichts einzuwenden weiss, als dass Kant nicht bewiesen habe, der Raum sei n u r Form des äusseren Sinnes: *) nämlich die Ansicht, dass allerdings einerseits der Raum die Form unserer äusseren Anschauung sei, andererseits aber auch noch unabhängig davon reelle Bedeutung habe, und dass diess daraus folge, dass wir einem Andern unsere den Unterschied zwischen rechts, links, unten und oben nur an wirklich vorhandenen materiellen Dingen nachweisen können. Denn sobald wir einmal zu der Erkenntniss gekommen sind, dass der Raum eine subjective Bedingung sei, ohne welche wir keine Anschauung von einem äusseren Objecte haben können, dass er also das sei, wodurch unsere anschauliche Erkenntniss vermittelt wird, müssen wir auch zugeben, dass die Frage nach der Realität sich vernünftiger Weise nur auf das beziehen kann, was durch diese Vermittelung zu unserer Wahrnehmung gelangt, d. h. was i m Raume ist. Und in der That erkennen wir als r e e l l oder w i r k l i c h, was auf unsere Sinne w i r k t, freilich auch nur vermöge des Schlusses von der Wirkung auf die Ursache, was selbst wieder vermöge der Natur unseres Erkenntnissvermögens geschieht.

Dass wir unsere Erkenntniss eines räumlichen Verhältnisses einem andern nur an einem wirklichen Objecte zeigen können, kann ebenso wenig zu dem Schlusse auf die reelle Existenz des Raumes berechtigen, wie der Umstand, dass wir, was r o t h ist, einem andern nur an einem rothen Gegenstande zeigen können, zu der Behauptung berechtigt, das Roth (nämlich diese Farbe als solche, nicht ihre Ursache) habe abgesehen von unserer Anschauungsweise (hier Empfindungsart) noch eine reelle Bedeutung.

*) Eine mir dieser Tage zu Gesicht gekommene Streitschrift Trendelenburgs gegen Kuno Fischer, die den Titel führt „Herr Kuno Fischer und sein Kant" zeigt mir, dass sich über diese Bemerkung Trendelenburgs zwischen den beiden Herren Professoren ein wenig erbaulicher Streit entsponnen hat.

Man kann nun freilich fragen: wie kann der Raum die blosse Form der Anschauung sein, während doch der Sitz aller Erkenntniss, das Gehirn selbst im Raume ist?

Darauf kann ich nur erwidern: Ist der Raum die Form der äusseren Anschauung, so ist jedes anschaulich vorgestellte Ding an diese Form gebunden, und so erscheint dem erkennenden Subjecte nicht nur jedes äussere Object als im Raume ausgedehnt, sondern auch das eigene Individuum, mit dem es verwachsen ist und sich identificirt, ja seine eigenen Functionen erscheinen ihm gebunden an eine materielle räumlich ausgedehnte Masse, das Gehirn, von der nicht zu begreifen, wie sie anschauen und denken kann. Andererseits erkennt sich aber jeder selbst noch von einer andern Seite vermöge des inneren Sinnes als ein wollendes und erkennendes Wesen, d. h. als etwas toto genere verschiedenes von dem, als was er jedem andern und sich selbst vermittels des Raumes erscheint. Zwar erkennt jeder auch im Raume erkennende und wollende Wesen, aber nur mittelbar, durch Vergleich mit sich selbst, von dem er allein diese doppelte Erkenntniss unmittelbar hat. Danach ist doch klar, dass die räumliche Anschauung direct gar keinen Aufschluss gibt darüber, was das so angeschaute an sich sei. Man mag ein Gehirn noch so lange und noch so sorgfältig untersuchen, man wird direct von dem, was in ihm denkt und fühlt, nichts wahrnehmen. Umgekehrt gewahren wir in unserm directen Selbstbewusstsein nichts, was auf ein Ausgedehntsein im Raume schliessen lassen könnte. Ist nun zwar auch der innere Sinn, durch den wir uns unsrer selbst bewusst werden, noch an eine Form gebunden, so wird doch niemand leugnen, dass die durch ihn vermittelte Erkennntniss uns viel inniger mit dem erkannten Gegenstande vertraut macht, als diess durch die Vermittlung des äusseren Sinnes geschieht, der uns in der Materie und ihren Qualitäten lauter unbekannte Grössen vorführt. Da nun die durch den innern Sinn vermittelte Erkenntniss nichts von einem Raume und Ausdehnung in demselben enthält, so dürfte schon daraus erhellen, dass unser Wesen an sich nichts mit dem Raume zu thun hat, und dieser nur die Form unserer Anschauung ist.

Dass aber dieselbe Form der Anschauung allen erkennenden Wesen, welche uns in der Erfahrung als solche entgegentreten gemein ist, so dass für jeden, alles was er wahrnimmt, ja er selbst im Raume zu sein scheint, während doch umgekehrt der Raum mit allem was er enthält, gewissermassen in ihm ist, nämlich als Form oder auch als eine Function seines Anschauungsvermögens. Das ist allerdings schwer zu erklären, wenn nicht überhaupt unerklärbar. Denn erklären heisst als Folge aus einem zureichenden Grunde ableiten. Kann man aber etwa nach einem Grunde des Raumes oder des Erkennens selber fragen? Ich wüsste diesen Fragen wenigstens keinen Sinn unterzulegen und sehe hier unserer Frkenntniss eine scharfe Grenze gesetzt. „Welche Fackel wir auch anzünden, und welchen Raum sie auch erleuchten mag; stets wird unser Horizont von tiefer Nacht umgrenzt bleiben.“ (Schopenhauer, W. a. W. II. p. 187). Gleichwohl dürfte hier ein Gleichniss die Sache noch erläutern. Nehmet den Regenbogen. Glaubt nicht jeder diesen ausserhalb im Raume grossartig am Himmel ausgespannt zu sehen, während doch jeder einen andern in seinem Kopfe hat und ihn nur vermöge jener Geisteskraft, die alle Anschauung erst hervorbringt, selbst hinauswirft in den Raum, wo er gar nirgends ist? So sieht auch jeder den Raum selbst als etwas ausser ihm an und construirt in ihm als Ursache zu seinen Sinnesempfindungen die ganze Aussenwelt und sich selbst, insofern er auch sich als eine solche Ursache erkennt. Da aber jeder in dem, was er so von sich selbst als räumliches Object erkennt, durchaus nicht dasselbe wiedererkennt, was in ihm will, empfindet und denkt, so nennt er jenes seinen Leib und dieses seine Seele oder seinen Geist und nur wenige gelangen zu der Einsicht, dass die Verschiedenheit nicht in der Sache, sondern in der verschiedenen Form der Erkenntniss liegt.

II.

Die Axiome der Geometrie.

Gaussens grosser Schüler Riemann, welcher dem forschenden Geiste im Gebiete der Mathematik neue weite Bahnen eröffnet hat, ist wohl durch seines grossen Lehrers Urtheil über Kant's Grundgedanke abgehalten worden, bei diesem zu suchen, was er bei andern Philosophen nicht finden konnte, nämlich Aufklärung über die „Dunkelheit“, welche darin besteht, „dass die

Elementargeometrie immer nur Nominaldefinitionen gibt, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten, von denen man weder einsieht, ob und in wie weit ihre Verbindung mit den Begriffen der Geometrie nothwendig, noch a priori, ob sie möglich sei.“

Da Riemann weder bei Mathematikern noch bei Philosophen eine Aufklärung über diese „Dunkelheit“ gefunden, übernahm er es selbst, *) durch eigenes Nachdenken Licht in dieses Dunkel zu bringen. Seine Untersuchungen führten ihn zu einem richtigen, keineswegs aber neuen Resultate. Was den Weg anbetrifft, wie er dazu gelangt, so muss ich gestehen, dass ich, gewohnt, mit jedem Worte einen klaren Begriff zu verbinden und nur solche Begriffe passiren zu lassen, die durch irgend eine Anschauung, aus der sie abgezogen sind, sich als solche gehörig legitimiren können, nur mit der grössten Mühe und wahrer Selbstüberwindung eine Strecke weit gefolgt bin, dann aber fand, dass entweder das Licht, das mir jene Dunkelheit erhellen sollte, mich vollkommen geblendet habe, oder ich in eine noch grössere Dunkelheit gerathen sei, wie es bisweilen geschehen soll, wenn man einem Irrlichte nachläuft. Ich muss es daher andern, die in dergleichen abstracten Untersuchungen mehr bewandert sind, überlassen, Riemann hier zu folgen, oder ihn zu widerlegen, wenn er etwa sich geirrt haben sollte.

Ich selbst bin jedoch ein viel zu grosser Bewunderer der genialen Leistungen dieses grossen Mathematikers, um das letztere anzunehmen, zumal diese mir unzugänglichen Untersuchungen zu einem richtigen Resultate führen. Dieses richtige Resultat ist nämlich das, „dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen.“

Riemann hätte wohl schwerlich diese Untersuchung angestellt, wäre er nicht der Ansicht gewesen, „Wissen a priori“ und „Wissen aus reinen Brgriffen“ seien identisch, und sicher hat er die Mathematik, soweit sie sich nicht auf die Axiome stützt, für eine solche Wissenschaft gehalten. Darin ist er aber im Irrthum gewesen, so sehr es auch immer den Anschein haben mag, als sei z. B. die Analysis oder Riemanns eigentliches Feld, die s. g. Functionen-

*) Siehe Riemann's nachgelassene durch Herrn Prof. Dedekind edirte kleine Schrift „über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“

lehre wirklich eine Wissenschaft „aus reinen Grössenbegriffen.“ Es gehört zu Kant's grössten Verdiensten, gezeigt zu haben, dass die Mathematik keine Wissenschaft aus Begriffen, sondern eine Wissenschaft aus der Construction der Begriffe sei, d. h. eine solche, die dadurch über den in der Definition gegebenen Inhalt der Begriffe hinausgeht, dass sie vermittelst ihrer Construction die unmittebare Anschauung zu Hülfe nimmt.

„Einen Begriff construiren heisst: die ihm correspondirende Anschauung a priori darstellen. Zur Construction eines Begriffes wird also nicht-empirische Anschauung erfordert, die folglich, als Anschauung, ein einzelnes Object ist, aber nichts desto weniger, als die Construction eines Begriffes (einer allgemeinen Vorstellung), Allgemeingültigkeit für alle möglichen Anschauungen, die unter denselben Begriff gehören, in der Vorstellnng ausdrücken muss. So construire ich einen Triangel, indem ich den diesem Begriffe entsprechenden Gegenstand, entweder durch blosse Einbildung, in der reinen, oder nach derselben auch auf dem Papier, in der empirischen Anschauung, beide mal aber völlig a priori, ohne das Muster dazu aus irgend einer Erfahrung geborgt zu haben, darstelle. Die einzelne hingezeichnete Figur ist empirisch und dient gleichwohl, den Begriff, unbeschadet seiner Allgemeinheit auszudrücken, weil bei dieser empirischen Anschauung immer nur auf die Handlung der Construction des Begriffs, welchem viele Bestimmungen, z. B. der Grösse, der Seiten und der Winkel ganz gleichgültig sind, gesehen und also von diesen Verschiedenheiten, die den Begriff des Triangels nicht verändern, abstrahirt wird.“

Die Vernunfterkenntniss aus Begriffen kann nach Kant nur eine einzige Wissenschaft zu Stande bringen, die von ihm selbst erst geschaffene Transscendentalphilosophie. In der Mathematik kommt man damit ebenso wenig vom Flecke, wie in der Naturwissenschaft. „Man gebe einem Philosophen den Begriff eines Triangels und lasse ihn nach seiner Art ausfindig machen, wie sich wohl die Summe seiner Winkel zum rechten verhalten möge.

Er hat nun nichts, als den Begriff von einer Figur, die in drei geraden Linien eingeschlossen ist und an ihr den Begriff von eben so viel Winkeln. Nun mag er diesem Begriffe nachdenken, so lange er will, er wird nichts Neues herausbringen. Er kann den Begriff der geraden Linie, oder eines Winkels, oder der Zahl drei zergliedern und deutlich machen, aber nicht auf andere Eigenschaften kommen, die in diesen Begriffen gar nicht liegen. Allein der Geometer nehme diese Frage vor. Er fängt sofort davon an, einen Triangel zu construiren. Weil er weiss, dass zwei rechte Winkel zusammen gerade so viel austragen, als alle berührenden Winkel, die aus einem Puncte auf einer geraden Linie gezogen werden können, zusammen, so verlängert er eine Seite seines Triangels und bekommt zwei berührende Winkel, die zweien rechten zusammen gleich sind. Nun theilt er den äusseren von diesen Winkeln, indem er eine Linie mit der gegenüberstehenden Seite des Triangels parallel zieht, und sieht, dass hier ein äusserer berührender Winkel entspringe, der einem inneren gleich ist u. s. w. Er gelangt auf solche Weise durch eine Kette von Schlüssen, immer von der Anschauung geleitet, zur völlig einleuchtenden und zugleich allgemeinen Auflösung der Frage."

„Die Mathematik aber construirt nicht bloss Grössen (quanta) wie in der Geometrie, sondern auch die blosse Grösse (quantitatem), wie in der Buchstabenrechnung, wobei sie von der Beschaffenheit des Gegenstandes, der nach einem solchen Grössenbegriff gedacht werden soll, gänzlich abstrahirt. Sie wählt sich alsdann eine gewisse Bezeichnung aller Constructionen von Grössen überhaupt, und nachdem sie den allgemeinen Begriff der Grössen nach den verschiedenen Verhältnissen auch bezeichnet hat, so stellt sie alle Behandlung, durch die die Grösse erzeugt und verändert wird, nach gewissen allgemeinen Regeln in der Anschauung dar; wo eine Grösse durch die andere dividirt werden soll, setzt sie beiden ihre Charactere nach der bezeichneten Form der Division zusammen u. s. w. und gelangt also vermittelst einer symbolischen Construction eben so gut, wie die Geometrie nach einer ostensiven oder geometrischen (der Gegenstände selbst) dahin, wohin die discursive Erkenntniss vermittelst blosser Begriffe niemals gelangen könnte."

Das ist so ziemlich alles, was Kant sagt, um den Unterschied zwischen dem Verfahren der Mathematik und einer Wissenschaft aus Begriffen darzuthun. Er zeigt damit, dass jene nur scheinbar ihre Resultate durch blosses Schliessen aus den Begriffen ableite, von denen sie ausgeht, in der That aber, gleich der Physik und Chemie keinen Schritt weiter führt, ohne beständig auf die

2*

unmittelbare Anschauung zu recurriren, aus der allein zuletzt alle ihre Kenntnisse stammen. Dass diess auch in der Arithmetik und Analysis, sogar in der Riemann'schen Functionenlehre so ist, wird freilich aus Kants kurzer Erläuterung nicht so leicht zur Evidenz kommen. Ich erlaube mir daher noch einiges beizufügen, was hoffentlich genügen wird, um auch diesen Punct ausser Zweifel zu setzen. Alle Arithmetik beruht in letzter Instanz auf dem Zählen, und dieses ist eine anschauliche Operation, die mit dem Schliessen und dem Ableiten aus Begriffen gar nichts gemein hat. Die Buchstabenrechnung abstrahirt zwar von dem Werthe der Zahlen und damit auch von dem Zählen: alle ihre Sätze werden aber gleichwohl nur mit Hülfe der beim Zählen oder Messen anschaulich gewonnenen Erkenntnisse klar. Man sagt: $a + b = b + a$; denn es ist einerlei, in welcher Ordnung man zählt; oder der (numerische) Werth des Ganzen bleibt derselbe, in welcher Ordnung man auch die Theile an einander fügt. Hier stützt man sich also unmittelbar auf einen Satz, der auf keine andere Art als durch directe Anschauung erkannt werden kann.

Ein späterer Satz heisst $a \times b = b \times a$. Werden unter a und b ganze Zahlen verstanden, so lautet der Beweis so:

$a \times b$ heisst $a + a + a + \ldots\ldots$, d. h. die Summe von b Summanden a. Die dadurch bestimmte Zahl bleibt aber dieselbe, wenn ihre Einheiten in einer andern Ordnung gruppirt und dann gezählt werden. Wenn also z. B. zuerst von jedem der aus a Einheiten bestehenden Summanden die erste Einheit hervorgeholt und die so erhaltenen b Einheiten zu einer Zahl vereinigt werden, ebenso eine zweite Zahl b aus den jedesmaligen zweiten Einheiten der Summanden a gebildet wird, und so fort, so erhält man im Ganzen a Zahlen von je b Einheiten, und deren Summe bleibt dann dieselbe. Der Ausdruck für dieselbe ist aber $b \times a$, womit die Behauptung erwiesen.

Es ist aber doch klar, dass die Erkenntniss auch hier wieder rein anschaulicher Natur ist, d. h. intuitiv, und nur scheinbar discursiv. Denn der Nachweis, der Identität der Begriffe $a \times b$ und $b \times a$ geschieht durch Appellation an die beim Zählen und Ordnen gemachte Wahrnehmung, dass man eine Gruppe von b Summanden aus je a Einheiten durch Veränderung der Ordnung in eine solche von a Summanden aus je b Einheiten verwandeln kann und diese Wahrnehmung kann man nur durch unmittelbare Anschauung machen.

In ähnlicher Weise verfahren alle Demonstrationen der Arithmetik; jeder einzelne Schluss, durch welchen das vorausgesetzte Wissen erweitert wird, stützt sich neben dem Satz vom Widerspruche immer noch auf eine nur anschaulich zu gewinnende Erkenntniss. Handelt es sich um den Nachweis der Identität zweier angedeuteten Rechnungsvorschriften, so geschieht diess durch eine successive Umwandlung der einen in andere gleichwerthige, bis die zum Vorschein kommt, deren Identität mit der vorgelegten nachgewiesen werden soll. Die Symbole, deren man sich dabei bedient, sind ganz dasselbe, was bei geometrischen Demonstrationen die Figuren und unterscheiden sich davon nur dadurch, dass bei ihnen das Abstractionsvermögen in höherm Grade in Anspruch genommen wird. Während ich bei der Figur das, was ich festhalten muss, anschaulich vor mir habe, muss ich bei einem Ausdrucke wie $(\sqrt{a^2 + b^2} - c)^2$ die allgemeinen Zahlzeichen durch bestimmte Zahlen ersetzen, um von den angedeuteten Rechnungsvorschriften eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen. Auch die gesammte höhere Analysis mit Einschluss der Riemann'schen Functionenlehre verfährt im Grunde nicht anders. Alle ihre Sätze stützen sich auf Umwandlungen von Rechnungsvorschriften in andere und von Gleichungen in andere und ihre Demonstrationen appelliren entweder wie in der Combinationslehre unmittelbar an die Anschauung oder an nur anschaulich zu erkennende Axiome wie: Gleiches zu Gleichem gefügt gibt Gleiches; zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich u. s. w.

Dabei habe ich freilich unter einer Wissenschaft aus Begriffen das verstanden, was Kant darunter versteht, und es ist möglich, sogar wahrscheinlich, dass Riemann einen andern Begriff damit verbindet, und unter „Wissenschaft aus Grössenbegriffen“ eine Wissenschaft versteht, die nur mit Grössenbegriffen operirt, einerlei, in welcher Weise diess geschieht. In diesem Sinne wäre die allgemeine Arithmetik allerdings eine Wissenschaft aus Grössenbegriffen, denn diese bilden ihren ganzen Inhalt. Die Geometrie dagegen hat gar nicht reine Grössenbegriffe zum Gegenstand, sondern Gattungsbegriffe, denen Anschauungen untergeordnet sind, wie Körper, Fläche, Linie, Dreieck, Polyeder u. dgl., Gattungsbegriffe, denen ausser dem Merkmale der Grösse, auch die der Gestalt, der Stellung, der Lage u. s. w. zukommen, welche sehr wesentlich von Grössenbestimmungen verschieden sind, obwohl sie innig damit zusammenhängen und durch Grössen sich bestimmen, nicht aber erklären lassen.

Es ist darum unbegreiflich, warum für Riemann die Frage, ob die Geometrie eine Wissenschaft aus Grössenbegriffen sei oder nicht, noch einer so subtilen Untersuchung bedürftig schien.

Doch mag immerhin der Riemann'sche Nachweis, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, kein überflüssiger gewesen sein, so berechtigt er doch keineswegs dazu, nun weiter fortzuschliessen: „dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können." Ebenso unvermittelt steht die weitere Aeusserung Riemanns da: „dass die Thatsachen, welche Euklid in Form von Axiomen ausgesprochen, wie alle Thatsachen nicht nothwendig, sondern nur von empirischer Gewissheit, nur Hypothesen seien, u. s. w."

Beide Aeusserungen sind eben nur ohne alle Begründung ausgesprochene Meinungen eines grossen Mathematikers, der aber nicht zugleich Philosoph war, und beweisen nichts, als dass Riemann den einzigen Philosophen, der ihm über seinen Scrupel Aufklärung hätte geben können, nicht gelesen habe. Ihre Widerlegung finden sie in dem Kant'schen Beweis der Apriorität unserer Erkenntniss vom Raume. Ich habe es für nöthig gehalten, diese Einwendungen gegen die Riemann'sche Auffassung der Axiome als Hypothesen zu machen, weil man geneigt sein dürfte, da man vielfach glaubt, Kant längst hinter sich zu haben („als einen überwundenen Standpunct"), während man im Gegentheil kaum angefangen hat, ihn zu begreifen, dieser Jugendarbeit eines grossen Mathematikers mehr Wichtigkeit beizulegen, als ihr zukommt. Diese Arbeit erinnert sehr an eine jugendliche Verirrung Kant's, nämlich an dessen Versuch, die Thatsache zu erklären, dass der Raum nnr drei Dimensionen habe. „Warum der Raum nur drei Dimensionen habe," gehört ebenso wie die Frage, „warum zwei gerade Linien sich nur in einem Puncte schneiden können," und die übrigen, welche Riemann sich stellen musste, ehe er die Euklidschen Axiome für Hypothesen erklärte, und zwar für unbegreifliche, in das Gebiet derjenigen Fragen, von denen Kant sagt, dass man, ehe man sie zu beantworten suche, sich zuerst fragen müsse, ob man sie vernünftiger Weise auch stellen dürfe, damit man nicht den lächerlichen Anblick gewähre, dass einer den Bock melke und ein andrer ein Sieb unterhalte. Und sicher hat ihn die erwähnte eigene jugendliche Verirrung zu der Aeusserung geführt: „Es ist schon ein grosser und nöthiger Beweis der Klugkeit und Einsicht, zu wissen, was man vernünftiger Weise fragen solle."

Sobald wir eine Vorstellung vom Raume haben, erkennen wir ihn sofort als einen von drei Dimensionen und mit einer Gewissheit, die nur unmittelbare Anschauung geben kann. Hat die Frage, „warum hat der Raum gerade drei Dimensionen?" den Sinn: „woher schöpfe ich diess Urtheil? d. h. was ist sein Erkenntnissgrund?" so lautet die Antwort: „die Anschauung überzeugt mich davon." Will ich aber die Thatsache selbst ergründen, d. h. frage ich nach einem Realgrunde, aus dem sich diese Eigenschaft als nothwendige Consequenz ergäbe, so frage ich etwas Unvernünftiges. Denn ein solcher Grund kann nur eine Ursache sein, oder eine andere Eigenschaft, die mit dieser nach einem Gesetze nothwendig verbunden wäre. Da nun die Eigenschaft des Raumes, drei Dimensionen zu haben, unmöglich als Wirkung aufgefasst werden kann, so kann man auch nach keiner Ursache fragen. Eine solche Frage hat nur einen Sinn, wenn es sich um eine Wirkung auf unsere Sinne oder eine Veränderung anschaulicher Objecte handelt. Ebensowenig lehrt die Anschauung des Raumes diese Eigenschaft als abhängig von einer andern erkennen, wie z. B. die Gleichheit zweier Winkel eines Dreiecks bedingt ist durch die der gegenüberliegenden Seiten, und umgekehrt diese durch jene. Welchen Sinn soll aber die Frage noch haben?

Offenbar denselben, wie wenn der Physiker fragen würde, warum zieht sich alle Materie an? oder: warum ist die Materie beharrlich? u. dgl. Dies hat nun Riemann in der That eingesehen, und darum jene Thatsachen des Bewusstseins mit diesen Thatsachen der Erfahrung als von einerlei Art angesehen, dabei aber ganz übersehen, dass wir jene in den Euklid'schen Axiomen ausgesprochenen Thatsachen unmöglich aus der Erfahrung geschöpft haben können, indem sie sich unserm Bewusstsein als unumstösslich gewiss aufdrängen, so dass es ganz und gar unmöglich ist, etwas ihnen widersprechendes uns vorzustellen, während alles, was wir aus der Erfahrung wissen, ebenso gut als falsch gedacht werden kann.

Riemann ging von der falschen Voraussetzung aus, dass eine Erkenntniss a priori aus blossen Begriffen abgeleitet werden müsse, und weil z. B. aus dem Begriffe der geraden Linie und der Zahl zwei durchaus nicht die Eigenschaft abgeleitet werden kann, dass zwei gerade Linien sich nur in einem Puncte schneiden können, so leugnet er einfach, dass diess eine Erkenntniss a priori sei, und schreibt sie der Erfahrung zu. Unter den Axiomen finden sich aber auch einige, die über die Grenzen möglicher Erfahrung hinaus gehen, wie dieses, *dass der Raum ins Unbegrenzte ausgedehnt sei, dass er überall stetig, zusammenhängend und ohne Ende theilbar sei.* Diess kann er freilich nicht für eine aus der Erfahrung geschöpfte Erkenntniss ausgeben und erklärte sie darum einfach *für eine blosse Hypothese* (!), ja sogar für eine solche, die möglicherweise nur ein falsches Vorurtheil sei, worauf aufmerksam zu machen, der eigentliche Zweck seines Schriftchens zu sein scheint. Zu solchen allen gesunden Menschenverstand über den Haufen werfenden Schlüssen muss man aber nothwendig gelangen, wenn man nur als wahr anerkennen will, was sich entweder durch Schliessen beweisen oder durch Erfahrung nachweisen lässt.

Riemann hat dabei die wichtigsten unter unsern Erkenntnissen vom Raume, die freilich im Euklid nicht vorkommen, ganz ausser Acht gelassen, nämlich die, *dass es unmöglich ist zu denken, dass kein Raum sei, gewesen sei oder sein werde, und dass es unmöglich ist, eine Begrenzung im Raume zu denken, ohne auf beiden Seiten wieder Raum vorauszusetzen.*

Hätte er hierauf geachtet, so würde er eingesehen haben, dass unsere Ueberzeugung (denn dass es eine solche ist, kann doch nur leugnen, wer disputiren will) von der Unendlichkeit und unendlichen Theilbarkeit des Raumes eben nichts anderes ist, als ein besonderer Ausdruck jener Erkenntnisse. Statt also, was allerdings viel bequemer, die Unendlichkeit und unendliche Theilbarkeit des

Raumes, das gewisseste, was wir wissen, zu einer blossen Hypothese herabzuwürdigen, hätte er fragen müssen:

„Wie ist es möglich, dass wir etwas mit so grosser Bestimmtheit wissen können, das weder aus den Begriffen sich ableiten lässt, von denen es handelt, noch aus irgend einer Erfahrung entnommen sein kann?“

Diese Frage gestellt und richtig beantwortet zu haben ist das grösste Verdienst des grossen Kant, dem ich nicht umhin kann, hier noch einmal das Wort zu lassen:

„Da die Sätze der Geometrie synthetisch a priori und mit apodiktischer Gewissheit erkannt werden, so frage ich: woher nehmt ihr dergleichen Sätze und worauf stützt sich unser Verstand, um zu dergleichen schlechthin nothwendigen und allgemein gültigen Wahrheiten zu gelangen? Es ist kein anderer Weg, als durch Begriffe oder durch Anschauung; beide aber als solche, die entweder a priori oder a posteriori gegeben sind. Die letzteren, nämlich empirische Begriffe, ingleichen das, worauf sie sich gründen, die empirische Anschauung, können keinen synthetischen Satz geben, als nur einen solchen, der auch bloss empirisch d. i. ein Erfahrnngssatz ist, mithin niemals Nothwendigkeit und absolute Allgemeinheit enthalten kann, dergleichen doch das Charakteristische aller Sätze der Geometrie ist. Was aber das erstere und einzige Mittel sein würde, nämlich durch blosse Begriffe oder durch Anschauungen a priori zu dergleichen Erkenntnissen zu gelangen, so ist klar, dass aus blossen Begriffen gar keine synthetische Erkenntniss, sondern lediglich analytische erlangt werden kann. Nehmet nur den Satz: dass durch zwei gerade Linien sich gar kein Raum einschliessen lasse, mithin keine Figur möglich sei, und versucht ihn aus dem Begriff von geraden Linien und der Zahl zwei abzuleiten; oder auch, dass aus dreien geraden Linien eine Figur möglich sei und versucht es ebenso bloss aus diesen Begriffen. Alle eure Bemühung ist vergeblich, und ihr seht euch genöthigt, zur Anschauung eure Zuflucht zu nehmen, wie es die Geometrie auch jederzeit thut. Ihr gebt euch also einen Gegenstand in der Anschauung; von welcher Art aber ist diese, ist es eine reine Anschauung a priori oder eine empirische? Wäre das letzte, so könnte niemals ein allgemein gültiger, noch weniger ein apodiktischer Satz daraus werden; denn

Erfahrung kann dergleichen niemals liefern. Ihr müsst also euren Gegenstand a priori in der Anschauung geben und auf diesen euren synthetischen Satz gründen. Läge nun in euch nicht ein Vermögen, a priori anzuschauen, wäre diese subjective Bedingung der Form nach nicht zugleich die allgemeine Bedingung a priori, unter der allein das Object dieser (äusseren) Anschauung selbst möglich ist, wäre der Gegenstand (der Triangel) etwas an sich selbst ohne Beziehung auf euer Subject: wie könntet ihr sagen, dass, was in euern subjectiven Bedingungen einen Triangel zu construiren nothwendig liegt, auch dem Triangel an sich selbst zukommen müsse? denn ihr könntet doch zu euren Begriffen (von drei Linien) nichts Neues (die Figur) hinzufügen, welches darum nothwendig an dem Gegenstande angetroffen werden müsste, da dieser vor eurer Erkenntniss und nicht durch dieselbe gegeben ist. Wäre also nicht der Raum (und so auch die Zeit) eine blosse Form eurer Anschauung, welche Bedingungen a priori enthält, unter denen allein Dinge für euch äussere Gegenstände sein können, die ohne diese subjective Bedingungen an sich nichts sind, so könntet ihr a priori ganz und gar nichts über äussere Objecte synthetisch ausmachen. Es ist also ungezweifelt gewiss, und nicht bloss möglich oder auch wahrscheinlich, dass Raum und Zeit, als die nothwendigen Bedingungen aller (äusseren und inneren) Erfahrung, bloss subjective Bedingungen aller unserer Anschauung sind, im Verhältniss, auf welche daher alle Gegenstände blosse Erscheinungen und nicht für sich in dieser Art gegebene Dinge sind, von denen sich auch um desswillen, was die Form derselben betrifft, Vieles a priori sagen lässt, niemals aber das Mindeste von dem Dinge an sich selbst, das diesen Erscheinungen zum Grunde liegen mag."

III.

Ueber die Grundbegriffe der Geometrie und die Bewegung als Hülfsmittel bei geometrischen Untersuchungen.

„Im Raume, an sich selbst betrachtet, ist nichts Bewegliches." Was wir in demselben, als in Bewegung befindlich, wahrnehmen, ist immer ein Empirisches, wenn auch nicht, wie Schopenhauer und Aristoteles sagen, immer Materie. (Denn dem Schatten und dem Spiegelbild wird doch Niemand Materie zuschreiben.) Wenn nun Kant wegen des Empirischen, das jede Bewegung voraussetzt, diese von der transscendentalen Aesthetik ausschliesst, obwohl deren beide Elemente, Raum und Zeit, sich in der Bewegung vereinigen, so ist er ohne Zweifel im Recht. Man könnte nun fragen, ob nicht die Bewegung aus dem gleichen Grunde auch aus der Geometrie ausgeschlossen werden müsste, welche doch eine Wissenschaft a priori ist, und lediglich mit dem Raume zu thun hat, wo a priori nichts Bewegliches angetroffen wird. In der That hat auch Schopenhauer in dem Verfahren, die Congruenzsätze durch aufeinanderlegen (decken) der Figuren zu beweisen eine Mangelhaftigkeit zu sehen geglaubt, weil das Decken Bewegung und diese Materie voraussetze, die Geometrie also hier den Character als Wissenschaft a priori einbüsse.

Es scheint mir diess jedoch eine Verkennung des eigentlichen Gegenstandes der Geometrie zu sein. Dieser ist nicht der Raum als solcher, sondern die Raumgrössen, und ihr Zweck ist, die Gesetze darzuthun, nach denen die einzelnen Bestimmungen derselben sich gegenseitig bedingen. Diese Gesetze lassen sich theils unmittelbar und a priori erkennen, indem man sich die Objecte, von denen sie handeln, anschaulich vorstellt, theils deductiv als Consequenzen aus bereits bekannten Gesetzen herleiten, wobei man jedoch nie der Construction, d. h. der anschaulichen Vorstellung der Raumgrössen ganz entbehren kann.

Wie wir uns des Raumes erst mit der Einwirkung äusserer Objecte auf unsere Sinne als des Ortes, wo wir die Ursache dieser Einwirkungen suchen, bewusst werden, so gelangen wir auch erst durch die Wahrnehmung wirklicher Objecte zu der Vorstellung reiner Raumgebilde, indem wir von allen empirischen Daten derselben abstrahiren. Nur durch Abstraction aus wirklichen Körpern erhalten wir successive die Vorstellung von mathematischen Körpern, Flächen, Linien und Puncten. Obwohl durch Abstraction erhalten, so sind diese Vorstellungen doch noch anschauliche Vorstellungen. Was wir aus einem angeschauten physischen Körper als mathematischen Körper übrig behalten, nachdem wir von allem, was unsere Sinne an ihm wahrgenommen, abstrahirt haben, ist gerade das, wovon nicht abstrahirt werden darf, ohne dass das übrig bleibende aufhört, Anschauung zu sein: Denn jeder Körper muss nothwendig raumerfüllend vorgestellt werden. Dieser vom Körper gerade eingenommene Raum wird aber nicht selbst als mathematischer Körper festgehalten, sondern das Bild, das wir von diesem Raume erhalten, die räumliche Gestalt, die wir nicht bloss hier, sondern an jeder beliebigen andern Stelle des Raumes, die wir ebenso gut als bewegt d. h. ihre Stelle änderud, wie als ruhend uns vorstellen können: „Ein mathematischer Körper ist nicht ein begrenzter Raum, sondern das Bild eines begrenzten Raumes. Durch weitere Abstraction gewinnen wir in der Oberfläche des Körpers, oder in einem beliebigen Theil derselben die immer noch anschauliche Vorstellung einer Fläche. Anschaulich für sich allein ist dieselbe aber nur, insofern sie eine Gestalt hat, ein Bild ist: eine Fläche erscheint in jedem Momente, wo sie anschaulich vor uns steht als Trennungsstelle zweier Räume; als Gegenstand der Mathematik ist sie jedoch meist nicht diese Stelle, sondern das Bild dieser Stelle. Auch kann man sie auffassen als Grenze oder Theil der Grenze eines mathematischen Körpers, d. h. des Bildes eines begrenzten Raumes und als solche, wie als selbständiges Bild kann sie eben so gut im Zustande der Bewegung wie in dem der Ruhe vorgestellt werden. Dasselbe gilt von der Linie, wenn man sie als Bild der Grenze einer Fläche oder als Bild der Trennungsstelle zweier Flächentheile, oder als Begrenzung oder Theilstelle eines Flächenbildes auffasst. Der Punct endlich ist nur noch als Begrenzung oder als Theilstelle einer Linie oder als Spitze an einer Fläche, nicht mehr für sich allein anschaulich vorstellbar, da er keine Gestalt hat. Insofern er aber als Stelle an dem Bilde einer Fläche oder Linie vorgestellt wird, kann auch er wie diese eben so gut im Zustande der Bewegung wie in dem der Ruhe vorgestellt werden. Allerdings ist die Bewegung eines reinen Raumgebildes, wie dieses selbst, eine bloss eingebildete. Wirkliche Bewegung kommt nur dem Wirklichen, und sofern nur der Materie Wirklichkeit zukommt, ist sie allein auch das wirklich Bewegliche, was im Raume angetroffen wird. Die Objecte der Geometrie, die reinen Raumgebilde, werden aber im Raume nur angetroffen, insofern man sie entweder durch Abstraction aus wirklichen Objecten übrig behält, oder insofern man sie selbst erst erzeugt. Durch Abstraction erhält man sie eben so gut von ruhenden wie von bewegten Körpern, und danach sind sie selbst im Zustande der Ruhe oder der Bewegung. Dadurch, dass wir räumliche Gestalten ihren Ort im Raume stetig ändernd uns vorstellen können, ist es allein uns möglich, selbständig neue Raumgebilde zu erzeugen. Denn ein neues Raumgebilde entsteht vor unserem inneren Auge, indem wir ein anderes bereits bekanntes im Zustande der Bewegung uns vorstellen, und dabei die Bahn dieser Bewegung verfolgen. Denken wir uns einen Punct bewegt, so erhalten wir in seiner Bahn die Vorstellung einer Linie, und aus der gedachten Bewegung einer Linie geht das Bild einer Fläche hervor u. s. w.

Insofern also unter Körper, Flächen und Linien nicht Theile des Raumes oder Stellen in demselben, sondern die Bilder, d. h. die anschaulichen Vorstellungen, welche wir von ihnen haben, verstanden werden, können dieselben wirklich durch Bewegung anderer Raumvorstellungen erzeugt werden.

Ganz lächerlich aber würde es sein, wenn man dieses Prädikat auch auf die ihnen entsprechenden Oerter übertragen wollte und sagen würde: Die Bahn für die Bewegung eines Raumgebildes entstehe erst mit dieser Bewegung. So lächerlich diess klingt, so wird diess doch allen Ernstes von Trendelenburg behauptet, der geradezu sagt, die Bewegung sei das erste in unserem Bewusstsein. Da die sonderbaren Ideen Trendelenburgs über diesen Punkt bei manchem tüchtigen Mathematiker Eingang gefunden und in manchem sonst klaren Kopfe eine heillose Verwirrung der Begriffe angerichtet haben, halte ich es nicht für überflüssig, auf dieselben hier näher einzugehen.

In der dritten Auflage der „logischen Untersuchungen“ heisst es p. 224:

„Wenn wir uns in die Entstehung (!) des mathematischen Körpers versetzen, und in demselben die drei Abmessungen werden lassen (!), so stossen wir auf den eigentlichen Sitz der Schwierigkeit (der Lösung der Frage, warum der Raum drei Abmessungen habe). Der Punct, den wir vorläufig setzen, strebt (!?)

über sich selbst hinaus und dehnt sich zur Linie (Man stelle sich einmal recht lebhaft vor, wie sich der ausdehnungslose Punct gleichwohl dehnt); die Linie bewegt sich aus sich heraus und erweitert sich (obwohl sie gar keine Weite, d. h. Breite hat) dadurch zur Fläche; die Fläche beschreibt durch ihre Bewegung einen Körper (eigentlich müsste es jetzt heissen, sie verdicke sich zu demselben). Es ist ein scheinbarer Widerspruch, dass der Punct aus sich heraustritt; es ist diess aber nichts anderes als die Bewegung selbst, in dem Anfang, wie in den kleinsten Raum zusammengedrängt; es ist jener ursprüngliche Widerspruch, den zwar der trennende und zusammensetzende Verstand herausklügelt, aber die erzeugende (?) Anschauung mit der Macht ihrer Selbstgewissheit nicht kennt. Wie nun der Punct aus sich heraustritt, so thut dasselbe die Linie und die Fläche.“

Und weiter p. 270:

„Der Punct ohne Raum hat grosse Schwierigkeiten. Wer sie nicht sehen will, fängt von dem gegebenen Körper an und setzt die Fläche als Grenze des Körpers, die Linie als Grenze der Fläche und den Punct als Grenze der Linie. Ein solcher Geometer müsste entweder die Geometrie als Erfahrungswissenschaft und die Stereometrie vor der Planimetrie behandeln oder eingestehen, dass ihm der Punkt und die Linie noch eine andere selbständige Bedeutung haben. Wenn dann der Grundsatz folgt, dass eine gerade Linie durch zwei Puncte völlig und ins Unendliche fortbestimmt sei: so hört schon der Punct von selbst auf, blosse Grenze der Linie zu sein; denn die Linie geht gerade über ihn hinaus.“

Allerdings wird jeder Geometer zugeben, dass der Punct ausser, dass er die Grenze einer Linie ist, noch eine selbständige Bedeutung habe: er ist eine Stelle im Raume oder an einem Raumgebilde ohne Ausdehnung und Gestalt. Vorstellbar ist aber diese Stelle nur als Grenze oder Theilpunct einer Linie oder als Eckpunct an einer Fläche. „Ein Punct ohne Raum“ hat aber nicht bloss Schwierigkeit, sondern ist ein absoluter Unsinn. Wer sich keinen Raum vorstellt, kann sich auch keinen Punct vorstellen; denn alle Vorstellung setzt den Raum voraus.

Trendelenburg selbst sagt nirgends, was er sich unter einem Puncte vorstellt; er „setzt“ ihn eben einfach vorläufig und beruft sich vornehm auf die „Selbstgewissheit der Anschauung“, durch welche er ihn nicht nur vor dem Raume kennt, sondern auch aus sich heraustreten und zur Linie erweitern sieht. Mag sein, dass Herr Trendelenburg eine ganz eigene Art von Anschauung hat, deren wir andere Sterbliche nicht theilhaftig sind. Mir wenigstens ist es schlechterdings unmöglich, einen Punct anders denn als Stelle im Raume und zwar als Grenze vorzustellen und das Gleiche gilt mir von Linien und Flächen. Es ist mir z. B. gänzlich unmöglich, von einer Fläche eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen, ohne mir auf beiden Seiten derselben den körperlichen Raum mit vorzustellen, welcher durch diese Fläche getrennt erscheint, d. h. sie ist mir durchaus nichts anderes als eine Grenze oder Theilstelle, und wenn ich mir sie bewegt denke, so ist es nur ihr Bild, welches sich bewegt. Der Ort, wo ich mir den Raum in dieser besondern Art getheilt denke, geht stetig in einen andern über. Während wohl niemand ernstlich behaupten wird, er habe von einer Fläche eine anschauliche Vorstellung, ohne auf beiden Seiten den Raum mit vorzustellen, so dürfte doch mancher glauben, mit der Linie verhalte es sich anders; d. h. diese sei auch unabhängig von irgend einer Fläche deren Grenze sie ist, gewissermassen frei im Raume schwebend vorstellbar. Diess ist aber nur Selbsttäuschung. Ich frage Jeden auf sein Gewissen, ob das wirklich eine Linie ist, was er so anschaulich und unabhängig von jeder Fläche frei im Raume sich vorzustellen vermag, und nicht vielmehr ein sehr dünner Faden, dem, wenn auch nur eine sehr geringe, aber doch immer noch eine Breite zukommt, und der gänzlich verschwindet, sobald die Breite verschwindet? Es ist diess nichts als eine Reproduktion derjenigen Striche, die wir als Repräsentanten von Linien mittels des Bleistifts auf das Papier zeichnen und so wenig eine Linie wie diese. Wie in der empirischen, so kann auch in der reinen Anschauung eine Linie nur als Grenze einer Fläche oder eines Theiles derselben vorgestellt werden. Sie ist durchaus nichts als die Grenze einer Fläche.

Ich sollte demnach meinen, dass gerade die „Selbstgewissheit der Anschauung“ die von jeher gebräuchliche Ableitung der geometrischen Grundbegriffe, welche mit dem physischen Körper beginnt und mit dem Puncte endigt, als die allein richtige erscheinen lassen müsse.

Wer aber darum die Mathematik zu einer Erfahrungswissenschaft macht, weiss nicht, was Erfahrungswissenschaft ist. Diese schöpft nicht etwa ihre ersten Begriffe, sondern alles Neue, wodurch ihr Inhalt wirklich vermehrt wird, aus der Erfahrung, und geht keinen Schritt weiter ausser an der Hand der Erfahrung. Die Mathematik aber, mag sie ihre ersten Begriffe hernehmen, wo sie will (sie könnte sie meinetwegen, wie Herr Trendelenburg den Punct, einfach „setzen"), geht selbständig weiter, ohne je einen Blick zurückzuwerfen auf die Erfahrung oder dieselbe irgend zu Rathe zu ziehen, und mit der Ueberzeugung apodictischer Gewissheit.

Wie nun unzweifelhaft jeder Mensch nur durch Abstraction aus dem empirisch Angeschauten seine Vorstellung von Körpern, Flächen, Linien und Puncten gewinnt, so muss auch die wissenschaftliche Mathematik, will sie anders ihre Begriffe klar machen, von der natürlichen Anschauung ausgehend, diese Begriffe ableiten in der Reihenfolge, wie man sie erhält.

Herr Professor Wolf in Zürich geht zwar in seinem „Taschenbuche" und in dem so eben erscheinenden „Handbuche der Mathematik, Physik u. s. w.", von dem Puncte aus, den er durch folgende Definition einführt:

„Ein Ding ohne endliche Ausdehnung, an dem einzig der Begriff der Lage haftet, heisst Punct."

Diess wäre also etwa ein auf dem Tische liegendes Messer ohne Klinge und Griff.

Ferner sagt Herr Prof. Wolf in seinem Handbuche:

„Früher stellte man gewöhnlich den Begriff der dreifachen Ausdehnung an die Spitze der Geometrie, und stieg davon durch Zerlegen zu dem Puncte hinab; jener Begriff ist jedoch erstens nur zum Scheine für sich klar, da die Richtigkeit einer mehrfachen, aber nicht über drei steigenden Ausdehnung erst bei der Lehre von den räumlichen Coordinaten entwickelt werden kann — und zweitens ist der Begriff der Lage, von welchem hier ausgegangen wird, schon zur oberflächlichen Auffassung jenes Begriffes nothwendig, und somit jedenfalls einfacher."

Der zweite Theil, in welchem die Richtigkeit einer mehrfachen Ausdehnung entwickelt werden soll, ist noch nicht erschienen; dagegen heisst es p. 118: „Darin, dass in der Ebene jede Verschiedenheit der Lage nach zwei Richtungen gegeben werden kann, liegt auch die Berechtigung zu der Behauptung: es gebe in der Ebene zwei und nicht mehr als zwei Ausdehnungen, — besser noch das Verständniss jenes Ausspruches."

Unter der „dreifachen Ausdehnung" scheint zunächst der Raum verstanden zu sein; wenigstens ist mir kein einziges Buch bekannt, das nicht entweder vom Punkte oder vom Raume anhebt. Warum er aber „die dreifache Ausdehnung" heisst, ist mir unklar; denn in Wahrheit ist doch der Raum nach allen Seiten ausgedehnt, und also, wenn auch keine „unendlichfache Ausdehnung", doch „ein unendlichfach Ausgedehntes."

Ausdehnung scheint mithin für Abmessung (Dimension) zu stehen. Aber auch so ist die Sache nicht klar. Mir ist kein Buch bekannt, das von den drei Dimensionen des Raumes spräche, ohne zuvor von der einen der Linie und den zwei der Fläche gesprochen zu haben. In der That können die drei Dimensionen des Raumes nur durch die eine der Linie und die zwei der Fläche klar werden. Ziehe ich in irgend einer Fläche eine Linie, so gehört die Länge derselben offenbar auch zu den Merkmalen der Fläche; aber von der Grösse derselben erhalte ich nur dann eine klare Vorstellung, wenn ich ausserdem noch merke, wie sehr sie nach beiden Seiten dieser Linie in die Breite ausgedehnt ist. Um von der Grösse eines Körpers eine Vorstellung zu haben, genügt es, sich irgend eine Fläche in demselben vorzustellen, deren Dimensionen auch Dimensionen des Körpers sind, und dann zuzusehen, wie sehr der Körper in jedem Punkte der Fläche nach beiden Seiten in die dritte Dimension ausgedehnt ist. Nur wenn ich in der Fläche eine Linie ziehe, wodurch sie getheilt wird, werde ich mir der zweiten Dimension der Fläche, die zu der ersten dieser Linie hinzutritt, bewusst, und nur durch die Vorstellnng einer Theilungsfläche eines Körpers wird klar, wie sich dieser von jener durch seine Ausdehnung in die dritte Dimension nach beiden Seiten der Fläche unterscheidet. Weil sich aber ein Theil des Raumes nur als begrenzt, nicht selbst wieder als Grenze oder Theilstelle einer andern Raumvorstellung denken lässt, so ist es auch nicht möglich, sich eine vierte Dimension vorzustellen, nach der diese ausgedehnt wäre. Diess ist offenbar der klare Sinn, den man von jeher mit den Worten verbunden hat: Die Linie hat eine, die Fläche zwei, der Raum drei Dimensionen und eine vierte ist nicht möglich. Wenn man nun auch von den drei Dimensionen des Raumes erst eine klare Vorstellung erhält, nachdem man von ihm successive bis zum Punkte herabgestiegen ist, so ist darum dieser doch nicht mehr „von selbst klar“, wie jener. Man geht aber auch nicht „vom Begriff der dreifachen Ausdehnung“, sondern von der anschaulichen Vorstellung des Raumes und seiner Theile aus, um von ihnen zu dem durchaus nicht von selbst klaren Begriff des Punktes zu gelangen. Hat man diesen aber einmal gewonnen, so ist es allerdings das einfachere und es lässt sich nichts dagegen einwenden, wenn man nun wieder umgekehrt von ihm aus zu dem weniger einfachen stetig fortschreitet. Da Herr Professor Wolf in seiner Literaturangabe auch das Schriftchen von Riemann „über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, erwähnt, so scheint mir, dass er durch diese eigenthümliche Schrift auf den Ausdruck „dreifache Ausdehnung“ für Raum und auf die Zurückführung dieser dreifachen Ausdehnung auf die zur Bestimmung eines Punctes nöthigen drei Coordinaten geführt worden ist. Ich erlaube mir darum hier nochmals auf diese Schrift zurückzukommen.

Herr Prof. Helmholtz bemerkt ganz richtig in seinen in den Heidelberger Jahrbüchern vom Jahre 1868 (p. 733) veröffentlichten Vortrage „über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie“, dass die von Riemann und von ihm selbst gestellte Frage, welche Sätze der Geometrie Wahrheiten von thatsächlicher Bedeutung aussprächen, welche dagegen nur Definitionen und Folgen von Definitionen seien, unabhängig sei von der Frage, woher unsere Kenntniss der Sätze von thatsächlicher Bedeutung stammen. Man kann daher den Untersuchungen Riemanns, so weit sie die erste Frage zu beantworten suchen, ihren Werth nicht absprechen, wenn man auch seine Beantwortung der zweiten Frage verwerfen muss. Riemann geht nicht von dem anschaulich gegebenen Raume aus, sondern will zunächst untersuchen, ob und in wie ferne es möglich sei, von reinen Grössenbegriffen aus zu den Sätzen der Geometrie durch blosses Schliessen (resp. durch analytische Operationen) zu gelangen. Er mag dabei wohl von demselben Gedanken geleitet worden sein, den Helmholtz in den Worten ausspricht: „Da wir nur solche Raumverhältnisse uns anschaulich vorstellen können, welche im wirklichen Raume möglicherweise darstellbar sind, so verführt uns diese Anschaulichkeit leicht dazu, etwas als selbstverständlich vorauszusetzen, was in Wahrheit eine besondere, und nicht selbstverständliche Eigenthümlichkeit der uns vorliegenden Aussenwelt ist.

Dieser Schwierigkeit überhebt uns die analytische Geometrie, welche mit reinen Grössenbegriffen rechnet, und zu ihren Beweisen keine Anschauung braucht. Es konnte also zur Entscheidung der erwähnten Frage der Weg betreten werden, nachzusuchen, welche analytischen Eigenschaften des Raumes und der Raumgrössen für die analytische Geometrie vorausgesetzt werden müssten, um deren Sätze vollständig von Anfang her zu begründen."

Riemann und Helmholtz fangen damit an, für die drei Dimensionen des Raumes einen analytischen Ausdruck zu suchen und kommen dadurch auf die Fiction einer „mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit."

Insofern eine Linie als Ort unendlich vieler Puncte angesehen wird, von deren jedem man zu jedem anderen auf stetige Weise übergehen kann, ist in der That die Linie eine stetige Mannigfaltigkeit, und eine einfach ausgedehnte, weil das einzelne Element derselben, der Punct, nicht selbst wieder eine Mannigfaltigkeit ist. Die Fläche, als eine stetige Mannigfaltigkeit von Linien kann als zweifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit von Puncten angesehen werden, und ebenso erscheint der Raum als dreifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit von Puncten. Auf diesem Wege ist es unmöglich, zu stetigen Mannigfaltigkeiten von mehr als drei Dimensionen fortzuschreiten, da sich der Raum nur als einer denken lässt und eine stetige Mannigfaltigkeit von Räumen daher ein Unding wäre. Wohl aber ist diess wenigstens scheinbar möglich mit Hülfe der analytischen Geometrie.

Denken wir uns eine Grösse stetig veränderlich, so können wir die einzelnen Werthe derselben als die Längen von Strecken, die auf irgend einer Linie von einem Anfangspuncte aus gemessen werden, ansehen, und alsdann werden die einzelnen Puncte durch diese Grösse bestimmt. Der Ort eines Punctes auf einer Linie ist daher durch Abmessung einer veränderlichen Grösse bestimmt, und da der Ort eines Punctes in der Fläche durch die Abmessung zweier der Ort eines Punctes im Raume durch die Abmessung dreier von einander unabhängiger stetiger Grössen bestimmt ist, so kann man diesen Umstand als einen analytischen Ausdruck für die drei Dimensionen des Raumes und der übrigen etwa noch möglichen dreifach ansgedehnten stetigen Mannigfaltigkeiten ansehen. Wenn man nun abstrahirt von der Art und Weise, wie die Bestimmung des Ortes eines Punctes durch Abmessung einer oder mehrerer unabhängiger variabler Grössen erfolgt, und nur die Zahl der Bestimmungsstücke des einzelnen Elementes als Eintheilungsgrund für die verschiedenen Arten stetiger Mannigfaltigkeiten fest. hält, so gelangt man zu dem sehr abstracten Begriffe der nfach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit, oder wie Helmholtz kürzer sagt, des Raumes von n Dimensionen. Und dieser liesse sich denn so definiren: „Eine stetige Mannigfaltigkeit ist eine solche von n Dimensionen, wenn das Einzelne derselben (der Punct) durch wenigstens n Abmessungen von einander unabhängiger Bestimmungsstücke bestimmt wird.“ Riemann und Helmholtz stellen als characteristisches Merkmal der n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bloss die Eigenschaft hin, „dass jedes Einzelne desselben durch die Abmessung von n continuirlich und unabhängig von einander veränderlichen Grössen bestimmt werden könne“, und lassen die in dem Worte wenigstens ausgedrückte Beschränkung weg. Sie haben dabei offenbar übersehen, dass z. B. in der Ebene jeder einzelne Punct auch ebenso gut durch jede beliebige grössere Zahl von Coordinaten bestimmt werden kann, wenn man ihn z. B. auffasst als den Endpunct einer von einem festen Anfangspuncte ausgehenden aus n der Länge nach variabeln Strecken von gegebener Richtung bestehenden gebrochenen Linie. Wenn man sich darum wörtlich an die Definitionen von Helmholtz halten wollte, so wäre dir Fläche ebensogut als eine n fach ausgedehnte wie als zweifach ausgedehnte stestige Mannigfaltigkeit aufzufassen, und damit die Verschiedenheit zwischen dem geometrischen und dem analytischen Begriffe der Dimension schlagend dargethan. Wenn man jedoch bestimmter sagt, dass die Zahl der unbedingt nöthigen Abmessungen zur Bestimmung des Punctes n sei, oder dass nicht nur von den Bestimmungstücken zweier verschiedener Puncte wenigstens eines verschieden sein müsse, sondern überhaupt jedem Complex von n Bestimmungsstücken nur ein Punct, und jedem Punct nur ein völlig bestimmter Complex von

Bestimmungsstücken entspricht, so lässt sich die Identität der beiden Begriffe wieder herstellen.

Damit ist jedoch weiter nichts gewonnen, als ein analytischer Ausdruck für die Verschiedenheit der 3 Classen räumlicher Grössen. Mit Hülfe dieses Ausdrucks und der Voraussetzung der Stetigkeit lassen sich dann die drei Dimensionen begrenzter Raumtheile analytisch herleiten, indem man nachweist, dass zur Bestimmung eines Volumens immer 3 Integrationen auszuführen sind. Diese sind erst die wirklichen Repräsentanten der drei Dimensionen.

Wenn man bei alle dem den Unterschied zwischen extensiven und intensiven Grössen fallen lässt, und die Zahl der Dimensionen einer Mannigfaltigkeit lediglich nach der in obiger Weise modificirten Riemann'schen Definition feststellt, so gibt es auch stetige Mannigfaltigkeiten von 4 Dimensionen, nämlich materielle Körper, deren Dichtigkeit von Punct zu Punct sich stetig ändert. Die Elemente dieser Mannigfaltigkeit sind jedoch nicht die Puncte des Körpers, sondern die ihnen entsprechenden Massenelemente. Denn die unendlich kleine Masse eines jeden Punctes bedarf zu ihrer Bestimmung der Abmessung von 4 Grössen: die 3 Coordinaten des Punctes und die Dichte der Masse in demselben. Da die letztere jedoch eine intensive Grösse ist, ihr also eigentlich keine Ausdehnung, wiewohl eine Grösse zukommt, so thut man jedoch der Sprache und der Anschauung eine arge Gewalt an, wenn man hier von einer vierten Dimension, oder gar von einer vierfachen Ausdehnung spricht. Noch ärger schlägt man dem gesunden Menschenverstand ins Gesicht, wenn man mit Helmholtz auch das System der Farben eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit nennt. Denn die Farbe hat gar keine Ausdehnung, da sie eine intensive Grösse ist. Noch weniger kommen dieser Mannigfaltigkeit Dimensionen zu. Denn die Dimensionen sind die Grössen, welche abgemessen werden müssen, um einen begrenzten Theil der Mannigfaltigkeit seiner Grösse nach zu bestimmen. Was hätte man aber unter der Grösse eines begrenzten Theiles des Farbensystems zu verstehen?

Der ganze Versuch, die Geometrie auf reine Grössenbegriffe zurückzuführen, ist schon desshalb ein verfehlter, weil es unmöglich ist, einen analytischen Ausdruck für Ausdehnung im Gegensatz zur Intensität zu finden, und weil überhaupt Begriffe nicht das zuerst bekannte unmittelbar klare sind, sondern **Anschauungen**. Der Begriff der Grösse wird durch Abstraction aus unsern Anschauungen erhalten und ist nur durch diese verständlich, nicht diese durch ihn. Die analytische Geometrie ist nur ein Nothbehelf, und ihre Resultate geben keine **Einsicht**, sondern nur **Uebersicht** und **Gewissheit**. An dem, was sie lehrt, kann man nicht zweifeln; man ist überzeugt, **dass** es so ist, aber man weiss nicht **warum**.

Wenn Helmholtz sagt, das was wir als selbstverständlich ansehen, weil wir es anschaulich uns so vorstellen müssen, sei nur eine besondere und nicht selbstverständliche Eigenthümlichkeit der uns vorliegenden Aussenwelt, so widerspricht er damit der grossen Lehre von Kant, dass dieses nicht Eigenthümlichkeiten der uns vorliegenden Aussenwelt, sondern der Form des äusseren Sinnes seien, an die alle unsere Vorstellungen und damit auch alles Verständniss derselben gebunden ist. Erkenntnisse, zu denen wir durch die Natur unseres Erkenntnissvermögens wirklich gezwungen sind, und die uns desshalb als „selbstverständlich" erscheinen, beweisen zu wollen, ist ein ebenso erfolgloses wie zweckloses Unternehmen. Denn so bald wir anfangen, sie zu bezweifeln, verlieren wir allen festen Boden. Dass die analytische Geometrie zu ihren Beweisen keine Anschauung braucht, ist eine Behauptung, wofür Helmholtz den Beweis wohl schwerlich liefern könnte. Jede analytische Geometrie stützt sich auf ein Coordinatensystem und diesem entspricht immer eine anschauliche Vorstellung. Ist diese Grundlage einmal festgestellt, so reduciren sich die meisten ihrer Entwickelungen freilich auf rein analytische Operationen. Sollen aber die Resultate derselben nicht leerer Formelkram bleiben, so müssen sie doch gedeutet werden, und wie soll diess möglich sein ohne Anschauung?

Mögen immerhin die 4 Postulate, die Helmholtz in seiner Untersuchung über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie aufstellt, genügend sein, damit die Resultate der analytischen Geometrie denen des Euklid nicht widersprechen, sobald die Zahl der Dimensionen auf drei festgestellt und die unendliche Ausdehnung des Raumes gefordert wird. Dass aber es möglich sei, lediglich von diesen Definitionen und Postulaten ausgehend, analytisch und ohne Anschauung die Sätze darzuthun, welche die elementare Geometrie lehrt, das ist zum mindesten eine kühne Behauptung, auch wenn man zählen, combiniren, permutiren nicht für anschauliche Operationen hält. Bis jetzt hat die analytische Geometrie, wo sie nicht auf die Elemente recurrirt, lediglich sich auf Untersuchungen beschränken müssen, die darthun, dass gewisse Oerter gewisse Puncte und Oerter von geringerer Dimensionenzahl gemein haben, und wo diese liegen. Sobald sie aber das Gebiet der Lage verlässt und zu dem der Grösse und Gestalt übergehen will, kann sie diess nur äusserst mühsam und gestützt auf Sätze der Elemente, die sie selbst wenigstens bis jetzt zu beweisen nicht im Stande ist.

Wer mir bis jetzt gefolgt ist und nun wieder einmal einen Blick wirft auf die Ueberschrift, die ich diesem Aufsatze vorangestellt habe, dürfte leicht geneigt sein, sich zu fragen, was denn nun eigentlich der positive Inhalt dieser ganzen Auseinandersetzung sei. Denn er war berechtigt, zu erwarten, dass hier auseinandergesetzt werde, welches die Grundbegriffe der Geometrie seien, und wie man sich der Bewegung als Hülfsmittel bei geometrischen Untersuchungen bedienen könne. Von dem allem ist aber hier fast nur beiläufig die Rede gewesen. Dennoch glaube ich die mir gesteckte Aufgabe erfüllt zu haben; denn als solche betrachtete ich einerseits die in diesen Gebieten herrschende Begriffsverwirrung darzulegen und auf ihre Quelle zurückzuführen, andererseits die Grundbegriffe in ihrer wahren Gestalt gegenüber dieser Begriffsverwirrung wieder herzustellen. Zugleich wollte ich die längst bekannte und bewährte genetische Methode als eine wissenschaftlich gerechtfertigte sowohl gegen ihre Freunde, wie gegen ihre Gegner vertheidigen. Dazu bedurfte es aber nur eines Nachweises, dass in der That die Geometrie, ohne ihren wissenschaftlichen Werth zu vermindern, die Bewegung in den Kreis ihrer Betrachtung hereinziehen dürfe, und einer klaren Auseinandersetzung, dass und wie sie dadurch die Objecte ihrer Untersuchung gleichsam selbst erzeugen könne. Dieses glaube ich geleistet zu haben, ohne in den Fehler zu verfallen, dessen die Erfinder und Hauptverfechter (Bernhard Becker) dieser Methode sich schuldig gemacht haben. Dieser besteht darin, dass sie das Erzeugen von dem blossen Bilde auf den ihm entsprechenden Ort selbst übertrugen. Dieser kaum begreifliche Irrthum hat ebenfalls seine Quelle in den verworrenen Ansichten Trendelenburgs. Derselbe glaubt trotz Kant, den er zu verbessern wähnt, p. 150 seiner logischen Untersuchungen die kühne Hypothese auf-stellen zu können, „dass für unser Bewusstsein die Bewegung das nothwendig Erste sei, und aus ihr sich die Vorstellung von Raum und Zeit erst herausbilde.“ Das nothwendig Erste in unserem Bewusstsein aber ist, wie Kant richtig sagt, die Empfindung, die sinnliche Wahrnehmung, und erst wenn wir, durch die Natur unseres Anschauungsvermögens gezwungen, diese als Wirkung eines äusseren Objectes auf uns erkennen, werden wir uns des Raumes bewusst, worin wir dieses Object suchen oder vielmehr selbst construiren, und erst wenn wir eine Aenderung in unserer Sinnesempfindung wahrnehmen, welche uns auf eine Ortsänderung des ihr entsprechenden räumlichen Objects schliessen lässt, gelangt die Vorstellung der Bewegung in unser Bewusstsein, während wir uns mit der ersten Empfindung auch schon ihrer Dauer, d. h. der Zeit bewusst geworden sind. Wie sollten wir aber Bewegung uns vorstellen können, ohne ein Bewegliches, und ohne den Raum und die Zeit? Wenn unser Verstand die Daten der Sinnesempfindung verarbeitet zur Hervorbringung eines räumlichen Objectes, so sucht er allerdings, bevor er durch die Gewohnheit die ihm später eigene Sicherheit erlangt hat, oder in Fällen, wo die Erfahrung ihn verlässt, für jeden Punct des Objects, das er als Ursache der Sinnesempfindung erkennt, den richtigen Ort im Raume, und geht, bis er ihn findet, von Ort zu Ort stetig weiter, macht also in gewissem Sinne eine Bewegung. Würde er aber überhaupt einen Ort für sein Object suchen können, wenn er nicht den Raum voraussetzte?

Man muss überhaupt einen Unterschied machen zwischen räumlicher Bewegung und der Bewegung, in welcher sich unsere stets wechselnden Vorstellungen, Empfindungen, Willensregungen u. s. w. befinden. Diese ist eine Zustandsänderung; jene eine Ortsänderung, und das sind zwei toto genere verschiedene Dinge, welche nur vermengen kann, wer Worte für Begriffe nimmt. p. 141 sagt Trendelenburg: „Alle Ruhe in der Natur ist nur das Gegengewicht der Bewegung. Man kann die Ruhe aus der Bewegung, aber nicht die Bewegung aus der Ruhe begreifen. Jenes thut man, wenn man die Ruhe als aufgehobene Bewegung erklärt; diess versucht man vergebens, wenn man die Bewegung als aufgehobene Ruhe fasst. Denn diess Aufheben setzt die Vorstellung der Bewegung voraus, und ist eine Art der Bewegung.“ Ist das etwas anderes als ein leeres Spiel mit Worten? Wie soll der, welcher nicht weiss, was Ruhe ist, dies begreifen, wenn man sie als aufgehobene Bewegung erklärt? Ist nicht die eine dieser Erklärungen so albern wie die andere? Gerade so könnte man Schwarz als aufgehobenes Weiss oder dieses als aufgehobenes Schwarz erklären. Nur die Beziehung einer Vorstellung zu Raum und Zeit erzeugt die Vorstellungen von Ruhe und Bewegung: Ruhe ist das Verharren am selben Orte und im selben Zustande. Bewegung ist Ortsveränderung. Die eine aus der andern ohne Bezugnahme auf Raum und Zeit oder gar diese durch jene erklären zu wollen, ist sicher einer der verrücktesten Einfälle, die je für Philosophie ausgegeben worden sind, und das will viel heissen. Im Uebrigen verweise ich auf das soeben erschienene, wie mir nach flüchtigem Durchblicken scheint, sehr lesenswerthe Schriftchen von Dr. C. Grapengiesser: „Kant's Lehre von Raum und Zeit; Kuno, Fischer und Adolf Trendelenburg.“ (Jena 1870.)

IV.

Zur Methode der Geometrie.

Seit Kant nachgewiesen, dass die Geometrie ihre Unfehlbarkeit nicht der Strenge ihrer Beweise nach der Euklid'schen Methode allein verdanke, sondern hauptsächlich dem Umstande, dass sie auf die uns unmittelbar gegebene reine Anschauung des Raumes sich stütze, hat man in Deutschland angefangen, die Zweckmässigkeit der Euklid'schen Methode in Frage zu stellen, während in Frankreich Legendre den Euklid noch in seiner Methode zu übertreffen strebte, und in England noch heute an Euklid wie an der Bibel festgehalten wird.

Auch Kant war offenbar noch weit davon entfernt, eine Aenderung in der Methode der Geometrie vorzuschlagen. Herbart dürfte wohl der erste sein, der in seinem ABC der Anschauung (1803) auf Verbesserung in der Methode des Beweises drang, und namentlich betonte, dass viele Beweise sich darauf beschränken, die Gewissheit der Sache festzustellen, aber keine Einsicht in ihre Nothwedigkeit gestatten, also nur die Gewissheit geben, dass etwas sei, statt zu erklären, warum es so sei.

Von einem andern Standpuncte aus eröffnete 1810 Professor

Schweins in Heidelberg in seinem „System der Geometrie“ einen förmlichen Feldzug gegen Euklid. Seine Haupteinwürfe waren die „Handwerksmässigkeit“ mit der Euklid die Figuren zum Beweise ihrer Identität auf einanderlegt, statt sich mit der unmittelbar klaren Einsicht zu begnügen, dass z. B. ein Dreieck durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel völlig bestimmt ist, und dass die blosse Aenderung der Lage der Figur im Raume an ihr selbst nichts ändert. Auch fand er die Auffassung des Winkels als „die Neigung zweier Linien gegen einander“ als unrichtig, indem zur Vorstellung der Neigung die beiden Nebenwinkel nöthig seien.

Die gewichtigsten Einwendungen gegen Euklid von Seiten deutscher Mathematiker sind jedoch die, welche von den Schöpfern und Anhängern der heuristischen und genetischen Methode erhoben wurden.

Sehr deutlich sind diese Einwendungen ausgesprochen worden von Herrn Professor Schlömilch in der Vorrede zur ersten Auflage seiner Geometrie des Maasses. Ich weiss nicht, welche Gründe denselben veranlasst haben, in den spätern Auflagen diese Vorrede zu unterdrücken. Immerhin wird es mir wohl gestattet sein, das Wesentlichste derselben hier zu citiren.

p. III. heisst es: „Es sind zwei Hauptforderungen, die ich an jeden Unterricht, besonders aber an den geometrischen stelle; die erste, organische Gliederung, betrifft die Anordnung des Stoffes, die zweite, heuristischer Gedankengang, die Darstellung desselben.“

Beides vermisst man bei Euklid.

p. XIII. heisst es weiter: — „Und in der That, wie kann eine Darstellung auf Wissenschaftlichkeit Anspruch machen wollen, die den Gedankengang fortwährend unterbricht, um ihn stets wieder von Neuem anzuknüpfen (ein Verfahren, das uns nicht einen glatt gesponnenen Faden, sondern eine knotige Schnur liefert), eine Darstellung, die an keiner Stelle die Nothwendigkeit sehen lässt, warum hier gerade diess und nichts Anderes besprochen wird, eine Darstellung endlich, die erst dann zum Verständniss gelaugt, wenn man am Ende mit einigem Geschicke die leitenden Maximen herausgefunden hat, ohne welche das Ganze ein unbegriffenes Kunststück bleibt.“

Und p. XIV: „Wer dogmatisch verfährt, nöthigt seinen Schülern etwas Aeusserliches, ihnen ganz Fremdes auf, wovon sie weder den Zweck noch den Zusammenhang begreifen, und erst am Ende gelangt der Talentvolle, welcher im Stande ist, sich die Sachen etwas zurecht zu legen, zu der Entdeckung, dass das Gelernte doch nichts Aeusseres und Fremdes war, dass es im Gegentheil aus Wahrheiten besteht, die er eigentlich wohl selber hätte finden können; angeregt durch diese Entdeckung versucht er jetzt ganz seinen eigenen Weg zu gehen, und nun erst beginnt bei ihm das innere Verständniss. Dem minder Begabten dagegen bleibt die Sache etwas äusserlich Angelerntes, ein Ballast für das Gedächtniss; entstehende Lücken kann er nicht ausfüllen, weil ihm kein Princip der Anordnung zu Gebote steht, die Lücken werden grösser und wenige Monde nach dem Schlusse des Unterrichts ist die ganze ehemalige Weisheit verschwunden."

... „Ganz anders gestaltet sich die Sache bei der heuristischen Methode; hier erscheint der Lehrer nicht als ein Pfiffikus, der mit wunderlichen Dingen die Jungen verblüfft, er erscheint im Gegentheil als Führer, an dessen Hand die Schüler die Wahrheit selber finden." . . .

„Für den Hauptvortheil aber der heuristischen Methode halte ich den Umstand, dass der Schüler die Wissenshhaft entstehen sieht, dass er lernt, einen Gegenstand wissenschaftlich zu bearbeiten; und selbst, wenn er den ganzen materiellen Inhalt des Unterrichts vergässe, so hätte er daran noch einen, wenn auch nicht extensiven, doch intensiven Gewinn."

Obwohl sich gegen diese Gründe im Ganzen nicht viel einwenden lässt, ist Schlömilch mit seinem Versuche einer heuristischen Darstellung der Elemente fast vereinzelt geblieben. Den von ihm betretenen Weg finde ich fast in keinem andern Lehrbuche, deren doch alle Jahre eine ziemliche Anzahl neue entstehen, befolgt. Obwohl beim Unterrichte selbst viele Lehrer heuristisch verfahren, so ist man in den Lehrbüchern noch heute fast durchgängig dogmatisch geblieben. Der Grund mag wohl zum Theil darin liegen, dass Herr Schlömilch in seiner Darstellung etwas gar zu breit geworden, während Neuere, wie Spitz, Rummer u. a. den Stoff in dogmatischer Weise in ziemlich engen Rahmen so zu geben wussten, dass man mit weit mehr Lust zu ihnen greift wie zu der dickleibigen „Geometrie des Maasses", in der man trotz der heuristischen Methode nur sehr mühsam weiter kommt, die namentlich aber das Repetiren sehr erschwert, weil man nicht weiss, wo man die einzelnen Theoreme suchen soll und nicht übersieht, wie sie auf einander folgen müssen, damit wirklich das eine als Beweisgrund für das andere angeführt werden kann. Und im Grunde ist mit dieser Methode auch wenig gewonnen. Trotz der Versicherung Schlömilchs, dass diess bei seiner Methode nicht der Fall sei, bleibt der Lehrer auch hier ein Pfiffikus, der seine Schüler durch allerhand Hocuspocus verblüfft, indem er damit anfängt, irgend eine Figur an die Tafel zu zeichnen, ohne dass man weiss, wohin er will, dann willkürliche Linien hinzufügt, die ihm erlauben, allerhand Schlüsse zu ziehen; und aus alledem geht zuletzt, wie ein Deus ex machina ein Lehrsatz hervor, der nun allerdings gefunden ist, aber keineswegs in der Art, dass der Schüler nun mehr davon verstehe, wie wenn er gleich von vorneherein gewusst hätte, was gefunden werden sollte. Darin besteht überhaupt eigentlich der ganze Unterschied zwischen dem, was Schlömilch für heuristische Methode ausgibt und der Methode des Euklid. Schlömilch sagt diess deutlich selbst, indem er mit Geringschätzung über den radicaleren Versuch Snell's, sich von Euklid zu befreien, sich also auslässt: „Die Aehnlichkeit zwischen meinem Buche und dem oben genannten betrifft nur theilweise das erste Kapitel, von da ab wird meine Anordnung und Darstellung durchaus von jener verschieden; der Hauptunterschied besteht aber darin, dass ich strenge Beweise gebe, während die Snell'schen Deductionen der Anschauung mehr anheimstellen als es unter „Geometern von gutem Tone“ Sitte ist.“ Da Schlömilch es für einen Verstoss gegen den guten Ton hält, der Anschauung mehr zuzugestehen, als durchaus nöthig, so ist seine Methode eigentlich nur scheinbar eine andere wie die Euklids, und derselben nur da vorzuziehen, wo seine Beweise etwa einfacher und natürlicher sind. Gerade aber das, was er für den Hauptvorzug seiner Methode hält, dass nämlich der Lehrsatz als das Ergebniss „einer wissenschaftlichen Bearbeitung des Gegenstandes erscheine“, sucht man bei ihm fast ebenso vergeblich wie bei Euklid oder Legendre. Denn die Art, wie er z. B. die Bedingungen aufsucht, unter welchen zwei Dreiecke ähnlich oder congruent sind, kann wahrlich nicht für wissenschaftlich ausgegeben werden, wenn man diess Wort in dem

Sinne versteht, in welchem alle andern Wissenschaften ausser der Elementargeometrie heutzutage es verstehen und anwenden. Doch muss anerkannt werden, dass Schlömilch wenigstens in einigen Puncten wirklich leistet, was er verspricht, wohin ich besonders die einfache Darlegung des Grundes zähle, warum die Flächen gleichwinkliger Parallelogramme von gleichen Nebenseiten sich wie ihre Grundlinien verhalten (§ 16). Auch ist die Darlegung der Grundbegriffe in der Einleitung ebenso klar wie streng wissenschaftlich.

Der radicalste Versuch, die Methode der Geometrie zu verändern und von Euklid zu emancipiren ist nicht von einem Mathematiker, sondern von einem Philologen gemacht worden, nämlich von Bernhard Becker, dem leider zu früh verstorbenen Sohne des berühmten Reformators der Grammatik. Angeregt durch Herbart und Trendelenburg geht derselbe in seinem Schriftchen „über die Methode des geometrischen Unterrrichts“ (1844) dem Euklid in einer Weise zu Leib, die bis jetzt einzig dasteht, fand aber leider nicht die verdiente Berücksichtigung, wenn auch manchen Plagiator. Diess mag zum Theil seinen Grund darin haben, dass Bernhard Becker, als nicht zur Zunft gehörig, nicht die geringste Rücksicht nahm auf das, was unter „Mathematikern von gutem Ton“ zur guten Sitte gehört. Er genirte sich nicht im geringsten, alles das als zweifellos hinzunehmen, was anschaulich klar ist. Dass bei den Mathematikern es für ebenso unschicklich gilt, sich seiner gesunden Beine zu bedienen, wenn man auf Krücken gehen kann, wie in andern Gesellschaften das Weglassen der Halsbinden oder der Handschuhe, das war ihm völlig unbekannt.

Anderntheils liegt die Schuld jedoch auch in dem Versuche selbst, mit dem Bernhard Becker ganz im Geiste Trendelenburgs so sehr über das Ziel hinaus schoss, dass damit alles Treffliche, was er gegen Euklid vorbrachte, seine Wirkung verlor. Sehr richtig hat zwar Bernhard Becker als den grössten Fehler Euklid's den schon von Herbart gerügten hervorgehoben, dass er sich immer damit begnüge, einen Erkenntnissgrund zu geben, wo man einen Realgrund verlange; d. h. dass von jeder Thesis nur die Richtigkeit nachgewiesen werde, während der innere Zusammenhang der nachgewiesenen Wahrheiten, aus dem ihre Nothwendigkeit hervorgeht, unerörtert bleibt. Und diess klar und schlagend nachgewiesen zu haben, bleibt ein grosses Verdienst von weit grösserer Tragweite wie der Versuch Schlömilchs. Denn sobald ich mir einmal vorgesetzt habe, alle Wahrheiten der Geometrie durch Schlüsse rein logisch aus einigen wenigen Axiomen abzuleiten, ist es im Grunde doch ganz einerlei, ob ich den jedesmal zu erweisenden Satz an die Spitze der ganzen Schlussreihe, durch die er erwiesen wird, stelle, oder nur an den Schluss; ja ich möchte vielmehr das erstere und allgemeinere Verfahren für das zweckmässigere halten. Denn man folgt einer Schlussreihe doch viel lieber, wenn man weiss, wohin sie führen soll.

So vortrefflich Bernhard Becker verstand, die Schäden der alten Methode bloss zu legen, so sind doch seine Versuche, ein Neues und Besseres an die Stelle des Verworfenen zu setzen gänzlich fehlgeschlagen, indem ihn Trendelenburgs Irrlehre zu dem fast unbegreiflichen Irrthume verführte, statt für die Eigenschaften der Gebilde, für diese selbst einen Realgrund zu suchen, und zwar eine Ursache, als welche er die Bewegung anderer Gebilde erkannte, durch welche sie erzeugt werden. Dabei ging er von der sehr weise klingenden Phrase aus: „Um das Wesen der Dinge zu begreifen, muss man in ihr Werden eindringen" (als ob das letztere leichter wäre, wie das erstere).

Es ist jedoch Bernhard Becker nicht zu verargen, dass er die Frage, wie die von Herbart geforderte Einsicht in die Nothwendigkeit einer geometrischen Wahrheit erzielt werden könne, nicht besser zu beantworten wusste, als durch die neuen Ideen seines von ihm so hochgeschätzten Lehrers Trendelenburg, zumal Herbart selbst sich damit begnügt, auf die jeden nachdenkenden Kopf unangenehm berührende Lücke in Euklid's Methode deutlich hingewiesen zu haben.

Und doch war bereits 31 Jahre früher Arthur Schopenhauer in seinem klassischen aber selbst von seinen Verehrern viel zu wenig gekannten Schriftchen „über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde" (3. Auflage 1864) der Sache auf den Grund gegangen. Dieser grösste Denker unseres Jahrhunderts macht in dieser Schrift, womit er zum Doctor der Philosophie promovirt wurde, zuerst darauf aufmerksam, dass im Raume jede Eigenschaft eines Gebildes stets abhängig erscheint von einer andern Eigenschaft desselben, die mit ihr zugleich steht und fällt, so dass jede zugleich als Grund und Folge der andern erscheint.

So ist die Gleichheit zweier Seiten eines Dreiecks zugleich Grund und Folge der Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel. So werden durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel die dritte Seite und die ihr anliegenden Winkel, und umgekehrt, jene durch diese bestimmt. So ist allgemeiner durch die Lage einer Linie gegen irgend eine andere auch ihre Lage gegen jede beliebige dritte bestimmt, und umgekehrt, die Lage der ersten durch die der dritten.

Diese Erkenntniss ist freilich nichts Neues; denn der ganze Euklid lehrt ja eigentlich nichts anderes, als dergleichen Abhängigkeitsgesetze. Neu ist aber die von Schopenhauer zuerst dargelegte Frkenntniss, dass in diesen Abhängigkeitsgesetzen eine eigenthümliche, nur in der Mathematik geltende Gestaltung des Satzes vom Grunde sich ausspreche, welche von ihm der Satz vom Grunde des Seyns genannt wird.

Wenn in einem Euklid'schen Beweise die Gleichheit zweier Seiten eines Dreiecks dadurch dargethan wird, dass man die Gleichheit der ihnen gegenüberliegenden Winkel darthut, so tritt diese Erkenntniss als Erkenntnissgrund für jene auf: man erkennt an der Gleichheit der Winkel die der Seiten. Diess ist aber nur möglich durch die vorher gewonnene Einsicht, dass die Gleichheit zweier Seiten eines Dreiecks durch die der gegenüberliegenden Winkel mit Nothwendigkeit bedingt ist, diese also ein Realgrund von jener ist, der gleichwohl von einer Ursache sehr unterschieden werden muss. Denn die Ursache einer Erscheinung bringt dieselbe als Wirkung hervor und geht ihr in der Zeit voraus, während Seynsgrund und Folge gleichzeitig bestehen und ihre Abhängigkeit eine gegenseitige ist, was bei zwei im Causalzusammenhange stehenden Erscheinungen undenkbar. Der Satz vom zureichenden Grunde tritt also hier in einer besondern Form auf, in welcher er sich etwa so definiren lässt:

„Jede Eigenschaft eines Raumgebildes ist zugleich Grund und Folge anderer Eigenschaften desselben.“ (Schopenhauer selbst hat keine eigentliche Definition des Seynsgrundes gegeben, auch nicht versucht, den Inhalt des Satzes vom Grunde des Seyns im Raume und in der Zeit in ähnlicher Weise auszudrücken, wie er es mit dem Causalitäts-gesetze gethan hat.)

Die Frage nach dem *Realgrunde* einer Eigenschaft eines Raumgebildes kann nun offenbar keinen andern Sinn haben, als die nach dem *Seynsgrunde*, und dieser ist als solcher erkannt, sobald das Gesetz erkannt ist, nach dem sich Seynsgrund und Folge einander gegenseitig bedingen. Dieses Gesetz selber kann in vielen Fällen unmittelbar eingesehen werden, und dann nur hat man *wirkliche Einsicht* in dasselbe, d. h. man ist *überzeugt*. Ein solches Gesetz kann ferner mittelbar erkannt werden durch eine Schlusskette, welche uns von der Richtigkeit desselben in der Weise überzeugt, dass sie uns zwingt, sie zuzugeben, wenn wir Andres, bereits Bewiesenes oder an sich Klares nicht leugnen wollen. Auf solche freilich oft nicht zu vermeidende Art zur Kenntniss eines Gestaltungsgesetzes zu gelangen, gewährt selten Befriedigung. Denn der denkende Mensch will nicht bloss *Gewissheit*, sondern auch *Einsicht* in das, was er erkennt, wenigstens so weit solche möglich ist. Und darum sagt Schopenhauer:

„Dass man aber in der Geometrie nur strebt *convictio* zu bewirken (durch einen Erkenntnissgrund), welche einen unangenehmen Eindruck macht, nicht aber *Einsicht* in den Grund des Seyns, die, wie jede Einsicht, befriedigt und erfreut; diess möchte nebst Anderem ein Grund sein, warum manche sonst vortreffliche Köpfe Abneigung gegen die Mathematik haben.“

Schopenhauer tadelt nun an der Geometrie Euklids, ohne eigentlich eine neue Methode mathematischer Demonstration vorschlagen zu wollen, zweierlei:

1) Dass sie ihre Sätze zwar beweise als über allen Zweifel erhabene Wahrheiten, aber keine eigentliche Einsicht gewähre in die Gesetze, als deren Ausdruck sie erscheinen.

2) Dass sie die einzige mögliche Quelle, aus der diese Einsicht geschöpft werden kann, aufs strengste verschliesse, nämlich *die unmittelbare Erkenntniss durch reine Anschauung*, und nur da sich auf diese, welche allein wahre *Befriedigung* gibt, weil sie allein auch wirkliche *Einsicht* gewährt, berufe, wo eine mittelbare Erkenntniss nicht mehr möglich ist, nämlich bei den sogenannten Axiomen.

Ausserordentlich treffend vergleicht Schopenhauer dieses

Verfahren mit dem eines Wanderers, welcher bei Mondschein mit grossen Beschwerden einen steinigen und dornigen Weg mit vielen Windungen zurücklegt, weil er den breiten guten Fahrweg, dem er bisweilen ganz nahe kommt, für Wasser hält.

Schopenhauer gehört selbst zu denen, welche bei aller Vortrefflichkeit ihres Kopfes eine grosse Abneigung gegen Mathematik und überhaupt gegen sehr abstracte Untersuchungen hegen, und hat sich darum nicht die Mühe genommen, zu zeigen, wie etwa die Geometrie behandelt werden müsse. Nur an einigen Beispielen versuchte er — und, wie mich dünkt mit wenig Geschick — zu zeigen, wie etwa die verlangte Einsicht in den Seynsgrund erlangt werden könne.

Der erste Versuch, den Forderungen Schopenhauers gerecht zu werden, wurde von Herrn C. R. Kosack, Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Nordhausen, gemacht, der in dem Programme dieses Gymnasiums für Ostern 1852 unter dem Titel „Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung", die Lehre von den Parallelen und der Congruenz der Dreiecke im Sinne Schopenhauers darstellte. Diesen Aufsatz hätte aber wohl das Schicksal der meisten Gymnasialprogramme getroffen, hätte der Verfasser nicht dem Philosophen Schopenhauer selbst ein Exemplar geschickt, das durch diesen wieder einigen seiner Freunde und Verehrer mitgetheilt wurde. Auch mir, der damals noch mit dem Studium der Elemente beschäftigt war, ist ein Blick in dieses Programm vergönnt worden. Ich erinnere mich nur noch, dass es mir lebhaftes Interesse erweckt hatte, und ich namentlich die Auffassung des Winkels als Drehungsabstand und die Herbeiziehung der Bewegung als berechtigtes Hilfsmittel zur Entwicklung geometrischer Wahrheiten als einen grossen Fortschritt gegenüber Legendre und Euklid erkannte.

Gerade diess fand jedoch nicht den Beifall des Herrn Dr. Julius Bahnsen, welcher im Jahre 1857 durch das Studium Schopenhauers veranlasst wurde, in der „Schulzeitung für die Herzogthümer Schleswig, Holstein und Lauenburg" einen Artikel zu veröffentlichen unter dem Titel: „Arthur Schopenhauers Urtheil über den Bildungswerth der Mathematik." In demselben suchte der Verfasser durch die Ausstellungen, welche Schopenhauer an der Euklid'schen Geometrie gemacht, den Ausspruch zu begründen, dass der Mathematik jeder Bildungswerth abzusprechen sei, indem derselbe weder dem Inhalte noch der Methode zugesprochen werden könne. Diesen vernichtenden Ausspruch hat übrigens schon 1836 W. Hamilton, Professor der Logik und Metaphysik in Schottland in einer auch ins Deutsche übersetzten sehr gelehrten und gründlichen Recension eines Buches von Whewell in der Edinburgh'-Review mit trefflichen Gründen belegt, die freilich zum Theil nur in England stichhaltig sind, wo dieser Unterricht in einem Einpauken des Euklid besteht.

Auf den Artikel des Herrn Dr. Bahnsen folgte eine leidenschaftliche Erwiederung eines Herrn Kühl, Ingenieur, die eine Replik des Herrn Dr. Bahnsen zur Folge hatte, in welcher auch von dem Programme des Herrn Kosak die Rede ist. Herr Dr. Bahnsen sieht in der Herbeiziehung der Bewegung mit Schopenhauer ein der Geometrie fremdes Element. Er bezieht sich dabei auf einen Ausspruch Schopenhauers, den ich, als besonders characteristisch im Zusammenhange mit einem vorhergehenden hier mittheilen will:

„Die Euklid'sche Demonstrirmethode“, sagt Schopenhauer, „hat aus ihrem eigenen Schoosse ihre treffendste Parodie und Karikatur geboren, an der berühmten Streitigkeit über die Theorie der Parallelen und den sich jedes Jahr wiederholenden Versuchen, das elfte Axiom zu beweisen. Dieses nämlich besagt, und zwar durch das mittelbare Merkmal einer schneidenden dritten Linie, dass zwei sich gegen einander neigende (denn diess eben heisst „kleiner als zwei rechte seyn“), wenn genugsam verlängert, zusammentreffen müssen, welche Wahrheit nun zu complicirt sein soll, um für selbstevident zu gelten, daher sie eines Beweises bedarf, der nun aber nicht aufzubringen ist; eben weil es nichts Unmittelbareres gibt. Mich erinnert dieser Gewissensscrupel an die Schiller'sche Rechtsfrage:

„„Jahre lang schon bedien' ich mich meiner Nase zum Riechen. Hab ich denn wirklich an sie auch ein erweisliches Recht?““ Ja mir scheint, dass die logische Methode sich hier bis zur Niaiserie steigere. Aber gerade durch die Streitigkeiten darüber, nebst den vergeblichen Versuchen, das unmittelbar Gewisse als bloss mittelbar gewiss darzustellen, tritt die Selbständigkeit und Klarheit der intuitiven Evidenz mit der Nutzlosigkeit und Schwierigkeit der logischen Ueberführung in einen Kontrast, der nicht weniger belehrend als belustigend ist.“ — „Mich wundert, dass man nicht vielmehr das 8te Axiom angreift: „„Figuren, die sich decken, sind einander gleich."" Denn das Sichdecken ist entweder eine blosse Tautologie, oder etwas ganz Empirisches, welches nicht der reinen Anschauung, sondern der äusseren sinnlichen Erfahrung angehört. Es setzt nämlich Beweglichkeit der Figuren voraus; aber das Bewegliche im Raum ist allein die Materie. Mithin verlässt diess Provociren auf das sich decken den reinen Raum, das alleinige Element der Geometrie, um zum Materiellen und Empirischen überzugehen."

Dass in dieser letzteren von Dr. Bahnsen gegen Kosack citirten Bemerkung Schopenhauer sich irrt, glaube ich in der vorhergehenden Abhandlung zur Genüge dargethan zu haben.

Die Artikel der Herren Dr. Bahnsen und Kühl wurden Schopenhauer zugesandt und gelangten durch diesen in die Hände meines Vaters, des Bezirksrichter A. Becker in Mainz, und dadurch auch zu meiner Kenntniss. Ich war damals gerade auf das Büchlein von Bernhard Becker aufmerksam gemacht worden, und damit beschäftigt, das Wahre vom Falschen in demselben zu sondern. Jene Streitartikel kamen mir darum gerade recht und veranlassten mich, meine eigenen Gedanken über die Sache niederzuschreiben, zunächst nur meiner selbst wegen. Die fertige Arbeit gab ich jedoch meinem Vater zu lesen, der sie Schopenhauer sendete. Dieser äusserte seinen Beifall darüber und machte seinerseits Dr. Bahnsen darauf aufmerksam, durch den ich veranlasst wurde, sie neun Monate später in derselben Schulzeitung zu veröffentlichen, in der jene Artikel erschienen waren. Den Standpunct, den ich vor nunmehr 13 Jahren in jener Arbeit vertrat, habe ich in der Hauptsache bis heute festgehalten und durch eine erfolgreiche Lehrthätigkeit bewährt gefunden. Was ich dort schrieb, damit es wie alle Schulzeitungen ungelesen und unbeachtet bleibe, heute vor einem andern Publikum mit triftigeren Gründen und eingehender zur Besprechung zu bringen, ist der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlungen.

„Um die Methode der Mathematik zu verbessern wird vorzüglich erfordert, dass man das Vorurtheil aufgebe, die bewiesene Wahrheit habe irgend einen Vorzug vor der anschaulich erkannten, oder die logische, auf dem Satz vom Widerspruch beruhende vor der metaphysischen, welche unmittelbar evident ist, und zu der auch die reine Anschauung des Raumes gehört."

„Die Anschauung ist nicht nur die Quelle aller Erkenntniss, sondern sie selbst ist die Erkenntniss κατ' ἐξοχήν, ist allein die unbedingt wahre, die ächte, die ihres Namens vollkommen würdige Frkenntniss: denn sie allein ertheilt eigentliche Einsicht, sie allein wird vom Menschen wirklich assimilirt, geht in sein Wesen über, und kann mit vollem Grunde sein heissen, während die Begriffe ihm nur ankleben."

Diesen klar für sich sprechenden Worten Schopenhauers möchte ich noch die älteren des grossen Pestalozzi gegenüberstellen, die kürzlich von Fichte wieder in Erinnerung gebracht: „Wenn ich zurücksehe und mich frage: was habe ich denn eigentlich für das Wesen des menschlichen Geschlechtes geleistet, so finde ich: ich habe den obersten Grundsatz des Unterrichts in der Anerkennung der Anschauung, als dem absoluten Fundament aller Erkenntniss festgesetzt und mit Beseitigung aller einzelnen Lehren das Wesen der Lehre und die Urform aufzufinden gesucht, durch welche die Ausbildung unseres Geschlechts durch die Natur selber bestimmt werden muss." Und an anderer Stelle: „Anschauungslose Definitionen erzeugen eine fundamentlose, schwammige Weisheit, die am heitern Himmel schnell stirbt und das Sonnenlicht als das Gift ihres Daseyns erkennen muss."

Ich fordere jeden auf, der die Elemente der Geometrie klar begreift, sich selbst zu fragen, ob er seine Ueberzeugung von der Richtigkeit einer grossen Anzahl ihrer Sätze, namentlich von den meisten stereometrischen, die nicht das Ergebniss längerer Rechnungen sind, noch jetzt auf die langweiligen und ermüdenden Beweise stützt, mit deren überflüssiger Erlernung er in seiner Jugend mehr gequält worden, als belehrt (denn was sie ihn lehren sollten, wusste er ja meist schon vorher), oder auf die unmittelbare Evidenz, welche in manchen Fällen der blosse Anblick der Figur, im andern das Ziehen weniger Hülfslinien hervorbringt?

Wenn aber diese Beweise als unnöthiger Ballast später wieder über Bord geworfen werden, wozu sich mit ihnen abquälen? „Beweise sind überhaupt weniger für die, welche lernen, als für die, welche disputiren wollen. Diese leugnen hartnäckig die unmittelbar begründete Einsicht; nur die Wahrheit kann nach allen Seiten consequent seyn: man muss daher jenen zeigen, dass sie unter einer Gestalt und mittelbar zugeben, was sie unter einer andern Gestalt uud unmittelbar leugnen, also den logisch nothwendigen Zusammenhang zwischen dem Geleugneten und dem Zugestandenen.“

Und in der That ist die Form der Geometrie aus dem Bestreben hervorgegangen, die unzweifelhaften Wahrheiten der Geometrie gegen die Scheinbeweise der Sophisten sicher zu stellen. Ist es aber heutzutage nicht unter Würde der Wissenschaft, ihre Lehren gegen blosse Sophisten, gegen blosses Disputiren schützen zu wollen? Steht doch die Naturwissenschaft — soweit sie nicht von den Mathematikern zu speculativer Mathematik (mathematischer Physik) herabgewürdigt worden — ganz anders da! Ja es ist allen Ernstes meine Meinung, dass erst dann die Mathematik eine wirkliche Wissenschaft geworden, wenn sie nach denselben Principien dargelegt wird, welche man z. B. in der Experimentalphysik befolgt.

Ich weiss wohl, dass sich gegen diese Betonung der Anschauung und Verwerfung der Beweise, wo Anschauung schon überzeugt, vieles einwenden lässt. Ehe ich aber auf diese Einwände eingehe, möchte ich meine Ansicht vor Missverständniss bewahren.

Im Jahre 1843 verfügte die kurhessische Regierung, „dass der Unterricht in der Mathematik aus dem Gebiete der Abstraction entfernt, vielmehr möglichst konkret und anschaulich gehalten, und von den Lehrern der Mathematik soll darauf Bedacht genommen werden, den Schülern zunächst in der Arithmetik eine genügende Uebung zu geben, um nicht so sehr das Wissen als das Können der Schüler, auf dem Gebiete zu erzielen, das dieselben zu beherrschen im Stande sind.“ Ich möchte nicht, dass man meine Ansicht etwa mit der in dieser Verfügung ausgesprochenen identificire. Ich bin im Gegentheil ein abgesagter Feind des blossen Abrichtens, d. h. eines Unterrichts, der nur eine Fertigkeit ohne Verständniss erzielt, wie es offenbar in dieser Verfügung beabsichtigt ist.

Eben weil aber nur die Anschauung ein klares Verständniss gibt, und weil sie befriedigt und erfreut, auch zu weiterer Belehrung anspannt, der lange abstracte Beweis dagegen zwar überführt, die Sache selbst aber meist unverstanden lässt und darum nicht befriedigt, vielmehr gegen alle derartige Belehrung widerspänstig macht, konnte ich keineswegs einen Fortschritt darin erkennen, als später diese Verfügung durch eine entgegengesetzte wieder aufgehoben wurde, die Herrn Professor Grunert in seinem Archiv zu dem Ausspruche veranlasste:

„Nichts kann endlich mehr erfreuen, als dass auf die strenge Beweisführung überall der grösste Werth gelegt und dieselbe als die erste Grundbedingung für fruchtbringendes Gelingen des mathematischen und physikalischen Unterrichts überall anerkannt worden ist."

Es ist fast unbegreiflich, wie man so blind gegen alle Erfahrung sein kann! Ist es nicht eine allbekannte Thatsache, dass zu allen Zeiten in fast allen Schulen der Geometrieunterricht von weitaus der grössten Mehrzahl der Schüler als eine unerträgliche nutzlose Plage angesehen wird, und immer nur bei sehr wenigen einen spärlichen Erfolg erzielt, wenn auch später sich viele einreden lassen, dieses ermüdende Beweisen von Sätzen, die von selbst klar sind wie die Sonne, hätte ihr Denkvermögen geübt, als ob diese Art zu denken zu etwas anderem nützen könne als zum leidigen disputiren? Gelingt es aber da und dort einem tüchtigen Lehrer mehr als die Hälfte seiner Schüler mit fortzureissen und zu tüchtigen Leistungen zu befähigen; ist es dann nicht immer gerade die Anschaulichkeit seines Vortrages und die Kürze seiner möglichst direct auf die Anschauung zurückführenden Beweise, welche vor Allem gelobt wird und der hauptsächlich neben der reichlichen Anwendung auf möglichst practische Aufgaben der Erfolg zu verdanken ist? Dass ich einen Satz recht exact bis auf die ersten Axiome zurückführen kann, beweist ein gutes Abstractionsvermögen und ein gutes Gedächtniss. Befähigt dieses aber zu tüchtigen practischen Leistungen oder auch nur zur Lösung eines geometrischen Problems? Ich sollte meinen, dazu sei vor allem nöthig, dass man die Abhängigkeitsgesetze gründlich verstehe, welche zwischen dem Gegebenen und Gesuchten stattfinden, und es sei dabei ganz gleichgültig, ob diese Abhängigkeitsgesetze aus den Axiomen durch eine lange Schlussreihe gefolgert, oder ob sie unmittelbar aus der Anschauung erkannt worden sind. Sind aber zur Anwendung der geometrischen Sätze auf mathematische oder physikalische Probleme die Beweise überflüssig und zu ihrem Verständniss ganz ohne Nutzen, selbst zur Ueberzeugung von ihrer Richtigkeit entbehrlich, so ist es geradezu von Nachtheil, der Jugend mit ihrer Erlernung die kostbare Zeit zu rauben, abgesehen davon, dass sie manchen, und vielleicht gerade den besten Köpfen, die Lust an der Geometrie gänzlich verleiden.

Man könnte mir nun den Vorwurf machen, dass ich, weil ich die „strenge Beweisführung", wo es sich um unmittelbar evidente Sätze handelt, als überflüssigen und schädlichen Ballast, über Bord werfen möchte, damit überhaupt gegen die „mathematische Strenge" polemisire und der alten hauptsächlich durch Dirichlet verdrängten unexacten Methode in der Analysis das Wort rede. Diess liegt mir aber eben so fern als die Absicht, das blosse Können ohne Verständniss zu befürworten. Unmittelbar evident können Sätze nur sein, wenn die ganze Mannigfaltigkeit der Objecte, von denen sie handeln, durch eine einzige Anschauung vor Augen gebracht werden kann.

So ist der Satz, dass eine Gerade, die auf zweien sich schneidenden in ihrem Schnittpuncte senkrecht steht, auch auf allen andern Geraden in der durch jene bestimmten Ebene senkrecht steht, jedem evident, der sich anschaulich vorstellt, was er aussagt; und diess ist möglich, weil man mit Hinzuziehung der Bewegung die ganze unendliche Mannigfaltigkeit der Gebilde von je einer Geraden, die auf zwei sich schneidenden in deren Schnittpuncte senkrecht steht, und den jedesmal durch den Schnittpunct gehenden Geraden in der durch die beiden ersteren bestimmten Ebene durch eine einzige Figur zur Anschauung bringen kann Wer diesen Satz, sobald er sich vorgestellt, was er aussagt, noch leugnet, will sich nicht belehren lassen, sondern disputiren, und dann mag man ihn meinetwegen durch einen der bekannten Mausefallebeweise überführen, dass er das Behauptete zugeben muss, wenn er die Voraussetzungen zugibt; warum es aber so ist, darüber ist er nachher noch gerade so klug wie vorher.

Dagegen ist es ganz unmöglich, den Satz, „dass von drei ähnlichen Figuren, welche über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als homologen Seiten construirt sind, die über der Hypotenuese gleich ist der Summe der beiden andern," anschaulich zu verstehen. Denn der Begriff ähnlicher Figuren kann unmöglich in seiner ganzen Allgemeinheit anschaulich vorgestellt werden. Hier ist natürlich ein Beweis unerlässlich. Aber auch hier gibt der Beweis nicht mehr als die Ueberzeugung von der Wahrheit des Satzes. Eine Einsicht in die innere Nothwendigkeit desselben kann man nur anschaulich für jeden besonderen Fall erhalten, und diess ist so schwierig, dass wohl nur für den Fall, in welchem die Figuren Quadrate sind, durch passende Wahl der Construction unmittelbare Evidenz erzielt wird.

Ganz etwas Anderes aber sind die Untersuchungen der Analysis. Dort hat man es mit den abstractesten, aller unmittelbaren Anschaulichkeit entbehrenden Untersuchungen zu thun; und eben darum hat man dort, um nicht fortwährend zu irren, die grösste Aufmerksamkeit darauf zu richten, dass die Sätze nur da angewendet werden, wo alle Voraussetzungen zutreffen, unter denen sie allein nur richtig sind. Es ist darum ein nicht genug anzuschlagendes Verdienst des grossen Dirichlet, auf alle die Fehler aufmerksam gemacht zu haben, die sich frühere Analytiker so vielfältig haben zu schulden kommen lassen, und neue Wege gezeigt zu haben, durch welche solche Fehler vermieden werden können, ohne dass dadurch dem Fortschritte der Untersuchung ein überflüssiger Hemmschuh angelegt wird. Aber Dirichlet ist nicht bloss durch seine ausserordentliche Strenge, die er immer am richtigen Platze anwendet, so gross, er ist es auch durch die ausserordentliche Anschaulichkeit und Klarheit, welche er durch seine neue Auffassung des bestimmten Integrals in diese schwierigen Gebiete der Mathematik eingeführt hat.

Wenn ich darum Beweise überall da für vollständig überflüssig, ja hemmend halte, wo es sich um Sätze handelt, denen unmittelbare Evidenz zukommt, weil sie die sachgemässe Entwickelung der geometrischen Wahrheiten fast unmöglich machen, so hindert diess keineswegs, in allen andern Fällen die grösste Strenge zu verlangen, und gerade die Gewohnheit, immer an der Hand der Anschauung zu gehen, und alle Begriffe durch Anschauungen zu belegen, macht es leicht, diese Strenge auch immer zu beobachten.

Ich kann mich nicht enthalten, durch ein recht eklatantes Beispiel zu zeigen, wie im Gegentheil die Gewohnheit, Begriffe nur durch ihre Definitionen festzustellen, und von aller Anschauung zu abstrahiren, selbst grosse Mathematiker verleitet, bisweilen Sätze als von selbst verständlich anzusehen, welche nicht einmal richtig sind. Ich meine hier besonders einen Satz von Cremona, welcher, obgleich falsch, doch auf die Autorität dieses grossen Geometers hin in jüngster Zeit von einem nicht minder bedeutenden Förderer der Wissenschaft sogar benutzt wurde, um einen Satz zu beweisen, welcher unmittelbar evident ist.

Bekanntlich hat Steiner seine erfolgreichen geometrischen Untersuchungen an die Thatsache angeknüpft, dass wenn eine Gerade von irgend vier Strahlen eines Strahlenbüschels a, b, c, d in den Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ getroffen wird, immer die Relation besteht:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\mathfrak{c}} = \frac{\sin(a, b)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(d, c)},$$

und dass umgekehrt, wenn die Strahlen eines Strahlenbüschels und die Puncte einer Geraden so auf einander bezogen werden, dass zwischen je vier Strahlen a, b, c, d und den entsprechenden Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die obige Relation besteht, die Gerade immer gegen den Strahlenbüschel in eine solche Lage gebracht werden kann, dass alle Strahlen durch die ihnen entsprechenden Puncte gehen. Steiner hat diese Beziehung zwischen den Puncten einer Geraden und den Strahlen eines Büschels dadurch bezeichnet, dass er sagte, die Gerade (Punctreihe erster Ordnung) und der Büschel seien zu einander *projectivisch*. Ebenso nennt er zwei Geraden zu einander projectivisch, wenn zwischen je vier Puncten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ der einen und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ der andern die Relation besteht

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} : \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1},$$

und von dieser Beziehung hat Steiner den Ausdruck projectivisch hergenommen, weil zwei solche Geraden immer in eine Lage gebracht werden können, in welcher die Puncte der einen die Centralprojectionen der andern sind. In einer solchen Lage heissen die projectivisch auf einander bezogenen Geraden *perspectivisch*; in jedem andern Falle befinden sie sich in *schiefer* Lage. Steiner und die übrigen Schöpfer der sog. synthetischen Geometrie und der Geometrie der Lage haben nun eine Menge von Bedingungen gezeigt, unter welchen z. B. zwei Punctreihen erster Ordnung so aufeinander bezogen sind, *dass jedem Puncte der einen ein* und nur ein Punct der andern entspricht, und immer ergab sich, dass diese Beziehung dann die der Projectivität war.

Diess hat den grossen Geometer Cremona in Mailand verführt, die steinersche Beziehung der Projectivität einfach dadurch zu definiren, dass er sagt: zwei Grundgebilde erster Ordnung (Punctreihen und Strahlenbüschel) sind projectivisch, wenn jedem Element (Punct oder Strahl) der einen ein, und nur ein Element der andern entspricht. Hätte Cremona an die Anschauung appellirt, so würde er bald gefunden haben, dass er damit durchaus nicht denselben Begriff feststellt, wie Steiner, sondern etwas ganz Unbestimmtes. Man denke sich z. B. irgend eine überall convexe, geschlossene, aber von einer Ellipse verschiedene Curve und an derselben zwei Tangenten. Lässt man nun eine dritte Tangente an dieser Curve herumgleiten und bezieht jedesmal deren Schnittpuncte mit den beiden andern auf einander, so erhält man auf denselben zwei Punctreihen, welche nach der Definition von Cremona projectivisch wären, nach der von Steiner es aber nicht sind. Denn dieser hat bewiesen, dass die Verbindungsstrahlen zweier schief liegender projectivischer Geraden immer einen Kegelschnitt berühren müssen.

Gleichwohl hat Cremona scheinbar bewiesen, dass auch nach seiner Definition der Projectivität zweier Punctreihen zwischen je vier Puncten der einen, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, und den entsprechenden $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ der andern die Relation bestehe

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} : \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1}.$$

Dieser Beweis stützt sich auf den Satz: Wenn zwei veränderliche Grössen x und y so von einander abhängen, dass jedem Werthe der einen ein und nur ein Werth der andern entspricht, so ist ihre Abhängigkeit von einander ausdrückbar durch eine Gleichung von der Form:

$$a x y + b x + c y + d = 0.$$

Dieser Satz ist aber in dem Sinne, in welchem ihn Cremona nimmt, durchaus falsch. Denn erstlich ist es gar nicht nöthig, dass diese Abhängigkeit überhaupt in jedem Falle durch eine Gleichung ausdrückbar sei, und dann ist eine eben solche Beziehung zwischen x und y auch z. B. durch die Gleichung

$$a x^m y^n + b x^m + c y^n + d = 0,$$

wo m und n positive ungerade Zahlen bezeichnen, ausgedrückt, wenn man sich auf die reellen Werthe von x und y beschränkt, wie diess unbedingt gefordert werden muss, sobald von wirklichen Punctreihen erster Ordnung die Rede ist.

Aus der Lehre von den Functionen einer complexen Variabeln folgt zwar, wenn $w = u + v\sqrt{-1}$ der Art von $z = x + y\sqrt{-1}$ abhängt, dass 1) überall der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dy} = \sqrt{-1}\,\frac{dw}{dx}$$

Genüge geschieht;

2) jedem Werthe von z e i n und n u r e i n Werth von w entspricht, und zwar dem Werthe $z = \infty$, der Werth $w = a = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, und dem Werthe $z = c$, der Werth $w = \infty$:

$$w = \frac{b}{z - c} + a,$$

wo die Constante b bestimmt werden kann durch irgend eine weitere Bedingung. Aus dieser Gleichung folgt aber

$$wz - cw - az + ac - b = 0,$$

und nach z aufgelöst:

$$z = \frac{b}{w - a} + c$$

d. h. jedem Werthe von w entspricht dann auch ein und nur ein Werth von z.

Der obige von Cremona benutzte Satz ist also richtig, sobald es sich um Functionen einer complexen Variabeln in dem von R i e m a n n festgestellten Sinne handelt. Bleibt man aber in dem Gebiete der eigentlichen Geometrie, so kann doch unmöglich von imaginären Puncten einer Geraden gesprochen werden, wenn man auch in gewissem Sinne von imaginären Durchschnittspuncten derselben mit Curven und Flächen höherer Ordnung zu sprechen berechtigt sein mag. E s k a n n a l s o d a n n n a c h d e r D e f i n i t i o n v o n C r e m o n a g a r n i e c o n s t a t i r t w e r d e n, o b z w e i P u n c t r e i h e n w i r k l i c h p r o j e c t i v i s c h s e i e n. Betrachtet man freilich, wie einige Geometer thun, auch jedes Paar zusammengehöriger complexer Werthe von x und y welche einer Gleichung f (x, y) = 0 Genüge leisten als Repräsentanten eines Punctes der durch die Gleichung f (x, y) = 0 repräsentirten Curve, welchen Puncten dann auch keine Spur von Realitat oder nur Vorstellbarkeit zugesprochen werden kann, so könnte man allenfalls die Cremona'sche Definition sich gefallen lassen. Damit hätte man aber dann das Gebiet der eigentlichen Geometrie verlassen, um sich in ein Gebiet unfruchtbarster Speculation zu begeben, wohin sich nur verirren kann, wem das Bewusstsein abhanden gekommen, dass die Urquelle aller unserer Erkenntniss allein die Anschauung ist, und eine Erkenntniss, der keine Anschauung entspricht, nichts sein kann als eine leere Form ohne allen Inhalt.

Wenn aber, wird man sagen, selbst Männer wie Cremona bisweilen etwas für selbstverständlich nehmen, was nicht einmal wahr ist: woran soll man sicher erkennen, ob das, was man für selbstverständlich hält, auch wirklich wahr ist, und nicht auf einer Täuschung beruht? Sind doch zu allen Zeiten von Philosophen und anderen Gelehrten Thesen als unmittelbar gewiss aufgestellt worden, die sich später als Irrthümer erwiesen haben. Wie soll die Wissenschaft nun gegen solche Irrthümer und petitiones principii sicher gestellt werden, wenn nicht durch Beweise? Um diese Frage zu beantworten, erlaube ich mir eine andere zu stellen: Zu allen Zeiten hat man Experimente und Beobachtungen gemacht, und dabei entweder nothwendige Daten übersehen oder andere Beobachtungsfehler gemacht und ist so zur Aufstellung von falschen Gesetzen gekommen; wodurch stellt sich nun die exacte Naturforschung gegen dergleichen Irrthümer sicher? Etwa durch Beweise oder vielmehr durch Genauigkeit und Sorgfalt die alle Daten beachtet und alle Fehlerquellen berücksichtigt?

Ist das der Naturforschung mit der viel schwieriger zu bewältigenden empirischen Anschauung möglich, warum soll der Geometer vor der sorgfältigen Prüfung der ihm unmittelbar gegebenen immer zugänglichen reinen Anschauung zurückschrecken? Warum soll, während der Physiker festen Fusses am Leitfaden der Beobachtung weiter schreitet, der Geometer allein sich seine gesunden Beine abschneiden und auf Krücken gehn?

Seht nur, was Ihr betrachtet, recht genau an, und lasst kein

Datum unbeachtet, so werdet ihr nie einen Satz als unmittelbar evident erkennen, der es nicht wirklich ist!

Ja bedient Euch endlich einmal des besten Theils Eurer Erkenntnisskräfte, der anschauenden Erkenntniss, um Eure Urtheile daran zu prüfen. Ihr werdet trotz Eurer Gewohnheit, zu jedem geometrischen Satz einen Beweis zu suchen, manches Urtheil darunter finden, das Ihr andern bisher getreulich nachgesprochen, weil ihr es für unmittelbar gewiss hieltet, und das sich bei näherer Prüfung doch als eine unberechtigte petitio principii herausstellen wird. Ich werde vielleicht an einem andern Orte auf mehrere solche allgemein als sicher geltende und doch ganz unberechtigte Urtheile zu sprechen kommen, die mich hier von der Sache zu weit abführen würden.

Aber nicht bloss in dieser Hinsicht kann die Geometrie von der Physik lernen, sondern noch in einem andern ebenso wichtigen. Wie die Hauptaufgabe der Physik in ihrer allgemeineren Bedeutung darin besteht, die Gesetze ausfindig zu machen, von denen die Zustände der Dinge und ihre Veränderungen abhängen, also in der genaueren Darlegung des Gesetzes der Kausalität, das die ganze äussere Welt beherrscht, so sollte die Aufgabe der Geometrie bestehen in der genaueren Darlegung des Satzes vom Grunde des Seyns im Raume, d. h. der Gesetze, nach welchen die Eigenschaften geometrischer Gebilde sich gegenseitig bedingen. Alle ihre Sätze sollten nur solche Gesetze aussprechen, wie die Sätze der Physik nur Naturgesetze. So lange ein Satz noch keinen Einblick lässt in das Gesetz aus dem er folgt, ist er nur was Halbes, wie der Satz: „Parallele zwischen Parallelen sind gleich gross,“ wie alle Sätze, die sich nicht umkehren lassen. Erst mit allen Umkehrungen zusammengefasst, wird ein geometrischer Lehrsatz zu einem Raum- oder Gestaltungsgesetz. Die in den räumlichen Gebilden zu Tage tretenden Gestaltungsgesetze ausfindig zu machen und klar darzulegen, sei es mit Berufung auf unmittelbare Evidenz, wo diese möglich, sei es durch Beweise, wo es nicht anders geht: Diess scheint mir die wesentlichste und wichtigste Aufgabe der Geometrie zu sein. Ist ihr in einer sachgemässen Weise Genüge geschehen, so reihen sich die andern Aufgaben der Geometrie, deren eine der wichtigsten die Untersuchung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, d. h. der geometrischen Verwandtschaften, naturgemäss an, und man hat nicht mehr nöthig, die Geometrie der Lage von der des Masses in so scharfer Weise zu trennen, wie diess heutzutage geschieht. Die oben aufgestellte Forderung an die Geometrie ist, meines Wissens, in dieser Form noch nie ausgesprochen worden. Gleichwohl ist in ihrem Sinne namentlich von Steiner bereits ausserordentlich vieles geleistet worden, und ich möchte fast sagen, dass erst mit ihm die Geometrie angefangen hat, eine Wissenschaft zu werden. Denn Euklid lieferte nur ein Aggregat unumstösslich gewisser Einzelerkenntnisse ohne jede sachgemässe Verbindung.