LASKA

FORMELN

1

1741.

1741

Inw

kat

SAMMLUNG

VON

FORMELN

DER REINEN UND ANGEWANDTEN

MATHEMATIK

VON

DR. W. LÁSKA.

ERSTE LIEFERUNG.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1888.

VORREDE.

Indem der Verfasser dieses Werk dem mathematischen Publicum übergiebt, hofft er einem fühlbaren Mangel der mathematischen Literatur abgeholfen zu haben. Trotzdem dass die grösste Sorgfalt auf eine genaue Correctur angewendet wurde, so bittet doch der Verfasser um ein gütiges und baldiges Anzeigen etwaiger Versehen, damit dieselben in der Schluss-Lieferung zur Berichtigung gelangen können. Manche willkommene Ergänzung dürfte man in meiner Aufgabensammlung zur algebraischen Analysis finden (G. Neugebauer in Prag). Endlich sei mir gestattet, der Verlagsbuchhandlung für ein liberales Entgegenkommen bei der so schwierigen Correctur meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Prag, im November 1888.

Dr. W. Láska.

INHALT.

I. Algebraische Analysis.

Integral-Tafeln. B. Bestimmte Integrale.

Anhang.

Einige numerische Tafeln.

§. 1.

Cyklometrische Functionen.

NB. Die folgenden Gleichungen sind wegen ihrer Vieldeutigkeit vorsichtig zu gebrauchen.

1) $$arc\sin x = 2\,arc\sin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\,arc\sin 2x\sqrt{1-x^2}$$
$$= arc\cos\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - arc\cos x = arc\,tgn\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 2\,arc\,tgn\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1}{2}\,arc\,tgn\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$
$$= arc\sec\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,cosec\frac{1}{x}.$$

2) $$arc\cos x = 2\,arc\cos\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \frac{1}{2}\,arc\cos(2x^2-1) = arc\sin\sqrt{1-x^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - arc\sin x = arc\,tgn\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = 2\,arc\,tgn\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
$$= \frac{1}{2}\,arc\,tgn\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1} = arc\sec\frac{1}{x} = arc\,cosec\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $$arc\,tgn\,x = 2\,arc\,tgn\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{2}\,arc\,tgn\frac{2x}{1-x^2}$$
$$= arc\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 2\,arc\sin\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}}$$
$$= \frac{1}{2}\,arc\sin\frac{2x}{1+x^2} = arc\cos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= 2\,arc\cos\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{2}\,arc\cos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - arc\cot x = arc\cot\frac{1}{x} = arc\sec\sqrt{1+x^2}$$
$$= arc\,cosec\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

4) $$arc\sin x \pm arc\sin y = arc\sin\left\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right\}$$

5) $arc\cos x \pm arc\cos y = arc\cos\{xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\}$

6) $arctgn\, x \pm arctgn\, y = arctgn\left\{\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right\}$

7) $arc\sin x \pm arc\cos y = arc\sin\{xy \pm \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\}$
$= arc\cos\{y\sqrt{1-x^2} \mp x\sqrt{1-y^2}\}$

8) $arc\,tgn\, x \pm arc\cot y = arc\,tgn\,\frac{x \pm y}{1 \mp xy} = arc\cot\frac{y \mp x}{xy \pm 1}$

9) In Bezug auf die Vieldeutigkeit merke man:

$arc\sin x = n\pi + (-1)^n |arc\sin x|$

$arc\cos x = 2n\pi \pm |arc\cos x|$

$arc\,tgn\, x = n\pi + |artgn\, x|$

$arc\,cotgn\, x = n\pi + |arc\,cotgn\, x|$

10) $arc\sin(-x) = -arc\sin x$

$arc\cos(-x) = \pi - arc\cos x$

$arc\,tgn(-x) = -arc\,tgn\, x$

$arc\,cotg(-x) = -arc\,cotgn\, x$

Zusatz zu §. 1.

Bezüglich der Vieldeutigkeit der cyklometrischen Functionen mögen folgende Andeutungen genügen: Sei u der Bogen des ersten Quadranten, x sein Sinus, so gelten folgende Gleichungen:

$$\sin u = x \qquad u = arc\sin x$$

$$\cos u = \sqrt{1-x^2} \qquad u = arc\cos\sqrt{1-x^2}$$

$$tgn\, u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad u = arc\,tgn\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

Allgemein sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sin w = x$$

in der Formel

$$w = \frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - arc\sin x\right) \pm 2\varkappa\pi$$

$$\varkappa = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

weil die Bögen

$$\frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \pm 2\varkappa\pi$$

alle denselben Sinus haben. Aus demselben Grunde haben wir allgemein

$$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = \frac{\pi}{2} \mp \left\{\frac{\pi}{2} - arc\,sin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)\right\} \pm 2\varkappa\pi$$

zu schreiben, weil der Bogen möglicherweise über den Quadranten hinausgehen kann. Sei

$$\begin{aligned} sin\,u &= x \quad \text{also} \quad u = arc\,sin\,x \\ sin\,v &= y \qquad\qquad\; v = arc\,sin\,y, \end{aligned}$$

so wird im letzteren Falle $cos\,(u+v)$ negativ. Nun ist

$$cos\,(u+v) = \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2} - x\,y = \frac{1-(x^2+y^2)}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}+x\,y}$$

wir haben demnach

$$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = arc\,sin\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\},$$

wenn

$$x^2+y^2<1$$

$$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = \pi - arc\,sin\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\},$$

wenn

$$x^2+y^2>1.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$arc\,tgn\,x + arc\,tgn\,y = arc\,tgn\,\frac{x+y}{1-x\,y} \qquad x\,y<1$$

$$arc\,tgn\,x + arc\,tgn\,y = \pi - arc\,tgn\,\frac{x+y}{1-x\,y} \qquad x\,y>1.$$

Ueberhaupt hat man bei jedem Problem alle Umstände sorgfältig in Betracht zu ziehen und zu beachten, dass die im §. 1 aufgestellten Werthe nur für die Winkel im ersten Quadranten gelten. Wie die Formeln zu gebrauchen sind, mögen folgende zwei Beispiele zeigen.

I. Man beweise, dass

$$arc\,sin\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \frac{1}{2}\,arc\,sin\,x = \frac{\pi}{2}.$$

Setze

$$arc\,sin\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p, \quad \frac{1}{2}\,arc\,sin\,x = q,$$

so wird

$$p+q = \frac{\pi}{2}$$

und zugleich

$$1 = \sin 2p + 2\sin^2 q;$$

diese Gleichungen müssen zugleich bestehen, wenn die obige Relation gültig sein soll. Wir haben:

$$p = \frac{\pi}{2} - q,$$

und damit

$$1 = \sin(\pi - 2q) + 2\sin^2 q$$
$$1 = \cos 2q + 2\sin^2 q,$$

d. h.

$$\cos 2q = 1 - 2\sin^2 q,$$

dies ist aber eine bekannte Relation.

II. Man bestimme x aus

$$\operatorname{arc\,tgn} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc\,tgn} \frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{12}.$$

Sei

$$\operatorname{arc\,tgn} \frac{1}{x-1} = \alpha, \quad \operatorname{arc\,tgn} \frac{1}{x+1} = \beta,$$

so wird

$$\operatorname{tgn}(\alpha - \beta) = \frac{2}{x^2},$$

also

$$\alpha - \beta = \operatorname{arc\,tgn} \frac{2}{x^2} = \frac{\pi}{12}$$

oder

$$\frac{2}{x^2} = \operatorname{tgn} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3},$$

woraus

$$x = \pm(1 + \sqrt{3})$$

folgt.

§. 2.

Näherungswerthe.

1) Bis auf die 3ten Potenzen von α ist:

$$\alpha = \sin\alpha \sqrt[3]{\sec\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \sqrt[3]{\cos\alpha} = \cos\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tgn}\alpha = 3\alpha - 2\sin\alpha$$

$$\frac{\operatorname{tgn}\alpha}{\alpha} = 3 - 2\sqrt[3]{\cos\alpha}$$

2) $\cos\frac{\pi}{2}\alpha = 1 - \dfrac{\alpha^2}{\alpha + (1-\alpha)\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{3}}}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Maximalfehler} \pm 0{,}0002 \\ \text{(Com. Rend. 1880, p. 305)}\end{array}\right.$

3) $\log(1+x) = x\dfrac{6+x}{6+4x} - \varrho\dfrac{x^4}{1-x} \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{4}$

4) $e^x = \dfrac{6+2x}{6-4x+x^2}\cdot\dfrac{1}{1-\varrho x^4} \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{24}$

5) $(1+x)^n = \dfrac{6+(4+2n)x-\varrho x^4}{6+4(1-n)x-n(1-n)x^2} \qquad 0<\varrho<\frac{1}{4}$

6) $\sin x = x\dfrac{60-7x^2}{60+3x^2} + \varrho x^7 \qquad 0<\varrho<\frac{1}{4200}$

7) $\cos x = \dfrac{12-5x^2}{12+x^2} + \varrho x^6 \qquad 0<\varrho<\frac{1}{480}$

8) $\operatorname{arctgn} x = x\dfrac{15+4x^2}{15+9x^2} - \varrho x^7 \qquad 0<\varrho<\frac{1}{43}$

9) $\arcsin x = x\dfrac{60-17x^2}{60-27x^2} + \varrho\dfrac{x^7}{1-x^2} \qquad 0<\varrho<\frac{1}{40}$

10) $\log(n+x) = \log n + \dfrac{x}{n} - \dfrac{x^2}{2(n+\theta x)^2} \qquad 0<\theta<1$

11) Ist $\varphi < 2^0\,15$, so kann man setzen:

$\log\sin\varphi = \log\varphi'' + a - \frac{1}{3}c\log\cos\varphi$

$\log\operatorname{tgn}\varphi = \log\varphi'' + a + \frac{2}{3}c\log\cos\varphi \qquad a = \log 1'' = 4{,}6855749$

$\log\operatorname{cotgn}\varphi = -\log\varphi'' + b - \frac{2}{3}c\log\cos\varphi \qquad b = c\,a \quad = 5{,}3144251$

Hier sind die Log. die gewöhnlichen.

§. 3.

Grenzwerthe.

Sei $\lim\delta = 0$, $\lim\omega = \infty$, a eine reelle Zahl, φ eine beliebige Function, so wird:

1) $\lim(u\,v) = \lim u \lim v$

2) $\lim\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{\lim u}{\lim v}$

3) $\lim u^v = (\lim u)^{\lim v}$

4) $\lim\dfrac{(1\pm\delta)^m - 1}{\delta} = \pm m$

5) $\lim \frac{a^\delta - 1}{\delta} = \log a$

6) $\lim (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = \lim \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{2\delta}} = e$

7) $\lim \frac{\sin a\delta}{\delta} = \lim \frac{\operatorname{tgn} a\delta}{\delta} = \lim \frac{\arcsin a\delta}{\delta} = \lim \frac{\operatorname{arc\,tgn} a\delta}{\delta} = a$

8) $\lim \frac{\log(1+a\delta)}{\delta} = a$

9) $\lim \delta \log \delta = 0$

10) $\lim \frac{\omega}{\sqrt[\omega]{\omega!}} = e$

11) $\lim \left\{\omega\left(a^{\frac{1}{\omega}} - 1\right)\right\} = \log a$

12) $\lim \frac{\varphi(\omega)}{\omega} = \lim \{\varphi(\omega+1) - \varphi(\omega)\}$

13) $\lim \frac{\varphi(\omega+1)}{\varphi(\omega)} = \lim [\varphi(\omega)]^{\frac{1}{\omega}}$

14) $\lim \omega \left\{\left(\sqrt[\omega]{a} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt[\omega]{a} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[\omega]{a} - 1\right)^3 + \cdots\right\} = \log a$

15) $\lim \frac{a^x + (a+b)^x + \cdots [a+(\omega-1)b]^x}{\omega^{x+1}} = \begin{cases} \frac{b^x}{x+1} & x > +1 \\ \infty & x \leqq 1 \end{cases}$

16) $\lim \delta \{\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \cdots \varphi(b-\delta)\} = \int_a^b \varphi(x)\,dx$

17) $\lim \frac{1}{\omega}\{\sqrt{\omega - 1} + \sqrt{\omega - 2^2} + \sqrt{\omega - 3^2} + \cdots\} = \frac{\pi}{4}$

Zusatz zu §. 3.

Ein Beispiel über die Auswerthung der Grenzwerthe: $\lim \delta = 0$.

$$\lim \left\{\frac{\pi}{4\delta} - \frac{\pi}{2\delta(e^{\pi\delta}+1)}\right\} = \lim \frac{\pi}{4\delta}\left\{1 - \frac{2}{e^{\pi\delta}+1}\right\}$$

$$= \lim \frac{\pi}{4\delta}\left\{\frac{e^{\pi\delta}-1}{e^{\pi\delta}+1}\right\} = \lim \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{e^{\pi\delta}-1}{\pi\delta}\cdot\frac{1}{e^{\pi\delta}+1} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Seien α und β zwei beliebige positive Grössen und $\beta < \alpha$. Setzt man

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \qquad \beta_1 = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\alpha_\varkappa = \tfrac{1}{2}(\alpha_{\varkappa-1} + \beta_{\varkappa-1}) \qquad \beta_\varkappa = \sqrt{\alpha_{\varkappa-1}\beta_{\varkappa-1}}$$

Sei ferner

$$\frac{\alpha_{\varkappa+1} - \beta_{\varkappa+1}}{\alpha_\varkappa - \beta_\varkappa} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_\varkappa,$$

so wird

$$\alpha_n - \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - \beta)\,\varepsilon_0\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}$$

und

$$lim\,(\alpha_n - \beta_n) = 0,$$

d. h. die Grössen α_n und β_n convergiren gegen denselben Werth. das sogenannte arithmetisch geometrische Mittel von α und β welches man mit $M(\alpha\beta)$ zu bezeichnen pflegt.

Vergl. Gauss, Gesamm. Werke II.

§. 4.

Die Mittelwerthe.

1) Sei $\delta = \dfrac{b-a}{n}$,

so ist

$$\mathfrak{M} f(x) \Big/_a^b = lim\,\frac{f(a) + f(a+\delta)\cdots + f(a + \overline{n-1}\,\delta)}{n}$$

2) $\mathfrak{M}\,x^p = \dfrac{x^p}{p+1}$ p positiv und ganz.

3) $\mathfrak{M}\,a^x = \dfrac{a^x - 1}{x\,log\,a}$

4) $\mathfrak{M}\,sin\,x = \dfrac{1 - cos\,x}{x}$ $\qquad \mathfrak{M}\,sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\dfrac{1 - cos\,2x}{x}$.

5) $\mathfrak{M}\,cos\,x = \dfrac{sin\,x}{x}$ $\qquad \mathfrak{M}\,cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\dfrac{sin\,2x}{x}$.

6) $\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{log\,(1+x)}{x}$

7) $\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \dfrac{1}{x}\,arctagn\,x$

8) $\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{1}{x}\,arcsin\,x$

9) $(\alpha - \beta)\mathfrak{M}[f(x)] = \int\limits_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$ α und β können variabel sein.

Theilt man die Fläche U in n Rechtecke $\triangle x . \triangle y$, so ist $U = n \triangle x \triangle y$

$$U\mathfrak{M}f(xy) = \int\int f(xy)\,dx\,dy$$

Die Integrationsgrenzen sind durch die Begrenzung des für x und y gegebenen Spielraumes bestimmt.

Vergleiche: Schlömilch, Handbuch der algebr. Analysis und Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, S. 260.

§. 5.

Functionen complexer Variabelen.

NB. Die in [ ] stehenden Ausdrücke sind mehrdeutig.

1) $[a^x] = a^x[1^x] = e^{x[lg\,a]}$ $\left.\begin{matrix} m \\ n \\ k \end{matrix}\right\}$ eine beliebige $+$ ganze Zahl.

2) $1^x = e^{x.2n\pi i}$ $\qquad i = \sqrt{-1} \quad \sqrt{\pm i} = \dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$

3) $1^{xi} = e^{-2n\pi x}$

4) $i^i = e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \qquad i^{-i} = e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$

5) $e^{\pm in\varphi} = (\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi) = (\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n$

6) $\sqrt[n]{\cos\alpha \pm i\sin\alpha} = \cos\dfrac{1}{n}(\alpha + k\pi) \pm i\sin\dfrac{1}{n}(\alpha + k\pi)$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}.$$

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi$$

$$\sqrt[n]{\pm i} = \cos\frac{4k+1}{2n}\pi \pm i\sin\frac{4k+1}{2n}\pi.$$

$$\sqrt{1} = +1, -1 \qquad \sqrt{-1} = +i \; -i$$

$$\sqrt[3]{1} = +1,\ -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3},\ -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1,\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3},\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{1} = +1,\ -1,\ +i,\ -i,$$

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\sqrt[5]{1} = +1,\quad \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1,\quad \frac{1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Die Gleichung

$$x^{2n} - 2x^n \cos\varphi + 1 = 0$$

hat die Wurzeln

$$x = \cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}.$$

7) $\log 1^x = 2(nx+m)\pi i$

8) $1^x . 1^y = \cos 2(mx+ny)\pi + i\sin 2(mx+ny)\pi$

9) $\pi = 2\,\frac{\log i}{i} = \frac{2}{i}\log\frac{1+i}{1-i}$

10) $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}\}$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}\{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}\}$

$$tgn\,\varphi = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2\varphi i}-1}{e^{2\varphi i}+1}$$

11) $arc\sin x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ Vergl. §. 1, 9.

$$\left\{ x^2 > 1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{x^2-1} - x\right) \right.$$

$$arc\cos x = -\frac{1}{i}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \pi + \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$arc\,tgn\,x = \frac{i}{2}\log\frac{1-ix}{1+ix} = \frac{i}{2}\log\frac{i+x}{i-x} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}$$

12) $$\varphi = \frac{1}{i}\log(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{i}{2}\log\frac{1-i\,tgn\,\varphi}{1+i\,tgn\,\varphi}$$

13) $$\log\frac{1+mi}{1+ni} = \frac{1}{2}\log\frac{1+m^2}{1+n^2} + i\,\{arc\,tgn\,m - arc\,tgn\,n\}$$

14) $$arc\sin x i = -\frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

$$= \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \qquad x^2 < 1$$

15) $$arc\cos x i = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \qquad x^2 < 1$$

16) $$arc\,tgn\,x i = -\frac{1}{2i}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2i}\log\frac{1-x}{1+x} \qquad x^2 < 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\log\frac{-x-1}{+x+1} \qquad x^2 > 1$$

$$arc\,cotgn\,x i = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i}\log\frac{1-x}{1+x} \qquad x^2 < 1$$

$$= \frac{1}{2i}\log\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{2i}\log\frac{x-1}{x+1} \qquad x^2 > 1$$

17) $$arc\cot(xi) = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \qquad x^2 < 1$$

$$= -\frac{i}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \qquad x^2 > 1$$

18) $$e^{x+iy} = e^x\cos y + i e^x \sin y$$

19) $$a^{x+iy} = a^x\cos(y\log a) + i a^x \sin(y\log a)$$

20) $$\log(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\,arc\,tgn\,\frac{y}{x}\begin{cases}\pm 2in\pi & x+\\ \pm(2n+1)i\pi & x-\end{cases}$$

21) $$\sin(x+iy) = \frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x + i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x$$

22) $$\cos(x+iy) = \frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x - i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x$$

23) $$tgn(x+iy) = \frac{2\sin 2x + i\,(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x}$$

24) $ctgn(x+iy) = \dfrac{2\sin 2x - i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$

25) $sec(x+iy) = 2\,\dfrac{(e^y + e^{-y})\cos x + i(e^y - e^{-y})\sin x}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x}$

26) $cosec(x+iy) = 2\,\dfrac{(e^y + e^{-y})\sin x - i(e^y - e^{-y})\cos x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$

27) Sei

$$2S = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$
$$2T = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} - \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$
$$R = S + \sqrt{S^2 - 1},$$

so wird:

$$arc\sin(x+iy) = arc\sin T + i\log R$$
$$arc\cos(x+iy) = arc\cos T - i\log R.$$ Vergl. §. 1, 9.

28) Sei

$$-P = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} \qquad Q = \frac{x^2 + (1+y)^2}{x^2 + (1-y)^2},$$

so wird:

$$arc\,tgn(x+iy) = \frac{1}{2} arc\,tgn\,P + \frac{i}{4}\log Q \qquad x^2+y^2<1$$
$$= \frac{1}{2}\{\pi - arc\,tgn(-P)\} + \frac{i}{4}\log Q \quad x^2+y^2>1$$
$$arc\,ctgn(x+iy) = \frac{1}{2}\left\{\pi - arc\,ctgn\left(+\frac{1}{P}\right)\right\} - \frac{i}{4}\log Q \quad x^2+y^2<1$$
$$= \frac{1}{2} arc\,ctgn - \frac{1}{P} - \frac{i}{4}\log Q \qquad x^2+y^2>1$$

Zusatz zu §. 5.

War bei den cyklometrischen Functionen eine grosse Vorsicht nöthig, so ist hier die allergrösste am Platze. Es dürfte sich bei einem jeden Problem die Untersuchung auf dem Wege der Funkentheorie empfehlen, wozu sich in der Functionentheorie das Nöthige findet.

Wohin der unvorsichtige Gebrauch führen kann, zeigt folgendes Beispiel.

Es ist

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad e^{1+2n\pi i} = e,$$

folglich auch

$$e^{(1+2n\pi i)^2} = e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i} = \left[e^{(1+2n\pi i)}\right]^{(1+2n\pi i)} = e^{1+2n\pi i} = e.$$

Wir haben also

$$e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i} = e.$$

Da nun $e^{1+4n\pi i}$ ebenfalls gleich e ist, so würde daraus das absurde Resultat

$$e^{-4n^2\pi^2} = 1$$

folgen, welches für jedes ganze n gelten müsste.

Beispiel: $\frac{arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$ wird für $x > 1$ scheinbar imaginär, welches ist der reelle Werth? Wir haben

$$\frac{arc\cos x}{i\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{i}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

also:

$$\frac{arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ wenn } x > 1.$$

Insbesondere ist das über die cyklometrischen Functionen Gesagte hier zu beherzigen.

§. 6.

Hyperbolische Functionen.

1) $\quad \sin hyp\, \varphi = \frac{1}{i}\sin\varphi i \qquad \cos hyp\,\varphi = \cos\varphi i$

2) $\quad arc\sin hyp\,\varphi = \log\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right) = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$

3) $\quad arc\cos hyp\,\varphi = \log\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2-1}\right) = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}}$

4) $\quad arc\, tgn\, hyp\,\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{1+\varphi}{1-\varphi} = \int\frac{d\varphi}{1-\varphi^2}$

5) $\quad arc\sec hyp\,\varphi = \log\left(\frac{1}{\varphi}+\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}-1}\right) = -\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{1-\varphi^2}}$

6) $\quad arc\, cosec\, hyp\,\varphi = \log\left(\frac{1}{\varphi}+\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+1}\right) = -\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{\varphi^2+1}}$

7) $\quad e^{\pm\varphi} = \cos hyp\,\varphi \pm \sin hyp\,\varphi$

8) $\quad \sin hyp\,\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi}+e^{-\varphi}\right) \qquad \cos hyp\,\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi}-e^{-\varphi}\right).$

Vergleiche: Gudermann, Crelle's Journal, Bd. 6, 7, 8, 9. Günther, Lehre von den Hyperbelfunctionen.

§. 7.

Die Facultäten.

1) Wir bezeichnen mit

$$a^{n|d} = a(a+d)(a+2d) + \cdots \quad (a + \overline{n-1}\,d)$$

die Facultät mit der Basis a, dem Exponenten n und dem Augment d.

Ist $a = 1$, so wird

$$1^{n|1} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)$$

eine Factorielle genannt.

2) $a^{n|-d} = a(a-d)(a-2d)\ldots \quad (a - \overline{n-1}\,d).$

3) $a^{n|0} = a^n \qquad a^{-n|0} = \dfrac{1}{a^n} \qquad a^{0|d} = 1.$

4) $a^{-n|d} = \dfrac{1}{(a-d)^{n|-d}} = \dfrac{1}{(a-d)(a-2d)\ldots(a-nd)}$

5) $a^{\frac{m}{n}|d} = a^{\frac{p}{n}|d}\left(a + \dfrac{p}{n}d\right)^{\frac{m-p}{n}|d}$

6) $\sqrt[m|d]{a^{n|d}} = a^{\frac{n}{m}|d}$

7) $a^{\frac{p}{q}+n|d} = a^{\frac{p}{q}|d}\left(a + \dfrac{p}{q}d\right)\cdots\left(a + \dfrac{p}{q}d + \overline{n-1}\,d\right)$

8) $a^{-\frac{p}{q}+n|d} = \dfrac{a^{n|d}}{\left(a + nd - \dfrac{p}{q}d\right)^{\frac{p}{q}|d}}$

9) $a^{\frac{p}{q}-n|d} = \dfrac{(a-nd)^{\frac{p}{q}|d}}{(a-d)^{n|d}}$

10) $a^{-\frac{p}{q}-n|d} = \dfrac{1}{\left(a - \dfrac{p}{q}d\right)^{\frac{p}{q}|d}\left(a - \dfrac{p}{q}d - nd\right)^{n|d}}$

Vergleiche: Oettinger, Crelle's Journ., Bd. 33, wo die Facultäten-Theorie sehr ausführlich vorgetragen ist, S. 1, 117, 226, 329. Weierstrass, Abhandlungen zur Functionentheorie.

11) Einige Facultäten:

$0! = 1$	$5! = 120$	$10! = 3628800$
$1! = 1$	$6! = 720$	$11! = 39916800$
$2! = 2$	$7! = 5040$	$12! = 479001600$
$3! = 6$	$8! = 40320$	$13! = 6227020800$
$4! = 24$	$9! = 362880$	$14! = 87178291200.$

§. 8.

Identitäten und Binomialcoefficienten.

A. Identitäten.

1) $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

2) $(a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2 = (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2)$

3) $(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 + (a\beta - b\alpha)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Sei
$$A = a\alpha + b\gamma + c\beta$$
$$B = a\beta + b\alpha + c\gamma$$
$$C = a\gamma + b\beta + c\alpha,$$
so wird:

4) $(a + b + c)(\alpha + \beta + \gamma) = A + B + C$

5) $[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac)][\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)]$
$$= A^2 + B^2 + C^2 - [AB + AC + BC]$$

6) $[a^3 + b^3 + c^3 - 3abc][\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma]$
$$= A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$$

7) $(a + b)(b + c)(a + c) = (a + b + c)(ab + bc + ac)$

8) $(a + b)(b + c)(a + c) = \frac{1}{3}[(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)]$

9) $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$
$$= (a - b)(b - c)(a - c)\{ab + ac + bc\}$$

10) $(b - a)(c - a)(c - b) = a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$

11) $(b - a)(c - a)(c - b) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

12) $(a + b + c + d)^2 + (a + b - c - d)^2 + (a + c - b - d)^2$
$$+ (a + d - b - c)^2 =$$

13) $(-a + b + c + d)^2 + (a - b + c + d)^2 + (a + b - c + d)^2$
$$+ (a + b + c - d)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

14) $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3$
$$= 24abc$$

15) $4\,a^2b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$
$= a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2).$

16) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$
$= 2\,(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4).$

17) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2\,[(a-b)(a-c)$
$+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)].$

B. Binomialcoefficienten.

1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n+1-k)}{1.2.3\ldots k}$

2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

3) $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$

4) $\binom{n}{k} = 0 \quad n < k$

5) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

6) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

7) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\binom{r}{1} + \binom{n}{k-2}\binom{r}{2} + \cdots \binom{r}{k} = \binom{n+r}{k}$

8) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \cdots$

9) $\binom{m+1}{m-p} = \binom{m}{p} + \binom{m-1}{p} + \binom{m-2}{p} + \cdots$

10) $\binom{m+n}{k+n} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} + \binom{m+1}{k+2} + \cdots + \binom{m+n-1}{k+n}$

11) $\binom{m+n}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} + \binom{m+1}{k-1} + \cdots \binom{m+n-1}{k-1}$

12) $\binom{m+n}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} \cdots \binom{n}{n}\binom{m}{r-n}$

13) $2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n}$

14) $0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{n}$

15) $\binom{2n}{n} = 1 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$

NB. 16) $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{-n}{p} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}$

$$\binom{n}{\infty} = 0 \text{ für } -1 < n < \infty$$

§. 9.

Combinationslehre.

1) Die Anzahl aller möglichen Permutationen von n verschiedenen Elementen ist gegeben durch

$$P(n) = n!$$

Sind darunter $r, s, t, \ldots$ gleiche, so ist

$$P(n) = \frac{n!}{r!\, s!\, t! \ldots}$$

2) Die Anzahl der einfachen Combinationen von n verschiedenen Elementen zur $r$ten Classe ist:

$$C_n^r = C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n+1-r)}{1.2 \ldots r}$$

Eine einfache Combination enthält jedes Element nur einmal.

Die Anzahl der Combinationen, in welchen sich die Elemente wiederholen, ist für die $r$te Classe:

$$C'^r_n = C[n,r] = \binom{n-1+r}{r} = \frac{n(n+1)\ldots(n-1+r)}{1.2 \ldots r}$$

3) Die Anzahl der einfachen Variationen von n Elementen zur $r$ten Classe beträgt

$$V(n,r) = r! \binom{n}{r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-1+r).$$

Die Anzahl der Wiederholungsvariationen von n Elementen zur $r$ten Classe ist

$$V[n,r] = n^r.$$

§. 10.

Zerlegung in Partialbrüche.

1) Sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\Pi(x-\alpha_\varkappa)} = \sum \frac{A_\varkappa}{x-\alpha_\varkappa},$$

so wird

$$f(\alpha_\varkappa) = A_\varkappa \frac{\Pi(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)}{\alpha_\lambda - \alpha_\lambda}.$$

$$A_\varkappa = \frac{f(\alpha_\varkappa)}{F'(\alpha_\varkappa)} \qquad F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

2) Sei n gerade und $n > m$, ferner

$$a_\varkappa = \frac{2\varkappa+1}{n}\pi \qquad b_\varkappa = \frac{2\varkappa}{n}\pi,$$

so wird:

$$\frac{x^m}{x^n+1} = \frac{2}{n}\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \frac{\cos m a_\varkappa - x\cos(m+1)a_\varkappa}{x^2 - 2x\cos a_\varkappa + 1}$$

$$\frac{x^m}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n(x+1)}$$

$$+ \frac{2}{n}\sum_1^{\frac{n}{2}-1} \frac{x\cos(m+1)b_\varkappa - \cos m b_\varkappa}{x^2 - 2x\cos b_\varkappa + 1}$$

3) Sei n ungerade und $n > m$,

$$\frac{x^m}{x^n+1} = (-1)^n\frac{1}{n(1+x)} + \frac{2}{n}\sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\cos m a_\varkappa - x\cos(m+1)a_\varkappa}{x^2 - 2x\cos a_\varkappa + 1}$$

$$\frac{x^m}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{2}{n}\sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{x\cos(m+1)a_\varkappa - \cos m a_\varkappa}{x^2 - 2x\cos a_\varkappa + 1}$$

§. 11.

Zerlegung in Factoren.

1) $$x^n - a^n = (x^2 - a^2)\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{2\,\pi}{n} + a^2\right)\cdots$$
$$\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)$$

2) $$x^n + a^n = \left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right)\cdots$$
$$\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$

wenn n eine gerade Zahl.

3) $$x^n - a^n = (x - a)\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{2\,\pi}{n} + a^2\right)\cdots$$
$$\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$

4) $$x^n + a^n = (x + a)\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right)\cdots$$
$$\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)$$

wenn n eine ungerade Zahl.

§. 12.

Arithmetische Progressionen.

Gegeben	Gesucht	Formel
$a\ \delta\ n$	l	$l = a + (n-1)\delta$
$a\ \delta\ s$		$l = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{2\delta s + \left(a - \frac{\delta}{2}\right)^2}$
$a\ n\ s$		$l = \frac{2s}{n} - a$
$\delta\ n\ s$		$l = \frac{s}{n} + \frac{n-1}{2}\delta$
$a\ \delta\ n$	s	$s = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)\delta\}$
$a\ \delta\ l$		$s = \frac{a+l}{2} + \frac{l^2 - a^2}{2\delta}$
$a\ n\ l$		$s = \frac{n}{2}(a + l)$
$\delta\ n\ l$		$s = \frac{n}{2}(2l - (n-1)\delta)$
$a\ n\ l$	δ	$\delta = \frac{l-a}{n-1}$
$a\ n\ s$		$\delta = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$
$a\ l\ s$		$\delta = \frac{l^2 - a^2}{2s - l - a}$
$a\ l\ s$		$\delta = \frac{2nl - 2s}{n(n-1)}$
$a\ \delta\ l$	n	$n = 1 + \frac{l-a}{\delta}$
$a\ \delta\ s$		$n = \frac{\delta - 2a}{2\delta} \pm \sqrt{\frac{2s}{\delta} + \frac{(2a-\delta)^2}{4\delta^2}}$
$a\ l\ s$		$n = \frac{2s}{a+l}$
$\delta\ l\ s$		$n = \frac{2l+\delta}{2\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{2l+\delta}{2\delta}\right)^2 - \frac{2s}{\delta}}$
$\delta\ n\ l$	a	$a = l - (n-1)\delta$
$\delta\ n\ s$		$a = \frac{s}{n} - \frac{n-1}{2}\delta$
$\delta\ l\ s$		$a = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{\delta}{2}\right)^2 - 2\delta s}$
$n\ l\ s$		$a = \frac{2s}{n} - l$
		$l = a + (n-1)\delta$ $s = (a + l)\frac{n}{2}$

§. 13.

Geometrische Progressionen.

Gegeben	Gesucht	Formel
$a \ e \ n$	l	$l = a\,e^{n-1}$
$a \ e \ s$		$l = \dfrac{a + (e-1)\,s}{e}$
$a \ n \ s$		$l\,(s-l)^{n-1} - a\,(s-a)^{n-1} = 0$
$e \ n \ s$		$l = \dfrac{(e-1)\,s\,e^{n-1}}{e^n - 1}$
$a \ e \ n$	s	$s = a\,\dfrac{e^n - 1}{e - 1}$
$a \ e \ l$		$s = \dfrac{l\,e - a}{e - 1}$
$a \ n \ l$		$s = \left(l^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}\right) : \left(l^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}\right)$
$e \ n \ l$		$s = \dfrac{l\,(e^n - 1)}{(e-1)\,e^{n-1}}$
$e \ n \ l$	a	$a = \dfrac{l}{e^{n-1}}$
$e \ n \ s$		$a = \dfrac{(e-1)}{(e^n - 1)}\,s$
$e \ l \ s$		$a = l\,e - (e-1)\,s$
$n \ l \ s$		$a\,(s-a)^{n-1} - l\,(s-l)^{n-1} = 0$
$a \ n \ l$	e	$e = \sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}$
$a \ n \ s$		$e^n - \dfrac{s}{a}\,e + \dfrac{s-a}{a} = 0$
$a \ l \ s$		$e = (s-a) : (s-l)$
$a \ l \ s$		$e^n - \dfrac{s}{s-l}\,e^{n-1} + \dfrac{l}{s-l} = 0$
$a \ e \ l$	n	$n = \dfrac{\log l - \log a}{\log e} + 1$
$a \ e \ s$		$n = \dfrac{\log\{a + (e-1)\,s\} - \log a}{\log e}$
$a \ l \ s$		$n = \dfrac{\log l - \log a}{\log(s-a) - \log(s-l)} + 1$
$e \ l \ s$		$n = \dfrac{\log l - \log(l\,e - (e-1)\,s)}{\log e}$
		$l = a\,e^{n-1}$
		$s = a\,\dfrac{e^n - 1}{e - 1}.$

§. 14.

Einige, insbesondere höhere Progressionen.

1) Die Reihe

$$1p,\quad 2(p+1)\quad 3(p+2)\cdots$$

hat zum allgemeinen Glied

$$a_n = n(p+n-1),$$

und zum Summenglied

$$s_n = \tfrac{1}{6}n(n+1)(3p+2n-2).$$

2) Die Reihe

$$pq,\quad (p-1)(q-1),\quad (p-2)(q-2)\ldots$$

hat zum allgemeinen Glied

$$a_n = (p-n+1)(q-n+1),$$

und zum Summenglied

$$s_n = \tfrac{1}{6}n\{6pq-(n-1)(3p+3q-2n+1)\}$$

3) Für eine Reihe

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, \ldots$$

ist

$$\left.\begin{array}{lr} \varDelta a_1\, \varDelta a_2\, \varDelta a_3 \ldots & \text{die erste} \\ \varDelta^2 a_1\, \varDelta^2 a_2 \ldots & \text{„ zweite} \\ \varDelta^3 a_1 \ldots & \text{„ dritte} \end{array}\right\} \text{Differenzreihe.}$$

Das allgemeine Glied ist gegeben durch:

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}\varDelta a_1 + \binom{n-1}{2}\varDelta^2 a_1 + \cdots \binom{n-1}{n-1}\varDelta^{n-1} a_1$$

$$a_n = a_p - \binom{p-n}{1}\varDelta a_p + \binom{p-n+1}{2}\varDelta^2 a_p - \cdots$$

$$(-1)^m\binom{p+m-n-1}{m}\varDelta^m a_p, n > p.$$

Das Summenglied ist gegeben durch:

$$s_n = n a_1 + \binom{n}{2}\varDelta a_1 + \binom{n}{3}\varDelta^2 a_1 + \binom{n}{4}\varDelta^3 a_1 + \cdots$$

Man beachte, dass

$$\varDelta^2 a_1 = a_3 - 2a_2 + a_1$$

$$\varDelta^3 a_1 = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1$$

allgemein

$$\Delta^r a_1 = a_{r+1} - \binom{r}{1} a_r + \binom{r}{2} a_{r-1} \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} a_1$$

und für

$$r > m$$
$$\Delta^r a_m = 0,$$

wenn die Progression von m ter Ordnung ist, d. h. wenn sie nur m Differenzenreihen besitzt.

§. 15.

Figurirte Zahlen.

Sei

I $1,\ 1+\delta,\ 1+2\delta,\ 1+3\delta,\ 1+4\delta,\ 1+5\delta \ldots$

Bilden wir die Summenglieder

II $1,\ 2+\delta,\ 3+3\delta,\ 4+6\delta,\ 5+10\delta,\ 6+15\delta \ldots$

III $1,\ 3+\delta,\ 6+4\delta,\ 10+10\delta,\ 15+20\delta,\ 21+35\delta \ldots$

So werden

II Polygonal-, III Polyedral- Zahlen genannt.

Sei in

1) II $\delta = 1$ (Triagonalzahlen) 1, 3, 6, 10, 15 . . .

2) $\delta = 2$ (Tetragonalzahlen) 1, 4, 9, 16, 25 . . .

3) III $\delta = 1$ (Dreiseitige Pyramidalzahlen) 1, 4, 10, 20, 35...

4) $\delta = 4$ (Vierseitige Pyramidalzahlen) 1, 5, 14, 30, 55...

So wird

Reihe	Allgemeines Glied	Summenglied
1)	$\frac{n(n+1)}{1.2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
2)	n^2	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$
3)	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
4)	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$	$\frac{n(n+1)^2(n+2)}{3.4}$

Ferner ist

$$\mathop{S} n e^{n-1} = \frac{n e^n}{e-1} - \frac{e^n - 1}{(e-1)^2}$$

$$\mathop{S}[\alpha + (n-1)\delta]\, a e^{n-1} = a \left\{ e \frac{e^n - 1}{e-1} + \delta e \mathop{S} (n-1) e^{n-2} \right\}$$

$$\mathop{S} \frac{n(n+1)}{1.2} e^{n-1} = \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{e^n}{e-1} - \frac{n e^n}{(e-1)^2} + \frac{e^n - 1}{(e-1)^3}.$$

Ueber Progressionen und figurirte Zahlen vergleiche: Neun Abhandlungen über ebenso wichtige als interessante Gegenstände aus der Algebra und niederen Analysis, von Lefebure de Fourcy etc., Stuttgart 1844.

§. 16.

Convergenz-Kriterien.

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

ist convergent, wenn

$$lim \frac{u_{\varkappa+1}}{u_\varkappa} = lim (u_\varkappa)^{\frac{1}{\varkappa}} < 1 \qquad lim\, \varkappa = \infty$$

1) wenn es

$$\sum 2^{\varkappa-1} u_{2\varkappa-1} \text{ ist (Cauchy)}$$

$$\sum n\, u_{(\varkappa^2)} \text{ (Schlömilch)}$$

2) wenn

$$lim\, \varkappa^r u_\varkappa = 0 \quad r > 1$$

$$lim\, \varkappa \left\{ 1 - \frac{u_{\varkappa+1}}{u_\varkappa} \right\} > 1 \text{ (Raabe).}$$

3) Ist

$$\frac{u_{\varkappa+1}}{u_\varkappa} = \frac{1}{1+\alpha},$$

so muss

$$lim\, \varkappa \alpha > 1 \text{ (Stern)}$$

4) Ist $\frac{u_{\varkappa+1}}{u_\varkappa} = \frac{n^\varkappa + a n^{\varkappa-t} + \cdots}{n^\varkappa + A n^{\varkappa-t} + \cdots}$,

so muss

$$A - a > 1 \text{ (Gauss).}$$

Eine Reihe ist $\begin{Bmatrix}\text{con}\\ \text{di}\end{Bmatrix}$ vergent, je nachdem das erste, nicht verschwindende Glied der Reihe

$$V_0 = lim \left\{1 - \frac{u_{\varkappa+1}}{u_\varkappa}\right\}$$

$$V_1 = lim \left\{\varkappa - \frac{u_{\varkappa+1}}{u_\varkappa}(\varkappa+1)\right\}$$

$$V_2 = lim \left\{\varkappa \log \varkappa - \frac{u_{\varkappa+1}}{u_\varkappa}(\varkappa+1) \log(\varkappa+1)\right\}$$

. . . .

$$V_p = lim \left\{\prod_0^p \varkappa \log^\lambda \varkappa - \frac{u_{\varkappa+1}}{u_\varkappa} \prod_0^p (\varkappa+1) \log^\lambda(\varkappa+1)\right\}$$

$\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist.

Zusatz zu §. 16.

Die Theorie der Reihen ist in der neueren Zeit besonders ausgebildet worden. Da sie zugleich die Grundlage der neueren Functionentheorie ist, so werden wir das Wichtigste in der dritten Lieferung mittheilen. Folgende Bemerkungen mögen genügen.

Bleibt die Function $F(z)$ innerhalb der Radien r und R um den Punkt c synektisch, so wird

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\varkappa} A_\varkappa (z-c)^\varkappa$$

$$A_\varkappa = \frac{1}{2\pi\varrho^\varkappa} \int_0^{2\pi} F(c + \varrho e^{\varphi i}) e^{-\varkappa\varphi i} d\varphi$$

für jedes ϱ, für welches

$$r < \varrho < R.$$

Verlegt man den Anfangspunkt nach c, so wird

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\varkappa} A_\varkappa z^\varkappa$$

$$A_\varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(e^{\varphi i}) e^{-\varkappa\varphi i} d\varphi.$$

Ebenso für zwei Variable

$$F(z,z') = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}\, z^{\varkappa} z'^{\lambda}$$

$$A_{\varkappa,\lambda} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\varphi}, e^{i\varphi'})\, e^{-(\varkappa\varphi+\lambda\varphi')i}\, d\varphi\, d\varphi'.$$

Lassen sich die Integrationen nicht ausführen, so bedient man sich der mechanischen Quadraturen, deren Wesen im Folgenden besteht. Sei

$$z = e^{\varphi i}, \quad \varphi = \lambda\,\frac{2\pi}{\varkappa},$$

so wird z eine Wurzel von $\zeta^{\varkappa} = 1$ und wir erhalten

$$\frac{1}{\varkappa}\sum F(\zeta)\zeta^{-n} = A_n + A_{n+\varkappa} + A_{n+2\varkappa} + \cdots$$
$$+ A_{n-\varkappa} + A_{n-2\varkappa} + \cdots$$

oder

$$A_n = \frac{1}{\varkappa}\sum F(\zeta)\zeta^{-n} - \sigma$$

$$\sigma = \sum_1^{\infty}{}^{j} (A_{n-j\varkappa} + A_{n+j\varkappa}).$$

Man erhält also A_n, indem man das arithmetische Mittel von

$$F(e^{\varphi i})\, e^{-n\varphi i}$$

für

$$\varphi = 0,\ 1\cdot\frac{2\pi}{\varkappa},\ 2\cdot\frac{2\pi}{\varkappa}, \ldots\ (\varkappa - 1)\cdot\frac{2\pi}{\varkappa}$$

für hinreichend grosses $\varkappa$ nimmt.

In Bezug auf die Gültigkeitsgrenzen merke man:

Sei $f(x)$ für $x = x_0, x_1, x_2, \ldots x_{\varkappa}$

discontinuirlich, so gilt, wenn

$$mod\, x_0 > mod\, x_1 > \ldots > mod\, x_{\varkappa}$$

angenommen wird, die Entwickelung

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \cdots$$

so lange, so lange

$$mod\, x < mod\, x_{\varkappa},$$

wobei x allgemein complex angenommen wurde.

Bleiben die Glieder der Reihe

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

stets positiv, und ist

$$u_0 > u_1 > u_2 > \cdots$$

ferner

$$\int_0^\infty u_n \, d\, n$$

endlich, so convergirt die Reihe U.

Wir geben hier noch die Definitionen einiger Begriffe, die sich hier am besten anschliessen. (Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionentheorie, S. 69. Vergleiche auch: Biermann, Theorie der analyt. Functionen.)

„Es seien unendlich viele rationale Functionen einer Veränderlichen x in bestimmter Aufeinanderfolge gegeben

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$$

Die Gesammtheit derjenigen Werthe von x, für welche die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

einen endlichen Werth hat, nennt man den Convergenzbereich dieser Reihe.

Eine unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu,$$

deren Glieder Functionen beliebig vieler Veränderlichen sind, convergirt in einem gegebenen Theile B ihres Convergenzbereiches gleichmässig, wenn sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ stets eine ganze Zahl m so bestimmen lässt, dass der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu$$

für jeden Werth von n, der $\geqq m$ ist und für jedes dem Bereiche B angehörige Werthsystem kleiner als δ ist.

Soll die Reihe in demselben Bereiche zugleich unbedingt convergent sein, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder denselben Werth haben, so muss es, wie man auch δ annehmen möge, stets möglich sein, aus der Reihe eine endliche Anzahl von Gliedern so auszusondern, dass die Summe von beliebig vielen der übrigbleibenden für jedes der betrachteten Werthsysteme der Veränderlichen kleiner als δ ist.“

Ueber Reihen, die je nach der Anordnung der Glieder verschiedene Summen besitzen, vergl. Schlömilch, Uebungsbuch II, §. 23; Weierstrass 212, V, VI, VII.

§. 17.

Die allgemeinen Reihentheoreme.

1) (Taylor)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1!}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_x^{x+h}(x+h-y)^n f^{(n)}(y)\,dy$$

$$=(n+1)(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\quad 0<\theta<1$$

$$=f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

2) (Maclaurin)

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots$$
$$+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-y)^n f^{(n)}(y)\,dy$$

$$=(n+1)(1-\theta)^n f^{(n+1)}\{a+\theta(x-a)\}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=f^{(n+1)}\{a+\theta(x-a)\}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3) Speciell für $a=0$

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x^1}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-y)^n f^{(n)}(y)\,dy$$

$$=f^{(n+1)}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

4) $$f(x) = f(\alpha) + \left\{f'(x)\frac{x-\alpha}{\varphi(x)}\right\}_{x=\alpha}\varphi(x) + \frac{1}{2!}\left\{f'(x)\left[\frac{x-\alpha}{\varphi(x)}\right]^2\right\}_{x=\alpha}\varphi(x)^2 + \cdots$$

Die Reihe von Bürmann: Hindeburg's Archiv II, S. 499 (1798).

5) Ist

$$x = a + \varphi(x),$$

so ist

$$x = a + \varphi(a) + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)^2\right]_{x=a} + \tfrac{1}{3!}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)^3\right]_{x=a} + \cdots$$

Reihe von Lagrange.

§. 18.

Allgemeine Reihen.

1) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

2) $$a^x = 1 + \frac{x\,log\,a}{1} + \frac{(x\,log\,a)^2}{2!} + \cdots \frac{(x\,log\,a)^n}{n!} + \cdots$$

x und a beliebig

3) $$log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots (-1)^n\frac{x^n}{n} + \cdots \quad 1 \geqq x > -1$$

4) $$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

5) $$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

x beliebig.

6) $$tgn\,x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155\,925}x^{11} + \cdots$$
$$2^{2n}(2^2-1)\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n-1} + \cdots \quad \pi > x > -\pi$$

7) $$cotgn\,x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \frac{2}{93\,555}x^9 - \cdots$$
$$B_{2n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} - \cdots \quad \pi > x > -\pi$$

8) $$sec\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61}{6!}x^6 + \cdots + \frac{x^{2\varkappa}}{(2\varkappa)!}B_{2\varkappa}x^{2\varkappa} + \cdots \quad x < \frac{\pi}{2}$$

9) $$cosec\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3!} + \frac{7x^3}{3.5!} + \frac{29x^5}{3.7!} + \cdots$$

$$+ \frac{2(2^{2\varkappa+1}-1)}{(2\varkappa+2)!} B_{2\varkappa+1} x^{2\varkappa+1} + \cdots \quad 0 < x < \pi$$

10) $$arc\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \frac{63}{2816}x^{11} + \cdots$$

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad x^2 < 1.$$

NB. $arc\sin x = \frac{\pi}{2} - arc\cos x.$

11) $$arctgn\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots x^2 \lesseqgtr 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} - \cdots (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}} \quad x^2 \geqq 1$$

NB. $arc\,tgn\, x = \frac{\pi}{2} - arc\,cotgn\, x.$

$arc\,tgn\, x = \frac{\pi}{2} - arc\,tgn\, \frac{1}{x}.$

12) Man beachte, dass, wenn

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist, und $f(x) = z$ gesetzt wird, so dass $x = \varphi(z)$ resultirt, dass dann

$$z = a_0 + a_1 \varphi(z) + a_2 \varphi(z)^2 + \cdots$$

wird. So folgt beispielsweise aus

$$arc\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$$

$$z = (\sin z) + \frac{1}{6}(\sin z)^3 + \frac{3}{40}(\sin z)^5 + \cdots$$

Auf diese Weise ergeben sich die inversen Reihenentwickelungen.

§. 19.

Reihen mit Bernoulli's Zahlen.

1) $$B_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2} B_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} B_{2n-4} + \cdots (-1)^n = 0.$$

2) $$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} = (2n-1) B_{2n-2} - \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3} B_{2n-4} + \cdots (-1)^{n-1} = 0.$$

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42},\ B_7 = \frac{1}{30},\ B_9 = \frac{5}{66},\ B_{11} = \frac{691}{2730},$$

$$B_2 = 1,\ B_4 = 5,\ B_6 = 61,\ B_8 = 1385,\ B_{10} = 50521, B_{12} = 2702765,$$

3) $$1 + \frac{1}{2^{2\varkappa}} + \frac{1}{3^{2\varkappa}} + \cdots = \frac{2^{2\varkappa-1}}{(2\varkappa)!} \pi^{2\varkappa} B_{2\varkappa-1}$$

4) $$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \cdots = \frac{\pi^{2n}}{2} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} B_{2n-1}$$

5) $$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \cdots = \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} \pi^{2n} B_{2n-1}$$

6) $$1 - \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} - \cdots = \frac{\pi^{2n+1}}{(2n)!} \cdot \frac{B_{2n}}{2^{2n+2}}.$$

7) Sei

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{\varkappa}} = \varphi(\varkappa),$$

so wird

$$\varphi(2) = \frac{\pi^2}{6}\ \varphi(3) = \frac{\pi^3}{25{,}7946\ldots},\quad \varphi(4) = \frac{\pi^4}{90},\quad \varphi(5) = \frac{\pi^5}{295{,}1215\ldots}$$

$$\varphi(6) = \frac{\pi^6}{945}\quad \varphi(7) = \frac{\pi^7}{2295{,}286\ldots}\quad \varphi(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

8) $$\mathfrak{S}\frac{1}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{2x^m} - \frac{mB_1}{2x^{m+1}} - \frac{m(m+1)(m+2)B_3}{2.3.4\,x^{m+3}} + \cdots + \varphi(m).$$

Vergleiche: Schlömilch, Comp. II, p. 211 et ssq. besonders für die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{x} = 0{,}5772156649 \cdots + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_3}{4x^4} - \cdots$$

Viele hierher gehörige Summen und Reihen findet man bei Euler, Einleitung in die Analysis des Unendl. I. Bd. Deutsch von H. Maser, Grunert's Archiv I, III. Crelle, Journ. IV, 26.

§. 20.

Logarithmische und Exponential-Reihen.

1) $\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots \quad 2 \geqq x \geqq 0$

2) $\log x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots \quad x > \frac{1}{2}$

3) $\log(x+h) = \log x + 2\left\{\frac{h}{2x+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3 + \cdots \frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^{2n+1} + \cdots\right.$

$x > 0$, wenn $h > 0$; $x > h$, wenn $h < 0$,

4) $\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots\right\} x^2 < 1$

5) $\log \frac{x+1}{x-1} = 2\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \cdots \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} + \cdots\right\} \quad x^2 > 1$

6) $\log x = 2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right\} \quad x > 0$

7) $\log x = \frac{1}{2}\log(x+h) + \frac{1}{2}\log(x-h)$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{h}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^6 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{h}{x}\right)^{2n} + \cdots\right\} \quad x > h$$

8) $$\log x = \frac{1}{2}\log(x+h) + \frac{1}{2}\log(x-h) + \left\{\frac{h^2}{2x^2-h^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h^2}{2x^2-h^2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{h^2}{2x^2-h^2}\right)^{2n+1} + \cdots\right\} \quad x > h$$

9) $$\log(x+2) = 2\log(x+1) + \log(x-2) - 2\log(x-1) + 2\left\{\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 + \cdots\right. \quad x \text{ sehr gross.}$$

Reihe von Borda.

10) $$\log \sin x = \log x - \left\{2\cdot\frac{B_1}{2!}x^2 + \frac{1}{2}2^3\frac{B^3}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n}2^{2n-1}\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right.$$

$$= \log x - \left\{\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{180}x^4 + \frac{1}{2835}x^6 + \frac{1}{37800}x^8 + \frac{1}{467775}x^{10} + \cdots \quad \pi > x > -\pi\right.$$

11) $$\log \cos x = -\left\{(2^2-1)2\frac{B_1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}(2^{2n}-1)2^{2n-1}\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right.$$

$$= -\left\{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \frac{17}{2520}x^8 + \frac{31}{14175}x^{10} + \cdots \quad \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^4 x + \frac{1}{3}\sin^6 x + \cdots + \frac{1}{n}\sin^{2n} x + \cdots \quad \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}\right.$$

12) $$\log \operatorname{tgn} x = \log x + \left\{(2-1)2^2\frac{B_1}{2!}x^2 + \cdots \frac{1}{n}(2^{2n-1}-1)2^{2n}\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right\}$$

$$= \log x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{90}x^4 + \frac{62}{2835}x^6 + \frac{127}{18900}x^8 + \frac{146}{66825}x^{10} + \cdots \quad \frac{\pi}{2} > x - \frac{\pi}{2}$$

13) $e^{e^x} = e\left(1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{5}{3!}x^3 + \frac{15}{4!}x^4 + \cdots\right.$

14) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} + \frac{3x^6}{6!} + \cdots$

15) $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \cdots\right.$

16) $e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \cdots$

17) $e^{\arcsin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \cdots$

18) $e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} - \cdots$

19) $\log\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4.5}{2.3}x^3 + \frac{5.6.7}{2.3.6}x^4 + \cdots$

20) $\frac{\log(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1}x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots$

21) $\log\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \cdots$

22) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos x = 1 - \frac{2^2}{4!}x^4 + \frac{2^4}{8!}x^8 - \cdots$

23) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}\sin x = 2^2\frac{x^3}{2!} - 2^4\frac{x^6}{6!} + 2^6\frac{x^{10}}{10!} - \cdots$

24) $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{30}\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{42}\frac{x^6}{6!} - \frac{1}{30}\frac{x^8}{8!} + \cdots$

§ 21.

Arcus Sinus-Reihen.

1) $[\arcsin x]^2 = x^2 + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \cdots$

2) $[\arcsin x]^3 = x^3 + \frac{3!}{5!}3^2\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)x^5$

$$+ \frac{3!}{7!}3^2.5^2.\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right)x^7 + \cdots$$

3) $\sqrt{1-x^2}\,arc\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3.5}x^5 - \frac{2.4}{3.5.7}x^7 + \cdots$

4) $\frac{arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^7 + \cdots$

Für 1) bis 4) $x^2 < 1$.

§. 22.

Sinus-Reihen.

1) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots \sin n\varphi = \left\{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi\right\} : \sin\frac{\varphi}{2}$

2) $\sin\varphi + \sin 3\varphi + \cdots \sin(2n-1)\varphi = \sin^2 n\varphi : \sin\varphi$

3) $x^2 = \sin^2 x + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^4 x}{2^4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{\sin^6 x}{3^6} + \cdots$

4) $x\cos x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1.2}{3.5}\sin^5 x - \cdots \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

5) $\log(1+x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^3 x - \frac{5}{12}\sin^4 x + \cdots$

6) $\frac{x}{tgn\, x} = 1 - \frac{1}{3}\sin^2 x - \frac{2}{3.5}\sin^4 x - \frac{2.4}{3.5.7}\sin^6 x - \cdots$

7) $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin^3\varphi + \cdots \quad 0 < \varphi < 2\pi$

8) $\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots \quad -\pi < \varphi < \pi$

9) $\frac{\pi}{4} = \sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \cdots \quad \pi > \varphi > 0$

10) $\frac{\pi}{4}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{3^2}\sin 3\varphi + \frac{1}{5^2}\sin 5\varphi - \cdots \quad \pi \geqq \varphi \geqq -\pi$

11) $\frac{\pi}{4}\cos\varphi = \frac{2}{1.3}\sin 2\varphi + \frac{4}{3.5}\sin 4\varphi$

$+ \frac{6}{5.7}\sin 6\varphi + \cdots \quad 0 < \varphi < \pi$

12) $\frac{\pi}{2}\frac{\sin a\varphi}{\sin a\pi} = \frac{\sin\varphi}{1^2 - a^2} - \frac{2\sin 2\varphi}{2^2 - a^2} + \cdots \quad -\pi < \varphi < \pi$

13) $\frac{\pi}{2}\frac{e^{a\varphi} - e^{-a\varphi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \frac{\sin\varphi}{1^2 + a^2} - \frac{2\sin 2\varphi}{2^2 + a^2} + \cdots \quad -\pi < \varphi < \pi$

14) $$\frac{x \sin \varphi}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} = x \sin \varphi + x^2 \sin 2\varphi + x^3 \sin 3\varphi + \cdots \quad x^2 < 1$$

15) $$\operatorname{arctg} \frac{x \sin \varphi}{1 - x \cos \varphi} = x \sin \varphi + \frac{x^2}{2} \sin 2\varphi + \frac{x^3}{3} \sin 3\varphi + \cdots \quad x^2 < 1$$

16) $$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \varphi}{1 - x^2} = x \sin \varphi + \frac{x^3}{3} \sin 3\varphi + \frac{x^5}{5} \sin 5\varphi + \cdots \; x^2 < 1$$

17) $$\sin^2 x + \sin^2 2x + \cdots \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}.$$

Zusatz zu §. 22 ff.

Es ist vielleicht rathsam, auf einige divergente Reihen aufmerksam zu machen.

Setzt man in der für $x^2 < 1$ geltenden Entwickelung

$$\frac{1}{1 \mp x} = 1 \pm x + x^2 \pm x^3 + \cdots$$

$x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, so werden, so lange

$$\operatorname{mod} x < 1,$$

also so lange

$$r^2 < 1,$$

auch die daraus hervorgehenden Reihen

$$\frac{r \sin \varphi}{1 \mp 2r \cos \varphi + r^2} = r \sin \varphi \pm r^2 \sin 2\varphi + \cdots$$

$$\frac{1 \mp r \cos \varphi}{1 \mp 2r \cos \varphi + r^2} = 1 \pm r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi \pm \cdots$$

gelten, nicht aber für $r = 1$, demnach sind die Reihen

$$1 \pm \cos \varphi + \cos 2\varphi \pm \cos 3\varphi + \cdots$$

und

$$\sin \varphi \pm \sin 2\varphi + \sin 3\varphi \pm \cdots$$

divergent.

Wie man andere, hier nicht vorkommende endliche Summen bilden kann, liegt an der Hand. So z. B. aus

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

wird

$$2 \sum_1^n {}^{\varkappa} \cos^2 \varkappa x = n + \sum_1^n {}^{\varkappa} \cos 2\varkappa x.$$

3*

Nun ist aber §. 23, Formel 1), $\sum \cos 2\varkappa x$ gegeben, also haben wir

$$2 \sum \cos^2 \varkappa x = n + \frac{\cos n x \sin (n+1) x}{\sin x}.$$

§. 23.

Cosinus-Reihen.

1) $1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cdots \cos n\varphi = \left(\cos \frac{n\varphi}{2} \sin \frac{n+1}{2}\varphi\right) : \sin \frac{\varphi}{2}$

2) $\log \cos \frac{\varphi}{2} = -\log 2 + \cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$

$$+ \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \cdots \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

3) $\log \sin \frac{\varphi}{2} = -\log 2 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$

$$- \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \cdots \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

4) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi + \frac{1}{3^2}\cos 3\varphi + \frac{1}{5^2}\cos 5\varphi + \cdots \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi$

5) $\frac{\pi}{4}\sin\varphi = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{1.3} - \frac{\cos 4\varphi}{3.5} - \frac{\cos 6\varphi}{5.7} - \cdots \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

6) $\frac{\pi}{2}\frac{e^{a\varphi} + e^{-a\varphi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \frac{1}{2a} - \frac{a\cos\varphi}{1^2 + a^2} + \frac{a\cos 2\varphi}{2^2 + a^2} - \cdots \quad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi$

7) $\frac{\pi}{2}\frac{\cos a\varphi}{\sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \frac{a\cos\varphi}{1^2 - a^2} - \frac{a\cos 2\varphi}{2^2 - a^2}$

$$+ \frac{a\cos 3\varphi}{3^2 - a^2} - \cdots \quad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi$$

8) $\frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = 1 + x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi$

$$+ x^3\cos 3\varphi + \cdots \quad x^2 < 1$$

9) $-\log\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = x\cos\varphi + \frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi$

$$+ \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \cdots \quad x^2 < 1.$$

§. 24.

Einige oft gebrauchte Reihen.

1) $tgn\, y = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x} \qquad y = a \sin x + \frac{1}{2} a^2 \sin 2x + \frac{2}{3} a^3 \sin 3x + \cdots$

2) $tgn\, y = n\, tgn\, x \qquad y = x + \frac{n-1}{n+1} \sin 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4x + \cdots$

3) $\cos y = \cos x + b \qquad y = x - \frac{b}{\sin x} - \frac{1}{2} cotgn\, x \left(\frac{b}{\sin x}\right)^2 - \cdots$

4) $\sin y = \sin x + b \qquad y = x + \frac{b}{\cos x} + \frac{1}{2} tgn x \left(\frac{b}{\cos x}\right)^2 + \cdots$

5) $\frac{1}{x} - 2\, cotg\, 2x = tgn\, x + \frac{1}{2} tgn \frac{x}{2} + \frac{1}{4} tgn \frac{x}{4} + \cdots$

Ueber Sinus und verwandte Reihen s. J. Fourier, Analyt. Theorie der Wärme, übersetzt von B. Weinstein, Berlin 1884. (Theorie und Literatur.)

Vergl. auch Schlömilch, Compendium II, Braunschweig 1879.

§. 25.

Binomial-Reihen.

1) $(a+b)^n = n!\left\{\frac{a^n}{n!}+\frac{a^{n-1}b}{(n-1)!\,1!}+\cdots\quad\frac{a^{n-\varkappa}b^{\varkappa}}{(n-\varkappa)!\,\varkappa!}+\cdots\right\}$

2) $(a+b)^n = a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{\varkappa}a^{n-\varkappa}b^{\varkappa}+\cdots+b^n$

3) $(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{\varkappa}x^{\varkappa}+\cdots\quad x^2<1$

4) $(1-x)^n = 1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots(1-)^{\varkappa}\binom{n}{\varkappa}x^{\varkappa}\cdots\quad x^2<1$

5) $$(1+x)^{-n} = 1-\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2-\cdots$$
$$+(-1)^{\varkappa}\binom{n+\varkappa-1}{\varkappa}x^{\varkappa}+\cdots\quad x^2<1$$

6) $$(1-x)^{-n} = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\cdots$$
$$+\binom{n+\varkappa-1}{\varkappa}x^{\varkappa}+\cdots\quad x^2<1$$

7) $$(1+x)^{-n} = 1-\binom{n}{1}\frac{x}{1+x}+\binom{n}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\cdots$$
$$(-1)^{\varkappa}\binom{n}{\varkappa}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\varkappa}+\cdots\quad x>-\tfrac{1}{2}$$

8) $$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1+\frac{n}{m}x-\frac{n(m-n)}{1.2.m^2}x^2+\frac{n(m-n)(2m-n)}{1.2.3.m^3}x^3-\cdots$$
$$+(-1)^{\varkappa+1}\frac{n(m-n)\ldots[(\varkappa-1)m-n]}{1.2.3\ldots\varkappa.m^{\varkappa}}x^{\varkappa}+\cdots\quad x^2<1$$

9) $$(1-x)^{\frac{n}{m}} = 1-\frac{n}{m}x-\frac{n(m-n)}{1.2.m^2}x^2-\frac{n(m-n)(2m-n)}{1.2.3.m^3}x^3-\cdots$$
$$-\frac{n(m-n)\ldots[(\varkappa-1)m-n]}{1.2.3\ldots\varkappa.m^{\varkappa}}x^{\varkappa}+\cdots\quad x^2<1$$

10) $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1.1}{2.4}x^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \cdots$$
$$- (-1)^\varkappa \frac{1.1.3.5\ldots(2\varkappa-3)}{2.4.6\ldots(2\varkappa)}x^\varkappa + \cdots \quad x^2 < 1$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$
$$+ \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \cdots$$

11) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \cdots$$
$$+ (-1)^\varkappa \frac{1.3.5\ldots(2\varkappa-1)}{2.4.6\ldots(2\varkappa)}x^\varkappa \ldots \quad x^2 < 1$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5$$
$$+ \frac{231}{1024}x^6 - \cdots$$

12) $$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1.2}{3.6}x^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}x^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4 + \cdots$$
$$+ (-1)^{\varkappa+1} \frac{1.2.5.8\ldots(3\varkappa-4)}{3.6.9.12\ldots(3\varkappa)}x^\varkappa + \cdots \quad x^2 < 1$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5$$
$$- \frac{154}{6561}x^6 + \cdots$$

13) $$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4 - \cdots$$
$$+ (-1)^\varkappa \frac{1.4.7\ldots(3\varkappa-2)}{3.6.9\ldots3\varkappa}x^\varkappa + \cdots \quad x^2 < 1$$
$$= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 - \frac{91}{729}x^5$$
$$+ \frac{728}{6561}x^6 - \cdots$$

14) $$\left\{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right\}^n = 1 + nx + \frac{n(n+3)}{1.2}x^2$$
$$+ \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

15) $$\left\{\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right\}^n = 1 - nx + \frac{n(n-3)}{1.2}x^2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

16) $$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left\{1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \cdots\right.$$

17) $$\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3+dx^4} = 1 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3\right)x^3 + \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{2}ac - \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{8}ba^2 - \frac{5}{64}a^3\right)x^4 + \cdots$$

18) $$\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt[6]{1+x} = 1 + \frac{1}{6}x - \frac{5}{72}x^2 + \frac{55}{1296}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt[7]{1+x} = 1 + \frac{1}{7}x - \frac{3}{49}x^2 + \frac{39}{1029}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt[8]{1+x} = 1 + \frac{1}{8}x - \frac{7}{138}x^2 + \frac{35}{1104}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt[9]{1+x} = 1 + \frac{1}{9}x - \frac{4}{81}x^2 + \frac{68}{2187}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt[10]{1+x} = 1 + \frac{1}{10}x - \frac{9}{200}x^2 + \frac{171}{6000}x^3 - \cdots$$

§. 26.

Polynomial-Reihen.

1) $$\frac{a+bx+cx^2+\cdots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots} = A + Bx + Cx^2 + \cdots$$

$$A\alpha - a = 0$$
$$B\alpha + A\beta - b = 0$$
$$C\alpha + B\beta + A\gamma - c = 0$$
$$D\alpha + C\beta + B\gamma + A\delta - d = 0$$

2) $[a + bx + cx^2 + \cdots]^n = A + Bx + Cx^2 + \cdots$

$$A = a^n$$
$$aB = nbA$$
$$2aC = (n-1)bB + 2ncA$$
$$3aD = (n-2)bC + (2n-1)cB + 3ndA$$

3) $log(1 + ax + bx^2 + \cdots) = A + Bx + Cx^2 + \cdots$

$$A = a$$
$$B = -\tfrac{1}{2}Aa + b$$
$$C = -\tfrac{2}{3}Ba - \tfrac{1}{3}Ab + c$$
$$D = -\tfrac{3}{4}Ca - \tfrac{2}{4}Bb - \tfrac{1}{4}Ac + d$$

4) $e^{ax+bx^2+cx^3+\cdots} = A + Bx + Cx^2 \ldots$

$$A = a$$
$$B = b + \tfrac{1}{2}Aa$$
$$C = c + \tfrac{2}{3}Ab + \tfrac{1}{3}Ba$$
$$D = d + \tfrac{3}{4}Ac + \tfrac{2}{4}Bb + \tfrac{1}{4}Ca$$

5) $ay + by^2 + cy^3 + \cdots = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots$

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$$
$$A = a\alpha$$
$$B = a\beta + b\alpha^2$$
$$C = a\gamma + 2b\alpha\beta + c\alpha^3$$
$$D = a\delta + b\beta^2 + 2b\alpha\gamma + 3c\alpha^2\beta + d\alpha^4.$$

§. 27.

Recurrente Reihen.

Sei $m < n$ und

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots b_n x^n} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

so wird für $\varkappa > m$

$$c_\varkappa = r_1 c_{\varkappa-1} + r_2 c_{\varkappa-2} + \cdots \quad r_\varkappa c_0 \qquad r_\varkappa = \frac{b_\varkappa}{b_0}$$

Die Coefficienten

$$r_1 r_2 \ldots r_\varkappa$$

werden nach Moivre die Relationsscala (*scala relationis*) genannt.

Es ist:

$$a_0 - b_0 c_0 = 0$$
$$a_1 - b_1 c_0 - b c_1 = 0$$
$$a_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1 - b_0 c_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

allgemein

$$c_\varkappa = \frac{(-1)^\varkappa}{b_0^{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_\varkappa & b_\varkappa & b_{\varkappa-1} & \ldots & \ldots & b_1 \end{vmatrix}$$

§. 28.

Summirung einiger Reihen.

1) Sei

$$u_n = \{A_0 + A_1 n + \cdots \quad A_r n^r\} x^{n-1}$$

Man sucht die Summe S_n der ersten n Glieder. Man setze

$$S_n = \{\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots \quad \alpha_r n^r\} x^n - \alpha_0$$

und beachte, dass

$$S_n - S_{n-1} = \alpha_n x^{n-1}$$

so folgt:

$$(x-1)\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots \qquad = A_0$$
$$(x-1)\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4 - \cdots \qquad = A_1$$
$$(x-1)\alpha_2 + 3\alpha_3 - 6\alpha_4 + 10\alpha_5 - \cdots \qquad = A_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x-1)\alpha_r = A_r$$

2) Sei $x^2 < 1$ und die Reihe

$$S = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots$$

convergent, so ist:

$$S = \alpha_1 \frac{x}{1-x} + \varDelta\alpha_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \varDelta^2\alpha_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \cdots$$

Mit Hülfe dieses Theorems lassen sich viele Reihen summiren.

§. 29.

Diverse Reihentheoreme.

1) $x+(1-x)\log(1-x)=\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1}{3.4}x^4+\cdots\quad x^2\leqq 1$

2) $$\frac{3}{2}x^2-\frac{x}{2}-\frac{1-2x+x^2}{2}\log(1-x)=\frac{1}{1.2.3}x^3+\frac{1}{2.3.4}x^4+\frac{1}{3.4.5}x^5+\cdots$$

Klügel, Mathem. Wörterbuch IV, S. 580.

3) $$\frac{1.3\ldots 2n+1}{2.4\ldots 2n+2}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+5}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2n+7}+\cdots=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

4) $$\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n+2}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2n+5}-\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2n+7}+\cdots$$

Klügel, Hindeb. Archiv II, p. 60.

5) $$\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\cdot 2^n=1^2+\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}+\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2}+\cdots$$

Satz von Lagrange: Euler, Acta Petrop., 1781.

6) $$\frac{1}{2a^2}\left\{a\pi\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}-1\right\}=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{4+a^2}+\frac{1}{9+a^2}+\cdots$$

7) $$\frac{1}{2a}\left\{1-\frac{2a\pi}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\right\}=\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{4+a^2}+\frac{1}{9+a^2}-\cdots$$

8) $$\frac{\pi}{2ab}-\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{ab\left(e^{\frac{2a\pi}{b}}-1\right)}=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+4b^2}+\frac{1}{a^2+9b^2}+\cdots$$

9) $$\frac{\pi \cos \frac{b-a}{2n}\pi}{n \sin \frac{b+a}{2n}\pi - n \sin \frac{b-a}{2n}\pi} = 1 + \frac{2b}{n^2-b^2} - \frac{2a}{4n^2-a^2} + \frac{2b}{9n^2-b^2} - \frac{2a}{16n^2-a^2} + \cdots$$

Euler, Com. Petrop., Tom. XII. Novi Comment, Tom. III.

10) Es ist:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots = x\frac{1+x}{1-x} + x^4\frac{1+x^2}{1-x^2} + x^9\frac{1+x^3}{1-x^3} + \cdots$$

$$= \frac{\frac{x}{1-x} - \frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{4x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

Lambert'sche Reihe: die erste Transformation rührt von Clausen und Scherk, die letztere von Eisenstein her.

Sei

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots = A_1 x + A_2 x^2 + \cdots A_r x^r + \cdots$$

und

$$r = l^\lambda m^\mu n^\nu \ldots$$

wobei l, m, n Primzahlen sind, so wird:

$$A_r = (\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1) \ldots$$

Ueber diese Reihe: Lambert, Acta helv., III. Thl. Crelle, IX.

11) $$f(x) = \sum_0^\infty \binom{x}{a} \sum_0^a \varkappa (-1)^\varkappa \binom{a}{\varkappa} f(a-b)$$

Vergl. Mathem. Ann. Bd. 3, S. 311.

12) Sei

$$u_\varkappa = u_{\varkappa-1} + u_{\varkappa-2} \quad \text{also} \quad 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

so ist

$$S_n = u_{n+2} - 2$$

$$u_n^2 - u_{n-p}\, u_{n+p} = (-1)^{n+1-p} (u_{p-1})^2.$$

Sei

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

so wird:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \{a^{n+1} - b^{n+1}\}$$

$$u_n^2 - u_{n-1} u_{n+1} = (-1)^n$$

Reihe von Lamè. Vergl. Nouv. Corresp. Mathem. Tom. V, p. 199 und Tom. I, p. 74.

13) $$\pi = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} + 4a \left\{ \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{4+a^2} + \cdots \frac{1}{a^2+a^2} \right\}$$

Wird $a = 3$, so folgt $\pi = 3,141595\ldots!$

Euler, Corresp. mit Goldbach, S. 221. Catalan, Mem. de Liège 1887. Tom. 13.

$$\pi = \frac{4}{a} + 4a \left\{ \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{4+a^2} + \cdots \frac{1}{\overline{a-1}^2 + a^2} \right\}$$

Journ. de Mathem. de Longchamps, Febr. 1881.

§. 30.

Gauss, hypergeometrische Reihe.

1) $$F = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

2) $$\frac{dF}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$$

3) $$(\gamma - \alpha + \beta) F + \alpha(1-x) F(\alpha+1, \beta, \gamma) = (\gamma - \beta) F(\alpha, \beta-1, \gamma)$$

4) $$(\gamma - \alpha + 1) F + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma) = (\gamma - 1) F(\alpha, \beta, \gamma - 1)$$

5) $$(\gamma - \beta - 1) F + \beta F(\beta+1, \alpha, \gamma) = (\gamma - 1) F(\alpha, \beta, \gamma - 1)$$

6) $$(\beta - \alpha) F + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma) = \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma)$$

7) $$(\gamma - \alpha - \beta) F - (\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \beta, \gamma) + \beta(1-x) F(\alpha, \beta+1, \gamma) = 0.$$

8) $$\gamma(1-x) F - \gamma F(\alpha - 1, \beta, \gamma) + (\gamma - \beta) x F(\alpha, \beta, \gamma+1) = 0.$$

9) $$\gamma(\alpha - \gamma x + \beta x) F - \alpha\gamma(1-x) F(\alpha+1, \beta, \gamma) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) x F(\alpha, \beta, \gamma+1) = 0.$$

10) $$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) - F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma+1)} x F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1) = 0.$$

Sei

$$\Pi(\varkappa, z) = \frac{\varkappa!\, \varkappa^z}{(z+1)\ldots(z+\varkappa)}$$

11) $$F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Pi(\varkappa,\gamma-1)\,\Pi(\varkappa,\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\varkappa,\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\varkappa,\gamma-\beta-1)} F(\alpha,\beta,\gamma+\varkappa)$$

Die Function F ist für

$x < 1$ convergent,

$x > 1$ divergent,

$x = 1$ $\gamma > \alpha + \beta$ convergent,

$\gamma < \alpha + \beta$ divergent.

Ist

$$V^{-n} = \{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\}^{-n} = A_0 + 2A_1\cos\varphi + 2A_2\cos 2\varphi + \cdots$$

so ist

$$A_r = \binom{n}{r} a^{-2n-r} b^r F\left[n, n+r, r+1, \left(\frac{b}{a}\right)^2\right].$$

§. 31.

Einige öfters vorkommende numerische Reihen.

1) $$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \cdots$$

2) $$\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \cdots$$

3) $$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \cdots$$

4) $$1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \cdots$$

5) $$\frac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}} = 1 - \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \cdots$$

6) $$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = 1 + \frac{1.1}{2.4} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} + \cdots$$

7) $$\log 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \cdots$$

8) $$\frac{1}{2} - \log 2 = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} - \cdots$$

9) $$\frac{1}{4}\log 2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \cdots$$

NB. $\log 2 = 0{,}69\,314\,718$

10) $\frac{3}{4} - log\,2 = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \cdots$

11) $\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \cdots$

Wegen der letzten fünf Reihen vide Stern, Lehrbuch der allgemeinen Analysis, S. 447.

12) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e = 2{,}718281828459045\ldots$

13) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \frac{1}{e} = 0{,}3678794412\ldots$

14) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots = cos\,1 = 0{,}5403023059\ldots$

$$= cos\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

15) $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots = sin\,1 = 0{,}8414709848\ldots$

$$= sin\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

16) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots = cos\,i = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$

$$= 1{,}5430806348\ldots$$

17) $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \cdots = \frac{1}{i}\,sin\,i = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

$$= 1{,}1752011936\ldots$$

§. 32.

Unendliche Producte.

1) Sei $log(1 + \alpha_\varkappa) = \alpha_\varkappa - \varrho\,\alpha_\varkappa^2$ ϱ ein Mittelwerth, so wird

$$\Pi(1 + \alpha_\varkappa) = e^{\Sigma\alpha\varkappa - \varrho\Sigma\alpha\varkappa^2}$$

Zur Beurtheilung der Convergenz, beziehungsweise der Divergenz dient folgende Tafel, in welcher A, B, C, wesentlich endliche Zahlen sind.

$lim\, \Sigma\, \alpha_\varkappa$	$lim\, \Sigma\, \alpha_\varkappa^2$	$lim\, \Pi$	Π
$-\infty$	B	0	convergent
$-\infty$	∞	0	„
A	B	C	„
A	∞	0	„
$+\infty$	B	∞	divergent
$+\infty$	∞	$\frac{\infty}{\infty}$	unbestimmt

2) $v_1 \frac{v_1 + v_2}{v_1} \cdot \frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1 + v_2} \cdots = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$

3) $v_1 v_2 v_3 \ldots = v_1 + v_1 (v_2 - 1) + v_1 v_2 (v_3 - 1) + \cdots$

4) $$\frac{1}{(1 - v_1)(1 - v_2) \ldots} = 1 + \frac{v_1}{1 - v_1} + \frac{v_2}{(1 - v_1)(1 - v_2)} + \frac{v_3}{(1 - v_1)(1 - v_2)(1 - v_3)}$$

5) $$\frac{b_1}{b_1 - a_1} \cdot \frac{b_2}{b_2 - a_2} \cdots = 1 + \frac{a_1}{b_1 - a_1} + \frac{a_2 b_1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} + \cdots$$

6) $$\frac{a_1 a_2 a_3 \ldots}{b_1 b_2 b_3 \ldots} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 - b_2}{b_2} \cdot \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_3 - b_3}{b_3} \cdot \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \cdots$$

7) $$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9 \pi^2}\right) \cdots$$

8) $$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{4 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{4 x^2}{9 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{4 x^2}{16 \pi^2}\right) \cdots$$

9) $$tgn \frac{m \pi}{2 n} = \frac{m}{n - m} \cdot \frac{2 n - m}{n + m} \cdot \frac{2 n + m}{3 n - m} \cdot \frac{4 n - m}{3 n + m} \cdot \frac{4 n + m}{5 n - m} \cdots$$
$$= \frac{\pi}{2} \frac{n}{n - m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 n - m}{n + m} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2 n + m}{3 n - m} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4 n - m}{3 n + m}$$

10) $$\sec \frac{m \pi}{2 n} = \frac{n}{n - m} \cdot \frac{n}{n + m} \cdot \frac{3 n}{3 n - m} \cdot \frac{3 n}{3 n + m} \cdots$$
$$= \frac{2}{\pi} \frac{n}{n - m} \frac{2 n}{n + m} \cdot \frac{2 n}{3 n - m} \cdot \frac{4 n}{3 n + m} \cdots$$

11) $$cosec\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{2n-m}\cdot\frac{3n}{2n+m}\cdot\frac{3n}{4n-m}\cdot\frac{5n}{4n+m}$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdots$$

12) Es ist

$$\sqrt[r]{a}=lim P_0 P_1 \dots \; P_n,$$

wenn

$$P_n=\frac{(na+1)r+1}{(na+1)r}\cdot\frac{(na+2)r+1}{(na+2)r}\cdots\frac{(n+1)ar+1}{(n+1)ar}$$

und der Fehler, wenn man die ersten $n+1$ Factoren behält, ist kleiner als:

$$P_0 P_2 \dots \; P_n \frac{a-1}{(n+1)r+1}$$

Bulletins de l'Académie de Bruxelles 1849.

13) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1-x^8)\dots = 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$

14) $$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots = 1-x-x^2+x^5+x^7$$
$$-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}$$

$$=\sum_0^\infty (-1)^m x^{\frac{3m^2\mp m}{2}}$$

Die dritte Potenz dieser Reihe ist:

$$=\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}$$

Vergl. Jacobi, Crelle's Journ. Bd. XXI. Nouv. Ann., T. IX.

15) $$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots = 1+x+x^2+2x^3$$
$$+2x^4+3x^5+4x^6+\cdots$$

16) $$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots}=1+x+2x^2+3x^3$$
$$+5x^4+7x^5+\cdots$$

Jeder Coefficient in 15) und 16), zeigt an, auf wie vielerlei Arten der Exponent durch Addition aus der Zahlenreihe 1, 2, 3... sich bilden lasse, und zwar in 15), wenn keine Wiederholungen, in 16), wenn solche gestattet sind.

Vergl. Euler, Einleitung in die Analys. des Unendlichen, §. 15.

$$17)\quad \left(1+\frac{z}{1-z}\right)\left(1+\frac{rz}{1-rz}\right)\left(1+\frac{r^2z}{1-r^2z}\right)\cdots$$
$$=1+\frac{z}{1-r}+\frac{z^2}{(1-r)(1-r^2)}+\frac{z^3}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}+\cdots$$

$$18)\quad 1-\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}$$
$$-\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots$$

ist $= \begin{cases} 0 \\ (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots \end{cases}$

je nachdem $n \left\{ \begin{array}{c} \text{eine gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ Zahl ist.

Man beachte für 17) die Eigenschaft $f(r, rz) = f(r, z)(1-z)$, so lässt sich 18) leicht aus 17) ableiten.

$$19)\quad \frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots} \quad \text{(Wallis Formel)}$$

$$20)\quad e = \frac{2}{1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{\frac{1}{8}}\ldots$$

Catalan, Compt. Rend. 1877. Liouville's Journ. 1875.

Mehreres findet man in allen Lehrbüchern der Analysis, insbesondere in Euler's „Einleitung in die Analysis des Unendlichen". Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionslehre, p. 206 (Convergenz).

Zusatz zu §. 32.

Herr Weierstrass giebt in seinen „Abhandlungen aus der Functionenlehre", S. 206, eine Anzahl von allgemeinen Theoremen, die wir hier reproduciren wollen.

I. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2\ \ldots$$

sämmtlich reell und kleiner als Eins sind und zugleich diese Reihe eine endliche Summe hat, so convergiren die Producte

$$P_n = (1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)\ldots$$
$$Q_n = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots$$

für $lim\, n = \infty$, beide gegen eine bestimmte, positive Grenze, und zwar das erste beständig abnehmend, das andere beständig zunehmend.

II. Wenn dagegen die obige Reihe keine bestimmte Summe hat, so wird für $lim\, n = \infty$, P_n beständig positiv bleibend und abnehmend, sich der Grenze Null nähern, während Q_n über jede Grenze hinaus wächst.

III. Wenn die Glieder der Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots$$

sämmtlich reell sind, und von einem bestimmten Gliede an beständig dasselbe Zeichen behalten und kleiner als Eins bleiben, so wird das Product

$$P_n = (1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots$$

für $lim = \infty$, gegen eine bestimmte Grenze {die, sobald keine der Grössen $u_0, u_1 \ldots = -1$ ist, nicht Null ist} convergiren, wofern die Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots$$

eine endliche Summe hat.

Wenn aber das Letztere nicht der Fall ist, so wird

$$P_n = \infty \text{ oder } P_n = 0,$$

je nachdem die Grössen

$$u_0,\ u_1, \ldots$$

von einer bestimmten Grösse an stets positiv oder stets negativ sind.

IV. Auch wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots$$

complexe Werthe haben und die Reihe unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder eine endliche Summe hat, nähert sich das Product

$$P_n = (1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots$$

für $lim\, n = \infty$ einer bestimmten Grenze, die von Null verschieden ist, wofern nicht eine der Grössen $u_0, u_1, \ldots = -1$ ist.

§. 33.

Kettenbrüche.

Wir bezeichnen

1) $\dfrac{b_1}{a_1 + \dfrac{b_2}{a_2 + \cdots}}$ mit $\left[\dfrac{b_1}{a_1}\,\dfrac{b_2}{a_2}\cdots\right]$

2) $\dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \cdots}}$ mit $[a_1\, a_2 \ldots]$

3) $\dfrac{1}{a_1 - \dfrac{1}{a_2 - \cdots}}$ mit $(a_1\, a_2 \cdots)$

4) So wird der Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2}\cdots\right],$$

in welchem alle a und b positiv sind $\begin{cases}\text{convergiren}\\\text{divergiren}\end{cases}$, je nachden $\begin{cases}\text{wenigstens eine}\\\text{keine}\end{cases}$ der beiden Reihen

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1 b_3}\, a_3 + \frac{b_2 b_4}{b_1 b_3 b_5}\, a_5 + \cdots$$

$$\frac{b_1}{b_2}\, a_2 + \frac{b_1 b_3}{b_2 b_4}\, a_4 + \frac{b_1 b_3 b_5}{b_2 b_4 b_6}\, a_6 + \cdots$$

divergirt. (Stern, Crelle 37.)

5) Der Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1}\,\frac{b_2}{a_2}\cdots\right],$$

in welchem alle a und b positiv sind, convergirt sicher, wenn

$$lim\, \frac{a_n\, a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0 \text{ für } lim\, n = \infty$$

6) Der Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1},\ \frac{-b_2}{a_2},\ \frac{-b_3}{a_3},\ \cdots\right]$$

convergirt immer, wenn

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$$

echte Brüche sind, deren Zähler und Nenner aus ganzen positiven Zahlen bestehen.

Bezüglich der Beweise siehe: Schlömilch, Handbuch der algebr. Analysis.

7) Seien

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_n}{q_n}$$

die Näherungsbrüche von

$$\frac{a}{b} = \left[\frac{b_1}{a_1} \frac{b_2}{a_2} \dots\right],$$

so ist:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{a_1}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 a_2 b_1 + b_3 b_1}{a_3 (a_1 a_2 + b_2) + a_1 b_3},$$

8) allgemein

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$

und auch

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n q_{n-2} \quad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

oder

$$p_n = b_1 \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \dots 0 \\ b_3 & a_3 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & -1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix} \qquad q_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \dots 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

9) Ist speciell

$$\frac{a}{b} = [a_1 a_1 a_1 \dots],$$

so wird

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a^{n-1} + \binom{n-2}{1} a^{n-3} + \binom{n-3}{2} a^{n-5} + \cdots}{a^n + \binom{n-1}{1} a^{n-2} + \binom{n-2}{2} a^{n-4} + \cdots}$$

10) Ist der Kettenbruch convergent, so ist

$$\alpha) \quad \frac{p_n}{q_n} \gtrless \frac{a}{b} \gtrless \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

$$\beta) \quad \pm\left(\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right) < \frac{1}{q_n^2}$$

$$\gamma) \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\pm 1}{q_n\, q_{n+1}}$$

$$\delta) \quad p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = \pm 1.$$

12) $(a_1\, a_2\, a_3 \,.\,.\,.\, a_n) = (1\,1\,1\, a_1 \,.\,.\,.\, 1\,1\,1\, a_n)$

13) Ist

$$x = (a_1\, a_2 \ldots y),$$

so ist auch

$$y = (a_n\, a_{n-1} \ldots x)$$

und

$$A + Bx + Cy + Dxy = 0,$$

dabei ist:

$$\frac{A}{B} = -(a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}) \qquad \frac{A}{C} = -(a_n \ldots a_2)$$

$$\frac{C}{D} = -(a_1 \ldots a_n) \qquad \frac{B}{D} = -(a_n \ldots a_1)$$

$$\frac{A}{D} = (a_1 \ldots a_n)\,(a_n \ldots a_2) = (a_n \ldots a_1)\,(a_1 \ldots a_{n-1})$$

Vid. Lieblein, Aufgabensammlung aus der algebr. Analysis, S. 179 β.)

14) Ist

$$\frac{P}{Q} = [a_1\, a_2 \ldots a_n] = [a_n \ldots a_1],$$

so wird der Bruch reciprok genannt und es wird

$$q_{n-1} = \frac{Q^2 \pm 1}{P}.$$

Es muss $P > 2\,Q$ und $Q^2 \pm 1$ durch P theilbar sein.

15) Jede Grösse, die sich in einen periodischen Kettenbruch entwickeln lässt, ist eine irrationale Wurzel einer Gleichung zweiten Grades.

16) Sei

$$x = \frac{A}{A_1} = a + \frac{A_2}{A_1},\; x_1 = a_1 + \frac{A_3}{A_2}, \cdots\; x_n = A_n,$$

so dass

$$x = a + [a_1 \,.\,.\,.\, a_n x_n]$$

wird, so werden die Grössen

$x\, x_1 \ldots x_n$ die vollständigen,

$a\, a_1 \ldots a_{n-1}$ die unvollständigen

Quotienten genannt.

17) Entwickelt man die irrationalen Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit ganzen Coefficienten in Kettenbrüche, so ist die Periode der unvollständigen Quotienten des einen die Umkehrung der Periode des anderen.

18) Sei

$$x = \frac{E + \sqrt{A}}{D} \text{ eine Wurzel von } D x^2 - 2 E x + F = 0,$$

so dass $A = E^2 - D F$, sei ferner $x' = \dfrac{E' + \sqrt{A}}{D'}$ ein beliebiger vollständiger Quotient, a der in ihm enthaltene unvollständige,

$$a_1\, a_2 \ldots a_{\varkappa-1}$$

die ganze Periode die mit a beginnt, ferner

$$\frac{\alpha}{\beta} = a + [a_1\, a_2 \ldots a_{\varkappa-1}]$$

$$u_1 = \alpha + \beta \frac{E'}{D'}, \quad v_1 = \frac{\beta}{D'},$$

$$u_n - v_n \sqrt{A} = (u_1 - v_1 \sqrt{A})^n,$$

so wird:

$$u_1^2 - A v_1^2 = \pm 1$$

$$u_n^2 - A v_n^2 = (\pm 1)^n.$$

Soll demnach $y^2 - A z^2 = \pm H$, wo $H < \sqrt{A}$ und A kein Quadrat ist, in ganzen Zahlen lösbar sein, so muss H unter den, aus der Entwickelung von $\sqrt{A}$ folgenden Nennern, der vollständigen Quotienten, welche die erste Periode bilden, vorkommen.

Vergleiche Tafel im Anhange.

19) Es ist:

$$\cfrac{x + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cdots}}}{a} = \left[\frac{\alpha}{a}, -\frac{\alpha\beta}{b\alpha + \beta}, -\frac{b\alpha\gamma}{c\beta + \gamma}, -\frac{c\beta\delta}{d\gamma + \delta}, \cdots\right]$$

20) $$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \cdots = \left[\frac{1}{a_1}, \frac{a_1}{a_2 - 1}, \frac{a_2}{a_3 - 1}, \frac{a_3}{a_4 - 1}, \cdots\right]$$

21) $$\frac{1}{a_1} + \frac{x}{a_1 a_2} + \frac{x^2}{a_1 a_2 a_3} + \cdots = \left[\frac{1}{a_1}, \frac{-a_1 x}{a_2 + x}, \frac{-a_2 x}{a_3 + x}, \ldots\right]$$

22) Sei,

$$\varphi(\alpha\beta\gamma x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} + \cdots$$

$$\psi(\alpha\beta\gamma x) = \frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x)},$$

so wird:

$$\psi(\alpha\beta\gamma x) = \left[\frac{1}{1}, -\frac{a x}{1}, -\frac{b x}{1}, \ldots\right.$$

wobei

$$a = \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\gamma+1} \qquad b = \frac{\beta+1}{\gamma+1}\cdot\frac{\gamma+1-\alpha}{\gamma+2}$$

$$c = \frac{\alpha+1}{\gamma+2}\cdot\frac{\gamma-\beta+1}{\gamma+3} \qquad d = \frac{\beta+2}{\gamma+3}\cdot\frac{\gamma+2-\alpha}{\gamma+4}$$

$$e = \frac{\alpha+2}{\gamma+4}\cdot\frac{\gamma-\beta+2}{\gamma+5} \qquad f = \frac{\beta+3}{\gamma+5}\cdot\frac{\gamma+3-\alpha}{\gamma+6}$$

23) $x = A - B + C - D \ldots = \left[\frac{A}{1}\,\frac{B}{A-B}\,\frac{AC}{B-C}\,\frac{BD}{C-D}\,\frac{CE}{D-E}\right]$

24) $x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \cdots = \left[\frac{1}{A}\,\frac{A^2}{B-A}\,\frac{B^2}{C-B}\,\frac{C^2}{D-C}\cdots\right]$

25) $\frac{\pi}{4} = \left[1\,\frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}\cdots\right] = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots\right]$

$$= \left[\frac{1}{1}\,\frac{1^2}{3}\,\frac{2^2}{5}\,\frac{3^2}{7}\cdots\right]$$

26) $1 - e = \left[\frac{1}{1}\,\frac{1}{1}\,\frac{2}{2}\,\frac{3}{3}\,\frac{4}{4}\cdots\right]$

27) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left[\frac{x}{1}\,\frac{x^2}{3}\,\frac{x^2}{5}\,\frac{x^2}{7}\cdots\right]$

28) $tgn\, x = \left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7}\cdots\right]$

29) $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \left[\frac{x}{1} - \frac{1^2 x^2}{3} - \frac{2^2 x^2}{5} - \frac{3^2 x^2}{7}\cdots\right]$

30) $e^x = 1 + \left[\frac{x}{1-x}, \frac{x}{2-x}, \frac{2x}{3-x}, \frac{3x}{4-x}, \cdots\right]$

31) $2xe^{x^2}\int_x^\infty e^{-t^2}dt = \left[\frac{1}{1}, \frac{q}{1}, \frac{2q}{1}, \frac{3q}{1}, \frac{4q}{1}, \ldots\right], q = \frac{1}{2x^2}.$

Laplace, Mécanique celeste, Tom. IV, Liv. X. Jacobi, Crelle's Journ. 12, S. 346.

32) $$\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} = e^x \left[\frac{1}{x+1}, \frac{-1}{x+3}, \frac{-1}{\frac{x+5}{4}}, \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{x+7}{9}}, \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{x+9}{16}} \cdots \right]$$

Laguerre: Bulletin de la Soc. math., Tom. VII, p. 72.

Ueber Kettenbrüche: Serret, Handbuch der höh. Algebra, deutsch von Werthheim. Euler, Com. Petrop., Tom. II. (Integrale.) Stern, Crelle Bd. 37 und die Lehrbücher der algeb. Analysis von Stern, Schlömilch etc., ferner Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen.

§. 34.

Zahlentheorie.

1. Theilbarkeit der Zahlen.

1) Sind $a, b, c, \ldots k, l$, sämmtliche von einander verschiedene, in m enthaltene Primzahlen, so ist

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

die Anzahl aller derjenigen Zahlen, 1, 2, 3, ... m, die gegen m relativ prim sind.

Sei

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

so wird

$$\varphi(m) = (a-1)a^{\alpha-1}(b-1)b^{\beta-1}\ldots$$

2) Es ist

$$\varphi(m m') = \varphi(m)\varphi(m')$$

$$m = \sum \varphi\left(\frac{m}{\delta}\right) = \sum \varphi(\delta),$$

das Summenzeichen bezieht sich auf sämmtliche Divisoren δ der Zahl m.

3) Die Summe aller Maasse von m ist

$$S = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdots$$

Die Anzahl aller Maasse dagegen

$$n = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

4) Eine **vollkommene Zahl** ist dargestellt durch die Form

$$(2^{n+1} - 1)2^n.$$

Es sind 6, 28, 496, 8128, . . . vollkommene Zahlen.

5) Ist für zwei Zahlen die Summe S (Nr. 3) gleich, so nennt man sie **amicable Zahlen**, z. B. 210 und 366.

6) Seien $a, b, c, \ldots k, l$ Primzahlen, und N durch das Product $a, b, c \ldots k, l$ theilbar, so giebt es von 1 bis N, z Zahlen, die kleiner als N und zu N prim sind. Es ist

$$z = \frac{N}{a\,b\,c \ldots k\,l}(a-1)(b-1)\ldots(l-1). \quad \text{(Euler'scher Satz.)}$$

2. Die Lehre von den Congruenzen.

1) Sind zwei Zahlen a und b so beschaffen, dass $a - b$ durch p theilbar ist, so nennt man a **und** b **nach** p **congruent**. Die Zahl p heisst der Modul.

2) Man hat

$$a - b = mp$$

und schreibt

$$a \equiv b \ (mod\, p)$$

3) Es ist immer

$$a \equiv a \ (mod\, p)$$

4) Ist

$$a \equiv b \ (mod\, p), \quad b \equiv c \ (mod\, p),$$

so ist auch

$$a \equiv c \ (mod\, p)$$

5) Ist

$$a \equiv b \ (mod\, p), \quad m \equiv n \ (mod\, p),$$

so wird

$$a \pm m = (b \pm n) \ (mod\, p)$$

$$a\,m = b\,n \ (mod\, p).$$

6) Sei $\varphi(\varkappa)$ wie in Nr. 1), so ist, wenn a relativ prim zu $\varkappa$ ist

$$a^{\varphi(\varkappa)} = 1 \ (mod\, \varkappa) \quad \text{(Euler).}$$

Speciell, ist p eine Primzahl und a durch p nicht theilbar, so ist

$$a^{p-1} = 1 \ (mod\, p) \quad \text{(Fermat).}$$

7) Sind $a, b, c \ldots g, h$ gegebene ganze Zahlen, m positiv, so heisst jeder Werth von x, der der Congruenz

$$a\,x^m + b\,x^{m-1} + c\,x^{m-2} + \cdots g\,x + h \equiv 0 \ (mod\, \varkappa)$$

genügt, eine Wurzel dieser Congruenz. Man hat alle Wurzeln, wenn man die unter einander incongruenten Wurzeln kennt. Wir wollen diese letzteren die eigentlichen Wurzeln nennen. Eine Congruenz m ten Grades hat höchstens m eigentliche Wurzeln.

8) Ist a relativ prim zu $\varkappa$, so hat die Congruenz

$$a x \equiv b \ (mod\, \varkappa)$$

nur eine eigentliche Wurzel.

9) Damit die Congruenz

$$a x \equiv b \ (mod\, \varkappa)$$

überhaupt Wurzeln besitze, ist erforderlich, dass b durch den grössten gemeinschaftlichen Divisor δ der beiden Zahlen a und $\varkappa$ theilbar sei; ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Congruenz genau δ eigentliche Wurzeln.

10) Die Auflösung der Congruenz

$$a x \equiv 1 \ (mod\, b)$$

ist identisch mit der Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$a x - b y = 1.$$

Diese wird mit Hülfe des Satzes Kettenbrüche Nr. 11 geleistet.

11) Es ist p eine Primzahl, so gilt der Satz:

$$(p - 1)! \equiv -1 \ (mod\, p) \quad \text{(Wilson's Satz).}$$

12) Ist δ ein Divisor von $p - 1$, so besitzt die Congruenz

$$x^{\delta} \equiv 1 \ (mod\, p)$$

stets δ eigentliche Wurzeln.

3. Theorie der quadratischen Reste.

1) Sei D relativ prim zu $\varkappa$ und

$$x^2 \equiv D \ (mod\, \varkappa).$$

Ist diese Congruenz möglich, d. h. besitzt sie Wurzeln, so heisst D ein (quadratischer) Rest der Zahl $\varkappa$, sonst ein (quadratischer) Nichtrest. Sei p eine ungerade Primzahl,

2) So ist

D ein Rest, wenn $D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\, p)$

D ein Nichtrest, wenn $D^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (mod\, p)$

3) $\begin{cases} \text{Rest mal Rest giebt Rest,} \\ \text{Nichtrest mal Nichtrest giebt Rest,} \\ \text{Rest mal Nichtrest giebt Nichtrest.} \end{cases}$

4) Legendre'sches Symbol

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \pm 1 \begin{cases} + \text{ wenn } D \text{ ein Rest von } p, \\ - \text{ wenn } D \text{ ein Nichtrest von } p \end{cases}$$

5) Ist p eine ungerade Primzahl und D durch p nicht theilbar, so ist für die Möglichkeit der Congruenz

$$x^2 \equiv D \ (mod\, p^x) \quad (x \text{ positiv und ganz})$$

erforderlich und hinreichend, dass

$$\left(\frac{D}{p}\right) = 1.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so besitzt die vorgelegte Congruenz zwei eigentliche Wurzeln α und $-\alpha$, die gefunden werden können, sobald man eine Wurzel der Congruenz

$$x^2 \equiv D \ (mod\, p)$$

gefunden hat.

6) Seien D und $\varkappa$ relative Primzahlen und

$$x^2 \equiv D \ (mod\, \varkappa),$$

ferner σ die Anzahl der eigentlichen Wurzeln, so ist für diese Congruenz, für

a) $\varkappa$ ungerade $\sigma = 2^\mu$.

Dabei ist μ die Anzahl der von einander verschiedenen, in $\varkappa$ aufgehenden Primzahlen, für welche zugleich

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +1.$$

b) Ist $\varkappa$ das Doppelte einer ungeraden Zahl, so gilt *a*).

c) Ist $\varkappa$ das Vierfache einer ungeraden Zahl und dazu $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, $D \equiv 1 \ (mod\, 4)$, so ist $\sigma = 2^{\mu+1}$.

d) Ist $\varkappa = 0 \ (mod\, 8)$ und $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, $D \equiv 1 \ (mod\, 8)$, so ist $\sigma = 2^{\mu+2}$.

7) Die Congruenz

$$Ax^2 + By^2 + C \equiv 0 \ (mod\, p)$$

ist immer möglich, wenn p eine Primzahl ist.

8) Die Zahl -1 ist ein quadratischer Rest aller Primzahlen von der Form $4n + 1$, dagegen ein Nichtrest jener von der Form $4n + 3$.

9) Die Zahl 2 ist ein quadratischer Rest aller Primzahlen von der Form $8n + 1$, $8n + 7$, ein Nichtrest jener von der Form $8n + 3$, $8n + 5$.

10) Sind p und q zwei positive ungerade Primzahlen, von denen mindestens eine die Form $4n + 1$ hat, so ist q ein quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p ein quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist.

Haben aber beide Primzahlen p und q die Form $4n + 3$, so ist q ein quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p quadratischer Nichtrest oder Rest von q ist, d. h. es ist

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \text{ (Reciprocitäts-Satz von Legendre).}$$

11) Sei P eine ungerade Zahl, die in ihre Primfactoren $pp'..$ zerlegt erscheint, sei ferner m irgend eine zu P relative Primzahl, so ist

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right) \cdots = 1$$

(nicht umkehrbar).

12) Ist m relativ prim gegen jede der beiden ungeraden Zahlen P und Q, so ist

$$\left(\frac{m}{P}\right)\left(\frac{m}{Q}\right) = \left(\frac{m}{PQ}\right).$$

13) Sind $l, m, n, p \ldots$ relativ prim zu P, wobei P ungerade ist, so folgt

$$\left(\frac{l}{P}\right)\left(\frac{m}{P}\right) \cdots = \left(\frac{l\,m\,n\ldots}{P}\right).$$

14) Ist m relativ prim zu der ungeraden Zahl P und

$$m \equiv m' \ (mod\, P),$$

so ist

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m'}{P}\right).$$

15) Ist P eine ungerade Zahl, so ist

$$\left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$

16) Sind die beiden positiven ungeraden Zahlen P und Q relative Primzahlen, so ist

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}$$ (Reciprocitäts-Satz von Jacobi).

Näheres in: Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie. Braunschweig.

§. 35.

Auflösung der unbestimmten Gleichungen.

1) Sei

$$a x - b y = c$$

gegeben, man suche

$$a \alpha - b \beta = \pm 1$$

mit Hülfe der Kettenbruchentwickelung. Sei sodann q eine beliebige ganze Zahl, so ist

$$\pm x - \alpha c + b q = 0$$
$$\pm y - \beta c + a q = 0.$$

2) Sei

$$a + b x + c y + d x^2 + e x y + f y^2 = 0.$$

Man setze:

$$c^2 - 4 a f = \alpha \quad 2 c e - 4 b f = \beta \quad e^2 - 4 d f = \gamma,$$

so wird:

$$2 f y + e x + c = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}.$$

Sei nun

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = v^2,$$

so ist, wenn

$$A = 4\gamma \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma = B$$

gesetzt wird,

$$2\gamma x + \beta = \sqrt{A v^2 + B}.$$

Sei nun

$$A v^2 + B = w^2,$$

so ist die Aufgabe gelöst, sobald wir für v und w nur je einen dieser Gleichung genügenden Werth angeben können. (Vergl. das Rationalmachen.)

Diese Aufgabe behandelt §. 18 der Kettenbrüche.

3) Um $A + B x + C y + D x^2 + E x y = 0$ aufzulösen, beachte man, dass

$$E^2 y = - D E x - B E + C D - \frac{A E^2 - B C E + C^2 D}{C + E x}$$

und suche die ganzzahligen Auflösungen von

$$(A E^2 - B C E + c^2 D) z - E x - C = 0.$$

Diese letztere Methode ist jedoch nicht immer brauchbar, sie ist aber sehr bequem, sobald D ein Vielfaches von E ist.

§. 36.

Das Rationalmachen.

(Unbestimmte Analytik.)

Seien p und q beliebige ganze und positive Zahlen.

1) $\sqrt{a + bx}$, $x = \frac{p^2 - a}{b}$

2) $\sqrt{bx + cx^2}$, $x = \frac{bq^2}{p^2 - cq^2}$

3) $\sqrt{a + \gamma^2 x^2}$, $x = \frac{aq^2 - p^2}{2\gamma pq}$

4) $\sqrt{\alpha^2 + cx^2}$, $x = \frac{2\alpha pq}{cq^2 - p^2}$

5) $\sqrt{a + bx + \gamma^2 x^2}$, $x = \frac{p^2 - aq^2}{bq^2 - 2\gamma pq}$

6) $\sqrt{\alpha^2 + bx + cx^2}$, $x = \frac{bq^2 - 2\alpha pq}{p^2 - cq^2}$

7) $\sqrt{(fx + g)(hx + k)}$, $x = \frac{gp^2 - \varkappa q^2}{hq^2 - fp^2}$

8) $\sqrt{(dx + e)^2 + (fx + g)(hx + k)}$, $x = \frac{kq^2 - gp^2 - 2epq}{fp^2 + 2dpq - hq^2}$

9) $\sqrt{ay^2 + \gamma^2 x^2}$, $x = aq^2 - p^2$, $y = 2\gamma pq$

10) $\sqrt{ay^2 + bxy + \gamma^2 x^2}$, $x = p^2 - aq^2$, $y = bq^2 - 2\gamma pq$

11) $\sqrt[m]{\left(\frac{a + bx}{\alpha + \beta x}\right)^n}$, $x = \frac{a - \alpha p^m}{\beta p^m - b}$.

12) Um $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational zu machen, suche man w so, dass $a + bw + cw^2 = f^2$, und setze sodann

$$g = b + 2cw \quad c = h,$$

so wird:

$$x = w + \frac{gq^2 - 2fpq}{p^2 - hq^2}.$$

Mehreres darüber: Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, I. Bd. Sowie in seiner Algebra mit Zusätzen, 3 Thle., Berlin und Frankfurt 1796. Sowie das bei den „Figurirten Zahlen" citirte Werk.

§. 37.

Elimination.

I. Sylvester-Hesse. Um x aus

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

zu eliminiren, bilde man:

$$\begin{array}{rl} ax^3 + bx^2 + cx & = 0 \\ ax^2 + bx + c & = 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x & = 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & = 0 \end{array} \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

so ist $\varDelta = 0$ das Eliminationsresultat.

II. Cayley. Sei x aus $\varphi(x) = 0 \quad \theta(x) = 0$ zu eliminiren, man bilde

$$\frac{\varphi(x)\,\theta(y) - \varphi(y)\,\theta(x)}{x - y} = \varphi_1(x) + y\,\varphi_2(x) + \cdots = 0$$

da y beliebig ist, so muss $\varphi_1(x) = 0 \quad \varphi_2(x) = 0 \ldots$

Die Elimination ist nun leichter auszuführen.

Vergleiche: Serret, Handbuch der höheren Algebra.

§. 38.

Interpolation.

Sei $\psi(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \ldots$ und von der Function $f(x)$ die Werthe $f(\alpha)\,f(\beta) \ldots$ gegeben, so ist näherungsweise

$$f(x) = \psi(x) \left\{ \frac{f(\alpha)}{(x - \alpha)\,\psi'(\alpha)} + \frac{f(\beta)}{(x - \beta)\,\psi'(\beta)} + \cdots \right. \text{(Lagrange).}$$

Es ist

$$u_{n+\frac{x}{r}} = u_n + \frac{x}{r}\varDelta u_n - \frac{x(r-x)}{1.2.r^2}\varDelta^2 u_n + \frac{x(r-x)(2r-x)}{1.2.3r^3}\varDelta^3 u_n - \cdots$$

Ist $r = 10$

$$u_{n+\frac{x}{10}} = u_n + p_1, \varDelta u_n - p_2, \varDelta^2 u_n + p_3, \varDelta^3 u_n - \cdots$$

x	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	0,1	0,045	0,0285	0,0207	0,0161
2	0,2	0,080	0,0480	0,0336	0,0255
3	0,3	0,105	0,0595	0,0402	0,0297
4	0,4	0,120	0,0640	0,0416	0,0299
5	0,5	0,125	0,0625	0,0391	0,0273
6	0,6	0,120	0,0560	0,0336	0,0228
7	0,7	0,105	0,0455	0,0262	0,0173
8	0,8	0,080	0,0320	0,0176	0,0113
9	0,9	0,045	0,0165	0,0866	0,0537

Zusatz zu §. 38.

I. Es sind irgend eine Anzahl zu gegebenen Zeiten $a, b, c, \ldots n$ beobachteter Werthe $u_a, u_b, u_c, \ldots u_n$ einer Grösse u gegeben; man soll die Werthe der successiven Differentialquotienten dieser Grösse für eine andere Zeit x berechnen:

Man hat

$$\frac{d\,u_x}{d\,x} = \pm \left\{\frac{b\,c \ldots n\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots \frac{1}{n}\right)}{(a-b)\,(a-c)\ldots(a-n)}\right. u_a + \cdots$$

$$\frac{d^2\,u_x}{d\,x^2} = \mp \left|\frac{b\,c \ldots n\left(\frac{1}{b\,c} + \frac{1}{b\,d} + \cdots \frac{1}{m\,n}\right)}{1.2.(a-b)(a-c)\ldots(a-n)}\right. u_a + \cdots$$

Laplace's Methode zur Berechnung von Kometenbahnen beruht auf diesem Satze.

II. Drei Beobachtungswerthe, u_a, u_b, u_c, einer Grösse u in der Nähe ihres Maximums oder Minimums, sowie die zugehörigen Beobachtungszeilen a, b, c sind gegeben; man soll die Zeit x des Maximums oder Minimums selbst finden.

Es ist

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{(b^2 - c^2)\,u_a + (c^2 - a^2)\,u_b + (a^2 - b^2)\,u_c}{(b-c)\,u_a + (c-a)\,u_b + (a-b)\,u_c}.$$

§. 39.

Algebra der litteralen Gleichungen.

1) Man schreibt die canonische Form wie folgt:

$$a x^n + \binom{n}{1} b x^{n-1} y + \cdots \binom{n}{1} s x y^{n-1} + t y^n$$
$$= (a b c \ldots t)^{\wedge} (x y)^n \text{ (Cayley).}$$

2) Sei gegeben

$$f(x) = x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \cdots + t = 0$$

und es werde gesetzt

$$x = y + z,$$

so dass

$$f(x) = y^n + A y^{n-1} + B y^{n-2} + \cdots \quad T = 0,$$

so ist:

$$A = \frac{f^{n-1}(z)}{(n-1)!}, \quad B = \frac{f^{n-2}(z)}{(n-2)!}, \cdots \quad f^{\varkappa}(z) = \frac{\partial^{\varkappa} f(z)}{\partial z^{\varkappa}}.$$

3) Soll das $r$te Glied in der Transformirten $= 0$ sein, so bestimme man z aus der Gleichung

$$\frac{f^{n-r+1}(z)}{(n-r+1)!} = 0.$$

3) Schafft man das zweite Glied aus

$$(a b c d \ldots t)^{\wedge} (x y)^n$$

ab, so wird:

$$y^n - \binom{n}{2} \frac{1}{a^2} V_2 y^{n-2} + \binom{n}{3} \frac{1}{a^3} V_3 y^{n-3} - \cdots = 0.$$

Die Coefficienten

$$V_2 = b^2 - a c$$
$$V_3 = 2 b^3 - 3 a b c + a^2 d$$
$$V_4 = 3 b^4 - 6 a b^2 c + 4 a^2 b d - a^3 e$$

werden der Reihe nach quadratische, cubische etc. Variante genannt.

4) Die Coefficienten, die man bei der Fortschaffung des vorletzten Gliedes erhält, werden Retrovarianten genannt und mit doppeltem Index bezeichnet:

$V'_2 = b^2 - a c$, quadratische Retrovariante der can. Form.

$(a\,b\,c\,d)^{\wedge}(x\,1)^3$ | $(a\,b\,c\,d\,e)^{\wedge}(x\,1)^4$

$V_{23} = c^2 - d\,b$ | $V_{24} = d^2 - c\,e$

$V_{33} = 2\,c^3 - 3\,b\,c\,d + d^2 a$ | $V_{34} = 2\,d^3 - 3\,c\,d\,e + c^2 b$

$V_{44} = 3\,d^4 - b\,e\,d^2 c + 4\,e^2 d\,b - e^3 a.$

5) Das Absolutglied der Summengleichung wird Geminante, G_n, und das Absolutglied der Differenzengleichung Discriminante, D_n, genannt.

Um die Geminante zu bilden, eliminire man x aus

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f(-x) = 0.$$

Um für

$$f = (a\,b\,c \cdots t)^{\wedge}(x\,y)^n$$

die Discriminante zu bilden, eliminire man x und y aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

6) Die symmetrischen Functionen der Wurzeln.

Sei

$$\sum_1^n x_\varkappa^m = S_m \quad \sum_1^n x_\varkappa^m x_\lambda^p = S_{mp} \text{ etc.},$$

so ist für

$$f(x) = x^n + a\,x^{n-1} + \cdots + t$$

$$S_1 + a = 0$$
$$S_2 + a\,S_1 + 2b = 0$$
$$S_3 + a\,S_2 + b\,S_1 + 3c = 0$$
$$S_m + a\,S_{m-1} + \cdots + m\,t = 0$$
$$S_{m+n} + a\,S_{m+n-1} + \cdots + t\,S_m = 0,$$

oder

$$S_1 = -a$$
$$S_2 = a^2 - 2b$$
$$S_3 = -a^3 + 3ab - 3c$$
$$S_4 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 4b^2 - 4d$$
$$S_5 = -a^5 + 5a^3b + 5ab^2 - 5a^2c + 5ad + 5bc - 5e$$
$$S_{12} = b$$
$$S_{112} = S(x_1^2 x_2) = -ab + 3c$$

5*

$$S_{1112} = a^2 b - 2b^2 - ac + 4d^2$$
$$S_{1122} = b^2 - 2ac + 2d$$
$$S_{1123} = bc - 4d.$$

7) Von den Reducenten.

Reducenten werden gewisse Functionen der Coefficienten $abc \ldots$ der Hauptgleichung genannt, welche verschwinden, wenn sich die Gleichungen auf einfachere reduciren lassen.

1. Die Reducenten der quadratischen Gleichungen.

$$(abc)\wedge(xy)^2.$$

Ist

a) die Geminante $-b_2 = a = 0$, so hat die Gleichung zwei Wurzeln mit ungleichem Vorzeichen.

b) ist die Discriminante $ac - b^2 = 0$, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln.

2. Die Reducenten der cubischen Gleichungen.

a) Ist $ac - b^2 = 0 \quad ad - bc = 0 \quad bd - c^2 = 0$, so sind alle drei Wurzeln gleich.

b) Ist die cubische Variante $2b^3 - 3abc + a^2 d = V_3 = 0$, so ist die eine Wurzel das arithmetische Mittel der beiden anderen.

c) Ist die cubische Retrovariante $2c^2 - 3bcd + ad^2 = V_{3,3} = 0$, so ist die eine Wurzel das harmonische Mittel der beiden anderen.

d) Ist $b^3 d - ac^3 = 0$, so ist die eine Wurzel das geometrische Mittel der beiden anderen.

e) Ist $(ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) = 0$, d. h. die Discriminante $= 0$, so hat die Gleichung mindestens zwei gleiche Wurzeln.

3. Die Reducenten der biquadratischen Gleichungen.

a) Ist $2b^3 - 3abc + a^2 d = 0$, so bilden die vier Wurzeln eine arithmetische Proportion.

b) Ist die cubische Retrovariante $2d^3 - 3cde + e^2 b = 0$, so bilden die vier Wurzeln eine harmonische Proportion.

c) Ist $b^2 c - a d^2 = 0$, so bilden die Wurzeln eine geometrische Proportion.

d) Ist $2 b^2 e - 3 a c e + 2 a d^2 = 0$, so haben die vier Wurzeln je drei und ein gleiche Vorzeichen und ihre Quadrate bilden eine geometrische Proportion.

e) Ist die Geminante $b^2 e - 6 b c d + a d^2 = 0$, so hat die Gleichung mindestens ein Paar gleicher Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen.

f) Ist $16 b^4 - 24 a b^3 c + 8 a^2 b d - a^3 e = 0$, so ist die eine Wurzel gleich der Summe der beiden anderen.

g) Ist $3 b^4 - 6 a b^2 c + 4 a^2 b d - a^3 e = 0$, d. h. die biquadratische Variante $= 0$, so ist die eine Wurzel gleich dem arithmetischen Mittel der beiden anderen.

8) Beurtheilung der Wurzeln nach den Discriminanten.

a) Cubische Gleichungen: $(a b c d) \wedge (x 1)^3$

$$\overline{D}_3 = (b c - a d)^2 - 4 (b^2 - a c)(c^2 - b d).$$

Ist

$\overline{D}_3 > 0$, so sind zwei Wurzeln complex,
$\overline{D}_3 < 0$, so sind alle Wurzeln reell,
$\overline{D}_3 = 0$, so sind zwei Wurzeln einander gleich und alle reell.

b) Biquadratische Gleichungen: $(a b c d e) \wedge (x 1)^4$

$$\overline{D}_4 = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3c & 3d & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix}$$

Ist nun

$\overline{D}_4 > 0$, so sind entweder alle Wurzeln reell, oder alle Wurzeln complex,
$\overline{D}_4 < 0$, so sind zwei reell und zwei complex,
$\overline{D}_4 = 0$, so sind zwei Wurzeln gleich.

Literatur und Theorie vide Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878.

§. 40.

Die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Gleichungen.

Sei

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \quad a_1 x + a_0 = 0$$

so gelten folgende Sätze:

1) Ist $n = 2\nu + 1$, so hat die Gleichung wenigstens eine reelle Wurzel, deren Vorzeichen das Entgegengesetzte des letzten Gliedes ist.

2) Ist $n = 2\nu$ und a_0 negativ, so sind wenigstens zwei reell ungleich bezeichnete Wurzeln vorhanden.

Satz von Harriot-Descartes.

3) Eine vollständige Gleichung hat höchstens so viele $+$ Wurzeln, als Zeichenwechsel, und höchstens so viele negative, als Zeichen folgen. Fehlende Glieder sind durch ± 0 zu ergänzen.

4) Sind alle Wurzeln reell, so hat die Gleichung genau so viel Zeichenwechsel, wie $+$, und Zeichenfolgen, wie $-$ Wurzeln.

5) Eine vollständige Gleichung mit lauter Zeichenwechseln kann keine $-$ und eine solche mit lauter Zeichenfolgen keine $+$ Wurzeln haben.

Sätze von Du Gua.

6) Wenn zwischen zwei Gliedern einer unvollständigen Gleichung $2n$ Glieder fehlen, so hat dieselbe wenigstens $2n$ complexe Wurzeln.

7) Fehlen $2n + 1$ Glieder, so sind mindestens $2n + 2$, oder $2n$ complexe Wurzeln vorhanden, je nachdem die einschliessenden Glieder gleich oder ungleich bezeichnet sind.

Satz von Budan-Fourier.

8) Hat die Gleichung $f(x + \alpha)$ m Zeichenwechsel mehr als die Gleichung $f(x + \beta)$, so hat $f(x) = 0$ zwischen den Grenzen α und β höchstens m reelle Wurzeln.

Satz von Sturm.

9) Sei

$$x = f(x) = 0,\ x_1 = f'(x) = 0.$$

Sei ferner:

$$x = x_1 Q - x_2$$
$$x_1 = x_2 Q_2 - x_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_{m-2} = x_{m-1} Q_{m-1} - x_m$$

$x_2 x_3 \ldots$ sind die — genommenen Reste und $Q_1 Q_2 \ldots$ die Quotienten, die sich bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zwischen x und x_1 ergeben.

10) Setzt man in die Reihe

$$x\, x_1\, x_2 \ldots x_m$$

das eine Mal $x = \alpha$, das andere Mal $x = \beta$, so liegen zwischen α und β genau so viele reelle Wurzeln, als die erste Reihe mehr Zeichenwechsel enthält als die zweite.

NB. Aendert eine Gleichung x_r für keinen Werth von x ihr Zeichen, so enthält x_r lauter complexe Wurzeln. Man kann sich sodann auf die Betrachtung der Functionen $x\, x_1 \ldots x_{r-1} x_r$ beschränken.

Die äussersten Grenzen der reellen Wurzeln.

1) Ist a_{n-1} —, jeder folgende Coefficient $+$, so ist a_{n-1} die obere Grenze der $+$ Wurzeln.

2) Sei a_r der grösste — Coefficient, so ist (a_r absolut genommen) $a_r + 1$ die obere Grenze der $+$ Wurzeln.

3) Um die untere Grenze der $+$ Wurzeln zu finden, setze $x = \frac{1}{x'}$ und ermittele dieselbe für x'.

Anhang.

Eine Zahl a, die ganz ist, kann nur dann eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sein, wenn $f(\pm 1)$ durch $a \mp 1$ theilbar ist.

Eine Gleichung besitzt gleiche Wurzeln, wenn für $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ ein gemeinschaftlicher Theiler existirt.

Die Beweise dieser Sätze suche in:

Serret, Handbuch der höheren Algebra, D. v. Wertheim. Leipzig 1868.

§. 41.

Cubische Gleichungen.

1) $x^3 + ax + b = 0,\quad x = \frac{3y^2 - a}{3y},\quad y^6 + by^3 + \frac{a^3}{27} = 0$

2) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0,\quad x = y - \frac{a}{3},$

$$y^3 - \left(\frac{a^2}{3} - b\right)y + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0$$

3) $x^3 + ax^2 + b = 0,\quad x = \frac{1}{y},\quad y^3 - \frac{a}{b}y + \frac{1}{b} = 0$

4) $x^3 + ax + b = 0$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}$$

5) Sei $tgn\,\beta = \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}},\quad tgn\,\alpha = \sqrt[3]{tgn\frac{\beta}{2}}$

$$x^3 + px + q = 0,\quad x = -\,cotg\,2\alpha \,.\, 2\sqrt{\frac{p}{3}}$$

6) $x^3 + px - q = 0 \quad x = cotg\,2\alpha \,.\, 2\sqrt{\frac{p}{3}}$

$$\left.\begin{array}{ll} 7)\ x^3 - px + q = 0 & 4p^3 < 27q^2 \\ 8)\ x^3 - px - q = 0 & 4p^3 < 27q^2 \end{array}\right\} x = 2\frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{sin\,2\alpha}$$

9) $x^3 - px + q = 0 \quad 4p^3 > 27q^2 \quad sin\,3\alpha = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,\alpha$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,(60 - \alpha)$$

$$x_3 = -\,2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,(60 + \alpha)$$

10) $x^3 - px - q = 0 \quad 4p^3 > 27q^2$

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,\alpha$$

$$x_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,(60-\alpha)$$

$$x_3 = +2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,(60+\alpha).$$

§. 42.

Biquadratische Gleichungen.

Sei gegeben

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0,$$

berechne z aus

$$z^3 + 2 a z^2 + (a^2 + 4 c) z - b^2 = 0.$$

Sei ferner b positiv, so ist $\sqrt{z_\varkappa} = \zeta_\varkappa$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 \\ 2x_2 &= \zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 \\ 2x_3 &= -\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \\ 2x_4 &= -\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3. \end{aligned}$$

Ist dagegen b negativ, so wird:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \\ 2x_2 &= \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 \\ 2x_3 &= -\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 \\ 2x_4 &= -\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 \quad \text{(Euler).} \end{aligned}$$

§. 43.

Gleichungen fünften Grades.

$$x^5 - x - a = 0,\quad A = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{5^5 - a},\quad sin\,\alpha = \frac{4}{A^2},\quad \varkappa = tgn\,\frac{\alpha}{4},$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 sin^2\varphi}},\quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa_1^2 sin^2\varphi}},\quad \varkappa^2 + \varkappa_1^2 = 1$$

$$\omega_1 = \frac{K}{5}, \quad \omega_2 = i\,\frac{K}{5}, \quad \omega_3 = \frac{K + i K'}{5}, \quad \omega_4 = \frac{K + 2iK'}{5}$$

$$\omega_5 = \frac{K + 3iK'}{5} \quad \omega_6 = \frac{K + 4iK'}{5}$$

$$u^8 = \varkappa^2$$

$$v_\lambda = u^5 \sin am \{K - 4\,\omega_\lambda\} \sin am \{K - 8\,\omega_\lambda\}$$

$$\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Sei

$$(v_m - v_n) = (m\,n),$$

so wird

$$x = \frac{z}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{5^3} \sqrt[4]{\varkappa} \sqrt{1 - \varkappa^2}}$$

$$z_1 = (12)\,(26)\,(45)$$

$$z_2 = (22)\,(31)\,(56)$$

$$z_3 = (32)\,(43)\,(61)$$

$$z_4 = (42)\,(54)\,(13)$$

$$z_5 = (52)\,(14)\,(34)$$ (Hermite).

§. 44.

Näherungsmethoden zur Auflösung der Gleichungen.

1) Seien x_1 und x_2 zwei Näherungswerthe einer Wurzel der Gleichung

$$y = f(x) = 0,$$

und zwar so, dass y_1 und y_2 entgegengesetzte Zeichen haben, so ist

$$x_3 = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{y_1 - y_2} = x_1 - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}\, y_1 = x_2 - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}\, y_2$$

ein neuer Näherungswerth. (*Regula falsi.*)

2) Seien x_1 und x_2 zwei Näherungswerthe einer reellen Wurzel von

$$y = f(x) = 0,$$

so dass y_1 und y_2 entgegengesetzte Zeichen und weder $f'(x) = 0$ noch $f''(x) = 0$ zwischen x_1 und x_2 eine Wurzel haben, so sind

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{und} \quad x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

zwei neue Näherungswerthe. (Methode von Newton.)

3) Sei
$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(a) = \alpha,$$
a eine ganze Zahl und
$$a \lesseqgtr x \lesseqgtr a + 1,$$
setze
$$x = \frac{1}{x_1} + a,$$
dieses giebt
$$\varphi\left(a + \frac{1}{x_1}\right) = \psi(x_1) = 0.$$
Sei nun
$$a_1 \lesseqgtr x_1 \lesseqgtr a_1 + 1,$$
a_1 eine ganze Zahl etc., so wird
$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$
(Methode von Lagrange).

4) Sei $f(y + zi) = 0$, so ist y und z gegeben durch:
$$\left.\begin{aligned} f(y) - \frac{f''(y)}{2!} z^2 + \frac{f''''(y)}{4!} z^4 - \cdots = 0 \\ f'(y) - \frac{f'''(y)}{3!} z^2 + \frac{f^{(V)}(y)}{5!} z^4 - \cdots = 0 \end{aligned}\right\} z \gtrless 0$$

5) Seien
$$f(x, y) = 0 \quad \varphi(x, y) = 0$$
gegeben, und
$$x_1\, y_1, \quad x_2\, y_2, \quad x_3\, y_3$$
drei Paare von Näherungswerthen, und sei
$$z_\varkappa = f(x_\varkappa\, y_\varkappa), \quad \zeta_\varkappa = \varphi(x_\varkappa\, y_\varkappa), \quad \varkappa = 1, 2, 3,$$
$$\varDelta_1 = z_2 \zeta_3 - z_3 \zeta_2, \quad \varDelta_2 = z_3 \zeta_1 - z_1 \zeta_3, \quad \varDelta_3 = z_1 \zeta_2 - z_2 \zeta_1;$$
so ist genauer
$$x_4 = \frac{x_1 \varDelta_1 + x_2 \varDelta_2 + x_3 \varDelta_3}{\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3}$$
$$y_4 = \frac{y_1 \varDelta_1 + y_2 \varDelta_2 + y_3 \varDelta_3}{\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3}.$$

6) Seien x_1 und y_1 die Näherungswerthe zu
$$f_1(x y) = 0, \quad f_2(x y) = 0.$$
Man bestimme ξ und η aus:
$$f_1(x_1 y_1) + \frac{\partial f_1(x_1 y_1)}{\partial x} \xi + \frac{\partial f_1(x_1 y_1)}{\partial y} \eta = 0$$
$$f_2(x_1 y_1) + \frac{\partial f_2(x_1 y_1)}{\partial x} \xi + \frac{\partial f_2(x_1 y_1)}{\partial y} \eta = 0,$$

so sind

$$x_1 + \xi \quad \text{und} \quad y_1 + \eta$$

zwei neue Näherungswerthe.

Die Litteratur der Theorie der Gleichungen findet man in den „Grundzügen der ant. und mod. Algebra“ von L. Matthiessen, Leipzig 1878. Praktisch sehr zu empfehlen:

Scheffler's Auflösung der algebr. und transcend. Gleichungen. Braunschweig 1859.

§. 45.

Die Determinanten.

$$1) \quad \Delta = \sum \pm a_1 b_2 c_3 = (a_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & a_1 & b_1 & c_1 & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ - & & & & + \\ & a_1 & b_1 & c_1 & \\ - & & & & + \\ & a_2 & b_2 & c_3 & \\ - & & & & + \end{array}$$

$$2) \quad \Delta = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

$$3) \quad \Delta = -(b_1 a_2 c_3) = +(b_1 c_2 a_3) = -(c_1 b_2 a_3)$$

$$4) \quad \Delta = \frac{1}{\alpha \beta \gamma} \begin{vmatrix} a_1 \alpha, & b_1 \beta, & c_1 \gamma \\ a_2 \alpha, & b_2 \beta, & c_2 \gamma \\ a_3 \alpha, & b_3 \gamma, & c_3 \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 q_1 + c_1 q_2, & b_1 + c_1 r, & c_1 \\ a_2 + b_2 q_1 + c_2 q_2, & b_2 + c_2 r, & c_2 \\ a_3 + b_3 q_1 + c_3 q_2, & b_3 + c_3 r, & c_3 \end{vmatrix}$$

$$5) \quad \Delta = \sum a_\varkappa \frac{\partial \Delta}{\partial a_\varkappa} = \sum (a_\varkappa b_n) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_\varkappa \partial b_n} = \cdots$$

$$6) \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_1) \\ (\alpha_3 - \alpha_2) \ldots (\alpha_n - \alpha_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{array}$$

$$= 2^{n-2} 3^{n-3} \ldots (n-1) \begin{vmatrix} 1 \binom{\alpha_1}{1} \ldots \binom{\alpha_1}{n-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 \binom{\alpha_n}{1} \ldots \binom{\alpha_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

7) Sei
$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$
so wird:
$$\frac{\Delta(x_1 x_2 \dots x_n) \Delta(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)}{f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}} \sum \pm \frac{1}{x - \alpha_1} \cdots \frac{1}{x - \alpha_n}.$$

8) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 & a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 & a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 \end{vmatrix}$$

9) $$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_{1\varkappa} b_{\varkappa 1} \dots \sum a_{1\varkappa} b_{\varkappa n} \\ \\ \sum a_{n\varkappa} b_{\varkappa 1} \dots \sum a_{n\varkappa} b_{n\varkappa} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \sum a_{\varkappa 1} b_{\varkappa 1} \dots \sum a_{\varkappa 1} b_{n\varkappa} \\ \\ \sum a_{\varkappa n} b_{1\varkappa} \dots \sum a_{\varkappa n} b_{n\varkappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_{\varkappa 1} b_{\varkappa 1} \dots \sum a_{\varkappa 1} b_{\varkappa n} \\ \\ \sum a_{\varkappa n} b_{\varkappa 1} \dots \sum a_{\varkappa n} b_{\varkappa n} \end{vmatrix}$$

10) $$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x x_1 + y y_1 + z z_1 \\ x x_1 + y y_1 + z z_1, & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$$

11) Ist
$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$
so wird:
$$x(a_1 b_2 c_3) = (d_1 b_2 c_3),\ y(a_1 b_2 c_3) = (a_1 d_2 c_3),\ z(a_1 b_2 c_3) = (a_1 b_2 d_3).$$

12) Sei
$$\Delta = \sum a_m A_m = \sum b_m B_m = \cdots \sum l_m L_m,\ m = 1, 2, \dots n,$$
wobei $A_m B_m \dots L_m$ die Unterdeterminanten sind, sei ferner
$$\Delta' = \sum \pm A_1 B_2 \dots L_n,$$
so wird Δ' die reciproke Determinante genannt. Gleichliegende Elemente, z. B. a_n in Δ und A_n in Δ', werden adjungirte Elemente genannt.

Es gelten nun folgende Sätze:

13) $$\varDelta' = \varDelta^{n-1}$$

14) $$a_1 \varDelta^{n-2} = (B_2 C_3 \ldots L_n)$$
$$(a_1 b_2) \varDelta^{n-3} = (C_3 D_4 \ldots L_n) \text{ etc.}$$

15) $$(\varDelta')^n = (\varDelta^n)'$$

16) Ist in
$$\varDelta = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$
$a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i}$, so wird sie symmetrisch, ist dagegen
$a_{i\varkappa} = - a_{\varkappa i}$, so wird sie symmetral genannt.

Das Quadrat einer Determinante ist eine symmetrische Determinante.

17) Für die Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante gilt der Satz:
$$A_{i\varkappa} = A_{\varkappa i}.$$

18) Ist ferner
$$a_{\varkappa i} = - a_{i\varkappa} \quad \text{und} \quad a_{ii} = 0,$$
so ist die Determinante ein Quadrat.

19) Ist
$$a_{\varkappa i} = - a_{i\varkappa} \quad \text{und} \quad a_{ii} = z,$$
so wird
$$\varDelta = z^n + z^{n-2} P + z^{n-4} Q + \cdots$$
dabei sind $P, Q \ldots$ Summen von Quadraten.

Litteratur und Beweise suche in Balzer: Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig.

Jacobi, Crelle's Journ. Bd. XXII.

§. 46.

Die linearen und orthogonalen Substitutionen.

1) Die Substitution
$$x_\varkappa = b_{\varkappa 1} y_1 + b_{\varkappa 2} y_2 + \cdots \; b_{\varkappa n} y_n, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots n$$
heisst eine lineare.

2) $M = \sum \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{nn}$ wird die Determinante (Modulus) der Substitution genannt.

Ist $M = \pm 1$, so nennt man die Substitution unimodular.

3) Wird

$$f_\varkappa = a_{\varkappa 1}x_1 + a_{\varkappa 2}x_2 + \cdots a_{\varkappa n}x_n$$

durch

$$x_\varkappa = b_{\varkappa 1}y_1 + b_{\varkappa 2}y_2 + \cdots b_{\varkappa n}y_n$$

transformirt in

$$f_\varkappa = c_{\varkappa 1}y_1 + c_{\varkappa 2}y_2 + c_{\varkappa n}y_n,$$

so ist

$$\sum \pm c_{11}c_{22}\ldots c_{nn} = \sum \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} \sum \pm b_{11}b_{22}\ldots b_{nn}.$$

4) Eine lineare Substitution wird orthogonal genannt, wenn

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2.$$

5) Sei

$$x_\varkappa = c_{\varkappa 1}y_1 + c_{\varkappa 2}y_2 + \cdots c_{\varkappa n}y_n$$

eine orthogonale Substitution, so wird:

$$c_{1\varkappa}^2 + c_{2\varkappa}^2 + \cdots + c_{n\varkappa}^2 = 1$$

$$c_{1j}c_{1\varkappa} + c_{2j}c_{2\varkappa} + \cdots c_{nj}c_{n\varkappa} = 0,$$

ferner

$$\sum \pm c_{11}c_{22}\ldots c_{nn} = \pm 1.$$

Vergleiche auch: Functionaldeterminanten.

Litteratur: Balzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. III. Aufl., §. 14.

§. 47.

Die homogenen Functionen und Formen.

Sei f eine homogene Function der Variablen

$$x_1 x_2 \ldots x_n$$

von der Ordnung m, so wird:

1) $f(x_1 t\, x_2 t \ldots x_n t) = t^{n+m} f(x_1 x_2 \ldots x_n)$

2) $n(n-1)\ldots(n-q+1)f = \left(\sum_1^n x^\varkappa \frac{1}{\partial x_\varkappa}\right)^q \partial^q f$ (Euler's Satz).

Sei

$$f = u, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} = u_\varkappa, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\varkappa \partial x_n} = u_{\varkappa n},$$

so wird

$$\sum \pm \frac{m}{m-1} u, u_{11}, \ldots u_{nn} = 0.$$

Die homogene Function u von m Dimensionen wird, wenn sie rational und ganz ist und ganze Coefficienten hat, eine Form $m$ten Grades (quadratisch, cubisch, . . .), von n willkürlichen Variablen (binär, ternär, . . .) genannt.

Sei

$$u = \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$$

eine quadratische Form, so wird

$$R = -\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

die Determinante der Form u genannt. Sei $b_{i\varkappa}$ der Coefficient von $a_{i\varkappa}$ in R, so ist die Form

$$u = -\sum_{i\varkappa} b_{i\varkappa} y_i y_\varkappa$$

der Form u adjungirt.

Die Determinante der adjungirten Form ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante der Form.

Vergleiche: Balzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, §. 13.

§. 48.

Die Functional-Determinanten.

1) Seien $y_1 y_2 \dots y_n$ Functionen von $x_1 x_2 \dots x_n$, so wird

$$\varDelta = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

die Functional- oder Jacobi'sche Determinante genannt, und mit

$$\varDelta = \frac{\partial (y_1 y_2 \dots y_n)}{\partial (x_1 x_2 \dots x_n)}$$

bezeichnet.

2) Sind $y_1 y_2 \dots y_n$ nicht unabhängig, sondern durch

$$\varphi(y_1 y_2 \dots y_n) = 0$$

verbunden, so ist $\varDelta = 0$ und umgekehrt.

3) Sind die Grössen y durch

$$F_1(x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_n) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F_n(x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_n) = 0$$

gegeben, so ist:

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = (-1)^n \frac{\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

4) Seien $y_1 y_2 \ldots y_n$ Functionen von $x_1 x_2 \ldots x_n$, so sind auch $x_1 \ldots x_n$ Functionen von $y_1 y_2 \ldots y_n$, die Functionen sollen in beiden Fällen von einander unabhängig sein, sodann ist:

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \cdot \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = 1.$$

5) Sei

$$y_{ij} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \, \partial x_j},$$

so wird die Determinante

$$H = \sum \pm y_{11} y_{22} \ldots y_{nn}$$

die Hesse'sche genannt.

6) Ist $H = 0$, so ist immer

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots a_n y_n = 0,$$

wo $a_1 a_2 \ldots a_n$ constante Grössen sind, und

7) die Function y kann durch eine lineare Substitution auf eine homogene Function von $(n - 1)$ Variablen reducirt werden und umgekehrt.

8) Die Hesse'sche Determinante der transformirten Function unterscheidet sich von der der Originalfunction nur um einen mit dem Quadrat des Modulus der Transformation übereinstimmenden Factor, d. h.

$$H(f_y) = H(f_x) \cdot M^2.$$

9) Wenn die H einer homogenen ganzen Function von n Variablen identisch verschwindet und ausserdem der partielle Differentialquotient derselben nach einem ihrer Elemente, so verschwinden auch alle übrigen identisch und die Function kann durch eine lineare Substitution auf eine Function von $(n - 2)$ Variablen reducirt werden.

Litteratur: Balzer, Theorie der Determinanten.

Salmon: Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch von Fiedler.

Clebsch: Theorie der binären Formen u. m. andere.

§. 49.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1) Sei p die Anzahl der günstigen, q die der ungünstigen, n die der überhaupt möglichen, so dass $p + q = n$, und sei die absolute Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses w, jene für das Nichteintreffen w_1, so ist

$$w = \frac{p}{n}, \quad w_1 = \frac{q}{n}, \quad w + w_1 = 1.$$

Man sagt: ein Ereigniss ist

gewiss,	wahrscheinlich,	zweifelhaft,	unwahrscheinlich,	unmöglich, wenn
$w = 1,$	$> \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$	$< \frac{1}{2}$	$= 0.$

2) Sei die Anzahl aller Fälle n, der dem Ereigniss A günstigen p, der dem Ereigniss B günstigen q und $p + q < n$, so ist, wenn alle übrigen Fälle unberücksichtigt bleiben, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses

$$A \cdots \frac{p}{p+q} = \frac{w_A}{w_A + w_B}$$

$$B \cdots \frac{q}{p+q} = \frac{w_B}{w_A + w_B} \quad \text{(Relative Wahrscheinlichkeit).}$$

3) Seien $w_1 w_2 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten mehrerer einzelnen Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle diese zusammentreffen

$$W = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n \text{(Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit).}$$

4) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss A, dessen Wahrscheinlichkeit w ist, sich n mal wiederholt, ist:

$$W = (w)^n.$$

5) Seien $w_1 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $AB \ldots N$, man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass das erste, oder wenn dieses nicht, so doch das zweite etc. Ereigniss eintritt, diese ist gegeben durch:

$$W = 1 - (1 - w_1)(1 - w_2) \ldots (1 - w_n).$$

6) Sei s eine zu gewinnende Summe, w die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes, so ist

$$s\,w$$

die mathematische Hoffnung oder Erwartung. Hängt der Gewinn von mehreren Ereignissen ab, und seien $s_1\, s_2 \ldots s_n$ die zu erwartenden Summen, $w_1\, w_2 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten jeder dieser Summe, so ist

$$S\,W = s_1 w_1 + s_2 w_2 + \cdots + s_n w_n.$$

7) Seien $w_1\, w_2 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten von $A\, B \ldots N$, und

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1,$$

und man sucht die Wahrscheinlichkeit, dass in

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \alpha$$

Versuchen das Ereigniss A a_1 mal, das Ereigniss B a_2 mal etc. eintritt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben durch:

$$W = \frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots \alpha!}{a_1!\, a_2! \ldots a_n!} (w_1)^{a_1} (w_2)^{a_2} \ldots (w_n)^{a_n}.$$

8) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss A, dessen Wahrscheinlichkeit w ist, in α Versuchen wenigstens γ mal eintritt, ist:

$$W = (w)^\gamma \Big\{ 1 + \frac{\gamma}{1}(1 - w) + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{1\,.\,2}(1 - w)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots \gamma}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (\alpha - \gamma)}(1 - w)^{\alpha - \gamma}\Big\}.$$

9) Alle bisher betrachteten Wahrscheinlichkeiten waren Wahrscheinlichkeiten a priori, auch deductive Wahrscheinlichkeiten; die folgenden sind Wahrscheinlichkeiten a posteriori oder inductive Wahrscheinlichkeiten. Fundamentalsatz (Bayes, Phil. Trans. 1763). Die Wahrscheinlichkeiten zweier Hypothesen verhalten sich so zu einander, wie die absoluten Wahrscheinlichkeiten der aus diesen Hypothesen resultirenden Ereignisse.

10) Sei in n Versuchen p mal das Ereigniss A, q mal das Ereigniss B eingetreten etc., und seien $P_1\, P_2 \ldots P_n$ die Wahrscheinlichkeiten a priori (gerechnet nach 7) der Hypothesen $H_1\, H_2 \ldots H_n$, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese H_r gegeben durch

$$H_r = \frac{P_r}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}.$$

11) Sei $n = p + q$ die Anzahl der Ereignisse, und es ist p mal das Ereigniss A, q mal das Ereigniss B eingetreten, sei W die Wahrscheinlichkeit, dass in ferneren $n' = p' + q'$ Versuchen

A p' mal und B q' mal eintritt. Seien ferner $H_1 H_2 \dots H_r$ die Hypothesen, $w_1 \dots w_r$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen, $v_1 \dots v_r$ für das Nichteintreffen von A; also für das Eintreffen von B, so ist

$$W = \binom{n'}{p'} \sum_1^r {}_\lambda H_\lambda w_\lambda^{p'} v_\lambda^{q'}.$$

12) Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese H, kraft welcher die absolute Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, welches p mal beobachtet wurde, x ist, ist gegeben durch

$$H = \frac{x^p (1-x)^q \, dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx} \quad p + q = n.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass x innerhalb der Grenzen α und β liegt, ist

$$H = \frac{\int_\alpha^\beta x^p (1-x)^q \, dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx}.$$

13) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P der Hypothese, dass, nachdem in $n = p + q$ Ereignissen A p mal, B q mal eingetreten, in $n' = p' + q'$ Ereignissen A p' mal, B q' mal eintritt?

$$P = \binom{p'+q'}{p'} \frac{(p+1) \dots (p+p')(q+1) \dots (q+q')}{(p+q+2) \dots (p+q+p'+q'+1)}$$

oder für sehr grosse $p\,q\,p'\,q'$

$$P = \binom{p'+q'}{p'} \frac{(p+p')^{\left(p+p'+\frac{1}{2}\right)} \cdot (q+q')^{\left(q+q'+\frac{1}{2}\right)} \cdot (p+q)^{\left(p+q+\frac{3}{2}\right)}}{p^{\left(p+\frac{1}{2}\right)} \cdot q^{\left(q+\frac{1}{2}\right)} \cdot (p+q+p'+q')^{\left(p+q+p'+q'+\frac{2}{3}\right)}}$$

14) Das Ereigniss A ist p mal eingetreten, das Ereigniss B q mal in $n = p + q$ Versuchen, die Wahrscheinlichkeit, dass im $(n+1)$ten Versuche A eintritt, ist:

$$\frac{p+1}{p+q+2}.$$

15) In n Versuchen ist A eingetreten, die Wahrscheinlichkeit, dass A im $(n+1)$ten Versuche eintritt, ist

$$\frac{n+1}{n+2}.$$

16) Sei A n mal eingetreten, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass A eher als B eintritt, gleich

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Methode der kleinsten Quadrate und die Fehlerrechnung vide 6. Lieferung. Wegen der Ableitungen etc. vide Meyer: Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch von E. Czuber. Leipzig 1879. Hagen: Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1882.

§. 50.

Differenzen-Rechnung.

A. Symbole.

1) $u_x = \varphi(x)$

2) $\Delta u_x = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$

3) $\Delta^m \Delta^n u_x = \Delta^{m+n} u_x$ ($\Delta x = 1$ für gewöhnlich)

4) $[x, m] = x(x-1) \ldots (x - m + 1)$

5) $D u_x = \varphi(x + \Delta x)$

6) $D = 1 + \Delta$. Symbolisch für $D u_x = u_x + \Delta u_x$

7) $D = e^{\frac{d}{dx}}$ " " $D u_x = u_{x+1} = u_x + \frac{1}{1} \cdot \frac{d u_x}{d x} + \frac{1}{1.2} \frac{d^2 u_x}{d x^2} + \cdots$

8) $D^n = (1 + \Delta)^n$

9) $\Delta = e^{\frac{d}{dx}} - 1$

10) $\Delta^n x^m = (x+n)^m - n(x+n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(x+n-2)^m - \cdots$

11) $\Delta^n 0^m = \Delta^n x^m$ für $x = 0$

12) $\Delta^n 0^n = n!$

13) $\Delta^n 0^m = n^m - n(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m + \cdots$

	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9	Δ^{10}
0^1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0^2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
0^3	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
0^4	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
0^5	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
0^6	1	62	540	1560	1800	720	0	0	0	0
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0	0	0
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	0	0
0^9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880	0
0^{10}	1	1022	55980	818520	5103000	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800

B. Formeln.

14) $\Delta [x, m] = m [x, m - 1]$

15) $\Delta \dfrac{1}{[x, m]} = - \dfrac{m}{[x, m - 1]}$

16) $\Delta \log u_x = \log \dfrac{u_{x+1}}{u_x}$

17) $\Delta^n a^{mx} = (a^m - 1)^n a^{mx}$

18) $\Delta^n \sin (a x + b) = \left(2 \sin \dfrac{a}{2}\right)^n \sin \left\{a x + b + \dfrac{n (a + \pi)}{2}\right\}$

19) $\Delta^n \cos (a x + b) = \left(2 \sin \dfrac{a}{2}\right)^n \cos \left\{a x + b + \dfrac{n (a + \pi)}{2}\right\}$

20) $\Delta \operatorname{tgn} a x = \dfrac{\sin a}{\cos a x \cos \overline{x + 1}\, a}$

21) $\Delta \operatorname{cotg} a x = \dfrac{- \sin a}{\sin a x \sin \overline{x + 1}\, a}$

22) $\Delta \dfrac{u_x}{v_x} = \dfrac{v_x \Delta u_x - u_x \Delta v_x}{v_x v_{x+1}}$

23) $\Delta u_x v_x = u_x \Delta v_x + v_x \Delta u_x$

24) Sei u eine Function der Veränderlichen $x\,y\,z\ldots$, deren Differenzen $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z\ldots$ constant sind, so wird

$$\varDelta^n u = \left\{\left(1 + \frac{\varDelta}{\varDelta x}\varDelta x\right)\left(1 + \frac{\varDelta}{\varDelta y}\varDelta y\right)\cdots - 1\right\}^n u \text{ (symbolisch).}$$

25) $$\varDelta^n u_x = u_{x+n} - n\,u_{x+n-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}u_{x+n-2} - \cdots$$

26) $$x^n = \varDelta 0^n x + \frac{\varDelta^2 0^n}{1.2}[x, 2] + \frac{\varDelta^3 0^n}{1.2.3}[x, 3] + \cdots$$

27) $$a_0 + a_1 x + a_2\frac{x^2}{1.2} + a_3\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$
$$= e^x\left\{a_0 + x\varDelta a_0 + \frac{x^2}{1.2}\varDelta^2 a_0 + \cdots\right.$$

28) $$\frac{1}{u_{x+n}} = \frac{1}{u_x} - \frac{n\varDelta u_x}{u_x u_{x+1}} + \frac{n(n-1)\varDelta^2 u_x}{u_x u_{x+1} u_{x+2}} - \cdots$$

29) $$\frac{1}{u_{x+n}} = \frac{1}{u_{x+m}} - \frac{(n-m)\varDelta u_x}{u_{x+m} u_{x+m+1}} + \frac{(n-m)(n-m-1)}{u_{x+m} u_{x+m+1} u_{x+m+2}} - \cdots$$

§. 51.

Summen-Rechnung.

1) $$\sum [x, m] = \frac{[x, m+1]}{m+1} + \text{Const.}$$

2) $$\sum \frac{1}{[a+x+m, m]} = -\frac{1}{m}\frac{1}{[a+x+m, m-1]} + \text{C.}$$

3) $$\sum \frac{1}{u_x u_{x+1}\ldots u_{x+m}} = C - \frac{1}{a\,m\,u_x\ldots u_{x+m-1}}$$

4) $$\sum u_x u_{x+1}\ldots u_{x-m+1} = \frac{u_x u_{x+1}\ldots u_{x-m}}{(m+1)a} + \text{C.},$$

wenn $u_x = a x + b$.

5) $$\sum u_x = c + u_0 x + \varDelta u_0\frac{[x, 2]}{1.2} + \varDelta^2 u_0\frac{[x, 3]}{1.2.3} + \cdots$$

6) $$\sum u_x = c + u_x x - \varDelta u_x\frac{[x, 2]}{1.2} + \varDelta^2 u_x\frac{[x, 3]}{1.2.3} - \cdots$$

7) $$\sum x^n = (-1)^{n+1}\left\{\varDelta 0^n \frac{x(x+1)}{1.2} - \varDelta^2 0^n \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} + \cdots\right.$$

$$x = 1, 2, 3, \ldots x$$

$$\sum x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$\sum x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$\sum x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$\sum x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$(2n+1)\int_0^x \sum x^{2n}\,dx = \sum x^{2n+1}$$

Euler, Nov. Acta Petropol. Tom. II.

8) $$\sum x^n = \frac{(1+\varDelta)^{x+1} - (1+\varDelta)}{\varDelta}\, 0^n$$

9) $$\sum (-1)^{x+1} x^n = \frac{(1+\varDelta) - (-1)^x (1+\varDelta)^{x+1}}{2+\varDelta}\, 0^n$$

10) $$\sum u_x = c + \int_0^x u_x\,dx - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{12}\frac{d\,u_x}{d\,x} - \frac{1}{720}\frac{d^3 u_x}{d\,x^3} + \frac{1}{30240}\frac{d^5 u_x}{d\,x^5} - \cdots$$

Näheres in: Schlömilch, Theorie der Differenz- und Summenrechnung, Halle 1848. Boole, Grundlehren der endl. Differenz- und Summenrechnung, 1867. Herschel, Sammlung von Aufgaben aus der endl. Summen- und Differenzenrechnung, 1859. Die beiden letzteren deutsch von Schnusse, Braunschweig.

Zusätze zum §. 50 und 51.

Anwendung dieser Formeln zur Summation von Reihen.

Um

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots x^2$$

zu summiren, muss man $(x+1)^2$ integriren. Nun ist

$$\sum (x+1)^2 = \sum (x^2 + 2x + 1)$$
$$= \sum x^2 + 2\sum x + x.$$

Nach der Formel 26) ist aber

$$x^2 = x + x(x-1),$$

wir haben also

$$\sum (x+1)^2 = \sum x(x-1) + 3\sum x + x.$$

Nun ist nach 1), §. 51

$$\sum x(x-1) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3}$$

$$\sum x = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Wir haben also

$$\sum (x+1)^2 = x + \frac{3x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \text{Const.}$$

Für $x = 1$ wird $\sum x = 1$, also $1 = 1 + \text{Const.}$, woraus Const. $= 0$ folgt.

Theorem: Sei $u_x = a + hx$, so wird die Function

$$\frac{(p + qx + rx^2)s^x}{u_x \ldots u_{x+m-1}}$$

integrabel, wenn

$$p - q\left(\frac{a}{h}\right) + r\left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{m-1}{s-1}\left\{-q + 2r\left(\frac{a}{h}\right) + \frac{s-m+1}{s-1}r\right\}$$

und ihr Integral ist

$$\frac{(A + Bx)s^x}{u_x \ldots u_{x+m-2}} + \text{Const.},$$

wobei

$$A = \frac{q}{(s-1)h} - \left\{\frac{a}{h} + \frac{s-m+1}{s-1}\right\}\cdot\frac{r}{(s-1)h}$$

$$B = \frac{r}{(s-1)h}.$$

Löst man die Bedingungsgleichung in Bezug auf s auf, so erhält man zwei Werthe von s, die diese Function integrabel machen.

So ist beispielsweise

$$\frac{2}{1.3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3.5} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{4}{5.7} \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{1}{(2x+1).3^x}\right\}.$$

Diese Reihe hat x Glieder.

Manchmal kann man ohne Anwendung der Formeln sich leicht eine integrable Form verschaffen.

Sei z. B. die summirende Reihe:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \cdots \frac{1}{x(x+2)}.$$

Man hat

$$\sum u_{x+1} = \sum \frac{1}{(x+1)(x+3)};$$

hier kann man Formel 28), §. 50, anwenden. Man kann aber auch einfacher wie folgt verfahren:

$$\sum u_{x+1} = \sum \frac{x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \sum \left\{\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}\right.,$$

woraus nach Bestimmung der Constanten

$$\sum u_{x+1} = \frac{3x^2 + 5x}{4(x+1)(x+2)}$$

folgt.

§. 52.

Zins-, Zinseszins- und Renten-Rechnung.

Sei A das Anfangscapital, E das Endcapital, p die Procente, $q = 1 + \frac{p}{100}$ der Zinsfuss, $\pm R$ die Rente, n die Anzahl der Jahre, Z die Zinsen nach n Jahren.

NB. Werden Zinsen und Rente in je $\frac{1}{m}$ tel Jahren verrechnet, so ist in nachstehenden Formeln $\frac{p}{m}$ statt p und $m\,n$ statt n zu setzen.

1) Zinsrechnung.

$$Z = A\,\frac{p}{100}\,n, \quad A = \frac{100\,Z}{p\,n}, \quad p = \frac{100\,Z}{A\,n}, \quad n = \frac{100\,Z}{p\,A}.$$

2) Einfache Zinseszinsrechnung.

$$E = A\,q^n, \quad A = \frac{E}{q^n}, \quad n = \frac{\log E - \log A}{\log q}, \quad q = \sqrt[n]{\frac{E}{A}}.$$

Ein Capital ver m facht sich, wenn

$$m = q^n, \quad n = \frac{\log m}{\log q}, \quad q = \sqrt[n]{m}.$$

3) Zusammengesetzte Zinseszinsrechnung.

$$E = A\,q^n \pm \frac{100\,R}{p}\,(q^n - 1)$$

$$q^n A = E \mp \frac{100\,R}{p}\,(q^n - 1)$$

$$n = \frac{\log(p\,E \pm 100\,R) - \log(p\,A \pm 100\,R)}{\log q}$$

$$A\,q^n \pm R\,\frac{q^x - 1}{q - 1} - E = 0.$$

4) Rentenrechnung $\left\{E = 0 \quad R > A\,\frac{p}{100}\right\}$

$$A q^n = \frac{100\,R}{p}\,(q^n - 1)$$

$$n = \frac{\log 100\,R - \log(100\,R - p\,A)}{\log q}$$

$$A q^n - R\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = 0.$$

Siehe Spitzer: Anleitung zur Berechnung der Leibrenten. Wien 1881. Morgenbesser: Mathematische Grundlagen des ges. Versicherungswesens. Berlin 1882.

ANHANG.

EINIGE NUMERISCHE TAFELN.

I. Tafel für die Zahl e.

$e = 2{,}71828 \quad 18284 \quad 59045 \quad 23536 \quad 02874 \quad 71353 \ldots$

n	e^n	$\left(\frac{1}{e}\right)^n$	$n\,e$	$\frac{n}{e}$
1	2,71828	0,36788	2,71828	0,36788
2	7,38906	0,13534	5,43656	0,73576
3	20,08554	0,04979	8,15485	1,10364
4	54,59815	0,01832	10,87313	1,47152
5	148,41316	0,00674	13,59141	1,83940
6	403,42879	0,00248	16,30969	2,20728
7	1096,63316	0,00091	19,02797	2,57516
8	2980,95799	0,00034	21,74625	2,94304
9	8103,08393	0,00012	24,46454	3,31091

n	e^n	n	e^n
0,01	1,01005	0,1	1,10517
0,02	1,02020	0,2	1,22140
0,03	1,03045	0,3	1,34986
0,04	1,04081	0,4	1,49183
0,05	1,05127	0,5	1,64872
0,06	1,06184	0,6	1,82212
0,07	1,07251	0,7	2,01375
0,08	1,08329	0,8	2,22554
0,09	1,09417	0,9	2,45960

Man beachte beim Gebrauche dieser Tafel die Identitäten

$$e^{a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}} = e^a \cdot e^{\frac{b}{10}} \cdot e^{\frac{c}{100}}$$

$$e^{a+\delta} = e^a \left\{1 + \delta + \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} + \cdots\right.$$

$$log\,nat\,e = 1$$

$$log\,vulg\,e = 0{,}434294482 \ldots$$

Sei

$$e^x = z, \text{ so ist}$$

$$log\,nat\,z = x$$

$$log\,vulg\,z = x \cdot log\,vulg\,e = x \cdot 0{,}4342944819032518276511289189 \ldots$$

Es ist ferner

$$log\,nat\;\; 1 = 0$$

$$log\,nat\;\; 10 = 2{,}3025851 \ldots$$

$$\sqrt[e]{e} = 1{,}444667 \ldots$$

Es ist $\sqrt[e]{e} > \sqrt[z]{z}$, wobei z eine beliebige Zahl bedeuten kann.

II. Numerische Werthe für π.

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \ldots$

Arg.	*Valor.*	*Log. vulg.*	*Log. nat.*
π	3,1415926536	0,497149873	1,144730
2π	6,283185	0,798180	1,837877
$\frac{\pi}{2}$	1,570796	0,196120	0,451583
$\frac{\pi}{4}$	0,785398	0,895090 — 1	0,758436 — 1
$\frac{\pi}{3}$	1,047198	0,020029	0,046118
$\frac{2}{3}\pi$	2,094395	0,321059	0,739265
$\frac{4}{3}\pi$	4,188790	0,622089	1,432412
$\frac{1}{\pi}$	0,3183098862	0,502850 — 1	0,855270 — 2
$\frac{1}{2\pi}$	0,159155	0,201820 — 1	0,162123 — 2
π^2	9,8696044011	0,994300	2,289460
π^3	31,0062766803	1,491450	3,434190
$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013211836	0,005700 — 1	0,710540 — 3
$\sqrt{\pi}$	1,7724538509	0,248575	0,572365
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,5641895835	0,751425 — 1	0,427635 — 1
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645918876	0,165717	0,381577
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,6827840633	0,834283 — 1	0,618423 — 1
log nat π	1,1447298858	0,058703	0,135169

Näherungsbrüche für $1:\pi$

$$\frac{1}{3},\ \frac{7}{22},\ \frac{106}{333},\ \frac{113}{355},\ \frac{33102}{103993},\ \frac{33215}{104348},\ \frac{66317}{208341},\ \frac{99532}{312689}$$

Einige π-Reihen:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - - \cdots$$

$$\frac{5\pi}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{16} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$\frac{3\pi^3}{64\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} - \cdots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 + \cdots$$

III. Tafel der Binomial-Coefficienten.

$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$
1	1										
2	1										
3	3	1									
4	6	4	1								
5	10	10	5	1							
6	15	20	15	6	1						
7	21	35	35	21	7	1					
8	28	56	70	56	28	8	1				
9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188
18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564
19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388
20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970

Man beachte die Definition:

$$\binom{n}{\varkappa} = \frac{n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-\varkappa+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ .\ .\ .\ \varkappa}$$

und die Sätze:

$$\binom{n}{\varkappa} = \binom{n-1}{\varkappa-1} + \binom{n-1}{\varkappa} = \binom{n+1}{\varkappa} - \binom{n}{\varkappa-1}$$

$$\binom{n}{\varkappa} = \binom{n+1}{\varkappa+1} - \binom{n}{\varkappa+1}$$

$$\binom{a+b}{\varkappa} = \binom{a}{\varkappa} + \binom{a}{\varkappa-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{\varkappa-2}\binom{b}{2} \cdots \binom{a}{1}\binom{b}{\varkappa-1} + \binom{a}{\varkappa}.$$

IV. Logarithmen einiger Facultäten.

Es ist

$$log(x!) = log\sqrt{2\pi} + x\,log\,x + \frac{1}{2}\,log\,x - x + \frac{B_1}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{x} - \cdots$$

$$- (-1)^n \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)\,2n}\,\frac{1}{x^{2n-1}} + (-1)^n \frac{\theta\,B_{2n-1}}{(2n-1)\,2n}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}},\ 0 < \theta < 1.$$

x	$log(x!)$	x	$log(x!)$
1	0	26	26,6056190
2	0,3010300	27	28,0369828
3	0,7781513	28	29,4841408
4	1,3802112	29	30,9465388
5	2,0791812	30	32,4236601
6	2,8573325	31	33,9150218
7	3,7024305	32	35,4201717
8	4,6055205	33	36,9386857
9	5,5597630	34	38,4701646
10	6,5597630	35	40,0142326
11	7,6011557	36	41,5705351
12	8,6803370	37	43,1387369
13	9,7942803	38	44,7185205
14	10,9404084	39	46,3095851
15	12,1164996	40	47,9116451
16	13,3206196	41	49,5244289
17	14,5510685	42	51,1476782
18	15,8063410	43	52,7811467
19	17,0850946	44	54,4245993
20	18,3861246	45	56,0778119
21	19,7083439	46	57,7405697
22	21,0507666	47	59,4126676
23	22,4124944	48	61,0939088
24	23,7927057	49	62,7841049
25	25,1906457	50	64,4830749

V. Tafel der ganzzahligen Auflösungen von $x^2 = ay^2 \pm 1$.

a	y	x	a	y	x
2	2	3	53	9100	66251
3	1	2	54	66	485
5	4	9	55	12	89
6	2	5	56	2	15
7	3	8	57	20	151
8	1	3	58	2564	19603
10	6	19	59	69	530
11	3	10	60	4	31
12	2	7	61	226153980	1766319049
13	180	649	62	8	63
14	4	15	63	1	8
15	1	4	65	16	129
17	8	33	66	8	65
18	4	17	67	5967	48842
19	39	170	68	4	33
20	2	9	69	936	7775
21	12	55	70	30	251
22	42	197	71	413	3480
23	5	24	72	2	17
24	1	5	73	267000	2281249
26	10	51	74	430	3699
27	5	26	75	3	26
28	24	127	76	6630	57799
29	1820	9801	77	40	351
30	2	11	78	6	53
31	273	1520	79	9	80
32	3	17	80	1	9
33	4	23	82	18	163
34	6	35	83	9	82
35	1	6	84	6	55
37	12	73	85	30996	285771
38	6	37	86	1122	10405
39	4	25	87	3	28
40	3	19	88	21	197
41	320	2049	89	53000	500001
42	2	13	90	2	19
43	531	3482	91	165	1574
44	30	199	92	120	1151
45	24	161	93	1260	12151
46	3588	24335	94	221064	2143295
47	7	48	95	4	39
48	1	7	96	5	49
50	14	99	97	6377352	62809633
51	7	50	98	10	99
52	90	649	99	1	10

VI. Tafel einiger öfters angewandten Reihencoefficienten.

Coefficient	*Log. vulg.*	Coefficient	*Log. vulg.*
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,6989700 — 1	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2.3}$	0,2218487 — 1
$\frac{1}{8} = \frac{1}{2.1}$	0,0969100 — 1	$\frac{3}{40} = \frac{1.3}{2.4.5}$	0,8750613 — 2
$\frac{1}{16} = \frac{1.3}{2.4.6}$	0,7958800 — 2	$\frac{5}{112} = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}$	0,6497520 — 2
$\frac{5}{128} = \frac{1.3.5}{2.4.6.8}$	0,5917600 — 2	$\frac{35}{1152} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}$	0,4826156 — 2
$\frac{7}{256} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$	0,4368581 — 2	$\frac{63}{2816} = \frac{1.3\ldots7.9}{2.4\ldots10.11}$	0,3497078 — 2
$\frac{21}{1024} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}$	0,3119193 — 2	$\frac{231}{13312} = \frac{1.3\ldots9.11}{2.4\ldots12.13}$	0,2393687 — 2
$\frac{33}{2048} = \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6\ldots12.14}$	0,2071840 — 2	$\frac{429}{30720} = \frac{1.3\ldots11.13}{2.4\ldots14.15}$	0,1450361 — 2
$\frac{429}{32768} = \frac{1.3.5\ldots11.13}{2.4.6\ldots14.16}$	0,1170074 — 2	$\frac{6435}{557056} = \frac{1.3\ldots13.15}{2.4\ldots16.17}$	0,0626497 — 2
$\frac{715}{65536} = \frac{1.3.5\ldots13.15}{2.4.6\ldots16.18}$	0,0378261 — 2	$\frac{12155}{1245184} = \frac{1.3\ldots15.17}{2.4\ldots18.19}$	0,9895214 — 3
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,6989700 — 1	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2.3}$	0,2218487 — 1
$\frac{3}{8} = \frac{1.3}{2.4}$	0,5740313 — 1	$\frac{1}{40} = \frac{1}{2.4.5}$	0,3979400 — 2
$\frac{5}{16} = \frac{1.3.5}{2.4.6}$	0,4948500 — 1	$\frac{1}{112} = \frac{1.3}{2.4.6.7}$	0,9507820 — 3
$\frac{35}{128} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$	0,4368581 — 1	$\frac{5}{1152} = \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}$	0,6375175 — 3
$\frac{63}{256} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}$	0,3911005 — 1	$\frac{7}{2816} = \frac{1.3.5.7}{2.4\ldots10.11}$	0,3954654 — 3
$\frac{231}{1024} = \frac{1.3.5\ldots9.11}{2.4.6\ldots10.12}$	0,3533120 — 1	$\frac{21}{13312} = \frac{1.3\ldots7.9}{2.4\ldots12.13}$	0,1979760 — 3
$\frac{429}{2048} = \frac{1.3.5\ldots11.13}{2.4.6\ldots12.14}$	0,3211273 — 1	$\frac{33}{30720} = \frac{1.3\ldots9.11}{2.4\ldots14.15}$	0,0310927 — 3
$\frac{6435}{32768} = \frac{1.3.5\ldots13.15}{2.4.6\ldots14.16}$	0,2930986 — 1	$\frac{429}{557056} = \frac{1.3\ldots11.13}{2.4\ldots16.17}$	0,8865584 — 4
$\frac{12155}{65536} = \frac{1.3.5\ldots15.17}{2.4.6\ldots16.18}$	0,2682750 — 1	$\frac{715}{1245184} = \frac{1.3\ldots13.15}{2.4\ldots18.19}$	0,7590725 — 4

VII. Tafel der Bernoulli'schen Zahlen.

	Zahl	Log. vulg.		Zahl	Log. vulg.
B_1	$\frac{1}{6}$	0,2218487 — 1	B_{19}	$\frac{174611}{330}$	2,7235577
B_3	$\frac{1}{30}$	0,5228787 — 2	B_{21}	$\frac{854513}{138}$	3,7918360
B_5	$\frac{1}{42}$	0,3767507 — 2	B_{23}	$\frac{236364091}{2730}$	4,9374189
B_7	$\frac{1}{30}$	0,5228787 — 2	B_{25}	$\frac{8553103}{6}$	6,1539725
B_9	$\frac{5}{66}$	0,8794261 — 2	B_{27}	$\frac{23749461029}{870}$	7,4361345
B_{11}	$\frac{691}{2730}$	0,4033154 — 1	B_{29}	$\frac{8615841276005}{14322}$	8,7792940
B_{13}	$\frac{7}{6}$	0,0669468	B_{31}	$\frac{7709321041217}{510}$	10,1794460
B_{15}	$\frac{3617}{510}$	0,8507783	B_{33}	$\frac{2577687858367}{6}$	11,6330791
B_{17}	$\frac{43867}{798}$	1,7401350	B_{35}	$\frac{26315271553053477373}{1919190}$	13,1370899

VIII. Tafel der Potenzsummen.

Wir bezeichnen mit

P_n die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \cdots$

Q_n „ „ „ „ $\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \cdots$

R_n „ „ „ „ $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$

n	P_n	Q_n	R_n
1	1,2337006	0,4112335	∞
2	1,0146780	0,067645	1,6449341
3	1,0014471	0,015860	1,2020569
4	1,0001552	0,0039222	1,0823232
5	1,0000170	0,0009775	1,0369278
6	1,0000019	0,0002442	1,0173431
7	1,0000002	0,0000610	1,0083493
8	1,0000000	0,0000153	1,0040774
9	1,0000000	0,0000038	1,0020084
10	1,0000000	0,0000010	1,0009946

IX. Potenzen und Wurzeln.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000	51	2601	132651	7,1414	3,7084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	2704	140608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	2809	148877	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	2916	157464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	3025	166375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	3136	175616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	3249	185193	7,5498	3,8485
8	64	512	2,8284	2,0000	58	3364	195112	7,6158	3,8709
9	81	729	3,0000	2,0801	59	3481	205379	7,6811	3,8930
10	100	1000	3,1623	2,1544	60	3600	216000	7,7460	3,9149
11	121	1331	3,3166	2,2240	61	3721	226981	7,8102	3,9365
12	144	1728	3,4641	2,2894	62	3844	238328	7,8740	3,9579
13	169	2197	3,6056	2,3513	63	3969	250047	7,9373	3,9791
14	196	2744	3,7417	2,4101	64	4096	262144	8,0000	4,0000
15	225	3375	3,8730	2,4662	65	4225	274625	8,0623	4,0207
16	256	4096	4,0000	2,5198	66	4356	287496	8,1240	4,0412
17	289	4913	4,1231	2,5713	67	4489	300763	8,1854	4,0615
18	324	5832	4,2426	2,6207	68	4624	314432	8,2462	4,0817
19	361	6859	4,3589	2,6684	69	4761	328509	8,3066	4,1016
20	400	8000	4,4721	2,7144	70	4900	343000	8,3666	4,1213
21	441	9261	4,5826	2,7589	71	5041	357911	8,4261	4,1408
22	484	10648	4,6904	2,8021	72	5184	373248	8,4853	4,1602
23	529	12167	4,7958	2,8439	73	5329	389017	8,5440	4,1793
24	576	13824	4,8990	2,8845	74	5476	405224	8,6023	4,1983
25	625	15625	5,0000	2,9240	75	5625	421875	8,6603	4,2172
26	676	17576	5,0990	2,9625	76	5776	438976	8,7178	4,2358
27	729	19683	5,1962	3,0000	77	5929	456533	8,7750	4,2543
28	784	21952	5,2915	3,0366	78	6084	474552	8,8318	4,2727
29	841	24389	5,3852	3,0723	79	6241	493039	8,8882	4,2908
30	900	27000	5,4772	3,1072	80	6400	512000	8,9443	4,3089
31	961	29791	5,5678	3,1414	81	6561	531441	9,0000	4,3267
32	1024	32768	5,6569	3,1748	82	6724	551368	9,0554	4,3445
33	1089	35937	5,7446	3,2075	83	6889	571787	9,1104	4,3621
34	1156	39304	5,8310	3,2396	84	7056	592704	9,1652	4,3795
35	1225	42875	5,9161	3,2711	85	7225	614125	9,2195	4,3968
36	1296	46656	6,0000	3,3019	86	7396	636056	9,2736	4,4140
37	1369	50653	6,0828	3,3322	87	7569	658503	9,3274	4,4310
38	1444	54872	6,1644	3,3620	88	7744	681472	9,3808	4,4480
39	1521	59319	6,2450	3,3912	89	7921	704969	9,4340	4,4647
40	1600	64000	6,3246	3,4200	90	8100	729000	9,4868	4,4814
41	1681	68921	6,4031	3,4482	91	8281	753571	9,5394	4,4979
42	1764	74088	6,4807	3,4760	92	8464	778688	9,5917	4,5144
43	1849	79507	6,5574	3,5034	93	8649	804357	9,6437	4,5307
44	1936	85184	6,6332	3,5303	94	8836	830584	9,6954	4,5468
45	2025	91125	6,7082	3,5569	95	9025	857375	9,7468	4,5629
46	2116	97336	6,7823	3,5830	96	9216	884736	9,7980	4,5789
47	2209	103823	6,8557	3,6088	97	9409	912673	9,8489	4,5947
48	2304	110592	6,9282	3,6342	88	9604	941192	9,8995	4,6104
49	2401	117649	7,0000	3,6593	99	9801	970299	9,9499	4,6261
50	2500	125000	7,0711	3,6840	100	10000	1000000	10,0000	4,6416

X. Tafel der gewöhnlichen Logarithmen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957

X. Tafel der gewöhnlichen Logarithmen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957

Differentialrechnung.

§. 53.

Einleitung.

1) Sei $f(x) = y$, so wird, unter Voraussetzung der Eindeutigkeit und Stetigkeit der Functionen $f(x)$, wenn

$$\varDelta y = f(x + \varDelta x) - f(x)$$
$$\varDelta x = (x + \varDelta x) - x$$

gesetzt wird

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}, \lim \varDelta x = 0.$$

Man schreibt auch

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = D_x f(x).$$

Allgemein ist

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \lim \frac{f^{(n-1)}(x + \varDelta x) - f^{(n-1)}(x)}{\varDelta x}.$$

2) Sei $z = f(xy)$, so wird:

$$f_1 = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{f(x + \varDelta x, y) - f(xy)}{\varDelta x}, \lim \varDelta x = 0$$

$$f_2 = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{f(x, y + \varDelta y) - f(xy)}{\varDelta y}, \lim \varDelta y = 0.$$

Es ist ferner

$$\varDelta z = f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y)$$
$$= \frac{f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y + \varDelta y)}{\varDelta x} \varDelta x$$
$$+ \frac{f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)}{\varDelta y} \varDelta y$$

$$d z = \lim \varDelta z \quad \text{für} \begin{cases} \lim \varDelta x = 0 \\ \lim \varDelta y = 0 \end{cases}$$

$$d z = \frac{\partial z}{\partial x} d x + \frac{\partial z}{\partial y} d y.$$

Es ist:

$$\frac{d z}{d x} \cdot \frac{d x}{d t} = \frac{d z}{d t}, \quad \text{nicht aber} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{d x}{d t} = \frac{\partial z}{\partial t},$$

d. h. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ sind symbolische Quotienten, während $\frac{d z}{d x}, \frac{d z}{d y}$ wahre sind.

3) Ist $f(x y) = 0$, so folgt:

$$f_1 d x + f_2 d y = 0,$$

demnach

$$\frac{d y}{d x} = -\frac{f_1}{f_2}.$$

4) Ist $f(x y z) = 0, \quad F(x y z) = 0$, so folgt:

$$f_1 d x + f_2 d y + f_3 d z = 0$$
$$F_1 d x + F_2 d y + F_3 d z = 0$$

und daraus

$$\frac{d x}{\varDelta_{23}} = \frac{d y}{\varDelta_{31}} = \frac{d z}{\varDelta_{12}},$$

wenn gesetzt wird:

$$\varDelta_{ij} = \begin{vmatrix} f_i & F_i \\ f_j & F_j \end{vmatrix}$$

In dem speciellen Falle, wo

$$F(x y z) = 0, \quad z = f(x y),$$

ergiebt sich:

$$\left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right) d x + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right) d y = 0.$$

5) Ist $F \equiv F(u v)$ und zugleich

$$u = \varphi(x y z) \quad v = \psi(x y z) \quad z = f(x y),$$

so wird

$$d F = \left\{\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} d x$$
$$+ \left\{\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\} d y.$$

6) Es ist, wenn $f(x)$ endlich stetig und eindeutig bleibt, für

$$a \gtrless x \gtrless b,$$

und wenn

$$a \gtrless h \gtrless b$$

angenommen wird, sowie m eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$f(x) + hf'(x) \gtrless f(x+h) \gtrless f(x) + hf'(x+h)$$

$$f(x+h) = f(a) + \frac{hf'(a+\vartheta h)}{m\,\theta^{m-1}},$$

wobei

$$0 < \theta < 1$$

$$1 - \vartheta = \theta.$$

Allgemein ergiebt sich:

$$f(x+h) = \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} \frac{h^\varkappa}{\varkappa!} f^{(\varkappa)}(x) + \frac{h^n}{(n-1)!} \frac{f^{(n)}(x+\vartheta h)}{p\,\theta^{p-n}} \quad \text{(Taylor)}$$

$$f(x) = \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} \frac{x^\varkappa}{\varkappa!} f^{(\varkappa)}(0) + \frac{x^n}{(n-1)!} \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{p\,\theta^{p-n}} \quad \text{(Maclaurin)}$$

und ähnlich für zwei Variable:

$$f(x+\alpha, y+\beta) = \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa!} \left\{\alpha \frac{1}{\partial x} + \beta \frac{1}{\partial y}\right\}^\varkappa \partial^\varkappa f(xy)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\alpha \frac{1}{\partial x} + \beta \frac{1}{\partial y}\right)^n \partial^n f(x+\vartheta\alpha, y+\vartheta'\beta).$$

Analog auch für mehrere Variable.

Man merke dazu: Sei $f(x)$ für $x = \xi_0$, $x = \xi_1, \ldots x = \xi_n$, discontinuirlich, wobei $\xi_\varkappa$ allgemein complex gedacht wird, und

$$mod\,\xi_0 < mod\,\xi_1 < \cdots < mod\,\xi_n,$$

so gilt die Entwickelung von $f(x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots$$

so lange, so lange

$$mod\,x < mod\,\xi_\varkappa.$$

Mehreres in der Functionentheorie.

§. 54.

Allgemeine Differentialformeln.

1) $d\,x^n = n\,x^{n-1}\,d\,x$

2) $d\,a^x = a^x \log a\,dx$

3) $d \log x = \frac{d\,x}{x}, \ldots \quad d \log^{(a)} x = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{d\,x}{x}$

4) $d\,e^x = e^x\,d\,x$

5) $d \sin x = \cos x\,d\,x$

6) $d \cos x = -\sin x\,d\,x$

7) $d\,tgn\,x = \frac{d\,x}{\cos^2 x}$

8) $d\,cotg\,x = -\frac{d\,x}{\sin^2 x}$

9) $d \sec x = tgn\,x \sec x\,d\,x$

10) $d\,cosec\,x = cotg\,x\,cosec\,x\,d\,x$

11) $d\,arc\sin x$, 12) $d\,arc\cos x$ $= \begin{cases} + \\ - \end{cases} \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $d\,arc\,tgn\,x$, 14) $d\,arc\,cotg\,x$ $= \begin{cases} + \\ - \end{cases} \frac{d\,x}{1+x^2}$

15) $d\,arc\sec x$, 16) $d\,arc\,cosec\,x$ $= \begin{cases} + \\ - \end{cases} \frac{d\,x}{x\sqrt{x^2-1}}$

NB. Im ersten Quadranten.

17) $d\,z = \frac{\partial z}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d\,y$

18) $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,d\,x^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,d\,x\,d\,y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,d\,y$

19) $d^n z = \left\{\frac{1}{\partial x}\,d\,x + \frac{1}{\partial y}\right\}^n \partial^n z$

20) $d\,u\,v = u\,d\,v + v\,d\,u$

21) $d\,\frac{u}{v} = \frac{v\,d\,u - u\,d\,v}{v^2}$

22) $$d\,u^v = u^v \left\{\log u\,d\,v + \frac{v}{u}\,d\,u\right\}$$

23) $$d\,u\,v\,w\cdots = u\,v\,w\cdots\left\{\frac{d\,u}{u} + \frac{d\,v}{v} + \frac{d\,w}{w} + \cdots\right\}$$

24) $$d\,\frac{u\,v\,w\ldots}{p\,q\,r\ldots} = \frac{u\,v\,w\ldots}{p\,q\,r\ldots}\left\{\frac{d\,u}{u} + \frac{d\,v}{v} + \cdots - \frac{d\,p}{p} - \frac{d\,q}{q} - \cdots\right\}$$

25) $$\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{d\,u}{d\,y}\,\frac{d\,y}{d\,x}$$

26) $$\frac{d^2\,u}{d\,x^2} = \frac{d^2\,u}{d\,y^2}\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 + \frac{d\,u}{d\,y}\cdot\frac{d^2\,y}{d\,x^2}.$$

§. 55.

Einige oft vorkommende Differentialquotienten.

1) $$\frac{d}{d\,x}\left\{\frac{a+b\,x+c\,x^2}{\alpha+\beta\,x+\gamma\,x^2}\right\} = \frac{(\alpha b - a\beta) + 2(\alpha\,c - a\,\gamma)\,x + (\beta\,c - b\,\gamma)\,x^2}{(\alpha+\beta\,x+\gamma\,x^2)^2}$$

2) $$\frac{d}{d\,x}\left\{x^n\sqrt{a+b\,x+c\,x^2}\right\} = \frac{2\,n\,a\,x^{n-1} + (2n+1)\,b\,x^n + 2(n+1)\,c\,x^{n+1}}{2\sqrt{a+b\,x+c\,x^2}}$$

3) $$\frac{d}{d\,x}\left\{\frac{x^n}{\sqrt{a+b\,x+c\,x^2}}\right\} = \frac{2\,n\,a\,x^{n-1} + (2\,n-1)\,b\,x^n + 2\,(n-1)\,c\,x^{n+1}}{2\sqrt{a+b\,x+c\,x^2}^{\,3}}$$

4) $$\frac{d}{d\,x}\sqrt{\frac{a+b\,x+c\,x^2}{\alpha+\beta\,x+\gamma\,x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(b\,\alpha - a\,\beta) + 2(\alpha\,c - a\,\gamma)\,x + (b\,\gamma - \beta\,c)\,x^2}{\sqrt{(a+b\,x+c\,x^2)(\alpha+\beta\,x+\gamma\,x^2)^3}}$$

§. 56.

Höhere Differentialquotienten.

1) $$\frac{d^n}{d\,x^n}\,x^m = m^{n/-1}\,x^{m-n} = m\,(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$$

2) $$\frac{d^n}{d\,x^n}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}},\quad \frac{d^n}{d\,x^n}\left(\frac{1}{x^m}\right) = (-1)^n\,\frac{m^{n/1}}{x^{m+n}}$$

3) $$\frac{d^n}{d\,x^n}\sqrt{x} = (-1)^{n-1}\,\frac{1^{n/2}}{x^n\,(2\,n-1)\,2^n}\sqrt{x},\quad \frac{d^n\,x^{-\frac{1}{2}}}{d\,x^n} = (-1)^n\,\frac{1^{n/2}}{2^n\,x^n\sqrt{x}}$$

4) $$\frac{d^n}{d\,x^n}\,(a \pm b\,x)^m = (\pm\,b)^n\,m^{n/-1}\,(a \pm b\,x)^{m-n}$$

5) $$\frac{d^n}{d x^n} \frac{1}{a \pm b x} = (\mp b)^n \frac{n!}{(a \pm b x)^{n+1}}$$

6) $$\frac{d^n}{d x^n} \frac{1}{\sqrt{a \pm b x}} = (\mp b)^n \frac{1^{n/2}}{2^n (a \pm b x)^n \sqrt{a \pm b x}}$$

7) $$\frac{d^n}{d x^n} \frac{1}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{(-1)^n n! b^n}{a \sqrt{a^2 + b^2 x^2}^{n+1}} \sin \left\{(n+1) \operatorname{arc} tgn \frac{a}{b x}\right\}$$

8) $$\frac{d^n}{d x^n} \frac{1}{a^2 - b^2 x^2} = (-1)^n \frac{n! b^n}{2 a} \left\{\frac{1}{(a + b x)^{n+1}} - \frac{1}{(-a + b x)^{n+1}}\right\}$$

9) $$\frac{d^n}{d x^n} e^{bx} = b^n e^{bx}$$

10) $$\frac{d^n}{d x^n} \sin x = \sin \left(\frac{n \pi}{2} + x\right)$$

11) $$\frac{d^n}{d x^n} \cos x = \cos \left(\frac{n \pi}{2} + x\right)$$

12) $$\frac{d^n}{d x^n} e^x \sin x = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \sin \left(x + \frac{n \pi}{4}\right)$$

13) $$\frac{d^n}{d x^n} e^x \cos x = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \cos \left(x + \frac{n \pi}{4}\right)$$

14) $$\frac{d^{n-1}}{d x^{n-1}} \left\{(1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}\right\} = (-1)^{n-1} . 1 . 3 . 5 \ldots (2 n - 1) \frac{\sin n z}{n},$$

$\cos z = x$ gesetzt.

Jacobi, Crelle Journ. XV, p. 3.

15) $$\frac{d^n}{d x^n} f(x^\lambda) = \frac{n!}{x^n} \sum_1^n{}_\varkappa \frac{\varkappa!}{x^{\varkappa \lambda}} f^\varkappa (x^\lambda) \sum_1^\varkappa{}_h (-1)^{\varkappa + h} \binom{\varkappa}{h} \binom{h \lambda}{n}$$

16) $$\frac{d^n}{d x^n} f(x) = \sum_1^n{}_\varkappa \frac{x^\varkappa f^\varkappa (x)}{\varkappa!} \sum_1^\varkappa{}_h (-1)^{\varkappa - h} \binom{\varkappa}{h} \frac{1}{x^h} \frac{\partial^n x^h}{\partial x^n}.$$

Vergleiche: Koppe, Theorie der indepedenten Darstellung der höheren Differentialquotienten. Leipzig 1845.

17) $$(y^2 + b)^m \, d^{n+m} (y^2 + b)^n = d^{n-m} (y^2 + b)^n.$$

Crelle Journal Bd. II, p. 225.

18) $$\frac{d^n(x^\varkappa)}{x^\varkappa} = \binom{\varkappa}{1}\binom{n-\varkappa}{n-1}\frac{d^n(x)}{x} + \binom{\varkappa}{2}\binom{n-\varkappa}{n-2}\frac{d^n(x^2)}{x^2} + \cdots$$
$$+ \binom{\varkappa}{n}\binom{n-\varkappa}{0}\frac{d^n(x^n)}{x^n},$$ $\varkappa$ kann $\pm$ ganze oder gebrochen sein.

Vergl. Götting, Mathem. Ann. Bd. III, p. 279. Ausserdem Schlömilch, Compendium II. Bd. 4 bis 16. Sohnke, Aufgaben-Sammlung 1. Bd. II.

§. 57.

Unbestimmte Formen.

1) $$\frac{0}{0} = \frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\varphi''(\alpha)}{f''(\alpha)} \cdots$$

Sei
$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\varphi_1(\alpha)},\ f(\alpha) = \frac{1}{f_1(\alpha)},$$
so wird aus

2) $$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} \cdots \frac{\varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)} = \frac{0}{0}$$

3) $$\infty - \infty = \varphi(\alpha) - f(\alpha) \cdots \frac{f_1(\alpha) - \varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)\cdot\varphi_1(\alpha)} = \frac{0}{0}$$

4) $$0\,.\,\infty = \varphi(\alpha) . f(\alpha) \cdots \frac{\varphi(\alpha)}{f_1(\alpha)} = \frac{0}{0}$$

5) 0^∞, ∞^0, 1^∞ sei $= q$,

so wird
$$q = \{f(\alpha)\}^{\varphi(\alpha)} = e^{\varphi(\alpha)\log f(\alpha)} \quad \varphi(\alpha).\log f(\alpha) = 0\cdot\infty$$

Für $x = 0$ wird

6) $$\frac{\sqrt{a+bx+cx^2} - \sqrt{a-bx+cx^2}}{\sqrt{\alpha+\beta x} - \sqrt{\alpha-\beta x}} = \frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}$$

7) $$\frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b$$

8) $$x^p \log\frac{1}{x} = 0 \quad p > 1$$

9) $$x^x = 1.$$

Für $x = \infty$ wird

10) $$\frac{\log x}{x^m} = 0 \quad m > 0$$

11) $\dfrac{x^\beta}{e^{ax}} = 0 \quad a > 0 \quad \beta > 0$

12) $\dfrac{a^x}{x} = \infty.$

Für $x = 1$

13) $x^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{e}$

14) $(1 - x) \log (1 - x) = 0$

15) $\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x - 1} = \frac{1}{2}.$

§. 58.

Transformationsgleichungen.

1) Sei $x = \varphi(t)$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'^3} \left\{ \varphi' \frac{d^2 y}{dt^2} - \varphi'' \frac{dy}{dt} \right\}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{\varphi'^5} \left\{ \varphi'^2 \frac{d^3 y}{dt^2} - 3' \varphi' \varphi'' \frac{d^2 y}{dt^2} + (3 \varphi''^2 - \varphi' \varphi''') \frac{dy}{dt} \right\}$$

2) Sei $x = \varphi(y)$, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\varphi''}{\varphi'^3}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{\varphi'^5} (3 \varphi''^2 - \varphi' \varphi''').$$

3) Seien x und y Functionen von t, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left\{ \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} \right\} \Big/ \left(\frac{dx}{dt} \right)^3$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \left\{\left(\frac{d x}{d t}\right)^2 \frac{d^3 y}{d t^3} - 3 \frac{d x}{d t} \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} \frac{d^2 y}{d t^2} \right.$$
$$\left. + \left(3 \left[\frac{d^2 x}{d t^2}\right]^2 - \frac{d x}{d t} \frac{d^3 x}{d t^3}\right) \frac{d y}{d t}\right\} \Big/ \left(\frac{d x}{d t}\right)^5.$$

4) Sei $f(x y z) = 0$, so wird:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3.$$

5) Sei $x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi,$ so wird:

$$d x = d \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \, d \varphi$$
$$d y = d \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \, d \varphi$$
$$d^2 x = d^2 \varrho \cos \varphi - 2 \, d \varrho \, d \varphi \sin \varphi - \varrho \cos \varphi \, d^2 \varphi$$
$$d^2 y = d^2 \varrho \sin \varphi + 2 \, d \varrho \, d \varphi \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \, d^2 \varphi$$
$$x \, d x + y \, d y = \varrho \, d \varrho$$
$$x \, d y + y \, d x = d \varrho \sin 2 \varphi - \varrho \cos 2 \varphi \, d \varphi$$
$$x \, d y - y \, d x = \varrho^2 d \varphi$$
$$\frac{d y}{y} - \frac{d x}{x} = \frac{d \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi}$$
$$\frac{d y}{y} + \frac{d x}{x} = 2\left\{\frac{d \varrho}{\varrho} + d \varphi \operatorname{cotg} 2 \varphi\right\}$$
$$(d x)^2 + (d y)^2 = (d \varrho)^2 + (\varrho \, d \varphi)^2$$
$$\frac{d y}{d x} = \frac{d \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \, d \varphi}{d \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \, d \varphi}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-\varrho \frac{d^2 \varrho}{d \varphi^2} + 2\left(\frac{d \varrho}{d \varphi}\right)^2 + \varrho^2}{\left(\frac{d \varrho}{d \varphi} \cos \varphi - \varrho \sin \varphi\right)^3},$$ ϱ als Function von φ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial z}{\partial \varrho}.$$

6) Sei

$$x = u \cos \alpha t + v \sin \alpha t \quad y = -u \sin \alpha t + v \cos \alpha t,$$

so wird:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \cos \alpha t + \frac{dv}{dt} \sin \alpha t - \alpha u \sin \alpha t + \alpha v \cos \alpha t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{du}{dt} \sin \alpha t + \frac{dv}{dt} \cos \alpha t - \alpha u \cos \alpha t - \alpha v \sin \alpha t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} \cos \alpha t + \frac{d^2 v}{dt^2} \sin \alpha t - 2\alpha \frac{du}{dt} \sin \alpha t + 2\alpha \frac{dv}{dt} \cos \alpha t$$
$$- \alpha^2 u \cos \alpha t - \alpha^2 v \sin \alpha t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{d^2 u}{dt^2} \sin \alpha t + \frac{d^2 v}{dt^2} \cos \alpha t - 2\alpha \frac{du}{dt} \cos \alpha t - 2\alpha \frac{dv}{dt} \sin \alpha t$$
$$+ \alpha^2 u \sin \alpha t - \alpha^2 v \cos \alpha t.$$

§. 59.

Maxima und Minima.

1) Ist

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots$$

und

$$f'(x) = 0 \quad \{\text{oder } \infty\} \quad \text{für } x = \alpha$$

und $f^{(2\varkappa)}(\alpha)$ die erste nicht verschwindende Ableitung gerader Ordnung, so ist

$$f(\alpha) \text{ ein } \begin{cases}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{cases} \text{ je nachdem } f^{(2\varkappa)}(\alpha) \begin{cases}-\\ +\end{cases} \text{ ist.}$$

Wird $f^{(2\varkappa)}(\alpha) = \infty$, so untersuche man, ob

$$f^{(2\varkappa)}(\alpha \pm h) - f^{(2\varkappa)}(\alpha) \begin{cases}-\\ +\end{cases} \text{ ist,}$$

es ist alsdann

$$f(\alpha) \text{ ein } \begin{cases}\text{Maximum}\\ \text{Minimum.}\end{cases}$$

Die Untersuchung wird durch folgende Bemerkungen oft erleichtert.

1) Ist

$$f'(x) = \varphi(x) . \psi(x)$$

oder

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

und $\psi(x)$ für jeden reellen Werth von x wesentlich $+$, so wird $f(x)$ ein Maximum resp. Minimum, wenn

$$[f'(x)] = \varphi(x) = 0$$

$$[f''(x)] = \varphi'(x) \begin{cases} - \\ + \end{cases} \text{ist.}$$

2) Ist $f(x) = \frac{A}{\varphi(x)}$, so suche man das Max. oder Min. von $\varphi(x)$.

3) Ist $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, so ist es oft vortheilhafter, das Max. oder Min. von $\frac{1}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ zu suchen.

4) Ist $f(\alpha) = +$ und ein Max. oder Min., so ist auch $log f(\alpha)$ ein Max. oder Min.

2) Seien zwei unabhängige Variable vorhanden und

$$z = f(x_1 y).$$

Sei ferner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

so ist z ein $\begin{cases} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{cases}$, wenn $Q < 0$ und gleichzeitig $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ beide $\begin{cases} - \\ + \end{cases}$ sind.

Für $Q \gtreqless 0$ findet weder ein Max. noch ein Min. statt.

3) Seien $x_1 x_2 \ldots x_n$ unabhängige Variable, und

$$z = f(x_1 \ldots x_n),$$

ferner

$$f_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}$$

und

$$H_\varkappa = \begin{vmatrix} f_{11}\ f_{12} \cdots f_{1\varkappa} \\ f_{12} \cdots\cdots\cdots \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ f_{1\varkappa} \cdots\cdots f_{\varkappa\varkappa} \end{vmatrix}$$

Hesse'sche (Determinante),

so wird z ein Max., wenn alle

$$\begin{matrix} H_\varkappa < 0 & \text{für} & \text{ungerade } \varkappa \\ H_\varkappa > 0 & \text{für} & \text{gerade } \varkappa \end{matrix} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n),$$

und z ein Min., wenn alle $H_\varkappa > 0$ für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n$.

Findet weder das eine, noch das andere statt, so existirt entweder weder ein Max. noch ein Min., oder das Verhalten der Function muss mittelst der Taylor'schen Reihe untersucht werden.

4) Sei gegeben

$$u = f_1(x_1\, x_2, \ldots x_{n+m}),$$

ausserdem die Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_{m+n}) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(x_1 \ldots x_{m+n}) = 0.$$

Man bestimme aus diesen und aus

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_1^m \lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} + \sum_1^m \lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_{m+n}} = 0.$$

Die Unbekannte

$$x_1\, x_2 \ldots x_{m+n}$$
$$\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_m,$$

diese in

$$u = f(x_1\, x_2 \ldots x_{m+n})$$

eingesetzt, liefern ein Max. oder Min.

Litteratur und Beweise vide Dr. Otto Stolz: Sitzungsber. der k. k. Akademie der Wiss. in Wien. Dec. 1868.

Integral-Tafeln.

A. Unbestimmte Integrale.

§. 60.

Allgemeine Bemerkungen und Lehrsätze.

1) Findet man hier eine Integralformel nicht, so ersetze man

	x	durch	$-x$
oder	x	„	xi
„	x	„	x^n
„	x	„	$\frac{\pi}{2} - x$
„	e^x	„	e^{xi}
„	e^{x^n}	„	e^{ix^n}

suche die Transformirte, und mache rechter Hand in der gefundenen Formel dieselben Substitutionen.

2) Man beachte, dass:

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$\int u\, dx = \frac{u}{v} \int v\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) \int v\, dx \right\} dx$$

wird $x = \varphi(z)$

$$\int f(x)\, dx = \int f\{\varphi(z)\} \frac{d\varphi(z)}{dz} dz$$

3) Es ist, so lange die Reihen convergent sind:

$$\int f(x)\,dx = f(a)\,\frac{x-a}{1!} + f'(a)\,\frac{(x-a)^2}{2!} + f''(a)\,\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

$$\int f(x)\,dx = f(0)\,\frac{x}{1!} + f'(0)\,\frac{x^2}{2!} + f''(0)\,\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{2!}f'(x) + \frac{x^3}{3!}f''(x) + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!}\int x^n f^{(n)}(x)\,dx.$$

4) Es ist

$$\int\!\!\int \varphi(x)\,dx\,.\,dx = x\int \varphi(x)\,dx - \int x\,\varphi(x)\,dx.$$

§. 61.

Zerlegung einer algebraischen rationalen Function.

Sei

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-\alpha)^p(x-\beta)^q(x-\gamma)^r\ldots}$$
$$= \frac{A_p}{(x-\alpha)^p} + \frac{A_{p-1}}{(x-\alpha)^{p-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha}$$
$$+ \frac{B_q}{(x-\beta)^q} + \frac{B_{q-1}}{(x-\beta)^{q-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-\beta}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sei ferner

$$\varphi(x) = (x-\beta)^q(x-\gamma)^r\ldots \quad \text{d. h.} \quad \varphi(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^p},$$

so lassen sich die Coefficienten A_p, $A_{p-1}, \ldots$ aus folgenden Relationen bestimmen:

$$F\;(\alpha) = A_p\,\varphi(\alpha)$$
$$F'\,(\alpha) = A_p\,\varphi'(\alpha) + A_{p-1}\,\varphi(\alpha)$$
$$F''(\alpha) = A_p\,\varphi''(\alpha) + \binom{2}{1}A_{p-1}\,\varphi'(\alpha) + 1\,.\,2\,.\,A_{p-2}\,\varphi(\alpha)$$

$$F'''(\alpha) = A_p\,\varphi'''(\alpha) + \binom{3}{1} . 1 . A_{p-1}\,\varphi''(\alpha) + \binom{3}{2} 1 . 2 . A_{p-2}\,\varphi'(\alpha)$$
$$+ 1 . 2 . 3 . A_{p-3}\,\varphi(\alpha).$$
$$F^{\mathrm{IV}}(\alpha) = A_p\,\varphi^{\mathrm{IV}}(\alpha) + \binom{4}{1} 1\, A_{p-1}\,\varphi'''(\alpha) + \binom{4}{2} 1 . 2 . A_{p-2}\,\varphi''(\alpha)$$
$$+ \binom{4}{3} . 1 . 2 . 3\, A_{p-3}\,\varphi'(\alpha) + 1 . 2 . 3 . 4 . A_{p-4}\,\varphi(\alpha). \text{ etc.}$$

Ersetzt man α durch β, A durch B etc., so ergeben sich die Formeln für die übrigen Coefficienten.

Insbesondere ist:

$$\int \left[\frac{M+iN}{x-\alpha-i\beta} + \frac{M-iN}{x-\alpha+i\beta}\right] dx = M \log(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$$
$$- 2 N \operatorname{arctgn} \frac{x-\alpha}{\beta},$$

wobei M, N, α, β beliebige reelle Zahlen sind.

§. 62.

Transformation der Integrale.

Es ist

1) $$\int\int f(xy)\,dx\,dy = \int\int f(\varphi, \psi)\,\Delta\,dr\,ds,$$

wenn

$$x = \varphi(r,s), \quad y = \psi(r,s)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial s} \end{vmatrix}$$

2) $$\int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int f(\varphi, \psi, x)\,\Delta\,dr\,ds\,dt$$

$$x = \varphi(r,s,t), \quad y = \psi(r,s,t), \quad z = \chi(r,s,t)$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \chi}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \chi}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

3) Für $x = \varrho \cos \varphi \quad y = \varrho \sin \varphi$ ist

$$\int\int f(x,y)\, dx\, dy = \int\int f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi.$$

4) Für $x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi \cos \theta, \quad z = \varrho \sin \varphi \sin \theta$ ist

$$\int\int\int f(x\, y\, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int f\{\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi \cos \theta, \varrho \sin \varphi \sin \theta\}\, \varrho^2 \sin \varphi\, d\varrho\, d\varphi\, d\theta.$$

5) Für $x = r \cos \theta + a \sin \theta, \quad y = r \sin \theta + a \cos \theta$ wird:

$$\int\int f(x,y)\, dx\, dy = \int\int f(r \cos \theta + a \sin \theta, r \sin \theta + a \cos \theta)\, (a \sin 2\theta - r)\, d\theta\, dr.$$

6) Für $\alpha x = y z, \quad \beta y = x z, \quad \gamma z = x y$ wird:

$$\int\int\int f(\alpha \beta \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma = 4 \int\int\int f\left\{\frac{yz}{x}, \frac{xz}{y}, \frac{xy}{z}\right\} dx\, dy\, dz.$$

7) Für $x + y = u, \quad y = v u$

$$\int\int f(x,y)\, dx\, dy = \int\int f\{(1 - v) u, u v\}\, u\, du\, dv.$$

§. 63.

Integrale einfacher Functionen.

1) $\displaystyle\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \int x^{-m}\, dx = -\frac{1}{(m-1)\, x^{m-1}}$

$$\int x^{\pm \frac{m}{n}}\, dx = \frac{n}{n \pm m} \sqrt[n]{x^{n \pm m}}$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x$

3) $\int dx\sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$

5) $\int dx\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$ $\int dx\sqrt[3]{x} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x}$ $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

7) $\int e^x\,dx = e^x$

8) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$

9) $\int \log x\,dx = x\log x - x$

10) $\int \sin x\,dx = -\cos x$

11) $\int \cos x\,dx = \sin x$

12) $\int \operatorname{tgn} x\,dx = -\log\cos x$

13) $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \log\sin x$

14) $\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

15) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log\operatorname{tgn}\frac{x}{2}$

16) $\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx = x\operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2}$

17) $\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = x\operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2}$

18) $\int \operatorname{arc\,tgn} x\,dx = x\operatorname{arc\,tgn} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

19) $\int \operatorname{arc\,cotg} x\,dx = x\operatorname{arc\,cotg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

20) $\int \operatorname{arc\,sec} x\,dx = x\operatorname{arc\,sec} x - \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

21) $\int \operatorname{arc\,cosec} x\,dx = x\operatorname{arc\,cosec} x + \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

§. 64.

Integrale durch Substitutionen integrirbar.

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - a^2}}$ $x = \frac{a}{1 - z}$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^{2n} \pm x^{2n}}}$ $x = \frac{1}{z}$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx + cx^2}}$ $x = \frac{1}{z}$

4) $\int dx \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$ $x = a(1 - \cos\varphi)$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = z$

6) $\int x^2\sqrt{a - x}\,dx$ $x + a = t^2$

7) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$ $x^2 = \frac{1}{t^2 - 1}$

8) $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$ $x^2 = \frac{a^2}{t^2 - 1}$

9) $\int \sqrt{\frac{x}{a^3 - x^3}}$ $y = x^{3/2}$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$ $1 - x^3 = x^3 z^3$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$ $x = \frac{z}{\sqrt[3]{1 - z^3}}$

12) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1 + x} + \sqrt{1 + x}}$ $1 + x = z^6$

13) $\int \frac{dx}{(1 - x^3)\sqrt[3]{1 + x^3}}$ $x = \frac{1}{z}\sqrt[3]{1 + z^3} = y$

14) $\int x \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{1 - x^3}\,dx$ $x^3 = \frac{1 - y}{1 + y}$ $\sqrt[3]{1 - y} = z$

15) $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt[3]{1 - x^3}}$ $x = \frac{y - 1}{y + 1}$ $z = \sqrt[3]{1 + 3y^2}$

16) $\int \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{1+x}\,dx \quad x=\frac{y-1}{y+1},\ z\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2(1+3y^2)}$

17) $\int \frac{(a-bx^2)\,dx}{x\sqrt{\{cx^2-(a-bx^2)^2\}}} \quad \frac{a}{x}+by=y$

18) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1+3x+3x^2}} \quad y(1+x)=x$

19) $\int \frac{dx}{(3-x^2)\sqrt[3]{1+x^2}} \quad \begin{cases}\sqrt[3]{1+x^2}=z\sqrt[3]{4}, & z=\sqrt[3]{1-3y+3y^2}\\ y(1+u)=1, & v=\sqrt[3]{1+u^3}\end{cases}$

20) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2x^2-1}},\ x\sqrt{2}=\frac{t^2+1}{t^2-1},\ t=\frac{y^2-3}{4}\sqrt{2},\ y=z\sqrt{-1}$

21) $\int \frac{dx}{(1+r^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad x^2=y,\ \sqrt{y-y^2}=yu$

22) $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}} \quad x=\frac{1-y^2}{2y}$

23) $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx \quad \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}=z$

24) $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt[4]{1+x^4}} \quad z=\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

25) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{2x^2-1}} \quad tgn^4 z=2x^2-1$

26) $\int \frac{(1\pm x^2)}{(1\mp x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx \quad y=\frac{x\sqrt{2}}{1\mp x^2}$

27) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt[4]{2x^2+1}} \quad \sqrt[4]{2x^2+1}=cotg\,z$

28) $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}} \quad z=x+\frac{1}{x}$

29) $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{m}{n}}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad x+\sqrt{1+x^2}=z^n$

30) $\int \frac{dx}{(1-x^n)\sqrt[2n]{2x^{2n}-1}},\ \sqrt[2n]{2x^{2n}-1}=xy$

31) $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(1-x^n)\sqrt[2n]{2x^n-1}},\ \sqrt[2n]{2x^n-1}=y$

32) $\displaystyle\int \frac{x\,d\,x}{(\alpha+\beta x)\sqrt[4]{2\gamma x^2+\delta}}$ $\quad z=\sqrt[4]{2\gamma x^2+\delta}$

33) $\displaystyle\int \frac{x^{n-2}\,d\,x\sqrt{a+b\,x^n+c\,x^{2n}}}{a-c\,x^n}$ $\quad \sqrt[n]{a+b\,x^n+c\,x^{2n}}=z\,x$

34) $\displaystyle\int \frac{d\,x}{(a+b\,x^n)\sqrt[2n]{a+2\,b\,x^n}},\quad \frac{x}{\sqrt[2n]{a+2\,b\,x^n}}=z$

35) $\displaystyle\int \frac{d\,x}{(a+b\,x^n)\sqrt[3n]{a^2+3\,a\,b\,x^n+3\,b^2\,x^{2n}}}$

$$z=\frac{x}{\sqrt[3n]{a^2+3\,a\,b\,x^n+3\,b^2\,x^{2n}}}$$

36) $\displaystyle\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$ $\quad 1+x=z^6$

37) $\displaystyle\int \frac{d\,x}{(\alpha+\beta\,x+\gamma\,x^2)^{\frac{m}{n}}}=2\,\beta\,n\int \frac{y^{-m+n-1}\,d\,y}{\sqrt{4\,\beta\,y^n+(\beta^2-4\,\alpha\,\gamma)}}$

$$y^n=\alpha+\beta\,x+\gamma\,x^2$$

Sei FR eine rationale Function.

38) $\displaystyle\int FR\left\{x,\sqrt{a\,x+b}\right\}d\,x=\frac{2}{a}\int FR\left\{\frac{u^2-b}{\alpha},\,u\right\}u\,d\,u$

$$u=\sqrt{a\,x+b}$$

39) $\displaystyle\int FR\left\{x,\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}d\,x=-\,2\,(a-b)$

$$\int FR\left\{\frac{b\,u^2-a}{u^2-1},\;u\,\frac{b-a}{u^2-1}\right\}\frac{u\,d\,u}{(u^2-1)^2},$$

wenn $u=\sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}}$ gesetzt wird.

40) $\displaystyle\int FR\left\{x,\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{b\,x+c}}\right\}d\,x$ $\quad z^m=a+\sqrt[m]{b\,x+c}$

41) $\displaystyle\int FR\left\{x,\sqrt{a+b\,x\pm x^2}\right\}d\,x$ $\quad \begin{cases}\sqrt{a+b\,x+x^2}=x+z\\ \sqrt{a+b\,x-x^2}=\sqrt{a}+x\,z\end{cases}$

42) $\displaystyle\int FR\left\{x,\sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right\}d\,x$ $\quad x=\dfrac{d\,z^n-b}{a-c\,z^n}$

43) $\displaystyle\int x^m(a+b\,x^n)^p\,d\,x$ $\quad z=a+b\,x^n$

$$44)\quad \int \frac{F R(x^2)\, d x}{\sqrt{a + c x^2}} = \int F R\left\{\frac{a u^2}{\varkappa^2 - c u^2}\right\} \frac{\varkappa\, d u}{\varkappa^2 - c u^2},\quad u = \frac{\varkappa x}{\sqrt{a + c x^2}}$$

$$45)\quad \int \frac{F R(x^2)\, x\, d x}{\sqrt{a + c x^2}} \qquad u = \sqrt{a + c x^2}$$

Die Integrale

$$46)\quad \int \frac{f_1(x^2)\, d x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}},\quad \int \frac{f_2(x^2)\, d x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}},$$

$$\int \frac{f_3(x^2)\, d x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}}$$

lassen sich, wenn

$$f_1(x^2) = - f\left(\frac{1}{\varkappa^2 x^2}\right),\quad f_1(x^2) = - f_1\left\{\frac{1 - \varkappa^2 x^2}{\varkappa^2 (1 - x^2)}\right\},$$

$$f_2(x^2) = - f_2\left\{\frac{1 - x^2}{1 - \varkappa^2 x^2}\right\}$$

durch die Substitutionen

$$p = \frac{1}{x}\sqrt{(1 - x^2)(1 - x^2 \varkappa^2)},\quad p = x\,\frac{\sqrt{1 - \varkappa^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}},\quad p = x\,\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - \varkappa^2 x^2}}$$

auf rationale zurückführen.

Hermite Liouville Journ. VI, p. 5 bis 18.

§. 65.

Sei $a + b x^n = w.$

$$1)\quad \int x^{m-1}(a + b x^n)^p\, d x = \frac{x^m w^p}{m} - \frac{p n b}{m} \int x^{m+n-1} w^{p-1}\, d x$$

$$2)\qquad = \frac{x^{m-n} w^{p+1}}{(p + 1) n b} - \frac{m - n}{(p + 1) n b} \int x^{m-n-1} w^{p+1}\, d x$$

$$3)\quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n}\,w^{p+1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b}\int x^{m-n-1}\,w^p\,dx$$

$$4)\quad = \frac{x^m\,w^p}{m+np} + \frac{pna}{m+np}\int x^{m-1}\,w^{p-1}\,dx$$

$$5)\quad = \frac{x^m\,w^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+np)b}{ma}\int x^{m+n-1}\,w^p\,dx$$

$$6)\quad = -\frac{x^m\,w^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+n+np}{(p+1)na}\int x^{m-1}\,w^{p+1}\,dx$$

§. 66.

Sei $a+bx=w.$

$$1)\quad \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log w$$

$$2)\quad \int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\log w$$

$$3)\quad \int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3}\log w$$

$$4)\quad \int \frac{x^3\,dx}{a+bx} = \frac{x^3}{3b} - \frac{aw^2}{2b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^4}\log w$$

$$5)\quad \int \frac{x^4\,dx}{a+bx} = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^5}\log w$$

$$6)\quad \int \frac{x^5\,dx}{a+bx} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^4}{4b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x^2}{2b^4} + \frac{a^4x}{b^5} - \frac{a^5}{b^6}\log w$$

$$7)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{bw}$$

8) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{a}{bw} + \frac{1}{b^2} \log w$$

9) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2a^2}{b^3}\right)\frac{1}{w} - \frac{2a}{b^3} \log w$$

10) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^3}{2b} - \frac{3ax^2}{2b^2} + \frac{3a^3}{b^4}\right)\frac{1}{w} + \frac{3a^2}{b^4} \log w$$

11) $$\int \frac{x^4\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{3ax^3}{3b^2} + \frac{2a^2x^2}{b^3} - \frac{4a^4}{b^5}\right)\frac{1}{w} - \frac{4a^3}{b^5} \log w$$

12) $$\int \frac{x^5\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^5}{4b} - \frac{5ax^4}{12b^2} + \frac{5a^2x^3}{6b^3} - \frac{5a^3x^2}{2b^4} + \frac{5a^5}{b^6}\right)\frac{1}{w} + \frac{5a^4}{b^6} \log w.$$

13) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2bw^2}$$

14) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = -\left(\frac{x}{b} + \frac{a}{2b^2}\right)\frac{1}{w^2}$$

15) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{2ax}{b^2} + \frac{3a^2}{2b^3}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{1}{b^3} \log w$$

16) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^3}{b} - \frac{6a^2x}{b^3} - \frac{9a^3}{2b^4}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{3a}{b^4} \log w$$

17) $$\int \frac{x^4\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^4}{2b} - \frac{2ax^3}{b^2} + \frac{12a^3x}{b^4} + \frac{9a^4}{b^5}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{6a^2}{b^5} \log w$$

18) $$\int \frac{x^5\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^5}{3b} - \frac{5ax^4}{6b^2} + \frac{10a^2x^3}{3b^3} - \frac{20a^4x}{b^5} - \frac{15a^5}{b^6}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{10a^3}{b^6} \log w.$$

19) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^4} = -\left(\frac{x}{2b} + \frac{a}{6b^2}\right)\frac{1}{w^3}$$

20) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^4} = -\left(\frac{x^2}{b} + \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{3b^3}\right)\frac{1}{w^3}$$

21) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx)^4} = \left(\frac{3ax^2}{b^2} + \frac{9a^2x}{2b^3} + \frac{11a^3}{6b^4}\right)\frac{1}{w^3} + \frac{1}{b^4} \log w$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^5} = -\left(\frac{x}{3b} + \frac{a}{12b^2}\right)\frac{1}{w^4}$$

23) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^5} = -\left(\frac{x^2}{2b} + \frac{ax}{3b^2} + \frac{a^2}{12b^3}\right)\frac{1}{w^4}$$

$$24)\quad \int \frac{x^3\,dx}{(a+bx)^5} = -\left(\frac{x^3}{b} + \frac{3\,a\,x^2}{2\,b^2} + \frac{a^2\,x}{b^3} + \frac{a^3}{4\,b^4}\right)\frac{1}{w^4}$$

$$25)\quad \int \frac{dx}{x\,(a+bx)} = \frac{1}{a}\,\log\frac{x}{w}$$

$$26)\quad \int \frac{dx}{x^2\,(a+bx)} = -\frac{1}{a\,x} + \frac{b}{a^2}\,\log\frac{w}{x}$$

$$27)\quad \int \frac{dx}{x^3\,(a+bx)} = -\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{b}{a^2\,x} - \frac{b^2}{a^3}\,tog\frac{w}{x}$$

$$28)\quad \int \frac{dx}{x^4\,(a+bx)} = -\frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{b}{2\,a^2\,x^2} - \frac{b^2}{a^3\,x} + \frac{b^3}{a^4}\,\log\frac{w}{x}$$

$$29)\quad \int \frac{dx}{x^5\,(a+bx)} = -\frac{1}{4\,a\,x^4} + \frac{b}{3\,a^2\,x^3} - \frac{b^2}{2\,a^3\,x^2} + \frac{b^3}{a^4\,x} - \frac{b^4}{a^5}\,\log\frac{w}{x}$$

$$30)\quad \int \frac{dx}{x\,(a+bx)^2} = \frac{1}{a\,w} - \frac{1}{a^2}\,\log\frac{w}{x}$$

$$31)\quad \int \frac{dx}{x^2\,(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{a\,x} - \frac{2\,b}{a^2}\right)\frac{1}{w} + \frac{2\,b}{a^3}\,\log\frac{w}{x}$$

$$32)\quad \int \frac{dx}{x^3\,(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{3\,b}{2\,a^2\,x} + \frac{3\,b^2}{a^3}\right)\frac{1}{w} - \frac{3\,b^2}{a^4}\,\log\frac{w}{x}$$

$$33)\quad \int \frac{dx}{x^4\,(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{2\,b}{3\,a^2\,x^2} - \frac{2\,b^2}{a^3\,x} - \frac{4\,b^3}{a^4}\right)\frac{1}{w} + \frac{4\,b^3}{a^5}\,\log\frac{w}{x}$$

$$34)\quad \int \frac{dx}{x^5\,(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{4\,a\,x^4} + \frac{5\,b}{12\,a^2\,x^3} - \frac{5\,b^2}{6\,a^3\,x^2} + \frac{5\,b^3}{2\,a^4\,x} + \frac{5\,b^4}{a^5}\right)\frac{1}{w} - \frac{5\,b^4}{a^6}\,\log\frac{w}{x}$$

$$35)\quad \int \frac{dx}{x\,(a+bx)^3} = \left(\frac{3}{2\,a} + \frac{b\,x}{a^2}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{1}{a^3}\,\log\frac{w}{x}$$

$$36)\quad \int \frac{dx}{x^2\,(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{a\,x} - \frac{9\,b}{2\,a^2} - \frac{3\,b^2\,x}{a^3}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{3\,b}{a^4}\,\log\frac{w}{x}$$

$$37)\quad \int \frac{dx}{x^3\,(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{2\,b}{a^2\,x} + \frac{9\,b^2}{a^3} + \frac{6\,b^3\,x}{a^4}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{6\,b^2}{a^5}\,\log\frac{w}{x}$$

38) $$\int \frac{dx}{x^4(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{6a^2x^2} - \frac{10b^2}{3a^3x} - \frac{15b^3}{a_4} - \frac{10b^4x}{a^5}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{10b^3}{a^6} \log \frac{w}{x}$$

39) $$\int \frac{dx}{x^5(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{2a^2x^3} - \frac{5b^2}{4a^3x^2} + \frac{5b^3}{a^4x} + \frac{45b^4}{2a^5} + \frac{15b^5x}{a^6}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{15b^4}{a^7} \log \frac{w}{x}$$

40) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^4} = \left(\frac{11}{6a} + \frac{5bx}{2a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3}\right)\frac{1}{w^3} - \frac{1}{a^4} \log \frac{w}{x}$$

41) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^4} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{22b}{3a^2} - \frac{10b^2x}{a^2} - \frac{4b^3x^2}{a^4}\right)\frac{1}{w^3} + \frac{4b}{a^5} \log \frac{w}{x}$$

42) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)^4} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{2a^2x} + \frac{55b^2}{3a^3} + \frac{25b^3x}{a^4} + \frac{10b^4x^2}{a^5}\right)\frac{1}{w^3} - \frac{10b^2}{a^6} \log \frac{w}{x}$$

43) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^5} = \left(\frac{25}{12a} + \frac{13bx}{3a^2} + \frac{7b^2x^2}{2a^3} + \frac{b^3x^3}{a^4}\right)\frac{1}{w^4} - \frac{1}{a^5} \log \frac{w}{x}$$

44) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^5} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{125b}{12a^2} - \frac{65b^2x}{3a^3} - \frac{35b^3x^2}{2a^4} - \frac{5b^4x^3}{a^5}\right)\frac{1}{w^4} + \frac{5b}{a^6} \log \frac{w}{x}$$

45) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)^5} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{a^2x} + \frac{125b^2}{4a^3} + \frac{65b^3x}{a^4} + \frac{105b^4x^2}{2a^5} + \frac{15b^5x^3}{a^6}\right)\frac{1}{w^4} + \frac{15b^2}{a^7} \log \frac{w}{x}.$$

§. 67.

Sei $a + b x^2 = w$.

1) $\int \frac{dx}{a + b x^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}\, arc\, tgn\, x \sqrt{\frac{b}{a}}$ a und b gleichbezeichnet

2) $\int \frac{dx}{a + b x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{a}{-b}}\, log \frac{x\sqrt{-b} + \sqrt{a}}{x\sqrt{-b} - \sqrt{a}}$ a und b ungleich bezeichnet

3) $\int \frac{x\,dx}{a + b x^2} = \frac{1}{2b} \log w$

4) $\int \frac{x^2\,dx}{a + b x^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{w}$

5) $\int \frac{x^3\,dx}{a + b x^2} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{2b^2} \log w$

6) $\int \frac{x^4\,dx}{a + b x^2} = \frac{x^3}{3b} - \frac{a x}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} \int \frac{dx}{w}$

7) $\int \frac{x^5\,dx}{a + b x^2} = \frac{x^4}{4b} - \frac{a x^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^3} \log w$

8) $\int \frac{dx}{(a + b x^2)^2} = \frac{x}{2aw} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{w}$

9) $\int \frac{x\,dx}{(a + b x^2)^2} = -\frac{1}{2bw}$

10) $\int \frac{x^2\,dx}{(a + b x^2)^2} = -\frac{x}{2bw} + \frac{1}{2b} \int \frac{dx}{w}$

11) $\int \frac{x^3\,dx}{(a + b x^2)^2} = -\frac{a}{2b^2 w} + \frac{1}{2b^2} \log w$

12) $\int \frac{x^4\,dx}{(a + b x^2)^2} = \left(\frac{x^3}{b} + \frac{3ax}{2b^2}\right) \frac{1}{w} - \frac{3a}{2b^2} \int \frac{dx}{w}$

13) $\int \frac{x^5\,dx}{(a + b x^2)^2} = \left(\frac{x^4}{2b} - \frac{a^2}{b^3}\right) \frac{1}{w} - \frac{a}{b^3} \log w$

14) $\int \frac{dx}{(a + b x^2)^3} = \left(\frac{3bx^3}{8a^2} + \frac{5x}{8a}\right) \frac{1}{w^2} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{dx}{w}$

15) $$\int \frac{x\,dx}{(a+b\,x^2)^3} = -\frac{1}{4\,b\,w^2}$$

16) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+b\,x^2)^3} = \left(\frac{x^3}{8\,a} - \frac{x}{8\,b}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{1}{8\,a\,b}\int\frac{dx}{w}$$

17) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+b\,x^2)^3} = \left(-\frac{x^2}{2\,b} - \frac{a}{4\,b^2}\right)\frac{1}{w^2}$$

18) $$\int \frac{x^4\,dx}{(a+b\,x^2)^3} = \left(-\frac{5\,x^3}{8\,b} - \frac{3\,a\,x}{8\,b^2}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{3}{8\,b^2}\int\frac{dx}{w}$$

19) $$\int \frac{x^5\,dx}{(a+b\,x^2)^3} = \left(\frac{a\,x^2}{b^2} + \frac{3\,a^2}{4\,b^3}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{1}{2\,b^3}\log w$$

20) $$\int \frac{dx}{(a+b\,x^2)^4} = \left(\frac{5\,b^2 x^5}{16\,a^3} + \frac{5\,b\,x^3}{6\,a^2} + \frac{11\,x}{16\,a}\right)\frac{1}{w^3} + \frac{5}{16\,a^3}\int\frac{dx}{w}$$

21) $$\int \frac{x\,dx}{(a+b\,x^2)^4} = -\frac{1}{6\,b\,w^3}$$

22) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+b\,x^2)^4} = \left(\frac{b\,x^5}{16\,a^2} + \frac{x^3}{6\,a} - \frac{x}{16\,b}\right)\frac{1}{w_3} + \frac{1}{16\,a^2\,b}\int\frac{dx}{w}$$

23) $$\int \frac{dx}{(a+b\,x^2)^5} = \left(\frac{35\,b^3}{128\,a^4}\,x^7 + \frac{385\,b^2 x^5}{384\,a^3} + \frac{511\,b}{384\,a^2}\,x^3 + \frac{93}{128\,a}\,x\right)\frac{1}{w^4} + \frac{35}{128\,a^4}\int\frac{dx}{w}$$

24) $$\int \frac{x\,dx}{(a+b\,x^2)^5} = -\frac{1}{8\,b\,w^4}$$

25) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+b\,x^2)^5} = \left(\frac{5\,b^2}{128\,a^3}\,x^7 + \frac{55\,b}{384\,a^2}\,x^5 + \frac{73}{384\,a}\,x_3 - \frac{5}{128\,b}\,x\right)\frac{1}{w^4} + \frac{5}{128\,a^3\,b}\int\frac{dx}{w}$$

26) $$\int \frac{dx}{x(a+b\,x^2)} = \frac{1}{2\,a}\log\frac{x^2}{w}$$

27) $$\int \frac{dx}{x^2(a+b\,x^2)} = -\frac{1}{a\,x} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{w}$$

28) $$\int \frac{dx}{x^3(a+b\,x^2)} = -\frac{1}{2\,a\,x^2} - \frac{b}{2\,a^2}\log\frac{x^2}{w}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^4(a+b\,x^2)} = -\frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{b}{a^2\,x} + \frac{b^2}{a^2}\int\frac{dx}{w}$$

30) $$\int\frac{dx}{x^5(a+bx^2)} = -\frac{1}{4ax^4}+\frac{b}{2a^2x^2}+\frac{b^2}{2a^3}\log\frac{x^2}{w}$$

31) $$\int\frac{dx}{x(a+bx^2)^2} = \frac{1}{2aw}+\frac{1}{2a^2}\log\frac{x^2}{w}$$

32) $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = \left(-\frac{1}{ax}-\frac{3bx}{2a^2}\right)\frac{1}{w}-\frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{w}$$

33) $$\int\frac{dx}{x^3(a+bx^2)} = \left(-\frac{1}{2ax^2}-\frac{b}{a^2}\right)\frac{1}{w}-\frac{b}{a^2}\log\frac{x^2}{w}$$

34) $$\int\frac{dx}{x^4(a+bx^2)} = \left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{5b}{3a^2x}+\frac{5b^2x}{2a^3}\right)\frac{1}{w} + \frac{5b^2}{2a^3}\int\frac{dx}{w}$$

35) $$\int\frac{dx}{x^5(a+bx^2)} = \left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{3b}{4a^2x^2}+\frac{3b^2}{2a^3}\right)\frac{1}{w} + \frac{3b^2}{2a^4}\log\frac{x^2}{w}$$

36) $$\int\frac{dx}{x(a+bx^2)^3} = \left(\frac{3}{4a}+\frac{bx^2}{2a^2}\right)\frac{1}{w^2}+\frac{1}{2a^3}\log\frac{x^2}{w}$$

37) $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{1}{ax}-\frac{25bx}{8a^2}-\frac{15b^3x^3}{8a^3}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{15b}{8a^3}\int\frac{dx}{w}$$

38) $$\int\frac{dx}{x^3(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2}-\frac{9b}{4a^2}-\frac{3b^2x^2}{2a^3}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{3b}{2a^4}\log\frac{x^2}{w}$$

39) $$\int\frac{dx}{x^4(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{7b}{3a^2x}+\frac{175b^2x}{24a^3} + \frac{35b^3x^3}{8a^4}\right)\frac{1}{w^2}+\frac{35b^2}{8a^4}\int\frac{dx}{w}$$

40) $$\int\frac{dx}{x^5(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{b}{a^2x^2}+\frac{9b^2}{2a^3}+\frac{3b^3x^2}{a^4}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{3b^2}{a^5}\log\frac{x^2}{w}.$$

§. 68.

Sei $a + b x^3 = w.$

1) $$\int \frac{x^n \, dx}{(a + b x^3)^{p+1}} = \frac{x^{n+1}}{3 a p w^p} - \frac{n - 3p + 1}{3 a p} \int \frac{x^n}{w^p} \, dx$$

2) $$\int \frac{dx}{x^n (a + b x^3)^{p+1}} = \frac{1}{3 a p x^{n-1} w^p} + \frac{n + 3p - 1}{3 a p} \int \frac{dx}{x^n w^p}$$

3) $$\int \frac{dx}{(a + b x^3)^{p+1}} = \frac{1}{3 a p w^p} + \frac{3p - 1}{3 a p} \int \frac{dx}{w^p}$$

Sei $\varkappa = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$

4) $$\int \frac{dx}{a + b x^3} = \frac{\varkappa}{3 a} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{(x + \varkappa)^2}{x^2 - x \varkappa + \varkappa^2} + \sqrt{3} \, arc \, tgn \frac{x \sqrt{3}}{2 \varkappa - x} \right\}$$

5) $$\int \frac{x \, dx}{a + b x^3} = - \frac{1}{3 b \varkappa} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{(x + \varkappa)^2}{x^2 - x \varkappa + \varkappa^2} - \sqrt{3} \, arc \, tgn \frac{x \sqrt{3}}{2 \varkappa - x} \right\}$$

6) $$\int \frac{x^2 \, dx}{a + b x^3} = \frac{1}{3 b} \log (1 + x^3 \varkappa^3)$$

7) $$\int \frac{x^3 \, dx}{a + b x^3} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b x^3}$$

8) $$\int \frac{x^4 \, dx}{a + b x^3} = \frac{x^2}{2 b} - \frac{a}{b} \int \frac{x \, dx}{a + b x^3}$$

9) $$\int \frac{dx}{x (a + b x^3)} = \frac{1}{3 a} \log \frac{x^3}{a + b x^3}$$

10) $$\int \frac{dx}{x^2 (a + b x^3)} = - \frac{1}{a x} - \frac{b}{a} \int \frac{x \, dx}{a + b x^3}$$

11) $$\int \frac{dx}{x^3 (a + b x^3)} = - \frac{1}{2 a x^2} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a + b x^3}$$

12) $$\int \frac{dx}{x^4 (a + b x^3)} = - \frac{1}{3 a x^3} + \frac{b}{3 a^2} \log \frac{a + b x^3}{x^3}$$

13) $$\int \frac{dx}{(a + b x^3)^2} = \frac{x}{2 a w} + \frac{2}{3 a} \int \frac{dx}{w}$$

14) $$\int \frac{x \, dx}{(a + b x^3)^2} = \frac{x^2}{3 a w} + \frac{1}{3 a} \int \frac{x \, dx}{w}$$

15) $$\int\frac{x^2\,dx}{(a+b\,x^3)^2}=-\frac{1}{3\,b\,w}$$

16) $$\int\frac{x^3\,dx}{(a+b\,x^3)^2}=-\frac{x}{3\,b\,w}+\frac{1}{3\,b}\int\frac{dx}{w}$$

17) $$\int\frac{dx}{x(a+b\,x^3)^2}=\frac{1}{3\,a\,w}-\frac{1}{3\,a^2}\log\frac{w}{x^3}$$

18) $$\int\frac{dx}{x^2(a+b\,x^3)^2}=\left(-\frac{1}{a\,x}-\frac{4\,b\,x^2}{3\,a^2}\right)\frac{1}{w}-\frac{4\,b}{3\,a^2}\int\frac{x\,dx}{w}$$

19) $$\int\frac{dx}{x^3(a+b\,x^3)^2}=\left(-\frac{1}{2\,a\,x^2}-\frac{5\,b\,x}{6\,a^2}\right)\frac{1}{w}-\frac{5\,b}{3\,a^2}\int\frac{dx}{w}$$

20) $$\int\frac{dx}{x^4(a+b\,x^3)^2}=\left(-\frac{1}{3\,a\,x^3}-\frac{2\,b}{3\,a^2}\right)\frac{1}{w}+\frac{2\,b}{3\,a^3}\log\frac{w}{x^3}.$$

§. 69.

Sei $a+b\,x^4=w.$

1) $$\int\frac{x^n\,dx}{(a+b\,x^4)^{p+1}}=\frac{x^{n+1}}{4\,a\,p\,w^p}+\frac{4\,p-n-1}{4\,a\,p}\int\frac{x^n\,dx}{w^p}$$

2) $$\int\frac{dx}{x^n(a+b\,x^4)^{p+1}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^n\,w^p}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{x^{n-4}\,w^{p+1}}$$

3) $$\int\frac{dx}{(a+b\,x^4)^{p+1}}=\frac{x}{4\,a\,p\,w^p}+\frac{4\,p-1}{4\,a\,p}\int\frac{dx}{w^p}$$

Sei $\frac{a}{b}$ positiv und $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}=\varkappa$, so wird:

4) $$\int\frac{dx}{a+b\,x^4}=\frac{x}{4\,a\sqrt{2}}\left\{\log\frac{x^2+\varkappa x\sqrt{2}+\varkappa^2}{x^2-\varkappa x\sqrt{2}+\varkappa^2}+2\,arc\,tgn\frac{\varkappa\,x\sqrt{2}}{\varkappa^2-x^2}\right\}$$

5) $$\int\frac{dx}{a+b\,x^4}=\frac{\varkappa'}{4\,a}\left\{\log\frac{x+\varkappa'}{x-\varkappa'}+2\,arc\,tgn\,\frac{x}{\varkappa'}\right\}$$

wenn $\frac{a}{b}$ negativ und $\varkappa'=\sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$

6) $$\int \frac{dx}{(a + bx^4)^2} = \frac{x}{4aw} + \frac{3}{4a}\int \frac{dx}{w}$$

7) $$\int \frac{dx}{(a + bx^4)^3} = \frac{x}{a}\left\{\frac{1}{8w^2} + \frac{7}{32aw}\right\} + \frac{21}{32a^2}\int \frac{dx}{w}$$

8) $$\int \frac{dx}{(a + bx^4)^3} = \frac{x}{a}\left\{\frac{1}{12w^3} + \frac{11}{96aw^2} + \frac{77}{384a^2w}\right\} + \frac{77}{128a^3}\int \frac{dx}{w}.$$

Sei $\frac{a}{b}$ positiv und $\varkappa = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$,

9) $$\int \frac{x\,dx}{(a + bx^4)} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\, arc\,tgn\, \frac{\sqrt{a}}{x^2\sqrt{b}}$$

10) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a + bx^4)} = \frac{1}{4b\varkappa\sqrt{2}}\left(log\, \frac{x^2 - \varkappa x\sqrt{2} + \varkappa^2}{x^2 + \varkappa x\sqrt{2} + \varkappa^2} + 2\, arc\,tgn\, \frac{\varkappa x\sqrt{2}}{\varkappa^2 - x^2}\right).$$

Sei $\frac{a}{b}$ negativ und $\varkappa = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$,

11) $$\int \frac{x\,dx}{(a + bx^4)} = -\frac{1}{4b\varkappa^2}\, log\, \frac{x^2 + \varkappa^2}{x^2 - \varkappa^2}$$

12) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a + bx^4)} = -\frac{1}{4b\varkappa}\left(log\, \frac{x + \varkappa}{x - \varkappa} - 2\, arc\,tgn\, \frac{x}{\varkappa}\right).$$

Es ist:

13) $$\int \frac{dx}{x(a + bx^4)} = \frac{log\, x}{a} - \frac{log\, w}{4a}$$

14) $$\int \frac{dx}{x^2(a + bx^4)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x^2\,dx}{w}.$$

§. 70.

Integrale von der Form $\int \frac{x^m}{1 \pm x^n}\, dx$.

1) $$\int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x)$$

2) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tgn} x = -\operatorname{arc\,cot} x$$

3) $$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \log \frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tgn} \frac{x\sqrt{3}}{2-x}$$

4) $$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tgn} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

5) $$\int \frac{dx}{1+x^5} = \frac{2}{5}\left\{\frac{1}{2}\log(1+x) - P_0 \cos\frac{\pi}{5} + P_1 \cos\frac{2\pi}{5} + Q_0 \sin\frac{\pi}{5} + Q_1 \sin\frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Dabei ist

$$P_0 = \frac{1}{2}\log\left(1 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + x^2\right) \qquad Q_0 = \operatorname{arc\,tgn} \frac{x \sin\frac{\pi}{5}}{1 - x\cos\frac{\pi}{5}}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\log\left(1 + 2x\cos\frac{2\pi}{5} + x^2\right) \qquad Q_1 = \operatorname{arc\,tgn} \frac{x \sin\frac{2\pi}{5}}{1 + x\cos\frac{2\pi}{5}}$$

6) $$\int \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tgn} \frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}.$$

Sei

$$P_\varkappa = \frac{1}{2}\log\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\varkappa+1}{n}\pi + 1\right)$$

$$Q_\varkappa = \operatorname{arc\,tgn} \frac{x\sin\frac{2\varkappa+1}{n}\pi}{1 - x\cos\frac{2\varkappa+1}{n}\pi},$$

so ist, wenn n gerade ist:

7) $$\int \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2}{n}\sum_0^{\frac{1}{2}n-1}{}_{\varkappa} P_\varkappa \cos\frac{2\varkappa+1}{n}\pi + \frac{2}{n}\sum_0^{\frac{1}{2}n-1}{}_{\varkappa} Q_\varkappa \sin\frac{2\varkappa+1}{n}\pi,$$

und wenn n ungerade ist:

8) $$\int \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\log(1+x) - \frac{2}{n}\sum_0^{\frac{n-3}{2}}{}_{\varkappa} P_\varkappa \cos\frac{2\varkappa+1}{n}\pi$$
$$+ \frac{2}{n}\sum_0^{\frac{n-3}{2}}{}_{\varkappa} Q_\varkappa \sin\frac{2\varkappa+1}{n}\pi$$

9) $$\int \frac{x\,dx}{1+x} = x - \log(1+x)$$

10) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

11) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = -\frac{1}{6}\log\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tgn\,\frac{x\sqrt{3}}{2-x}$$

12) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\,arc\,tgn\,x^2$$

13) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^5} = \frac{2}{5}\left\{-\frac{1}{2}\log(x+1) - P_0\cos\frac{2\pi}{5} + P_1\cos\frac{\pi}{5}\right.$$
$$\left. + Q_0\sin\frac{2\pi}{5} - Q_1\sin\frac{\pi}{5}\right\}$$

Bezeichnungen wie in Nr. 5.

14) $$\int \frac{dx}{1-x} = \log\frac{1}{1-x}$$

15) $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

16) $$\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tgn\,\frac{x\sqrt{3}}{2+x}$$

17) $$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\,arc\,tgn\,x$$

18) $$\int \frac{dx}{1-x^5} = \frac{2}{5}\left\{\frac{1}{2}\log(1-x) - P_1\cos\frac{\pi}{5} + P_0\cos\frac{2\pi}{5}\right.$$
$$\left. - Q_1\sin\frac{\pi}{5} - Q_0\sin\frac{2\pi}{5}\right\}$$

Bezeichnungen wie in Nr. 5.

19) $$\int \frac{dx}{1-x^6} = \frac{1}{6} \log \frac{1+x}{1-x} \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctgn} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$$

Sei n gerade, und

$$P_\varkappa = \frac{1}{2} \log \left\{x^2 - 2x \cos \frac{2\varkappa}{n}\pi + 1\right\}$$

$$Q_\varkappa = \operatorname{arctgn} \frac{x \sin \frac{2\varkappa}{n}\pi}{1 - x \cos \frac{2\varkappa}{n}\pi},$$

so wird:

20) $$\int \frac{dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{n} \sum_1^{\frac{n}{2}-1}{}_\varkappa\, P_\varkappa \cos \frac{2\varkappa}{n}\pi + \frac{2}{n} \sum_1^{\frac{n}{2}-1}{}_\varkappa\, Q_\varkappa \sin \frac{2\varkappa}{n}\pi$$

Sei

$$P_\varkappa = \frac{1}{2} \log \left(x^2 + 2x \cos \frac{2\varkappa+1}{n}\pi + 1\right)$$

$$Q_\varkappa = \operatorname{arctgn} \frac{x \sin \frac{2\varkappa+1}{n}\pi}{1 + x \cos \frac{2\varkappa+1}{n}\pi}$$

und n ungerade, so wird:

21) $$\int \frac{dx}{1-x^n} = \frac{1}{n} \log (1-x) - \frac{2}{n} \sum_0^{\frac{n-3}{2}}{}_\varkappa\, P_\varkappa \cos \frac{2\varkappa+1}{n}\pi - \frac{2}{n} \sum_0^{\frac{n-3}{2}} Q_\varkappa \sin \frac{2\varkappa+1}{n}\pi$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{1-x} = \log (1-x) - x$$

23) $$\int \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \log (1-x^2)$$

24) $$\int \frac{x\,dx}{1-x^3} = -\frac{1}{6} \log \frac{(1-x)^2}{1+x+x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctgn} \frac{x\sqrt{3}}{2+x}$$

25) $$\int \frac{x\,dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} \log \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

26) $$\int \frac{x\,dx}{1-x^5} = \frac{2}{5} \left\{ -\frac{1}{2} \log(1-x) - P_1 \cos\frac{2\pi}{5} + P_0 \cos\frac{\pi}{5} \right.$$
$$\left. - Q_1 \sin\frac{2\pi}{5} + Q_0 \sin\frac{\pi}{5} \right\}$$

Es ist

27) $$\int \frac{x^m\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2} \int \frac{x^m\,dx}{1-x^n} + \frac{1}{2} \int \frac{x^m}{1+x^n}$$

28) $$\int \frac{x^p\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-1}{2n-p-1} \frac{x^{p-1}}{(1+x^2)^{n-1}}$$
$$+ \frac{p-1}{2n-p-1} \int \frac{x^{p-2}\,dx}{(1+x^2)^n}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^p(1+x^2)^n} = -\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{x^{p-1}(1+x^2)^{n-1}}$$
$$- \frac{2n+p-3}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-2}(1+x^2)^n}$$

30) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

31) $$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)^{n-1}}$$

32) $$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

33) $$\int \frac{x^p\,dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x^{p-1}}{(1-x^2)^{n-1}} - \frac{p-1}{2n-2} \int \frac{x^{p-2}\,dx}{(1-x^2)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2n-p-1} \cdot \frac{x^{p-1}}{(1-x^2)^{n-1}} - \frac{p-1}{2n-p-1} \int \frac{x^{p-2}\,dx}{(1-x^2)^n}$$

34) $$\int \frac{dx}{x^p(1-x^2)^n} = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{x^{p-1}(1-x^2)^{n-1}}$$
$$+ \frac{2n+p-3}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-2}(1-x^2)^n}$$

35) $$\int \frac{dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1-x^2)^{n-1}}$$

36) $$\int \frac{dx}{x(1-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(1-x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{x(1-x^2)^{n-1}}$$

37) $$\int\frac{dx}{(1+x^2)^p}=\frac{x}{2p-1}\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}A_\varkappa\frac{1}{2^\varkappa(1+x^2)^{p-\varkappa}}$$
$$+\frac{1}{2p-1}\cdot\frac{(2p-3)(2p-5)\ldots 5.3.1}{(p-1)(p-2)\ldots 2.1}\frac{1}{2^{p-1}}\,arctgn\,x$$
$$A_\varkappa=\frac{(2p-3)(2p-5)\ldots(2p-2\varkappa-1)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-\varkappa)}.$$

38) $$\int\frac{dx}{(1-x^2)^p}=\frac{x}{2p-1}\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}A_\varkappa\frac{1}{2\varkappa(1-x^2)^{p-\varkappa}}$$
$$+\frac{1}{2p-1}\cdot\frac{(2p-3)(2p-5)\ldots 5.3.1}{(p-1)(p-2)\ldots 2.1}\frac{1}{2^p}\log\frac{1+x}{1-x}$$
$A_\varkappa$ wie bei der vorhergehenden Formel.

Sei $m>2n$, m und n positiv und ganz.

39) $$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_1^{n}{}^{\varkappa}\cos\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n}$$
$$\log\left\{1-2x\cos\frac{(2\varkappa-1)}{2n}\pi+x^2\right\}+\frac{1}{n}\sum_1^{n}{}^{\varkappa}\sin\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n}$$
$$arctgn\frac{x-\cos\dfrac{2\varkappa-1}{2n}\pi}{\sin\dfrac{(2\varkappa-1)}{2n}\pi}$$

40) $$\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x^{2n}}=\frac{1}{2n}\{(-1)^{m+1}[\log(1+x)]-\log(1-x)\}$$
$$+(-1)^{m+1}\frac{1}{2n}\sum_1^{n-1}{}^{\varkappa}\cos\frac{\varkappa m\pi}{n}\log\left(1+2\varkappa\cos\frac{\varkappa\pi}{n}+x^2\right)$$
$$+(-1)^{m+1}\frac{1}{n}\sum_1^{n-1}{}^{\varkappa}\sin\frac{\varkappa m\pi}{n}\,arctgn\frac{x+\cos\dfrac{\varkappa\pi}{n}}{\sin\dfrac{\varkappa\pi}{n}}$$

41) $$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n+1}}=(-1)^{m+1}\frac{\log(1+x)}{2n+1}$$
$$-\frac{1}{2n+1}\sum_1^{2n+1}{}^{\varkappa}\cos\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1}\log\left(1-2x\cos\frac{2\varkappa-1}{2n+1}\pi+x^2\right)$$
$$+\frac{2}{2n+1}\sum_1^{2n+1}{}^{\varkappa}\sin\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1}\,arctgn\frac{x-\cos\dfrac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}{\sin\dfrac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}$$

42) $$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^{2n+1}} = -\frac{1}{2n+1} \log(1-x)$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}{}^{\varkappa} \cos\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1} \log\left(1+2x\cos\frac{2\varkappa-1}{2n+1}\pi+x^2\right)$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{2}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1} \sin\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1}\, arc\,tgn\,\frac{x+\cos\dfrac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}{\sin\dfrac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}$$

§. 71.

Sei $u = a + bx$, $v = \alpha + \beta x$, $\varDelta = a\beta - \alpha b$.

1) $$\int (a+bx)^n(\alpha+\beta x)^m\,dx = \frac{v^m u^{n+1}}{m+n+1} - \frac{m\varDelta}{(m+n+1)b}\int v^{m-1}u^n\,dx$$

2) $$\int \frac{(\alpha+\beta x)^m}{(a+bx)^n}\,dx = \frac{1}{m-n+1}\frac{v^m}{u^{n-1}} - \frac{m\varDelta}{(m-n+1)b}\int\frac{v^{m-1}}{u^n}\,dx$$

3) $$= \frac{1}{(n-1)a}\frac{v^{m+1}}{u^{n-1}} - \frac{(m-n+2)}{(n-1)}\frac{\beta}{\varDelta}\int\frac{v^m}{u^{n-1}}\,dx$$

4) $$= -\frac{1}{(n-1)b}\frac{v^m}{u^{n-1}} + \frac{m\beta}{(n-1)b}\int\frac{v^{m-1}}{u^{n-1}}\,dx$$

5) $$\int\frac{dx}{(a+bx)^n(\alpha+\beta x)^m} = -\frac{1}{(m-1)a}\cdot\frac{1}{v^{m-1}u^{n-1}} - \frac{(m+n-2)b}{(m-1)\varDelta}\int\frac{dx}{v^{m-1}u^n}\,dx$$

6) $$= +\frac{1}{(n-1)a}\cdot\frac{1}{v^{m-1}u^{n-1}} + \frac{(m+n-2)\beta}{(n-1)\varDelta}\int\frac{1}{v^m u^{n-1}}\,dx$$

§. 72.

Sei $a + bx + cx^2 = w.$

1) $$\int x^{m+1} w^p\,dx = \frac{x^m w^{p+1}}{c(m+2p+2)}$$

$$-\frac{am}{c(m+2p+2)}\int x^{m-1} w^p\,dx - \frac{b}{c}\,\frac{m+p+1}{m+2p+2}\int x^m w^p\,dx$$

2) $$\int \frac{x^{m+1}}{w^p}\,dx = -\frac{x^m}{2pcw^p} + \frac{m}{2pc}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{w^p} - \frac{b}{2c}\int \frac{x^m\,dx}{w^{p+1}}$$

3) $$\int \frac{w^p}{x^{n+1}}\,dx = -\frac{w^{p+1}}{anx^n} + \frac{b(p-m+1)}{an}\int \frac{w^p\,dx}{x^n}$$

$$+\frac{c(2p-n+2)}{an}\int \frac{w^p\,dx}{x^{\varkappa-1}}$$

4) $$\int \frac{1}{w^n}\,dx = \frac{b+2cx}{(n-1)(4ac-b^2)}\,\frac{1}{w^{n-1}}$$

$$+\frac{2(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{w^{n-1}}$$

5) $$\int w^n\,dx = \frac{b+2cx}{2(2n+1)c}\,w^n + \frac{n(4ac-b^2)}{2(2n+1)c}\int w^{n-1}\,dx$$

6) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\,.$$

$$\log\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}},\quad b^2-4ac>0$$

$$=\frac{2}{b+2cx} \qquad b^2-4ac=0$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,arc\,tgn\,\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}},\quad b^2-4ac<0$$

7) $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\Delta R} - \frac{(4n-2)c}{n\Delta}\int \frac{dx}{R^n},$$

wenn zur Abkürzung

$$R = a + bx + cx^2,\quad \Delta = 4ac - b^2$$

gesetzt wird.

8) $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{b+2cx}{\Delta R} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{dx}{R}$$

9) $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3} = \frac{b+2cx}{\Delta} \left\{ \frac{1}{2R^2} + \frac{3c}{\Delta R} \right\} + \frac{6c^2}{\Delta^2} \int \frac{dx}{R}$$

10) $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^4} = \frac{b+2cx}{\Delta} \left\{ \frac{1}{3R^3} + \frac{5c}{3\Delta R^2} + \frac{10c^2}{\Delta^2 R} \right\} + \frac{20c^3}{\Delta^3} \int \frac{dx}{R}$$

11) $$\int \frac{x^m}{R^n} dx = - \frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)cR^{n-1}} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)c} \int \frac{x^{m-1}}{R^n} dx + \frac{(m-1)a}{(2n-m-1)c} \int \frac{x^{m-2}}{R^n} dx$$

Wird $m = 2n-1$, so ist diese Formel unbrauchbar; man hat sodann:

12) $$\int \frac{x^{2n-1}}{R^n} dx = \frac{1}{c} \int \frac{x^{2n-3}}{R^{n-1}} dx - \frac{a}{c} \int \frac{x^{2n-3}}{R^n} dx - \frac{b}{c} \int \frac{x^{2n-2}}{R^n} dx$$

13) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^2} = - \frac{2a+bx}{\Delta R} - \frac{b}{\Delta} \int \frac{dx}{T}$$

14) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{ab+(b^2-2ac)x}{c\Delta R} + \frac{2a}{\Delta} \int \frac{dx}{T}$$

15) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{1}{2c^2} \Delta R + \frac{a(2ac-b^2)+b(3ac-b^2)x}{c^2 \Delta R} - \frac{b(6ac-b^2)}{2c^2\Delta} \int \frac{dx}{R}$$

16) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^3} = - \frac{2a+bx}{3\Delta R^2} - \frac{3b(b+2cx)}{2\Delta^2 R} - \frac{3bc}{\Delta^2} \int \frac{dx}{R}$$

17) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx+cx^2)^3} = \frac{ab+(b^2-2ac)x}{2c\Delta R^2} + \frac{(2ac+b^2)(b+2cx)}{2c\Delta^2 R} + \frac{2ac+b^2}{\Delta^2} \int \frac{dx}{R}$$

18) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx+cx^2)^3} = -\left(\frac{x^2}{c} + \frac{abx}{c\Delta} + \frac{2a^2}{b\Delta}\right)\frac{1}{2R^2} - \frac{3ab}{2c\Delta}\int \frac{dx}{R^2}$$

19) $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)aR^{n-1}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{R^n} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xR^{n-1}}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^m(a+bx+cx^2)^n} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}R^{n-1}} - \frac{(m+n-2)b}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-1}R^n} - \frac{(m+2n-3)c}{(m-1)a}\cdot \int \frac{dx}{x^{m-2}R^n},\ m > 1$$

21) $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{R} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{R}$$

22) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx+cx^2)} = \frac{b}{2a^2}\log\left(\frac{R}{x^2}\right) - \frac{1}{ax} + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{R}$$

23) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx+cx^2)} = \frac{ac-b^2}{2a^3}\log\left(\frac{R}{x^2}\right) + \frac{b}{a^2x} - \frac{1}{2ax^2} + \frac{b(3ac-b^2)}{2a^3}\int \frac{dx}{R}$$

24) $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{R} + \frac{1}{2aR}\left\{1 - \frac{b(b+2cx)}{\Delta}\right\} - \frac{b}{2a^2}\left(1 + \frac{2ac}{\Delta}\right)\int \frac{dx}{R}$$

25) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx+cx^2)^2} = \frac{b}{a^2}\log\frac{R}{x^2} - \frac{1}{a^2x^2} + \left\{\frac{b^2}{a^2} - \frac{3bc}{a} + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)cx\right\}\frac{1}{\Delta R} - \frac{1}{\Delta}\left(\frac{b^4}{a^3} - \frac{6b^2c}{a^2} + \frac{6c^2}{a}\right)\int \frac{dx}{R}$$

26) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx+cx^2)^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2x}\right)\frac{1}{\Delta} + \left(\frac{3b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)\int \frac{dx}{xR^2} + \frac{9bc}{2a^2}\int \frac{dx}{R^2}$$

27) $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^3} = \frac{1}{4aw^2} + \frac{1}{2a^2w} + \frac{1}{2a^3} \log \frac{x^2}{w}$$
$$- \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{w^3} - \frac{b}{2a^2} \int \frac{dx}{w^2} - \frac{b}{2a^3} \int \frac{dx}{w}$$

28) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx+cx^2)^3} = -\frac{1}{axw^2} - \frac{3b}{a} \int \frac{dx}{xw^3} - \frac{5c}{a} \int \frac{dx}{w^3}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx+cx^2)^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{a^2x}\right) \frac{1}{w^2}$$
$$+ \left(\frac{6b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right) \int \frac{dx}{xw^3} + \frac{10bc}{a^2} \int \frac{dx}{w^3}$$

§. 73.

Integrale von der Form $\int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})^p\,dx$.

Sei $a + bx^n + cx^{2n} = w$.

1) $$\int x^{m-1} w^p\,dx = \frac{x^m w^p}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} w^{p-1}\,dx$$
$$- \frac{2npc}{m} \int x^{m+2n-1} w^{p-1}\,dx$$

2) $$= \frac{x^{m-2} w^{p+1}}{(m+2np)c} - \frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c} \int x^{m-2n-1} w^p\,dx$$
$$- \frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c} \int x^{m-n-1} w^p\,dx$$

3) $$= \frac{x^m w^p}{m+2pn} + \frac{2npa}{m+2pn} \int x^{m-1} w^{p-1}\,dx$$
$$+ \frac{pnb}{m+2np} \int x^{m+n-1} w^{p-1}\,dx$$

$$4)\quad \int x^{m-1} w^p\,dx = \frac{x^m w^{p+1}}{m a} - \frac{(m+n+pn)b}{m a}\int x^{m+n-1} w^p\,dx$$
$$- \frac{(m+2n+2pn)c}{m a}\int x^{m+2n-1} w^p\,dx$$

Sei

$$\tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac} = f,\quad \tfrac{1}{2} b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac} = g,$$
$$\sqrt{b^2 - 4ac} = h$$

und

$$b^2 - 4ac > 0.$$

$$5)\quad \int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{c}{h}\left\{\int \frac{dx}{cx^2 + f} - \int \frac{dx}{cx^2 + g}\right\}$$

$$6)\quad \int \frac{x\,dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{1}{2h} \log \frac{cx^2 + f}{cx^2 + g}$$

$$7)\quad \int \frac{x^2\,dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{g}{h}\int \frac{dx}{cx^2 + g} - \frac{f}{h}\int \frac{dx}{cx^2 + f}$$

Sei

$$b^2 - 4ac < 0,\quad \cos\alpha = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

$$8)\quad \int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{1}{4cf^3}\left\{\sin\frac{\alpha}{2} \log \frac{x^2 + 2f\cos\frac{\alpha}{2} + f^2}{x^2 - 2f\cos\frac{\alpha}{2} + f^2}\right.$$
$$\left. + 2\cos\frac{\alpha}{2}\, \operatorname{arctgn} \frac{2fx\sin\frac{\alpha}{2}}{f^2 - x^2}\right\}$$

$$9)\quad \int \frac{x\,dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{1}{2cf^2\sin\alpha}\, \operatorname{arctgn} \frac{f^2 \sin\alpha}{f^2\cos\alpha - x^2}.$$

Sei

$$\varkappa = 2a(p-1)(b^2 - 4ac),$$

$$10)\quad \int \frac{dx}{w^p} = \frac{bcx^3 + (b^2 - 2ac)x}{\varkappa w^{p-1}} + \frac{(4p-7)bc}{\varkappa}\int \frac{x^2\,dx}{w^{p-1}}$$
$$+ \frac{2(p-1)(b^2 - 4ac) + 2ac - b^2}{\varkappa}\int \frac{dx}{w^{p-1}}$$

$$11)\quad \int \frac{dx}{w^2} = \frac{bcx^2 + (b^2 - 2ac)x}{\varkappa w} + \frac{b^2 - 6ac}{\varkappa}\int \frac{dx}{w} + \frac{bc}{\varkappa}\int \frac{x^2\,dw}{w}$$

$$12)\quad \int \frac{dx}{x^m w^p} = -\frac{1}{(m-1)\,a\,x^{m-1}\,w^{p-1}} - \frac{(m+2p-3)\,b}{(m-1)\,a} \int \frac{dw}{x^{m-2}\,w^p} - \frac{m+4p-5}{(m-1)\,a} \int \frac{dx}{x^{m-4}\,w^p}$$

§. 74.

Reductionsformel für das Integral:

$$\int x^{m-1}(a + b x^n + c x^{2n} + d x^{3n} + \cdots)^p \, dx.$$

Um diese zu bilden, beachte man, dass

$$(a + b x^n + c x^{2n} + \cdots)^p = a(a + b x^n + \cdots)^{p-1} + b x^n (a + b x^n + \cdots)^{p-1} + \cdots$$

§. 75.

Sei $u = a + bx + cx^2, \quad v = \alpha + \beta x.$

$$A = a\beta^2 - \alpha b \beta + c\alpha^2, \quad B = b\beta - 2c\alpha, \quad \varDelta = 4ac - b^2.$$

$$1)\quad \int \frac{v^m}{u^n} dx = \frac{\beta}{m-2n+1} \cdot \frac{v^{m-1}}{u^{n-1}} - \frac{(m-n)\,B}{m-2n+1} \int \frac{v^{m-1}}{u^n} dx - \frac{(m-1)\,A}{c\,(m-2n+1)} \int \frac{v^{m-1}}{u^n} dx$$

$$2)\quad = \frac{\beta}{(n+1)\,B} \frac{v^m}{u^{n-1}} - \frac{2A}{B} \int \frac{v^{m-1}}{u^n} dx - \frac{(m-2n+2)\,\beta^2}{(n+1)\,B} \int \frac{v^{m-1}}{u^{n-1}} dx$$

$$3)\quad \int \frac{v^m}{u^n}\,dx = \frac{B + 2cv}{(n-1)\varDelta\beta}\,\frac{v^m}{u^{n-1}} - \frac{2(m-2n+3)c}{(n-1)\varDelta}$$

$$\int \frac{v^m}{u^{n-1}}\,dx - \frac{Bm}{(n-1)\varDelta}\int \frac{v^{m-1}}{u^{n-1}}$$

$$4)\quad \int \frac{u^n}{v^m}\,dx = \frac{1}{(m-2n-1)\beta}\,\frac{u^n}{v^{m-1}} - \frac{2nA}{(m-2n-1)\beta^2}$$

$$\int \frac{u^{n-1}}{v^m}\,dx - \frac{nB}{(m-2n-1)\beta^2}\int \frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\,dx$$

$$5)\quad = -\frac{\beta}{(m-1)A}\,\frac{u^{n+1}}{v^{m-1}} - \frac{(m-n-2)B}{(m-1)A}$$

$$\int \frac{u^n}{v^{m-1}}\,dx - \frac{(m-2n-3)c}{(m-1)A}\int \frac{u^n}{v^{m-2}}\,dx$$

$$6)\quad = -\frac{1}{(m-1)\beta}\,\frac{u^n}{v^{m-1}} + \frac{nB}{(m-1)\beta^2}$$

$$\int \frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\,dx + \frac{2nc}{(m-1)\beta^2}\int \frac{u^{n-1}}{v^{m-2}}\,dx$$

$$7)\quad \int \frac{dx}{v^m u^n} = -\frac{\beta}{(m-1)A}\,\frac{1}{v^{m-1}u^{n-1}} - \frac{(m+n-2)B}{(m-1)A}$$

$$\int \frac{dx}{v^{m-1}u^n} - \frac{(m+2n-3)c}{(m-1)A}\int \frac{1}{v^{m-2}u^n}\,dx$$

$$8)\quad = \frac{\beta}{2(n-1)A}\,\frac{1}{v^{m-1}u^{n-1}} - \frac{B}{2A}\int \frac{1}{v^{m-1}u^n}\,dx$$

$$+ \frac{(m+2n-3)\beta^2}{2(n+1)A}\int \frac{1}{v^m u^{n-1}}\,dx$$

Ist $A = 0$, so wird

$$9)\quad \int \frac{dx}{v^m u^n} = -\frac{\beta}{(m+n-1)B}\,\frac{1}{v^m u^{n-1}}$$

$$-\frac{(m+2n-2)c}{(m+n-1)B}\int \frac{1}{v^{m-1}u^n}\,dx$$

§. 76.

Sei $a + bx = \omega$.

$$1)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{x}} = \pm \frac{2}{\sqrt{ab}}\, arctgn \sqrt{\frac{bx}{a}} \quad a \text{ und } b \text{ gleich bezeichnet}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-ab}} \log \frac{a - bx + 2\sqrt{x}\sqrt{-ab}}{\omega}$$

$$2)\quad \int \frac{dx\sqrt{x}}{a+bx} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

$$3)\quad \int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \left(\frac{x}{3b} - \frac{a}{b^2}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

$$4)\quad \int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \left(\frac{x^2}{5b} - \frac{ax}{3b^2} + \frac{a^2}{b^3}\right) 2\sqrt{x} - \frac{a^3}{b^3}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

$$5)\quad \int \frac{x^3\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \left(\frac{x^3}{7b} - \frac{ax^2}{5b^2} + \frac{a^2x}{3b^3} - \frac{a^3}{b^4}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^4}{b^4}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

$$6)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a\omega} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

$$7)\quad \int \frac{dx\sqrt{x}}{(a+bx)^2} = -\frac{\sqrt{x}}{b\omega} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

$$8)\quad \int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{2x\sqrt{x}}{b\omega} - \frac{3a}{b}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega^2}$$

$$9)\quad \int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{5ax}{3b^2}\right)\frac{2\sqrt{x}}{\omega} + \frac{5a^2}{b^2}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega^2}$$

$$10)\quad \int \frac{x^3\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^3}{5b} - \frac{7ax^2}{15b^2} + \frac{7a^2x}{3b^3}\right)\frac{2\sqrt{x}}{\omega} - \frac{7a^3}{b^3}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega^2}$$

$$11)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)^3\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2a\omega^2} + \frac{3}{4a^2\omega}\right)\sqrt{x} + \frac{3}{8a^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

$$12)\quad \int \frac{dx\sqrt{x}}{(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{2b\omega^2} + \frac{1}{4ab\omega}\right)\sqrt{x} + \frac{1}{8ab}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

13) $$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^3} = -\frac{2x\sqrt{x}}{b\,\omega^2} + \frac{3a}{b}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

14) $$\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{5ax}{b^2}\right)\frac{2\sqrt{x}}{\omega^2} - \frac{15a^2}{b^2}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

15) $$\int \frac{x^3\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^3}{3b} - \frac{7ax^2}{3b^2} - \frac{35a^2x}{3b^3}\right)\frac{2\sqrt{x}}{\omega^2} + \frac{35a^3}{b^3}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

§. 77.

Sei $a + bx^2 = \omega.$ $\quad \varkappa = \sqrt[4]{\frac{a}{b}},\ \ \varkappa' = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}.$

1) $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{b\varkappa^3\sqrt{2}}\left[\log\frac{x+\varkappa\sqrt{2x}+\varkappa^2}{\sqrt{\omega}} + \operatorname{arctgn}\frac{\varkappa\sqrt{2x}}{\varkappa^2-x}\right],\ \frac{a}{b} > 0$$

$$= \frac{1}{2b\varkappa'^3}\left(\log\frac{\varkappa'-\sqrt{x}}{\varkappa'+\sqrt{x}} - 2\operatorname{arctgn}\frac{\sqrt{x}}{\varkappa'}\right),\ \frac{a}{b} < 0$$

2) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{a+bx^2} = \frac{1}{b\varkappa\sqrt{2}}\left[-\log\frac{x+\varkappa\sqrt{2x}+\varkappa^2}{\sqrt{\omega}} + \operatorname{arctgn}\frac{\varkappa\sqrt{2x}}{\varkappa^2-x}\right],\ \frac{a}{b} > 0$$

$$= \frac{1}{2b\varkappa'}\left\{\log\frac{\varkappa'-\sqrt{x}}{\varkappa'+\sqrt{x}} + 2\operatorname{arctgn}\frac{\sqrt{x}}{\varkappa'}\right\},\ \frac{a}{b} < 0$$

3) $$\int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{a+bx^2} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

4) $$\int \frac{x^2\,dx\sqrt{x}}{a+bx^2} = \frac{2x\sqrt{x}}{3b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega}$$

5) $$\int \frac{x^3\,dx\sqrt{x}}{a+bx^2} = \left(\frac{x^2}{5b} - \frac{a}{b^2}\right)2\sqrt{x} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

6) $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2a\omega} + \frac{3}{4a}\int\frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

7) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^2} = \frac{x\sqrt{x}}{2a\omega} + \frac{1}{4a}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega}$$

8) $$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{(a+bx^2)^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2b\omega} + \frac{1}{4b}\int\frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

9) $$\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{(a+bx^2)^2} = -\frac{x\sqrt{x}}{2b\omega} + \frac{3}{4b}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega}$$

10) $$\int \frac{x^3\sqrt{x}\,dx}{(a+bx^2)^2} = \left(\frac{2x^2}{b} + \frac{5a}{2b^2}\right)\frac{\sqrt{x}}{\omega} - \frac{5a}{4b^2}\int\frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

11) $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^3\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{4a\omega^2} + \frac{7}{16a^2\omega}\right)\sqrt{x} + \frac{21}{32a^2}\int\frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

12) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} = \left(\frac{1}{4a\omega^2} + \frac{5}{16a^2\omega}\right)x\sqrt{x} + \frac{5}{32a^2}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega}$$

13) $$\int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} = \frac{(bx^2-3a)\sqrt{x}}{16ab\omega^2} + \frac{3}{32ab}\int\frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

14) $$\int \frac{x^2\,dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} = -\frac{2x\sqrt{x}}{5b\omega^2} + \frac{3a}{5b}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

15) $$\int \frac{x^3\,dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} = -\frac{2x^2\sqrt{x}}{3b\omega^2} + \frac{5a}{3b}\int\frac{x\,dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

§. 78.

Sei $a + bx = \omega$.

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{\omega}$$

2) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{3}\,\omega - a\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^2}$$

3) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{5}\,\omega^2 - \frac{2}{3}\,a\,\omega + a^2\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^3}$$

4) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{7}\,\omega^3 - \frac{3}{5}\,a\,\omega^2 + a^2\,\omega - a^3\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^4}$$

5) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{9}\omega^4 - \frac{4}{7}a\,\omega^3 + \frac{6}{5}a^2\,\omega^2 - \frac{4}{3}\,a^3\omega + a^4\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^5}$$

6) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{11}\,\omega^5 - \frac{5}{9}\,a\,\omega^4 + \frac{10}{7}\,a^2\,\omega^3 - 2\,a^3\,\omega^2 \right.$$
$$\left. + \frac{5}{3}\,a^4\,\omega - a^5\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^6}$$

7) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,log\,\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}},\quad a > 0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}},\quad a < 0$$

8) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = -\,\frac{\sqrt{\omega}}{a\,x} - \frac{b}{2\,a}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

9) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx}} = \left(-\,\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{3\,b}{4\,a^2\,x}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3\,b^2}{8\,a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

10) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx}} = \left(-\,\frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{5\,b}{12\,a^2\,x^2} - \frac{5\,b^2}{8\,a^3\,x}\right)\sqrt{\omega}$$
$$-\,\frac{5\,b^3}{16\,a^3}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

11) $$\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{a+bx}} = \left(-\frac{1}{4\,a\,x^4} + \frac{7\,b}{24\,a^2\,x^3} - \frac{35\,b^2}{96\,a^3\,x^2} + \frac{35}{64\,a^4\,x}\right)\sqrt{\omega} + \frac{35\,b^4}{128\,a^4}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}^3} = -\frac{2}{b\sqrt{\omega}}$$

13) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = (\omega + a)\,\frac{2}{b^2\sqrt{\omega}}$$

14) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = \left(\frac{1}{3}\,\omega^2 - 2\,a\,\omega - a^2\right)\frac{2}{b^3\sqrt{\omega}}$$

15) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = \left(\frac{1}{5}\,\omega^3 - a\,\omega^2 + 3\,a^2\,\omega + a^3\right)\frac{2}{b^4\sqrt{\omega}}$$

16) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = \left(\frac{1}{7}\,\omega^4 - \frac{4}{5}\,a\,\omega^3 + 2\,a^2\,\omega^2 - 4\,a^3\,\omega - a^4\right)\frac{2}{b^5\sqrt{\omega}}$$

17) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = \left(\frac{1}{9}\,\omega^5 - \frac{5}{7}\,a\,\omega^4 + \frac{10}{5}\,a^2\,\omega^3 - \frac{10}{3}\,a^3\,\omega^2 + 5\,a^4\,\omega + a^5\right)\frac{2}{b^6\sqrt{\omega}}$$

18) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}^3} = \frac{2}{a\sqrt{\omega}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{a\,x} - \frac{3\,b}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{3\,b}{2\,a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{5\,b}{4\,a^2\,x} + \frac{15\,b^2}{4\,a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{15\,b^2}{8\,a^3}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

21) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{7\,b}{12\,a^2\,x^2} - \frac{35\,b^2}{24\,a^3\,x} - \frac{35\,b^3}{8\,a^4}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{35\,b^3}{16\,a^4}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

22) $$\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{3b}{8a^2x^3} - \frac{21b^2}{32a^3x^2} + \frac{105b^3}{64a^4x} + \frac{315b^4}{64a^5}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{315b^4}{128a^5}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

23) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}^5} = -\frac{2}{3b\omega\sqrt{\omega}}$$

24) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}^5} = \left(-\omega + \frac{a}{3}\right)\frac{2}{b^2\omega\sqrt{\omega}}$$

25) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}^5} = \left(\omega^2 + 2a\omega - \frac{1}{3}a^2\right)\frac{2}{b^3\omega\sqrt{\omega}}$$

26) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}^5} = \left(\frac{8}{3a} + \frac{2bx}{a^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

27) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}^5} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{20b}{3a^2} - \frac{5b^2x}{a^3}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} - \frac{5b}{2a^3}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

28) $$\int dx\sqrt{a+bx} = \frac{2\omega\sqrt{\omega}}{3b}$$

29) $$\int x\,dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{5}\omega - \frac{a}{3}\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^2}$$

30) $$\int x^2 dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{7}\omega^2 - \frac{2}{5}a\omega + \frac{1}{3}a^2\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^3}$$

31) $$\int x^3 dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{9}\omega^3 - \frac{3}{7}a\omega^2 + \frac{3}{5}a^2\omega - \frac{1}{3}a^3\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^4}$$

32) $$\int x^4 dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{11}\omega^4 - \frac{4}{9}a\omega^3 + \frac{6}{7}a^2\omega^2 - \frac{4}{5}a^3\omega + \frac{1}{3}a^4\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^5}$$

33) $$\int x^5 dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{13}\omega^5 - \frac{5}{11}a\omega^4 + \frac{10}{9}a^2\omega^3 - \frac{10}{7}a^3\omega^2 + a^4\omega - \frac{1}{3}a^5\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^6}$$

34) $$\int \frac{dx}{x} \sqrt{a+bx} = 2\sqrt{\omega} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

35) $$\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx} = -\frac{\sqrt{\omega}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

36) $$\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx} = -\frac{\omega\sqrt{\omega}}{2ax^2} + \frac{b\sqrt{\omega}}{4ax} - \frac{b^2}{8a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

37) $$\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{a+bx} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{4a^2x^2}\right)\omega\sqrt{\omega} - \frac{b^2}{8a^2x}\sqrt{\omega} + \frac{b^3}{16a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

38) $$\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{a+bx} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{24a^2x^3} - \frac{5b^2}{32a^3x^2}\right)\omega\sqrt{\omega} + \frac{5b^3\sqrt{\omega}}{64a^3x} - \frac{5b^4}{128a^3}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

39) $$\int dx\sqrt{a+bx}^{3} = \frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{5b}$$

40) $$\int x\,dx\sqrt{a+bx}^{3} = \left(\frac{1}{7}\omega - \frac{a}{5}\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^2}$$

41) $$\int x^2dx\sqrt{a+bx}^{3} = \left(\frac{1}{9}\omega^2 - \frac{2}{7}a\omega + \frac{1}{5}a^2\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^3}$$

42) $$\int x^3dx\sqrt{a+bx}^{3} = \left(\frac{1}{11}\omega^3 - \frac{1}{3}a\omega^2 + \frac{3}{7}a^2\omega - \frac{1}{5}a^3\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^4}$$

43) $$\int x^4dx\sqrt{a+bx}^{3} = \left(\frac{1}{13}\omega^4 - \frac{4}{11}a\omega^3 + \frac{6}{9}a^2\omega^2 - \frac{4}{7}a^3\omega + \frac{1}{5}a^4\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^5}$$

44) $$\int x^5dx\sqrt{a+bx}^{3} = \left(\frac{1}{15}\omega^5 - \frac{5}{13}a\omega^4 + \frac{10}{11}a^2\omega^3 - \frac{10}{9}a^3\omega^2 + \frac{5}{7}a^4\omega - \frac{1}{5}a^5\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^6}$$

45) $$\int \frac{dx}{x}\sqrt{a+bx}^{3} = \left(\frac{1}{3}\omega + a\right)2\sqrt{\omega} + a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

46) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx}^3 = -\frac{\omega^2 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{3b}{2a} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$

47) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{4a^2x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega}$

$$+ \frac{3b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

48) $\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{12a^2x^2} + \frac{b^2}{24a^3x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega}$

$$- \frac{b^3}{16a^3} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

49) $\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{8a^2x^3} - \frac{b^2}{32a^3x^2}\right.$

$$\left. - \frac{b^3}{64a^4x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega} + \frac{3b^4}{128a^4} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

50) $\int dx \sqrt{a+bx}^5 = \frac{2\omega^3 \sqrt{\omega}}{7b}$

51) $\int \frac{dx}{x} \sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{5}\omega^2 + \frac{1}{3}a\omega + a^2\right) 2\sqrt{\omega} + a^3 \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

52) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx}^5 = -\frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{5b}{2a} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^5}$

53) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx}^5 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{4a^2x}\right) \omega^3 \sqrt{\omega}$

$$+ \frac{15b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^5}$$

54) $\int x\,dx \sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{9}\omega - \frac{1}{7}a\right) \frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^2}$

55) $\int x^2 dx \sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{11}\omega^2 - \frac{2}{9}a\omega + \frac{1}{7}a^2\right) \frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^3}$

56) $\int x^3 dx \sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{13}\omega^3 - \frac{3}{11}a\omega^2 + \frac{1}{3}a^2\omega\right.$

$$\left. - \frac{1}{7}a^3\right) \frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^4}$$

57) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{2b}$

58) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \left(\frac{1}{5}\,\omega - \frac{1}{2}\,a\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{b^2}$$

59) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \left(\frac{1}{3}\,\omega^2 - \frac{2}{5}\,a\,\omega + \frac{1}{2}\,a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{b^3}$$

60) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b}$$

61) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{4}\,\omega - a\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b^2}$$

62) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{7}\,\omega^2 - \frac{1}{2}\,a\,\omega + a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b^3}$$

63) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left\{\frac{3}{2}\,log\,\frac{\sqrt[3]{\omega}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{3}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{\omega}+2\sqrt[3]{a}}\right\}$$

64) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{a+bx}} = -\frac{\sqrt[3]{\omega^2}}{a\,x} - \frac{b}{3\,a}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

65) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{a+bx}} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{2\,b}{3\,a^2\,x}\right)\sqrt[3]{\omega^2} + \frac{2\,b^2}{9\,a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

66) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left\{\frac{3}{2}\,log\,\frac{\sqrt[3]{\omega}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{3}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{\omega}+2\sqrt[3]{a}}\right.$$

67) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = -\frac{\sqrt[3]{\omega}}{a\,x} - \frac{2\,b}{3\,a}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega^2}}$$

68) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{5\,b}{6\,a^2\,x}\right)\sqrt[3]{\omega} + \frac{5\,b^2}{9\,a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega^2}}$$

69) $$\int d\sqrt[3]{a+bx} = \frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{4\,b}$$

70) $\int x\,dx\sqrt[3]{a+bx} = \left(\frac{1}{7}\,\omega - \frac{1}{4}\,a\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{b^2}$

71) $\int x^2\,dx\sqrt[3]{a+bx} = \left(\frac{1}{10}\,\omega^2 - \frac{2}{7}\,a\,\omega + \frac{1}{4}\,a^2\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{b^3}$

72) $\int dx\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{5\,b}$

73) $\int x\,dx\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(\frac{1}{8}\,\omega - \frac{1}{5}\,a\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{b^2}$

74) $\int x^2\,dx\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(\frac{1}{11}\,\omega^2 - \frac{1}{4}\,a\,\omega + \frac{1}{5}\,a^2\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{b^3}$

75) $\int \frac{dx}{x}\sqrt[3]{a+bx} = 3\sqrt[3]{\omega} + a\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$

76) $\int \frac{dx}{x^2}\sqrt[3]{a+bx} = -\frac{\omega\sqrt[3]{\omega}}{a\,x} + \frac{b}{3\,a}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega}$

77) $\int \frac{dx}{x^3}\sqrt[3]{a+bx} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{b}{3\,a^2\,x}\right)\omega\sqrt[3]{\omega}$

$$- \frac{b^2}{9\,a^2}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega}$$

78) $\int \frac{dx}{x}\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\omega^2} + a\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$

79) $\int \frac{dx}{x^2}\sqrt[3]{(a+bx)^2} = -\frac{\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{a\,x} + \frac{2\,b}{3\,a}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega^2}$

80) $\int \frac{dx}{x^3}\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{b}{6\,a^2\,x}\right)\omega\sqrt[3]{\omega^2}$

$$- \frac{b^2}{9\,a^2}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega^2}$$

81) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{3\,a\,\omega} + \frac{2}{3\,a^2}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$

82) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{5\,a\,\omega^2} + \frac{4}{15\,a^2\,\omega} + \frac{8}{15\,a^3}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$

83) $\int \frac{dx}{\sqrt[9]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{7\,a\,\omega^3} + \frac{6}{35\,a^2\,\omega^2} + \frac{8}{35\,a^3\,\omega} + \frac{16}{35\,a^4}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$

§. 79.

Integrale von der Form $\int f\left\{x^p, \sqrt{1-x^q}^r\right\}$.

Sei s eine positive ganze ungerade Zahl, so wird:

1) $$\int \frac{x^{2r}\,dx}{(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{(2r-s+1)(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}$$
$$\sum_0^{2r-1}{}^{\varkappa} A_\varkappa x^{2r-\varkappa} + N\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^s}\sum_1^{\frac{s-1}{2}}{}^{\lambda} B_\lambda (1-x^2)^\lambda$$
$$\varkappa = 1, 3, 5, \ldots$$
$$\lambda = 0, 2, 4, \ldots$$
$$A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa)}{(2r-s-1)(2r-s-3)\ldots(2r-s-\varkappa)},\quad A_0 = 1$$
$$B_\lambda = \frac{(s-3)(s-5)\ldots(s-\lambda-1)}{(s-2)(s-4)\ldots(s-\lambda-2)}$$
$$N = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 3.1}{(2r-s+1)(2r-s+3)\ldots(-s+3)}$$

2) $$\int \frac{x^{2r+1}\,dx}{(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{(2r-s+2)(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}\sum_0^{2r-4}{}^{\lambda} A_\lambda x^{2r-\lambda-2}$$
$$+N\left\{\frac{x^2}{(\sqrt{1-x^2})^s}\left[(1-x^2)+(1-x^2)^2+(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}\right]-\sqrt{1-x^2}\right\}$$
$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$
$$A_\lambda = \frac{2r.2r-2\ldots 2r-\lambda}{(2r-s)(2r-s-2)\ldots(2r-s-\lambda)}\quad A_0 = 1$$
$$N = \frac{2r.2r-2\ldots 4.2}{(2r-s+2)(2r-s)(2r-s-2)\ldots(s-4)(s-2)}$$

3) $$\int \frac{x^{2r}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r}\sum_1^{2r-1}{}^{\varkappa} A_\varkappa x^{2r-\varkappa}$$
$$+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 3.1}{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots 4.2}\,arc\sin x$$
$$\varkappa = 1, 3, 5, \ldots$$
$$A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa)}{(2r-2)(2r-4)\ldots(2r-\varkappa-1)},\quad A_\varkappa = 1$$

4) $$\int \frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r+1}\sum_0^{2r}{}_\lambda A_\lambda x^{2r-\lambda}$$

$$A_\lambda = \frac{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots(2r+2-\lambda)}{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\lambda+2-1)},\quad A_0 = 1$$

$$\lambda = 0,\ 2,\ 4,\ 6\ \ldots$$

Sei s positiv und ganz

5) $$\int \frac{dx}{x^{2r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^s} = -\frac{1}{(2r-1)x^{2r-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{s-2}}\sum_0^{2(r-1)}{}_\lambda A_\lambda x^\lambda$$

$$+\frac{(2r+s-3)(2r+s-5)\ldots(s+1)}{(2r-1)(2r-3)\ldots 5.3.1}\frac{x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^s}\sum_1^{\frac{s-1}{2}}(1-x^2)^\varkappa B_\varkappa$$

$$\lambda = 0,\ 2,\ 4,\ 6\ \ldots$$

$$\varkappa = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots$$

$$A_\lambda = \frac{(2r+s-3)(2r+s-5)\ldots(2r+s-\lambda-1)}{(2r-3)(2r-5)\ldots(2r-\lambda-1)}$$

$$B_{\varkappa+1} = \frac{(s-3)(s-5)\ldots(s-2\varkappa-1)}{(s-2)(s-4)\ldots(s-2\varkappa)},\ A_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{s-2}$$

6) $$\int \frac{dx}{x^{2r+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^s} = -\frac{1}{2r.x^{2r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{s-2}}\sum_0^{2r-2}{}_\lambda A_\lambda x^\lambda$$

$$+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(s+2)s}{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots 2}\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^s}\left\{\frac{1-x^2}{s-2}\right.$$

$$\left.+\frac{(1-x^2)^2}{s-4}+\cdots+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}(s-1)}}{1}\right\}$$

$$+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(s+2)s}{(2r-2)(2r-4)\ldots 4.2}\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$$

$$\lambda = 0,\ 2,\ 4,\ 6\ \ldots$$

$$A_\lambda = \frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(2r+s-\lambda)}{(2r-2)(2r-4)\ldots(2r-\lambda)},\ A_0 = 1$$

7) $$\int \frac{dx}{x^{2r}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2r-1)x^{2r-1}}\left\{1+\frac{2r-2}{2r-3}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{(2r-2)(2r-4)}{(2r-3)(2r-5)}x^4+\cdots+\frac{(2r-2)(2r-4)\ldots 2}{(2r-3)(2r-5)\ldots 3}x^{2r-2}\right\}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^{2r+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r.x^{2r}}\left\{1+\frac{2r-1}{2r-2}x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 3}{(2r-2)(2r-4)\ldots 2}x^{2r-2}\right\}+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 3.1}{2r.(2r-2)\ldots 4.2}$$

$$\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

Sei s eine positive ganze und ungerade Zahl, so ist:

9) $$\int x^{2r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^s dx = -\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{s+2}}{2r+s+1}\sum_1^{2r-1}{}^{\varkappa} A_\varkappa x^{2r-\varkappa}$$
$$+A_{2r-3}\, x\sqrt{1-x^2}\sum_0^{s+1}{}^{\lambda} B_\lambda (1-x^2)^{\frac{s-\lambda-1}{2}} + A_{2r-3}\, B_{\lambda+1}\, arc\sin x$$
$$\varkappa = 1, 3, 5, 7, \ldots$$
$$\lambda = 0, 2, 4, 6, \ldots$$
$$A_1 = 1, \quad A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa-2)}{(2r+s-1)(2r+s-3)\ldots(2r+s-\varkappa)}$$
$$B_0 = 1, \quad B_\lambda = \frac{s(s-2)(s-4)\ldots(s-\lambda)}{(s-1)(s-3)\ldots(s-\lambda-1)}$$

10) $$\int x^{2r+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^s dx = -\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{s+2}}{2r+s+2}\sum_0^{2r-2}{}^{\lambda} c_\lambda x^{2r-\lambda}$$
$$+c_{2r}\, x^2\sqrt{1-x^2}\left\{1+(1-x^2)+(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{s-3}{2}}\right.$$
$$\left.+(1-x^2)^{\frac{s-5}{2}}\right\} - \frac{2r.(2r-2)\ldots 4.2}{(2r+s+2)(2r+s)\ldots(s+4)(s+2)}\sqrt{1-x^2}$$

Dabei ist
$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$
$$C_\lambda = \frac{2r.2r-2\ldots 2r-\lambda}{(2r+s)(2r+s-2)\ldots(2r+s-\lambda)}.$$

Sei n gerade, so ist:

11) $$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\sum_0^{\frac{n}{2}-1}{}^{\varkappa}\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2\varkappa+1)}{n(n-2)\ldots(n-2\varkappa)}x^{n-2\varkappa+1}$$
$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n.(n-2)(n-4)\ldots 4.2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Ist dagegen n ungerade, so wird:

12) $$\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}^{\varkappa}\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2\varkappa+1)}{n(n-2)(n-4)\ldots(n-2\varkappa)}\varkappa^{n-2\varkappa+1}$$

Die Coefficienten für $\varkappa = 0$ sind $= 1$.

13) $$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

14) $$\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{1 - x^2}} = - \sqrt{1 - x^2}$$

15) $$\int \frac{x^n\,d\,x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{x^2 - 1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2}\,d\,x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

16) $$\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 - 1}$$

17) $$\int \frac{x^n\,d\,x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{1 + x^2}}{n} - \frac{(n - 1)}{n} \int \frac{x^{n-2}\,d\,x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

18) $$\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{1 + x^2}$$

19) $$\int \frac{d\,x}{x^n \sqrt{1 - x^2}} = - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{(n - 1)\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{d\,x}{x^{n-2}\sqrt{1 - x^2}}$$

20) $$\int \frac{d\,x}{x\sqrt{1 - x^2}} = - \mathit{log}\, \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

21) $$\int \frac{d\,x}{x^n \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{(n - 1)\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{d\,x}{x^{n-2}\sqrt{x^2 - 1}}$$

22) $$\int \frac{d\,x}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \mathit{arc\,cos}\, \frac{1}{x}$$

23) $$\int \frac{d\,x}{x^n \sqrt{1 + x^2}} = - \frac{1}{n-1} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{d\,x}{x^{n-2}\sqrt{1 + x^2}}$$

24) $$\int \frac{d\,x}{x\sqrt{1 + x^2}} = - \mathit{log}\, \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x^2}$$

25) $$\int x^n \sqrt{1 - x^2}\,d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n+2} \int \frac{n^n\,d\,x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

26) $$\int x\sqrt{1 - x^2}\,d\,x = \frac{1}{3}\,(x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}$$

27) $$\int x^n \sqrt{x^2 - 1}\,d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{n+2} \int \frac{x^n\,d\,x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

28) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$

29) $\int x^n\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{n+2}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

30) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1+x^2}$

31) $\int\frac{dx}{x^n}\sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-2)x^{n-1}} - \frac{1}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1-x^2}}$

32) $\int\frac{dx}{x}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + log\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

33) $\int\frac{dx}{x^n}\sqrt{x^2-1} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{(n-2)x^{n-1}} + \frac{1}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}}$

34) $\int\frac{dx}{x}\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1} - arc\cos\frac{1}{x}$

35) $\int\frac{dx}{x^n}\sqrt{1+x^2} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(n-2)x^{n-1}} - \frac{1}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$

36) $\int\frac{dx}{x}\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} - log\,\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

37) $\int dx\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}log\,(x+\sqrt{1+x^2})$

38) $\int dx\sqrt{x^2-1} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}log\,(\sqrt{x^2-1}+x)$

39) $\int dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}arc\sin x.$

§. 80.

Sei $a + b x^2 = \omega$.

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log \left\{x\sqrt{b} + \sqrt{a + b x^2}\right\}, \quad b > 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin x \sqrt{-\frac{b}{a}}, \qquad b < 0$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \log\left\{x + \sqrt{1 + x^2}\right\}$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \log\left\{x + \sqrt{x^2 - 1}\right\}$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{\omega}}$$

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^5}} = \left(\frac{1}{3 a \omega} + \frac{2}{3 a^2}\right) \frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^7}} = \left(\frac{1}{5 a \omega^2} + \frac{4}{15 a^2 \omega} + \frac{8}{15 a^3}\right) \frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

8) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{b}$$

9) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{x\sqrt{\omega}}{2b} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}.$$

10) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right) \sqrt{\omega}$$

11) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^3}{4b} - \frac{3ax}{8b^2}\right) \sqrt{\omega} + \frac{3a^2}{8b^3} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

12) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^4}{5b} - \frac{4 a x^2}{15 b^2} + \frac{8a^2}{15 b^3}\right) \sqrt{\omega}$$

13) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}}, \quad a > 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sec} x \sqrt{-\frac{b}{a}}, \quad a < 0$$

14) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \log \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

15) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

16) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{x}$$

17) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{ax}$$

18) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{2ax^2} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx^2}} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt{\omega}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx^2}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{3b}{8a^2x^2}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3b^2}{8a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

21) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}^{\,3}} = \frac{x}{a\sqrt{\omega}}$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^{\,3}} = -\frac{1}{b\sqrt{\omega}}$$

23) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^{\,3}} = -\frac{x}{b\sqrt{\omega}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

24) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^{\,3}} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{2a}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

25) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^{\,3}} = \left(\frac{x^3}{2b} + \frac{3ax}{2b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

26) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^{\,3}} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{4ax^2}{3b^2} - \frac{8a^2}{3b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

27) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}^3} = \frac{1}{a\sqrt{\omega}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

28) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{2bx}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{3b}{2a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

30) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{4b}{3a^2x} + \frac{8b^2x}{3a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

31) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{8a^2x^2} + \frac{15b^2}{8a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{15b^2}{a^3}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

32) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}^5} = \left(\frac{2bx^3}{3a^2} + \frac{x}{a}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}$$

33) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^5} = -\frac{1}{3b\omega\sqrt{\omega}}$$

34) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^5} = \frac{x^3}{3a\omega\sqrt{\omega}}$$

35) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^5} = \left(-\frac{x^2}{b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}$$

36) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}^5} = \left(\frac{4}{3a} + \frac{bx^2}{a^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{\omega}}$$

37) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}^5} = -\frac{1}{ax\omega\sqrt{\omega}} - \frac{4b}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

38) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}^5} = -\frac{1}{2ax^2\omega\sqrt{\omega}} - \frac{5b}{2a}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{\omega^5}}$$

39) $$\int dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{x\sqrt{\omega}}{2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

40) $$\int x\,dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{3b}$$

41) $$\int x^2\,dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{x\omega\sqrt{\omega}}{4b} - \frac{a}{4b}\int dx\sqrt{\omega}$$

42) $\int x^3\,dx\sqrt{a+bx^2} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{15b^2}\right)\omega\sqrt{\omega}$

43) $\int x^4\,dx\sqrt{a+bx^2} = \left(\frac{x^3}{6b} - \frac{ax}{8b^2}\right)\omega\sqrt{\omega} + \frac{a^2}{8b^2}\int ax\sqrt{\omega}$

44) $\int x^5\,dx\sqrt{a+bx^2} = \left(\frac{x^4}{7b} - \frac{4ax^2}{35b^2} + \frac{8a^2}{105b^3}\right)\omega\sqrt{\omega}$

45) $\int \frac{dx}{x}\sqrt{a+bx^2} = \sqrt{\omega} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

46) $\int \frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx^2} = -\frac{\sqrt{\omega}}{x} + b\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$

47) $\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx^2} = -\frac{\sqrt{\omega}}{2x^2} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

48) $\int \frac{dx}{x^4}\sqrt{a+bx^2} = -\frac{\omega\sqrt{\omega}}{3ax^3}$

49) $\int \frac{dx}{x^5}\sqrt{a+bx^2} = -\frac{\omega\sqrt{\omega}}{4ax^4} + \frac{b\sqrt{\omega}}{8ax^2} - \frac{b^2}{8a}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

50) $\int dx\sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{\omega}{4} + \frac{3a}{8}\right)x\sqrt{\omega} + \frac{3a^2}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$

51) $\int x\,dx\sqrt{a+bx^2}^3 = \frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{5b}$

52) $\int x^2\,dx\sqrt{a+bx^2}^3 = \frac{x\,\omega^2\sqrt{\omega}}{6b} - \frac{a}{6b}\int dx\sqrt{\omega^3}$

53) $\int x^3\,dx\sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{x^2}{7b} - \frac{2a}{35b^2}\right)\omega^2\sqrt{\omega}$

54) $\int x^4\,dx\sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{x^3}{8b} - \frac{ax}{16b^2}\right)\omega^2\sqrt{\omega}$

$$+ \frac{a^2}{16b^2}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

55) $\int x^5\,dx\sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{x^4}{9b} - \frac{4ax^2}{63b^2} + \frac{8a^2}{315b^3}\right)\omega^2\sqrt{\omega}$

56) $\int \frac{dx}{x}\sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{\omega}{3} + a\right)\sqrt{\omega} + a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

57) $$\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a + bx^2}^3 = -\frac{\omega^2 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{4b}{a}\int dx \sqrt{\omega^3}$$

58) $$\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a + bx^2}^3 = -\frac{\omega^2 \sqrt{\omega}}{2ax^2} + \frac{3b}{2a}\int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

59) $$\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{a + bx^2}^3 = \left(-\frac{1}{3ax^3} - \frac{2b}{3a^2x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega} + \frac{8b^2}{3a^2}\int dx \sqrt{\omega^3}$$

60) $$\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{a + bx^2}^3 = \left(-\frac{1}{4ax^4} - \frac{b}{8a^2x^2}\right) \omega^2 \sqrt{\omega} + \frac{3b^2}{8a^2}\int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

61) $$\int dx \sqrt{a + bx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{6} + \frac{3a\omega}{24} + \frac{5a^2}{16}\right) x \sqrt{\omega} + \frac{5a^3}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

62) $$\int x\,dx \sqrt{a + bx^2}^5 = \frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{7b}$$

63) $$\int x^2 dx \sqrt{a + bx^2}^5 = \frac{x\omega^3 \sqrt{\omega}}{8b} - \frac{a}{8b}\int dx \sqrt{\omega^5}$$

64) $$\int x^3 dx \sqrt{a + bx^2}^5 = \left(\frac{x^2}{9b} - \frac{2a}{63b^2}\right) \omega^3 \sqrt{\omega}$$

65) $$\int \frac{dx}{x} \sqrt{a + bx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{5} + \frac{a\omega}{3} + a^2\right) \sqrt{\omega} + a^3 \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

66) $$\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a + bx^2}^5 = -\frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{6b}{a}\int dx \sqrt{\omega^5}$$

67) $$\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a + bx^2}^5 = -\frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{2ax^2} + \frac{5b}{2a}\int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^5}.$$

§. 81.

Sei $a x + b x^2 = \omega$.

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}^n} = -\frac{2(a+2bx)}{(n-2)a^2\sqrt{\omega}^{n-2}} - \frac{4(n-3)b}{(n-2)a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}^{n-2}}$$

2) $$\int x^m \sqrt{ax+bx^2}^n dx = \frac{x^{m-1}\sqrt{\omega}^{n+2}}{b(m+n+1)} + \frac{a}{b}\cdot\frac{m+\frac{1}{2}n}{m+n+1}\int x^{m-1}\sqrt{\omega}^n dx$$

3) $$\int \frac{\sqrt{ax+bx^2}^n}{x^m} dx = -\frac{1}{x^m}\frac{\sqrt{\omega}^{n+2}}{a\left(m-\frac{n}{2}-1\right)} + \frac{b(2-m+n)}{a\left(m-\frac{n}{2}-1\right)}\int\frac{\sqrt{\omega}^n}{x^{m-1}}dx$$

4) $$\int \sqrt{ax+bx^2}^n dx = \frac{(a+2bx)\sqrt{\omega}^n}{2(n+1)b} - \frac{na^2}{4(n+1)b}\int\sqrt{\omega}^{n-2}dx.$$

Diese Integrale führen auf

5) $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\log\left(a+2bx+2\sqrt{b}\sqrt{ax+bx^2}\right),$$

oder auf

6) $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\frac{2bx-a}{a}$$

7) $$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2rx-x^2}}{m} + \frac{r}{m}(2m-1)\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{2rx - x^2}} = \frac{\sqrt{2rx - x^2}}{m x^{m-1}} + \frac{r}{m}(2m+1)\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2rx - x^2}}$$

9) $$\int x^m \sqrt{2rx - x^2}\, dx = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2rx - x^2}^3}{m+2} + \frac{r(2m+1)}{m+2}\int x^{m-1}\sqrt{2rx - x^2}\, dx$$

10) $$\int \frac{dx}{x^m}\sqrt{2rx - x^2}\, dx = \frac{\sqrt{2rx - x^2}^3}{(m-2)x^{m-1}} + r\,\frac{2m-1}{m-2}\int \frac{dx}{x^{m-1}}\sqrt{2rx - x^2}\, dx$$

11) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{b} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

12) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \left(\frac{x}{2b} - \frac{3a}{4b^2}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3a^2}{8b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

13) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{5ax}{12b^2} + \frac{5a^2}{8b^3}\right)\sqrt{\omega} - \frac{5a^3}{16b^3}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

14) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \left(\frac{x^3}{4b} - \frac{7ax^2}{24b^2} + \frac{35a^2x}{96b^3} - \frac{35a^3}{64b^4}\right)\sqrt{\omega} + \frac{35a^4}{128b^4}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

15) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \left(\frac{x^4}{5b} - \frac{9ax^3}{40b^2} + \frac{21a^2x^2}{80b^3} - \frac{21a^3x}{64b^4} + \frac{63a^4}{128b^5}\right)\sqrt{\omega} - \frac{63a^5}{256b^5}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

16) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax + bx^2}} = -\frac{2\sqrt{\omega}}{ax}$$

17) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax + bx^2}} = \left(-\frac{1}{3ax^2} + \frac{2b}{3a^2x}\right)2\sqrt{\omega}$$

18) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax + bx^2}} = \left(-\frac{1}{5ax^3} + \frac{4b}{15a^2x^2} - \frac{8b^2}{15a^3x}\right)2\sqrt{\omega}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{ax+bx^2}} = \left(-\frac{1}{7ax^4}+\frac{6b}{35a^2x^3}-\frac{8b^2}{35a^3x^2}+\frac{16b^3}{35a^4x}\right)2\sqrt{\omega}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{ax+bx^2}} = \left(-\frac{1}{9ax^5}+\frac{8b}{63a^2x^4}-\frac{16b^2}{105a^3x^3}+\frac{64b^3}{315a^4x^2}-\frac{128b^4}{315a^5x}\right)2\sqrt{\omega}$$

21) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = -\frac{2(2bx+a)}{a^2\sqrt{\omega}}$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = +\frac{2x}{b\sqrt{\omega}}$$

23) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = -\frac{2x}{b\sqrt{\omega}}+\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

24) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(\frac{x^2}{b}+\frac{3ax}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}-\frac{3a}{2b^2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

25) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(\frac{x^3}{2b}-\frac{5ax^2}{4b^2}-\frac{15a^2x}{4b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}+\frac{15a^2}{8b^3}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

26) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(\frac{x^4}{3b}-\frac{7ax^3}{12b^2}+\frac{35a^2x^2}{24b^3}+\frac{35a^3x}{8b^4}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}-\frac{35a^3}{16b^4}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

27) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+bx^2}^3} = -\frac{2}{3ax\sqrt{\omega}}-\frac{4b}{3a}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}^3}$$

28) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{5ax^2}+\frac{2b}{5a^2x}\right)\frac{2}{\sqrt{\omega}}+\frac{8b^2}{5a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}^3}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{7ax^3}+\frac{8b}{35a^2x^2}-\frac{16b^2}{35a^3x}\right)\frac{2}{\sqrt{\omega}}-\frac{64b^3}{35a^3}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}^3}$$

30) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{9ax^4}+\frac{10b}{63a^2x^3}-\frac{16b^2}{63a^3x^2}+\frac{32b^3}{63a^4x}\right)\frac{2}{\sqrt{\omega}}+\frac{128b^4}{63a^4}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}^3}$$

$$31)\quad \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{ax+bx^2}^{\,3}} = \left(-\frac{1}{11\,a x^5} + \frac{4\,b}{33\,a^2 x^4} - \frac{40\,b^2}{231\,a^3 x^3} + \frac{64\,b^3}{231\,a^4 x^2} - \frac{128\,b^4}{231\,a^5 x}\right)\frac{2}{\sqrt{\omega}} - \frac{512\,b^5}{231\,a^5}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$32)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}^{\,5}} = \left(-\frac{2}{3\,\omega} + \frac{16\,b}{3\,a^2}\right)\frac{2\,bx+a}{a^2\sqrt{\omega}}$$

$$33)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^{\,5}} = \left\{\frac{1}{a+bx} - \frac{4\,(2\,bx+a)}{a^2}\right\}\frac{2}{3\,a\sqrt{\omega}}$$

$$34)\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^{\,5}} = \left(\frac{x}{a+bx} + \frac{2\,x}{a}\right)\frac{2}{3\,a\sqrt{\omega}}$$

$$35)\quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^{\,5}} = \frac{2\,x^3}{3\,a\,\omega\sqrt{\omega}}$$

$$36)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+bx^2}^{\,5}} = -\frac{2}{5\,a x\,\omega\sqrt{\omega}} - \frac{8\,b}{5\,a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$37)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+bx^2}^{\,5}} = \left(-\frac{1}{7\,a x^2} + \frac{2\,b}{7\,a^2 x}\right)\frac{2}{\omega\sqrt{\omega}} + \frac{16\,b^2}{7\,a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$38)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax+bx^2}^{\,5}} = \left(-\frac{1}{9\,a x^3} + \frac{4\,b}{21\,a^2 x^2} - \frac{8\,b^2}{21\,a^3 x}\right)\frac{2}{\omega\sqrt{\omega}} - \frac{64\,b^3}{21\,a^3}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$39)\quad \int dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4\,b}\right)\sqrt{\omega} - \frac{a^2}{8\,b}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$40)\quad \int x\,dx\sqrt{ax+bx^2} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{3\,b} - \frac{a}{2\,b}\int dx\sqrt{\omega}$$

$$41)\quad \int x^2\,dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x}{4\,b} - \frac{5\,a}{24\,b^2}\right)\omega\sqrt{\omega} + \frac{5\,a^2}{16\,b^2}\int dx\sqrt{\omega}$$

$$42)\quad \int x^3\,dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x^2}{5\,b} - \frac{7\,ax}{40\,b^2} + \frac{7\,a^2}{48\,b^3}\right)\omega\sqrt{\omega} - \frac{7\,a^3}{32\,b^3}\int dx\sqrt{\omega}$$

43) $$\int x^4\,dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x^3}{6b} - \frac{3ax^2}{20b^2} + \frac{21a^2x}{160b^3} - \frac{7a^3}{64b^4}\right)\omega\sqrt{\omega} + \frac{21a^4}{128b^4}\int dx\sqrt{\omega}$$

44) $$\int x^5\,dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x^4}{7b} - \frac{11ax^3}{84b^2} + \frac{33a^2x^2}{280b^3} - \frac{33a^3x}{320b^4} + \frac{11a^4}{128b^5}\right)\omega\sqrt{\omega} - \frac{33a^5}{256b^5}\int dx\sqrt{\omega}$$

45) $$\int \frac{dx}{x}\sqrt{ax+bx^2} = \sqrt{\omega} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

46) $$\int \frac{dx}{x^2}\sqrt{ax+bx^2} = -\frac{2\sqrt{\omega}}{x} + b\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

47) $$\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{ax+bx^2} = -\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{3ax^3}$$

48) $$\int \frac{dx}{x^4}\sqrt{ax+bx^2} = \left(-\frac{1}{5ax^4} + \frac{2b}{15a^2x^3}\right)2\omega\sqrt{\omega}$$

49) $$\int \frac{dx}{x^5}\sqrt{ax+bx^2} = \left(-\frac{1}{7ax^5} + \frac{4b}{35a^2x^4} - \frac{8b^2}{105a^3x^3}\right)2\omega\sqrt{\omega}$$

50) $$\int dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{\omega}{b} - \frac{3a^2}{8b^2}\right)\frac{2bx+a}{8}\sqrt{\omega} + \frac{3a^4}{128b^2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

51) $$\int x\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{5b} - \frac{a}{2b}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

52) $$\int x^2\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{x}{6b} - \frac{7a}{60b^2}\right)\omega^2\sqrt{\omega} + \frac{7a^2}{24b^2}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

53) $$\int x^3\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{x^2}{7b} - \frac{3ax}{28b^2} + \frac{3a^2}{40b^3}\right)\omega^2\sqrt{\omega} - \frac{3a^3}{16b^3}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

54) $$\int x^4\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{x^3}{8b} - \frac{11ax^2}{112b^2} + \frac{33a^2x}{448b^3} - \frac{33a^3}{640b^4}\right)\omega^2\sqrt{\omega} + \frac{33a^4}{256b^4}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

55) $$\int x^5\,dx\sqrt{ax+bx^2}^3 = \left(\frac{x^4}{9b} - \frac{13ax^3}{144b^2} + \frac{143a^2x^2}{2016b^3} - \frac{143a^3x}{2688b^4} + \frac{143a^4}{3840b^5}\right)\omega^2\sqrt{\omega} - \frac{143a^5}{1536b^5}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

56) $$\int\frac{dx}{x}\sqrt{ax+bx^2}^3 = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{3} + \frac{a}{2}\int dx\sqrt{\omega}$$

57) $$\int\frac{dx}{x^2}\sqrt{ax+bx^2}^3 = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{2x} + \frac{3a}{4}\sqrt{\omega} + \frac{3a^2}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

58) $$\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{ax+bx^2}^3 = \left(b - \frac{2a}{x}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

59) $$\int\frac{dx}{x^4}\sqrt{ax+bx^2}^3 = -\left(\frac{2a}{3x^2} + \frac{8b}{3x}\right)\sqrt{\omega} + b^2\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

60) $$\int\frac{dx}{x^5}\sqrt{ax+bx^2}^3 = -\frac{2(a+bx)^2\sqrt{\omega}}{5ax^3}$$

61) $$\int dx\sqrt{ax+bx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{b} - \frac{5a^2\omega}{16b^2} + \frac{15a^4}{128b^3}\right)\frac{2bx+a}{12}\sqrt{\omega} - \frac{5a^6}{1024b^3}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

62) $$\int x\,dx\sqrt{ax+bx^2}^5 = \frac{\omega^3\sqrt{\omega}}{7b} - \frac{a}{2b}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

63) $$\int x^2\,dx\sqrt{ax+bx^2}^5 = \left(\frac{x}{8b} - \frac{9a}{112b^2}\right)\omega^3\sqrt{\omega} - \frac{11a^3}{32b^2}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

64) $$\int x^3\,dx\sqrt{ax+bx^2}^5 = \left(\frac{x^2}{9b} - \frac{11ax}{144b^2} + \frac{11a^2}{224b^3}\right)\omega^3\sqrt{\omega} - \frac{11a^3}{64b^3}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

65) $$\int\frac{dx}{x}\sqrt{ax+bx^2}^5 = \frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{5} + \frac{a}{2}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

66) $$\int\frac{dx}{x^2}\sqrt{ax+bx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{4x} + \frac{5a\omega}{24}\right)\sqrt{\omega} + \frac{5a^2}{16}\int dx\sqrt{\omega}$$

67) $$\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{ax+bx^2}^5 = \left(\frac{11a^2}{8} + \frac{13abx}{12} + \frac{5a^2}{8}\right)\sqrt{\omega} + \frac{5a^3}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}.$$

§. 82.

Sei $a x^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n} = \omega.$

1) $\int x^m (a^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n})^p \, dx$

$$= \frac{x^{m+1}\omega^p}{m+p\varkappa+1} - \frac{p n b}{m+p\varkappa+1}\int x^{m+\varkappa+n}\omega^{p-1}\,dx$$

$$= \frac{x^{m-\varkappa-n+1}\omega^{p+1}}{(m+p\varkappa+np+1)b} - \frac{(m+p\varkappa-n+1)a}{(m+p\varkappa+np+1)b}\int x^{m-1}\omega^p\,dx$$

$$= \frac{x^{m+1}\omega^p}{(m+p\varkappa+np+1)} + \frac{p n a}{m+p\varkappa+np+1}\int x^{m+\varkappa}\omega^{p-1}\,dx$$

2) $\int \frac{x^m\,dx}{(a x^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n})^p}$

$$= -\frac{x^{m-\varkappa-n+1}}{(p-1)nb\,\omega^{p-1}} + \frac{m-p\varkappa-n+1}{(p-1)nb}\int\frac{x^{m-\varkappa-n}}{\omega^{p-1}}\,dx$$

$$= \frac{x^{m-\varkappa-n+1}}{(m-p\varkappa-np+1)b\,\omega^{p-1}} - \frac{(m-p\varkappa-n+1)a}{(m-p\varkappa-np+1)b}\int\frac{x^{m-n}}{\omega^p}\,dx$$

$$= \frac{x^{m-\varkappa+1}}{(p-1)na\,\omega^{p-1}} - \frac{m+n-p\varkappa-np+1}{(p-1)na}\int\frac{x^{n-\varkappa}}{\omega^{p-1}}\,dx$$

3) $\int \frac{(a x^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n})^p}{x^m}\,dx$

$$= -\frac{\omega^p}{(m-p\varkappa-np-1)x^{m-1}} - \frac{p n a}{(m-p\varkappa-np-1)}\int\frac{dx\,\omega^{p-1}}{x^{m-\varkappa}}$$

$$= -\frac{\omega^{p-1}}{(m-p\varkappa-1)a x^{m+\varkappa-1}} - \frac{(m-n-p\varkappa-np-1)}{(m-p\varkappa-1)a}\int\frac{dx\,\omega^p}{x^{m-n}}$$

4) $\int \frac{dx}{x^m (a x^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n})^p}$

$$= -\frac{1}{(m+p\varkappa-1)a x^{m+\varkappa-1}\omega^{p-1}} - \frac{(m-n+p\varkappa+np-1)b}{(m+p\varkappa-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-n}\omega^p}$$

$$= \frac{1}{(p-1)na x^{m+\varkappa-1}\omega^{p-1}} + \frac{m-n+p\varkappa+np-1}{(p-1)na}\int\frac{dx}{x^{m+\varkappa}\omega^{p-1}}$$

5) $$\int \frac{dx}{(ax^{\varkappa} + bx^{\varkappa+n})^p}$$
$$= \frac{1}{(p-1)nax^{\varkappa-1}\omega^{p-1}} + \frac{p\varkappa + np - n - 1}{(p-1)na} \int \frac{dx}{x^n \omega^{p-1}}$$

6) $$\int dx\,(ax^{\varkappa} + bx^{\varkappa+n})^p$$
$$= \frac{x\omega^p}{p\varkappa + np + 1} + \frac{pna}{p\varkappa + np + 1} \int x^{\varkappa}\omega^{p-1}\,dx.$$

§. 83.

Sei $u = a + bx, \quad v = \alpha + \beta x, \quad \Delta = a\beta - b\alpha,$

so wird:

1) $$\int \frac{u^n v^m}{\sqrt{u}}\,dx = \frac{2}{(2m+2n+1)\beta} v^{m+1}u^{n-1}\sqrt{u} + \frac{(2n-1)\Delta}{(2m+2n+1)\beta} \int \frac{v^m u^{n-1}}{\sqrt{u}}\,dx$$

2) $$\int \frac{v^m}{u^n\sqrt{u}}\,dx = \frac{2}{(2n-1)\Delta} \frac{v^{m+1}}{u^n}\sqrt{u} - \frac{(2m-2n+3)\beta}{(2n-1)\Delta} \int \frac{v^m}{u^{n-1}\sqrt{u}}\,dx$$
$$= -\frac{2}{(2n-1)b}\frac{v^m}{u^n}\sqrt{u} + \frac{2m\beta}{(2n-1)b} \int \frac{v^{m-1}}{u^{n-1}\sqrt{u}}\,dx$$

3) $$\int \frac{u^n}{v^m\sqrt{u}}\,dx = -\frac{2}{(2m-2n-1)\beta} \cdot \frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\sqrt{u} - \frac{(2n-1)\Delta}{(2m-2n-1)\beta} \int \frac{u^{n-1}}{v^m\sqrt{u}}\,dx$$
$$= -\frac{1}{(m-1)\beta}\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\sqrt{u} + \frac{(2n-1)\beta}{2(m-1)\beta} \int \frac{u^{n-1}}{v^{m-1}\sqrt{u}}\,dx$$

$$4)\quad \int \frac{dx}{u^n v^m \sqrt{u}} = \frac{2}{(2n-1)\Delta} \cdot \frac{\sqrt{u}}{v^{m-1} u^n} + \frac{(2m+2n-3)\beta}{(2n-1)\Delta} \int \frac{dx}{v^m u^{n-1} \sqrt{u}}$$

$$5)\quad \int v^m \sqrt{u}\, dx = \frac{2}{(2m+3)\beta} v^{m+1} \sqrt{u} + \frac{\Delta}{(2m+3)\beta} \int \frac{v^m}{\sqrt{u}}\, dx$$

$$6)\quad \int \frac{v^m}{\sqrt{u}}\, dx = \frac{2}{(2m+1)b} v^m \sqrt{u} - \frac{2m\Delta}{(2m+1)b} \int \frac{v^{m-1}}{\sqrt{u}}\, dx$$

$$7)\quad \int \frac{1}{v^m \sqrt{u}}\, dx = -\frac{1}{(m-1)\Delta} \frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}} - \frac{(2m-3)b}{2(m-1)\Delta} \int \frac{1}{v^{m-1}\sqrt{u}}\, dx.$$

§. 84.

Sei $a + bx + cx^2 = \omega$.

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \log \frac{b + 2cx + 2\sqrt{c\omega}}{b + 2cx - 2\sqrt{c\omega}}$$

für $c > 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{-(b+2cx)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

für $c < 0$

$$1)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$2)\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{\omega} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$3)\quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left(\frac{x^2}{3c} - \frac{5bx}{12c^2} + \frac{5b^2}{8c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)\sqrt{\omega} - \left(\frac{5b^3}{16c^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$4)\quad \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left\{\frac{x^3}{4c} - \frac{7bx^2}{24c^2} + x\left[\frac{35b^2}{96c^3} - \frac{3a}{8c^2}\right]x - \frac{35b^3}{64c^4} + \frac{55ab}{48c^3}\right\}\sqrt{\omega} + \left(\frac{35b^4}{128c^4} - \frac{15ab^2}{16c^3} + \frac{3a^2}{8c^2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

5) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^4\sqrt{\omega}}{5c} - \frac{4a}{5c}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{9b}{10c}\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{\omega}}$$

6) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{2a+bx+2\sqrt{a}\sqrt{\omega}}{x},\ a>1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\, arc\,tgn\, \frac{2a+bx}{2\sqrt{-a}.\sqrt{\omega}},\ a<1$$

7) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{ax} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{4a^2x}\right)\sqrt{\omega} + \left(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

9) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left\{-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{12a^2x^2} - \left[\frac{5b^2}{8a^3} - \frac{2c}{3a^2}\right]\frac{1}{x}\right\}\sqrt{\omega} - \left(\frac{5b^3}{16a^3} - \frac{3bc}{4a^2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

10) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left\{-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{24a^2x^3} - \left(\frac{35b^2}{96a^3} - \frac{3c}{8a^2}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{35b^3}{64a^4} - \frac{55bc}{48a^3}\right)\frac{1}{x}\right\}\sqrt{\omega} + \left(\frac{35b^4}{128a^4} - \frac{15b^2c}{16a^3} + \frac{3c^2}{8a^2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}.$$

Sei $4ac - b^2 = \varkappa$.

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \frac{2(2cx+b)}{\varkappa\sqrt{\omega}}$$

12) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = -\frac{2(2a+bx)}{\varkappa\sqrt{\omega}}$$

13) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = -\frac{(4ac-2b^2)x-2ab}{c\varkappa\sqrt{\omega}} + \frac{1}{c}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$14)\quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \frac{x^2}{c\sqrt{\omega}} - \frac{2a}{c}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega^3}} - \frac{3b}{2c}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$15)\quad \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left(\frac{x^3}{2c} - \frac{5bx^2}{4c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{5ab}{2c^2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega^3}}$$
$$+ \left(\frac{15b^2}{8c^2} - \frac{3a}{2c}\right)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$16)\quad \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left\{\frac{x^4}{3c} - \frac{7bx^3}{12c^2} + \left(\frac{35b^2}{24c^3} - \frac{4a}{3c^2}\right)x\right\}\cdot$$
$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \left(\frac{15ab^2}{12c^3} - \frac{8a^2}{3c^2}\right)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega^3}} - \left(\frac{35b^3}{16c^3} - \frac{15ab}{4c^2}\right)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$17)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \frac{1}{a\sqrt{\omega}} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$18)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{3b}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$
$$+ \left(\frac{3b^2}{4a^2} - \frac{2c}{a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}} - \frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$19)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{4a^2x}\right.$$
$$\left. + \frac{15b^2}{8a^3} - \frac{3c}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \left(\frac{15b^3}{16a^3} - \frac{13bc}{4a^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$
$$+ \left(\frac{15b^2}{8a^3} - \frac{3c}{2a^2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$20)\quad \int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{7b}{12a^2x^2}\right.$$
$$- \left\{\frac{35b^2}{24a^3} - \frac{4c}{3a^2}\right\}\frac{1}{x} - \left(\frac{35b^3}{16a^4} - \frac{15bc}{4a^3}\right)\int\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$
$$+ \left(\frac{35b^4}{32a^4} - \frac{115b^2c}{24a^3} + \frac{8c^2}{3a^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$
$$- \left(\frac{35b^3}{16a^4} - \frac{15bc}{4a^3}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$21)\quad \int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = -\frac{1}{4ax^4\sqrt{\omega}} - \frac{9b}{8a}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{\omega^3}}$$
$$- \frac{5c}{4a}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{\omega^3}}$$

$$22)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^{5}} = \left\{\frac{1}{3\varkappa\omega} + \frac{8c}{3\varkappa^2}\right\} \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{\omega}}$$

$$23)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^{5}} = -\frac{1}{3c\omega\sqrt{\omega}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$24)\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^{5}} = \left(-\frac{x}{2c} + \frac{b}{12c^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \left(\frac{b^2}{8c^2} + \frac{a}{2c}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$25)\quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^{5}} = \left(-\frac{x^2}{c} - \frac{bx}{4c^2} + \frac{b^2}{24c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \left(\frac{b^3}{16c^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$26)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}^{5}} = \left(\frac{1}{3a\omega} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$27)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}^{5}} = -\frac{1}{ax\omega\sqrt{\omega}} - \frac{5b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega^5}} - \frac{4c}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$28)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx+cx^2}^{5}} = \left\{-\frac{1}{2ax^2} + \frac{7b}{4a^2x}\right\}\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \left(\frac{35b^2}{8a^2} - \frac{5c}{2a}\right)\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega^5}} + \frac{7bc}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$29)\quad \int dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{(2cx+b)\sqrt{\omega}}{4c} + \frac{4ac-b^2}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$30)\quad \int x\,dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{3c} - \frac{b}{2c}\int dx\sqrt{\omega}$$

$$31)\quad \int x^2\,dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \left(\frac{x}{4c} - \frac{5b}{24c^2}\right)\omega\sqrt{\omega} + \left(\frac{5b^2}{16c^2} - \frac{a}{4c}\right)\int dx\sqrt{\omega}$$

32) $$\int x^3 dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \left(\frac{x^2}{5c} - \frac{7bx}{40c^2} + \frac{7b^2}{48c^3} - \frac{2a}{15c^2}\right)\omega\sqrt{\omega} - \left(\frac{7b^3}{32c^3} - \frac{3ab}{8c^2}\right)\int dx\sqrt{\omega}$$

33) $$\int x^4 dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \left\{\frac{x^3}{6c} - \frac{3bx^2}{20c^2} + \left(\frac{21b^2}{160c^3} - \frac{a}{8c^2}\right)x - \frac{7b^3}{64c^4} + \frac{49ab}{240c^3}\right\}\omega\sqrt{\omega} + \left(\frac{21b^4}{128c^4} - \frac{7ab^2}{16c^3} + \frac{a^2}{8c^2}\right)\int dx\sqrt{\omega}$$

34) $$\int x^5 dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{x^4\omega\sqrt{\omega}}{7c} - \frac{4a}{7c}\int x^3 dx\sqrt{\omega} - \frac{11b}{14c}\int x^4 dx\sqrt{\omega}$$

35) $$\int\frac{dx}{x}\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{\omega} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

36) $$\int\frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx+cx^2} = -\frac{\sqrt{\omega}}{x} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} + c\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

37) $$\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx+cx^2} = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{4ax}\right)\sqrt{\omega} - \left(\frac{b^2}{8a} - \frac{c}{2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

38) $$\int\frac{dx}{x^4}\sqrt{a+bx+cx^2} = -\frac{\omega\sqrt{\omega}}{3ax^3} + \left(\frac{b}{4ax^2} + \frac{b^2}{8a^2x}\right)\sqrt{\omega} + \left(\frac{b^3}{16a^2} - \frac{bc}{4a}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

39) $$\int\frac{dx}{x^5}\sqrt{a+bx+cx^2} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{24a^2x^3}\right)\omega\sqrt{\omega} - \left\{\left(\frac{5b^2}{32a^2} - \frac{c}{8a}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{5b^3}{64a^3} - \frac{bc}{16a^2}\right)\frac{1}{x}\right\}\sqrt{\omega} - \left\{\frac{5b^4}{128a^3} - \frac{3b^2c}{16a^2} + \frac{c^2}{8a}\right\}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

40) $$\int dx\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,3} = \left(\frac{\omega}{8c} + \frac{3\varkappa}{64c^2}\right)(2cx+b)\sqrt{\omega} + \frac{3\varkappa^2}{128c^2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

41) $\int x\,dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{5c} - \frac{b}{2c}\int dx\sqrt{\omega^3}$

42) $\int x^2dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(\frac{x}{6c} - \frac{7b}{60c^2}\right)\omega^2\sqrt{\omega}$
$+ \left(\frac{7b^2}{24c^2} - \frac{a}{6c}\right)\int dx\sqrt{\omega^3}$

43) $\int x^3dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(\frac{x^2}{7c} - \frac{3bx}{28c^2} + \frac{3b^2}{40c^3}\right.$
$\left. - \frac{2a}{35c^2}\right)\omega^2\sqrt{\omega} - \left(\frac{3b^3}{16c^3} - \frac{ab}{4c^2}\right)\int dx\sqrt{\omega^3}$

44) $\int x^4dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left\{\frac{x^3}{8c} - \frac{11bx^2}{112c^2} + \left(\frac{33b^2}{448c^3}\right.\right.$
$\left.\left. - \frac{a}{16c^2}\right)x - \frac{33b^3}{640c^4} + \frac{93ab}{1120c^3}\right\}\omega^2\sqrt{\omega}$
$+ \left\{\frac{33b^4}{256c^4} - \frac{9ab^2}{32c^3} + \frac{a^2}{16c^2}\right\}\int dx\sqrt{\omega^3}$

45) $\int x^5dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \frac{x^4\omega^2\sqrt{\omega}}{9c} - \frac{4a}{9c}\int x^3dx\sqrt{\omega^3}$
$- \frac{13b}{18c}\int x^4dx\sqrt{\omega^3}$

46) $\int \frac{dx}{x}\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(\frac{\omega}{3} + a\right)\sqrt{\omega} + a^2\int\frac{dx}{\omega\sqrt{\omega}}$
$+ \frac{ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{b}{2}\int dx\sqrt{\omega}$

47) $\int \frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = -\frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3}$
$+ \frac{4c}{a}\int dx\sqrt{\omega^3}$

48) $\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{4a^2x}\right)\omega^2\sqrt{\omega}$
$+ \left(\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{3c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3} + \frac{bc}{a^2}\int dx\sqrt{\omega^3}$

49) $$\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{a + bx + cx^2}^3 = \left\{- \frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{b}{12\,a^2 x^2} + \left(\frac{b^2}{24\,a^3} - \frac{2\,c}{3\,a^2}\right)\frac{1}{x}\right\} \omega^2 \sqrt{\omega} - \left(\frac{b^3}{16\,a^3} - \frac{3\,b\,c}{4\,a^2}\right) \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3} - \left(\frac{b^2\,c}{6\,a^3} - \frac{8\,c^2}{3\,a^2}\right) \int dx \sqrt{\omega^3}$$

50) $$\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{a + bx + cx^2}^3 = \left\{- \frac{1}{4\,a\,x^4} + \frac{b}{8\,a^2 x^3} - \left(\frac{b^2}{32\,a^3} + \frac{c}{8\,a^2}\right)\frac{1}{x^2} - \left(\frac{b^3}{64\,a^4} - \frac{3\,b\,c}{16\,a^3}\right)\frac{1}{x}\right\} \omega^2 \sqrt{\omega} + \left(\frac{3\,b^4}{128\,a^4} - \frac{3\,b^2\,c}{16\,a^3} + \frac{3\,c^2}{8\,a^2}\right) \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3} + \left(\frac{b^3\,c}{16\,a^4} - \frac{3\,b\,c^2}{4\,a^3}\right) \int dx \sqrt{\omega^3}$$

51) $$\int dx \sqrt{a + bx + cx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{12\,c} + \frac{5\,\varkappa\,\omega}{192\,c^2} + \frac{5\,\varkappa^2}{512\,c^3}\right) (2\,c\,x + b)\sqrt{\omega} + \frac{5\,\varkappa^3}{1024\,c^3} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

52) $$\int x\,dx \sqrt{a + bx + cx^2}^5 = \frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{7\,c} - \frac{b}{2\,c} \int dx \sqrt{\omega^5}$$

53) $$\int x^2\,dx \sqrt{a + bx + cx^2}^5 = \left(\frac{x}{8\,c} - \frac{9\,b}{112\,c^2}\right) \omega^3 \sqrt{\omega} + \left(\frac{9\,b^2}{32\,c^2} - \frac{a}{8\,c}\right) \int dx \sqrt{\omega^5}$$

54) $$\int x^3\,dx \sqrt{a + bx + cx^2}^5 = \left(\frac{x^2}{9\,c} - \frac{11\,b\,x}{144\,c^2} + \frac{11\,b^2}{224\,c^3} - \frac{2\,a}{63\,c^2}\right) \omega^3 \sqrt{\omega} - \left(\frac{11\,b^3}{64\,c^3} - \frac{3\,a\,b}{16\,c^2}\right) \int dx \sqrt{\omega^5}$$

55) $$\int \frac{dx}{x} \sqrt{a + bx + cx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{5} + \frac{a\,\omega}{3} + a^2\right) \sqrt{\omega} + a^3 \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}} + \frac{a^2 b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{a\,b}{2} \int dx \sqrt{\omega} + \frac{b}{2} \int dx \sqrt{\omega^3}$$

$$56)\quad \int \frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = -\frac{\omega^3\sqrt{\omega}}{ax} + \frac{5b}{2a}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^5} + \frac{6c}{a}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

$$57)\quad \int \frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{4a^2x}\right)\omega^3\sqrt{\omega} + \left(\frac{15b^2}{8a^2} + \frac{5c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^5} + \frac{9bc}{2a^2}\int dx\sqrt{\omega^5}.$$

§. 85.

Sei $u = a + bx + cx^2$, $v = \alpha + \beta x$,

$A = a\beta^2 - b\beta\alpha + c\alpha^2$, $B = b\beta - 2c\alpha$.

$$1)\quad \int \frac{u^n}{v^m\sqrt{u}}\,dx = -\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{u^n}{v^{m-1}}\sqrt{u} - \frac{(2m-2n-3)B}{2(m-1)A}\int\frac{u^n}{v^{m-1}\sqrt{u}}\,dx - \frac{(m-2n-2)c}{(m-1)A}\int\frac{u^n}{v^{m-2}\sqrt{u}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{(m-2n)\beta}\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\sqrt{u} - \frac{(2n-1)A}{(m-2n)\beta^2}\int\frac{u^{n-1}}{v^m\sqrt{u}}\,dx - \frac{(2n-1)B}{2(m-2n)\beta^2}\int\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}\sqrt{u}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{(m-1)\beta}\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\sqrt{u} + \frac{(2n-1)B}{2(m-1)\beta^2}\int\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}\sqrt{u}}\,dx + \frac{(2n-1)c}{(m-1)\beta^2}\int\frac{u^{n-1}}{v^{m-2}\sqrt{u}}\,dx$$

2) $$\int \frac{dx}{v^m u^n \sqrt{u}} = -\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}u^n} - \frac{(2m+2n-3)B}{2(m-1)A}\cdot \int \frac{dx}{v^{m-1}u^n\sqrt{u}} - \frac{(m+2n-2)c}{(m-1)A}\cdot \int \frac{dx}{v^{m-2}u^n\sqrt{u}}$$

$$= \frac{\beta}{(2n-1)A}\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}u^n} - \frac{B}{2A}\int\frac{dx}{v^{m-1}u^n\sqrt{u}} + \frac{(m+2n-2)\beta^2}{(2n-1)A}\int\frac{dx}{v^m u^{n-1}\sqrt{u}}$$

Ist $A = 0$, so wird

3) $$\int \frac{dx}{v^m u^n\sqrt{u}} = -\frac{2\beta}{(2m+2n-1)B}\frac{\sqrt{u}}{v^m u^n} - \frac{2(m+2n-1)c}{(2m+2n-1)B}\int\frac{dx}{v^{m-1}u^n\sqrt{u}}$$

4) $$\int v^m\sqrt{u}\,dx = \frac{\beta}{(m+2)c}v^{m-1}u\sqrt{u} - \frac{(2m+1)B}{2(m+2)c}\cdot \int v^{m-1}\sqrt{u}\,dx - \frac{(m-1)A}{(m+2)c}\int v^{m-2}\sqrt{u}\,dx$$

5) $$\int \frac{\sqrt{u}}{v^m}dx = -\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{u\sqrt{u}}{v^{m-1}} - \frac{(2m-5)B}{2(m-1)A}\int\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}}dx - \frac{(m-4)c}{(m-1)A}\int\frac{\sqrt{u}}{v^{m-2}}dx$$

6) $$\int\frac{v^m}{\sqrt{u}}dx = \frac{\beta}{mc}v^{m-1}\sqrt{u} - \frac{(2m-1)B}{2mc}\int\frac{v^{m-1}}{\sqrt{u}}dx - \frac{(m-1)A}{mc}\int\frac{v^{m-2}}{\sqrt{u}}dx$$

7) $$\int\frac{dx}{v^m\sqrt{u}} = -\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}} - \frac{(2m-3)B}{2(m-1)A}\int\frac{dx}{v^{m-1}\sqrt{u}} - \frac{(m-2)c}{(m-1)A}\int\frac{dx}{v^{m-2}\sqrt{u}}$$

Ist $A = 0$, so wird:

8) $$\int\frac{dx}{v^m\sqrt{u}} = -\frac{2\beta}{(2m-1)B}\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}} - \frac{2(m-1)c}{(2m-1)B}\int\frac{dx}{v^{m-1}\sqrt{u}}$$

§. 86.

Integrale von der Form

$$\int \frac{dx}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots)\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

1) $$J = \int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

$$m^2 = a - 2bp + cp^2, \quad n = 2bp - a - cp^2,$$

I. $$a + cp^2 > 2bp, \quad J = -\frac{1}{m} \log \left\{ \frac{\sqrt{a + 2bx + cx^2} + m}{x+p} + \frac{b - cp}{m} \right\}$$

II. $$a + cp^2 < 2bp, \quad J = \frac{1}{m} \arcsin \frac{(b - cp)(x+p) + m^2}{(x+p)\sqrt{b^2 - ac}}$$

III. $$a + cp^2 = 2bp, \quad J = -\frac{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{(b - cp)(x+p)}$$

2) $$\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \log \left\{ \frac{1 + px + \sqrt{1-p^2}\sqrt{1-x^2}}{x+p} \right\}, p^2 < 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \arcsin \frac{1+x}{x+p}, \quad p^2 > 1$$

3) $$\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \arccos \frac{1+px}{x+p}, \quad p^2 < 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \log \frac{1 + px + \sqrt{p^2-1}\sqrt{x^2-1}}{x+p}, \; p^2 > 1$$

4) $$\int \frac{dx}{(x \pm p)\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \log \frac{x \pm p - \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+p^2}}{x \pm p - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+p^2}}$$

5) $$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \log\left\{\frac{1-px+\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-x^2}}{x-p}\right\}, \; p^2 < 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \arcsin \frac{1-px}{x-p}, \quad p^2 > 1$$

6) $$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \arccos \frac{1-px}{x-p}, \quad p^2 < 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \log \frac{1-px+\sqrt{p^2-1}\sqrt{x^2-1}}{x-p}, \; p^2 > 1$$

7) $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

8) $$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

9) $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

10) $$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

11) $$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1-x-\sqrt{2(1+x^2)}}$$

12) $$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1+x-\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x+\sqrt{2(1+x^2)}}$$

Um das Integral

13) $$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots)\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

zu bestimmen, zerlege man

$$\frac{1}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots}$$

in Partialbrüche und bediene sich der vorhergehenden oder der nachfolgenden Integrale.

14) Sei $\sqrt{a - cp^2 - 2bpi} = \alpha + \beta i$

$$\frac{b - cpi}{\sqrt{a - cp^2 - 2bpi}} = \gamma + \delta i \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\frac{x\sqrt{a + 2bx + cx^2} + \alpha x + \beta p}{x^2 + p^2} + \gamma = \varrho \cos\varphi$$

$$\frac{-p\sqrt{a + 2bx + cx^2} - \alpha p + \beta x}{x^2 + p^2} + \delta = \varrho \sin\varphi,$$

so wird

$$\int \frac{dx}{(x+pi)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{-\alpha+\beta i}{\alpha^2+\beta^2} \log\{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}$$

15) $$\int \frac{dx}{(x^2 + p^2)\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

$$= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)p}\{\alpha\varphi - \beta\log\varrho\}, \quad p^2 < 1$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\{\beta\varphi + \alpha\log\varrho\}, \quad p^2 > 1$$

16) $$\int \frac{dx}{(x^2 - p^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{1 - p^2}} \log \frac{p\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - p^2}}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad p^2 < 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \arcsin \frac{2px\sqrt{p^2 - 1}\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad p^2 > 1$$

17) $$\int \frac{dx}{(x^2 - p^2)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{1 - p^2}} \arccos \frac{x^2(1 - p^2) - p^2(x^2 - 1)}{(1 - p^2) + (x^2 - 1)}, \quad p^2 < 1$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{p^2 - 1}} \log \frac{x\sqrt{x^2 - 1} - p\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad p^2 > 1$$

18) $$\int \frac{dx}{(x^2 - p^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{1 + p^2}} \log \frac{(x - \sqrt{1 + x^2})^2 - (p - \sqrt{1 + p^2})^2}{(x - \sqrt{1 + x^2})^2 - (p + \sqrt{1 + p^2})^2}$$

19) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{p\sqrt{1+p^2}}\, arctgn\, \frac{p\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1+p^2}}$$

20) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-1}}$$
$$= -\frac{1}{p\sqrt{1+p^2}}\, log\, \frac{x\sqrt{p^2+1}-p\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{p^2+x^2}}$$

21) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{1}{p\sqrt{1-p^2}}\, arctgn\, \frac{p\sqrt{1-p^2}}{p^2+x^2-x\sqrt{1+x^2}}, \quad p^2<1$$
$$= -\frac{1}{2p\sqrt{p^2-1}}\, log\, \frac{\{x-\sqrt{1+x^2}\}^2+\{p-\sqrt{p^2-1}\}^2}{\{x-\sqrt{1+x^2}\}^2+\{p+\sqrt{p^2-1}\}^2}, \; p^2>1$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}}\, log\, \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+p^2}-\sqrt{1-x^2}}$$

23) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\, arctgn\, \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1+p^2}}$$

24) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

25) $$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

26) $$\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

27) $$\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

28) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, log\, \frac{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

§. 87.

Trigonometrische Integrale.

1) $\int FR(\sin x, \cos x)\, dx.$

Setze $tgn\,\frac{x}{2} = z$, also $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},\quad tgn\,x = \frac{2z}{1-z^2},\quad cotg\,x = \frac{1-z^2}{2z}.$$

2) $\int \frac{\sin x\, FR(\sin^2 x)}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 x}}\, dx,\ (\sin^2 x = z) = \int \frac{FR(z)\, dz}{2\sqrt{(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}$

Dieselbe Substitution giebt:

3) $\int \frac{\cos x\, FR(\cos^2 x)}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 x}}\, dx = \int \frac{FR(1-z)\, dz}{2\sqrt{z\,(1-\varkappa^2 z)}}$

4) $\int \frac{tgn\,x\, FR(tgn^2 x)}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 x}}\, dx = \int \frac{FR\left(\frac{z}{1-z}\right) dz}{2(1-z)\sqrt{1-\varkappa^2 z}}$

5) Sei $a < b$ und $a = b\cos\alpha$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{b\sin\alpha}\, \log \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + x)}$$

$$\int \frac{dx}{a-b\cos x} = \frac{1}{b\sin\alpha}\, \log \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + x)}$$

Sei $b < a$, $b = a\cos\beta$,

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a\sin\beta}\, arctg\, \{tgn\,\tfrac{1}{2}\beta\, tgn\,\tfrac{1}{2}x\}$$

$$\int \frac{dx}{a-b\cos x} = \frac{2}{a\sin\beta}\, arctg\, \{cotg\,\tfrac{1}{2}\beta\, tgn\,\tfrac{1}{2}x\}$$

6) $\int \frac{\cos x\, dx}{a \pm b\cos x} = \pm\frac{x}{b} \mp \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a \pm b\cos x}$

7) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = tgn\,\frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\,cotgn\,\frac{x}{2}$$

8) Ist $a > b$ und $b = a \sin\alpha$, so wird

$$\int \frac{dx}{a \pm b \sin x} = \pm \frac{2}{\cos\alpha} \operatorname{arctgn} \left\{ \operatorname{tgn}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \operatorname{tgn}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right\}$$

Ist $b > a$, $a = b \sin\alpha$, so wird

$$\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{\cos\alpha} \log \frac{\sin\frac{1}{2}(x + \alpha)}{\cos\frac{1}{2}(x - \alpha)}$$

$$\int \frac{dx}{a - b\sin x} = -\frac{1}{\cos\alpha} \log \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + x)}$$

9) Sei $a < b$, $b\cos\alpha = a$,

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x} = \frac{1}{2ab\sin\alpha} \log \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(\alpha + x)}.$$

$$b < a, \quad b = a\cos\beta,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x} = \frac{1}{a^2\sin\beta} \operatorname{arctgn} \frac{\operatorname{tgn} x}{\sin\beta}$$

10) $$\int \frac{\alpha + \beta\cos x}{(a + b\cos x)^2}\, dx = \frac{a\beta - b\alpha}{a^2 - b^2} \frac{\sin x}{a + b\cos x} + \frac{a\alpha - b\beta}{a^2 - b^2} \int \frac{dx}{a + b\cos x}$$

11) $$(n-1)(1-c^2)\int \frac{dx}{(1 + c\cos x)^n} = -\frac{c\sin x}{(1 + c\cos x)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(1 + c\cos x)^{n-1}} - (n-2)\int \frac{dx}{(1 + c\cos x)^{n-2}}$$

12) $$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \operatorname{tgn}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

13) $$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{a + b\cos^2 x} = \frac{\sqrt{a + b}}{b\sqrt{a}} \operatorname{arctgn} \frac{\sqrt{a}\operatorname{tgn} x}{\sqrt{a + b}} - \frac{x}{b}$$

14) $$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\, dx = x \operatorname{tgn}\frac{x}{2}$$

15) Ist $a^2 < b^2 + c^2$, so ist:

$$J = \int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \cdot \log \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} - c + (b - a)\operatorname{tgn}\frac{x}{2}}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} + c - (b - a)\operatorname{tgn}\frac{x}{2}}$$

Ist $a^2 = b^2 + c^2$,

$$J = \frac{1}{c + (a - b)\, tgn\, \frac{x}{2}}$$

Ist $a^2 > b^2 + c^2$,

$$J = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\, arc\, tgn\, \frac{c + (a - b)\, tgn\, \frac{x}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$$

Ist $a = b$,

$$J = \frac{1}{c}\, log\left(a + c\, tgn\, \frac{x}{2}\right)$$

16) $$\int \frac{(cos\, x + a)\, d\, x}{sin\, x + b\, cos\, x + c} = cos\, \varphi\, \{y + cotg\, \varphi\,.\, log\, [sin\, y + c\, cos\, \varphi]\} + \left(\frac{a}{sin\, \varphi} - c\, cos\, \varphi\right) \int \frac{d\, y}{sin\, y + c\, cos\, \varphi},$$

wenn

$$b = tgn\, \varphi \quad \text{und} \quad x + \varphi = y$$

gesetzt wird.

17) $$\int \frac{d\, x}{(a + b\, cos\, x)^n} = \frac{A\, sin\, x}{(a + b\, cos\, x)^{n-1}} + \int \frac{B + C\, cos\, x}{(a + b\, cos\, x)^{n-1}}\, d\, x$$

$$A = \frac{1}{n - 1}\, \frac{b}{b^2 - a^2},\quad B = \frac{a}{a^2 - b^2}.\quad C = \frac{n - 2}{n - 1}\, \frac{b}{b^2 - a^2}$$

18) Sei $1 + \sqrt{-1}\, tgn\, n\, x = u^n$, so wird:

$$\int \frac{(cos\, x + \sqrt{-1}\, sin\, x)}{\sqrt[n]{cos\, n\, x}}\, d\, x = -\sqrt{-1} \int \frac{d\, u}{2 - u^n}$$

19) Sei $cos\, x + \sqrt{-1}\, sin\, x = z$, so wird:

$$\int \frac{cos\, p\, x + \sqrt{-1}\, sin\, p\, x}{cos\, n\, x}\, d\, x = \frac{2}{\sqrt{-1}} \int \frac{z^{p+n}\, d\, z}{z\, (1 + z^{2n})}$$

20) Sei $cos\, x + \sqrt{-1}\, sin\, x = z$, so wird

$$\int \frac{cos\, p\, x + \sqrt{-1}\, sin\, p\, x}{sin\, n\, x}\, d\, x = \int \frac{z^{p+n-1}\, d\, z}{1 - z^{2n}}$$

21) Sei

$$A = \frac{a\, \alpha - b\, \beta}{a^2 - b^2},\quad B = \frac{n - 2}{n - 1} \cdot \frac{a\, \beta - \alpha\, b}{a^2 - b^2},\quad C = \frac{1}{n - 1} \cdot \frac{a\, \beta - b\, \alpha}{a^2 - b^2}$$

so wird:

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{(a + b \cos x)^n} d x = \frac{C \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + \int \frac{A + B \cos x}{(a + b \cos x)^{n-1}} d x$$

22) Sei

$$A = \frac{\beta}{n+1}, \; B = a \alpha + \frac{n}{n+1} b \beta, \; C = b \alpha + \frac{n}{n+1} a \beta,$$

so wird

$$\int (a + b \cos x)^n (\alpha + \beta \cos x) \, d x = A \sin x (a + b \cos x)^n$$
$$+ \int (A + B \cos x)(a + b \cos x)^{n-1} d x$$

23) $$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\sin x (a + b \cos x)} d x = \frac{b \alpha - a \beta}{a^2 - b^2} \log (a + b \cos x)$$
$$- \frac{\alpha - \beta}{a - b} \log \cos \frac{x}{2} + \frac{\alpha + \beta}{a + b} \log \sin \frac{x}{2}$$

24) $$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\cos x (a + b \cos x)} d x = \frac{\alpha}{a} \log tgn \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$
$$+ \frac{a \beta - b \alpha}{a} \int \frac{d x}{a + b \cos \alpha}.$$

25) Das Integral

$$\int \frac{d x}{(a + b \cos x + c \sin x)^n}$$

geht durch die Substitution $b = r \cos \alpha$, $c = r \sin \alpha$ in

$$\int \frac{d x}{[a + r \cos (x - \alpha)]^n}$$

über.

§. 88.

Sinus-Integrale.

1) $$\int \sin (p x + q) d x = - \frac{1}{p} \cos (p x + q)$$

2) $$\int \sin^{2n} x \, d x = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_0^{n-1} {}^{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \binom{2n}{\varkappa} \frac{\sin (2n - 2\varkappa) x}{2n - 2\varkappa}$$

3) $$\int sin^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}(-1)^{n+1}\sum_0^n{}^{\varkappa}(-1)^{\varkappa}\binom{2n+1}{\varkappa}\frac{cos(2n+1-2\varkappa)x}{2n+1-2\varkappa}$$

In den letzten beiden Formeln ist n positiv und ganz.

4) $$\int f(sin\,x)\,dx = \int\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}},$$ wenn $z = sin\,x$ gesetzt wird.

5) $$\int sin^n x\,dx = -\frac{sin^{n-1}x\,cos\,x}{n} + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2}x\,dx$$

6) $$\int\frac{dx}{sin^n x} = -\frac{cos\,x}{(n-1)\,sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{sin^{n-2}x}$$

7) $$\int\frac{sin\,m\,x}{sin^n x}\,dx = 2\int\frac{cos(m-1)x}{sin^{n-1}x}\,dx + \int\frac{sin(m-2)x}{sin^n x}\,dx$$

8) $$\int x^n\,sin\,x\,dx = -x^n\,cos\,x + n\int x^{n-1}\,cos\,x\,dx$$
$$= -x^n\,cos\,x + n\,x^{n-1}\,sin\,x - n(n-1)\int x^{n-2}\,sin\,x\,dx$$

9) $$\int\frac{sin\,x\,dx}{x^n} = -\frac{sin\,x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{cos\,x}{x^{n-1}}\,dx$$
$$= -\frac{sin\,x}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{cos\,x}{(n-1)(n-2)\,x^{n-2}}$$
$$-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int\frac{sin\,x}{x^{n-2}}\,dx$$

10) $$\int\frac{x\,dx}{sin^n x} = -\frac{sin\,x + (n-2)\,x\,cos\,x}{(n-2)(n-1)\,sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{x\,dx}{sin^{n-2}x}$$

11) $$n^2\int x^m\,sin^n x\,dx = x^{m-1}\,sin^{n-1}x\,\{m\,sin\,x - n\,x\,cos\,x\}$$
$$+ n(n-1)\int x^m\,sin^{n-2}x\,dx - m(m-1)\int x^{m-2}\,sin^n x\,dx$$

12) $$(n-1)(n-2)\int\frac{x^m}{sin^n x}\,dx = -\frac{x^{m-1}}{sin^{n-1}x}\{m\,sin\,x$$
$$+(n-x)\,x\,cos\,x\} + (n-2)^2\int\frac{x^m}{sin^{n-2}x} + m(m-1)\int\frac{x^{m-2}}{sin^{n-2}x}\,dx$$

13) $$\int\frac{sin^n x}{x^m}\,dx = -\frac{sin^{n-1}x}{x^{m-1}}\left\{\frac{(m-2)\,sin\,x + n\,x\,cos\,x}{(m-1)(m-2)}\right\}$$
$$-n^2\int\frac{sin^n x}{x^{m-2}}\,dx + n(n-1)\int\frac{sin^{n-2}x}{x^{m-2}}\,dx$$

14) $\int \sin p x \sin q x \, d x = \frac{\sin (p - q) x}{2 (p - q)} - \frac{\sin (p + q) x}{2 (p + q)}$

15) $\int \sin a x \sin b x \sin c x \, d x = - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\cos (a - b + c) x}{a - b + c} \right.$

$\left. + \frac{\cos (- a + b + c) x}{- a + b + c} + \frac{\cos (a + b - c) x}{a + b - c} - \frac{\cos (a + b + c) x}{a + b + c} \right\}$

16) $\int \sin^2 x \, d x = - \frac{1}{4} \sin 2 x + \frac{1}{2} x$

17) $\int \sin^3 x \, d x = \frac{1}{12} \cos 3 x - \frac{3}{4} \cos x$

18) $\int \sin^4 x \, d x = \frac{1}{32} \sin 4 x - \frac{1}{4} \sin 2 x + \frac{3}{8} x$

19) $\int \sin^5 x \, d x = - \frac{1}{80} \cos 5 x + \frac{5}{48} \cos 3 x - \frac{5}{8} \cos x$

20) $\int \frac{d x}{\sin x} = \log tgn \frac{x}{2}$

21) $\int \frac{d x}{\sin^2 x} = - cotg \, x$

22) $\int \frac{d x}{\sin^3 x} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \log tgn \frac{x}{2}$

23) $\int \frac{d x}{\sin^4 x} = - \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3} cotg \, x$

24) $\int \frac{d x}{\sin^5 x} = - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8} \log tgn \frac{x}{2}$

25) $\int x \sin x \, d x = \sin x - x \cos x$

26) $\int x^2 \sin x \, d x = 2 x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$

27) $\int x^3 \sin x \, d x = (3 x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6 x) \cos x$

28) $\int x^4 \sin x \, d x = (4 x^3 - 24 x) \sin x - (x^4 - 12 x^2 + 24) \cos x$

29) $\int x^5 \sin x \, d x = (5 x^4 - 60 x^2 + 120) \sin x - (x^5 - 20 x^3$

$+ 120 x) \cos x$

30) $\int \frac{\sin x}{x} \, d x$ vide: Sinus-Integral.

13*

31) $\int \frac{\sin x}{x^2}\,dx = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x}{x}\,dx$

32) $\int \frac{\sin x}{x^3}\,dx = -\frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

33) $\int \frac{\sin x}{x^4}\,dx = -\frac{\sin x}{3x^3} - \frac{\cos x}{6x^2} + \frac{\sin x}{6x} - \frac{1}{6}\int \frac{\cos x}{x}\,dx$

34) $\int \frac{\sin x}{x^5}\,dx = -\frac{\sin x}{4x^4} - \frac{\cos x}{12x^3} + \frac{\sin x}{24x^2} + \frac{\cos x}{24x}$
$+ \frac{1}{24}\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

35) $\int \frac{x}{\sin x}\,dx$. Nur durch Reihen darstellbar.

36) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = x \operatorname{cotg} x + \log \sin x$

37) $\int \frac{x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\sin x + x\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sin x}\,dx$

38) $\int \frac{x}{\sin^4 x}\,dx = -\frac{\sin x + 2x\cos x}{6\sin^3 x} - \frac{2}{3}\left\{x \operatorname{cotg} x - \log \sin x\right\}$

39) $\int \frac{x}{\sin^5 x}\,dx = -\frac{\sin x + 3x\cos x}{12\sin^4 x} - \frac{3(\sin x + x\cos x)}{8\sin^2 x}$
$+ \frac{3}{8}\int \frac{x\,dx}{\sin x}$

Siehe auch „Sinus-Cosinus-Integrale“.

§. 89.

Cosinus-Integrale.

1) $\int \cos(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\sin(px+q)$

2) $\int \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}{}^{\varkappa}\binom{2n}{\varkappa}\frac{\sin(2n-2\varkappa)x}{2n-2\varkappa}$

3) $$\int cos^{2n+1} x\, d x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_0^n{}^{\varkappa} \binom{2n+1}{\varkappa} \frac{sin(2n+1-2\varkappa)x}{2n+1-2\varkappa}$$

In den beiden letzten Formeln ist n positiv und ganz.

4) $$\int f(cos\, x)\, d x = -\int \frac{f(x_1)\, d x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}, \quad cos\, x = x_1$$

5) $$\int cos^n x\, d x = \frac{sin\, x\, cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int cos^{n-2} x\, d x$$

6) $$\int \frac{d x}{cos^n x} = \frac{sin\, x}{(n-1)\, cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{d x}{cos^{n-2} x}$$

7) $$\int \frac{cos\, m x}{cos^n x}\, d x = \sum_0^{\overline{\gtrless} \frac{1}{2} m}{}^{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \frac{m}{m-\varkappa}\, 2^{m-2\varkappa-1} \binom{m-\varkappa}{\varkappa} \int cos^{m-2\varkappa-n} x\, d x$$

8) $$\int x^n cos\, x\, d x = x^n sin\, x - n \int x^{n-1} sin\, x\, d x$$
$$= x^n sin\, x + n x^{n-1} cos\, x - n(n-1) \int x^{n-2} cos\, x\, d x$$

9) $$\int \frac{cos\, x\, d x}{x^n} = -\frac{cos\, x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{sin\, x}{x^{n-1}}\, d x$$
$$= -\frac{cos\, x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{sin\, x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{cos\, x}{x^{n-2}}\, d x$$

10) $$\int \frac{x}{cos^n x}\, d x = \frac{(n-2)\, x\, sin\, x - cos\, x}{(n-2)(n-1)\, cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\, d x}{cos^{n-2} x}$$

11) $$n^2 \int x^m cos^n x\, d x = x^{m-1} cos^{n-1} x \{m\, cos\, x + n\, x\, sin\, x\}$$
$$+ n(n-1) \int x^m cos^{n-2} x\, d x - m(m-1) \int x^{m-2} cos^n x\, d x$$

12) $$(n-1)(n-2) \int \frac{x^m}{cos^n x}\, d x = -\frac{x^{m-1}}{cos^{n-1} x} \{m\, cos\, x$$
$$- (n-2)\, x\, sin\, x\} + (n-2)^2 \int \frac{x^m}{cos^{n-2} x}\, d x + m(m-1) \int \frac{x^{m-2}}{cos^{n-2} x}\, d x$$

$$13)\quad \int \frac{\cos^n x}{x^m}\,dx = -\frac{\cos^{n-1} x}{x^{m-1}}\,\frac{\{(m-2)\cos x - n\,x\cos x\}}{(m-1)(m-2)} - n^2 \int \frac{\cos^n x}{x^{m-2}}\,dx + n(n-1)\int \frac{\cos^{n-2} x}{x^{m-2}}\,dx$$

$$14)\quad \int \cos p x \cos q x\,dx = \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)}$$

$$15)\quad \int \cos a x \cos b x \cos c x\,dx = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} + \frac{\sin(-a+b+c)x}{-a+b+c} + \frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c} + \frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}\right\}$$

$$16)\quad \int \frac{\cos^m x}{\cos n x}\,dx = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}^{\varkappa}\,(-1)^{\varkappa}\left\{\cos\frac{(2\varkappa+1)}{2n}\pi\right\}^m \log\frac{\sin\left\{\frac{2\varkappa+1}{4n}\pi + \frac{x}{2}\right\}}{\sin\left\{\frac{2\varkappa+1}{4n}\pi - \frac{x}{2}\right\}}$$

$$17)\quad \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}$$

$$18)\quad \int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

$$19)\quad \int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$$

$$20)\quad \int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{80}\sin 5x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x$$

$$21)\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

$$22)\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgn\,x$$

$$23)\quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$24)\quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\,tgn\,x = tgn\,x + \frac{1}{3}\,tgn^3 x$$

$$25)\quad \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\,\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

26) $\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x$

27) $\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$

28) $\int x^3 \cos x \, dx = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6) \sin x$

29) $\int x^4 \cos x \, dx = (4x^3 - 24x) \cos x + (x^4 - 12x^2 + 24) \sin x$

30) $\int x^5 \cos x \, dx = (5x^4 - 60x^2 + 120) \cos x + (x^5 - 20x^3 + 120x) \sin x$

31) $\int \frac{\cos x}{x} dx =$ vide Cosinus-Integral.

32) $\int \frac{\cos x}{x^2} dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x} dx$

33) $\int \frac{\cos x}{x^3} dx = -\frac{\cos x}{2x^2} + \frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{x} dx$

34) $\int \frac{\cos x}{x^4} dx = -\frac{\cos x}{3x^3} + \frac{\sin x}{6x^2} + \frac{\cos x}{6x} + \frac{1}{6}\int \frac{\sin x}{x} dx$

35) $\int \frac{\cos x}{x^5} dx = -\frac{\cos x}{4x^4} + \frac{\sin x}{12x^3} + \frac{\cos x}{24x^2} - \frac{\sin x}{24x} + \frac{1}{24}\int \frac{\cos x}{x} dx$

36) $\int \frac{x\,dx}{\cos x}$. Nur durch Reihen darstellbar.

37) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tgn} x + \log \cos x$

38) $\int \frac{x}{\cos^3 x} dx = \frac{x \sin x - \cos x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{\cos x} dx$

39) $\int \frac{x}{\cos^4 x} dx = \frac{2x \sin x - \cos x}{6\cos^3 x} + \frac{2}{3}(x \operatorname{tgn} x + \log \cos x)$

40) $\int \frac{x}{\cos^5 x} dx = \frac{3x \sin x - \cos x}{12\cos^4 x} + \frac{3(x \sin x - \cos x)}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\int \frac{x\,dx}{\cos x}$.

Siehe auch: „Sinus-Cosinus-Integrale“.

§. 90.

Sinus-Cosinus-Integrale.

1) $$\int sin(px)\,cos(qx)\,dx = -\frac{cos(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{cos(p-q)x}{2(p-q)}$$

2) $$\int sin(ax)\,cos(bx)\,cos(cx)\,dx = -\frac{1}{4}\left\{\frac{cos(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{cos(-a+b+c)x}{-a+b+c} + \frac{cos(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{cos(a-b+c)}{a-b+c}\right\}$$

3) $$\int cos(ax)\,sin(bx)\,sin(cx)\,dx = \frac{1}{4}\left\{\frac{sin(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{sin(a-b+c)x}{a-b+c} - \frac{sin(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{sin(-a+b+c)x}{-a+b+c}\right\}$$

4) $$\int sin^m x\,cos^n x\,dx = -\frac{sin^{m-1}x\,cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\cdot\int sin^{m-2}x\,cos^{n+2}x\,dx$$

$$= -\frac{sin^{m-1}cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\cdot\int sin^{m-2}x\,cos^n x\,dx$$

$$= \frac{sin^{m+1}x\,cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\cdot\int sin^m x\,cos^{n-2}x\,dx$$

$$= \frac{sin^{m-1}x\,cos^{n-1}x}{m+n}\left\{sin^2 x - \frac{m-1}{m+n-2}\right\} + \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n)(m+n-2)}\int sin^{m-2}x\,cos^{n-2}x\,dx$$

5) $$\int \frac{dx}{sin^m x\,cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\,sin^{m-1}x\,cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{dx}{sin^{m-2}x\,cos^n x}$$

$$= \frac{1}{(n-1)\,sin^{m-1}x\,cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{dx}{sin^m x\,cos^{n-2}x}$$

6) $$\int \frac{sin^m x}{cos^n x}\, d x = -\frac{1}{m-n} \frac{sin^{m-1} x}{cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{sin^{m-2} x}{cos^n x}\, d x$$
$$= \frac{1}{n-1} \frac{sin^{m+1} x}{cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{sin^m x}{cos^{n-2} x}\, d x$$
$$= \frac{1}{n-1} \frac{sin^{m-1} x}{cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{sin^{m-2} x}{cos^{m-2} x}\, d x$$

7) $$\int \frac{cos^n x}{sin^m x}\, d x = -\frac{1}{m-n} \frac{cos^{n-1} x}{sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-n} \int \frac{cos^{n-2} x}{sin^m x}\, d x$$
$$= -\frac{1}{m-1} \frac{cos^{n+1} x}{sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{cos^n x}{sin^{m-2} x}\, d x$$
$$= -\frac{1}{m-1} \frac{cos^{n-1} x}{sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{cos^{n-2} x}{sin^{m-2} x}\, d x$$

8) $$\int \frac{cos\, n x}{sin^p x}\, d x = -2 \int \frac{sin\, \overline{n-1}\, x\, d x}{sin^{p-1} x} + \int \frac{cos\, \overline{n-2}\, x\, d x}{sin^p x}$$

9) $$\int \frac{sin\, n x}{cos^p x}\, d x = 2 \int \frac{sin\, \overline{n-1}\, x\, d x}{cos^{p-1} x} - \int \frac{sin\, \overline{n-2}\, x\, d x}{cos^p x}$$

10) $$\int \frac{cos^{2m} x}{sin\, 2 n x}\, d x = \frac{1}{2n} \sum_1^{n-1}{}_\varkappa (-1)^\varkappa \left(cos \frac{\varkappa \pi}{2n}\right)^{2m} log\left(1 - \frac{\left(sin \frac{\varkappa \pi}{n}\right)^2}{sin^2 x}\right)$$

11) $$\int \frac{cos^{2m+1} x}{sin\, 2 n x}\, d x = \frac{1}{2n} \sum_1^{n-1}{}_\varkappa (-1)^\varkappa \left(cos \frac{\varkappa \pi}{2n}\right)^{2m+1}$$
$$\left\{log\, tgn\left(\frac{x}{2} - \frac{\varkappa \pi}{4n}\right) + log\, tgn\left(\frac{x}{2} + \frac{\varkappa \pi}{4n}\right) - 2\, cos \frac{\varkappa \pi}{2n}\, log\, tgn \frac{x}{2}\right\}$$

12) $$\int \frac{cos^{2m} x}{sin(2n+1) x}\, d x = \frac{1}{2n+1} \sum_1^{n}{}_\varkappa (-1)^\varkappa \left(cos \frac{\varkappa \pi}{2n+1}\right)^{2m}$$
$$\left\{log\, tgn\left(\frac{x}{2} - \frac{\varkappa \pi}{4n+2}\right) + log\, tgn\left(\frac{x}{2} + \frac{\varkappa \pi}{4n+2}\right) - 2\, cos \frac{\varkappa \pi}{2n+1}\, log\, tgn \frac{x}{2}\right\}$$

13) $$\int \frac{cos^{2m+1} x}{sin(2n+1) x}\, d x = \frac{1}{2n+1} \sum_1^{n}{}_\varkappa (-1)^\varkappa \left(cos \frac{\varkappa \pi}{2n+1}\right)^{2m+1} log\left(1 - \frac{\left(sin \frac{\varkappa \pi}{2n+1}\right)^2}{sin^2 x}\right)$$

Setzt man in den letzten vier Formeln $\frac{\pi}{2} - x$ an die Stelle von x, so erhält man ganz analoge Ausdrücke, welche im Zähler die Potenz von $\sin x$ enthalten.

Dabei sind m und n positive und ganze Zahlen.

14) $$\int x^p \sin^m x \cos^n x \, dx = x^{p-1} \sin^m x \cos^{n-1} x \frac{p \cos x + (m+n) x \sin x}{(m+n)^2} + \frac{n-1}{m+n} \int x^p \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - \frac{mp}{(m+n)^2} \int x^{p-1} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \, dx - \frac{p(p-1)}{(m+n)^2} \int x^{p-2} \sin^m x \cos^n x \, dx$$

15) $$\int x^p \sin^m x \cos^n x \, dx = x^{p-1} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \frac{p \sin x - (m+n) x \cos x}{(m+n)^2} + \frac{m-1}{m+n} \int x^p \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx + \frac{np}{(m+n)^2} \int x^{p-1} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \, dx - \frac{p(p-1)}{m+n} \int x^{p-2} \sin^m x \cos^n x \, dx$$

16) $$\int \cos^m x \sin nx \, dx = -\frac{\cos^m x \cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n} \int \cos^{m-1} x \sin(n-1) x \, dx$$

17) $$\int \cos^m x \cos nx \, dx = \frac{\cos^m x \sin nx}{m+n} + \frac{m}{m+n} \int \cos^{m-1} x \cos(n-1) x \, dx$$

18) $$\int d\varphi \sin\varphi \cos^n\varphi = -\frac{1}{n+1} \cos^{n-1}\varphi$$

19) $$\int d\varphi \cos\varphi \sin^n\varphi = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1}\varphi$$

20) $$\int d\varphi \sin^2\varphi \cos\varphi = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\sin 3\varphi - \sin\varphi\right\}$$

21) $\int d\varphi \sin^2\varphi \cos^2\varphi = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4\varphi - \varphi\right)$

22) $\int d\varphi \sin^2\varphi \cos^3\varphi = -\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\sin 5\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - 2\sin\varphi\right)$

23) $\int d\varphi \sin^2\varphi \cos^4\varphi = -\frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi - 2\varphi\right)$

24) $\int d\varphi \sin^2\varphi \cos^5\varphi = -\frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\sin 7\varphi + \frac{3}{5}\sin 5\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - 5\sin\varphi\right)$

25) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos\varphi = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\cos 4\varphi - \cos 2\varphi\right)$

26) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos^2\varphi = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cos 5\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi - 2\cos\varphi\right)$

27) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos^3\varphi = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\cos 6\varphi - \frac{3}{2}\cos 2\varphi\right)$

28) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos^4\varphi = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\cos 7\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \cos 3\varphi - 3\cos\varphi\right)$

29) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos^5\varphi = \frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\cos 8\varphi + \frac{1}{3}\cos 6\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi - 3\cos 2\varphi\right)$

30) $\int d\varphi \sin^4\varphi \cos\varphi = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\sin 5\varphi - \sin 3\varphi + 2\sin\varphi\right)$

31) $\int d\varphi \sin^4\varphi \cos^2\varphi = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6\varphi - \frac{1}{2}\sin 4\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + 2\varphi\right)$

32) $\int d\varphi \sin^4\varphi \cos^3\varphi = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\sin 7\varphi - \frac{1}{5}\sin 5\varphi - \sin 3\varphi + 3\sin\varphi\right)$

33) $$\int d\varphi \sin^4\varphi \cos^4\varphi = \frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\sin 8\varphi - \sin 4\varphi + 3\varphi\right)$$

34) $$\int d\varphi \sin^4\varphi \cos^5\varphi = \frac{1}{256}\left(\frac{1}{9}\sin 9\varphi + \frac{1}{7}\sin 7\varphi - \frac{4}{5}\sin 5\varphi - \frac{4}{3}\sin 3\varphi + 6\sin\varphi\right)$$

35) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos\varphi = -\frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\cos 6\varphi - \cos 4\varphi + \frac{5}{2}\cos 2\varphi\right)$$

36) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos^2\varphi = -\frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\cos 7\varphi - \frac{3}{5}\cos 5\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + 5\cos\varphi\right)$$

37) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos^3\varphi = -\frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\cos 8\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi + 3\cos 2\varphi\right)$$

38) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos^4\varphi = -\frac{1}{256}\left(\frac{1}{9}\cos 9\varphi - \frac{1}{7}\cos 7\varphi - \frac{4}{5}\cos 5\varphi + \frac{4}{5}\cos 3\varphi + 6\cos\varphi\right)$$

39) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos^5\varphi = -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}\cos 10\varphi - \frac{5}{6}\cos 6\varphi + 5\cos 2\varphi\right)$$

40) $$\int d\varphi \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\log\cos\varphi$$

41) $$\int d\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = -\sin\varphi + \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

42) $$\int d\varphi \frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\sin^2\varphi}{2} - \log\cos\varphi$$

43) $$\int d\varphi \frac{\sin^4\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\sin^3\varphi}{3} - \sin\varphi + \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

44) $$\int d\varphi \frac{\sin^5\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\sin^4\varphi}{4} - \frac{\sin^2\varphi}{2} - \log\cos\varphi$$

45) $$\int d\varphi \, \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \log\sin\varphi$$

46) $$\int d\varphi \, \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} = \cos\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

47) $$\int d\varphi \, \frac{\cos^3\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{2} + \log\sin\varphi$$

48) $$\int d\varphi \, \frac{\cos^4\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos^3\varphi}{3} + \cos\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

49) $$\int d\varphi \, \frac{\cos^5\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos^4\varphi}{4} + \frac{\cos^2\varphi}{2} + \log\sin\varphi$$

50) $$\int d\varphi \, \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

51) $$\int d\varphi \, \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = tgn\,\varphi - \varphi$$

52) $$\int d\varphi \, \frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} = \cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}$$

53) $$\int d\varphi \, \frac{\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi} = \left(-\frac{1}{2}\sin^3\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi\right)\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{3}{2}\varphi$$

54) $$\int d\varphi \, \frac{\sin^5\varphi}{\cos^2\varphi} = \left(-\frac{1}{3}\sin^4\varphi - \frac{4}{3}\sin^2\varphi + \frac{8}{3}\right)\frac{1}{\cos\varphi}$$

55) $$\int d\varphi \, \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\sin\varphi}$$

56) $$\int d\varphi \, \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = -\,cotgn\,\varphi - \varphi$$

57) $$\int d\varphi \, \frac{\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi} = -\sin\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}$$

58) $$\int d\varphi \, \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} = \left(\frac{1}{2}\cos^3\varphi - \frac{3}{2}\cos\varphi\right)\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{3}{2}\varphi$$

59) $$\int d\varphi \, \frac{\cos^5\varphi}{\sin^2\varphi} = \left(\frac{1}{3}\cos^4\varphi + \frac{4}{3}\cos\varphi + \frac{8}{3}\right)\frac{1}{\sin\varphi}$$

60) $$\int d\varphi \, \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2\cos^2\varphi}$$

61) $$\int d\varphi \, \frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

62) $\int d\varphi \, \frac{sin^3 \varphi}{cos^3 \varphi} = \frac{1}{2\, cos^2 \varphi} + log\, cos\, \varphi$

63) $\int d\varphi \, \frac{sin^4 \varphi}{cos^3 \varphi} = \left(- sin^3 \varphi + \frac{3}{2} sin\, \varphi\right) \frac{1}{cos^2 \varphi} - \frac{3}{2} \int \frac{d\varphi}{cos\, \varphi}$

64) $\int d\varphi \, \frac{sin^5 \varphi}{cos^3 \varphi} = \left(- \frac{1}{2} sin^4 \varphi + 1\right) \frac{1}{cos^2 \varphi} + 2\, log\, cos\, \varphi$

65) $\int d\varphi \, \frac{sin\, \varphi}{cos^4 \varphi} = \frac{1}{3\, cos^3 \varphi}$

66) $\int d\varphi \, \frac{sin^2 \varphi}{cos^4 \varphi} = \frac{1}{3}\, tgn^3 \varphi$

67) $\int d\varphi \, \frac{sin^3 \varphi}{cos^4 \varphi} = \left(sin^2 \varphi - \frac{2}{3}\right) \frac{1}{cos^3 \varphi}$

68) $\int d\varphi \, \frac{sin^4 \varphi}{cos^4 \varphi} = \frac{1}{3}\, tgn^3 \varphi - tgn\, \varphi + \varphi$

69) $\int d\varphi \, \frac{sin^5 \varphi}{cos^4 \varphi} = \left(- sin^4 \varphi + 4\, sin^2 \varphi - \frac{5}{8}\right) \frac{1}{cos^3 \varphi}$

70) $\int d\varphi \, \frac{sin\, \varphi}{cos^5 \varphi} = \frac{1}{4\, cos^4 \varphi}$

71) $\int d\varphi \, \frac{sin^2 \varphi}{cos^5 \varphi} = \left(\frac{1}{8} sin^3 \varphi + \frac{1}{8} sin\, \varphi\right) \frac{1}{cos^4 \varphi} - \frac{1}{8} \int \frac{d\varphi}{cos\, \varphi}$

72) $\int d\varphi \, \frac{sin^3 \varphi}{cos^5 \varphi} = \frac{1}{4}\, tgn^4 \varphi$

73) $\int d\varphi \, \frac{sin^4 \varphi}{cos^5 \varphi} = \left(\frac{5}{8} sin^3 \varphi - \frac{3}{8} sin\, \varphi\right) \frac{1}{cos^4 \varphi} - \frac{3}{8} \int \frac{d\varphi}{cos\, \varphi}$

74) $\int d\varphi \, \frac{sin^5 \varphi}{cos^5 \varphi} = \frac{1}{4}\, tgn^4 \varphi - \frac{1}{2}\, tgn^2 \varphi - log\, cos\, \varphi$

Man beachte, dass $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\, x$ etc. Dadurch ergeben sich sofort die hier fehlenden Integrale

$$\int d\varphi \, \frac{cos^\varkappa x}{sin^3 \varphi}, \quad \int d\varphi \, \frac{cos^\varkappa x}{sin^4 \varphi}, \quad \int d\varphi \, \frac{cos^\varkappa x}{sin^5 \varphi}.$$

75) $\int \frac{d\varphi}{sin\, \varphi\, cos\, \varphi} = log\, tgn\, \varphi$

76) $\int \frac{d\varphi}{sin\, \varphi\, cos^2 \varphi} = \frac{1}{cos\, \varphi} + \int \frac{d\varphi}{sin\, \varphi}$

77) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin\varphi\cos^3\varphi} = \frac{1}{2\cos^2\varphi} + \log tgn\,\varphi$$

78) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin\varphi\cos^4\varphi} = \frac{1}{3\cos^3\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi} + \int \frac{d\,\varphi}{\sin\varphi}$$

79) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin\varphi\cos^5\varphi} = \frac{1}{4\cos^4\varphi} + \frac{1}{2\cos^2\varphi} + \log tgn\,\varphi$$

80) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = -2\,cotg\,2\,\varphi$$

81) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^2\varphi\cos^3\varphi} = \left(\frac{1}{2\cos^2\varphi} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{3}{2}\int \frac{d\,\varphi}{\cos\varphi}$$

82) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^2\varphi\cos^4\varphi} = \frac{1}{3\sin\varphi\cos^3\varphi} - \frac{3}{8}\,cotg\,2\,\varphi$$

83) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^2\varphi\cos^5\varphi} = \left(\frac{1}{4\cos^4\varphi} + \frac{5}{8\cos^2\varphi} - \frac{15}{8}\right)\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{15}{8}\int \frac{d\,\varphi}{\cos\varphi}$$

84) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^3\varphi\cos^3\varphi} = -\frac{2\cos 2\,\varphi}{\sin^2 2\,\varphi} + 2\log tgn\,\varphi$$

85) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^3\varphi\cos^4\varphi} = \left(\frac{1}{3\cos^3\varphi} + \frac{5}{3\cos\varphi}\right)\frac{1}{\sin^2\varphi} + 5\int \frac{d\,\varphi}{\sin^3\varphi}$$

86) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^3\varphi\cos^5\varphi} = \frac{1}{4\sin^2\varphi\cos^4\varphi} + \frac{3}{2}\int \frac{d\,\varphi}{\sin^3\varphi\cos^3\varphi}$$

87) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^4\varphi\cos^4\varphi} = \left(-\frac{8}{3\sin^3 2\,\varphi} - \frac{16}{3\sin 2\,\varphi}\right)\cos 2\,\varphi$$

88) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^4\varphi\cos^5\varphi} = \left(\frac{1}{4\cos^4\varphi} + \frac{7}{8\cos^2\varphi}\right)\frac{1}{\sin^3\varphi} + \frac{55}{8}\int \frac{d\,\varphi}{\sin^4\varphi\cos\varphi}$$

89) $$\int \frac{d\,\varphi}{\sin^5\varphi\cos^5\varphi} = \left(-\frac{4}{\sin^4 2\,\varphi} - \frac{6}{\sin^2 2\,\varphi}\right)\cos 2\,\varphi + 6\log tgn\,\varphi$$

90) $$\int \frac{\cos 2\,\varphi}{\cos\varphi}\,d\,\varphi = 2\sin\varphi - \log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,\varphi\right)$$

91) $$\int \frac{\cos 2\,\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\,\varphi = 2\,\varphi - tgn\,\varphi$$

92) $$\int \frac{\cos 2\varphi}{\cos^3\varphi}\, d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{2}{3}\log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

93) $$\int \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{3}\, tgn\,\varphi\left(4 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)$$

94) $$\int \frac{\cos 2\varphi}{\cos^5\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{8}\, tgn\,\varphi\left(\frac{5}{\cos\varphi} - \frac{2}{\cos^3\varphi}\right) + \frac{5}{8}\log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

95) $$\int \frac{\sin 2\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi = -2\cos\varphi$$

96) $$\int \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = -2\log\cos\varphi$$

97) $$\int \frac{\sin 2\varphi}{\cos^3\varphi}\, d\varphi = \frac{2}{\cos\varphi}$$

98) $$\int \frac{\sin 2\varphi}{\cos^n\varphi}\, d\varphi = \frac{2}{(n-2)\cos^{n-2}\varphi}, \quad n > 2$$

99) $$\int \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \sin 2\varphi$$

100) $$\int \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\log\sin\varphi$$

101) $$\int \frac{\sin 2\varphi}{\sin^n\varphi}\, d\varphi = -\frac{2}{(n-2)\sin^{n-2}\varphi}, \quad n > 2$$

102) $$\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi - \varphi$$

103) $$\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = 4\sin\varphi - 3\log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

104) $$\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3\varphi}\, d\varphi = 4\varphi - 3\, tgn\,\varphi$$

105) $$\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos^4\varphi}\, d\varphi = -\frac{3\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{5}{2}\log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

106) $$\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos^5\varphi}\, d\varphi = tgn\,\varphi\left(2 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)$$

107) $$\int \frac{\cos 3\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = -2\sin^2\varphi + \log\sin\varphi$$

108) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = -4\sin\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}$

109) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{2\sin^2\varphi} - 4\log\sin\varphi$

110) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\sin^n\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}\varphi} + \frac{4}{(n-3)\sin^{n-3}\varphi},\ n>3$

111) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi = 2\sin^2\varphi + \log\cos\varphi$

112) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = -4\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}$

113) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\cos^3\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{2\cos^2\varphi} - 4\log\cos\varphi$

114) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\cos^n\varphi}\, d\varphi = \frac{4}{(n-3)\cos^{n-3}\varphi} - \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}\varphi},\quad n>3$

115) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi$

116) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi = 3\log tgn\frac{\varphi}{2} + 4\cos\varphi$

117) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi = -3\,cotg\,\varphi - 4\varphi$

118) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin^4\varphi}\, d\varphi = -\frac{3}{2}\,cotg\,\varphi\,\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{5}{2}\log tgn\frac{\varphi}{2}$

119) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin^5\varphi}\, d\varphi = cotg\,\varphi\left\{2 - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right\}.$

§. 91.

Tangens-Integrale.

1) $\int f(tgn\,u)\,du = \int \frac{f(z)}{1+z^2}\,dz,\quad tgn\,u = z$

2) $\int tgn^n x\,dx = \frac{tgn^{n-1}x}{n-1} - \int tgn^{n-2}x\,dx$

3) $$\int \frac{dx}{tgn^n x} = -\frac{1}{(n-1)\,tgn^{n-1} x} - \int \frac{dx}{tgn^{n-2} x}$$

4) $$\int tgn^{2n} x\,dx = \frac{z^{2n-1}}{2n-1} - \frac{z^{2n-3}}{2n-3} + \cdots + (-1)^{n+1} z + (-1)^n \operatorname{arc} tgn\, z$$

wenn $z = tgn\, x$ gesetzt wird.

5) $$\int tgn\, x\,dx = -\log\cos x$$

6) $$\int tgn^2 x\,dx = tgn\, x - x$$

7) $$\int tgn^3 x\,dx = \frac{1}{2}\,tgn^2 x + \log\cos x$$

8) $$\int tgn^4 x\,dx = \frac{1}{3}\,tgn^3 x - tgn\, x + x$$

9) $$\int tgn^5 x\,dx = \frac{1}{4}\,tgn^4 x - \frac{1}{2}\,tgn^2 x - \log\cos x$$

10) $$\int \frac{tgn\, x\,dx}{1 + m^2\,tgn^2 x} = \frac{\log(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)}{2(m^2-1)}$$

11) $$\int \frac{tgn\, a - tgn\, x}{tgn\, a + tgn\, x}\,dx = \sin 2a \log\sin(a+x) - \cos 2a$$

§. 92.

Exponential-Integrale.

1) $$\int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int f(z)\frac{dz}{z}, \quad z = e^{ax}$$

2) $$\int x^m e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,x^m e^{ax} - \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{ax}\,dx$$

3) $$\int \frac{e^{ax}}{x^m}\,dx = -\frac{1}{m-1}\,\frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + \frac{a}{m-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}}\,dx$$

4) $$\int e^{ax} \cos^n bx\,dx = \frac{a \cos bx + nb \sin bx}{a^2 + n^2 b^2} e^{ax} \cos^{n+1} bx + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx\,dx$$

5) $$\int e^{ax} \sin^n bx\,dx = \frac{a \sin bx - nb \cos bx}{a^2 + n^2 b^2} e^{ax} \sin^{n-1} bx + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx\,dx$$

6) $$\int e^{ax} tgn^n x\,dx = \frac{e^{ax}}{n-1} tgn^{n-1} x - \frac{a}{n-1} \int e^{ax} tgn^{n-1} x\,dx - \int e^{ax} tgn^{n-2} x\,dx$$

7) $$\int e^{ax} cotg^n x\,dx = -\frac{e^{ax}}{n-1} cotg^{n-1} x + \frac{a}{n-1} \int e^{ax} cotg^{n-1} x\,dx - \int e^{ax} cotg^{n-2} x\,dx$$

8) $$\int \frac{e^{ax}}{\sin^n x} dx = -e^{ax} \frac{a \sin x + (n-2) \cos x}{(n-1)(n-2) \sin^{n-1} x} - \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{ax}}{\sin^{n-2} x} dx$$

9) $$\int \frac{e^{ax}}{\cos^n x} dx = -e^{ax} \frac{a \cos x - (n-2) \sin x}{(n-1)(n-2) \cos^{n-1} x} + \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{ax}}{\cos^{n-2} x} dx$$

10) $$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x\,dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^m x \cos^{n-1} x}{(m+n)^2 + a^2} \{a \cos x + \overline{m+n} \sin x\}$$

$$- \frac{ma}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{m-1} x\,dx$$

$$+ \frac{(n-1)(m+n)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^m \cos^{n-2} dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^n x}{(m+n)^2 + a^2} \{a \sin x - (m+n) \cos x\}$$

$$+ \frac{na}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\,dx$$

$$+ \frac{(m-1)(m+n)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$$

$$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x \, d\,x$$

$$= \frac{e^{ax} \cos^{n-1} \sin^{m-1} x}{(m+n)^2 + a^2} \{a \sin x \cos x + n \sin^2 x - m \cos^2 x\}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^m x \cos^{n-2} x \, d\,x$$

$$+ \frac{m(m-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{xx} \sin^{m-2} x \cos^n x \, d\,x$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{(m+n)^2 + a^2} \{a \sin x \cos x + n \sin^2 x - m \cos^2 x\}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x \, d\,x$$

$$+ \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^n x \, d\,x$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{(m+n)^2 + a^2} \{a \sin x \cos x + n \sin^2 x - m \cos^2 x\}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x \, d\,x$$

$$- \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^m x \cos^{n-2} x \, d\,x$$

11) $$\int x^n e^{ax} \{\cos b\,x + i \sin b\,x\} \, d\,x \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$= \frac{x^n e^{ax} \{\cos b\,x + i \sin b\,x\}}{a + b\,i} \left\{1 - \frac{n}{(a + b\,i)\,x} + \frac{n(n-1)}{(a + b\,i)^2 x^2} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{(a + b\,i)^n x^n}\right\}$$

12) $$\int x^n a^x \, d\,x = \frac{a^x x^n}{\log a} - \frac{n\,a^x x^{n-1}}{\log^2 a} + \frac{n(n-1)\,a^x x^{n-2}}{\log^3 a} \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{\log^{n+1} a} a^x$$

13) $$\int \frac{a^x \, d\,x}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{a^x \log a}{(n-1)(n-2)\,x^{n-2}} - \frac{a^x \log^2 a}{(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-3}} - \cdots + \frac{\log^{n-1} a}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1} \int \frac{a^x}{x} \, d\,x$$

14) $$\int \frac{a^x \, d\,x}{x} = \log x + \frac{x}{1} \log a + \frac{x^2}{2.2!} \log^2 a + \frac{x^3}{3.3!} \log^3 a + \cdots$$

15) $\int \frac{dx}{1+e^x} = log \frac{e^x}{1+e^x}$

16) $\int \frac{dx}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{1}{a} arctgn(e^{ax})$

17) $\int \frac{dx}{a e^{mx} + b e^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}} arctgn \left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

18) $\int \frac{dx}{a + b e^{mx}} = \frac{1}{am}\{mx - log(a + b e^{mx})\}$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{a + b e^{mx}}} = \frac{1}{m\sqrt{a}} log \frac{\sqrt{a + b e^{mx}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + b e^{mx}} + \sqrt{a}}$

20) $\int \frac{x e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}$

21) $\int x e^x dx = e^x (x - 1)$

22) $\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$

23) $\int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$

24) $\int x^4 e^x dx = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$

25) $\int x^5 e^x dx = e^x (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)$

26) $\int \frac{e^x}{x} dx$, vide Exponential-Integral.

27) $\int \frac{e^x}{x^2} dx = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x dx}{x}$

28) $\int \frac{e^x}{x^3} dx = -\frac{1}{2} e^x \left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right\} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x dx}{x}$

29) $\int \frac{e^x}{x^4} dx = -\frac{1}{3} e^x \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{e^x}{x} dx$

30) $\int \frac{e^x}{x^5} dx = -\frac{1}{4} e^x \left(\frac{1}{6x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{24}\int \frac{e^x}{x} dx$

31) $\int e^{ax} cos\, x\, dx = \frac{e^{ax}(sin\, x + a\, cos\, x)}{1 + a^2}$

32) $\int e^{ax} sin\, x\, dx = \frac{e^{ax}(a\, sin\, x - cos\, x)}{1 + a^2}$

33) $\int e^{ax} \cos^2 x \, d x = \frac{e^{ax} \cos x \{2 \sin x + a \cos x\}}{4 + a^2} + \frac{2 c^{xa}}{a(4 + a^2)}$

34) $\int e^{ax} \sin^2 x \, d x = \frac{e^{ax} \sin x \{a \sin x - 2 \cos x\}}{4 + a^2} + \frac{2 e^{ax}}{a(4 + a^2)}$

35) $\int e^{ax} tgn^2 x \, d x = \frac{e^{ax}}{a} \{a \, tgn \, x - 1\} - a \int e^{ax} tgn \, x \, d x.$

§. 93.

Logarithmische Integrale.

1) $\int f(\log x) \, d x = \int f(z) e^z \, d z, \quad z = \log x$

2) $\int x^m f(\log x) \, d x = \int f(z) \, e^{(m+1)z} \, d z$

3) $\int x^n \log x \, d x = x^{n+1} \left\{\frac{\log x}{n + 1} - \frac{1}{(n + 1)^2}\right\}, \quad n \gtrless 1$

4) $\int (\log x)^n \, d x = \frac{x}{n + 1} (\log x)^{n+1} - \frac{1}{(n + 1)} \int (\log x)^{n+1} \, d x$

5) $\int \frac{d x}{(\log x)^n} = - \frac{x}{(n - 1)(\log x)^{n-1}} + \frac{1}{n - 1} \int \frac{d x}{(\log x)^{n-1}}$

6) $\int x^m (\log x)^n \, d x = \frac{x^{m+1}}{m + 1} (\log x)^n - \frac{n}{m + 1} \int x^m (\log x)^{n-1} \, d x$

7) $\int \frac{x^m}{(\log x)^n} \, d x = - \frac{x^{m+1}}{(n - 1)(\log x)^{n-1}} + \frac{m + 1}{n - 1} \int \frac{x^m}{(\log x)^{n-1}} \, d x$

8) $\int (a + b x)^m \log x \, d x = \frac{(a + b x)^{m+1}}{(m + 1) b} \log x$

$$- \frac{1}{(m + 1) b} \int \frac{(a + b x)^{m+1}}{x} \, d x$$

9) $$\int \frac{\log x \, d x}{(a+b x)^m} = -\frac{\log x}{(m-1) b (a+b x)^{m-1}} + \frac{1}{(m-1) b} \int \frac{d x}{x (a+b x)^{m-1}}$$

$$= -\frac{\log x}{(n-1) b (a+b x)^{m-1}} + \frac{1}{(n-1) a b}$$

$$\left\{\frac{1}{(n-2)(a+b x)^{n-2}} + \frac{1}{(n-3) a (a+b x)^{n-3}} + \frac{1}{(n-4) a^2 (a+b x)^{n-4}} + \cdots + \frac{1}{2 . a^{n-4} (a+b x)^2} + \frac{1}{1 . a^{n-3} (a+b x)}\right\}$$

$$+ \frac{1}{(n-1) a^{n-1} b} \log \frac{x}{a+b x}$$

10) $$\int x^m \, d x \log (a+b x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log (a+b x) - \frac{b}{m+1} \int \frac{x^{m+1} d x}{a+b x}$$

11) $$\int \frac{d x}{x} \log (a+b x) = \log a . \log x + \frac{b}{a} x - \frac{1}{2^2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 + \frac{1}{3^2} \left(\frac{b}{a}\right)^3 x^3 \cdots$$

$$= \frac{1}{2} (\log b x)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) \frac{1}{x} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3^2} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{1}{x^3} + \cdots$$

12) $$\int \frac{d x}{\log x} = \log (\log x) + \frac{\log x}{1} + \frac{1}{2} \frac{\log^2 x}{2!} + \frac{1}{3} \frac{\log^3 x}{3!} + \cdots$$

13) $$\int (a+b x) \log x \, d x = \frac{(a+b x)^2}{2 b} \log x - \frac{a^2}{2 b} \log x - a x - \frac{1}{4} b x^2$$

14) $$\int (a+b x)^2 \log x \, d x = \frac{(a+b x)^3}{3 b} \log x - \frac{a^3}{3 b} \log x - a^2 x - \frac{a b x^2}{2} - \frac{b^2 x^3}{9}$$

15) $$\int (a+bx)^3 \log x\, dx = \frac{(a+bx)^4}{4b}\log x - \frac{a^4}{4b}\log x$$
$$- a^3 x - \frac{3}{4}a^2 b x^2 - \frac{1}{3}a^2 b^2 x^3 - \frac{1}{16}b^3 x^4$$

16) $$\int \frac{\log x}{a+bx}dx = \frac{1}{b}\log x \log(a+bx) - \frac{1}{b}\int\frac{1}{x}\log(a+bx)\,dx$$

Dieses letztere Integral bildet eine selbstständige Transcendente.

17) $$\int \frac{\log x}{(a+bx)^2}dx = -\frac{\log x}{b(a+bx)} + \frac{1}{ab}\log\frac{x}{a+bx}$$

18) $$\int \frac{\log x}{(a+bx)^3}dx = -\frac{\log x}{2b(a+bx)^2} + \frac{1}{2ab(a+bx)}$$
$$+ \frac{1}{2a^2 b}\log\frac{x}{a+bx}$$

19) $$\int \frac{\log x\, dx}{\sqrt{a+bx}}$$
$$= \frac{2}{b}\left\{(\log x - 2)\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\log\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right\},\ a>0$$
$$= \frac{2}{b}\left\{(\log x - 2)\sqrt{a+bx} + 2\sqrt{-a}\,arctgn\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}\right\},\ a<0$$

20) $$\int \sin(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$$

21) $$\int \cos(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\{\sin(\log x) + \cos(\log x)\}.$$

§. 94.

Integrale cyklometrischer Functionen.

Sei $\int f(x)\,dx = \varphi(x)$, so wird:

1) $$\int f(x)\,arc\sin x\, dx = \varphi(x)\,arc\sin x - \int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$2)\quad \int f(x)\,arc\cos x\,dx = \varphi(x)\,arc\cos x + \int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$3)\quad \int f(x)\,arc\,tgn\,x\,dx = \varphi(x)\,arc\,tgn\,x - \int \frac{\varphi(x)}{1+x^2}\,dx$$

$$4)\quad \int f(x)\,arc\,cotgn\,x\,dx = \varphi(x)\,arc\,cotgn\,x + \int \frac{\varphi(x)}{1+x^2}\,dx$$

Insbesondere ist für $n \gtrless -1$

$$5)\quad \int x^{n-1}\,arc\sin x\,dx = \frac{x^n}{n}\,arc\sin x - \frac{1}{n}\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$6)\quad \int x^{n-1}\,arc\cos x\,dx = \frac{x^n}{n}\,arc\cos x + \frac{1}{n}\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7)\quad \int x^{n-1}\,arc\,tgn\,x\,dx = \frac{x^n}{n}\,arc\,tgn\,x - \frac{1}{n}\int \frac{x^n\,dx}{1+x^2}$$

$$8)\quad \int x^{n-1}\,arc\,cotg\,x\,dx = \frac{x^n}{n}\,arc\,cotg\,x + \frac{1}{n}\int \frac{x^n\,dx}{1+x^2}$$

$$9)\quad \int (arc\sin x)^n\,dx = (arc\sin x)^n\left\{x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{arc\sin x}\right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)\,x}{arc\sin^2 x} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{arc\sin^3 x} + + \cdots\right.$$

$$10)\quad \int (arc\cos x)^n\,dx = (arc\cos x)^n\left\{x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{arc\cos x}\right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)\,x}{arc\cos^2 x} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{arc\cos^3 x} + - \cdots\right.$$

$$11)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\sin x = x - \sqrt{1-x^2}\,arc\sin x$$

$$12)\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\sin x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\,arc\sin x$$
$$+ \frac{1}{4}(arc\sin x)^2$$

$$13)\quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\sin x = \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x$$
$$- \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\,arc\sin x$$

14) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \, arc\sin x = \frac{1}{16}\, x^4 + \frac{3}{16}\, x^2$$
$$- \frac{1}{8}\,(2\,x^3 + 3\,x)\sqrt{1-x^2}\, arc\sin x + \frac{3}{16}\, arc\sin^2 x$$

15) $$\int \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})^3}\, arc\sin x = \frac{x\, arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\, \log(1-x^2)$$

16) $$\int \frac{x\,dx}{(\sqrt{1-x^2})^3}\, arc\sin x = \frac{arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x}$$

17) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^2}\, arc\,tgn\, x = \frac{1}{2}\, arc\,tgn\, x \log(1+x^2)$$
$$- \frac{1}{2}\int \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$$

18) $$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}\, arc\,tgn\, x = x\, arc\,tgn\, x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$
$$- \frac{1}{2}\,(arc\,tgn\, x)^2$$

19) $$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^2}\, arc\,tgn\, x = -\frac{1}{2}\, x + \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, arc\,tgn\, x$$
$$- \int arc\,tgn\, x\, \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

20) $$\int \frac{x^4\,dx}{1+x^2}\, arc\,tgn\, x = -\frac{1}{6}\, x^2 + \frac{2}{3}\log(1+x^2)$$
$$+ \left(\frac{x^3}{3} - x\right) arc\,tgn\, x + \frac{1}{2}\,(arc\,tgn\, x)^2$$

21) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\, arc\,tgn\, x = -\sqrt{1-x^2}\, arc\,tgn\, x$$
$$+ \sqrt{2}\, arc\,tgn\, \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - arc\sin x$$

22) $$\int \frac{arc\sin x}{(\alpha+\beta x)^2}\, dx = -\frac{arc\sin x}{\beta(\alpha+\beta x)}$$
$$- \frac{2}{\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\, arc\,tgn \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(1-x)}{(\alpha+\beta)(1+x)}}, \quad \alpha^2 > \beta^2$$
$$= -\frac{arc\sin x}{\beta(\alpha+\beta x)}$$
$$- \frac{1}{\beta\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} \log\frac{\sqrt{(\beta+\alpha)(1+x)} + \sqrt{(\beta-\alpha)(1-x)}}{\sqrt{(\beta+\alpha)(1+x)} - \sqrt{(\beta-\alpha)(1-x)}}, \quad \alpha^2 < \beta^2$$

23) $$\int \frac{x\, arc\sin x}{(1+\gamma x^2)^2}\, dx = -\frac{arc\sin x}{2\gamma(1+\gamma x^2)}$$
$$+\frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma+1}}\, arc\,tgn\, \frac{\sqrt{\gamma+1}\,.\,x}{\sqrt{1-x^2}},\ \gamma > -1$$
$$= -\frac{arc\sin x}{2\gamma(1+\gamma x^2)}$$
$$+\frac{1}{\gamma\sqrt{-(\gamma+1)}}\log\frac{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-(1+\gamma)}}{\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{-(1+\gamma)}},\ \gamma < -1$$

24) $$\int \frac{arc\,tgn\, x}{(\alpha+\beta x)^2}\, dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\log\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\beta-\alpha x}{\alpha+\beta x}\, arc\,tgn\, x\right\}$$

25) $$\int \frac{arc\,tgn\, x}{\sqrt{a+b x^2}^3}\, dx = \frac{x\, arc\,tgn\, x}{a\sqrt{a+b x^2}}$$
$$-\frac{1}{a\sqrt{b-a}}\, arc\,tgn \sqrt{\frac{a+b x^2}{b-a}},\ a < b$$
$$= \frac{x\, arc\,tgn\, x}{a\sqrt{a+b x^2}}$$
$$-\frac{1}{a\sqrt{a-b}}\log\frac{\sqrt{a+b x^2}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b x^2}+\sqrt{a-b}},\ a > b.$$

Integral-Tafeln.

B. Bestimmte Integrale.

§. 95.

Einleitung.

A. Einfache Integrale.

1) Sei

$$\frac{b-a}{n} = h, \quad lim\, n = \infty, \quad lim\, h = 0,$$

ferner $\varphi(x)$ eine zwischen den Grenzen $a \gtrless x \gtrless b$ endliche, stetige und eindeutige Function, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = lim\, h\,\{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \cdots \varphi(b-h)\}$$

Man hat auch

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a),$$

wenn

$$\frac{d\,\psi(x)}{d\,x} = \varphi(x) \quad \text{ist.}$$

2) Das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

hat einen bestimmten Werth, wenn:

I. $f(x)$ innerhalb der Grenzen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ endlich und stetig ist.

II. Wenn zwar

$$f(\xi) = \infty \text{ für } \alpha \gtrless \xi \gtrless \beta,$$

jedoch so, dass

$$\lim \delta f(\xi + \delta) = 0, \quad \text{für } \lim \delta = 0,$$

oder wenn

$$f(\xi) = \infty = \frac{\psi(x)}{(x - \xi)^n}, \quad 1 > n > 0$$

$$f(\xi) = \psi(x) \log(x - \xi),$$

wobei aber $\psi(\xi)$ weder Null noch unendlich wird für $\alpha \gtrless \xi \gtrless \beta$.

III. Die Integrale

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^\alpha f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

haben einen bestimmten Werth, wenn $f(x)$ endlich und stetig bleibt innerhalb der genommenen Grenzen und wenn

$$\lim x^n f(x) = 0, \quad n > 1$$

für resp.

$$\lim x = \infty, \quad \lim x = -\infty, \quad \lim x = \pm \infty.$$

3) Aus der Definition folgen folgende Sätze:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = -\int_b^a \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_0^b \varphi(x)\,dx - \int_0^a \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_a^\beta \varphi(x)\,dx + \int_\beta^b \varphi(x)\,dx, \quad a \gtrless \beta \gtrless b$$

$$= \int_{a-\xi}^{b-\xi} \varphi(x)\,dx, \quad \xi = a + (b - a)\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

4) Es ist

$$\int_a^b c\,\varphi(x)\,dx = c \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\int_a^b [\varphi(x)\,\psi(x)]\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx$$

5) Man hat:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi_1),\quad \xi_\varkappa = a + (b-a)\theta_\varkappa,\quad 0 < \theta_\varkappa < 1$$

$$= (\xi_2 - p) f(\xi_2) \log \frac{b-p}{a-p},\quad a, b \gtrless p$$

$$= \frac{(\xi_3 - q)^n}{n-1} f(\xi_3) \left\{\frac{1}{(a-q)^{n-1}} - \frac{1}{(b-q)^{n-1}}\right\}\quad a, b < q$$

$$= \frac{(\xi_4 - q)^n}{n-1} f(\xi_4) \left\{\frac{1}{(q-b)^{n-1}} - \frac{1}{(q-a)^{n-1}}\right\}\quad a, b < q.$$

Ebenso ist

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi\{a + (b-a)\theta\} \int_a^b f(x)\,dx,\quad 0 < \theta < 1,$$

wenn $f(x)$ in dem Intervalle $a \geqq x \geqq b$ sein Zeichen nicht wechselt.

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(b) \int_\xi^b f(x)\,dx - \varphi(a) \int_\xi^a f(x)\,dx$$

$$- \int_a^b \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \int_0^x f(x)\,dx\right\} dx,\quad a \geqq \xi \geqq b.$$

6) Es ist

$$\int_{+a}^{-a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,\quad \text{wenn } f(-x) = f(x)$$

$$= 0,\qquad \text{wenn } f(-x) = -f(x).$$

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = \int_0^a \varphi(a-x)\,dx$$

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = \int_0^a \{\varphi(x) + \varphi(2a-x)\}\,dx$$

Ist

$$\varphi(2a - x) = \varphi(x),$$

so wird

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = 2\int_0^a \varphi(x)\,dx.$$

Ist dagegen

$$\varphi(2a - x) = -\varphi(x),$$

so wird:

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Man hat weiter:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(a+bx)\,dx = \pm\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \text{ je nachdem } b \gtrless 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} f\left\{cx + \frac{a}{x}\right\}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{\infty} f\{\lambda\sqrt{ac} + x\}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Schlömilch, Analyt. Studien I, S. 83.

$$\int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) arc\,tgn\,x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}$$

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) \log x\,\frac{dx}{x} = \log a \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

Liouville, Journ., Vol. XVIII, p. 168.

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\,dx = \varphi(0)\log\frac{b}{a} \quad \text{(Frullani).}$$

Ist

$$f(x) = \sum a_n \sin nx$$
$$\varphi(x) = \sum b_n \sin nx,$$

so wird

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum a_n b_n.$$

7) Es ist

$$\int_u^w f(x,y)\,dy = (w-u)\int_0^1 f[xu + (w-u)z]\,dz,$$

wenn

$$y = u + (w - u) z$$

gesetzt wird; diese Transformation macht variable Grenzen constant. Man beachte ferner:

$$\int_a^b f(x)\, d x = \int_{\frac{a}{\varkappa}}^{\frac{b}{\varkappa}} f(\varkappa y)\, \varkappa\, d y$$

$$\int_a^b f(x)\, d x = \int_0^{b-a} f(a + z)\, d z, \quad x = a + z$$

$$\int_a^b f(x)\, d x = (b - a) \int_0^{\infty} f \left\{ \frac{a + b z}{1 + z} \right\} \frac{d z}{(1 + z)^2}, \quad x = \frac{a + b z}{1 + z}$$

8) Ist die Substitution $x = \varphi(z)$ mehrdeutig, so bestimme man $\alpha_\varkappa$ aus

$$\varphi'(\alpha) = 0, \quad a \gtrless \alpha \gtrless b.$$

Es wird sodann

$$\int_a^b f(x)\, d x = \int_a^{\alpha_1} F(z)\, d z + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(z)\, d z + \cdots \int_{\alpha_{n-1}}^b F(z)\, d z$$

9) Es ist

$$\frac{d}{d \alpha} \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, d x = \int_a^b \frac{d \varphi(x, \alpha)}{d \alpha}\, d x,$$

wenn die Grenzen a und b constant sind in Bezug auf α; dagegen

$$\frac{d}{d \alpha} \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, d x = \int_a^b \frac{d \varphi(x, \alpha)}{d \alpha}\, d x + \varphi(b, \alpha) \frac{d b}{d \alpha} - \varphi(a, \alpha) \frac{d a}{d \alpha},$$

wenn a und b Functionen von α sind.

10) Die im §. 1 gegebene Definition des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, d x$$

ist nicht mehr zutreffend, wenn die Function $f(x)$ für einen Werth $x = c$ discontinuirlich wird. Seien m und n endliche Constanten, ferner ε positiv, so ist sodann

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = lim \left\{ \int_{a}^{c-m\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+m\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right\}, \text{ für } lim\,\varepsilon = 0.$$

Die conventionelle Definition des Integrals in diesem Falle.

B. Doppel-Integrale.

1) Die Umkehrung der Integrationsgrenzen ist im Allgemeinen nicht gestattet:

α) wenn sie variabel sind,

β) wenn die Function zwischen ihnen discontinuirlich wird.

Sonst ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\delta} dy f(xy) = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\alpha}^{\beta} dx f(xy).$$

NB. Man kann nach dem Vorhergehenden die variablen Grenzen immer in constante umwandeln (vergl. 3).

2) Allgemeine Theoreme:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi(a^2x^2 + b^2y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f[a\cos\theta + b\sin\theta\cos\psi + c\sin\theta\sin\psi]\sin\theta\,d\theta\,d\psi$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{+1} f(Ru)\,du,$$

wenn

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

(Poisson) Bertrand, Calcul Intég. p. 461.

3) Sei

$$y = y_0 + (Y - y_0)t,$$

so wird

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X}\int_0^1 (Y - y_0) f\{x, y_0 + (Y - y_0)t\}\,dx\,dt.$$

4) Umkehrung der Integrationsgrenzen.

Es ist (vide Fig. 1 a. f. S.):

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\xi_0}^{\xi_1} f(x,y)\,dy\,dx$$

Es ist (vide Fig. 2):

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x\,y)\,d\,x\,d\,y = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} f\{r\cos\theta, r\sin\theta\}\,r\,d\,\theta\,d\,r.$$

Fig. 1.

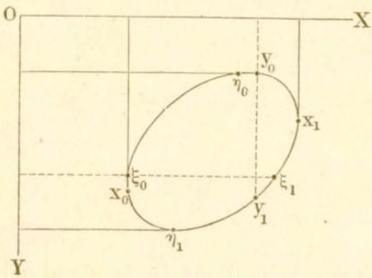
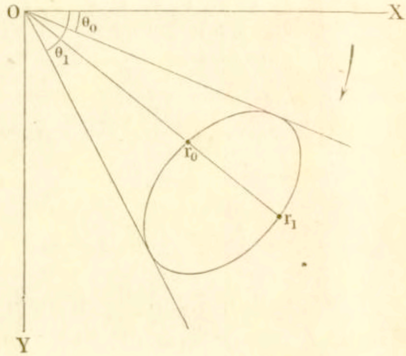


Fig. 2.



Insbesondere merke man:

$$\int_0^a\int_0^{\frac{a}{b}x} \varphi(x,y)\,d\,x\,d\,y = \int_0^b\int_{\frac{a}{b}y}^{a} \varphi(x,y)\,d\,y\,d\,x$$

$$\int_0^a\int_0^{\frac{b}{b+x}} \varphi(x,y)\,d\,x\,d\,y = \int_0^{\frac{b}{b+a}}\int_0^{a} \varphi(x,y)\,d\,y\,d\,x$$

$$+\int_{\frac{b}{b+a}}^{1}\int_0^{\frac{b}{y}(1-y)} \varphi(x,y)\,d\,y\,d\,x$$

$$\int_0^a\int_{bx}^{c-dx} \varphi(x,y)\,d\,x\,d\,y = \int_0^{ab}\int_0^{\frac{y}{b}} \varphi(x,y)\,d\,y\,d\,x$$

$$+\int_{ab}^{c}\int_0^{\frac{c-y}{d}} \varphi(x,y)\,d\,y\,d\,x,$$

wobei

$$a = \frac{c}{b+d}$$

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^{2a} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^b \int_{a-a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{a+a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^{2a} \int_{\frac{x}{4a}}^{3a-x} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{2\sqrt{ay}} \varphi(x,y)\,dy\,dx + \int_0^{3a} \int_0^{3a-y} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{a} \varphi(x,y)\,dy\,dx + \int_a^{2a} \int_0^{a} \varphi(x,y)\,dy\,dx + \int_{2a}^{3a} \int_{y-2a}^{a} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} \varphi\{r\cos\theta, r\sin\theta\}\,r\,d\theta\,dr$$

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \varphi\{r\cos\theta, r\sin\theta\}\,r\,d\theta\,dr$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_\theta^{2a\cos\theta} \varphi(r,\theta)\,r\,d\theta\,dr = \int_0^{2a} \int_0^{arc\cos\frac{r}{2a}} \varphi(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Einige Litteratur vide: Todhunter, „A treatise on the integ. calc.“, p. 237.

§. 96.

Einige allgemeine Integralformeln.

(Vergleiche die Bemerkung am Ende.)

$$1)\quad \int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,\frac{u\,du}{h^2+u^2} = -\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h-x} - \int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h+x}\right\}$$

$$2)\quad \int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2}\,\frac{h\,du}{h^2+u^2} = -\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h-x} + \int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h+x}\right\}$$

$$3)\quad \int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,\frac{h\log u\,du}{h^2+u^2} = \frac{\pi}{2} f(h)\log h - \frac{\pi}{4}\left\{\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}\,dx + \int_0^\infty \frac{f(x)}{h+x}\,dx\right\}$$

$$4)\quad \int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2}\,\frac{u\log u\,du}{h^2+u^2} = -\frac{\pi}{2} f(h)\log h + \frac{\pi}{4}\left\{\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}\,dx - \int_0^\infty \frac{f(x)}{h+x}\,dx\right\}$$

$$5)\quad \int_0^\pi \frac{f(e^{ix})+f(e^{-ix})}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}\,dx = 2\int_0^\pi \frac{f(a\sin^2 x)}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}\,dx$$

$$6)\quad \int_0^\pi dx\,\varphi\left\{\frac{\sin^2 x}{1+2a\cos x+a^2}\right\} = \int_0^\pi dx\,\varphi(\sin^2 x),\quad a^2 \geqq 1$$

$$= \int_0^\pi dx\,\varphi\left(\frac{\sin^2 x}{a^2}\right),\quad a^2 < 1.$$

Liouville, Journ. XIX, p. 423.

7) $$\int_{-8}^{+8} dx\, \frac{\varphi(e^{axi}) \pm \psi(e^{-axi})}{\varkappa^2 + x^2} = \frac{\pi}{\varkappa} \{\varphi(e^{-a\varkappa}) \pm \psi(e^{-a\varkappa})\}$$

8) $$\int_{-8}^{+8} x\, dx\, \frac{\varphi(e^{axi}) \pm \psi(e^{-axi})}{\varkappa^2 + x^2} = \pi i \{\varphi(e^{-a\varkappa}) \pm \psi(e^{-a\varkappa})\}$$

Sitzungsber. der k. k. Akademie der Wiss. in Wien, 1857, S. 29.

9) $$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(\alpha + e^{-xi}) + [f(\alpha + e^{xi})](1 - p\cos x)}{1 - 2p\cos x + p^2}\, dx$$
$$= f(\alpha + p) + f(\alpha)$$

10) $$\frac{pi}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(\alpha + e^{-xi}) - f(\alpha + e^{ix})\sin x}{1 - 2p\cos x + p^2}\, dx = f(\alpha + p) - f(\alpha).$$

(Poisson) Bertrand, Calc. Intég., p. 169.

11) $$\int_0^{\infty} \frac{f(x + i\alpha t) + f(x - i\alpha t)}{1 + t^2}\, dt = \pi f(x + \alpha).$$

(Abel) Bertrand, Calc. Intég., p. 171.

12) $$\int_0^{\infty} \frac{f(x + i\alpha t) - f(x - i\alpha t)}{t(1 + t^2)}\, dt = i\pi [f(x + \alpha) - f(x)].$$

Ist

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots, \quad u = x e^{\theta i}$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a^2 x^2 + \cdots, \quad v = x e^{-\theta i},$$

so wird:

$$2 A_0 a_0 + A_1 a_1 x^2 + A_2 a_2 x^4 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{F(u) + F(v)\} \{f(u) + f(v)\}\, d\theta.$$

Ist

$$f(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

so wird

13) $$\int_0^a \{\varphi(x,x) + \psi(x,x)\}\, dx = \int_0^a \{\varphi(x,0) + \psi(a,x)\}\, dx.$$

Mathem. Annalen, Bd. 4, S. 551.

14) $$\int_0^a dx \int_0^a f(xy)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)\,dx.$$

Serret, Cours de Calc. Intég. II, p. 295.

15) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2\cos v)^m \cos(m+2n)v\,dv = \sin n\pi \int_0^1 u^m (1-u)^{n-1}\,du.$$

(Kummer) Bertrand, Calc. Intég., p. 176.

16) $$\int_0^\pi \frac{f(a+v)+f\left(a+\frac{1}{v}\right)}{1-2c\cos x+c^2}\,dx = \frac{2\pi}{1-c^2} f(a+c), \quad v=e^{xi}$$

Todhunter's Intégr. Calc., p. 281.

17) $$\int_0^\pi \frac{1-c\cos x}{1-2c\cos x+c^2}\left\{f(a+v)+f\left(a+\frac{1}{v}\right)\right\}dx$$
$$=\pi[f(a+c)+f(a)].$$

Ibid. p. 282.

18) $$\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{1-2c\cos x+c^2}\left\{f(a+v)-f\left(a-\frac{1}{v}\right)\right\}dx$$
$$=\frac{\pi i}{c}\{f(a+c)-f(c)\}.$$

Sei

$$\varphi[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)] = \varphi_1(r,\varphi)+i\,\varphi_2(r,\varphi),$$

so wird:

19) $$\int_0^\infty \varphi_1(r\varphi)\frac{d\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\pi}{2a}\,\varphi(re^{-a})$$

20) $$\int_0^\infty \varphi_2(r\varphi)\frac{\varphi\,d\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\pi}{2}\{\varphi(re^{-a})-\varphi(0)\}$$

21) $$\int_0^\infty \varphi_2(r\varphi)\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{\pi}{2}\{\varphi(r)-\varphi(0)\}$$

22) $$\int_0^\infty \varphi_2(r\varphi)\frac{d\varphi}{\varphi(a^2+\varphi^2)} = \frac{\pi}{2a^2}\{\varphi(r)-\varphi(re^{-a})\}$$

Dienger, Diff.- und Integralrechnung, 1857, S. 263.

23) $$\int_0^\pi \varphi^{(i)}(\cos x)\sin^{2i}x\,dx = 1.3.5\ldots(2i-1)\int_0^\pi \varphi(\cos x)\cos ix\,dx$$

i ist beliebige ganze positive Zahl.

(Jacobi) Bertrand, Calcul. Intég., p. 174, vergl. auch Schlömilch, Analyt. Studien, II, 49.

24) Ist

$$\int_0^\infty x^{2n}\varphi(x^2)\,dx = A_{2n}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}\varphi\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}dx = C_{2n},$$

so gilt nach Cauchy die Gleichung

$$C_{2n} = A_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}A_2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}A_4 + \cdots A_{2n}$$

Bertrand, Calcul. Intég., p. 228.

25) Ist $f(t)$ endlich und stetig zwischen $0 < t < \infty$, so gilt die Gleichung:

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \left\{\frac{u^2}{u^2-x^2}\int_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{u^2-t^2}\right\}du.$$

Schlömilch, Analytische Studien, II, 158.

26) Man hat

$$\int_0^\varkappa \left[(\varkappa-\xi)^{m-1}\int_0^\xi \frac{\varphi'(\eta)\,d\eta}{(\xi-\eta)^m}\right]d\xi = \frac{\pi}{\sin\pi m}\{\varphi(\varkappa)-\varphi(0)\}$$

Satz von Abel, ibid. S. 111. Vergl. Crelle's Journ., Bd. I, S. 153.

NB. Alle diese Methoden gelten, so lange die Entwickelung nach der Taylor'schen Reihe möglich ist, natürlich, wenn diese ihnen zu Grunde liegt. Vergleiche auch die betreffenden Capitel der Functionentheorie.

§. 97.

Mechanische Quadraturen.

Bei allen diesen Methoden darf die Function innerhalb der genommenen Grenzen ihr Zeichen nicht wechseln.

1) $$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{6}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right\} - \frac{x^5}{2880} f^{(IV)}(0) - \cdots$$

2) Sei

$$y = f(x), \quad nh = x, \quad x_0 = 0, \quad x_\varkappa = \varkappa h, \quad y_\varkappa = f(x_\varkappa),$$

so wird

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{1}{3}h(y_0 + y_n) + \frac{2}{3}h\sum_2^{n-2} y_\lambda + \frac{4}{3}h\sum_1^{n-1} y_\varkappa$$

$$\lambda = 2, 4, 6 \ldots$$

$$\varkappa = 1, 3, 5 \ldots$$

Simpson, Mathematical Dissertations, 1743, p. 109.

3) Sei

$$\int_0^x f(x)\,dx = nh\int_0^1 f(nhx)\,dx.$$

Setze

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots \alpha_n x^n,$$

so wird:

$$\int_0^x f(x)\,dx = nh\,\{A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots A_n y_n\}$$

$$A_p = A_{n-p} = \int_0^1 \frac{X_p}{M_p}\,dx$$

$$X_p = \frac{nx(nx-1)(nx-2)\ldots(nx-n)}{nx-p}$$

$$M_p = X_p, \text{ für } x = \frac{p}{n}$$

Cotes, De methodo differentiali, p. 32.

Für $n = 2$ folgt die Simpson'sche Regel.

Für $n = 3, 4, 5, \ldots 9, 10$, ergiebt sich:

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)^{*)}.$$

$$\int_0^{4h} f(x)\,dx = \frac{7}{80}(y_0 + y_4) + \frac{16}{45}(y_1 + y_3) + \frac{2}{15}y_2.$$

$$\int_0^{5h} f(x)\,dx = \frac{19}{288}(y_0 + y_5) + \frac{95}{96}(y_1 + y_4) + \frac{25}{144}(y_2 + y_3).$$

$$\int_0^{6h} f(x)\,dx = \frac{41}{840}(y_0 + y_6) + \frac{9}{35}(y_1 + y_5) + \frac{9}{280}(y_2 + y_4) + \frac{34}{105}y_3.$$

$$\int_0^{7h} f(x)\,dx = \frac{751}{17280}(y_0 + y_7) + \frac{3577}{17280}(y_1 + y_6) + \frac{49}{640}(y_2 + y_5) + \frac{2089}{17280}(y_3 + y_4).$$

$$\int_0^{8h} f(x)\,dx = \frac{989}{28350}(y_0 + y_8) + \frac{2944}{14175}(y_1 + y_7) - \frac{464}{14175}(y_2 + y_6) + \frac{5248}{14175}(y_3 + y_5) - \frac{454}{2835}y_4.$$

$$\int_0^{9h} f(x)\,dx = \frac{2857}{89600}(y_0 + y_9) + \frac{15741}{89600}(y_1 + y_8) + \frac{27}{2240}(y_2 + y_7) + \frac{1209}{5600}(y_3 + y_6) + \frac{2889}{44800}(y_4 + y_5).$$

$$\int_0^{10h} f(x)\,dx = \frac{16067}{598752}(y_0 + y_{10} +)\frac{26575}{149688}(y_1 + y_9) - \frac{16175}{199584}(y_2 + y_8) + \frac{5675}{12474}(y_3 + y_7) - \frac{4825}{11088}(y_4 + y_6) + \frac{17807}{24948}y_5.$$

4) Sei

$$\varphi'(x) = f(x)$$

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

---

*) Dieses Resultat hat schon Newton gefunden.

so wird

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = h f(x) + \frac{1}{2} h \Delta f(x) - \frac{1}{2!} B_1 h^2 \Delta f'(x) + \frac{1}{4!} B_3 h^4 \Delta f'''(x) - \cdots$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = h\{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \cdots \varphi(a+nh)\} - \frac{1}{2} h \{\varphi(b) + \varphi(a)\} - \frac{1}{2} B_1 h^2 \{\varphi'(b) - \varphi'(a)\} + \frac{1}{4!} B_3 h^4 \{\varphi'''(b) - \varphi'''(a)\} - \frac{1}{6!} B_5 h^6 \{\varphi^{(V)}(b) - \varphi^{(V)}(a)\} + \cdots$$

Sei ferner:

$$b - a = p = 8\theta,$$

so wird:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{p}{5670}\{217[\varphi(a) + \varphi(b)] + 352[\varphi(a+2\theta) + \varphi(a+6\theta)] + 486\,\varphi(a+4\theta)\} + \frac{1024\,p}{5670}[\varphi(a+\theta) + \varphi(a+3\theta) + \varphi(a+5\theta) + \varphi(a+7\theta)].$$

Diese Formeln rühren von Euler her.

Vergl. Bertrand, Calcul. intég., chap. XII.

Einige Coefficienten von der Form $\frac{B_{2n+1}}{2n+2!}$

$$\frac{B_1}{1.2} = 0{,}08333\,33333 \qquad \frac{B_7}{8!} = 0{,}00000\,08267$$

$$\frac{B_3}{4!} = 0{,}00138\,88889 \qquad \frac{B_9}{10!} = 0{,}00000\,00209$$

$$\frac{B_5}{6!} = 0{,}00003\,30688 \qquad \frac{B_{11}}{12!} = 0{,}00000\,0005$$

5) Methode von Gauss.

$$\int_g^h F(z)\,dz = \Delta \sum_1^n \frac{A_\varkappa}{2} \varphi\left\{\frac{1+\alpha_\varkappa}{2}\right\} + \varrho$$

$$= \Delta \sum_1^n R_\varkappa \varphi(a_\varkappa) + \varrho.$$

Dabei ist

$$\varDelta = h - g,\quad F(g + \varDelta . t) = \varphi(t),\quad R_m = \frac{A_m}{2},\quad a_m = \frac{1 + \alpha_m}{2},$$

α sind Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{d^n}{d\,x^n}(x^2 - 1)^n = 0$$

$$\varphi(t + \tfrac{1}{2}) = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + \cdots$$

$$\varrho = \frac{L_{2\varkappa}}{2^{2\varkappa}(2_{\varkappa+1})}\left\{\frac{\varkappa!}{1.3.5\ldots(2\varkappa-1)}\right\}^2$$

$n = 1$

$a_1 = 0{,}5$

$R_1 = 1$

$\varrho = \frac{1}{12} L_2$

$n = 2$

$a_1 = 0{,}2113248654$

$a_2 = 0{,}7886751346$

$R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$

$\varrho = \frac{1}{180} L_4$

$n = 3$

$a_1 = 0{,}1127016654$

$a_2 = 0{,}5$

$a_3 = 0{,}8872983346$

$R_1 = R_3 = \frac{5}{18},\quad R_2 = \frac{4}{9}$

$\varrho = \frac{1}{2800} L_6$

$n = 4$

$a_1 = 0{,}0694318442$

$a_2 = 0{,}3300094782$

$a_3 = 0{,}6699905218$

$a_4 = 0{,}9305681558$

$R_1 = R_4 = 0{,}1739274226$

$R_2 = R_3 = 0{,}3260725774$

$\log R_1 = 9{,}24036806$

$\log R_2 = 9{,}51331428$

$\varrho = \frac{1}{44100} L_8$

$n = 5$

$a_1 = 0{,}0469100770$

$a_2 = 0{,}2307653449$

$a_3 = 0{,}5$

$a_4 = 0{,}7692346551$

$a_5 = 0{,}9530899230$

$R_1 = R_5 = 0{,}11846344$

$R_2 = R_4 = 0{,}23931434$

$R_3 = \frac{64}{225}$

$\log R_1 = 9{,}073584349$

$\log R_2 = 9{,}3789687142$

$\log R_3 = 9{,}453997456$

$\varrho = \frac{1}{698544} L_{10}.$

6) Bei allen diesen Methoden wurden äquidistante oder bestimmte Werthe der Function als bekannt vorausgesetzt.

Sind zwischen den Grenzen a und b, $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ nicht äquidistante Werthe eingeschaltet, so wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{x-a}{\varphi(x)} f(x)\right]_{x=a} \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-a}$$

$$+ \sum_1^n \left[\frac{x-\alpha_\varkappa}{\varphi(x)} f(x)\right]_{x=\alpha_\varkappa} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_\varkappa}\,dx$$

$$+ \left[\frac{x-b}{\varphi(x)} f(x)\right]_{x=b} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-b}\,dx,$$

wobei

$$\varphi(x) = (x-a)(x-b)(x_1-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

gesetzt wurde.

Vergl. Dienger, Diff.- und Integralrechnung 1857, S. 537.

7) Man hat

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(\alpha) \sum_1^\infty \frac{A_\varkappa}{(n+1)!}$$

$$A_0 = 0, \quad A_\varkappa = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{1 - \frac{f(x+\alpha)}{f(\alpha)}} \right\}^n_{x=0}$$

Schlömilch, Mathematische Abhandlungen, S. 103, 1850.

In Bezug auf die folgenden Integraltafeln bemerken wir, dass, wenn nichts anderes bemerkt ist, wir mit

$$a, b, c, \ldots m, n$$

positive und ganze, mit

$$p, q, r \ldots$$

ebenfalls positive, sonst aber beliebige (rationale, irrationale, gebrochene und ganze) Zahlen bezeichnen wollen.

Bei bekannteren Integralen ist die Quelle nicht angeführt.

§. 98.

Integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1) $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, $n > -1$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \infty$

3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

4) $\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{a!}{b.\overline{b+1}\ldots\overline{b+n-2}}$, $b > 0$

5) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p dx = \frac{p\pi}{\sin p\pi}$, $p^2 < 1$

6) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{\sin p\pi}$, $p^2 < 1$

(5, 6: Crelle, 33, 13.)

7) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p x\,dx = \frac{1+p}{2}\,\frac{p\pi}{\sin p\pi}$, $p^2 < 1$. Crelle, 38, 162.

8) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

9) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

10) $\int_0^1 \frac{dx}{1-2x\cos\lambda+x^2} = \frac{1}{\sin\lambda}\,\mathrm{arc\,tgn}\,\frac{\sin\lambda}{1-\cos\lambda}$

11) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\lambda+x^2} = \log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)$

$$12)\quad \int_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{1 + 2x\cos\lambda + x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda},\quad p < 1$$

Legendre, Exerc. 4, 103.

$$13)\quad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{1+px} = -\frac{1}{1+p^2}\cdot\left\{\log\frac{1+p}{\sqrt{2}} + \frac{\pi p}{4}\right\}$$

$$14)\quad \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{p x^{p-1}}{1-x^p}\right)dx = \log p$$

Schlömilch, Studien, I, 7.

$$15)\quad \int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2\,\frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}$$

$$16)\quad \int_0^1 \frac{x^{a-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}}\,\pi$$

Schlömilch, Studien.

$$17)\quad \int_0^1 dx\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$18)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$19)\quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

$$20)\quad \int_0^1 x^{2a-1}\,dx\sqrt{1-x^2} = \frac{2^{a-1/2}}{3^{a/2}}$$

$$21)\quad \int_0^1 x^{2a}\,dx\sqrt{1-x^2} = \frac{3^{a-1/2}}{4^{a/2}}\cdot\frac{\pi}{4}$$

Crelle, 35, 13.

$$22)\quad \int_0^1 x^{2a}(1-x^2)^{b-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1^{a/2}\,1^{b/2}}{1^{a+b/2}}\,\frac{\pi}{2^{a+b+1}}$$

$$23)\quad \int_0^1 x^{2a-1}(1-x^2)^{b-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2^{a-1/2}\,1^{b/2}}{1^{a+b/2}}$$

$$24)\quad \int_0^1 \frac{x^{2a}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3^{a-1/2}}{2^{a/2}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

25) $\int_0^1 \frac{x^{2a-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2^{a-1/2}}{1^{a/2}}$

26) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+p\,x^2}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \log\{\sqrt{p}+\sqrt{1+p}\}$

27) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+p\,x)}} = \frac{2}{\sqrt{p}} \log\{\sqrt{p}+\sqrt{1+p}\}$

28) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$

29) $\int_0^1 \frac{(1-x)^a\,x^b}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{1^{a/2}\,1^{b/2}}{2^{a+b/2}}\,\pi.$ Ohm, Anm. 46 *).

30) $\int_0^1 \frac{1}{a-b\,x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{a(a-b)}},\quad 0 < b > a$

31) $\int_0^1 \log x \log(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

32) $\int_0^1 \frac{dx}{\log\log x} = 0.$ Mascheroni, Adn. p. 18 **).

33) $\int_0^1 dx \sqrt{\log\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$ Crelle, 17, 1.

34) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\log\frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi}.$ Ibid.

35) $\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n\,dx = (-1)^n\,\frac{n!}{a^{n+1}},\quad a > 0$

---

*) M. Ohm, Die Auswerthungsmethoden bestimmter Integrale, Nürnberg 1852, 437 S.

**) Mascheroni, Adnotationes ad Calc. integ. Euleri Ticini Galeatis, 1790.

36) $$\int_0^1 e^{-x}\sqrt{x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

37) $$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2+e\sqrt{\pi}}{4e}$$

38) $$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

39) $$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

40) $$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = -\sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$$

41) $$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{8}$$

42) $$\int_0^1 \cos qx\,dx = \frac{1}{q}\sin q$$

43) $$\int_0^1 \sin qx\,dx = \frac{1}{q}(1-\cos q)$$

Crelle, 38, 331.

44) $$\int_0^1 \sin^2(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

45) $$\int_0^1 \cos^2(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

46) $$\int_0^1 \sin(2a\pi x)\,dx = 0.$$ Crelle, 35, 1.

47) $$\int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$

48) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x}\log x\,dx = -\sum_0^\infty \frac{1}{(p+n)^2}$$

49) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} (\log x)^{2a-1} = \frac{1 - 2^{2a-1}}{2a} \pi^{2a} B_{2a-1}$

50) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} (\log x)^{2a-1} = -\frac{2^{2a-2}}{a} \pi^{2a} B_{2a-1}$

Grunert's Archiv 6, 434.

51) $\int_0^1 \frac{dx}{x} \log(1 + x^p) = \frac{\pi^2}{12p}$

52) $\int_0^1 \frac{dx}{x} \log(1 - x^p) = -\frac{\pi^2}{6\pi}$

53) $\int_0^1 \frac{dx}{x} \log(1 - 2x\cos\lambda + x^2) = \frac{\pi^2}{3} - \pi\lambda + \frac{\lambda^2}{2}$

54) $\int_0^1 \frac{dx}{x} \log\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi^2}{4}$

55) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \log\frac{1+qx}{1-qx} = \pi \operatorname{arc\,sin} q$

56) $\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \log 2$

57) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \log 2 - 1$

58) $\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\log x} dx = \log\frac{p+1}{q+1}$

Bidone, Mem. Turin 1812, 231.

59) $\int_0^1 \frac{\log(1 + qx^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \log\frac{1 + \sqrt{1+q^2}}{2}$

60) $\int_0^1 \frac{\log(1 - x^2 \sin\lambda)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\pi \log\cos\frac{\lambda}{2}$

61) $\int_0^1 \operatorname{arc\,sin} px\,dx = \operatorname{arc\,sin} p - \frac{1}{p}\sqrt{1-p^2} - \frac{1}{p}$

62) $$\int_0^1 arc\,tgn\,p\,x\,d\,x = arc\,tgn\,p - \frac{1}{2p}\,log\,(1+p^2)$$

63) $$\int_0^1 \frac{d\,x}{x}\,arc\,sin\,x = \frac{\pi}{2}\,log\,2$$

64) $$\int_0^1 \frac{d\,x}{x}\,arc\,tgn\,x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

§. 99.

Integrale $\int_{-1}^{+1} f(x)\,d\,x$ und $\int_1^\infty f(x)\,d\,x$.

1) $$\int_{-1}^{+1} \frac{d\,x}{x} = -(2\varkappa + 1)\,\pi\,i,$$ $\varkappa$ beliebig aber ganz.

2) $$\int_1^\infty \frac{d\,x}{x\sqrt[q]{x^p - 1}} = \frac{\pi}{p}\,cosec\,\frac{\pi}{q}.$$ Ohm, Ausw. 14.

3) $$\int_1^\infty (x^b - 1)^{c - \frac{a}{b}}\,\frac{d\,x}{x} = (-1)^c\,\frac{\pi}{b}\,cosec\,\frac{a\,\pi}{b}.$$ Crelle, 38, 162.

4) $$\int_1^\infty \frac{d\,x}{x(x^b - 1)^{\frac{a}{b}}} = \frac{\pi}{b}\,cosec\,\frac{a\,\pi}{b}.$$ Ibid.

5) $$\int_1^\infty \frac{log\,x}{1+x^2}\,d\,x = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}.$$ Mem. Turin 1812, 231.

6) $$\int_1^\infty \frac{log\,x}{1-x^2}\,d\,x = -\frac{\pi^2}{8}.$$ Ohm, Ausw. 16.

7) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} \, arc\,tgn\, x = \infty$

8) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = arc\,cot\,x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$

9) $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{q}} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{q\pi}}{\sqrt[q]{e}}$.

§. 100.

Integrale $\int_0^p f(x)\,dx$.

1) $\int_0^p x^{2b}\,dx\sqrt{p^2-x^2} = \frac{1^{b/2}}{2^{b+1/2}}\, p^{2b+2}\, \frac{\pi}{2}$. Sohnke, Sammlung*).

2) $\int_0^p x^{2b+1}\,dx\sqrt{p^2-x^2} = \frac{2^{b/2}}{3^{b+1/2}}\, p^{2b+3}$. Ibid.

3) $\int_0^p \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tgn\,p$

4) $\int_0^p \frac{x^{2b}\,dx}{\sqrt{p^2-x^2}} = \frac{1^{b/2}}{2^{b/2}}\, p^{2b}\, \frac{\pi}{2}$. Sohnke, Samml.

5) $\int_0^p \frac{x^{2b+1}\,dx}{\sqrt{p^2-x^2}} = \frac{2^{b/2}}{3^{b/2}}\, p^{2b+1}$. Ibid.

---

*) Sohnke, Sammlung von Aufgaben aus der Differenz- und Integralrechnung. Halle.

6) $\int\limits_0^p \frac{x^b\,dx}{\sqrt{px - x^2}} = \frac{1^{b/2}}{2^{b/2}}\, p^b\,\pi.$ Rogner, Mat.*).

7) $\int\limits_0^p arc\sin\frac{x}{p}\,dx = \frac{\pi - 2}{2}\,p$

8) $\int\limits_0^p arc\cos\frac{x}{p}\,dx = p$

9) $\int\limits_0^p \frac{e^{-qx}}{x - p}\,dx = -\infty.$ Grunert's Archiv, 10, 247.

10) $\int\limits_0^p log(1 + px)\,\frac{dx}{1 + x^2} = log(1 + p^2)\,arc\,tgn\,p.$

Grunert's Archiv, 4, 113.

§. 101.

Integrale $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx.$

1) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}},\quad a > 0,\quad b > 0$

2) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{b^2 - x^2},$ unbestimmt. Grunert's Archiv, 10, 240.

3) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(ax + b)(cx + d)} = \frac{1}{ad - bc}\,log\,\frac{ad}{bc},\ a < b,\quad c < d$

*) Rogner, Materialien aus der höh. Analys. Gratz 1853, 463 S.

4) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)} = \frac{1}{pqr}\left\{br\log\frac{a_1 b}{a b_1} + b_2 p \log\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}\right\}$$

wenn $\frac{a}{b} > \frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2}$ und alle positiv, ferner

$$p = ab_1 - a_1 b,\quad q = ab_2 - a_2 b,\quad r = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

5) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{9}\sqrt{3}$$

6) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

7) $$\int_0^\infty \frac{g+hx^2}{b^2+x^2}\cdot\frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{g-hb^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{\pi}{2b}$$

8) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

9) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1-2x\cos\lambda+x^2} = \frac{\pi-\lambda}{\sin\lambda},\quad \frac{\pi}{2} > \lambda > 0$$

10) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\lambda+x^2} = \frac{\lambda}{\sin\lambda},\quad \frac{\pi}{2} > \lambda > 0$$

11) $$\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1+2qx\cos\lambda+q^2x^2} = \frac{\pi}{q^{p+1}\sin p\pi}\cdot\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda},\quad \begin{matrix} p^2 < 1 \\ \lambda^2 < \pi^2 \end{matrix}$$

Plana, Mem. Brux. Tom. 10.

$$\left.\begin{aligned} &12)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab+2a\sqrt{ac}}} \\ &13)\quad \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{\pi}{2a\sqrt{1+4ab}} \end{aligned}\right\}\ b^2 < 4ac$$

14) $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

15) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{q\,x+1} = \frac{\pi}{q^p}\,cosec\,p\,\pi,\quad p < 1.$ Crelle, 45, 370.

16) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,cosec\,\frac{p\,\pi}{2},\quad 2 \geqq p \geqq 0.$

Cauchy, Cours. Leç. 34.

17) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}\,cotg\,\frac{p\,\pi}{2},\quad 1 > p.$ Ibid.

18) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^a} = \frac{1^{a-1/2}}{2^{a-1/2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot$ Ibid. Leç. 33.

19) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p - x^{-p}}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\,tgn\,\frac{p\,\pi}{2},\quad 1 > p > 0.$

Grunert's Archiv, 3, 278.

20) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p} = \frac{\pi}{p}\,cosec\,\frac{q\,\pi}{p},\quad p > q > 0$

$= \infty \qquad q > p$

21) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{-p}}{x^q + x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2\,q}\,tgn\,\frac{p\,\pi}{2\,q}.$

Cauchy, Sav. Etran. 1827, 599.

22) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p + x^{-p}}{x^q + x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{q}\,sec\,\frac{p\,\pi}{2\,q}$

23) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p - x^{-p}}{x^q - x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{q}\,tgn\,\frac{p\,\pi}{2\,q}.$ Crelle, 38, 1.

24) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(q^2+x^2)\sqrt{p^2+x^2}} = \frac{1}{q\sqrt{p^2-q^2}}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{q},\ q<p$

$= \frac{1}{q\sqrt{q^2-p^2}}\log\frac{q+\sqrt{q^2-p^2}}{q},\ q>p$

25) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2p^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,p}$

26) $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x^2}} dx = \sqrt{\pi}$

27) $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{p^2}{4x^2}} dx = \frac{1}{2} e^{-p} \sqrt{\pi}$

28) $\int_0^\infty e^{-x^2+px} dx = \frac{1}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \sqrt{\pi}$

29) $\int_0^\infty x^n e^{-px} dx = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0$

30) $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2a} dx = \frac{1^{a/2}}{2^{a+1}} \sqrt{\pi}$. Crelle, 35, 13.

31) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^{2px}} = \frac{1}{2p} \log 2$

32) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{px}+e^{-px}} = \frac{\pi}{4p}$

33) $\int_0^\infty \sin x\, dx$ und $\int_0^\infty \cos x\, dx$ sind unbestimmt.

34) $\int_0^\infty \sin \frac{x^2}{2q^2} dx = \int_0^\infty \cos \frac{x^2}{2q^2} dx = \frac{q}{2} \sqrt{\pi}$

Bidone, Mem. Turin, 1812, 231.

35) $\int_0^\infty \sin^{2a} x\, dx = \int_0^\infty \cos^{2a} x\, dx \doteq \infty$

36) $\int_0^\infty \sin^{2a+1} x\, dx = \frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}$ Raabe, Integ. 149 *).

37) $\int_0^\infty \cos^{2a+1} x\, dx = 0$

---

*) Raabe, Integralrechnung, 3. Thl., Zürich 1839.

38) $\int_0^\infty \sin^{2a} x \sin p x \, d x = \frac{1}{p} \cdot \frac{1^{2a/1}}{2^2 - p^2 . 4^2 - p^2 \dots 4 a^2 + p^2}$

39) $\int_0^\infty \sin^{2a} x \cos p x \, d x = 0$. Raabe, Integ. 149.

40) $\int_0^\infty \sin^{2a+1} x \sin p x = 0$

41) $\int_0^\infty \sin^{2a+1} x \cos p x = \frac{1^{2a-1/1}}{(1^2 - p^2)(3^2 - p^2)\dots(2a + 1)^2 - p^2}$

42) $\int_0^\infty \frac{\sin b x}{\sin a x} \, d x = 0, \quad b < a$

43) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{1 - p \cos x} \, d x = 0$

44) $\int_0^\infty \frac{\cos a x}{1 - p \cos x} \, d x = \infty$

45) $\int_0^\infty \frac{\cos a x}{(1 - p^2 \sin^2 x)^{\frac{2b+1}{2}}} \, d x = 0, \quad p^2 < 1$

46) $\int_0^\infty e^{-p^2 x^2} x \, d x = \frac{1}{2 p^2}$

47) $\int_0^\infty e^{-p x^2} x^2 \, d x = \frac{1}{4 \pi} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$

48) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} \, d x = \frac{\pi^2}{12}$

49) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} \, d x = \frac{\pi^2}{6}$. Cauchy, Mem. Paris 1823, 603.

50) $\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x} + 1} \, d x = \frac{2^{2a-1} - 1}{2 a} B_{2a-1}$

51) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x}-1}\,dx = \frac{2^{2a-1}}{2a}\,B_{2a-1}$. Crelle, 42, 348.

52) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2a+1}}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4a}\,B_{2a-1}$. Ibid. 35, 55.

53) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{\pi x}+1}{e^{\pi x}-1}\,x^{2a-1}\,dx = \frac{2^{2a-1}}{a}\,B_{2a-1}$

Grunert's Archiv, 1, 360.

54) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{\pi x}x^{2a}}{(e^{\pi x}+1)^2}\,dx = \frac{2^{2a-1}-1}{\pi}\,B_{2a-1}$

55) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{\pi x}x^{2a}}{(e^{\pi x}-1)^2}\,dx = \frac{2^{2a-1}}{\pi}\,B_{2a-1}$

56) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{e^{x}+e^{-x}}\,dx = -\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

57) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{e^{ax}-e^{-ax}}\,dx = \frac{\pi^2}{8a^2}$

58) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx = \frac{2^{2a}-1}{4a}\,B_{2a-1}$

Grunert's Archiv, 12, 130.

59) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}\,dx = \log\frac{q}{p}$

60) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{e^{x}-e^{-x}}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log 2$

61) $\int\limits_0^\infty e^{-px}\,dx\sqrt{x} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

62) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-qx}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{q}}$

63) $$\int_0^\infty \frac{x\,d\,x}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\,\pi\, log\, 2$$

64) $$\int_0^\infty \frac{log\, x}{p^2 + q^2 x^2}\, d\,x = \frac{\pi}{2\,p\,q}\, log\, \frac{p}{q}$$

65) $$\int_0^\infty log\,(q^2 + x^2)\, \frac{d\,x}{p^2 + x^2} = \frac{\pi}{p}\, log\,(p + q)$$

66) $$\int_0^\infty log\left(1 + \frac{q^2}{x^2}\right) \frac{d\,x}{p^2 + x^2} = \frac{\pi}{p}\, log\, \frac{p + q}{p}$$

67) $$\int_0^\infty log\left(1 + \frac{q^2}{x^2}\right) \frac{d\,x}{p^2 - x^2} = \frac{\pi}{p}\, arctgn\, \frac{q}{p}$$

68) $$\int_0^\infty \frac{log\, x\, d\,x}{(q + x)^2} = \frac{1}{q}\, log\, q, \quad q < 1$$

69) $$\int_0^\infty \frac{log\, x}{x + q} \cdot \frac{d\,x}{x + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(log\, q)^2}{q - 1}$$

70) $$\int_0^\infty x^{2a} \sin q\, x\, d\,x = (-1)^a\, \frac{1^{2a/1}}{q^{2a+1}}$$

71) $$\int_0^\infty x^{2a} \cos q\, x\, d\,x = 0$$

72) $$\int_0^\infty x^{2a-1} \sin q\, x\, d\,x = 0$$

73) $$\int_0^\infty x^{2a-1} \cos q\, x\, d\,x = (-1)^a\, \frac{1^{2a-1/1}}{q^{2a}}$$

Oettinger, Crelle, 38, 216.

74) $$\int_0^\infty \frac{\sin p\, x}{x}\, d\,x = \frac{\pi}{2}, \quad p > 0$$
$$= 0, \quad p = 0$$
$$= -\frac{\pi}{2}, \quad p < 0$$

75) $\int_0^\infty \frac{\cos p x}{x}\, d x = \infty$

76) $\int_0^\infty \frac{tgn\, p x}{x}\, d x = \frac{\pi}{2}.$ Legendre, Exerc. 5, 35.

77) $$\int_0^\infty \frac{\sin q x \cos p x}{x}\, d x = \frac{\pi}{2},\ q > p$$
$$= 0,\ q < p$$
$$= \frac{\pi}{4},\ p = q$$

78) $\int_0^\infty \frac{\sin q x}{x^2}\, d x = \infty$

79) $\int_0^\infty \frac{\cos q x}{x^2}\, d x = \infty$

80) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 q x}{x^2}\, d x = \frac{q \pi}{2}$

81) $$\int_0^\infty \frac{\sin p x \sin q x}{x^2}\, d x = \frac{p \pi}{2},\ p \leqq q$$
$$= \frac{q \pi}{2},\ p \geqq q$$
Ohm, Auswahl, 18.

82) $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 q x \cos^2 p x}{x^2}\, d x = \frac{2 q - p}{4}\pi,\ q > p$$
$$= \frac{q \pi}{4},\ p = q$$
$$= \frac{q \pi}{4},\ q < p$$
Bidone, Mem., Turin 1812, 231.

83) $$\int_0^\infty \frac{1 - \cos p x}{x^2}\, d x = \frac{\pi q}{2},\ q > 0$$
$$= -\frac{\pi q}{2},\ q < 0$$
Poisson, Mem. Acad., 1816, 71.

84) $$\int_0^\infty \frac{\cos qx - \cos px}{x^2}\,dx = \frac{p-q}{2}\,\pi.$$

Bidone, Mém., Turin 1812, 231.

85) $$\int_0^\infty \frac{\cos px}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^p, \quad p < 0$$

$$= \frac{\pi}{2}\,e^{-p}, \; p \geqq 0$$

86) $$\int_0^\infty \frac{x \sin px}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\pi e^{-p}, \qquad p > 0$$

$$= -\frac{1}{2}\,\pi e^p, \quad p < 0$$

87) $$\int_0^\infty \frac{x\,tgn\,px}{1+x^2}\,dx = \pi\,\frac{e^{-p}}{e^p + e^{-p}}$$

88) $$\int_0^\infty \frac{x\,cotgn\,px}{1+x^2}\,dx = \pi\,\frac{e^{-p}}{e^p - e^{-p}}$$

Legendre, Exerc., 5, 85.

89) $$\int_0^\infty \frac{\cos qx}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\sin q$$

90) $$\int_0^\infty \frac{x \sin qx}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\cos q$$

Cauchy, Sav. Etran., 1827, 124.

91) $$\int_0^\infty \frac{\cos px}{q^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2q}\,e^{-pq}, \quad p \geqq 0$$

92) $$\int_0^\infty \frac{x \sin px}{q^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-pq}, \quad p > 0$$

93) $$\int_0^\infty \frac{x \sin px}{q^2-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\cos pq$$

94) $$\int_0^\infty \frac{\cos px}{q^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2q}\sin pq$$

$$95)\quad \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{q^2+x^2}\,dx = \pi e^{-aq}\,\frac{e^{bq}-e^{-bq}}{4q},\quad 0<b<a$$

$$96)\quad \int_0^\infty \frac{x \sin ax \sin bx}{q^2+x^2}\,dx = \pi e^{-aq}\,\frac{e^{-bq}+e^{bq}}{4},\quad 0<b<a$$

$$= \pi e^{-bq}\,\frac{e^{-aq}-e^{aq}}{4},\quad a<b<\infty$$

$$97)\quad \int_0^\infty \frac{\cos ax \cos bx}{q^2+x^2}\,dx = \pi e^{-aq}\,\frac{e^{bq}+e^{-bq}}{4q},\quad 0<b<a$$

$$= \pi e^{-bq}\,\frac{e^{aq}+e^{-aq}}{4q},\quad a<b<\infty$$

Schlömilch, Studien, 1*).

$$98)\quad \int_0^\infty \frac{\sin px}{q^2+x^2}\,\frac{dx}{x^{2a-1}} = (-1)^a\,\frac{\pi}{2q^{2a}}\,e^{-pq}$$

$$99)\quad \int_0^\infty \frac{\cos px}{q^2+x^2}\,\frac{dx}{x^{2a}} = (-1)^a\,\frac{\pi}{2q^{2a+1}}\,e^{-pq}$$

$$100)\quad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+2p\cos ax+p^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1+p},\quad p<1$$

$$= \frac{1}{2p}\,\frac{\pi}{1+p},\quad p>1$$

$$101)\quad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1-2p\cos ax+p^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1-p},\quad p<1$$

$$= \frac{1}{2p}\,\frac{\pi}{1-p},\quad p>1$$

Plana, Mém., Turin 1818, 7.

$$102)\quad \int_0^\infty \frac{\log \sin \dfrac{mx}{2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\log\frac{1-e^{-m}}{2}$$

$$103)\quad \int_0^\infty \frac{\log \cos \dfrac{mx}{2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\log\frac{1+e^{-m}}{2}$$

$$104)\quad \int_0^\infty \frac{\log \operatorname{tgn} \dfrac{mx}{2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\log\frac{e^m-1}{e^m+1}$$

---

*) Schlömilch, Analytische Studien, 1848, 2 Thle.

105) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}\,\frac{\sin mx}{1+2\alpha\cos mx+\alpha^2}=\frac{\pi}{2(\alpha+e^m)}$

106) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\log(1-2\alpha\cos mx+\alpha^2)=\pi\log(1-\alpha e^{-m})$

107) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sin ax}\,\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}},\quad b<a$

108) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sin ax}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^b+e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$

Legendre, Exerc., 5, 29.

109) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\cos ax}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^b+e^{-b}}{e^a+e^{-a}},\quad a>b.$ Ibid.

110) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-p\cos rx}{1-2p\cos rx+p^2}\,\frac{dx}{q^2+x^2}$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2q}\cdot\frac{1}{1-pe^{-rq}},\quad p^2<1.$ Crelle, 25, 74.

$\displaystyle=\frac{\pi}{2q}\cdot\frac{1}{1-pe^{rq}},\quad p^2>1.$ Ohm, Ausw., 26.

111) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin rx\,dx}{1-2p\cos rx+p^2}\,\frac{x}{q^2+x^2}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1+p}\,\frac{e^{rq}}{e^{2qr}-p},\quad p<1.$ Legendre, Exerc., 4, 132.

$\displaystyle=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1+p}\,\frac{e^{qr}}{pe^{2rq}-1},\quad p>1.$ Ohm, Ausw., 26.

112) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xp}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2p}},\quad p>0;\ =-\sqrt{\frac{\pi}{2p}},\quad p<0$

113) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xp}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2p}}$

114) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin px}{x\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{2p\pi}.$ Mém. de Turin, 1821, 209.

115) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos p x}{x \sqrt{x}} \, d x = -\sqrt{2 p \pi}.$ Crelle, 38, 216.

116) $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin a x \cos b x}{\sqrt{x}} \, d x = \left\{\frac{1}{2\sqrt{a+b}} + \frac{1}{2\sqrt{a-b}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad a > b$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a = b$$
$$= \left\{\frac{1}{2\sqrt{a+b}} - \frac{1}{2\sqrt{b-a}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad a < b.$$

Bidone, Mém., Turin 1812, 231.

117) $$\int\limits_0^\infty e^{-p x} \sin q x \, d x = \frac{q}{p^2 + q^2}$$

118) $$\int\limits_0^\infty e^{-p x} \cos q x \, d x = \frac{p}{p^2 + q^2}$$

119) $$\int\limits_0^\infty e^{-p x^2} \cos q x \, d x = \frac{1}{2} e^{-\frac{q^2}{4 p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

Cauchy, Exerc., 1827, p. 233.

120) $$\int\limits_0^\infty e^{-p x^2} \sin q x \, d x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(n+2)^{n/1}} \cdot \frac{q^{2n+1}}{p^{n+1}}.$$

Crelle, 38, 216.

121) $$\int\limits_0^\infty \frac{e^{2 a x} - e^{-2 a x}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \, d a = \frac{1}{2} \operatorname{tgn} x$$

122) $$\int\limits_0^\infty \frac{(e^{a x} - e^{-a x})^2}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \, a \, d a = \frac{1}{4} \operatorname{tgn}^2 x$$

123) $$\int\limits_0^\infty \frac{a^{2n-1} \, d a}{e^{2 a \pi} - 1} = \pm \frac{1}{2 n} B_{2n-1}$$

124) $$\int\limits_0^\infty \frac{e^{2 a x} - e^{-2 a x}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \, a \, d a = \frac{1}{4 \cos^2 x}$$

125) $$\int\limits_0^\infty \frac{(e^{a x} - e^{-a x})^2}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \, \frac{d a}{a} = -\frac{1}{4} \log \cos x$$

126) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - 1}\, dx = \frac{1}{a} - cotgn\, a$

127) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin a x}{e^{\pi x} - 1}\, dx = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a} + \frac{e^a + e^{-a}}{e^{-a} - e^a}\right\}.$

Plana, Mem., Turin 1818.

§. 102.

Integrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x \pm q} = 0$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{p^2 + x^2} = \frac{\pi}{p}$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - p^2} = 0$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b}}{1 + x^{2a}}\, dx = \frac{\pi}{a}\, cosec \left\{\frac{2b+1}{2a}\, \pi\right\}, \; 2b < 2a - 1.$

Grunert's Archiv, 2, 266.

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b-1}}{1 + x^{2a}}\, dx = 0$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b}}{1 + x^{2a-1}}\, dx = \frac{\pi}{2a-1}\, cotgn \left(\frac{2b-1}{2a-1} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

7) $\int\limits_{\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b-1}}{1 + x^{2a-1}}\, dx = \frac{\pi}{2a-1}\, tgn\, \frac{b\pi}{2a-1}.$ Ibid.

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b}}{1 - x^{2a}} dx = \frac{\pi}{a} cotgn \left(\frac{2b+1}{2a} \pi\right), \quad 2b < 2a - 1$

9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b-1} dx}{1 - x^{2a}} = 0, \quad 2b < 2a - 1$

10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b}}{1 - x^{2a-1}} dx = \frac{\pi}{2a-1} cotgn \left\{\frac{2b+1}{2a-1} \frac{\pi}{2}\right\}$

11) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b-1}}{1 - x^{2a-1}} dx = -\frac{\pi}{2a-1} tgn \frac{b\pi}{2a-1}.$

Grunert's Archiv, 2, 266.

12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a + bx}{x^2 + 2cx \cos\lambda + c^2} dx = \frac{\pi}{c \sin\lambda} \left(a - \frac{1}{2} b^2\right).$

Plana, Mem., Turin 1818, 7.

13) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \infty$

14) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$

15) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2-qx} dx = e^{\frac{q^2}{4p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$ Cauchy, Exerc., 1827, 233.

16) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2+qx} dx = e^{\frac{q^2}{4p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$ Ohm, Ausw., 20.

17) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2-\frac{q}{x^2}} dx = e^{-2\sqrt{pq}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$ Cauchy, P., 19, 511.

18) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{1 + e^{-ax}} dx = \frac{\pi}{a} cosec \frac{b\pi}{a}$

19) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(px^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$

20) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$

Schlömilch, Studien, 1, 13.

21) $\int_{-\infty}^{+\infty} sin(p x^2 + q x + r) d x = sin \left\{\frac{\pi}{4} - \frac{q^2 - 4 p r}{4 p}\right\} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$

22) $\int_{-\infty}^{+\infty} cos(p x^2 + q x + r) d x = cos \left\{\frac{\pi}{4} - \frac{q^2 - 4 p r}{4 q}\right\} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$

Ohm, Ausw., 25.

23) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{e^x + q} d x = \frac{\pi q^{p-1}}{sin\, p \pi} \{log\, q - \pi\, cotgn.\, p \pi\}, \quad p < 1$

24) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px} \sqrt{x}\, d x = \frac{1}{2 p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$ Ohm, Ausw., 20.

25) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin\, a x}{x} d x = \pi$

26) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin\, p x}{x \pm q} d x = \pi\, cos\, p q.$ Bidone, Mem., Turin 1812, 231.

27) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin\, p x}{q^2 + x^2} d x = 0.$ Moigno, Int., 133.

28) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, sin\, p x}{q^2 + x^2} d x = \pi e^{-pq}.$ Ohm, Ausw., 25.

29) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p + q x}{r + 2 s x + x^2} sin\, t x\, d x$

$= \left\{\frac{p - q s}{\sqrt{r - s^2}} sin\, r t + q\, cos\, r t\right\} \pi e^{-t\sqrt{r - s^2}}.$ Ohm, Ausw., 25.

30) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin\, p x}{q^2 + x^2} \cdot \frac{d x}{x^{2a}} = 0$

31) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin\, p x}{q^2 + x^2} \cdot \frac{d x}{x^{2a-1}} = (-1)^a \frac{\pi}{q^{2a}} e^{-pq}$

32) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\, p x}{x \pm q} d x = \pm \pi\, sin\, p q.$ Mem. Turin 1812.

33) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos p x}{x^2 + q^2} d x = \frac{\pi}{q} e^{-pq}$. Ohm, Ausw., 25.

34) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos p x}{x^2 + q^2} d x = 0$. Ohm, Ausw., 23.

35) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p + q x}{r + 2 s x + x^2} \cos t x \, d x$

$$= \left\{ q \sin r t - \frac{p - q s}{\sqrt{r - s^2}} \cos r t \right\} \pi e^{-t\sqrt{r-s^2}}.$$ Ibid., 25.

36) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos p x}{q^2 + x^2} \frac{d x}{x^{2a}} = (-1)^a \frac{\pi}{q^{a+1}} e^{-pq}$

37) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos p x}{q^2 + x^2} \frac{d x}{x^{2a-1}} = 0$

38) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tgn\, p x}{x} d x = \pi.$

§. 103.

Integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \, d x$.

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgn\, x \, d x = \frac{1}{2} \log 2$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgn^a\, x \, d x = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a + 2n + 1}$.

Grunert's Archiv, 6, 434.

3) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgn\, x}{1 + p\, tgn\, x}\, dx = -\frac{1}{1+p^2}\left\{log\, \frac{1+p}{\sqrt{2}} - p\, \frac{\pi}{4}\right\}$$

4) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, tgn\, x\, dx = -\frac{\pi}{8}\, log\, 2 + \frac{1}{2}\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

5) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\, dx}{tgn\, x} = \frac{\pi}{8}\, log\, 2 + \frac{1}{2}\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

6) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, sin\, x\, dx = -\frac{\pi}{4}\, log\, 2 - \frac{1}{2}\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

7) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, cos\, x\, dx = -\frac{\pi}{4}\, log\, 2 + \frac{1}{2}\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

8) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} log\, tgn\, x\, dx = -\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$$

9) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} log(1 + tgn\, x)\, dx = \frac{\pi}{8}\, log\, 2.$$ Grunert's Archiv, 6, 448.

§. 104.

Integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin b x\, d x = 0, \quad b = 4a$$
$$= \frac{1}{4a+1}, \quad b = 4a+1$$
$$= \frac{1}{2a+1}, \quad b = 4a+2$$
$$= \frac{1}{4a+3}, \quad b = 4a+3$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos b x\, d x = 0, \quad b = 4a$$
$$= \frac{1}{4a+1}, \quad b = 4a+1$$
$$= 0, \quad b = 4a+2$$
$$= \frac{-1}{4a+3}, \quad b = 4a+3$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a} x\, d x = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \cdot \frac{\pi}{2}\cdot$ Crelle, 38, p. 331.

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} x\, d x = \frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}\cdot$ Ibid., p. 162.

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a} x\, d x = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \cdot \frac{\pi}{2}\cdot$ Cauchy, Cours. Leç., 32.

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2a+1} x\, d x = \frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}$. Crelle, 38, p. 162.

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2a} x\, cos^{2b} x\, d x = \frac{1^{a/2}\, 1^{b/2}}{2^{a+b/2}} \frac{\pi}{2}$. Crelle's Journ., 15, 1.

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2a} x\, cos^{2b+1} x\, d x = \frac{1}{2a+1} \frac{1^{a/2}\, 2^{b/2}}{3^{(a+b)/2}}$. Ibid. 38, 162.

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2a+1} x\, cos^{2b} x\, d x = \frac{1^{a/2}\, 1^{b/2}}{3^{a+b/2}}$. Ohm, Ausw., 49.

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2a+1} x\, cos^{2b+1} x\, d x = \frac{1^{a+1/1}\, 1^{b/1}}{1^{a+b+1/1}} \frac{1}{2(a+1)}$.

Crelle, 38, 162.

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{a+b} x\, tgn^{2a+1} x\, d x = \frac{1}{2b} \frac{1^{a/1}\, 1^{b/1}}{1^{a+b/1}}$. Ibid. 38, 162.

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{2a-1} x}{sin^{2b} x} d x = (-1)^b \frac{1}{2a} \frac{2^{a/2}}{1^{b/2}\, 1^{a-b/2}}$. V. T. 12, Nr. 19.

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{2a} x}{sin^{2b} x} d x = (-1)^b \frac{\pi}{4} \frac{1^{a/2}}{1^{b/2}\, 2^{a-b/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^{2a} x}{cos^{2b} x} d x$. Ibid.

14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^{2a-1} x}{cos^{2b} x} d x = \frac{(-1)^b}{2a} \frac{2^{a/2}}{1^{b/2}\, 1^{(a-b)/2}}$. Ibid.

15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d x}{1 - sin\, x\, cos\, \lambda} = (\pi - \lambda)\, cosec\, \lambda$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x \cos \lambda} = \lambda \operatorname{cosec} \lambda.$ V. T. 12, Nr. 19.

17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p + q \cos x} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - q^2}} \operatorname{arc cos} \frac{q}{p}, \quad q < p.$

Lobatto, Integ. 53*).

$$= \frac{1}{\sqrt{q^2 - p^2}} \log \frac{q + \sqrt{q^2 - p^2}}{q}, \quad p < q$$

$$= \frac{1}{p} \qquad p = q$$

18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{-p + q \cos x} = -\frac{1}{\sqrt{q^2 - p^2}} \log \frac{\sqrt{q^2 - p^2} - q}{p}, \quad p < q$

$$= -\infty \qquad p = q$$

Ueber die letzteren Integrale Grunert's Archiv 21, 26.

19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + p^2 \operatorname{tgn}^2 x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + p}.$ Grunert's Arch. 10, 449.

20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p^2 \cos^2 x + q^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2pq}.$ Crelle, 34, 101.

21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{p} \operatorname{arc tgn} p, \quad p^2 < 1.$ Ibid. 46, 119.

22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2p} \log \frac{1 + p}{1 - p}, \quad p^2 < 1.$ Ibid.

23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

---

*) Lobatto, Lessen over de Integraal-Reckening, 'sGravenh.

24) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{tgn\,x} = \frac{\pi}{2} \log 2$. Grunert's Arch. 10, 449.

25) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,tgn\,x\,dx = \infty$

26) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x} = 2 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Legendre, Exerc. 5, 61.

27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin 2x} = \infty$. Cauchy, Exerc. 1826, p. 205.

28) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 - 2p\cos x + p^2}\,dx = \frac{\pi}{p} \log(1-p)$

29) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

30) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\,dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

31) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log tgn\,x\,dx = 0$

32) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + q\cos^2 x)\,dx = \pi \log \frac{1+\sqrt{1+q}}{2}$.

Mém. Kasan. 1835, 1.

33) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + q^2 tgn^2 x)\,dx = \pi \log(1+q)$

§. 105.

Integrale $\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx$.

$$1)\quad \int\limits_0^{\pi} \sin^{2a+1} x\,dx = \frac{(1^{a/1})^2}{2^{2a/1}}\,2^{2a}.\quad \text{Crelle, 38, 162.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2) & \int\limits_0^{\pi} \cos^{2a+1} x\,dx = 0 \\ 3) & \int\limits_0^{\pi} \cos^{2a} x\,dx = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}}\,\pi \end{array}\right\}\ \text{Cauchy, Exerc. 1826, p. 205.}$$

$$\begin{array}{ll} 4) & \int\limits_0^{\pi} \sin a x \sin b x\,dx = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad a \gtrless b \\ 5) & \int\limits_0^{\pi} \cos a x \cos b x\,dx = 0 \end{array}$$

$$6)\quad \int\limits_0^{\pi} \sin^2 p x\,dx = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 p x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 7) & \int\limits_0^{\pi} \sin p x \sin a x\,dx = (-1)^{a-1}\frac{a \sin p\pi}{a^2 - p^2} \\ 8) & \int\limits_0^{\pi} \cos p x \cos a x\,dx = (-1)^{a}\frac{p \sin p\pi}{a^2 - p^2} \end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Schlömilch}\\ \text{Beitr. I, §. 8.}\end{array}$$

$$9)\quad \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x} = 0.$$

$$10)\quad \left.\begin{array}{ll} \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{p + q\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}}, & p^2 > q^2 \\ \qquad\qquad = 0 & p^2 < q^2 \end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Grunert's Archiv}\\ 21,\ 26.\end{array}$$

$$11)\quad \int_0^\pi \frac{dx}{-p+q\cos x} = \frac{-\pi}{\sqrt{p^2-q^2}},\ p^2>q^2 \qquad = 0 \quad q^2>p^2$$

Grunert's Arch. 21, 26.

$$12)\quad \int_0^\pi \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2} = \frac{\pi}{1-p^2},\ p^2<1 \qquad = \frac{\pi}{p^2-1},\ p^2>1$$

$$13)\quad \int_0^\pi \frac{dx}{1+2p\cos x+p^2} = \frac{\pi}{1-p^2},\ p<1$$

$$14)\quad \int_0^\pi \frac{\cos a x}{1-2p\cos x+p^2}\,dx = \frac{\pi p^a}{1-p^2},\ p^2<1 \qquad = \frac{\pi p^{-a}}{p^2-1},\ p^2>1$$

Euler, Calc. Int. 4, p. 4.

$$15)\quad \int_0^\pi \frac{x\sin x}{p+\cos x}\,dx = -\pi\log 2(1-p) \quad p<1 \qquad = -2\pi\log\{1-p+\sqrt{p^2-1}\} \quad p>1$$

$$16)\quad \int_0^\pi \frac{x\sin x}{p-\cos x}\,dx = \pi\log 2(1+p) \quad p<1 \qquad = 2\pi\log\{1+p-\sqrt{p^2-1}\} \quad p>1$$

Legendre, Exerc. 5, 75.

$$17)\quad \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1-2p\cos x+p^2}\,dx = \frac{\pi}{p}\log(1+p),\ p<1 \qquad = \frac{\pi}{p}\log\frac{1+p}{p},\ p>1$$

Poisson P., 17, 612.

$$18)\quad \int_0^\pi e^{qx}\sin p x\,dx = \frac{p}{p^2+q^2}\{1-e^{q\pi}\cos p\pi\}$$

$$19)\quad \int_0^\pi e^{qx}\cos p x\,dx = \frac{q}{p^2+q^2}\{e^{q\pi}\cos p\pi-1\}$$

Crelle, 34, 75.

20) $\int_0^\pi log(1 - 2p\cos x + p^2)\,dx = 0, \qquad p \leqq 1$

$= 2\pi \log p, \quad p > 1$

21) $\int_0^\pi log(1 + 2p\cos x + p^2)\,dx = 0, \qquad p < 1$

$= 2\pi \log p, \quad p > 1$

§. 106.

Integrale $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

1) $\int_0^{2\pi} \sin^{2a+1} x\,dx = 0$

2) $\int_0^{2\pi} \sin^{2a} x\,dx = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \cdot 2\pi$

3) $\int_0^{2\pi} \sin^{2a+1} x \cos bx\,dx = 0$

4) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + p^2 - 2p\cos x} = \frac{2\pi}{1 - p^2}, \quad p < 1$

$= \frac{2\pi}{p^2 - 1}, \quad p > 1$ Grunert's Archiv 13, 193.

5) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin ax\,dx}{1 + p^2 - 2p\cos x} = 0, \quad p < 1.$ Raabe, Integ. 172.

6) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos a x}{1+p^2-2p\cos x}\,dx = \frac{2\pi p^a}{1-p^2},\quad p<1$$
$$= \frac{2\pi p^{-a}}{p^2-1},\quad p>1$$
Grunert's Arch. 13, 193.

7) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}},\quad a^2>b^2+c^2$$
$$= 0,\quad a^2<b^2+c^2$$
$$= \infty,\quad a^2=b^2+c^2$$

8) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{-a+b\cos x+c\sin x} = \frac{-2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}},\quad a^2>b^2+c^2$$
$$= 0,\quad a^2<b^2+c^2$$
$$= -\infty,\quad a^2=b^2+c^2$$

Grunert's Archiv 12, 409 und 21, 26.

9) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos a x}{1+p\cos x}\,x\,dx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-p^2}}\left\{\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{p}\right\}^a,\quad p<1$$

10) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos a x}{1-p\cos x}\,x\,dx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-p^2}}\left\{\frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p}\right\}^a,\quad p<1$$

Ohm, Ausw., 26.

11) $$\int_0^{2\pi} \log(1-2p\cos x+p^2)\,dx = 0,\quad p^2 \leqq 1$$

12) $$\int_0^{2\pi} \log(1-2p\cos b x+p^2)\cos a b x\,dx = 0$$

13) $$\int_0^{2\pi} \log(1+2p\cos x+p^2)\cos a x\,dx = 2\pi(-1)^{a-1}\frac{p^a}{a},\quad p^2\leqq 1$$
$$= 2\pi(-1)^{a-1}\frac{1}{a p^a},\quad p^2 \geqq 1$$

Crelle, 23, 105.

14) $$\int_0^{2\pi} \log(1-2p\cos x+p^2)\cos a x\,dx = -\frac{2\pi}{a}p^a,\quad p<1.$$

Grunert's Arch. 13, 193.

§. 107.

Theorie der Gammafunctionen.

Es ist

1) $$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^1 \left(log \frac{1}{x}\right)^{p-1}$$

nach Legendre, Exercic., oder nach Gauss

$$\Gamma(x) = \Pi(x-1)$$

Com. Gött. rec. 1812. Tom. II.

Ist $x \geqq 0$, so wird

2) $$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

und für ganze Zahlen

3) $$\Gamma(n) = n!$$

4) $$\Gamma(n+a) = a(a+1)\dots(a+n-1)\Gamma(a)$$

5) Es ist

$$d\Gamma(x) = \Gamma(x) log\, x\, dx, \quad x \geqq 0$$

6) $$lim\, \Gamma(n+a) = lim\, \Gamma(n) n^a \text{ für } lim\, n = \infty.$$

Man hat ferner

7) $$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{sin\, \mu\pi}, \quad 1 > \mu > 0$$

8) $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3\dots 2n-1}{2^n}\sqrt{\pi},$$

wobei n eine ganze Zahl ist. Ferner ist

9) $$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$$

Ist n sehr gross, so wird

10) $$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}\left\{1 + \frac{1}{12n} + \cdots\right.$$

Sei n eine positive ganze Zahl, so wird

11) $$\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\lambda+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{\frac{1}{2}-n\lambda}\,\Gamma(n\lambda).$$

Es ist auch

$$12)\qquad \int\limits_{x}^{x+1} \log \Gamma(x)\, dx = \frac{1}{2} \log 2\pi + x \log x - x$$

$$13)\qquad \Gamma(1+\mu) = \frac{2^\mu}{1^\mu(1+\mu)} \cdot \frac{3^\mu}{2^\mu(1+\frac{1}{2}\mu)} \cdot \frac{4^\mu}{3^\mu(1+\frac{1}{3}\mu)} \cdots$$

$$= \frac{2^\mu}{1^{\mu-1}(1+\mu)} \cdot \frac{3^\mu}{2^{\mu-1}(2+\mu)} \cdot \frac{4^\mu}{3^{\mu-1}(3+\mu)} \cdots \quad a)$$

$$\Gamma(\mu) = \lim \left\{ \frac{1.2.3\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)} n^{\mu-1} \right\} \lim n = \infty \quad b)$$

Durch diese Formel (b) definirt Gauss die Function

$$\Pi(\mu - 1) = \Gamma(\mu)$$

und leitet aus ihr alle Eigenschaften ab. V. Com. rec. Gött. 11, 1812. Die Formel (a) ist wohl die älteste (Euler's Brief an Goldbach vom 13. Octob. 1729 aus Fuss Corr. math. et phys. de quel. cél. geom. du XVIII siéc. p. P. H. Fuss Tom 1, p. 3. Petersb. 1843). Sie ist aber auch deswegen interessant, weil sie allgemein für negative oder complexe μ gilt (vergl. Hankel, Zeitschrift für Mathem. und Physik, Bd. IX, p. 1. Crelle 102, 237).

$$14)\qquad \Gamma(\mu) = \lim \frac{n^\mu}{\mu} \left\{ 1 - \sum_{1}^{n}{}^{\varkappa} (\varkappa - 1)!\, \frac{\mu}{\mu^{\varkappa/1}} \right\}, \lim n = \infty \cdot$$

Sei

$$Z(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx},$$

so wird

$$15)\qquad Z(x) = \lim \left(\log n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \cdots - \frac{1}{x+n} \right),$$

$$\lim n = \infty$$

$$16)\qquad Z(1) = \lim \left\{ \log n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n+1} \right\}, \quad \lim n = \infty$$

$$Z(1) = -A = -0{,}57721566\ldots$$

Es ist

$$17)\qquad Z(x) + Z(1-x) = -\pi \operatorname{cotg} \pi x, \quad 0 < x < 1$$

$$18)\qquad Z\left(\frac{q-p}{q}\right) - Z\left(\frac{p}{q}\right) = \pi \operatorname{cotg} \frac{p}{q} \pi,$$

wenn p und q ganze Zahlen sind.

19) $$Z(x) = -A + \int_0^1 \frac{1 - z^{n-1}}{1 - z}\, dx.$$

Man setzt

20) $$B(qp) = \int_0^1 y^{-1}(1 - y)^{p-1}\, dy$$

21) $$B(pq) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1 + y)^{p+q}}\, dy$$

22) $$B(pq) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

Man hat

23) $$B(a, b)\, B(a + b, c) = B(a c)\, B(a + c, b)$$

24) $$B(p, 1 - p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$$

25) $$B(p-m, q-n)$$
$$= \frac{(p+q-1)(p+q-2)\ldots(p+q-m-1)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-m)(q-1)\ldots(q-n)}\, B(p, q)$$
$$p - m > 0, \quad q - n > 0.$$

Anwendung dieser Functionen auf Reihensummirungen.

26) Ist die Summe der Reihe
$$F(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \cdots$$
bekannt, so wird:
$$\frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1 - x)^{p-1} F(u x^\beta)\, dx \qquad \begin{matrix} x^{\beta-1} < 1 \\ \beta > 0 \end{matrix}$$
$$= \frac{A_0}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)} + \frac{A_1 u}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+p-1)}$$
$$+ \frac{A_2 u^2}{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta+1)\ldots(\alpha+2\beta+p-1)} + \cdots$$

27) Andererseits hat man:

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F(ux)\,dx$$

$$= A_0 + \frac{\beta}{\gamma}A_1 u + \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}A_2 u^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}A_3 u^3 + \cdots$$

Ueber diese Reihen siehe Schlömilch, Analyt. Studien I, Cap. V.

Einige Reihen für $log\,\Gamma(\mu)$.

Es ist:

28) $log\,\Gamma(1+\mu)$

$$= \frac{1}{2}\,log\left(\frac{\mu\pi}{sin\,\mu\pi}\right) - \frac{1}{2}\,log\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) - \sum_0^\infty c_{2\varkappa+1}\,\mu^{2\varkappa+1}$$

$$0 < \mu < 1$$

$c_1 = 0{,}42278\ 43351$	$c_7 = 0{,}00119\ 27539$
$c_3 = 0{,}06735\ 30105$	$c_9 = 0{,}00022\ 31548$
$c_5 = 0{,}00738\ 55510$	$c_{11} = 0{,}00004\ 49262$

29) $$log\,\Gamma(\mu) = (1-\mu)\,log\,\pi + A\left(\frac{1}{2}-\mu\right) - \frac{1}{2}\,log\,sin\,\mu\pi$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\frac{log\,2}{1}\,sin\,2\mu\pi + \frac{log\,4}{2}\,sin\,4\mu\pi + \frac{log\,6}{3}\,sin\,6\mu\pi\right.$$

$$0 < \mu < 1$$

$$A = 0{,}5772156649\ldots$$

30) $$log\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\,log\,2\pi + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)log\,\mu - \mu - \frac{1}{1}\,\frac{a_1}{\mu}$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{a_2}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{3}\,\frac{a_3}{\mu(\mu+1)(\mu+2)} - \cdots$$

$$\mu > 0$$

$$a_\varkappa = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right)v(1-v)(2-v)\ldots(\varkappa-1-v)\,dv.$$

Diese Reihen findet man abgeleitet in Schlömilch, Comp. der höh. Analys., II, S. 257 ff. Braunschweig bei Vieweg.

Einige Integrale für die Constante A.

Sei $A = 0{,}577215\,664901\,532861\,06065124\ldots$

Vergl. Grunert's Archiv 29, S. 240.

311) $\int\limits_0^1 log\,(log\,x)\,d\,x = -A.$ Mascheroni, Adn. p. 18.

322) $\int\limits_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{d\,x}{x} = -A.$ Grunert's Arch. 10, 233.

333) $\int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-x}-1}{x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{d\,x}{x} = A - 1.$ Ibid.

344) $\int\limits_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{d\,x}{x} = -A.$ Ibid.

355) $\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)e^{-x}\,d\,x = A$

366) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}\,x\,e^x\,d\,x = -A$

377) $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{log\,x} + \frac{1}{1-x}\right)d\,x = A.$ Legendre, Exerc. 5, 12.

388) $\int\limits_0^\infty \left(cos\,x - \frac{1}{1+x}\right)\frac{d\,x}{x} = -A.$ Grunert's Arch. 10, 233.

399) $\int\limits_0^\infty \left(\frac{sin\,x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{d\,x}{x} = 1 - A.$ Ibid.

400) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,log\,x\,d\,x = -A.$ Ibid. 9, 5.

Einige durch Gammafunctionen darstellbare Integrale.

41) $$\int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p\,q)$$

42) $$\int_0^1 (1-x^b)^p x^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma(p+1)}{q\,\Gamma\left(\frac{b}{q}+p+1\right)}.$$ Crelle, 17, 1.

43) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{1}{2}\,Z\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,Z\left(\frac{p}{2}\right).$$

Legendre, Exerc. 5, 4.

44) $$\int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\, x^{q-1}\, dx = Z(p+q) - Z(q).$$ Ibid. 4, 50.

45) $$\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{4}\,Z\left(\frac{p+3}{4}\right) - \frac{1}{4}\,Z\left(\frac{p+1}{4}\right).$$ Ibid. 5, 16.

46) $$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx = \frac{1}{2b}\,Z\left(\frac{a+b}{2b}\right) - \frac{1}{2b}\,Z\left(\frac{a}{2b}\right).$$ Ibid. 5, 4.

47) $$\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{1-x}\,\frac{dx}{x} = Z(p) - Z(q).$$ Ibid. 4, 50.

48) $$\int_0^1 \frac{x^a\, dx}{1+x+x^2} = \frac{1}{3}\left[Z\left(\frac{a+2}{3}\right) - Z\left(\frac{a+1}{3}\right)\right].$$ Ibid. 5, 16.

49) $$\int_0^1 \frac{x^a\, dx}{1-x+x^2} = \frac{1}{6}\left[Z\left(\frac{a+5}{6}\right) - Z\left(\frac{a+2}{6}\right) + Z\left(\frac{a+4}{6}\right) - Z\left(\frac{a+1}{6}\right)\right].$$ Ibid. 5, 16.

50) $$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}(p-q-1)}}{(1+x)^{p+\frac{1}{2}}}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p-q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$51)\quad \int_0^\infty \frac{x^{p-q}}{(1+x^2)^{p+\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p-q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$52)\quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{1+x^q}} = 2^{\frac{2p}{q}}\,B(q-2p, p),\quad q > 2p.$$

Crelle, 17, 163.

$$53)\quad \int_0^\infty \frac{e^{2px}+e^{-2px}}{(e^x+e^{-x})^{2q}}\,dx = \frac{1}{2}\,B(p+q, q-p)$$

$$54)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgn^p x\,dx = \frac{1}{4}\left\{Z\left(\frac{p+3}{4}\right) - Z\left(\frac{p+1}{4}\right)\right\}.$$

$$55)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^p x\,dx = 2^{p-2}\,\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(p)}.$$ Mém. Kasan. 1835, 1.

$$56)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^p x\,dx = \frac{\pi}{2^{p+1}}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\right\}^2}.$$ Ibid. 211.

$$57)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^p x\cos q x\,dx = \frac{\pi}{2^{p+1}}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)}.$$

Crelle, 17, 210 und 20, 1.

$$58)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{p-1} x\, cos^{q-1} x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$ Raabe, Int., 222.

$$59)\quad \int_0^{\pi} \frac{sin^a x}{p+q\cos x}\,dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{a\,(p^2-q^2)^{\frac{a+1}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Mém. Kasan. 1835, 1.

60) $$\int_0^\infty e^{-qx} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}$$

61) $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x + 1} dx = \Gamma(p) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$$

62) $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(p) \sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)^p}$$

63) $$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} \frac{dx}{q^2 + x^2} = \frac{1}{4q} \left\{ Z\left(\frac{p}{2} + \frac{3}{4}\right) - Z\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{4}\right) \right\}$$

Legendre, Exerc. 5, 50.

64) $$\int_0^1 x^{p-1} \log(1 - x^2) dx = \frac{1}{2p} \left\{ 2 \log 2 + Z\left(\frac{p+1}{4}\right) - Z\left(\frac{p+3}{4}\right) \right\}$$

65) $$\int_0^1 \frac{x^{q-1} - x^{r-1}}{(\log x)^{p+1}} dx = (-1)^{p+1} \Gamma(1-p) \frac{q^p - r^p}{p}, \quad p < 1$$

66) $$\int_0^1 \frac{1 - x^{q-1}}{1 + x} \frac{dx}{\log x} = Z\left(\frac{q}{2}\right) - Z\left(\frac{q+1}{2}\right) - Z\left(\frac{1}{2}\right).$$

Legendre, Exerc. 5, 3.

67) $$\int_0^\infty \frac{dx \log x}{(q + x)^{p+1}} = \frac{1}{p q^p} \{\log q - A - Z(p)\}.$$

Schlömilch, Beiträge III, §. 9.

68) $$\int_0^\infty x^{p-1} \sin qx \, dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p} \sin \frac{p\pi}{2}$$

69) $$\int_0^\infty x^{p-1} \cos qx \, dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p} \cos \frac{p\pi}{2}$$

$$70)\quad \int_0^\infty x^{p-1} \sin(q x^r)\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{r}\right)}{r \sqrt[r]{q^p}} \sin \frac{p\pi}{2r}$$

$$71)\quad \int_0^\infty x^{p-1} \cos(q x^r)\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{r}\right)}{r \sqrt[r]{q^p}} \cos \frac{p\pi}{2r}$$

Raabe, Integ. 416.

$$72)\quad \int_0^\infty \frac{\sin q x}{x^p}\, dx = \frac{\Gamma(1-p)}{q^{(1-p)}} \cos \frac{p\pi}{2}, \quad 0 < p < 2$$

$$= \infty, \quad p \geqq 2$$

$$73)\quad \int_0^\infty \frac{\cos q x}{x^p}\, dx = \frac{\Gamma(1-p)}{q^{(1-p)}} \sin \frac{p\pi}{2}, \quad 1 > p > 0$$

$$= \infty, \quad p \geqq 1$$

Vergl. Lobatto, Integ. 74. Bidone, Mém. Turin, 1812.

$$74)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x \sin q x}{x^p}\, dx = \frac{\pi}{4\Gamma(p)} \sec \frac{p\pi}{2} \{(1-q)^{p-1} - (1+q)^{p-1}\}, \quad q < 1$$

$$= \frac{\pi}{4\Gamma(p)} \sec \frac{p\pi}{2} \{(q-1)^{p-1} - (1+q)^{p-1}\}, \quad q > 1$$

$$75)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x \cos q x}{x^p}\, dx = \frac{\pi}{4\Gamma(p)} \operatorname{cosec} \frac{p\pi}{2} \{(1-q)^{p-1} + (1+q)^{p-1}\}, \quad q < 1$$

$$= \frac{\pi}{4\Gamma(p)} \operatorname{cosec} \frac{p\pi}{2} \{(q+1)^{p-1} - (q-1)^{p-1}\}, \quad q > 1$$

Schlömilch, Studien, 1, 22.

$$76)\quad \int_0^\infty e^{-x}\, li(e^x)\, x^{p-1}\, dx = -\pi \operatorname{cotg} p\pi\, \Gamma(p), \quad 0 \leqq p \leqq 1.$$

Schlömilch, Beiträge III, §. 6 und 7.

§. 108.

Theorie der transcendenten Integrale.

Wir bezeichnen mit

1) $li(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\log x}$ den Integrallogarithmus

2) $Ei(x) = \int\limits_\infty^{-x} \frac{e^{-x}}{x} dx$ das Exponentialintegral

3) $Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin x}{x} dx$ das Sinusintegral

4) $Ci(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ das Cosinusintegral.

Sodann wird:

5) $$li(e^{-x}) = Ei(-x)$$

6) $$li(e^x) = Ei(x)$$

7) $$Ei(x\sqrt{-1}) = Ci(x) + \sqrt{-1}\, Si(x).$$

Insbesondere ist:

8) $\int\limits_0^r \frac{\sin x}{x} dx = Si(r)$ $\qquad \int\limits_0^r \frac{\sin qx}{x} dx = Si(qr)$

9) $\int\limits_p^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - Si(p)$

10) $\int\limits_1^\infty \frac{\cos px}{x} dx = Ci(p); \qquad = \infty$ für $p = \infty$

11) $\int\limits_p^\infty \frac{\cos x}{x} dx = Ci(p); \qquad \int\limits_p^\infty \frac{\cos qx}{x} dx = Ci(pq)$

12) $\int\limits_\infty^p \frac{a^x}{x} dx = \log a\, li(a^p); \qquad \int\limits_0^x \frac{dx}{\log x} = li(x)$

Einige ausgezeichnete Werthe dieser Functionen.

$li(0) = 0$	$Ei(x) = 0$ für $x = 0{,}3724968\ldots$
$li(1{,}451369\ldots) = 0$	$Ei(0) = -\infty$
$li(1) = -\infty$	$Ei(-\infty) = 0$
$li(-\infty) = 1$	$Ci(0) = -\infty$
$Si(0) = 0$	$Ci(0{,}61\ldots) = 0$

13) Es ist

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = -Ei(a) = -A - \log a$$

$$-\sum_1^\infty (-1)^n \frac{a^n}{n\,1^{n/2}}, \quad a \text{ beliebig.}$$

Crelle, 34, 123.

14) $$\int_p^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = -Ci(p) = -A - \frac{1}{2}\log p^2$$

$$+\sum_1^\infty (-1)^n \frac{1}{2n}\frac{p^{2n}}{1^{2n/1}}, \quad p \text{ beliebig.}$$

Grunert's Archiv 11, 389.

15) $$Si(x) = Si(\varkappa\pi) + \sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa!} A_\varkappa \sin^\varkappa x, \quad \varkappa \text{ ganze Zahl}$$

$$\left(\varkappa + \frac{1}{2}\right)\pi > x \geqq \varkappa\pi$$

$$A_1 = 1, \quad A_n = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x}\left\{\left[\frac{x - \varkappa\pi}{\sin x}\right]^n \frac{\sin x}{x}\right\}_{x=\varkappa\pi}$$

Schlömilch, Mathem. Abhandl. 1850, S. 64.

16) $$li(e^x) = A + \frac{1}{2}\log x^2 + \frac{1}{1!}\frac{arctgn\, x}{1} + \frac{1}{2}\frac{arctgn^2 x}{2!}$$

$$+\frac{7}{1.3}\frac{arctgn^3 x}{3!} + \frac{1}{2.4}\frac{arctgn^4 x}{4!} + \frac{343}{135}\frac{arctgn^5 x}{5!} + \cdots$$

Schlömilch, Mathem. Abhandl. 1850, S. 71.

Durch theilweise Integration ergeben sich folgende halbconvergente Reihen, die für grosse x vortheilhaft sind:

17) $$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cos x \left\{\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} + \cdots\right. $$
$$- \sin x \left\{\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \cdots\right.$$

18) $$\int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = \sin x \left\{\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \cdots\right.$$
$$- \cos x \left\{\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \cdots\right.$$

19) $$\int_\infty^{-x} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = e^x \left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \cdots\right.$$

Ausserdem merke man die Näherungsformel:

20) $$Si(x+h) = Si(x) + h\frac{\sin x}{x}\left\{1 - \frac{h}{2x}\right.$$
$$\left. + h^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{4x}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\right) + \right\} \cdots + h^2\frac{\cos x}{x}\left\{\frac{1}{2} - \frac{h}{3x} + \cdots\right.$$

21) $$\int_{x+h}^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx + h\frac{\cos x}{x}\left\{1 - \frac{h}{2x}\right.$$
$$\left. + h^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{4x}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots\right\} - h^2\frac{\sin x}{x}\left\{\frac{1}{2} - \frac{h}{3x} + \cdots\right.$$

In dieser Tafel ist $li(a) = \int_0^a \frac{dx}{\log x}$.

22) $$\int_0^1 \frac{dx}{\log p + \log x} = \frac{1}{p}\,li(p).$$ Grunert's Archiv 5, 204.

23) $$\int_0^1 \frac{dx}{q \pm \log x} = \pm\, e^{\mp q}\,li(e^{\pm q})$$

24) $$\int_0^1 \frac{dx}{(\log p + \log x)^2} = -\frac{1}{\log p} + \frac{1}{p}\,li(p)$$

25) $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{q+x}\,dx = -\,e^{pq}\,li(e^{-pq}).$$ Schlömilch, Studien I, 18.

26) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px}}{q-x}\,dx = e^{-pq}\,li(e^{pq})$. Ibid. II, 20.

27) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px}}{q^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2q}\{e^{-pq}\,li(e^{pq}) - e^{pq}\,li(e^{-pq})\}$. Ibid.

28) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{(q+x)^2}\,dx = \frac{1}{q} + e^{q}\,li(e^{-q})$

29) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{(q-x)^2}\,dx = -\frac{1}{q} + e^{-q}\,li(e^{q})$

30) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\log p - \log x}\,\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p}\,li(p)$

31) $\int\limits_0^1 li\left(\frac{1}{x}\right) x\,dx = 0.$

32) $\int\limits_0^1 li(x)\,x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}\log(1+p),\quad p^2 \geqq -1$

33) $\int\limits_{-\log p}^\infty e^{-x}\log x\,dx = p\log\left(\log\frac{1}{p}\right) - li(p)$

34) $\int\limits_0^\infty li(e^{-x})\,e^{-x}\,dx = -\log 2$. Grunert's Arch. 9, 5.

35) $\int\limits_0^\infty e^{-px^2}\,li(e^{-x^2})\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\log\left[\sqrt{p}+\sqrt{1+p}\right],\quad p > 0.$

Schlömilch, Beiträge III, 7.

36) $\int\limits_0^\infty e^{px^2}\,li(e^{-x^2})\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\arcsin\sqrt{p},\qquad p < 1.$

Ibid.

37) $\int\limits_0^\infty \log x\,\frac{\sin qx}{1+x^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}\{e^{q}\,li(e^{-q}) + e^{-q}\,li(e^{q})\}$

38) $$\int_0^\infty log\, x \frac{cos\, q\, x}{1 + x^2}\, d\, x = \frac{\pi}{4\, q} \{e^q\, l\, i\,(e^{-q}) - e^{-q}\, l\, i\,(e^q)\}$$

39) $$\int_0^\infty log\, x \frac{x\, sin\, q\, x}{p^2 + x^2}\, d\, x = \frac{\pi}{2}\, e^{-pq}\, log\, p - \frac{\pi}{4}$$
$$\{e^{pq}\, l\, i\,(e^{-pq}) + e^{-pq}\, l\, i\,(e^{pq})\}$$

40) $$\int_0^\infty log\, x \frac{x\, cos\, q\, x}{p^2 + x^2}\, d\, x = \frac{\pi}{2\, p}\, e^{-pq}\, log\, p + \frac{\pi}{4}$$
$$\{e^{pq}\, l\, i\,(e^{-pq}) - e^{-pq}\, l\, i\,(e^{pq})\}.$$

Schlömilch, Grunert's Archiv 5, 204.

In dieser Tafel ist $E\, i\,(a) = \int_{-a}^\infty \frac{e^{-x}\, d\, x}{x}$.

41) $$\int_0^\infty \frac{e^{-p\,x}}{x + q} = -\, e^{pq}\, E\, i\,(-\, p\, q).$$ Grunert's Archiv 10, 247.

42) $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x + q}\, x^a\, x = (-\, 1)^{a+1}\, q^a\, e^{pq}\, E\, i\,(-\, p\, q)$$
$$+ \frac{1}{p^a} \sum_1^a 1^{n-a/1}\, (-\, p\, q)^{n-1}$$

43) $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x - q}\, x^a\, d\, x = -\, q^a\, e^{-pq}\, E\, i\,(-\, p\, q)$$
$$+ \frac{1}{p^a} \sum_1^a 1^{n-a/1}\, (-\, p\, q)^{n-1}.$$

Bierens de Haan, Verh. v. k. Ak. v. Well, Dl. 11.

44) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{q + log\, x}\, d\, x = -\, e^{-pq}\, E\, i\,(p\, q)$$

45) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{q - log\, x}\, d\, x = e^{pq}\, E\, i\,(-\, p\, q)$$

46) $\int_0^1 \frac{x^{q-1}}{(p + \log x)^2} dx = -\frac{1}{p}\{1 + p q e^{-pq} Ei(pq)\}$

47) $\int_0^1 \frac{x^{q-1}}{(p - \log x)^2} dx = \frac{1}{p}\{1 - p q e^{pq} Ei(-pq)\}$

48) $\int_1^\infty \frac{1}{q + \log x} \frac{dx}{x^2} = -e^q Ei(-q)$

49) $\int_1^\infty \frac{1}{q - \log x} \frac{dx}{x^2} = e^{-q} Ei(q).$

In dieser Tafel ist $Si(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$, $Ci(a) = \int_\infty^a \frac{\cos x}{x} dx.$

50) $\int_0^\infty \frac{e^{-qx}}{1 + x^2} dx = \sin q \, Ci(q) + \cos q \left\{\frac{\pi}{2} - Si(q)\right\}$

Crelle, 33, 325.

51) $\int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{q^2 + (\log x)^2} = Ci(pq) \cos pq + Si(pq) \sin pq - \frac{\pi}{2} \sin pq$

52) $\int_0^\infty \frac{\sin px}{x + q} dx = \sin pq \, Ci(pq) + \cos pq \left\{\frac{\pi}{2} - Si(pq)\right\}$

Schlömilch, Stud. II.

53) $\int_0^\infty \frac{\cos px}{x + q} dx = -\cos pq \, Ci(pq) + \sin pq \left\{\frac{\pi}{2} - Si(pq)\right\}$

Ibid.

54) $\int_0^\infty \frac{\sin px}{q^2 - x^2} dx = \frac{1}{q}\{Ci(pq) \sin pq - Si(pq) \cos pq\}.$ Ibid.

55) $\int_0^\infty \frac{x \cos px}{q^2 - x^2} dx = Ci(pq) \cos pq + Si(pq) \sin pq.$ Ibid.

56) $\int\limits_0^\infty log\left(\frac{p}{x}\right) sin\, q\, x \frac{x\, d\, x}{p^2 - x^2}$

$$= -\frac{\pi}{2}\left\{Ci(pq) cos\, pq + Si(pq) sin\, pq - \frac{\pi}{2}\, sin\, pq\right\}$$

57) $\int\limits_0^\infty log\left(\frac{p}{x}\right) cos\, q\, x \frac{d\, x}{p^2 - x^2}$

$$= \frac{\pi}{2p}\left\{Ci(pq) sin\, pq - Si(pq) cos\, pq + \frac{\pi}{2}\, cos\, pq\right\}.$$

Schlömilch, Studien II, 21. (In der Abhandlung sind die Vorzeichen verwechselt.)

§. 109.

Die Fourier'schen Integrale.

1) Ist $b > a > 0$ und $f(x)$ endlich und stetig für jedes x zwischen a und b, so gelten die Gleichungen

$$\text{I.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty cos\, x\, u\, d\, u \int\limits_a^b f(t)\, cos\, u\, t\, d\, t$$

$$\text{II.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty sin\, x\, u\, d\, u \int\limits_a^b f(t)\, sin\, u\, t\, d\, t$$

für alle zwischen a und b enthaltenen Werthe von x. Für $x = a$ reducirt sich der Werth der rechten Seite auf $\frac{1}{2} f(a)$, für $x = b$ auf $\frac{1}{2} f(b)$. Für positive, ausserhalb jenes Intervalles liegende x verschwindet das Doppelintegral.

2) Ist $f(x)$ in dem positiven Intervalle von $x = 0$ bis $x = b$ endlich und stetig, so gelten die Gleichungen

$$\text{III. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^b f(t) \cos ut\, dt$$

$$\text{IV. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^b f(t) \sin ut\, dt$$

für alle zwischen 0 und b enthaltenen x; für $x = 0$ ist der Werth der rechten Seite $= f(0)$, für $x = b$ ist er $\frac{1}{2} f(b)$, für $x > b$ gleich Null, in der Formel III.; in der Formel IV. wird für $x = 0$ auch der Werth der rechten Seite $= 0$, für $x = b$ ist er $\frac{1}{2} f(b)$ und Null für $x > b$.

3) Die Formeln III. und IV. sind auch auf solche Functionen anwendbar, die für $x = 0$ unendlich werden, sobald nur das Integral

$$\int_0^\varrho f(t)\, dt$$

beim unendlichen ϱ einen endlichen Werth besitzt.

4) Ist für $b > \xi > a$, $f(\xi)$ discontinuirlich, nicht aber unendlich, so ist nicht $f(x)$, sondern

$$\frac{1}{2} [f(x - 0) + f(x + 0)]$$

der gemeinschaftliche Werth der Doppelintegrale in II. und III.

5) Die Differentiation der Gleichung $\left\{\begin{matrix}\text{I.}\\ \text{IV.}\end{matrix}\right\}$ ist nur dann erlaubt, wenn $\left\{\begin{matrix} f(b) = 0 \\ f(b) = 0 \text{ und } f(0) = 0 \end{matrix}\right\}$ ist.

Litteratur.

Die Litteratur der bestimmten Integrale findet man in den ausgezeichneten Werken von Bierens de Haan vollständig.

1) Tables d'intégrales définies av. supl. 4 parties. Amsterd. 1858 bis 1864. 4.

2) Exposé de la theorie des prop. des form. de transf. et des méth. d'évaluat. des intégrales définies. 3. part. Amsterd. 1862.

3) Nouv. Tables d'intégrales définies. Leyde 1867.

Besonders zu empfehlende Bücher sind:

Riemann, Partielle Differentialgleichungen. Braunschweig. 3. Aufl. 1882.

A. Meyer, Théorie d. intégrales définies. Brux. 1851.

G. Meyer, Theorie der bestimmten Integrale nach Dirichlet's Vorlesungen. Leipzig 1871.

ANHANG.

EINIGE NUMERISCHE TAFELN.

Zur Tafel der Function $Log\,\Gamma(1+x)$.

Es ist klar, dass $\Gamma(x)$ für beliebiges x gegeben ist, sobald man die Werthe dieser Function für

$$n < x < n + 1,$$

wobei n eine positive ganze Zahl bezeichnet, kennt. Es folgt dies unmittelbar aus dem Satze:

$$\Gamma(n + x) = x(x + 1) \ldots (x + n - 1)\,\Gamma(x).$$

Die Anwendung der Tafel ergiebt sich hieraus sofort.

Die Tafel gilt für die gewöhnlichen Logarithmen und ihre Berechnung gab die Reihe

$$Log\,\Gamma(1 + x) = \frac{1}{2}\,Log\left(\frac{x\pi}{sin\,\pi x}\right) - \frac{1}{2}\,Log\left(\frac{1 + x}{1 - a}\right) + T_1 x$$
$$- T_3 x^3 - T_5 x^5 - T_7 x^7 - \cdots$$

Wobei die Coefficienten T folgende Werthe haben:

n	T_n	$Log\,T_n$
1	0,18361 29038	9,26390 31989
3	0,02925 07327	8,46613 67490
5	0,00320 75041	7,50616 72144
7	0,00051 80064	6,71433 51608
9	0,00009 69149	5,98639 04633
11	0,00001 95112	5,29028 43534
13	0,00000 40995	4,61273 27627
15	0,00000 08856	3,94724 74888

Ausführlichere Tafel findet man in Schlömilch's Analytischen Studien, I. Abtheilung.

Tafel der Function $Log\,\Gamma(x)$.

x	$Log\,\Gamma(x)$	x	$Log\,\Gamma(x)$	x	$Log\,\Gamma(x)$
1,01	9,997 528 731	1,34	9,950 469 767	1,67	9,955 830 327
1,02	9,995 127 872	1,35	9,949 951 514	1,68	9,956 649 074
1,03	9,992 796 421	1,36	9,949 480 044	1,69	9,957 502 802
1,04	9,990 533 400	1,37	9,949 054 889	1,70	9,958 391 246
1,05	9,988 337 859	1,38	9,948 675 590	1,71	9,959 314 139
1,06	9,986 208 869	1,39	9,948 341 698	1,72	9,960 271 222
1,07	9,984 145 526	1,40	9,948 052 771	1,73	9,961 262 237
1,08	9,982 146 949	1,41	9,947 808 376	1,74	9,962 282 933
1,09	9,980 212 278	1,42	9,947 608 086	1,75	9,963 345 059
1,10	9,978 340 674	1,43	9,947 451 484	1,76	9,964 436 370
1,11	9,976 531 319	1,44	9,947 338 158	1,77	9,965 560 623
1,12	9,974 783 415	1,45	9,947 267 707	1,78	9,966 717 580
1,13	9,973 096 181	1,46	9,947 239 734	1,79	9,967 907 005
1,14	9,971 468 856	1,47	9,947 253 850	1,80	9,969 128 666
1,15	9,969 900 696	1,48	9,947 309 673	1,81	9,970 382 334
1,16	9,968 390 974	1,49	9,947 406 826	1,82	9,971 667 782
1,17	9,966 938 981	1,50	9,947 544 941	1,83	9,972 984 788
1,18	9,965 544 021	1,51	9,947 723 654	1,84	9,974 333 132
1,19	9,964 205 416	1,52	9,947 942 609	1,85	9,975 712 597
1,20	9,962 922 504	1,53	9,947 201 454	1,86	9,977 122 968
1,21	9,961 694 639	1,54	9,948 499 845	1,87	9,978 564 036
1,22	9,960 521 172	1,55	9,948 837 441	1,88	9,980 035 591
1,23	9,959 401 496	1,56	9,949 213 910	1,89	9,981 537 428
1,24	9,958 334 998	1,57	9,949 628 923	1,90	9,983 069 344
1,25	9,957 321 084	1,58	9,950 082 156	1,91	9,984 631 138
1,26	9,956 359 170	1,59	9,950 573 292	1,92	9,986 222 613
1,27	9,955 448 685	1,60	9,951 102 017	1,93	9,987 843 574
1,28	9,954 589 072	1,61	9,951 668 024	1,94	9,989 493 827
1,29	9,953 779 781	1,62	9,952 271 010	1,95	9,991 173 182
1,30	9,953 020 277	1,63	9,952 910 675	1,96	9,992 881 452
1,31	9,952 310 034	1,64	9,953 586 727	1,97	9,994 618 451
1,32	9,951 648 537	1,65	9,954 298 875	1,98	9,997 277 416
1,33	9,951 035 279	1,66	9,955 046 836	1,99	9,998 177 905

Tafeln der transcendenten Integrale.

I.

NB. $\int_{\infty}^{-x} \frac{dx}{x} e^{-x} = Ei(x) = A + \frac{1}{4} \log(x^4) + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!}$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad Ei\, e^x = Ei(x).$$

x	$Ei(x)$	$Ei(-x)$
1	1,895 117 816	— 0,219 383 934
2	4,954 234 356	— 0,048 900 511
3	9,933 832 571	— 0,013 048 382
4	19,630 874 470	— 0,003 779 352
5	40,185 275 356	— 0,001 148 296
6	85,989 762 142	— 0,000 360 082
7	191,504 743 336	— 0,000 115 482
8	440,379 899 535	— 0,000 037 666
9	1037,878 290 717	— 0,000 012 447
10	2492,228 976 242	— 0,000 004 157
	$Ei(+\infty) = \infty$	$Ei(-\infty) = 0$

II.

NB. $Si(x) = x - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{5!} - \cdots = \int_0^x \frac{dx}{x} \sin x$

$$Ci(x) = A + \frac{1}{4} \log x^4 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4!} - \cdots = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{x} \cos x.$$

x	$Si(x)$	$Ci(x)$
1	0,946 083 070	+ 0,337 403 923
2	1,605 412 977	+ 0,422 980 829
3	1,848 652 528	+ 0,119 629 786
4	1,758 203 139	— 0.140 981 698
5	1,549 931 245	— 0,190 029 750
6	1,424 687 551	— 0,068 057 244
7	1,454 596 614	+ 0,076 695 278
8	1,574 186 822	+ 0,122 433 883
9	1,665 040 076	+ 0,055 347 531
10	1,658 347 594	— 0,045 456 433
100	1, 56 222 55	— 0,51488
1000	1, 57 023 31	+ 0,0008263
10 000	1, 57 089 15	+ 0,0000306
100 000	1, 57 079 54	— 0,0000004
	$Si(\infty) = \frac{\pi}{2}$	$Ci(\infty) = 0$

III.

Tafel der Function $Ei(-x)$.

$$Ei(-x) = \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

x	$Ei(-x)$	x	$Ei(-x)$	x	$Ei(-x)$
0,01	— 4,037 929 577	0,34	— 0,814 745 580	0,67	— 0,395 852 563
0,02	— 3,354 707 783	0,35	— 0,794 215 435	0,68	— 0,388 309 243
0,03	— 2,959 118 724	0,36	— 0,774 462 218	0,69	— 0,380 950 010
0,04	— 2,681 263 689	0,37	— 0,755 441 428	0,70	— 0,373 768 843
0,05	— 2,467 898 489	0,38	— 0,737 112 144	0,71	— 0,366 759 981
0,06	— 2,295 306 918	0,39	— 0,719 436 652	0,72	— 0,359 917 914
0,07	— 2,150 838 180	0,40	— 0,702 380 119	0,73	— 0,353 237 364
0,08	— 2,026 941 003	0,41	— 0,685 910 311	0,74	— 0,346 713 279
0,09	— 1,918 744 770	0,42	— 0,669 997 342	0,75	— 0,340 340 813
0,10	— 1,822 923 958	0,43	— 0,654 613 448	0,76	— 0,334 115 321
0,11	— 1,737 106 694	0,44	— 0,639 732 798	0,77	— 0,328 032 346
0,12	— 1,659 541 752	0,45	— 0,625 331 316	0,78	— 0,322 087 610
0,13	— 1,588 899 305	0,46	— 0,611 386 530	0,79	— 0,316 277 004
0,14	— 1,524 145 722	0,47	— 0,597 877 429	0,80	— 0,310 596 579
0,15	— 1,464 461 671	0,48	— 0,584 784 344	0,81	— 0,305 042 539
0,16	— 1,409 186 699	0,49	— 0,572 088 836	0,82	— 0,299 611 236
0,17	— 1,357 780 653	0,50	— 0,559 773 595	0,83	— 0,294 299 155
0,18	— 1,309 796 135	0,51	— 0,547 822 352	0,84	— 0,289 102 918
0,19	— 1,264 858 424	0,52	— 0,536 219 798	0,85	— 0,284 019 269
0,20	— 1,222 650 544	0,53	— 0,524 951 510	0,86	— 0,279 045 070
0,21	— 1,182 901 986	0,54	— 0,514 003 886	0,87	— 0,274 177 301
0,22	— 1,145 380 055	0,55	— 0,503 364 081	0,88	— 0,269 413 046
0,23	— 1,109 883 139	0,56	— 0,493 019 959	0,89	— 0,264 749 496
0,24	— 1,076 235 415	0,57	— 0,482 960 034	0,90	— 0,260 183 939
0,25	— 1,044 282 634	0,58	— 0,473 173 433	0,91	— 0,255 713 758
0,26	— 1,013 888 737	0,59	— 0,463 649 849	0,92	— 0,251 336 425
0,27	— 0,984 933 101	0,60	— 0,454 379 503	0,93	— 0,247 049 501
0,28	— 0,957 308 300	0,61	— 0,445 353 112	0,94	— 0,242 850 627
0,29	— 0,930 918 246	0,62	— 0,436 561 854	0,95	— 0,238 737 524
0,30	— 0,905 676 652	0,63	— 0,427 997 338	0,96	— 0,234 707 988
0,31	— 0,881 505 746	0,64	— 0,419 651 581	0,97	— 0,230 759 890
0,32	— 0,858 335 189	0,65	— 0,411 516 976	0,98	— 0,226 891 167
0,33	— 0,836 101 161	0,66	— 0,403 586 275	0,99	— 0,223 099 826

IV.

Tafel der Function $Ei(x)$.

$$Ei(x) = \int_{\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

x	$Ei(x)$	x	$Ei(x)$	x	$Ei(x)$
0,01	— 4,017 929 465	0,34	— 0,130 363 294	0,67	0,978 019 042
0,02	— 3,314 706 894	0,35	— 0,089 434 002	0,68	1,007 116 121
0,03	— 2,899 115 724	0,36	— 0,049 258 018	0,69	1,036 076 576
0,04	— 2,601 256 576	0,37	— 0,009 790 149	0,70	1,064 907 195
0,05	— 2,367 884 599	0,38	+ 0,029 011 221	0,71	1,093 614 501
0,06	— 2,175 282 916	0,39	0,067 184 501	0,72	1,122 204 777
0,07	— 2,010 800 064	0,40	0,104 765 219	0,73	1,150 684 069
0,08	— 1,866 884 103	0,41	0,141 786 307	0,74	1,179 058 208
0,09	— 1,738 663 750	0,42	0,178 278 353	0,75	1,207 332 816
0,10	— 1,622 812 814	0,43	0,214 269 821	0,76	1,235 513 319
0,11	— 1,516 958 751	0,44	0,249 787 245	0,77	1,263 604 960
0,12	— 1,419 349 669	0,45	0,284 855 405	0,78	1,291 612 805
0,13	— 1,328 655 070	0,46	0,319 497 483	0,79	1,319 541 753
0,14	— 1,243 840 654	0,47	0,353 735 196	0,80	1,347 396 548
0,15	— 1,164 086 417	0,48	0,387 588 924	0,81	1,375 181 783
0,16	— 1,088 731 238	0,49	0,421 077 819	0,82	1,402 901 910
0,17	— 1,017 234 290	0,50	0,454 219 905	0,83	1,430 561 245
0,18	— 0,949 147 505	0,51	0,487 032 167	0,84	1,458 163 978
0,19	— 0,884 095 487	0,52	0,519 530 632	0,85	1,485 714 176
0,20	— 0,821 760 588	0,53	0,551 730 445	0,86	1,513 215 791
0,21	— 0,761 871 624	0,54	0,583 645 931	0,87	1,540 672 664
0,22	— 0,704 195 225	0,55	0,615 290 657	0,88	1,568 088 534
0,23	— 0,648 529 103	0,56	0,646 677 490	0,89	1,595 467 036
0,24	— 0,594 696 758	0,57	0,677 818 642	0,90	1,622 811 714
0,25	— 0,542 543 265	0,58	0,708 725 720	0,91	1,650 126 019
0,26	— 0,491 931 883	0,59	0,739 409 764	0,92	1,677 413 317
0,27	— 0,442 741 312	0,60	0,769 881 290	0,93	1,704 676 891
0,28	— 0,394 863 445	0,61	0,800 150 320	0,94	1,731 919 946
0,29	— 0,348 201 510	0,62	0,830 226 417	0,95	1,759 145 612
0,30	— 0,302 668 539	0,63	0,860 118 716	0,96	1,786 356 947
0,31	— 0,258 186 076	0,64	0,889 835 948	0,97	1,813 556 941
0,32	— 0,214 683 096	0,65	0,919 386 468	0,98	1,840 748 519
0,33	— 0,172 095 092	0,66	0,948 778 276	0,99	1,867 934 543

V.

Tafel der Function $Ci(x)$.

$$Ci(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\cos u}{u}\, du.$$

x	$Ci(x)$	x	$Ci(x)$	x	$Ci(x)$
0,01	— 4,027 979 521	0,34	— 0,530 355 152	0,67	0,066 591 359
0,02	— 3,334 907 339	0,35	— 0,503 075 569	0,68	0,078 157 666
0,03	— 2,929 567 224	0,36	— 0,476 661 126	0,69	0,089 463 320
0,04	— 2,642 060 133	0,37	— 0,451 066 976	0,70	0,100 514 707
0,05	— 2,419 141 544	0,38	— 0,426 251 855	0,71	0,111 317 953
0,06	— 2,237 094 917	0,39	— 0,402 177 704	0,72	0,121 878 932
0,07	— 2,083 269 122	0,40	— 0,378 809 346	0,73	0,132 203 288
0,08	— 1,950 112 553	0,41	— 0,356 114 201	0,74	0,142 296 440
0,09	— 1,832 754 260	0,42	— 0,334 062 035	0,75	0,152 163 601
0,10	— 1,727 868 387	0,43	— 0,312 624 740	0,76	0,161 809 783
0,11	— 1,633 082 724	0,44	— 0,291 776 136	0,77	0,171 239 811
0,12	— 1,546 645 712	0,45	— 0,271 491 800	0,78	0,180 458 334
0,13	— 1,467 227 190	0,46	— 0,251 748 910	0,79	0,189 469 829
0,14	— 1,393 793 192	0,47	— 0,232 526 107	0,80	0,198 278 616
0,15	— 1,325 524 049	0,48	— 0,213 803 373	0,81	0,206 888 861
0,16	— 1,261 758 976	0,49	— 0,195 561 917	0,82	0,215 304 586
0,17	— 1,201 957 483	0,50	— 0,177 784 079	0,83	0,223 529 675
0,18	— 1,145 671 836	0,51	— 0,160 453 239	0,84	0,231 567 882
0,19	— 1,092 526 978	0,52	— 0,143 553 736	0,85	0,239 422 837
0,20	— 1,042 205 596	0,53	— 0,127 070 794	0,86	0,247 098 049
0,21	— 0,994 436 845	0,54	— 0,110 990 457	0,87	0,254 596 915
0,22	— 0,948 987 692	0,55	— 0,095 299 527	0,88	0,261 922 726
0,23	— 0,905 656 189	0,56	— 0,079 985 513	0,89	0,269 078 669
0,24	— 0,864 266 175	0,57	— 0,065 036 574	0,90	0,276 067 830
0,25	— 0,824 663 063	0,58	— 0,050 411 481	0,91	0,282 893 207
0,26	— 0,786 710 453	0,59	— 0,036 189 571	0,92	0,289 557 702
0,27	— 0,750 287 386	0,60	— 0,022 270 707	0,93	0,296 064 136
0,28	— 0,715 286 096	0,61	— 0,008 675 249	0,94	0,302 415 246
0,29	— 0,681 610 154	0,62	+ 0,004 605 985	0,95	0,308 613 691
0,30	— 0,649 172 933	0,63	+ 0,017 581 742	0,96	0,314 662 055
0,31	— 0,617 896 322	0,64	0,030 260 369	0,97	0,320 562 849
0,32	— 0,587 709 640	0,65	0,042 649 829	0,98	0,326 318 518
0,33	— 0,558 548 725	0,66	0,054 757 734	0,99	0,331 931 438

VI. Tafel der Function $Si(x)$.

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du.$$

x	$Si(x)$	x	$Si(x)$	x	$Si(x)$
0,01	0,009 999 944	0,34	0,337 824 002	0,67	0,653 514 256
0,02	0,019 999 556	0,35	0,347 626 791	0,68	0,662 771 982
0,03	0,029 998 500	0,36	0,357 418 056	0,69	0,672 008 072
0,04	0,039 996 445	0,37	0,367 197 475	0,70	0,681 222 239
0,05	0,049 993 056	0,38	0,376 964 729	0,71	0,690 414 196
0,06	0,059 988 001	0,39	0,386 719 499	0,72	0,699 583 659
0,07	0,069 980 947	0,40	0,396 461 465	0,73	0,708 730 343
0,08	0,079 971 561	0,41	0,406 190 310	0,74	0,717 853 966
0,09	0,089 959 510	0,42	0,415 905 717	0,75	0,726 954 247
0,10	0,099 944 461	0,43	0,425 607 369	0,76	0,736 030 907
0,11	0,109 926 082	0,44	0,435 294 951	0,77	0,745 083 666
0,12	0,119 904 041	0,45	0,444 968 149	0,78	0,754 112 249
0,13	0,129 878 006	0,46	0,454 626 648	0,79	0,763 116 380
0,14	0,139 847 645	0,47	0,464 270 136	0,80	0,772 095 785
0,15	0,149 812 627	0,48	0,473 898 301	0,81	0,781 050 192
0,16	0,159 772 619	0,49	0,483 510 832	0,82	0,789 979 329
0,17	0,169 729 292	0,50	0,493 107 418	0,83	0,798 882 928
0,18	0,179 676 315	0,51	0,502 687 751	0,84	0,807 760 719
0,19	0,189 619 357	0,52	0,512 251 521	0,85	0,816 612 437
0,20	0,199 556 089	0,53	0,521 798 423	0,86	0,825 437 817
0,21	0,209 486 180	0,54	0,531 328 150	0,87	0,834 236 595
0,22	0,219 409 303	0,55	0,540 840 395	0,88	0,843 008 510
0,23	0,229 325 127	0,56	0,550 334 856	0,89	0,851 753 302
0,24	0,239 233 326	0,57	0,559 811 230	0,90	0,860 470 711
0,25	0,249 133 570	0,58	0,569 269 214	0,91	0,869 160 481
0,26	0,259 025 534	0,59	0,578 708 507	0,92	0,877 822 356
0,27	0,268 908 889	0,60	0,588 128 810	0,93	0,886 456 084
0,28	0,278 783 309	0,61	0,597 529 823	0,94	0,895 061 411
0,29	0,288 648 469	0,62	0,606 911 250	0,95	0,903 638 088
0,30	0,298 504 044	0,63	0,616 272 794	0,96	0,912 185 866
0,31	0,308 349 708	0,64	0,625 614 160	0,97	0,920 704 497
0,32	0,318 185 138	0,65	0,634 935 054	0,98	0,929 193 737
0,33	0,328 010 010	0,66	0,644 235 183	0,99	0,937 653 342