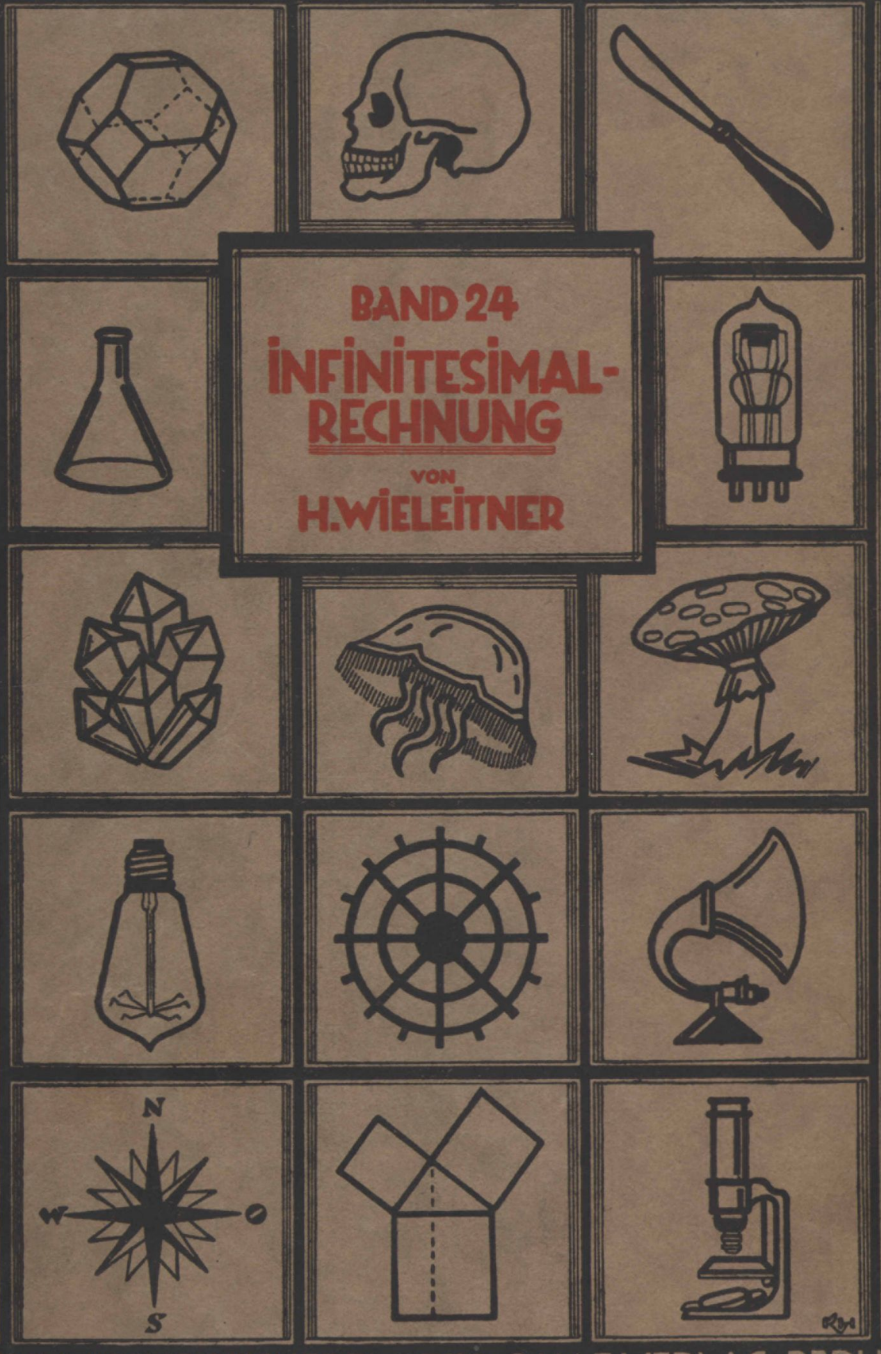
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH



BAND 24

INFINITESIMALRECHNUNG

VON

H. WIELEITNER

TECHNISCHE BÜCHEREI OTTO SALLE VERLAG BERLIN

24

18/VII 1929

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BÜCHEREI

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PHIL. EWALD WASSERLOOS
OBERSTUDIENDIREKTOR
IN ESSEN

UND

DR. PHIL. GEORG WOLFF
STUDIENDIREKTOR
IN HANNOVER

BAND 24

WIELEITNER
MATHEMATISCHE QUELLENBÜCHER IV
INFINITESIMALRECHNUNG

OSV
18
87

VERLAG OTTO SALLE * BERLIN 1929

Inw

Kat

BAND 24

MATHEMATISCHE QUELLENBÜCHER

IV

INFINITESIMALRECHNUNG

VON

DR. HEINRICH WIELEITNER
OBERSTUDIENDIREKTOR
PRIVATDOZENT
IN MÜNCHEN

*

MIT 29 ABBILDUNGEN IM TEXTE

OSV
18
87

VERLAG OTTO SALLE * BERLIN 1929

Den Einband zeichnete Ruth Hoffmann, Breslau.

Druck von C. Schulze & Co., G. m. b. H., Gräfenhainichen.

Vorwort.

Als ich dieses Bändchen in Angriff nahm, war mir sofort klar, daß ich meiner Aufgabe im Rahmen des Umfangs der drei vorangegangenen Quellenbücher (Nrn. 3, 11, 19 dieser Sammlung) nicht Genüge leisten konnte. Nun ist das Bändchen etwa doppelt so stark geworden als die anderen und doch muß ich sagen: Was ich biete, sind nur Aphorismen zur Geschichte der Infinitesimalrechnung. Wenn ich die Infinitesimalrechnung mit der analytischen Geometrie in Parallele setze, so wurzeln ja beide im Altertum, und wie Descartes und Fermat bei der analytischen Geometrie, so sind auch Leibniz und Newton, die Väter der modernen Infinitesimalrechnung, Fortsetzer des Werkes der Griechen gewesen. Bei der analytischen Geometrie ist nun die Entstehung recht einfach und klar zu übersehen. Bei der Infinitesimalrechnung hingegen ist nicht nur die Arbeit ihrer Erfinder selbst viel umfangreicher und verwickelter (knüpfte sich daran doch ein noch heute nicht beendigter Prioritätsstreit!), sondern sie haben zahlreiche Vorgänger und Wegbereiter im Anfang des 17. Jahrh. gehabt, und endlich war die Infinitesimalrechnung (wenigstens die Integralrechnung) ihrem Wesen nach so stark schon im Altertum entwickelt, daß die modernsten Erneuerer der antiken Strenge im 19. Jahrh., vor allem Karl Weierstraß, bis in die Einzelheiten der Ausdrucksweise, wahrscheinlich ohne das deutlich zu wissen, direkt auf Euklid und Archimedes zurückgriffen.

Mein Büchlein beginnt so im griechischem Altertum, wo neben dem strengen Beweisverfahren schon eine heuristische

Methode sich findet. Es führt zu den Erneuerern der alten Mathematik, die, da sie die heuristische Methode des Archimedes nicht kannten, selbst die strenge Logik der antiken Beweisführung lockerten, um vorwärts zu kommen, sich aber, Newton und Leibniz eingeschlossen, immer bewußt blieben, daß man, allerdings mit viel Aufwand, alles nach der Methode der Alten beweisen könne. Das Buch schließt mit einem Beispiel aus Euler, das die logische Sorglosigkeit, die unterdessen eingerissen war, klar vor Augen führt. Der Schaden konnte indessen nie groß werden, da man immer nur stetige, überall differenzierbare, Funktionen im Auge hatte. Dies ist auch meinem Büchlein gegenüber zu beachten. Ich muß es dem einzelnen überlassen, wie er sich die Ausführungen der alten Autoren, und auch meine nur Richtung weisenden Erläuterungen, in eine ganz moderne Ausdrucksweise übersetzt. Ich selbst habe sogar überall dx beibehalten, wo man heute Δx schreiben würde, lediglich, weil ich sonst noch viel ausführlicher hätte sein müssen. Ich betone aber, daß dx immer eine von Null verschiedene Größe bedeutet, die nur so klein zu sein braucht, als es notwendig ist.

Man wird bemerken, daß ich überall, wo es möglich und nötig war, auf die allerersten Ausgaben der Originale zurückgegangen bin. Die deutsche Übersetzung ist immer, auch wenn andere Übersetzungen zitiert sind, von mir selbst, und möglichst wörtlich. Kollege Bullemer hat bei den altsprachlichen Stellen wieder Kontrolle geübt. In diesem Bändchen habe ich alle Einzelbuchstaben und Formeln kursiv drucken lassen, auch wenn es in der Vorlage nicht so war. Für die griechischen Buchstaben habe ich passende lateinische gesetzt. Die runden Klammern sind in den vorderen Teilen von mir, in den späteren Abschnitten, wo die Autoren selbst runde Klammern gebrauchen, habe ich meine Zwischenbemerkungen meist in eckige Klammern gesetzt.

In bezug auf alle 4 Bändchen möchte ich meinen Dank aussprechen Herrn J. Tropfke (Berlin) für Mitlesen der Korrektur, Herrn W. Lorey für Besorgung mehrerer Lebensdaten. Für dieses Bändchen im besonderen habe ich zu danken Herrn D. Mahnke (Marburg a. L.) für guten Rat bei den Abschnitten über Leibniz und Herrn Jos. E. Hofmann (München) für seine gewissenhafte Kontrolle des ganzen Textes, die mehrere Verbesserungen zur Folge hatte.

München im November 1928.

H. Wieleitner.

Inhalt.

I.

Das Axiom des Messens (sog. Archimedisches Axiom).

Aus: Archimedis Opera omnia . . ., iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. I. Lipsiae MDCCCCX. (Griech. u. lat.). Im besonderen aus der Schrift, die man nennt „De sphaera et cylindro", Buch I.

S. 8. Forderungen (Postulate). Ich nehme aber folgendes an: . . . .

5. Daß ferner von den ungleichen Linien und den ungleichen Flächen und den ungleichen Körpern das größere das kleinere um eine solche Größe übertrifft, die zu sich selbst addiert größer werden kann als irgendeine vorgegebene Größe unter denen, die miteinander (d. h. also auch mit ihr) vergleichbar sind.

Erläuterungen. Es handelt sich hier zunächst um miteinander vergleichbare Größen, d. h. Größen derselben Dimension, z. B. Strecken oder Flächen oder Rauminhalte. Dann seien a und b etwa zwei Strecken, und es sei $a > b$. Ist jetzt m irgendeine noch so große[1]) Strecke, so sagt die obige Forderung, daß es ganze Zahlen α gibt derart, daß

$$\alpha(a-b) > m.$$

Auf der linken Seite könnte hier statt $a-b$ natürlich auch irgendeine einzelne Strecke c stehen, so daß man hätte

$$\alpha c > m.$$

[1]) Ich mache vorerst darauf aufmerksam, daß weder Archimedes noch Euklid eine solche Bemerkung machen, wiewohl sie dem Wesen der Sache entspräche. Genaueres darüber in den Erläuterungen zur nächsten Nummer.

Die Form, die die Forderung bei Archimedes hat, rührt wohl nur von der Art ihrer Verwendung bei ihm her. Es ist ohne weiteres klar, daß ohne diese Forderung jede „Messung“ unmöglich wäre.

Über den Gebrauch der Forderung in der alten Geometrie werden wir gleich nachher Näheres erfahren. In der neuesten Zeit ist diese alte Forderung aber wieder zu besonderer Bedeutung gelangt durch die von D. Hilbert begründete „Axiomatik“. Die Forderung hatte schon vorher den Namen „Archimedisches Axiom“ erhalten, den Hilbert beibehielt[1]). Das Archimedische Axiom erwies sich äußerst wichtig als eines der „Stetigkeitsaxiome“. Darauf kann hier nicht näher eingegangen werden.

Der Name „Archimedisches Axiom“ ist aber unhistorisch. Denn Archimedes selbst, der die Forderung an mehreren Stellen seiner Werke anführt, sagt in der Einleitung zur „Quadratur der Parabel“, auch die früheren Geometer hätten den „Hilfssatz“ (Lemma) schon benützt[2]). Daß unter diesen Eudoxos war, ist zweifellos, da Archimedes ihm ausdrücklich mehrere bei Euklid stehende Beweise zuschreibt, in denen der Hilfssatz verwendet wird. Möglicherweise hat Eudoxos das Axiom sogar zum erstenmal bewußt aufgestellt.

Zwischen ihm und Archimedes liegt aber eben Euklid, und wir wollen sehen, wie sich Euklid zu dem Axiom stellt.

Aus: Euclidis Elementa. Edidit ... I. L. Heiberg. Uol. II. Lipsiae MDCCCLXXXIV. (Griech. u. lat.).

Buch V. Definitionen.

S. 3. . . . .

4. Größen haben, wie man sagt, dann unter sich ein Verhältnis, wenn eine die andere durch Vervielfachung übertreffen kann.

---

[1]) „Grundlagen der Geometrie.“ 1. Auflage, Leipzig 1900. Siehe z. B. 3. Auflage, 1909, S. 22. — Knappe Darstellung in dem Büchlein „Euklid“ (Nr. 8 dieser Sammluug) von K. Fladt.

[2]) Opera II, S. 264, Z. 13/14.

Erläuterung. Diese Definition enthält, wie man sieht, stillschweigend das Archimedische Axiom; denn es ist einfach als selbstverständlich vorausgesetzt, daß eine Größe die andere durch Vervielfachung übertreffen kann. Solche Größen können ein Verhältnis haben. Euklid meint damit gewiß auch die „gleichartigen Größen" wie Archimedes, aber doch wohl noch etwas mehr. Erstens will Euklid durch seine Definition zum „Verhältnis" ausdrücklich auch Größen zulassen, die kein gemeinsames Maß haben (inkommensurabel sind)[1]. Die Verhältnislehre dieser Größen, die das V. Buch füllt, hatte Eudoxos geschaffen, nachdem man vorher — d. h. vor der Entdeckung des „Irrationalen" — nur ganzzahlige Verhältnisse in Betracht gezogen hatte. Zweitens will Euklid vom Verhältnis ausschließen „unendlich kleine" und „unendlich große" Gebilde, also z. B. die schon von den alten Philosophen wie Demokritos angenommenen letzten Teilchen (Atome, Indivisibeln) einer Strecke, oder die ganze Gerade selbst. Daß Euklid die obige Definition im Sinne des Archimedischen Axioms verwendet, sehen wir aus einem grundlegenden Satz, mit dem er das X. Buch einleitet, das von den irrationalen Größen handelt.

Aus: Euclidis Elementa. Edidit . . . I. L. Heiberg. Uol. III. Lipsiae MDCCCLXXXVI. Buch X.

S. 4.

I. Wenn zwei ungleiche Größen vorliegen, und man nimmt von der größeren mehr als die Hälfte weg und vom Rest wieder mehr als die Hälfte, und setzt dies genügend lang fort (wörtl.: und wenn dies immer geschieht), so wird (schließlich) eine Größe übrig bleiben, die kleiner ist als die vorgegebene kleinere Größe.

Es seien zwei ungleiche Größen gegeben, nämlich die AB, G, deren größere die AB sei (Fig. 1); so sage ich, wenn

[1]) Diese sind natürlich auch in der Archimedischen Fassung eingeschlossen.

man von AB mehr als die Hälfte wegnimmt und vom Rest (wieder) mehr als die Hälfte, und wenn dies immerfort ge-

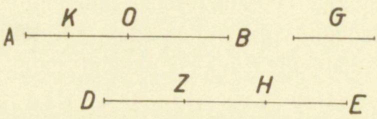


Fig. 1.

schieht, daß (dann schließlich) eine Größe bleiben wird, die kleiner ist als die Größe G.

Denn G kann durch Vervielfachung einmal größer als AB[1]) werden[2]). Man vervielfache es, und es sei DE ein Vielfaches von G und größer als AB, und es werde DE in die dem G gleichen (Abschnitte) DZ, ZH, HE geteilt, und man nehme von AB mehr als die Hälfte weg, nämlich BO, von AO aber mehr als die Hälfte, nämlich OK, und das geschehe immerfort, bis AB in so viele Teile geteilt ist wie DE.

Es seien also die Abschnitte AK, KO, OB an Zahl gleich den DZ, ZH, HE, und da DE größer ist als AB, und von DE weniger als die Hälfte weggenommen wurde, nämlich EH, von AB mehr als die Hälfte, nämlich BO, so ist der Rest HD größer als der Rest OA. Und da HD größer ist als OA, und von HD die Hälfte weggenommen wurde, nämlich HZ[3]), von OA aber mehr als die Hälfte, nämlich OK, so ist der Rest DZ größer als der Rest AK. DZ ist aber gleich G; folglich ist auch G größer als AK und AK kleiner als G.

---

[1]) Ich lasse von jetzt ab die Artikel bei den einzelnen Größen weg.

[2]) Dieser Satz enthält die Anwendung des Archimedischen Axioms.

[3]) Hier fehlt zur Vervollständigung der Allgemeinheit eine Bemerkung, daß das vorhergehende Verfahren fortgesetzt wird, bis die Halbierung erreicht ist. E u k l i d hält sich einfach an seine dreiteilige Strecke.

Es bleibt also von der Größe AB die Größe AK übrig, die kleiner ist als die kleinere der vorgegebenen Größen, nämlich G; was zu beweisen war. — Ähnlich aber würde man den Beweis führen, auch wenn lediglich die Hälften weggenommen würden.

Erläuterungen. Was zunächst den Wortlaut dieses Satzes betrifft, so seien die beiden Größen a und b, und es sei $a > b$; wenn wir die Halbierung selbst nehmen, wie es am Schlusse des Beweises angedeutet ist, so will der Satz sagen, daß es in jedem Fall, so klein auch b sei[1]), wenn nur $b > 0$, immer eine ganze Zahl n gebe, so daß

$$\frac{a}{2^n} < b \qquad \text{wird.} \tag{1 a}$$

Den allgemeinen Wortlaut können wir so wiedergeben: Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_\nu$ eine Folge von an sich beliebigen Brüchen, aber $\alpha_i < \frac{1}{2}$, für $i = 1, 2, \ldots\ldots, \nu$. Dann gibt es ein bestimmtes ν, so daß

$$a \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots\ldots \cdot \alpha_\nu < b \qquad \text{wird.} \tag{1 b}$$

Wenn (1 a) richtig ist, ist (1 b) a fortiori richtig, und für dieselben Größen a und b wird $\nu \leqq n$ sein.

Wie wir sahen, ist der Euklidsche Satz eine einfache Folge des Archimedischen Axioms. Er ist aber in der Verwendung oft bequemer und wird von Euklid gleich in X, 2 benützt zur Definition der inkommensurablen Größen durch eine nicht endende Kettendivision. Ein Beispiel für geometrische Anwendung geben wir in der nächsten Nummer.

Auch Archimedes hat den Satz in dieser Form öfters angewendet, und er scheint ihn gelegentlich dem „Axiom der Messung" gleichgesetzt zu haben. Vgl. darüber „Archimedes' Werke". Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen von Sir Thomas L. Heath. Deutsch

[1]) S. Fußnote 1 auf S. 1.

von Fritz Kliem. Berlin 1914, S. 38. Ferner auch die Anmerkung zu Euklid X, 1 in „The Thirteen Books of Euclid's Elements." Translated from the Text of Heiberg, with Introduction and Commentary, by Sir Thomas L. Heath. Second Edition. Vol. III. Cambridge 1926, S. 15/16.

II.

Das Verhältnis zweier Kreisflächen.

Aus: Euclidis Elementa. Edidit . . . I. L. Heiberg. Uol. IV. Lipsiae MDCCCLXXXV. Buch XII, 2.

S. 140. Die Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

Es seien die Kreise $ABCD$, $EZHT$ gegeben (Fig. 2), und ihre Durchmesser (seien) die BD, ZT. Ich sage, daß sich verhält wie der Kreis $ABCD$ zum Kreis $EZHT$, so das (142) Quadrat über der BD zu dem Quadrat über der ZT.

Wenn nämlich nicht, wie der Kreis $ABCD$ sich zum (Kreis) $EZHT$, so sich das Quadrat über der BD zu dem über der ZT verhält, so wird sich, wie das über der BD zu dem über der ZT, so der Kreis $ABCD$ sich entweder zu etwas Kleinerem als der Fläche des Kreises $EZHT$ verhalten oder zu etwas Größerem. Es sei zuerst zu etwas Kleinerem, nämlich S. Und es werde in den Kreis $EZHT$ das Quadrat $EZHT$ einbeschrieben. Das eingeschriebene Quadrat ist aber größer als die Hälfte des Kreises $EZHT$; denn wenn wir durch die Punkte E, Z, H, T berührende (Gerade) an den Kreis ziehen, so ist die Hälfte des um den Kreis beschriebenen Quadrats das Quadrat $EZHT$, der Kreis aber ist kleiner als das umschreibende Quadrat. So folgt, daß das eingeschriebene Quadrat $EZHT$ größer ist als die Hälfte des Kreises $EZHT$. Man halbiere nun die Bogen EZ, ZH, HT, TE in den Punkten

K, L, M, N, und man ziehe die EK, KZ, ZL, LH, HM, MT, TN, NE. Dann ist auch jedes der Dreiecke EKZ, ZLH, HMT, TNE größer als die Hälfte des zu ihm gehörigen Segments des Kreises. Denn wenn man durch die Punkte K, L, M, N Berührende des Kreises zieht und die Parallelogramme (Rechtecke) über den Geraden (Strecken) EZ, ZH, HT, TE vervollständigt, so wird jedes

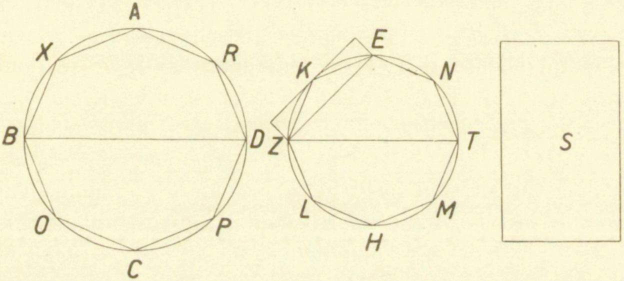


Fig. 2.

(144) der Dreiecke EKZ, ZLH, HMT, TNE die Hälfte sein des zugehörigen Parallelogramms. Aber das zu ihm gehörige Kreissegment ist kleiner als das Parallelogramm. Folglich ist jedes der Dreiecke EKZ, ZLH, HMT, TNE größer als die Hälfte des zu ihm gehörigen Kreisabschnitts. Wenn wir also die übrig bleibenden Bogen halbieren und Gerade (Sehnen) ziehen und dies immer fortsetzen, werden wir gewisse Segmente des Kreises übrig lassen, die kleiner sind als der Überschuß, um den der Kreis $EZHT$ die Fläche S übertrifft. Es wurde nämlich in dem ersten Satz des zehnten Buches gezeigt, daß, wenn zwei ungleiche Größen gegeben sind, und man von der größeren mehr als die Hälfte und vom Rest (wieder) mehr als die Hälfte wegnimmt, und dies immer fort geschieht, (schließlich) eine Größe übrig bleiben wird, die kleiner ist als die kleinere gegebene Größe. Man lasse also den Rest (wie beschrieben), und es seien die Kreisabschnitte über den

EK, KZ, ZL, LH, HM, MT, TN, NE kleiner als der Überschuß, um den der Kreis $EZHT$ die Fläche S übertrifft. Dann ist das übrig bleibende Vieleck $EKZLHMTN$ größer als die Fläche S. Es werde auch in den Kreis $ABCD$ das dem Vieleck $EKZLHMTN$ ähnliche Vieleck $AXBOCPDR$ eingeschrieben. Dann verhält sich wie das Quadrat über der BD zu dem Quadrat über der ZT, so das Vieleck $AXBOCPDR$ zu dem Vieleck $EKZLHMTN$. Aber es verhält sich auch wie das Quadrat über der BD zu dem über der ZT, so der Kreis $ABCD$ zur Fläche S; und wie sich also der Kreis $ABCD$ verhält zur Fläche S, so verhält sich das Vieleck (146) $AXBOCPDR$ zu dem Vieleck $EKZLHMTN$. Daher verhält sich nach Vertauschung (der inneren Glieder) wie der Kreis $ABCD$ zu dem in ihm (befindlichen) Vieleck, so die Fläche S zu dem Vieleck $EKZLHMTN$. Es ist aber der Kreis $ABCD$ größer als das in ihm (befindliche) Vieleck; also ist auch die Fläche S größer als das Vieleck $EKZLHMTN$. Aber (sie ist) auch kleiner, was unmöglich ist. Es verhält sich also nicht, wie das Quadrat über der BD zu dem über der ZT, so der Kreis $ABCD$ zu einer Fläche, die kleiner ist als der Kreis $EZHT$. Ähnlich aber könnten wir beweisen, daß auch nicht sich verhält wie das (Quadrat) über der ZT zu dem über der BD, so der Kreis $EZHT$ zu einer Fläche, die kleiner ist als der Kreis $ABCD$.

Ich sage nun, daß auch nicht sich verhält wie das (Quadrat) über der BD zu dem über der ZT, so der Kreis $ABCD$ zu einer Fläche, die größer ist als der Kreis $EZHT$.

Denn, wenn es möglich ist, so bestehe das Verhältnis zu einer größeren (Fläche) S. Umgekehrt verhält sich dann wie das Quadrat über der ZT zu dem über der DB, so die Fläche S zu dem Kreis $ABCD$. Aber wie sich verhält die Fläche S zu dem Kreis $ABCD$, so verhält sich der Kreis $EZHT$ zu einer Fläche, die kleiner ist als der

Kreis $ABCD$. Wie sich also das Quadrat über der ZT verhält zu dem über der BD, so verhält sich der Kreis $EZHT$ zu einer Fläche, die kleiner ist als der Kreis $ABCD$. Das wurde aber als unmöglich nachgewiesen. Es verhält sich demnach nicht, wie das Quadrat über der BD zu dem über der ZT, so der Kreis $ABCD$ zu einer Fläche, die größer ist als der Kreis $EZHT$. Es wurde aber gezeigt, daß auch nicht (das Verhältnis) zu einer kleineren (Fläche statthaben kann). Folglich verhält sich wie das Quadrat über der BD zu dem über der ZT, so der Kreis $ABCD$ zum Kreis $EZHT$. (148)

Die Kreise verhalten sich also zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern; was zu beweisen war.

(Es folgt nun noch der Beweis eines oben benutzten Hilfsatzes. Wir lassen das als unnötig weg, da es auch wahrscheinlich eine spätere Einschiebung ist.)

Erläuterungen. Dieser Beweis wird dem Leser fürs erste kein besonderes Vergnügen bereiten. Ich hoffe durch die folgenden Ausführungen dieses Vergnügen wesentlich zu erhöhen, indem ich zeigen werde, wie der Beweis zu verstehen ist und welche grundlegende Bedeutung das in ihm angewendete Verfahren für die griechische Mathematik hatte.

Vor allem, es wird uns durch Eudemos, einen Schüler des Aristoteles, in seiner Geschichte der Mathematik, von der freilich nur Auszüge durch den Spätplatoniker Simplikios in seinem erhalten gebliebenen Kommentar zur Physik des Aristoteles überliefert wurden (s. Bd. II, S. 1), berichtet, daß den fraglichen Satz schon Hippokrates von Chios (um 440 v. Chr.) bewiesen habe. Wir dürfen aber annehmen, daß dies der obige Beweis nicht war, da das hier angewandte Verfahren, wenn auch nicht ausdrücklich für diesen Satz, so doch für einige andere des XII. Buches der Elemente, von Archimedes bestimmt dem Eudoxos zugeschrieben wird, und dieser also sehr wahrscheinlich der Erfinder des Verfahrens war.

Das XII. Buch der Elemente des Euklid ist solchen Sätzen gewidmet, die wie der obige und der entsprechende für Kugeln, sowie der Satz vom Pyramideninhalt, nicht ohne Zuhilfenahme des Unendlichkleinen, wie wir es ausdrücken, bewiesen werden können. Wir sagen ja heute einfach, die Fläche des Kreises sei $r^2\pi$. Derartige Flächenausdrücke kommen aber bei Euklid überhaupt nicht vor, nicht einmal der Flächeninhalt des Rechtecks. Das „Berechnen" von Flächen oder Körpern überließen die Philosophen den Praktikern. Wenigstens sind vor Euklid keine geometrischen Schriften mit irgendwelchen Berechnungen bekannt. Erst bei Archimedes ändert sich die Sache gründlich. Daß man eine Kreisfläche berechnen kann, indem man das Quadrat des Radius mit einer Zahl etwas über 3 multipliziert, wußten schon die alten Ägypter. Archimedes († 212 v. Chr.) aber hat erst durch eine scharfsinnige geometrische Betrachtung die Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ für π angegeben.

Was tun wir nun heute, um den obigen Satz zu beweisen? In der Schule wird aus mancherlei Gründen meist schnell darüber hinweggegangen. Gewöhnlich wird der Kreis als ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten angesehen, und dann werden alle Sätze über regelmäßige ähnliche Vielecke auf ihn angewendet: Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich dann wie die Durchmesser (oder Radien), die Flächen wie die Quadrate der Durchmesser (oder Radien). Daß das letztere für regelmäßige Vielecke gilt, ist in der Tat bei Euklid der dem obigen unmittelbar vorhergehende Satz (XII, 1), der beim Beweis von XII, 2 oben auch verwendet wird. Nun kann man wirklich leicht beweisen, daß Kreise ähnliche Figuren sind, wenn man nur die perspektive Lage einführt (ohne daß man eingeschriebene Vielecke braucht). Aber daß die Verhältnissätze über ähnliche Vielecke auch für Kreise gelten, ist damit keineswegs bewiesen. Gerade der Übergang auf die krummlinigen Figuren ist der springende Punkt. Ein Vieleck mit einer Million Seiten ist kein Kreis, und ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten gibt es nicht.

Wenn wir heute die Sache streng machen wollen, führen wir den Begriff des Grenzwertes ein und betrachten den Kreis als den Grenzwert, dem die eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke zustreben, wenn man deren Seitenzahl unbegrenzt wachsen läßt. Eine Darstellung dieser Art findet sich z. B. bei H. Thieme, Die Elemente der Geometrie, Leipzig 1909, S. 82 ff. Es ist das eine Erweiterung des Gedankens der Archimedischen Kreismessung (Kritisches dazu bei W. Killing und H. Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts, I. Bd., Leipzig 1910, S. 334 ff.). Die Begriffe des Grenzwertes und des Unendlichen haben nun die Griechen in der klassischen Zeit völlig vermieden, wahrscheinlich infolge schlechter Erfahrungen, die man vorher damit gemacht hatte (Sophismen des Zenon). Nun ist klar, daß auch Eudoxos (oder Euklid) den Kreis als die Grenze der eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke auffaßten. Das geht aus dem Beweis ja direkt hervor. Da sie aber keine Möglichkeit sahen, von dieser Auffassung aus einen Beweis zu geben, der ihrem Bedürfnis nach logischer Strenge entsprach, erfand Eudoxos das hier angewendete Verfahren, das man, da Gregorius a St. Vincentio in seinem „Opus geometricum“ (Antwerpen 1647) das Wort „exhaurire“ (= ausschöpfen) dafür gebrauchte, später die Exhaustionsmethode genannt hat. Was Euklid oben gibt, nennt man aber besser einen Exhaustionsbeweis. Der Kreis wird durch die fortgesetzte Einschreibung weiterer Dreiecke „ausgeschöpft“. Eine wirkliche Methode haben die Griechen daraus nie gemacht; sondern Euklid und Archimedes führen den Exhaustionsbeweis an jedem einzelnen Beispiel, wo sie ihn brauchen, vollständig durch.

Wir wollen uns nun den Gang des Beweises kurz vergegenwärtigen, wollen aber gleichzeitig bemerken, daß das Verfahren, so geistreich es ist, uns heute wenig mehr befriedigt, 1. weil, wie angedeutet, der Kernpunkt der ganzen Sache nicht hervortritt, 2. weil der Beweis indirekt (apagogisch) ist. Zu bewundern bleibt die Genialität der Griechen, daß sie solche Beweisverfahren erfanden.

Bezeichnen wir die Flächen der beiden Kreise mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, die der ihnen eingeschriebenen ähnlichen Vielecke von beliebiger Seitenzahl mit $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$, die Durchmesser mit k und l, so will Euklid beweisen, daß

$$\mathfrak{K} : \mathfrak{L} = k^2 : l^2, \tag{1}$$

und er weiß, daß

$$\mathfrak{K}' : \mathfrak{L}' = k^2 : l^2. \tag{2}$$

Angenommen nun, (1) sei nicht richtig, sondern es sei

$$k^2 : l^2 = \mathfrak{K} : S, \tag{3}$$

wobei

$$S < \mathfrak{L}. \tag{4}$$

Nun vervielfacht Euklid die Seiten des Polygons $\mathfrak{L}'$ im Kreis $\mathfrak{L}$ soweit, bis ein Rest gegenüber dem Kreis bleibt, der kleiner ist als der Unterschied $\mathfrak{L} - S$. Diesen letzteren kann und soll man sich natürlich möglichst klein denken; aber nicht einmal das sagt Euklid [1]). Daß man überhaupt soweit gehen kann mit den eingeschriebenen Polygonen, beruht auf dem Satz X, 1, den wir in der vorigen Nummer besprochen haben, und der in der Tat die Grundlage für alle Exhaustionsbeweise ist.

Dann hat man

$$\mathfrak{L} - \mathfrak{L}' < \mathfrak{L} - S, \tag{5}$$

und folglich

$$\mathfrak{L}' > S. \tag{6}$$

---

[1]) Vgl. die Fußnote 1 auf Seite 1. Für die logische Richtigkeit des Beweises ist es auch gar nicht notwendig, daß der Unterschied möglichst klein gedacht wird, und bei späteren Exhaustionsbeweisen, z. B. bei dem entsprechenden Satz für das Verhältnis der Rauminhalte von Kugeln, tritt tatsächlich nicht einmal mehr eine einer Grenze zustrebende Reihe von Größen auf. Das ist natürlich nicht geeignet, die Beweise für uns genießbarer zu machen.

Macht man im Kreise $\mathfrak{K}$ ein regelmäßiges Polygon von gleich großer Seitenzahl, so gilt Gleichung (2). Demnach ist

(7) $$\mathfrak{K}' : \mathfrak{L}' = \mathfrak{K} : S,$$

oder

(7a) $$\mathfrak{K}' : \mathfrak{K} = \mathfrak{L}' : S.$$

Da aber

(8) $$\mathfrak{K}' < \mathfrak{K},$$

muß auch

(9) $$\mathfrak{L}' < S \text{ sein.}$$

Dies widerspricht aber der Gleichung (6) direkt, und es kann also die Ungleichung (4) nicht bestehen.

Im zweiten, kürzeren Teil des Beweises wird sodann untersucht, ob nicht in der Gleichung (3)

(10) $$S > \mathfrak{L}$$

genommen werden könne. Euklid setzt nun etwa

(11) $$S : \mathfrak{K} = \mathfrak{L} : \mathfrak{S}.$$

Dann ist, da $S > \mathfrak{L}$, auch $\mathfrak{K} > \mathfrak{S}$ [1]), oder

(12) $$\mathfrak{S} < \mathfrak{K},$$

was der Gleichung (4) entspricht. Jetzt kann man den Beweis genau so führen wie im ersten Teil, wenn man nur die beiden Kreise vertauscht. Also kann auch die Gleichung (10) nicht bestehen, ebensowenig wie Gleichung (4) und es muß daher

(13) $$S = \mathfrak{L}$$

sein, woraus der zu beweisende Satz folgt.

Hätte Euklid auch den zweiten Teil direkt beweisen wollen, so hätte er umgeschriebene Vielecke anwenden müssen. Die Zurückführung auf den ersten Fall war aber kürzer. Wir tadeln freilich heute an diesem sonst logisch einwandfreien Beweis, daß die Existenz eines Wertes S, der der Gleichung (3)

[1]) Der Beweis dieser Behauptung ist in dem weggelassenen Hilfsatz enthalten. Er besteht einfach darin, daß die inneren Glieder vertauscht werden.

genügen muß, ohne weiteres angenommen wird. Wir beweisen die Existenz des Grenzwertes, dem die eingeschriebenen Vielecke zustreben. Daß Euklid dazu keine Notwendigkeit fühlte, kann man ihm aber kaum zum Vorwurf machen[1]).

III.

Die Quadratur der Parabel mittels einer unendlichen geometrischen Reihe.

Aus: Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii. Iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. II. Lipsiae, MDCCCCXIII. Aus der „Quadratura parabolae" genannten Abhandlung. — Deutsch von A. Czwalina in Ostwalds Klassikern Nr. 203, und von F. Kliem nach der englischen Ausgabe von Th. L. Heath (s. o. S. 5/6). Beide Übersetzungen sind aber sehr frei.

Vorbemerkung. Archimedes gab seiner Abhandlung wohl selbst keinen Titel, weil sie als Brief an einen Freund geschrieben ist. Die „Quadratur der Parabel" hat 24 Kapitel. In den ersten 17 werden zuerst Sätze über die Parabel mitgeteilt und bewiesen, sodann das (schiefe) Parabelsegment quadriert unter Verwendung des Hebelgesetzes und des Dreieckschwerpunktes, einer Methode, die in Wirklichkeit einer modernen Integration gleichkommt. Dann fügt Archimedes noch eine rein geometrische Quadratur desselben Segmentes bei, die auf einer unendlichen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ beruht. Die Richtigkeit wird durch gewöhnlichen Exhaustionsbeweis bewahrheitet. Den Inhalt der Nummern XVIII bis XXII gebe ich im folgenden in moderner Ausdrucksweise wieder.

---

[1]) Vgl. zum Exhaustionsbeweis auch den Aufsatz von G. Junge „Besonderheiten der griechischen Mathematik" im Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 35 (1926), S. 150ff.

Sei $y^2 = m\,x$ die Gleichung der Parabel in schiefwinkligen Koordinaten in bezug auf die Tangente in B (Fig. 3)

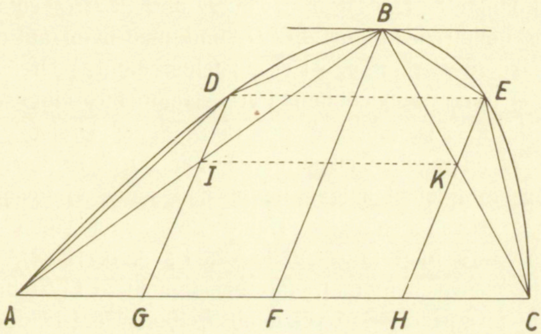


Fig. 3.

als y-Achse und den Durchmesser BF als x-Achse, und sei H der Mittelpunkt von FC, so gilt für den Punkt E, wenn C die Koordinaten x, y hat, und E die Koordinaten ξ, $\frac{1}{2}\,y$,

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = m\,\xi,$$

also
$$\xi = \frac{y^2}{4\,m},$$

und

$$H\,E = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4\,m} = \frac{3\,y^2}{4\,m} = \frac{3}{4}\,x = \frac{3}{4}\,FB.$$

Da ferner $HK = \frac{1}{2}\,BF$, so ist $KE = \frac{1}{4}\,FB$ und $HK = 2\,KE$.

Infolgedessen ist $\triangle\,H\,C\,K = 2\,\triangle\,K\,C\,E = \triangle\,B\,C\,E$.

Da aber
$$\triangle\,F\,C\,B = 4\,\triangle\,H\,C\,K,$$

so ist
$$\triangle\,F\,C\,B = 4\,\triangle\,B\,C\,E,$$

und schließlich, da links vom Durchmesser $F\,B$ dieselben Verhältnisse stattfinden,

$$\triangle\,A\,C\,B = 4\,(\triangle\,A\,B\,D + \triangle\,B\,C\,E).$$

Dabei sind alle vorkommenden Dreiecke die größten, die in die Parabelsegmente auf der Sehne als Grundlinie eingeschrieben werden können [1]). Die Figuren BCE und ABD entsprechen nun aber genau der Figur ACB, und man kann auf die nämliche Weise weiterfahren. Es entstehen dann 4 Dreiecke, die in die 4 übrig gebliebenen Parabelsegmente eingeschrieben sind, und die zusammen $\frac{1}{4}$ der Summe der Dreiecke ABD und BCE ausmachen. Da man ferner durch Ergänzung zum Parallelogramm leicht zeigen kann, daß jedes eingeschriebene Dreieck größer ist als die Hälfte des zugehörigen Parabelsegments [2]), so folgt (aus Euklid X, 1; s. o. Nr. I), daß der Unterschied zwischen dem Parabelsegment ACB und dem durch die fortgesetzte Dreieckseinschreibung entstandenen eingeschriebenen Vieleck kleiner gemacht werden kann als irgendeine gegebene Fläche. Andererseits ist die Summe der so gebildeten Dreiecke, wie weit man auch gehen mag, kleiner als das Parabelsegment. Die zwei letzten Kapitel gebe ich im folgenden wörtlich wieder.

> S. 310. (Czwalina S. 26; Kliem S. 368): XXIII. Wenn Größen gegeben werden, die der Reihe nach in vierfachem Verhältnis stehen, so sind alle Größen zusammengenommen und dazu der dritte Teil der kleinsten (Größe) um ein Drittel größer als die größte (der gegebenen Größen).
>
> Wir nehmen also beliebig viele Größen A, B, C, D, E der Reihe nach an (Fig. 4), von denen jede das Vierfache der folgenden ist [3]). Die größte darunter sei die A, ferner sei die Z ein Drittel der B, die H (ebenso ein Drittel) der C, die O der D, die I der E. Da nun die Z der dritte Teil der B, die B aber ein Viertel der A ist, so sind die

[1]) Denn die Tangente am Endpunkt eines Durchmessers, z. B. in E, ist immer parallel zu den konjugierten Sehnen, z. B. zu BC.

[2]) Vgl. o. in Nr. II, S. 7.

[3]) Die Figur ist nur schematisch, aus leicht begreiflichen Gründen.

beiden B, Z zusammen der dritte Teil der A. Aus demselben Grunde sind aber auch die H, C (zusammen der dritte Teil) der B, und die O, D der C und die I, E der D. Und alle die B, C, D, E, Z, H, O, I sind zusammen

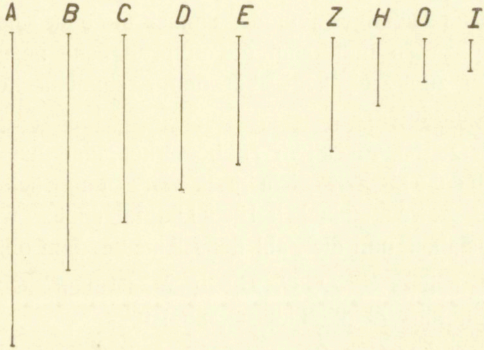


Fig. 4.

der dritte Teil der A, B, C, D zusammengenommen. Andrerseits ist (die Summe) der Z, H, O selbst der dritte Teil (der Summe) der B, C, D selbst. Folglich sind die übrig bleibenden B, C, D, E, I zusammen der dritte Teil der übrig bleibenden A. Es ist also offenbar, daß die A, B, C, D, E und die I, nämlich das Drittel der E, zusammen ein Drittel mehr sind als die A.

Erläuterungen. Wir überlassen es dem Leser, die Archimedischen Überlegungen genau in unserer Zeichensprache wiederzugeben. Wir wollen hier den Gedanken, der dem Archimedischen Beweis zugrunde liegt, folgendermaßen wiedergeben.

Es sei

$$S = A + B + C + D + E \qquad (A:B = \ldots = D:E = 4:1).$$

Dann ist

$$\tfrac{4}{3} S = \tfrac{4}{3} A + \tfrac{4}{3} B + \tfrac{4}{3} C + \tfrac{4}{3} D + \tfrac{4}{3} E,$$

oder $\qquad \frac{4}{3} S = \frac{4}{3} A + (\frac{1}{3} A + \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{3} D),$

und $\qquad \frac{4}{3} S = \frac{4}{3} A + (\frac{1}{3} S - \frac{1}{3} E).$

Schließlich

$$S + \frac{1}{3} E = \frac{4}{3} A.$$

Unsere heutige Methode, einfach die erste Gleichung mit 4 zu multiplizieren und dann die ursprüngliche abzuziehen, führt ja rascher zum Ziel, liegt aber dem Archimedischen Gedankengang schon ferner.

Hierzu ist vor allem zu bemerken, daß das Ergebnis zu Archimedes' Zeit nicht neu war. Im Buch IX, 35 der Elemente beweist nämlich Euklid folgendes, wobei ich nur die Buchstaben und die Zahl der Elemente dem obigen anpasse.

Es seien E, D, C, B, A, X Größen in fortlaufender Proportion und E die kleinste, so ist

$$(D - E) : E = (X - E) : (A + B + C + D + E),$$

oder also

$$S = \frac{X - E}{D - E} \cdot E.$$

Das ist nichts anderes als die allgemeine Summenformel für die geometrische Reihe. In dem obigen Fall ist

$$X = 4A, \; D = 4E,$$

also $$S = \frac{4A - E}{3} = \frac{4}{3} A - \frac{1}{3} E.$$

Weder Euklid noch Archimedes können es ausdrücken, daß die Rechnung für beliebig viele Glieder gilt. Sie sagen es aber, und in jedem Fall ist der Beweis so, daß man eine beliebige endliche Zahl von Gliedern annehmen kann.

Das wäre nun alles an sich nichts Besonderes. Aber wie wir sofort sehen werden, benützt Archimedes sein Ergebnis, indem er stillschweigend die Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt denkt, so daß $\frac{1}{3} E$ verschwindet und S gleich $\frac{4}{3} A$ wird. Wir geben zunächst den Wortlaut des Kapitels.

S. 312: XXIV. Jedes von einer geraden Linie und von einem Schnitt des rechtwinkligen Kegels (d. h. von einer Parabel) eingeschlossene Segment ist um ein Drittel größer als das Dreieck, das mit ihm die Grundlinie gemeinsam und die Höhe gleich hat.

Es sei nämlich $ADBEC$ ein Segment, das begrenzt wird von einer Geraden und dem Schnitt eines rechtwinkligen Kegels (Fig. 5), das Dreieck ABC aber habe die-

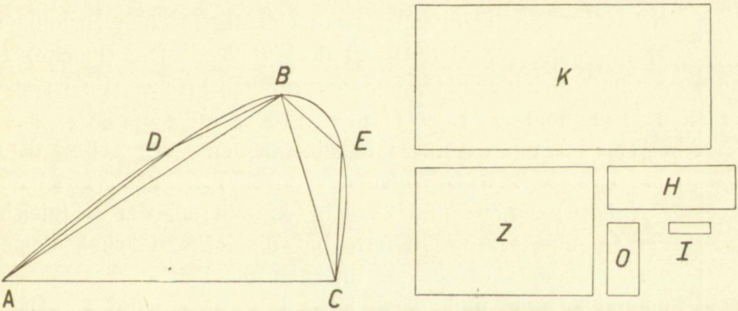


Fig. 5.

selbe Grundlinie wie das Segment und die gleiche Höhe, die Fläche K aber sei gleich vier Dritteln des Dreiecks ABC. Es ist zu zeigen, daß sie gleich ist dem Segment $ADBEC$.

Wenn sie nämlich nicht gleich ist (dem Segment), so ist sie entweder größer oder kleiner. Es sei zuerst, wenn möglich, das Segment $ADBEC$ größer als die Fläche K. Ich schrieb nun die Dreiecke ADB, BEC, wie gesagt wurde, ein, und auch in die übrig bleibenden Segmente andere Dreiecke mit derselben Grundlinie und der gleichen Höhe wie die Segmente, und immer in den daraufhin entstehenden Segmenten schreibe ich[1]) Dreiecke ein mit derselben Basis und der gleichen Höhe wie die Segmente. Dann werden

[1]) Hier steht im Griech. δύο (= zwei), was offensichtlich ein Versehen ist. Im Lat. (S. 313) fehlt es auch.

(schließlich) die übrig bleibenden Segmente (zusammen) kleiner sein als der Unterschied, um den das Segment $ADBEC$ die Fläche K übertrifft. Dann wäre das eingeschriebene Vieleck größer als K. Das ist aber unmöglich. Da nämlich die aufeinander folgenden Flächen im vierfachen Verhältnis stehen: zuerst das Dreieck ABC viermal so groß als die Dreiecke ADB, BEC zusammen, dann diese selbst viermal so groß als (die Summe) der den folgenden Segmenten einbeschriebenen (Dreiecke) und immer so weiter, so ist offenbar, daß alle die Flächen zusammen kleiner sind als vier Drittel der größten. Die (Fläche) K ist aber gleich vier Dritteln der größten Fläche. Es ist also das Segment $ADBEC$ nicht größer als die Fläche K.

Es sei nun, wenn möglich, kleiner. Wir setzen dann das Dreieck ABC gleich der (Fläche) Z, das Viertel der Z (gleich) der H, und ähnlich (das Viertel) der H (gleich) der O, und fahren so fort, bis die letzte (Fläche) kleiner wird als der Unterschied, um den die Fläche K das Segment übertrifft, und diese letzte kleinere sei die I. Dann sind also die Z, H, O, I zusammengenommen und dazu noch ein Drittel der I um ein Drittel größer als die Z. Es ist aber auch die K um ein Drittel größer als die Z. Also ist die K den Z, H, O, I zusammengenommen und dazu dem dritten Teil von I gleich. Da nun die Fläche K die (Summe der) Flächen Z, H, O, I um weniger als die I übertrifft, das Segment aber um mehr als I, so ist offenbar, daß die Flächen Z, H, O, I zusammen größer sind als das Segment. Das ist aber unmöglich. Es wurde nämlich bewiesen, daß, wenn beliebig viele Flächen nach einander gegeben sind, die zu einander in vierfachem Verhältnis stehen, die größte davon aber gleich ist dem in das Segment eingeschriebenen Dreieck, alle die Flächen zusammen kleiner sein werden als das Segment. Folglich ist das Segment $ADBEC$ nicht kleiner als die Fläche K. Es wurde aber gezeigt, daß es auch nicht größer sein kann, also ist es der Fläche K gleich. Die Fläche K ist aber gleich vier Dritteln des Dreiecks ABC; auch das Segment $ADBEC$ ist demnach gleich vier Dritteln des Dreiecks ABC.

Erläuterungen. Dieser Beweis ist typisch dafür, daß man mittels der Exhaustion nichts finden kann, was man nicht auf irgend eine andere Weise vorher fand oder ahnte. Archimedes schreibt den Satz, den er beweisen will, einfach vorne hin: Das Parabelsegment ist gleich $\frac{4}{3} \triangle ABC$, und dann zeigt er in kunstgerechter Weise, daß eine Fläche K, die gleich $\frac{4}{3} \triangle ABC$ ist, nicht größer oder kleiner sein kann als das Parabelsegment. Der Leser wird sich, soweit es nötig ist, die Archimedischen Überlegungen leicht selbst in die algebraische Zeichensprache übersetzen. Wir wollen hier nur das Grundsätzliche besprechen. Woher weiß denn Archimedes, daß für das Segment $\frac{4}{3} \triangle ABC$ herauskommen wird? Nun, es kann kein Zweifel darüber sein, daß er sich die Reihe der eingeschriebenen Dreiecke oder der für sie in diesem Kapitel gesetzten Flächen Z, H, O, I, von denen jede vorhergehende viermal größer als die folgende ist, unbegrenzt fortgesetzt dachte, so daß schließlich das „letzte" Glied der geometrischen Reihe gleich Null gesetzt werden kann und die Summe wirklich gleich $\frac{4}{3}$ des ersten (größten) Gliedes ist. Tatsächlich hat also Archimedes doch die unendliche geometrische Reihe verwendet, wenn er dies auch mit keinem Wort andeutet. Daß der Unterschied gegenüber dem Parabelsegment unter jede noch so kleine Größe (er sagt im Zusatz zu Kap. XX nur: jede vorgegebene Fläche) herabgedrückt werden kann, hat er ja bewiesen. Das genügt unseren heute doch so hoch gestellten Anforderungen an Strenge durchaus. Es ist daher besonders bezeichnend, daß die alten Griechen lieber die Last des indirekten Beweises auf sich nahmen, um nur die Wörter „Grenze" oder „unendlich" zu vermeiden. Wie wir das noch genauer sehen werden, scheuten sie sich aber durchaus nicht, diese Begriffe heuristisch zu verwenden. Ohne das hätten sie wohl auch keine Resultate gefunden.

Aus dem Anfang dieses Kapitels ersieht man, daß Archimedes den Namen „Parabel“ noch nicht hatte (ebenso wenig wie „Ellipse“ und „Hyperbel“). In früherer Zeit wurden nämlich die Kegelschnitte durch einen Schnitt senkrecht zu einer Mantellinie des Kegels definiert. Dann war die Parabel natürlich der Schnitt eines senkrechten Kegels, die Ellipse der Schnitt eines spitz- und die Hyperbel der Schnitt eines stumpfwinkligen Kegels. Wenn man gewiß schon vor Apollonios (um 200 v. Chr.) wußte, daß man eine Ellipse z. B. auch aus einem stumpfwinkligen Kegel erhalten könne, so brach doch erst dieser mit der Überlieferung und führte gleichzeitig die heute noch üblichen Namen ein (vgl. III. Bdchn., S. 2).

IV.

Widerlegung der Lehre von den Atomlinien.

Aus: Aristotelis quae feruntur . . . . , de lineis insecabilibus, ..., edidit Otto Apelt. Lipsiae MDCCCLXXXVIII, S. 139—157 (griech.). Lat. in „Aristotelis Opera“, ed. Academia Regia Borussiae. Vol. III. Aristoteles latine interpretibus variis. Berlin 1831, S. 474 bis 476: De insecabilibus lineis, Julio Martiano Rota interprete. Deutsch von O. Apelt in „Beiträge zur Geschichte der griechischen Philosophie“, Leipzig 1891, als Anhang zur Abhandlung V: „Die Widersacher der Mathematik im Altertum“ (S. 253—286; im bes. S. 271—286). Englisch in „The Works of Aristotle“, Transl. into Engl. under the Editorship of J. A. Smith, W. D. Ross, Part 2: De lineis insecabilibus, by Harold H. Joachim, Oxford 1908, (IV) + (64) S. 8⁰.

Vorbemerkung. Diese mit mehreren anderen unter des Aristoteles Namen überlieferte Schrift „Über unteilbare Linien“ gehört sehr wahrscheinlich einem seiner Schüler an. Verschiedene Umstände weisen auf Theophrastos, den Aristoteles selbst als den bedeutendsten zu seinem Nachfolger bestimmt hatte und der als „Vater der Botanik“ bekannt ist. Es handelt sich in der Schrift um eine Widerlegung der Lehre von den „Atomlinien“, die in Platons Akademie theoretisch bearbeitet worden war und deren Hauptvertreter Xenokrates war. Nach dieser Lehre sollten nicht, wie das schon Anaxagoras (um 460 v. Chr.) gefordert hatte, jede Strecke (und auch jeder physische Körper) ins Unendliche teilbar sein, sondern es sollte, wie dies dem besonders durch Demokritos (um 440 v. Chr.) ausgebildeten „Atomismus“ entsprach, auch die mathematische Linie (ebenso wie jeder physische Körper) aus kleinsten weiter nicht mehr teilbaren Atomen, den sog. „Atomlinien“, bestehen. Wie der Verf. sagt, widerspricht nun diese Lehre „so ziemlich allem in der Mathematik“. Trotzdem ist sie der Mathematik nützlich gewesen. Die „Indivisibeln“, wie die „Atomlinien“ und ihre Verallgemeinerungen im Mittelalter genannt wurden, dienten schon Demokritos, wie Archimedes bezeugt (s. u. S. 47), zur Ableitung der Formel des Pyramidenvolumens, und Archimedes verwendete sie, wie wir sehen werden, selbst zur Auffindung der von ihm später streng bewiesenen Sätze über Oberflächen und Inhalte. Die Scholastiker, wie Albertus Magnus, Thomas von Aquin, Roger Bacon, Duns Scotus, Thomas Bradwardin, verfeinerten die Theorie der Indivisibeln, und diese wurden von den ersten Mathematikern der Neuzeit, wie Descartes und Galilei, sofort wieder verwendet, als ob sie längst bekannte Dinge wären. Der Galileischüler Cavalieri (s. u. S. 70f.) brachte ihre Verwendung zu Quadraturen und Kubaturen in ein gewisses System. Aber auch die „unendlich kleinen“ Größen, mit denen andere Mathematiker der beginnenden Neuzeit sich halfen, wie etwa Pascal (s. u. Nr. XIV), sind Verwandte der Indivisibeln. Man kann also sagen, daß die Indivisibeln die Entdeckung der Infinitesimalrechnung eingeleitet haben [1]).

[1]) Trotz der grundlegenden Wichtigkeit dieser Schrift für die Geschichte der Infinitesimalrechnung wird sie in dem großen Werk über Geschichte der Mathematik von M. Cantor noch gar nicht erwähnt. In neuerer Zeit ist aber von mehreren Seiten die Aufmerksamkeit auf sie gelenkt worden. Verbesserungen zu Apelt brachte

In der obigen pseudo-Aristotelischen Schrift gegen diese Lehre werden nun zuerst 5 Gründe für die Lehre angegeben. (Eine originale Darstellung durch Xenokrates oder einen andern haben wir leider nicht). Die ersten drei Gründe sind philosophisch, der vierte beruht auf den Paradoxa des Zenon und fällt mit deren Widerlegung, und der fünfte geht auf ein Mißverständnis des Begriffs „kommensurabel" zurück. Diesen 5 Gründen setzt der Verf. ein ganzes Feuerwerk von Gegengründen gegenüber, die nicht nur durch ihre Anzahl, sondern auch durch ihre Schärfe und Treffsicherheit überraschen. Leider ist infolge des schlechten Zustandes der überlieferten Handschriften der Text nicht überall sicher gestellt. Ich gebe im folgenden eine kleine Auswahl der Gegengründe.

S. 146, 16 . . . . . . Daß also aus den mitgeteilten Gründen (für die Lehre) weder die Notwendigkeit der Existenz von Atomlinien (*ἀτόμων γραμμῶν*) folgt, noch auch deren Wahrscheinlichkeit, ist offenbar. Aus dem folgenden wird es aber noch klarer werden[1]. . . . . . .

(I) (147, 4). Ferner wären dann alle Linien (Strecken) kommensurabel (*σύμμετροι*). Denn alle würden durch

---

Eva Sachs, Die fünf Platonischen Körper, Berlin 1917, S. 133 bis 146, eigene Kapitel widmete den Atomlinien Julius Stenzel, Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Leipzig 1924, S. 70—83. Für die allgemeine Problemlage siehe bes. Erich Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle a. S. 1923 (unter den angeführten Namenstichworten) und neuestens Oskar Becker, Mathematische Existenz, Halle a. S. 1927 (z. B. S. 145). Keiner der deutschen Autoren hat aber, soviel ich sehe, die fleißige englische Ausgabe von Joachim benützt, die doch schon seit 1908 vorliegt und in den zahlreichen Anmerkungen sowohl textkritische Bemerkungen, wie sachliche Erläuterungen enthält. — Vgl. auch noch das ältere Buch: Richard Heinze, Xenokrates, Darstellung der Lehre und Sammlung der Fragmente. Leipzig 1892, S. 60—64.

[1]) Der griechische Text hat keine Absätze oder sonstige Gliederung. Bei Joachim sind die Gesichtspunkte sehr schön abgeteilt.

Atom(linien) gemessen, sowohl diejenigen, die (einfach) der Länge nach kommensurabel sind, wie die, die es (erst) im Quadrat sind. Die Atomlinien sind (nämlich) alle kommensurabel der Länge nach — sie sind ja gleich — also auch im Quadrat. Unter diesen Umständen wäre aber jedes Quadrat[1]) rational (ῥητόν) . . . .

(II) (147, 12). Wenn ferner aus drei gegebenen Geraden ein Dreieck gebildet wird, wird man auch aus drei Atomlinien ein solches bilden (können). In jedem gleichseitigen (Dreieck) aber trifft das Lot (von der Spitze) auf die Mitte (der Grundlinie), also auch auf die Mitte der Atom(linie).

(III). Wenn ferner aus den unteilbaren (ἀμερῶν) (Linien) das Quadrat (gebildet wird), und man zieht eine Diagonale und fällt ein Lot (von einer der freien Ecken auf die Diagonale), so ist die Quadratseite im Quadrat gleich den Quadraten des Lotes und der Hälfte der Diagonale (zusammengenommen), so daß sie (die Quadratseite) keine kleinste (Strecke) ist . . . .

(IV) (148, 6). Ferner würde die Hinzufügung einer Linie (zu einer andern) nicht die ganze Linie größer machen. Denn die unteilbaren (Linien) bringen zusammengesetzt nichts Größeres hervor.

(V). Ferner wenn aus zwei unteilbaren (Linien) keine stetige (Linie) gebildet werden kann, weil alles Stetige mehrere Teilungen zulassen muß, jede Linie außer der Atomlinie aber (zugestandenermaßen) stetig (συνεχής) ist, kann es keine Atomlinie geben. . . . . .[2])

(VI) (149, 13). Ferner wird nicht in jeder Linie ein Punkt (στιγμή) (enthalten) sein. In der Atom(linie) wird näm-

[1]) Gemeint ist: jede Quadratwurzel.

[2]) Die Stetigkeit wird von Aristoteles definiert in der „Physik“ V, 3 (Ak.-Ausg. 227a 11f.): „Ich sage, daß dann etwas Stetiges (wörtlich: Zusammenhängendes) vorliegt, wenn die Grenzen zweier (Dinge), mit denen sie sich berühren, eine und dieselbe werden, und, wie schon der Name sagt, zusammenhängen.“

lich keiner sein (können); enthielte sie nämlich nur einen einzigen, so wäre die Linie (selbst) ein Punkt, wenn aber mehrere, so wäre sie teilbar. Wäre nun aber gar kein Punkt in der Atom(linie), so gäbe es überhaupt in keiner Linie einen; denn die anderen (Linien) (setzen sich zusammen) aus den Atom(linien). . . . .

(VII) (150, 1). Ferner wird die Grenze der Linie eine Linie sein, nicht aber ein Punkt. Die Grenze ist nämlich das letzte, d. i. die Atom(linie). Wäre aber die Grenze ein Punkt, so hätte auch die Atom(linie) als Grenze einen Punkt, und es wäre eine Linie um einen Punkt größer als eine andere. . . . . (150, 7). Wodurch wird sich nun überhaupt ein Punkt von einer Linie unterscheiden? Die Atomlinie wird ja gar nichts Eigentümliches haben gegenüber dem Punkt abgesehen vom Namen. . . . . (150, 17). Aus diesen (Gründen) ist aber ersichtlich, daß eine Linie auch nicht aus Punkten (zusammengesetzt) sein kann. Denn die meisten der Gründe passen fast ebenso (für Punkte wie für Atomlinien). (Dies wird nun weiter ausgeführt). . . . .

(VIII) (154, 4). Ferner würde alles in Punkte zerlegt und und aufgelöst, und der Punkt (wäre) ein Teil des Körpers, da ja (nach der Theorie) der Körper aus Ebenen, die Ebene aber aus (geraden) Linien, die Linien aber aus Punkten bestünden. . . . .

E r l ä u t e r u n g e n. Wie man aus meiner ziemlich wörtlichen Übersetzung sieht, ist der griechische Text äußerst knapp. Die Übersetzung A p e l t s schließt sich ihm auch eng an, während J o a c h i m breit und frei übersetzt. — Zu (I): Der Grieche kennt natürlich keine andere Irrationalität als die Quadratwurzel, die durch das Quadrieren aufgehoben wird. Es wäre dann nach unserer Ausdrucksweise nicht nur die Zahl 3 rational, sondern auch die Zahl $\sqrt{3}$. Denn ein Quadrat mit dem Inhalt 3 hat Seiten aus Atomlinien; demnach muß $\sqrt{3}$ mit 3 kommensurabel sein. Das gemeinsame Maß ist eben die

Atomlinie. Der Unterschied zwischen Rationalem und Irrationalem wäre aufgehoben. — (II) und (III) sehr hübsch und leicht verständlich. — (IV). Für die Atomlinien würde eben das Archimedische Axiom nicht gelten; d. i. die Ablehnung des ‚Unendlichkleinen" (s. o. S. 3). — (V). Die Atomistik widerspricht grundsätzlich der Stetigkeit. Das ist genau dasselbe, was heute die sog. Formalisten (Hilbert) von den Intuitionisten (Brouwer) trennt. Die heutige Theorie der Stetigkeit ist im letzten Grunde atomistisch, weil sie auf die Theorie der Irrationalzahlen gegründet ist, (denen die Punkte einer Strecke entsprechen). Die Intuitionisten vertreten demgegenüber die sozusagen anschauungsmäßige Stetigkeit, wobei eine Strecke nicht nur nicht aus Punkten zusammengesetzt ist, sondern auch nicht in Punkte aufgelöst werden kann. — (VI—VII). Nun kommt eine Reihe von Argumenten, die zeigen, daß Atomlinien von Punkten nicht zu unterscheiden sind. — (VIII). Dies zeigt, daß Apelt nicht Recht hatte, wenn er meinte, daß die Theorie der Atomlinien mit der Demokritschen Atomistik nichts zu tun habe. Gerade die Zerlegung eines Körpers in Ebenen hatte Demokritos angewendet (s. u. S. 47). Die systematische Fassung der Theorie gehört aber wohl erst der Schule Platons an[1]).

V.

Die Summe der Quadratzahlen.

Aus: Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii. Iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. II. MDCCCCXIII. Lipsiæ, in ædibus B. G. Teubneri. Im besonderen aus der Abhandlung „De lineis spiralibus". Deutsch von A. Czwalina, „Über Spiralen" von Archimedes, Leipzig 1922. Akad. Verl.-Ges. (Ostw. Klass. Nr. 201).

[1]) In Platons überlieferten Werken kommen die „unteilbaren Linien" nicht vor. Wir haben aber das Zeugnis von Aristoteles („Metaphysik" I, 9, Ak.-Ausg. 992a 20f.), daß Platon selbst häufig von Atomlinien Gebrauch machte.

S. 30. X. Wenn beliebig viele Linien (Strecken), die gleichen Unterschied gegeneinander haben, gegeben sind, der gleiche Unterschied aber der kleinsten (Strecke) gleich ist, und wenn andere Linien (Strecken) von derselben Anzahl wie die vorigen gegeben sind, von denen jede gleich der größten ist, so sind die Quadrate der der größten gleichen (Strecken) unter Hinzunahme des (noch eines) Quadrates über der größten und der (Strecke), die gleich ist allen denen, die gleichen Unterschied gegeneinander haben, dreimal so groß als alle Quadrate über den (Strecken), die gleichen Unterschied gegen einander haben. (I) [1]).

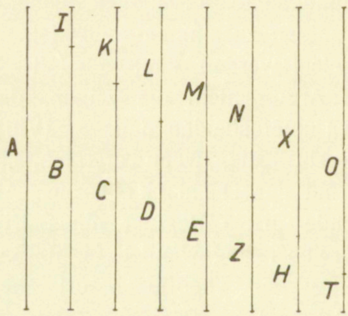


Fig. 6.

Es seien die beliebig vielen der Reihe nach gegebenen Linien (Strecken), die gleichen Unterschied gegen einander haben, A, B, C, D, E, Z, H, T (Fig. 6), und T sei gleich dem Unterschied, und es werde zur B die I gleich der T hinzugefügt, zur C die K gleich der H, zur D die L gleich der Z, zur E die M gleich der E, zur Z die N gleich der D, zur H die X gleich der C, zur T die O gleich der B, so sind die entstandenen (Strecken) unter sich gleich und (alle gleich) der größten. Es ist dann zu beweisen, daß

[1]) Diese Ziffern entsprechen den ebenso bezeichneten Abteilungen der Erläuterungen.

die Quadrate über allen, nämlich der A und der (durch Ergänzung neu) entstandenen zusammen mit dem (nochmals genommenen) Quadrat über der A und dem Rechteck aus der T und der (Strecke), die gleich ist allen den A, B, C, D, E, Z, H, T, dreimal so groß sind als alle Quadrate über den A, B, C, D, E, Z, H, T. (II)

Nun ist aber das Quadrat über der BI $(B+I)$ gleich den zwei Quadraten über den I, B und den zwei Rechtecken aus den B, I, das (Quadrat) über der KC gleich den (32) Quadraten über den K, C und den zwei Rechtecken aus den K, C; ähnlich sind auch die Quadrate über den andern der A gleichen (Strecken) gleich den Quadraten über den Abschnitten und den zwei Rechtecken aus den Abschnitten. Nun sind die Quadrate über den A, B, C, D, E, Z, H, T und die über den I, K, L, M, N, X, O zusammen mit dem über der A doppelt so groß als die (Quadrate) über den A, B, C, D, E, Z, H, T. (III)

Es bleibt dann noch übrig zu beweisen, daß die doppelten Rechtecke aus den Abschnitten in jeder der A gleichen Linien (Strecken) zusammen mit dem Rechteck aus der T und der (Strecke), die gleich ist allen den A, B, C, D, E, Z, H, T, gleich sind den Quadraten über den A, B, C, D, E, Z, H, T. Da nämlich zwei der Rechtecke aus den B, I gleich sind zweien aus den B, T, zwei aus den K, C aber gleich dem Rechteck aus der T und dem Vierfachen der C, weil die K das doppelte ist der T, zwei aus den D, L gleich dem aus der T und dem sechsfachen der D, weil die L das dreifache der T ist, und ähnlich auch die anderen doppelten Rechtecke aus den Abschnitten gleich dem Rechteck sind aus der T und den immer nach den fortlaufenden geraden Zahlen genommenen Vielfachen der nächsten Linien (Strecken), so wird alles, wenn man noch dazu nimmt das Rechteck aus der T und der (Strecke), die gleich ist den A, B, C, D, E, Z, H, T, gleich dem Rechteck aus der T und einer (Strecke), die gleich ist der A und (34) dem dreifachen der B und dem fünffachen der C und immer dem nach den fortlaufenden ungeraden Zahlen genommenen Vielfachen der nächsten Linien (Strecken). (IV)

Aber es sind auch die Quadrate über den A, B, C, D, E, Z, H, T gleich dem Rechteck aus denselben Linien (Strecken). Es ist nämlich das Quadrat über der A gleich dem Rechteck aus der T und der (Strecke) gleich der A zusammen mit einer (Strecke) gleich den übrigen, von denen jede gleich der A ist; so oft nämlich die T die A mißt, (so oft mißt) auch die A alle die ihr gleichen zusammen mit der A (selbst). (V) Folglich ist das Quadrat über der A gleich dem Rechteck aus der T und der (Strecke) gleich der A zusammen mit dem doppelten der B, C, D, E, Z, H, T; denn die der A gleichen (Strecken) sind alle zusammen, außer der A, doppelt so groß als die B, C, D, E, Z, H, T. (VI) Ähnlich aber ist auch das Quadrat über der B gleich dem Rechteck aus der T und der (Strecke) gleich der B zusammen mit dem doppelten der C, D, E, Z, H, T, und wieder ist das Quadrat über der C gleich dem (Rechteck) aus der T und der (Strecke) gleich der C zusammen mit dem doppelten der D, E, Z, H, T; ebenso sind auch die Quadrate über den andern (Strecken) gleich den Rechtecken aus der T und der (Strecke) gleich ihr (der ersteren) selbst und dem doppelten der übrigen. Also ist offenbar, daß die Quadrate über allen (Strecken) gleich sind dem Rechteck aus der T und der (Strecke) gleich allen, nämlich der A und der dreifachen der B und der fünffachen der C und den nach den fortlaufenden ungeraden Zahlen genommenen Vielfachen der folgenden (VII).

Zusatz.

Hiernach ist also offenbar, daß alle Quadrate über den der größten (Strecke) gleichen (Strecken) (zusammen) kleiner sind (36) als das dreifache der Quadrate derjenigen (Strecken), die gleichen Unterschied gegeneinander haben, da sie ja durch Hinzunahme von etwas gleich dem dreifachen werden, (daß sie) aber größer sind als das dreifache (dieser Quadratsumme), wenn man das (Quadrat) über der größten wegläßt, da das Hinzugenommene kleiner ist als das dreifache des Quadrates der größten (Strecke). (Es folgt nun noch die Bemerkung, daß dieser Satz auch gilt, wenn statt der Quadrate irgendwelche ähnliche Figuren genommen werden) (VIII).

Erläuterungen. (I) Der Wortlaut des Satzes besagt folgendes. Es seien die beiden Reihen von Strecken gegeben

(1) $a, 2a, 3a \ldots\ldots na$, (Summe s),

(2) $na, na, na, \ldots\ldots na$,

so ist

$$n(na)^2 + (na)^2 + as = 3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2].$$

(II) Da Archimedes das nicht so allgemein ausdrücken kann, nimmt er die beiden Reihen von Strecken

(1*) A, B, C, D, E, Z, H, T,

eine arithmetische Reihe, die mit der Differenz T abnimmt, und

(2*) $A, B+I, C+K, D+L, E+M, Z+N,$
$H+X, T+O,$

wobei

$I = T,\ K = H\,(= 2T),\ L = Z\,(= 3T), \ldots, O = B\,(= 7T)$,

so daß alle Strecken von (2*) gleich $A\,(= 8T)$ werden. Dann lautet sein Satz

$$\begin{aligned}&[A^2 + (B+I)^2 + \ldots + (T+O)^2 + A^2]\\ &+ [T(A+B+C+\ldots.+T)]\\ &\qquad = 3(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots\ldots + T^2),\end{aligned}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned}&(n+1)A^2 + T(A+B+C+\ldots+T)\\ &\qquad = 3(A^2+B^2+C^2+\ldots+T^2).\end{aligned}$$

(III) Archimedes sagt nun, daß

$$(B+I)^2 = B^2 + I^2 + 2BI,$$

und für die anderen Summen entsprechend. Ferner ist, da ja $I = T$, usw.

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + T^2$$
$$+ I^2 + K^2 + L^2 + M^2 + N^2 + X^2 + O^2 + A^2$$
$$= 2(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2).$$

(IV) Weiter hat man

$$2BI + 2CK + \ldots + 2TO$$
$$= 2BT + 4CT + \ldots + 14T^2;$$

Nimmt man dazu noch das Rechteck

$$T(A + B + C + \ldots + T),$$

so ergibt sich als Summe

$$T(A + 3B + 5C + \ldots + 15T).$$

(V) Nun ist aber

$$A^2 = T \cdot 8A = T[A + (B + I) + (C + K) + \ldots + (T + O)]$$

(VI) $$A^2 = T[A + 2(B + C + \ldots + T)],$$

weil ja nach dem obigen $I = T$, $K = H$, ..., $O = B$ ist.

(VII) Ähnlich ist

$$B^2 = T[B + 2(C + D + \ldots\ldots + T)],$$
$$C^2 = T[C + 2(D + E + \ldots\ldots + T)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H^2 = T(H + 2T),$$
$$T^2 = T \cdot T;$$

also ist auch

$$A^2 + B^2 + C^2 + \ldots\ldots + T^2 = T(A + 3B + 5C + . \quad + 15T).$$

Demnach ist wegen (IV)

$$2BI + 2CK + \ldots\ldots + 2TO$$
$$+ T(A + B + C + \ldots + T) = A^2 + B^2 + C^2 + \ldots\ldots + T^2,$$

aber nach (III)

$$A^2 + B^2 + \ldots + T^2 + I^2 + K^2 + \ldots + O^2 + A^2$$
$$= 2(A^2 + B^2 + C^2 \ldots + T^2).$$

Schließlich folgt der Satz

$$A^2 + (B + I)^2 + \ldots + (T + O)^2 + A^2$$
$$+ T(A + B + C + \ldots + T)$$
$$= 3(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2).$$

Heiberg weist darauf hin, daß der Beweis bei Archimedes einige Unebenheiten hat, die wohl von späteren erklärenden Einschiebungen herkommen. Hier will ich darauf nicht aufmerksam machen. Mittels der modernen Umschrift ist ja wohl der Archimedische Beweis nicht so schwer verständlich. Man stelle sich aber nur vor, daß man heute dies alles ohne schriftliche Festlegung durchdenken müßte!

(VIII) Der Zusatz ist das Wichtigste vom Ganzen! Er sagt folgendes:

(3) $n A^2 < 3 (A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2)$,

und dies ist aus (II) sofort klar; ferner daß

(4) $n A^2 > 3 (B^2 + C^2 + D^2 + \ldots + T^2)$.

Das letztere wird damit begründet, daß

$$A^2 + T(A + B + C + \ldots + T) < 3 A^2,$$

oder also

$$T(A + B + C + \ldots + T) < 2 A^2.$$

Das folgt aber sofort aus (V). Denn die linke Seite ist sogar kleiner als A^2, also erst recht $< 2 A^2$.

Setzen wir in (3) und (4) die Bezeichnungen von (I) ein, so lauten die Ungleichungen

(3*) $n^3 a^2 < 3 [a^2 + (2a)^2 + \ldots + (n-1)^2 a^2 + n^2 a^2]$,

(4*) $n^3 a^2 > 3 [a^2 + (2a)^2 + \ldots + (n-1)^2 a^2]$.

Setzt man in der Gleichung (4*) $n + 1$ statt n, so wird sie zu

(4**) $(n+1)^3 a^2 > 3 [a^2 + (2a)^2 + \ldots + (n-1)^2 a^2 + n^2 a^2]$.

(3*) und (4**) kann man zusammenfassen in die eine Gleichung

(5) $\frac{n^3}{3} a^2 < a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2 < \frac{(n+1)^3}{3} a^2$.

Läßt man hier a immer kleiner werden, während gleichzeitig n über alle Grenzen wächst, so daß aber an gleich einem bestimmten Wert x ist, so geht aus (5), wenn man noch mit $a (= dx)$ multipliziert (kurz ausgedrückt), das Integral hervor

(6) $$\int_0^x x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}.$$

Genau so wendet Archimedes auch die Ungleichungen (3) und (4) an (s. die folgende Nr.).

(IX) Die eigentliche Formel für die Summe der Quadratzahlen hat Archimedes nicht ausgerechnet. Sie geht aber aus (I) sofort hervor, wenn man $s = \frac{1}{2} n (n + 1) a$ setzt. Es ergibt sich

$$3 [a^2 + (2 a)^2 + \ldots + (n a)^2] = (n + 1) n^2 a^2 + \tfrac{1}{2} n (n + 1) a^2$$
$$= \tfrac{1}{2} n (n + 1) a^2 (2 n + 1),$$

oder

$$a^2 + (2 a)^2 + \ldots + (n a)^2 = \tfrac{1}{6} n (n + 1) (2 n + 1) a^2.$$

Aus dieser Formel könnte man natürlich direkt, ohne die von Archimedes benützten Ungleichungen, das Integral (6) durch einen Grenzübergang (vgl. u. S. 45) ableiten. Die reine Summe der Quadratzahlen erhielte man aus der letzten Gleichung durch Division mit a^2.

VI.

Das Volumen des Sphäroids.

Aus: Archimedis Opera omnia ..... Iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. I. MDCCCCX, Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri. (Griech. u. lat.). Im besonderen aus der Abhandlung mit dem Titel „De conoidibus et sphaeroidibus". Deutsch von A. Czwalina „Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide". (Ostwalds Klassiker, Nr. 210). Leipzig, Akad. Verlagsges., 1923.

S. 392. XXVII. Schneidet man irgendeinen sphäroidischen Körper ($\sigma\chi\tilde{\eta}\mu\alpha$, wörtl. Figur) mit einer Ebene durch den Mittelpunkt senkrecht zur Achse, so ist die Hälfte des Sphäroids doppelt so groß als der Kegel, der dieselbe Grundlinie hat wie der Abschnitt (des Sphäroids) und dieselbe Achse.

Es sei der sphäroidische Körper mit einer Ebene durch den Mittelpunkt senkrecht zur Achse geschnitten. Schneidet man ihn außerdem mit einer anderen Ebene durch die Achse des Körpers, so sei der Schnitt die (Linie) $ABCD$ (Fig. 7), Schnitt des spitzwinkligen Kegels (d. h. eine Ellipse), ihr

Durchmesser aber und die Achse des Sphäroids die BD, der Mittelpunkt O. Es macht aber nichts aus, ob die BD der größere Durchmesser des spitzwinkligen Kegels ist oder der kleinere. Der Schnitt aber mit der (ersten) den Körper

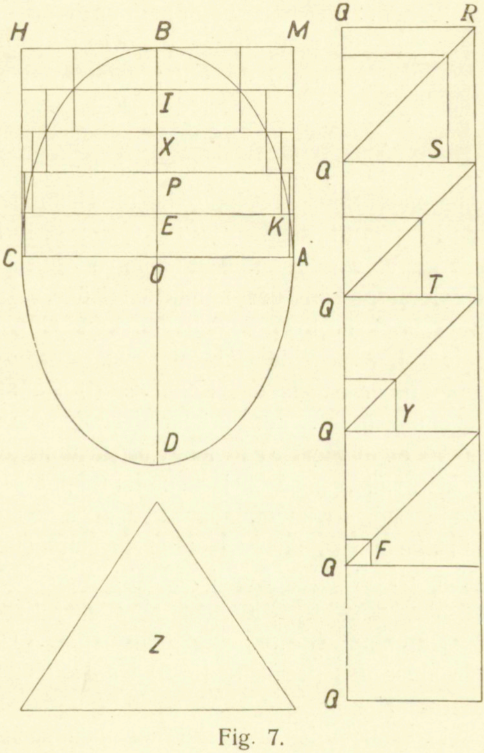


Fig. 7.

schneidenden Ebene sei (394) die Gerade CA. Diese wird also durch den (Punkt) O gehen und mit der BD rechte Winkel bilden, weil von der Ebene vorausgesetzt wurde, daß sie durch den Mittelpunkt gehe und rechte Winkel mit der Achse bilde. Es ist zu beweisen, daß der halbe Abschnitt des Sphäroids, der als Grundfläche hat den Kreis über der AC als Durchmesser, als Scheitel aber den Punkt B, das doppelte ist des Kegels, der dieselbe Grundfläche hat wie der Abschnitt und dieselbe Achse.

Es sei nämlich ein gewisser Kegel gegeben, in dem das Z (sei) (d. h. der Z genannt werde), doppelt so groß als der Kegel, der dieselbe Grundfläche hat wie der Abschnitt und dieselbe Achse, (nämlich) die OB; dann sage ich, daß die Hälfte des Sphäroids gleich ist dem Kegel Z.

Wenn nun die Hälfte des Sphäroids nicht gleich ist dem Kegel Z, so sei sie zuerst, wenn möglich, größer. Dann beschreibe man in den Abschnitt, der die Hälfte des Sphäroids ist, einen Körper (diesmal σχῆμα στερεόν, d. h. feste Figur), und ein anderer werde umbeschrieben, der zusammengesetzt ist aus Zylindern von der nämlichen Höhe, so zwar, daß der umgeschriebene Körper sich von dem eingeschriebenen um weniger unterscheidet, als um wieviel die Hälfte des Sphäroids größer ist als der Kegel Z. (I) Da nun der umgeschriebene Körper, der größer ist als die Hälfte des Sphäroids, den eingeschriebenen Körper um weniger übertrifft als der Unterschied zwischen dem Sphäroid und dem Kegel Z beträgt, so ist offenbar, daß auch der Körper, der dem das halbe Sphäroid darstellenden Abschnitt eingeschrieben ist, größer ist als der Kegel Z. (II) Man stelle nun den Zylinder her, der als Grundfläche hat den Kreis über der AC als Durchmesser und als Achse die BO. Da nun dieser Zylinder das dreifache (396) ist des Kegels mit derselben Grundfläche wie der Abschnitt und derselben Achse, der Kegel Z aber das doppelte des nämlichen Kegels ist, so ist offenbar, daß der Zylinder um die Hälfte größer ist als der Kegel Z. Man erweitere nun die Ebenen aller Zylinder, aus denen der eingeschriebene Körper besteht, bis zur Oberfläche des Zylinders, der dieselbe Grundfläche hat wie der Abschnitt und dieselbe Achse. Dadurch wird der ganze Zylinder geteilt in Zylinder, die an Anzahl gleich sind den Zylindern des umgeschriebenen Körpers, an Größe aber gleich dem größten unter den letzteren. Nun sollen Linien (Strecken) angenommen werden, an denen die Q (stehen), an Zahl gleich den Teilen der Geraden BO, an Größe aber jede gleich der BO (III), und über einer jeden werde ein Quadrat gezeichnet, vom letzten Quadrat aber werde ein Gnomon weggenommen, an Breite gleich der BI; dieser Gnomon wird dann gleich sein dem Rechteck aus den BI, ID. (IV) Von dem nächsten Quadrat aber werde ein Gnomon weggenommen, an Breite gleich dem doppelten der BI; und dieser wird gleich sein dem Rechteck aus den BX, XD. Und immerfort wird von dem folgenden Quadrat ein Gnomon weggenommen, dessen Breite um einen Abschnitt (V) größer ist als die Breite des gerade vorher weggenommenen (398) Gnomons. Jeder Gnomon aber ist gleich dem Rechteck aus den (beiden) Abschnitten der BD, deren einer der Breite des Gnomons gleich ist. Daher wird das beim zweiten Quadrat übrig bleibende Quadrat die Seite gleich der OE haben. Der erste Zylinder aber der in dem ganzen Zylinder (liegenden Zylinder), der die OE zur Achse hat, hat zum ersten Zylinder der dem eingeschriebenen Körper (angehörigen), der dieselbe Achse hat, (nämlich) die OE, dasselbe Verhältnis, welches das Quadrat über der AO (hat) zu dem Quadrat über der KE. (VI) Daraus folgt, daß sie auch das Verhältnis des Rechtecks aus den BO, OD zu dem Rechteck aus den BE, ED zu einander haben. (VII) Es hat also der (erste) Zylinder zu dem (zweiten) Zylinder dasselbe Verhältnis, wie das erste Quadrat zu dem vom zweiten Quadrat hinweggenommenen Gnomon. Ähnlich hat auch von den andern Zylindern jeder, der eine Achse hat gleich der OE, zu dem (entsprechenden) Zylinder in dem eingeschriebenen Körper, der dieselbe Achse hat, dasjenige Verhältnis, welches das ihm entsprechend gelegene Quadrat zu dem Gnomon hat, der von dem ihm folgenden Quadrat hinweggenommen wurde. Es gibt also gewisse Größen, die Zylinder in dem ganzen Zylinder, und andere

(Größen), die Quadrate über den QQ, an Zahl den Zylindern gleich, und zu je zweien im selben Verhältnis stehend, und es werden die Zylinder anderen Größen zugeordnet, (nämlich) den Zylindern in dem eingeschriebenen Körper, der letzte (Zylinder) werde aber keinem andern zugeordnet (VIII), und die Quadrate (werden zugeordnet) anderen Größen, (nämlich) den von den Quadraten weggenommenen (Gnomonen), die entsprechenden (stehend) im selben Verhältnis, das letzte Quadrat aber wird nichts anderem zugeordnet. Alle Zylinder nun des (400) ganzen Zylinders haben zu allen den anderen Zylindern dasselbe Verhältnis, wie alle die Quadrate zu allen den von ihnen weggenommenen Gnomonen. (IX) Also hat der Zylinder, der dieselbe Grundfläche hat wie der Abschnitt und dieselbe Achse, zum eingeschriebenen Körper dasselbe Verhältnis, das alle die Quadrate haben zu allen den von ihnen weggenommenen Gnomonen. Die Quadrate sind aber (zusammen) mehr als eineinhalbmal größer als alle von ihnen weggenommenen Gnomonen. Es liegen nämlich gewisse Linien (Strecken) vor, die QR, QS, QT, QF, die immer denselben Unterschied gegen einander haben, wobei die kleinste gleich dem Unterschied ist, und es sind andere Linien (Strecken) da, an denen die zwei Q, Q (stehen), an Zahl den ersteren gleich, an Größe aber alle gleich der größten. Daher sind die Quadrate über allen (den Strecken) deren jede gleich der größten ist, (zusammen) kleiner als das dreifache aller Quadrate über den (Strecken), die gegen einander denselben Unterschied haben, größer aber als das dreifache der übrigen unter Weglassung des Quadrates der größten; dies wurde nämlich in der Schrift über die Spiralen bewiesen (s. die vorige Nummer). Da nun alle die Quadrate kleiner sind als das dreifache der anderen Quadrate, die von ihnen weggenommen wurden, so ist offenbar, daß sie (zusammen) größer sind als das eineinhalbfache der übrig bleibenden (Figuren): sie sind also (zusammen) größer als das eineinhalbfache der Gnomone. (X) Folglich ist auch der Zylinder, der dieselbe Grundfläche hat wie der Abschnitt und dieselbe Achse, größer als das eineinhalbfache des eingeschriebenen Körpers. Das ist aber unmöglich. Er ist nämlich das eineinhalbfache des Kegels Z, und der eingeschriebene Körper wurde als größer wie der Kegel Z erwiesen. Daher ist die Hälfte des Sphäroids nicht größer als der Kegel Z. (XI)

(402) Sie ist aber auch nicht kleiner. Sie sei nämlich, wenn es möglich ist, kleiner. Dann werde wieder in die Hälfte des Sphäroids ein Körper einbeschrieben, und ein anderer, der sich zusammensetzt aus Zylindern derselben Höhe, wird umbeschrieben, so zwar, daß der umbeschriebene Körper um weniger sich vom einbeschriebenen unterscheidet, als um was der Kegel Z größer ist als die Hälfte des Sphäroids, und das übrige wird genau wie vorhin konstruiert. Da nun der eingeschriebene Körper kleiner ist als der Abschnitt, so ist offenbar, daß auch der umgeschriebene Körper kleiner ist als der Kegel Z. Wiederum hat dann der erste Zylinder der in dem ganzen Zylinder (liegenden), der die OE als Achse hat, zu dem ersten Zylinder der dem umgeschriebenen Körper (angehörenden), der die OE als Achse hat, dasselbe Verhältnis wie das erste Quadrat zu sich selbst, der zweite Zylinder aber der in dem ganzen Zylinder (befindlichen), der die EP als Achse hat, hat dann zum zweiten Zylinder der dem umgeschriebenen Körper (angehörenden), der die EP als Achse hat, dasselbe Verhältnis, wie das zweite Quadrat zu dem von ihm weggenommenen Gnomon. Und von den andern Zylindern hat jeder der in dem ganzen Zylinder (befindlichen), die eine der OE gleiche (Strecke) als Achse haben, zu dem Zylinder, der in der nämlichen Lage sich befindet, dem umgeschriebenen Körper angehört und dieselbe Achse hat, dasjenige Verhältnis, welches das ihm entsprechend gelegene Quadrat hat zu dem von ihm weggenommenen Gnomon. Und alle die Zylinder in dem ganzen Zylinder haben zu allen den Zylindern im umgeschriebenen Körper dasselbe Verhältnis, das alle die Quadrate haben zu

einer (Fläche) gleich dem ersten Quadrat (402) und den von den übrigen Quadraten weggenommenen Gnomonen (zusammen). Und alle Quadrate sind (zusammen) kleiner als das eineinhalbfache einer (Fläche) gleich dem ersten Quadrat und den Gnomonen, die von den übrigen (Quadraten) weggenommen wurden, weil sie (d. h. alle Quadrate) (zusammen) größer sind als das dreifache der Quadrate über den (Strecken), die denselben Unterschied haben, wenn man das größte Quadrat wegläßt (s. die vorige Nummer). Folglich ist der Zylinder, der dieselbe Grundfläche hat wie der Abschnitt und dieselbe Achse, kleiner als das eineinhalbfache des umgeschriebenen Körpers. Das ist aber unmöglich. Denn er ist das eineinhalbfache des Kegels Z, und es wurde bewiesen, daß der umgeschriebene Körper kleiner ist als der Kegel Z. Daher ist die Hälfte des Sphäroids nicht kleiner als der Kegel Z. Nachdem sie also nicht größer und nicht kleiner ist, ist sie ihm gleich.

Erläuterungen. Vor einer allgemeineren Erörterung sollen die einzelnen Stellen erklärt werden, die oben mit römischen Buchstaben bezeichnet sind.

(I) Die Art der Einschreibung und Umschreibung der aus kleinen Zylindern zusammengesetzten treppenförmigen Körper ist von Archimedes in den vorhergehenden Nummern so oft angewendet worden, daß sie hier nicht noch einmal näher ausgeführt wird. Sie wird in Kapitel XIX erklärt, wo auch bewiesen ist, daß man den ein- und den umgeschriebenen Körper, soweit man will, einander nähern kann. — (II) Wir wollen den Schluß hier in algebraischen Symbolen anschreiben. Es sei

$$\tfrac{1}{2}\ \text{Sphär.} = Z + \varepsilon\,,$$

und $\quad \text{Umg. Körp.} = \text{Eing. Körp.} + \eta \quad (\eta < \varepsilon).$

Ferner $\quad \tfrac{1}{2}\ \text{Sphär.} = \text{Eing. Körp.} + \eta' \quad (\eta' < \eta < \varepsilon).$

Also folgt aus der 1. und 3. Gleichung.

$$\text{Eing. Körp.} > Z \quad (\text{um } \varepsilon - \eta'). \ —$$

(III) In der Figur notwendigerweise verkleinert (wie schon Z). — (IV) Der Gnomon ist $BO^2 - IO^2 = (BO - IO)(BO + IO) = BI \cdot ID$. Für Archimedes ging das einfach aus Euklid II, 5 hervor (vgl. das 2. Bdchn., Nr. II). — (V) Hier sind natürlich die „Abschnitte“ auf OB gemeint. Es ist aber auch im Griechischen dasselbe Wort wie beim halben Sphäroid. — (VI) Siehe bei Euklid die Sätze XII, 11 und XII, 2 (o. Nr. II). — (VII) Dies ist der Satz über die Ellipse bei Apollonios I,21; s. das III. Bdchn., Nr. III. — (VIII) Weil der letzte eingeschriebene Zylinder Null ist. — (IX) Unter „alle“ ist die „Summe aller“ verstanden. Archimedes wendet hier den Satz I des vorliegenden Werkes an, der in unserer Zeichensprache lautet: Wenn vier Reihen von Größen gegeben sind, $A_1, A_2, \ldots A_n$; $B_1, B_2, \ldots B_n$; $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$; $B'_1\ B'_2, \ldots B'_n$, und es ist

$$A_1 : A_2 : A_3 : \ldots : A_n = B_1 : B_2 : B_3 : \ldots : B_n,$$

und ebenso

$$A_i : A'_i = B_i : B'_i, \text{ oder moderner ausgedrückt}$$

$$B_i = \lambda A_i,\ B'_i = \lambda A'_i,\ (i = 1, 2, 3, \ldots n),$$

so ist

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) : (A'_1 + A'_2 + \cdots + A'_n)$$
$$= (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) : (B'_1 + B'_2 + \cdots + B'_n).$$

Dies ist für uns wegen des Wegfallens des Faktors λ sofort ersichtlich. Dabei sind die A_i hier die (alle einander gleichen) Teilzylinder des ganzen Zylinders, die A'_i die Teilzylinder des eingeschriebenen Körpers, die B_i sind die (alle einander gleichen) Quadrate und die B'_i die entsprechenden Gnomonen. Es macht auch nichts aus, wenn das eine oder andere der A'_i fehlt; dann sind eben auch die entsprechenden B'_i nicht da. — (X) Zieht man von

$$m = m$$

die Ungleichung $\quad p > \frac{1}{3} m$ ab,

so kommt $\quad m - p < \frac{2}{3} m$,

oder $\quad m > \frac{3}{2}(m - p)$.

(XI) Bezeichnen wir den ganzen Zylinder mit Zyl, den eingeschriebenen Körper für einen Angenblick mit E, so ist bekannt, daß

$$Zyl = \tfrac{3}{2} Z$$

und

$$E > Z,$$

woraus

$$Zyl < \tfrac{3}{2} E \text{ folgt.}$$

Aus der obigen Annahme ginge aber

$$Zyl > \tfrac{3}{2} E$$

hervor; folglich ist die Annahme unmöglich.

Wenn ich nun einige allgemeine Bemerkungen mache, so muß ich mich wohl zuerst gegen den Vorwurf wehren, ich hätte ein zu langes und umständliches Beispiel genommen. Das Gegenteil ist nämlich der Fall. Allerdings wollte ich die Σx^2 vorbringen, die ein größeres Interesse bietet als die Σx (die arithmetische Reihe), weil Σx^2 schon in der Elementarmathematik bei der Ableitung des Pyramidenvolumens auftritt. Ja, es ist ein Glück, daß Archimedes nicht den Begriff des „speziellen Falles" kennt und infolgedessen das halbe Sphäroid einzeln und ganz ausführlich behandelt, nachdem er zuvor schon kleinere (gerade und schiefe) Abschnitte des Sphäroids berechnet hatte. Das ist ein Glück, weil die Ableitung der kleineren Abschnitte naturgemäß viel komplizierter ist. Man könnte nur noch fragen, warum ich dann nicht die Kugel genommen habe statt des Sphäroids. Darauf ist die Antwort einfach, weil Archimedes es bei der Kugel (in der Schrift „De sphaera et cylindro") nicht so gemacht hat. Dort beginnt er mit der viel schwierigeren Oberfläche und leitet aus ihr auf eine der heutigen ähnliche Weise das Volumen ab. Es wird aber keinem Leser schwer fallen, sich $OA = OB$ zu denken (was bei Archimedes auch nicht als „Spezialfall" vorkommt)[1].

[1]) Daß Archimedes das wußte, steht aber außer Zweifel. Denn er erzählt uns (in der „Methode"; s. u. Nr. VII), daß er in Wirklichkeit zuerst das Kugelvolumen (jedenfalls so wie in der „Methode" angegeben) gefunden und daraus die Oberfläche erschlossen habe.

Dieselbe Σx^2 kommt dann auch bei der Fläche der Spirale zur Anwendung.

Das Verfahren des Archimedes, das wir hier vor uns haben, ist eine wesentliche Erweiterung und Verschärfung der Exhaustion (s. o. S. 11) und stammt in dieser Form, der Verbindung der ein- und umgeschriebenen treppenförmigen Körper, wahrscheinlich von ihm selbst. Freilich muß man sich auch hier überall dazu denken, daß der Unterschied „möglichst" klein sein soll und daß der Körper selbst die „Grenze" der ihm ein- bzw. umbeschriebenen Körper ist.

Des weiteren muß ich zur obigen Anmerkung (I) noch hinzufügen, daß der Beweis für die beliebig enge Annäherung des ein- und des umgeschriebenen Körpers von Archimedes so geführt wird, daß er die ganze Figur der ein- und umgeschriebenen Treppenzylinder teleskopartig zusammenschiebt, bis B nach E fällt. Dann füllt der Gesamtunterschied den ersten Teilzylinder mit dem Durchmesser CA und der Höhe OE ganz aus. Dieser kann aber durch Verkleinerung von OE „kleiner als jede vorgegebene körperliche Größe", wie Archimedes sich ausdrückt, gemacht werden.

Nun kommt freilich eine schwerfällige Rechnung, schwerfällig deswegen, weil Archimedes keinerlei algebraische Symbolik kennt und außerdem nicht mit Gleichungen rechnet wie wir, sondern mit Proportionen. Das haben wir schon öfter als den großen formellen Nachteil der griechischen Mathematik erkannt. Setzen wir $OA = a$, $OB = b$, und es sei $OE = b/n = h$, so zeichnet sich Archimedes die Quadrate b^2 hin und schneidet aus ihnen die Quadrate [0], h^2, $(2h)^2, \ldots$ $(n-1)^2 h^2$ heraus, so daß er die Gnomonen $[b^2]$, $b^2 - h^2$, $b^2 - (2h)^2, \ldots b^2 - (n-1)^2 h^2$ erhält.

Daß das Rechteck $BE \cdot ED$ zum Quadrat von EK proportional ist (und die andern entsprechend), geht für uns einfach aus der Ellipsengleichung hervor. Denn ist diese

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

so ist

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2),$$

und wenn wir für einen Augenblick $OE = x$ setzen, so ist $BE \cdot ED = (b - x)(b + x)$ und $EK = y$, aber

$$\frac{y^2}{b^2 - x^2} = \text{const.}$$

Daher ist

$$\frac{\text{Teilzyl. des ganz. Zyl.}}{\text{Teilzyl. des eing. Körp.}} = \frac{b^2}{b^2 - (\nu h)^2}.$$

Dann werden nach dem angeführten Satz I in den Zählern und Nennern die Summen gebildet. Das gibt

$$\frac{\text{Ganz. Zyl.}}{\text{Eing. Körp.}} = \frac{n b^2}{(n-1) b^2 - \sum\limits_1^{n-1} (\nu h)^2},$$

wobei in den Nennern überall das dem oberen letzten Glied entsprechende fehlt. Nun wird bewiesen, daß rechts der Zähler größer als $\frac{3}{2}$ des Nenners ist. In der obigen Anmerkung (X) ist $m = (n-1) b^2$, $n = \Sigma (\nu h)^2$ zu nehmen und Gleichung (3*) der Erläuterungen zur vorigen Nummer anzuwenden (für $n - 1$ statt n). Dann findet man

$$(n-1) b^2 > \tfrac{3}{2}[(n-1) b^2 - \Sigma (\nu h)^2].$$

Da der Zähler $n b^2$ noch größer ist als $(n-1) b^2$, ist die Behauptung erwiesen. Das weitere steht bei Archimedes.

Im zweiten Teil des Beweises steht in den Nennern je ein Glied mehr (d. h. ebenso viel wie im Zähler), und der Nenner rechts lautet $n b^2 - \Sigma (\nu h)^2$. Nach der Gleichung (4*) der Erläuterungen zur vorigen Nr. ist aber

$$n b^2 > 3 \Sigma (\nu h)^2,$$

so daß man mittels derselben Schlüsse wie vorhin erhält

$$n b^2 - \Sigma (\nu h)^2 > \tfrac{2}{3} n b^2,$$

oder

$$n b^2 > \tfrac{3}{2}[n b^2 - \Sigma (\nu h)^2].$$

Damit dürfte das Archimedische Verfahren wohl verständlich gemacht sein. Es ist dies eine wirkliche Integration. Denn wenn wir von der griechischen Form jetzt absehen, addiert Archimedes die kleinen Teilzylinder, deren Volumen ganz allgemein $y^2 h \pi$ ist. Setzen wir hier den Wert für y von oben ein und addieren alle Glieder, so ergibt sich

Eingeschriebener Körper

$$= \frac{\pi a^2 h}{b^2}[(b^2 - h^2) + (b^2 - (2h)^2) + (b^2 - (3h)^2) + \ldots + (b^2 - (n-1)^2 h^2)]$$

$$= \frac{\pi a^2 h}{b^2}[(n-1)b^2 - h^2(1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2)]$$

$$= \frac{\pi a^2 h^3}{b^2}\left[n^2(n-1) - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2 h^3}{6b^2} n(n-1)(4n+1) = \frac{\pi a^2 b}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right).$$

Ebenso der umgeschriebene Körper

$$= \frac{\pi a^2 h}{b^2}[b^2 + (b^2 - h^2) + (b^2 - (2h)^2) + \ldots + (b^2 - (n-1)^2 h^2)]$$

$$= \frac{\pi a^2 h}{b^2}[nb^2 - h^2(1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2)]$$

$$= \frac{\pi a^2 h^3}{b^2}\left[n^3 - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right]$$

$$= \frac{\pi a^2 h^3}{6b^2} n(n+1)(4n-1)$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(4 - \frac{1}{n}\right).$$

Läßt man hier n ins Unendliche wachsen, so gehen die Ausdrücke für den eingeschriebenen Körper sowohl wie für den umgeschriebenen in den gemeinsamen Wert über

$$\text{Halbes Sphäroid} = \frac{2a^2 b \pi}{3}.$$

Nehmen wir aber das in den Erläuterungen der vorigen Nummer angegebene Integral bereits als bekannt an, so schreiben wir einfach (und das ist die ganz moderne Form)

$$\begin{aligned}\text{Halbes Sphäroid} &= \pi \int_0^b y^2\,d\,x \\ &= \pi\,a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) d\,x \\ &= \pi\,a^2 \left(b - \frac{b^3}{3\,b^2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\,a^2\,b\,\pi\,.\end{aligned}$$

Man kann, glaube ich, schon hier erkennen, was es für einen ungeheuren Vorteil bietet, bereits einmal Ausgerechnetes in Formeln festzulegen.

VII.

Das Volumen der Kugel bei Archimedes.

Aus: Archimedis Opera omnia . . . Iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. II. MDCCCCXIII, Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri. (Griech. u. lat.) Im besonderen aus der Schrift „Des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen, an Eratosthenes".

Vorbemerkung. Die „Methodenlehre" (Ephodos) des Archimedes, aus der wir das folgende Stück entnehmen, wurde erst im Jahre 1906 aus einem griechischen Kloster in Konstantinopel durch Heiberg ans Licht gezogen, der durch einen deutschen Philologen aufmerksam gemacht worden war. Ihr Erscheinen war eine wirkliche Sensation. Hier ließ sich Archimedes in einem Brief an einen sachverständigen Freund einmal wirklich in seine Werkstatt gucken. Er gibt eine mechanische Methode an, durch die er verschiedene seiner Aufsehen erregenden Resultate gefunden hatte, die er nachträglich mit den strengen, indirekten Beweisen versah, wie sie in seinen wissenschaftlichen Schriften erscheinen. Von dieser Methodenlehre hatte man vorher nur durch einige Hinweise Herons Kenntnis gehabt. Als sie erschien,[1]) erkannte man, daß in ihr in voller Reinheit die sog. „Indivisibeln" verwendet werden, auf denen Cavalieri im Anfang des 17. Jahrhunderts ein systematisches Gebäude der Infinitesimalrechnung zu errichten suchte (s. u. Nr. X). Diese Indivisibeln entstammen zweifellos der antiken Atomlehre, die in Demokritos ihren Höhepunkt hatte (s. o. S. 23). Es ist auch durch Plutarch überliefert, daß schon Demokritos den Zylinder und den Kegel durch parallele Schnittebenen teilte und sie als „aus Kreisen zusammengesetzt" betrachtete. Archimedes verrät uns weiter, eben in der „Methodenlehre", daß Demokritos auf diese Weise den Rauminhalt des Kegels fand, aber erst Eudoxos habe den Satz bewiesen. Demokritos hat also offenbar zum erstenmale mathematische Indivisibeln angewandt (indivisibilis = griech. „atomos" = unteilbar). Ihm folgt hier Archimedes, indem er ein Dreieck aus den Parallelen zu einer Seite „bestehen", oder einen Zylinder von den zur Grundfläche parallelen Kreisen „ausgefüllt sein" läßt. Es wird nicht gesagt, daß es unendlich viele Schnitte sein müssen, noch daß die so gewonnenen Schichten unendlich dünn sind. Es werden einfach „alle" Parallelen genommen. Doch wir wollen zunächst den Text hören. Ich teile zuerst einiges aus den einleitenden allgemeinen Gesichtspunkten mit, dann gebe ich den Satz II über das Kugelvolumen[2]). Die

[1]) Das griechische Original veröffentlichte Heiberg zuerst in der philologischen Zeitschrift Hermes, Bd. 42, 1907, S. 245—300, eine deutsche Übersetzung mit Kommentar von H. G. Zeuthen in der Bibliotheca math., 3. Folge, 7. Bd., 1906/07, S. 321—363. Im Hermes ist auch eine Tafel beigegeben mit einer Probeseite des Ms., die im Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 16, 1907, Heft 7/8 (Text S. 402/04, 462) reproduziert ist.

[2]) Satz I handelt von der Parabelfläche, Satz III vom Inhalt des Sphäroids.

mechanischen Sätze, die Archimedes benützt, schickt er ohne Beweis voraus. Sie sind nur teilweise in seinen eigenen erhaltenen Schriften ausgesprochen, waren aber offenbar damals schon recht bekannt.

S. 428,24 . . . Dieses Verfahren ist aber nach meiner Überzeugung nicht weniger nützlich auch zum Beweis der Lehrsätze selbst. Denn auch von den (Sätzen), die ich mir vorher mechanisch klar machte, wurden einige nachher geometrisch bewiesen, da ja die (Behandlung) mittels einer Theorie dieser Art der Beweiskraft entbehrt. Es ist nämlich leichter einen Beweis zu führen, wenn man auf diese Art vorher eine gewisse Kenntnis der Fragen gewonnen hat, als (einen solchen) ohne irgendeine Kenntnis zu suchen . . . (430,11) Ich beschloß aber, das Verfahren schriftlich bekannt zu machen, . . . andrerseits in der Überzeugung, damit der Mathematik wahrlich keinen kleinen Dienst zu leisten. Ich erwarte nämlich, es werden einige der Lebenden oder der Nachfolgenden mittels des dargelegten Verfahrens auch andere Lehrsätze finden, auf die wir nicht gekommen sind.

. . . .

S. 438. II. . . . Daß ferner jede Kugel das vierfache ist des Kegels, der eine Grundfläche hat gleich dem größten der (Kreise) auf der Kugel, dessen Höhe aber gleich (ist) der (Strecke) aus dem Mittelpunkt der Kugel, und (daß) der Zylinder, der eine Grundfläche hat gleich dem größten Kreise der (Kreise) auf der Kugel, dessen Höhe aber gleich ist dem Durchmesser der Kugel, gleich ist dem eineinhalbfachen der Kugel, wird nach diesem Verfahren folgendermaßen abgeleitetet.

Es sei nämlich eine Kugel (gegeben), auf ihr der größte Kreis $ABCD$ (Fig. 8) und die Durchmesser AC, BD seien zu einander senkrecht (440), ferner sei der Kreis auf der Kugel über dem Durchmesser BD senkrecht zum Kreis $ABCD$, und auf diesem senkrechten Kreis werde ein Kegel errichtet, der den Punkt A zur Spitze hat, und indem man seine Oberfläche erweitert, werde der Kegel mit einer Ebene durch den (Punkt) C (parallel) zur Grundfläche geschnitten. Das wird einen Kreis senkrecht zur AC ergeben, und sein Durchmesser (wird) die EZ sein. Über diesem Kreis werde

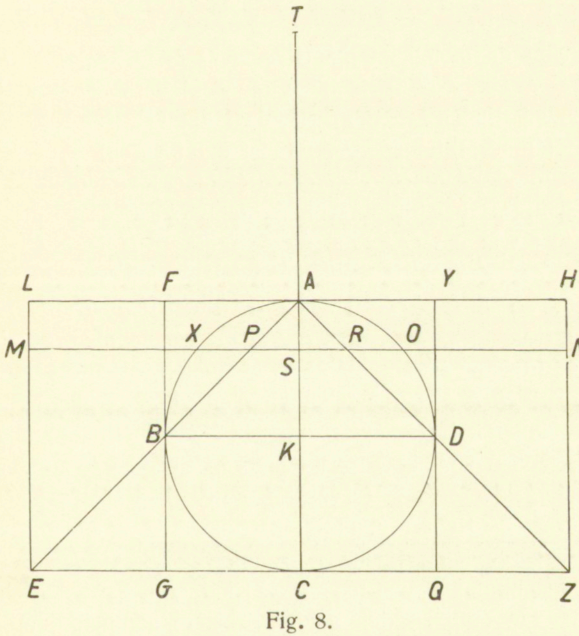


Fig. 8.

ferner ein Zylinder errichtet mit einer Achse gleich der AC, und die Seiten(linien) des Zylinders seien die EL, ZH. Und es werde die CA verlängert, und ihr selbst gleich werde die AT gemacht, und man denke sich die CT als Wagbalken, dessen Mitte der Punkt A ist, und es werde eine beliebige Linie MN der BD parallel gezogen, diese aber schneide den Kreis $ABCD$ in den (Punkten) X, O, den Durchmesser AC aber in dem (Punkt) S, die Gerade

AE in dem (Punkt) P, die AZ in dem R, und durch die Gerade MN werde eine Ebene gelegt senkrecht zur AC. Diese wird in dem Zylinder als Schnitt machen einen Kreis, dessen Durchmesser die MN ist, in der Kugel $ABCD$ aber einen Kreis, dessen Durchmesser die XO ist, in dem Kegel AEZ einen Kreis, dessen Durchmesser die PR ist.

Und da gleich ist das (Rechteck) aus CA, AS dem aus MS, SP — es ist nämlich die AC der SM und die AS der PS gleich — dem Rechteck aus CA, AS aber gleich das (Quadrat) über AX, das ist den (beiden) über XS, SP (zusammen), so ist also das (Rechteck) aus den MS, SP gleich den (Quadraten) über den XS, SP. Und da sich verhält wie die CA zu AS, so die MS zu SP, die CA aber der AT gleich ist, so verhält sich wie die TA zu AS, so die MS zu SP, d. i. das (Quadrat) über MS zum (Rechteck) aus MS, SP. Es wurde aber gezeigt, daß dem (Rechteck) aus MS, SP gleich sind die (Quadrate) über XS, SP. Wie sich also die AT verhält zu AS, so das (Quadrat) über MS zu den (442) (Quadraten) über XS, SP. Wie sich aber das (Quadrat) über MS zu den (Quadraten) über XS, SP verhält, so (verhält sich) das (Quadrat) über MN zu den (Quadraten) über XO, PR, und wie das über MN (sich verhält) zu den über XO, PR, so (verhält sich) der Kreis in dem Zylinder, dessen Durchmesser die MN (ist), zu den beiden Kreisen, nämlich dem in dem Kegel, dessen Durchmesser die PR, und dem in der Kugel, dessen Durchmesser die XO ist. Wie also die TA zu AS, so der Kreis in dem Zylinder zu den Kreisen, dem in der Kugel und dem in dem Kegel (zusammengenommen). Da nun wie die TA zu AS, so der Kreis selbst in dem Zylinder, an seiner Stelle bleibend, zu den beiden Kreisen, deren Durchmesser die XO, PR sind, die man verschiebt und so in dem (Punkt) T befestigt, daß der T der Schwerpunkt eines jeden von ihnen ist, so werden sie in bezug auf den (Punkt) A im Gleichgewicht sein. Ähnlich aber kann man zeigen, auch wenn man eine andere Gerade in dem Parallelogramm LZ (parallel) zöge zur EZ, und durch die gezogene (Gerade) eine Ebene legte senkrecht zur AC, daß der im Zylinder entstandene Kreis, an seiner Stelle bleibend, in bezug auf den Punkt A im Gleichgewicht wäre mit den beiden Kreisen, dem in der Kugel entstehenden und dem in dem Kegel, wenn man diese verschiebt und auf dem Wagbalken in dem (Punkt) T so befestigt, daß jeder seinen Schwerpunkt in dem (Punkt) T hat. Da nun der Zylinder von den (so) genommenen Kreisen erfüllt wird (*συμπληρωθέντος*) und ebenso die Kugel und der Kegel, so wird der Zylinder, an seiner Stelle bleibend, in bezug auf den A im Gleichgewichte sein mit den beiden (Körpern), der Kugel und dem Kegel, wenn man diese verschiebt und so auf dem Wagbalken in dem T befestigt, daß jeder von ihnen seinen Schwerpunkt in dem T hat. Da nun die genannten Körper (*στερεά*) in bezug auf den Punkt A im Gleichgewicht sind, wenn der Zylinder mit seinem Schwerpunkt in K (liegen) bleibt, die Kugel aber und (444) der Kegel verschoben wurden, wie gesagt wurde, nach dem Schwerpunkt T, so verhält sich wie die TA zu AK, so der Zylinder zu der Kugel und dem Kegel (zusammengenommen). Es ist aber die TA das doppelte der AK; also ist auch der Zylinder das doppelte der Kugel und des Kegels zusammen. Vom Kegel selbst aber ist er das dreifache; es sind also drei Kegel gleich zwei ebensolchen Kegeln und zwei Kugeln. Zieht man die gemeinsamen zwei Kegel ab, so folgt, daß der eine Kegel, der das Dreieck AEZ als Achsendreieck hat, gleich ist den zwei genannten Kugeln. Der Kegel aber, dessen Achsendreieck das AEZ ist, ist gleich acht Kegeln, deren Achsendreieck das ABD ist, weil die EZ das doppelte der BD ist. Die acht genannten Kegel sind demnach gleich zwei Kugeln. Es ist also die Kugel, deren größter Kreis der $ABCD$ ist, das vierfache des Kegels,

4*

dessen Spitze der Punkt A ist, während seine Grundfläche der Kreis ist über dem Durchmesser BD senkrecht zur AC.

Man ziehe nun durch die Punkte B, D in dem Parallelogramm LZ die (Geraden) FBG, YDQ parallel zur AC, und es werde ein Zylinder gedacht, dessen Grundflächen die Kreise über den Durchmessern FY, GQ sind, dessen Achse AC ist. Da nun der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm das FQ ist, das doppelte des Zylinders ist, dessen Achsenparallelogramm das FD ist, dieser selbst aber das dreifache ist des Kegels, dessen Achsendreieck das ABD ist, wie (man) aus den Elementen (weiß), so ist der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm das FQ ist, das sechsfache des Kegels, dessen Achsendreieck das ABD ist. Es wurde aber bewiesen, daß die Kugel (446), deren größter Kreis der $ABCD$ ist, das vierfache ist desselben Kegels; also ist der Zylinder das eineinhalbfache der Kugel, was gezeigt werden sollte.

Erläuterungen. Indem ich bitte, alles leicht Verständliche aus Archimedes selbst zu entnehmen, verfolge ich den Archimedischen Gedankengang in unserer algebraischen Art. Er ist leicht und kurz. Es kommt nur darauf an zu zeigen, daß das Moment des Kegels AEZ vermehrt um das Moment der Kugel, wenn man die Schwerpunkte dieser beiden Körper nach T verlegt, gleich ist dem Moment des Zylinders $LEZH$ mit dem Schwerpunkt in K, beide Momente auf A als Drehpunkt bezogen.

Setzen wir nun

$$AC = 2r = AH = MS, \quad \text{und} \quad AS = x,$$

so gilt für den beliebigen Schnitt MN

$$PS = x, \; OS^2 = AS \cdot SC = x(2r - x),$$

also

$$PS^2 + OS^2 = 2rx.$$

Da aber

$$MS^2 = 4r^2,$$

so folgt sofort, daß

$$MS^2 \cdot AS = (PS^2 + OS^2) \cdot HA;$$

denn es ist ja

$$4r^2 \cdot x = 2rx \cdot 2r.$$

Hier hat man nur auf beiden Seiten mit π zu multiplizieren, um die gewünschte Momentengleichung zu erhalten. Das Charakteristische ist nun, daß Archimedes die genannten Körper von den in der Ebene MN liegenden Kreisflächen gebildet werden, oder wie er im Kap. I sagt, sie aus ihnen bestehen läßt (συνέστηκεν; S. 436,24), wenn man MN von der Lage EZ nach der Lage LH führt. Das ist in der Tat der reine Begriff des „Indivisibels" im Gegensatz zum „Unendlichkleinen", das Archimedes bei seinen Integrationen sonst anwandte (s. die vorige Nummer). Das Unendlichkleine hat als Flächenstreifen oder als Körperschicht eine bestimmte Breite oder Dicke, die mit wachsender Zahl der Streifen (oder Schichten) gegen Null strebt. Das Indivisibel hingegen hat gar keine Dicke, ist grundsätzlich um eine Dimension niedriger (bei der Fläche eine Linie, beim Körper eine Fläche) und erzeugt das Grundgebilde durch Bewegung. In dieser Form ging das „Indivisibel" in die mittelalterliche Scholastik über, wo es freilich nur rein theoretisch in den Diskussionen über das Kontinuum auftrat[1]). Es mathematisch zu verwerten, reichte die geringe mathematische Bildung des Mittelalters nicht aus (vgl. o. S. 23).

Soweit wäre bei Archimedes alles in Ordnung. Nun aber kommen die unstrengen Betrachtungen, daß diese materielosen Indivisibeln doch auch ohne Bewegung in ihrer Gesamtheit einen physisch gedachten Körper ersetzen. Für den unten liegenbleibenden Zylinder ginge ja das noch einigermaßen an. Aber für die zwei anderen Körper werden die

[1]) Vgl. dazu den Artikel von C. R. Wallner, Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis. Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 4. Band, 1903, S. 28—47.

Indivisibeln herausgerissen und einzeln alle nach T gebracht. Den Hebel hat für ähnliche Zwecke Archimedes nur noch einmal, nämlich in der Schrift über die Quadratur der Parabel, angewendet, aber nicht mit Indivisibeln. Hier liegt also die Gesamtheit aller Schnitte der Kugel und des Kegels in T und hält dort dem ganzen Zylinder das Gleichgewicht.

Die weitere Rechnung ist für uns ebenfalls sehr leicht. Denn wir haben für die aus der obigen Momentgleichung folgende Beziehung

$$2\ (\text{Kugel} + \text{Kegel}) = \text{Zylinder}$$

einfach die Gleichung

$$\text{Kugel} + \tfrac{1}{3} \cdot 4\, r^2 \cdot 2\, r\, \pi = \tfrac{1}{2} \cdot 4\, r^2 \cdot 2\, \mathrm{r}\, \pi\,,$$

oder

$$\text{Kugel} = \tfrac{4}{3}\, r^3\, \pi\,.$$

Der sog. „Cavalierische Satz", nach dem zwei Körper gleich sind, wenn sie in jeder Höhe gleiche Schnittflächen haben, folgt natürlich ohne weiteres aus der Archimedischen Vorstellung. Archimedes hat nur gerade kein Beispiel, aus dem das direkt ersichtlich wäre [1]). Wir machen ja heute die Anordnung (im wesentlichen nach dem Vorgang Cavalieris) durchweg so, daß die Cavalierische Bedingung erfüllt ist; bei der Kugel im besonderen, indem wir aus dem Zylinder $FGQY$ den Doppelkegel $FKY\text{-}GKQ$ herausschneiden und von dem bleibenden Restkörper zeigen, daß er der Kugel gleich ist (s. die Nr. VIII). Die Cavalierische Bedingung hat den Vorteil, daß Fehler vermieden werden, die durch Nichtberücksichtigung der Dicke der Indivisibeln sehr leicht entstehen können.

Die Archimedische Schrift ging bald verloren. Aber ihre Ideen und auch einzelne ihrer Ergebnisse haben sich gehalten.

---

[1]) Wenigstens eine Ahnung davon scheint Heron gehabt zu haben (s. seine „Vermessungslehre", ed. H. Schöne, Leipzig 1903, deutsch S. 95).

In der Renaissancezeit tauchen bei Künstlern Körper mit richtig angegebenem Volumen aus der „Methodenlehre“ auf. Und die Mathematiker des beginnenden 17. Jahrhunderts ergriffen den Gedanken der Indivisibeln, neben den „unendlich kleinen Größen“, um eine neue und über Archimedes hinausgehende Blüte der Mathematik heraufzuführen.

VIII.

Das Volumen der Kugel im 17. Jahrhundert.

Aus „De centro gravitatis solidorvm libri tres“. Lucæ Valerii Mathematicæ, & Ciuilis Philosophiæ in Gymnasio Romano Professoris. Romæ, Typis Bartholomæi Bonfadini. M D C IIII. — 2. Aufl. Bononiæ, Ex Typographia Hæredum de Duccijs. MDC. LXI.

Liber secundus, S. 17 f.[1]) (2. Aufl. S. 83 f.).

Satz XII.

Die Halbkugel ist das doppelte des Kegels, oder aber zwei Drittel des Zylinders, der mit ihr gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe hat.

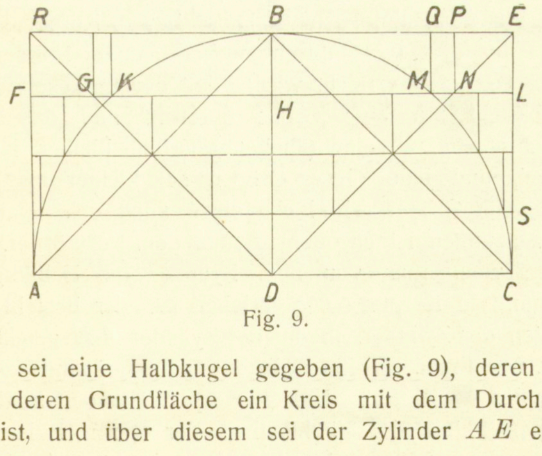


Fig. 9.

Es sei eine Halbkugel gegeben (Fig. 9), deren Achse BD, deren Grundfläche ein Kreis mit dem Durchmesser AC ist, und über diesem sei der Zylinder AE errichtet

[1]) In der ersten Auflage ist jedes Buch eigens paginiert. In der zweiten Auflage sind die Seiten durchgezählt.

und der Kegel ABC, deren gemeinsame Achse und daher auch gleiche Höhe, BD sei. Ich sage, die Halbkugel ABC sei das doppelte des Kegels ABC oder aber zwei Drittel des Zylinders AE. Über dem Kreis RE als Grundfläche werde nämlich der Kegel EDR mit der Spitze D beschrieben. Halbiert man nun zuerst die Achse BD und halbiert man weiter ihre einzelnen Teile, so mögen durch die Teilungspunkte Ebenen gelegt werden parallel zur Grundfläche AC der Halbkugel, die die Halbkugel, den Kegel und den Zylinder schneiden. Der Zylinder AE wird demgemäß in Zylinder von gleicher Höhe zerlegt werden; über den Schnittflächen des Kegels (EDR) aber und denen der Halbkugel, die ja Kreise sind, deren Mittelpunkte in der Achse BD liegen, denke man sich Zylinder errichtet, immer zwischen je zwei einander zunächst liegenden Parallelebenen, deren Achsen sonach alle einander gleich sind und auf BD liegen. Es wird also dem Kegel EDR ein gewisser Körper (figura) eingeschrieben und der Halbkugel ABC ein Körper umgeschrieben sein, deren jeder aus Zylindern von gleicher Höhe besteht. Diese beiden Körper seien aber von der Art (was durch weitergehende Halbierung der Teile von BD erreicht wird), daß der umgeschriebene die Halbkugel um eine Größe übertrifft und daß der eingeschriebene um eine (ähnliche) Größe kleiner ist als der Kegel, und jede dieser Größen sei kleiner als eine vorgegebene Größe, wie klein diese auch sei. Nach diesen Festsetzungen ist es offenbar, daß dem Restkörper, der entsteht, wenn man von dem Zylinder die Halbkugel wegnimmt, ein Körper eingeschrieben ist, der besteht aus den Resten der Zylinder, in die der Zylinder AE geteilt worden war, wenn man von ihnen die der Halbkugel umgeschriebenen Zylinder wegnimmt. Dieser Körper hat gegen den Restkörper selbst einen Fehlbetrag, der geringer ist als eine vorgegebene Größe. Der Fehlbetrag ist nämlich gleich dem Überschuß des der Halbkugel umgeschriebenen Körpers über die Halbkugel, bis auf den Rest, der beim untersten Zylinder AS bleibt, wenn man von ihm das zugehörige Stück der Halbkugel wegnimmt. Es sei aber FE der oberste aller erwähnten (Teil-)Zylinder des Zylinders AE, und seine Achse sei BH. Ferner sei der gemeinsame Schnitt der Ebene, die durch den Punkt H parallel zur Grundfläche der Halbkugel läuft, mit einer Ebene durch die Achse BD die Gerade $FGKHMNL$. Da nun aber das doppelte Rechteck DHB[1]) zusammen mit den beiden Quadraten DH, BH gleich ist dem Quadrat BD, und das doppelte Rechteck DHB zusammen mit dem Quadrat BH gleich ist dem Rechteck aus BD, DH zusammengenommen und BH, so wird das Rechteck aus BD, DH zusammengenommen (tamquam una) und BH, zusammen (una cum) mit dem Quadrat DH gleich sein dem Quadrat BD, d. i. dem Quadrat FH. Das Quadrat KH ist aber gleich dem Rechteck aus BD, DH zusammengenommen und BH. Die Differenz also, wenn man vom Quadrat FH das Quadrat KH wegnimmt, ist gleich dem übrigbleibenden Quadrat DH, d. i. dem Quadrat GH. Und wenn man alles viermal nimmt, so sieht man, daß die Differenz, die bleibt beim Wegnehmen des Quadrats MK vom Quadrat FL, das ganze Quadrat GN ist; d. h. der Rest, wenn man vom Kreis FL den Kreis MK wegnimmt, ist gleich dem Kreis GN. Daher ist auch, wegen der Gleichheit der Höhe, der Zylinder GP gleich der Differenz der Zylinder FE und QK. Ähnlich zeigt man, daß jeder einzelne Rest, der bleibt, wenn man von einem der (Teil-)Zylinder, in die der ganze Zylinder AE zerlegt wurde, den der Halbkugel umgeschriebenen Zylinder wegnimmt, gleich ist dem zwischen denselben (Parallel-) Ebenen liegenden, dem Kegel EDR eingeschriebenen Zylinder. Der ganze aus diesen genannten

[1]) Es sei in Erinnerung gebracht, daß dies das Rechteck aus DH und HB bedeutet.

Resten der Zylinder zusammengesetzte Körper, der dem Restkörper des Zylinders AE, wenn man die Halbkugel wegnimmt, umgeschrieben ist, ist also gleich dem Körper, der dem Kegel EDR eingeschrieben ist. Nun weicht aber jeder dieser Körper, der eine vom Kegel EDR, der andere vom Rest des Zylinders AE nach weggenommener Halbkugel um weniger ab als irgendeine vorgegebene Größe. Der Rest des Zylinders AE nach Wegnahme der Halbkugel ist also gleich dem Kegel EDR. Aber der Kegel EDR, d. i. der Kegel ABC, ist der dritte Teil des Zylinders AE. Der Rest des Zylinders AE nach Wegnahme der Halbkugel, ist demnach gleich dem dritten Teil des Zylinders AE; also ist der Zylinder AE das dreifache des genannten Restes. Daher ist der Zylinder AE das eineinhalbfache (sesquialter) der Halbkugel ABC. Und umgekehrt ist die Halbkugel gleich zwei Drittel (subsesquialterum) des Zylinders AE, oder das doppelte des Kegels ABC. Das Behauptete ist also offenbar.

Erläuterungen. Indem wir von Archimedes bis ins 17. Jahrhundert springen, haben wir nichts von irgendwelcher mathematischen Bedeutung für unser Thema übergangen. Freilich wurde Archimedes ins Arabische und im 12. oder 13. Jahrhundert auch ins Lateinische übersetzt. Aber nicht einmal die Araber haben daraus besonderen Nutzen gezogen. Der Scholastik war diese Art Mathematik viel zu hoch. Wie wir schon erwähnten, hat sich im lateinischen Mittelalter nur der Begriff des Indivisibels erhalten. Erst im 16. Jahrhundert begann man diese Dinge wieder zu verstehen und selbständig anzuwenden.

Die erste gedruckte Ausgabe des Archimedes (griechisch mit lateinischer Übersetzung) erschien zu Basel im Jahre 1544. Etwas später beschäftigte sich der vielseitige und geschickte Italiener Commandino mit Archimedes, gab Teile in lateinischer Übersetzung heraus (Venedig 1558) und schrieb ein Büchlein „Liber de centro gravitatis solidorum“ (Bononiae 1565), worin er die Demokritisch-Archimedische Zerlegung der Körper in dünne Scheiben mit um- und eingeschriebenen Prismen reichlich verwendete[1]). Durch dieses Büchlein wurde Luca Valerio, wie er einleitend selbst sagt, zu seinen eigenen Studien veranlaßt, bei denen er aber weit über Commandino hinausgelangte.

Wir haben in Valerio einen der geschicktesten Nachahmer und Fortsetzer von Archimedes vor uns. Freilich behielt er die Archimedische Strenge nicht bei. Aber es war wohl notwendig, von dieser Strenge zunächst etwas abzuweichen, sich mehr an die naive Anschauung zu wenden, um dadurch zu den Anfängen einer Methode zu kommen. Dazu sind bei Valerio schon recht schöne Ansätze vorhanden. Vor allem stellt er den Satz, daß man einem runden Körper durch ein- und umgeschriebene Treppenkörper beliebig nahekommen könne, ziemlich allgemein auf, nicht für jeden Fall einzeln (I, 6 bzw. I, 11 für Flächen bzw. Körper). Dann stellt er dem II. Buch Sätze voran (II, 1—3), die in unserer Sprache kurz sagen, daß man in einem Verhältnis eine Größe E, die sich von einer (festen) Größe A um eine Größe unterscheidet, die kleiner ist als irgendeine gegebene Größe ε, schließlich einfach durch A ersetzen kann. Das ist in einer noch etwas ungeschickten Form die Einführung des Begriffes „Grenzwert“. Dadurch fallen aber bei ihm die jedesmaligen indirekten Beweise, die bei Archimedes so schleppend sind, weg.

In dem obigen Beispiel zeigt nun Valerio auf diese Weise, daß

$$\text{Zylinder} - \text{Halbkugel} = \text{Kegel } RDE,$$

indem er der Halbkugel Treppen um-, dem Kegel solche einbeschreibt. Setzen wir $AD = r$, $DH = x$, $BH = h$, so ist

---

[1]) Schon 1548 hatte Fr. Maurolico eine lateinische Archimedesbearbeitung mit wertvollen eigenen Zusätzen fertiggestellt. Da diese aber erst im Jahre 1685 gedruckt wurde, konnte sie keine Wirkung ausüben.

seine Rechnung die folgende. Es ist

$$2\,x\,h + x^2 + h^2 = r^2\,,$$

ferner

$$2\,x\,h + h^2 \qquad = (r + x)\cdot h \text{ (Umformung)}\,,$$

also

$$(r + x)\cdot h + x^2 = r^2\,(= \overline{F\,H}^2)\,.$$

Da aber

$$\overline{K\,H}^2 = (r + x)\cdot h \text{ (Höhensatz)},$$

ist

$$\text{(I)} \qquad \overline{F\,H}^2 - \overline{K\,H}^2 = \overline{G\,H}^2\,(= x^2)\,,$$

oder

$$r^2\,\pi\,h - \overline{K\,H}^2\cdot\pi\,h = x^2\,\pi\,h\,.$$

Daß dies für beliebige Teilzylinder gilt, ist bei veränderlichem x klar. Alles übrige steht bei Valerio.

Der in unseren Lehrbüchern jetzt fast allgemein übliche Beweis unterscheidet sich von dem obigen nur dadurch, daß wir die Schichten gleich so dünn nehmen, daß alle Treppen wegfallen, kurz daß wir die Schichten als „Indivisibeln" auffassen[1]). Das hat Cavalieri 1635 (s. u. Nr. X) eingeführt. Die sehr geschickte Anordnung des Beweises ist aber eigene Erfindung von Valerio, dessen Werk Cavalieri in seiner Vorrede, freilich sehr nebenbei, am Rande, zitiert.

IX.

Der apfelförmige Körper Keplers.

Aus „Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, . . .". Authore Joanne Kepplero, . . . Anno M.DC.XV. Lincii in-fol. — Joannis Kepleri Astronomi Opera omnia, ed. Ch. Frisch. Vol. IV, Francofurti a. M. et Erlangae, . . . MDCCCLXIII, S. 551 ff. — Deutsch von R. Klug in Ostwalds Klass. Nr. 165. Leipzig 1908[2]).

[1]) Die entscheidende Gleichung (I) geht dann sofort aus dem Dreieck KHD hervor.

[2]) Kepler hat dieses Buch in einer populär umgearbeiteten Form im Jahre 1616 „zu Lintz" im Selbstverlag („Vom Authore ver-

Vorbemerkung. Als Kepler, der schon längst als Astronom berühmt war, im Nov. 1613 in Graz eine zweite Frau heimführte, war gerade ein gutes Weinjahr in Österreich gewesen, und er bemerkte, daß die österreichische Anwendung der „Visierrute" zur Eichung der Fässer gegenüber der ihm bekannten rheinischen Methode sehr ungenau sein mußte. Dies reizte ihn, die Frage mathematisch zu untersuchen, und so entstand die „Neue Stereometrie der Weinfässer", die durch die Betrachtung gewisser allgemeiner Formen von Rotationskörpern eingeleitet wird. Ein solcher Körper ist der von ihm „Apfel" genannte, der durch die Rotation eines Kreissegments, das größer ist als ein Halbkreis, um seine Sehne entsteht.

Kepler hatte natürlich die alten griechischen Schriftsteller, insbesondere Apollonios und Archimedes gelesen. Aber seine große geistige Selbständigkeit gestattete ihm keine direkte Nachahmung, und seine fast ausschweifend zu nennende Phantasie machte ihn unfähig, an der Archimedischen Strenge Gefallen zu finden, ja sie überhaupt richtig zu würdigen. Er schickt seinen eigenen Darlegungen eine Art Archimedischer Stereometrie voraus; aber unter seinen Händen wird das etwas ganz anderes. Während z. B. Archimedes mühsam indirekt beweist, daß die Kreisfläche wie ein Dreieck berechnet werden kann, das den Umfang als Grundlinie und den Radius als Höhe hat, sagt Kepler einfach (1. Teil, Theorem II), „die Kreislinie habe soviel Teile als Punkte, nämlich unendlich viele. Jeder Teil sei als Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks zu betrachten, das seine

---

legt") deutsch herausgegeben unter dem Titel: „Außzug auß der Vralten MesseKunst Archimedis Vnd deroselben newlich in Latein außgangener Ergentzung . . . Gestelt durch Johann Kepplern, . . .". In dieser Ausgabe befinden sich dieselben Figuren wie im Original, und auch die Inhaltsberechnungen der Zylinderhufe („Walger-Spältlin oder Schnitzlein", S. 41) und des „Apffel- oder Quitten- oder Kürbisrunden Raums" (S. 44) sind angegeben. Aber alle Beweise fehlen. Der Abschnitt „Vom Vmbkrais deß Circkels" ist S. 5.

Spitze im Mittelpunkt habe, usw." Er wirft also nicht nur die indirekten Beweise über Bord, sondern verschmäht sogar die Einführung von Größen, die kleiner sind als eine angebbare Größe, wie es Valerio so hübsch durchführte. Keplers „Freiheit" geht so weit, daß er, wie beim Beweis für die Kugeloberfläche (Theoreme V und VI), sich mit einer „wahrscheinlichen" Tatsache begnügt, die nur zufällig stimmt. Ja er gelangt zur Aufstellung eines Lehrsatzes (Theor. XXV), der schon im Text das Wort „scheint" hat und wirklich falsch ist.

Diesen Schwächen steht gegenüber, daß Kepler eben ein genialer Kopf war, und daß seine ganz und gar unscharfe Methode ihn zu verblüffenden Resultaten führte. So wurde diese Stereometrie der Weinfässer, die zudem viel weiter verbreitet wurde als Valerios Werk, eine mächtige Quelle der Anregung für die allenthalben sich regenden Kräfte, die versuchten, das Werk des Archimedes zu erweitern. Insbesondere hat Cavalieri aus Kepler reiche Anregung geschöpft, und er verbreitet sich in seiner Vorrede eingehend über die Stereometrie der Weinfässer als die einzige Schrift, die er als Vorläufer seiner eigenen anerkennt (s. vor. Nr., Schluß).

Die Auswertung (Berechnung kann man nicht gut sagen, da Keplers Stärke nicht die algebraische Methode war) des apfelförmigen Körpers geht bei Kepler, der wohl kaum wußte, daß dies schon bei Pappos stand, die Bestimmung des Volumens des sog. „Kreiswulstes" voraus, des Körpers, der entsteht, wenn ein Kreis um eine ihn nicht schneidende (höchstens ihn berührende) Achse rotiert.

Bl. F, v^0 (Opera IV, S. 584). Theor. XX. Die Zone des Apfels setzt sich zusammen aus der Zone einer Kugel und dem geraden Abschnitt eines Zylinders. Die Grundfläche dieses Abschnittes ist das Segment, das in der Figur, die den Apfel erzeugt, fehlt, die Höhe aber ist gleich dem Kreis, den der Mittelpunkt des größeren Segments beschreibt.

Beweis. Es werde der Körper des Apfels (Fig. 10) nach denselben Gesetzen in einen Zylinderabschnitt (Zyl.-Huf) auseinandergefaltet, nach denen Archimedes (vielmehr Kepler frei nach Archimedes!) im Theor. II die Fläche des Kreises in ein rechtwinkliges Dreieck auseinanderfaltete. Und es sei FD der Halbmesser des größten Kreises im Körper des Apfels (Fig. 11), und im Punkte D werde eine Gerade DS senkrecht errichtet, deren Länge der zur Geraden gestreckte Umfang des größten Kreises

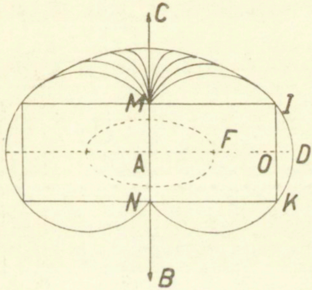


Fig. 10.

sei, und die man sich auf einer Zylinderfläche liegend denke[1]). Die Linie MN ist nämlich gewissermaßen die gemeinsame Kante, an der alle kreisförmigen körperlichen Segmente zusammenstoßen. Da aber der Umfang des größten Kreises in die Gerade DS ausgestreckt wurde, so werden gleichzeitig alle jene kreisförmigen Körper ausgestreckt, und werden, mit Ausnahme des ersten MDN, zu elliptischen (Scheibchen) MSN. Aber klarer wird die Bedeutung dieser Umformung aus dem folgenden hervorgehen. Es werde die Fläche MDN durch Parallele zu MN in beliebig viele gleich breite, äußerst kleine, sozusagen linienförmige Abschnitte zerlegt, man verbinde ferner die

[1]) Die unbeholfenen Holzschnitte der Originalausgabe habe ich durch die verbesserten Figuren in den Opera ersetzt.

Punkte A, S und ziehe aus den Teilpunkten des Durchmessers AD, die durch die Zerschneidung der Fläche entstanden sind, Senkrechte FG, OL zur Geraden AS hin. Es sei aber F der Mittelpunkt, und die Senkrechte

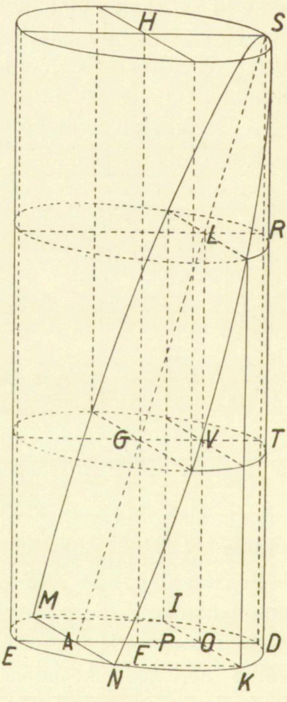


Fig. 11.

in F schneide AS in G, und durch G ziehe man GT parallel zu FD. Es sei schließlich O der Mittelpunkt des Schnittes IK, in ihm werde die Senkrechte OL errichtet, die AS in L schneidet, und durch L wird LR parallel zu OD gezogen. Wenn nun die Figur um MN herumgedreht wird, so erzeugt das Flächenelement (areola) MN fast nichts, weil es sich nur ganz wenig bewegt. Aber die zu ihr parallele (Strecke) durch F beschreibt bereits einen Kreis von der Länge FG, die Linie durch O einen Kreis von der Länge OL und so alle. So werden die Teile des zylindrischen Körpers, die durch FG, OL bezeichnet sind, gleich jenen zylindrischen (Ringen), die im Apfel wie Mäntel (tunicae) sind, und von den Linien der Figur MDN bei der Rotation um MN gebildet werden, nach dem Theorem XVII. Die ganze Figur also, d. h. der Zylinderhuf (cylindri prisma) $MNDS$, der aus den Körpern aller Mäntel besteht, nachdem man diese gerade gestreckt hat, ist gleich dem ganzen Körper des Apfels, der sich aus den Mänteln (selbst) zusammensetzt.

Weiter ist der zylindrische Körper über der Grundfläche $IMNK$ bis hinauf nach L, wenn man den Zylinder mit einer Ebene (planities) schneidet, in der die Linien OL und KI liegen, gleich dem zylindrischen (Teil) des Apfels, dem die äußere Zone weggenommen ist. Und deshalb ist der durch diese Ebene (planum) weggeschnittene kleine Teil des Zylinders, nämlich $LSDO$, gleich der (körperlichen) Zone des Apfels.

Da aber GT gleich ist FD, gleich dem Halbmesser jener Kugel, deren größter Kreis $MIKN$ ist, und TS die Länge dieses größten Kreises ist (weil sich wie AD zu DS, so GT zu TS verhält), so ist der Huf des Zylinders über GT bis hinauf nach S || gleich dem Inhalt der Kugel mit dem Halbmesser FD, und der Teil dieses Hufes, der über GV steht und bis L reicht ||[1]), gleich dem zylindrischen Körper der Kugel FD, der durch die Rotation der zu FO senkrechten Linie IK beschrieben wird. Und daher ist

[1]) Im Original fehlt das Stück, das ich vorne und hinten durch || bezeichnet habe. Entweder ist also dies beim Druck ausgeblieben oder der Text sonst verstümmelt. Von R. Klug wurde das in seiner Übersetzung nicht bemerkt (S. 22); aber in den von ihm beigegebenen Erläuterungen (S. 113) ist der Sachinhalt richtig dargestellt. Auch Frisch sagt nichts über die Stelle.

der übrigbleibende kleine Teil $LSTV$ des Zylinders gleich der Zone jener Kugel, deren Querschnitt das Segment KDI ist.

Aber $ODSL$ setzt sich zusammen aus $VTSL$ und dem Zylinderabschnitt $ODVT$, dessen Grundfläche das Segment IKD und dessen Höhe FG ist, gleich dem Kreis, den der Mittelpunkt F des größeren Abschnittes $MIKN$ beschreibt, wenn die Figur um MN rotiert. Also verhalten sich auch die ihnen gleichen (Körper) so; nämlich daß die Zone des Apfels sich zusammensetzt aus der Zone der Kugel, die von demselben Segment beschrieben wird, und aus dem genannten Zylinderabschnitt.

Erläuterungen. Die Ausführungen Keplers geben vor allem mehr als der in der Überschrift stehende Satz besagt. Sie geben nämlich nicht nur die körperliche Zone des Apfels, sondern das ganze Apfelvolumen. Kepler weiß das natürlich und erläutert im folgenden auch des näheren, wie man den ganzen Apfel berechnet. Aber das innere, „zylindrische" (cylindraceus) Stück des Apfels, das von dem gemischtlinigen Viereck $MNKI$ bei der Rotation beschrieben wird, kann er offenbar ohne weiteres berechnen, indem er die Fläche des genannten Vierecks mit dem Umfang eines Kreises vom Radius AF multipliziert[1]). Er muß also nur noch zeigen, wie man den Teil des Apfels — eben die körperliche Zone — berechnet, die von dem Kreissegment IKD beschrieben wird. Deshalb die Überschrift! Diese Zone soll gleich sein einer Kugelzone und einem Abschnitt eines geraden Zylinders, die beide elementar berechnet werden können. Daß dann der ganze Apfel durch Keplers schöne Transformation in einen Zylinderhuf mit dem ganzen rotierenden Segment als Grundfläche und der Länge des von D bei der Rotation beschriebenen Kreises (also vom Radius AD) als Höhe übergeht, ist eigentlich nur ein geo-

[1]) D. i. der Weg des Schwerpunktes F der Fläche, was aber Kepler nicht sagt.

metrisches Nebenresultat von keiner praktischen Bedeutung, da Kepler diesen Zylinderhuf ja nicht direkt berechnen könnte.

Aber Kepler hat nicht eine einzige Transformation, sondern zwei wesentlich voneinander verschiedene. Die erste Transformation muß ich etwas ausführlicher besprechen, da sie, wie die ganze Übersetzung zeigt, von R. Klug offenbar nicht verstanden wurde. Im Theorem II zeigt Kepler, daß die Kreisfläche gleich dem Dreieck OAS ist, wenn AS gleich dem Umfang des Kreises ist. Was ich nun sage, steht nicht bei Kepler, ist aber oben in Theor. XX sein Gedanke. Man schneide nämlich den Kreis längs des Radius OA auf (Fig. 12,

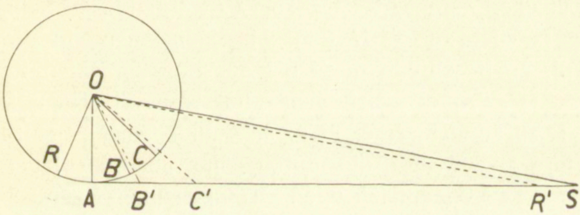


Fig. 12.

schematisch) und verzerre ihn so, daß das kleine Dreieck OAB des Kreises in das Dreieck OAB', das Dreieck OBC in das Dreieck $OB'C'$ usw., schließlich das Dreieck ORA in das Dreieck $OR'S$ übergeht. Dadurch ist der Kreis in das Dreieck OAS direkt übergeführt.

Genau so denkt sich Kepler die Sache mit dem Apfel. Er schneidet diesen längs $MNKDI$ auf; diese Fläche bleibt liegen. Nun macht er im Apfel lauter Schnitte durch die Kante MN, so daß unzählig viele keilartige, von je zwei Kreisbogen begrenzte Scheibchen entstehen, alle kongruent. Diese werden nun, je mehr sie sich von $MNKDI$ entfernen, desto mehr in die Länge gezogen, indem MN immer fest bleibt (das dem Mittelpunkt O des vorigen Kreises entspricht), während der andere Rand an die Gerade DS heran muß, in die der äußerste Umfang des Apfels ausgestreckt wurde. Die Scheibchen werden also elliptisch, und das letzte, das ursprünglich mit $MNKDI$ sich deckte, geht in MNS über. Der Zylinderhuf ist also in lauter kleine, keilförmige Scheibchen von elliptischer Form geteilt zu denken, die alle ihre Kante in MN haben. Daß freilich diese Scheibchen gerade einen Zylinder bilden, wäre erst zu beweisen, und für die Rechnung würde diese Transformation gar nichts bedeuten, da bei dieser Art der Zerlegung der Zylinderhuf kaum leichter zu berechnen wäre, wie der Apfel selbst. (Beim rechtwinkligen Dreieck ist das freilich anders!).

Aber die zweite Transformation liefert denselben Zylinderhuf. Dies ist ja viel leichter verständlich, von Kepler auch viel deutlicher dargelegt. Es sei IK irgendeine Sehne des Kreises parallel zu MN (ich will keine neue in die Figur zeichnen), so beschreibt diese bei der Rotation einen Zylindermantel. Der Apfel setzt sich aus lauter solchen Mänteln (tunicae) zusammen, die hier als „Indivisibeln" aufzufassen sind. Ihre Dicke und die durch eine noch so klein angenommene Dicke entstehenden Treppenstufen vernachlässigt Kepler. Schneidet man den Apfel, wie erklärt, auf, läßt IK in der Ebene $MNKDI$ liegen und breitet den Mantel in einer Ebene senkrecht zu $MNKDI$ aus, so erhält man das Rechteck $IKDA$ mit der Höhe OL gleich dem Umfang des Kreises vom Radius AO. Daß all diese Rechtecke (als „Indivisibeln") nebeneinander gestellt den Zylinderhuf bilden, ist sofort beweisbar, da die oberen Ränder, wegen der Proportionalität der Kreisumfänge mit den Radien, in einer Ebene liegen müssen.

Diese zweite Transformation kann auch gleich zur Berechnung in modernen Symbolen dienen. Sei $FD = r$, $AF = d$, $AO = x$, $OI = y$ (wobei wieder I einen beliebigen Punkt bedeute), so ist die Gleichung des Kreises

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2 .$$

Jede Tunika hat die Fläche

$$2\,y \cdot 2\,x\,\pi = 4\,x\,y\,\pi .$$

Die Summe aller Tuniken ergibt sich, wenn man diesen Ausdruck von $x = 0$ bis $x = r + d$ integriert, indem man den Tuniken die Dicke $d\,x$ gibt, so daß sie zu Körpern werden Also ist

$$\text{Apfel} = 4\,\pi \int_0^{r+d} x\,y\,d\,x = 4\,\pi \int_0^{r+d} x \sqrt{r^2 - (x-d)^2}\,d\,x\,.$$

Setzt man hier $x - d = \xi$, so daß $d\,x = d\,\xi$, so wird

$$\text{Apfel} = 4\,\pi \int_{-d}^{r} (\xi + d)\,(r^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,\xi$$

$$= -2\,\pi \int_{-d}^{r} (-2\,\xi\,d\,\xi)\,(r^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} + 4\,d\,\pi \int_{-d}^{r} (r^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,\xi$$

$$= -\frac{4\,\pi}{3} \left| (r^2 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} \right|_{-d}^{r} + 4\,d\,\pi \times \tfrac{1}{2}\,\text{Segm.}\ M\,N\,K\,D\,I$$

$$= \frac{4\,\pi}{3}\,(r^2 - d^2)^{\frac{3}{2}} + 2\,d\,\pi \times \text{Segm.}$$

$$= \frac{4\,\pi}{3}\,\overline{A\,M}^3 + 2\,d\,\pi \times \text{Segm.}$$

Hierbei läßt sich der erste Ausdruck als eine Kugel, der zweite als ein Zylindersegment deuten, die aber beide bei der Keplerschen Umformung nicht herauskommen.

Nennen wir noch P den Schwerpunkt des Segmentes $M\,N\,K\,D\,I$ und setzen $A\,P = p$ (was natürlich bei Kepler fehlt), so ist $2\,y \cdot x$ das Drehmoment jedes einzelnen Indivisibels des Segments (d. h. jeder zu $M\,N$ parallelen Sehne) in bezug auf die Achse $M\,N$. Dann ist nach der Definition des Schwerpunktes

$$\text{Segm.} \times p = 2 \int_0^{r+d} x\,y\,d\,x\,;$$

das ist aber nach dem obigen

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{Apfel},$$

also ist

Apfel = Segm. $\times\, 2\,p\,\pi$, d. h. gleich der Fläche des Segments, multipliziert mit dem Weg des Schwerpunktes P bei der Rotation, oder gleich einem Zylinder mit dem Segment als Grundfläche und dem von P beschriebenen Kreisumfang als Höhe. Dies ist der sog. Guldinsche Satz, der für jeden Rotationskörper gilt. P. Guldin veröffentlichte ihn in einem großen Werke „De centro gravitatis" (Viennae 1635/41) mit einer Kritik u. a. auch von Keplers Neuer Stereometrie, aber unter sorgfältiger Verschweigung der fast sicheren Tatsache, daß er diesen Satz in Pappos' Synagoge, Buch VII, gefunden habe. Daß Kepler den Satz nicht kannte, scheint mir schon aus der obigen ganz anders gearteten Ableitung mit Gewißheit hervorzugehen. Kepler wußte sicher ebensowenig, daß Valerio (wohl als erster) den Schwerpunkt eines Kreissegmentes bestimmt hatte.

Auf die naheliegenden Erweiterungen, die sich zum Teil bei Kepler selbst finden, wie Rotation eines Segments, das kleiner ist als ein Halbkreis (was zu einer „Zitrone" führt), Ersetzung des Kreises durch irgendeinen anderen Kegelschnitt, müssen wir verzichten einzugehen. Daß man aus solchen Körpern durch Zustutzen Fässer erhalten kann, ist ohne weiteres klar.

X.

Die Summe der Quadrate der Indivisibeln eines Dreiecks.

Aus: Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Authore F.(ratre) Bonaventura Cavalerio Mediolan.(ensi) Ord.(inis) Jesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr. Ac. in Almo Bonon.(iensi) Gymn.(asio) Prim.(o) Mathematicarum Professore . . . Bononiæ, . . . M.DC.XXXV. Zweite Ausgabe: Bononiae, M.DC.LIII.

Vorbemerkung. Anders als Kepler, der als protestantischer Laie die scholastische Philosophie nicht kannte (s. o. S. 60 f.) und der auf die gelegentliche Anwendung von Indivisibeln nur durch seine Popularisierung der strengen Archimedischen Methode kam, wendet der Pater Cavalieri die Indivisibeln mit diesem Namen (der Kepler offenbar unbekannt war) in seinem großen Werk, das handschriftlich bereits 1629 dem Senat von Bologna vorlag, systematisch an, um, wie der Titel sagt, „die Geometrie mittels der Indivisibeln der kontinuierlichen (Größen) auf eine gewisse neue Art zu fördern". Da auch Cavalieris Lehrer Galilei die Lehre kannte und bei der theoretischen Ableitung der Fallgesetze auch verwendete[1]), ja wie aus dem Briefwechsel hervorgeht, selbst im Sinne hatte, ein Lehrbuch darüber zu schreiben, ist natürlich keine Rede davon, daß Cavalieri etwa nur ein Nachahmer Keplers sei, von dem er selbstverständlich Anregungen empfing. Das Indivisibel ist auch bei Cavalieri nicht deutlich definiert, und es ist überhaupt alles mehr geahnt als bewiesen. Sogar die Methode der Treppen wendet Cavalieri gelegentlich an. Eigentlich sollte ja das Indivisibel eine Dimension weniger haben als das von ihm durch Bewegung (fluere = fließen kommt bei Cavalieri vor) erzeugte kontinuierliche Raumgebilde. Aber oft ist das Cavalierische Indivisibel unausgesprochen doch mit einer Dicke behaftet, und die Indivisibeln werden meist einfach addiert, wie es Archimedes in der „Methodenlehre" tat. Da wir den Ausdruck „alle Linien" (dem Sinne nach) schon bei Archimedes gelesen haben (s. o. S. 51 f.), werden wir uns nicht wundern, daß ihn auch Cavalieri für die Summe der Indivisibeln gebraucht. Der größte Fortschritt, den Cavalieri dabei machte, ist wohl der, daß er sich die linienförmigen Indivisibeln einer Fläche selbst mit Flächen, z. B.

[1]) Vgl. meinen Aufsatz: Das Gesetz vom freien Falle in der Scholastik, bei Descartes und Galilei. Z. math. nat. Unt. 45 (1914) S. 209—228, woraus man auch sieht, daß Descartes die Archimedischen Methoden nicht fremd waren.

Quadraten, behaftet dachte, so daß er von der Summe der Quadrate der Indivisibeln einer Fläche sprechen konnte. Dieses Verfahren war der Erweiterung fähig und führte zu den Integralen der ganzzahligen Potenzen. Der grundlegende Lehrsatz ist in dem folgenden Stück enthalten.

Liber II. Theorema XXIV. Propos.(itio) XXIV.[1])

S. 78 (2. Ausgabe S. 159.[2])

Es sei ein beliebiges Parallelogramm gegeben und in ihm sei eine Diagonale gezogen. Dann verhalten sich alle Quadrate des Parallelogramms zu allen Quadraten eines der beiden durch die genannte Diagonale gebildeten Dreiecke wie 3 : 1 (sunt in ratione tripla), wenn man eine der Seiten der Parallelogramme als gemeinsame Richtlinie (regula) nimmt.

Es sei das Parallelogramm AG, die in ihm gezogene Diagonale CE, die Richtlinie irgendeine Seite, etwa EG (Fig. 13). Ich sage, daß alle Quadrate (des Parallelogramms) AG das dreifache sind aller Quadrate irgendeines der Dreiecke AEC oder CEG. (I) Man halbiere die Seiten AC, CG in den Punkten B, H, und durch B ziehe man eine Parallele zu CG, durch H eine solche zu CA, nämlich (die Geraden) BF, DH, die sich mit der Geraden CE gleichzeitig im Punkte M halbieren. Zieht man also in der Figur oder dem Parallelogramm AG die Linie BF, die alle zu EG Parallelen halbiert, und CE, die dieselben, außer DH, in ungleiche Teile teilt, so werden alle Quadrate des Dreiecks AEC mit allen Quadraten des Dreiecks CEG gleich sein dem doppelten aller Quadrate (des Parallelogramms) AF (zusammen) mit allen Quadraten der zwei Drei-

[1]) Propositio (Satz) ist der allgemeinere Begriff, theorema (Lehrsatz) der speziellere, ihm steht problema (Aufgabe) als Gegensatz gegenüber.

[2]) In der 1. Aufl. hat jedes „Buch“ eigene Seitenzahlen, die 2. Auflage ist durchpaginiert.

ecke CBM, EMF[1]); wenn nämlich auch DH durch die Linie CE halbiert wird[2]), so bedeutet das nichts gegen unsere Behauptung; denn auch für DH trifft zu, wie für diejenigen (Parallelen), die ungleich geschnitten werden, daß das Quadrat der abgeschnittenen Teile, nämlich die Quadrate von DM und MH (zusammen) das doppelte sind der Quadrate der Hälfte, d. h. des Quadrates DM und des (Stücks), welches sich zwischen die Schnitte schiebt, und

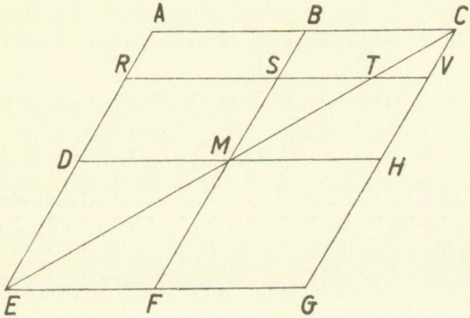


Fig. 13.

das hier Null ist, da die beiden Schneidenden BF, CE sich im Punkte M treffen. (II) Es sind aber alle Quadrate des Dreiecks AEC gleich allen Quadraten des Dreiecks CEG, weil das Dreiecke auf gleichen Grundlinien EG, AC sind, mit derselben Höhe, nur umgekehrt liegend, und daher sind alle Quadrate des Dreiecks CEG gleich allen Quadraten AF mit allen Quadraten der Dreiecke CBM, MEF. (III) Nun sind alle Quadrate des Dreiecks BMC gleich allen Quadraten des Dreiecks CMH, alle Quadrate aber des Dreiecks CEG haben zu allen Quadraten des Dreiecks

[1]) Hier ist im Text (beider Auflagen) eine Umstellung, auf die S. 508 der 2. Aufl. (aber mit auf die 1. Aufl. bezüglichem Seitenzitat) aufmerksam gemacht wird.

[2]) Hier steht im Text (beider Auflagen) ein „non“, was offenbar sinnlos ist.

CMH das dreifache Verhältnis der (beiden Linien) GC und CH, welches zwei ist, also stehen sie im achtfachen Verhältnis, und das deswegen, weil die Dreiecke CEG, CMH ähnlich sind. Daher sind alle Quadrate CEG das achtfache aller Quadrate CMH und das vierfache aller Quadrate CMH oder BCM mit MEF. (IV) Es sind aber alle Quadrate des Dreiecks CEG gleich allen Quadraten AF mit allen Quadraten der Dreiecke CBM, MEF; also werden diese das vierfache sein von allen Quadraten der Dreiecke CBM, MEF. Durch Division[1]) ergibt sich dann, daß alle Quadrate AF das dreifache jener (anderen) sind. Es verhalten sich aber alle Quadrate AG zu allen Quadraten AF wie das Quadrat GE zum Quadrat EF, d. h. wie 4 : 1 (id est quadrupla) oder wie 12 : 3[2]). Ferner sind alle Quadrate AF das dreifache aller Quadrate der Dreiecke BMC, MEF; also sind alle Quadrate AG das zwölffache aller Quadrate der Dreiecke BMC, MEF und verhalten sich zu allen Quadraten AF wie 12 zu 3[2]). Demnach verhalten sich alle Quadrate AG zu allen Quadraten AF (zusammen) mit allen Quadraten der Dreiecke CBM, MEF wie 12 zu 4[2]). Es sind aber alle Quadrate AF mit allen Quadraten der Dreiecke CBM, MEF gleich allen Quadraten des Dreiecks CEG oder AEG, wie gezeigt wurde; daher verhalten sich alle Quadrate AG zu allen Quadraten des Dreiecks CEG oder AEC wie 12 zu 4, d. h. sie sind deren dreifaches, was zu beweisen war. (V)

Erläuterungen. (I) In dem Parallelogramm AG hat man sich alle Indivisibeln parallel zu EG gezogen vorzustellen. Über jedem Indivisibel muß man sich ein Quadrat errichtet denken. Wir wollen dann zur Verständigung festsetzen, daß ΣAEC die Summe der Quadrate aller Indivisibeln des Dreiecks AEC bedeuten soll. Dann ist natürlich, wie weiter

[1]) Das ist die altgriechische Ausdrucksweise für „korrespondierende Subtraktion“.

[2]) Hier mit Ziffern auch im Original.

unten festgestellt wird, $\Sigma AEC = \Sigma CEG$, auch $\Sigma CBM = \Sigma EMF$ und $\Sigma AG = 4\Sigma AF$; aber die große Frage ist, wie ΣAG sich zu ΣAEC verhält. Dies wird durch den aufgestellten Satz beantwortet, daß $\Sigma AG = 3\Sigma AEC$. Wir sehen sofort (und Cavalieri weiß das natürlich ebenfalls), daß dies den Inhalt der quadratischen (und damit jeder) Pyramide gibt, oder daß es die Quadratur der Parabel $y = x^2$ bedeutet. Wir drücken das heute so aus $\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3$ (vgl. o. S. 33). In der Figur wäre dann $AC = a$ zu nehmen. Damit dies auch genau den Pyramideninhalt wiedergäbe, müßte man nur in der Figur auch die Höhe des Parallelogramms AG gleich a nehmen. Damit wäre zugleich die Anzahl der Indivisibeln des Parallelogramms gleich a genommen. Dasselbe ergibt sich, wenn man a als die Maßzahl von AC, gemessen durch das kleinste Indivisibel des Dreiecks ACE, das der E zunächst liegt, nimmt, unter der Voraussetzung, daß alle Indivisibeln gleich dick sind. Denn heißen wir das kleinste Indivisibel ε, so ist das nächste 2ε usw., und es ist $n\varepsilon = a(\varepsilon)$, d. h. $n = a$. Der Inhalt des Parallelogramms AG ist dann a^2 und der des entsprechenden Parallelepipeds a^3. Dieser Gedankengang liegt durchaus im Sinne Cavalieris.

(II) Betrachten wir die Schneidende RV, auf die Cavalieri erst in einem Zusatz zu sprechen kommt (er hat entsprechende Sätze über die mit Quadraten behafteten Indivisibeln schon vorher bewiesen), und setzen $ST = \lambda$, so ist $RT = \frac{1}{2}a + \lambda$, $TV = \frac{1}{2}a - \lambda$, und folglich

$$(1) \qquad \overline{RT}^2 + \overline{TV}^2 = (\tfrac{1}{2}a + \lambda)^2 + (\tfrac{1}{2}a - \lambda)^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\lambda^2.$$

Nimmt man überall die Summen, indem man RT von AC bis zur Spitze E abnehmen, TV von der Spitze C bis EG zunehmen läßt, so durchläuft λ die beiden Dreiecke CBM,

EMF, während $\frac{a}{2}$ das Parallelogramm AF überstreicht. Wir können also im Sinne von Cavalieri die Gleichung (1) schreiben

(1*) $$\Sigma AEC + \Sigma CEG = 2\Sigma AF + 4\Sigma BMC.$$

(III) Dies geht sofort über in

(1†) $$\Sigma AEC = \Sigma AF + 2\Sigma BMC,$$

wobei wir gegenüber Cavalieri nur das lästige Mitschleppen der ΣEMF vermeiden.

(IV) Nun kommt die Behauptung, daß

(2) $$\Sigma AEC = 8\Sigma BMC.$$

Aber hierzu gibt Cavalieri auch am Rande keine Rückverweisung an. Ein Beweis für diese Behauptung fehlt also. Nun können wir ja leicht sehen, wenn wir die Quadrate über den Indivisibeln und damit die Pyramiden $(BC)^2M$[1]) und $(AC)^2E$ wirklich bilden, daß diese ähnlich sind und sich also wie 1 : 8 verhalten — wenn nämlich der Satz über die ähnlichen Pyramiden bewiesen ist. Aber der Beweis dafür beruht in irgendeiner Weise wieder auf dem Rauminhalt der Pyramide, und der hierfür grundlegende Satz ist hier zum Beweis gestellt. Die Sache sieht also stark nach einem Zirkelschluß aus. Es käme eben hier alles auf die logische Anordnung an. Das war aber nicht Cavalieris Stärke. Wir nehmen die Richtigkeit dieser Behauptung einfach hin.

(V) Das weitere ist für uns selbstverständlich, weil wir algebraisch rechnen können, was Cavalieri erst später und mangelhaft lernte. So leitet er mühsam mit Proportionen ab, was wir im folgenden schreiben. Aus (1*) und (2) folgt

(3) $$\Sigma AEC = \Sigma AF + \tfrac{1}{4}\Sigma AEC,$$

(4) $$\tfrac{3}{4}\Sigma AEC = \tfrac{1}{4}\Sigma AG, \quad \text{schließlich}$$

(5) $$\Sigma AG = 3\Sigma AEC.$$

[1]) D. h. die Pyramide über $(BC)^2$ als Grundfläche und M als Spitze.

Die Rechnung Cavalieris zu verfolgen, ist nur langweilig, nicht schwer.

Cavalieri kam, indem er das von Kepler nur näherungsweise gelöste Problem der Kubierung der parabolischen „Spindel" (die durch Rotation eines Parabelbogens um seine Sehne entsteht) untersuchte, von selbst darauf, an Stelle der Quadrate seiner Indivisibeln im Parallelogramm und Dreieck Biquadrate zu setzen. Nachdem ihm das gelungen war, suchte er zur Ergänzung auch das $\int\limits_0^a x^3 dx$, wie wir sagen, auszuwerten (angekündigt 1639). Von auswärts angeregt, fuhr er dann bis $\int\limits_0^a x^6 dx$ weiter, woraus er auf die Analogie aller übrigen schloß und nur noch als Beispiel $\int\limits_0^a x^9 dx$ vorführte. Veröffentlicht hat er diese Verallgemeinerungen in seinen „Exercitationes geometricae sex" (Bologna 1647). Das war zu einem Zeitpunkt, als es nicht mehr neu war. Denn unterdessen hatte schon Fermat, dem vielleicht sogar Torricelli vorausging, diese Quadraturen mittels der nicht nur übersichtlicheren, sondern auch ohne weiteres zu verallgemeinernden algebraischen Methode geleistet, und zwar für positive beliebige rationale Exponenten (für positiv ganze schon 1636). Alle diese Forscher wußten voneinander und teilten sich ihre Resultate — freilich oft mit Vorsicht — gegenseitig mit[1]). Daß die parabolische Spindel schon von Ibn Alhaitham (um 1000 n. Chr.) nach der strengen Archimedischen Methode abgeleitet worden war (und damit die Summen der Kubik- und Biquadratzahlen), wußte damals noch niemand[2]).

[1]) Hierbei war mir eine Abhandlung von H. Bosmans „Un chapitre de l'œuvre de Cavalieri", Mathesis 36 (1922), S. 365—456 sehr nützlich.

[2]) Vgl. H. Suter, Bibl. math., 3. Folge, XII (1911/12), S. 289 ff.

XI.
Der spitze hyperbolische Körper Torricellis.

Aus: Opera geometrica Evangelistae Torricellii. Florentiae 1644. Im besonderen aus der Abhandlung „De solido hyperbolico acuto“ (a. a. O. II. Teil, S. 113—135). Abgedruckt in den Opere di Evangelista Torricelli, ed. . . . da Gino Loria e Giuseppe Vassura. Vol I, Parte I. Faenza 1919. Die Abhandlung S. 191—213.

Vorbemerkung. Die Abhandlung gibt erstens ein einfaches Beispiel, wie die Idee der Cavalierischen Indivisibeln sofort verständnisvoll aufgegriffen wurde, zweitens enthält sie, wie Torricelli selbst (in der Vorrede zu einer vorausgehenden Abhandlung über denselben Körper) hervorhebt, den ersten Fall, daß ein Gebilde, das sich ins Unendliche erstreckt, nicht einen unendlichen Rauminhalt hat. Es handelt sich um den Körper, der durch Rotation einer gleichseitigen Hyperbel um eine Asymptote entsteht. Bei der Hyperbel selbst sind ja die entsprechenden Flächenteile unendlich. Wenn Torricelli sagt, er gebrauche als erster (sine aliorum exemplo) krumme Indivisibeln, so dürfen wir daraus schließen, daß er Keplers Neue Stereometrie nicht gesehen hat, wo solche „Tuniken“ schon vorkommen (s. o. S. 60 f.). Unter den 38 (!) wissenschaftlichen Büchern, die Torricelli in seiner Bibliothek hatte (s. in demselben Bd. der Opere, S. IX), befindet sich Keplers Buch jedenfalls nicht. In der Figur ist das punktiert Gezeichnete von mir hinzugefügt.

S. 115 (Opere I, 1, S. 193). Theorema.

Der unendlich lange, spitze hyperbolische Körper ist, wenn man ihn mit einer Ebene senkrecht zur Achse schneidet, zusammen mit dem Zylinder seiner Grundfläche, gleich einem gewissen geraden Zylinder, bei dem der Durchmesser der Grundfläche gleich dem latus versum oder der Achse der Hyperbel ist, dessen Höhe aber gleich ist dem Halbmesser der Grundfläche des spitzen Körpers selbst.

Es sei eine Hyperbel gegeben mit den Asymptoten AB, AC[1]), die einen rechten Winkel einschließen mögen (Fig. 14). Man nehme dann auf der Hyperbel einen beliebigen

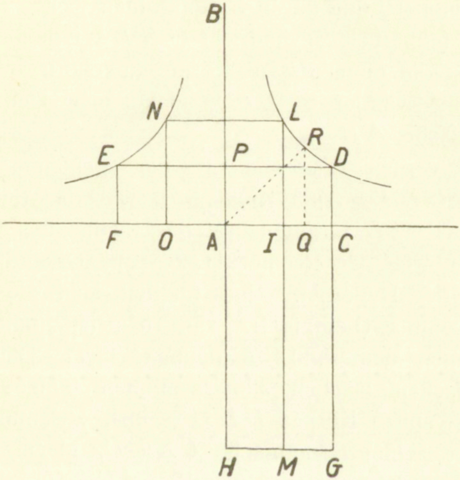


Fig 14.

Punkt D an und ziehe DC parallel zu AB, und DP parallel AC. Dann werde die ganze Figur um die Achse AB gedreht, so daß der spitze hyperbolische Körper EBD entsteht, zugleich mit dem Zylinder seiner Grundfläche $FEDC$. Es werde nun BA bis H verlängert, so daß AH gleich ist der ganzen Achse oder dem latus versum der Hyperbel. Und über dem Durchmesser AH werde ein Kreis beschrieben, der senkrecht steht zur Asymptote AC. Und über der Grundfläche AH (d. h. über dem beschriebenen Kreis) denke man sich einen geraden Zylinder $ACGH$ errichtet, dessen Höhe AC sei, nämlich der Halbmesser der Grundfläche des spitzen Körpers. Ich sage, daß der

[1]) Das Original hat im Text kleine Buchstaben, an der Figur große.

ganze Körper $FEBDC$, wiewohl er unendlich lang ist, doch dem Zylinder $ACGH$ gleich ist.

In der Geraden AC werde ein beliebiger Punkt I angenommen, und durch I denke man sich eine zylindrische Fläche (superficies cylindrica) $ONLI$ um die Achse AB geführt, die dem spitzen Körper angehört, und den Kreis IM im Zylinder $ACGH$ denke man sich parallel zur Grundfläche AH.

Es verhält sich dann die genannte zylindrische Fläche $ONLI$ zum Kreis IM wie das Rechteck durch die Achse OL zum Quadrat des Radius des Kreises IM; nämlich wie das Rechteck OL zum Quadrat der halben Achse der Hyperbel. Und folglich sind sie gleich nach dem Lemma (Lemma I). Und das ist immer wahr, wo man auch den Punkt I nehmen mag. Daher sind die zylindrischen Flächen alle zusammen (omnes simul), das ist der spitze Körper EBD selbst, zusammen mit dem Zylinder seiner Grundfläche $FEDC$, gleich allen Kreisen zusammen, d. i. dem Zylinder $ACGH$. Was zu beweisen war.

Erläuterungen. Diese Sache ist so einfach und so klar dargestellt, daß sie nur wenige Worte der Erläuterung bedarf. Ein Fortschritt liegt sicher auch darin, daß die zylindrischen Indivisibeln hier einfach durch ihnen gleiche Kreisflächen ersetzt sind, in die sie geometrisch nicht übergeführt werden können. Torricelli hat 5 Lemmata (Hilfsätze) vorausgeschickt, die wir alle nicht brauchen. Es sei für uns AC eine x- und AB eine z-Achse; dann hat die Hyperbel die Gleichung $xz = d^2$, und es ist $AQ = QR = d$, AR (die Halbachse der Hyperbel) $= d\sqrt{2}$. Jedes Rechteck $ONLI$ ist dann gleich $2d^2$, und der von IL oder ON beschriebene Zylindermantel ist $2x\pi z = 2d^2\pi$, also konstant, unabhängig von der Lage von I. AH wurde aber gleich $2d\sqrt{2}$ gemacht, so daß jeder Kreis des Zylinders $AHGC$ die Fläche $(d\sqrt{2})^2\pi = 2d^2\pi$ hat.

Diese Kreise sind die Indivisibeln des Zylinders, wie die Zylindermäntel die Indivisibeln des gesuchten Körpers sind. Das übrige steht bei Torricelli, der in einer Menge von Zusätzen die Eigenschaften des Körpers noch genauer angibt (u. a. daß der Rauminhalt gegen die Ebene FC hin unendlich wird).

Denken wir uns eine y-Achse durch A senkrecht zu BAC, so hat der Körper die Gleichung $zr = d^2$, wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, oder in rationaler Form $z^2(x^2 + y^2) = d^4$. Es liegt also eine Fläche 4. Ordnung vor, zu der freilich auch der unterhalb der x, y-Ebene liegende Teil gehört.

Die moderne Berechnung ist folgende. Wir wollen das Stück $NEDL$ berechnen, indem wir $CD = a$, $IL = b$ setzen. Dieses Stück ist gleich

$$\int_a^b r^2 \pi \, dz = d^4 \pi \int_a^b \frac{dz}{z^2}$$

$$= d^4 \pi \left| -\frac{1}{z} \right|_a^b = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) d^4 \pi .$$

Für $b = \infty$ gibt das $\frac{d^4}{a}\pi$, d. i. den Körper EBD. Für $z = a$ ergibt sich aber $r^2 = \frac{d^4}{a^2}$; also ist der Grundzylinder $EFDC$ gleich $r^2 \pi a = \frac{d^4}{a} \pi$. Dieser ist also gleich dem oberen unendlich ausgedehnten Körper, was Torricelli auch unter seinen Sätzen hat. Beide zusammen geben $\frac{2d^4}{a^2}\pi$. Das ist auch der Inhalt des Zylinders $AHGC$, dessen Grundkreisradius ja $d\sqrt{2}$ und dessen Höhe $\frac{d^2}{a}$ ist.

Torricelli hatte damit das erste Integral einer Potenz mit negativem Exponenten ($y = x^{-2}$) gebildet, was den

Algebraikern, zu denen er allerdings nicht gehörte, sofort klar sein mußte.

In einer folgenden Abhandlung hat er auch noch einen Beweis mittels des alten Archimedischen Verfahrens gegeben; aber er hält ihn nicht für besser (longiorem quidem, sed non ideo mihi certiorem).

XII.

Quadratur aller höheren Hyperbeln.

Aus der Abhandlung „De aequationum localium transmutatione et emendatione ..., cui annectitur proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus.“ Œuvres de Fermat, publ. par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry ... Tome premier. Paris MDCCCXCI, S. 255—288. Franz. Übers. von P. Tannery in Œuvres III, Paris 1896, S. 216—237.

Vorbemerkung. Die Abhandlung, aus der wir das folgende Stück entnehmen, wurde von Fermat erst nach 1657 in ihre jetzige Form gebracht. Daß aber Teile davon und zwar die Integration der allgemeinen Parabeln $y = x^n$, wo n auch (positiv) gebrochen sein kann, schon 1644 vorlagen, wird durch eine Mitteilung an Cavalieri bezeugt, in der jedoch die Methode nicht angegeben ist. Unterdessen hatte Torricelli, dadurch angeregt, im Jahre 1646 die Ausdehnung auch auf alle negativen Exponenten n gefunden. Die Fermatsche Abhandlung gibt nun eine Zusammenfassung aller Fälle unter seine eigene (von der Torricellischen verschiedene) äußerst interessante Methode, bereichert um zahlreiche Anwendungen auf Gleichungsformen, die durch Umformung auf die obige zurückgeführt werden können. Veröffentlicht wurde das alles erst, wie schon öfter erwähnt, in Fermats „Varia Opera“ (Tolosae 1679). Ich gebe im folgenden die an den Anfang gestellten Ausführungen über die Hyperbeln.

S. 256 (frz. S. 217) ... Als Hyperbeln aber definieren wir unendlich viele Kurven verschiedener Art, wie

$DSEF$ (Fig. 15), deren Eigenschaft die folgende ist: Nimmt man als Asymptoten der Kurven unter einem beliebig gegebenen Winkel RAC die Geraden AR, AC an, die man nach Belieben, wie die Kurve selbst, bis ins Unendliche verlängern kann, und zieht man parallel zu der einen Asymptote die beliebigen Geraden GE, HI, ON, MP, RS usw., so verhalte sich wie irgendeine Potenz (potestas) der Geraden AH zu derselben Potenz der Geraden AG, so eine Potenz der Geraden GE, und zwar dieselbe oder eine von der vorigen verschiedene, zur gleichen Potenz der Geraden HI. Unter den Potenzen aber verstehen wir nicht nur die

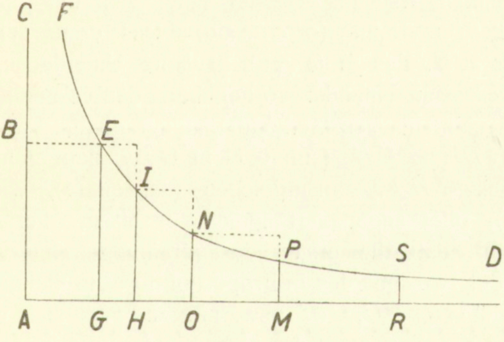


Fig. 15.

Quadrate, Kuben, Biquadrate (quadrato-quadrata) usw., deren Exponenten sind 2, 3, 4 usw., sondern auch die einfachen Seiten (latera; Wurzeln), deren Exponent die Einheit ist.

Ich sage nun, daß all diese unendlich vielen Hyperbeln, mit Ausnahme einer einzigen, der Apollonischen oder ersten, mit Hilfe des geometrischen Verhältnisses (proportio[1]*) in gleichförmiger und auf alle anwendbarer Art quadriert werden können.*

[1]) Tannery übersetzt dies (auch im Titel) mit „progression" (= Reihe). Das ist wohl nicht ganz im Sinne Fermats gelegen, der, wenn er will, das Wort „progressio" selbst gebraucht.

Es sei z. B. eine Hyperbel vorgelegt, deren Eigenschaft sei, daß immer

wie das Quadrat der Geraden AH sich verhält zum Quadrat der Geraden AG,
so die Gerade GE zur Geraden HI,

und

wie das Quadrat OA zum Quadrat AH, so die Gerade HI zur Geraden ON,

usw. Ich sage, daß die unendliche Fläche, deren Grundlinie GE ist und deren Begrenzung auf der einen Seite die Kurve ES, auf der andern aber die unendliche Asymptote GOR ist, gleich ist einer geradlinigen Fläche.

Denken wir uns Glieder einer sich ins Unendliche erstreckenden Reihe (progressio): Das erste sei AG, das zweite AH, das dritte AO, usw. ins Unendliche, und diese Glieder seien einander so genähert, daß es genügt, um nach der Archimedischen Methode das geradlinige Parallelogramm aus GE und GH (sub GE in GH) dem gemischtlinigen Viereck $GHIE$ anzugleichen (adaequare), wie Diophant sagt[1]), oder angenähert gleich zu setzen. Ferner (nehmen wir an), daß die ersten der geradlinigen Intervalle (Unterschiede) zwischen den in Proportion fortschreitenden (Größen), nämlich GH, HO, OM usw. nahezu unter sich gleich seien, so daß bequem, durch Umschreibungen und Einschreibungen, die Archimedische Art des Beweises durch Zurückführung auf Unmögliches (per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον) angewendet werden kann. Es genüge, dies ein für allemal gesagt zu haben, damit wir nicht genötigt sind, einen Kunstgriff, der jedem Geometer bereits hinreichend bekannt ist, öfters hervorzuheben und zu wiederholen.

Unter diesen Voraussetzungen, und da ferner sich verhält

wie AG zu AH, so AH zu AO und so AO zu AM,

hat man ebenfalls

---

[1]) Diophantos gebraucht in seiner Arithmetik V, 11 und V, 14 (vgl. das I. Bdchn., S. 15) den Ausdruck παρισότης für „annähernde Gleichheit".

wie AG zu AH, so das Intervall GH zu HO, und so das Intervall HO zu OM, usw.

Das Parallelogramm aber aus EG und GH verhält sich zum Parallelogramm aus HI und HO,
wie das Parallelogramm aus HI und HO zum Parallelogramm aus NO und OM.

Da nämlich das Verhältnis (ratio) des Parallelogramms aus GE und GH zum Parallelogramm aus HI und HO zusammengesetzt ist aus dem Verhältnis der Geraden GE zur Geraden HI und aus dem Verhältnis der Geraden GH zur Geraden HO, sich aber verhält

wie GH zu HO, so AG zu AH,

wie wir angegeben haben, so setzt sich das Verhältnis des Parallelogramms aus EG und GH zum Parallelogramm aus HI und HO zusammen aus dem Verhältnis GE zu HI und aus dem Verhältnis AG zu AH. Aber es verhält sich

wie GE zu HI, so nach Voraussetzung[1] HA Quadrat zum Quadrat GA

oder, wegen der (fortlaufenden) Proportionalität,

so die Gerade AO zur Geraden GA.

Also ist das Verhältnis des Parallelogramms aus EG und GH zum Parallelogramm aus HI und HO zusammengesetzt aus dem Verhältnis AO zu AG und AG zu AH. Aber aus diesen beiden setzt sich das Verhältnis AO zu AH zusammen. Also verhält sich das Parallelogramm aus GE und GH zum Parallelogramm aus HI und HO wie OA zu HA, oder wie HA zu AG.

Ähnlich wird bewiesen, daß das Parallelogramm aus HI und HO sich zum Parallelogramm aus ON und OM verhält wie AO zu HA.

Aber die drei Geraden, die die Verhältnisse der Parallelogramme darstellen, nämlich die Geraden AO, HA, GA, sind (stetig) proportional nach Voraussetzung; also sind die unendlich vielen Parallelogramme, aus GE und GH,

[1]) Original: ex constructione.

aus HI und HO, aus ON und OM alle stetig proportional im Verhältnis der Geraden HA zu GA. Es ist daher, nach dem grundlegenden Satz für unsere Methode

wie GH, die Differenz der Glieder des Verhältnisses, zum kleineren Glied GA,

so das erste Glied der Reihe der Parallelogramme, das ist das Parallelogramm aus EG und GH,

zu den übrigen unendlich vielen Parallelogrammen,

d. h. nach der „Angleichung“ des Archimedes zu der Figur, die von HI, der Asymptote HR und der ins Unendliche sich erstreckenden Kurve IND gebildet wird.

Aber wie HG zu GA, so verhält sich, wenn man die Gerade GE als gemeinsame Breite betrachtet, das Parallelogramm aus GE und GH zum Parallelogramm aus GE und GA. Es verhält sich also

wie das Parallelogramm aus GE und GH

zu jener unendlichen Figur mit der Grundlinie HI,

so dasselbe Parallelogramm aus GE und GH

zum Parallelogramm aus GE und GA.

Also ist das Parallelogramm aus GE und GA, d. i. eine gegebene geradlinige Fläche, „angeglichen“ der vorher genannten Figur. Zählt man dazu (beiderseits) das Parallelogramm aus GE und GH, das wegen der ganz kleinen Teilungen (minutissimas $\tau\varepsilon\mu\alpha\chi\iota\sigma\mu o\acute{v}\varsigma$) verschwindet und zu nichts wird, so kommt heraus als völlig wahr und und leicht mittels eines Archimedischen (natürlich umständlicheren) Beweises zu bekräftigen (der Satz): Das Parallelogramm AE ist bei dieser Art der Hyperbeln gleich der Figur, die von der Grundlinie GE, der Asymptote GR und der ins Unendliche erstreckten Kurve ED begrenzt wird.

(Nun nimmt Fermat an, daß GE und HI sich wie die Kuben von HA und GA verhalten, und beweist, daß dann das Parallelogramm $AGEB$ gleich dem doppelten der an GE anschließenden, gemischtlinigen unendlichen Figur ist).

(260) . . . Ähnlich kann der Beweis für alle anderen Fälle geführt werden; nur für die erste (oder Apollonische und einfache) Hyperbel läßt die Methode aus dem einzigen Grunde im Stich, weil bei ihr die Parallelogramme EH, IO, NM immer unter sich gleich sind; und da die die Reihe bildenden Glieder unter sich gleich sind, besteht zwischen ihnen keine Differenz, und diese (Differenz) macht gerade das ganze Geheimnis bei der Sache aus.

(Nun kommen bei Fermat die Parabeln mit allgemeiner Regel; dann erst die folgende allgemeine Regel für die Hyperbeln).

(266; frz. 224) . . . Auch für die Hyperbeln findet man nicht weniger leicht eine allgemeine Regel. Es verhält sich nämlich immer, bei jeder beliebigen Hyperbel, das Parallelogramm BG zu der ins Unendliche erstreckten Figur $RGED$ wie die Differenz der Exponenten der Potenzen der Ordinate (applicatae) und der Abszisse (diametri) zum Exponenten der Potenz der Ordinate.

Erläuterungen. Da Fermats Ausführungen an sich leicht verständlich sind, führen wir die Rechnung gleich in moderner Bezeichnung durch. Wir setzen

$$\begin{aligned} AG &= x_0, & GE &= y_0, \\ AH &= x_1, & HI &= y_1, \\ AO &= x_2, & ON &= y_2, \\ AM &= x_3, & MP &= y_3, \\ AR &= x_4, & RS &= y_4; \end{aligned}$$

dann ist vorausgesetzt

$$x_1^2 : x_0^2 = y_0 : y_1, \text{ usw.,}$$

oder

$$y_1 x_1^2 = y_0 x_0^2 = \text{const.},$$

oder, wie wir schreiben wollen

$$y x^2 = 1 .$$

Nun sei $x_1 = \varepsilon x_0$, $x_2 = \varepsilon x_1 = \varepsilon^2 x_0$, $x_3 = \varepsilon x_2 = \,.\,.\, = \varepsilon^3 x_0$, usw., wobei $\varepsilon > 1$, aber so, daß die Differenzen

$$x_1 - x_0 = x_0 \cdot (\varepsilon - 1)\,,$$
$$x_2 - x_1 = x_0\,\varepsilon\;(\varepsilon - 1)\,,$$
$$x_3 - x_2 = x_0\,\varepsilon^2 (\varepsilon - 1)\,, \text{ usw.,}$$

die auch eine geometrische Reihe mit demselben Quotienten bilden wie die Abszissen selbst, sehr nahe einander gleich sind[1]).

Daraus ergibt sich sofort

$$\frac{\text{Par. } EH}{\text{Par. } IO} = \frac{\text{Par. } IO}{\text{Par. } NM} = \;.\;.\; = \frac{y_0\,(x_1 - x_0)}{y_1\,(x_2 - x_1)} = \;.\;.\;.$$
$$= \frac{x_1^{\,2}}{x_0^{\,2}\,\varepsilon} = \varepsilon\,,$$

d. h. auch die aufeinanderfolgenden Rechtecke bilden eine geometrische Reihe mit dem Quotienten ε.

Nun hat Fermat einen „grundlegenden Satz" vorausgeschickt, nämlich den Satz über die Summe der geometrischen Reihe. Dieser Satz lautet, wenn wir das erste Glied mit a bezeichnen, den Quotienten $q < 1$ gleich $u : v$ setzen und die ganze Summe mit S bezeichnen

$$(v - u) : u = a : (S - a)\,.$$

Das ergibt

$$S - a = a \cdot \frac{u}{v - u} = a \cdot \frac{q}{1 - q}\,,$$
$$S = \frac{a}{1 - q}\,.$$

Die Glieder der Reihe sind hier die Parallelogramme EH, IO, NM, . . . Also ist

$$a = \text{Par. } EH = y_0\,(x_1 - x_0)\sin A\,,$$
$$q = \text{Par. } IO : \text{Par. } EH = 1/\varepsilon\,,$$

also

$$S = \frac{a\,\varepsilon}{\varepsilon - 1} = \frac{y_0\,x_0\,(\varepsilon - 1)\sin A}{\varepsilon \quad 1}$$
$$= x_0\,y_0 \sin A = \text{Par. } AGEB\,.$$

---

[1]) Soll z. B. MR nur um 1% größer sein als GH, so ist $\varepsilon^3 = 1{,}01$ und $\varepsilon = 1{,}0033$ zu nehmen.

Das ist das erste Fermatsche Ergebnis, das wir für $A = 90^0$ auch schreiben können

$$S = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, d\, x = \frac{1}{x_0}.$$

Beim zweiten Fermatschen Beispiel ist $y\, x^3 = 1$, und das Ergebnis ist

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, d\, x = \frac{1}{2}\, x_0\, y_0 = \frac{1}{2\, {x_0}^2}.$$

Der allgemeine Satz Fermats lautet schließlich für die Hyperbel

$$y^n\, x^m = 1 \quad (m > n)$$

$$S = \int_{x_0}^{\infty} x^{-\frac{m}{n}}\, d\, x = \frac{n}{m-n}\, x_0\, y_0$$

$$= \frac{n}{m-n}\, x_0\, x_0^{-\frac{m}{n}} = \frac{n}{m-n}\, x_0^{\frac{n-m}{n}},$$

was mit unserem allgemeinen, aus der unbestimmten Integration hervorgehenden Resultat

$$\left. \left(-\frac{m}{n}+1\right)^{-1} \cdot x^{-\frac{m}{n}+1} \right|_{x_0}^{\infty} = -\frac{n}{n-m}\, x_0^{\frac{n-m}{n}}$$

übereinstimmt.

Der allgemeine Fermatsche Beweis für die Hyperbel

$$y^n\, x^m = 1 \quad (m > n)$$

ginge mit unserer algebraischen Bezeichnungsweise folgendermaßen. Es ist

$$a = \text{Recht. } E\,H = y_0\,(x_1 - x_0) = y_0\, x_0\, (\varepsilon - 1)$$

$$= x_0^{-\frac{m}{n}}\, x_0\, (\varepsilon - 1)$$

$$= x_0^{\frac{n-m}{n}}\, (\varepsilon - 1),$$

$$q = \frac{\text{Recht. } IO}{\text{Recht. } EH} = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_0(x_1 - x_0)} = \frac{x_1^{-\frac{m}{n}} \cdot \varepsilon}{x_0^{-\frac{m}{n}}}$$

$$= \varepsilon^{-\frac{m}{n}} \cdot \varepsilon = \varepsilon^{\frac{n-m}{n}},$$

$$S = \frac{x_0^{\frac{n-m}{n}}(\varepsilon - 1)}{1 - \varepsilon^{\frac{n-m}{n}}} = -x_0^{\frac{n-m}{n}} \cdot \frac{\eta^n - 1}{\eta^{n-m} - 1} \quad \left(\eta = \varepsilon^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= -x_0^{\frac{n-m}{n}} \cdot \frac{(\eta - 1)(\eta^{n-1} + \eta^{n-2} + \cdots + \eta + 1)}{(\eta - 1)(\eta^{n-m-1} + \eta^{n-m-2} + \cdots + \eta + 1)}.$$

Der Faktor rechts geht nach Kürzung mit $(\eta - 1)$ für $\lim \varepsilon = 1$, also auch $\lim \eta = 1$, über in $\frac{n}{n-m}$. Demnach folgt

$$S = -\frac{n}{n-m} x_0^{\frac{n-m}{n}},$$

wie oben.

Wenn wir zunächst von der eigentümlichen Teilung der Abszissenachse absehen, so besteht der große Fortschritt Fermats darin, daß er eine richtige Integration mittels immer kleiner werdender Flächenstückchen ausführt, indem er den indirekten Beweis des Archimedes, der eigentlich nötig wäre, als selbstverständlich ansieht, und kurzerhand die kleinen Rechtecke mit den entsprechenden gemischtlinigen Flächenstückchen identifiziert, wenn nur der Unterschied klein genug ist. Fermat sagt zwar auch nirgends etwas von einem Grenzwert, wenn das Verhältnis, das wir oben ε nannten, der 1 zustrebt, aber in Wirklichkeit muß er doch diese Vorstellung (wie wir das schon bei Archimedes selbst feststellten) gehabt haben, und er steht dieser Auffassung in der Ausdrucksweise jedenfalls näher als Archimedes.

Was nun die Teilung der Abszissenachse nach einer geometrischen Reihe betrifft, so ist zu bemerken, daß Fermat sein Verfahren selbst gelegentlich ein „logarithmisches" nannte[1]). Dies tritt am deutlichsten hervor bei der gewöhnlichen Hyperbel, wo bei solcher Teilung die Flächenstücke gleich werden, wo also einer arithmetischen Reihe der Flächenstücke eine geometrische Reihe auf der Abszissenachse entspricht. Diese Gegenüberstellung der beiden Reihenarten hat ja historisch zu den Logarithmen geführt, und wir sagen umgekehrt: Die Fläche der gewöhnlichen Hyperbel wird durch den Logarithmus der Abszisse gemessen. In Zeichen, wenn die Gleichung der Kurve lautet $x\,y = 1$, so ist

$$\int_{x_0}^{x_1} x^{-1}\,d\,x = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\,x}{x} = \log\text{nat}\,x_1 - \log\text{nat}\,x_0,\ \text{für}\ x_0 > 0,\ x_1 > 0,$$

was auf $x = \infty$ nicht erstreckt werden kann, und gegenüber allen anderen Werten von m/n eine Ausnahme bildet. Diese Bemerkung über die Quadratur der gewöhnlichen Hyperbel hatte im Wesen schon Gregorius a. St. Vincentio 1647 in seinem „Opus geometricum" gemacht. Für $m/n < 1$ wird zwar das betrachtete Flächenstück wie für $m/n = 1$ unendlich groß. In diesem Falle bleiben aber die an der y-Achse liegenden Flächenstücke endlich, und es wären nur die beiden Achsen zu vertauschen.

Nun tritt die Teilung einer Strecke nach Abschnitten, die eine geometrische Reihe bilden, schon bei gewissen Scholastikern des 14. Jahrhunderts auf[2]). Es ist nicht unwahrscheinlich, daß

---

[1]) Siehe H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert, Leipzig 1903, S. 268. Die Logarithmen waren im Jahre 1614 zuerst von John Neper bekannt gemacht worden.

[2]) Vgl. einen Aufsatz von mir: „Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter." Bibl. math., 3. Folge, Band (1913/14) S. 150–168.

Fermat selbst solche Arbeiten gekannt hat. Noch wahrscheinlicher ist das aber für Neper, den Erfinder der Logarithmen selbst, wenn auch der literarische Nachweis augenblicklich nicht zu führen ist. Fermat hängt also mit diesem so fruchtbaren Gedanken der Einteilung der Grundlinie nach einer geometrischen Reihe vielleicht direkt von Neper, mindestens aber indirekt von den Scholastikern ab.

XIII.

Die Methode der Maxima und Minima von Fermat.

Aus „Œuvres de Fermat", publ. par . . . P. Tannery et Ch. Henry. Tome I. Paris 1891. Frz. in Bd. III, Paris 1896 (von P. Tannery).

S. 133 (frz. S. 121).

Methode zur Untersuchung von Maximal- und Minimalwerten.

Die ganze Lehre von der Auffindung der Maxima und Minima beruht darauf, daß man zwei Unbekannte[1]) annimmt und folgende einzige Regel anwendet:

Man führe A als irgendeine (unbekannte) Größe der Frage ein, entweder als eine Fläche, einen Körper oder eine Länge, wie es gerade der Aufgabe entspricht, und drücke dann das Maximum oder Minimum mittels A durch Glieder aus, die von beliebigem Grad sein können. Hierauf setze man andererseits für die frühere Größe $A+E$ und drücke von neuem das Maximum oder Minimum durch Glieder mittels A und E aus, wobei beliebige Potenzen auftreten mögen. Man setze nun, wie Diophant sagt, die beiden Aggregate, die den Maximal- bzw. Minimalwert ausdrücken, angenähert einander gleich[2]), und nehme auf beiden Seiten die gleichen Glieder weg. Daraufhin wird

[1]) Fermat sagt für „Unbekannte" wie Cardano „positio" und setzt dazu „in notis", d. h. „in Buchstaben geschrieben".

[2]) S. o. S. 84.

in jedem Glied rechts und links entweder E oder eine Potenz davon stehen. Darauf dividiere man alle Glieder mit E oder einer höheren Potenz davon, bis (wenigstens) eines der Glieder auf irgendeiner Seite von dem Faktor E ganz befreit ist. Nun streiche man auf beiden Seiten die Glieder mit E oder dessen Potenzen und setze die anderen einander gleich, oder wenn auf einer Seite nichts übrigbleibt, setze man natürlich, was auf dasselbe hinauskommt, die negativen gleich den positiven Gliedern. Die Auflösung jener letzten Gleichung gibt den Wert von A, und wenn man diesen kennt, erhält man das Maximum oder Minimum, indem man die Schritte bei der vorangegangenen Lösung wiederholt.

Wir geben folgendes Beispiel: Es sei die Strecke (recta) AC so in E zu teilen, daß das Rechteck AEC ein Maximum wird (Fig. 16).

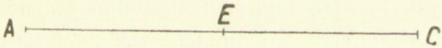


Fig. 16.

Die Strecke AC heiße B, der eine Teil von B werde A genannt, also wird der andere $B - A$ sein, und das Rechteck aus den Abschnitten ist B mal $A - A\,q.$, und dieses soll zu einem Maximum werden[1]). Nun setze man andererseits den einen Teil von B gleich $A + E$, also wird der andere sein $B - A - E$, und das Rechteck aus den Abschnitten wird

B mal $A - A\,q. + B$ mal $E - A$ mal E zweimal $- E\,q.$,
was annähernd gleichgesetzt werden muß dem Rechteck

$$B \text{ mal } A - A\,q.$$

[1]) Ich denke, der Leser wird mit der folgenden algebraischen Rechnung, die noch ganz die altmodische Form der Vièteschen hat (s. I. Bdchn., Nr. XIX), selbst zurecht kommen, und sich auch nicht an der doppelten Verwendung der Buchstaben A und E stoßen.

Nimmt man die gleichen Glieder weg, so wird

B mal E annähernd gleich A mal E zweimal $+ Eq.$,

und wenn man alles durch E dividiert, wird

B annähernd gleich A zweimal $+ E$.

Läßt man E weg, so ist

B gleich A zweimal.

Also ist B zu halbieren zur Lösung der Aufgabe, und es kann keine allgemeinere Methode geben.

(Fermat wendet jetzt seine Methode auch auf die Bestimmung der Tangente einer Parabel an. Er bestimmt die Subtangente, hat aber noch nicht das charakteristische Dreieck [s. u. S. 96]. Die Parabel ist ihm auch hier nur ein Beispiel.)

S. 136 (frz. S. 123) . . . Und diese Methode läßt nie im Stich; sie läßt sich im Gegenteil auf zahlreiche sehr schöne Fragen ausdehnen; mit ihrer Hilfe haben wir nämlich die Schwerpunkte von Figuren gefunden, die von krummen Linien und Geraden begrenzt sind und solche von Körpern, und vieles andere, wovon ich vielleicht sprechen werde, wenn ich Muße haben werde.

. . . .

(Nun folgt, aus derselben Zeit, die Anwendung der Methode, freilich aber nicht in ihrer reinen Form, auf die Bestimmung des Schwerpunktes eines Rotationsparaboloids.)

Erläuterungen. Fermat hat seine Methode, wie aus dem Briefwechsel hervorgeht, schon 1629 gefunden, und das Obige ist die älteste Darstellung, die er 1638 an Roberval und Descartes gelangen ließ. Maxima und Minima und auch Tangenten hat man schon im Altertum gelegentlich bestimmt; aber das geschah immer mit geometrischen Methoden. Fermats Methode ist die erste algebraische, die auf die Differentialrechnung hinweist. (Über Descartes' algebraische Methode s. das III. Bdchn., S. 28.) Wenn wir moderne Bezeichnung einführen, macht es Fermat folgendermaßen. Wir setzen x statt A und h statt E. Dann werde die Größe y, die ein Extrem werden soll, etwa ausgedrückt durch $y = f(x)$ und in zweiter Linie durch $y = f(x+h)$. Es wird dann gesetzt

$$f(x+h) \approx f(x).$$

Nun wird zusammengefaßt und mit h dividiert, wenn man der Einfachheit wegen annimmt, daß lineare Glieder in h vorhanden sind. Wir können also schreiben

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx 0 .$$

Ohne Angabe einer Begründung läßt nun Fermat die Glieder, die noch h enthalten, weg. Das kommt bei stetigen Kurven auf dasselbe hinaus, wie wenn man $h = 0$ setzt (oder besser allmählich zu Null werden läßt). Dann ist nämlich

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

nichts anderes als die Bedingung, daß der Differentialquotient von $f(x)$ verschwindet.

Aber Fermat ist nicht nur diese Ausdrucksweise und der darin liegende Grenzübergang fernliegend, sondern er hat auch sicher nicht daran gedacht, h überhaupt gleich Null zu setzen. Es war bis vor kurzem keine Erläuterung seiner Methode bekannt (wiewohl er solche an Freunde weitergegeben hatte). Aber man hat in neuester Zeit einen Brief Fermats aus dem Jahr 1643 gefunden, in dem er sein Verfahren zu beweisen sucht. Wir können das hier der Länge wegen nicht wiedergeben. Aber man sieht daraus, daß Fermat sich h immer endlich dachte. Es kam ihm wesentlich darauf an, daß die Ausdrücke $f(x+h)$ und $f(x-h)$ beide entweder kleiner oder größer seien als $f(x)$[1]).

Die Methode Fermats liefert also für stetige, differenzierbare Funktionen genau den Differentialquotienten; aber Fermat

[1]) Siehe den von C. de Waard herausgegebenen Supplementband (Bd. V) der Œuvres, Paris 1922, S. 120—125.

selbst fehlt die Idee davon hier noch gänzlich. Daß er aber von der großen Bedeutung seiner Methode voll durchdrungen war, sieht man aus jedem Wort. Es sind auch noch weitere zahlreiche Anwendungen von ihm aus späterer Zeit überliefert[1]).

XIV.

Das charakteristische Dreieck bei Pascal. Trigonometrische Integrale.

Aus: LETTRE DE A. DETTONVILLE A MONSIEVR DE CARCAVY, EN LVY ENVOYANT . . . Vn Traitté des Sinus du quart de Cercle . . . A PARIS, M. DC. LVIII. Abgedruckt (mit Faksimile des Titelblatts) in Œuvres de Blaise Pascal publiées . . . par Léon Brunschvicg, Pierre Boutroux et Félix Gazier Bde. VIII und IX, Paris 1914.

Vorbemerkung. Der Name Amos Dettonville, ein Pseudonym, das Pascal von Ende 1658 an annahm, ist ein Anagramm des Pseudonyms Louis de Montalte[2]), unter dem er 1656/57 seine berühmten „Lettres provinciales" herausgegeben hatte. Carcavi war ein Jurist, der vielfache gelehrte Beziehungen unterhielt. In dem Brief handelt es sich eigentlich um die Lösung einer von Pascal selbst kurz vorher gestellten Preisaufgabe über die Zykloide. Es waren aber dem Brief mehrere kleine Abhandlungen über infinitesimalgeometrische Probleme beigegeben, aus deren einer wir ein paar Stellen auswählen. Pascal hatte die Indivisibeln wohl zuerst bei Cavalieri (s. o. S. 70f.) kennen gelernt, hatte aber nach 1654 aus dem Werk des Jesuiten A. Tacquet

[1]) Unter den späteren Abhandlungen ist allerdings eine, wo der Grenzübergang auftritt. S. darüber eine Abhandlung von mir, die demnächst im Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. erscheinen wird.

[2]) Dieser Name ist eine Anspielung auf den „hohen Berg" Puy-de-Dôme bei Clermont, auf dem Pascal im Jahre 1648 durch seinen Schwager den bekannten Barometerversuch hatte anstellen lassen. S. z. B. E. Gerland, Geschichte der Physik, München 1913, S. 427.

„Cylindricorum et Annularium libri IV ...“, Antverpiæ M.DC.LI, eine wesentlich strengere Auffassung sich angeeignet, die er in demselben Brief (Œuvres VIII, S. 351 f.) näher auseinandersetzt. Es sei noch bemerkt, daß Tacquet wenigstens indirekt ein Schüler seines Ordensgenossen und Landsmanns Gregorius a Sancto Vincentio war, in dessen Werk „Opus geometricum“ (Antverpiæ M.DC.XLVII) sich ebenfalls bemerkenswerte Integrationen befinden. Gregorius kannte wieder die Schriften über Statik des Flamen Simon Stevin (s. I. Bdchn., S. 53 f.), die dieser zuerst in seiner Muttersprache im Jahre 1595 veröffentlicht hatte[1]) und die unterdessen (in den „Hypomnemata math.“) 1608 ins Lateinische und 1634 (in den „Œuvres“) ins Französische übertragen und dadurch allgemein bekannt geworden waren. Diese Zusammenhänge, die H. Bosmans genauer aufgedeckt hat, sind deswegen wichtig, weil Stevin vielleicht der erste ist, der (in seiner Statik) die indirekte Beweismethode des Archimedes, den natürlich damals alle Mathematiker mehr oder weniger studierten, durch ein direktes Grenzverfahren ersetzt hatte[2]).

Œuvres IX, S. 60.

Abhandlung über die Sinus des Kreisquadranten.

Hilfsatz.

Sei ABC (Fig. 17) ein Kreisquadrant, dessen Radius AB als Achse betrachtet werde, und der dazu senkrechte Radius AC als Basis; und (man ziehe) die Berührende (la tou-

[1]) De Beghinselen der Weeghconst, De Weeghdaet und De Beghinselen des Waterwichts, alle drei einzeln zu Leyden erschienen.

[2]) S. zwei Abhandlungen von H. Bosmans über Stevins Infinitesimalmethode in Ann. Soc. scient. Brux. **37** (1912) und in Mathesis **37** (1923), ferner eine kleine Notiz über Gregorius in Ann. Soc. scient. Brux. **44**, I (1924) und zwei Artikel über Pascal, eine große Übersicht über sein Werk (63 S.) in Revue des Quest. scient. (Januar und April 1924) und einen über Pascals Indivisibelbegriff in Archivio di storia d. sc. **4** (1923).

chante) DE, in welcher man die Punkte E nehme, wo man wolle. Von den Punkten E ziehe man die Lote ER auf die Basis AC:

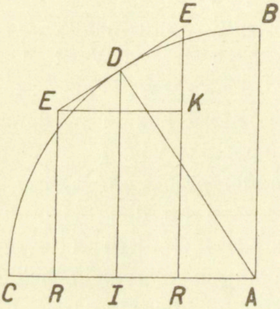


Fig. 17.

Dann sage ich, daß das Rechteck aus dem Sinus DI und der Berührenden EE gleich ist dem Rechteck aus dem Stück der Basis (das von den Parallelen eingeschlossen wird)[1]) und dem Radius AB.

Denn der Radius AD verhält sich zum Sinus DI wie EE zu RR oder zu EK. Das erscheint klar wegen der rechtwinkligen und ähnlichen Dreiecke DIA, EKE, da der Winkel EEK oder EDI gleich ist dem Winkel DAI.

Satz I.

Die Summe der Sinus irgendeines Bogens des Kreisquadranten ist gleich dem Stück der Basis zwischen den äußersten Sinus, multipliziert mit dem Radius.

(Drei weitere Sätze geben entsprechende Werte für die Summe der Quadrate, der Kuben und der Biquadrate der Sinus, worauf P a s c a l sagt „und so bis ins Unendliche (à l'infiny)“. Dann kommt eine „Vorbereitung zum Beweis“, aus der wir zur Erklärung der hier nur soweit nötig wiedergegebenen Figur entnehmen, daß auf dem Kreisquadranten von B aus in den Punkten D gleiche Bogen bis P hin abgeschnitten und die Sinus DI gezogen sind, bis zum letzten Sinus PO. Die Punkte E ergeben sich dann durch die Tangenten in den Punkten D, und es sind die Lote ER gezogen).

[1]) Klammern im Original.

Beweis des Satzes I.

Ich sage, daß die Summe der Sinus DI (jeder multipliziert mit einem der gleichen Bogen DD (Fig. 18), wie sich das von selbst versteht)[1]) gleich ist der Geraden AO, multipliziert mit dem Radius AB.

Denn wenn man in allen Punkten D die Berührenden DE zieht, deren jede ihre benachbarte in den Punkten E schneidet, und wieder die Lote ER fällt, so sieht man, daß jeder Sinus DI, multipliziert mit der Berührenden EE, gleich ist jedem Abstand RR, multipliziert mit dem Radius AB. Also sind alle Rechtecke der Sinus DI, jeder multipliziert mit seiner Berührenden EE (die alle unter einander gleich sind) zusammen (ensemble) gleich allen Rechtecken zusammen, gebildet aus allen Stücken RR und dem Radius AB; d. h. (da ja eine der Berührenden EE jeden der Sinus multipliziert, und der Radius AB jeden der Abstände multipliziert)[1]) die Summe der Sinus DI, jeder multipliziert mit einer der Berührenden EE, ist gleich der Summe der Abstände RR, oder (gleich) AO, multipliziert mit AB. Aber jede Berührende EE ist gleich jedem der gleichen Bogen DD. Also ist die Summe der Sinus, multipliziert mit einem der kleinen, gleichen Bogen gleich dem Abstand AO, multipliziert mit dem Radius.

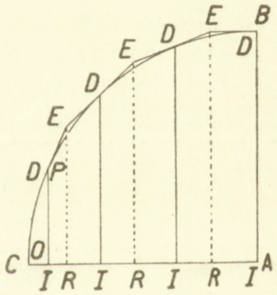


Fig. 18.

Bemerkung.

Wenn ich gesagt habe, daß alle Abstände RR zusammen gleich sind AO und ebenso, daß jede Berührende EE gleich ist jedem der kleinen Bogen DD, so mußte man darüber nicht erstaunt sein, da man zur Genüge weiß, daß,

[1]) Klammern im Original.

obwohl diese Gleichheit nicht wirklich statthat, wenn die Menge der Sinus endlich ist, nichtsdestoweniger die Gleichheit statthat, wenn die Menge unbegrenzt (indefinie) ist. Denn dann unterscheidet sich die Summe aller der unter sich gleichen Berührenden EE vom ganzen Bogen BP, oder von der Summe aller der gleichen Bogen DD nur um eine Größe, die kleiner ist als irgendeine gegebene. Dasselbe gilt von der Summe der RR der ganzen (Strecke) AO.

(Es folgen nun die Beweise der Sätze II, III, IV).

S. 67.

Zusatz.

Aus dem ersten Satz folgt, daß die Summe der Sinusversus eines Bogens gleich ist dem Überschuß, um den der Bogen den Abstand zwischen den äußersten Sinus übertrifft, multipliziert mit dem Radius.

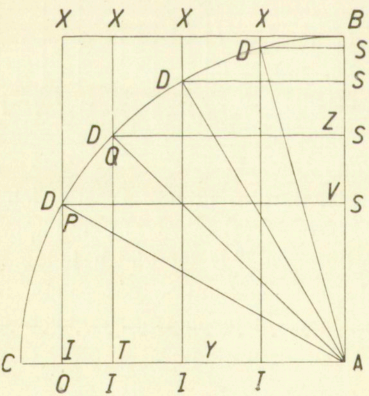


Fig. 19.

Ich sage (Fig. 19), daß die Summe der Sinusversus DX gleich ist dem Überschuß, um den der Bogen BP die Gerade AO übertrifft, multipliziert mit AB.

Denn die Sinusversus sind nichts anderes als die Überschüsse, um die der Radius die geraden Sinus übertrifft. Also ist die Summe der Sinusversus DX dasselbe wie der Radius AB, ebenso oft genommen, d. h. multipliziert mit allen den kleinen gleichen Bogen DD, d. h. multipliziert mit dem ganzen Bogen BP, vermindert um die Summe der geraden Sinus DI, oder das Rechteck aus BA und AO. Und infolgedessen ist die Summe der Sinusversus DX

gleich dem Rechteck aus dem Radius AB und der Differenz zwischen dem Bogen BP und der Geraden AO.

Erläuterungen. Da Pascal selbst alles erklärt und seine Darlegungen sehr durchsichtig sind, wird man ohne weiteres verstehen, was er sagt. Ich habe hier nur den tieferen Sinn und die Tragweite dieser kleinen Stellen zu erläutern. Zuerst sei das Ungünstige über Pascal gesagt, was hier zu sagen ist. Pascal hat aus Descartes' Geometrie, die schon seit 1637 in der Landessprache und seit 1649 auch lateinisch vorlag (s. III. Bdchn., S. 23), nicht gelernt algebraisch zu rechnen. Er drückt also noch wie Archimedes alles in Worten aus. Hier war sogar Fermat moderner, der gewiß noch sehr am Alten hing (s. III. Bdchn., S. 15 f.). Dann hätte Pascal in Descartes' Geometrie auch die Indexbezeichnung $1E$, $2E$, $3E$ lernen können, die seiner Darstellung ebenfalls zugute gekommen wäre.

Setzen wir nun Pascals Ausführungen in unsere Sprache um, so haben wir zunächst die Gleichung

$$DI \cdot EE = AB \cdot RR,$$

oder, wenn wir Koordinaten und Differentialschreibweise einführen,

$$y\,ds = r\,dx.$$

Die Integration, die durch den Satz I ausgedrückt wird, ergibt dann

$$\int_0^s y\,ds = r\int_0^x dx. \tag{1}$$

Das ist auf alle Fälle eine bedeutende Vereinfachung, weil das links stehende Integral viel schwerer zu behandeln ist wie das rechts stehende, das einfach rx ergibt, also r^2, wenn man über den ganzen Quadranten integriert.

Führen wir den Winkel $DAB = \varphi$ ein, so ist

$$y = r\cos\varphi,\quad s = r\varphi,\quad x = r\sin\varphi,$$

und wir haben

$$\int_0^\varphi r\cos\varphi\,d\,(r\varphi) = r\int_0^\varphi d\,(r\sin\varphi),$$

oder

$$(2) \qquad \int_0^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{\varphi} d(\sin\varphi) = \sin\varphi,$$

und man hätte durch Einführung des Winkels DAI ebenso

$\int_0^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi$ erhalten können.

Bei derselben Bezeichnung gibt der Zusatz über die Sinusversus das Integral

$$\int_0^{\varphi} (r - r\cos\varphi)\, d(r\varphi) = r(r\varphi - r\sin\varphi),$$

oder einfach

$$(3) \qquad \int_0^{\varphi} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = \varphi - \sin\varphi.$$

Schon diese beiden Deutungen sind ganz hübsch; aber die Pascalschen Sätze bedeuten weit mehr. Ich kann nicht alle die zahlreichen Anwendungen erwähnen, die Pascal selbst auf allgemeine Zylinderhufe und Rotationskörper (und deren Schwerpunkte) macht, sondern will mich in der Hauptsache auf das beschränken, was am Kreisquadranten selbst zu sehen ist, auch wenn es nicht direkt bei Pascal steht, sei es, daß dieser es absichtlich wegließ, sei es, daß es für ihn nur ein unwichtiger Spezialfall war. Alles folgende liegt aber durchaus im Sinne Pascals.

Vor allem ist auf der linken Seite von (1) das, was unter dem Integralzeichen steht, das Drehmoment des Bogenelements in bezug auf die Achse AC, das Integral selbst also das Drehmoment des ganzen Bogens in bezug auf diese Achse. Damit konnte also der Schwerpunkt irgendeines Kreisbogens berechnet werden. Pascal hat den Ausdruck „Moment“ noch nicht. Aber die Sache selbst hatte für den Kreisbogen bereits P. Guldin in seinem Werke „De centro gravitatis“ (Viennae 1634/41), das Pascal bekannt war, gemacht. Hierauf will ich nicht eingehen.

Läßt man den Kreisquadranten um die Achse AC um 90^0 rotieren, so beschreibt EE (oder DD) einen kleinen Streifen, den man als ein Rechteck betrachten kann, das nach der Differentialbezeichnung (bis auf Glieder höherer Ordnung) die Fläche $\frac{1}{2}\pi y\,ds$ hat. Die Gleichung (1) gibt also ohne weiteres die Oberfläche des Kugeloktanten als gleich $\frac{1}{2}\pi r^2$, demnach die Oberfläche der ganzen Kugel gleich $4r^2\pi$. Diese Darstellung ist in viele Elementarbücher übergegangen, und sie war Archimedes noch nicht bekannt. Sonst hätte er sie ohne Zweifel an die Stelle seiner mindestens langwierigen Ausführungen gesetzt. Pascal muß wohl als der Erfinder dieser Methode gelten, wenn er selbst auch gerade die Kugeloberfläche nicht als Beispiel nimmt. Als Leibniz im Jahre 1673, da er noch ein ganz unerfahrener Anfänger in der Mathematik war, auf den Rat von Huygens hin diesen Brief Pascals las, sah er sofort die Tragweite des Hilfsatzes und dehnte ihn ohne weiteres auf die Berechnung der Oberflächen allgemeinerer Rotationsflächen aus. Dies war nun freilich, wie er bald erfuhr, nicht mehr ganz neu. Aber auf das Dreieck EEK, das er bald „charakteristisches Dreieck“ nannte, gründete Leibniz später auch seine Differenzialrechnung. Daß ihm „ein neues Licht“ bei dieser ersten Pascalschen Figur aufgegangen sei, sagt er selbst in einem Brief an Tschirnhaus vom Jahr 1679. Später wandte er aber das charakteristische Dreieck in der Regel in der Form an, die es in der Figur 19 hat[1]).

Natürlich kann man auch sofort das Volumen des Kugeloktanten berechnen, indem man den Kreisquadranten $\frac{1}{4}\pi y^2$ mit dx multipliziert und diese zylindrische Schicht als Elementarteil betrachtet. Es wird dann

[1]) Über die Beziehungen von Leibniz zu Pascal siehe die wichtige Abhandlung von D. Mahnke „Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis“. Abh. Ak. Wiss. Berlin, Jahrg. 1925. phys.-math. Kl., Nr. 1 (64 S. 4^0; S. 37).

$$\tfrac{1}{4}\pi\int_0^r y^2\,dx = \tfrac{1}{4}\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \tfrac{1}{4}\pi\,(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3) = \tfrac{1}{6}\pi r^3,$$

also das Kugelvolumen gleich $\frac{4}{3} r^3 \pi$. Das konnte ja schon Cavalieri machen (s. o. S. 70f.) Es sei nur bemerkt, daß Pascal, wenn er über s integriert, den Bogen BP in gleiche Teile (ds) teilt, wenn er aber über x integriert, AO in gleiche Teile (dx) teilt. Indem Pascal immer genau angibt, welches die kleinen Strecken sind, mit denen er die Indivisibeln multipliziert, kann er die Fehler systematisch vermeiden, die beim reinen Gebrauch von Indivisibeln ersichtlich leicht vorkommen können (s. o. S. 75).

Nun errichtet Pascal noch in den Punkten D überall die Senkrechten zur Ebene des Quadranten, jede gleich y. Verbindet man deren Endpunkte G (Fig. 20, bei Pascal VIII, S. 372, im Wesen) mit den entsprechenden Punkten I, so liegen alle Geraden GI in einer durch AC gehenden unter 45^0 gegen die Grundebene geneigten Ebene, und die Geraden DG selbst bilden einen Zylinder. Es entsteht also ein sog. Zylinderhuf. Dessen Flächenelement ist nach unserer Bezeichnung $y\,ds$, und die Oberfläche des Zylinderhufes ist also eine ganz direkte Versinnlichung für Gleichung (1), d. h. wir erhalten für den über dem Quadranten stehenden Teil einfach r^2. In Figur 20 ist auch der aus der schon oben konstruierten Kugel herausgeschnittene Kreisquadrant DIF eingezeichnet. Dieselbe Figur ergibt sich natürlich beim Querschnitt für ganz beliebige Rotationsflächen, und für diese beweist Pascal so, daß die Oberfläche des entsprechenden Hufes und die des Rotationskörpers sich „wie der Radius zum Viertelkreis" verhalten (VIII, S. 376). Unser Huf und Kugeloktant geben in der Tat das Verhältnis $r^2 : \frac{1}{2} r^2 \pi = 2 : \pi$.

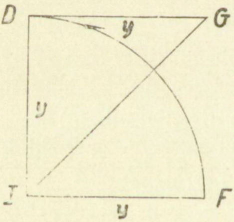


Fig. 20.

Das nämliche Verhältnis gilt aber auch für die Volumina des Hufes und des Rotationskörpers (VIII, S. 376). Für den Rotationskörper ist das Raumelement der Quadrant DIF, multipliziert mit dx, für den Huf ist es das Dreieck DIG, multipliziert mit dx. Die Schnittfiguren sind für jede Lage des Schnittes ähnlich. Für den dem Kreisquadranten entsprechenden Huf erhalten wir

$$V = \tfrac{1}{2}\int_0^r y^2\,dx = \tfrac{1}{3}r^3,$$

der Kugeloktant ist $\frac{1}{6}r^3\pi$, das Verhältnis also wie bei den Oberflächen $2:\pi$.

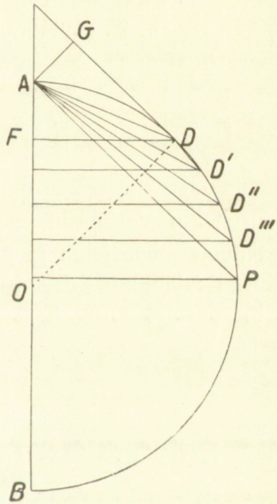


Fig. 21.

Auch das Sinusversusintegral hat Leibniz Anlaß zu bemerkenswerten Verallgemeinerungen gegeben, nämlich zur Zerlegung einer Fläche in kleine Dreiecke, die eine gemeinsame Spitze auf der Kurve haben, statt in kleine Trapeze[1]). Der Gedanke ist so (Fig. 21). Es sei das Segment ADP im Halbkreis ADB vorgelegt. Der Bogen AP ist in gleiche Teile ($DD' = ds$) geteilt. Alle Punkte D werden mit A verbunden; dann ist ein solches Elementardreieck ADD' gleich dem Produkt aus der Grundlinie DD' mit der Höhe AG (DG ist als Tangente in D, also in der Grenze als Verlängerung von DD', gedacht). AG ist aber gleich AF, wie leicht zu sehen, und wenn wir den Winkel AOD gleich φ setzen, so ist $AF = r \operatorname{sinvers} \varphi = r - r\cos\varphi$. Demnach ist

$$\triangle ADD' = \tfrac{1}{2} r \operatorname{sinvers}\varphi\, d(r\varphi), \text{ also}$$

$$\text{Segm. } ADP = \tfrac{1}{2}r^2\int_0^\varphi \operatorname{sinvers}\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2}r^2(\varphi - \sin\varphi),$$

[1]) S. bei Mahnke S. 35.

was für $\varphi = \pi$ sofort den Halbkreis $\frac{1}{2} r^2 \pi$ ergibt. Wie hierauf Leibniz weiterbaute, um schließlich die Kreisfläche durch eine unendliche Reihe auszudrücken, wird in Nr. XVIII ausgeführt werden.

Zum Schluß sei noch gesagt, daß der allgemeine Satz, den Pascal durch die von mir weggelassenen Sätze II, III, IV, „et ainsi à l'infiny" zum Ausdruck bringt, in unserer Sprache lautet:

$$(4) \int_0^{\varphi} \cos^n \varphi \, d\varphi = \int_0^{\varphi} \cos^{n-1} \varphi \, d(\sin \varphi) = \int_0^{\sin \varphi} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx.$$

Der Beweis erfolgt, wie schon die Umformung andeutet, durch ein Verfahren, das wir heute als „Methode der Substitution" bezeichnen würden. Als ganz elementares Beispiel zur Bestätigung der Richtigkeit kann $n = 3$ dienen ($n = 1$ gibt Formel 2).

XV.

Differentiation und Integration als inverse Operationen.

Aus: Lectiones Geometricæ; In quibus (præsertim) Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur. Auctore Isaaco Barrow . . . Londini, . . . M.DC.LXX.

Vorbemerkung. Wie wir zur Genüge gesehen haben, begann die Infinitesimalrechnung, ganz im Gegensatz zur neueren Zeit[1]), mit der Integralrechnung, und zwar mit dem bestimmten Integral. Da vom Altertum bis ins 17. Jahrhundert alles Infinitesimale an die Geometrie anknüpfte (oder in geometrischer Weise an die Mechanik), war der Begriff des unbestimmten Integrals überhaupt nur insofern vorhanden, als man gelegentlich die Grenzen des Integrals beliebig annehmen

[1]) In der neuesten Zeit ist da und dort wieder eine Umkehr zu sehen.

konnte. In Wirklichkeit kommt der Begriff des unbestimmten Integrals erst dann zur Geltung, als die geometrischen Betrachtungen in algebraisches Gewand gekleidet wurden. Das Verdienst, dies getan und damit erst die Infinitesimal-„Rechnung“ erfunden zu haben, gebührt G. W. Leibniz und Isaak Newton. Wie Pascal als Leibnizens eigentlicher Vorgänger gelten darf (s. o. Nr. XIV), so ist Barrow in noch höherem Sinne der Vorgänger Newtons. Bei Barrow aber sind die Hauptsätze noch alle rein geometrisch, wenn er auch manchmal die Descartessche analytische Methode anwendet (die „Symptomata“ des Titels sind die „Gleichungen“ der krummen Linien). In der geometrischen Form enthält nun das Buch Barrows, ganz im Gegensatz zu des Autors Äußerung, der seine Lektionen im Vorwort als „Quisquilien“, kaum der Veröffentlichung wert, bezeichnet, eine vollständige Differential- und Integralrechnung für die einfachsten Funktionen. Die erstere stützt sich durchaus auf das charakteristische Dreieck (s. o. S. 103), das Barrow aus Pascal kennen gelernt haben konnte (s. d. vor. Nummer). Wir entnehmen dem Barrowschen Buch, das 1672 und 1674 in neuen Titelauflagen erschien, zwei der allerwichtigsten Abschnitte, in denen der inverse Charakter von Differential- und Integralrechnung streng bewiesen wird. In dieser Form, für ganz beliebige Kurven, tritt der Satz hier zum erstenmal auf. Bei den höheren Parabeln hatte es schon Torricelli (wohl 1646) erkannt. Im Druck veröffentlicht hat Torricelli aber nur den Fall der gewöhnlichen Parabel in den „Opera geometrica“ von 1644 (s. o. S. 78f.)[1].

Die verwendeten Rechensymbole hat Barrow fast alle aus W. Oughtred's „Arithmeticae in numeris et speciebus institutio, quae . . . totius mathematicae, quasi clavis est“

[1]) S. den Aufsatz von E. Bortolotti im Archivio di Storia della Scienza **6** (1925) S. 150. Opere di E. Torricelli, ed. Loria-Vassura, Faenza 1919, I, 2, S. 309—316.

(London 1631; später öfter als „Clavis mathematicae“[1]) herausgegeben). Es ist vor allem die Proportionsbezeichnung $a.b::c.d$, statt unserer Form $a:b=c:d$, dann das Zeichen ⊏ für unser „größer als“ und ⊐ für „kleiner als“, und das Zeichen $\times$ für „mal“. Auch B a r r o w hat die Indizesbezeichnung aus D e s c a r t e s nicht übernommen (s. o. S. 101), wiewohl er dessen Geometrie gut kannte.

S. 78. Lect. X.

XI. Es sei ZGE irgendeine Linie mit der Achse VD (Fig. 22)[2]). Die auf dieser vorzugsweise errichteten Senkrechten [imprimis applicatae perpendiculares] (VZ, PG, DE)

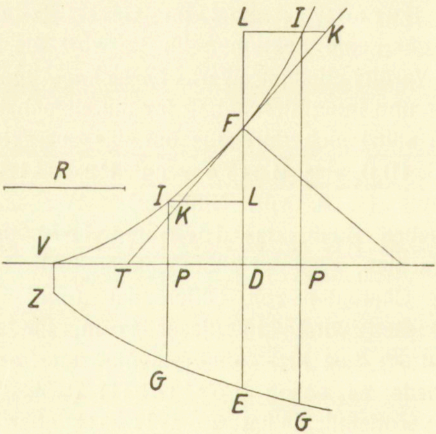


Fig. 22.

sollen von der ersten VZ an ständig irgendwie wachsen. Es sei ferner die Linie VIF derart, daß immer, wenn man irgendeine Gerade EDF senkrecht zu VD zieht (die die Kurven in den Punkten E, F, VD aber in D schneidet),

[1]) Schlüssel der Mathematik.

[2]) In dieser und der nächsten Figur sind kleine Fehler des Originals verbessert.

das Rechteck aus DF und einer gewissen vorgegebenen (Strecke) R gleich ist dem jeweils abgeschnittenen Flächenraum $VDEZ$. Es sei außerdem $DE.DF::R.DT$. Zieht man dann die Gerade TF, so berührt diese die Kurve VIF.

Nimmt man nämlich in der Linie VIF irgendeinen Punkt I (und zwar zuerst links vom Punkt F gegen den Anfangspunkt V hin) und zieht durch ihn die Geraden IG parallel zu VZ und KI parallel zu VD (welche die gegebenen Linien schneiden mögen, wie man sieht), dann ist $LF.LK::(DF.DT::)\,DE.R$, oder $LF \times R = LK \times DE$.

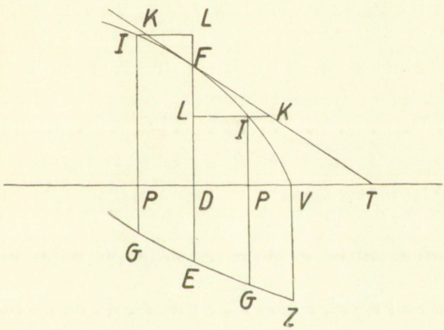


Fig. 23.

Es ist aber (gemäß der angenommenen Natur jener Linien) $LF \times R$ gleich der Fläche $PDEG$. Also ist $LK \times DE = PDEG \sqsupset DP \times DE$. Daraus folgt, daß $LK \sqsupset DP$ oder $LK \sqsupset LI$.

Man nehme hierauf irgendeinen Punkt I, rechts vom Punkt F, und alles übrige mache man wie soeben. Dann kann man durch eine ganz ähnliche Überlegung folgern, daß $LK \times DE = PDEG \sqsubset DP \times DE$, und folglich ist $LK \sqsubset DP$, oder als LI. Hieraus geht ohne weiteres hervor, daß die ganze Gerade $TKFK$ innerhalb (oder außerhalb) der Kurve $VIFI$ liegt.

Wenn alles übrige bleibt, die Ordinaten (ordinatae) VZ, PG, DE usw. aber beständig abnehmen (Fig. 23), wird man durch ähnliche Schlüsse zu demselben Ergebnis geführt. Es tritt nur der einzige Unterschied auf, daß in diesem Fall (entgegengesetzt dem vorigen) die Linie VIF ihre konkave Seite der Achse VD zuwendet.

Zusatz. Es sei bemerkt, daß $DE \times DT$ gleich ist der Fläche $VDEZ$.

Erläuterungen. Den Text Barrows zu erläutern, ist bei seiner Klarheit kaum nötig. Es ist natürlich zu denken, daß DP nach links und rechts recht klein genommen werden soll. Dann ist KLF (das mit ILF in der Grenze zusammenfällt) als das charakteristische Dreieck zu betrachten, und das Tangentenproblem besteht darin, das Verhältnis $FL : KL$ der kleinen Zuwächse beim Übergang zur Grenze zu finden. Das hat Barrow tatsächlich von S. 81 an an mehreren Bespielen auch algebraisch durchgeführt. Die Tangente war bestimmt, wenn zur Ordinate FD die Subtangente DT gefunden war. Setzen wir $VD = x$, $DE = z$, $DF = y$, $R = 1$, und sei die Gleichung der Kurve ZGE $z = f(x)$, so ist immer

$$\text{Fl. } VDEZ = \int_0^x z\,dx = y \cdot 1 = y.$$

Das ist die Voraussetzung. Dabei ist DP $(= LI \approx LK)$ $= dx$, $FL = dy$. Es folgt dann daraus $z\,dx = dy$, (d. h. $FL \times R \approx \text{Fl. } PDEG$). Außerdem ist $DT \cdot z = y$, aso die Subtangente

$$DT = y : \frac{dy}{dx}.$$

Durch die Integration der unteren Kurve ist also die Differentiation der oberen gegeben. Lassen wir alle geometrische Einkleidung weg, so folgt einfach aus $y = \int_0^x z\,dx$ die Gleichung $\frac{dy}{dx} = z$. Das ist der uns geläufige Zusammenhang zwischen

Differenzieren und Integrieren. Barrow begnügt sich aber nicht mit dieser Feststellung, sondern beweist etwas später denselben Satz noch in umgekehrter Reihenfolge.

S. 90. Lect. XI.

XIX. Ferner, sei AMB irgendeine Kurve mit der Achse AD (Fig. 24) und BD sei senkrecht zu letzterer, außerdem sei die Linie KZL derart, daß, wenn man in der Kurve AB irgendeinen Punkt M nimmt und durch ihn die Gerade MT zieht, die die Kurve AB berührt, und die Gerade MFZ parallel zu DB (welche die Linie KL in Z, die Gerade AD in F schneiden möge) und wenn eine gewisse Linie R gegeben ist,

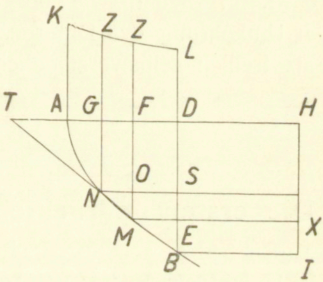


Fig. 24.

dann sei $TF.FM::R.FZ$, so ist die Fläche $ADLK$ gleich dem Rechteck aus R und DB.

Denn sei $DH = R$, und es werde das Rechteck $BDHI$ vervollständigt. Hierauf nehme man auf der Kurve AB das unbegrenzt (indefinitè) kleine Stückchen MN an und ziehe NG parallel zu BD, und MEX, NOS parallel zu AD. Dann ist $NO.MO::TF.FM::R.FZ$, oder $NO \times FZ = MO \times R$, d. h. $FG \times FZ = ES \times EX$. Da nun alle Rechtecke $FG \times FZ$ beliebig wenig (minimè) sich von der Fläche $ADLK$ unterscheiden, und alle entsprechenden Rechtecke $ES \times EX$ das Rechteck $DHIB$ zusammensetzen, wird die Behauptung hinreichend deutlich.

Erläuterungen. Hier brauche ich noch weniger zu sagen als vorher. Das charakteristische Dreieck tritt noch deutlicher in die Erscheinung. Von der Kurve AMB ist $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{TF}$ gegeben, und bei der Kurve KZL ist immer

$ZF = z = \frac{dy}{dx}$. Dann folgt, daß $\int\limits_0^x z\,dx = y$ ist. Das ist genau das obige. Bei dieser Ableitung sieht man noch weit besser, daß es sich um die Ableitung aus einem bestimmten Integral handelte, was bei dem ersten Verfahren weniger in die Augen fällt. Dieser Umstand machte aber damals die Sache schwierig. Wenn wie bei uns das unbestimmte Integral aus der Umkehrung des Differenzierens definiert wird, dann ist der Satz freilich selbstverständlich.

XVI.

Die ersten gedruckten Regeln für das Differenzieren.

Aus dem Aufsatz von Leibniz: „Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, per G. G. L." Acta eruditorum anno MDCLXXXIV publicata. Lipsiae. Anno MDCLXXXIV. S. 467–473. — Abgedruckt in „Leibnizens mathematische Schriften", herausgeg. von C. I. Gerhardt, I. Abth., Bd. IV (= Leibnizens Ges. Werke, herausgeg. von G. H. Pertz, 3. Folge: Mathematik, 4. Bd.), Halle 1859, S. 220—226. — Deutsch von Gerhard Kowalewski in Ostwalds Klassikern, Nr. 162, Leipzig 1908, S. 3–11.

Vorbemerkung. Als Leibniz im Frühjahr 1673 zu Paris von Huygens dessen eben erschienenes Werk über die Pendeluhr „Horologium oscillatorium" (Parisiis 1673), das ebenfalls wichtige Entdeckungen auf dem Gebiet der Infinitesimalgeometrie enthielt, zum Geschenk erhielt, merkte er erst, wie wenig er von Mathematik, mit der er sich bis dahin nur gelegentlich beschäftigt hatte, verstand. Huygens empfahl ihm geeignete Bücher, insbesondere die Schriften von Pascal (s. o. S. 96f.). Leibniz studierte jetzt erst die Geometrie von Descartes (s S. 101) und vertiefte sich mehr in die Geometrie der Indivisibeln von Cavalieri (s. o. S. 70f.). Auch aus

Schriften von Wallis[1]) lernte er viel. Im Okt/Nov. 1675 hatte er die heute übliche Methode der Differential- und Integralrechnung (einschließlich der Bezeichnung) erfunden, wenigstens dem Wesen nach. Später lernte er dann auch die Arbeiten der Engländer J. Gregory, I. Barrow und auch einiges von Newton kennen. Er fand in diesen Arbeiten manche seiner eigenen Entdeckungen wieder. Auf diesen Grundlagen baute er weiter, soweit ihm seine vielfachen diplomatischen Geschäfte Zeit ließen. In Gesprächen, insbesondere mit Tschirnhaus, sickerte manches von seinen Entdeckungen durch, und um sich vor geistiger Ausbeutung zu schützen, entschloß sich Leibniz im Jahre 1684 im dritten Jahrgang der kurz vorher gegründeten Gelehrten-Zeitschrift „Acta Eruditorum“ zunächst einen Artikel über seine Differentialrechnung zu veröffentlichen („Neue Methode für die Maxima und Minima und für die Tangentenbestimmung, die weder vor den gebrochenen noch vor den irrationalen Größen Halt macht, und eine besondere Rechnungsart dafür“). Dieser ist allerdings so knapp[2]) und mit vielen Fehlern (nicht bloß Druckfehlern, sondern schlimmen Flüchtigkeitsfehlern von Leibniz selbst) gleich im Anfang behaftet, daß nicht ganz Eingeweihte schwer daraus klug werden konnten. Der Artikel erregte auch keineswegs das Aufsehen, das er verdient hätte, und wurde lange Zeit kaum beachtet. Die Hauptsache war, daß Leibniz mit seiner Methode, was er schon im Titel hervorhebt, auch Brüche und Wurzelausdrücke ohne weiteres differenzieren, und daß man die Methode sogar auf transzendente Funktionen anwenden konnte. Das letztere wird besonders in einer ergänzenden Abhandlung, die Leibniz im Jahre 1686 in denselben Acta

[1]) Bes. aus der „Arithmetica Infinitorum“ (Oxonii 1656).

[2]) Diese Knappheit war wohl nicht ohne Absicht. Es sind in Leibniz' Nachlaß mindestens zwei Entwürfe vorhanden, die viel leichter verständlich gewesen wären. Einer davon wurde von C. I. Gerhardt abgedruckt in seinem Buche „Historia et Origo Calculi Differentialis a G. G. Leibnitio conscripta“, Hannover 1846.

Eruditorum[1]) erscheinen ließ „De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum“ (Über die tiefer liegende Geometrie und die Analysis der Indivisibeln und der unendlichen Größen) ausgeführt[2]). Für (algebraische) Kurven, die durch rationale ganze Funktionen $f(x, y) = 0$ dargestellt waren, konnte man ja schon seit Fermat und Descartes (s. o. S. 92f.) höchste und tiefste Punkte, wie die Tangenten, bestimmen.

S. 467. Es seien gegeben die Achse AX und mehrere Kurven wie VV, WW, YY, ZZ (Fig. 25), dann deren zur Achse senkrechten Ordinaten (ordinatae) VX, WX, YX, ZX, die wir bezüglich v, w, y, z nennen; das von der Achse abgeschnittene Stück (abscissa ab axe) nennen wir x. Tangenten seien VB, WC, YD, ZE, die die Achse bzw. in den Punkten B, C, D, E treffen mögen. Nun bezeichnen wir eine beliebig angenommene Gerade [Strecke] mit dx, und eine andere, die sich zu dx verhält, wie v (oder w, oder y, oder z) zu XB (oder XC, oder XD, oder XE)[3]), nennen wir dv (oder dw, oder dy, oder dz) oder die Differenz (differentia) der v (oder der w, oder der y, oder der z). Nach diesen Annahmen sind die Regeln der Rechnungsart (calculus) die folgenden.

Es sei a eine gegebene konstante Größe, so ist da gleich 0 und $d\,ax$ ist gleich $a\,dx$. Wenn y gleich v wird (oder jede Ordinate der Kurve YY gleich der ent-

---

[1]) S. 292—300. Math. Schriften II, 1 (= 5. Bd.). S. 226—233. Nicht bei Kowalewski.

[2]) Hier führt er (freilich nur andeutend) die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung ein, worauf er von anderer Seite her als Barrow gekommen war, und auch sein „charakteristisches Dreieck“ (s. o. S. 103) tritt in der Öffentlichkeit hier zum erstenmal auf.

[3]) Hier steht im Original: VB (oder WC, oder YD, oder ZE)!! Schon bei Gerhardt sind diese Fehler verbessert. Doch hat Gerhardt die Indizes der Figur, die auf Descartes' Geometrie (1637) zurückgehen, nicht ganz richtig wiedergegeben.

sprechenden Ordinate der Kurve VV), so ist dy gl.[1]) dv. Ferner die *Addition* und *Subtraktion:* Wenn $z - y + w + x$ gl. v, so ist $d\,\overline{z - y + w + x}$ oder dv gl. $dx - dy + dw + dx$. Die *Multiplikation,* $d\,\overline{xv}$ gl. $xdv + vdx$, oder

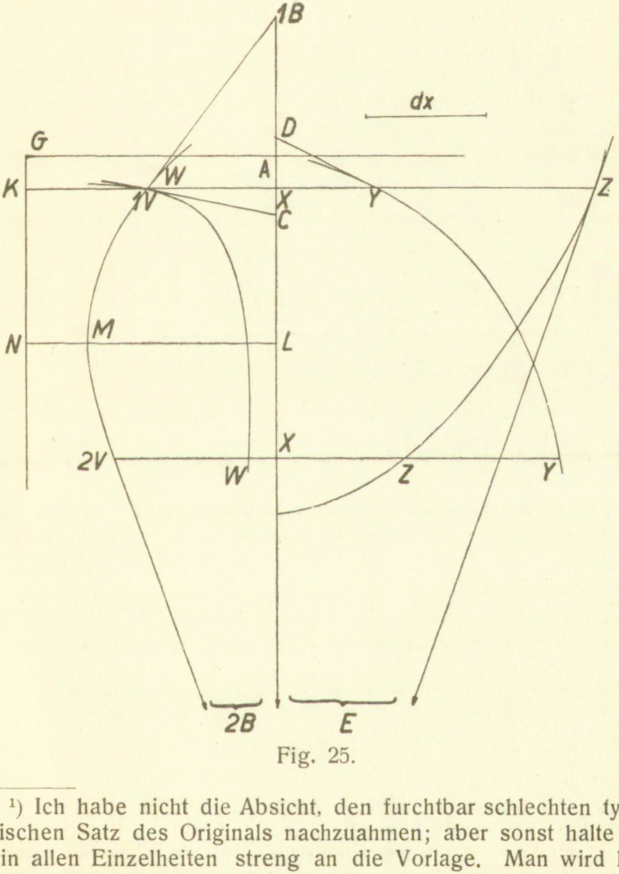


Fig. 25.

[1]) Ich habe nicht die Absicht, den furchtbar schlechten typographischen Satz des Originals nachzuahmen; aber sonst halte ich mich in allen Einzelheiten streng an die Vorlage. Man wird hier z. B. bemerken, daß L e i b n i z, obwohl er das Gleichheitszeichen später oft benutzt, doch auch im laufenden Text gern noch in alter Weise „aequalis“ und „aequ.“ schreibt.

wenn man y gl. setzt $x v$, so ist $d y$ gl. $x d v + v d x$. Man kann nämlich nach Belieben entweder die Formel, wie $x v$, oder als Abkürzung für sie einen Buchstaben, wie y, nehmen. Es sei bemerkt, daß bei dieser Rechnungsart x und $d x$ in derselben Weise behandelt werden, wie y und $d y$, oder wie ein anderer unbestimmter Buchstabe mit seinem Differential (cum sua differentiali). . . . Ferner die *Division*, $d \frac{v}{y}$, oder (wenn man z gl. $\frac{v}{y}$ setzt) $d z$ gl. $\frac{\pm v d y \mp y d v}{y y}$[1]).

. . . .

S. 469. *Potenzen* (Potentiae): $d x^a = a x^{a-1} d x$, z. B. $d x^3 = 3 x^2 d x$. $d \frac{1}{x^a} = \frac{-a d x}{x^{a+1}}$, z. B. wenn w ist $= \frac{1}{x^3}$, so wird $d w = \frac{-3 d x}{x^4}$. *Wurzeln*, $d \sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} d x \sqrt[b]{x^{a-b}}$ (hieraus $d \sqrt[2]{y} = \frac{d y}{2 \sqrt[2]{y}}$; denn in diesem Fall ist a [gleich] 1 und b [gleich] 2, also $\frac{a}{b} d x \sqrt[b]{x^{a-b}}$ gleich $\frac{d y}{2} \sqrt[2]{y^{-1}}$; nun ist aber y^{-1} dasselbe wie $\frac{1}{y}$ aus der Natur der Exponenten der geometrischen Reihe, und $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ ist $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$). $d \frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-a d x}{b \sqrt[b]{x^{a-b}}}$[2]). Es hätte aber die Regel für ganzzahlige Potenzen genügt, um sowohl die Brüche als die Wurzeln zu bestimmen. Denn

---

[1]) Die Vorzeichenverschiedenheit kommt bei Leibniz davon her, daß er auf der x-Achse keine positive Richtung hat, oder wie wir auch sagen können, alle Subtangenten, mögen sie nach oben oder nach unten gerichtet sein, positiv nimmt. Er muß daher in der Folge auch eine größere Erörterung über die Vorzeichen machen.

[2]) Dieser Ausdruck ist im Original ganz falsch. Auch sonst sind mehrere kleinere Fehler des Originals oben einfach verbessert. In damaliger Zeit mußten aber diese Fehler zur Unverständlichkeit führen.

eine Potenz wird gebrochen, wenn der Exponent negativ ist und sie verwandelt sich in eine Wurzel, wenn der Exponent gebrochen ist. . . .[1])

Hat man so den *Algorithmus,* wenn ich so sagen darf, dieser Rechnungsart, die ich die *differentiale* nenne[2]), kennen gelernt, so können alle anderen Differentialgleichungen [aequationes differentiales] durch das allgemeine Rechenverfahren gefunden werden, und man kann die Maxima und Minima sowie die Tangenten erhalten, so zwar, daß es nicht nötig ist, die Brüche oder Irrationalitäten oder andere Zusammenfassungen[3]) wegzuschaffen, was man doch nach den bisher bekannt gegebenen Methoden tun mußte[4]). Der Beweis von dem allen wird einem in diesen Dingen Geübten leicht fallen, wenn er nur den bisher noch nicht hinreichend gewürdigten Umstand in Betracht zieht, daß die dx, dy, dv, dw, dz als den Differenzen oder den momentanen Zunahmen [Incrementen] oder Abnahmen [Decrementen] der x, y, v, w, z proportional angesehen werden können. Da-

[1]) Leibniz betont noch weiter die Wichtigkeit dieser allgemeinen Fassung der Potenz, die zwar damals, auch in der Schreibweise, nicht mehr ganz neu, aber doch den meisten noch recht fremd und ungewohnt war.

[2]) Also „calculus differentialis“ = Differentialrechnung. Für die entgegengesetzte Rechnungsart sagte Leibniz ursprünglich, ganz entsprechend ihrer Entstehung, „calculus summatorius“, nahm aber, nachdem die Brüder Bernoulli das Wort „integrale“ (das „Ganze“, als aus den Teilchen zusammengesetzt gedacht) von 1691 an eingeführt hatten, nach einigen Verhandlungen selbst diesen Ausdruck an.

[3]) „Alia vincula“. „Vinculum“ heißt eigentlich der Wurzelstrich, den Descartes zur Zusammenfassung des Radikanden eingeführt hatte. Hier meint Leibniz „Klammerausdrücke“. Das sind eben „andere vincula“. Er gebraucht ja auch den Wurzelstrich statt der Klammern. Kowalewski hat auf S. 6, Z. 6 v. u. und S. 8 Z. 7 v. u. ganz unmögliche Übersetzungen.

[4]) Daß unterdessen Newton längst dasselbe erreicht hatte, konnte Leibniz mangels Veröffentlichungen noch nicht wissen.

her kommt es, daß man zu jeder vorgegebenen Gleichung ihre Differentialgleichung anschreiben kann. . . .

(470) . . . Es ist offenbar, daß unsere Methode sich auch auf die transzendenten Linien erstreckt, die sich auf algebraische Gleichungen nicht zurückführen lassen, oder die keinen bestimmten Grad haben, und zwar das in der allgemeinsten Weise . . ., wenn man nur allgemein daran festhält, daß eine *Tangente* zu finden heißt, eine Gerade zu ziehen, die zwei Kurvenpunkte verbindet, welche eine unendlich kleine Entfernung haben, oder die verlängerte Seite des unendlich-vieleckigen Polygons [zu ziehen], das für uns mit der Kurve gleichbedeutend ist.

Erläuterungen. Wir sehen hier, daß dx, die „Differenz" oder das „Differential" der Abszisse, gleich einer endlichen vorgegebenen Strecke ist; ebenso sind dann dy und die anderen Differentiale endliche Strecken. Das dx ist nichts anderes als die Pascalsche „Einheit" (s. o. S. 104), die beliebig klein zu denken ist. Das sagt freilich Leibniz so wenig wie Archimedes (s. o. S. 21). Das Wesentliche ist, daß diese so definierten Differentiale den „momentanen Incrementen" proportional gesetzt werden, die entstehen, wenn man von einem Kurvenpunkt zum „unendlich benachbarten" übergeht. Später haben dann Leibniz und seine Nachfolger diese Incremente selbst mit dx, dy usw. bezeichnet. Das hat ihnen schon damals und später viele Vorwürfe eingetragen, die nicht immer berechtigt waren. Denn was Leibniz meinte (und in anderer Form auch Newton; s. u. S. 122), war genau dasselbe, was wir meinen, wenn wir zur Grenze übergehen. Es mußte nur für diese der Antike gegenüber neue Vorstellung erst die exaktere Ausdrucksweise gefunden werden, und man mußte sich auch erst an die Berechtigung des Überganges zur Grenze gewöhnen. Schon Fermat ließ, wie wir sahen (o. S. 86), mit Bewußtsein die indirekten Beweise der Antike weg, als etwas, das man jederzeit dazu machen könne, und Leibniz blieb sich, bei allen Spekulationen seiner Monadenlehre, immer bewußt, ein Fortsetzer der Archimedischen Gedanken zu sein.

Als einen wichtigen Punkt seiner Erfindung bezeichnet Leibniz in einem hier weggelassenen Abschnitt noch die Einführung der Größe dy. Seine Vorgänger hätten bei Tangentenbestimmungen immer nur die Subtangente betrachtet [hier etwa DX], und nicht das Differential dy, das die vierte Proportionale bildet zu DX, y, dx. Es ist wirklich $DX:y = dx:dy$, oder $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{DX}$ (vgl. o. S. 110). Das war eben die zweite wichtige Erkenntnis, die Leibniz aus dem „charakteristischen Dreieck" gewonnen hatte (die erste s. o. S. 103). In der obigen Darstellung kommt das nur nicht zum Ausdruck, weil eben die Ableitungen fehlen, und das charakteristische Dreieck gar nicht gezeichnet ist.

XVII.

Die unendlichen Reihen für Arcussinus, Sinus und Kosinus.

Aus der Abhandlung Isaak Newtons „De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas". Zum erstenmal gedruckt in dem Büchlein des Titels „Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis. Londini: Ex Officina Pearsoniana. Anno M.DCC.XI. S. 1—21. Der Herausgeber dieser Sammelschrift Newtonscher Abhandlungen und Briefe ist, wie aus der Unterschrift der Vorrede hervorgeht, W. Jones. Es gibt eine zweite Ausgabe dieses Buches, die zu Amsterdam 1723 erschien. Leichter zugänglich ist die Abhandlung in „Isaaci Newtoni, equitis aurati, Opuscula mathematica, philosophica et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit Joh. Castillioneus jurisconsultus". Tomus primus. Continens Mathematica . . . Lausannae & Genevae, ... MCCXLIV. Dort S. 1—28. Engl. Übers. von John Stewart. London 1745.

Vorbemerkung. Diese „Analysis durch Gleichungen, deren Gliederzahl unendlich ist", ist die erste Schrift Newtons zur Infinitesimalrechnung. Sie entstand um 1666. Im Druck herausgegeben wurde sie aber (wie alle rein mathematischen Werke Newtons) erst sehr spät nach ihrer Abfassung. Freilich war die Schrift schon 1669 bei Collins hinterlegt worden, wo man sie einsehen konnte, und im Jahre 1685 hatte Wallis ihren Hauptinhalt in englischer Sprache seiner „Algebra“ einverleibt (lat. in den Opera, Bd. II, Oxford 1693, im Kap. 95).

Newton zeigt sich in dieser Erstlingsarbeit, die schon alle Keime der späteren Arbeiten in sich trägt, einerseits als Schüler Barrows (s. S. 106f.), andrerseits hatte er aus Wallis' „Arithmetica infinitorum“ (Oxonii 1656) gelernt. Über beide geht er aber weit hinaus. War Barrow noch der reine Geometer, der nur gelegentlich die Descartesschen Gleichungsformen benützte, so war Wallis (wenigstens 1656) noch reiner Arithmetiker, der durch numerische „Interpolationen“ geschickter Art zu einer großen Zahl von Grenzwerten (Integralen) gelangte. Beiden gegenüber ist Newton von vornherein Algebraiker. Seine Resultate sind daher auf den ersten Schlag von der größten Allgemeinheit. Der Umkehrungssatz (s. Nr. XV), der bei Barrow nicht viel mehr als ein einzelner Satz war, wird ihm sofort zu einer Methode, die Wallissche interpolatorische Findigkeit führt ihn dazu, Divisionen und Radizierungen auch auf Ausdrücke anzuwenden, wo die Operationen nicht aufgehen, so daß „Gleichungen mit unendlicher Gliederzahl“, oder wie wir sagen „unendliche Reihen“ entstanden. Diese Reihen setzte er als Funktionen von x gleich y (oder z), so daß sie ihm Kurven darstellten. Die Flächen dieser Kurven bestimmte er, indem er die Reihen gliedweise integrierte. Im Druck erschien diese Methode zuerst bei Nik. Merkator in dessen „Logarithmotechnia“ (London 1668), aber viel unvollkommener und nur an einem einzigen Beispiel, und im gleichen Jahr an einem ähnlichen Beispiel in einer Abhandlung Lord Brounckers in den Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Diese Methode und Newtons großartige Anwendungen erregten aber ebensowenig Aufsehen, wie das bei Leibnizens Differentialrechnung der Fall gewesen war (s. o. S. 113). Leibniz, der 1676 durch Briefe davon erfuhr, und im Herbst dieses Jahres die Abhandlung schließlich selbst einsehen konnte, hatte natürlich großes Interesse dafür, war aber unterdessen selbst zu den entscheidenden Ergebnissen (auch zur allgemeinen Reihenentwicklung) auf anderen Wegen gelangt[1]).

S. 19. *Längen von Kurven zu finden.*

Es sei (Fig. 26) $ADLE$ ein Kreis, von dessen Bogen AD die Länge zu finden ist. Zieht man die Tangente DHT, und zeichnet man das unbegrenzt (indefinite) kleine

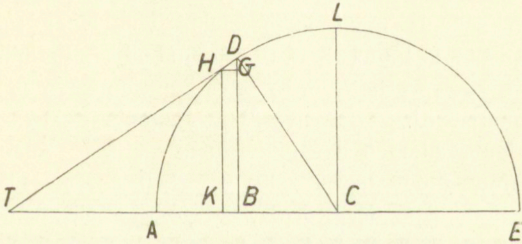


Fig. 26.

Rechteck $HGBK$, indem man $AE = 1 = 2AC$ setzt, so verhält sich, wie BK, oder GH, das Moment (momentum) der Basis AB (x), zu HD, dem Moment des Bogens $AD :: BT : DT :: BD\ (\sqrt{x - xx}) : DC\ (\tfrac{1}{2}) :: 1\ (BK) : \dfrac{1}{2\sqrt{x - xx}}\ (DH)$. Daher ist $\dfrac{1}{2\sqrt{x - xx}}$ oder $\dfrac{\sqrt{x - xx}}{2x - 2xx}$

[1]) Ich halte mich auch in der folgenden Wiedergabe treu an meine Vorlage, kann aber naturgemäß nicht verbürgen (da über die Manuskripte Newtons nicht viel Sicheres bekannt ist), daß Newton selbst im Jahre 1665 genau so schrieb. Es besteht jedoch keine Unmöglichkeit, daß dies der Fall war. Das gilt auch für die ganz allgemeinen negativen und gebrochenen Buchstabenexponenten, die in anderen Teilen der Abhandlung vorkommen (s. o. S. 117, Fußn. 1).

das Moment des Bogens AD. Das gibt reduziert[1])
$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$, &c.
Daher ist, nach der zweiten Regel[2]), die Länge des Bogens AD
$x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$, &c.
oder $x^{\frac{1}{2}}$ mal $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, &c. Nicht anders findet man, wenn man CB gleich x nimmt, und den Radius CA gleich 1 setzt, daß der Bogen LD gleich ist $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c.

Es ist aber zu bemerken, daß jene Einheit, die als Moment genommen wird, eine Fläche ist, wenn es sich um Körper, und eine Linie, wenn es sich um Flächen, und ein Punkt, wenn es sich um Linien (wie in diesem Beispiel) handelt.

Ich scheue mich auch nicht, von einer Punkteinheit (de unitate in Punctis), d. h. von unendlich (infinite) kleinen Linien zu sprechen, da doch die Geometer dabei schon [geometrische] Verhältnisse[3]) in Betracht ziehen, wenn sie von den Methoden der Indivisibeln Gebrauch machen.

Daraus möge man Schlüsse ziehen auf die Flächen und die Rauminhalte der Körper, sowie auf die Schwerpunkte.

S. 22.

. . . . . .

Auffindung der Basis aus der gegebenen Kurvenlänge.

Wenn (Fig. 27) aus dem gegebenen Bogen aD der Sinus AB gewünscht wird, so erhält man aus der oben gefundenen Gleichung $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. (wobei $AB = x$, $aD = z$, und $Aa = 1$ gesetzt ist) durch Ausziehen der Wurzel[4]) $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

[1]) D. h. wenn man die Wurzel auszieht und dann durch $2x - xx$ dividiert.

[2]) D. h. wenn man gliedweise integriert.

[3]) Das ist offenbar ein Hinweis auf Euklid V, Def. 4 (s. o. S. 2).

[4]) Das bedeutet hier allgemein: „Auflösung der Gleichung" nach x, wenn z gegeben ist.

Und außerdem, wenn man den Kosinus $A\beta$ aus jenem gegebenen Bogen wünscht, so mache man $A\beta\,(=\sqrt{1-xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

Erläuterungen. In diesen zwei zusammengehörigen kurzen Absätzen ist soviel von der ganzen Infinitesimalrechnung enthalten, daß ich mit Anmerkungen äußerst sparsam sein muß, um nicht zuviel Raum zu verbrauchen. Vor allem kann ich die Rechnungen nicht ausführen, die ja auch Newton dem Leser überläßt. Wir sehen, daß er sofort erkannte (wie übrigens auch Leibniz), daß die Integration nicht bloß Flächen (Quadraturen) liefert, sondern ganz allgemein auch Kurvenlängen (Rektifikationen), wofür er hier das nächstliegende Beispiel gibt, Oberflächen von Körpern (Komplanationen) und Schwerpunkte aller Art. Man lese die Schlußbemerkung des ersten Absatzes. Newton geht (im Wesen) von demselben „charakteristischen Dreieck“ aus, das wir bei Pascal sahen und das bei Barrow wiederkehrt (s. o. S. 96f.). Er ergänzt die Figur (eigentlich unnötigerweise) durch die Barrowsche Subtangente. Newton nennt „Moment“ (momentum), was Leibniz Differential nannte (s. o. S. 118), und er bezeichnet dieses Moment ausdrücklich und „ohne Scheu“ als eine unendlich kleine Strecke oder einen „Punkt“. Damit sind wir gleich wieder mitten in der schwierigen Frage der „Atomlinien“ (s. Nr. IV), und Newton steht auf dem Standpunkt des Xenokrates! Das gab natürlich den Philosophen sofort Angriffspunkte. Nachdem Newton gesehen hatte, daß Leibnizens Differentiale solchen Angriffen ausgesetzt waren, wurde er vorsichtiger, und in der Abhandlung „Über die Quadratur der Kurven“, die 1704 als Anhang zur „Optik“ zum erstenmal gedruckt wurde, beginnt er ausdrücklich damit, zu erklären, er betrachte die mathematischen Größen nicht als aus äußerst

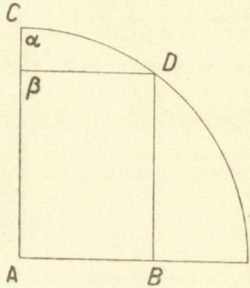


Fig. 27.

kleinen Teilen bestehend, sondern als durch stetige Bewegung beschrieben. Es handelte sich aber auch bei Newton, wie wir schon bei Leibniz hervorgehoben haben, um nichts anderes als um den Übergang zur Grenze, für den man eben noch keine logisch einwandfreie Form gefunden hatte. Das Moment setzt Newton dann gleich 1, was auch Leibniz ursprünglich getan hatte, bis er die Mängel dieses Verfahrens einsah.

Schreiben wir das Ganze in unseren Zeichen, so ist, wenn wir noch $BD = y$ setzen, $HG = dx$, $GD = dy$, $HD = ds$, und die Gleichung des Kreises lautet, auf A als Anfangspunkt bezogen, $y^2 = x - x^2$. Dann ist

$$ds : dx = \tfrac{1}{2} : y, \text{ also}$$

(1)
$$ds = \frac{dx}{2\sqrt{x - x^2}}$$
$$= dx\left(\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \ldots\right),$$

(2)
$$\text{arc}\, AD = s = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \ldots\right).$$

Nimmt man aber C als Anfangspunkt, so daß $CB = x$ und $CD = 1$ (alles in der Fig. 26), so ist $y^2 = 1 - x^2$ die Gleichung des Kreises, und es ist

(3)
$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \ldots,$$

(4)
$$\text{Bogen}\, LD = s = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= \text{arc sin}\, x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \ldots$$

Dies läßt sich mit der Bezeichnung in der Fig. 27 leicht in Einklang bringen.

Nun kommt die sog. „Reihenumkehrung“. Newton bricht die Reihe ab und setzt z. B.

(5)
$$s = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5.$$

Hieraus bestimmt er x^6 mittels der nach ihm benannten Näherungsmethode (s. d. I. Bdchn., Nr. XXIII), die er ebenfalls in der vorliegenden Abhandlung auseinandersetzt. Er führt auch ein Beispiel für die Reihenumkehrung aus, aber nur eines und das sehr knapp. Hier wäre folgendermaßen zu verfahren. Wir setzen in (5)

$$x = s + p.$$

Dann erhält man

(6) $$0 = p + \tfrac{1}{6}(s^3 + 3s^2p + \ldots) + (s^5 + \ldots).$$

Man denkt sich nun (5) zunächst für sehr kleine x entwickelt, dann ist auch s und damit auch p sehr klein. In Gleichung (6) sind jetzt die niedrigsten Glieder in s und p zu nehmen, die Glieder mit höheren Potenzen aber zu vernachlässigen. Welches aber diese Glieder sind, ist hier keineswegs so einfach zu sehen, wie bei Gleichungen mit bestimmten Koeffizienten. Newton hat diese Schwierigkeit hier nicht näher erläutert, erst in dem Brief von 1676 tut er das und in späteren Schriften. Es ist das die Methode, die zum sogenannten „Newtonschen Parallelogramm" geführt hat. Da ich hierauf nicht eingehen kann[1]), sei kurz folgendes gesagt. Da p gleich einer Potenz von s zu setzen ist, versucht man zuerst $p = As^2$; das gibt aber $A = 0$. Hierauf nimmt man $p = Bs^3$. Dann sind die beiden niedrigsten Glieder der Gleichung (6) p und $\frac{1}{6}s^3$ (alle anderen geben höhere Potenzen von s), und man erhält $B + \frac{1}{6} = 0$, oder $B = -\frac{1}{6}$, d. h. $p = -\frac{1}{6}s^3$,

$$x = s - \tfrac{1}{6}s^3.$$

Nun setzt man weiter

$$p = -\tfrac{1}{6}s^3 + q;$$

das gibt in der Gleichung (6)

(7) $$0 = q + \tfrac{1}{6}(-\tfrac{1}{2}s^5 + \ldots) + \tfrac{3}{40}(s^5 + \ldots),$$

während alle weggelassenen Glieder höherer Ordnung sind. Es ist daher zu nehmen

(8) $$q = \tfrac{1}{12}s^5 - \tfrac{3}{40}s^5 = \tfrac{1}{120}s^5.$$

Damit hat man die Entwicklung

(9) $$x = s - \tfrac{1}{6}s^3 + \tfrac{1}{120}s^5 - \ldots$$

[1]) S. des Verf. „Algebraische Kurven", I. Bd. (Sammlung Göschen, Nr. 435) Berlin 1914, S. 104 ff.

Will man weitergehen, so muß man in (5) noch das Glied mit x^7 dazu nehmen, dann in der ebenfalls erweiterten Gleichung (7) einsetzen, und man erhält in (9) ein weiteres Glied. Durch geschicktes Zusammenfassen konnte Newton auch gleich mehrere Glieder auf einmal erhalten. Wieweit man jedesmal gehen muß, daß die Umkehrung bis zu einem bestimmten Glied richtig wird, läßt sich an den einzelnen Fällen leicht erkennen. Eine allgemeine Regel fehlt.

Newton bemerkte aber selbst, daß die Koeffizienten einem bestimmten Gesetze folgen (was natürlich eine unvollständige Induktion ist), und so haben wir tatsächlich die Reihen aufgestellt

$$(10)\quad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

und

$$(11)\qquad \sin x = x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \cdots$$

Nun hebt Newton die Reihe (11) ins Quadrat subtrahiert das Resultat von 1 und zieht dann die Wurzel aus. Diese Rechnung müssen wir mit Newton dem Leser überlassen. Auf diese Weise erhält man die Reihe

$$(12)\qquad \cos x = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \cdots$$

Wir wissen freilich heute, daß man mit unendlichen Reihen nicht ohne weiteres so rechnen darf (multiplizieren, dividieren, Wurzel ziehen, gliedweise integrieren). Aber für die Potenzreihen, die hier allein in Frage kommen, ist das alles richtig, sofern $|x|$ hinreichend klein ist. Man kann von Newton, der hier völlig neues Land betrat, schwerlich erwarten, daß ihm sofort alle Möglichkeiten klar gewesen sein sollten. Newton war aber keineswegs unvorsichtig. Er war sich jedenfalls bewußt, jederzeit nachweisen zu können, daß die Rechnung bis zu dem und dem Glied richtig war. Auch beweist er am Schluß der Abhandlung, daß die Reihen, die er durch

Gleichungsauflösung (oder Reihenumkehrung) erhält, wie wir kurz sagen „konvergieren“, d. h. daß sie, wie er selbst es ausdrückt, „für hinreichend kleine x, je mehr sie entwickelt werden, um so mehr der Wahrheit näher kommen, so daß der Unterschied, (p, q, r usw.) schließlich kleiner wird als eine beliebig kleine Größe (tandem evadat minor quavis data quantitate)“. Diesen Beweis stützt er auf Euklid X, 1, d. h. auf das Archimedische Axiom (vgl. o. Nr. I). Einen Versuch, den Konvergenzbereich in den einzelnen Fällen wirklich festzustellen, macht Newton nicht.

XVIII.

Die „arithmetische Quadratur“ des Kreises.

Aus einem undatierten und unadressierten (französischen) Brief von G. W. Leibniz. Der Brief ist wahrscheinlich an den Abbé Gallois gerichtet und Ende 1673 oder Anfang 1674 geschrieben. Er war zur Aufnahme in das Journal des Sçavans bestimmt, die aber unterblieb. Infolgedessen wurde er erst durch C. I. Gerhardt aus den Handschriften veröffentlicht, s. Leibnizens Gesammelte Werke, hgg. von G. H. Pertz, 3. Folge, Mathematik, 5 Bd. (=Leibnizens Math. Schriften, hgg. von C. I. Gerhardt, 2. Abth., Bd. I), Halle 1858, S. 88–92.

Vorbemerkung. Unter der „arithmetischen Quadratur“ einer Kurve verstand Leibniz die Bestimmung des Flächeninhaltes in rationalen Zahlen, was sich natürlich schon beim Kreis nur vermittels einer unendlichen Reihe als möglich erwies. Wie er auf den Gedanken der Reihenentwicklung kam, sagt er ja selbst. Er war überhaupt bestrebt, immer den Ursprung seiner Überlegungen klarzustellen (im Gegensatz zu manchen Gelehrten aller Zeiten). Die Hauptgedanken lagen, wie man aus dem folgenden sieht, schon im Jahre 1673 fest; aber mit seinen fortschreitenden Erkenntnissen wuchs ihm die Arbeit unter den Händen, und eine im Jahre 1675 druckfertig gewesene Ausarbeitung (deren Original, wie es scheint, verloren ist), blieb liegen, weil sie bald als überholt gelten mußte.

Es existiert aber eine Reihe von kürzeren Darstellungen, die zum Teil damals gleich gedruckt wurden, zum Teil aber erst aus den Papieren durch Gerhardt veröffentlicht wurden (a. a. O. S. 88—132). Leibniz dehnte sein Verfahren auf sämtliche Kegelschnitte und auch auf andere Kurven, sowie auf Flächen aus. Der folgende Auszug schien für unsere Zwecke am geeignetsten.

S. 88 ... Die arithmetische Quadratur des Kreises und seiner Teile kann in dem folgenden Satz zusammengefaßt werden: Wenn man den Radius des Kreises als Einheit nimmt, und der Tangens (la tangente) BC der Hälfte BD eines gegebenen Bogens BDE (Fig. 28) b genannt wird, ist die Größe des Bogens: $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Nun ist es aber leicht, wenn man die Bogen hat, die Flächen zu finden, und ein Zusatz zu diesem Satz lautet, daß, wenn man den Durchmesser und sein Quadrat gleich 1 setzt, der Kreis gleich ist $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. ...

(89) ... Zu diesem Zweck habe ich mich des folgenden Hilfsatzes bedient. Wenn drei Parallele BC, GE, HF durch die drei Ecken eines Dreiecks BEF gehen, und man verlängert eine der Seiten EF bis zum Schnittpunkt mit einer der Parallelen in C, so ist das Rechteck aus der Strecke BC zwischen dem Schnittpunkt C und der Ecke B, durch die diese Parallele geht, und aus GH, dem Abstand der beiden anderen Parallelen (90) GE, HF, d. h. das Rechteck PGH (indem man BGH senkrecht zu BC und CP gleich und parallel zu BG nimmt) das doppelte des Dreiecks BEF. Ebenso ist, wenn HQ gleich ist BM, das Rechteck QHN gleich dem doppelten Dreieck BFL. Und wenn diese Grundlinien EF, FL usw. unendlich klein sind, so daß sie [mit den darüberstehenden Dreiecken EBF, FBL] die ganze Fläche $EB((E))LFE$ an der Kurve

$EFL((E))$ ausfüllen, und wenn ebenso GH, HN usw. unendlich klein sind, so daß die Rechtecke BGH, QHN usw. die ganze Fläche $PG((G))((P))QP$ an der Kurve $PQ((P))$ ausfüllen, so ist diese [letztere] ganze Fläche das doppelte der anderen Fläche. Und da FEC, LFM, $((E))((C))$

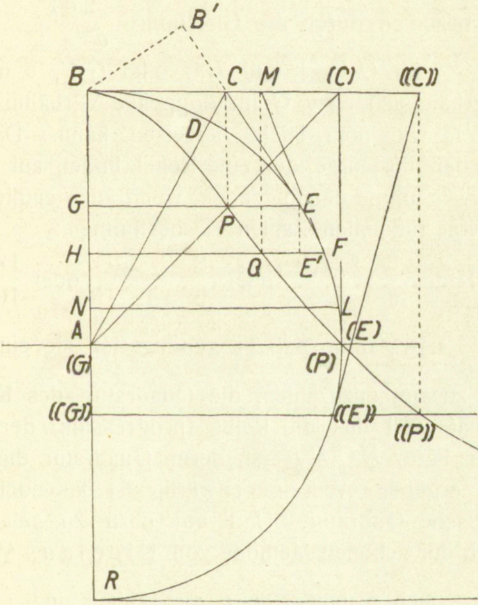


Fig. 28.

die Berührenden der ersteren Kurve sind, läßt sich der Satz allgemein so aussprechen: . . . [Nach Aufstellung des allgemeinen Satzes kommt erstens die Anwendung auf die allgemeinen Parabeln und Hyperbeln mit den Gleichungen $x^z a^v \sqcap$ [1])

[1]) Dieses von ihm selbst eingeführte Gleichheitszeichen hat Leibniz bald nachher durch das Recordesche = ersetzt.

y^{z+v} und $x^z\, y^v \sqcap a^{z+v}$, . . . (91), dann die Anwendung auf die Zykloide].

Die dritte Anwendung ist die arithmetische Quadratur des Kreises. Denn wenn die Kurve $E\,(E)\,((E))$ ein Kreisbogen ist, so läßt sich die Kurve der abgeschnittenen [Tangenten BC], nämlich $BP\,(E)\,((P))$ auf den rechten Winkel RBC beziehen durch die Gleichung $\dfrac{2\,a\,z^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, wenn man BG oder CP, x und BC oder GP, z nennt, d. h. RB verhält sich zu BG im doppelten Verhältnis von AC zu BC[1]), wie man leicht beweisen kann. Daraus folgt erstens, daß derjenige, der eine Regel findet, auf abgekürzte Weise die Summe der folgenden, wenn auch endlichen, Reihe (rang) von rationalen Zahlen zu bestimmen:

$\dfrac{2{,}1}{1+2}$[2]) oder $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2{,}4}{1+4}$ oder $\dfrac{8}{5}$, $\dfrac{2{,}9}{1+9}$ oder $\dfrac{18}{10}$, $\dfrac{2{,}16}{1+16}$ oder $\dfrac{32}{17}$ usw., ohne daß er genötigt ist, sie eine nach der andern zusammenzuzählen, die Quadratur des Kreises geleistet hat, weil das die Reihe (progression) der Ordinaten CP der Figur $BCPB$ ist, deren Quadratur diejenige des Kreises ergäbe. Aber gegenwärtig ist das noch nicht die arithmetische Qudratur. Und um dazu zu gelangen, muß man sich der schönen Methode von Nicolaus Mercator bedienen, nach welcher, da a die Einheit und $\dfrac{x}{2}$ gleich ist

---

[1]) Dieser Beisatz ist für diejenigen, die an der alten Form der Darstellung durch Proportionen hingen und an die Gleichungen noch nicht gewöhnt waren.

[2]) Es war längst üblich, Ausdrücke wie 2a ohne äußere Andeutung der Multiplikation zu schreiben. Bei zwei bloßen Zahlen ging das nicht, also setzt Leibniz ein Komma, statt dessen er später einen Punkt nahm. Der Multiplikationspunkt war also ursprünglich nur ein Trennungszeichen, und war als solches gelegentlich schon früher verwendet worden.

$\frac{z^2}{1+z^2}$, dasselbe $\frac{x}{2}$ [1]) gleich ist $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ usw. ins Unendliche. Und die Summe aller $\frac{x}{2}$ ist gleich der Summe aller der $z^2 - z^4$ usw. Nun ist das erste aller z unendlich klein und das letzte von einer gewissen Länge wie BC, das wir b nennen; also ist die Summe aller z^2 gleich $\frac{b^3}{3}$ und die (92) Summe aller z^4 ist $\frac{b^5}{5}$ usw. (gemäß der Quadratur der Parabeln), also ist die Summe aller $\frac{x}{2}$ oder die halbe Fläche $BCPB$, oder die Differenz des halben Rechtecks CBG und des Kreisabschnitts BEB gleich $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ usw.; folglich ist (durch eine ziemlich einfache Betrachtung [suite] der gewöhnlichen Geometrie) der halbe Bogen BDE gleich $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ usw., wenn man den Radius 1 setzt und BC, der Tangens (la touchante) des halben Bogens, b genannt wird. Was zu beweisen war . . .

E r l ä u t e r u n g e n. Nach der einfachen Ableitung der Reihen, die wir (s. Nr. XVII) bei N e w t o n sahen, wird vielleicht diese doch umständliche Betrachtung bei L e i b n i z überraschen. N e w t o n und seine Freunde, wie J. G r e g o r y, verstanden natürlich bald, auch für arctg die Fluxion zu bilden, die sich ja, wie wir wissen, einfach als $\frac{1}{1+x^2}$ ergibt. Dann hatte man also die Reihe

$$\frac{d}{dx}\,(\operatorname{arctg} x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,$$

[1]) L e i b n i z hat hier und im folgenden den Faktor $\frac{1}{2}$ vergessen, und G e r h a r d t hat es nicht bemerkt. Ich habe alles darauf Bezügliche geändert.

und, indem man gliedweise integrierte

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

So macht man es heute noch, und darauf kam nicht viel später auch Leibniz, der ja im Jahre 1673 noch Anfänger war. Setzt man in der arctg-Reihe $x = 1$, so wird arctg $x = \frac{1}{4}\pi$, und man hat die berühmte Leibnizsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Aber eben, weil Leibniz diesen einfachen Weg noch nicht gehen konnte, ist es umso erstaunlicher, daß er doch zu dem von ihm in seiner Bedeutung voll erkannten Resultat kam. Das wurde auch von Huygens und sogar von Newton, der damals wesentlich weiter war, gebührend bewundert. Auf den Einfall, $x = 1$ zu setzen, waren nämlich auch die Engländer nicht gekommen, obwohl ihnen die Reihe nicht mehr fremd war.

Was nun Leibnizens eigene Darlegungen betrifft, so handelt es sich zuerst um eine beliebige Kurve BEF. CE ist dann zunächst als Verlängerung von EF aufzufassen. Fällt man ferner $BB' \perp EC$ und $EE' \perp HF$[1]), so ist $\triangle BB'C \sim \triangle EE'F$ und daher $BB' : BC = EE' : EF$, also $BB' \cdot EF = 2\triangle EBF = BC \cdot EE' = BC \cdot GH =$ Rechteck PGH.

Ist dann $BE((E))R$ ein Halbkreis, und setzt man $\sphericalangle BAE = 2\omega$ (Bogenmaß), so ist für $AB = 1$

$$BG = x = 1 - \cos 2\omega = 2\sin^2\omega$$

$$= \frac{2\,\mathrm{tg}^2\omega}{1 + \mathrm{tg}^2\omega},$$

$$BC = GP = z = \mathrm{tg}\,\omega.$$

Also ist die Gleichung der Kurve $BPQ(P)((P))$

$$x = \frac{2z^2}{1 + z^2}.$$

Das ist eine Kurve 3. Ordnung mit der Kreistangente in R als (Wende-)Asymptote, die G. Loria „Pseudoversiera“ genannt

[1]) Die nötigen Buchstaben habe ich in der Figur ergänzt.

hat[1]). Mit der Quadratur dieser Kurve hängt die Quadratur des Kreises so zusammen, daß
Kreis-Segm. $BDEB = \frac{1}{2}$ (Rechteck $BGPC$ — Fl. $BCPB$),
wobei

$$\text{Fl. } BCPB = 2\int\limits_0^b \frac{z^2 dz}{1+z^2} = 2\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \cdots\right),$$

wenn BC jetzt gleich b ($= \operatorname{tg}\omega$) gesetzt wird.

Ferner ist

$$\begin{aligned}\text{Rechteck } BGPC &= b\,(1 - \cos 2\omega)\\ &= 2b\sin^2\omega = 2\operatorname{tg}\omega \cdot \frac{\operatorname{tg}^2\omega}{1+\operatorname{tg}^2\omega}\\ &= \frac{2b^3}{1+b^2},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\text{Kreis-Segm. } BDEB &= \text{Sekt } BAE - \triangle BAE\\ &= \text{Bog. } BE \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega\\ &= \frac{1}{2}\text{Bog. } BE - \frac{\operatorname{tg}\omega}{1+\operatorname{tg}^2\omega}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\text{Bog. } BE &= \text{Kreis-Segm. } BDEB + \frac{b}{1+b^2}\\ &= \frac{b^3}{1+b^2} + \frac{b}{1+b^2} - \frac{1}{2}\text{Fl. } BCPB\\ &= \frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \cdots\end{aligned}$$

Für $b = 1$ geht der Bogen in den Achtelkreis über, und man erhält die schon angeschriebene Reihe für $\frac{\pi}{4}$ [2]).

[1]) S. dessen „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven", 2. Aufl., I. Bd., Leipzig 1910, S. 82f. — Bei Gerhardt ist die Kurve nicht ganz richtig eingezeichnet, was ich verbessert habe. — Man beachte auch die Indizesbezeichnung mittels Klammern, die Leibniz bald durch die von Descartes ersetzte (s. o. S. 101).

[2]) Für das Ganze s. a. die Darstellung bei Mahnke (vgl. o. S. 103, Fußn. 1), S. 10—13.

Wenn nun auch die hier mitgeteilte Ableitung umständlich ist, d. h. wenn auch Leibniz damals in Einzelheiten noch nicht gewandt genug war, um immer gleich das Einfachste zu treffen, so hat er doch schon damals, wie Mahnke nachgewiesen hat (a. a. O. S. 57 f.), die Grundzüge der allgemeinen Reihenentwicklung besessen, die heute noch ganz zu Unrecht als eine Erfindung Taylors (1715) hingestellt wird. Daß die Taylorsche Reihe in einer von der heutigen nur wenig abweichenden Form im Jahre 1694 von Leibniz Joh. Bernoulli brieflich mitgeteilt wurde, hatte man bisher ganz übersehen. Es würde aber zu weit führen, dies hier wiederzugeben.

XIX.
Die Tangente an die Archimedische Spirale.

Aus: Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differentialium. Unter Mithilfe der Familie Bernoulli herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 300 Jahre nach der Aufnahme der Bernoulli ins Baseler Bürgerrecht (13. Mai 1622). Mit einem Vorwort von Paul Schafheitlin. Separatabdruck aus den „Verh. d. Naturf. Ges. in Basel". Band XXXIV. 1922. Deutsch „Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92 . . ." von Paul Schafheitlin. Ostwalds Klassiker Nr. 211. Leipzig 1924.

Vorbemerkung. Aus dem Titel dieser Schrift sieht man schon, daß sie zu Lebzeiten des Verfassers nicht erschien. Mit seinem älteren Bruder Jakob war Johann Bernoulli einer der ersten, die die Leibnizsche Infinitesimalrechnung so erfaßt hatten, daß sie selbständig in ihr weiter arbeiten konnten. Johann Bernoulli schrieb im Winter 1691/92 das erste Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, von dem aber nur die Integralrechnung (freilich auch erst im Jahre 1742) gedruckt wurde. Der Grund der Unterdrückung der ersteren war der, daß eine „Differentialrechnung" schon 1696 zu Paris von dem Marquis de L'Hospital unter dem Titel „Analyse des infiniment petits" herausgegeben worden war. Der Marquis hatte nun aber die Differentialrechnung in eben demselben Winter bei Johann Bernoulli gelernt und in dem einführenden Teil seines Werkes nur das Gehörte geordnet dargeboten. Diesen Sachverhalt hatte er in der Vorrede nicht deutlich genug zum Ausdruck gebracht, und die Sache wurde wirklich erst aufgeklärt, als Schafheitlin das Manuskript (bzw. eine Abschrift des Originals) in der Baseler Universitätsbibliothek auffand und veröffentlichte. Da Johann Bernoulli mit seinen Ansprüchen erst nach dem Tode des Marquis hervorgetreten war, hatte man ihm nicht unbedingt Glauben geschenkt. Offenbar hatte aber Johann Bernoulli aus persönlichen Gründen gefürchtet, sich die Feindschaft des Marquis zuzuziehen.

Ich habe das folgende Stück ausgewählt, weil es lehrreich und kurz ist und gleichzeitig ein Beispiel für Polarkoordinaten gibt, während wir bisher nur rechtwinklige Koordinaten angewandt hatten. Dies ist auch wohl die erste Stelle, wo solche ausdrücklich vorkommen, wenn man von Archimedes und Kepler (s. d. III. Bdchn., S. 52) absieht[1]).

S. 15 (deutsch S. 26).

Problema XI.

Die Tangente der Archimedischen Spirale zu finden.

Archimedische Spirale wird jene Kurve genannt, die von einem Punkte beschrieben wird, der sich [gleichförmig] vom Mittelpunkt bis zum Umfang eines Kreises bewegt, und zwar immer auf demselben Radius, der sich in der nämlichen Zeit, in welcher der Punkt vom Mittelpunkt zum Umfang kommt, gleichmäßig einmal ganz herum dreht. Es liegt uns nun ob, die Tangente dieser Kurve zu finden. Es sei (Fig. 29) der Radius $AC = a$, der Umfang $DDCD = b$, $AB = x$, und man ziehe die Senkrechte AE zur Linie AB. Dann verhält sich der Radius AC zum Umfang wie AB zum Bogen CKD[2]). Also ist $AD.AF::DD.FG$ [oder]

[1]) Vgl. dazu eine Notiz von mir, U.-Bl. f. Math. u. Nat. **34** (1928) S 276/77.

[2]) Den Buchstaben K, der in den beiden Schafheitlinschen Ausgaben fehlt, habe ich ergänzt.

$a . x :: \frac{b\,d\,x}{a} . \frac{b\,x\,d\,x}{a\,a}$. Ferner ist $BG . FG :: AB . AE$, d. h. $d . x \frac{b\,x\,d\,x}{a\,a} :: x . \frac{b\,x\,x}{a\,a} = s$. Wenn also die Tangente in C zu ziehen ist, findet man $s = b$, was Archimedes in langer Rede bewiesen hat[1]).

Erläuterungen. Zuerst verfolgen wir die zwar schon moderne, aber immer noch etwas ungewohnte Schreibweise Bernoullis. Es ist vor allem $2\,a\,\pi = b$. Ferner

$$a : b = AB\,(= x) : \text{arc}\ CKD.$$

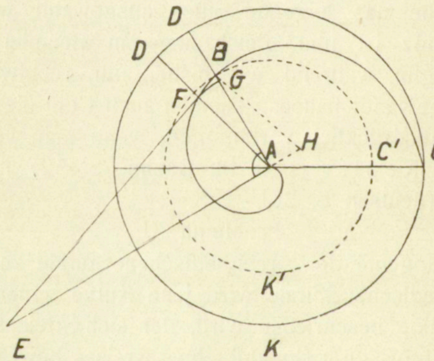


Fig. 29.

Aber $$\text{arc}\ CKD = 2\,x\,\pi = \frac{b}{a}\,x,$$

folglich $$DD = d\ \text{arc}\ CKD = \frac{b}{a}\,d\,x.$$

Da nun $a : x$[2]) $= \frac{b\,d\,x}{a} : FG$ (weil $AD : AF = DD : FG$),

---

[1]) Archimedes „De lineis spiralibus" XVIII. Ed. J. L. Heiberg II², Leipzig 1913, S. 63.

[2]) Es sollte eigentlich $x - d\,x$ heißen. Dann träte aber bei dem Werte von FG das Glied $(d\,x)^2$ auf, was nach den Leibnizschen Grundsätzen gegenüber $d\,x$ selbst zu vernachlässigen

so ist
$$FG = \frac{b\,x\,d\,x}{a^2}.$$

Da aber
$$BG : FG = AB : AE,$$

so ist, wenn man noch die Polarsubtangente $AE = s$ setzt,
$$d\,x : \frac{b\,x\,d\,x}{a^2} = x : s,$$

folglich
$$s = x^2 \cdot \frac{b}{a^2} = 2\,x\,\pi \cdot \frac{x}{a}$$
$$= \text{Bogen } C'\,K'\,B.$$

In der letzteren Form hat die allgemeine Tangentenbestimmung Archimedes (Satz XX; a. a. O. S. S. 73). In Fig. 29 ist das bei Bernoulli nicht Vorhandene gestrichelt.

Einfacher noch wird die Konstruktion mittels der Subnormale AH. Das hat weder Bernoulli noch Archimedes. Es ist nämlich
$$BG : FG = AH : AB,$$

oder
$$d\,x : \frac{b\,x\,d\,x}{a^2} = AH : x,$$

hieraus
$$AH = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{2\pi} = \text{const.}$$

Diese Konstanz der Polarsubnormale kann als Definitionseigenschaft der Archimedischen Spirale benutzt werden.

Jetzt wollen wir die Ableitung ganz modern anschreiben. Wir setzen die beiden Koordinaten
$$AB = \varrho, \ \sphericalangle CKD = \vartheta^{1)},$$

dann ist nach der Grundeigenschaft, daß nämlich der Radiusvektor ϱ proportional mit dem Winkel ϑ wächst, die Polargleichung der Spirale
$$\varrho = m\,\vartheta,$$

---

ist. Auch bei dem modernen Übergang zur Grenze hebt es sich natürlich weg.

[1]) Daß ϑ (entsprechend der Figur Bernoullis) im Uhrzeigersinn wächst, statt, wie wir es gewohnt sind, im entgegengesetzten Sinne, wird nicht sehr stören.

und da für $\varrho = a$, $\vartheta = 2\pi$ wird, ist

$$a = m \cdot 2\pi, \quad m = \frac{a}{2\pi},$$

und unsere Gleichung lautet demnach

$$\varrho = \frac{a}{2\pi}\vartheta.$$

Daraus erhält man

$$BG = d\varrho = \frac{a}{2\pi}d\vartheta,$$

ferner ergibt sich der kleine Kreisbogen

$$FG = \varrho\, d\vartheta.$$

Dieser wird mit der Sehne FG identisch gesetzt.

Also ist
$$\frac{BG}{FG} = \frac{a}{2\varrho\pi},$$

woraus dann wie oben entweder AE oder AH berechnet werden kann.

Lediglich ergänzend sei bemerkt, daß Archimedes auch die Quadratur der Spirale geleistet hat. Eben dazu brauchte er die Summe der Quadrate der ganzen Zahlen (s. o. S. 27f.). Denn wenn wir es modern machen, so berechnen wir das Dreieck AFB als Flächendifferential, das sich unter Weglassung der „unendlich kleinen Größen 2. Ordg." als mit dem Dreieck AFG übereinstimmend erweist, nämlich

$$\triangle AFB = \tfrac{1}{2}AF \cdot AB \cdot d\vartheta = \tfrac{1}{2}\varrho(\varrho + d\varrho)\,d\vartheta$$

$$\approx \tfrac{1}{2}\varrho^2 d\vartheta = \frac{a^2}{8\pi^2}\vartheta^2 d\vartheta.$$

Daher ist z. B.

$$\text{Fl. } AFBCA = \frac{a^2}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\vartheta^2 d\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{3}a^2\pi = \tfrac{1}{3}\text{ Kreis } CKDDC.$$

Das ist der Satz XXIV bei Archimedes. Archimedes hat sowohl bei der Tangente, wie bei der Quadratur auch die weiteren Windungen in Betracht gezogen (was für uns durch

Vergrößerung von ϑ über 2π hinaus geschieht). Jedoch hat er nicht die Rotation des Radiusvektors nach der anderen Seite (d. h. für negative ϑ) berücksichtigt, wodurch die Spirale einen zweiten Zweig erhält, und den eigentlichen Charakter als „Spirale“ verliert[1]).

XX.

Die Einführung von Newtons Fluxionen.

Aus: The Method of Fluxions and infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines. By the Inventor Sir Isaac Newton, ... Translated from the Author's Latin Original not yet made publick. To which is subjoin'd A Perpetual Comment upon the whole Work, ... By John Colson, ... London: ... M DCC.XXXVI.

Vorbemerkung. Auch diese Schrift Newtons war schon 1671 fertig. Sie wird gewöhnlich mit dem lateinischen Titel angeführt: Methodus fluxionum et serierum infinitarum. Das Original Newtons scheint aber verloren zu sein. Denn die erste lateinische Ausgabe unter dem angeführten Titel (in den Opuscula, ed. Castillioneus, Bd. I, 1744, S. 29—199; vgl. Nr. XVII) ist nach einer Bemerkung im Vorwort eine Rückübersetzung aus der obigen englischen, die die erste Ausgabe überhaupt darstellt. Es gibt noch eine zweite englische Ausgabe, ohne Verfassernamen zu London 1737 erschienen. Colson hat das an sich nicht kleine Werk mit einer längeren Vorrede und mit einem umfangreichen Kommentar (S. 141—339) versehen.

S. 19.

Übergang zur Methode der Fluxionen.

55. ... Aber zuerst ist zu bemerken, daß all die Schwierigkeiten bei diesen [Problemen, insbes. in bezug auf Kurven] auf die folgenden zwei Probleme allein zurückgeführt werden

[1]) Siehe z. B. des Verf. „Spezielle ebene Kurven“, Leipzig 1908, S. 246/47 (Fig. 118).

können, die ich vorlege in bezug auf eine Strecke, die [von einem Körper] bei Bewegung zurückgelegt wird, unter Voraussetzung einer beliebigen Beschleunigung oder Verzögerung.

56. I. *Wenn die Länge der zurückgelegten Strecke [spatium] stetig gegeben ist (d. h. in jedem Zeitpunkt); die Geschwindigkeit der Bewegung zu irgendeiner gegebenen Zeit zu finden.*

57. II. *Wenn die Geschwindigkeit der Bewegung stetig gegeben ist; die Länge der zurückgelegten Strecke zu irgendeiner gegebenen Zeit zu finden.*

58. Wenn z. B. in der Gleichung $xx = y$ [die Größe] y die Länge der Strecke vorstellt, die zu irgendeiner Zeit zurückgelegt wurde, und wenn diese [Zeit] durch eine andere Strecke x, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\dot{x}$ wächst, gemessen und als zurückgelegt dargestellt wird (20), dann stellt $2\dot{x}x$ die Geschwindigkeit dar, mit welcher die Strecke y im selben Zeitpunkt im Begriff ist zurückgelegt zu werden, und umgekehrt. Aus diesem Grunde betrachte ich im folgenden die Größen, als ob sie durch stetiges Wachstum erzeugt würden, gerade so wie eine Strecke, die ein Körper oder sonst ein Ding in der Bewegung beschreibt.

59. Aber da wir die Zeit nur insoweit in Betracht zu ziehen brauchen, als sie bei einer gleichmäßigen Bewegung auftritt [is expounded = exponitur] und gemessen wird, und da außerdem nur Größen derselben Art miteinander verglichen werden können, und ebenso ihre Geschwindigkeiten im Wachsen und Abnehmen, deshalb werde ich im folgenden nicht die Zeit als solche [formally = formaliter] betrachtet zugrunde legen, sondern ich nehme an, daß eine von den gegebenen Größen, die alle von der gleichen Art sind, durch einen beständigen Fluß [Fluxion] anwachse, und auf diese sollen die übrigen bezogen werden als wie auf die Zeit. Und daher kann diese [Größe] nach Analogie nicht unpassend den Namen Zeit erhalten. Wo immer also im folgenden das Wort Zeit auftritt . . ., möchte ich darunter nicht die Zeit in

ihrer formalen Bedeutung verstanden wissen, sondern nur jene andere Größe, durch deren gleichmäßiges Wachsen oder Fluxion die Zeit dargestellt [is expounded = exponitur] und gemessen wird.

60. Nun werde ich jene Größen, die ich als allmählich und unbegrenzt wachsend betrachte, im folgenden *Fluenten* oder *fließende Größen* nennen, und werde sie durch die letzten Buchstaben des Alphabets v, x, y und z darstellen ... Und die Geschwindigkeiten, mit denen die einzelnen Fluenten infolge ihrer erzeugenden Bewegung wachsen (die ich Fluxionen oder einfach Geschwindigkeiten oder Schnelligkeiten nenne), werde ich durch dieselben Buchstaben, aber so punktiert $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, und $\dot{z}$ bezeichnen ...

61. . . .

(21) *Problem I.*

Wenn die Beziehung der fließenden Größen zueinander gegeben ist, die Beziehung ihrer Fluxionen zu finden.

Lösung.

1. Ordne die Gleichung, durch die die gegebene Beziehung ausgedrückt wird, nach den Dimensionen von einer ihrer fließenden Größen, z. B. x, an und multipliziere ihre Glieder mit irgendeiner arithmetischen Reihe[1]) und gleichzeitig mit $\frac{\dot{x}}{x}$. Diese Operation führe man getrennt für jede einzelne der fließenden Größen durch. Dann setze man die Summe aller Produkte gleich Null, und man hat die gesuchte Gleichung.

2. Beispiel I. Wenn die Beziehung zwischen den fließenden Größen x und y ist $x^3 - a x^2 + a x y - y^3 = 0$, so ordne zuerst die Glieder nach x und dann nach y und multipliziere sie in folgender Weise.

[1]) Daß diese arithmetische Reihe dieselbe Differenz haben muß, wie die Reihe der Exponenten der fließenden Größe, ist (wohl aus Versehen) erst in Nr. 19, S. 25 gesagt.

Mult.	$x^3 - a x^2 + a x y - y^3$	$- y^3 + a x y - a x^2 + x^3$
mit	$\frac{3 \dot{x}}{x} \quad . \quad \frac{2 \dot{x}}{x} \quad . \quad \frac{\dot{x}}{x} \quad . \quad 0$	$. \quad \frac{3 \dot{y}}{y} \quad . \quad \frac{\dot{y}}{y} \quad . \quad 0$
gibt	$3 \dot{x} x^2 - 2 a x \dot{x} + a \dot{x} y \, *$	$- 3 \dot{y} y^2 + a \dot{y} x \, *$

Die Summe der Produkte ist $3 \dot{x} x^2 - 2 a x \dot{x} + a \dot{x} y - 3 \dot{y} y^2 + a \dot{y} x = 0$, und diese Gleichung gibt die Beziehung zwischen den Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$. Denn wenn man x nach Belieben nimmt, erhält man y aus der Gleichung $x^3 - a x^2 + a x y - y^3 = 0$. Ist das bestimmt, so hat man $\dot{x} : \dot{y} :: 3 y^2 - a x : 3 x^2 - 2 a x + a y$.

. . . . . .

(24) . . .

Beweis der Lösung.

13. Die Momente der fließenden Größen (d. h. ihre unbegrenzt kleinen Teile, durch deren Hinzuwachsen in unbegrenzt kleinen Zeitteilchen sie stetig größer werden) verhalten sich wie die Geschwindigkeiten ihres Fließens oder Wachsens.

14. Drückt man also das Moment der einen, z. B. x, durch das Produkt seiner Schnelligkeit $\dot{x}$ mit einer unbegrenzt kleinen Größe o (d. h. durch $\dot{x} o$) aus, so werden die Momente der anderen $\dot{v}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, dargestellt durch $\dot{v} o$, $\dot{y} o$, $\dot{z} o$, da sich $\dot{v} o$, $\dot{x} o$, $\dot{y} o$ und $\dot{z} o$ zueinander wie v, x, y und z verhalten.

15. Da nun die Momente, wie $\dot{x} o$ und $\dot{y} o$, die unbegrenzt kleinen Zuwächse der fließenden Größen x und y sind, um welche diese Größen zunehmen während der einzelnen unbegrenzt kleinen Zeitabschnitte, so folgt, daß diese Größen x und y, nach Ablauf irgendeines unbegrenzt kleinen Zeitabschnittes zu $x + \dot{x} o$ und $y + \dot{y} o$ werden. Und deshalb wird die Gleichung, die zu welcher Zeit immer die Beziehung zwischen den fließenden Größen ausdrückt, ebenso die Beziehung zwischen $x + \dot{x} o$ und $y + \dot{y} o$ ausdrücken als zwischen x und y, so daß man $x + \dot{x} o$ und

$y + \dot{y}\,o$ in dieselbe Gleichung für diese Größen einsetzen darf an Stelle von x und y.

16. Es sei deshalb irgendeine Gleichung $x^3 - a\,x^2 + a\,x\,y - y^3 = 0$ gegeben, und man setze in ihr $x + \dot{x}\,o$ für x und $y + \dot{y}\,o$ für y, dann kommt

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\,\dot{x}\,o\,x^2 + 3\,\dot{x}^2\,o\,o\,x + \dot{x}^3\,o^3 \\ - a\,x^2 - 2\,a\,\dot{x}\,o\,x - a\,\dot{x}^2\,o\,o \\ + a\,x\,y + a\,\dot{x}\,o\,y + a\,\dot{y}\,o\,x + a\,\dot{x}\,\dot{y}\,o\,o \\ - y^3 - 3\,\dot{y}\,o\,y^2 - 3\,\dot{y}^2\,o\,o\,y - \dot{y}^3\,o^3 \end{array}\right\} = 0.$$

(25) 17. Nun ist nach Voraussetzung $x^3 - a\,x^2 + a\,x\,y - y^3 = 0$, und diese Glieder kann man daher streichen. Dividiert man dann die übrig bleibenden Glieder mit o, dann bleibt $3\,\dot{x}\,x^2 + 3\,\dot{x}^2\,o\,x + \dot{x}^3\,o\,o - 2\,a\,\dot{x}\,x - a\,\dot{x}^2\,o + a\,\dot{x}\,y + a\,\dot{y}\,x + a\,\dot{x}\,\dot{y}\,o - 3\,\dot{y}\,y^2 - 3\,\dot{y}^2\,o\,y - \dot{y}^3\,o\,o = 0$. Aber da o als unendlich klein vorausgesetzt ist, damit es die Momente der Größen darstellt, werden die Glieder, die damit multipliziert sind, gleich Null sein im Vergleich mit den übrigen. Daher lasse ich jene weg, und es bleibt $3\,\dot{x}\,x^2 - 2\,a\,\dot{x}\,x + a\,\dot{x}\,y + a\,\dot{y}\,x - 3\,\dot{y}\,y^2 = 0$, wie oben in Beispiel I.

18. Hier können wir bemerken, daß die Glieder, die von o frei sind, immer verschwinden, und ebenso diejenigen Glieder, die mit o in einer höheren als der ersten Dimension multipliziert sind. Und daß die übrigen Glieder, nach Division mit o, immer die Form annehmen, die sie nach der obigen Regel haben müssen. Was zu beweisen war.

19. [Nur Bemerkungen, daß alles übrige, was in der Regel steht, leicht folge].

Erläuterungen. Daß Newton nach 1671 noch Veränderungen an dieser Schrift vornahm, ebenso wie an der in Nr. XVII zitierten „Quadratur der Kurven", die im übrigen auch schon um jene Zeit fertig vorlag, ist sicher. Möglicherweise gehört zu diesen Veränderungen die Einführung der Geschwindigkeit, die in der „Analysis durch unendliche Reihen" noch nicht auftritt. Wir wollen alles in die Leibnizsche

(d. h. im Wesen in die heutige) Bezeichnung umschreiben. Dann hat Newton eine unabhängige Veränderliche, die nicht angeschrieben ist und die wir t nennen wollen. Sein $\dot{x}$ ist dann gleich $\frac{dx}{dt}$, d. h. die Geschwindigkeit, mit der sich x verändert.

Die Aufgabe I ist dann die, aus einer vorgelegten Gleichung die Differentialgleichung zu gewinnen. Die Lösung dieser Aufgabe haben wir oben in der Hauptsache wiedergegeben. Die Aufgabe II wäre, eine gegebene Differentialgleichung zu integrieren. Das ist natürlich eine sehr vieldeutige Aufgabe, und sie wurde von Newton auch nur für einzelne Fälle gelöst. Newton bezeugt dabei eine große Gewandtheit und ein tiefes Verständnis für die Zusammenhänge.

Die Regel, die er für die Aufgabe I gibt, ist, wenn wir uns zunächst auf die arithmetische Reihe der Exponenten beschränken, genau dieselbe, die auch Leibniz hatte, und die auch wir noch anwenden. Schreiben wir statt $\dot{x}$ einfach dx, indem wir dt weglassen, so bekommen wir in der Tat aus der Gleichung

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

sofort die Differentialgleichung

$$3x^2 dx - 2axdx + aydx + axdy - 3y^2 dy = 0.$$

Auch unsere Begründung ist im Wesen dieselbe. Wir setzen $x + dx$, bzw. $y + dy$ in die Gleichung ein statt x bzw. y; dann kommt ein Ausdruck heraus, der dem von Newton in Nr. 16 gegebenen entspricht. Die Glieder ohne dx, dy fallen weg, wir dividieren mit dx und gehen dann zur Grenze für $dx \to 0$ über. Diese Ausdrucksweise war Newton noch fremd; indem er die Glieder mit höheren Potenzen von o wegläßt, erreicht er dasselbe. Da er aber eben unseren Grenzübergang nicht hat, muß er immer das Wort „unendlich klein“ oder „unbegrenzt klein“ verwenden. Das kann in diesen einfachen Fällen zu keinen Mißverständnissen Anlaß geben. Newton hat nur nicht einfach dx und dy, wie Leibniz, sondern seine „Momente", die mit den Leibnizschen „Differentialen" (s. o. S. 118) durchaus identisch sind, werden durch die Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, multipliziert mit einer „unendlich kleinen Größe" o ausgedrückt. Da diese „Momente" nichts anderes sind als die in der kleinen Zeiteinheit, die wir dt nennen, zurückgelegten Wege, so sind sie in unserer Ausdrucksweise gleich $\frac{dx}{dt} \cdot dt = dx$ und $\frac{dy}{dt} \cdot dt = dy$. Ein Vorteil gegenüber der einfachen Leibnizschen Darstellung wird also durch die Einführung der Geschwindigkeit, wenigstens hier, nicht erreicht.

Das Wort „Fließen" hat schon Cavalieri (s. o. S. 71) in diese Art Betrachtungen eingeführt, und dieser hatte es vielleicht, wie wir schon sagten, bereits aus Nepers Begründung seiner Lehre von den Logarithmen gelernt, wo dasselbe Wort gebraucht wird. Newton kannte auf alle Fälle beide. Die Einführung der „Geschwindigkeit" in die Kurvenlehre geht über Barrow auf Roberval und Torricelli zurück. Selbstverständlich sind damit nur die Anregungen ausgedrückt, die Newton zur Verfügung standen. Wie er diese Anregungen ausnutzte, ist durchaus seine eigene Erfindung, und wie weit er über alle seine Vorgänger hinausragte, kann man naturgemäß aus der obigen Probe, die nur die Grundlage gibt, nicht ermessen.

In Nr. 58 gebraucht Newton das Beispiel $y = x^2$ für einen Weg, wobei x nicht direkt die Zeit, sondern eine der Zeit proportionale Größe, also z. B. $x = ct$ ist, sodaß $\dot{x}$ (nach t differenziert) gleich c, $\ddot{x} = 0$ ist. Dann erhält man $\dot{y} = 2\dot{x}x$ für die Geschwindigkeit und $\ddot{y} = 2(\ddot{x}x + \dot{x}\dot{x}) = 2\dot{x}^2 = 2c^2 = \text{const.}$ für die Beschleunigung. Wir haben also die Wegformel für die gleichförmig beschleunigte Bewegung vor uns, die wir heute in der Regel $s = \frac{1}{2}at^2$ schreiben.

Auf den ersten Blick verblüffend ist Newtons allgemeine, uns ganz ungewohnte Regel, daß man die zu differenzierenden Gleichungen nicht mit der Reihe der Exponenten, sondern mit einer beliebigen arithmetischen Reihe derselben Differenz multiplizieren dürfe, und zwar bei der Differentiation nach x wieder mit einer anderen als bei der Differentiation nach y. Das tut Newton auch in Beispielen, wo dadurch die Rechnung erleichtert wird. Die Sache ist aber sehr einfach. Nehmen wir etwa bei unserem Beispiel links statt 3, 2, 1, 0 die Reihe 5, 4, 3, 2, und rechts statt der Reihe 3, 1, 0 die Reihe 1, —1, —2, so lautet das Resultat

$$\text{(I)} \qquad (5x^3 - 4ax^2 + 3axy - 2y^3)\cdot\frac{\dot{x}}{x}$$

$$+\left(-y^3 - axy \begin{matrix} +2ax^2 \\ -2x^3 \end{matrix}\right)\cdot\frac{\dot{y}}{y} = 0\,.$$

Darunter schreibt man

$$\text{(II)} \qquad (2x^3 - 2ax^2 + 2axy - 2y^3)\cdot\frac{\dot{x}}{x}$$

$$+\left(2y^3 - 2axy \begin{matrix} +2ax^2 \\ -2x^3 \end{matrix}\right)\cdot\frac{\dot{y}}{y} = 0\,.$$

Die Gleichung (II) ist identisch Null, da jede Klammer für sich verschwindet. Zieht man (II) von (I) ab, so erhält man das übliche Resultat. Hätten wir in (I) statt der verwendeten Reihen etwa $3+m$, $2+m$, $1+m$, m und $3+n$, $1+n$, n genommen, so hätten wir in (II) links die ursprüngliche Gleichung mit m, rechts mit n multiplizieren müssen. Daraus wird die allgemeine Regel wohl deutlich genug hervorgehen. Daß Newton aber die Regel gleich in dieser allgemeinen Form angab, zeigt, wie tief er in die Sache eingedrungen war. Wiewohl Colsons Kommentar sehr wortreich ist, läßt er gerade an dieser Stelle im Stich.

XXI.

Der Differentialquotient des Sinus.

Aus: Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. Auctore Leonhardo Eulero ... Impensis Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 1755. Der Druckvermerk am Schluß lautet: Berolini ex officina Michaelis. — Wieder abgedruckt in der neuen großen Eulerausgabe: Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis societatis scientiarum naturalium helveticae, edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel. Series I. Opera mathematica. Vol. X. Ed. Gerhard Kowalewski. Lipsiae et Berolini, Typis et in aedibus B. G. Teubneri, MCMXIII. — Deutsch: Leonhard Eulers Volständige Anleitung zur Differentialrechnung. .... von Johann Andreas Christian Michelsen, ... Erster Theil. Berlin und Libau, ... 1790. Ein zweiter und ein dritter Teil erschienen 1790 und 1793, ein Supplement von Grüson 1798.

Vorbemerkung. Das Werk, aus dem wir das folgende kleine Kapitel entnehmen, ist das erste systematische Lehrbuch der Differentialrechnung und zwar der reinen Differentialrechnung, ohne die Anwendungen auf Geometrie. Es ist ein großer Quartband von 880 Seiten. Euler ließ ein noch umfangreicheres Lehrbuch der Integralrechnung in 3 Bänden in den Jahren 1768—1770 folgen. Diese Bücher geben zusammen mit Eulers „Introductio in analysin infinitorum" (Lausannae 1750; s. d. II. Bdchn., Nr. XXI) ein vollständiges Bild der damaligen Infinitesimalrechnung, die schon ein ungeheures Material zur Verfügung hatte. Aber bereits der Übersetzer Michelsen sagt (I. Teil, S. LX, Fußnote), daß Euler bei der Aufführung seines schönen Gebäudes der Differentialrechnung ein Gerüste gebraucht habe, welches er aus schwachen Balken künstlich zusammensetzte. Das will heißen, daß nun seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung, wo man sich der Archimedischen Strenge wenigstens immer noch bewußt war, und sie, wenn es not tat, auch anzuwenden wußte, durch die Fülle der Resultate, die sich aufdrängten, eine große Sorglosigkeit in der logischen Grundlegung eingetreten war. Der folgende

Abschnitt mag ein Beispiel davon geben. Rein sachlich ist es auch wohl die erste Aufstellung dieses und der anderen Differentialquotienten der trigonometrischen und Arcusfunktionen, die Euler ja überhaupt in der „Introductio" zum erstenmal systematisch in die Analysis eingeführt hatte.

S. 171 (Opera, Ser. I, X, S. 137; deutsch: I. Teil, S. 173).

201. Es bleiben noch die Größen, die aus der Umkehrung dieser [d. h. der vorher behandelten Funktionen arc sin usw.] entstehen, nämlich die Sinus und Tangenten von gegebenen Bogen, und von diesen wollen wir zeigen, wie man sie differenzieren (differentiare) muß. Es sei also x der Bogen eines Kreises und $\sin x$ bedeute seinen Sinus, dessen Differential wir zu suchen haben. Setzen wir $y = \sin x$, und nehmen wir noch $x + dx$ anstelle von x, so wird, da dann y zu $y + dy$ wird,

$$y + dy = \sin(x + dx), \ \& \ dy = \sin(x + dx) - \sin x.$$

Es ist aber $\sin(x + dx) = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx$[1]), und da, wie wir in der Einleitung (d. h. in der oben erwähnten „Introductio") gezeigt haben,

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c.,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.,$$

so ist, wenn man die verschwindenden Glieder wegläßt, $\cos dx = 1 \ \& \ \sin dx = dx$, und daher wird $\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x$. Setzt man also $y = \sin x$, so ist $dy = dx \cos x$. *Das Differential des Sinus irgendeines Bogens ist also gleich dem Differential des Bogens, mul-*

[1]) Hier ist im Original schon so gedruckt, wie wir es heute allgemein machen, d. h. die Funktionsbezeichnung ist in Antiqua, die Argumente in Kursiv. In der Übersetzung von Michelsen ist aber wieder in altmodischerer Weise alles Antiqua, und hinter den Funktionszeichen sind sogar wieder Abkürzungspunkte. Vgl. d. II. Bdchn., S. 62/63.

tipliziert mit dem Kosinus. Wenn also p irgendeine Funktion von x selbst ist, so ist in ähnlicher Weise $d . \sin p = d\, p \cos p$.

Erläuterungen. Die allgemein übliche Ableitung des Differentialquotienten von $\sin x$ steht in allen Schulbüchern, so daß ich sie hier voraussetzen kann. In der obigen Ableitung ist vor allem die Verwendung der Reihen bemerkenswert, die die älteren Mathematiker überhaupt gern benützten. Das wäre an sich nicht zu beanstanden, ebenso wenig wie uns die Ausdrucksweise vom „Weglassen der verschwindenden Glieder", d. h. der höheren Potenzen von $d\,x$, stören wird, weil das (ebenso wie bei Newton; s. o. S. 127) leicht in eine korrekte Form gebracht werden kann. Man braucht ja nur in die Formel für $\sin\ (x + d\,x)$ die ganzen Reihen einzusetzen, mit $d\,x$ zu dividieren und dann zur Grenze für $d\,x \to 0$ überzugehen.

Aber wir würden heute nicht mehr die Reihen (als das Kompliziertere) zur Ableitung des Differentialquotienten (als des Einfacheren) benutzen, sondern wir leiten umgekehrt die Reihen ab, indem wir uns auf die Differentialquotienten stützen und in die allgemeine Taylorsche Reihe (s. o. S. 134) einsetzen. Das war früher nicht so. Wir haben schon bei Newton und Leibniz gesehen (s. S. 127f.), wie sie ihre Reihen einzeln, je wie es kam, ableiteten. Schlagen wir nun in der „Introductio" Eulers nach (I. Bd., § 134, S. 99), so sehen wir, daß Euler zuerst, mittels des Moivre'schen (s. d. II. Bdchn., S. 62) und des binomischen Lehrsatzes die Formeln für $\cos n\,z$ und $\sin n\,z$ aufstellt, dann n unendlich groß und z unendlich klein nimmt, so daß $n\,z$ einen endlichen Wert v behält, dann ohne weiteres (jedenfalls aus geometrischen Überlegungen heraus) annimmt (was er in unserem Beispiel gerade mittels der Reihen beweisen will), daß $\sin z = z$ und $\cos z = 1$ (für unendlich kleine z). Indem er in den Formeln für $\cos n\,z$ und $\sin n\,z$ dann wirklich $\cos z = 1$ und $\sin z = \frac{v}{n}$ setzt, erhält er die in unserem Beispiel verwendeten Reihen für $\cos v$ und $\sin v$.

Daraus sieht man vor allem, daß Euler zur Ableitung der (angenäherten) Gleichungen $\cos dx = 1$, $\sin dx = dx$ sich nicht auf die unter denselben Voraussetzungen abgeleiteten Reihen berufen durfte. Aber davon abgesehen, unterliegt bei Euler auch die Ableitung der Reihen selbst großen Bedenken. Denn sie gilt eigentlich nur für sehr große (ganzzahlige!) n und entsprechend kleine z, und auch dann nur annäherungsweise. Solange aber n endlich ist, nehmen die Koeffizienten der Reihen nicht die einfache Form an, die sie schließlich in der sin- und cos-Reihe haben. Die Richtigkeit dieser Reihen müßte also noch eigens bewiesen werden.

Namenverzeichnis.

der Ak. d. Wiss. zu Paris, später als Privatmann in seiner Vaterstadt. 1691 erschien zu Leiden sein „Traité de la lumière" (Wellentheorie). 103, 112, 132

Ibn Alhaitham (965?—1039). Stammte aus Basra in Mesopotamien, lebte später in Kairo. Bedeutender Astronom und Mathematiker. 77.

Joachim, Harold Henry (geb. 1868). Prof. d. Logik a. d. Univ. Oxford. 22, 24, 26.

Jones, William (1675—1749). Privatlehrer der Mathematik. Mitglied der Royal Society. 119.

Junge, Gustav (geb. 1879). Schulmann (Math.) in Berlin. 14.

Kepler, Johannes (1571—1630). Württemberger; studierte zuerst (prot.) Theologie, war Mathematiklehrer zu Graz und Linz, dazwischen Hofastronom Rudolfs II. und von Ferdinand II. als kaiserlicher Hofmathematikus bestätigt. Entdecker der Planetengesetze; leistete auch in der Optik Hervorragendes. Vorläufer in der Infinitesimalrechnung. 60, 61, 62, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 77, 78, 135.

Killing, Wilhelm (1847—1923). War Prof. d. Math. a. d. Univ. Münster. 11.

Kliem, Fritz (geb. 1887 in Bismarckhütte, O.-Schl.). Studienrat (Math.) in Breslau. 6, 14, 16.

Klug, R. (1908). 60, 65, 67.

Kowalewski, Gerhard (geb. 1876). Prof. d. Math. a. d. Techn. Hochsch. Dresden. 112, 114, 117, 147.

Krazer, Adolf (1858—1926). Prof. d. Math. a. d. Techn. Hochsch. Karlsruhe. 147.

Leibniz, Gottfried Wilhelm von (1646—1716). Geb. in Leipzig, lebte zuletzt in Hannover. Vielseitiger Gelehrter, Mathematiker und Philosoph. Erfand die Differential- und Integralrechnung (s. a. Newton). Faßte den Grundgedanken der Erhaltung der Energie. 103, 105, 106, 107, 112, 113, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 123, 124, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 136, 143, 144, 145, 149.

L'Hospital, Guillaume François de (1661—1704). Lebte in Paris. Zuerst Offizier, dann Privatmann. Schrieb auch eine Analytische Geometrie der Kegelschnitte (vgl. III. Bdchn., Nr. XI). 134.

Lorey, Wilhelm (geb. 1873). Ob.-Stud.-Direktor (Math.) u. Doz. f. Versich.-Wiss. in Leipzig. VII.

Loria, Gino (geb. 1862 zu Mantua). Prof. d. Math. a. d. Univ. Genua. Math.-Historiker. 78, 107, 132.

Mahnke, Dietrich (geb. 1884). Zuerst Schulmann (Math.), seit 1927 Prof. f. Philos. a. d. Univ. Marburg. Bedeutender Leibnizforscher. 103, 105, 133, 134.

Maurolico, Francesco (1494 bis 1575). Wurde Ordensgeistlicher, später Abt, lehrte Mathematik in Messina, seiner Vaterstadt. Einer der ersten Erneuerer der Mathematik der

Berichtigungen.

Zum 3. Bändchen (Bd. 19 der Sammlung).

S. 15, Z. 5 v. u.: Lies ebenen statt Ebenen.
S. 33, Z. 8 v. u.: Lies auftritt statt auftreten.
S. 52, Z. 6 v. u.: Lies 1609 statt 1509.
S. 73, Mitte: Lies xlvj [= 46] statt xlyj.
S. 87: Heiberg ist am 4. I. 1928 gestorben.