

HAAS / MATERIEWELLEN UND QUANTENMECHANIK

ARTHUR HAAS  
MATERIEWELLEN UND  
QUANTENMECHANIK



LEIPZIG  
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

M 50 V-x	M 2 30
HIRSCHWALDSCHE BUCHHANDLUNG BERLIN NW 7 UNTER DEN EICHEN 66	

18  
8261  
VII

~~TOWARYSTWO HANDELNE WARSZAWSKIE~~

L. inw. ....

J. Warkota

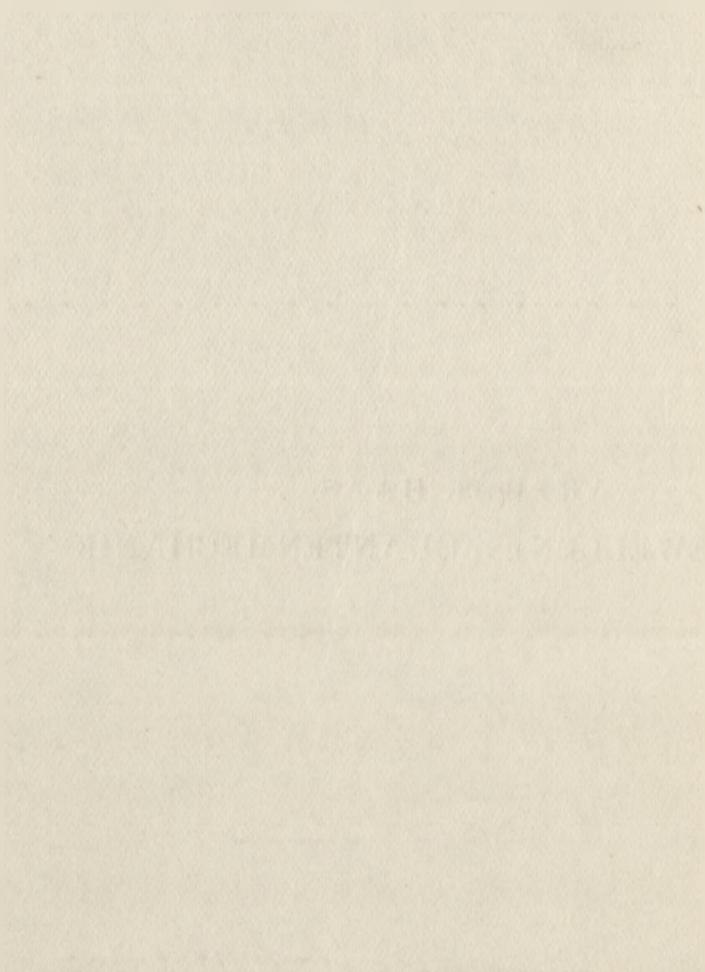


ARTHUR HAAS  
MATERIEWELLEN UND QUANTENMECHANIK

~~TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE~~

L. inw. ....

~~GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~



*Haas*

*Kat.*

# MATERIEWELLEN UND QUANTENMECHANIK

EINE ELEMENTARE EINFÜHRUNG  
AUF GRUND DER THEORIEN DE BROGLIES  
SCHRÖDINGERS UND HEISENBERGS

VON

ARTHUR HAAS

DR. PHIL., PROFESSOR FÜR PHYSIK DER UNIVERSITÄT WIEN

TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

L. inw. ....

GABINET MATEMATYCZNY

Towarzystwa Naukowego Warszawskiego



L. inw. 637

LEIPZIG

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

1928

opus nr: 46865

WILHELM REICHENOW  
ZUR  
ANATOMIE DER  
MUSKELN

Verlag von  
Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig



4637

Copyright 1928  
by Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig.

~~TOWARZYSTWO NAUCZYCIELI WARSZAWSKIE~~

## Vorwort.

Obwohl nur etwas über zwei Jahre seit der Begründung der HEISENBERG'schen Quantenmechanik und der SCHRÖDINGER'schen Wellenmechanik verstrichen sind, erscheint es heute bereits denkbar, über diesen jüngsten physikalischen Wissenszweig ein Lehrbuch in einem Umfange von etwa tausend Seiten herauszugeben. Der Verfasser dieser Schrift glaubte indessen, daß mehr als nach einem so umfangreichen und vollständigen Werke in weiten, nicht nur Berufsphysiker, sondern auch Laien umfassenden Kreisen ein Verlangen nach einer kürzeren Darstellung bestehen dürfte; nach einer Darstellung, die keine hohen mathematischen Kenntnisse voraussetzt, die nur das Wesentliche der Gedankengänge DE BROGLIES, SCHRÖDINGERS und HEISENBERGS wiedergibt, die den inneren Zusammenhang dieser Ideen berücksichtigt und an der Hand der wichtigsten Anwendungen ihre Tragweite zu veranschaulichen sucht. Eine solche Darstellung wird in dem vorliegenden Büchlein versucht, das Vorlesungen enthält, die der Verfasser während des Wintersemesters 1927/28 an der Wiener Universität gehalten hat.

Es ist selbstverständlich, daß eine derart absichtlich kurze und unvollständige Schrift nicht nur wegen vieler Probleme den stärker interessierten Leser auf die Originalabhandlungen verweisen muß, sondern daß eine

elementar gehaltene Darstellung unvermeidlicherweise auch auf manche feinere Einzelheiten verzichten muß, die vielleicht mehr vom mathematischen als vom physikalischen Standpunkte aus wichtig erscheinen dürften.

Der Verfasser war bemüht, alle wesentlichen Fortschritte zu berücksichtigen, die in der Atomphysik bis zum Januar 1928 erzielt wurden. In die wenigen Wochen zwischen dem Abschluß des Buches und seiner Veröffentlichung fällt die Publikation der höchst bedeutungsvollen Experimente G. P. THOMSONS, der nachzuweisen vermochte, daß Kathodenstrahlen bei ihrer Streuung an dünnen Metallfolien ganz ähnliche Beugungserscheinungen hervorrufen wie in bekannter Weise Röntgenstrahlen bei ihrer Streuung durch Kristallpulver (London, Royal Soc., Proc., (A) 117, 1928, p. 600). Ähnliche Versuche sind inzwischen auch Herrn RUPP in Göttingen gelungen. Da es leider nicht mehr möglich war, die schönen Experimente der Herren G. P. THOMSON und RUPP in das Kapitel über die Beugung der Materiewellen aufzunehmen, so mögen sie wenigstens an dieser Stelle kurze Erwähnung finden.

Viele wertvolle Anregungen verdanke ich Herrn Dr. Guido BECK (Wien), der mein Manuskript einer eingehenden Durchsicht unterzog, sowie den Herren Eugen GUTH, August KORNFELD und Dr. Franz URBACH in Wien, die so freundlich waren, die Korrektur aufmerksam durchzusehen. Ihnen sei auch an dieser Stelle für ihre Mühe und Hilfe herzlichst gedankt. Aufrichtig dankbar bin ich auch meinem Verleger für die Bereitwilligkeit, mit der er bei der Herstellung dieses Büchleins allen meinen Wünschen entgegengekommen ist.

Wien, Ende Februar 1928.

Arthur Haas.

~~TOWARZYSTWO KIMOWIE WARSZAWSKIE~~

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Das Problem der Atommechanik .. .. .	1
II. Das FERMATSche Prinzip, die LORENTZ-Transforma- tion und der Begriff der Gruppengeschwindigkeit	12
III. Die Wellenmechanik von DE BROGLIE .. .. .	25
IV. Der Zusammenhang zwischen Wellenmechanik und Relativitätstheorie .. .. .	36
V. Die Beugung der Materiewellen .. .. .	42
VI. Die Theorie von SCHRÖDINGER .. .. .	47
VII. Beispiele zur Eigenwertmechanik .. .. .	55
VIII. Die Quantenmechanik von HEISENBERG .. .. .	66
IX. Die Matrizenmechanik .. .. .	81
X. Der Zusammenhang zwischen der Quantenmecha- nik und der Theorie von SCHRÖDINGER .. .. .	91
XI. Die kausale und die statistische Auffassung der Atomphysik .. .. .	97
XII. Das PAULISChe Prinzip und die Quantentheorie des Grundstoffsystems .. .. .	104
XIII. Die BOSESche Quantenstatistik .. .. .	114
XIV. Die FERMISChe Statistik .. .. .	125
XV. Weitere Anwendungen der Quantenmechanik ..	133
XVI. Quantenmechanik und Naturphilosophie .. .. .	143
Zusammenfassung des Inhalts .. .. .	147
Übersicht über die häufigsten Bezeichnungen ..	154
Universelle Konstanten .. .. .	154
Literatur .. .. .	155
Namenverzeichnis .. .. .	157
Sachverzeichnis .. .. .	158

*Wichtige Bemerkung: Der Leser, dem der zweite Teil des achten Kapitels sowie das neunte und zehnte Kapitel zu schwer sein sollten, möge diese Abschnitte überschlagen.*

Table of Contents

and the ...

XI. The ...

XII. The ...

XIII. The ...

XIV. The ...

XV. The ...

XVI. The ...

XVII. The ...

XVIII. The ...

XIX. The ...

XX. The ...

XXI. The ...

XXII. The ...

XXIII. The ...

XXIV. The ...

XXV. The ...

XXVI. The ...

XXVII. The ...

XXVIII. The ...

XXIX. The ...

XXX. The ...

~~GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

~~TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE~~

## Erstes Kapitel.

### Das Problem der Atommechanik.

Aus einer früheren Blütezeit der Physik, aus der zweiten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts, stammt ein Ausspruch des großen Forschers HUYGENS, in dem nicht nur die Denkrichtung jener Zeit, sondern auch die der nächsten zweihundert Jahre zu scharfem Ausdruck gelangten. „In der wahren Wissenschaft“ — so äußerte sich HUYGENS — „könne man die Ursachen aller Wirkungen nur durch die Denkweise der Mechanik begreifen, wolle man nicht für immer auf jede Hoffnung verzichten, überhaupt je etwas in der Physik zu verstehen“ <sup>1)</sup>. Die mechanisierende Tendenz ist in der Physik in der Tat bis in die zweite Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts vorherrschend geblieben. Sie schwächte sich erst ab, als nach dem völligen Versagen aller mechanischen Äther-Theorien MAXWELL eine neue Theorie des Lichtes auf elektromagnetischer Grundlage schuf. Die ersten Jahrzehnte des zwanzigsten Jahrhunderts brachten

<sup>1)</sup> HUYGENS, *Traité de la lumière* (Leyden 1690), chap. 1: „Dans la vraie philosophie on conçoit la cause de tous les effets naturels par des raisons de mécanique. Ce qu'il faut faire à mon avis ou bien renoncer à toute espérance de jamais rien comprendre dans la physique.“

dann in reichster Fülle Entdeckungen intra-atomarer Phänomene, und deren fortschreitende Erforschung lenkte immer stärker das Interesse der Physiker auf den Zusammenhang, der wohl zwischen den mechanischen Erscheinungen und den elektrischen, magnetischen und optischen Phänomenen vermutet werden konnte. In Umkehrung des HUYGENSSCHEN Ausspruches könnten die Physiker von heute vielleicht sagen, daß man auf jede Hoffnung verzichten müsse, überhaupt etwas in der Physik wirklich zu verstehen, solange es nicht gelungen sei, die mechanischen Erscheinungen durch die Denkweise der anderen Zweige der Physik zu begreifen. In dem Streben nach einem solchen Ziele stellen nun höchst verheißungsvolle Fortschritte die seit 1924 entstandenen Theorien von DE BROGLIE, SCHRÖDINGER und HEISENBERG dar, in deren Ideen diese Schrift in elementarer Weise einführen möge.

Die Mechanik ist der älteste Zweig der exakten Physik. Ihr galten die Forschungen des eigentlichen Begründers der theoretischen Physik, GALILEIS. Die Aufstellung ihrer Grundgesetze ist das Werk des Mannes, der zuerst die ganze Physik auf mathematischer Grundlage in ein einheitliches System bringen wollte, nämlich NEWTONS. Noch zweihundert Jahre später schien es, als ob die Begründung der Dynamik durch NEWTON eine endgültige gewesen wäre; so daß auf NEWTONS Werk zwar noch eine weitgehende Vervollkommnung und Verfeinerung der formellen Methoden folgen konnte, nicht aber darüber hinaus eine wesentlich neue Erkenntnis hinsichtlich der eigentlichen Bewegungsgesetze möglich wäre.

Die Voreiligkeit einer solchen Auffassung erwies sich im Beginne des zwanzigsten Jahrhunderts. Auf

relativitätstheoretischer Grundlage entstand zwischen 1905 und 1909 eine neue Mechanik. Sie brachte nicht nur Verallgemeinerungen klassischer Bewegungsgesetze, die in ihrer ursprünglichen Form seitdem nur mehr als angenähert richtig angesehen werden dürfen, sondern auch eine völlig neue Erkenntnis von allergrößter Tragweite. Einerseits ergab sich nämlich eine merkwürdige Verknüpfung zwischen Mechanik und Optik insofern, als sich die Geschwindigkeit der Lichtwellen als obere Grenze für alle mechanischen Geschwindigkeiten erwies. Andererseits offenbarte sich ein enger Zusammenhang zwischen dem mechanischen Grundbegriff der Masse und dem vielleicht wichtigsten Begriffe der Gesamtphysik, dem Begriff der Energie. Auf der Grundlage der neuen relativistischen Mechanik erwiesen sich die beiden fundamentalen Begriffe insofern als identisch, als die Masse eines Körpers oder Materieteilchens von seinem Energieinhalt nur durch einen universellen Proportionalitätsfaktor verschieden erscheint, der wiederum mit dem Quadrate der Lichtgeschwindigkeit übereinstimmt.

Doch nicht nur die Relativitätstheorie erschütterte die Grundlagen der „klassischen“ Mechanik. Diese geriet auch in Widerspruch zu wesentlichen Ergebnissen der Quantentheorie, die ungefähr gleichzeitig mit der Relativitätstheorie entstand und gleich dieser nicht bloß ein einzelnes Erscheinungsgebiet, sondern die Grundlagen der gesamten Physik zum Gegenstande hat. Ihren Ausgang nahm die Quantentheorie eigentlich von der Entdeckung eines weitgehenden Parallelismus zwischen den Objekten der mechanischen, der elektrischen und der optischen

Erscheinungen. Schon in den letzten Jahren des neunzehnten Jahrhunderts wurde es klar, daß die Objekte aller Bewegungsvorgänge letzten Endes zwei Arten materieller Urteilchen seien, deren Massen zwei universelle Konstanten darstellen, und daß sich alle Atome aus diesen beiden Arten von Urteilchen aufbauen, die man heute als Protonen (mit der größeren Masse) und Elektronen (mit der kleineren Masse) unterscheidet. Gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts erwachte auch die Erkenntnis einer atomistischen Struktur der Elektrizität. Die Physiker erkannten, daß alle elektrischen Ladungen ganzzahlige Vielfache einer Elementarladung darstellen müssen und daß alle materiellen Urteilchen eine solche Elementarladung aufweisen, und zwar die schwereren Protonen eine positive, die leichteren Elektronen hingegen eine negative<sup>1)</sup>.

Zu den Entdeckungen der materiellen Urteilchen und der elektrischen Elementarladung gesellte sich nun im Beginne des zwanzigsten Jahrhunderts die nicht minder wichtige Entdeckung, daß auch das Licht (im weitesten Sinne dieses Wortes) eine atomistische Struktur aufweist, daß also in gewissem Sinne auch von Lichtatomen gesprochen werden kann. Unter dem Lichte ist dabei nicht bloß das sichtbare Licht zu verstehen, sondern auch die ultraroten Wärme-

---

<sup>1)</sup> Die Masse eines Protons beträgt  $1,66 \cdot 10^{-24}$  g, die 1847 mal kleinere Masse eines Elektrons ist  $9,00 \cdot 10^{-28}$  g. Die elektrische Elementarladung beträgt  $4,77 \cdot 10^{-10}$  elektrostatische Einheiten, wobei in bekannter Weise unter einer elektrostatischen Einheit eine Ladung verstanden wird, die auf eine gleiche in einer Entfernung von 1 cm eine Kraft von einer Dyne (gleich etwa dem Zuge eines Gewichtes von 1 mg) ausübt.

strahlen, die elektrischen Entladungswellen, die Wellen der Radiotelephonie, die ultravioletten Strahlen, die Röntgenstrahlen, die Gamma-Strahlen der radioaktiven Substanzen, und so fort. Diese scheinbar so verschiedenen Arten von Strahlen unterscheiden sich bei völliger Wesensgleichheit bekanntlich nur durch ihre verschiedene Schwingungszahl, die, auf eine Sekunde bezogen, beispielsweise 400 Billionen für rotes Licht beträgt, einige Trillionen für die härtesten Röntgenstrahlen, aber nur einige Hunderttausende für die in der Radiotelephonie üblichen elektrischen Wellen.

Wie nun PLANCK im Jahre 1900 entdeckte und EINSTEIN 1905 schärfer begründete, setzt sich alle lichtartige Strahlung aus Strahlungselementen zusammen, deren Energie sich von der Frequenz nur durch einen universellen Proportionalitätsfaktor unterscheidet. Ganz allgemein erhält man die Energie eines Strahlungselementes in den üblichen absoluten Energieeinheiten, in „Erg“<sup>1)</sup>, indem man die auf eine Sekunde bezogene Frequenz mit der Zahl  $6,55 \cdot 10^{-27}$  multipliziert. Diese Zahl hat die physikalische Dimension einer Energie, gebrochen durch eine auf die Sekunde bezogene Frequenz, also die Dimension eines Produktes aus Energie und Zeit; und da ein solches Produkt in der Mechanik als Wirkung bezeichnet wird, so wird der universelle Proportionalitätsfaktor zwischen Energie und Frequenz das elementare Wirkungsquantum genannt. Die Energie eines Elementes eines gelben Lichtstrahls ergibt sich danach beispielsweise zu  $3,3 \cdot 10^{-13}$  Erg.

<sup>1)</sup> Die Arbeit, die bei dem Heben eines Gewichtes von 1 kg um 1 m verrichtet wird, ist gleich  $9,81 \cdot 10^7$  Erg.

Eine große Zahl von experimentellen Untersuchungen hat den einwandfreien Nachweis dafür erbracht, daß die Strahlungsatome, die heute allgemein als Lichtquanten oder neuestens auch als Photonen bezeichnet werden, ebenso eine individuelle Existenz besitzen wie die Protonen oder Elektronen. Bei dem sogenannten lichtelektrischen Effekt, bei dem durch Belichtung mit ultravioletten oder Röntgenstrahlen Elektronenschwärme aus einer bestrahlten Metallplatte losgerissen werden, zeigt es sich, daß die Energie je eines einzelnen Photons in die Bewegungsenergie je eines einzelnen Elektrons verwandelt wird. Umgekehrt wird bei der Erzeugung von Röntgenstrahlen durch Kathodenstrahlen (also durch rasch bewegte Elektronen) je ein einzelnes Photon durch die verschwindende Bewegungsenergie eines einzelnen Elektrons hervorgerufen.

Infolge der früher erwähnten Identität von Energie und Masse kommt natürlich auch jedem Photon eine bestimmte Masse zu, die ebenfalls seiner Frequenz direkt proportional ist<sup>1)</sup>. Sie ergibt sich in Grammen, indem die Frequenz (pro Sekunde) mit der Zahl  $7,27 \cdot 10^{-48}$  multipliziert wird (diese Zahl ist nämlich gleich dem elementaren Wirkungsquantum, dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit). Für sichtbares Licht ist die Masse eines Photons recht klein, verglichen mit der Masse eines Elektrons, etwa einige Hunderttausende mal kleiner. Für die Photonen der Gamma-Strahlen ist die Masse aber immerhin ungefähr ebenso groß wie die eines Elektrons. Daß den Photonen

<sup>1)</sup> Es ist aber wohl zu beachten, daß im Sinne der Relativitätstheorie die „Ruhemasse“ der Photonen verschwinden müßte; vgl. die spätere Gleichung (43).

in der Tat eine individuelle Masse zukommt, offenbart sich am deutlichsten bei Zusammenstößen zwischen Lichtquanten und Elektronen. Wie Arthur H. COMPTON im Jahre 1923 entdeckte, ist bei solchen Zusammenstößen nicht nur das Gesetz der Erhaltung der Energie erfüllt, sondern auch das Gesetz der Erhaltung der Bewegungsgröße, wenn letztere sowohl bei dem Elektron als auch bei dem mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Photon durch das Produkt aus der Masse und der Geschwindigkeit angegeben wird.

Obwohl das elementare Wirkungsquantum in die Physik eigentlich als eine optische Konstante eingeführt wurde (nämlich als diejenige universelle Konstante, die den Atomismus des Lichtes regelt), so erkannten die Physiker doch bald, daß auch rein mechanische Vorgänge innerhalb der Atome durch das elementare Wirkungsquantum festgelegt sein müssen. Die ursprünglich rein optische Konstante übernahm so auch die zweite Funktion einer atommechanischen Fundamentalkonstante<sup>1)</sup>. Die Notwendigkeit einer Atommechanik ergab sich aber wiederum aus der Erkenntnis, daß alle Atome einen positiv elektrischen Kern enthalten, der von

---

<sup>1)</sup> Der Verfasser dieser Schrift glaubt der Erste gewesen zu sein, der diese Auffassung — im Jahre 1910 — entwickelte, und zwar in seiner Anwendung auf das Wasserstoffatom; Sitzber. der Wiener Akad. d. Wiss., math. nat. Kl., Abt. IIa, 1910, S. 119—144. In der Abhandlung wurde auch zuerst der Zusammenhang der spektroskopischen Grundkonstante, der sogenannten RYDBERGSchen Konstante, mit der elektrischen Elementarladung, der Elektronenmasse und dem elementaren Wirkungsquantum abgeleitet.

negativen Elektronen umgeben ist<sup>1)</sup>. Zwischen dem Kerne und seiner Umgebung muß daher eine elektrische Anziehung wirken, und nur durch das Hinzukommen von Zentrifugalkräften glaubte man die dauernde Existenz eines derartigen Atoms erklären zu können. Man nahm infolgedessen die den Kern umgebenden Elektronen als in raschem Umlauf begriffen an, ähnlich den Planeten des Sonnensystems, mit dem man die Atome gern verglich.

Das einfachste Problem der Atommechanik lag jedenfalls bei dem Wasserstoffatom vor, bei dem man auf Grund von vielen Erfahrungstatsachen nur ein einziges Planetenelektron annimmt. Der Radius der Elektronenbahn erschien in einem solchen Atommodell zunächst unbestimmt. BOHR überwand diese Schwierigkeit im Jahre 1913 durch eine Hypothese, die sich für die weitere Entwicklung der Atomphysik als ungemein fruchtbar erwies. Er setzte den noch mit  $2\pi$  multiplizierten Drehimpuls der Elektronenbahn (bestimmt durch das Produkt aus Elektronenmasse, Bahnradius und Geschwindigkeit) gleich dem elementaren Wirkungsquantum. In Verbindung mit der Tatsache, daß Zentrifugalkraft und elektrische Anziehung einander aufheben, ergab die BOHRsche Hypothese für das benutzte Modell ganz bestimmte Werte des Bahnhalmessers und der Bahngeschwindigkeit<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Die von RUTHERFORD im Jahre 1911 begründete Vorstellung des „Kernatoms“ findet ihre wichtigste experimentelle Stütze in Beobachtungen über den Durchgang von  $\alpha$ -Strahlen durch Metallfolien.

<sup>2)</sup> Für den Bahnhalmesser ergibt sich auf Grund der BOHRschen Hypothese ein Wert von  $5,30 \cdot 10^{-9}$  cm, für die Bahngeschwindigkeit ein Wert von  $2,188 \cdot 10^8$  cm pro Sekunde; die Zahl der Umläufe pro Sekunde ergibt sich zu  $6,58 \cdot 10^{15}$ .

Andererseits zeigen nun die spektroskopischen Beobachtungen, daß für das Atom eines jeden chemischen Elementes eine Mannigfaltigkeit ganz bestimmter Werte von Lichtfrequenzen charakteristisch ist, die in ihrer Gesamtheit das sogenannte Linienspektrum des betreffenden Grundstoffs darstellen. Die Linien können nicht nur als Emissions-, sondern auch als Absorptionslinien auftreten, d. h. das Atom kann Photonen bestimmter Frequenzen entweder abgeben oder in sich aufnehmen. Nach dem Satze von der Erhaltung der Energie muß offenbar der erste Vorgang mit einem Verlust, der zweite mit einem Gewinn an atomarer Energie verbunden sein. Aus der Proportionalität zwischen der Energie eines Photons und seiner Frequenz folgt hieraus, daß ein jedes Atom seine Energie nur um ganz bestimmte, für das betreffende chemische Element charakteristische Energiebeträge ändern kann.

In der Tat zeigen auch Beobachtungen über Zusammenstöße von Elektronen mit Atomen<sup>1)</sup>, daß die Elektronen nur ganz bestimmte, genau meßbare Energiebeträge an die Atome abzugeben vermögen, und überdies geht aus diesen Versuchen auch hervor, daß durch die Energieabgabe an das Atom unter Umständen die Emission einer Spektrallinie hervorgerufen wird, deren Frequenz genau gleich ist dem abgegebenen Energiebetrag, dividiert durch das elementare Wirkungsquantum. Es ergibt sich also die wichtige Folgerung, daß die Atome außer in ihren Grundzuständen — wenigstens vorübergehend — auch in anderen, energiereicheren Zuständen existieren können, die aber ganz

<sup>1)</sup> Die Versuche über Elektronenstöße wurden von FRANK und HERTZ im Jahre 1913 begründet.

bestimmten Energiestufen entsprechen. Übergänge zwischen diesen, jedem Grundstoff eigentümlichen Energiestufen sind es eben, die zu der Emission oder Absorption bestimmter Spektrallinien führen.

BOHR ist zu einer richtigen Deutung des tatsächlich beobachtbaren Wasserstoffspektrums durch die Annahme gelangt, daß in den abnormalen Zuständen des Wasserstoffatoms der mit  $2\pi$  multiplizierte Drehimpuls nicht dem elementaren Wirkungsquantum selbst, sondern einem ganzzahligen Vielfachen hiervon gleich sei. Die Reihe der Atomzustände ergibt sich nach BOHR, indem man den Quotienten aus dem mit  $2\pi$  multiplizierten Drehimpuls und dem elementaren Wirkungsquantum die Reihe der ganzen Zahlen (1, 2, 3 usw.) durchlaufen läßt. Im wesentlichen bestand also BOHRs Methode darin, daß er zunächst nach den Prinzipien der klassischen Mechanik die Gesamtheit aller im Atom möglichen Bahnen ermittelte und dann erst aus dieser Gesamtheit als „quantentheoretisch zulässig“ diejenigen Bahnen aussonderte, die der eben erwähnten Quantenbedingung genügen.

Diese BOHRsche Methode, die bald darauf, vor allem durch SOMMERFELD, sehr vervollkommenet und erweitert wurde, hat sich als ungemein fruchtbar für die weitere Entwicklung der theoretischen Physik erwiesen. Mit ihrer Hilfe gelang innerhalb eines Jahrzehnts die Vollendung einer großartigen Theorie, die fast alle bekannten spektroskopischen Erscheinungen in einheitlicher Weise zu erklären vermochte. Als indessen die Zahl der atomphysikalischen Probleme wuchs, da mußten die Physiker doch bisweilen auch ein Versagen der BOHRschen Methode feststellen. So er-

wies es sich beispielsweise als unmöglich, mit ihrer Hilfe das Heliumatom in Übereinstimmung mit der Erfahrung zu deuten, obwohl dieses Atom das einfachste nächst dem Wasserstoffatom ist.

Die gelegentlichen Mißerfolge der BOHRschen Theorie lenkten die Aufmerksamkeit der Physiker wiederum auf die fundamentalen Schwierigkeiten, die dieser Theorie von Anfang an anhafteten, die aber in den Jahren der triumphalen Erfolge in Vergessenheit geraten waren. Nun, wo die Theorie mehrfach zu versagen begann, wurden auch diese Schwierigkeiten wieder stärker empfunden. Die Auszeichnung der „gequantelten“ Bahnen mußte vom Standpunkte der klassischen Mechanik aus völlig unverständlich bleiben und nicht minder die Bestimmung der mechanischen Bahnen durch eine optische Fundamentalkonstante. Eine Befreiung aus der Krise, von der derart die Atomtheorie um das Jahr 1923 ergriffen wurde, konnte nur von einer neuerlichen Verallgemeinerung der Mechanik erhofft werden, von einer dritten Begründung der Mechanik (wenn man so sagen darf), die in der neuen Form nicht nur die erste GALILEISCHE, sondern auch die zweite EINSTEINSche Mechanik als Spezialfall in sich schließen mußte.

Die EINSTEINSche Mechanik hatte neue Erkenntnisse für den Fall enorm großer Geschwindigkeiten geschaffen, während für den Fall der gewöhnlichen Geschwindigkeiten die „klassische“ Mechanik richtig blieb. Ähnlich mußte von der dritten Mechanik gefordert werden, daß sie zu neuen Resultaten in ihrer Anwendung auf Bereiche von atomaren Dimensionen führe, während in der Anwendung auf makroskopische Bereiche ihre Ergebnisse mit denen der klassischen

Mechanik übereinstimmen. Auf solche Weise konnte gehofft werden, daß eine neue Mechanik aus sich selbst heraus die bis dahin so mysteriösen Quantenbedingungen des atomaren Geschehens liefern würde, und diese nicht länger als fremde Zutaten ohne inneren Zusammenhang ihr aufgezwängt werden müßten; endlich auch, daß für die neue Mechanik die Schwierigkeiten wegfallen würden, die sich für die frühere Quantentheorie dadurch ergeben hatten, daß manche ihrer notwendigen Ergebnisse in Widerspruch zu experimentellen Beobachtungen standen.

## Zweites Kapitel.

### Das Fermatsche Prinzip, die Lorentz-Transformation und der Begriff der Gruppengeschwindigkeit.

Sowohl in der Mechanik als auch in der Optik geht bis in frühe Zeiten das Bestreben zurück, ein allgemeines oberstes Prinzip aufzufinden, das eine Maximal- oder Minimaleigenschaft einer mechanischen oder optischen Größe zum Ausdruck bringt und dadurch in besonders einfacher Form die wesentlichen Grundgesetze des betreffenden Wissenszweiges zusammenfaßt. In der Optik wurde als ein solches Prinzip im siebzehnten Jahrhundert von FERMAT das Prinzip der kürzesten Lichtzeit aufgestellt. Es lehrt, daß ein Lichtstrahl, der von einem Punkte  $A$  zu einem Punkte  $B$  gelangt, zur Zurücklegung des wirklichen Weges eine kürzere Zeit braucht, als

er zu dem Durchlaufen jedes anderen Weges zwischen  $A$  und  $B$  benötigen würde<sup>1)</sup>.

Aus dem FERMATSCHEN Prinzip läßt sich die Form des Lichtstrahls richtig bestimmen, beispielsweise sehr

leicht das Brechungsgesetz ableiten, demzufolge der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels in demselben Verhältnis steht wie die Wellengeschwindigkeit in dem ersten Medium zu derjenigen im zweiten Mittel. Es seien z. B.  $C$  und  $D$  (Fig. 1) zwei benachbarte Punkte in der Trennungsfläche der

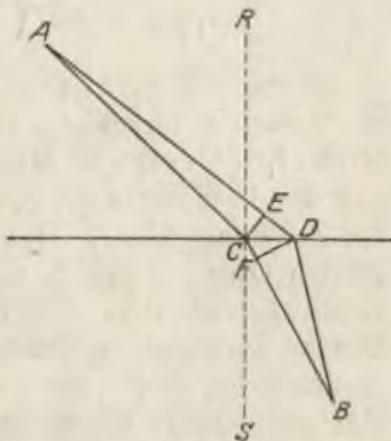


Fig. 1.

beiden Medien, und  $E$  und  $F$  seien die Fußpunkte der Lote, die von diesen beiden Punkten auf die Richtungen der Strahlen  $AD$  und  $CB$  gefällt werden. Die Lichtzeiten seien für die Lichtwege  $ACB$  und  $ADB$  gleich  $t_1$  und  $t_2$ , und die Lichtgeschwindigkeiten seien in den beiden Medien gleich  $u_1$  und  $u_2$ . Dann ist, wie aus Fig. 1 folgt,

$$t_2 - t_1 = \frac{DE}{u_1} - \frac{CF}{u_2}.$$

<sup>1)</sup> FERMATS Prinzip knüpft an ein ähnliches an, das bereits im Altertum von HERON von Alexandria für den speziellen Fall der Reflexion von Lichtstrahlen aufgestellt worden war und das für diesen Fall den Lichtweg als Minimum erklärt hatte. Da hierbei die Geschwindigkeit überall denselben Wert hat, entspricht in diesem Spezialfall in der Tat der kürzesten Lichtzeit auch der kürzeste Lichtweg.

Bezeichnen wir den Einfallswinkel ( $ACB$ ) mit  $\alpha$  und den Brechungswinkel ( $BCS$ ) mit  $\beta$ , und beachten wir, daß  $C$  und  $D$  benachbarte Punkte sein sollen, so können wir auch schreiben

$$t_2 - t_1 = CD \left( \frac{\sin \alpha}{u_1} - \frac{\sin \beta}{u_2} \right).$$

Wenn nun der wirkliche Weg, den der Lichtstrahl von  $A$  nach  $B$  zurücklegt, über  $C$  führt, dann muß der Größe  $t_1$  die erwähnte Minimaleigenschaft zukommen, und dies bedeutet in der Sprache der Mathematik, daß der Zeitunterschied  $t_2 - t_1$  verschwindend klein von der zweiten Ordnung werden muß, wenn die Strecke  $CD$  verschwindend klein von der ersten Ordnung wird. Das ist aber nur dann möglich, wenn der Klammerausdruck, mit dem in der letzten Gleichung die Strecke  $CD$  multipliziert ist, gleich null ist; d. h. es muß

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{u_1}{u_2}$$

sein, welche Proportion eben das Brechungsgesetz zum Ausdruck bringt.

Betrachten wir also zwei Medien mit den Wellengeschwindigkeiten  $u_1$  und  $u_2$ , und bezeichnen wir mit  $s_1$  und  $s_2$  die Längen der Strecken, die der Strahl auf dem Wege von  $A$  nach  $B$  in den beiden Medien zurücklegt, so wird für den wirklichen Weg die eine Zeit darstellende Summe  $(s_1/u_1 + s_2/u_2)$  ein Minimum. Für ein inhomogenes Mittel, in dem die Geschwindigkeit im allgemeinen von Stelle zu Stelle verschieden ist, finden wir den die Lichtzeit darstellenden Ausdruck, indem wir den Weg des Strahls in Elemente zerlegen, jedes dieser Wegelemente durch den Wert dividieren, den für die betreffende Stelle die vom Orte abhängige

Geschwindigkeit hat, und alle diese Quotienten summieren. Wir erhalten dann, wie man in der Sprache der Mathematik sagt, das von  $A$  bis  $B$  erstreckte Wegintegral der reziproken Wellengeschwindigkeit; und somit ergibt sich bei Benutzung der üblichen mathematischen Symbole die Beziehung

$$(1) \int_A^B \frac{ds}{u} = \text{Minimum (} u \text{ Wellengeschwindigkeit).}$$

Diese Beziehung, die den allgemeinen Ausdruck des FERMATSCHEN Prinzips darstellt, steht nun in einem merkwürdigen Zusammenhang mit einer Formel, die in der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts als oberstes mechanisches Prinzip aufgestellt wurde. Sie geht auf MAUPERTUIS zurück, hat aber ihre exakte Formulierung eigentlich erst etwas später durch EULER erhalten. Nach diesem Prinzip ist für die wirkliche Bewegung, die ein (punktförmig gedachter) Körper von  $A$  nach  $B$  ausführt, das Wegintegral der mechanischen Geschwindigkeit ( $v$ ) ein Minimum <sup>1)</sup>. Es gilt die Beziehung

$$(2) \int_A^B v ds = \text{Minimum} \\ (v \text{ mechanische Geschwindigkeit).}$$

Aus dieser Formel lassen sich in der Tat die Grundgleichungen der Mechanik ableiten, und sie erlaubt auch ohne weiteres die Bestimmung der Bahn; sie ergibt beispielsweise deren Parabelgestalt für den besonderen Fall einer Wurfbewegung.

---

<sup>1)</sup> In besonderen Fällen kann das Integral allerdings auch ein Maximum sein; die exakte Theorie verlangt nur, daß es ein „Extremum“ sei.

In dem MAUPERTUISschen Theorem spielt also die mechanische Geschwindigkeit dieselbe Rolle wie in dem FERMATSchen Theorem die reziproke Wellengeschwindigkeit. Das FERMATSche Prinzip ist nun ein unter gewissen Voraussetzungen für alle Arten von Wellen angenähert gültiges, generelles Prinzip. Ein Vergleich der Gleichungen (1) und (2) ergibt somit die Möglichkeit einer Erklärung der mechanischen Gesetzmäßigkeiten auf wellentheoretischer Grundlage. Denn das oberste mechanische Prinzip ergibt sich mit Notwendigkeit, wenn man annimmt, daß die Bewegungserscheinungen auf irgend welchen Wellenvorgängen beruhen, bei denen eine universelle Proportionalität zwischen der mechanischen Geschwindigkeit und der reziproken Wellengeschwindigkeit besteht. Um diesen Zusammenhang erörtern zu können, möge zunächst noch eine kurze, ganz elementare Betrachtung über die allgemeine Wellenformel eingeschaltet werden.

Ein jeder Wellenvorgang stellt sich, wenn wir eine bestimmte Stelle innerhalb des Wellenfeldes ins Auge fassen, als eine Schwingung dar, und eine solche ist in ihrer einfachsten Form durch die Gleichung beschreibbar

$$(3) \quad S = A \sin(2\pi \nu t),$$

wenn  $S$  die schwingende Größe<sup>1)</sup> bedeutet,  $A$  die Am-

---

<sup>1</sup> Die schwingende Größe kann eine Distanz oder ein Winkel sein (wie z. B. bei einer Pendelschwingung), aber auch eine Dichte oder eine elektrische oder magnetische Feldstärke oder eine Temperatur usw. Eine schwingende Bewegung um eine Ruhelage (nach Art eines Pendels) stellt wohl das anschaulichste Beispiel für einen Schwingungsvorgang dar; es ist indessen keineswegs notwendig, und wäre ganz verfehlt, wollte man sich

plitude,  $\nu$  die Frequenz der Schwingung und  $t$  die Zeit. In der Tat nimmt ja die durch die Gl. 3 dargestellte Größe  $S$  immer wieder denselben Wert an, wenn die Zeit um die Größe  $1/\nu$  wächst<sup>1</sup>). Schreiben wir die Gl. 3 in der Form

$$(4) \quad S = A \sin \varphi,$$

so wird  $\varphi$  als die Phase der Schwingung bezeichnet. Sie hat die einfache Form wie in Gl. 3 allerdings nur dann, wenn der Nullpunkt der Zeit so gewählt wird, daß für ihn die schwingende Größe  $S$  gleich null wird. Diese Festsetzung ist im allgemeinen nicht möglich, wenn mehrere gleichzeitig vorhandene Schwingungen zu betrachten sind; in diesem Falle muß in dem Ausdruck für die Phase noch eine additive Phasenkonstante hinzugefügt werden.

Mit der zeitlichen Periodizität, die einen Schwingungsvorgang charakterisiert, erscheint bei einer Welle nun noch eine räumliche Periodizität kombiniert. Das Fortschreiten einer Welle in einer Richtung, die etwa als  $x$ -Richtung gewählt werde, besteht darin, daß sich in einer Entfernung  $x_1$  von einer irgendwie gewählten Nullstelle ( $x = 0$ ) stets derselbe Zustand vorfindet, wie er um  $t_1$  Zeiteinheiten früher an der Nullstelle bestand, wofern das Produkt aus der Zeitgröße  $t_1$  und der Wellengeschwindigkeit ( $u$ ) gleich der Entfernung  $x_1$  ist. Es ist  $t_1$  gleich  $x_1/u$ , und wir erhalten somit den

deshalb einen jeden Schwingungsvorgang, der in einer periodischen Veränderung irgend einer physikalischen Größe besteht, unter dem Bilde einer mechanischen Oszillation vorstellen.

<sup>1</sup> Denn es ist

$$\sin \left[ 2\pi\nu \left( t + \frac{1}{\nu} \right) \right] = \sin (2\pi\nu t + 2\pi) = \sin (2\pi\nu t).$$

Schwingungszustand, der an einer beliebigen Stelle  $x$  zur beliebigen Zeit  $t$  besteht, indem wir in der Gl. 3 die dort auftretende Größe  $t$  durch den Ausdruck  $(t-x/u)$  ersetzen. Derart ergibt sich die Wellenformel

$$(5) \quad S = A \sin \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Die Phase ist also durch den Ausdruck in der eckigen Klammer bestimmt, zu dem im allgemeinen noch eine Phasenkonstante ( $\epsilon$ ) hinzuzufügen ist. Auch haben wir im allgemeinen an die Stelle der geradlinigen Entfernung  $x$  von einer Nullstelle die Länge  $s$  des Strahles, von der Nullstelle an gerechnet, zu setzen. Für die Phase gilt daher die Beziehung

$$(6) \quad \varphi = 2\pi\nu \left( t - \frac{s}{u} \right) + \epsilon.$$

Die Wellenformel steht nun in einem merkwürdigen, bis vor kurzem jedoch kaum beachteten Zusammenhang mit einer fundamentalen Formel der Relativitätstheorie, die als die LORENTZ-Transformation bezeichnet wird. Die EINSTEINSche Relativitätstheorie beruht bekanntlich auf der Annahme, daß alle Zeitangaben nur relativ sind; daß sie von dem Standpunkt des beschreibenden Beobachters abhängen und daher für zwei gegeneinander bewegte Beobachter verschieden sind. Andererseits postuliert die Relativitätstheorie wiederum einen solchen Zusammenhang zwischen den Ort- und Zeitangaben der beiden Beobachter, daß sich für beide das Licht nach allen Richtungen gleichförmig mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Dies folgt aus der Erfahrungstatsache, daß ein Einfluß der Erdbewegung auf die irdische Lichtausbreitung nicht vorhanden ist.

Für den speziellen Fall einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung ergibt sich dieser Zusammenhang in der Form der sogenannten LORENTZ-Transformation. Sind die beiden Beobachter gegeneinander mit einer Geschwindigkeit  $v$  bewegt, und zwar in einer Richtung, die wir mit den Richtungen der beiden  $x$ -Achsen zusammenfallen lassen, so sind die von den beiden Beobachtern benutzten räumlichen Koordinaten und Zeitangaben untereinander durch die Beziehungen<sup>1)</sup> verknüpft

$$(7) \quad x' = \beta(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

Dabei bedeutet  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $\beta$  die Abkürzung

$$(8) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Von besonderem Interesse ist nun mit Bezug auf die Wellenformel in den Gleichungen (7) der Zusammenhang der beiden relativen Zeiten. Ordnen wir nämlich der mechanischen Geschwindigkeit  $v$  eine andere, zu ihr in bezug auf die Lichtgeschwindigkeit reziproke<sup>2)</sup> mittels der Beziehung zu

$$(9) \quad uv = c^2,$$

<sup>1)</sup> In der Tat geht bei dem Einsetzen der Werte aus Gl. 7 der Ausdruck  $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$  identisch in den Ausdruck  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$  über, während andererseits die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

die in allen Richtungen gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $c$  erfolgende Ausbreitung des Lichtes beschreibt.

<sup>2)</sup> Gemeint ist daß  $u$  zu  $v$  reziprok sein soll, wenn die Lichtgeschwindigkeit als Geschwindigkeitseinheit angesehen ist.

so können wir die vierte der Gleichungen (7) in der Form schreiben

$$(10) \quad t = \beta \left( t - \frac{x}{u} \right);$$

eine Formel, die sogleich die enge Beziehung zu der Wellengleichung erkennen läßt.

Um die Bedeutung der letzten Formel zu erkennen, betrachten wir nun irgend einen Schwingungsvorgang, der irgendwie mit einem bewegten Körper verknüpft sei. Die Geschwindigkeit sei, auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogen, gleich  $v$ . Wir sehen dieses Koordinatensystem als „ungestrichenes“  $(x, y, z, t)$  an und denken uns als „gestrichenes“  $(x', y', z', t')$  eines, für das der Körper ruhe. Das gestrichene System schreite also gegen das eigentliche Koordinatensystem ebenfalls mit der Geschwindigkeit  $v$ , und zwar in der gemeinsamen  $x$ -Richtung, fort. Inbezug auf dieses gestrichene Koordinatensystem ist nun jedesfalls der Schwingungsvorgang durch die Formel beschreibbar

$$S = A \sin(2\pi\nu' t').$$

Indem wir die Gl. 10 anwenden und zur Vereinfachung

$$(11) \quad \beta\nu' = \nu$$

setzen, können wir gemäß der LORENTZ-Transformation auch schreiben

$$S = A \sin \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

Auf Grund dieser Gleichung kann somit ein jeder Schwingungsvorgang, der mit einem bewegten Körper verknüpft ist, als eine Welle aufgefaßt werden, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu der mechanischen Geschwindigkeit des Körpers mit Bezug

auf die Lichtgeschwindigkeit reziprok ist (d. h. gleich ist  $c^2/v$ ).

Nach einer fundamentalen Beziehung der Relativitätstheorie kann nun eine mechanische Geschwindigkeit nie größer sein als die Lichtgeschwindigkeit und sie auch nie völlig erreichen. Die Ausbreitung der eben betrachteten Wellen muß daher jedesfalls mit Überlichtgeschwindigkeit erfolgen. Eine solche Vorstellung scheint zunächst allerdings mit einer großen Schwierigkeit verbunden zu sein; denn die Geschwindigkeiten der bewegten Körper sind ja doch völlig verschieden von den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen, die man sich mit den Körpern verknüpft zu denken hätte. Für ein rasches Automobil, dessen Geschwindigkeit vielleicht den 10000000sten Teil der Lichtgeschwindigkeit ausmacht, sind die Wellen rund hundert Billionen mal schneller als das Automobil selbst, und für einen Fußgänger ist das Mißverhältnis noch größer. Der scheinbare Widerspruch kann jedoch in befriedigender Weise durch eine Überlegung gelöst werden, die schon seit vielen Jahrzehnten den theoretischen Physikern sowohl aus der Optik als auch aus der Hydromechanik bekannt ist und die zu dem wichtigen Begriffe der Gruppengeschwindigkeit geführt hat.

Unter einer Wellengruppe versteht man eine Gesamtheit von Wellen, deren Frequenzen innerhalb eines gewissen Bereiches voneinander abweichen. Das Verhalten einer solchen Wellengruppe wird verständlich, wenn man sich vor Augen hält, daß der Mittelwert des Sinus aller möglichen Winkel bei Berücksichtigung des Vorzeichens null ist. Denn jedem positiven Werte des Sinus entspricht ein gleich großer negativer,

sodaß sie einander wechselseitig aufheben. Betrachtet man daher eine Gesamtheit von Schwingungen, deren Phasen nicht irgendwie übereinstimmen, so ist im allgemeinen die resultierende Schwingung, die sich durch Summierung der Produkte aus den Amplituden und den Sinus der zugehörigen Phasen ergibt, sehr klein gegenüber der algebraischen Summe der Amplitudenbeträge. Innerhalb einer Wellengruppe fassen wir nun eine Stelle ins Auge, an der eine ziemlich weitgehende Übereinstimmung der Phase für die einzelnen, zu der Gruppe gehörigen Wellen besteht und an der somit auch die resultierende Schwingung verhältnismäßig groß ist. Eine solche Stelle, für die die Energiedichte im Verhältnis zur Umgebung ein Maximum darstellt, wollen wir als ein Energiezentrum der Wellengruppe bezeichnen. Es ist offenbar dadurch charakterisiert, daß für zwei Wellen, deren Frequenzen unendlich wenig verschieden sind, der Phasenunterschied verschwindend klein von der zweiten Ordnung wird; d. h. für ein Energiezentrum muß der partielle Differentialquotient der Phase nach der Frequenz verschwinden, also

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$$

sein.

Setzen wir für  $\varphi$  den Wert aus der Gl. 6 ein, und wenden wir die bekannten elementaren Regeln der Differentialrechnung an, so finden wir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 2\pi t - 2\pi s \frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} + \frac{d\varepsilon}{d\nu}.$$

Hieraus folgt auf Grund der Gl. 12

$$s = \frac{1}{\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv}} \left( t + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varepsilon}{dv} \right).$$

Die Größe  $s$  hängt also von der Zeit ab, d. h. das Energiezentrum wandert selbst, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die demjenigen Faktor gleich ist, mit dem der große Klammerausdruck der letzten Gleichung multipliziert ist. Denn nennen wir diesen Faktor  $g$ , so ergibt sich in der Tat der die Geschwindigkeit bestimmende Differentialquotient des Weges nach der Zeit aus der letzten Gleichung zu  $g$ . Die Größe  $g$  stellt demnach die Geschwindigkeit dar, mit der sich die Energiezentren fortbewegen, mit der sich also die Energie der Wellen ausbreitet. Diese Größe wird als die Gruppengeschwindigkeit der Welle bezeichnet, und sie ist, wofern nicht die Wellengeschwindigkeit von der Frequenz unabhängig ist, wofern also „Dispersion“ besteht, wohl von der Wellengeschwindigkeit zu unterscheiden. Für die Gruppengeschwindigkeit folgt aus der letzten Gleichung die Beziehung<sup>1)</sup>

$$(13) \quad \frac{1}{g} = \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv}.$$

<sup>1)</sup> Führen wir in Gl. 13 die Differentiation aus, so finden wir

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{u} - \frac{v}{u^2} \frac{du}{dv}.$$

Wir ersehen hieraus in der Tat, daß bei dem Fehlen von Dispersion, aber auch nur dann, die Gruppengeschwindigkeit mit der Wellengeschwindigkeit übereinstimmt.

Diese Gleichung wollen wir nun auf den besonderen Fall der vorhin betrachteten Über-Lichtwellen (wenn sie zunächst so kurz genannt werden dürfen) anwenden. Das Dispersionsgesetz dieser Wellen ist in der Gl. 11 (bei Berücksichtigung von Gl. 8) enthalten. Indem wir die in der Gl. 11 auftretende, von der Geschwindigkeit unabhängige Frequenz statt mit  $\nu$  nunmehr mit  $\nu_0$  bezeichnen <sup>1)</sup>, finden wir

$$(14) \quad \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nach Gl. 9 ist bei den Über-Lichtwellen

$$\frac{\nu}{u} = \frac{\nu v}{c^2},$$

und daher wird

$$\frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} = \frac{v}{c^2} + \frac{\nu}{c^2} \frac{dv}{d\nu}.$$

Nach Gl. 14 ist aber

$$\frac{d\nu}{d\nu} = \frac{\nu_0 \nu}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\nu \nu}{c^2 - v^2}.$$

Daher wird

$$\frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} = \frac{v}{c^2} + \frac{c^2 - v^2}{c^2 \nu} = \frac{1}{v}.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit Gl. 13 das wichtige Ergebnis

$$(15) \quad g = v.$$

<sup>1)</sup>  $\nu_0$  ist ja die Frequenz in bezug auf ein mit dem Körper mitbewegtes Koordinatensystem.

Denken wir uns also mit einem bewegten Materieteilchen einen Schwingungsvorgang verknüpft, so läßt sich auf Grund der LORENTZ-Transformation dieser Schwingungsvorgang als eine Überlichtwelle deuten, deren Gruppengeschwindigkeit mit der mechanischen Geschwindigkeit des Materieteilchens übereinstimmt.

### Drittes Kapitel.

## Die Wellenmechanik von De Broglie.

Die in dem vorhergehenden Kapitel besprochenen Zusammenhänge ergeben sich durchweg aus der Mechanik und Optik früherer Jahrhunderte, aus allgemeinen wellentheoretischen Betrachtungen und aus der Relativitätstheorie. Es ist das große Verdienst von LOUIS DE BROGLIE, daß er im Jahre 1924 diese früher kaum beachteten Zusammenhänge in ihrer ganzen Tragweite erfaßte und dadurch der Schöpfer einer neuen Theorie werden konnte, die von größtem Einfluß auf die seitherige Entwicklung der Physik wurde. DE BROGLIE machte die fundamentale Annahme, daß mit jedem Materieteilchen ein Schwingungsvorgang derart verknüpft ist, daß ein Energieelement dieser Schwingung, nämlich das Produkt aus der Frequenz und dem elementaren Wirkungsquantum, gleich ist der Eigenenergie des Materieteilchens, also im Sinne der Relativitätstheorie gleich ist dem Produkte aus der Masse und dem Quadrate der Lichtgeschwindigkeit.

Nach dem in dem vorhergehenden Kapitel Gesagten erscheint somit jedes bewegte Materieteilchen mit einer Welle verbunden, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreitet und deren Gruppengeschwindigkeit die mechanische Geschwindigkeit des Materieteilchens darstellt. Die Gesetzmäßigkeiten, die für dessen Bewegung gelten und die ihren Ausdruck in dem MAUPERTUISSCHEN Prinzip finden, brauchen dann nicht länger als selbständige Axiome angesehen zu werden; denn sie ergeben sich auf Grund der BROGLIESCHEN Auffassung als notwendige Konsequenz eines generellen Wellenprinzips. Die Materie selbst erscheint in Wellen aufgelöst, deren Energiezentren die Protonen und Elektronen darstellen. Man bezeichnet darum die von DE BROGLIE begründete Theorie als Wellenmechanik und die mit Überlichtgeschwindigkeit sich ausbreitenden Wellen als Materiewellen.

Als die fundamentale Gleichung der Wellenmechanik erscheint nach dem vorhin Gesagten die Beziehung

$$(16) \quad h\nu = mc^2,$$

wenn  $m$  die Masse des Materieteilchens und  $h$  das elementare Wirkungsquantum bedeuten. Setzen wir für  $m$  die Masse eines Elektrons ein, so ergibt sich die assoziierte Frequenz zu  $1,24 \cdot 10^{20}$  (pro Sekunde), im Falle des 1847 mal so schweren Protons zu  $2,29 \cdot 10^{23}$ . Wegen der Proportionalität zwischen Frequenz und Masse variiert ebenso wie die von der Geschwindigkeit abhängige Masse auch die Frequenz nur innerhalb eines äußerst schmalen Bereiches, wenn von Bewegungen abgesehen wird, deren Geschwindigkeit von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit ist. Wie

bei jeder Art von Wellen, hängt natürlich auch bei den Materiewellen die Wellenlänge mit der Frequenz durch die Beziehung zusammen, daß das Produkt beider die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt; also

$$(17) \quad u = \lambda \nu$$

oder nach Gl. 9

$$\lambda = \frac{c^2}{\nu v}.$$

Hieraus folgt nach Gl. 16

$$(18) \quad \lambda = \frac{h}{mv}.$$

Für ein Elektron findet man danach die Wellenlänge in Zentimetern, indem man die Zahl 7,28 durch die Geschwindigkeit des Elektrons (in cm pro sec) dividiert. Bei einer Geschwindigkeit von etwa 20 bis 40 Prozent der Lichtgeschwindigkeit (wie dies bei Kathodenstrahlen der Fall ist) ist  $\lambda$  von der Größenordnung von etwa  $10^{-9}$  cm, bei den verhältnismäßig langsamen Elektronen, die von glühenden Drähten emittiert werden, ungefähr von der Größenordnung von  $10^{-7}$  cm, also von derselben Größenordnung wie die Wellenlängen weicher Röntgenstrahlen. Da das Produkt aus Masse und mechanischer Geschwindigkeit die Bewegungsgröße oder den Impuls ( $G$ ) darstellt, so kann die Gl. 18 auch in der Form geschrieben werden

$$(19) \quad G = \frac{h}{\lambda}$$

oder nach Gl. 17

$$(20) \quad G = \frac{h\nu}{u}.$$

Wie wollen nun eine periodische Bewegung in einer geschlossenen Bahn betrachten. Es sei  $dr$

ein Element der Bahn, das wir natürlich mit einem Strahlelement ( $ds$ ) identifizieren dürfen; dann ist für einen gegebenen Augenblick (nach Gl. 6) die örtliche Verschiedenheit der Phase an den beiden Endpunkten des Bahnelements

$$d\varphi = -2\pi v \frac{dr}{u}.$$

Sind  $A$  und  $B$  zwei Punkte der geschlossenen Bahn, und ist in einem bestimmten Augenblick  $\varphi_1$  die Phase in  $A$ , so gilt daher für die Phase in  $B$  die Beziehung

$$\varphi_2 = \varphi_1 - 2\pi \int_A^B \frac{v dr}{u}.$$

Lassen wir das Stück der Bahn zwischen  $A$  und  $B$  immer größer werden, so muß infolge der Geschlossenheit der Bahn der immer weiter wegrückende Punkt  $B$  schließlich wiederum mit dem Punkte  $A$  zusammenfallen. Im Punkt  $A$  kann die schwingende Größe aber nur einen einzigen, bestimmten Wert haben, und es muß somit, falls  $B$  mit  $A$  zusammenfällt,

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1$$

sein. Dies ist nur dann allgemein möglich, wenn

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi$$

ist, wobei  $n$  eine ganze Zahl bedeutet. Bezeichnen wir das über die geschlossene Bahn erstreckte Integral mit dem üblichen Symbol  $\oint$ , so muß also

$$(21) \quad \oint \frac{v dr}{u} = n$$

sein oder (nach Gl. 20)

$$(22) \quad \oint G dr = nh.$$

Die letzten zwei Gleichungen nehmen eine besonders einfache Form für den speziellen Fall konstanter Geschwindigkeit an. In einem solchen Falle, der bei einer gleichförmigen Kreisbewegung vorliegt, sind nämlich auch die Wellengeschwindigkeit und wegen der Konstanz der Masse die Frequenz konstant, und (unter Benutzung der Gl. 17) kann dann die Gl. 21 in der Form geschrieben werden:

$$(23) \quad \oint dr = n\lambda;$$

d. h. bei konstanter Geschwindigkeit sind nur solche geschlossene Bahnen möglich, für die die Bahnlänge ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge darstellt. Einen anderen Ausdruck für diese Gesetzmäßigkeit erhalten wir auf Grund der Gl. 22. Diese nimmt bei konstanter Masse und Geschwindigkeit die Form an

$$2a\pi G = nh,$$

wenn  $a$  den Kreisradius bedeutet. Für den durch das Produkt aus Impuls und Radius dargestellten Drehimpuls ( $U$ ) gilt also die Beziehung

$$(24) \quad 2\pi U = nh.$$

Es sind — und dies ist ein anderer Ausdruck für die Gl. 23 — nur solche Kreisbahnen möglich, für die der mit  $2\pi$  multiplizierte Drehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches des elementaren Wirkungsquantums ist. Diese Aussage stellt nichts anderes dar als die schon besprochene, fundamentale Quantelungsregel, mittels deren im Jahre 1913 BOHR das Wasserstoffspektrum zu erklären vermochte. Sie ergibt sich in der Tat mit zwingender Notwendigkeit aus der Vorstellung der Materiewellen, und dasselbe gilt von der

generellen Gl. 22, aus der sich die üblichen Quantelungsregeln auch für die allgemeineren Probleme ableiten lassen <sup>1)</sup>.

Wie nun EINSTEIN erkannte, ergibt sich als eine notwendige Konsequenz der BROGLIESchen Theorie auch eine Quantelung der Translationsenergie eines in einem Behälter eingeschlossenen Gases. Diese für die kinetische Gastheorie und damit für die Thermodynamik höchst bedeutungsvolle Folgerung läßt sich auf eine Betrachtung allgemeiner Art gründen, die schon im Jahre 1900 von Lord RAYLEIGH durchgeführt und im Jahre 1905 exakter von JEANS bewiesen worden war; sie bezieht sich auf die sogenannten Eigenschwingungen in einem abgeschlossenen Volumen, das wir uns der Einfachheit wegen im folgenden als Würfel denken wollen. Wir gehen von der bekannten Tatsache aus, daß längs einer gespannten Saite von der Länge  $l$  stehende Schwingungen nur für solche Wellenlängen möglich sind, die für ganzzahlige Werte der sogenannten Unterteilungszahl  $n$  der Gleichung

$$l = n \frac{\lambda}{2}$$

genügen. Bei einem Würfel treten an die Stelle der Knotenpunkte den Würfebenen parallele Knotenebenen.

Wir denken uns nun ein Koordinatensystem konstruiert, dessen Ursprung mit einer Würfecke und dessen Achsen mit drei Würfelkanten zusammenfallen mögen. Die Unterteilungszahlen in der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung seien  $n_1, n_2, n_3$ . Es sei  $RS$  irgend eine zu der

<sup>1)</sup> Vgl. EINSTEIN, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. **19**, 1917, S. 82.

$x$ -Achse parallele Gerade, die in den Punkten  $A, B, C$  durch benachbarte Knotenebenen geschnitten werde, die der  $y$ - $z$ -Ebene parallel sind. Die Abstände dieser Knotenebenen sind  $a/n_1$ , wenn  $a$  die Länge der Würfelkante bedeutet. Ferner sei  $TU$  ein beliebiger Strahl, der mit den drei Koordinatenachsen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  einschlieÙe. Durch die Punkte  $A, B, C$  legen wir Wellenebenen, die auf dem Strahl senkrecht stehen und die natürlich auch Phasendifferenzen von einer halben Periode aufweisen müssen, da dies ja für die drei Punkte  $A, B, C$  zutrifft, die den drei Wellenebenen angehören. Es ist also

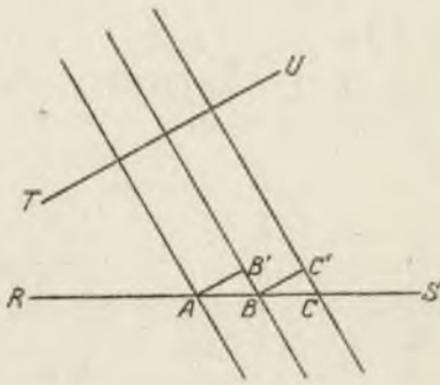


Fig. 2

$$AB' = BC' = \frac{\lambda}{2}.$$

Andererseits ist aber

$$AB' = AB \cos \alpha = \frac{a}{n_1} \cos \alpha.$$

Da analoge Beziehungen auch für die  $y$ - und die  $z$ -Achse gelten müssen, erhalten wir die drei Gleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{2a}{\lambda} \cos \alpha = n_1 \\ \frac{2a}{\lambda} \cos \beta = n_2 \\ \frac{2a}{\lambda} \cos \gamma = n_3. \end{cases}$$

Quadrieren wir diese Gleichungen und addieren wir sie, so finden wir (weil nach einer bekannten Formel die Summe der Quadrate der drei Kosinus Eins ergibt)

$$(26) \quad \frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}.$$

Die Gleichungen (25) können daher auch in der Form geschrieben werden

$$(27) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \pm \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \\ \cos \beta = \pm \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \\ \cos \gamma = \pm \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \end{cases}$$

(In Fig. 2 wäre also für den Strahl  $TU$  auch die in Bezug auf  $RS$  symmetrische Richtung möglich.) Wir ersehen demnach aus Gl. 26 und 27, daß jedem Zahlentripel  $n_1, n_2, n_3$  eine Eigenschwingung von ganz bestimmter Wellenlänge und ganz bestimmter Richtung entspricht. Umgekehrt sind nur solche Schwingungen möglich, für die die Werte von  $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$  den Gleichungen (26) und (27) für ganzzahlige Werte von  $n_1, n_2, n_3$  genügen.

Aus dieser Erkenntnis können wir leicht eine wichtige Folgerung mittels einer einfachen geometrischen Konstruktion ziehen. Wir denken uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem konstruiert, das jedoch nur aus den positiven Halbachsen bestehe, also aus dem gesamten Raume nur einen Oktanten herauschneide. Nach dem in Fig. 3 für die Ebene wiedergegebenen Schema denken wir uns nun in dem Raumoktanten ein räumliches Punktgitter mit der Längeneinheit als Gitterkonstante konstruiert. Sämt-

liche Gitterpunkte haben dann ganzzahlige Koordinaten, und umgekehrt können wir diejenige Eigenschwingung, die nach Gl. 26 und Gl. 27 durch ein bestimmtes Tripel ganzer Zahlen gegeben ist, durch denjenigen Gitterpunkt repräsentieren, dessen Koordinaten jenen drei Zahlen gleich sind. Die Entfernung, die der betreffende Gitterpunkt von dem Koordinatenursprung hat, ist

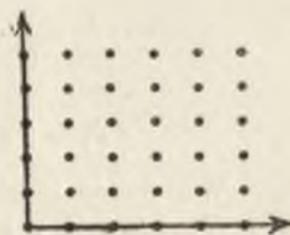


Fig. 3

$$r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2},$$

also nach Gl. 26

$$r = \frac{2a}{\lambda}$$

oder

$$(28) \quad r = 2az,$$

wenn wir mit  $z$  die sogenannte Wellenzahl bezeichnen, die es angibt, wieviel Wellenlängen auf die Längeneinheit entfallen.

Unsere Gitterkonstruktion gibt nun ohne weiteres die Antwort auf die Frage, wieviel Eigenschwingungen in dem Wellenzahlintervall von  $z$  bis  $z + \Delta z$  möglich sind. Denn diese Zahl — wir wollen sie  $\Delta Z$  nennen — ist gleich der Zahl der Gitterpunkte, die in dem Raume zwischen zwei Kugelflächen von den Radien  $2az$  und  $2a(z + \Delta z)$  enthalten sind. Durchschnittlich kommt je ein Gitterpunkt auf die Volumeinheit (weil der Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte gleich der Längeneinheit gewählt wurde), und daher ist  $\Delta Z$  einfach gleich dem achten Teile

des Volumens der von den beiden Kugelflächen eingeschlossenen Kugelschale, also gleich

$$\frac{1}{8} 4 r_1^2 \pi (r_2 - r_1),$$

wobei

$$r_1 = 2 a z, r_2 = 2 a (z + \Delta z)$$

ist. Wir finden infolgedessen, wenn wir das Volumen des Würfels mit  $V$  bezeichnen,

$$(29) \quad \Delta Z = 4 \pi V z^2 \Delta z.$$

Diese Formel, die hier nur für den einfachen Fall eines Würfels abgeleitet wurde, die aber ganz unabhängig von der Gestalt des Hohlraums gilt, wurde, wie schon erwähnt, zuerst von Lord RAYLEIGH und genauer später von JEANS gewonnen.

Wir wollen nun die RAYLEIGH-JEANSsche Formel, die sowohl für elektromagnetische als auch für elastische Wellen, also sowohl für Licht- als auch für Schallwellen erfüllt ist, auf die Materiewellen eines in dem Hohlraum eingeschlossenen Gases anwenden. Nach Gl. 19 bedeutet dann die Wellenzahl den Quotienten aus dem Impuls eines Materieteilchens und dem elementaren Wirkungsquantum, und daher stellt  $\Delta Z$  die Zahl der möglichen Impulswerte ( $G$ ) in dem Intervall von  $G$  bis  $G + \Delta G$  dar, wenn wir  $z$  durch  $G/h$  ersetzen. Wir finden demnach

$$(30) \quad \Delta Z = \frac{4\pi V}{h^3} G^2 \Delta G.$$

Wir können also, indem wir  $G$  dem Produkt aus molekularer Geschwindigkeit ( $v$ ) und molekularer Masse ( $m$ ) gleichsetzen,  $\Delta Z$  als Zahl der Geschwindigkeits-

werte auffassen, die in einem Intervall von  $v$  bis  $v + \Delta v$  möglich sind. Wir finden dann

$$(31) \quad \Delta Z = \frac{4 \pi V m^3}{h^3} v^2 \Delta v.$$

Betrachten wir beispielsweise Heliumgas bei Zimmer-temperatur, so haben wir für  $m/h$  ca. 1000 zu setzen, und für  $v$  ca.  $10^5$ . Für ein Volumen eines Kubikzentimeters und ein Geschwindigkeitsintervall von 1 cm/sec ergibt dann die Gl. 31 allerdings eine Zahl von der Größenordnung  $10^{20}$ , für einen Würfel von der Kantenlänge  $10^{-6}$  cm aber nur mehr eine Zahl in der Größenordnung von hundert. Ebenso wie die periodischen Bewegungen in geschlossenen Bahnen, erweisen sich also auf Grund der BROGLIESchen Theorie auch die Translationsbewegungen der Molekeln eines in einem Behälter eingeschlossenen Gases als gequantelt. In der Tat ist die Vorstellung einer Quantelung der molekularen Zustände bereits im Jahre 1916 von PLANCK<sup>1)</sup> aufgestellt und von ihm mit Erfolg für verschiedene thermodynamische Berechnungen (wie z. B. für die Berechnung der sogenannten chemischen Konstante der Gase) verwendet worden. Diese Hypothese, die früher ganz unverständlich erschien, ergibt sich somit als eine notwendige Folge aus der Vorstellung der Materiewellen.

Der Gl. 31 kann man eine anschauliche Deutung geben, wenn man dem Gase einen „Impulsraum“ derart zuordnet, daß in diesem jede Molekel durch einen „Impulspunkt“ repräsentiert ist, dessen Koordinaten mit den Impulskomponenten der Molekel ( $m v_x, m v_y, m v_z$ ) übereinstimmen. Der Abstand des

<sup>1)</sup> Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss., Berlin 1916, S. 653.

Impulspunktes von dem Koordinatenursprung stellt dann den Betrag des Impulses (also die Größe  $mv$ ) dar. Wenn wir daher in dem Impulsraum um den Koordinatenursprung zwei konzentrische Kugelflächen mit den Radien  $mv$  und  $m(v + \Delta v)$  konstruieren, so enthält die von den beiden Kugelflächen eingeschlossene Kugelschale vom Volumen  $4\pi m^3 v^2 \Delta v$  sämtliche Impulspunkte mit den Beträgen zwischen  $mv$  und  $m(v + \Delta v)$ . In dieser Schale kommen also nach Gl. 31 auf die Volumeinheit

$$s = \frac{V}{h^3}$$

Impulspunkte. Umgekehrt können wir uns den Impulsraum in Zellen von der Größe

$$(32) \quad \sigma = \frac{h^3}{V}$$

derart geteilt denken, daß innerhalb einer Zelle eine Unterscheidung verschiedener Impulswerte keinen Sinn mehr hat und somit innerhalb einer Zelle nur ein einziger Impuls- und somit auch nur ein einziger Geschwindigkeitswert möglich sind. Diese die Diskontinuität darstellenden Zellen sind um so größer, je kleiner das Volumen ist, in dem das Gas eingeschlossen ist.

#### Viertes Kapitel.

### Der Zusammenhang zwischen Wellenmechanik und Relativitätstheorie.

Die Tatsache, daß DE BROGLIE bei der Aufstellung seiner Theorie von der LORENTZ-Transformation aus-

ging, läßt einen engen Zusammenhang zwischen der Wellenmechanik und der Relativitätstheorie erkennen und legt die Vermutung nahe, daß vielleicht die fundamentalen Gesetze der relativistischen Mechanik aus der klassischen Mechanik und der geometrischen Wellenlehre mittels der Vorstellung von Materiewellen ableitbar sein könnten. Daß dies in der Tat möglich ist, ohne daß man den Materiewellen hierzu andere Eigenschaften zuschreiben muß als eine Zusammensetzung ihrer Energie aus PLANCK'schen Energieelementen, hat der Verfasser dieser Schrift gezeigt<sup>1)</sup>.

Zum Zwecke dieser Ableitung setzen wir lediglich voraus, daß die Materieteilchen die Energiezentren von Wellen bilden, deren Gruppengeschwindigkeiten sich somit als mechanische Geschwindigkeiten manifestieren. Aus einem Vergleich der beiden klassischen Prinzipien von MAUPERTUIS und FERMAT schließen wir sodann auf eine universelle Proportionalität zwischen der mechanischen Geschwindigkeit ( $v$ ) und der reziproken Wellengeschwindigkeit ( $1/u$ ); d. h. wir setzen das Produkt aus  $u$  und  $v$  gleich einer universellen Konstanten, die mit  $w^2$  bezeichnet werde, also

$$(33) \quad uv = w^2,$$

wobei  $v$  mit  $u$  durch denselben Zusammenhang verknüpft sein muß, wie in der Gl. 13 die Größe  $g$  mit  $u$ . Wir finden somit aus den Gleichungen (13) und (33)

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{w^2} \frac{d(vv)}{dv}$$

oder

$$w^2 dv = v^2 dv + v d\left(\frac{v^2}{2}\right);$$

<sup>1)</sup> Physikal. Zeitschr. 28, 1927, S. 632—634.

und hierfür können wir, da  $w$  eine Konstante ist, auch schreiben

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \frac{d(w^2 - v^2)}{w^2 - v^2}.$$

Indem wir diese Differentialgleichung integrieren, finden wir

$$\ln v = \ln \frac{1}{\sqrt{w^2 - v^2}} + \ln C,$$

wobei  $C$  eine Integrationskonstante bedeutet, oder

$$(34) \quad v = \frac{C}{w \sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}}}.$$

Mit der bisher allein benutzten Hypothese der Existenz von Materiewellen verknüpfen wir nun die PLANCKSche  $h\nu$ -Hypothese, indem wir das Produkt aus der Frequenz und dem elementaren Wirkungsquantum gleich der Energie eines Materieteilchens setzen. Wir führen eine neue Konstante, die mit  $K$  bezeichnet werde, durch die Beziehung ein

$$(35) \quad K = \frac{h C}{w^3}$$

und finden dann für die Energie eines Materieteilchens

$$(36) \quad E = \frac{K w^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}}}.$$

Um diese Formel diskutieren zu können, wollen wir zunächst eine kurze Zwischenbetrachtung auf der Grundlage der klassischen Mechanik einschalten. Wir denken uns die Geschwindigkeit eines Körpers von der Masse  $\mu$  dadurch vermehrt, daß zu der vorhandenen

Geschwindigkeit noch eine unendlich kleine Geschwindigkeit von der Größe  $dv$  in der Bewegungsrichtung hinzugefügt werde. Durch diesen „longitudinalen“ Geschwindigkeitszuwachs erfährt die lebendige Kraft und damit die Energie eine Vermehrung um den Betrag  $\mu v dv$ . Denken wir uns andererseits eine Kraft  $P_1$  in der Bewegungsrichtung angreifend, und ist  $b_1$  die durch sie bewirkte Beschleunigung, so stimmt nach dem zweiten NEWTONSchen Bewegungsgesetz der Quotient  $P_1/b_1$  mit  $\mu$  überein, und wir können somit die Gleichung aufstellen

$$(37) \quad dE = \frac{P_1}{b_1} v dv.$$

Differentiieren wir die Gl. 36 nach  $v$ , so finden wir

$$(38) \quad \frac{dE}{dv} = \frac{Kv}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{3/2}}.$$

Andererseits ist nun nach dem zweiten NEWTONSchen Bewegungsgesetz der Vektor der Kraft gleich dem zeitlichen Differentialquotienten des Impulses. Wir denken uns sowohl Kraft als auch Impuls in je zwei Komponenten zerlegt, eine longitudinale in der Bewegungsrichtung und eine zu ihr in der Bewegungsebene senkrechte, transversale. Indem wir die longitudinalen Komponenten durch den Index 1, die transversalen durch den Index 2 kennzeichnen, haben wir für die Kraftkomponenten die Beziehungen

$$P_1 = \frac{d(mv_1)}{dt}, \quad P_2 = \frac{d(mv_2)}{dt}.$$

Schließen wir bei der Differentiation nicht von vorneherein willkürlich die Möglichkeit aus, daß die Masse

sich mit der Zeit ändere, so finden wir, da  $v_2$  verschwindet<sup>1)</sup> und  $v_1$  mit dem Geschwindigkeitsbetrag  $v$  übereinstimmt,

$$(39) \quad \begin{cases} P_1 = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \\ P_2 = m b_2. \end{cases}$$

Schließlich ist nach einer bekannten elementaren Beziehung der Mechanik die Longitudinalkomponente der Beschleunigung gleich dem zeitlichen Differentialquotienten des Geschwindigkeitsbetrags, also

$$b_1 = \frac{dv}{dt}.$$

Dividieren wir daher die erste der Gleichungen (39) durch  $b_1$ , so finden wir nach Gl. 37 und 38

$$(40) \quad \frac{K}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = m + v \frac{dm}{dv}.$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung erkennt man leicht den Ausdruck

$$(41) \quad m = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}}}.$$

Denn dann wird

$$\frac{dm}{dv} = \frac{K \frac{v}{w^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m \frac{v}{w^2}}{1 - \frac{v^2}{w^2}}$$

und somit

$$m + v \frac{dm}{dv} = \frac{m}{1 - \frac{v^2}{w^2}},$$

in Übereinstimmung mit Gl. 40 und Gl. 41.

<sup>1)</sup> Denn die Geschwindigkeitsrichtung fällt ja mit der Bewegungsrichtung zusammen.

Setzen wir in der Gl. 41  $v$  gleich null, so finden wir

$$(42) \quad m_0 = K;$$

die Konstante  $K$  hat also die Bedeutung der Ruhemasse. Andererseits wird in dem ausgezeichneten Sonderfall, daß  $u$  und  $v$  übereinstimmen, nach Gl. 33  $v$  gleich  $w$ , und somit wird dann nach Gl. 41 die Masse unendlich, woferne die Ruhemasse von Null verschieden ist. Umgekehrt kann bei der Geschwindigkeit  $w$  nur dann die Masse und nach Gl. 36 auch die Energie endlich bleiben, wenn die Ruhemasse verschwindet. Aus diesem Grunde dürfen wir wohl  $w$  mit derjenigen Geschwindigkeit identifizieren, mit der sich die „imponderabeln“, aber gleichwohl Impuls aufweisenden Lichtquanten fortbewegen. Indem wir also  $w$  gleich der Lichtgeschwindigkeit ( $c$ ) setzen und Gl. 42 berücksichtigen, können wir die Gl. 41 in der Form schreiben

$$(43) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Diese Gleichung stellt aber nichts anderes dar als die bekannte Massenformel der Relativitätstheorie, derzufolge die Masse eine Funktion der Geschwindigkeit ist. Wir erkennen auch aus der Gl. 43, daß die mechanische Geschwindigkeit eines Körpers, der eine von null verschiedene Ruhemasse besitzt, nie die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Ein Vergleich der Gleichungen (37) und (38) ergibt (bei Berücksichtigung von Gl. 42) die bekannte relativistische Formel für die

longitudinale Masse (den Quotienten  $P_1/b_1$ ), nämlich

$$(44) \quad m_{\text{long}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hingegen folgt für die transversale Masse ( $P_2/b_2$ ) aus der zweiten der Gleichungen (39) und aus Gl. 43:

$$(45) \quad m_{\text{trans}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

wiederum in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie. Endlich ergibt sich durch einen Vergleich der Gleichungen (36) und (41), weil  $w$  gleich  $c$  ist, die Formel

$$(46) \quad E = m c^2,$$

also der fundamentale relativitätstheoretische Satz von der trägen Masse der Energie.

## Fünftes Kapitel.

### Die Beugung der Materiewellen.

Die Theorie von DE BROGLIE führt mit Notwendigkeit zu der Folgerung, daß Bewegungen von Materieteilchen durch andere Materieteilchen gebeugt werden können. Wenn nämlich die Bahn eines Atoms oder einer Molekel oder eines freien Elektrons in einer so geringen Entfernung an einem Bewegungshindernis vorbeiführt, daß diese Entfernung bereits von der Größenordnung der zugehörigen BROGLIESchen Welle ist, dann müßte offenbar eine Beugung der Materie-

welle eintreten, und dadurch müßten Abweichungen der Bewegung von den klassischen Bewegungsgesetzen hervorgerufen werden. Zu dieser wichtigen Folgerung aus der BROGLIESchen Theorie sind zuerst EINSTEIN <sup>1)</sup> und ELSASSER <sup>2)</sup> gelangt. Aus der fundamentalen Beziehung, die die BROGLIESche Theorie für die Verknüpfung von Wellenlänge und Impuls liefert (Gl. 18), folgt, daß für ein Elektron, das mit einem Hundertstel der Lichtgeschwindigkeit bewegt ist, die zugehörige Wellenlänge etwa  $10^{-8}$  cm beträgt und daß ungefähr ebenso groß auch die Wellenlänge eines Protons ist, das sich mit einer den Gasmolekeln bei Zimmertemperatur eigentümlichen Geschwindigkeit bewegt. In dem Verhältnis, in dem die Geschwindigkeit sinkt, wächst die BROGLIESche Wellenlänge und merkwürdige Beugungserscheinungen an Materiewellen sind daher vor allem bei langsamen Elektronen und bei sehr tiefen Temperaturen zu erwarten.

In der Tat hat bereits EINSTEIN derart die merkwürdigen Abweichungen zu deuten gesucht, die auch die „idealen“ Gase bei äußerst tiefen Temperaturen gegenüber ihren sonst gültigen Gesetzen zeigen. Diese Erscheinungen der sogenannten Gasentartung wurden von EINSTEIN darauf zurückgeführt, daß bei dem Erreichen eines gewissen, sehr tiefen Temperaturbereiches die Wellenlängen der Materiewellen von der Größenordnung der molekularen Durchmesser werden. Mit dieser Auffassung stehen auch Versuche von GÜNTHER <sup>3)</sup> in Einklang, der auf

<sup>1)</sup> Sitz.-Ber. Berliner Akad. d. Wiss., math. nat. Klasse, 1925, S. 9.

<sup>2)</sup> Naturwissenschaften, 1925, S. 711.

<sup>3)</sup> Zeitschr. f. physik. Chemie **110**, 1924, S. 626.

Veranlassung von NERNST die Viskosität (die innere Reibung) von Wasserstoff bei sehr tiefen Temperaturen untersuchte und dabei ein plötzlich beschleunigt einsetzendes Sinken der Viskosität beim Erreichen eines kritischen Temperaturbereiches feststellte.

ELSASSER ergänzte die eben besprochenen Vorstellungen EINSTEINS, indem er auf die Wahrscheinlichkeit von Beugungseffekten bei Zusammenstößen zwischen freien Elektronen und Atomen hinwies. Der Durchgang von freien Elektronen durch Gase war schon früher von mehreren Experimentalphysikern, wie namentlich von RAMSAUER <sup>1)</sup>, eingehend untersucht worden, und hierbei hatte RAMSAUER die rätselhafte Entdeckung gemacht, daß in einigen Edelgasen <sup>2)</sup> die freie Weglänge der Elektronen mit abnehmender Geschwindigkeit derart zunimmt, daß die langsamen Elektronen nahezu ungehindert durch die Atome hindurchzugehen scheinen. ELSASSER machte nun darauf aufmerksam, daß der mysteriöse „RAMSAUER-Effekt“ offenbar auf eine Beugung der mit den Elektronen verknüpften Materiewellen zurückzuführen sei. Denn es zeige sich, daß langsame Elektronen an Atomen nach den Formeln gestreut würden, nach denen Lichtstrahlen, die in der Wellenlänge mit den betreffenden Materiewellen übereinstimmen, an kleinen Kugeln gestreut würden, deren Radien denen der Atome entsprechen.

<sup>1)</sup> Annalen der Physik **72**, 1923, S. 345; vgl. auch den zusammenfassenden Bericht von MINKOWSKI und SPONER in den „Ergebnissen der exakten Naturwissenschaft“, Bd. **3**, 1924.

<sup>2)</sup> In den chemisch passiven Edelgasen fehlt die Elektronenaffinität der Atome.

Die Hypothese **ELSASSERS** fand später eine gute Bestätigung durch Versuche, die **DYMOND** <sup>1)</sup> über die Streuung von Elektronen bei dem Durchgang durch Heliumgas anstellte. **DYMOND** untersuchte es, wie die Zahl der in einer bestimmten Richtung gestreuten Elektronen von dem Streuwinkel abhängt. Ist die Vorstellung **ELSASSERS** richtig, so muß natürlich die Intensität der gebeugten Materiewellen mit der Richtung variieren, und in ihrer Abhängigkeit von der Richtung Maxima und Minima aufweisen, in ähnlicher Weise, wie auf einem Schirm, auf den man gebeugtes Licht fallen läßt, helle und dunkle Streifen abwechseln. Wird aber für einen bestimmten Winkel die Intensität der Materiewellen ein Maximum, so muß für diesen Winkel wohl zugleich auch die meßbare Elektronenstreuung ein Maximum darstellen.

**DYMOND** blendete nun bei seinen Versuchen aus Elektronen, die von einem glühenden Wolframdraht emittiert wurden, mittels zweier enger Spalte einen feinen Strahl ab und sandte diesen durch Heliumgas, das unter sehr geringem Druck (0,03 mm) gehalten wurde. Zwei weitere Spalte ermöglichten eine Isolierung der Streuelektronen in bestimmter Richtung. Der Wolframdraht und die beiden zuerst erwähnten Spalte konnten gedreht werden, wodurch es **DYMOND** möglich wurde, den Streuwinkel beliebige Werte zwischen  $0^{\circ}$  und  $90^{\circ}$  annehmen zu lassen. In der Tat konnte **DYMOND** für zwei bestimmte Winkel (deren Werte von der Spannung abhängen) ziemlich scharf ausgeprägte Maxima feststellen <sup>2)</sup>.

1) Nature 118, 1926, S. 336—337.

2) **DYMOND** untersuchte die Streuung für den Fall sogenannter unelastischer Zusammenstöße zwischen Elektronen und Helium-

Bereits im Jahre 1923 hatten DAVISSON und KUNSMAN<sup>1)</sup> Andeutungen analoger Erscheinungen auch bei der Reflexion langsamer Elektronen an Metalloberflächen wahrgenommen, und ELSASSER hatte zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß diese Versuchsergebnisse vielleicht als eine Stütze der BROGLIESCHEN Theorie angesehen werden könnten. Im Jahre 1927 stellte dann DAVISSON zusammen mit GERMER<sup>2)</sup> ähnliche Versuche an Kristallen an, und durch diese Experimente vermochte er in der Tat die bisher beste Bestätigung für die Hypothese der Materiewellen zu erbringen. DAVISSON und GERMER konnten nämlich zeigen, daß auf Kristalle auftreffende Elektronen in ganz ähnlicher Weise wie Röntgenstrahlen von den Kristallen gebeugt werden.

Sie richteten ein schmales Elektronenbündel senkrecht gegen eine kleine Scheibe, die aus einem Nickel-Ein-Kristall geschnitten war, und maßen mittels eines

---

atomen, wobei die Elektronen soviel Energie verlieren, als erforderlich ist, um ein Heliumatom aus dem Grundzustand in den nächsthöheren Zustand überzuführen. Solche Zusammenstöße bewirken bei den Elektronen einen Energieverlust, der einer Spannung von 20 Volt entspricht. Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 100 Volt fand DYMOND zwei Maxima, ein scharfes bei  $5^\circ$  und ein breiteres bei  $60^\circ$ . Läßt man die Spannung auf 50 Volt zurückgehen, so rückt das scharfe Maximum zu dem Streuwinkel von  $20^\circ$ . Umgekehrt wandert es zu immer kleineren Winkeln, wenn die Spannung über 100 Volt steigt. Neben den beiden erwähnten Maxima erscheint bei mehr als 200 Volt noch ein drittes, dessen Lage von der Geschwindigkeit, also der Voltzahl, unabhängig ist und dessen Entstehung noch nicht geklärt ist.

<sup>1)</sup> Physical Review **22**, 1923, S. 243.

<sup>2)</sup> Nature **119**, 1927, S. 558. Ausführlicher Bericht in Physical Review **30**, 1927, S. 705.

Galvanometers die Streuungsintensität der Elektronen in ihrer Abhängigkeit von der Richtung. Sie konnten in ganz bestimmten Richtungen scharf ausgeprägte Maxima feststellen, und sie fanden einen engen Zusammenhang zwischen diesen Richtungen und denjenigen, in denen Röntgenstrahlen von dem Kristall auf Grund der bekannten Gesetzmäßigkeiten zurückgeworfen würden<sup>1)</sup>. Wenn man sich nämlich die bekannte Struktur des Nickelkristalls in einer zu dem primären Elektronenstrahl parallelen Richtung in einem Verhältnis zusammengezogen denkt, das zwischen 0,7:1 und 0,9:1 liegt, so zeigt es sich, daß mit den dann den Röntgenstrahlen entsprechenden Richtungen vollkommen die Maxima der Elektronenstreuung übereinstimmen. Berechnet man andererseits aus den Beugungserscheinungen die Wellenlängen der an dem Vorgang beteiligten Materiewellen, so findet man diese in der Tat (gemäß Gl. 18) gleich dem elementaren Wirkungsquantum, gebrochen durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.

## Sechstes Kapitel.

### Die Theorie von Schrödinger.

Durch die Ideen DE BROGLIES erscheint ein enger Zusammenhang zwischen den mechanischen Vorgängen und den allgemeinen, für die Wellenausbreitung geltenden Prinzipien hergestellt, die ihre klarste

<sup>1)</sup> Aus auffallender kontinuierlicher Röntgenstrahlung sondert bekanntlich ein Kristall durch die Reflexion Strahlen von ganz bestimmten Wellenlängen aus.



Formulierung in der Optik gefunden haben. Die Grundgleichungen der traditionellen Mechanik wurden durch DE BROGLIE auf das FERMATSche Prinzip zurückgeführt, das in seiner speziellen Anwendung auf optisch homogene Medien die geradlinige Ausbreitung des Lichtes postuliert<sup>1)</sup>. Es ist ja aber bekannt, daß die Behauptung einer geradlinigen Ausbreitung des Lichtes auch in homogenen Medien keineswegs exakt ist. Eine solche Behauptung trifft nur angenähert zu, steht aber in Widerspruch zu den an dem Lichte tatsächlich beobachteten Beugungserscheinungen. Nur solange sind die Behauptung und mit ihr das FERMATSche Prinzip richtig, als sie auf Bereiche angewendet werden, die groß sind im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes.

Sonst muß die Ausbreitung des Lichtes auf ein Prinzip zurückgeführt werden, das bereits in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts von HUYGENS aufgestellt wurde und das nach ihm gewöhnlich als HUYGENSSches Prinzip bezeichnet wird. Es besagt im Wesentlichen, daß ein jeder Punkt, der von einer Lichtwelle erreicht wird, selbst wieder der Ausgangspunkt neuer Elementarwellen wird, die von ihm nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit wie die Hauptwellen ausgehen.

Das HUYGENSSche Prinzip findet einen exakten mathematischen Ausdruck in einer verhältnismäßig einfachen Differentialgleichung, die die sogenannte LAPLACESche Ableitung einer physikalischen Größe

---

<sup>1)</sup> Wird in Gl. 1 die Wellengeschwindigkeit als konstant angenommen, so besagt die Gleichung, daß der gesamte Weg des Strahls ein Minimum werden muß, also eine Gerade, da diese die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellt.

mit ihrem zweiten zeitlichen Differentialquotienten verknüpft. Unter der LAPLACESchen Ableitung, die gewöhnlich mit dem Symbol  $\Delta$  bezeichnet wird<sup>1)</sup>, versteht man die von dem benutzten Koordinatensystem unabhängige Summe der zweiten partiellen räumlichen Differentialquotienten, also

$$(47) \quad \Delta S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}.$$

Wenn nun im besonderen die physikalische Größe  $S$  die Eigentümlichkeit aufweist, daß ihre LAPLACESche Ableitung ihrem zweiten zeitlichen Differentialquotienten proportional ist, wenn also

$$(48) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \kappa \Delta S$$

ist, dann folgt, wie in der theoretischen Physik in bekannter Weise gezeigt wird<sup>2)</sup>, aus dieser Differentialgleichung stets die Möglichkeit einer wellenförmigen Ausbreitung der Größe  $S$ , die mit einer Wellengeschwindigkeit

$$(49) \quad u = \sqrt{\kappa}$$

vor sich geht. Darüber hinaus folgt aber aus der Gl. 48 auch (wie in der theoretischen Physik gezeigt wird), daß ein jeder Punkt, in dem durch die Wellen eine Erregung stattfindet, selbst wieder der Ausgangspunkt von Elementarwellen wird, die mit der gleichen Geschwindigkeit  $u$  fortschreiten und in einem homogenen Medium Kugelwellen darstellen.

<sup>1)</sup> Häufig wird auch statt des Symbols  $\Delta$  das Symbol  $\nabla^2 S$  gebraucht.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. des Verfassers „Einführung in die theoretische Physik, 3. und 4. Auflage (de Gruyter, Berlin, 1923—24), Erster Band, § 43.

Von der Zeit hängt nun die Phase, ganz gleichgültig, ob es sich um ebene Wellen oder Kugelwellen handelt, nach Gl. 6 mittels der einfachen Beziehung ab

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\pi \nu.$$

Sind daher im besonderen die Schwingungen reine Sinusschwingungen, so wird, weil dann  $S$  gleich dem Produkte aus der Amplitude und dem Sinus der Phase wird und die zweimalige Differentiation des Sinus wiederum den Sinus, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen, ergibt,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2(\sin \varphi)}{\partial t^2} = -4\pi^2 \nu^2 A \sin \varphi = -4\pi^2 \nu^2 S.$$

Auf Grund dieser Beziehung und der Gl. 49 kann somit die Gl. 48 in der Anwendung auf Sinuswellen auch in der Form geschrieben werden

$$(50) \quad \Delta S + \frac{4\pi^2 \nu^2}{u^2} S = 0.$$

Es war nun SCHRÖDINGERS geniale Idee, eine Verallgemeinerung der Mechanik zu versuchen, die dem Übergang von dem FERMATSchen zum HUYGENSSchen Prinzip, also von der geometrischen Strahlenoptik zu der physikalischen Wellenoptik analog sein sollte. Ein solcher Übergang wird ja in der Tat durch die in dem letzten Kapitel besprochenen Phänomene nahegelegt, die auf eine Beugung von Materiewellen hinweisen. Besonders einfach gestaltet sich dieser Übergang bei der Betrachtung eines einzelnen Teilchens, weil dann auf Grund

der DE BROGLIESchen Beziehung zwischen Wellenlänge und Impuls (Gl. 20)

$$(51) \quad \frac{v^2}{u^2} = \frac{m^2 v^2}{h^2}$$

wird. Andererseits ist die lebendige Kraft ( $\frac{1}{2} m v^2$ ) gleich dem Unterschied zwischen der Gesamtenergie ( $E$ ) und der potentiellen Energie ( $V$ ). Daher kann auf Grund der Gl. 51 die Gl. 50 auch in der Form geschrieben werden

$$(52) \quad \Delta S + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} (E - V) S = 0.$$

Diese Differentialgleichung stellt die Grundlage der SCHRÖDINGERSchen Mechanik dar.

Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist es nun schon lange bekannt, daß die Möglichkeit, für eine Differentialgleichung eine überall eindeutige, endliche und stetige Lösung zu finden, nur bei bestimmten Werten der in der Gleichung vorkommenden Parameter besteht. Die besonderen Werte, für die diese Möglichkeit vorhanden ist, werden als die Eigenwerte der Differentialgleichung bezeichnet, die ihnen entsprechenden Lösungen als die Eigenfunktionen. In der SCHRÖDINGERSchen Gleichung erscheint nun als konstanter Parameter die Gesamtenergie  $E$ , während die potentielle Energie natürlich von den Koordinaten abhängt. Die Eigenwerte, die die SCHRÖDINGERSche Gleichung in einem speziellen Falle besitzt, bedeuten also ganz bestimmte, diskrete Werte der Energie. Das physikalische Problem der Quantelung der Energie erscheint so durch SCHRÖDINGER auf ein rein mathematisches

Problem zurückgeführt, nämlich auf das für alle wichtigeren Fälle längst gelöste Problem der Eigenwerte von Differentialgleichungen.

Das mathematische Eigenwertproblem möge kurz (und ohne Eingehen auf feinere Einzelheiten) an zwei einfachen Beispielen erörtert werden, die für die späteren Erörterungen von Bedeutung sind. Wir betrachten zunächst die Funktion

$$(53) \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

und bilden von dieser Funktion den ersten und den zweiten Differentialquotienten nach  $x$ ; sie mögen mit  $y'$  und  $y''$  bezeichnet werden. Wir finden dann

$$y' = -xy$$

und durch abermalige Differentiation

$$y'' = -y - xy'$$

oder auf Grund der vorletzten Gleichung

$$y'' = y(-1 + x^2).$$

Betrachten wir also die Differentialgleichung

$$(54) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + (a - x^2)y = 0,$$

so sehen wir, daß diese Gleichung eine Lösung von der Form der Gl. 53 besitzt, wofern der Parameter  $a$  den Wert Eins annimmt. Die Zahl Eins stellt demnach einen Eigenwert der Differentialgleichung dar.

Zu einem anderen Eigenwerte werden wir geführt, wenn wir

$$(55) \quad y = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

setzen. Wir finden dann

$$y' = 2e^{-\frac{x^2}{2}} + 2xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = 2e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2).$$

Hieraus folgt durch abermalige Differentiation

$$y' = 2e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)(-x) + 2e^{-\frac{x^2}{2}}(-2x);$$

also nach Gl. 55

$$y'' = y(-3 + x^2).$$

Auch der Wert  $a=3$  stellt demnach für die Differentialgleichung (54) einen Eigenwert dar, dem als Lösung die Gl. 55 entspricht.

Die nächsthöheren Lösungen sind, wie hier nur kurz angegeben sei, wovon sich aber der Leser leicht durch Nachrechnen überzeugen kann, in der Form darstellbar

$$y = He^{-\frac{x^2}{2}},$$

wobei die Größe  $H$ , die für die Eigenwerte 1 und 3 gleich 1, bzw. gleich  $2x$  ist, die folgenden Werte besitzt:

$$\begin{aligned} H &= 4x^2 - 2 && \text{für } a = 5; \\ H &= 8x^3 - 12x && \text{für } a = 7; \\ H &= 16x^4 - 48x^2 + 12 && \text{für } a = 9 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die fünf hier angegebenen Werte für  $H$  sind die fünf niedrigsten unter den sogenannten HERMITESCHEN Polynomen, die nach einer einfachen Formel gebildet werden können<sup>1)</sup>. Die mit  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  multiplizierten

<sup>1)</sup> Das HERMITESCHE Polynom, das dem Eigenwerte  $a=2n+1$  entspricht, hat die Form

$$\begin{aligned} H &= (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} - + \dots \end{aligned}$$

Die Reihe hört vor dem Gliede auf, für das zum ersten Male einer der Faktoren gleich null wird.

HERMITESchen Polynome stellen die Lösungen der Differentialgleichung (54) dar, während die ungeraden ganzen Zahlen die Eigenwerte bilden. Bezüglich des komplizierten Beweises dafür, daß die Differentialgleichung neben den mit  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  multiplizierten HERMITESchen Polynomen keine weiteren Lösungen besitzt, muß allerdings auf die einschlägigen mathematischen Werke verwiesen werden <sup>1)</sup>.

Als ein weiteres Beispiel mögen kurz die sogenannten Kugelfunktionen betrachtet werden. Zu der Differentialgleichung dieser Funktionen werden wir geführt, wenn wir die LAPLACESche Ableitung von den rechtwinkligen Koordinaten auf räumliche Polarkoordinaten umformen. Als solche dienen bekanntlich die Entfernung ( $r$ ) von einem festen Punkte und zwei Winkel, die, wenn wir an die Erdkugel denken, der geographischen Länge und dem Komplement der geographischen Breite entsprechen. Die Umformung führt zu einem Ausdruck, der in dem besonderen Falle, daß  $r$  als konstant angesehen und gleich Eins gesetzt wird, mit dem Symbole  $\Delta^*$  bezeichnet werde. <sup>2)</sup>

Die Differentialgleichung der Kugelfunktionen lautet dann

$$(56) \quad \Delta^* \psi + a \psi = 0,$$

und aus der Theorie der Kugelfunktionen folgt <sup>3)</sup>, worauf

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. COURANT und HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Berlin (Springer) 1924, S. 261.

<sup>2)</sup> Es ist, wenn  $\varphi$  der geographischen Breite und  $\vartheta$  dem Polabstand entspricht,

$$\Delta^* \psi = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

<sup>3)</sup> Vgl. z. B. COURANT-HILBERT, Bd. I, S. 264—266 und 422.

hier nicht näher eingegangen werde, daß diese Differentialgleichung nur dann eine von Null verschiedene Lösung, die auf der ganzen Kugelfläche (mit ihren ersten Ableitungen) endlich und stetig ist, besitzt, wenn die Beziehung

$$(57) \quad a = n(n + 1)$$

durch einen ganzzahligen Wert von  $n$  erfüllt ist. Die Zahlen

$$2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 \text{ usw.}$$

stellen also die Eigenwerte der Differentialgleichung (56) dar.

## Siebentes Kapitel.

### Beispiele zur Eigenwertmechanik.

Die SCHRÖDINGERSCHE Methode, die die Quantisierungsprobleme auf Eigenwertfragen zurückführt, möge zunächst an dem einfachen Beispiel des Oszillators dargelegt werden. Unter einem Oszillator versteht man ein um eine feste Ruhelage schwingendes Teilchen, z. B. ein Elektron. Man bezeichnet im besonderen den Oszillator als linear, wenn die Schwingungen in einer Geraden erfolgen, und als harmonisch, wenn die Schwingung eine reine Sinusschwingung ist. Von der Betrachtung des linearen, harmonischen Oszillators hat die Quantentheorie im Jahre 1900 ihren Ausgang genommen, und durch etwa ein Vierteljahrhundert hat die theoretische Physik an dem damals von PLANCK gewonnenen Ergebnis festgehalten, daß die Energie eines solchen Oszillators stets ein ganzzahliges Vielfaches des Produktes aus der Frequenz und dem elementaren Wirkungsquantum

sein müsse. Von diesem Resultat weicht indessen dasjenige ab, zu dem SCHRÖDINGERS Theorie führt.

Wählen wir die Ruhelage des Oszillators als Koordinatenursprung und machen wir die Gerade, in der die Schwingungen erfolgen, zur  $x$ -Achse, so gilt natürlich die Beziehung

$$x = A \sin(2\pi\nu t),$$

wobei  $A$  die Amplitude bedeutet. Die Geschwindigkeit ergibt sich als zeitlicher Differentialquotient der Entfernung  $x$  zu

$$v = A \cdot 2\pi\nu \cos(2\pi\nu t).$$

Daher wird die lebendige Kraft als das halbe Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat

$$L = 2A^2\pi^2\nu^2m \cos^2(2\pi\nu t).$$

Aus dieser Formel erhalten wir die Energie  $E$ , indem wir den Kosinus gleich Eins setzen; denn bei dem Passieren der Ruhelage verschwindet die potentielle Energie, so daß der größte für die kinetische Energie mögliche Wert die Gesamtenergie darstellt. Da die Summe der Quadrate des Sinus und Kosinus Eins ist, erhalten wir somit den Ausdruck für die potentielle Energie  $V$ , indem wir in der letzten Gleichung den Kosinus durch den Sinus ersetzen, und dies ergibt (unter Benutzung der drittletzten Gleichung)

$$V = 2\pi^2\nu^2m x^2.$$

Für den betrachteten Sonderfall des linearen, harmonischen Oszillators nimmt also die SCHRÖDINGERSche Differentialgleichung (da sich die LAPLACESche Ableitung  $\Delta S$  auf die zweite Ableitung nach  $x$  reduziert) die Form an:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - 2\pi^2\nu^2 m x^2) S = 0.$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E = \alpha$$

und

$$\frac{4\pi^2 m \nu}{h} = \beta.$$

Ferner führen wir eine neue Variable  $\xi$  durch die Definition

$$\xi = x\sqrt{\beta}$$

ein. Dann wird

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}$$

und

$$x^2 = \frac{\xi^2}{\beta}.$$

Dividieren wir die Differentialgleichung durch  $\beta$ , so erhalten wir somit die Formel

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\alpha}{\beta} - \xi^2 \right) S = 0.$$

Die Eigenwerte dieser Gleichung sind nach dem in dem vorherigen Kapitel Gesagten durch die für ganzzahlige Werte von  $n$  geltende Beziehung bestimmt

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2n + 1.$$

Hieraus folgt nach den Gleichungen, die die Abkürzungen  $\alpha$  und  $\beta$  definieren,

$$(58) \quad E = (2n + 1) \frac{h\nu}{2}.$$

In der SCHRÖDINGERSCHEN Mechanik erweist sich demnach die Energie eines linearen, harmonischen Oszillators als ungerades Vielfaches eines halben Energieelementes, also gleich

$$\frac{h\nu}{2}, \frac{3h\nu}{2}, \frac{5h\nu}{2} \text{ usw.}$$

Dieses Resultat weicht von dem der früheren Quantentheorie ab, die die Energie stets einem ganzzahligen Vielfachen eines ganzen Energieelementes (d. h. gleich  $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu$  usw.) gefunden hatte. Im Gegensatze zu der älteren Theorie folgt aus der SCHRÖDINGERSCHEN, daß der niedrigste Energiewert, den der Oszillator annehmen kann, von Null verschieden ist. Die theoretische Physik führt nun den Wärmeinhalt fester Körper im wesentlichen auf Schwingungen zurück, die die Atome des festen Körpers um gewisse Ruhelagen ausführen; die Energie dieser Oszillationen soll es sein, die sich als Wärme offenbart. Verschiedene Unstimmigkeiten zwischen der älteren Quantentheorie und gewissen Erscheinungen, die bei äußerst tiefen Temperaturen beobachtet werden, hatten schon vor SCHRÖDINGER einige Physiker, wie vor allem NERNST, zu der Hypothese der sogenannten Nullpunktsenergie geführt. Nach dieser Hypothese soll auch bei dem absoluten Nullpunkt der Temperatur, bei dem nach der früheren Theorie die Oszillationsenergie völlig verschwinden müßte, jeder Oszillator die Energie  $h\nu/2$  besitzen. Diese Annahme, die früher erzwungen erschien, ergibt sich als natürliche Folge aus den Grundlagen der SCHRÖDINGERSCHEN Mechanik.

Neben dem Oszillator möge als ein zweites Beispiel für die Anwendung der SCHRÖDINGERSCHEN Mechanik noch der sogenannte Rotator betrachtet werden, der ebenfalls schon von der älteren Quantentheorie eingehend behandelt worden war. Unter einem Rotator versteht man ein Teilchen, das sich in konstanter Entfernung um ein festes Zentrum bewegt. Ist die Bewegung an eine bestimmte Ebene gebunden, erfolgt sie also in einem Kreise, so spricht man von

einem Rotator mit fester Achse. Erfolgt hingegen die Bewegung ohne eine solche Bindung, also in einer Kugelfläche, so spricht man von einem Rotator mit freier Achse. Ein solcher möge im folgenden betrachtet werden.

Ist die feste Entfernung gleich der Längeneinheit, so können wir in der SCHRÖDINGERSCHEN Differentialgleichung die LAPLACESCHE Ableitung durch das in dem vorhergehenden Kapitel gebrauchte Symbol  $\Delta^*$  ersetzen. Sonst ist natürlich, weil die LAPLACESCHE Ableitung die Quadrate der Differentiale der Koordinaten in den Nennern enthält, noch durch  $r^2$  zu dividieren, wenn  $r$  die feste Entfernung bedeutet. Es ist also statt  $\Delta S$  dann  $\Delta^* S/r^2$  zu schreiben. Die potentielle und somit auch die kinetische Energie sind im Falle des Rotators konstant. Bezeichnen wir also die kinetische Energie mit  $L$ , so kann die SCHRÖDINGERSCHE Gleichung (nach Multiplikation mit  $r^2$ ) in der Form geschrieben werden:

$$(59) \quad \Delta^* S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} r^2 L S = 0.$$

Nach dem in dem vorhergehenden Kapitel über die Differentialgleichung der Kugelfunktionen (Gl. 56) Gesagten wissen wir nun aber, daß die letzte Gleichung eine Lösung nur dann besitzt, wenn für einen ganzzahligen Wert von  $n$

$$(60) \quad \frac{8\pi^2 m r^2 L}{h^2} = n(n+1)$$

ist.

In diese Gleichung können wir zweckmäßig den Drehimpuls ( $U$ ) einführen, der nach seiner bekannten

Definition durch das Produkt aus Masse, Geschwindigkeit und Kugelradius gegeben ist. Es ist also

$$U = m v r,$$

und da andererseits die kinetische Energie gleich  $\frac{1}{2} m v^2$  ist, ist somit

$$m r^2 L = \frac{1}{2} U^2.$$

Es muß also nach Gl. 60

$$\frac{4 \pi^2 U^2}{h^2} = n(n+1)$$

oder

$$(61) \quad U = \frac{h}{2\pi} \sqrt{n(n+1)}$$

sein. Auch bei dem Rotator weicht das Ergebnis der SCHRÖDINGERSchen Theorie von dem der älteren Quantentheorie ab. Diese hatte für den Drehimpuls den Wert  $n h / 2 \pi$  geliefert, also für das Verhältnis  $2 \pi U / h$  die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 usw. Die SCHRÖDINGERSche Theorie ergibt hingegen für dieses Verhältnis im allgemeinen nicht ganze Zahlen, sondern die Werte

$$0; 1,4142; 2,4495; 3,4641; 4,4721 \text{ usw.}$$

Auch in dem Falle des Rotators erzielt die SCHRÖDINGERSche Mechanik eine bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung als die frühere Theorie (namentlich bei der Deutung der sogenannten Bandenspektren). Im wesentlichen bedeutet die Abweichung wiederum die Einführung halber Quantenzahlen.<sup>1)</sup> Denn wegen der Konstanz der potentiellen Energie ist nach

<sup>1)</sup> Diese waren in der Tat schon früher in der Theorie der Bandenspektren benutzt worden; doch hatte eine befriedigende theoretische Begründung gefehlt.

der vorhin abgeleiteten Formel der Unterschied zweier beliebiger Energiewerte durch den Ausdruck gegeben:

$$E_1 - E_2 = \frac{h^2}{8\pi^2 m r^2} [n_1(n_1 + 1) - n_2(n_2 + 1)].$$

Andererseits besteht aber die Identität

$$n(n + 1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Daher ist tatsächlich

$$E_1 - E_2 = \frac{h^2}{8\pi^2 m r^2} \left[ \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \right].$$

Sehr bemerkenswert ist das Ergebnis, zu dem die Eigenwertmechanik in ihrer Anwendung auf das Wasserstoffatom führt. Da ein solches aus einem Proton und einem um dieses umlaufenden Elektron besteht, so wird die potentielle Energie

$$V = -\frac{e^2}{r},$$

wobei  $e$  das elektrische Elementarquantum und  $r$  den Abstand zwischen Proton und Elektron bedeuten. Die SCHRÖDINGERSche Differentialgleichung nimmt somit für das Wasserstoffatom die Form an

$$(62) \quad \Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( E + \frac{e^2}{r} \right) S = 0.$$

Die Auffindung der Eigenwerte dieser Differentialgleichung ist allerdings recht kompliziert, so daß diesbezüglich auf SCHRÖDINGERS eigene Ableitung <sup>1)</sup> verwiesen werden muß. Wie SCHRÖDINGER fand, sind einerseits sämtliche positive Zahlen Eigenwerte der Differentialgleichung, hingegen nur bestimmte, diskrete negative. Die Energie  $E$  kann alle

<sup>1)</sup> Ann. d. Phys. **79**, 1926, S. 361—376.

beliebigen positiven Werte annehmen, hingegen nur solche negative, die der Gleichung

$$(63) \quad E_n = - \frac{2 \pi^2 m e^4}{h^2 n^2}$$

für ganzzahlige Werte von  $n$  genügen.

Die durch die Gl. 63 bestimmten Energiewerte des Wasserstoffatoms stimmen vollkommen mit denjenigen überein, die bereits BOHR im Jahre 1913 abgeleitet hatte und die sich, wie die Formel erkennen läßt, umgekehrt wie die Quadrate der Hauptquantenzahlen ( $n$ ) verhalten. Mit diesen BOHRschen Werten sind andererseits, wie schon erwähnt wurde, auch diejenigen identisch, die sich aus der ursprünglichen BROGLIESchen Vorstellung der Materiewellen ergeben, wenn diese Vorstellung auf periodische Bewegungen in geschlossenen Bahnen angewendet wird. Im Gegensatz zu den Elektronenbewegungen, für die die Energie negativ ist, sind diejenigen mit positiven Energiewerten nicht gequantelt. Dieses Ergebnis deckt sich mit den Resultaten der früheren Quantentheorie, die einerseits ausgezeichnete Ellipsenbahnen (im speziellen also Kreisbahnen) postuliert hatte, hingegen keinerlei quantentheoretische Beschränkungen für die offenen Hyperbelbahnen angenommen hatte, die Elektronen um den Kern beschreiben, wenn sie von außen her dem Kerne nahekommen und sich dann wiederum von ihm entfernen <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Jeder Entfernung von dem Kerne entspricht eine ganz bestimmte kritische Geschwindigkeit des Elektrons, für die die Bahn parabolisch ist, während bei kleinerer Geschwindigkeit die Bewegung elliptisch, bei größerer hyperbolisch wird, in Übereinstimmung mit bekannten Sätzen der Himmelsmechanik,

Eine wichtige Anwendung läßt die SCHRÖDINGERsche Differentialgleichung in ihrer einfachsten Form (Gl. 52) auch für den Fall zu, daß die Bewegung eines Elektrons durch verhältnismäßig schwache äußere Einflüsse, wie beispielsweise durch ein äußeres elektrisches Feld, gestört ist. Aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt nämlich, daß die Eigengrößen der Gleichung, d. h. ihre Eigenwerte und ihre Eigenfunktionen (die zugehörigen Lösungen), infolge der vorhandenen Stetigkeit in nur wenig verschiedene Größen übergehen, wenn in der Differentialgleichung noch ein hinreichend kleines Störungsglied hinzugefügt wird. Diese Tatsache ermöglicht es, aus den bekannten Eigengrößen der ursprünglichen Gleichung die Änderungen zu berechnen, die diese Eigengrößen durch das Hinzukommen des Störungsgliedes erfahren. Ist etwa  $a_k$  ein Eigenwert der „ungestörten“ Gleichung, so kann derart die Größe  $\alpha_k$  ermittelt werden, um die der entsprechende Eigenwert der „gestörten“ Gleichung von  $a_k$  abweicht.

Wenn nun die Differentialgleichung mehrere, voneinander unabhängige Veränderliche enthält, wie dies z. B. bei der SCHRÖDINGERSchen Differentialgleichung (von Sonderfällen abgesehen) der Fall ist, so entsprechen einem einzigen Eigenwerte im allgemeinen mehrere Lösungen, mit anderen Worten mehrere Eigenfunktionen. Ist deren Zahl  $s$ , so spricht man von einem  $s$ -fachen Eigenwert, oder man kann auch sagen, daß  $s$  Eigenwerte zusammenfallen.

die ja auch hyperbolische Bahnen bei Kometen annimmt. Die kritische Geschwindigkeit des Elektrons ist ebenso wie die eines Kometen durch die Quadratwurzel aus der doppelten, durch die Masse dividierten potentiellen Energie bestimmt.

Das bedeutungsvolle Ergebnis einer mathematischen Überlegung ist nun, daß für zusammenfallende Eigenwerte keineswegs im Falle einer Störung auch die zugehörigen Größen  $a_k$  zusammenfallen müssen, weil ja diese auch von den Eigenfunktionen abhängen, die eben verschieden sind. An die Stelle eines mehrfachen Eigenwertes kann somit bei einer Störung eine Gruppe von verschiedenen Eigenwerten treten, die untereinander und zu dem ursprünglichen Eigenwerte benachbart sind. Dieser wird, wie man sagt, aufgespalten, entweder vollständig, nämlich in  $s$  Komponenten, oder teilweise.

Die exakte Durchführung dieser Überlegung und ihre Anwendung auf die Bewegung eines Elektrons in einem elektrischen Felde führten SCHRÖDINGER zu einer Formel, die sich mit einer schon im Jahre 1916 von EPSTEIN aufgestellten deckt. Diese Formel beschreibt in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund die Aufspaltung der Energiewerte und damit auch der Spektrallinien in einem elektrischen Felde; sie gibt den sogenannten STARK-Effekt wieder. Für die Energieänderung im elektrischen Felde ergibt sich nämlich die Formel

$$(64) \quad \Delta E = \frac{3}{8\pi^2} \frac{h^2 F'}{m e} n(k_2 - k_1),$$

wobei  $F'$  die Feldstärke,  $n$  die „Hauptquantenzahl“ und  $k_1$  und  $k_2$  zwei weitere, ebenfalls ganze Quantenzahlen bedeuten, die entweder positiv oder null sein können und deren Summe zumindest um Eins kleiner als die Hauptquantenzahl sein muß.

Die bisher behandelten Probleme betreffen durchwegs ein einzelnes Elektron. Für die Betrachtung von Vorgängen, an denen mehr als ein Materieteil-

chen beteiligt sind, für das sogenannte Mehrelektronenproblem, nimmt die SCHRÖDINGERSche Gleichung eine allgemeinere Form an. Bezeichnen wir mit dem Symbol  $\Delta_1$  die Summe der zweiten partiellen Differentialquotienten nach den Koordinaten des ersten Teilchens und mit  $m_1$  dessen Masse usw., so lautet die verallgemeinerte SCHRÖDINGERSche Gleichung, wie näher in einem späteren Kapitel (s. Gl. 122) begründet werden soll,

$$(65) \quad \frac{1}{m_1} \Delta_1 S + \frac{1}{m_2} \Delta_2 S + \dots + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) S = 0.$$

Es ist indessen zu beachten, daß diese Gleichung keine eigentliche Wellengleichung im üblichen Sinne mehr darstellt. Der durch sie beschriebene Vorgang kann als eine „Welle“ nur in einem  $3n$ -dimensionalen sogenannten Konfigurationsraume aufgefaßt werden, wenn  $n$  die Zahl der beteiligten Teilchen ist und die Koordinaten die Bedeutung von Strecken haben, die noch mit der Quadratwurzel aus der Masse des betreffenden Teilchens multipliziert sind<sup>1)</sup>. Die Analogie zwischen den Lichtwellen, die im dreidimensionalen Raume verlaufen, und den Materiewellen erscheint also in der SCHRÖDINGERSchen Theorie auf den Spezialfall des einzelnen Elektrons beschränkt. Dieser Umstand bedeutet jedenfalls eine große Schwierigkeit für das Bestreben, auf dem Wege der Wellenmechanik zu einer wahrhaft einheitlichen Physik zu gelangen<sup>2)</sup>.

1) Die Komplikation der Koordinaten, die die Dimension Länge mal Quadratwurzel aus der Masse haben, ist allerdings dann vermeidbar, wenn alle beteiligten Teilchen die gleiche Masse haben.

2) Wegen der Deutung des SCHRÖDINGERSchen Feldskalars ( $S$ ) vgl. das elfte Kapitel.

## Achstes Kapitel.

## Die Quantenmechanik von Heisenberg.

Die auf DE BROGLIES Ideen aufgebaute Theorie von SCHRÖDINGER stellt nicht den einzigen Versuch einer Neubegründung der Atommechanik dar. Um einige Monate älter ist die von HEISENBERG begründete Quantenmechanik, die indessen, wie später SCHRÖDINGER zu zeigen vermochte, in einem engen Zusammenhang mit seiner eigenen Theorie steht. Es ist dies um so merkwürdiger, als das Ziel, das sich HEISENBERG bei der Aufstellung seiner Theorie setzte, völlig verschieden von den Zielen war, die DE BROGLIE und SCHRÖDINGER vorschwebten. Während diese beiden Forscher bestrebt waren, das atomare Geschehen mittels der Methoden der klassischen Physik zu erklären und die Kluft zu überbrücken, die die „quantisierte“ Atomphysik von der klassischen Physik trennte, ging HEISENBERG von der entgegengesetzten Auffassung aus: daß nämlich nur ein endgültiger Verzicht auf die hergebrachten klassischen Vorstellungen ein wirkliches Verständnis der atomaren Gesetzmäßigkeiten erschließen könne. HEISENBERGS Überzeugung war es, daß in der Atomphysik jeder Versuch einer Anschaulichkeit als sinnlos und zwecklos von vorneherein vermieden werden müsse und daß vor allem aus der Atomtheorie diejenigen Größen ausgemerzt werden müßten, die einer direkten Beobachtung nicht zugänglich sind.

An die Stelle der früheren Quantentheorie, welcher durch die Erfahrung nicht kontrollierbare Vorstellungen von Elektronenbahnen zugrundegelegt waren, suchte darum HEISENBERG eine neue Quantenmechanik

zu setzen, die lediglich Relationen zwischen beobachtbaren atomphysikalischen Größen enthalten sollte. Als solche sah HEISENBERG nur die Frequenzen und Intensitäten der für die Atome charakteristischen Spektrallinien an sowie die, unabhängig von der Spektroskopie, etwa durch Versuche über Elektronenstöße feststellbaren Energiestufen der Atome. Die Aufgabe der neuen Quantenmechanik erblickte HEISENBERG darin, zunächst aus diesen Spektralgrößen Rechengrößen zu konstruieren, die an die Stelle der Koordinaten und Geschwindigkeiten der Elektronen treten könnten, und sodann zwischen diesen Rechengrößen, in möglichst enger Anlehnung an das bewährte Vorbild der klassischen Mechanik, Beziehungen herzustellen, die eine Gewinnung der Quantisierungsvorschriften gestatten; — dies womöglich in besserer Übereinstimmung mit der Erfahrung und mit weiterem Anwendungsgebiet als in der früheren Theorie.

Der Weg, den HEISENBERG zu der Durchführung dieses Programms einschlug, ging von einem Theorem aus, das im Beginne des 19. Jahrhunderts von FOURIER aufgestellt worden war. Wie FOURIER gefunden hatte, läßt sich eine beliebige, periodisch veränderliche Größe als Superposition reiner Sinusschwingungen darstellen, deren jede gemäß Gl. 3 in der Form beschreibbar ist

$$(66) \quad q_n = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \epsilon_n),$$

wobei  $A$  die Amplitude und  $\epsilon$  die Phasenkonstante bedeuten. (Nur nebenbei sei erwähnt, daß die Frequenzen  $\nu_n$  sämtliche ganzzahligen Vielfachen derjenigen Grundfrequenz darstellen, mit der sich die betrachtete Größe periodisch ändert, und daß auch die Werte der  $A_n$  aus dem funktionalen Zusammenhang

zwischen der betreffenden Größe und der Zeit berechenbar sind<sup>1)</sup>. Die periodische Veränderlichkeit der betrachteten Größe ist also durch die Gesamtheit der Partialschwingungen

$$q_1, q_2, q_3 \dots$$

ersetzbar.

Für die folgenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Schwingungen statt durch trigonometrische Funktionen durch Exponentialfunktionen darzustellen. Wir benutzen dazu die bekannte MOIVRESche Formel, wonach

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ist, wenn  $i$  die imaginäre Einheit ( $\sqrt{-1}$ ) bedeutet. Mittels der MOIVRESchen Formel kann man in üblicher Weise in einer Gleichung, die einen Exponentialausdruck mit imaginären Exponenten enthält, den reellen und den imaginären Teil (letzteren unter Fortlassung des Faktors  $i$ ) voneinander trennen und die Gleichung als eine Gleichsetzung einerseits der reellen, andererseits der imaginären Teile auffassen. Wenden wir diesen in der theoretischen Optik allgemein gebräuchlichen Kunstgriff an, so können wir jede Schwingung in der Form darstellen

$$(67) \quad S = A e^{i(2\pi \nu t + \varepsilon)},$$

Betrachten wir nur den imaginären Teil, so erhalten wir

$$S = A \sin(2\pi \nu t + \varepsilon),$$

<sup>1)</sup> Man kann nämlich, wenn  $\varphi(x)$  die periodische Funktion ist, setzen:

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \sin(nx) + \frac{1}{2} b_0 + \sum_n b_n \cos(nx),$$

und die Rechnungen ergeben dann

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx.$$

und wir sehen dann auch, daß die durch Differentiation der Gl. 67 sich ergebende Beziehung

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi i\nu A e^{i(2\pi\nu t + \epsilon)},$$

woferne wir wieder nur den imaginären Teil nehmen, gleichbedeutend ist mit der Formel, die sich unmittelbar aus der vorletzten Gleichung ergibt, nämlich:

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi\nu A \cos(2\pi\nu t + \epsilon).$$

Bei Anwendung der MOIVRESchen Formel finden wir also einen sehr einfachen Zusammenhang zwischen einer schwingenden Größe und ihrem zeitlichen Differentialquotienten, nämlich

$$(68) \quad \frac{dS}{dt} = 2\pi i\nu S.$$

Schließlich können wir zur Abkürzung

$$(69) \quad A e^{i\epsilon} = a$$

setzen, also durch Einführung einer komplexen Amplitude ( $a$ ) die Anschreibung einer Phasenkonstante ( $\epsilon$ ) überflüssig machen, und somit die Gl. 67 in der Form schreiben

$$S = a e^{2\pi i\nu t}.$$

Die Intensität der Schwingung ist durch das Quadrat der reellen Amplitude gegeben, also durch

$$A^2 = |a|^2 = a a^*,$$

wenn in üblicher Weise mit  $a^*$  die zu  $a$  konjugierte Größe<sup>1)</sup> bezeichnet wird, also in unserem Falle (nach Gl. 69)

$$a^* = A e^{-i\epsilon}.$$

1) Zu der komplexen Größe  $x + iy$  ist die Größe  $x - iy$  konjugiert. Den beiden Größen kommt derselbe Betrag zu, der gleich der Quadratwurzel ihres Produktes, nämlich gleich  $\sqrt{x^2 + y^2}$  ist.

HEISENBERGS glücklicher Gedanke war es nun, die periodisch veränderlichen Koordinaten der Elektronen durch eine Gesamtheit von Partialschwingungen zu ersetzen, deren Frequenzen mit den Schwingungszahlen jener Spektrallinien übereinstimmen sollen, die nach der früheren Vorstellung durch das betreffende Elektron bei einer Änderung dieser Koordinate hervorgerufen werden können. Da jeder spektralen Frequenz ein Übergang zwischen zwei atomaren Zuständen entspricht, so müssen natürlich die Partialschwingungen, die zu einem einzelnen Elektron gehören, eine zweifache Mannigfaltigkeit bilden, also (anders als bei den FOURIER-Reihen) durch ein sogenanntes quadratisches Schema darstellbar sein, etwa (wenn wir die fortlaufende Numerierung zweckmäßig mit der Zahl Null beginnen, die wir dem Grundzustand zuordnen) in der Form

$$(70) \quad \begin{array}{cccc} q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} \cdots \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} \\ \dots & & & \end{array}$$

Dabei ist, wenn wir zweckmäßigerweise im folgenden die Indizes in Klammern beifügen, statt sie, wie sonst, unten anzuschreiben,

$$(71) \quad q(n, m) = a(n, m) e^{2\pi i \nu(n, m)t}.$$

Die Größe  $a(n, m)$  bedeutet wiederum eine komplexe Amplitude, deren Betrag als ein Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen dem  $n$ -ten und  $m$ -ten Zustand angesehen werden darf, so daß das Quadrat dieses Betrages für die Intensität der durch den Übergang hervorgerufenen Spek-

trallinie maßgebend ist. Da wir den Übergang in beiden Richtungen als gleich wahrscheinlich ansehen müssen, muß der Betrag von  $a(n, m)$  dem Betrag von  $a(m, n)$  gleich sein. Es liegt daher nahe, die beiden komplexen Amplituden, die entgegengesetzten Übergängen entsprechen, als zueinander konjugiert anzusehen, also

$$a(m, n) = a^*(n, m)$$

zu setzen. Wenn wir darüber hinaus postulieren, daß auch

$$(72) \quad q(m, n) = q^*(n, m)$$

sei, so bedeutet dies nach Gl. 71, daß

$$(73) \quad v(m, n) = -v(n, m)$$

und im besonderen

$$(74) \quad v(n, n) = 0$$

ist.

Wenn nun der Elektronenkoordinate ( $q$ ) das Schema (70) entspricht, so können wir einer Komponente der Elektronengeschwindigkeit ( $\dot{q}$ ) ein analoges Schema zuordnen, dessen einzelne Glieder mit den zeitlichen Differentialquotienten der Glieder des ersten Schemas übereinstimmen. Wir können also setzen

$$(75) \quad \dot{q}(n, m) = 2\pi i v(n, m) q(n, m).$$

Differentiieren wir die Glieder dieses Geschwindigkeitschemas abermals nach der Zeit, so können wir durch das sich dann ergebende Schema eine Komponente der Elektronenbeschleunigung ( $\ddot{q}$ ) ersetzen, so daß also die Beziehung gilt

$$(76) \quad \ddot{q}(n, m) = -4\pi^2 \nu^2(n, m) q(n, m).$$

Aus der Gl. 75 können wir eine wichtige Folgerung für den besonderen Fall ziehen, daß in einem Schema

$$(77) \quad q(n, m) = 0 \text{ für } m \neq n$$

ist. In diesem Falle verschwinden also alle Glieder des Schemas mit Ausnahme der Diagonalglieder, so daß das Schema die einfache Form annimmt:

$$\begin{array}{ccc} D_{00} & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{22} \text{ usw.} \end{array}$$

Bilden wir nun den zeitlichen Differentialquotienten eines solchen diagonalen Schemas, so erkennen wir leicht, daß sämtliche Glieder des neuen Schemas null sein müssen. Denn nach Gl. 75 sind sie von der Form

$$2\pi i v(n, m) D(n, m).$$

Diejenigen Glieder, für die  $n$  von  $m$  verschieden ist, verschwinden, weil  $D$  ein diagonales Schema ist, während diejenigen, für die  $n$  gleich  $m$  ist, verschwinden, weil nach Gl. 74  $v(m, m)$  null sein muß.

Die bisherigen Betrachtungen legen den Gedanken nahe, auch mit einem Frequenzschema bestimmte Rechenoperationen durchzuführen, wofür wir in der Tat bereits ein Beispiel in der zeitlichen Differentiation kennen lernten. In ähnlicher Weise kann man ein Schema  $q''$  als die Summe oder Differenz eines Schemas  $q$  und eines zweiten  $q'$  definieren, wenn

$$(78) \quad q''(n, m) = q(n, m) \pm q'(n, m)$$

ist.

Schwieriger ist jedoch eine zweckmäßige Definition der Multiplikation. HEISENBERG definierte ein Frequenzschema  $q''$  als Produkt eines Schemas  $q$  mit einem zweiten  $q'$  durch die Forderung:

$$(79) \quad q''(n, m) = \sum_k q(n, k) q'(k, m);$$

d. h. man hat zunächst das erste Glied der  $n$ -ten

Horizontalreihe des ersten Schemas mit dem ersten Gliede der  $m$ -ten Vertikalreihe des zweiten Schemas zu multiplizieren, sodann das zweite Glied der  $n$ -ten Horizontalreihe des ersten Schemas mit dem zweiten Gliede der  $m$ -ten Vertikalreihe des zweiten Schemas, und so fort, und dann alle diese Produkte zu summieren. Man erkennt leicht, daß auf Grund dieser Definition die Multiplikation nicht kommutativ ist. Das Multiplikationsergebnis ist verschieden, je nachdem ob das erste Schema mit dem zweiten multipliziert wird oder das zweite mit dem ersten. Wir können daher von einer Multiplikationsdifferenz von  $q$  und  $q'$  sprechen und sie durch das Symbol  $q'q - qq'$  darstellen <sup>1)</sup>).

HEISENBERG gründete nun die Quantenmechanik auf die Annahme, daß die Multiplikationsdifferenz, die einer Impulskomponente des Elektrons in Verbindung mit der zugehörigen Koordinate zuzuordnen

<sup>1)</sup> Nehmen wir der Einfachheit halber an, wir hätten ein Schema von nur zwei Horizontal- und zwei Vertikalreihen, und wir multiplizieren es mit einem ähnlichen anderen, so haben wir also das Produkt zu bilden

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}.$$

Wir finden dann nach der Multiplikationsregel (Gl. 79), wenn wir das Produkt  $ab$  mit  $c$ , hingegen das Produkt  $ba$  mit  $d$  bezeichnen,

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$

hingegen

$$d_{11} = a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12}$$

$$d_{12} = a_{12} b_{11} + a_{22} b_{12}$$

Bezeichnen wir also die Multiplikationsdifferenz mit  $f$ , so wird

$$f_{11} = c_{11} - d_{11} = a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12}$$

$$f_{12} = c_{12} - d_{12} = a_{12} (b_{22} - b_{11}) + b_{12} (a_{11} - a_{22})$$

usw.

GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwo Naukowe Warszawskie

ist, in den Diagonalgliedern bis auf einen einfachen Zahlenfaktor mit dem elementaren Wirkungsquantum übereinstimme, während die übrigen Glieder null seien. Setzen wir also, indem wir die Impuls-komponenten mit  $p$  bezeichnen, zur Abkürzung

$$(80) \quad pq - qp = D,$$

so soll

$$(81) \quad D(n, m) = \begin{cases} zh & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

sein, wobei  $z$  den erwähnten Zahlenfaktor bedeutet. Daß HEISENBERG das Produkt aus Impuls und Koordinate wählte, ist durchaus begreiflich, weil ja gerade dieses Produkt, wie schon aus der früheren Quantentheorie den Physikern geläufig war, die Dimension der Größe  $h$  hat<sup>1)</sup>.

Durch Probieren kann man nun leicht feststellen, daß dem Zahlenfaktor  $z$  in der Gl. 81 der Wert  $1/(2\pi i)$  gegeben werden muß, damit die weiteren Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen. Bezeichnen wir also mit dem Symbol  $\varepsilon$  ein diagonales Einheitsschema, nämlich

$$1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 1$$

usw.

so nimmt die HEISENBERG'sche sogenannte Vertauschungsrelation die Form an

$$(82) \quad pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \varepsilon.$$

<sup>1)</sup> Denn der Impuls hat die Dimension  $\text{g cm sec}^{-1}$ , das Produkt aus Impuls und Koordinate also die Dimension  $\text{g cm}^2 \text{sec}^{-1}$  oder  $\text{erg sec}$ .

Wie diese Gleichung erkennen läßt, ist der Fehler, den man dadurch begeht, daß man in der sonst üblichen Weise Impuls und Koordinate als bei der Multiplikation vertauschbare Größen ansieht, von der absoluten Größenordnung  $10^{-27}$ . Für die Makromechanik ist dieser Fehler natürlich vollkommen bedeutungslos. Anders ist es aber in der Atommechanik, da ja die rechte Seite der Gl. 82 (von dem Einheitsfaktor  $i\epsilon$  abgesehen) mit dem Werte übereinstimmt, den das Produkt aus Bewegungsgröße und Radius für das Wasserstoffatom im Normalzustand annimmt.

Wenn im besonderen die Größe  $q$  die übliche Bedeutung einer Cartesischen Koordinate hat, so wird der zugehörige Impuls  $p$  gleich dem Produkte aus der Masse, die wir mit  $\mu$  bezeichnen wollen<sup>1)</sup>, und der zugehörigen Geschwindigkeit, so daß wir auch dem Impuls ein Frequenzschema zuordnen können, dessen Glieder gleich sind den noch mit der Masse multiplizierten Gliedern des Geschwindigkeitsschemas (Gl. 75). Die Vertauschungsrelation nimmt daher dann die Form an

$$(83) \quad [\dot{q}q - q\dot{q}]_{nm} = \frac{\hbar}{2\pi i \mu} \epsilon_{nm}.$$

Nun ist nach Gl. 75

$$[\dot{q}q]_{nm} = 2\pi i \sum_k \{v(n, k) q(n, k) q(k, m)\}$$

und umgekehrt

$$[q\dot{q}]_{nm} = 2\pi i \sum_k \{q(n, k) v(k, m) q(k, m)\}$$

und daher

$$(84) \quad [\dot{q}q - q\dot{q}]_{nm} = 2\pi i \sum_k \{[v(n, k) - v(k, m)] q(n, k) q(k, m)\}.$$

<sup>1)</sup> Wir vermeiden hier absichtlich die sonst gebräuchliche Bezeichnung mit  $m$ , um einer Verwechslung mit der Indexzahl  $m$  vorzubeugen.

Nach der Vertauschungsrelation muß somit, wenn wir  $m$  gleich  $n$  setzen,

$$(85) \quad \sum_k \{[\nu(n, k) - \nu(k, n)] q(n, k) q(k, n)\} = - \frac{h}{4\pi^2 \mu}$$

sein.

Diese Beziehung wollen wir, zur Erläuterung an einem besonders einfachen Beispiel, wiederum auf einen harmonischen, linearen Oszillator anwenden. Wir benutzen als einzige Koordinate den Abstand von der Ruhelage und wissen aus früheren Betrachtungen (Kapitel VII), daß in der klassischen Mechanik, an die wir uns so eng wie möglich anschließen wollen, die Bewegungsgleichung des Oszillators die Form hat

$$(86) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + 4\pi^2 \nu_0^2 q = 0,$$

wenn wir mit  $\nu_0$  die Frequenz des Oszillators bezeichnen (den Index 0 fügen wir jetzt deshalb hinzu, weil wir von der Eigenfrequenz des Oszillators die Schwingungszahl der von ihm emittierten Strahlung unterscheiden müssen). In der Quantenmechanik tritt an die Stelle der Koordinate und ebenso der Beschleunigung das entsprechende Frequenzschema gemäß Gl. 76. Wir finden also

$$-4\pi^2 \nu^2(n, m) q(n, m) + 4\pi^2 \nu_0^2 q(n, m) = 0,$$

und hieraus folgt

$$(87) \quad \nu(n, m) = \pm \nu_0.$$

In der Folge der Frequenzwerte  $\nu(n, m)$ , die wir uns bei festgehaltenem Index  $n$  und veränderlichem  $m$  gebildet denken, können also nur zwei Werte, die wir wohl als Nachbarwerte ansehen müssen, von Null verschieden sein, nämlich diejenigen, für die

$$m = \begin{cases} n-1 \\ n+1 \end{cases}$$

ist. Ebenso sind in der Folge der Frequenzwerte  $\nu(n, m)$ , die wir bei festem Index  $m$  bilden, nur diejenigen zwei von null verschieden, für die  $n$  gleich  $(m - 1)$  oder gleich  $(m + 1)$  ist.

Bilden wir also im Sonderfall des linearen, harmonischen Oszillators für die Geschwindigkeit oder den Impuls das entsprechende Frequenzschema, so sind von null nur verschieden: in der ersten Horizontalreihe das zweite Glied, in der zweiten das erste und dritte, in der dritten das zweite und vierte, und so fort. Die analoge Regel gilt auch für die Vertikalkolumnen. Bedeutet ein Stern ein von Null verschiedenes Glied, so ergibt sich demnach für die Geschwindigkeit oder den ihr proportionalen Impuls des Oszillators ein Schema, in dem lediglich die beiden der Hauptdiagonale benachbarten, ihr parallelen, schrägen Reihen aus Sternen bestehen, nämlich:

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\
 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\
 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\
 0 & 0 & 0 & * & 0 & *
 \end{array}$$

und so fort.

Kehren wir zu der Gl. 85 zurück, so sehen wir also, daß von der Summe, die in dieser Gleichung auftritt, nur die beiden Glieder von Null verschieden sind, für die  $k$  gleich  $n'$  oder  $n''$  ist, wenn wir zur Abkürzung  $(n + 1)$  mit  $n'$  und  $(n - 1)$  mit  $n''$  bezeichnen. Ferner ist nach Gl. 73  $\nu(n, k)$  entgegengesetzt gleich  $\nu(k, n)$ , beide sind aber im Betrage nach Gl. 87 gleich  $\nu_0$ . Endlich müssen wir berücksichtigen, daß, wenn dem Index  $n$  ein energiereicherer Zustand als

dem Index  $n$  entspricht, bei dem Übergang die Strahlung absorbiert wird, also die zugehörige Frequenz negativ zu rechnen ist; umgekehrt muß natürlich dann der Zustand, der  $n'$  entspricht, energieärmer sein, dem Übergang also eine Strahlungsemission entsprechen, bei der die zugehörige Frequenz positiv zu rechnen ist. Die linke Seite der Gl. 85 nimmt daher die Form an

$$-2\nu_0 [q(n, n') q(n', n) - q(n, n'') q(n'', n)].$$

Infolgedessen führt die Vertauschungsrelation zu der Beziehung

$$q(n, n') q(n', n) = q(n, n'') q(n'', n) + \frac{h}{8\pi^2 \mu \nu_0}.$$

Da wir die Zählung der Reihen mit dem Index 0 beginnen, müssen wir alle Glieder gleich Null annehmen, für die ein Index negativ wird. Wenn wir zur Abkürzung

$$(88) \quad \frac{h}{8\pi^2 \mu \nu_0} = Q$$

setzen, erhalten wir somit die folgenden Beziehungen:

$$q(0,1) q(1,0) = Q$$

$$q(1,2) q(2,1) = q(0,1) q(1,0) + Q = 2Q$$

$$q(2,3) q(3,2) = q(1,2) q(2,1) + Q = 3Q \text{ usw.,}$$

allgemein also

$$(89) \quad q(n-1, n) q(n, n-1) = nQ.$$

Nachdem wir diese Gleichung als speziellen Ausdruck der Vertauschungsrelation gewonnen haben, suchen wir nun nach HEISENBERG die Energiewerte des Oszillators zu berechnen. Bei früheren Betrachtungen (VII. Kapitel) hatten wir bereits gesehen, daß die potentielle Energie eines linearen, harmonischen Oszillators durch den Ausdruck

$$V = 2\pi^2 \nu_0^2 \mu q^2$$

gegeben ist (wir schreiben jetzt  $\mu$  statt  $m$ ,  $v_0$  statt  $v$  und  $q$  statt  $x$ ). Indem wir hierzu noch als kinetische Energie das halbe Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat addieren, erhalten wir in der klassischen Mechanik für die gesamte Energie den Ausdruck

$$E = 2\pi^2 v_0^2 \mu q^2 + \frac{\mu}{2} \dot{q}^2.$$

In der Quantenmechanik ersetzen wir natürlich das Quadrat der Koordinate gemäß Gl. 79 durch die Beziehung

$$(90) \quad [q^2]_{nm} = \sum_k q(n, k) q(k, m).$$

Indem wir in analoger Weise auch das Geschwindigkeitsquadrat umformen, erhalten wir auf Grund der Gl. 75 die Beziehung

$$(91) \quad [\dot{q}^2]_{nm} = -4\pi^2 \sum_k \{v(n, k) v(k, m) q(n, k) q(k, m)\}.$$

Es ergibt sich somit auch für die Energie ein Schwingungsschema; wir finden nämlich

$$(92) \quad E(n, m) = 2\pi^2 \mu \sum_k \{v_0^2 - v(n, k) v(k, m)\} q(n, k) q(k, m)\}.$$

Nehmen wir in dieser Gleichung zunächst  $m$  von  $n$  verschieden an, so verschwinden nach dem früher Gesagten alle Summanden mit Ausnahme solcher, für die entweder  $n, k, m$  oder  $m, k, n$  drei aufeinander folgende Zahlen bedeuten. In einem solchen Falle stimmen aber die beiden Größen  $v(n, k)$  und  $v(k, m)$ , die beide im Betrag gleich  $v_0$  sind, auch im Vorzeichen überein. Der Ausdruck in der eckigen Klammer der Gl. 92 ergibt somit null. Hieraus folgt

$$(93) \quad E(n, m) = 0 \text{ für } m \neq n.$$

Der Energie entspricht ein diagonales Schwingungsschema, was nach dem früher (im Anschluß an

Gl. 77) Gesagten die zeitliche Konstanz, also die Erhaltung der Energie bedeutet.

Ist andererseits  $m$  gleich  $n$ , so sind von den Summanden der Gl. 92 diejenigen von null verschieden, für die  $k$  entweder gleich  $n'$  oder gleich  $n''$  ist. Für jeden dieser beiden Summanden wird

$$v(n, k) v(k, n) = (+v_0) (-v_0).$$

Wir finden somit

$$E(n, n) = 4\pi^2 \mu v_0^2 [q(n, n') q(n', n) + q(n, n'') q(n'', n)].$$

Auf Grund der die Vertauschungsrelation ausdrückenden Gl. 89 können wir hierfür schreiben

$$E(n, n) = 4\pi^2 \mu v_0^2 [(n+1)Q + nQ].$$

Den niedrigsten Wert der Energie ( $E_0$ ) erhalten wir, wenn wir in dieser Gleichung  $n$  gleich null setzen; wir finden dann auf Grund der Gl. 88

$$E_0 = \frac{h v_0}{2}.$$

Für die höheren Energiewerte folgt aus der vorletzten Gleichung

$$(94) \quad E_n = \frac{2n+1}{2} h v_0.$$

Es ergibt sich also die Energie als ein ungerades Vielfaches eines halben Energieelementes, so daß sie nie völlig verschwindet. In diesem, von der älteren Quantentheorie abweichenden Ergebnis stimmt die HEISENBERG'sche Quantenmechanik vollkommen mit der SCHRÖDINGERSchen Theorie überein. Sie führt auf Grund der Gl. 87 auch zu der wichtigen Folgerung, daß Quantensprünge nur zwischen benachbarten Zuständen des Oszillators möglich sind, und endlich läßt die Gl. 94 auch erkennen, daß die

sogenannte BOHRSche Frequenzbedingung erfüllt ist, daß nämlich die Frequenz des bei einem solchen Sprunge emittierten oder absorbierten Lichtquants gleich ist der sprunghaften Änderung der Energie, gebrochen durch das elementare Wirkungsquantum.

## Neuntes Kapitel.

### Die Matrizenmechanik.

Bald nachdem HEISENBERG seine neuen Ideen entwickelt hatte, haben BORN und JORDAN für die allgemeine Durchführung des HEISENBERGSchen Programms einen geeigneten mathematischen Apparat in der Matrizenrechnung entdeckt, einem bis dahin von den Physikern kaum beachteten Zweige der Mathematik, der bereits in der Mitte des 19. Jahrhunderts eine weitgehende Ausgestaltung gefunden hatte. Unter einer Matrix versteht man ganz allgemein ein quadratisches Schema, dessen Glieder durch je zwei Indizes charakterisiert sind <sup>1)</sup>, wobei für die Addition und die im allgemeinen nicht kommutative Multiplikation der Matrizen eben diejenigen Regeln gelten, die bereits HEISENBERG, ohne auf den Matrizenkalkül Bezug zu nehmen, aufgestellt hatte. Mittels der Matrizenmechanik möge in diesem Kapitel allgemein bewiesen werden, daß, wie speziell bereits in dem vorhergehenden Kapitel für den Fall des linearen Oszillators gezeigt wurde,

1) Im besonderen wird eine Matrix als HERMITESche bezeichnet, wenn durch die Vertauschung der beiden Indizes ein Glied in die konjugierte Größe (gemäß Gl. 72) übergeht.

aus der HEISENBERG'schen Vertauschungsrelation der Satz von der Erhaltung der Energie und die BOHR'sche Frequenzbedingung als notwendige Folgen resultieren.

Bei dieser Beweisführung gehen wir zunächst von einigen allgemeinen, rein mathematischen Sätzen aus, wobei wir an die Betrachtungen des vorhergehenden Kapitels anknüpfen können. Indem wir Matrizen durch fette Buchstaben kennzeichnen, berechnen wir zunächst die Multiplikationsdifferenz zweier Matrizen  $D$  und  $A$ , von denen die erste eine Diagonalmatrix sei. Auf Grund der Gl. 79 finden wir

$$[DA]_{nm} = \sum_k D(n, k) A(k, m).$$

Von dieser Summe ist zufolge der Definition einer Diagonalmatrix nur ein einziges Produkt von null verschieden, nämlich dasjenige, für das  $k$  gleich  $n$  ist, und somit wird

$$[DA]_{nm} = D(n, n) A(n, m).$$

Andererseits ist

$$[AD]_{nm} = \sum_k A(n, k) D(k, m).$$

Auch von dieser Summe ist nur ein einziges Produkt von null verschieden, nämlich dasjenige, für das  $k$  gleich  $m$  ist, und daher wird

$$[AD]_{nm} = A(n, m) D(m, m).$$

Für die Multiplikationsdifferenz finden wir somit die Beziehung

$$(95) \quad [DA - AD]_{nm} = A(n, m) [D(n, n) - D(m, m)].$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir sogleich, daß in dem besonderen Falle, daß bei der Diagonalmatrix  $D$  alle Diagonalglieder untereinander gleich

sind, die Multiplikationsdifferenz verschwindet, die Multiplikation also kommutativ wird<sup>1)</sup>. Es ist

$$(96) \quad \mathbf{DA} - \mathbf{AD} = 0, \text{ wenn } D \text{ eine Diagonalmatrix} \\ \text{und überdies } D(n, n) = D(m, m).$$

Diesen Satz können wir natürlich auch leicht umkehren. Erweist sich die Multiplikation einer Matrix  $\mathbf{B}$  mit jeder beliebigen Matrix  $\mathbf{A}$  als kommutativ, so können wir daraus stets schließen, daß  $\mathbf{B}$  eine Diagonalmatrix mit lauter gleichen Diagonalgliedern ist. Denn wir finden für das  $n$ - $m$ -Glieder der Multiplikationsdifferenz den Ausdruck

$$\sum_k \{B(n, k) A(k, m) - A(n, k) B(k, m)\}.$$

Wenn  $\mathbf{A}$ , wie wir vorausgesetzt haben, eine beliebige Matrix ist, kann diese Summe nur dann ganz allgemein verschwinden, wenn erstens  $B(n, m)$  für  $m$  ungleich  $n$  verschwindet und zweitens  $B(n, n)$  gleich  $B(m, m)$  ist.

Aus Gl. 96 folgt, daß die Multiplikation einer beliebigen Matrix mit der Einheitsmatrix kommutativ ist, wenn wir die Einheitsmatrix  $\varepsilon$  durch die Gleichung definieren

$$(97) \quad \varepsilon(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n. \end{cases}$$

Es gilt dann stets die Beziehung

$$(98) \quad \varepsilon \mathbf{A} = \mathbf{A} \varepsilon.$$

<sup>1)</sup> Wie man aus Gl. 95 erkennt, ist auch ganz allgemein die Multiplikation zweier beliebiger Diagonalmatrizen stets kommutativ. Denn ist  $\mathbf{A}$  ebenso wie  $\mathbf{D}$  eine Diagonalmatrix, so verschwindet auf der rechten Seite der Gl. 95 für  $n$  ungleich  $m$  das Glied  $A(n, m)$ , hingegen für  $n = m$  der Ausdruck in der eckigen Klammer.

Eine Matrix, die durch das Symbol  $A^{-1}$  bezeichnet werde, können wir nun als reziprok zu einer Matrix  $A$  bezeichnen, wenn

$$(99) \quad AA^{-1} = \varepsilon$$

ist. Aus dieser Definition erkennen wir, daß eine Einheitsmatrix zu sich selbst reziprok ist. Denn nach dem Gesetze der Matrizenmultiplikation ist

$$[\varepsilon \varepsilon]_{nm} = \sum_k \varepsilon(n, k) \varepsilon(k, m).$$

Hierbei verschwindet  $\varepsilon(n, k)$  stets, wenn nicht  $k$  gleich  $n$  ist, und ebenso  $\varepsilon(k, m)$ , woferne nicht  $m$  gleich  $k$  ist. Wir finden somit

$$[\varepsilon \varepsilon]_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n. \end{cases}$$

Es ist also nach Gl. 97

$$\varepsilon \varepsilon = \varepsilon$$

oder nach Gl. 99

$$(100) \quad \varepsilon^{-1} = \varepsilon.$$

Indem wir nun die Division durch eine Matrix als Multiplikation mit der reziproken Matrix erklären, können wir den Differentialquotienten einer Matrizenfunktion

$$y = f(x)$$

nach einer Argumentmatrix  $(x)$  durch die Beziehung definieren

$$(101) \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a},$$

wobei die Matrix  $a$  durch Multiplikation der Einheitsmatrix mit einer reinen Zahl gebildet sei, also

$$a = \alpha \varepsilon.$$

Dann wird nach Gl. 100

$$(102) \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \{ [f(x + \alpha e) - f(x)] e \}.$$

Ist im besonderen  $y$  gleich  $x$ , so finden wir somit unter Berücksichtigung der Regel für die Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dx}{dx} \right]_{nm} &= \lim \frac{1}{\alpha} \sum_l \{ [x(n, l) + \alpha \varepsilon(n, l) - x(n, l)] \varepsilon(l, m) \} \\ &= \sum_l \varepsilon(n, l) \varepsilon(l, m) = [e \varepsilon]_{nm}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$(103) \quad \frac{dx}{dx} = e.$$

Es seien nun  $f(x)$  und  $g(x)$  zwei beliebige Funktionen der Argumentmatrix  $x$ . Wir bilden das Produkt der beiden Matrizen  $fg$  und differenzieren dieses nach  $x$ . Nach Gl. 101 finden wir dann

$$\frac{d(fg)}{dx} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha)g(x + \alpha) - f(x)g(x)]$$

oder, indem wir in der eckigen Klammer das Glied  $f(x + \alpha)g(x)$  sowohl subtrahieren als auch addieren,

$$\begin{aligned} \frac{d(fg)}{dx} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \{ f(x + \alpha)g(x + \alpha) - f(x + \alpha)g(x) \\ &\quad + f(x + \alpha)g(x) - f(x)g(x) \}, \end{aligned}$$

also nach Gl. 101

$$(104) \quad \frac{d(fg)}{dx} = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g.$$

Setzen wir im besonderen

$$f(x) = g(x) = x,$$

so wird nach Gl. 104 und nach Gl. 103

$$(105) \quad \frac{d(x^2)}{dx} = 2xe.$$

Wir betrachten nun im besonderen eine Matrizenfunktion  $W$  zweier Argumentmatrizen  $p$  und  $q$ , deren Multiplikationsdifferenz eine Matrix  $k\varepsilon$  sei; es sei also

$$(106) \quad pq - qp = k\varepsilon.$$

Es läßt sich dann leicht zeigen, daß auch die beiden Gleichungen erfüllt sind

$$(107) \quad \begin{cases} Wq - qW = k \frac{\partial W}{\partial p} \\ pW - Wp = k \frac{\partial W}{\partial q} \end{cases}.$$

Den Beweis führen wir folgendermaßen: Wir setzen zunächst voraus, daß die Gleichungen (107) für irgend zwei Funktionen  $f$  und  $g$  richtig sein mögen. Setzen wir zunächst  $W=f$  und dann  $W=g$ , so erkennen wir ohne weiteres, daß die Gleichungen (107) auch für  $W=f+g$  gelten. Weiterhin läßt sich aber zeigen, daß dann die Gleichungen (107) auch für  $W=f \cdot g$  erfüllt sein müssen. Um dies zu zeigen, benutzen wir die Identität

$$fgq - qfg = f(gq - qg) + (fq - qf)g$$

(d. h. wir addieren und subtrahieren das Glied  $fqq$ ). Nun ist aber, da wir ja voraussetzten, daß die Gleichungen (107) für  $f$  und  $g$  erfüllt sind, der erste Klammerausdruck der letzten Gleichung gleich  $k \cdot \partial g / \partial p$  und der zweite Klammerausdruck gleich  $k \cdot \partial f / \partial p$ . Wir finden also

$$fgq - qfg = k \left( f \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} g \right)$$

oder nach Gl. 104

$$(fg)q - q(fg) = k \frac{\partial (fg)}{\partial p}.$$

In analoger Weise ist natürlich

$$\rho(fg) - (fg)\rho = k \frac{\partial(fg)}{\partial q}.$$

Woferne die Gleichungen (107) also für irgend zwei Funktionen  $f$  und  $g$  gelten, sind sie auch für die Funktionen  $f + g$  und  $f \cdot g$  erfüllt. Die Gleichungen (107) müssen somit, woferne sie für  $f$  und  $g$  gelten, für jede Funktion erfüllt sein, die sich aus  $f$  und  $g$  durch wiederholte Anwendungen von Additionen und Multiplikationen gewinnen läßt. Nun gelten aber, wie man ohne weiteres erkennt, die Gleichungen (107) sowohl für  $W = \rho$  als auch für  $W = q$ ; somit müssen sie auch für jede ganze Funktion von  $\rho$  und  $q$  gelten, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nach diesen allgemeinen mathematischen Überlegungen wollen wir zur Physik zurückkehren und unter  $q$  eine Koordinatenmatrix und unter  $\rho$  die ihr zugeordnete Impulsmatrix verstehen. Wir gehen sodann von den Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik aus, die wir zweckmäßig in der sogenannten kanonischen Form schreiben. Die Energie wird dabei in bekannter Weise als Funktion der Koordinaten und Impulse, als sogenannte HAMILTONSche Funktion  $H(q, p)$  aufgefaßt. Auch dieser HAMILTONSchen Funktion ordnen wir eine Matrix ( $H$ ) zu und schreiben sodann die bekannten kanonischen Bewegungsgleichungen an, wobei wir wegen der Übertragung auf die Matrizenmechanik für  $H$ ,  $q$  und  $p$  fette Buchstaben gebrauchen, also

$$(108) \quad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Da die HAMILTONSche Funktion  $H$ , die die Energie darstellt, als Funktion der  $q$  und  $p$  den Gleichungen (107) genügen muß, erhalten wir somit, indem wir gemäß der HEISENBERGSchen Vertauschungsrelation der Konstante  $k$  den Wert  $h/(2\pi i)$  geben, die beiden Beziehungen

$$(109) \quad \begin{cases} Hq - qH = \frac{h}{2\pi i} \dot{q} \\ pH - Hp = -\frac{h}{2\pi i} \dot{p}. \end{cases}$$

Wir können uns dabei im folgenden auf die obere dieser beiden Gleichungen beschränken.

Diese Gleichung können wir nun leicht in eine Beziehung zu den Spektraltermen bringen, deren Differenzen die spektralen Frequenzen darstellen, welche durch das betrachtete Elektron hervorgerufen werden können. Hierzu bilden wir aus den Termen eine Diagonalmatrix nach dem Schema

$$\begin{array}{ccc} T_{00} & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{22} \end{array}$$

usw., wobei nach der Definition der Spektralterme

$$(110) \quad T(n, n) - T(m, m) = \nu(n, m)$$

ist. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Die Erkenntnis, daß die zweifache Mannigfaltigkeit der spektralen Frequenzen eines Atoms auf eine einfache Mannigfaltigkeit von Termwerten zurückgeführt werden kann, ist älter als die Quantentheorie der Atome und ist bereits vor der Aufstellung der BOHRSchen Frequenzbedingung von RITZ (1908) gewonnen worden. RITZ konnte dabei wiederum an wesentlich ältere Vorstellungen RYDBERGS anknüpfen. Jedenfalls ist aber das sogenannte RYDBERG-RITZsche Termprinzip ganz unabhängig von der Quantentheorie entstanden.

Multiplizieren wir nun die Term-Diagonal-Matrix mit der Koordinatenmatrix, so finden wir nach Gl. 95

$$[Tq - qT]_{nm} = q(n, m)[T(n, n) - T(m, m)]$$

oder nach Gl. 110

$$[Tq - qT]_{nm} = q(n, m)v(n, m).$$

Auf Grund der Gl. 75 ergibt sich somit die Beziehung

$$(111) \quad Tq - qT = \frac{1}{2\pi i} \dot{q},$$

und hieraus folgt durch einen Vergleich mit Gl. 109

$$Hq - qH = h(Tq - qT)$$

oder

$$(112) \quad (H - hT)q - q(H - hT) = 0.$$

Dies bedeutet nach dem, was im Anschluß an Gl. 96 vorhin gesagt wurde, daß die Matrix  $(H - hT)$  eine Diagonalmatrix mit lauter gleichen Diagonalgliedern sein muß. Nun ist aber  $T$  selbst eine Diagonalmatrix, und wir erkennen somit, daß auch die Energiematrix eine Diagonalmatrix sein muß, deren Glieder von denen der Diagonalmatrix  $hT$  nur durch eine für alle Glieder gleiche additive Konstante verschieden sein können. Es ist also einerseits

$$(113) \quad H(n, m) = 0 \text{ für } n \neq m,$$

und andererseits

$$(114) \quad H(n, n) - H(m, m) = h[T(n, n) - T(m, m)].$$

Aus der Tatsache, daß  $H$  eine Diagonalmatrix ist, folgt (nach dem im Anschluß an Gl. 77 Gesagten), daß

$$(115) \quad \dot{H} = 0$$

ist, in welcher Matrizengleichung der Satz von der Erhaltung der Energie seinen Ausdruck findet. Andererseits ergibt sich aus den Gleichungen (114) und (110) die Beziehung

$$(116) \quad H(n, n) - H(m, m) = h v(n, m).$$

Diese Gleichung ist wiederum der Ausdruck der BOHRschen Frequenzbedingung; sie ordnet einer atomaren Zustandsänderung ein Lichtquant zu, dessen Frequenz durch den Quotienten aus der Energieänderung und dem elementaren Wirkungsquantum bestimmt ist. So erweisen sich in der Tat in der Quantenmechanik Energiesatz und Frequenzbedingung als notwendige Konsequenzen der HEISENBERGschen Vertauschungsrelation.

In der ursprünglichen BOHRschen Theorie war das elementare Wirkungsquantum in zweifacher Gestalt eingeführt worden, einerseits als eine optischspektrale Konstante, andererseits als eine atommechanische. Die erste Rolle fand eben in der BOHRschen Frequenzbedingung ihren Ausdruck, die zweite in der BOHRschen Quantisierungsregel, die den mit  $2\pi$  multiplizierten Drehimpuls einem ganzzahligen Vielfachen des Wirkungsquantums gleichsetzt. Wieso einer und derselben Größe diese zwei ganz verschiedenen Rollen zufallen, die undulatorische und die dynamische, wenn man kurz so sagen darf, blieb in der BOHRschen Theorie noch unverständlich. Die Theorie von DE BROGLIE hat die undulatorische Rolle als die primäre angesehen und hat aus ihr die dynamische als eine notwendige Konsequenz abzuleiten vermocht. Die Quantenmechanik bietet die umgekehrte Möglichkeit, nämlich die atomdynamische Rolle als die primäre anzunehmen und hieraus die undulatorischspektrale Bedeutung des Wirkungsquantums zu deduzieren.

## Zehntes Kapitel.

## Der Zusammenhang zwischen der Heisenbergschen Quantenmechanik und der Theorie von Schrödinger.

Als wenige Monate nach der Begründung der Quantenmechanik SCHRÖDINGER seine Eigenwertmechanik schuf, mußte selbstverständlich die Frage eines etwaigen Zusammenhanges der beiden Theorien rege werden. SCHRÖDINGER selbst <sup>1)</sup> ist es gelungen, diesen Zusammenhang aufzudecken und nachzuweisen, daß trotz der Verschiedenheit der Auffassungen dennoch seine Theorie und die HEISENBERG-BORNSCHE Quantenmechanik mathematisch vollkommen äquivalent sind. Der exakte Beweis dieser Äquivalenz ist allerdings zu kompliziert und erfordert zuviel mathematische Vorkenntnisse, als daß er sich in den Rahmen dieser elementar zu haltenden Schrift einfügen ließe; es möge daher im folgenden nur der Grundgedanke dieser Beweisführung wiedergegeben werden.

Wir gehen hierzu von dem Begriff des mathematischen Operators aus. In bekannter Weise können wir die Differentiation einer Funktion  $y$  nach einem Argument  $x$  symbolisch als Multiplikation von  $y$  mit dem Operator  $d/dx$  auffassen <sup>2)</sup>. In analoger Weise

1) E. SCHRÖDINGER, „Über das Verhältnis der HEISENBERG-BORN-JORDANSCHEN Quantenmechanik zu der meinen“, Ann. d. Phys. (4) **79**, 1926, S. 734.

2) Allgemein bekannt ist ja aus der Vektoranalysis der sogenannte HAMILTONSche Operator  $\nabla$ , der als Vektor mit den Komponenten  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$  aufgefaßt wird, und mit dem wie mit einem Vektor gerechnet werden kann.

kann etwa der zweite partielle Differentialquotient von  $y$  nach  $x$  aufgefaßt werden als Multiplikation von  $y$  mit einem Operator  $\partial^2/\partial x^2$ . Auch können wir  $x$  selbst als Operator ansehen und darunter die Multiplikation mit  $x$  verstehen; in diesem Sinne können wir von einem Operator 1 sprechen, der, auf irgend eine Funktion angewendet, eben diese Funktion ergibt. Unter dem Produkte zweier Operatoren können wir einen Operator verstehen, der dasselbe Resultat ergibt wie die sukzessive Anwendung jener beiden Operatoren. Der zweite Differentialquotient erscheint derart als Quadrat des ersten, und das Operatorenprodukt  $\frac{d}{dx}x$  bedeutet die nach  $x$  vorgenommene Differentiation des Produktes aus einer Funktion und  $x$  usw.

Die Multiplikation zweier Operatoren erweist sich auf Grund dieser Festsetzung natürlich als nicht kommutativ, so daß auch für Operatoren Vertauschungsrelationen aufgestellt werden können. Wir benutzen hierzu etwa die Identität

$$\frac{\partial(xy)}{\partial x} = y + x \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Indem wir in dieser Formel die Funktion  $y$  weglassen, uns also auf die Operatoren beschränken, können wir die Operatorgleichung aufstellen:

$$(117) \quad \frac{\partial}{\partial x}x - x \frac{\partial}{\partial x} = 1;$$

d. h. wenn wir irgend eine Funktion mit  $x$  multiplizieren und das so erhaltene Produkt nach  $x$  differenzieren und hiervon den noch mit  $x$  multiplizierten Differentialquotienten der Funktion nach  $x$

subtrahieren, so erhalten wir wiederum die ursprüngliche Funktion.

Die Gl. 117 können wir nun natürlich noch mit einer beliebigen Konstante multiplizieren<sup>1)</sup>. Wählen wir als solche den Ausdruck  $h/(2\pi i)$  und verstehen wir unter dem Operator  $x$ , der die Multiplikation mit  $x$  bedeutet, nun im besonderen den Operator  $q$ , nämlich die Multiplikation mit der Koordinate  $q$ , so erhalten wir eine Vertauschungsrelation in der Form

$$(118) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} q - q \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{h}{2\pi i} 1.$$

Vergleichen wir diese Beziehung mit der HEISENBERG'schen Vertauschungsrelation (Gl. 82), so sehen wir, daß bei Ersatz der Koordinatenmatrix durch den Operator  $q$  (der Multiplikation mit  $q$  bedeutet) die Impulsmatrix durch den Operator

$$(119) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}$$

zu ersetzen ist.

Dieses merkwürdige Ergebnis, zu dem zuerst BORN und WIENER<sup>2)</sup> gelangten, legt den Gedanken nahe, eine Verallgemeinerung der Mechanik dadurch zu versuchen, daß wir in einer fundamentalen Gleichung der klassischen Mechanik, die die Koordinaten  $q$  und die Impulse  $p$  mit einander verknüpft,  $q$  durch den Operator  $q$ , und  $p$  durch den Operator der Formel (119) ersetzen. Als eine solche Gleichung wählen wir zweckmäßig das Energieprinzip. Betrachten wir einen

<sup>1)</sup> Denn es ist ja  $d(ay)/dx$  gleich  $a dy/dx$ , wofern  $a$  konstant ist.

<sup>2)</sup> M. BORN und NORBERT WIENER. Zeitschr. f. Phys. **36**, 1926, S. 174.

einzelnen Massenpunkt, und bezeichnen wir seine drei räumlichen Koordinaten mit  $q_x$ ,  $q_y$  und  $q_z$ , so wird, weil  $p_x$  gleich  $m\dot{q}_x$  ist usw., die lebendige Kraft

$$L = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Bezeichnen wir ferner die nur von den Koordinaten abhängige potentielle Energie mit  $V$  und die Gesamtenergie mit  $E$ , so können wir den Satz von der Erhaltung der Energie durch die Gleichung ausdrücken:

$$(120) \quad \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V - E = 0.$$

Wenn wir nun die linke Seite dieser Gleichung als Operator auffassen, haben wir gemäß Formel (119) den Klammerausdruck der Gl. 120 zu ersetzen durch

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial q_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_z^2}\right) = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Delta,$$

wobei unter  $\Delta$  die LAPLACESCHE Ableitung zu verstehen ist (vgl. Gl. 47). Ist also  $S$  eine beliebige Funktion der Koordinaten, so erhalten wir die Beziehung

$$(121) \quad \left\{-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta + V - E\right\} S = 0$$

oder

$$\Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) S = 0,$$

in welcher Formel wir die Grundgleichung der SCHRÖDINGERSCHEN Theorie (Gl. 52) wieder erkennen. Diese Grundgleichung ergibt sich also als Erweiterung der klassischen Mechanik mittels der HEISENBERG-SCHEN Vertauschungsrelation durch deren Anwendung auf Operatoren.

Betrachten wir statt eines einzelnen Massenpunktes ein System von Massenpunkten, und bezeichnen wir die Impulskomponenten des  $n$ -ten Teilchens mit  $p_{nx}$ ,  $p_{ny}$ ,  $p_{nz}$ , so nimmt die Gl. 120 die Form an:

$$\sum_n \frac{1}{2m_n} (p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2) + V - E = 0,$$

wobei jetzt  $V$  die gesamte potentielle Energie und  $E$  die Totalenergie des Systems bedeuten. Die Gl. 121 ist dann in der Form zu schreiben

$$(122) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2} \sum_n \frac{1}{m_n} \Delta_n + V - E \right\} S = 0,$$

und hieraus ergibt sich die verallgemeinerte SCHRÖDINGERSche Differentialgleichung in der Form (vgl. Gl. 65):

$$\sum_n \frac{1}{m_n} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_n^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_n^2} \right) + \frac{8\pi^2}{\hbar^2} (E - V) S = 0.$$

Aus den Lösungen, die die SCHRÖDINGERSche Differentialgleichung für irgend ein spezielles Problem liefert, lassen sich nun in der Tat die Matrixelemente des entsprechenden quantenmechanischen Problems berechnen. Bezeichnen wir die Eigenwerte des SCHRÖDINGERSchen Problems, indem wir sie etwa nach der Größe ordnen und numerieren, mit  $A_0, A_1, A_2$  usw. und die entsprechenden Lösungen, also die entsprechenden Eigenfunktionen, mit  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  und so fort, so können wir eine zweifache Mannigfaltigkeit von Werten nach der Formel bilden

$$(123) \quad a(n, m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(q) q \varphi_m^*(q) dq$$

und eine weitere zweifache Mannigfaltigkeit nach der anderen Formel

$$(124) \quad b(n, m) = \frac{h}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(q) \frac{\partial \varphi_m^*(q)}{\partial q} dq,$$

(wobei  $\varphi^*$  die zu  $\varphi$  konjugierte komplexe Größe bedeutet). Wie SCHRÖDINGER und ECKART<sup>1)</sup> nachgewiesen haben (auf die Wiedergabe des komplizierten Beweises muß hier verzichtet werden), stellen die Gleichungen (123) und (124) in der Tat die Lösungen des quantenmechanischen Problems dar, indem

$$(125) \quad q(n, m) = a(n, m) e^{2\pi i \nu(n, m) t}$$

und

$$(126) \quad p(n, m) = b(n, m) e^{2\pi i \nu(n, m) t}$$

ist.

Derart kann man die atomphysikalischen Probleme mittels der SCHRÖDINGERSCHEN Eigenwertmethode lösen, was im allgemeinen wesentlich leichter ist als die unmittelbare matrizentheoretische Lösung, und kann sodann durch eine Umrechnung auf Grund der Gleichungen (123) und (124) auch die matrizenmechanische Lösung gewinnen; diese liefert in den Größen  $a(n, m)$  auch die Übergangswahrscheinlichkeiten, die für die Intensitäten der Spektrallinien maßgebend sind.

Außer mit der SCHRÖDINGERSCHEN Eigenwerttheorie weist die Matrizenmechanik viele Berührungen auch mit einer dritten atomdynamischen Theorie auf, die ebenfalls im Jahre 1925 entstand; es ist dies die von DIRAC begründete  $q$ -Zahlen-Mechanik<sup>2)</sup>. Sie be-

<sup>1)</sup> C. ECKART, Phys. Rev. 28, 1926, S. 711.

<sup>2)</sup> P. A. M. DIRAC, Proc. of the Royal Soc. of London, Series A, 109, 1926, p. 642; 110, 1926, p. 561.

ruht auf der Annahme, daß die quantenmechanischen Größen durch eine Art „überkomplexer“ Zahlen darzustellen seien, die DIRAC eben als  $q$ -Zahlen bezeichnete und die sich von den gewöhnlichen Zahlen (die DIRAC  $c$ -Zahlen nannte) dadurch unterscheiden, daß für sie das Gesetz der Kommutativität der Multiplikation nicht gelten soll. Als  $q$ -Zahlen sieht die DIRACsche Theorie nicht nur die Koordinaten und Impulse sowie die als Funktion der Koordinaten und Impulse darstellbare Energie an, sondern überdies auch die Zeit <sup>1)</sup>. Im übrigen stimmen die Ergebnisse, zu denen in der Anwendung auf spezielle atomphysikalische Probleme die DIRACsche Theorie führt, mit denen der SCHRÖDINGERSchen und der HEISENBERG-Schen Theorie überein.

### Elftes Kapitel.

## Die kausale und die statistische Auffassung der Atomphysik.

Die vollkommene mathematische Äquivalenz, die trotz entgegengesetzter Ziele die SCHRÖDINGERSche Theorie mit der HEISENBERG-BORN-JORDANSchen verknüpft, läßt die Frage besonders wichtig erscheinen, wie die zentrale Vorstellung jeder der beiden Theorien

<sup>1)</sup> Dadurch, daß in der DIRACschen Theorie die Zeit und die räumlichen Koordinaten gleichen Charakter, nämlich den von  $q$ -Zahlen haben, wird auch der Übergang zu der Relativitätstheorie viel leichter als in der Matrizenmechanik, in der die räumlichen Koordinaten als Matrizen, hingegen die Zeit als gewöhnliche Rechengröße erscheinen.

vom Standpunkte der anderen Theorie zu interpretieren sei. Im Mittelpunkt der SCHRÖDINGERSchen Theorie steht der Begriff der Welle, im Mittelpunkt der Quantenmechanik der Begriff der Korpuskel. Was bedeutet nun vom SCHRÖDINGERSchen Standpunkt aus das Elektron und was vom HEISENBERGSchen Standpunkt aus eine Materiewelle?

Die erste Frage ist im wesentlichen bereits seinerzeit durch DE BROGLIE selbst beantwortet worden. Er faßte ja die Materieteilchen als die Stellen maximaler Energiedichte innerhalb der Wellen auf. SCHRÖDINGER hat diesen Gedanken für den Sonderfall eines linearen Oszillators weiter ausgeführt. Sind  $\psi_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$  usw.) die Lösungen, die für diesen Fall die wellenmechanische Grundgleichung besitzt, so betrachtete SCHRÖDINGER <sup>1)</sup> eine Gruppe von Eigenfunktionen, also von Eigenschwingungen, für die die Werte von  $n$  in der näheren Umgebung einer bestimmten großen Zahl liegen mögen; die Frequenzen sind dann auf einen schmalen Bereich beschränkt. SCHRÖDINGER vermochte nun nachzuweisen, daß sich durch die Superposition der Eigenschwingungen dieses engen Bereiches (bei graphischer Darstellung) ein verhältnismäßig hoher und schmaler „Buckel“ ergibt, der sich nach denselben mechanischen Gesetzen wie ein linear oszillierender Massenpunkt hin und her bewegt. Auch konnte SCHRÖDINGER zeigen, daß eine solche Wellengruppe, daß ein derartiges „Energiepaket“ unter gewissen Voraussetzungen genügend lange zusammenhalten, d. h. auf einen kleinen

<sup>1)</sup> E. SCHRÖDINGER, Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, Naturwissenschaften **14**, 1926, S. 664 (auch in den „Abhandlungen zur Wellenmechanik“).

(allerdings fortwandernden) räumlichen Bereich konzentriert sein kann, so daß durch eine entsprechende Zeit ein merkliches (im allgemeinen nicht zu verhinderndes) Auseinanderfließen des Energiepakets unterbleibt <sup>1)</sup>.

Eine in ihrer Tendenz der SCHRÖDINGERSCHEN Deutung entgegengesetzte, quantenmechanische Interpretation der Materiewellen ist zuerst von BORN <sup>2)</sup> gegeben worden. Die SCHRÖDINGERSCHE Theorie beruht auf der Vorstellung streng kausaler Zusammenhänge. Einerseits gründet sie sich auf die Annahme, daß der Zustand des Wellenfeldes jederzeit genau beschreibbar sei, und andererseits auf das Postulat, daß aus einem gegebenen Anfangszustand des Feldes sein Zustand zu jeder späteren Zeit genau ableitbar sein müsse. Darum weist auch die fundamentale Differentialgleichung der SCHRÖDINGERSCHEN Theorie jenen Typus auf, der für die klassische, kausale Physik eigentümlich ist. Es mußte zunächst rätselhaft erscheinen, wieso eine derartige Gleichung, die Kausalität, Kontinuität und raumzeitliche

<sup>1)</sup> Ist  $\omega_0$  die ursprüngliche Breite des Wellenpaketes und  $m$  seine Masse, so ist bei kräftefreier Bewegung die Breite zu der Zeit  $t$ , wie EHRENFEST (Zeitschr. f. Phys. 45, 1927, S. 455) gezeigt hat, durch die Formel beschrieben

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2 m^2 \omega_0^2} t^2.$$

Die Zeit, in der eine Verdoppelung der ursprünglichen Breite eintritt, würde daher beispielsweise für eine Masse von 1 g und eine ursprüngliche Breite von  $10^{-3}$  cm nicht weniger als etwa rund 10 Billionen Jahre betragen. Für die Masse eines Protons und eine ursprüngliche Breite von  $10^{-8}$  cm wäre hingegen die Zeit der Verdoppelung nur  $10^{-13}$  sec.

<sup>2)</sup> M. BORN. Zeitschr. für Physik 37, 1926, S. 863; 38, 1926, S. 803.

Darstellung voraussetzt, dennoch (infolge der mathematischen Äquivalenz der SCHRÖDINGERSchen und der HEISENBERGSchen Theorie) richtige Resultate in ihrer Anwendung auf das quantenmechanische Geschehen liefert, das in seinem Wesen diskontinuierlich und nicht in der sonst üblichen Weise raumzeitlich beschreibbar ist.

Die Lösung dieses vermeintlichen Widerspruches ist BORN dadurch gelungen, daß er den SCHRÖDINGERSchen Feldskalar, der sich gemäß jener Differentialgleichung im Konfigurationsraum wellenförmig ausbreitet, als eine Wahrscheinlichkeit im statistischen Sinne interpretierte. Eine derartige Deutung wird durch die Beziehungen zwischen der Lichtquantenhypothese und der klassischen Undulationstheorie des Lichtes nahe gelegt. In dieser Theorie stellt das Amplitudenquadrat für den betrachteten Ort die Lichtintensität dar, die aber vom Standpunkte der Lichtquantenhypothese wohl nur mit der Wahrscheinlichkeit zusammenhängen kann, die für das Einlangen eines Lichtquants an dem betreffenden Orte besteht<sup>1)</sup>. Eine derartige Interpretation macht die Vorstellung, daß die Bewegungsrichtung eines einzelnen Lichtquants nicht determiniert sei, mit der strengen Gesetzmäßigkeit verträglich, die sich in den wahrnehmbaren optischen Interferenz- und Beugungsphänomenen offenbart.

---

<sup>1)</sup> Diese Auffassung macht die unverständliche Annahme überflüssig, daß Lichtquanten einander wechselseitig zerstören können; wohl aber zeigt sie, daß unter Umständen die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von Lichtquanten an einer Stelle trotz der Nähe von Lichtquellen so gering werden kann, daß die betreffende Stelle dunkel bleibt.

Die weitgehende Analogie zwischen Lichtquant und Elektron<sup>1)</sup> legt die Übertragung auf die SCHRÖDINGERSchen Wellen nahe. In dem Konfigurationsraum, der bei  $n$  Teilchen  $3n$ -dimensional (also beispielsweise bei zwei Teilchen sechsdimensional) ist, ist die jeweilige Konfiguration des Systems durch die momentane Lage eines „Bildpunktes“ darstellbar. Vom BORNschen Standpunkte aus kann man nun nie genau sagen, wo sich der Bildpunkt im nächsten Augenblicke befinden, welche Richtung also seine „Bewegung“ im Konfigurationsraume einschlagen wird. Alles, was nach BORN die Quantenmechanik anzugeben vermag, ist die Wahrscheinlichkeit, die für das Einschlagen einer bestimmten Richtung besteht. Diese Wahrscheinlichkeit kann aber wie eine kontinuierlich veränderliche und determinierte Größe behandelt werden und kann daher auch einer Differentialgleichung von „klassischem“ Typus genügen, wie es eben die SCHRÖDINGERSche ist<sup>2)</sup>.

Daß in der Tat eine kausale Auffassung der Atomphysik grundsätzlichen Schwierigkeiten begegnet, hat HEISENBERG<sup>3)</sup> veranschaulicht, indem er zeigte, daß es auch im Gedankenexperiment unmöglich sei, in einer einzigen Messung eine ideal genaue

1) Besonders klar ist diese Analogie in einer Abhandlung von G. BECK dargelegt; Zeitschr. f. Physik, **43**, 1927, S. 658.

2) SCHRÖDINGER selbst suchte den in seiner Differentialgleichung auftretenden Feldskalar in eine Beziehung zu der elektrischen Ladungsdichte zu bringen. Vgl. E. SCHRÖDINGER, Quantisierung als Eigenwertproblem, Vierte Mitteilung, § 7.

3) W. HEISENBERG, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Zeitschr. f. Physik, **43**, 1927, S. 172.

Bestimmung einer Koordinate mit einer ideal genauen Bestimmung des zugehörigen Impulses zu vereinen und daß deshalb jede Messung atomarer Größen notwendigerweise mit einer Unschärfe verbunden sein müsse.

Denken wir beispielsweise an ein in einem Atom umlaufendes Elektron, so könnten wir allenfalls mittels einer einzigen Messung seine Lage und seinen Impuls (nämlich seine Geschwindigkeit) bestimmen; wir müßten dazu das Elektron zur Feststellung seines Ortes unter Zuhilfenahme eines „Mikroskopes“ „beleuchten“ und zugleich seine Geschwindigkeit auf Grund des bekannten DOPPLER-Effektes ermitteln, nämlich durch die Wellenlängenänderung, die die zur Beleuchtung verwendeten Strahlen bei ihrer Zurückwerfung durch das bewegte Elektron erfahren. Mit dieser Beobachtung wäre aber nun notwendigerweise ein COMPTON-Effekt verbunden, darin bestehend, daß durch den Zusammenstoß zwischen einem Lichtquant und dem Elektron die Geschwindigkeit des letzteren verändert wird.

Einerseits wird nun eine umso schärfere Bestimmung des Elektronenortes möglich, je kürzerwellig die zur Beleuchtung verwendeten Strahlen sind (man müßte wohl bereits Gamma-Strahlen benutzen, deren Wellenlänge etwa 5 bis 50mal kleiner ist als der Radius des normalen Wasserstoffatoms<sup>1)</sup> in der BOHR'schen Theorie). Je kürzerwellig aber die Strahlen sind, desto stärker muß andererseits der COMPTON-Effekt in die Erscheinung treten, eine desto größere Änderung muß während und infolge der Beobachtung

<sup>1)</sup> Die Wellenlänge harter Gamma-Strahlen beträgt zwischen 10 und 100 X-Einheiten, der normale Radius des Wasserstoffatoms ca. 500 X-E. (1 X-E. ist  $10^{-11}$  cm).

der Elektronenimpuls erfahren. Will man also bei der Geschwindigkeitsbestimmung mittels des DOPPLER-Effektes eine große Genauigkeit erzielen, so muß die verwendete Strahlung möglichst langwellig gewählt werden, damit der unvermeidliche COMPTON-Effekt möglichst wenig störe. Ist die Strahlung aber langwellig, so wird wieder nach dem vorhin Gesagten eine genaue Ortsbestimmung des Elektrons unmöglich. Genauigkeit in der Lagebestimmung ist somit nur durch Verzicht auf Schärfe in der Impulsmessung möglich, und umgekehrt schließt Genauigkeit in der Impulsmessung Schärfe in der Lagenbestimmung aus. Die Vertauschungsrelation (Gl. 82) soll nach HEISENBERG der exakte Ausdruck dieser Unbestimmtheitsbeziehung sein, indem ganz allgemein im Falle größter, überhaupt erreichbarer Schärfe doch das Produkt der mit einer Messung verbundenen Ungenauigkeiten in der Koordinaten- und Impulsbestimmung durch das elementare Wirkungsquantum festgelegt und ihm in der Größenordnung gleich sein soll.

Wenn nun eine im klassischen Sinne präzise Beschreibung des atomaren Geschehens an sich unmöglich ist, verliert natürlich auch das Kausalprinzip seine Bedeutung für die Physik. Denn dieses Prinzip, nach dem die genaue Kenntnis der Gegenwart eine exakte Berechnung der Zukunft ermöglicht, wird gegenstandslos, wenn eine genaue Kenntnis der Gegenwart unerreichbar ist. Die Kausalität ist nach der quantenmechanischen Auffassung für die elementaren Prozesse der Physik zu verneinen und nur für die Wahrscheinlichkeiten zu bejahen, die diesen individuellen Prozessen aus statistischen Gründen zuzuordnen sind.

## Zwölftes Kapitel.

## Das Paulische Prinzip und die Quantentheorie des Grundstoffsystems.

Die Ergebnisse der Quantenmechanik stehen in einem engen Zusammenhang mit wichtigen Erkenntnissen, die bereits ein Jahr vor der Aufstellung der HEISENBERGSchen Theorie durch PAULI gewonnen worden waren und die das periodische System der Elemente betrafen. Man kann wohl sagen, daß die Entwicklung des Problems der chemischen Grundstoffe eines der großartigsten Beispiele dafür darstellt, wie aller wissenschaftliche Fortschritt letzten Endes in der allmählichen Überführung qualitativer in quantitativ-mathematische Erkenntnisse besteht. In dem Fall des Grundstoffproblems war die Möglichkeit hierfür gegeben, als einerseits durch die Entdeckung der Elektronen die qualitative Verschiedenheit der chemischen Elemente auf eine Verschiedenheit in der Anordnung der Materie-Urteilchen zurückgeführt und andererseits durch MOSELEY im Jahre 1913 die natürliche Reihe der Grundstoffe aufgefunden war. In der natürlichen Reihe erhielt jedes Element eine bestimmte Ordnungszahl, eine bestimmte Nummer (z. B. Wasserstoff die Nummer 1, Helium die Nummer 2, Eisen 26, Gold 79 und Uran die höchste Nummer 92); und diese Nummer erwies sich als gleichbedeutend mit der Zahl der Elektronen, die im neutralen Atom dessen Kern umgeben.

Durch die Auffindung der Ordnungszahlen der Elemente wurde nun auch eine exakte Darstellung der chemischen Periodizität möglich. Die Unter-

scheidung von sieben Perioden in dem Grundstoffsystem geht wohl bis auf das Jahr 1870 zurück<sup>1)</sup>; aber erst seit MOSELEYS Entdeckung war es möglich, die Längen der Perioden genau anzugeben, und zwar (wenn man von der letzten unvollständigen Periode<sup>2)</sup> absieht) zu 2, 8, 8, 18, 18 und 32. Als das grundlegende Problem der modernen Grundstofftheorie ergab sich die quantenmäßige Erklärung dieser Zahlen, die umsomehr das Interesse der Physiker erwecken mußten, als sie ja sämtlich doppelten Quadratzahlen gleich sind<sup>3)</sup>. Ein wesentlicher Schritt zur Lösung dieses Problems ist bereits im Jahre 1924 PAULI gelungen, der dabei an das Prinzip der vierfachen Quantelung der Atomzustände anknüpfte.

Zum quantenmechanischen Verständnis dieses Prinzips möge zunächst auf matrizen-theoretischer Grundlage eine Betrachtung vorausgeschickt werden, die sich auf den Drehimpuls eines um eine Achse symmetrischen Systems von Teilchen beziehen soll. Doch mögen im Hinblick auf die Langwierigkeit der erforderlichen Rechnungen hier nur die Rechnungsergebnisse mitgeteilt werden, im Anschluß an BORN, auf dessen Darstellung<sup>4)</sup> wegen der Einzelheiten verwiesen sei. Der Drehimpuls um die Achse ist

1) Das periodische System der Elemente wurde gleichzeitig von Lothar MEYER und MENDELEJEFF entdeckt.

2) Die siebente Periode bricht an sechster Stelle mit dem Uran ab. Sämtliche Perioden beginnen mit einem Alkalimetall (von der ersten Periode abgesehen, die mit Wasserstoff anfängt) und enden mit einem Edelgas.

3) Es ist ja  $2 = 2 \cdot 1^2$ ;  $8 = 2 \cdot 2^2$ ;  $18 = 2 \cdot 3^2$ ;  $32 = 2 \cdot 4^2$ .

4) Max BORN, Probleme der Atomdynamik (Berlin, Springer 1926) I. Teil, 15. Vorlesung.

für ein solches achsensymmetrisches System gleich der Resultierenden der Drehimpulse der einzelnen, zu dem System gehörigen Teilchen, und jeder einzelne Drehimpuls ist wieder durch das Produkt aus Masse, Geschwindigkeit und Abstand von der Achse gegeben.

Aus der Vertauschungsrelation der Matrizenmechanik kann man nun im Anschluß an die klassische Mechanik einerseits ableiten, daß die dem Drehimpuls um die Achse ( $U$ ) entsprechende Matrix eine Diagonalmatrix ist, und daß andererseits deren Glieder ( $U_0, U_1, U_2$  usw.) in einem einfachen Zusammenhang mit den Koordinatenmatrizen stehen, von denen wir je drei (entsprechend den drei räumlichen Koordinaten) jedem Teilchen zuordnen müssen. Machen wir nämlich die Symmetrieachse zur  $z$ -Achse, und bezeichnen wir die Koordinatenmatrizen eines beliebigen Teilchens mit  $q_x, q_y, q_z$ , so erhalten wir die folgenden drei, für jedes Teilchen gültigen Gleichungen, die die einzelnen Koordinaten mit dem Gesamtimpuls verknüpfen:

$$(127) \quad \begin{cases} q_x(n, m) (U_n - U_m) = \frac{\hbar}{2\pi i} q_y(n, m) \\ q_y(n, m) (U_n - U_m) = -\frac{\hbar}{2\pi i} q_x(n, m) \\ q_z(n, m) (U_n - U_m) = 0. \end{cases}$$

Wir können nun zwei verschiedene Arten von Zustandsänderungen, von sogenannten „Quantensprüngen“ des Systems unterscheiden, je nachdem ob sich hierbei der Drehimpuls um die Achse ändert oder ungeändert bleibt. Indem wir zunächst nur den ersten Fall betrachten (die genauere Diskussion bleibe einem späteren Kapitel vorbehalten) und die ersten

zwei der Gleichungen (127) miteinander multiplizieren, finden wir

$$(128) \quad U_n - U_m = \pm \frac{h}{2\pi}.$$

Man kann somit ganz allgemein setzen

$$U_n = U_0 + n' \frac{h}{2\pi},$$

wobei  $n'$  eine ganze (positive oder negative) Zahl und  $U_0$  eine Konstante bedeuten.

Andererseits führen aber Rechnungen auf Grund des Matrizen-Kalküls zu der Folgerung, daß die Summe der  $U$ -Werte, gebildet für die möglichen Werte von  $n'$ , verschwinden müsse. Dies bedeutet, wenn wir

$$U_0 = n_0 \frac{h}{2\pi}$$

setzen, daß

$$(129) \quad \sum_n (n' + n_0) = 0$$

sein muß. Da zwei benachbarte Werte dieser Reihe um Eins verschieden sind (weil nach Gl. 128  $n'$  nur um Eins springen oder ungeändert bleiben kann) und da andererseits (nach Gl. 129) die Reihe der  $(n' + n_0)$ -Werte in bezug auf Null symmetrisch sein muß, so ergeben sich nur zwei Möglichkeiten. Die Reihe ist entweder

$$\dots - 3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \dots$$

oder

$$\dots - \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{5}{2} \dots$$

Die Größe  $(n' + n_0)$ , die wir im folgenden mit  $m$  bezeichnen wollen<sup>1)</sup>, hat also die Bedeutung einer

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnung hat natürlich nichts damit zu tun, daß der Buchstabe  $m$  früher als Index gebraucht wurde.

sogenannten Quantenzahl. Sie stimmt mit der „magnetischen Quantenzahl“ überein, die bereits in der älteren Quantentheorie zur Deutung des ZEEMAN-Effektes benutzt worden war. Wie aus dem früher Gesagten (Gl. 128) hervorgeht, kann die magnetische Quantenzahl bei einer atomaren Zustandsänderung nur ungeändert bleiben oder sich um  $\pm 1$  ändern.

Zu einer weiteren Quantenzahl führen die matrixmechanischen Überlegungen, wenn neben dem Drehimpuls um die Symmetrieachse ( $U$ ) überdies der gesamte Drehimpuls ( $M$ ) betrachtet wird, der bei dem Vorhandensein äußerer Einflüsse von  $U$  verschieden ist. Es läßt sich zeigen, daß für den Grenzfall verschwindenden äußeren Einflusses dem gesamten Drehimpuls eine Diagonalmatrix zugeordnet werden kann, deren Glieder gleich  $M_j^2$  sind, wobei

$$(130) \quad M_j = \frac{h}{2\pi} \sqrt{j(j+1)}$$

ist. In dieser Formel, die mit einem Ergebnis der SCHRODINGERSchen Theorie (Gl. 61) übereinstimmt, bedeutet  $j$  wiederum eine Quantenzahl, die sich, wie die nähere Betrachtung zeigt, ebenso wie die magnetische Quantenzahl bei Quantensprüngen nur um Eins ändern kann, woferne sie nicht ungeändert bleibt. Zwischen den Quantenzahlen  $m$  und  $j$  besteht insoferne ein enger Zusammenhang, als in dem durch die Quantenzahl  $j$  gekennzeichneten Zustand die magnetische Quantenzahl  $m$  alle um Eins von einander abstehenden Werte von  $-j$  bis  $+j$  annehmen kann, aber auch nur diese Werte. Die beiden Quantenzahlen  $m$  und  $j$  kommen also jedenfalls noch zu der Hauptquantenzahl hinzu, die für den Einzel-Drehimpuls desjenigen Elektrons charakteristisch ist, dessen Übergänge das

betrachtete Spektrum erzeugen. Die hier mit  $j$  bezeichnete Quantenzahl ist schon der älteren Theorie bekannt gewesen; sie wurde im Jahre 1920 von SOMMERFELD als innere Quantenzahl in die Atomphysik eingeführt.

Um endlich zu einer vierfachen Quantisierung der Atomzustände zu gelangen, muß man noch die im Jahre 1925 von UHLENBECK und GOUDSMIT<sup>1)</sup> begründete Hypothese hinzuziehen, daß die einzelnen Elektronen eine Kreiselbewegung ausführen, die ihnen die Eigenschaften kleiner Magnete verleiht. Jedes Elektron besitzt derart selbst einen Drehimpuls; dabei ist zu berücksichtigen, daß für die Rotation zwei entgegengesetzte Möglichkeiten bestehen. Die Quantenmechanik führt nun auf Grund spektroskopischer Erfahrungstatsachen, wie HEISENBERG und JORDAN gezeigt haben<sup>2)</sup>, zu der Erkenntnis, daß man dem Kreisel-Elektron einen derartigen Drehimpuls zuschreiben muß, daß dessen Unterschied für die beiden Fälle entgegengesetzter Rotation gleich  $h/2\pi$  wird. Der Drehimpuls eines jeden Elektrons muß demnach  $\pm h/4\pi$  sein. Da eine Quantenzahl um Eins springt, wenn sich der Drehimpuls um  $h/2\pi$  ändert, so ist somit der Kreiselbewegung eines Elektrons entweder die Quantenzahl  $+\frac{1}{2}$  oder die Quantenzahl  $-\frac{1}{2}$  zuzuordnen<sup>3)</sup>.

1) Naturwissenschaften 13, 1925, S. 953.

2) Zeitschrift f. Physik 37, 1926, S. 263.

3) Bei zwei Elektronen ist somit der auf ihre Kreiselbewegungen zurückzuführende Drehimpuls insgesamt  $\pm 1$  oder 0, bei drei Elektronen  $\pm \frac{3}{2}$  oder  $\pm \frac{1}{2}$ , bei vier Elektronen  $\pm 2$ ,  $\pm 1$  oder 0 usw.

Der gesamte Drehimpuls erscheint derart als eine Resultierende, zu der die Kreiselbewegungen der Elektronen nur eine Komponente liefern. Die andere Komponente (die im allgemeinen vektoriell abzuspalten ist) erscheint durch eine weitere Quantenzahl charakterisiert, die mit  $l$  bezeichnet werde und bezüglich deren die theoretischen Betrachtungen ergeben, daß sie sich bei Quantensprüngen des Atoms stets um  $\pm 1$  ändern muß. Sie entspricht, wie die Betrachtung der optischen Spektren zeigt, der sogenannten Nebenquantenzahl, die zur Erklärung der optischen Spektren bereits im Jahre 1915 durch SOMMERFELD in die Atomphysik eingeführt worden war. Die Quantenmechanik ergibt, daß die Nebenquantenzahl eine Reihe ganzer, niemals negativer Zahlen bildet<sup>1)</sup> und daß der Maximalwert, den, bei gegebenem Werte  $n$  der Hauptquantenzahl, die Nebenquantenzahl  $l$  annehmen kann, stets um Eins kleiner als  $n$  ist; es ist also

$$(131) \quad l_{\max} + 1 = n.$$

Für die Nebenquantenzahl  $l$  sind daher, wenn die Hauptquantenzahl  $n$  gegeben ist,  $n$  verschiedene Werte möglich, nämlich

$$0, 1, 2 \dots (n - 1).$$

---

<sup>1)</sup> Am einfachsten ist die Bedeutung der Nebenquantenzahl für die optischen Spektren der Alkali-Metalle, bei denen vier Arten optischer Spektral-Terme als die wichtigsten unterschieden werden; sie entsprechen den Werten 0, 1, 2 und 3 der Nebenquantenzahl  $l$ . Die Duplizität der inneren Quantenzahl  $j$  erklärt es, daß die Terme Dublett-Terme sind, mit Ausnahme der stets einfachen Terme, denen der Wert  $l=0$  zukommt und für die nur ein einziger  $j$ -Wert möglich ist. Wesentlich komplizierter sind die Verhältnisse bei den anderen Grundstoffen.

PAULI<sup>1)</sup> entdeckte nun den Schlüssel zu dem Verständnis des periodischen Systems in einem von ihm aufgestellten Prinzip, wonach in einem Atom niemals zwei Elektronen in sämtlichen vier Quantenzahlen (Haupt-, Neben-, innerer und magnetischer Quantenzahl) übereinstimmen können. Zur Erläuterung des PAULISCHEN Prinzips denken wir uns die zu einem Atom gehörigen Planeten-Elektronen in Gruppen geteilt, die durch einen bestimmten Wert der Hauptquantenzahl (I, II, III, IV usw.) charakterisiert seien; innerhalb der Gruppen unterscheiden wir wieder Untergruppen, die durch einen bestimmten Wert der Nebenquantenzahl gekennzeichnet seien. Indem wir den Wert der Nebenzahl als Index zu der in römischen Ziffern geschriebenen Hauptzahl hinzufügen, ergeben sich somit nach Gl. 131 die folgenden Untergruppen als möglich:

$I_0$ ;  $II_0, II_1$ ;  $III_0, III_1, III_2$ ;  $IV_0, IV_1, IV_2, IV_3$ ;  $V_0$  usw.

Betrachten wir nun ganz allgemein eine Untergruppe von der Nebenquantenzahl  $l$ , und sehen wir zunächst von dem speziellen Falle ab, daß  $l = 0$  sei, so sind für ein Elektron die zugehörigen Werte der inneren Quantenzahl

$$\begin{cases} j_1 = l - \frac{1}{2} \\ j_2 = l + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Andererseits kann, wie schon erwähnt, die magnetische Quantenzahl ( $m$ ) alle um Eins von einander abstehenden Werte von  $-j$  bis  $+j$  annehmen. Die Zahl der möglichen Werte der magnetischen Quantenzahl

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. Physik **81**, 1925, S. 765.

beträgt für  $j_1$  demnach  $(2j_1 + 1)$  oder  $2l$ , für  $j_2$  hingegen  $(2j_2 + 1)$  oder  $(2l + 2)$ , insgesamt also  $(4l + 2)$ . Man erkennt leicht, daß diese Formel auch für den Sonderfall  $l = 0$  gilt; denn dann fällt der  $j_1$ -Wert weg, und  $j_2$  ist  $+\frac{1}{2}$ . Die möglichen Werte der magnetischen Quantenzahl sind dann nur  $-\frac{1}{2}$  und  $+\frac{1}{2}$ ; die Zahl der möglichen Werte beträgt demnach zwei oder, was dasselbe ist,  $(4 \times 0) + 2$ .

Im Sinne des PAULISCHEN Prinzips haben wir also die Maximalzahl der Elektronen, die in einer Untergruppe von der Nebenquantenzahl  $l$  enthalten sein können,

$$(132) \quad Z_{\max} = 4l + 2$$

zu setzen. Dies ergibt:

$$2 \text{ für } l = 0$$

$$6 \text{ für } l = 1$$

$$10 \text{ für } l = 2$$

$$14 \text{ für } l = 3$$

$$18 \text{ für } l = 4,$$

und so fort. Bezeichnen wir nun beispielsweise mit dem Symbol  $\text{III}_{01}$  eine dreiquantige Gruppe, in der aber nicht alle drei möglichen Untergruppen ( $l = 0$ ,  $l = 1$ ,  $l = 2$ ) enthalten sind, sondern nur die ersten zwei, so ergeben sich die folgenden Besetzungszahlen, wenn  $X$  eine beliebige Hauptquantenzahl bedeutet:

$$(133) \quad \begin{cases} X_0 & = 2 \\ X_{01} & = 8 \\ X_{012} & = 18 \\ X_{0123} & = 32, \end{cases}$$

und so fort. Diese Zahlen sind aber ganz dieselben wie diejenigen, die die Längen der einzelnen Perioden kennzeichnen.

In der Tat ergibt sich für die die einzelnen Perioden abschließenden Edelgase, denen die Ordnungszahlen 2, 10, 18, 36, 54 und 86 zukommen, das folgende Schema<sup>1)</sup>:

$$(134) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Helium} \quad = I_0 \\ \text{Neon} \quad = I_0 + II_{01} \\ \text{Argon} \quad = I_0 + II_{01} + III_{01} \\ \text{Krypton} \quad = I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{01} \\ \text{Xenon} \quad = I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{012} + V_{01} \\ \text{Emanation} = I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{0123} \\ \quad \quad \quad + V_{012} + VI_{01} \end{array} \right.$$

Setzen wir für die Symbole auf den rechten Seiten die Zahlenwerte gemäß Formel (133) ein, so finden wir in der Tat:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2 & = 2 \\ 2 + 8 & = 10 \\ 2 + 8 + 8 & = 18 \\ 2 + 8 + 18 + 8 & = 36 \\ 2 + 8 + 18 + 18 + 8 & = 54 \\ 2 + 8 + 18 + 32 + 18 + 8 & = 86 \end{array} \right.$$

Das die Gliederung des periodischen Systems wiedergebende Schema (134) ist im wesentlichen bereits im

<sup>1)</sup> Aus diesem Schema geht, wie nur nebenbei bemerkt sei, hervor, daß für den Aufbau des Grundstoff-Systems eine Vervollständigung innerer Elektronengruppen charakteristisch ist. Die dreiquantige Gruppe wird erst in der vierten Periode vervollständigt, die vierquantige erst in der fünften und sechsten Periode; auch die Vervollständigung der fünfquantigen Gruppe wird noch in der sechsten Periode fortgesetzt, ohne übrigens zum Abschluß zu gelangen.

Jahre 1924 von STONER<sup>1)</sup> im Anschluß an etwas ältere Ideen BOHR'S<sup>2)</sup> aufgestellt worden. Den tieferen Grund für diese „Arithmetik“ des periodischen Systems hat aber erst das PAULISCHE Prinzip aufgedeckt.

### Dreizehntes Kapitel.

## Die Bosesche Quantenstatistik.

Die der neuesten Physik eigentümliche Überbrückung des Gegensatzes zwischen Korpuskeln und Wellen, also zwischen Materie und Licht, ist von der größten Bedeutung auch für die Probleme der statistischen Physik geworden. Diese Probleme waren früher in zwei, voneinander scharf getrennte Gruppen zerfallen. Die einen bezogen sich eben auf die Materie, die anderen auf das Licht im weitesten Sinne dieses Wortes. Die statistische Physik der Materieteilchen war schon in der Mitte des 19. Jahrhunderts durch die kinetische Gastheorie zu hoher Vollkommenheit gediehen. Auf dem Gebiete der Lichtwellen waren statistische Betrachtungen einerseits auf Grund des Begriffes der Eigenschwingungen<sup>3)</sup>, andererseits auf Grund der Vorstellung der Energieelemente ( $h\nu$ ) bzw. der Lichtquanten möglich geworden. Als nun die Physiker fanden, daß den Lichtquanten ein Impuls ebenso wie materiellen Teilchen zugeschrieben werden muß, lag der Gedanke nahe, die Methoden und Er-

<sup>1)</sup> E. C. STONER, Philos. Magazine 48, 1924, S. 719.

<sup>2)</sup> N. BOHR, Zeitschr. f. Physik 9, 1922, S. 1.

<sup>3)</sup> Vgl. die Betrachtungen über das RAYLEIGH-JEANS'sche Prinzip im dritten Kapitel.

gebnisse der ersten Problemgruppe auf die zweite zu übertragen; und die umgekehrte Möglichkeit wurde wiederum durch die Hypothese der Materiewellen eröffnet.

Der erste bedeutsame Versuch, mittels der gas-theoretischen Methoden ein Problem der Strahlungstheorie zu lösen, betraf die fundamentale Frage, wie die spektrale Verteilung der elektromagnetischen Wellenenergie eines Hohlraums von der Temperatur abhängt. Ihre Lösung hatte diese Frage im Jahre 1900 durch das berühmte Strahlungsgesetz gefunden, das damals PLANCK auf Grund seiner Hypothese des elementaren Wirkungsquantums aufgestellt hatte. Es lag nun der Gedanke nahe, das PLANCKSCHE Strahlungsgesetz derart abzuleiten, daß die den Hohlraum erfüllende Strahlung gewissermaßen als ein Lichtquantengas aufgefaßt wurde, in dem sich die möglichen Werte des Impulses nach einem ähnlichen Gesetze über die einzelnen Individuen verteilen sollen wie in einem „materiellen“ Gase; nur daß eben bei letzterem der Impuls durch das Produkt aus Molekelmasse und molekularer Geschwindigkeit bestimmt erscheint, bei der Hohlraumstrahlung aber durch das noch durch die Lichtgeschwindigkeit dividierte Produkt aus Frequenz und elementarem Wirkungsquantum.

Wird die auf die Volumeinheit bezogene Strahlungsenergie in spektraler Zerlegung etwa gleichgesetzt

$$(134) \quad \eta = \int u, dv,$$

so hatte PLANCK für die von der Frequenz und der

Temperatur abhängige „spezifische Strahlungsdichte“  $u_\nu$ , den Wert ermittelt

$$(135) \quad u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Dabei bedeuten  $c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $T$  die absolute Temperatur und  $k$  die BOLTZMANNsche Konstante, die, mit  $\frac{3}{2} T$  multipliziert, die mittlere kinetische Energie einer einatomigen Molekel bei der Temperatur  $T$  ergibt <sup>1)</sup>. Wird  $u_\nu$  noch mit  $c/4$  multipliziert, so erhält man, wie nur nebenbei bemerkt sei, das sogenannte spezifische Emissionsvermögen <sup>2)</sup> eines schwarzen Körpers für den Spektralbereich von  $\nu$  bis  $\nu + d\nu$  bei der Temperatur  $T$ .

Andererseits gründen sich nun alle statistischen Betrachtungen der kinetischen Gastheorie auf den Begriff

<sup>1)</sup> Die BOLTZMANNsche Konstante ( $k$ ) stellt den universellen Proportionalitätsfaktor zwischen der Entropie ( $S$ ) und dem natürlichen Logarithmus der statistischen Wahrscheinlichkeit ( $W^*$ ) dar; es ist nämlich

$$S = k \ln W^*.$$

Der Zahlenwert der BOLTZMANNschen Konstante beträgt  $1,372 \cdot 10^{-16}$  erg/grad.

<sup>2)</sup> Unter dem Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers versteht man die von der Einheit seiner Oberfläche in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energie. Wird dieses Emissionsvermögen spektral zerlegt, also gleichgesetzt  $\int K_\nu d\nu$ , so finden wir, indem wir die Gl. 135 mit  $c/4$  multiplizieren,

$$K_\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Wird das Emissionsvermögen statt auf einen Frequenzbereich in üblicher Weise auf einen Wellenlängenbereich (von  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$ )

der statistischen Wahrscheinlichkeit einer gegebenen Zustandsverteilung. Unter dieser Wahrscheinlichkeit versteht man im Sinne der Kombinatorik die Zahl der Komplexionen, durch die eine gegebene Zustandsverteilung realisiert werden kann. Wir betrachten etwa eine Gesamtheit von  $N$  Individuen und ordnen die für die Individuen möglichen Zustände (mit zunächst willkürlicher Abgrenzung) in eine Reihe, die wir uns numeriert denken. Es sei  $N_1$  die Zahl der Individuen im ersten Zustand,  $N_2$  die Zahl im zweiten Zustand und allgemein  $N_i$  die Zahl in dem  $i$ -ten Zustand, wobei also

$$(136) \quad \sum_i N_i = N$$

ist. Dann entsteht eine neue Komplexion, wenn zwei Individuen, die sich in verschiedenen Zuständen befinden, ihre Rolle tauschen; dagegen entsteht keine

bezogen, so ergibt sich aus der letzten Gleichung auf Grund der Beziehung  $c = \lambda \nu$  die bekannte PLANCKSche Formel:

$$K_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{k\lambda T} - 1}.$$

Ist  $\lambda T$  klein, so ergibt sich das nur für das Ultraviolette oder für tiefe Temperaturen gültige WIENSche Gesetz:

$$K_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} e^{-\frac{c h}{k\lambda T}}.$$

Ist hingegen das Produkt  $\lambda T$  groß, so gelangt man zu dem nur für das Ultrarote oder für hohe Temperaturen gültigen RAYLEIGHschen Strahlungsgesetz:

$$K_\lambda = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4}.$$

Die Gesetze von WIEN und Lord RAYLEIGH, die beide nur eine beschränkte Geltung haben, wurden bereits vor der Aufstellung des allgemein gültigen PLANCKSchen Gesetzes aufgefunden.

neue Komplexion bei einer Vertauschung zweier Individuen in demselben Zustand. Unterscheiden wir z. B. zwei Zustände bei drei Individuen ( $a, b, c$ ), so sind für eine Zustandsverteilung

$$N_1 = 2, \quad N_2 = 1$$

drei Komplexionen möglich, gemäß dem Schema:

Erster Zustand	Zweiter Zustand
$ab$	$c$
$ac$	$b$
$bc$	$a$

Ebenso gibt es natürlich drei Komplexionen für die Zustandsverteilung  $N_1 = 1, N_2 = 2$ . Dagegen ist nur eine Komplexion für die Zustandsverteilung  $N_1 = 3, N_2 = 0$  möglich, und ebenso nur eine einzige Komplexion für die Verteilung  $N_1 = 0, N_2 = 3$ .

Die statistische Wahrscheinlichkeit, die stets eine ganze positive Zahl sein muß, ist nun offenbar durch die Zahl der Permutationen bestimmt, die mit  $N$  Individuen vorgenommen werden können, wobei aber solche Permutationen wegfallen, die in einer Vertauschung zweier Individuen desselben Zustandes bestehen. Die Gesamtzahl aller möglichen Permutationen von  $N$  Individuen ist bekanntlich  $N!$  (in Worten „ $N$  Fakultät“), wobei  $N!$  das Symbol für das Produkt  $[1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (N-1) \cdot N]$  bedeutet. Die Zahl der Permutationen, die dadurch möglich sind, daß die im ersten Zustand befindlichen Individuen untereinander vertauscht werden, ist  $N_1!$ , und so fort. Daher erhalten wir die statistische Wahrscheinlichkeit einer gegebenen Zustandsverteilung, indem wir  $N!$  zunächst durch  $N_1!$  dividieren, weil ja alle Kombinationen, die durch Vertauschung von Individuen innerhalb

der ersten Untergruppe entstehen, insgesamt doch nur eine einzige Komplexion darstellen (und nicht etwa  $N_1!$  Komplexionen). Weiterhin haben wir durch  $N_2!$  zu dividieren usw. Für die statistische Wahrscheinlichkeit, die wir mit  $W^*$  bezeichnen wollen, ergibt sich so der Ausdruck

$$(137) \quad W^* = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_i! \dots}$$

Aus der Vorstellung des Lichtquantengases läßt sich nun, wie im Jahre 1924 der indische Physiker BOSE zeigte <sup>1)</sup>, in der Tat die fundamentale PLANCK'sche Formel ableiten, wofern man sich erstens den einem Quantengase von dem Volumen Eins <sup>2)</sup> zuzuordnenden Impulsraum aus Zellen von der Größe  $h^3$  zusammengesetzt denkt <sup>3)</sup> und zweitens die statistische Wahrscheinlichkeit in einer von der klassischen Theorie abweichenden Weise definiert.

Der Unterschied zwischen der klassischen und der BOSESchen Statistik wird vielleicht am ehesten durch das vorhin betrachtete Beispiel klar, das sich auf zwei Zustände und drei Individuen bezog. Für dieses Beispiel kannte die klassische Statistik vier verschiedene Zustandsverteilungen, jedoch mit verschiedenem „Gewicht“, wenn wir bei einer Zahl von  $m$  möglichen Komplexionen (also bei  $W^* = m$ ) von  $m$ -fachem Gewicht sprechen. Diese vier Zustandsverteilungen sind für das betrachtete Beispiel:

<sup>1)</sup> S. N. BOSE, Zeitschr. f. Phys. **26**, 1924, S. 178 und **27**, 1925, S. 384.

<sup>2)</sup> Denn die Energie eines Hohlraums vom Volumen Eins ist ja mit der Energiedichte gleichbedeutend.

<sup>3)</sup> Vgl. das am Ende des dritten Kapitels Gesagte.

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 3, \quad N_2 = 0 \text{ mit einfachem Gewicht} \\ N_1 = 2, \quad N_2 = 1 \text{ mit dreifachem Gewicht} \\ N_1 = 1, \quad N_2 = 2 \text{ mit dreifachem Gewicht} \\ N_1 = 0, \quad N_2 = 3 \text{ mit einfachem Gewicht.} \end{array} \right.$$

Im Gegensatz zu der klassischen Auffassung schreibt nun die BOSESche Statistik allen diesen Zustandsverteilungen einheitlich nur ein einfaches Gewicht zu. Alle Verteilungen der Individuen über die Zustände sollen nach BOSE gleich wahrscheinlich sein, genau so wie in der klassischen Statistik alle einzelnen Komplexionen (z. B.  $ab;c$  oder  $ac;b$  oder  $bc;a$ ) untereinander die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Infolgedessen muß man in der BOSESchen Statistik statt von der Verteilung der Individuen über Zustandsgebiete von der Verteilung der Zustandsgebiete oder Zellen über die verschiedenen Besetzungsmöglichkeiten ausgehen. Sind  $N$  Individuen über  $Z$  Zustandsgebiete verteilt, so ist diese Verteilung in der klassischen Statistik durch die  $Z$  Zahlen  $N_1, N_2 \dots N_i \dots$  charakterisiert, die es angeben, wieviel Individuen in jedem Gebiete sind. In der BOSESchen Statistik erfolgt die Kennzeichnung der Verteilung durch  $(N + 1)$  Zahlen, nämlich  $Z_0, Z_1 \dots Z_j \dots$ , die es angeben, wieviel Zustandsgebiete oder Zellen mit 0, wieviel mit 1, wieviel mit 2, allgemein wieviel mit  $j$  Individuen besetzt sind; dabei muß

$$(138) \quad \sum_j Z_j = Z$$

sein.

Die statistische Wahrscheinlichkeit ergibt sich demnach in der BOSESchen Statistik, abweichend von der klassischen Theorie, zu

$$(139) \quad W = \frac{Z!}{Z_0! Z_1! \dots Z_j! \dots}$$

Betrachten wir z. B. in dem früher behandelten speziellen Falle, in dem  $N=3$ ,  $Z=2$  war, die besondere Verteilung, wo zwei Individuen im ersten und eines im zweiten Zustand sind, so wird nach Gl. 137 die klassische Wahrscheinlichkeit (die mit dem „Gewicht“ übereinstimmt)

$$W^* = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

Hingegen ist nach Gl. 139 die Bose'sche Wahrscheinlichkeit, weil es bei der betrachteten Verteilung keine Zelle mit der Besetzungszahl 0, eine mit der Besetzungszahl 1, eine mit der Besetzungszahl 2 und keine mit der Besetzungszahl 3 gibt,

$$W = \frac{2!}{1!1!} = 2.$$

Die Übereinstimmung, die zwischen den Gleichungen 137 und 139, sowie zwischen den Gleichungen 136 und 138 besteht, rechtfertigt die Übertragung der grundlegenden, in der klassischen Statistik gewonnenen Ergebnisse auf die Bose'sche Statistik, wofern wir die Größen, die in der klassischen Theorie auf ein Individuum im  $i$ -ten Zustand bezogen wurden, in der Bose'schen Statistik auf eine mit  $i$  Individuen besetzte Zelle beziehen. Eine fundamentale Formel der klassischen kinetischen Wärmetheorie besagt nun folgendes: <sup>1)</sup> Ist ein Energiebetrag  $E$  über  $N$  Individuen bei der Temperatur  $T$  verteilt, und ist  $\epsilon_i$  die Energie, die einem Individuum in dem durch den

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. des Verfassers „Einführung in die theoretische Physik“ (3. und 4. Auflage, Berlin-Leipzig 1923/24), Bd. II, § 132, Gl. 16 und § 142, Gl. 2.

Index  $i$  gekennzeichneten Zustand zukommt, so muß im Zustande statistischen Gleichgewichtes die Beziehung gelten:

$$(140) \quad \frac{E}{N} = \frac{\sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}$$

Wollen wir diese Gleichung für das Problem des Lichtquantengases verwerten, so beschränken wir uns innerhalb des Gases zunächst auf die Betrachtung derjenigen Lichtquanten, deren Frequenz in einem kleinen Intervall zwischen  $\nu$  und  $\nu + d\nu$  liege. Nach dem vorhin Gesagten haben wir in der BOSE-Statistik unter  $\varepsilon_i$  die Energie zu verstehen, die einer mit  $i$  Lichtquanten von der Frequenz  $\nu$  besetzten Zelle zukommt. Es ist daher

$$(141) \quad \varepsilon_i = i h \nu$$

zu setzen, und infolgedessen wird

$$\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = \sum_{n=0}^{n=Z} e^{-\frac{n h \nu}{kT}}$$

Nun ist nach der bekannten Summenformel für unendliche geometrische Reihen (falls  $y < 1$  ist)

$$1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \frac{1}{1-y}$$

Da die Reihe jedesfalls stark konvergiert<sup>1)</sup> und infolgedessen die obere Grenze der Summe statt mit  $Z$  mit Unendlich angenommen werden kann, wird daher

$$(142) \quad \sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

<sup>1)</sup> Der Quotient  $h\nu/kT$  ist für sichtbares Licht bei Zimmer-temperatur von der Größenordnung 50.

Differentiieren wir diese Gleichung partiell nach der Temperatur, und multiplizieren wir nachher beide Seiten mit  $kT^2$ , so finden wir

$$(143) \quad \sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^2}.$$

Wir dividieren nun die Gl. 143 durch die Gl. 142. Die linke Seite muß dann nach Gl. 140 den Mittelwert der Energie darstellen, der einer einzelnen Zelle zukommt. Dieser Mittelwert, der mit  $\bar{\varepsilon}$  bezeichnet werde, ergibt sich demnach zu

$$(144) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Andererseits betrachten wir den Impulsraum, den wir dem gesamten Lichtquantengas (bestehend aus Lichtquanten aller Frequenzen) gemäß der Beziehung zuzuordnen haben, daß der Impuls

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

ist. Alle Zellen des Impulsraumes, die einer Frequenz zwischen  $\nu$  und  $\nu + d\nu$  entsprechen, müssen in einer Kugelschale liegen, die von den beiden Radien

$$r_1 = \frac{h}{c} \nu, \quad r_2 = \frac{h}{c} (\nu + d\nu)$$

begrenzt wird. Das Volumen dieser Kugelschale ist

$$4\pi r_1^2 (r_2 - r_1) \quad \text{oder} \quad 4\pi \frac{h^3}{c^3} \nu^2 d\nu.$$

Da die einzelne Zelle des Impulsraumes nach unserer Voraussetzung die Größe  $h^3$  hat, ist somit die Zahl der Zellen in dieser Kugelschale  $Z d\nu$ , wobei

$$(145) \quad Z = \frac{4\pi \nu^2}{c^3}$$

ist. Andererseits muß aber, wenn wir bei den Lichtquanten (infolge der Transversalität der Lichtwellen) zwei zu einander senkrechte Polarisationszustände unterscheiden,

$$(146) \quad 2 Z \bar{\varepsilon} = u,$$

sein, und so ergibt sich in der Tat die PLANCKsche Formel (Gl. 135). Es sei im übrigen darauf hingewiesen, daß man die PLANCKsche Formel auch auf Grund des RAYLEIGH-JEANSschen Prinzips (vgl. das dritte Kapitel) erhält, wenn man einer jeden Eigenschwingung eine Energie zuschreibt, die ein ganzzahliges Vielfaches eines Energieelementes ( $h\nu$ ) ist <sup>1)</sup>. Nennen wir die ganze Zahl  $n$ , so treten also in der BOSESchen Statistik an die Stelle der  $n$ -quantigen Eigenschwingungen mit  $n$  Lichtquanten besetzte Zellen des Impulsraumes.

Die BROGLIESche Theorie der Materiewellen legte nun EINSTEIN <sup>2)</sup> den Gedanken nahe, eine Gastheorie zu entwerfen, deren Formeln ebenso aus der BOSESchen Statistik resultieren sollten, wie die der früheren Gastheorie aus denen der klassischen Statistik. Die Abweichungen der EINSTEINSchen Gastheorie von der klassischen bestehen im wesentlichen darin, daß in klassischen Formeln, die den Ausdruck  $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$  ent-

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. die Ableitung, die der Verfasser dieser Schrift bereits 1921 in der ersten Auflage seiner „Einführung in die theoretische Physik“ gab (Gl. 6 des § 106 in der ersten, Gl. 6 des § 189 in der dritten und vierten Auflage).

<sup>2)</sup> A. EINSTEIN, Sitz.-Ber. der Berlin. Akad. 1924, S. 261; 1925, S. 3, 18.

halten, dieser Ausdruck durch den folgenden, komplizierteren ersetzt ist:

$$(147) \quad \frac{1}{B e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1},$$

wobei  $B$  eine Funktion der Temperatur bedeutet.

Die auf Grund dieser Formel sich ergebenden Abweichungen sind im allgemeinen belanglos. Sie gewinnen eine Bedeutung erst für extrem tiefe Temperaturen, für die auch die „idealen“ Gase eine nach der klassischen Theorie nicht erklärbare „Entartung“ zeigen. Im übrigen ist aber die EINSTEINSche Gastheorie in der letzten Zeit in den Hintergrund gegenüber einer anderen Gastheorie getreten, die auf Grund des PAULISchen Prinzips der italienische Physiker FERMI schuf.

## Vierzehntes Kapitel.

### Die Fermische Statistik.

Da das PAULISChe Prinzip für die verschiedenquantigen Elektronengruppen maximale Besetzungszahlen ergibt; da die Vorstellung der Materiewellen für ein in einen Behälter eingeschlossenes Gas notwendigerweise zu der Folgerung einer Quantisierung der Translations-Energie führt; da endlich die BOSESche Statistik die Frage der Besetzungszahlen der Zellen in den Vordergrund gerückt hatte; so lag der Gedanke nahe, das PAULISChe Prinzip auch für die statistische Theorie der Gase zu verwerten. In Durchführung dieser Idee ist im Jahre 1926 die FERMISSche Theorie der

Gasentartung<sup>1)</sup> entstanden. Sie ist auf die Annahme gegründet, daß in einem Gase höchstens eine Molekel mit vorgegebenen Quantenzahlen vorhanden sein könne.

Sehen wir von den inneren Bewegungen der Molekeln ab, beschränken wir uns also auf einatomige Molekeln, die sich überdies durchwegs im Grundzustand befinden mögen<sup>2)</sup>, so liegt es (in Analogie zu den Betrachtungen des dritten Kapitels) nahe, jeder Molekel, ihren drei Freiheitsgraden entsprechend, drei Quantenzahlen ( $n_1, n_2, n_3$ ) zuzuordnen; die Energie der Molekel kann dann gleichgesetzt werden

$$(148) \quad \varepsilon_n = h\nu(n_1 + n_2 + n_3) = nh\nu,$$

wobei  $\nu$  eine Grundfrequenz bedeutet. Es entsteht nun zunächst die Frage, durch wieviel Komplexionen der Energiewert  $nh\nu$  bei einer einzelnen Molekel realisiert werden kann. Diese Komplexionszahl, die wir  $s$  nennen wollen, stimmt offenbar mit der Zahl derjenigen Lösungen überein, die die diophantische Gleichung

$$n_1 + n_2 + n_3 = n$$

für nicht negative ganzzahlige Werte von  $n_1, n_2, n_3$  besitzt. Um die Zahl der Lösungen zu bestimmen, müssen wir bedenken, daß mit den willkürlichen Werten von  $n_1$  und  $n_2$  der Wert von  $n_3$  bereits festgelegt ist. Da  $n_2$  auch den Wert null annehmen, aber nie negativ werden kann, bestehen somit bei  $n_1 = 0$  insgesamt  $(n + 1)$  Möglichkeiten für  $n_2$ , bei  $n_1 = 1$  noch  $n$  Möglichkeiten, bei  $n_1 = (n - 1)$  noch zwei Möglichkeiten

<sup>1)</sup> E. FERMI, Zeitschr. f. Physik **36**, 1926, S. 902.

<sup>2)</sup> Überdies müssen wir annehmen, daß der Grundzustand nicht magnetisch zerlegbar sei.

(nämlich  $n_2 = 1$  oder  $n_2 = 0$ ), hingegen nur noch eine einzige (nämlich  $n_2 = 0$ ) für  $n_1 = n$ . Wir finden somit

$$s = (n + 1) + n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1$$

oder, da die Summe aller ganzen positiven Zahlen von 1 bis  $x$  bekanntlich gleich  $x(x + 1)/2$  ist,

$$(149) \quad s = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

In einem Gas könnten somit nach der FERMISCHEN Annahme

höchstens 1 Molekel mit der Energie 0

höchstens 3 Molekeln mit der Energie  $h\nu$

höchstens 6 Molekeln mit der Energie  $2h\nu$

höchstens 10 Molekeln mit der Energie  $3h\nu$

höchstens 15 Molekeln mit der Energie  $4h\nu$

vorkommen, und so fort. Die Energie eines Gases, das beispielsweise aus der geringen Zahl von nur 40 Molekeln zusammengesetzt wäre, könnte danach überhaupt nicht unter

$$1.0 + 3.1 + 6.2 + 10.3 + 15.4 + 5.5,$$

also nicht unter 130 Energieelemente ( $h\nu$ ) sinken. Aus der Übertragung des PAULISCHEN Prinzips in die Statistik folgt also notwendigerweise, daß ein Gas auch bei dem absoluten Nullpunkt Energie besitzen muß. Die Energieverteilung der Molekeln müßte hierbei eine gewissermaßen schalenartige Anordnung zeigen — in Analogie zu der schalenförmigen Struktur des Planeten-Elektronen-Systems in den Atomen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Den vollen Besetzungszahlen der Elektronengruppen 2, 8, 18, 32 usw. entsprechen eben in der FERMISCHEN Statistik die Zahlen 1, 3, 6, 10, 15 und so fort.

Eine bestimmte Zustandsverteilung wird nun wiederum durch Angabe der Zahlen  $N_i$  beschreibbar sein, wenn  $N_i$  die Zahl der Molekeln bedeutet, deren Energie gleich  $i h \nu$  ist. Aber im Gegensatz zu der klassischen Statistik unterliegen in der FERMISchen Theorie die Zahlen  $N_i$  der Beschränkung, daß

$$(150) \quad N_i \leq Q_i$$

sein muß, wenn wir zur Abkürzung

$$(151) \quad \frac{(i+1)(i+2)}{2} = Q_i$$

setzen. Wenn es nun im Gase  $N_i$  Molekeln mit der Gesamtquantenzahl  $i$  (also der Energie  $i h \nu$ ) gibt, während es maximal  $Q_i$  solcher Molekeln geben kann, so ergibt sich nach einer elementaren Regel der Kombinatorik die statistische Wahrscheinlichkeit, solange wir nur die Molekeln von der Gesamtquantenzahl  $i$  betrachten, zu<sup>1)</sup>

$$\binom{Q_i}{N_i}.$$

Für die Gesamtverteilung ergibt sich daher die statistische Wahrscheinlichkeit im FERMISchen Sinne, die mit  $W_F$  bezeichnet werde, zu

$$(152) \quad W_F = \binom{Q_0}{N_0} \binom{Q_1}{N_1} \binom{Q_2}{N_2} \dots \binom{Q_i}{N_i} \dots \\ = \prod \binom{Q_i}{N_i}.$$

Auf Grund dieser Formel können nun die Berechnungen in analoger Weise wie in der klassischen

<sup>1)</sup> Bekanntlich bedeutet

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

oder BOSESchen Statistik durchgeführt werden. Die Ergebnisse, zu denen sie führen, sind recht kompliziert; aber sie nehmen einfachere Formen für die beiden Grenzfälle schwacher und starker Entartung an. Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet bekanntlich nach der klassischen Theorie:

$$(153) \quad p = NkT,$$

wenn  $p$  den Druck und  $N$  die Zahl der Molekeln pro Volumeinheit bedeuten. Die FERMISCHE Theorie ergibt nun für den Grenzfall schwacher Entartung die Zustandsgleichung in der Form

$$(154) \quad p = NkT \left[ 1 + \frac{1}{16} \frac{h^3 N}{(\pi m k T)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

wobei  $m$  die molekulare Masse ist. Nach dieser Gleichung ist also der Druck größer als nach der klassischen Theorie<sup>1)</sup>. Für Helium bei 5° abs. und einem

<sup>1)</sup> Die Abweichungen der FERMISCHE Gastheorie von der klassischen und der EINSTEINischen lassen sich ganz grob derart beschreiben, daß an die Stelle des klassischen Ausdrucks

$$\frac{1}{e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}$$

in der EINSTEINischen Theorie (vgl. Formel 147) der Ausdruck

$$\frac{1}{B e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1}$$

hingegen in der FERMISCHE Theorie der Ausdruck

$$\frac{1}{A e^{\frac{\epsilon}{kT}} + 1}$$

tritt.  $B$  bedeutet eine Funktion der Temperatur, ebenso  $A$ , und zwar ist, wie HEITLER und PAULI zeigten,

$$\ln A = -\frac{\mu}{kT},$$

wenn  $\mu$  in GIBBSscher Bezeichnung das thermodynamische Potential, bezogen auf die Masseneinheit der Elektronen, bedeutet.

Druck von 10 Atm. würde die Abweichung ungefähr 15 % betragen.

In dem Grenzfall großer Entartung führt die FERMIsche Theorie zu der Zustandsgleichung

$$(155) \quad p = \frac{1}{20} \left( \frac{6}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2 N^{\frac{5}{3}}}{m} + \frac{2^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{8}{3}} m N^{\frac{1}{3}} k^2 T^2}{3^{\frac{5}{3}} h^2} + \dots$$

Aus dieser Formel geht hervor, daß auch für  $T=0$  das Gas einen Druck aufweisen, daß es also nicht nur eine Nullpunktsenergie, sondern auch einen Nullpunktdruck geben muß. Bemerkenswert ist auch die Formel, die im Falle großer Entartung FERMI für die spezifische Wärme (bei konstantem Volumen) erhält, nämlich

$$(156) \quad c_v = \frac{2^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}} \frac{m k^2 T}{h^2 N^{\frac{2}{3}}} + \dots$$

Die spezifische Wärme verschwindet demnach bei dem absoluten Nullpunkt, während sie sonst bei großer Entartung der absoluten Temperatur proportional ist<sup>1)</sup>.

Ein sehr bedeutungsvolles Anwendungsgebiet der FERMIschen Statistik wurde im Jahre 1927 durch SOMMERFELD<sup>2)</sup> in der Elektronentheorie der Metalle entdeckt. Die Vorstellung, daß sich die in einem Metall enthaltenen freien Elektronen, die

<sup>1)</sup> Die FERMIsche Gastheorie ergibt auch, wie nur nebenbei bemerkt sei, den STERN-TETRODESchen Wert für die absolute Entropie des Gases, nämlich

$$S = Nk \left[ \frac{3}{2} \ln T - \ln N + \ln \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{h^3} \right]$$

(wobei  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet).

<sup>2)</sup> A. SOMMERFELD, Zur Elektronentheorie der Metalle, Die Naturwissenschaften 15, 1927, S. 825.

die Elektrizitäts- und Wärmeleitung der Metalle verursachen, wie ein Gas verhalten, stößt, so nahelegend auch eine solche Hypothese ist, auf unüberwindliche Schwierigkeiten vom Standpunkte der klassischen Statistik. Nach dieser müßte nämlich bei der Temperatur  $T$  jedes freie Elektron ebenso wie eine einatomige Molekel die kinetische Energie  $3kT/2$  besitzen. Die freien Elektronen müßten also nach der klassischen Statistik jedenfalls einen merklichen Beitrag zu der spezifischen Wärme der Metalle liefern, welche Folgerung aber in offenkundigem Widerspruch zu der Erfahrung steht.

Diese Schwierigkeit fällt nun, wie SOMMERFELD zeigte, weg, wenn man auf die freien Elektronen die FERMISCHE Statistik anwendet. Denn da die Masse eines Elektrons rund 1800 mal kleiner ist als die Masse des leichtesten Atoms, so müßte sich nach der FERMISCHEN Theorie das Elektronengas bei Zimmertemperatur in einem Zustand vollkommener Entartung befinden. In der Tat folgt ja für den Grenzfall schwacher Entartung aus Gl. 154, daß bei gleicher Temperatur und Teilchenzahl das Korrektionsglied für das Elektronengas einige Hunderttausend mal größer sein müßte als für Heliumgas. Im Zustand großer Entartung ist aber wieder nach Gl. 156 die spezifische Wärme der Masse proportional und daher infolge der geringen Masse der Elektronen ziemlich unbedeutend neben der spezifischen Wärme der Metalle selbst<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Während nach der klassischen Statistik der Beitrag der freien Elektronen zu der spezifischen Wärme der Metalle  $3R/2$  wäre, wenn  $R$  die Gaskonstante bedeutet und die spezifische Wärme auf ein Mol bezogen wird, ist nach der FERMISCHEN Statistik dieser Beitrag bei Zimmertemperatur nur etwa  $R/100$ .

Die Anwendung der FERMISchen Statistik auf das Elektronengas führt, wie SOMMERFELD zeigte, zunächst zu dem bekannten WIEDEMANN-FRANZschen Gesetz, wonach das Verhältnis zwischen dem Wärmeleitvermögen und dem elektrischen Leitvermögen eines Metalls der absoluten Temperatur universell proportional ist. Ein in diesem Gesetz auftretender Zahlenfaktor war in der ursprünglichen Elektronentheorie der Metalle zu 3, später in exakter klassisch-statistischer Berechnung zu 2 ermittelt worden, während er sich auf Grund der FERMISchen Statistik zu  $\frac{1}{3}\pi^2$ , also zu ungefähr 3,3 ergibt. Der letzte der drei Werte ist derjenige, der mit den Messungsergebnissen am besten übereinstimmt. Auch auf die Theorie der Kontaktpotentiale, sowie des THOMSON- und des PELTIER-Effektes<sup>1)</sup> hat SOMMERFELD die FERMISche Statistik des Elektronengases erfolgreich angewendet. Wie SOMMERFELD zu zeigen vermochte, werden für diese Effekte die Größenordnung und die Temperaturabhängigkeit durch die FERMISche Statistik richtig wiedergegeben. Ein besonderer Gewinn der neuen Theorie besteht darin, daß sie, im Gegensatz zu den früheren Theorien, besondere Hypothesen über die Wechselwirkung zwischen den freien Elektronen und den Atomresten des Metalls als überflüssig erscheinen läßt.

<sup>1)</sup> Der PELTIER-Effekt besteht bekanntlich darin, daß, wenn man einen Strom durch einen aus zwei Metallen gebildeten Kreis gehen läßt, an der einen Lötstelle Erwärmung und an der anderen Abkühlung eintritt. William THOMSON hat wiederum gezeigt, daß auch in einem und demselben Metall thermische Effekte dann auftreten, wenn ein Strom zwischen Stellen von verschiedener Temperatur fließt.

## Fünfzehntes Kapitel.

## Weitere Anwendungen der Quantenmechanik.

Schon in den ersten zwei Jahren seit ihrer Begründung hat die neue Quantentheorie eine große Fülle höchst bedeutungsvoller Anwendungen gefunden. Einige unter ihnen sind schon in früheren Kapiteln kurz besprochen worden, wie die Theorien des Wasserstoffatoms und des STARK-Effekts, der Atomquantelung und des Grundstoffsystems, der Gasentartung und der freien Metallelektronen. Aus der beträchtlichen Zahl anderweitiger Anwendungen mögen im folgenden noch die wichtigsten erwähnt werden.

Zu einer sehr bemerkenswerten Folgerung gelangen wir zunächst auf Grund der früheren Gleichungen (127). Bei der Diskussion dieser Gleichungen können wir, wie schon seinerzeit erwähnt wurde, zwei verschiedene Arten von Quantensprüngen unterscheiden, je nachdem, ob sich hierbei der Drehimpuls des achsensymmetrischen Systems ändert oder ungeändert bleibt. Im ersten Fall ist der Ausdruck  $(U_n - U_m)$  in der letzten der drei Gleichungen (127) von null verschieden und somit

$$q_z(n, m) = 0.$$

Da die einzelnen Glieder einer Matrix Produkte aus Amplituden und Exponentialausdrücken darstellen, so bedeutet das Verschwinden von  $q_z(n, m)$  nichts anderes, als daß die elementare Lichtwelle, die bei dem betreffenden Übergang entsteht, keine Schwingungskomponente in der  $z$ -Richtung hat. Andererseits erscheint nach den ersten zwei Gleichungen (127)

die  $x$ -Richtung in keiner Weise vor der  $y$ -Richtung bevorzugt oder umgekehrt, so daß es sich offenbar um zirkuläre Lichtschwingungen senkrecht zur Symmetrieachse des Systems <sup>1)</sup> handeln muß. Bleibt hingegen bei dem Quantensprung der Drehimpuls ungeändert, so werden die linken und somit auch die rechten Seiten der Gleichungen null; es verschwinden  $q_y(n, m)$  und  $q_x(n, m)$ . Die Lichtschwingungen erfolgen dann parallel zur Symmetrieachse. Im ersten Falle, in dem sich nach Gl. 128 der Drehimpuls um  $\pm h/2\pi$  ändert, ist demnach das Licht zirkular polarisiert, im zweiten Falle, in dem der Drehimpuls ungeändert bleibt, hingegen linear polarisiert. Diese sogenannte Polarisationsregel wurde zusammen mit dem Auswahlprinzip, nach dem die Zahl  $2\pi U/h$  nur um  $\pm 1$  oder 0 springen kann, bereits im Jahre 1918 durch RUBINOWICZ abgeleitet. In der Quantenmechanik ergeben sich beide Prinzipie, im Gegensatz zu der älteren Theorie, ohne daß die Hinzufügung spezieller weiterer Hypothesen nötig wäre.

Die Störungsmethode, die bereits im Zusammenhange mit der SCHRÖDINGERSCHEN Eigenwertmechanik besprochen wurde, ist, von anderen Gesichtspunkten aus, auch in der Matrizenmechanik gelegentlich deren Begründung ausgebildet worden und hat als wichtiges Ergebnis eine Theorie der Dispersion geliefert <sup>2)</sup>. Den Ausgangspunkt bildete die Frage, welche Störungen die Glieder der Koordinatenmatrix eines Elektrons erfahren, wenn dieses in ein periodisch

<sup>1)</sup> Die Symmetrieachse des Systems wurde ja als  $z$ -Achse gewählt.

<sup>2)</sup> Vgl. hierzu BORN, Probleme der Atomdynamik, I. Teil, 13. Vorlesung.

veränderliches elektrisches Feld, also in eine Lichtwelle, gerät.

Sind  $F_0$  die Amplitude der elektrischen Feldstärke und  $\nu$  die Frequenz ihrer periodischen Änderung, sind ferner  $q_0$  und  $p_0$  Koordinaten- und Impulsmatrix im ungestörten Zustande, und bedeutet  $\nu_0(n, m)$  die Übergangsfrequenzen des betrachteten Atoms, so ergibt die matrixmechanische Rechnung für die Störung  $q_1$  der Koordinatenmatrix die Beziehung

$$(157) \quad q_1(n, m) = \frac{F_0 e}{4\pi i h \mu} \sum_k \frac{q_0(n, k) p_0(k, m) - p_0(n, k) q_0(k, m)}{[\nu_0(n, k) + \nu][\nu_0(k, m) + \nu]}$$

( $e$  und  $\mu$  bedeuten wie gewöhnlich elektrische Ladung und Masse). Für die Diagonalglieder der Koordinatenmatrix nimmt die letzte Gleichung die einfachere Form an:

$$(158) \quad q(n, n) = - \frac{F_0 e}{4\pi i h \mu} \sum_k \frac{q_0(n, k) p_0(k, n) - p_0(n, k) q_0(k, n)}{\nu_0^2(n, k) - \nu^2}$$

Indem man die Störung der Koordinatenmatrix mit der Ladung multipliziert, findet man das Moment der durch das elektrische Feld hervorgerufenen Polarisation und hieraus nach der in der elektromagnetischen Lichttheorie üblichen Methode den Brechungsindex in seiner Abhängigkeit von der Farbe.

Die Gl. 158 stellt die Erweiterung einer Dispersionsformel dar, die bereits im Jahre 1921 von LADENBURG <sup>1)</sup> aufgestellt und später durch KRAMERS <sup>2)</sup> und HEISENBERG <sup>3)</sup> verbessert worden war. Im Gegensatz zu den älteren Dispersionsformeln, die

<sup>1)</sup> R. LADENBURG, Zeitschr. f. Phys. 4, 1921, S. 451.

<sup>2)</sup> H. A. KRAMERS, Nature 113, 1924, p. 673.

<sup>3)</sup> H. A. KRAMERS und W. HEISENBERG, Zeitschr. f. Phys. 31, 1925, S. 681.

die Lichtfrequenz durchweg mit der Schwingungszahl des elektrischen Momentes verknüpft hatten, war die **LADENBURGS**che Formel die erste, in der statt dieser Schwingungszahl die Frequenzen der Quantensprünge des Atoms auftraten. Die Gl. 157 bringt es wiederum, abweichend von der klassischen Theorie, zum Ausdruck, daß das Streulicht mit dem einfallenden Lichte in der Frequenz nicht übereinstimmen muß, sondern daß in dem gestreuten Lichte auch Kombinationsfrequenzen, nämlich  $\nu \pm \nu_0(n, k)$  auftreten. Die Beobachtung dieser zuerst von **SMEKAL** <sup>1)</sup> postulierten Erscheinung ist auf optischem Gebiete bisher allerdings noch nicht gelungen.

In der Theorie des **ZEEMAN**-Effektes vermochten **HEISENBERG** und **JORDAN** <sup>2)</sup> mittels der Matrizenmechanik die **LANDÉ**sche Aufspaltungsformel zu deduzieren und exakter zu begründen. Die Verschiebung, die ein Spektralterm in einem Magnetfeld durch die Aufspaltung erfährt, ist, wie die Physiker schon lange wußten,

$$(159) \quad \Delta\nu = \frac{e}{4\pi c \mu} z H,$$

wobei wiederum  $e$  und  $\mu$  Ladung und Masse des Elektrons,  $H$  die magnetische Feldstärke und  $z$  eine ganze Zahl sind. Wie nun **LANDÉ** im Jahre 1923 fand <sup>3)</sup>, ist in einem schwachen Magnetfeld

$$(160) \quad z = mg,$$

wobei  $m$  die magnetische Quantenzahl ist und

$$(161) \quad g = 1 + \frac{j(j+1) + r(r+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$

<sup>1)</sup> A. **SMEKAL**, Naturwissenschaften **11**, 1923, S. 873.

<sup>2)</sup> Vgl. hierzu **BORN**, Probleme der Atomdynamik, I. Teil. 18. Vorlesung.

<sup>3)</sup> A. **LANDÉ**, Zeitschr. f. Phys. **15**, 1923, S. 189.

Dabei bedeuten (wie im XII. Kapitel)  $l$  die Nebenquantenzahl, die alle ganzzahligen Werte von null bis zu der um eins verminderten Hauptquantenzahl annehmen kann,  $r$  die Quantenzahl, die den Drehimpuls der Kreiselbewegungen der Elektronen mißt, und  $j$  die innere Quantenzahl. Für diese LANDESche Formel, die die Aufspaltungsbilder richtig zu berechnen gestattet, hat die Quantenmechanik eine exakte Begründung geliefert.

Auf quantenmechanischer Grundlage fand auch eine als PASCHEN-BACK-Effekt bekannte Erscheinung ihre Erklärung, nämlich der mit zunehmender magnetischer Feldstärke eintretende Übergang des durch die LANDESche Formel beschriebenen sogenannten anomalen ZEEMAN-Effektes in den schon von der klassischen Theorie erklärten „normalen“ ZEEMAN-Effekt<sup>1)</sup>. Der Übergang von dem anomalen zu dem normalen Effekt erklärt sich dadurch, daß nur so lange die Voraussetzungen für die Gültigkeit der LANDESchen Aufspaltungsformel erfüllt sind, als durch das Magnetfeld die Wechselwirkung zwischen den von den Quantenzahlen  $l$  und  $r$  abhängigen Bewegungen nicht gestört wird.

Während hinsichtlich der LANDESchen Formel und des PASCHEN-BACK-Effektes die Quantenmechanik nur die Ergebnisse der früheren Theorie exakter begründete, hat sie von der früheren Theorie abweichende und mit der Erfahrung besser übereinstimmende Resultate hinsichtlich der

1) Die klassische Theorie des normalen ZEEMAN-Effektes wurde, unabhängig von der Quantentheorie und noch vor deren Begründung, im Jahre 1896 von H. A. LORENTZ aufgestellt, der die Gl. 159 mit dem Zahlenfaktor  $z = \pm 1$  ableitete.

Intensitätsverhältnisse der ZEEEMAN-Komponenten einer Spektrallinie geliefert. In einem früheren Kapitel (Kap. XII) ist bereits darauf hingewiesen worden, daß nur solche Quantensprünge möglich sind, bei denen sich  $j$  um  $\pm 1$  ändert oder ungeändert bleibt, und daß dasselbe auch für die magnetische Quantenzahl  $m$  gilt. Hierdurch ergeben sich bei gegebenen Werten der Hauptquanten- und der Nebenzahl neun mögliche Übergänge.

Wir betrachten etwa zunächst die drei Übergänge, bei denen sich die innere Quantenzahl  $j$  um eins erhöht und die durch die folgenden Symbole dargestellt werden können:

$$\begin{aligned}(j, m) &\rightarrow (j + 1, m + 1) \\(j, m + 1) &\rightarrow (j + 1, m) \\(j, m) &\rightarrow (j + 1, m); \end{aligned}$$

für die Intensitätsverhältnisse der entsprechenden Linien ergeben quantenmechanische Berechnungen<sup>1)</sup> die Werte:

$$\frac{[(j + m + 2)(j + m + 1)]}{[(j + 1)^2 - m^2]} : \frac{[(j - m + 1)(j - m)]}{[(j + 1)^2 - m^2]}.$$

Die drei Übergänge, bei denen  $j$  ungeändert bleibt, können wir durch die folgenden Symbole bezeichnen:

$$\begin{aligned}(j, m - 1) &\rightarrow (j, m) \\(j, m) &\rightarrow (j, m - 1) \\(j, m) &\rightarrow (j, m); \end{aligned}$$

für diese Übergänge ergeben sich die Intensitätsverhältnisse zu

$$[j(j + 1) - m(m - 1)] : [j(j + 1) - m(m - 1)] : m^2.$$

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu BOERN, Probleme der Atomdynamik, 16. Vorlesung.

Endlich können wir die Übergänge betrachten, bei denen sich  $j$  um eins erniedrigt, entsprechend den Symbolen:

$$\begin{aligned}(j, m-1) &\rightarrow (j-1, m) \\(j, m) &\rightarrow (j-1, m-1) \\(j, m) &\rightarrow (j-1, m).\end{aligned}$$

Für diese Übergänge ergeben die quantenmechanischen Rechnungen die folgenden Intensitätsverhältnisse:

$$[(j-m)(j-m+1)]: [(j+m)(j+m-1)]: [j^2-m^2].$$

In der Theorie des neutralen Heliumatoms hatte die frühere Quantentheorie völlig versagt, obwohl das Heliumatom das einfachste Atom nächst dem des Wasserstoffs ist. Als das fundamentale Problem erschien die Berechnung der Ionisierungsspannung des Heliums, die, mit der Elektronenladung multipliziert, der Arbeit gleich ist, die erforderlich ist, um dem neutralen Heliumatom ein Elektron zu entreißen. Während alle früheren theoretischen Untersuchungen für diese Spannung Werte ergeben hatten, die mit dem experimentellen Befund nicht in Einklang zu bringen waren, ist es KELLNER<sup>1)</sup> auf Grund der SCHRÖDINGERSchen Theorie gelungen, einen mit der Erfahrung gut übereinstimmenden Wert zu deduzieren.

Sowohl der COMPTON-Effekt als auch der photo-elektrische Effekt sind vielfach mittels der Methoden der neuen Quantentheorie untersucht worden. DIRAC<sup>2)</sup> hat den COMPTON-Effekt vom Standpunkte der  $q$ -Zahlen-Mechanik behandelt und erfolgreich die Frage zu lösen vermocht, wie bei der Streuung von

1) G. W. KELLNER, Zeitschr. f. Physik, 44, 1927, S. 91.

2) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. London (A) 111, 1926, p. 405.

Röntgenstrahlen durch lose gebundene Elektronen die Frequenz und die Intensität der Streustrahlung von der Streurichtung abhängen. Für die Frequenz fand DIRAC denselben Ausdruck, den schon früher COMPTON und DEBYE aus der Lichtquantenhypothese abgeleitet hatten. Der Ausdruck, den DIRAC für die Intensität erhielt, weicht von dem der früheren Theorie etwas ab, schließt sich aber besser als dieser den experimentellen Befunden an. Im Anschluß an die SCHRÖDINGERSche Theorie wurde der COMPTON-Effekt von GORDON <sup>1)</sup> behandelt, der hierzu die relativitätstheoretische Wellengleichung des Ein-Elektronen-Problems ableitete.

Andererseits haben WENTZEL <sup>2)</sup> und BECK <sup>3)</sup> das Verhalten eines Atoms unter der Einwirkung einer Lichtwelle vom wellenmechanischen Standpunkt aus untersucht. Sie deduzierten, daß ein von einer Lichtwelle getroffenes Atom unter Umständen eine Materiewelle aussenden muß, die im BORNSchen Sinne als ein Strom von Photoelektronen zu deuten ist. Die von WENTZEL und von BECK ausgebildete Theorie ergibt für die Geschwindigkeit der Elektronen das bekannte EINSTEINSche Gesetz <sup>4)</sup>, und für die Richtungsverteilung Beziehungen, die durch die Erfahrung gut bestätigt werden.

---

<sup>1)</sup> W. GORDON, Zeitschr. f. Phys. **40**, 1926, S. 117.

<sup>2)</sup> G. WENTZEL, Zeitschr. f. Phys. **40**, 1926, S. 574; **41**, 1927 S. 828.

<sup>3)</sup> G. BECK, Zeitschr. f. Phys. **41**, 1927, S. 443.

<sup>4)</sup> Nach diesem Gesetz ist die Summe aus der kinetischen Energie des Photo-Elektrons und der Auslösearbeit gleich dem Produkt aus der Frequenz des auslösenden Lichtes und dem elementaren Wirkungsquantum.

Durch die Wellenmechanik und Quantenmechanik wurden neuestens der Quantentheorie auch zwei sehr bedeutungsvolle und große Anwendungsgebiete eröffnet, denen die frühere Quantentheorie fremd gegenüberstanden war. Es sind die Probleme der molekularen Bindungen und der Struktur der Atomkerne. HEITLER und LONDON<sup>1)</sup> haben im Jahre 1927 auf wellenmechanischer Grundlage zu zeigen vermocht, daß die für die frühere Atomtheorie schwer verständlichen homöopolaren<sup>2)</sup> Bindungen zweier gleicher Atome eine Folge von Resonanzerscheinungen sind, die bei den Materiewellen infolge der Gleichheit der Elektronen auftreten müssen. Auf Grund dieser Vorstellung vermochten HEITLER und LONDON die Bindungsenergie der zweiatomigen Wasserstoffmolekel in Übereinstimmung mit dem empirischen Wert zu berechnen und auch zu zeigen, daß bei zwei im Grundzustand befindlichen Helium-Atomen das PAULISCHE Prinzip eine wechselseitige Anziehung verhindert und damit die chemische Passivität des Heliums erklärt.

Diese Überlegungen wurden später von LONDON<sup>3)</sup> auf beliebige Atome ausgedehnt. Er ging dabei von der Tatsache aus, daß jeder Zustand eines Atoms

1) W. HEITLER und F. LONDON, Zeitschr. f. Phys. 44, 1927, S. 458.

2) Als homöopolar wird bekanntlich eine Bindung zwischen neutralen Atomen bezeichnet, während man unter einer heteropolaren Bindung eine zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Ionen versteht.  $H_2$  ist ein typisches Beispiel einer homöopolaren,  $HCl$  eines einer heteropolaren Bindung.

3) F. LONDON, Vorläufige Mitteilung in den „Naturwissenschaften“ 16, 1928, S. 58; ausführliche Abhandlung im Erscheinen in der Zeitschr. f. Physik, 1928.

durch die sich in der magnetischen Feinstruktur ausdrückende Multiplizität des Termsystems charakterisiert ist, dem der betreffende Atomzustand angehört; die Multiplizität ist also beispielsweise bei einem Triplett-Term-System mit drei anzunehmen, und so fort. Durch die Multiplizität ist nun nach LONDON der Symmetriecharakter des Wellenvorgangs bestimmt, den man dem Atom im SCHRÖDINGERSCHEN Konfigurationsraum zuzuordnen hat. Derart gelangte LONDON zu dem Ergebnis, daß die homöopolare Wertigkeit um eins kleiner als die Multiplizität sei <sup>1)</sup>. Er findet in Übereinstimmung mit der chemischen Erfahrung, daß die Halogene in den homöopolaren Verbindungen ein-, drei-, fünf- und siebenwertig seien, mit alleiniger Ausnahme des niedrigsten Halogens, des Fluors, das sich in der LONDONSCHEN Theorie als nur einwertig ergibt und auch tatsächlich nie eine andere Valenz aufweist. Für die Elemente der Sauerstoffgruppe berechnet LONDON, daß sie mit Ausnahme des Sauerstoffs selbst, der nur zweiwertig auftreten könne, zwei-, vier- und sechswertig seien, was wiederum mit der Erfahrung übereinstimmt.

Einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen einem Phänomen der optischen Spektren und einem Problem der Kernstruktur hat kürzlich HEISENBERG <sup>2)</sup> ent-

<sup>1)</sup> Die homöopolare Valenz ist gleich dem resultierenden Drehimpuls der Eigenrotationen der Elektronen, wenn dieser Drehimpuls in Einheiten  $h/4\pi$  gemessen wird. Der resultierende Drehimpuls vermindert sich bei der Absättigung einer Valenz um eine Einheit. Die homöopolaren Valenzen erscheinen abgesättigt, wenn der resultierende Drehimpuls der Elektronen verschwindet.

<sup>2)</sup> W. HEISENBERG, Zeitschr. f. Phys. **41**, 1927, S. 239.

deckt. In den Bandenspektren der Molekeln mit gleichen Kernen findet ein Intensitätswechsel statt, den man früher durch Einführung von Viertel-Quantenzahlen zu deuten versucht hatte. HEISENBERG erkannte, daß es sich hierbei um einen Resonanz-Effekt der Kerne handelt, und daß somit die Erforschung der Bandenspektren Aufschlüsse über die Kernstruktur zu liefern vermag. Aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial glaubt HEISENBERG schließen zu müssen, daß die Kerne des Wasserstoffs (also die Protonen) eine Eigenrotation haben, daß hingegen den Kernen von Helium und Kohlenstoff eine solche Eigenrotation nicht zukommt, indem bei diesen Kernen der resultierende Drehimpuls der den Kern zusammensetzenden Protonen und Elektronen verschwindet.

Daß auch die Kernstruktur durch das PAULI-sche Prinzip bedingt sein dürfte, hat schließlich BECK<sup>1)</sup> zu zeigen vermocht. Er brachte die Isotopen auf Grund der bekannten ASTON'schen Messungen in ein Schema, für das er einfache Gesetzmäßigkeiten auffand. Diese Gesetzmäßigkeiten, die auch Anhaltspunkte für den Aufbau der Atomkerne geben, entspringen nach BECK dem PAULI'schen Prinzip und erklären sich aus der Eigenrotation der Elektronen.

## Sechzehntes Kapitel.

### Quantenmechanik und Naturphilosophie.

Die Umwälzung, die in der Physik durch die Wellenmechanik und die Quantenmechanik hervor-

<sup>1)</sup> BECK, Zeitschr. f. Physik 1928, im Erscheinen.

gerufen wurde, ist eine viel zu tief greifende, als daß sie nicht früher oder später von weit gehendem Einfluß auf die gesamte Naturphilosophie werden müßte. Für mehrere fundamentale Begriffe der Naturphilosophie eröffnen die neuen physikalischen Theorien die Möglichkeit einer wesentlichen Wandlung, und vor allem gehören hierzu die Begriffe der Materie, der Kausalität und des Naturgesetzes.

Durch die moderne Experimentalphysik ist am Ende des 19. Jahrhunderts die schon von der naturphilosophischen Spekulation des Altertums postulierte Auflösung der Materie in diskrete Urteilchen zur exakten Gewißheit geworden. Die allerneueste Entwicklung der Physik hat indessen der Selbständigkeit dieser Urteilchen wesentliche Beschränkungen auferlegt. Weder erscheint heute eine scharfe Lokalisierung der Urteilchen möglich, noch eine deutliche Umgrenzung. Ein jedes Teilchen beeinflußt die anderen und wird umgekehrt (wie die FERMISCHE Statistik erkennen läßt) durch die anderen in seiner Freiheit beeinträchtigt.

Der Gegensatz zwischen der Materie und dem (im weitesten Sinne aufgefaßten) Lichte ist durch die jüngste Entwicklung der Atomtheorie sehr gemildert worden. Die wesentlichen Eigentümlichkeiten der Materie, wie vor allem ihre Diskontinuität und ihr Impuls, sind bei dem Lichte und umgekehrt der undulatorische Charakter des Lichtes bei der Materie wiedergefunden worden. Korpuskulare und undulatorische Auffassung erscheinen in der heutigen Physik nicht mehr als Grundlagen verschiedener physikalischer Wissenszweige, sondern als kom-

plementäre Züge einer allgemeinen und einheitlichen Naturbetrachtung<sup>1)</sup>).

Der scharf ausgeprägten Kausalität, die sich in dem makroskopisch-physikalischen Geschehen offenbart, hat die neueste Physik die Unbestimmtheit der atomaren Vorgänge gegenübergestellt; sie nimmt eine Determiniertheit nur mehr für statistische Größen an, die sie den individuellen, elementaren Prozessen der Physik zuordnet. Eine solche Auffassung eröffnet natürlich auch neue Perspektiven für die Beurteilung der physikalischen Gesetzlichkeit als solcher<sup>2)</sup>. In den Mittelpunkt des naturphilosophischen Interesses rückt immer mehr die Frage, ob es in der Natur überhaupt eine andere Gesetzlichkeit als eine rein statistische gibt, die wegen der Allgemeinheit von der Physik mit anderen Wissenschaften, wie etwa der Nationalökonomie, zu teilen wäre<sup>3)</sup>.

1) Diese Auffassung ist in sehr klarer Weise von BOHR in einem Vortrage entwickelt worden, den er im September 1927 auf dem internationalen Physiker-Kongress in Como hielt und der in den „Naturwissenschaften“ 1928 zum Abdruck gelangen soll. Herrn BOHR bin ich für die freundliche Übersendung der Korrekturfahnen sehr zu Danke verbunden.

2) Vgl. einerseits P. JORDAN, Kausalität und Statistik in der modernen Physik, Naturwiss. 15, 1927, S. 205 (auch Nature 119, 1927, S. 566) und andererseits M. PLANCK, Physikalische Gesetzlichkeit im Lichte neuerer Forschung, Naturwissenschaften 14, 1926, S. 249.

3) Gegen die völlige Ausschließung nicht-statistischer Gesetzmäßigkeiten scheinen den COMPTON-Effekt betreffende Versuchsergebnisse zu sprechen, aus denen man schließen kann, daß die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses auch für den Zusammenstoß eines einzelnen Lichtquants mit einem einzelnen Elektron erfüllt sind.

Als das Wesen des physikalischen Fortschrittes ergibt ein Rückblick auf die Geschichte der theoretischen Physik die fortschreitende Emanzipation der Physik von rein menschlichen Gesichtspunkten. In einem solchen Sinne werden die Jahre, die das Werk DE BROGLIES, SCHRÖDINGERS und HEISENBERGS hervorgebracht haben, wohl stets als eine Periode der Aufklärung gelten, die in der Physik viel zu der Überwindung hergebrachter Vorurteile beigetragen hat.

## Zusammenfassung des Inhalts.

I. Kapitel. Einleitend werden der Unterschied zwischen mechanischer und physikalischer Denkweise, die Ideen der relativitätstheoretischen Mechanik, die Vorstellung der Lichtquanten, die Energiestufung der Atome und das BOHRsche Quantisierungsprinzip besprochen. Als grundsätzliche, eine Lösung erheischende Schwierigkeiten der BOHRschen Theorie erscheinen der Widerspruch zwischen den auf das atomare Geschehen angewandten Prinzipien der klassischen Mechanik und der Aussonderung ausgezeichneter Bahnen, sowie die Bestimmung mechanischer Vorgänge durch die in ihrem Wesen optische Fundamentalkonstante  $h$ .

II. Kapitel. Das FERMATSche Prinzip, das als oberstes geometrisch-optisches Theorem das Wegintegral der reziproken Wellengeschwindigkeit als Minimum hinstellt, weist eine Verwandtschaft mit dem Prinzip von MAUPERTUIS auf, das als oberstes mechanisches Gesetz das Wegintegral der mechanischen Geschwindigkeit als Minimum erklärt. Diese Analogie berechtigt zu der Vermutung, daß die Bewegungserscheinungen auf irgend welchen Wellenvorgängen beruhen, bei denen eine universelle Proportionalität zwischen der mechanischen Geschwindigkeit und der reziproken Wellengeschwindigkeit besteht. Eine solche Vermutung wird auch durch den Zusammenhang gestützt, der zwischen der allgemeinen Wellenformel und der relativitätstheoretischen LORENTZ-Transformation erkennbar ist. Denken wir uns mit einem bewegten Materieteilchen einen Schwingungsvorgang verknüpft, so läßt sich auf Grund der LORENTZ-Transformation dieser Schwingungsvorgang als eine Überlichtwelle

deuten, deren Gruppengeschwindigkeit mit der mechanischen Geschwindigkeit des Materieteilchens übereinstimmt.

III. Kapitel. DE BROGLIE ordnet jedem Materieteilchen durch die Beziehung

$$m c^2 = h \nu$$

einen Schwingungsvorgang zu und erhält damit die mechanischen Gesetzmäßigkeiten als notwendige Konsequenz eines generellen Wellenprinzips. Die Elektronen und Protonen erscheinen derart als Energiezentren sogenannter Materiewellen, deren Wellenlänge durch den Quotienten aus elementarem Wirkungsquantum und Impuls bestimmt ist. In der Anwendung auf gleichförmige Bewegungen in geschlossenen Bahnen führt diese Vorstellung zu der Folgerung, daß nur solche Bahnen möglich seien, für die die Bahnlänge ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge, und somit der Drehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches von  $h/2\pi$  darstellt. Die Übertragung der BROGLIESchen Vorstellungen auf ein in einem Behälter eingeschlossenes Gas führt auf Grund der Eigenschwingungen zu der Erkenntnis einer Quantelung der molekularen Translationsenergie und einer Zusammensetzung des Impulsraumes aus Zellen, die dem Quotienten aus  $h^3$  und dem Gasvolumen gleich sind.

IV. Kapitel. Aus der Vorstellung, daß die Materieteilchen die Energiezentren von Wellen bilden, die aus Energieelementen  $h\nu$  zusammengesetzt sind und deren Gruppengeschwindigkeiten sich als mechanische Geschwindigkeiten manifestieren, werden die relativistische Formel für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit, die Formeln für die longi-

tudinale und die transversale Masse und der Satz von der trägen Masse der Energie abgeleitet.

V. Kapitel. Die aus der BROGLIESchen Theorie sich ergebende Folgerung einer Beugung der Materiewellen erscheint durch Beobachtungen über die Streuung von Elektronen bei dem Durchgang durch Gase, vor allem aber durch die Versuche von DAVISSON und GERMER über die selektive Reflexion von Elektronen an Kristallen experimentell bestätigt.

VI. Kapitel. In Anknüpfung an die Ideen DE BROGLIES schuf SCHRÖDINGER eine Verallgemeinerung der Mechanik, die dem Übergang von dem FERMATschen zum HUYGENSSchen Prinzip, also von der geometrischen Strahlenoptik zu der physikalischen Wellenoptik analog sein soll. Die Anwendung auf ein einzelnes Teilchen führt zu der fundamentalen Differentialgleichung

$$\Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) S = 0,$$

wobei  $S$  einen unbestimmten Feldskalar,  $E$  die totale und  $V$  die potentielle Energie bedeuten. Durch diese Beziehung erscheint das physikalische Problem der Quantisierung der Energie auf das rein mathematische Problem der Bestimmung von Eigenwerten von Differentialgleichungen zurückgeführt. Dieses mathematische Problem wird an den Beispielen der HERMITESchen Polynome und der Kugelfunktionen erläutert.

VII. Kapitel. Als Beispiele zur SCHRÖDINGERschen Eigenwertmechanik werden der lineare, harmonische Oszillator und der Rotator mit freier Achse behandelt. Im Gegensatze zu der früheren Theorie ergibt sich die Energie des Oszillators gleich einem ungeraden Vielfachen eines halben Energieelementes,

wodurch auch die Hypothese einer Nullpunktsenergie verständlich wird. Für den Drehimpuls des Rotators findet man  $\frac{h}{2\pi} \sqrt{n(n+1)}$ . Auch die Energiestufung des Wasserstoffatoms kann aus der SCHRÖDINGERSchen Gleichung abgeleitet werden. Der STARK-Effekt erklärt sich gemäß der mathematischen Theorie aus der Aufspaltung von mehrfachen Eigenwerten bei dem Hinzutreten eines Störungsgliedes in einer Differentialgleichung. Für ein System von mehreren Teilchen stellt die SCHRÖDINGERSche Gleichung eine Welle in einem Konfigurationsraum dar, dessen Dimensionszahl dreimal so groß wie die Teilchenzahl ist.

VIII. Kapitel. Die von HEISENBERG begründete Quantenmechanik beruht im Gegensatz zu der älteren Quantentheorie nur auf Relationen zwischen direkt beobachtbaren atomphysikalischen Größen; solche sind die Frequenzen und Intensitäten der Spektrallinien, sowie die durch Versuche über Elektronenstöße feststellbaren Energiestufen der Atome. HEISENBERG ersetzte jede periodisch veränderliche Elektronenkoordinate der früheren Theorie durch ein quadratisches Schema von Partialschwingungen, deren Frequenzen mit den Schwingungszahlen der Spektrallinien übereinstimmen und deren Amplituden für die Linienintensitäten maßgebend sind. Für ein solches Schwingungsschema gab HEISENBERG eine Definition der Multiplikation, wodurch diese Rechenoperation nicht-kommutativ wird. Die Differenz, die sich in dem Produkte aus einer Koordinate und dem zugehörigen Impuls bei einer Vertauschung der Faktoren ergibt, setzt die HEISENBERGSche Vertauschungsrelation gleich  $h/(2\pi i)$ . Die Anwendung dieser Beziehung auf den harmonischen,

linearen Oszillator führt zu dem Ergebnis, daß dessen Energie ein ungerades Vielfaches eines halben Energieelementes darstellt und daß bei allen Quantensprüngen die BOHRSche Frequenzbedingung erfüllt ist.

IX. Kapitel. BORN und JORDAN haben die exakte Durchführung des HEISENBERGSchen Programms durch die Schaffung der Matrizenmechanik ermöglicht. Mittels dieser wird gezeigt, daß aus der HEISENBERGSchen Vertauschungsrelation der Satz von der Erhaltung der Energie und die BOHRSche Frequenzbedingung als notwendige Folgen resultieren.

X. Kapitel. Unter Verwendung des Begriffes des mathematischen Operators läßt sich die Äquivalenz der SCHRÖDINGERSchen Eigenwertmechanik mit der Matrizenmechanik nachweisen. Wird die HEISENBERGSche Vertauschungsrelation sinngemäß auf Operatoren übertragen, so ergibt sich als Erweiterung der klassischen Mechanik die fundamentale SCHRÖDINGERSche Differentialgleichung.

XI. Kapitel. Während SCHRÖDINGER die Materieteilchen als Energiepakete deutete, hat umgekehrt vom quantenmechanischen Standpunkte aus BORN den sich wellenförmig ausbreitenden SCHRÖDINGERSchen Feldskalar als die Wahrscheinlichkeit interpretiert, die für das Eintreffen eines Teilchens an einem gegebenen Orte besteht. Nur für derartige statistische Wahrscheinlichkeiten ist nach der Quantenmechanik die Kausalität zu bejahen, während sie für die elementaren Prozesse der Physik verneint wird. Diese Auffassung findet eine Stütze auch in der HEISENBERGSchen Erkenntnis, daß jede Messung atomarer Größen notwendigerweise mit einer Unschärfe verbunden sein muß.

XII. Kapitel. Die quantenmechanische Untersuchung des Drehimpulses eines Systems führt in Verbindung mit der Vorstellung des Kreisell-Elektrons zu der Unterscheidung von vier Quantenzahlen, die den Zustand eines Elektrons festlegen. Das PAULISCHE Prinzip, nach dem in einem Atom niemals zwei Elektronen in sämtlichen vier Quantenzahlen übereinstimmen können, ergibt die maximalen Besetzungszahlen der ein-, zwei-, drei-, vierquantigen Elektronengruppe usw. zu 2, 8, 18, 32 und so fort. Damit ist im wesentlichen die quantentheoretische Erklärung des periodischen Systems der Elemente gegeben.

XIII. Kapitel. Aus der Vorstellung des Lichtquantengases läßt sich, wie BOSE zeigte, das PLANCKSCHE Strahlungsgesetz ableiten, wofern man sich den einem Quantengas vom Volumen eins zuzuordnenden Impulsraum aus Zellen von der Größe  $h^3$  zusammengesetzt denkt und die statistischen Größen, die in der klassischen Theorie auf ein Teilchen im  $n$ -ten Zustand bezogen werden, auf eine mit  $n$  Teilchen besetzte Zelle bezieht. Auf Grund der BOSESCHEN Statistik hat EINSTEIN eine von der klassischen abweichende Gastheorie zur Erklärung der Entartung bei tiefsten Temperaturen konstruiert.

XIV. Kapitel. Das PAULISCHE Prinzip wurde von FERMI in die Statistik übertragen. Er gründete eine neue Gastheorie auf die Annahme, daß in einem Gase höchstens eine einzige Molekel mit vorgegebenen Quantenzahlen vorkommen könne. Aus der FERMISCHEN Statistik folgen die Existenz einer Nullpunktsenergie und eines Nullpunktsdruckes, sowie das Verschwinden der spezifischen Wärme bei dem absoluten Nullpunkt. Wie SOMMERFELD gezeigt hat, erweist sich

die FERMIsche Statistik als besonders fruchtbar in ihrer Anwendung auf die in den Metallen enthaltenen freien Elektronen, die nach der FERMIschen Theorie wegen ihrer geringfügigen Masse bei Zimmertemperatur ein vollkommen entartetes Gas darstellen. Dadurch erklärt sich auch die für die klassische Statistik unverständliche Tatsache, daß die freien Elektronen keinen merklichen Beitrag zu der spezifischen Wärme der Metalle liefern.

XV. Kapitel. Von weiteren Anwendungen der Wellen- und der Quantenmechanik werden kurz besprochen: die Polarisationsregel, die Dispersion, die LANDESche Formel für die Aufspaltung der Spektraltermine in schwachen magnetischen Feldern, der PASCHEN-BACK-Effekt, die Intensitätsverhältnisse der ZEEMAN-Komponenten, das Heliumatom, der COMPTON-Effekt, der photo-elektrische Effekt, die homöopolare Valenz, der Resonanzeffekt der Atomkerne in den Bandenspektren und das Problem der Isotopen.

XVI. Kapitel. Die neueste Entwicklung der Atomphysik eröffnet für die Begriffe der Materie, der Kausalität und des Naturgesetzes die Möglichkeit einer wesentlichen Wandlung.

~~GABINET MATEMATYCZNY~~  
~~Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

## Übersicht über die häufigsten Bezeichnungen.

<i>A</i> Amplitude	<i>h</i> Elementares Wirkungsquantum.
<i>D</i> Diagonalmatrix	<i>i</i> Index oder imaginäre Einheit
<i>E</i> Energie	<i>k</i> <b>BOLTZMANN</b> sche Konstante
<i>F</i> Feldstärke	<i>j, k, l, m, n</i> Quantenzahlen
<i>G</i> Impuls	<i>m</i> Masse
<i>H</i> <b>HAMILTON</b> sche Funktion (oder <b>HERMITE</b> sches Polynom)	<i>p</i> Impulskomponente
<i>L</i> Kinetische Energie	<i>q</i> Koordinate
<i>N</i> Teilchenzahl	<i>t</i> Zeit
<i>P</i> Kraft	<i>u</i> Wellengeschwindigkeit (oder spezifische Strahlungsdichte)
<i>R</i> Gaskonstante	<i>v</i> Mechanische Geschwindigkeit
<i>S</i> <b>SCHRÖDINGER</b> scher Feldskalar (oder Entropie)	<i>w</i> In Kap. IV eine universelle Geschwindigkeit
<i>T</i> Absolute Temperatur (oder Spektralterm)	<i>Δ</i> <b>LAPLACE</b> sche Ableitung
<i>U</i> Drehimpuls	<i>β</i> Abkürzung, definiert durch Gl. 8
<i>V</i> Potentielle Energie (oder Volumen)	<i>c</i> Phasenkonstante oder individuelle Energie
<i>W</i> Wahrscheinlichkeit	<i>σ</i> Strahlungsdichte
<i>a</i> Komplexe Amplitude	<i>λ</i> Wellenlänge
<i>b</i> Beschleunigung	<i>μ</i> Masse
<i>c</i> Lichtgeschwindigkeit	<i>ν</i> Frequenz
<i>e</i> Elektrisches Elementarquantum (oder Basis der natürlichen Logarithmen)	<i>φ</i> Phase
<i>g</i> Gruppengeschwindigkeit	

### Universelle Konstanten.

Element. Wirkungsquantum ( <i>h</i> )	$6,545 \cdot 10^{-27}$ erg. sec
Elektrisches Elementarquantum ( <i>e</i> )	$4,774 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh.
Lichtgeschwindigkeit ( <i>c</i> )	$2,9980 \cdot 10^{10}$ cm/sec
Protonen-Masse	$1,661 \cdot 10^{-24}$ g
Elektronen-Masse	$9,00 \cdot 10^{-28}$ g
<b>BOLTZMANN</b> sche Konstante ( <i>k</i> )	$1,372 \cdot 10^{-16}$ erg/grad.

## Literatur.

Eine vollständige Literaturübersicht dürfte hier überflüssig erscheinen, da die wichtigeren Abhandlungen ohnedies in den Fußnoten dieses Buches zitiert sind und der Leser eine reichhaltige Zusammenstellung der wellen- und quantenmechanischen Literatur am Schlusse des Aufsatzes von P. JORDAN über die Entwicklung der neuen Quantenmechanik (s. später), teilweise auch am Ende der Bücher von HUND und LANDÉ findet (F. HUND, Linienspektren und periodisches System der Elemente, Berlin, Springer, 1927; A. LANDÉ, Die neuere Entwicklung der Quantentheorie, Zweite Auflage, Dresden-Leipzig, Steinkopff 1926).

Von selbständigen Werken sind zu nennen:

- L. DE BROGLIE, Untersuchungen zur Quantentheorie (Annales de Physique 10, III), übersetzt von W. BECKER, Leipzig (Akadem. Verlagsgesellschaft) 1927.
- L. DE BROGLIE, Ondes et Mouvements, Paris (Gauthier-Villars) 1926.
- E. SCHRÖDINGER, Abhandlungen zur Wellenmechanik (Neudruck aus den Annalen der Physik), Leipzig (Barth) 1927.
- M. BORN, Probleme der Atomdynamik, Berlin (Springer) 1926; bzw. Problems of Atomic Dynamics, Cambridge (Massachusetts Institute of Technology) 1926.
- H. F. BIGGS, Wave Mechanics, an Introductory Sketch, London (Humphrey Milford) 1927.

Von zusammenfassenden Darstellungen seien erwähnt:

- L. DE BROGLIE, Les principes de la nouvelle mecanique ondulatoire, Journal de Physique (6) 7, 1926, p. 321—337.
- L. FLAMM, Die Grundlagen der Wellenmechanik, Physikal. Zeitschr. 27, 1926, S. 600—617.
- L. FLAMM, Die neue Mechanik (gemeinverständlich), Naturwiss. 15, 1927, S. 569—578.
- K. K. DARROW, Introduction to Wave-Mechanics, The Bell System Technical Journal 6, 1927, S. 653—701 (gelangt vermutlich auch in die in Vorbereitung befindliche zweite Auflage von K. K. DARROW, Introduction to Contemporary Physics, New York, Van Nostrand Co., 1928).

- W. HEISENBERG, Quantenmechanik, Naturwissenschaften **14**, 1926, S. 989—994.
- A. LANDÉ, Neue Wege der Quantentheorie, Naturwissensch. **14**, 1926, S. 453—458.
- P. JORDAN, Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik, Naturwissensch. **15**, 1927, S. 614—623; 636—649.
- L. BRILLOUIN, La nouvelle mecanique atomique, Journ. de Physique (6) **7**, 1926, p. 135—160.

GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

## Namenverzeichnis.

- ASTON** 143  
**BACK** 137  
**BECK** 101, 140, 143  
**BOHR** 8, 10, 62, 81, 114  
**BOLTZMANN** 116  
**BORN** 81, 93, 99, 105  
**BOSE** 119  
**BROGLIE, LOUIS DE** 25 ff.  
**COMPTON, A. H.** 7, 140  
**DAVISSON** 46  
**DE BROGLIE, s. BROGLIE**  
**DEBYE** 140  
**DIRAC** 96, 139  
**DYMOND** 45  
**ECKART** 96  
**EHRENFEST** 99  
**EINSTEIN** 5, 30, 43, 124, 140  
**ELSASSER** 43, 44  
**EPSTEIN** 64  
**EULER** 15  
**FERMAT** 12 ff.  
**FERMI** 125 ff.  
**FOURIER** 67  
**FRANCK** 9  
**FRANZ** 132  
**GALILEI** 2  
**GERMER** 46  
**GORDON** 140  
**GOUDSMIT** 109  
**GÜNTHER** 43  
**HAAS** 7, 37  
**HAMILTON** 87, 91  
**HEISENBERG** 66 ff., 101, 109,  
 135, 136, 142  
**HEITLER** 141  
**HERMITE** 53, 81  
**HERON** 13  
**HERTZ, P.** 9  
**HUYGENS** 1, 48  
**JEANS** 30, 34  
**JORDAN** 81, 109, 136  
**KELLNER** 139  
**KRAMERS** 135  
**KUNSMAN** 46  
**LADENBURG** 135  
**LANDÉ** 136  
**LAPLACE** 48  
**LONDON** 141, 142  
**LORENTZ** 18, 137  
**MAUPERTUIS** 15  
**MENDELEJEFF** 105  
**MEYER, L.** 105  
**MOIVRE** 68  
**MOSELEY** 104  
**NERNST** 44, 58  
**NEWTON** 2  
**PASCHEN** 137  
**PAULI** 104 ff.  
**PELTIER** 132  
**PLANCK** 5, 35, 55, 115  
**RAMSAUER** 44  
**RAYLEIGH** 30, 34, 117  
**RITZ** 88  
**RUBINOWICZ** 134

RUTHERFORD 8	TETRODE 130
RYDBERG 88	THOMSON, W. 132
SCHRÖDINGER 50 ff., 91, 96, 98, 101	UHLENBECK 109
SMEKAL 136	WENTZEL 140
SOMMERFELD 10, 109, 110, 130	WIEDEMANN 132
STARK 64	WIEN, W. 117
STERN 130	WIENER, N. 93
STONER 114	ZEEMAN 136

## Sachverzeichnis.

Aufspaltung 64	Elektronenstöße 9
Aufspaltungsformel (LANDE) 136	Elektronenstreuung 45 ff.
Auswahlprinzip 134	Elementarladung 4
Beugung v. Materiewellen 42 ff.	Elementarwellen 48
Brechungsgesetz 13	Ellipsenbahnen 62
Brechungsindex 135	Energie, Erhaltung 89
COMPTON-Effekt 102, 139	Energie, Masse 3, 42
Determiniertheit 101 ff.	Energiepaket 98, 99
Dispersion 134	Energiezentrum 22
DOPPLER-Effekt 102	Entropie, absolute 130
Drehimpuls 8, 106	Erg 5
Edelgase 113	Feldskalar, SCHRÖDINGER- scher 100, 101
Eigenfunktionen 51	FERMAT'sches Prinzip 12
Eigenschwingungen 98	Fluor 142
Eigenwerte 51 ff.	FOURIER'sche Reihen 67
Einheitsmatrix 83	Frequenzbedingung 81, 90
Elektronen 4	Gasentartung 43, 125, 129
Elektronenbahnen 66	Gastheorie, kinetische 114, 124
Elektronen, Eigenrotation 109	Gesetzlichkeit, physikal. 145
Elektronen, freie 131	Gewicht, statistisches 119
Elektronengas 131	Grundstoffe 104 ff.
	Gruppengeschwindigkeit 21—23

- Halogene 142  
 HAMILTONsche Funktion 87  
 HAMILTONscher Operator  
   91  
 Helium 141  
 Heliumatom 11, 139  
 Homöopolare Bindung 141  
 Homöopolare Valenz 142  
 HUYGENSches Prinzip 48  
 Hyperbelbahnen 62  
  
 Impulsraum 35, 123  
 Intensität v. Linien 138  
 Interferenz 100, 101  
 Ionisierungsspannung 139  
 Isotope 143  
  
 Kausalität 99  
 Kausalprinzip 103  
 Kernatom 8  
 Kernresonanz 143  
 Knotenebenen 30  
 Kombinationsfrequenzen 136  
 Konfigurationsraum 65  
 Kontaktpotentiale 132  
 Kreisel-Elektron 109  
 Kugelfunktionen 54  
  
 LAPLACEsche Ableitung 49  
 Lichtgeschwindigkeit 3  
 Lichtquanten 6  
 Lichtquantengas 115  
 Lichtzeit, kürzeste 12  
 Linienspektren 9  
 LORENTZ-Transformation 18,  
   19  
  
 Masse, longitudinale 42  
 Massenformel 41  
 Masse, transversale 42  
 Materiewellen 26 ff.  
 Matrizen 81 ff.  
  
 MAUPERTUISches Prinzip  
   15  
 Mehrelektronenproblem 65  
 Metalltheorie 131  
 MOIVRESche Formel 68  
 Multiplikationsdifferenz 73  
  
 Nebenquantenzahl 110  
 Nullpunktsdruck 130  
 Nullpunktsenergie 58, 127, 129  
  
 Operatoren 91  
 Ordnungszahl 104  
 Oszillator 55, 76  
  
 PASCHEN-BACK-Effekt 137  
 Passivität 141  
 PAULIsches Prinzip 111  
 PELTIER-Effekt 132  
 Periodisches System 104 ff.  
 Periodizität, chem. 105  
 Phase 17, 18  
 Phasenkonstante 17  
 Photoeffekt 140  
 Photonen 6  
 Polarisationsregel 134  
 Polynome, HERMITEsche 53  
 Protonen 4  
  
*q*-Zahlen-Mechanik 97  
 Quantelung, vierfache 105 ff.  
 Quantenbedingung 10  
 Quantenmechanik 66 ff.  
 Quantensprünge 106  
 Quantenzahl, innere 109  
 —, magnetische 108  
  
 RAMSAUER-Effekt 44  
 Relativitätstheorie 3, 18, 19, 37  
 Rotator 58 ff.  
 Ruhemasse 41

- Sauerstoff 142  
 SCHRÖDINGERsche Gleichung 51  
 Schwingung 16  
 Spektralmerkmale 88  
 STARK-Effekt 64  
 Statistik 114 ff.  
 Störungen 63  
 Strahlungsdichte 116  
 Strahlungsgesetz 116  
 Streulicht 136  
 Termdiagonalmatrix 88  
 THOMSON-Effekt 132  
 Übergangswahrscheinlichkeit 70  
 Überlichtgeschwindigkeit 21  
 Unschärfe 102  
 Vertauschungsrelation 74, 103  
 Viskosität 44  
 Wahrscheinlichkeit 101  
 —, statistische 117  
 Wärme, spezifische 130  
 Wasserstoffatom 8, 61, 62  
 Wasserstoffmolekel 141  
 Wasserstoffspektrum 10  
 Wellenformel 17  
 Wellengruppe 21  
 WIEDEMANN-FRANZsches Gesetz 132  
 Wirkungsquantum 5  
 ZEEMAN-Effekt 136  
 Zeit 97  
 Zellen 36

~~TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE~~

L. inw. \_\_\_\_\_

~~GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~



H. A. Lorentz

**Vorlesungen über Theoretische Physik I  
Theorie der Strahlung**

Nach der 2. holländischen Auflage ins Deutsche übersetzt  
von Dr. G. L. de Haas-Lorentz

X und 81 Seiten mit 17 Abbildungen. Preis geb. M. 7.80

Daß die Lektüre der Vorlesungen des genialen Leidener theoretischen  
Physikers ein ganz besonderer Genuß ist, braucht wohl kaum erwähnt zu  
werden.  
*Zeitschrift für technische Physik, Heft 9, 1927.*

Demnächst erscheint:

**Kinetische Probleme; Äthertheorie und Äthermodelle**

**Untersuchungen zur Quantentheorie**

Von **Louis de Broglie**. Übersetzt von Dr. Walther Becker

IV und 88 Seiten mit 6 Abbildungen. Preis kart. M. 5.80

Die de Brogliesche Arbeit hat sich als grundlegend für die Atommechanik erwiesen, da bekanntlich die undulatorische Mechanik Schrödingers auf den de Broglieschen Ideen aufbaut. In dieser Arbeit wurde zum ersten Male ein erfolgreicher Versuch der Vereinigung der Emissions- und Undulationstheorie des Lichtes gemacht, wobei man zu einer Art undulatorischer Auffassung der Materie geführt wird.

Soeben erschien:

**Mathematik in Monographien und Lehrbüchern**

Herausgegeben von E. Hilb

Band I

**Neue Methoden u. Ergebnisse in der Hydrodynamik**

Von **C. W. Oseen**, Professor an der Universität Upsala

XXXIV und 337 S. mit 7 Textfiguren. Brosch. M. 22.—, geb. M. 24.—

Soeben erschien:

**Heinrich Hertz**

**Erinnerungen / Briefe / Tagebücher**

Dargestellt von **Dr. Johanna Hertz**

IV u. 263 S. mit 10 Tafeln u. 2 Faksimiles. Br. M. 10.—, geb. M. 12.—  
Der Band, auf einem schönen, auftragenden Papier gedruckt und in Ganzleinen gebunden, eignet sich besonders als Geschenkbuch.

*Diese Erinnerungen haben in Fach- und Laienkreisen eine begeisterte Aufnahme gefunden.*

**AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H., LEIPZIG**

# Handbuch der Experimentalphysik

Herausgegeben von

**W. Wien und F. Harms**

München

Würzburg

Bisher erschienen folgende Bände:

**Band I: Meßmethoden und Meßtechnik.** Von Prof. Dr. Ludwig Holborn.

**Technik des Experiments.** Von Dr. E. v. Angerer. 1926. X und 484 Seiten mit 246 Abb. Preis: geh. M. 40.—, geb. M. 42.—. Subskript.-Preis: geh. M. 34.—, geb. M. 35.70.

**Band II: Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper.** Von Prof. Dr. Arthur Haas, Wien. 1926. XIV und 355 Seiten mit 236 Abb. Preis: geh. M. 28.—, geb. M. 30.—. Subskript.-Preis: geh. M. 23.80, geb. M. 25.50.

**Band VI: Kapillarität und Oberflächenspannung.** Von Prof. Dr. G. Bakker. 1928. XVI und 458 Seiten mit 114 Abb. Preis: geh. M. 42.—, geb. M. 44.—. Subskript.-Preis: geh. M. 35.70, geb. M. 37.40.

**Band XIV: Kathodenstrahlen.** Von Prof. Dr. P. Lenard und Prof. Dr. A. Becker.

**Kanalstrahlen.** Von Prof. Dr. Wilhelm Wien. 1927. XVI und 788 Seiten mit 482 Abb. Preis: geh. M. 70.—, geb. M. 72.—. Subskript.-Preis: geh. M. 59.50, geb. M. 61.20.

**Band XXI: Anregung der Spektren.** Von Prof. Dr. Georg Joos. Seite 1—204.

**Apparate und Methoden der Spektroskopie.** Von Dr. E. v. Angerer. Seite 205—396.

**Starkeffekt.** Von Prof. Dr. J. Stark, Ullersricht. Seite 399 bis 458. XVI und 562 Seiten mit 164 Abbildungen. Preis: geh. M. 47.—, geb. M. 49.—. Subskript.-Preis: geh. M. 39.95, geb. M. 41.65.

**Band XXIII, 1. Teil: Phosphoreszenz und Fluoreszenz.** Von Prof. Dr. P. Lenard, Prof. Dr. F. Schmidt und Prof. Dr. R. Tomascheck. XXIII und 741 Seiten mit 162 Abbildungen. Preis: geh. M. 69.—, geb. M. 71.—. Subskript.-Preis: geh. M. 58.65, geb. M. 60.35.

Zahlreiche weitere Bände in Vorbereitung.

---

**AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H., LEIPZIG**

# Handbuch der Radiologie

Herausgegeben von Erich Marx, Leipzig

Band I: **Die Ionisation der Gase.** Von I. S. Townsend, **Die Radioaktivität der Erde und der Atmosphäre.** Von H. Geitel. Mit 66 Figuren und Abbildungen im Text. XVII und 473 Seiten. 1920. Brosch. M. 18.—, geb. M. 22.—

Band II: **Radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen.** Von E. Rutherford. Mit 121 Abbildungen und 5 Tafeln. IX und 642 Seiten. 1914. Brosch. M. 25.—, geb. M. 30.—

Band III: **Glimmentladung.** Von E. Gehrcke. **Die positive Säule.** Von R. Seeliger. **Die Lichtelektrizität.** Von W. Hallwachs. Mit einem Anhang: **Die Entwicklung der Lichtelektrizität von Januar 1914 bis Oktober 1915.** Mit 140 Figuren und Abbildungen im Text. XXII und 618 Seiten. 1916. Brosch. M. 25.—, geb. M. 30.—

Band IV: Erster Teil: **Kanalstrahlen.** Von W. Wien. 2. Auflage. XXII und 362 Seiten und 333 Figuren. 1923. Brosch. M. 11.—, geb. M. 14.—

... Die Darstellung ist klar, kurz und bündig, ohne mit den Worten zu kargen, der sprachliche Ausdruck angenehm und fließend. So ist diese Schilderung des gegenwärtigen Standes der Kanalstrahlenforschung hinsichtlich des Inhalts, des Umfangs und der Form ein Muster wissenschaftlicher Berichterstattung, das von andern auf dem Gebiete der Atomphysik zum Druck gelangten Büchern sich aufs vorteilhafteste abhebt und als Vorbild hingestellt zu werden verdient.

*E. Gehrcke, Deutsche Literaturzeitung 1924, Heft 16.*

Zweiter Teil: **Lichtbogen.** Von A. Hagenbach. 2. Auflage. XII und 284 Seiten mit 130 Abbildungen im Text. 1924. Brosch. M. 9.—, geb. M. 12.—

... Es ist ein Vorzug von Hagenbachs Werk, daß trotz der Vollständigkeit die klare und übersichtliche Darstellung zu zusammenhängender Lektüre auffordert.

*Phys. Zeitschrift, Bd. XXV, Nr. 14.*

Dritter Teil: **Glühelektroden.** Von Owen W. Richardson. Übersetzt und bearbeitet von Prof. Dr. A. Karolus. **Technische Anwendungen der Glühelektroden.** Von Dr. H. Rukop, Professor an der Universität Köln. **Flammenleitung.** Von Dr. Erich Marx, Professor an der Universität Leipzig. 1927. XVI und 716 Seiten mit 196 Abbildungen. Broschiert M. 48.—, geb. M. 50.—

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H., LEIPZIG

