BADANIA W DZIEDZINIE NAUKI

O RÓWNANIACH

OPARTE NA POGLĄDACH

ANALITYCZNO-GEOMETRYCZNYCH W PRZESTRZENI.

NAPISAŁ

D[r] WAWRZYNIEC ŻMURKO

C. K. Profesor we Wszechnicy i w C. K. Szkole Politechnicznej we Lwowie;
Dziekan wydziału filozoficznego; Dyrektor i Członek Komisyi egzaminacyjnej dla kandydatów na nauczycieli szkół realnych;
Członek takiejże Komissyi dla szkół gimnazyalnych.
Członek zwyczajny Akademii umiejętności w Krakowie, jakoteż Akademii narodowej dla rolnictwa handlu i przemysłu w Paryżu;
Członek honorowy towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, Członek-Korespondent Przyjaciół Nauk w Poznaniu
Członek czynny Towarzystwa Agronomicznego we Lwowie.

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 10 Lutego 1879 roku.)

WSTĘP

Newton podaje pierwiastek równania liczebnego $f(x)=0$ za pomocą swej metody przybliżenia w postaci następującego dziesiętnie ułożonego malejącego szeregu:

$$x=x_0-\overset{x_0}{Q_0}-\overset{x_1}{Q_0}-\overset{x_2}{Q_0}-\ldots,$$

w którym x_0 stanowi wartość początkową, lub też kilka początkowych cyfr pierwiastku; wyrazy zaś przez Q oznaczone poddane są warunkom

$$x_r=x_{r-1}-\overset{x_{r-1}}{Q_0}$$

$$\overset{x}{Q_0}=f(x):\frac{df(x)}{dx}=f(x):f_1(x).$$

Z każdego Q bierze się do rachunku tylko jednę, lub kilka cyfr początkowych, wedle tego ile z nich za dokładne dalsze dziesiętne miejsca w pierwiastku uznać wypada. W ciągu naszej rozprawy nazywać będziemy stosunek $f(x):f_1(x)=\overset{x}{Q_0}$, jako też ogólnie stosunek

$$f_s(x):f_{s+1}(x)=\overset{x}{Q_s},$$

stosunkiem krytycznym rzędu s^{tego}, gdzie znaczek s ma przypominać, wiele razy pierwotny wielomian $f(x)$ ma być różniczkowany, aby otrzymać licznik do $\overset{x}{Q}_s$.

a) W przypadku, w którym wychodząc z wartości x_0 wyrażenie $f_1(x)$ wskutek wzrastania ilości x maleje, metoda Newtona przy obliczaniu pierwiastków okazuje się niezawodną. Stosunki krytyczne wzięte ze znakiem przeciwnym stanowią szereg dziesiętnie malejących składników, posiadających znak wspólny z ilością początkową x_0, które zatem kolejno doliczone do x_0 tem dokładniej przedstawią pierwiastek żądany, im więcej takich składników w rachunek weszło. Liczebnie biorąc przedstawia x_r tem większą i żądanemu pierwiastkowi tem bliższą liczbę, im jest większy należący do niego skaźnik r.

b) W przypadku, w którym wychodząc z wartości x_0, pochodna $f_1(x)$ rośnie wskutek wzrastania ilości x, wypadają kolejno po sobie następujące składniki w miarę tego za wielkie, im raźniej wzrasta pochodna $f_1(x)$. W takich razach składniki — $\overset{x^r}{Q}_0$ nie przedstawiają już odpowiednich przyrostów żądanego pierwiastka, i możnaby w tym przypadku bardzo łatwo odmówić metodzie Newtona wszelkiej przypisywanej jej wartości. Tę tu oczywistą niedogodność usuniemy bardzo łatwo jeżeli przyjmiemy, że

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots\ x_{r-1},\ x_r,\ x_{r+1} \ldots$$

ilości mające przedstawiać żądany pierwiastek tem dokładniej im skaźnik do nich należący jest większy, nie tworzą szeregu rosnącego, ale owszem, zbliżają się malejąco do żądanego pierwiastku. Przyjmując mianowicie do x_0 jako pierwszy w tym razie zawielki dodatek $-\overset{x_0}{Q}_0$ otrzymamy x_1, które wskutek tego liczebnie wypadnie większe jak sam pierwiastek. Odtąd $\overset{x_1}{Q}_0$ i każdy następny stosunek wypadnie ze znakiem przeciwnym jak $\overset{x_0}{Q}_x$ i stanie się powodem że x_2 i wszelkie następne liczebnie coraz mniejsze x_r, malejąc zbliża się do żądanego pierwiastku. Że to przeciwne poprzedniemu postępowanie okazuje się skutecznem, zawdzięczamy tej okoliczności, że w miarę malejącego szeregu x_1, x_2, x_3, $x_n \ldots$ pochodna $f_1(x)$ przybiera coraz mniejsze wartości, i tak w tym jak w przypadku *a*, do prawidłowego zbliżania się do żądanego pierwiastku prowadzić musi.

c) Więcej rażąco występuje niedogodność użytkowania metody Newtona w przypadku, gdy dany do obliczenia pierwiastek należy do grupy np. r pierwiastków, które wszystkie mają np. m cyfer początkowych wspólnych. Tu stosunek — $\overset{x}{Q}_0$ nie daje już najmniejszego punktu oparcia przy obliczaniu pierwiastku.

Celem usunięcia tej niedogodności pomnijmy, iż grupa r pierwiastków o wspólnych m cyfrach początkowych, może ze względu na początkowe cyfry być uważaną jako grupa r równych pierwiastków. Ze względu na równania :

$$f(x)=0,\quad f_1(x)=0,\quad f_2(x)=0,\ldots\quad f_{r-2}(x)=0,\quad f_{r-1}(x)=0,\quad f_r(x)=0,$$

pojmujemy bezpośrednio, że idąc od lewej ku prawej, pierwsze z nich posiada ten pierwiastek r razy, i że każde następne posiada go o jeden raz mniej, jak bezpośrednio poprzedzające. Dojdziemy tym sposobem aż do równania $f_{r-1}(x)=0$, któremu ten pierwiastek już tylko raz przynależy, i właśnie na podstawie tego równania za pomocą stosunku krytycznego — $\overset{x}{Q}_{r-1}$ podług *a*) lub podług *b*) obliczony być może. Tą drogą dochodzimy do coraz dalszych cyfer dziesiętnych, które jak długo są rzeczywistem przybliżeniem do żądanego pierwiastku, pociągają za sobą zbliżanie się wielomianów $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)\ldots$ do zera tem raźniejsze, im mniejszym znaczkiem takowe są opatrzone. Jeżeli ta właśnie okoliczność, przy jakiejś nowo przybyłej cyfrze nie sprawdzi się, upatrujemy w tem znak, że od tej cyfry począwszy owe r pierwiastki za równe uważane być nie mogą, i że rachunek dalszych cyfr odtąd dla każdego pierwiastku z osobna prowadzonym być winien.

We wszystkich tedy przypadkach a, b, c, metoda Newtona wystarcza nam do jak najdokładniejszego obliczenia żądanego pierwiastku. Ta metoda wszakże nie podaje nam każdorazowo pewnego środka do stanowczego ocenienia, o ileśmy się już przybliżyli do wartości samego pierwiastku.

Dopiero Matematyk FOURIER tak tę metodę udoskonalił, że po każdorazowym nowym składniku stanowczo powiedzieć możemy, w wielu dziesiętnych cyfrach już się zgadzamy z żądanym pierwiastkiem. Dotyczące przez FOURIERA uzasadnione postępowanie jest następujące :

Mając taką liczbę x_r, która wszystkiemi swemi cyframi zgadza się z początkowemi cyframi żądanego pierwiastku, i rozumiejąc pod x'_r liczbę wynikłą z liczby x_r przez powiększenie jej ostatniej cyfry o jedność w ten sposób, że wychodząc np. z liczby $x_3 = 32'576$ dojdzie się do $x'_3 = 32'577$, to prawdziwa wartość pierwiastku będzie z pewnością zawarta w odstępie między x_r i x'_r.

Niech w ogólności z dwóch ilości $f_s(x)$, $f_s(x')$ większa oznaczoną będzie przez $\underset{\vee}{f_s}(x)$, mniejsza zaś przez $\underset{\wedge}{f_s}(x)$, to otrzymamy dla $x'_s - x_s = \frac{1}{10^n}$,

$$x_{r+1} = \Big\{ x_r - [f(x_r) : \underset{\vee}{f}(x'_r)] \Big\}_{2n+k}, \quad x'_{r+1} = x_{r+1} + \frac{1}{10^{2n+k}}$$

gdzie oznaczywszy k z równania

$$\underset{\vee}{f_2}(x) : 2\underset{\wedge}{f_1}(x_r) = \frac{m}{10^{k+1}} + \frac{m'}{10^{k+2}},$$

oblicza się x_{r+1} aż do dziesiętnej posiadającej cechę $-(2n+k)$.

Ztąd już widać, jak się kolejno dochodzi do wyrazów szeregu

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_r, x_{r+1}, \ldots$$

a tem samem do jak najdokładniejszego oznaczenia żądanego pierwiastku.

Na podstawie rozważania własności tak zwanej krzywej DESCARTESa, jako też odpowiednich stosunków krytycznych wyprowadził matematyk FOURIER tę teoretycznie doskonałą a w zastosowaniu nader prostą metodę, rozstrzygającą w badaniu równania liczebnego o jednej niewiadomej ze względu na naturę jego pierwiastków, i dającą się łatwo zastosować do obliczania pierwiastków rzetelnych z całą żądaną dokładnością. Znajduje się ona w dziele po śmierci jego wydanem *Analyse des Équations determinées* par M. FOURIER, I[re] partie.

Bacząc wszelako na tytuł tego dzieła i zawarte w niem : *Exposé synoptique* oraz na liczne w drugim rozdziale znajdujące się oświadczenia, musimy przyjść do przekonania, że przez wczesną śmierć tego myśliciela na długi czas wstrzymanem zostało dla potomności rozwiązanie wielu a może i wszystkich ważnych teoretycznych i praktycznych kwestyi w dziedzinie nauki o równaniach; że potrzeba będzie bardzo wielu usiłowań i wielostronnych dzielnych badań, ażeby zwolna i stopniowo wzbić się chociażby na niektóre główniejsze wyżyny tej nauki, która w genialnym umyśle FOURIERA z pewnością już przy rozpoczęciu swego dzieła zupełnie jasną całość stanowić musiała.

Na stronnicy 231 artykuł 37 czytamy :

« Cette remarque n'est point bornée aux fonctions, qui ne contiennent qu'une seule variable. On peut en général résoudre la question suivante qui se présente dans les applications principales de l'analyse algébrique. Une fonction $f(xyz\ldots)$ de plusieures variables étant proposée... etc. » Ztąd to, jako też z miejsc na stronnicy 227, oraz wielu innych widać jasno, że autor przy równaniach o jednej niewiadomej, starał się przy każdej sposobności oto, aby poglądy swe tak przedstawić i przygotować, ażeby je zczasem użyć na przejście do metody, której zadaniem jest prawidłowe obliczanie pierwiastków układu równań, o kilku niewiadomych. Wziąwszy za wzór metodę FOURIERA obliczania pierwiastków rzetelnych równania o jednej niewiadomej, starałem się rozszerzyć ją i zastosować do obliczania pierwiastków urojonych takiegoż równania, a w końcu podać metodę, któraby prowadziła do obliczania pierwiastków współistniejących równań o większej liczbie niewiadomych Zdawało mi się zrazu stosownem, przyłączyć bezpośrednio tę uogólnioną metodę przybliżeń do teoryi FOURIERA, spostrzegłem wszelako wkrótce, że analityczno-geometryczne poglądy służące jej za podstawę nie są tak dalece rozwinięte, ażeby mogły dostarczyć wszelkich środków, potrzebnych do uzasadnienia takiej ogólnej metody. Przedsięwziąłem tedy wyszukać taki punkt wyjścia, z któregoby najważniejsze teorye równań wynikały, i wzajem się wspierając lub uzupełniając, wiązały w jeden system i tworzyły całość organiczną. Taki punkt wyjścia znalazłem częściowo w uogólnieniu dowodu CAUCHYego na istnienie przynajmniej jednego pierwiastku o jednej niewiadomej, a dalej w stosownem i gruntownem rozwinięciu przez S. SPITZERA metody przedstawiania przestrzennie pierwiastków równania. Ztąd już łatwo mi było uzasadnić wskazane przez CAUCHYego niezbite dowody poziomego ograniczenia punktów pierwiastkowych, a przy pomocy STURMA metody reszt, wytworzyć stanowczy środek rozdzielania punktów pierwiastkowych.

Sama nawet teorya równań FOURIERA została znacznie wzbogaconą i uproszczoną na podstawie poglądów geometrycznych, a mianowicie pod względem pojmowania i wyliczania pierwiastków urojonych; udało mi się też przedstawić całą tę teoryę w nadspodziewanie krótkim rozbiorze umieszczonym w § 6 tej rozprawy na niespełna 12 stronnicach.

W Części II tej pracy przedstawiłem kolejne wyszukiwanie współczynników równania w dwojaki sposób, stosownie do tego, czy obliczanie pierwiastku dokonywa jeden tylko, czy też równocześnie kilku rachujących. Tam też znajdują się wskazówki do graficznego wyszukania kolejnych szeregów współczynników, jako też rysunkowa metoda przybliżonego wynajdywania rzetelnych pierwiastków równania. Drugą metodę rysunkowego wyznaczenia rzetelnych pierwiastków stanowi użycie tak zwanej krzywej całkowej.

Dalej podane są w tej części środki konstrukcyjne, za pomocą których można uskutecznić rozwiązania równań nie przechodzących 4go stopnia. Tak więc uwidoczniłem, iż jak matematyka daje w kształcie skończonym rozwiązania pytań zależnych od równań aż do 4go stopnia włącznie, tak też i geometrya drogą rysunku sięga do tego samego stopnia.

Pomiędzy środkami rysunkowemi przedstawiam w ostatnim paragrafie także kilka przyrządów mego pomysłu, służących do wykreślania Elipsy, Hyperboli, Paraboli i Cykloidy — i wskazuję, jak mianowicie ostatniej krzywej można użyć do wyprostowania łuków kołowych, do polisekcyi kątów i w ogóle do rozwiązywania równań przestępnych.

Paragrafy 3ci i 4ty obejmują w tym dziale nową teoryę równań 3go i 4go stopnia i podają środki do wykrycia znamion, wobec których równania sięgające po wyż czwartego stopnia ze względu na ich rozwiązanie sprowadzić się dają do równań, które nie są wyższego stopnia jak czwartego. Na tych poszukiwaniach, jako też na postępowaniu rozwiniętem w części Iej w paragrafie 5tym uzasadniłem nową metodę służącą do rozwiązywania równania liczebnego o jednej niewiadomej.

Rozprawę tę napisaną w języku niemieckim dałem przed kilku laty *Cesarskiej Akademii Umiejętności w Wiedniu*, która ją bardzo przychylnie przyjęła i w swoim pamiętniku w tomie XXX umieściła. Nakład odbitków osobnych, zwykle nie bardzo liczny, został już w pierwszym miesiącu wyczerpany Ze względu na tę okoliczność dały się słyszéć głosy poważne, abym tę rozprawę ogłosił w języku polskim. Skłoniłem się do tego tem chętniej, że tym sposobem nastręcza mi się sposobność wprowadzenia w Części I, niektórych ważniejszych zmian i uwag, i zarazem zasilenia Części II w §§ 3, 5 i 6 zawierające osnowę zupełnie nowych badań i wyników, dotyczących rozwiązywania przeważnie równań szczególnych tak algebraicznych, jako też i przestępnych.

Pisałem we Lwowie w miesiącu grudniu 1878.

ŻMURKO.

CZĘŚĆ PIERWSZA

§ 1.

WŁASNOŚCI ZASADNICZE WIELOMIANÓW RÓWNAŃ

Niechaj będzie

(1) $$F(u) = f(u) + i\varphi(u), \quad \text{gdzie} \quad i = \sqrt{-1}.$$

równaniem algebraicznem, w którem tak $f(u)$ jak $\varphi(u)$ oznaczają wielomiany postaci $A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots$ o skończonej liczbie wyrazów.

Na mocy wzoru Taylora otrzymamy:

(2) $$F(u + \rho e^{\mu i}) = F(u) + \frac{F_1(u)}{1!} e^{\mu i} + \frac{F_2(u)}{2!} e^{2\mu i} + \ldots + \ldots$$

Kładąc ogólnie

(3) $$F_s(u) = \frac{d^s F(u)}{du^s} = \left(\frac{d}{du}\right)^s F(u); \quad r! = 1.2.3 \ldots r$$

(4) $$\rho e^{n\mu i} = \rho \operatorname{dos} n\mu + i\rho \operatorname{wst} n\mu, \quad \rho e^{\mu i} = \rho \operatorname{dos} \mu + i\rho \operatorname{wst} \mu = \Delta x + i\Delta y$$

(5) $$y \frac{d}{dx} = D,$$

otrzymamy ze wzoru Taylora symbolicznie:

$$f_s(x + iy) = f_s(x) e^{Di} = f_s(x) \operatorname{dos} D + i f_s(x) \operatorname{wst} D,$$

$$\varphi_s(x + iy) = \varphi_s(x) e^{Di} = \varphi_s(x) \operatorname{dos} D + i\varphi_s(x) \operatorname{wst} D,$$

a zatem

(6) $$F_s(x + iy) = s!(Z_s + iz_s) = s!\sigma_s e^{\alpha_s i},$$

gdzie

(7) $$\left.\begin{aligned}
s!Z_s &= s!\sigma_s \operatorname{dos}\alpha_s = f_z(x)\operatorname{dos}D - \varphi_s(x)\operatorname{wst}D,\\
s!z_s &= s!\sigma_s \operatorname{wst}\alpha_s = f_s(x)\operatorname{wst}D + \varphi_s(x)\operatorname{dos}D,\\
\operatorname{dos}D &= 1 - \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{y^2}{2!} + \left(\frac{d}{dx}\right)^4 \frac{y^4}{4!} - \ldots\\
\operatorname{wst}D &= \frac{d}{dx} y - \left(\frac{d}{dx}\right)^3 \frac{y^3}{3!} + \left(\frac{d}{dx}\right)^5 \frac{y^5}{5!} - \ldots
\end{aligned}\right\}$$

Z różniczkowań w (6) (7) oznaczonych symbolicznie, wynikną wielomiany skończone, których wyrazy mają jedną z postaci następnych:

(8) $$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f_s(x) \frac{y^n}{n!} = f_{s+n}(x) \frac{y^n}{n!}, \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n \varphi_s(x) \frac{y^n}{n!} = \varphi_{s+n}(x) \frac{y^n}{n!}$$

i za pomocą wzorów (8) dostatecznie są oznaczone. Jeżeli $f(x)$, jest względem x funkcyą m-tego stopnia, natenczas wyrażenia w (8) przybierają wartość zera, skoro $n+s>m$. Z tego widzimy, że każdy z wielomianów w (7) jak $f_s(x)$dosD, $\varphi_s(x)$wstD posiada skończoną ilość wyrazów.

Wstawiwszy w (2) zamiast u dwumian $x+iy$, otrzymamy na mocy (6) i (7)

$$(9)\mathrm{F}(x+iy+\rho e^{\mu i})=\mathrm{F}[(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)]=\sigma_0 e^{\alpha_0 i}+\rho\sigma_1 e^{(\alpha_1+\mu)i}+\rho\sigma_2 e^{(\alpha_2+2\mu)i}+\ldots=\mathrm{Z}'_0+iz'_0=\sigma'_0 e^{i\alpha'_0},$$

gdzie

$$(10)\qquad \mathrm{Z}'_0=\sigma'_0\operatorname{dos}\alpha'_0=\sigma_0\operatorname{dos}\alpha_0+\rho\sigma_1\operatorname{dos}(\alpha_1+\mu)+\rho^2\sigma_2\operatorname{dos}(\alpha_2+2\mu)+\ldots$$

$$(11)\qquad z'_0=\sigma'_0\operatorname{wst}\alpha'_0=\sigma_0\operatorname{wst}\alpha_0+\rho\sigma_2\operatorname{wst}(\alpha_1+\mu)+\rho^2\sigma_2\operatorname{wst}(\alpha_2+2\mu)+\ldots$$

Z (7) otrzymamy całkiem ogólnie

$$(12)\qquad \mathrm{Z}_r^2+z_r^2=\sigma_r^2,$$

(13) z czego wypływa, iż dla $\sigma_r=0$ musi być także $\mathrm{Z}_r=z_r=0$.

Jeżeli założone wartości na x i y zadosyć czynią równaniu $\sigma_0=0$ więc $\mathrm{Z}_0=z_0=0$, jako też $\mathrm{F}(x+iy)=$ $=\mathrm{Z}_0+iz_0=\sigma_0 e^{\alpha_0 i}=0$, natenczas mówimy że wartość $u=x+iy$ jest pierwiastkiem równania

$$(14)\qquad \mathrm{F}(u)=0,$$

Jeżeli jednak σ_0 nie przybiera wartości zera dla założonych wartości na x i y, natenczas łatwo okazać, iż można obrać taki przyrost $\rho e^{\mu i}=\Delta x+\Delta y$ by z równania

$$(15)\qquad \mathrm{F}(x+iy+\rho e^{\mu i})=\mathrm{F}[(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)]=\sigma'_0 e^{\alpha'_0 i}$$

wynikła wartość na σ'_0 liczebnie mniejsza od wartości σ_0.

Przedewszystkiem widzimy, iż wskutek założonych wartości na x, y nie wszystkie ilości

$$(16)\qquad \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ldots\sigma_r^2,\ \sigma_{r+1}^2\ldots$$

mogą równocześnie zniknąć, gdyż toby znaczyło, iż wyrażenie $\mathrm{F}(u)$ jest nie zależnie od x i y równe zeru, co się sprzeciwia założeniu w (1), gdzie się wyraz $\mathrm{F}(u)$ jako ilość od u zależną określiło. Może się jednak zdarzyć, iż wskutek obranych wartości na x i y niektóre po sobie następujące wyrazy w (16) równocześnie znikają, np.

$$(17)\qquad \sigma_0^2>0,\ \sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_{r-2}^2=\sigma_{r-1}^2=0,\ \sigma_r^2>0$$

Wtenczas otrzymamy:

$$(18)\qquad \sigma'_0 e^{i\alpha'_0}=\sigma_0 e^{\alpha_0 i}\left\{1+\rho^r\frac{\sigma_r}{\sigma_0}e^{(r\mu+\alpha_r-\alpha_0)i}+\rho^{r+1}\frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_0}e^{((r+1)\mu+\alpha_{r+1}-\alpha_0)i}+\ldots\right\}$$

Przy dostatecznie małem ρ wystarczą nam 2 wyrazy początkowe wielomianu w nawias ujętego, by wyznaczyć jego wartość i znak; wolno nam prócz tego zażądać spełnienia warunku

$$(19)\qquad \rho^r\frac{\sigma_r}{\sigma_0}e^{(r\mu+\alpha r-\alpha_0)i}=-\varepsilon^r,$$

zakładając dostatecznie małą dodatną wartość na ε. Z tego wynika :

$$\rho e^{\mu i} = (-1)^{\frac{1}{r}} \varepsilon \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r}\right)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{\alpha_0 - \alpha_r}{r} i} \quad \iota,$$

(20) $$\Delta x = (-1)^{\frac{1}{r}} \varepsilon \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r}\right)^{\frac{1}{r}} \mathrm{dos} \frac{\alpha_0 - \alpha_r}{r},$$

$$\Delta y = (-1)^{\frac{1}{r}} \varepsilon \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r}\right)^{\frac{1}{r}} \mathrm{wst} \frac{\alpha_0 - \alpha_r}{r}.$$

Z (18) wynika uważając nadto $\varepsilon < 1$

$$\sigma'_0 e^{i\alpha_0} = \sigma_0 e^{i\alpha_0} (1 - \varepsilon^r),$$

a ponieważ w takim razie zawsze $1 - \varepsilon^r < 1$

(21) $$\sigma'^2_0 < \sigma_0^2,$$

jak było przy (15) zapowiedziane.

(22) Kładąc $x + \Delta x = x'$, $y + \Delta y = y'$, właśnie co wykazany związek poucza nas, iż możemy ze względu na wielomian F(u) z układu $[x, y, z]$ przejść do układu drugiego $[x', y', z']$, przyczem wielkość oznaczona przez σ_0 zmniejsza się. Wypowiedzieć przeto możemy, że *wychodząc z takich wartości na* x i y, *dla których* $\sigma_0^2 > 0$, *musimy też dojść i do takich wartości* x′ i y′, *dla których odpowiednie* σ'^2_0 *mniejszem się okaże jak* σ_0^2.

Z uwagi na tę okoliczność, że F(u) jest funkcyą algebraiczną, zatem i ciągłą; że zatem dla skończonych wartości x, y wartości na Z i z skończonemi się okazać muszą, musimy w obec ogólnego związku (12) przyznać, że i odpowiednia ilość σ_0^2 skończoną wartość przedstawiać musi, czy się ją oblicza na podstawie x i y, czy też na podstawie zmienionych wartości x' i y'. Przyznać także musimy, że w dziedzinie wszelkich możliwych skończonych wartości na x i y i takie wartości np. $x = \mathrm{X}$, $y = \mathrm{Y}$ istnieć muszą dla których odpowiedni wyraz Σ_0^2 otrzyma wartość możliwie najmniejszą, t. j. taką która żadnego zmniejszenia doznawać nie może, chociażbyśmy w myśl (22) za pomocą drobnych przyrostów Δx i Δy obliczyli ilość Σ'^2_0 na podstawie $x' = \mathrm{X} + \Delta\mathrm{X}$, $y' = \mathrm{Y} + \Delta\mathrm{Y}$.

Wyraz σ_0^2 o wartości różniącej się od zera nie może przedstawiać możliwie najmniejszej wartości Σ_0^2, gdyż według (21) prowadziłaby taka wartość do jeszcze mniejszej σ'^2_0. Musimy tedy przyznać, że ta koniecznie istniejąca najmniejsza wartość Σ_0^2 posiada wartość zera i prowadzi do równania

(23) $$\sigma_0^2 = \Sigma_0^2 = 0, \quad \text{a w następstwie według (12)}$$

dla $x = \mathrm{X}$, $y = \mathrm{Y}$ do następującego równania :

(24) $$\mathrm{Z}_0 = z_0 = u = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}\mathrm{F}(u) = 0,$$

przedstawiającego, że koniecznie istnieje taka wartość na $u = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ dla której algebraiczny wielomian F(u) przybiera wartość zera. Każde więc równanie F(u) $= 0$ posiada przynajmniej jeden pierwiastek w kształcie $u = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$.

W myśl (22) możemy, naśladując sposób postępowania prowadzący od układu (xy) do układu ($x'y'$), dojść stopniowo do układów : (x'' y''), (x''' y'''),... zatrzymując się na układzie (XY), dla którego z żądaną dokładnością spełni się warunek (23).

Dla dowolnej całkowitej wartości na n mamy :

$$(-1) = e^{(2n+1)\pi i}$$

a więc

(25) $$(-1)^{\frac{1}{r}} = e^{(2n+1)\frac{\pi}{r}i}$$

Za wstawieniem tej wartości w (20) otrzymamy :

(26) $$\begin{aligned}(\Delta x)_n &= \varepsilon\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r}\right)^{\frac{1}{r}} \operatorname{dos}\frac{\alpha_0-\alpha_r+(2n+1)\pi}{r},\\ (\Delta y)_n &= \varepsilon\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r}\right)^{\frac{1}{r}} \operatorname{wst}\frac{\alpha_0-\alpha_r+(2n+1)\pi}{r}.\end{aligned}$$

Z tego wynika, iż wychodząc z wartości początkowej $u = x + iy$ w powyższym przypadku otrzymamy r różnych wartości sąsiednich z których każdej odpowiada wartość na $\sigma'^2_0 < \sigma_0^2$.

Te r wartości wynikają ze wzoru

(27) $$[x+(\Delta x)_n]+i[y+(\Delta y)_n],$$

wstawiając zamiast n kolejno $0, 1, 2, \ldots\ r-2,\ r-1$ i obliczając podług (26) Δx i Δy stosownie do tych skaźników.

(28) Wartość początkowa $x+iy$ wskazuje w tym przypadku r różnych pierwiastków, a skoro $r > 1$, natenczas nazwiemy powyższą wartość na $x+iy$ *wartością wskazującą*, przejmując to nazwanie od teoryi równań FOURIERA.

Każda inna dowolna wartość początkowa może spełnić warunek $r = 1$, przeto nie wymaga osobnego nazwania.

(29) Z powyższego rozumowania należy wnosić, iż może się pojawić kilka różnych wartości $x+iy$, z których każda jest pierwiastkiem równania (1), musimy tedy rozstrzygnąć pytanie : ile pierwiastków przynależy powyższemu równaniu?

W tym celu napiszmy równanie (1) jak następuje :

(30) $$F(u) = B_n u^n + B_{n-1}u^{n-1} + \ldots + B_1 u + B_0 = 0,$$

co jest dozwolone, skoro spółczynniki B założymy w postaci $p+qi$.

Aby otrzymać wszystkie pierwiastki danego równania, możnaby na podstawie powyższego rozumowania następną obrać drogę : przez przyrównanie do zera pochodnych wielomianu $F(u)$ otrzymamy zakładając tymczasem wszystkie B różne od zera,

(31) $$F_1(u) = 0,\ F_2(u) = 0, \ldots F_{(n-1)}(u) = 0,$$

więc $(n-1)$ nowych równań, względnie do $(n-1)^{go}$, $(n-2)^{go}, \ldots 3^{go}$, 2^{go}, 1^{go} stopnia. Każdy pierwiastek któregokolwiek z równań (31) jest wartością, wskazującą pierwiastki równania poprzedniego. Szukajmy tedy pierwiastku równania 1^{go} stopnia $F_{(n-1)}(u) = 0$, a otrzymamy wartość wskazującą dwa pierwiastki równania $F_{(n-2)}(u) = 0$. Każdy pierwiastek tego równania wskazuje znowu dwa pierwiastki równania $F_{(n-3)}(u) = 0$, przyczem może się wydarzyć, iż wychodząc z różnych wartości wskazujących, przychodzimy do tego samego pierwiastku równania poprzedzającego. Tą drogą dojdziemy do pierwiastków równania $F_1(u) = 0$, które wskazują pierwiastki równania pierwotnego (30) i służą do ich obliczenia.

Powyższy sposób postępowania mógłby istotnie posłużyć do obliczenia pierwiastków równania (30), gdyby nie był zanadto zmudny. Myśl zasadnicza tej metody przyda nam się przy rozwijaniu toeryi innych metod obliczania pierwiastków.

Niechaj tedy $w_n = p_n + iq_n$ będzie pierwiastkiem równania

(32) $$F(u) = F^n(u) = 0,$$

przyczem skaźnik u góry oznacza stopień tego równania.

Dzieląc przez $(u - w_n)$ otrzymamy równanie, ważne dla każdego u:

(33) $$F^n(u) = F^{n-1}(u)[u - w_n] + r_n,$$

gdzie $F^{(n-1)}(u)$ oznacza iloraz $(n-1)^{go}$ stopnia, a r_n resztę.

Dla $u = w_n$ otrzymamy z (33) na mocy założenia, iż w_n jest pierwiastkiem równania $F^n(u) = 0$,

$$r_n = 0,$$

a zatem:

(34) $$F^n(u) = (u - w_n) . F^{n-1}(u),$$

z czego wynika, iż każdy wielomian kształtu (30) może być przedstawiony jako iloczyn wielomianu, którego stopień jest mniejszy o jedność i dwumianu $(u - w_n)$, którego drugi wyaz wzięty ze znakiem przeciwnym, jest pierwiastkiem równania (30). Dwumian $(u - w_n)$ nazywać będziemy *czynnikiem pierwiastkowym wielomianu* $F_n(u)$.

Z (24) wynika, iż każdy wielomian $F^s(u)$ może przybrać wartość zera za wprowadzeniem stosownej wartości na $a = w_s$, czyli, że równanie

(35) $$F^s(u) = (u - w_s) . F^{s-1}(u)$$

da się sprawdzić dla każdej wartości na s. Wstawiwszy w to równanie zamiast s kolejno wartości n, $n-1$,...3, 2, 1 i pomnożywszy powstałe ztąd równania, otrzymamy po obustronnem opuszczeniu czynnika wspólnego:

(36) $$F^n(u) = B_n(u - w_1)(u - w_2)\dots(u - w_{n-1})(u - w_n) = 0,$$

gdzie B_n oznacza spółczynnik wyrazu u^n w funkcyi $F^n(u)$. Dla każdej z ilości $w_1, w_2 \dots w_{n-1}, w_n$, $F^n(u)$ przybiera wartość zera, skoro tę ilość zamiast u wstawimy. Każda z tych ilości jest przeto pierwiastkiem, a każdy z dwumianów $(u - w_1)$, $(u - w_2)\dots(u - w_n)$ czynnikiem pierwiastkowym *równania* (30). Żadna ilość, różna od któréjkolwiek z poprzednich $w_1, w_2, \dots w_n$, nie może zrównać z zerem iloczynu (36), nie może być tedy pierwiastkiem równania (30).

(37) *Równanie* n^{go} *stopnia posiada tedy* n *pierwiastków a nie więcej*. Jeżeli jest kilka pierwiastków sobie równych, np. $w_1 = w_2 = w_3 = \alpha$, wtedy wielomian jest podzielny przez $(u - \alpha)^3$, co wyrażamy, mówiąc iż α jest *pierwiastkiem potrójnym* lub *trzykrotnie powtórzonym równania* (30).

Z (36) otrzymamy:

$$F^n(u + k) = B_n[u - (w_1 - k)][u - (w_2 - k)]\dots[u - (w_n - k)] = 0,$$

$$F^n(uk) = B_n k^n \left(u - \frac{w_1}{k}\right)\left(u - \frac{w_2}{k}\right) \dots \left(u - \frac{w_n}{k}\right) = 0,$$

(38) $$F^n\left(\frac{u}{k}\right) = \frac{B_m}{k^n}(u - kw_1)(u - kw_2)\dots(u - kw_n) = 0,$$

$$F^n(u^k) = B_n\left(u^k - (\sqrt[k]{w_1})^k\right)\left(u^k - (\sqrt[k]{w_2})^k\right)\dots\left(u^k - (\sqrt[k]{w_n})^k\right) = 0,$$

$$F^n(\sqrt[k]{u}) = B_n\left(\sqrt[k]{u} - \sqrt[k]{(w_1)^k}\right)\left(\sqrt[k]{u} - \sqrt[k]{(w_2)^k}\right)\dots\left(\sqrt[k]{u} - \sqrt[k]{(w_n)^k}\right) = 0;$$

to znaczy :

(39) Jeżeli w równaniu $F_n(u)=0$ połączymy u ze stałą k za pomocą pewnego działania, natenczas otrzymamy pierwiastki równania przekształconego łącząc stałę k z każdym pierwiastkiem pierwotnego równania za pomocą działania wprost przeciwnego.

Ze wzoru (36) można wielomian $F^n(u)=0$ utworzyć z danych pierwiastków $w_1, w_2, \ldots w_{n-1}, w_n$, w sposób następujący :

Założywszy, iż pierwszy spółczynnik B_n jest wiadomy, znajdziemy wartość na B_{n-s}, tworząc z pierwiastków wziętych ze znakami przeciwnemi $-w_1, -w_2, \ldots -w_n$ wszystkie kombinacye s^{tej} klassy; każdą kombinacyę należy potem uważać jako iloczyn wszystkich elementów i dodać te iloczyny do siebie. Oznaczmy summę tych iloczynów przez S_s, będzie :

(40) $$B_{n-s}=B_n.S_s.$$

Będziemy tedy mieli :

(41) $$B_{n-1}=-B_n(w_1+w_2+\ldots+w_n),$$
$$B_0=B_{n-n}=(-1)^n.B_n.w_1.w_2w_3\ldots w_{n-1}w_n.$$

Wziąwszy na uwagę pięć pierwiastków w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, przyjdziemy do wniosków następujących :

1. W skład spółczynnika B_0 wejdą wszystkie 5 pierwiastków jako czynniki.

	2. Do	utworzenia	składników	kombinacyjnych w		B_1	użyjemy przynajmniej			*cztery*
	3.	»	»	»	»	B_2	»	»		*trzy*
(42)	4.	»	»	»	»	B_3	»	»		*dwa*
	5.	»	»	»	»	B_4	»	»		*jeden*

z pięciu danych pierwiastków.

Napiszmy pierwsze z równań pod *l.* (38) w postaci :

(43) $$F^n(u+k)=B_nu^n+B'_{n-1}u^{n-1}+B'_{n-2}u^{n-1}+\ldots+B'_3u^3+B'_2u^2+B'_1u+B'_0=0,$$

i załóżmy :

$$w_1-k=w'_1;\quad w_2-k=w'_2;\quad ..w_n-k=w'_n,$$

i nadto, że w (36) pierwiastki w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 zgadzają się co do ν cyfer początkowych, i że k wyobrażają właśnie owe wspólne cyfry początkowe co do ich wartości miejscowej i znaku. Z powyższego wynika, iż cecha każdego z pierwiastków $w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5$ będzie przynajmniej o ν jedności mniejsza od cechy pierwiastków w_1, w_2, w_3, w_4, w_5.

Przy oznaczaniu cechy każdego ze spółczynników w (43) ten element kombinacyjny rozstrzyga, którego cecha najmniej się zniżyła, a zatem ten, do którego utworzenia użyto najmniejszej liczby pierwiastków układu w'_1, w'_2, w'_3, w'_4 w_5. Uwzględniając uwagi pod (42), wyprowadzamy tedy następujące wnioski :

Cecha	spółczynnika	B'_0	jest o		5ν	jedności	mniejsza od	cechy	B_0,
»	»	B'_1	»	»	4ν	»	»	»	B_1,
»	»	B'_2	»	»	3ν	»	»	»	B_2,
»	»	B'_3	»	»	2ν	»	»	»	B_3.
»	»	B'_4	»	»	1ν	»	»	»	B_4.

(44) Z powyższego widzimy, iż przechodząc ze spółczynników B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 do odpowiednich B_0, B'_1, B'_2, B'_3, B'_4, cechy zniżają się stopniowo o 5ν, 4ν, 3ν, 2ν, 1ν jedności. W skład następnych spółczynników B'_5, B'_5... wchodzą i takie elementa kombinacyjne, które nie mieszczą w sobie żadnego z czynników w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5, nie możemy tedy z góry przewidzieć zmian cech odpowiednich.

Jeżeli równanie (30) a względnie (1) tylko pierwszorzędne zawiera wyrazy, mamy identycznie $\varphi(u)=0$ i $f(u)=F(u)$.

W tym razie otrzymamy całkiem ogólnie :

(45)
$$s!\,Z_s = s!\,\mathrm{dos}\,\alpha_s = F_s(x)\,\mathrm{dos}\,D = F_s(x)\left[1-\left(\frac{d}{dx}\right)^2\frac{y^2}{2!}+\dots\right]$$
$$s!\,z_s = s!\,\mathrm{wst}\,\alpha_s = F_s(x)\,\mathrm{wts}\,D = F_s(x)\left[\frac{d}{dx}\cdot\frac{y}{1!}-\left(\frac{d}{dx}\right)^3\frac{y^3}{3!}+\dots\right]$$

również

(46)
$$s!\,Z_s = \underset{\vee}{F_s}(x) - \underset{\vee}{F_{s+2}}(x)\,\frac{y^2}{2!}+F_{s+4}(x)\,\frac{y^4}{3!}-\dots$$
$$s!\,z_s = y\left[F_{s+1}(x)-F_{s+3}(x)\,\frac{y^2}{3!}+F_{s+5}(x)\,\frac{y^4}{4!}-\dots\right]$$

(47)
$$Z_0 = F(x)-F_2(x)\,\frac{y^2}{2!}+F(x)\,\frac{y^4}{4!}-\dots$$
$$z_0 = y\left[F_1(x)-F_3(x)\,\frac{y^2}{3!}+F_5(x)\,\frac{y^4}{5!}-\dots\right].$$

Aby zadosyć uczynić równaniu

(48)
$$F(u)=F(x+iy)=0,$$

trzeba na x i y obrać takie wartości, aby było

(49)
$$\sigma_0=Z_0=z_0=0.$$

Z (47) widzimy, iż tym warunkom można w dwojaki sposób uczynić zadość, mianowicie kładąc :

(50) 1.
$$F(x)=y=0,$$

albo

(51) 2.
$$\begin{cases} F(x)-F_2(x)\,\dfrac{y^2}{2!}+F_4(x)\,\dfrac{y^4}{4!}-\dots=0,\\ F_1(x)-F_3(x)\,\dfrac{y^2}{4!}+F_5(x)\,\dfrac{y^4}{5!}-\dots=0,\end{cases}$$

Z (50) wynikają same pierwszorzędne pierwiastki. Z (51) otrzymamy resztę pierwiastków urojonych $x+iy$, i widzimy zarazem, iż $x-iy$ musi być także pierwiastkiem danego równania, ponieważ równania (51) są niezależne od znaku y.

Pierwiastki, jak $x+iy$, $x-iy$ nazywają się *sprzężone pierwiastki urojone*.

Iloczyn sprzężonych czynników pierwiastkowych ma postać :

(53)
$$\{u-[x+iy]\}\{u-[x-iy]\}=(u-x)^2+y^2,$$

wartość jego jest zawsze dodatna bezwzględu na układ wartości (x, y, u).

Jeżeli tedy równanie $F(u)=0$ z pierwszorzędnemi spółczynnikami posiada pierwiastki pierwszorzędne $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{v-1}, u_v$, a zresztą same pierwiastki urojone, wtenczas ilość tych ostatnich jest parzysta i rozpada się na grupy pierwiastków sprzężonych. Oznaczywszy przez $\psi(u)$ iloczyn wszystkich sprzężonych czynników pierwiastkowych, wiemy z (53), iż funkcya $\psi(u)$ zachowuje wartość dodatną dla każdej pierwszorzędnej wartości na u.

Równanie (30) przybiera w tym razie następującą postać:

(54) $$F(u)=B_n(u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_{v-1})(u-u_v)\psi(u)=0,$$

przyczem zastrzegamy, iż pierwiastki pierwszorzędne czynią zadość warunkowi:

(55) $$u_1 < u_2 < {}_3\ldots < u_{v-1} < u_v.$$

Z (54) otrzymamy:

$$F_1(u)=\frac{F(u)}{u-u_1}+\frac{F(u)}{u-u_2}+\ldots+\frac{F(u)}{u-u_v}+B_n(u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_v)\frac{d\psi(u)}{du},$$

dalej:

(56) $$F_1(u_1)=\frac{F(u)}{u-u_1}\bigg|_{u=u_1}=B_n(u_1-u_2)(u_1-u_3)\ldots(u_1-u_v)\psi(u_1),$$

(57) $$F_1(u_2)=\frac{F(u)}{u-u_2}\bigg|_{u=u_2}=-B_n(u_1-u_2)(u_2-u_3)\ldots(u_2-u_v)\psi(u_2).$$

Z założenia (55) wynika, iż iloczyny w (57) po prawej stronie znaku równania mają znaki przeciwne, czyli, że $F_1(u)$ przybiera wartości przeciwne przy założeniach $u=u_1$, $u=u_2$. Ponieważ $F_1(u)$ jest funkcyą ciągłą, więc między u_1 i u_2 musi istnieć przynajmniej jedna wartość pierwszorzędna u'_1, dla której $F_1(u)$ staje się równe zeru, która przeto jest pierwszorzędnym pierwiastkiem równania

(58) $$F_1(u)=0.$$

W podobny sposób można dowieść, że każdemu z układów $[u_2, u_3], \ldots, [u_{v-1}, u_v]$ przynależy przynajmniej jedna wartość pośrednia, która jest pierwszorzędnym pierwiastkiem równania (58).

(59) *v pierwszorzędnych pierwiastków równania* $F(u)=0$ *wskazują przynajmniej* $(v-1)$ *pierwszorzędnych pierwiastków równania* $F_1(u)=0$.

To twierdzenie nie przestaje być prawdziwe i w tym razie, gdy różnice dwu po sobie następujących pierwiastków w (55) stają się dowolnie małe, więc i wtedy gdy te różnice znikają.

(60) W tym razie widzimy, iż μ-krotnie powtórzony pierwiastek równania $F(u)=0$ jest $(\mu-1)$-krotnie powtórzonym pierwiastkiem równania $F_1(u)=0$. Łatwo dowieść, że to twierdzenie stosuje się także do równania (1) i w tym nawet razie, gdy pierwiastek powtórzony jest urojony; w tym celu utwarzamy do równania (36) przynależne mu $\frac{dF(u)}{du}=F_1(u)=0$ sposobem w (56) oznaczonym, i z ilości powtarzających się w $F(u)$ czynników pierwiastkowych wnosimy o ilości powtarzających się czynników pierwiastkowych w $F_1(u)$.

Następstwo równań

(61) $$F_s(u)=0, \qquad F_{s+1}(u)=\frac{dF_s(u)}{du}=0,$$

nacechujmy w ten sposób, iż pierwsze nazwiemy *równaniem pierwotnem*, drugie zaś *równaniem pochodnem*. Nie trudno do poprzedzających twierdzeń dołączyć następujące :

1. m różnych pierwszorzędnych pierwiastków równania pierwotnego zapewniają istnienie przynajmniej $(m-1)$ pierwiastków równania pochodnego.

2. Jeżeli równanie pierwotne ma m pierwiastków równych, natenczas 1^{sze}, 2^{re},...,ν^{te} równanie pochodne ma względnie

$$(62) \qquad m-1, \quad m-2, \ldots \; m-(v-1), \; (m-\nu)$$

pierwiastków równych.

3. Wartość, wskazująca m par pierwiastków sprzężonych, należących do równania $F_s(u)=0$, oznajmia, że to równanie $(n-s)^{go}$ stopnia może co najwięcej posiadać $(n-s-2m)$ pierwiastków pierwszorzędych. Z tego wynika dalej, iż równanie $F_{s-1}=0$ $(n-s+1)^{go}$ stopnia posiada co najwięcej $(n-s+1-2m)$ pierwiastków pierwszorzędnych, a zatem przynajmniej m par pierwiastków urojonych, bo w razie przeciwnym, musiałoby równanie $F_s=0$ więcej jak $(n-s-2m)$ pierwiastków pierwszorzędnych posiadać. Wnioskując tak samo dalej, możemy twierdzić, iż wartość wskazująca m par pierwiastków sprzężonych równania $F_s(u)=0$ oznajmia, iż każde z równań

$$F_{s-1}(u)=0, \quad F_{s-2}(u)=0 \ldots F_1(u)=0, \quad F(u)=0,$$

posiada przynajmniej m par pierwiastków sprzężonych.

§ 2.

WYOBRAŻENIE RÓWNAŃ I ICH PIERWIASTKÓW W PRZESTRZENI.

Wyraz

$$(1) \qquad F(x+iy)=[f(x)\cos D-\varphi(x)\sin D]+i[f(x)\sin D+\varphi(x)\cos D]=Z_0+iz_0,$$

może być wyobrażony w przestrzeni, tak ze względu na wyraz pierwszorzędny Z_0, jak drugorzędny z_0. To wyobrażenie uskutecznimy w sposób następujący : Odnośnie do prostokątnego układu osi ox, oy, oz załóżmy, iż dwumian $(x+iy)$ przedstawia spółrzędne x, y punktu π na płaszczyznie xoy, tak że :

$$(2) \qquad \text{punkt } \pi \text{ na płaszczyznie } xoy \equiv \text{punktowi } (x+iy).$$

(3) Wartości na Z_0 i z_0 przynależne punktowi $(x+iy)$ wyznaczą na prostopadłej do płaszczyzny xoy w punkcie π dwa punkta P i p, z których pierwszy ma od π odległość $=Z_0$, drugi zaś odległość $=z$. Ze względu na znaczenie wyrazów Z_0 i z_0 nazwiemy dwa punkta sprzężone P i p : pierwszy *punktem pierwszorzędnym*, drugi *drugorzędnym*.

(4) Przez stosowny dobór dwumianu $(x+iy)$ możemy otrzymać każdy dowolny punkt w płaszczyznie xoy. Do dowolnie obranego układu punktów π, π', π'', π''',... na xoy otrzymamy, za pomocą odpowiednich wartości na Z_0, układ punktów P, P$'$, P$''$, P$'''$,... w przestrzeni, tak samo za pomocą odpowiednich wartości na z_0 drugi układ p, p', p'', p''',... Jeżeli układ π, π', π'', π'''.... wyobraża całą płaszczyznę xoy, natenczas układ P, P$'$, P$''$, P$'''$,... stanowić będzie utwór ciągły w przestrzeni, czyli powierzchnię, którą zwać będziemy *pierwszorzędną powierzchnią pomocniczą*.

Tak samo nazwiemy układ p, p', p'', p''',... *drugorzędną powierzchnią pomocniczą*.

Wyrażeniem analitycznem pierwszorzędnej powierzchni pomocniczej będzie tedy :

(5) $$z = Z_0 = f(x)\,\mathrm{dos\,D} - \varphi(x)\,\mathrm{wst\,D},$$

a drugorzędnej powierzchni pomocniczej :

(6) $$z = z_0 = f(x)\,\mathrm{wst\,D} + \varphi(x)\,\mathrm{dos\,D}.$$

Każda z tych powierzchni pomocniczych dzieli przestrzeń na dwie części, górną i dolną, tak samo, jak płaszczyzna xoy. Prosta równoległa do osi oz spotyka każdą z tych powierzchni tylko w jednym punkcie.

Równania

(7) $$Z_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

(8) wyrażają ślady obydwu powierzchni na płaszczyznie xoy, pierwsze *ślad pierwszorzędny*, drugie *ślad drugorzędny*. Każdy pierwiastek równania $F(u) = 0$ czyni równocześnie zadość obydwom równaniom (7), wyobraża tedy *punkt pierwiastkowy* π, spólny obydwu śladom.

Ponieważ równanie n^{go} stopnia $F(u)=0$ posiada n pierwiastków, więc jesteśmy pewni istnienia n punktów pierwiastkowych na płaszczyznie xoy, powyższe ślady istnieją tedy koniecznie i przecinają się nawzajem w n punktach. Pierwiastki równe wskazują oczywiście *wielokrotne punkta pierwiastkowe*.

(9) Wyprowadźmy z każdego punktu śladu drugorzędnego prostopadłę do płaszczyzny xoy aż do spotkania pierwszorzędnej powierzchni pomocniczej, otrzymamy krzywę ciągłą, która płaszczyznę xoy w n punktach pierwiastkowych przebija. To pasmo zwać będziemy *pierwszorzędnem pasmem sprzężonem*. Tak samo rozumieć należy *drugorzędne pasmo sprzężone*.

Stosownie do znakowania pod (6) i (7) w § 1, mamy :

$$Z_s = [f_s(x)\,\mathrm{dos\,D} - \varphi_s(x)\,\mathrm{wst\,D}] : s!, \qquad z_s = [f_s(x)\,\mathrm{wst\,D} + \varphi_s(x)\,\mathrm{dos\,D}] : s!,$$

$$\frac{d^m\mathrm{dosD}}{dy^m} = \mathrm{dos}\left(\mathrm{D} + \frac{m\pi}{2}\right)\left(\frac{d\mathrm{D}}{dy}\right)^m = \mathrm{dos}\left(\mathrm{D} + \frac{m\pi}{2}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^m,$$

$$\frac{d^m\mathrm{wstD}}{dy^m} = \mathrm{wst}\left(\mathrm{D} + \frac{m\pi}{2}\right)\left(\frac{d\mathrm{D}}{dy}\right)^m = \mathrm{wst}\left(\mathrm{D} + \frac{m\pi}{2}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^m,$$

a więc

$$\frac{d^{2m}Z_s}{dy^{2m}} = \frac{(-1)^m}{s!}[f_{s+2m}(x)\mathrm{dosD} - \varphi_{s+2m}(x)\mathrm{wstD}] = (-1)^m\frac{(s+2m)!}{s!}Z_{s+2m},$$

$$\frac{d^{2m+1}Z_s}{dy^{2m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{s!}[f_{s+2m+1}(x)\mathrm{wstD} + \varphi_{s+2m+1}(x)\mathrm{dosD}] = (-1)^{m+1}\frac{(s+2m+1)!}{s!}z_{s+2m+1}.$$

Tą więc drogą otrzymamy :

(10)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^{2m}Z_s}{dy^{2m}} = (-1)^m\frac{(s+2m)!}{s!}Z_{s+2m}, \quad \frac{d^{2m}z_s}{dy^{2m}} = (-1)^m\frac{(s+2m)!}{s!}z_{s+2m},\\
&\frac{d^{2m+1}Z_s}{dy^{2m+1}} = (-1)^{m+1}\frac{(s+2m+1)!}{s!}z_{s+2m+1}, \quad \frac{d^{2m+1}z_s}{dy^{2m+1}} = (-1)^m\frac{(s+2m+1)!}{s!}Z_{s+2m+1},\\
&\frac{d^mZ_s}{dx^m} = \frac{(s+m)!}{s!}Z_{s+m}, \quad \frac{d^mz_s}{dx^m} = \frac{(s+m)!}{s!}z_{s+m}.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^{2m+r+1}Z_s}{dy^{2m+1}dx^r} = (-1)^{m+1}\frac{(s+2m+r+1)!}{s!}z_{s+2m+r+1}, \quad \frac{d^{2m+r+1}z_s}{dy^{2m+1}dx^r} = (-1)^m\frac{(s+2m+r+1)!}{s!}Z_{s+2m+r+1}\\
&\frac{d^{2m+r}Z_s}{dy^{2m}dx^r} = (-1)^m\frac{(s+2m+r)!}{s!}Z_{s+2m+r}, \quad \frac{d^{2m+r}z_s}{dy^{2m}dx^r} = (-1)^m\frac{(s+2m+r)!}{s!}z_{s+2m+r}.
\end{aligned}\right.$$

Pierwszorzędne pasmo sprzężone wyrażone jest przez równania :

(11) $$z = Z_0, \quad z_0 = 0.$$

Różniczkując otrzymujemy :

$$\frac{dz}{dx} = Z_1 - z_1 \cdot \frac{dy}{dx}; \quad z_1 + Z_1 \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

(12) a zatem

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Z_1^2 + z_1^2}{Z_1} = \frac{\sigma_1^2}{Z_1}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{z_1}{Z_1}.$$

Przez λ, μ, ν oznaczymy kąty, które element pierwszorzędnego pasma sprzężonego w punkcie (x, y, z) tworzy z osiami ox, oy, oz. Na oznaczenie tych kątów wynikają z (12) wzory :

(13) $$\text{dos}\lambda = \frac{Z_1}{\sigma_1\sqrt{1+\sigma_1^2}}, \quad \text{dos}\mu = \frac{-z_1}{\sigma_1\sqrt{1+\sigma_1^2}}, \quad \text{dos}\nu = \frac{\sigma_1}{\sqrt{1+\sigma_1^2}},$$

$\cos\nu$ staje się równe jedności tylko dla bardzo wielkiego σ_1, czyli dla punktów, których x i y są bardzo wielkie. Z tego wynika, iż pierwszorzędne pasmo sprzężone przybiera kierunek równoległy do osi oz tylko w bardzo wielkiej odległości od tejże osi. Takie pasmo, wychodząc z punktu (x, y, z), zbliżać się będzie do płaszczyzny xoy w kierunku (13), albo w kierunku wprost przeciwnym; z czego można wnosić, iż, przebiegając to pasmo, dojdziemy do punktu pierwiastkowego na płaszczyźnie xoy. Może się jednak wydarzyć, iż podczas śledzenia przebiegu tego pasma trafimy na element tegoż równoległy do płaszczyzny xoy, który zdaje się wskazywać, iż odnoga pasma, przestaje się odtąd zbliżać do płaszczyzny xoy, i od niej coraz bardziej się oddala.

(14) Element pasma może tylko w tym punkcie (x, y, z) przybrać kierunek równoległy do płaszczyzny xoy, dla którego $\cos\nu$ w (13) staje się równe zeru. Ten warunek będzie spełniony skoro założymy $\sigma_1 = Z_1 = z_1 = 0$. Aby poszukiwania nasze stosowane być mogły do najogólniejszego przypadku, założymy, iż prócz równań (14) mają miejsce następujące równania :

(15) $$\sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_{r-1} = 0.$$

Podstawmy zamiast x, y, z następujące wartości :

$$x + dx = x + \rho\,\text{dos}\,\mu, \quad y + dy = y + \rho\,\text{wst}\,\mu,$$

wtedy otrzymamy z (11) [ob. § 1, l. (10) i (11)] :

$$Z'_0 = z + dz = Z_0 + \rho^r\sigma_r\,\text{dos}(r\mu + \alpha_r) + \rho^{r+1}\sigma_{r+1}\,\text{dos}[(r+1)\mu + \alpha_{r+1}] + \ldots$$

$$0 = z_0 + \rho^r\sigma_r\,\text{wst}(r\mu + \alpha_r) + \rho^{r+1}\sigma_{r+1}\,\text{wst}[(r+1)\mu + \alpha_{r+1}] + \ldots$$

Te równania przybierają według (11) przy bardzo małem ρ następującą postać :

(16) $$Z'_0 = z + dz = Z_0 + \rho^r\sigma_r\,\text{dos}(r\mu + \alpha_r); \quad \text{wst}(r\mu + \alpha_r) = 0.$$

Z drugiego równania pod l. (16) wynikają dla całkowitego m :

(17) $$r\mu + \alpha_r = m\pi, \quad \mu_m = m\frac{\pi}{r} - \frac{\alpha_r}{r}.$$

a z pierwszego równania pod I. (16) otrzymamy na mocy (17):

(18) $$Z'_0 = z + dz = Z_0 + (-1)^m \sigma_r \rho^r = Z_0 + \zeta,$$

Z (17) otrzymamy dwa układy wartości na μ:

(19) $$(\mu_1,\ \mu_3,\ \mu_5, \ldots \mu_{2r-1})_1\ ; \qquad (\mu_2,\ \mu_4,\ \mu_6, \ldots \mu_{2r})_2,$$

(20) z których pierwszy odpowiada nieparzystym, drugi zaś parzystym wartościom na m. Przyrost ζ, którego wartość wynika z (18), przybiera znaki przeciwne, odnośnie do obydwu układów w (19), jeżeli z pomiędzy tych układów obierzemy ten, dla którego iloczyn ζZ_0 przybiera znak odjemny. Wtedy wartość na Z'_0 będzie liczebnie mniejsza od wartości na Z_0.

Szereg wartości na μ w ten sposób obrany wskazuje r sprzężonych pierwszorzędnych odnóg, które wychodzą z punktu (x, y, z) i zbliżają się ku płaszczyznie xoy, spotykając ją przynajmniej w r punktach pierwiastkowych. Jeżeli r jest liczbą parzystą, wtedy dwie wartości na μ, które się różnią o π, mają równocześnie skaźniki parzyste lub nieparzyste. Odnogi odpowiadające każdemu z takich kątów, tworzą pasmo ciągłe w punkcie (x, y, z), które wychodząc z punktu (x, y, z) z obu stron albo zbliża się ku płaszczyznie xoy, albo od niej się oddala.

(21) Taki punkt wyjścia (x, y, z) jest *punktem największości*, a względnie *najmniejszości* każdej takiej krzywej, stosownie do znaczników kąta μ i znaku ilości Z_0.

Szukając punktów najwyższych i najniższych powierzchni $z = F(u)$ za pomocą urojonych wartości zmiennej, mamy więc za wiele warunków do spełnienia; ponieważ $u = x + iy$ musi być tak oznaczone, aby wartość na $F(x+iy) = Z_0 + iz_0$ była pierwszorzędna a równocześnie wypadło:

$$F_1(x+iy) = Z_1 + iz_1 = 0.$$

Wartości na x i y muszą być tedy tak obrane, aby spełniły następujące trzy warunki:

(22) $$z_0 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad z_1 = 0;$$

Tym warunkom mogą tylko szczególne wartości spółczynników w $F(u)$ zadość uczynić.

(23) Z punktu π na płaszczyznie xoy, którego dwumian cechujący $x+iy$ spełnia równania $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{r-1} = 0$, wyprowadźmy prostopadłę i w wysokościach Z_0 i z_0 oznaczmy parę sprzężonych punktów P, p, z których pierwszy znajduje się na powierzchni pierwszorzędnej, drugi na drugorzędnej powierzchni pomocniczej. W tych punktach mają powierzchnie pomocnicze poziome, płaszczyzny styczne, które się ich w $(r-1)^{ym}$ stopniu dotykają. Płaszczyzna styczna przecina prócz tego powierzchnię drugorzędną w punkcie p w $2r$ odnogach krzywych, a kierunki pierwszych elementów tychże odpowiadają kątom w (19). Poziome proste, wykreślone przez punkt p w kierunkach przez (19) oznaczonych, dotykają się powierzchni drugorzędnej w r^{tym} stopniu.

Tak samo znajdziemy ze względu na dotykanie w punkcie P układ $2r$ prostych które się powierzchni pierwszorzędnej w r^{tym} stopniu dotykają. Kierunki tych prostych wynikają z równania $\cos(\alpha_r + r\mu) = 0$ albo: $\alpha_r + r\mu'_m = m\pi + \frac{\pi}{2}$, wstawiając na m kolejno wartości 1, 2, 3...$2r$. Z tego wynika układ kątów $[\mu'_1, \mu'_2, \ldots \mu'_{2r-1}, \mu'_{2r}]$, gdzie

(24) $$\mu'_m = \frac{m}{r}\pi + \frac{\pi}{2r} - \frac{\alpha_r}{r}.$$

Z porównania wzoru (24) ze wzorem (19) wynika :

(25) $$\mu'_m - \mu_m = \frac{\pi}{2r}; \quad \mu_{s+1} - \mu_s = \mu'_{s+1} - \mu'_s = \frac{\pi}{r}.$$

Jeżeli na płaszczyznie xoy przez punkt π wykreślimy pęk $4r$ promieni w kierunkach μ i μ', to dwa promienie sąsiednie będą zamykały kąt $\frac{\pi}{2r}$, a każdy promień układu (24) podzieli na dwie równe części kąt między dwoma promieniami sąsiedniemi układu (19) i odwrotnie.

Jeżeli oprócz równań $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{r-1} = 0$ spełnią się jeszcze równania $\sigma_0 = Z_0 = z = 0$, natenczas punkta P, p i π wzajemnie się nakryją. Pęk $4r$ promieni wyobraża w tym razie $4r$ elementów śladów wychodzących z punktu π, które naprzemian należą do powierzchni pierwszo i drugorzędnej. Punkt π jest w tym razie r-krotnym punktem pierwiastkowym, a dwumian $x+iy$ r-krotnym pierwiastkiem równania $F(u)=0$.

Ze względu na ciągłość pierwszorzędnej odnogi sprzężonej utwarzamy przez stopniowe różniczkowanie równania śladu drugorzędnego, $z_0=0$, następującą tabliczkę :

(27) $$\begin{cases} Z_1 y_1 + z_1 = 0, \\ Z_1 y_2 - z_2 y_1^2 + 2Z_2 y_1 + z_2 = 0. \end{cases}$$

(28) $$\begin{cases} Z_1 y_3 + 2(Z_2 - z_2 y_1) y_2 - Z_3 y_1^3 - 3z_3 y_1^2 + 3Z_3 y_1 + z_3 = 0, \\ Z_1 y_4 + 2(Z_2 - z_2 y_1) y_3 - z_2 y_2^2 + 3(-Z_3 y_1^2 - 2z_3 y_1 + Z_3) y_2 + \\ \quad + (z_4 y_1^4 - 4Z_4 y_1^3 - 6z_4 y_1^2 + 4Z_4 y_1 + z_4) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

kładąc ogólnie :

$$s!\, y_s = \frac{d^s y}{dx^s}.$$

Niechaj $x+iy$ należy do punktu π obranego na śladzie drugorzędnym w skończonej odległości od punktu wielokrotnego tego śladu. Wyraz Z_1, przynależny punktowi π, nie znika, możemy przeto z równań (27) szukać wartości na $y_1, y_2, y_3 \ldots$ Jeżeli żądamy, by punkt $[(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)]$ znajdował się na śladzie drugorzędnym, to otrzymamy dla stosownie obranej wartości na Δx :

(29) $$\Delta y = y_1 . \Delta x + y_2 . \Delta x^2 + y_3 . \Delta x^3 + \ldots$$

Szukając wartości na ρ i μ z równań

$$\rho \operatorname{dos} \mu = \Delta x, \qquad \rho \operatorname{wst} \mu = \Delta y,$$

możemy obliczyć Z'_0 za pomocą równania :

(30) $$Z'_0 = Z_0 + \sigma_1 \rho \operatorname{dos}(\mu + \alpha_1) + \sigma_2 \rho^2 \operatorname{dos}(2\mu + \alpha_2) + \ldots$$

Z tej wartości na Z'_0 możemy potem wnosić, o ileśmy się podczas przebiegania odnogi krzywej zbliżyli do płaszczyzny xoy, a zatem do punktu pierwiastkowego.

Z powyższego rozumowania pokazuje się jasno, iż wychodząc z dwumianu dowolnego, czyniącego zadość warunkowi $z_0=0$, przychodzimy do punktu na odnodze sprzężonej, od którego ta odnoga albo poczyna zbliżać się do punktu pierwiastkowego, albo prowadzi nas do takich punktów na pierwszorzędnej powierzchni sprzężonej, zkąd wychodzi pęk odnóg, zbliżających się do płaszczyzny xoy i zdążających przynajmniej ku tylu punktom pierwiastkowym, z ilu odnóg pęk się składa.

§ 3.

POZIOME ODGRANICZANIE PUNKTÓW PIERWIASTKOWYCH

Niechaj dwumian $x+iy$ wyznacza r-krotny punkt pierwiastkowy π_r, to przedewszystkiem muszą być spełnione równania :

$$
\begin{aligned}
&\sigma_0=\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_{r-1}=0,\\
(1)\qquad &Z_0=Z_1=Z_2=\ldots=Z_{r-1}=0,\\
&z_0=z_1=z_2=\ldots=z_{r-1}=0.
\end{aligned}
$$

Do wyznaczenia punktów sąsiednich na płaszczyznie xoy można używać wyrazu : $(x+\rho\cos\mu)+i(y+\rho\sin\mu)$, oznaczając przez ρ i μ składowe (rzędne) bieżące punktów, otaczających punkt π_r. Oznaczmy przez Z'_0, z'_0 trzeciorzędne składowe promieni prowadzących do punktów sąsiednich na pierwszo i drugorzędnej powierzchni pomocniczej, wtedy z równań :

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
Z'_0&=\sigma_r\rho^r\mathrm{dos}(\alpha_r+r\mu)+\sigma_{r+1}\rho^{r+1}\mathrm{dos}\,[\alpha_{r+1}+(r+1)\mu]+\ldots\\
z'_0&=\sigma_r\rho^r\mathrm{wst}\,(\alpha_r+r\mu)+\sigma_{r+1}\rho^{r+1}\mathrm{wst}\,[\alpha_{r+1}+(r+1)\mu]+\ldots
\end{aligned}
$$

otrzymamy dla dowolnego μ i bardzo małego ρ spółrzędne najbliższych punktów otaczających. Szukając liczebnych wartości Z'_0 i z'_0 wolno nam opuścić wyższe potęgi ilości ρ i napisać :

$$
(3)\qquad Z'_0=\sigma_r\rho^r\,\mathrm{dos}(\alpha_r+r\mu),\qquad z'_0=\sigma_r\rho^r\mathrm{wst}(\alpha_r+r\mu),
$$

z czego wynika ilość stosunku krytycznego

$$
Q_\mu=Z'_0:z'_0=\mathrm{doty}(\alpha_r+r\mu).
$$

Podczas gdy μ przechodzi wszystkie wartości od zera do 2π, wyraz $(\alpha_r+r\mu)$ przybiera kolejno wartości między α_r a $(\alpha_r+2r\pi)$. Ilekroć razy wyraz $(\alpha_r+r\mu)$, przekraczając granicę 1szej, 3ej, 5ej,... $(4r-3)$ej, $(4r-1)$ej ćwiartki, przechodzi z ćwiartki nieparzystej do parzystej, tylekroć razy wartość przynależna Q_μ przechodzi ze stanu dodatnego przez zero do stanu odjemnego.

(4) Powyższy stan przechodowy nacechujemy symbolem $\{+0-1\}$, zowiąc go *mutacyą dodatną*. Podobnie należy rozumieć symbol $\{-0+1\}$, przynależny *mutacyi odjemnej*. Oznaczmy liczbę dodatnych mutacyi znakiem dodatnym, a liczbę odjemnych mutacyi znakiem odjemnym, to pod ilością mutacyj w znaczeniu ogólnem będziemy rozumieli sumę algebraiczną tych obydwu liczb. Niechaj 8 oznacza ilość mutacyj dodatnych, a -12 ilość mutacyj odjemnych, to będzie :

$$
(5)\qquad \text{ilość mutacyj}=8+(-12)=-4.
$$

Na mocy określeń (4) możemy twierdzić, iż stosunek krytyczny Q_μ musi przebyć $2r$ mutacyj, podczas gdy μ stopniowo przybiera wszystkie wartości między zerem a 2π, postępując ciągle w kierunku dodatnym. Stopniowe przejście z jednej wartości na μ do następnej jest niczem innem, jak przejściem z jednego punktu na krzywej, otaczającej r-krotny punkt pierwiastkowy, do drugiego, możemy tedy podać następujące twierdzenie :

Jeżeli w celu oznaczenia wartości na $Q_\rho = Z'_0 : z'_0$ użyjemy kolejno wszystkich punktów na najbliższej krzywej, otaczającej r-krotny punkt pierwiastkowy, to otrzymamy :

(6) $$\text{ilość mutacyi} = 2r.$$

Mamy właściwie dla $x' = x + \rho \operatorname{dos} \mu,\quad y' = y + \rho \operatorname{wst} \mu,\quad \frac{d}{dx} y' = D'$:

(7) $$Q_\mu = Q_{x',y'} = \frac{f(x') \operatorname{dos} D' - \varphi(x') \operatorname{wst} D'}{f(x') \operatorname{wst} D' + \varphi(x') \operatorname{dos} D'}.$$

Możemy jednak bez naruszenia istoty rzeczy wypuścić we wzorze (7) wszystkie kreski, mówiąc, iż w celu oznaczenia wartości na $Q_{x,y}$ używamy tylko tych x i y, ktore wskazują punkta na krzywej

(8) otaczającej. Twierdzenie (6) wymaga koniecznie, by żaden z punktów na krzywej otaczającej nie był punktem pierwiastkowym.

(9) Podczas oznaczania każdorazowej wartości na $Q_{x,y}$ musimy krzywę otaczającą r-krotny punkt pierwiastkowy opisywać w tym kierunku, w którym dodatny odcinek na osi Ox obrócić się musi około osi oz, aby padł na dodatny odcinek osi oy. Gdybyśmy atoli krzywę otaczającą opisywali w kierunku wprost przeciwnym, tobyśmy otrzymali $2r$ mutacyj odjemnych, czyli $-2r$ mutacyj.

(10) Chociaż ρ jest bardzo małe, jednak krzywa otaczająca może posiadać taki kształt, iż podczas opisywania jej łuku w kierunku dodatnym musimy przynależne części kąta μ w odjemnym opisywać kierunku. Zważywszy, iż po przebieżeniu całego łuku krzywej kąt μ musi przybrać wartość 2π, że zatem po opisaniu powyższych części kąta μ w kierunku odjemnym, nastąpić musi dwukrotne opisanie tych samych części w kierunku dodatnym, — przyznamy, iż nawet dla takich części linii obwodowej twierdzenie nasze nie przestaje być prawdziwe. Możemy tedy wypowiedzieć twierdzenie ogólne :

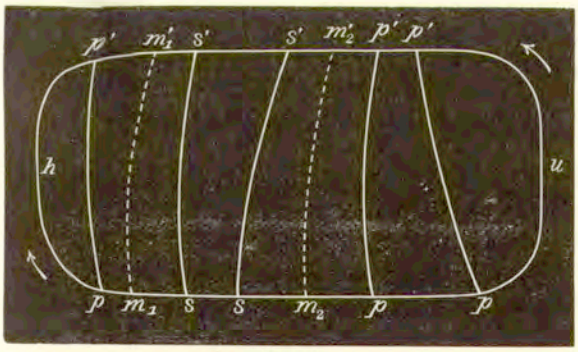

Fig. 1.

(11) *Jakakolwiek jest krzywa otaczająca* r-*krotny punkt pierwiastkowy, ilość mutacyj stosunku krytycznego* $Q_{x,y}$ *wynosi* $2r$.

(12) Pomyślmy sobie dowolną krzywę zamkniętą na płaszczyznie xoy, tej wartości, iż ani wewnątrz tejże, ani na jej obwodzie nie znajduje się punkt pierwiastkowy, to łatwo dowieść, iż podczas opisywania tej krzywej przypadnie ilości $Q_{x,y}$ ilość mutacyj $=$ zeru.

(13) Niechaj hu będzie taką krzywą. Przez wycinek płaszczyzny, który ona zamyka, przechodzą ślady pierwszorzędne pp' i drugorzędne ss'. Przedewszystkiem widzimy, iż wewnątrz krzywej ślady różnorodne nie mogą się przecinać, bo każdy taki punkt byłby w sprzeczności z założonym punktem pierwiastkowym.

Między każdemi dwoma śladami pp' i ss' możemy nakreślić pasmo $m_1m'_1$, $m_2m'_2$, na które nie pada żaden punkt pierwiastkowy. Na obwodzie tych pasm nie przypada tedy żadna mutacya ilości $Q_{x,y}$.

Obwód krzywej (1) można za pomocą takich pasm pomocniczych rozłożyć na kilka pasm ciągłych, mianowicie :

(14) $$m'_1p'hpm_1m'_1;\ m'_1m_1ssm_2m'_2;\ m'_2m_2ppup'p'm'_2;\ m'_2s's'm'_1.$$

Znak spółrzędnej z_0 nie zmienia się podczas opisywania pierwszego pasma zamkniętego, a Z_0 przybiera wartość zera tylko w punktach p; żadna tedy mutacya ilości $Q_{x,y}$ nie przypadnie.

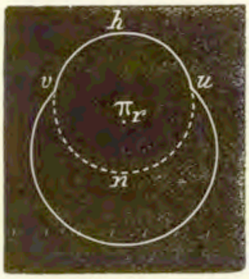

Fig. 2.

Drugie pasmo w połączeniu z czwartem jest zamknięte i nie ma żadnego punktu p, jest niem tedy ilość mutacyjna = zeru.

Wzdłuż trzeciego pasma ilość mutacyj będzie równa zeru dla tych samych przyczyn, co wzdłuż pierwszego.

(15) Powyższy sposób postępowania może być zastosowany do każdej innej krzywej, a zatem twierdzenie (12) jest prawdziwe.

Pasma $L_1 = uh\,vnu$, $L_2 = unvmu$, z których pierwsze otacza r-krotny punkt pierwiastkowy π_r, a drugie m żadnego punktu pierwiastkowego w sobie nie mieści, można złożyć w jedno pasmo $L = uhvnunvmu = uhvmu$. Pierwsze pasmo daje $2r$ mutacyj, a drugie żadnej. Pasmo złożone L, w w którém pasma częściowe vnu i unv co do ilości mutacyj się znoszą, daje oczywiście także $2r$ mutacyj.

Można tedy krzywę, otaczającą punkt pierwiastkowy dowolnie rozciągać, nie naruszając ilości mutacyj, byle tylko nowo-przybyła część płaszczyzny i obwodu nie zawierała żadnego punktu pierwiastkowego.

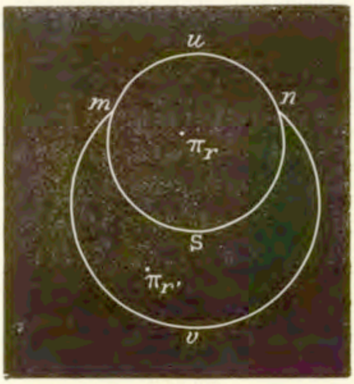

Fig. 3.

(16) Jeżeli π_r jest r-krotnym, a π , r'-krotnym punktem pierwiastkowym, to pasmu $L_1 = numsn$ przypadnie $2r$, a pasmu $L_2 = nsmvn$ przypadnie $2r'$ mutacyj. Wypuściwszy znoszące się nawzajem pasmo częściowe nsm i msn, można z L_1 i L_2 utworzyć pasmo $L = numvn$, któremu przypadnie $2(r+r')$ mutacyj.

To rozumowanie zastosowane być może do dowolnej liczby punktów pierwiastkowych, z czego wynika następujące twierdzenie:

(17) Jeżeli dowolna krzywa na obwodzie swoim nie mieści żadnych punktów pierwiastkowych, w zamkniętym zaś przez siebie wycinku płaszczyzny zawiera wielokrotne punkta pierwiastkowe $\pi_r, \pi_{r'}, \pi_{r''}, \ldots$, których wielokrotność zapowiadają znaczki $r, r', r'' \ldots$, to stosunkowi krytycznemu $Q_{x,y}$ przypadnie na obwodzie tej krzywej liczba mutacyj $= 2(r + r' + r'' + \ldots)$.

(18) Albo : dowolnej krzywej zamkniętej odpowiada dwa razy tyle mutacyj, ile punktów pierwiastkowych ona otacza.

To twierdzenie może być odwrócone, i odwrotność ta da się wysłowić jak następuje :

(19) Jeżeli stosunek krytyczny $Q_{x,y}$ na dowolnej krzywej doznaje pewnej liczby np. M mutacyj, to krzywa otacza $\frac{M}{2}$ punktów pierwiastkowych.

Niechaj $x + iy$ nie wyznacza punktu pierwiastkowego; niechaj będzie $x' = x + \rho \operatorname{dos} \mu$, $y' = y + \rho \operatorname{wst} \mu$ i niechaj dla dowolnego μ będzie $\rho = \infty$, to następstwo punktów przynależnych zmiennemu dwumianowi $x'+iy'$ wyznaczy koło opisane ze środka $x+iy$ promieniem nieskończenie wielkim; wewnątrz tego koła znajdują się z pewnością wszystkie punkta pierwiastkowe danego równania. Przy obliczaniu wartości na $Q_{x',y'}$, przy założeniu $\rho=\infty$, zachowamy w liczniku i mianowniku tylko wyrazy z $n^{tą}$ potęgą ilości ρ, skoro równanie jest n^{go} stopnia, i otrzymamy:

(20) $$Q_{x'y'}=\frac{\sigma_n\rho^n\mathrm{dos}(\alpha_n+n\mu)}{\sigma_n\rho^n\mathrm{wst}(\alpha_n+n\mu)}=\mathrm{doty}(\alpha_n+n\mu).$$

(21) Jeżeli μ przybiera wszystkie wartości między 0 a 2π, to $Q_{x'y'}$ da $2n$ mutacyj, z czego wynika, iż wewnątrz koła nieskończenie wielkiego, to jest na płaszczyznie xoy znajduje się n punktów pierwiastkowych. (Drugi dowód na twierdzenie podane w § 1.)

Niechaj μ_1 i μ_2 oznaczają takie dwie wartości na μ, które zadosyć czynią równaniu: $(\alpha_n+n\mu_2)-$ $-(\alpha_n+n\mu_1)=\pi$, to będzie:

(22) $$\mu_2-\mu_1=\frac{\pi}{n}.$$

(23) Co do wyrazów $\alpha_n+n\mu_1$ i $\alpha_n+n\mu_2$ widzimy, iż albo żaden z nich nie jest wielokrotnością ćwiartki, albo obydwa są równocześnie parzystemi, lub równocześnie nieparzystemi wielokrotnościami ćwiartki. Jeżeli tedy μ_1 wskazuje miejsce, gdzie ilości $Q_{x,y}$ przypada mutacya dodatna, to μ_2 musi także wskazywać miejsce dodatnej mutacyi. Z tego wynika, iż $2n$ możebnych miejsc, którym przynależą mutacye dodatne, są tak rozłożone na nieskończenie wielkim obwodzie koła, że każde dwa promienie, do tych miejsc wyprowadzone, tworzą stały kąt $\frac{\pi}{n}$.

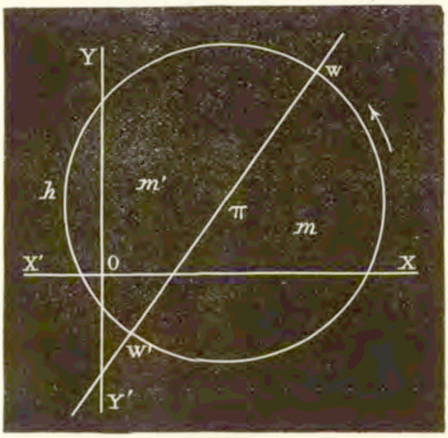

Fig. 4.

(24) Każda średnica tego koła, to jest każda nieograniczona prosta, poprowadzona przez dowolny punkt $x+iy$ dzieli obwód koła na dwie połowy, z których każdej przypada n mutacyj dodatnych. Średnica nie przechodzi jednak przez żaden punkt pierwiastkowy.

(25) Niechaj figura (4) przedstawia takie koło w pomniejszeniu; punkt π odpowiada dwumianowi $x+iy$, przez niego przechodzi średnica ww', która tworzy ν mutacyj odnośnie do stosunku krytycznego Q_{xy}.

Niechaj jedna połowa obwodu otacza m, a druga m' punktów pierwiastkowych. Zważywszy, iż każdej z tych połów przypada n mutacyj, będzie:

$$n+\nu=2m,\quad -\nu+n=2m',\quad \text{z czego wynika:}$$

(26) $$m=\frac{1}{2}(n+\nu),\quad m'=\frac{1}{2}(n-\nu),\quad \nu=m-m',$$

gdzie na oznaczenie liczby ν użytek się robi z całego przebiegu prostej ww'. Oznaczając przez symbol $(L_1...L_2)$ ilość punktów pierwiastkowych leżących między dwiema do siebie równoległemi L_1, L_2 otrzymamy w ten sposób

(27) $$(L_1...L_2)=\frac{1}{2}(\nu_2-\nu_1)$$

jeżeli Q_{xy} w przebiegu po L_1, ν_1 mutacyj, zaś w przebiegu po L_2, ν_2 mutacyj doznaje.

Celem uproszczenia dotychczasowego poszukiwania wyznaczmy jak najkrótszy promień ρ, którym z początku osi na płaszczyźnie xoy nakreślone koło otacza swoim obwodem wszystkie do danego równania należące punkta pierwiastkowe.

Kładąc w równaniu

(28) $$F(u) = u^n + B_{n-1}u^{n-1} + B_{n-2}u^{n-2} + \ldots + B_1 u + B_0 = 0$$

ogólnie $\qquad B_r = b_r e^{\varphi_r i}, \quad u = \rho e^{\mu i}$ otrzymamy równanie

$$\rho^n e^{n\mu i} + b_{n-1}\rho^{n-1} e^{[(n-1)\mu + \varphi_{n-1}]i} + b_{n-2}\rho^{u-2} e^{[(n-2)\mu+\varphi_{n-2}]i} + \ldots + b_1\rho e^{[\mu+\varphi_1]i} + b_0 e^{\varphi_0 i} = 0,$$

które się rozłoży na następujące dwa równania

$$\operatorname{dos} n\mu\rho^n + b_{n-1}\operatorname{dos}[(n-1)\mu + \varphi_{n-1}]\rho^{n-1} + \ldots + b_1\operatorname{dos}[\mu + \varphi_1]\rho + b_0\operatorname{dos}\varphi_0 = 0,$$

$$\operatorname{wst} n\mu\rho^n + b_{n-1}\operatorname{wst}[(n-1)\mu + \varphi_{n-1}]\rho^{n-1} + \ldots + b_1\operatorname{wst}(\mu + \varphi_1)\rho + b_0\operatorname{wst}\varphi_0 = 0.$$

Mnożąc pierwsze przez $\operatorname{dos} n\mu$, drugie zaś przez $\operatorname{wst} n\mu$ i dodając tak powstałe równania, otrzymamy równanie:

(29) $$\rho^n + b_{n-1}\operatorname{dos}[\varphi_{n-1} - \mu]\rho^{n-1} + b_{n-2}\operatorname{dos}(\varphi_{n-2} - 2\mu)\rho^{n-2} + \ldots + b_1\operatorname{dos}[\varphi_1 - (n-1)\mu]\rho + b_0\operatorname{dos}[\varphi_0 - n\mu] = 0,$$

któremu pierwiastek $u = \rho e^{\mu i}$ należący do (28) zadosyć uczynić musi.

Można także powiedzieć, że podstawienie $u = \rho e^{\mu i}$ nieczyniące zadosyć równaniu (29) nie może być uważane jako pierwiastek równania (28).

Kładąc

$$\sum_{r\,0}^{n-1} [\operatorname{dos}(\varphi_r - (n-r)\mu) b_r \rho^{n-1}] = \psi(\rho)$$

możemy równanie (29) i tak napisać

(30) $$\rho^u + \psi(\rho) = 0.$$

Jeżeli b jest z pomiędzy oczywiście dodatnych ilości $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ jedną z największych, to otrzymamy bezpośrednio dla $\rho > 1$.

$$\psi(\rho) \leqq b\rho^{n-1} + b\rho^{n-2} + \ldots + b\rho + b \quad \text{albo}$$

(31) $$\psi(\rho) \leqq b\frac{\rho^{n-1} - 1}{\rho - 1}.$$

Kładąc nadto $\qquad \rho \geqq b + 1, \qquad$ będzie:

$$\rho^n \geqq \frac{b\rho^n}{\rho} + \frac{1}{\rho}, \quad \rho^n > \frac{b\rho^n}{\rho}, \quad \rho^n > b\frac{\rho^u - 1}{\rho - 1}, \quad \text{i nareszcie } \rho^n > \psi(\rho).$$

Wyraz $\rho^n + \psi(\rho)$ będzie dla $\rho \geqq b + 1$ w każdym razie dodatnym, bez względu na szczegółowe wartości kąta μ, jako też bezwzględu na znak należący do wyrazu $\psi(\rho)$. Ztąd wnosimy, że

podstawienie $u = \rho e^{\mu i}$, gdzie $\rho \geqq b + 1$

nie może zadosyć uczynić ani równaniu (30), ani też równaniu (28), i powiadamy, że:

(32) Koło zakreślone z początku osi na płaszczyznie xoy promieniem $\rho = b+1$ otacza swym obwodem wszystkie punkta pierwiastkowe należące do równania (28). Takie koło nazywa się obrębem punktów pierwiastkowych, i da się bardzo łatwo wyznaczyć na podstawie spółczynników B należących do danego równania.

Celem jak najdogodniejszego użytkowania twierdzeń podanych w (12), (19), (26), (27), (32) obręb punktów pierwiastkowych rozdziela się za pomocą prostych równoległych do osi ox, oy na prostokąty tak, aby żadna z tych prostych nie zawierała w sobie punktów pierwiastkowych. Na granicy koła obrębowego znajdować się będą prostokąty niezupełne, gdyż są częściowo łukiem obrębowego koła ograniczone. Każdy ze wspomnianych prostokątów posłuży swoim obwodem do oznaczenia mutacyi stosunku Q_{yx} a tem samem i do oznaczenia ilości punktów pierwiastkowych wewnątrz tego obwodu zawartych.

Jeżeli do wyżwspomnianego użytku wzięty prostokąt otoczony jest prostemi $x=a$, $x=a'$, $y=b$, $y=b'$, i jeżeli $a'>a$, $b'>b$ to chodzi o to, aby wyznaczyć

liczbę	mutacyi	wyrazu	Q_{ay}	w granicach	od	$y=b'$	aż	do	$y=b$;
»	»	»	Q_{xb}	»	»	$x=a'$	»	»	$x=a$;
»	»	»	Q_{ay}	»	»	$y=b$	»	»	$y=b'$;
»	»	»	$Q_{xb'}$	»	»	$x=a$	»	»	$x=a'$.

Stosunki Q_{ay}, Q_{xb} przedstawić można w formach

(33)
$$Q_{ay} = \frac{A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots}{A'_0 + A'_1 y + A'_2 y^2 + \ldots},$$
$$Q_{xb} = \frac{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots}{B'_0 + B'_1 x + B'_2 x^2 + \ldots},$$

obliczywszy spółczynniki A i A′ na podstawie stałej a, zaś spółczynniki B, B′ na podstawie stałej b.

Do obliczania mutacyi możnaby zamiast wyrazu Q_{xy} użyć także wyrazu $-Q_{xy}^{-1}$. Mamy bowiem

(34)
$$-Q_{xy}^{-1} = -\operatorname{tg}(\alpha_r + r\mu)$$

wyrażenie doznające za sprawą rosnącego μ w granicach od $\mu=0$ aż do $\mu=2\pi$ w każdym razie, jednej dodatnej mutacyj, gdzie łuk $(\alpha_r + r\mu)$ z dziedziny parzystej ćwiartki wkracza w dziedzinę ćwiartki nieparzystej. To wyrażenie dozna tedy w zakreśie od $\mu=0$ do $\mu=2\pi$, $2r$ mutacyj.

W drugiej części tej pracy podamy sposoby, jak się za pomocą rachunku lub konstrukcyi oznacza liczby mutacyj przynależne wyrazom Q_{ay}, Q_{xb}. Tu podamy jeszcze jedną teoryę, która drogą nadzwyczaj prostą prowadzi do rezultatów wykazanych na odmiennej drodze przez matematyka Sturma, a ze względu na wyznaczenie liczby mutacyj szczególnie tą okolicznością się zaleca, że z pomocą tej teoryi dojdziemy do liczby mutacyj, bez badania tych miejsc, na których wyrazy Q_{ay}, Q_{xb} znikają.

Pomyślmy sobie szereg funkcyi $Z_0, z_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots \zeta_{r-1}, \zeta_r$ dwa razy jeden pod drugim tak napisany, że dolny szereg okaże się o jeden wyraz ku prawej wysunięty, to otrzymamy:

(34)′
$$\begin{array}{l} Z_0,\ z_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3, \ldots \zeta_{r-1},\ \zeta_r, \\ \quad Z_0,\ z_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2, \ldots \zeta_{r-2},\ \zeta_{r-1},\ \zeta. \end{array}$$

Uważając te funkcye zależne od zmiennej x, otrzymamy podstawiając za x pewną wartość, odpowiednie wartości na wszystkie te funkcye, z których każda pojawi się ze znakiem dodatnym lub odjemnym. Dla takiej obranej wartości na x okażą się wartości każdej pojedynczej pary pod sobą stojących funkcyj o znakach równych lub o znakach przeciwnych. W pierwszym razie znajduje się para pod sobą stojących funkcyi w stanie *znaków następstwa* (Zeichenfolge), w drugim zaś w stanie *znaków zmiany* (Zeichenwechsel). Otrzymawszy zatem dla pewnej wartości na x dla szeregu $r+2$ funkcyj dajmy nato, p *znaków zmian* i q *znaków następstwa*, okazać się musi $p+q=r+1$. W razie znikania niektórych funkcyj wypadałoby tym znikającym funkcyjom przydać : znaki albo przynależne im tuż przed zniknięciem, albo znaki przynależne tym funkcyjom po zniknięciu.

Za przewodnictwem Sturma otrzymujemy funkcye $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_r$ należące do danej pierwszej pary funkcyj Z_0, z_0 z następujących związków :

(35)
$$
\begin{aligned}
Z_0 &= q_0 z_0 - \zeta_1,\\
z_0 &= q_1 \zeta_1 - \zeta_2,\\
\xi_1 &= q_2 \zeta_2 - \zeta_3,\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
\zeta_{r-2} &= q_{r-1}\zeta_{r-1} - \zeta_r,
\end{aligned}
$$

z czego wynika, że z jakichkolwiek dwóch po sobie idących funkcyj szeregu (34) otrzymamy następującą trzecią jako resztę wziętą ze znakiem przeciwnym — która się okaże, dzieląc pierwszą funkcyję przez drugą celem otrzymania częściowych ilorazów uporządkowanych według zniżających się potęg zmiennej x, aż włącznie do ilorazu częściowego stałego.

(**36**) Uważając funkcyje Z_0 i z_0 jako nie posiadające funkcyjnej wspólnej miary, ostatnia funkcyja ζ_r będzie już ilością stałą. Działanie postępowego tworzenia funkcyi podane w (35) możnaby w tym razie zamknąć taką funkcyą ζ_r, która w całym przypisanym zakresie wartości na x nie znikając, posiada wartości o znaku stałym.

(**37**) Jeżeli nie wiemy z góry, czy Z_0 i z_0 posiadają funkcyjną wspólną miarę czy nie — to właśnie działaniem (35) przekonać się możemy o rzeczywistym stanie. Doszedłszy, dajmy nato, do takiej funkcyi ζ_r, dla której idąc dalej następna funkcya ζ_{r+1} okaże się identycznie zerem — wnosimy że ζ_r mieści się jako miara w ζ_{r-1} a zatem i w funkcyjach $\zeta_{r-2}, \zeta_{r-3}, \ldots \zeta_1, z_0, Z_0$. Kładąc w takim razie $\zeta_r=0$, i znalazłszy na x wartości $w_1, w_2, .., w_s$, dla których ζ_r rzeczywiście znika — wnosimy dalej, że i funkcyje Z_0 i z_0 dla tych wartości na x równocześnie znikają. Jeżeli przytem funkcyje Z_0 i z_0 przedstawione są na podstawie $y=b$, to twierdzimy nareszcie, że wyrazy w_1+bi, $w_2+bi, \ldots w_s+bi$ są już pierwiastkami równania (28).

(**38**) Te wyrazy nie przestają być pierwiastkami równania (28) i w tym razie jeżeli niektóre albo wszystkie ilości oznaczone przez $w_1, w_2, \ldots w_s$ okażą się w postaci dwumianów.

Wyznaczenie wartości $w_1, w_2 \ldots w_s$ polega na rozwiązaniu równania $\zeta_r=0$ ze względu na stopień oczywiście niższego jak równanie (28) a zatem na rozwiązaniu równania łatwiejszego jak (28).

Podzieliwszy wielomian $F(u)$ w (30) przez iloczyn

$$(u-w_1-bi),\ (u-w_2-bi) \ldots (u-w_s-bi),$$

otrzymamy, dajmy na to, funkcyę $\psi(u)$ bez żadnej reszty, a z równania

(39) $$\psi(u)=0,$$

które jest oczywiście także stopnia niższego jak równanie (28) dojdziemy do reszty pierwiastków należących do tego równania.

Wracając teraz do badania stosunku $Qxb=\frac{Z_0}{z_0}$ w tym razie, gdzie prosta $y=b$ w zakresie żądanych wartości na x nie zawiera w sobie żadnego punktu pierwiastkowego, widzimy, że dla żadnej rzetelnej wartości na x w danym zakresie funkcye Z_0 i z_0 równocześnie zniknąć nie mogą, że zatem działanie w (35) zamknie się albo stałym wyrazem ζ_r albo taką funkcyjną wspólną miarą między Z_0 i z_0, która w zakresie rzetelnych wartości na x nie znika, a wskutek tego w przeciągu całego zakresu rzetelnych wartości na x stały znak zatrzymuje. Wnosimy ztąd, że w tym razie żadna para pod sobą stojących funkcyj w (34) nie może równocześnie w tym zakresie zniknąć, gdyż takie zdarzenie prowadziłoby na podstawie związków (35) wbrew założenia do równoczesnego zniknięcia funkcyi Z_0 i z_0.

(40) Jeżeli np. dla $x=g$ okaże się $Z_0 \lessgtr 0$ i dajmy na to $\zeta_s=0$, to związki (35) wskazują nam, że w tym razie ζ_{s-1} i ζ_{s+1} posiadają znaki przeciwne; a ponieważ dla $x=g+dx$, i $x=g-dx$, ζ_{s-1} i ζ_{s+1} pozostają różnie oznaczone a ζ_s w tych dwu miejscach posiadać musi różne znaki, wnosimy ztąd, że w tych obydwu miejscach pary funkcyjne ζ_s ζ_{s-1}, ζ_{s+1} ζ_s przedstawić muszą te dwie *zmiany znaków*. Przejście tedy przez miejsce $x=g$ nie pociąga za sobą w tym razie żadnej zmiany ani co do liczby *zmian znaków* ani też co do liczby *następstwa znaków* jawiących się w (34). Te liczby pozostaną nie zmienne i wtenczas, gdy się przechodzi przez miejsce $x=h$, dla której to wartości żadna funkcyja w (34) nie znika.

(41) Jeżeli np. dla $x=g$ okaże się $Z_0=0$, w takim razie $z_0 \lessgtr 0$ a z funkcyi ζ_1, $\zeta_2 \ldots \zeta_{r-1}$ nie może żadna pojedynczo znikać. W tym razie Z_0 przyjmie, w miejscach przed i po zniknięciu, znaki przeciwne, podczas gdy z_0 zatrzyma znak stały. Wskutek przejścia przez takie miejsce para funkcyjna Z_0, z_0 przechodzi ze stanu nacechowanego *zmianą znaków* do stanu nacechowanego *następstwem znaków*, lub odwrotnie, podczas gdy liczby *zmian znaków* i *następstw znaków* ze względu na dalsze pary funkcyjne w (34) pozostają niewzruszone. Jeżeli w tym razie Q_{xb} przyjmuje dla $x=g$ mutacyę dodatną, to para, (Z_0, z_0) znajdowała się przed zniknięciem Z_0 w stanie *znaków następstwa*; po zniknięciu Z_0 wstanie *zmiany znaków*. Wrazie tedy mutacyi dodatnej w Q_{xb} przybywa dla szeregu (34) po przejściu przez miejsce $x=g$ *jedna zmiana znaków*. Jeżeli zaś Q_{xb} przyjmuje dla $x=g$ mutacyę odjemną, to para funkcyjna (Z_0, z_0) znajdowała się przed zniknięciem Z_0 w stanie *zmiany znaków*, a po
(42) zniknięciu Z_0 w stanie *następstwa znaków*. Wrazie więc odjemnej mutacyi w Q_{xb} ubywa w szeregu (34) jedna *zmiana znaków*. Tak samo można powiedzieć, że przybywanie lub ubywanie liczby zmian znaków w (34) wskazuje odpowiednią iliczbę mutacyj dodatnych lub odjemnych ze względu na stosunek krytyczny Q_{xb}.

(43) Z przytoczonych tu twierdzeń widać, iż szereg funkcyjny Sturma posłużyć może do oznaczenia ilości mutacyj które się dla Q_{xb} w danym zakresie wartości rzetelnych na x pojawić muszą.

Aby tedy dla Qxb w zakresie ($x=a_1$ do $x=a_2$) oznaczyć liczbę mutacyj, obierzemy następną drogę :

(44) Zbudujemy podług (35) szereg funkcyj Z_0, z_0, ζ_1, $\zeta_2 \ldots \zeta_r$; oznaczymy ich wartości dla $x=a_2$ i wynikającą ztąd liczbę μ_2 *zmian znaków;* następnie oznaczymy ich wartości dla $x=a_1$, i wynikającą

ztąd liczbę μ_1 *zmian znaków* i otrzymamy w końcu liczbę mutacyj należących do stosunku Q_{xb} w zakresie $x=a_1$ do $x=a_2$ jak nastepuje :

(45) $$\text{liczba mutacyj dla } Q_{xb}=\mu_2-\mu_1.$$

(46) W przypadku $a_1=-\infty$, $a_2=\infty$ znajdziemy liczbę mutacyj jeszcze prościej, bo w każdej poszczególnej funkcyi (34) tylko ten wyraz, którego x do najwyższej potęgi jest wyniesione, uwzględniać będziemy potrzebowali, aby ocenić znak tej funkcyi.

Wypada nam jeszcze wspomnić o szczególnym przypadku, w którym mianownik stosunku Q_x jest pochodną licznika o spółczynnikach rzetelnych. W tym razie mamy :

(47) $$Q_x=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1}=\frac{f(x)}{f_1(x)}.$$

Jeżeli $x=a$, czyni zadość równaniu $f(x)=0$ i jako jedyny pierwiastek tego równania przedstawia się, obierając ρ bardzo małe otrzymamy :

(48) $$Q_{a+\rho}=\frac{f(a+\rho)}{f_1(a+\rho)}=\frac{f(a)+\rho f_1(a)}{f_1(a)+\rho f_2(a)}=\frac{\rho f_1(a)}{f_1(a)}=\rho,$$

z czego się okazuje, że Q_x, przed zniknięciem odpowiadając odjemnemu ρ, znak odjemny, zaś po zniknięciu odpowiadając dodatnemu ρ, znak dodatny, posiada. W tym razie stosunek Q_x posiadać będzie, w danym zakresie wartości rzetelnych na x, same tylko odjemne mutacye w liczbie naprzykład $-\mu$. Celem oznaczenia liczby μ przeróbmy szereg funkcyjny podług (35)

(49) $$f(x),\ f_1(x),\ \zeta_1,\ \zeta_2\ldots\zeta_r,$$

obliczmy wartości tych funkcyj na podstawie granic zakresu od $x=a_1$, do $x=a_2$, i otrzymawszy dajmy nato $-\mu_1$, $-\mu_2$ jako liczby każdorazowych następstw znaków, będzie :

(50) $$\mu=\mu_2-\mu_1,$$

gdzie μ oznacza liczbę pierwiastków rzetelnych, zawartych w zakresie od $x=a_1$ do $x=a_2$.

(51) Z (48) czytamy, że przed każdorazowym zniknięciem funkcyi $f(x)$, funkcyjna para $f(x)$, $f_1(x)$ objawia *zmianę znaków*, zaś po zniknięciu, *następstwo znaków*.

Jeżeli więc $f(x)$ znika dla $x=a$, a następnie dla $x=b$, to możemy twierdzić, że w zakresie $x=a$ do $x=b$ funkcyja $f_1(x)$ przynajmniej jeden pierwiastek albo nieparzystą liczbę pierwiastków posiadać musi.

Dla bliższego wyjaśnienia tego rodzaju przypadków niechaj

(52) $$f(u)=0,$$

będzie równaniem n^{go} stopnia o samych pierwszorzędnych spółczynnikach.

Należące doń Q_{xy} znajdziemy z równania :

(53) $$y\cdot Q_{xy}=\frac{f(x)-\frac{y^2}{2!}f_2(x)+\frac{y^4}{4!}f_4(x)-\ldots}{f_1(x)-\frac{y^2}{3!}f_3(x)+\frac{y^4}{5!}f_5(x)-\ldots}.$$

Uwaga. — Dla nieskończenie małego i stałego y wypadłoby ogólnie Q_{xy} nieskończenie wielkie lecz zawsze proporcyonalne do stosunku krytycznego $[f(x) : f^1(x)]$. Ten stosunek okaże się w późniejszych poszukiwaniach wielce przydatnym do rozbierania równań o spółczynnikach rzetelnych ze względu na naturę pierwiastków. Z tego względu nazywać go będziemy także stosunkiem krytycznym i oznaczymy go przez $Q^x{}_0$, gdzie przyczepiony znaczek ma nam przypominać, że ten stosunek należy do wielomianu $f(x)$. W razie zaś, gdziey idzie o badanie równania $f_r(x)=0$, oznaczymy go przez $Q_r{}^x$.

(54) Niechaj prosta L'L leży równolegle do osi $x'x$ w bardzo małym odstępie $y=00'=\rho$, i przypuśćmy, iż na niej nie znajduje się żaden punkt pierwiastkowy równania (52). Od wielokrotnych punktów pierwiastkowych na $x'x$ wychodzą dwa układy śladów pomocniczych, z których pierwszy należy do pierwszorzędnej, drugi do drugorzędnej powierzchni pomocniczej. W pobliżu wielokrotnego punktu pierwiastkowego, każde dwa ślady tego samego układu zamykają kąt stały między

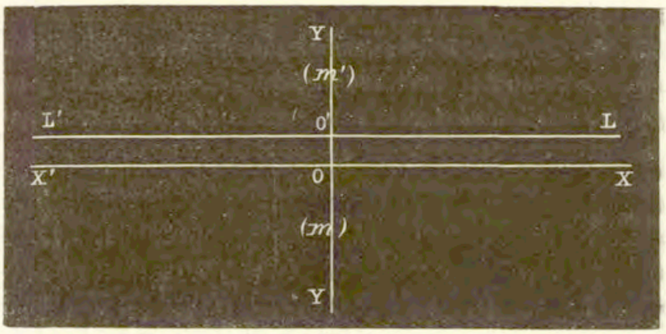

Fig. 5.

sobą, a każdy ślad jednego układu dzieli na połowę kąt zawarty między dwoma śladami sąsiedniemi drugiego układu. Z tego wynika, iż na L'L w takich miejscach, nie mogą licznik i mianownik w (53) równocześnie zniknąć, ponieważ punkta spotkania się prostej L'L ze śladami należą naprzemian do pierwszo i drugorzędnego układu, w nich przeto na przemian licznik i mianownik stają się równe zeru.

(55) Jeżeli wiemy, iż w pasku między L'L i $x'x$ nie znajduje się żaden punkt pierwiastkowy równania (52), to możemy $\rho=00'$ nadać wartość skończoną, niekoniecznie nieskończenie małą.

Obrawszy raz ρ, wstawmy jego wartość w (53) zamiast y i uporządkujmy licznik i mianownik podług potęg x, to otrzymamy :

(56) $$\rho Q_{x,\rho}=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots}{A_0'+A_1'x+A_2'x^2+\ldots}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Założmy, iż szeregowi funkcyj $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_r$ odpowiada dla $x=a_1$, μ_1 zmian, a dla $x=a_2$, μ_2 zmian znaków.

Jeśli w (54) ponad L'L znajduje się m', a pod L'L, m punktów pierwiastkowych równania (52), to znajdziemy przedewszystkiem :

(57) $$m=m'+p,$$

oznaczając przez p liczbę punktów pierwiastkowych pierwszorzędnych w odstępie (a_1-a_2), t.j. liczbę pierwszorzędnych pierwiastków równania (52). Z (45) mamy :

(58) $$m'-m=\mu_2-\mu_1, \quad \text{więc} \quad p=\mu_2-\mu_1.$$

Ze względu na małe ρ możnaby ułamek $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ przedstawić w jednej z postaci następnych :

$$(59)\qquad \frac{f(x)}{f_1(x)};\quad \frac{f(x)-\frac{\rho^2}{2}f_2(x)}{f_1(x)};\quad \frac{f(x)-\frac{\rho^2}{2}f_2(x)+\frac{\rho^4}{24}f_4(x)-\ldots}{f_1(x)-\frac{\rho^2}{6}f_3(x)};$$

jeżeli wiemy, iż w danym odstępie pierwszorzędne pierwiastki równań (52) mogą być co najwięcej jedno, dwu, trzy, —... krotne.

(60) Pierwszy z tych przypadków, rozważany przez Sturma jest tylko szczególnym przypadkiem postępowania pod I.(56) wskazanego. Za pomocą metody Sturma otrzymamy dla wielokrotnych pierwiastków szereg funkcyj, a w końcu resztę zależną od x która jest największą spólną miarą między $f(x)$ a $f_1(x)$. Jeżeli ta reszta nie znika wewnątrz danego odstępu, to zachowuje znak swój stale, więc w każdym takim odstępie można za pomocą szeregu funkcyj oznaczyć liczbę mutacyj, a zatem i liczbę pierwiastków pierwszorzędnych w tym odstępie. Szereg funkcyj można zamknąć jakąkolwiek inną resztą, byleby tylko wiedziano, iż ta reszta znaku swego nie zmienia w danym odstępie.

(61) Jeżeli p oznaczamy dla takiego odstępu ($x=a_1$ do $x=a_2$), zewnątrz którego $f(x)$ znaku swego nie zmienia, to p oznacza temsamem liczbę pierwiastków pierwszorzędnych równania (52) w odstępie $x_1=-\infty$, $x_2=\infty$. Jak można oznaczyć odstęp tego rodzaju, ile możności mały, o tem będzie mowa przy zakończeniu bieżącego paragrafu.

Aby oznaczyć miejsca, w których punkta pierwiastkowe równania (52) na płaszczyznie xoy się znajdują, możnaby płaszczyznę xoy, za pomocą układu równoległych L_1, L_2, L_3,.., podzielić na paski i badać podług (27), czy i ile punktów pierwiastkowych w każdym pasku się znajduje. Dla takiej prostej, której równaniem jest $x=a$, otrzymalibyśmy, kładąc $y^2=v$:

$$(62)\qquad y\cdot Q_{a,y}=\frac{f(a)-f_2(a)\frac{v}{2}+f_4(x)\frac{v^2}{24}-\ldots}{f_1(a)-f_3(a)\frac{v^2}{6}+f_5(a)\frac{v^4}{120}-\ldots}.$$

Wyrażenie powyższe jest ze względu na v co najwyżej $\frac{1}{2}n^{go}$ stopnia, z czego wynika, iż należy je badać tylko w odstępie od $v=0$ do $v=\infty$. Jeżeli μ oznacza liczbę mutacyj należącą do tego wyrażenia w powyższym odstępie, to wyrażenie $Q_{a,y}$ daje w odstępie od $y=-\infty$ do $y=+\infty$ 2μ mutacyj; dalej mamy :

$$m'=\frac{n}{2}+\mu,\quad m=\frac{n}{2}-\mu,$$

to znaczy : że m' punktów pierwiastkowych znajduje się po lewej, zaś m punktów pierwiastkowych po prawej stronie prostej $x=a$.

(63) Poszukiwania dotychczasowe wskazują, jak w każdym razie należy od większych do coraz mniejszych części płaszczyzny przechodzić, aby oddzielić od siebie miejsca punktów pierwiastkowych i przysposobić się do obliczenia pojedynczych pierwiastków. Rachunek może w danym razie być rozdzielony pomiędzy kilku rachmistrzów, którzy rachując równocześnie, na linijach granicznych wzajemnie się wspierają, aby tem rychlej oznaczyć w przybliżeniu miejsca punktów pierwiastkowych. Ta okoliczność może częstokroć znaczne przynieść korzyści.

Wyłożymy teraz sposób postępowania, by wynaleźć najkrótszy możliwy odstęp, wewnątrz którego znajdują się wszystkie pierwszorzędne pierwiastki równania (52). Niechaj będzie:

(64) $$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_{n-r} x^{n-r} + \ldots + A_{n-s} x^{n-s} + \ldots + A_0 = 0,$$

ztąd wynika:

(65) $$f_w(x) : s! = \binom{n}{w} A_n x^{n-w} + \binom{n-1}{w} A_{n-1} x^{n-w-1} + \ldots + \binom{n-r}{w} A_{n-r} x^{n-w-r} + \ldots + \\ \ldots + \binom{n-s}{w} A_{n-s} x^{n-w-s} + \ldots + \binom{w}{w} A_w.$$

Niechaj, postępując w (64) od lewej ku prawej, A_{n-r} będzie pierwszym odjemnym spółczynnikiem, a A_{n-s} liczebnie największym odjemnym spółczynnikiem, to w (65) $\binom{n-r}{w} A_{n-r}$ jest pierwszym odjemnym spółczynnikiem, a wyrażenie $\binom{n-r}{w} A_{n-s}$ jest liczebnie większe od wszystkich odjemnych spółczynników wielomianu (65), albowiem czynnik $\binom{n-r}{w}$ jest największy z pomiędzy spółczynników szeregu Newtona, które są pomnożone przez odjemne A, a A_{n-s} jest największe z pomiędzy odjemnych A.

Dla $x > 1$ i $A_n > 0$ będzie oczywiście:

(66) $$A_n x^n + A_{n-s} \{x^{n-r} + x^{n-r-1} + \ldots + x + 1\} < f(x),$$

zkąd wynika, iż $f(x)$ musi być dodatna, skoro wyrażenie po lewej stronie w (66) okaże się dodatne. To zaś nastąpi, skoro dla

(67) $$A_{n-s} : A_n = -\xi,$$

będzie

$$x^n > \xi \frac{x^{n-r+1} - 1}{x - 1},$$

a tem bardziej, skoro

$$x^n(x-1) > \xi x^{n-r+1},$$

czyli

$$x^{r-1}(x-1) > \xi,$$

a tem bardziej, skoro

$$(x-1)^r > \xi,$$

czyli skoro obierzemy

(68) $$x > (\sqrt[r]{\xi} + 1) = L.$$

Dla każdego x, dopełniającego warunku (68), $f(x)$, przybiera z pewnością wartość dodatną różną od zera, z czego wynika, iż żaden z dodatnych pierwiastków równania (64) nie może przewyższać L.

Wstawmy w (65):

$$\binom{n-r}{w} A_{n-s} : \binom{n}{w} A_n = -\left[\binom{n-r}{w} : \binom{n}{w}\right] \xi = -\xi',$$

to otrzymamy:

$$x > (\sqrt[r]{\xi'} + 1),$$

(69) a każda wartość na x, czyniąca zadość tej względności, przewyższa każdy pierwiastek dodatny

równania $f_w(x)=0$. Ponieważ jednak $\xi > \xi'$, to widzimy, iż żaden z pierwiastków dodatnych któregokolwiek z równań

$$f(x)=f_1(x)=f_2(x)=\ldots=f_{n-2}(x)=f_{n-1}(x)=0,$$

nie może przewyższać L.

Kładąc $x=-v$, otrzymamy z (64):

$$(70)\qquad \pm f(-v)=A_n v^n - A_{n-1}v^{n-1}+A_{n-2}v^{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}A_1 v+(-1)^n A_0=0.$$

Dla tego równania można także oznaczyć liczbę L', której, żaden z jego dodatnych pierwiastków, a zatem żaden z odjemnych pierwiastków równania (64), przewyższać nie może. Mamy tedy ostatecznie

(71) odstęp od $-L'$ do L,

wewnątrz którego wszystkie dodatne i odjemne piezwiastki pierwszorzędne równania (64) i jego pochodnych z pewnością znajdować się będą.

W następnym paragrafie wskażemy sposób postępowania, aby obliczyć z wszelką żądaną dokładnością, pierwiastek równania, którego cyfry początkowe są już znane. Aby jednak rachunek o ile możności ujednostajnić, podamy tu jeszcze kilka przekształceń, zapomocą których z danego równania możemy przejść do innego z tą własnością, iżby pierwiastek jego $x+iy$ tak ze względu na x, jak ze względu na y wypadł dodatny, nie zmieniając swej wartości liczebnej.

Obok równania

$$(72)\qquad F(u)=f(u)+i\varphi(u)=0,$$

można bezpośrednio ustawić trzy następujące :

$$(73)\qquad f(+u)-i\varphi(+u)=0,$$

$$(74)\qquad f(-u)+i\varphi(-u)=0,$$

$$(75)\qquad f(-u)-i\varphi(-u)=0.$$

Jeśli $u=+x+iy$ jest pierwiastkiem równania (72), to
$u=+x-iy$ » » » (73),
$u=-x-iy$ » » » (74),
$u=-x+iy$ » » » (75).

Jakiekolwiek byłyby znaki x i y, możemy zawsze z pomiędzy kształtów pod l. (76) oznaczyć taki, którego wyraz pierwszo i drugorzędny jest dodatny. Z tego kształtu pierwiastku wyniknie potem żądany kształt równania.

§ 4.

O PRAWIDŁOWEM ŚCIEŚNIANIU GRANIC

Niechaj x, y, Z_0, z_0 przybiorą wartości następne :

$$(1)\qquad x'=x+\Delta x,\quad y'=y+\Delta y,\quad Z'_0=Z_0+\Delta Z_0,\quad z'_0=z_0+\Delta z_0,$$

przyczem przyrostki Δx, Δy są dostatecznie małe. Na mocy wzoru Taylora otrzymamy, opuszczając wyrazy wyższego stopnia jak drugiego :

$$(2)\qquad \begin{aligned} Z'_0&=Z_0+Z_1\Delta x-z_1\Delta y+[Z_2(\Delta x^2-\Delta y^2)-2z_2\Delta x\Delta y],\\ z'_0&=z_0+z_1\Delta x+Z_1\Delta y+[z_2(\Delta x^2-\Delta y^2)+2Z_2\Delta x\Delta y]; \end{aligned}$$

albo :

$$(3)\qquad \begin{aligned} Z'_0 - Z_0 &= Z_1(x'-x) - z_1(y'-y) + [Z_2([x'-x]^2 - [y'-y]^2) - 2z_2(x'-x)(y'-y)], \\ z'-z_0 &= z_1(x'-x) + Z_1(y'-y) + [z_2([x'-x]^2 - [y'-y]^2) + 2Z_2(x'-x)(y'-y)]. \end{aligned}$$

Punktowi π, obranemu na płaszczyznie xoy, odpowiada pewien dwumian $x+iy$; Z_0 i z_0 są również oznaczone i wyznaczają na powierzchniach pomocniczych punkta sprzężone P, p, odpowiadające punktowi π. Jeżeli w (3) uważać będziemy x', y', Z_0', z_0' jako współrzędne bieżące, to równania (3) wyrażają powierzchnie drugiego stopnia, które się z powierzchniami pomocniczemi $z=Z_0$, $z=z_0$ w punktach P, p w drugim stopniu stykają. Te powierzchnie możnaby zwać *sprzężonemi powierzchniami stycznemi*. Ich przekroje płaskie, równoległe do płaszczyzny xoy są hyperbolami, a środki tych hyperbol znajdują się na prostopadłej w punkcie

$$(4)\qquad \xi + i\eta = x + iy - \frac{1}{2}\frac{Z_1+iz_1}{Z_2+iz_2}.$$

Dla $Z_1=z_1=0$ otrzymalibyśmy $\xi+i\eta=x+iy$, zkąd wynika, owa prostopadła przechodząca przez punkt π. Przesuńmy przez ślad tej prostopadłej na płaszczyznie xoy cztery proste w które wpadają kierunki asymptot do powyższych dwóch układów hyperbol, to otrzymamy pęk ośmiu promieni, którego wierzchołkiem jest punkt π, a każde dwa promienie sąsiednie zamykać będą kąt 45°. Każdy promień jednego układu dzieli na dwie równe części kąt zawarty między dwoma promieniami sąsiedniemi drugiego układu. (Obacz (25) w § 2).

Opuśćmy w (3) wyrazy nieskończenie małe drugiego stopnia, to będzie :

$$(5)\qquad \begin{aligned} Z'_0 - Z_0 &= Z_1(x'-x) - z(y'-y) \;.\;.\;.\;.\; E_{\pi t}, \\ z_0' - z_0 &= z_1(x'-x) + Z_1(y'-y) \;.\;.\;.\;.\; e_{\pi t}, \end{aligned}$$

Wzory (5) są równaniami dwu płaszczyzn $E_{\pi t}$ i $e_{\pi t}$, z których pierwsza dotyka się pierwszorzędnej powierzchni pomocniczej w punkcie P, druga zaś drugorzędnej powierzchni pomocniczej w punkcie p.

Oznaczmy przez λ, μ, ν kąty wskazujące kierunek pierwszorzędnej płaszczyzny stycznej, przez λ', μ', ν' kąty wskazujące kierunek drugorzędnej płaszczyzny stycznej, i połóżmy $\sqrt{1+\sigma_1^2}=v$, to będzie:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{dos}\lambda = \frac{Z_1}{v}; \quad \mathrm{dos}\mu = -\frac{z_1}{v}; \quad \mathrm{dos}\nu = -\frac{1}{v}, \\ &\mathrm{dos}\lambda' = \frac{z_1}{v}; \quad \mathrm{dos}\mu' = +\frac{Z_1}{v}; \quad \mathrm{dos}\nu' = -\frac{1}{v}, \quad \text{a} \end{aligned}$$

$$(7)\qquad \mathrm{dos}[E_{\pi t},\ e_{\pi t}] = \frac{1}{v^2}.$$

Wzór pod (7) wyznacza kąt zawarty między obiema płaszczyznami stycznemi.

Jeśli π znajduje się w skończonej odległości od punktu zera, to v zachowuje wartość skończoną, a ani $\mathrm{dos}\nu$, ani $\mathrm{dos}\,\nu'$, nie przybierają wartości zera. Z tego wnosimy, iż w skończonej odległości od punktu zera żadna z powierzchni pomocniczych nie posiada płaszczyzny stycznej prostopadłej do płaszczyzny xoy; elementa powierzchni nie mogą być przeto równoległe do osi oz. Z powyższych wzorów wynika także, że płaszczyzny $E_{\pi t}$ i $e_{\pi t}$ nie mogą być do siebie prostopadłe, tak długo jak punkt π znajduje się w skończonej odległości od punktu zera.

Aby otrzymać równania prostych poziomych $L_{\pi t}$ i $l_{\pi t}$, stycznych w P i p, załóżmy we wzorze (3) $Z' = Z_0$, $z'_0 = z_0$, to wyniknie :

(8)
$$Z_1(x'-x) - z_1(y'-y) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; L_{\pi t},$$
$$z_1(x'-x) + Z_1(y'-y) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; l_{\pi t},$$

zkąd widzimy, iż $L_{\pi t}$ jest prostopadłą do $l_{\pi t}$. Jeżeli przytem $\sigma_0 = Z_0 = z_0 = 0$, to dwumian $x + iy$ będzie pierwiastkiem równania $F(u) = 0$, proste $L_{\pi t}$ i $l_{\pi t}$ przetną się w punkcie π, czyli : elementa śladów pierwszo i drugorzędnego będą prostopadłe do siebie w punkcie π. Punkt π będzie w tym razie pojedynczym punktem pierwiastkowym równania $F(u) = 0$.

Oznaczmy przez μ_1 i μ_2 kąty, które proste $L_{\pi t}$ i $l_{\pi t}$ tworzą odpowiednio z osią ox, to znajdziemy z (8) ze względu na (7), w § 1 :

(9)
$$\operatorname{stg}\mu_1 = \frac{Z_1}{z_1}; \qquad \operatorname{stg}\mu_2 = -\frac{z_1}{Z_1},$$

zkąd wypada :
$$\mu_1 = \alpha_1 ; \qquad \mu_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Pomyślmy sobie dwie dwójek punktów w płaszczyznie xoy, oznaczmy jedną z tych dwójek (π, π'), a drugą przez $(\pi'' \pi''')$:

W tabliczce

(10)
$$\begin{cases} \pi, & x, & y, & Z_0, & Z_1, & Z_2 \; . \; . \; . \; z_0, & z_1, & z_2 \; . \; . \; . & P, & p, & E_{\pi t}, & E_{\pi}, & e_{\pi t}, & e_{\pi}, \\ \pi', & x', & y', & Z'_0, & Z'_1, & Z'_2 \; . \; . \; . \; z'_0, & z'_1, & z'_2 \; . \; . \; . & P', & p', & E'_{\pi'}, & E_{\pi' t}, & e_{\pi'}, & e_{\pi' t}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \pi'', & x'', & y'', & Z''_0, & Z''_1, & Z''_2 \; . \; . \; . \; z''_0, & z''_1, & z''_2 \; . \; . \; . & P'', & p'', \\ \pi''', & x''', & y''', & Z'''_0, & Z'''_1, & Z'''_2 \; . \; . \; . \; z'''_0, & z'''_1, & z'''_2 \; . \; . \; . & P''', & p''', \end{cases}$$

oznaczone są układy odpowiadających sobie punktów, płaszczyzn i funkcyj tem, iż nad głoskami tegoż samego układu, albo żadnej kreski, albo jednakową liczbę kresek umieszczono :

$E_{\pi t}$ i $e_{\pi t}$ oznaczają dwójkę sprzężonych płaszczyzn dotykających powierzchnie posiłkowe w punktach P i p leżących ponad π. Toż samo odnosi się do $E_{\pi' t}$ i $e_{\pi' t}$ ze względu na punkt π'.

E_π i e_π płaszczyzny sieczne przechodzące przez punkta sprzężone P i p tak dobrane, aby było

(11)
$$E_\pi \parallel E_{\pi' t}; \qquad e_\pi \parallel e_{\pi' t}.$$

$E_{\pi'}$ i $e_{\pi'}$ oznaczają płaszczyzny sieczne w P' i p' tak, iż $E_{\pi'} \parallel E_{\pi t}$, $e_{\pi'} \parallel e_{\pi t}$. Wzmiankowane płaszczyzny są więc co dwie, pod sobą w tabliczce (10) umieszczone, do siebie równoległe.

(12) W pobliżu pojedynczego punktu pierwiastkowego można każdą płaszczyznę posiłkową uważać za maleńką cząstkę stycznej powierzchni siodełkowatej, cząstka ta rozpada się na dwie połowy, które wychodząc z odpowiedniego śladu rozciągają się jedna ponad, druga pod płaszczyzną xoy. Ponieważ w tej maleńkiej cząsteczce nie może być mowy o falowej krzywiźnie powierzchni, jest przeto jasnem, że jeżeliby górna połowa zwracała się ku xoy stroną wypukłą, to dolna musiałaby się ku tej płaszczyznie zwracać stroną wklęsłą i odwrotnie. Punkta tych połówek niechaj się nazywają punktami *wypukłości* a odpowiednio punktami *wklęsłości* wedle tego, jak odpowiednia cząstka powierzni wypukłością lub wklęsłością ku xoy się zwraca.

(13) Jeżeli mamy dwa punkta leżące π i π' w płaszczyznie *xoy* po dwóch stronach każdej z przecinających się gałęzi śladów, a więc jak gdyby w dwóch wierzchołkiem przeciwległych kątach między temi śladami zawartych a nadto dostatecznie blisko punktu pierwiastkowego położone, to przynależne punkta P i P' znajdujące się np. na pierwszorzędnej powierzchni posiłkowej, będą też nie wątpliwie leżały po obu stronach *xoy*. Jeżeli jeden z nich np. P jest punktem *wypukłości*, to drugi P' musi być punktem *wklęsłości*. Płaszczyzna $E_{t\pi}$ styczna do posiłkowej w punkcie wypukłości P, oraz płaszczyzna sieczna $F_{\pi'}$ przez punkt wklęsłości P' przechodząca, przetnie na mocy (11) płaszczyznę *xoy* podług dwu prostych leżących oczywiście bliżej odpowiedniej części śladów, aniżeli pierwotne

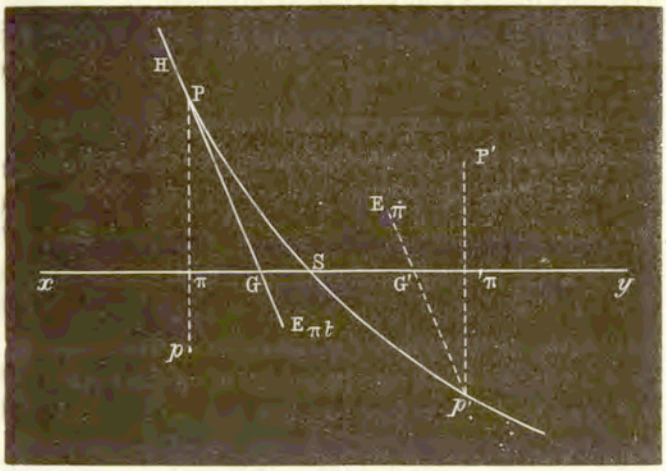

Fig. 6.

punkta π i π'. W (12) uwidocznionym jest przebieg w przecięciu pionowym. HH' przedstawia pierwszorzędną powierzchnię posiłkową z punktem wypukłości P i z punktem wklęsłości P'. PG przedstawia płaszczyznę styczną, P'G' sieczną, G i G' są punktami owych wzmiankowanych prostych, które się bliżej punktu S przecięcia śladów znajdują, aniżeli π i π'.

Jeżeli na płaszczyznie posiłkowej drugorzędnej p' jest punktem wypukłości a p punktem wklęsłości, płaszczyzny $e_{\pi' t}$ i e_{π} przecinają płaszczyznę *xoy* podług prostych równoległych g' i g, które również leżą bliżej punktu S, aniżeli punkta π' i π.

(14) O ile π i π' dostatecznie blisko siebie są założone, o tyle można na zasadzie (8) wnioskować, iż kierunek prostych G || G' prawie o kąt prosty od kierunku prostych g || g' się odchyla. Okoliczność ta wraz z tem, co się w (13) powiedziało pozwala przypuszczać, iż punkta π'' i π''' z których jeden leży w G i g drugi w G' i g' bliżej też punktu S się znajdują, aniżeli pierwotnie założone punkta π i π'.

Stosownie do tego

(15) punkt π'' leży w płaszczyznach : *xoy*, $E_{\pi t}$, e_{π},
» π''' » » : *xoy*, $E_{\pi'}$, $e_{\pi' t}$.

Tak więc przedstawiliśmy zasadę, dozwalającą uskutecznić przejście od danej dwójki punktów ($\pi\pi'$) do pochodnej z niej dwójki ($\pi''\ \pi'''$), i to rachunkiem i bez trudności. Pozostaje tylko przejście od π do π' odbyć w taki sposób, iżby ztąd było widocznem, które z punktów P i P', p, p' za punkta wypukłości, a które za punkta wklęsłości uważać należy. W dalszym ciągu podamy wskazówki rozstrzygające, o ile punktami ($\pi''\ \pi'''$) ograniczony ściślej punkt pierwiastkowy zamyka, aniżeli pierwotnie przyjęty odstęp między π i π' zawarty.

(16) Pomyślmy sobie punkt π określony wyrażeniem $\{23.24+31.56i\}$, wtedy mamy $x=23.24$, $y=31.56$; a dalej można wartości Z_0, Z_1, Z_2... z_0, z_1, z_2,... za pomocą tych właśnie wartości na x i y obliczyć. Załóżmy $\Delta x=\Delta y=r=10^{-2}$, a znajdziemy na określenie punktu π', $x'=23.25$, $y'=31.57$ t. j. liczby powstałe z x i y przez podniesienie ostatniej ich cyfry dziesiętnej o jedność. Odpowiednio wartościom x' i y' można obliczyć Z'_0, Z'_1, Z'_2...z'_0, z'_1, z'_2... Znalazłszy $Z_0Z_1<0$, $z_0z_1<0$, a nadto każdą z ilości Z_1, Z_2, z_1, z_2 jako stałą, co do znaku w przyjętym odstępie — jesteśmy w prawie wnioskować, iż między x i x' musi istnieć jakaś liczba p, zaś między y i y' jakaś liczba q posiadające tę własność, że wyrażenie $p+iq$ oznacza prawdziwe położenie punktu pierwiastkowego, że zatem to wyrażenie właśnie sam pierwiastek przedstawia.

Oczywiście, że liczby p i q będą się dopiero w trzeciej cyfrze dziesiętnej różniły od liczb x i y a właśnie te dalsze cyfry potrzeba nam wyznaczyć przy użyciu tak zwanej metody ścieśniania granic pierwiastku.

(17) Niechże teraz $x+iy$ będzie takie, że liczby x i y zgadzają się co do skaźnika ostatnich swych cyfer dziesiętnych, a co do wielkości dokładnie wyznaczają początek pierwszorzędnej i drugorzędnej składowej pierwiastku, o który chodzi. Na wyznaczenie π' otrzymujemy $x'+iy'=(x+\tau)+i(y+\tau)$, gdzie τ oznacza jednostkę z ostatniego miejsca dziesiętnych. W tym razie prosta łącząca π i π' jest dwójsieczną kąta xoy, a przejście od jednego punktu tej prostej do drugiego dokonywa się za przydaniem jego współrzędnym przyrostów równych $\Delta x=\Delta y$.

Na oznaczenie szeregów punktów na pierwszorzędnej i drugorzędnej powierzchni pomocniczej, albo raczej na przynależnych stycznych siodełkowatych, które to szeregi leżą ponad prostą $\pi\pi'$ otrzymujemy z (2)

(18)
$$(Z'_0)=Z_0+\Delta x(Z_1-z_1)-2z_2\Delta x^2,$$
$$(z'_0)=z_0+\Delta x(Z_1+z_1)+2Z_2\Delta x^2,$$

za pomocą czego można dla każdej małej przyjętej wartości na Δx obliczyć (Z'_0) i (z'_0). Dla $\Delta x=0$ wypada z pierwszego równania punkt P o współrzędnych (x, y, Z_0), a z drugiego punkt p o współrzędnych (x, y, z_0).

Z (18) zaniedbując Δx^2 otrzymamy równania stycznych prostych, z których jedna dotyka szereg punktów pierwszorzędny w P, druga szereg drugorzędny w p.

Równania te są :

(19)
$$[Z'_0]=Z_0+\Delta x(Z_1-z_1); \quad [z'_0]=z_0+\Delta x(Z_1+z_1).$$

Dla $z_2Z_0>0$ i przy dowolnie małem Δx jest (Z'_0) liczebnie mniejsze niż $[Z'_0]$. Przeto każdy punkt pierwszorzędnego szeregu sąsiedni punktowi P pozostawać będzie między prostą styczną a płaszczyzną xoy, a punkt P jest w tym razie punktem wklęsłości. Dla $z_2Z_0<0$ jest Z'_0 liczebnie większe niż Z'_0 a P w tym razie jest punktem wypukłości.

(20) Dla $Z_2z_0>0$, i przy dowolnie małem Δx jest (z'_0) liczebnie większe niż $[z'_0]$, a punkt p w tym razie jest punktem wypukłości. Tak samo dla $Z_2z_0<0$ p jest punktem wklęsłości.

Widzimy ztąd, iż poprzednie zabezpieczenie się przeciwko falowatej postaci elementów powierzchni w pobliżu punktu pierwiastkowego, wyrażone jest w ciągu badania tem, iż ilości Z_2 i z_2 w odstępie $(\pi\pi')$ znak swój wciąż zachowują.

Bacząc jak należy na postępowanie w (13) wyłożone z uwzględnieniem warunków poznanych w (20) okazuje się, iż odnośnie do pierwiastku złożonego z dwóch jednakowym znakiem opatrzonych składowych, cztery możebne przypadki rozróżnić należy :

1. Jeżeli ($z_2 Z_0 < 0$, a $Z_2 z_0 > 0$), wtedy P i p są punktami wypukłości, a przeto P' i p' punktami wklęsłości. W tym razie

(21)
$$\begin{array}{llll} \pi'' & \text{leży w płaszczyznach} & xoy, & E_{\pi t} \text{ i } e_{\pi t}, \\ \pi''' & \text{»} \quad \text{»} & xoy, & E_{\pi'} \text{ i } e_{\pi'}; \end{array}$$

2. Jeżeli ($z_2 Z_0 < 0$, a $Z_2 z_0 < 0$) wtedy P jest punktem wypukłości, a p punktem wklęsłości; przeto P' punktem wklęsłości a p' punktem wypukłości. W tym razie :

(22)
$$\begin{array}{llll} \pi'' & \text{leży w płaszczyznie} & xoy, & E_{\pi t} \text{ i } e_{\pi}, \\ \pi''' & \text{»} \quad \text{»} & \text{»} & E_{\pi'} \text{ i } e_{\pi' t}; \end{array}$$

3. Jeżeli ($z_2 Z_0 > 0$ a $Z_2 z_0 > 0$), wtedy P i p' są punktami wklęsłości zaś P' i p punktami wypukłości. W tym razie :

(23)
$$\begin{array}{llll} \pi'' & \text{leży w płaszczyznie} & xoy, & E_{\pi} \text{ i } e_{\pi t}, \\ \pi''' & \text{»} \quad \text{»} & xoy, & E_{\pi' t} \text{ i } e_{\pi'}. \end{array}$$

4. Jeżeli ($z_2 Z_0 > 0$, a $Z_2 z_0 < 0$) wtedy P i p są punktami wklęsłości, a zatem P' p' punktami wypukłości. Wtedy też

(24)
$$\begin{array}{llll} \pi'' & \text{leży w płaszczeznach} & xoy, & E_{\pi}, e_{\pi}, \\ \pi''' & \text{»} \quad \text{»} & xoy, & E_{\pi' t}, e_{\pi' t}, \end{array}$$

W (21) płaszczyzna $E_{\pi'}$ przechodzi przez punkta $(x''', y''', 0)$, (x', y', Z'_0), i jest równoległą do $E_{\pi t}$; podobnie płaszzyzna $e_{\pi'}$ przechodzi przez punkta $(x', y', 0)$, (x''', y''', z_0') i jest równoległą do $e_{\pi t}$. Z wynikających ztąd równań :

(25)' $$0 - Z'_0 = Z_1(x''' - x') - z_1(y''' - y'); \quad 0 - z'_0 = z_1(x''' - x') + Z_1(y''' - y')$$

otrzymujemy

(25) $$x' - x''' = \frac{Z'_0 Z_1 + z'_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}; \quad y' - y''' = \frac{z'_0 Z_1 - Z'_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}.$$

W (21) przechodzi płaszczyzna $E_{\pi t}$ przez punkta $(x'', y'', 0)$, (x, y, Z_0) i jest styczną w punkcie P, tak samo płaszczyzna $e_{\pi t}$ przechodzi przez punkta $(x'', y'', 0)$ i styka się z drugorzędną powierzchnią posiłkową w p. Daje to następujące równania :

(26)' $$0 - Z_0 = Z_1(x'' - x) - z_1(y'' - y); \quad 0 - z_0 = z_1(x'' - x) + Z_1(y'' - y),$$

a ztąd

(26) $$x'' - x = -\frac{Z_0 Z_1 + z_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}; \quad y'' - y = \frac{Z_0 z_1 - Z_1 z_0}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}.$$

W (25) i (26) wyznaczyliśmy położenie π'' i π''' z uwzględnieniem (21), a łatwo bardzo będzie wyznaczyć położenie tych punktów z uwzględnieniem (22), (23), (24). Postępując tym samym sposobem dojdziemy do schematu następującego :

$$
\text{(I)}\quad
\begin{array}{l}
z_2Z_0 < 0 \\[2ex]
Z_2z_0 > 0
\end{array}
\left[
\begin{array}{ll}
x'' - x = -\dfrac{Z_0Z_1 + z_0z_1}{Z_1Z_1 + z_1z_1}, & y'' - y = \dfrac{Z_0z_1 - Z_1z_0}{Z_1Z_1 + z_1z_1} \\[2ex]
x' - x''' = +\dfrac{Z'_0Z_1 + z'_0z_1}{Z_1Z_1 + z_1z_1}, & y' - y''' = \dfrac{z'_0Z_1 - Z'_0z_1}{Z_1Z_1 + z_1z_1}
\end{array}
\right]
$$

$$
\text{(I)}\quad
\begin{array}{l}
z_2Z_0 < 0 \\[2ex]
Z_2z_0 < 0
\end{array}
\left[
\begin{array}{ll}
x'' - x = -\dfrac{Z_0Z'_1 + z_0z_1}{Z_1Z'_1 + z_1z_1'}, & y'' - y = \dfrac{Z_0z'_1 - Z_1z_0}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1} \\[2ex]
x' - x''' = +\dfrac{Z'_0Z'_1 + z'_0z_1}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1}. & y' - y''' = \dfrac{z'_0Z_1 - Z'_0z'_1}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1}
\end{array}
\right]
$$

(27)

$$
\text{(III)}\quad
\begin{array}{l}
z_2Z_0 > 0 \\[2ex]
Z_2z_0 > 0
\end{array}
\left[
\begin{array}{ll}
x'' - x = -\dfrac{Z_0Z_1 + z_0z'_1}{Z_1Z'_1 + z_0z'_1}, & y'' - y = \dfrac{Z_0z_1 - Z_1'z_0}{Z_1Z'_1 + z_0z'_1} \\[2ex]
x' - x''' = +\dfrac{Z_0'Z'_1 + z_0z'_1}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1}, & y' - y''' = \dfrac{Z_1'z'_0 - Z'_0z_1}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1}
\end{array}
\right].
$$

$$
\text{(IV)}\quad
\begin{array}{l}
z_2Z_0 > 0 \\[2ex]
Z_2z_0 < 0
\end{array}
\left[
\begin{array}{ll}
x'' - x = -\dfrac{Z_0Z'_1 + z_0z'_1}{Z_1'Z_1' + z_1'z_1'}, & y'' - y = \dfrac{Z_0z'_1 - Z'_1z_0}{Z_1'Z_1' + z_1'z_1'} \\[2ex]
x' - x''' = +\dfrac{Z'_0Z'_1 + z'_0z'_1}{Z'_1Z'_1 + z'_1z'_1}, & y' - y''' = \dfrac{Z'_1z'_0 - Z'_0z'_1}{Z'_1Z'_1 + z'_1z'_1}
\end{array}
\right]
$$

Kładąc w (2) $\Delta x = \Delta y = \tau$ otrzymamy:

(28) $$Z'_0 - Z_0 = \tau(Z_1 - z_1) - 2\tau^2 z_2, \qquad z'_0 - z_0 = \tau(Z_1 + z_1) + 2\tau^2 Z_2.$$

Zastępując w tych równaniach wszędzie τ ilością $-\tau$, potrzeba też ilości opatrzone kreskami, od takowych uwolnić, a odwrotnie ilości bez kresek pokreskować. Wedle tego otrzyma się z (28)

(29) $$Z_0 - Z'_0 = -\tau(Z'_1 - z'_1) - 2\tau^2 z'_2, \qquad z_0 - z'_0 = -\tau(Z'_1 + z'_1) + 2\tau^2 Z'_2.$$

Kładąc $x''' - x'' = \tau_1$, $y''' - y'' = \tau_2$ i odejmując każde z równań (26)′ od odpowiedniego równania w (25)′ wypadnie :

(30) $$-Z'_0 + Z_0 = Z_1\tau_1 - z_1\tau_2 - \tau(Z_1 - z_1), \qquad -z'_0 + z_0 = z_1\tau_1 + Z_1\tau_2 - \tau(Z_1 + z_1),$$

a dodając równania w (30) odpowiednio do równań (28)

$$Z_1\tau_1 - z_1\tau_2 + 2\tau^2 z_2 = 0, \qquad z_1\tau_1 + Z_1\tau_2 + 2\tau^2 Z_2 = 0,$$

a ztąd

(31) (I)′ $$\tau_1 = x''' - x'' = 2\tau^2\frac{Z_1z_2 - z_1Z_2}{Z_1Z_1 + z_1z_1}, \qquad \tau_2 = y''' - y'' = -2\tau^2\frac{Z_1Z_2 + z_1z_2}{Z_1Z_1 + z_1z_1}.$$

To wyznaczenie odstępów τ_1, τ_2 jest wynikiem równań określających (25)′, (26)′ których użyliśmy do wskazania położenia punktów π'', π''' w przypadku (I).

Postępując tak samo z równaniami określającemi w (II), (III), (IV) i uwzględniając przytem należycie związki (28) i (29) otrzymamy odpowiednio do przypadków (II), (III), (IV) na wyrażenie wynikających odstępów τ_1 i τ_2 wzory następujące :

(II)′ $$\tau_1 = x''' - x'' = 2\tau^2\frac{z_2Z'_1 + z_1Z'_2}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1}, \qquad \tau_2 = y''' - y'' = 2\tau^2\frac{Z_1Z'_2 - z'_1z'_1}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1},$$

(32) (III)′ $$\tau_1 = x''' - x'' = -2\tau^2\frac{z'_2Z_1 + z'_1Z_2}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1}, \qquad \tau_2 = y''' - y'' = 2\tau^2\frac{z_1z'_2 + Z'_1Z_2}{Z_1Z'_1 + z_1z'_1},$$

(IV) $$\tau_1 = x''' - x'' = 2\tau^2\frac{z'_1Z'_2 + z'_2Z_1}{Z'_1Z'_1 + z'_1z'_1}, \qquad \tau_2 = y''' - y'' = 2\tau^2\frac{Z'_1Z'_2 + z'_1z'_2}{Z'_1Z'_1 + z'_1z'_1}.$$

Ze względu na punkta sprzężone P'', P''', p'', p''' leżących na odpowiednich powierzchniach posiłkowych ponad punktami π'', π''' otrzymuje się wedle (3) związki :

(33)
$$\tau_3 = Z''_0 - Z'''_0 = -\tau_1 Z''_1 + \tau_2 z''_1 + Z''_2(\tau_2^2 - \tau_1^2) + 2\tau_1\tau_2 z''_2,$$
$$\tau'_3 = z''_0 - z'''_0 = -\tau_1 z''_1 - \tau_2 Z''_1 + z''_2(\tau_2^2 - \tau_1^2) - 2\tau_1\tau_2 Z''_2,$$

które służą do znalezienia każdorazowych pionowych odstępów (P''P''') i ($p''p'''$) jeżeli tylko na ten cel użyjemy którychkolwiek z podanych w (31) i (32) wzorów określających odstępy.

Zresztą znajdziemy związki :

(34)
$$Z'_2 = Z_2 + 3\tau(Z_3 - z_3) + \ldots$$
$$z'_2 = z_2 + 3\tau(Z_3 + z_3) + \ldots$$
$$Z'_1 = Z_1 + 2\tau(Z_2 - z_2) + \ldots$$
$$z'_1 = z_1 + 2\tau(Z_2 + z_2) + \ldots$$

z których dla dostatecznie małego τ wypływa, iż z funkcyj Z_1, Z_2, z_1, z_2 każda w odstępie $[x+iy, x'+iy']$ ciągle rośnie lub ciągle maleje, skoro się przekonamy, że w tymże odstępie wyrażenia (Z_2+z_2), (Z_2-z_2), $Z_3+z_3)$, (Z_3-z_3) zachowują stale znaki swe.

Co do wielkości (Z_1-z_1), (Z_1+z_1) można tu jeszcze zauważyć, że one związkom :

(35)
$$Z_0(Z_1-z_1)<0, \quad Z_0(Z'_1-z'_1)<0,$$
$$z_0(Z_1+z_1)<0, \quad z_0(Z'_1+z'_1)<0,$$

zadość uczynić muszą, jeżeli wogóle jest mowa o ciągłym zcieśnianiu granic punktu pierwiastkowego, o którego wyznaczenie chodzi. Albowiem pod temi tylko warunkami postępując w orzeczonym odstępie można Z_0 i z_0 a więc i wyrażenie (Z_0+iz_0) coraz bliżej do znikającej ilości doprowadzić.

Na zasadzie (35) oraz warunków określających przypadek (I) znajdziemy :

$$z_2(Z_1-z_1)>0; \quad Z_2(Z_1+z_1)<0,$$

a ztąd :

$$(z_2 Z_1 - z_1 Z_2) > (z_1 z_2 + Z_1 Z_2),$$

a zatem :

$$\tau_1 > \tau_2.$$

Postępując wskazanym tu sposobem, dojdziemy do przekonania, że we wszystkich przypadkach (I), (II), (III), (IV) sprawdza się związek :

(36)
$$\tau_1 > -\tau_2 \quad \text{czyli} \quad (x'''-x'')>(y''-y'''),$$

co też być musi, gdyż odstępy τ_1 i τ_2 oba dodatnemi być muszą.

W danem równaniu, którego pierwiastek przedstawiony jest znanem wyrażeniem $(x+iy)$ co do obu części składowych w cyfrach początkowych aż do n^{tej} dziesiętnej, należy podług (27) obliczyć ilości τ_1 i τ_2 w dwóch cyfrach początkowych. Znalazłszy przytem

(37)
$$(\text{liczebnie większe } \tau) = \frac{m}{10^{s+1}} + \frac{m'}{10^{s+2}} + \ldots$$

należy wedle (27) obliczyć aż do $(s+2)^{\text{giej}}$ dziesiętnej wartości

(38)
$$x''-x=\alpha, \quad x'-x'''=\alpha', \quad y''-y=\beta, \quad y'-y'''=\beta',$$

a znajdziemy, dajmy nato,

(39)
$$\tau_1 = x'''-x'' = \tau-\alpha-\alpha' = \frac{m_1}{10^{k_1+1}} + \frac{m'_1}{10^{k_1+2}} + \ldots$$
(przyczem $\tau = 10^{-n}$)
$$\tau_2 = y'''-y'' = \tau-\beta-\beta' = \frac{m_2}{10^{k_2+1}} + \frac{m'_2}{10^{k_2+2}} + \ldots$$

(40) Niechże teraz (wartość k większego τ w (39) będzie) $= k+2n$, to widzimy przedewszystkiem, że jeżeli np. w przypadku (I) większe z wyrażeń

(41) $$2\frac{z_2Z_1 - z_1Z_2}{Z_1Z_1 + z_1z_1}, \quad -2\frac{z_1z_2 + Z_1Z_2}{Z_1Z_1 + z_1z_1},$$

w postaci : $\frac{u}{10^{k+1}} + \frac{v}{10^{k+2}} + \dots$ się przedstawia, to wartość ta w dalszym ciągu rachunku nie może się znacznie zmienić; gdyż wchodzące w te wyrażenia ilości z_1, z_2, Z_1, Z_2 zbyt znaczącym zmianom niepodlegają. Skutkiem tego i k, które się tu pokaże, zachowa w ciągu rachunku, wartość prawie niezmienną i to odnośnie do każdego z przypadków uwidocznionych w (27).

Po takim rozbiorze jasnem będzie, że wyrażenia $(x''+iy'')$, $(x'''+iy''')$ określając punkta π'' i π''' zgadzają się aż do $(2n+k)^{\text{tego}}$ miejsca dziesiętnego liczb wyrażających spółrzędne, i właśnie aż do tego miejsca wartość prawdziwą pierwiastku przedstawiają.

(42) Teoretycznie biorąc należałoby odstęp $[(x''+iy''), (x'''+iy''')]$ uważać za *pochodnę* z pierwotnie przyjętego odstępu $[(x+iy), (x'+iy')]$ i za tak zwany *ścieśniony*. Ale to spowodowałoby rachunek bardzo mozolny, gdyż wypadałoby rachować bez potrzeby w bardzo wielu cyfrach dziesiętnych, z których potem cyfry po za $(2n+k)^{\text{tem}}$ miejscem stojące wcaleby do pierwiastku nie należały. Za pomocą uwag poprzednich możemy wynaleźć odstęp zupełnie odgraniczony i posiadający własność, iż w obręb jego wciągnięte zostały tylko te miejsca dziesiętne, o których jesteśmy przekonani, że one istotnie do pierwiastku należą. Wyznaczenie takiego odstępu tyle tylko rachunku wymaga, ile sama istota zadania niezbędnem go czyni.

Oznaczmy nowy odstęp przez : $\left[[(x'')+i(y'')], [(x''')+i(y''')]\right]$, a otrzymamy dla znalezienia go wedle poprzedniego związku :

(43) $$\begin{aligned} &(x'') = x + (x''-x)\Big\}_{2n+k}; \quad (x''') = (x'') + \frac{1}{10^{2n+k}}, \\ &(y'') = y + (y''-y)\Big\}_{2n+k}; \quad (y''') = (y'') + \frac{1}{10^{2n+k}}, \quad \text{gdzie } (\tau) = \frac{1}{10^{2n+k}}. \end{aligned}$$

Wyrażenia $(x''-x)$, $(y''-y)$ należy obliczać wedle wzorów (27) odpowiednio własnościom ilości z_2Z_0, Z_2z_0.

Wskazówki $(2n+k)$ widoczne w (43) wskazują, iż przy obliczaniu wartości $(x''-x)$, $(y''-y)$, iść należy tylko do miejsca dziesiętnego odpowiadającego skazówce $(2n+k)$.

Jeśli w odstępie założonym $[(x+iy), (x'+iy')]$ przyjęto odległość odstępu $\tau + i\tau = \tau(1+i) = \frac{1+i}{10^n}$, otrzymuje się w nowopowstałym odstępie odległość odstępu $(\tau) + i(\tau) = \frac{1+i}{10^{2n+k}}$ i pokazuje się, że ścieśnienie odstępu tylko wtedy za wykonalne uważać można, jeżeli $(2n+k)$ przynajmniej ilości $2n+1$ dorównywa, a więc kiedy związek $n \geqq (1-k)$ się sprawdza.

(44) Jeżeli tak jest, to dalszym rachunkiem dochodzi się do coraz to nowych odstępów, które pokolei dają miejsca dziesiętne :

$$n, \; 2n+k, \; 4n+3k, \; 8n+7k, \; 16n+15k \dots$$

odległości odstępu.

W przypadkach, kiedy $(n+k)$ tylko jedną lub kilka jedności wynosi, radzimy ilości te w ciągu rachunku wedle (39) kontrolować, a następnie te nowe k przyjąć za podstawę dalszego rachunku.

(45) Przy obliczaniu $(x''-x)$, $(y''-y)$ należy mianownik obliczyć dokładnie w $(n+k-1)$ cyfrach, a jeżeli się przytem μ okaże jako znaczek najwyższego miejsca dziesiętnego, należy zauważyć zna-

czek μ' początkowy licznika i obliczyć licznik w $(2n+\mu-\mu'+1)$ cyfrach, ażeby ostateczne ilości znać dokładnie aż do miejsca końcowego ze znaczkiem $2n+k$.

Zachowując ten sposób postępowania można pierwiastek złożony z pierwszorzędnej i drugorzędnej składowej w dowolnej liczbie cyfer dziesiętnych obliczyć; jeżeli się tylko przy wyszukiwaniu ilości $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots z_0, z_1, z_2 \ldots$ baczy na to, ażeby funkcyje Z_0 i z_0 już w początku rachunku były dokładne w liczbie cyfer o jedną a raczej o dwie większej, aniżeli żądana liczba cyfer pierwiastku. Będzie to w dalszym działaniu wskazówką, jak dalece pozostałe funkcyje Z_1, z_1, Z_2, z_2 dokładnie obliczać się mają.

W przeciwieństwie ze złożonemi pierwiastkami równania kształtu

(46) $$f(u)+i\varphi(u)=0,$$

(47) stoją *jednowyrazowe pierwiastki*, są one albo *pierwszorzędne* albo *drugorzędne* wedle tego, czy punkta pierwiastkowe na pierwszorzędnej lub drugorzędnej osi się znajdują. Pierwszorzędne są liczbami opatrzonemi zwyczajnem znakiem $+$ lub $-$; drugorzędne są dodatnemi lub ujemnemi liczbami opatrzonemi jeszcze w czynnik $i=\sqrt{-1}$.

Jeżeli liczba pierwszorzędna $=x$ ma zadość czynić równaniu (46), to może to oczywiście nastąpić nie inaczej, jak tylko za równoczesnem sprawdzeniem się równań:

(48) $$f(x)=0, \quad \varphi(x)=0.$$

(49) W tym celu wyszukamy dla wielomianów $f(x)$ i $\varphi(x)$ największą wspólną miarę np. $\psi(x)$ i zbadamy czy równaniu $\psi(x)=0$ można uczynić zadość pierwszorzędnemi pierwiastkami czy też nie. Pierwiastki pierwszorzędne tego równania należą zarazem równaniu (46).

Dla wyszukania pierwiastków drugorzędnych potrzeba wielomiany $f(u)$ i $\varphi(u)$ rozłożyć każdy na dwie części, z których jedna zawierałaby potęgi parzyste, a druga nieparzyste. Rozkład ten daje np. $f(u)=(u^2)_1+u(u^2)_2$, $\varphi(u)=[u^2]_1+u[u^2]_2$, a ztąd:

(50) $$f(u)+i\varphi(u)=\{(u^2)_1+ui[u^2]_2\}+i\{[u^2]_1-ui(u^2)_2\}=0,$$

kładąc tu $u=iy'$ otrzymamy równanie (46) w tym razie w postaci:

(51) $$F(y')+i\Phi(y')=0,$$

prowadzące znowu do równania z zerem największej wspólnej miary $\Psi(y')$ należącej do $F(y')$ i $\Phi(y')$.

Jeżeli np. y_1, y_2, $y_3, \ldots$, są pierwszorzędnemi liczbami sprowadzającemi do zera $\Psi(y')$, to iy_1, iy_2, $iy_3, \ldots$ stanowią drugorzędne pierwiastki równania (46).

Równania (49) i (51) posiadają tylko pierwszorzędne spółczynniki i są właśnie takie, których pierwszorzędne pierwiastki prowadzą do poznania jednowyrazowych pierwiastków równania (46). Z tego powodu potrzeba nam ustalić sposób obliczania pierwiastków pierwszorzędnych tylko dla takich równań, których spółczynniki są pierwszorzędne.

Niechże będzie następujące równanie o pierwszorzędnych spółczynnikach

(52) $$f(x)=A_n x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0=0,$$

Równanie

(53) $$Z_0=f(x),$$

ze względu na układ prostokątny ox, oy, oZ_0 przedstawia krzywę przecinającą oś ox w tylu punktach, ile posiada pierwiastków pierwszorzędnych równanie (52). Descartes był pierwszym, który tę krzywę badał, i od niego też linija (53), ze względu na równanie (52), nosi nazwę krzywej Descartesa. Przecięcia jej z osią ox nazywają się punktami pierwiastkowemi pierwszorzędnemi. Odległość punktu pierwiastkowego od początku współrzędnych, wymierzona przyjętą jednostką długości, daje przynależną temu punktowi wartość samego pierwiastku.

Zamieniając $x_1\ Z_0$ odpowiednio na $x' = x + \Delta x$, $Z'_0 = Z_0 + \Delta Z_0$, a wprowadzając oznaczenie

(54) $$f_s(x) = \frac{d^s f(x)}{dx^s} = s!Z_0,$$

otrzymuje się, przy pomocy metody Taylora i zatrzymania wyrazów z 2ga potęgą Δx

(55) $$Z'_0 = Z_0 + Z_1 \Delta x + (Z_2)\Delta x^2,$$

gdzie:

$$(Z_2) = f_2(x \ldots x + \Delta x) : 2!$$

wyraża wartość stosowną wyjętą z szeregu wartości między Z_2 i Z'_2 leżącego odpowiednio do znaczenia, jaka się do reszty szeregu Taylora przywiązuje.

Równanie (55) można też pisać w postaci

(56) $$Z'_0 - Z_0 = Z_1(x' - x) + Z(Z_2)_2(x' - x)^2.$$

Jeżeli tu Z'_0 i x' uważać będziemy za współrzędne bieżące, to (56) przedstawia krzywę paraboliczną, która w punkcie P wyznaczonym współrzędnemi x i Z_0 jest styczną drugiego rzędu do krzywej Descartesa. Opuszczając w (56) wyraz mający Δx^2, otrzymamy

(57) $$Z'_0 - Z_0 = Z_1(x' - x) \ldots L_{\pi t}.$$

Tu przedstawiona jest prosta $L_{\pi t}$ styczna do krzywej Descartesa w punkcie P leżącym ponad punktem $\pi \ldots (x' = x,\ Z'_0 = 0)$.

Dla małych wartości Δx możemy Z_2 i (Z_2) uważać jako ilości tego samego znaku, i dochodzimy sposobem już poprzednio użytym z porównania związków (55) i (57) do przekonania, iż punkt P leżący na krzywej Descartesa powinien być uważanym

(58)
za punkt wypukłości dla $Z_0 Z_2 > 0$,
» » wklęsłości dla $Z_0 Z_2 < 0$,

gdyż krzywa Descartesa zwraca się do osi ox w punkcie P w pierwszym razie stroną wypukłą, w drugim razie stroną wklęsłą.

Zanim w uwagach tych dalej pójdziemy, objaśnimy wprzód kilka, dla dalszego ciągu, ważnych oznaczeń.

Dla dwóch na osi ox leżących punktów π, π' wyznaczonych odcinkami x, x' otrzymamy na krzywej Descartesa ponad niemi leżące odpowiednie punkta P i P'.

Należący do x szereg funkcyj $Z_n, Z_{n-1}, \ldots Z_r, Z_{r-1}$, które w znaczeniu (54) pojmowane być mają niechaj się oznaczy symbolem $(x)_{r-1}$. Wedle tego otrzymamy dla π i π'

(59)
$$(x)_{r-1} = (Z_n, Z_{n-1}, \ldots Z_r, Z_{r-1}),\quad (x)_0 = (Z_n, Z_{n-1}, \ldots Z_1, Z_0),$$
$$(x')_{r-1} = (Z'_n, Z'_{n-1}, \ldots Z'_r, Z'_{r-1}),\quad (x'_0 = (Z_n, Z'_{n-1}, \ldots Z'_1, Z'_0).$$

Z pomiędzy wartości funkcyj Z_s i Z'_s oznaczamy liczebnie większą przez $\overset{\vee}{Z_s}$, liczebnie mniejszą przez $\overset{\wedge}{Z_s}$.

Iloraz, jaki otrzymamy dzieląc w $(x)_{r-1}$ ostatni wyraz przez przedostatni, znaczkiem swym pomnożony, jest oczywiście stosunkiem krytycznym dla równania $f_{r-1}(x) = 0$ [§ 3. (53) Uwaga]. Oznaczmy go przez $\overset{x}{Q}_{r-1}$. Daje to:

(60)
$$\overset{x}{Q}_m = \frac{Z_m}{(m+1)Z_{m+1}},\quad \overset{x}{Q}_{r-1} = \frac{Z_{r-1}}{rZ_r},\quad \overset{x}{Q}_0 = \frac{Z_0}{Z_1},$$
$$\overset{x'}{Q}_m = \frac{Z'_m}{(m+1)Z'_{m+1}},\quad \overset{x'}{Q}_{r-1} = \frac{Z'_{r-1}}{rZ'_r},\quad \overset{x'}{Q}_0 = \frac{Z'_0}{Z'_1}.$$

Ilorazy te niech się nazywają *zwyczajnemi* krytycznemi ilorazami. Stosunek $(Z_{r-1} : {}_r\underset{\vee}{Z_r})$ jest liczebnie zwykle mniejszym a nigdy większym od $\overset{x}{Q}_{r-1}$. Podobnie stosunek $(Z_{r-1} : \underset{\wedge}{Z_r})$ jest liczebnie zwykle większym a nigdy mniejszym od $\overset{x}{Q}_{r-1}$. Pierwszy nazwijmy stosunkiem krytycznym *słabym* i oznaczmy go przez $\underset{\wedge}{\overset{x}{Q}}_{r-1}$, drugi zaś stosunkiem krytycznym *silnym* i oznaczymy go przez $\underset{\vee}{Q}_{r-1}$. Możemy więc napisać :

(61) $$\underset{\wedge}{\overset{x}{Q}}_{r-1} = \frac{Z_{r-1}}{{}_r\underset{\vee}{Z_r}}; \qquad \underset{\vee}{\overset{x}{Q}}_{r-1} = \frac{Z_{r-1}}{{}_r\underset{\wedge}{Z_r}}.$$

Z tych nazw i oznaczeń zrobimy tu już niejaki użytek, ale zwracamy uwagę, że dopiero w teoryi równań Furiera zaprowadzenie ich okaże się szczególnie przydatnem do ożywienia i rozjaśnienia najważniejszych praw w tejże teoryi zawartych.

W pobliżu punktu pierwiastkowego możemy krzywę Descartesa przyjąć za maleńką cząstkę stycznej paraboli. Cząstka ta rozpada się na dwa oddziały, które poczynając od punktu piarwiastkowego rozciągają się jeden pod, drugi nad osią ox. W tym maleńkim odstępie nie może być mowy o falowatej krzywiznie, jest przeto jasnem, że jeżeli jeden z tych oddziałów uchodzi za szereg punktów wypukłości, drugi koniecznie za szereg punktów wklęsłości uważanym być musi.

Mając jedną dwójkę punktów (π, π') położoych na ox, stanowiącą odstęp należycie ścieśniający punkt pierwiastkowy, można z tej dwójki otrzymać drugą dwójkę (π'', π''') wskazującą odstęp zamykający ten punkt pierwiastkowy jeszcze ściślej, aniżeli pierwotny. Oznaczając przez P'', P''' punkta krzywej odpowiadające dwójce (π'', π'''), można przyjąć, że z dwójek (P, P''), (P', P''') jedna na wypukłym, druga na wklęsłym oddziale się znajduje.

Jeżeli $Z_2Z_0 > 0$, to P jest punktem wypukłości, a P' punktem wklęsłości. Styczna L_{π} poprowadzona w punkcie P przecina ox w π'' i powoduje, odnośnie do swych punktów P i π'', następujący związek :

(62) $$0 - Z_0 = Z_1(x'' - x).$$

Oznaczywszy przez $L_{\pi'}$ sieczną przechodzącą przez P' a równoległą do L_{π}, sieczna ta przecina ox w punkcie π''' i daje, ze względu na swe punkta P' i π''', związek :

(63) $$0 - Z'_0 = Z_1(x''' - x').$$

Z (62) i (63) wynika na oznaczenie π'', π''',

(64) $$\text{dla} \quad Z_2Z_0 > 0; \quad x'' - x = -\frac{Z_0}{Z_1}; \quad x' - x''' = \frac{Z'_0}{Z_1}.$$

Tu koniecznie $Z_0Z_1 < 0$, a więc $Z_2Z_1 < 0$ i zpewnością dla dodatniego Δx jest co do wartości liczebnej :

(65) $$Z_1 > Z'_1; \quad \text{więc także} \quad Z_1 = \underset{\vee}{Z_1}.$$

Jeżeli $Z_2Z_0 < 0$ to punkta P' i π''' leżą w $L_{\pi'}$, a punkta P i π'' w L_{π}, przyczem $L_{\pi'} \parallel L_{\pi}$.

Daje to : $$0 - Z'_0 = Z'_1(x''' - x'); \quad 0 - Z_0 = Z'_1(x'' - x), \quad \text{a więc}$$

(66) $$\text{dla} \quad Z_2Z_0 < 0, \quad x'' - x = -\frac{Z_0}{Z'_1}; \quad x' - x''' = \frac{Z'_0}{Z'_1}.$$

Z powodu takiego jak poprzednio jest

$$\text{dla} \qquad Z_2Z_0 < 0, \quad Z'_1 = \underset{\vee}{Z_1}.$$

Na zasadzie oznaczeń przyjętych w (61) otrzymamy wypadki z (64) i (66) w następującej zgodnej postaci :

$$(67) \quad \text{dla} \qquad Z_2Z_0 \gtrless 0 : \qquad x'' - x = -\underset{\wedge}{\overset{x}{Q_0}}; \quad x' - x''' = \underset{\wedge}{\overset{x'}{Q_0}}.$$

To powiada, że *w przejściu od odstępu $\pi\pi'$ do odstępu $\pi''\pi'''$ zbliżanie się do punktu pierwiastkowego wyrównywa odpowiedniemu słabemu ilorazowi krytycznemu.*

Iloraz krytyczny odpowiadający punktowi wypukłości stanowi już dostateczne zbliżenie się do punktu pierwiastkowego.

Dla wyznaczenia *rozległości* odstępu $\pi''\pi''' = \tau_x$ znajdziemy za pomocą (64) i (66) i wedle istniejących tu związków : $x' - x = \tau$; $Z_0 - Z'_0 = Z_1\left(-\tau - \tau^2\frac{(Z_2)}{Z_1}\right) = Z'_1\left(-\tau + \tau^2\frac{(Z_2)}{Z'_1}\right)$, wzory :

$$(68) \quad \begin{cases} \text{dla} \qquad Z_0Z_2 > 0 \ldots \ \tau_x = x''' - x'' = -\tau^2\dfrac{(Z_2)}{Z_1}, \\ \text{dla} \qquad Z_0Z_2 < 0 \ldots \ \tau_x = x''' - x'' = \quad \tau^2\dfrac{(Z_2)}{Z_1}, \end{cases}$$

a więc liczebnie zawsze :

$$(69) \qquad \tau_x < \tau^2(\underset{\vee}{Z_2} : \underset{\wedge}{Z_1}),$$

jak tylko w odstępie $\pi'\pi$, Z_3 zatrzymuje stale znak ten sam, a przeto $\underset{\wedge}{Z_2}$ przedstawia liczebnie największą w odstępie tym możliwą wartość.

Jeżeli $\tau = 10^{-n}$ a liczebną wartością $(\underset{\vee}{Z_2} : \underset{\wedge}{Z_1})$ jest szereg :

$$\left(\frac{m}{10^{k+1}} + \frac{m'}{10^{k+2}} + \ldots\right),$$

to na wyznaczenie nowego odstępu $[(x''), (x''')]$ mającego służyć dla dalszych przybliżeń otrzymuje się związki :

$$(70) \qquad (x'') = x + (x'' - x)_{2n+k}; \quad (x''') = (x'') + \frac{1}{10^{2n+k}}; \quad (\tau_x) = \frac{1}{10^{2n+k}},$$

$$\text{gdzie} \qquad x'' - x = -\underset{\wedge}{\overset{x}{Q_0}}.$$

Z uwag jakie się w toku tego rozbioru nasunęły, co do własności szeregu znaków odpowiadających szeregowi funkcyj (Z_3, Z_2, Z_1, Z_0) w granicach odstępu ścieśnić się mającego, wynikają dla szeregów funkcyj :

$$(71) \qquad \begin{bmatrix} Z_3, & Z_2, & Z_1, & Z_0 \\ Z'_3, & Z'_2, & Z'_1, & Z'_0 \end{bmatrix},$$

następujące możebne kombinacye znaków w liczbie 8

$$
(72)\quad
\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} + & + & + & - \\ + & + & + & + \end{bmatrix}_1, \quad
\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ + & - & + & + \end{bmatrix}_2, \quad
\begin{bmatrix} - & + & + & - \\ - & + & + & + \end{bmatrix}_3, \quad
\begin{bmatrix} - & - & + & - \\ - & - & + & + \end{bmatrix}_4, \\[2ex]
\begin{bmatrix} - & - & - & + \\ - & - & - & - \end{bmatrix}_5, \quad
\begin{bmatrix} - & + & - & + \\ - & + & - & - \end{bmatrix}_6, \quad
\begin{bmatrix} + & - & - & + \\ + & - & - & - \end{bmatrix}_7, \quad
\begin{bmatrix} + & + & - & + \\ + & + & - & - \end{bmatrix}_8.
\end{array}
$$

Każda z tych kombinacyj okazuje przy przejściu od Z_3, Z_2, Z_1, Z_0 do wartości Z'_3, Z'_2, Z'_1, Z'_0, stratę jednej przemiany znaków.

§ 5.

ROZCIĄGNIENIE UZYSKANYCH ZASAD ROZWIĄZYWANIA NA DOWOLNĄ LICZBĘ RÓWNAŃ Z NIEWIADOMEMI W ODPOWIEDNIEJ LICZBIE.

Niech :

$$(1)\qquad F(x)=0,\quad F'(x)=0,\quad F''(x)=0\ldots,\quad \overset{(n)}{F}(x)=0,$$

będzie układem n równań liczebnych algebraicznych z n niewiadomemi $x_1, x_2, \ldots x_n$, które w (1) dla prostszego pisania zostały oznaczone jedną tylko głoską x. Właściwy kształt tych równań dla ilu kolwiek bądź kresek po prawej stronie przy F niech będzie ;

$$(2)\qquad F(x)=f(x_1,\ x_2,\ldots\ x_n)+i\varphi(x_1,\ x_2,\ldots\ x_n)=f+i\varphi=0,$$

niech dalej na oznaczenie różniczkowania będzie :

$$(3)\qquad D_\mu=\frac{d}{dx_1}\mu_1+\frac{d}{dx_2}\mu_2+\ldots+\frac{d}{dx_n}\mu_n,$$

a znajdziemy następujące związki jasne same przez się :

$$(4)\qquad D_{-\mu}=-D_\mu;\qquad D_\mu\pm D_{\mu'}=D_{\mu\pm\mu'};\qquad D_{r\mu}=rD_\mu.$$

Wedle wzoru TAYLORA znajdziemy w postaci symbolicznej :

$$(5)\qquad \begin{gathered} F(x+iy)=(f+i\varphi)e^{iD_y}=Z_0+iz_0 \quad \text{z określeniami :} \\ Z_0=f\,\mathrm{dos}\,D_y-\varphi\,\mathrm{wst}\,D_y;\qquad z_0=f\,\mathrm{wst}\,D_y+\varphi\,\mathrm{dos}\,D_y. \end{gathered}$$

Dalej :

$$(6)\qquad \begin{gathered} F[(x+\tau\xi)+i(y+\tau\eta)]=(Z_0+iz_0)e^{\tau(D_\xi+iD_\eta)}=Z'_0+iz'_0= \\ =(Z_0+iz_0)+(Z_1+iz_1)\tau+(Z_2+iz_2)\tau^2+\ldots \quad \text{z określeniami :} \end{gathered}$$

$$(7)\qquad \begin{gathered} s!Z_s=\left\{D_\xi^s-\binom{s}{2}D^{s-2}D_\eta^2+\ldots\right\}Z_0-\left\{\binom{s}{1}D_\xi^{s-1}D_\eta^1-\binom{s}{3}D_\xi^{s-3}D_\eta^3+\ldots\right\}z_0, \\ s!z_s=\left\{D_\xi^s-\binom{s}{2}D_\xi^{s-2}D_\eta^2+\ldots\right\}z_0+\left\{\binom{s}{1}D_\xi^{s-1}D_\eta^1-\binom{s}{3}D_\xi^{s-3}D_\eta^3+\ldots\right\}Z_0, \end{gathered}$$

$$(8)\qquad Z'_0=Z_0+\tau Z_1+\tau^2Z_2+\ldots,\quad z'_0=z_0+\tau z_1+\tau^2z_2+\ldots$$

Zamieniając w (6) x, y na $(x-\tau\xi)$, $(y-\tau\eta)$ otrzymamy:

(9)
$$F(x+iy)=(Z'_0+iz'_0)e^{-\tau(D_\xi+iD_\eta)}=Z_0+iz_0=$$
$$=(Z'_0+iz'_0)-(Z'_1+iz'_1)\tau+(Z'_2+iz'_2)\tau^2-\ldots \text{ z określeniami :}$$

(10)
$$s!Z'_s=\left\{D_\xi^s-\binom{s}{2}D^{s-2}D_\eta^2+\ldots\right\}Z'_0-\left\{\binom{s}{1}D_\xi^{s-1}D_\eta-\binom{s}{3}D_\xi^{s-3}D_\eta^3+\ldots\right\}z'_0,$$
$$s!z'_s=\left\{D_\xi^s-\binom{s}{2}D_\xi^{s-2}D_\eta^2+\ldots\right\}z'_0+\left\{\binom{s}{1}D_\xi^{s-1}D_\eta-\binom{s}{3}D_\xi^{s-3}D_\eta^3+\ldots\right\}Z'_0,$$

(11) $$Z_0=Z'_0-\tau Z'_1+\tau^2Z'_2-\ldots,\quad z_0=z'_0-\tau z'_1+\tau^2z'_2-\ldots$$

Z (7) i (10) okazuje się zgodność budowy naocznie.

(12) Pojedyncze wyrazy w $F(x)$ możemy założyć w postaci $Hx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, a każdorazową summę $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n=s$ oznaczyć głoską s. Największe s oznacza stopień wielomianu równania, i można się przekonać, że w szeregach nieskończonych przedstawiających $\mathrm{dos}D_y$, $\mathrm{wst}D_y$ niepotrzeba uwzględniać wyrazów w postaci $\frac{D_y^m}{m!}$, jeżeli tylko m będzie większe niż stopień.

Przyjmijmy dwie osie do siebie prostopadłe ox, oy, a w płaszczyznie ich jakąkolwiek część zamkniętą np. prostokąt o bokach równoległych do osi ox, oy, na którego obwodzie niema żadnego punktu pierwiastkowego takiego, którego określnik (x_1+iy_1) w połączeniu ze stosownie dobranemi wartościami (x_2+iy_2), $(x_3+iy_3)\ldots(x_n+iy_n)$ sprawdzałby równania podane w (1). Przynależny *stosunek krytyczny* (Umgebungsverhältnis) odniesiony do jednego z równań (1) niech będzie $Q_{x_1y_1}$, z dodaniem ponad Q po prawej stronie liczby kresek odpowiedniej wybranemu równaniu.

Tym sposobem otrzymuje się stosunek krytyczny dla równania $F'(x)=0$

(13) $$Q'_{x_1y_1}=\frac{Z'_0}{z'_0}=\frac{f'\mathrm{dos}D_y-\varphi'\mathrm{wst}D_y}{f'\mathrm{wst}D_y+\varphi'\mathrm{dos}D_y}.$$

Dla jakiegobądź punktu obranego na obwodzie otrzymamy w tym razie wartości (x_1+iy_1), za podstawieniem tych wartości x_1, y_1 należy przez rozwiązanie pozostałych $(n-1)$ równań

(14) $$F''(x)=0,\quad F'''(x)=0\ldots F^{(n)}(x)=0,$$

wyznaczyć jeden z zadosyć czyniących układów wartości

$$(x_2+iy_2),\quad (x_3+iy_3)\ldots\quad (x_n+iy_n),$$

a za wprowadzeniem takowych w (13) otrzymamy początkową punktowi (x_1+iy_1) odpowiednią wartość $Q'_{x_1y_1}$.

Dla następującego punktu $\{[x_1+\xi_1]+i[y_1+\eta_1]\}$ otrzymamy przy dostatecznie małem ξ_1, η_1, na wyznaczenie odpowiednich wartości $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3,\ldots\xi_n\,\eta_n$ następujące równania 1go stopnia ze względu na te ilości, które wedle (7) pojmować należy, mianowicie:

(15) $$Z''_1=Z'''_1=Z^{\mathrm{IV}}_1=\ldots=Z^{(n)}_1=z''_1=z'''_1=z^{\mathrm{IV}}_1=\ldots=z^{(n)}_1=0,$$

z których $(2n-2)$ przyrostków $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3,\ldots\,\xi_n\,\eta_n$ wprost można otrzymać, a na zasadzie tak znalezionych wartości obliczyć wartość stosunku obwodowego dla następnego punktu t. j. wartości $Q'_{x+\xi,\,y+\eta}$.

Przechodząc tym sposobem od jednego punktu obwodowego do drugiego, wyznaczy się liczbę mutacyi, jakie wyraz $Q'_{x_1y_1}$ przedstawia w czasie obiegu po całej linii obwodowej. Z połowy liczby dodatnych mutacyi wniesiemy na tyleż punktów pierwiastkowych zawartych w obrębie przestrzeni ograniczonej przyjętą liniją obwodową. Kolejnem przechodzeniem do coraz to mniejszych cząstkowych prostokątów zdołamy nareszcie pojedyncze punkta pierwiastkowe porozdzielać i przyjdziemy do układu przybliżonych a zarazem przynależnych wartości.

$$x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2 + x_3 + iy_3, \dots$$

sprawdzających równocześnie równania dane, i uchodzących za układ przybliżonych wartości pierwiastków tychże równań.

Dla otrzymania wszelkich układów pierwiastków równań (1) należy użyć każdego układu pierwiastków równań (14) wedle sposobu w (16) wskazanego, i to ze względu na dostatecznie wielką na około obiegającą linię obwodową; a dopiero następnie przechodząc do coraz mniejszych podziałów, porozdzielać punkta pierwiastkowe w granicach całkowitej linii obwodowej leżące.

Nie ma prawie potrzeby wspominać, jak postąpić należy, ażeby wedle (27) § 3 powynajdywać punkta pierwiastkowe zawarte między dwiema równoległemi. Widać też, iż wskazany sposób oddzielania pierwiastków polega na przypuszczeniu możliwości zupełnego rozwiązania $(n-1)$ równań, i na użyciu takowego do rozwiązania układu równań w liczbie n.

Wyprowadzamy ztąd następujące postępowanie:

Przyjąwszy początek osi za punkt wyjścia linii obwodowej załóżmy:

(18) $$x_2 + iy_2 = x_3 + iy_3 = \dots = x_n + iy_n = 0.$$

Rozwiążmy równanie $F'(x) = 0$ na podstawie założenia (18), a znajdziemy wszystkie możliwe wartości wyrażenia $x_1 + iy_1$.

(19) Z każdą z tych wartości udamy się do linii obwodowej, rozpoczynającej się w punkcie początkowym układu osi, ażeby za pośrednictwem $Q''_{x_2y_2}$ wynaleźć liczbę układów wartości $(x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2)$ i każdy ź nich podać oddzielnie.

Wtedy każdy z tych układów wartości w połączeniu z założeniem

(20) $$x_3 + iy_3 = x_4 + iy_4 = \dots = x_n + iy_n = 0$$

sprawdzi równocześnie dwa pierwsze równania w (1).

Na zasadzie wskazanych układów wartości w (19) i (20), należy użyć wyrażenia $Q'''_{x_3y_3}$, ażeby ze względu na linię obwodową poczynającą się w punkcie $x_3 = y_3 = 0$ wyszukać liczbę układów wartości $(x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ x_3 + iy_3)$ i każdy z nich podać oddzielnie; wtedy każdy układ w połączeniu z zasadniczem założeniem

$$x_4 + iy_4 = x_5 + iy_5 = \dots = x_n + iy_n = 0$$

sprawdzi równocześnie trzy pierwsze równania w (1).

Przechodząc tak kolejno do wyrażeń $\overset{(4)}{Q}_{x_4y_4},\ \overset{(5)}{Q}_{x_5y_5}, \dots \overset{(n)}{Q}_{x_ny_n}$ dochodzi się nareszcie do wszystkich możebnych układów wartości

$$x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ x_3 + iy_3, \dots x_n + iy_n,$$

z których każdy, dla siebie, sprawdzi równocześnie równania (1), a zatem przedstawia układ pierwiastków temu układowi równań odpowiadający.

W danym układzie dwóch równań

(21) $$F(x_1, x_2) = 0 \quad F'(x_1, x_2) = 0$$

przyjmijmy np. drugie za równanie głoskowe, rozwińmy pierwiastki jego $x_2, x'_2, x''_2, \ldots$ na szeregi zbieżne uporządkowane podług potęg x_1, a znajdziemy dajmy na to:

(22) $$x_2 = \psi(x_1)$$

dla każdego założenia $x_1 = a_1 + ib_1$ otrzymamy wtedy bardzo łatwo $x_2 = a_2 + ib_2$, a więc na dowolnie przyjętą liniję obwodową znajdziemy liczbę dodatnych mutacyi, jaka odpowiada stosunkowi obwodowemu należącemu do pierwszego z równań.

Znajdziemy ostatecznie liczbę punktów pierwiastkowych leżących na wewnątrz zakreślonej linii obwodowej, a w następstwie i same układy wartości pierwiastków.

Wyłożony w (21 § 1), sposób postępowania, zastosujmy także do układu (1).

Niech będzie

(23) $$x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ x_3 + iy_3, \ldots\ x_n + iy_n$$

przyjętym układem początkowym, który podstawiony w (1) prowadzi do wypadków:

(24) $$Z'_0 + iz'_0,\ Z''_0 + iz''_0,\ Z'''_0 + iz'''_0, \ldots \overset{(n)}{Z_0} + i\overset{(n)}{z_0}.$$

Dla wyznaczenia przyrostków $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta_n$ możnaby, uwzględniając wskazaną w (7) budowę wyrażeń Z_1 i z_1, ułożyć następujące wedle ξ, η liniowe równania:

(25) $$Z'_1 + iz'_1 = -\varepsilon'(Z'_0 + iz'_0);\ Z''_1 + iz''_1 = -\varepsilon''(Z''_0 + iz''_0); \ldots \overset{(n)}{Z_1} + i\overset{(n)}{z_1} = -\overset{(n)}{\varepsilon}(\overset{(n)}{Z_0} + i\overset{(n)}{z_0}),$$

otrzymuje się wtedy z powodu tak zmienionych wartości początkowych

(26) $$(x_1 + \xi_1) + i(y_1 + \eta_1);\ (x_2 + \xi_2) + i(y_2 + \eta_2)); \ldots (x_n + \xi_n) + i(y_n + \eta_n)$$

wypadki podstawienia:

(27) $$\overset{'}{Z'_0} + i\overset{'}{z'_0};\ \overset{''}{Z'_0} + i\overset{''}{z'_0}, \ldots \overset{(n)}{Z'_0} + i\overset{(n)}{z'_0},$$

które, dla dostatecznie małych odpowiednio dobranych wartości $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots \overset{(n)}{\varepsilon}$ mogą mieć własność powodowania związków w postaci

(28) $$Z_0^2 + z_0^2 > Z_0'^2 + z_0'^2$$

odnoszących się do dowolnego w (1) danego równania.

Postępując tak dalej dochodzi się nareszcie, ciągłem poprawianiem poprzednich wartości uważanych za początkowe, do układu wartości, dla których wypadki podstawienia stają się tak małe, iż przy żądanej dokładności zaniedbać je można. Układ ten można przeto w pierwszym przybliżeniu uważać jako pierwiastki równań (1).

METODA PRAWIDŁOWEGO ŚCIEŚNIANIA GRANIC WARTOŚCI PIERWIASTKÓW.

Niech będą dwa układy wartości

(29) $$S = (x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2 \ldots x_n + iy_n);\ S' = (x'_1 + iy'_1,\ x'_2 + iy'_2 \ldots z'_n + iy'_n),$$

których wzajemna zależność niechaj się wyraża równaniami

(30) $$x' = x + \tau,\ y' = y + \tau,\ \tau = 10^{-r}$$

przy stałem τ i r.

Niech pierwszy układ wartości w (29) będzie tak dalece przybliżonym do prawdziwego układu wartości pierwiastków, iż go uważać można za pochodzący z ostatniego i to w ten sposób, iż w liczbach x i y należących do układu pierwiastków opuszczono cyfry stojące na miejscach:

(31) $$-(r+1),\ -(r+2),\ -(r+3),\dots$$

Wartości x i y w S są przeto wszystkie liczebnie mniejsze, a zaś w S′ liczebnie większe aniżeli odpowiednie wartości x i y w (układzie pierwiastków) $=\sigma$.

Z S i S′ wyprowadźmy dwa liczebnie pośrednie układy wartości S″ i S‴ mające tę własność, iż ze względu na liczebne wartości x i y dają związek:

(32) $$S < S'' < \sigma < S''' < S'.$$

Pochodne układy wartości mogą się w ten sposób przedstawić

(33) $$S''=(x''_1+iy''_1,\ x''_2+iy''_2,\dots x''_n+iy''_n);\ S'''=(x'''_1+iy'''_1,\ x'''_2+y'''_2,\dots x'''_n+iy'''_n)$$

wraz z następnemi równaniami określającemi, służącemi za dowolne wskazówki nadawane ilościom x i y.

$$x''=x+\tau\xi'';\ x'''=x'-\tau\xi'''=x+\tau(1-\xi''')$$

(34) $$y''=y+\tau\eta'';\ y'''=y'-\tau\eta''=y+\tau(1-\eta''')$$

(35) $$x'''-x''=\tau(1-\xi''-\xi''')=\tau_x;\ y'''-y''=\tau(1-\eta''-\eta''')=\tau_y.$$

Kładąc nadto:

(36) $$Z'_0D_{\xi''}-z'_0D_{\eta''}=\underset{''}{Z}'_1;\quad Z'_0(\overset{2}{D}_{\xi''}-\overset{2}{D}_{\eta''})-2D_{\xi''}D_{\eta''}z'_0=\underset{''}{Z}'_2.2,$$

$$z'_0D_{\xi''}+Z'_0D_{\eta''}=\underset{''}{z}'_1;\quad z'_0(\overset{2}{D}_{\xi''}-\overset{2}{D}_{\eta''})+2D_{\xi''}D_{\eta''}Z'_0=\underset{''}{z}'_2.2,$$

i zapowiadając, iż kreski nad Z i z umieszczone wskazywać mają odpowiednie wartości x i y w funkcyi przez Z i z wyrażonej; a zaś kreski umieszczone pod Z i z pochodzą od ξ i η będących w określniku różniczkowym, otrzymamy, ze względu na układy S′, S″, S‴, następujące związki zakończone na drugiej potędze dostatecznie małego τ,

$$Z''_0=Z_0+\tau\underset{''}{Z}_1+\tau^2\underset{''}{Z}_2;\quad z''_0=z_0+\tau\underset{''}{z}_1+\tau^2\underset{''}{z}_2,$$

(37) $$Z'''_0=Z'_0-\tau\underset{''}{Z}'_1+\tau^2\underset{''}{Z}'_2;\quad z'''_0=z'_0-\tau\underset{''}{z}'_1+\tau^2\underset{''}{z}'_2,$$

$$Z_0=Z_0+\tau\underset{'}{Z}_1+\tau^2\underset{'}{Z}_2;\quad z'_0=z_0+\tau\underset{'}{z}_1+\tau^2\underset{'}{z}_2,$$

(38) $$Z_0=Z'_0-\tau\underset{'}{Z}'_1+\tau^2\underset{'}{Z}'_2;\quad z_0=z'_0-\tau\underset{'}{z}'_1+\tau^2\underset{'}{z}'_2.$$

Umieszczona pod Z i z w (38) jednostka wskazuje, iż w odpowiednich określnikach różniczkowych D_ξ, D_η pozostawiając ilościom ξ, η właściwe znaki, zrównywamy je liczebnie z jednością.

(**39**) Układ przeto równań (38) wynika z (37) przez zrównanie liczebnej wartości ξ, η z jednością. Równania takie można uważać jako należące do dowolnego równania w (1) jeżeli tylko przydamy z prawej strony u góry głoskom Z, z odpowiednią liczbę kresek.

(**40**) W pierwszym wierszu (37) ξ'' i η'' są właściwemi ułamkami, i należy je uważać jako zmieniające się między zerem a temi wartościami, które układ S″ na układ σ zamieniają. Podobnie ξ''' η''' uważamy za zmienne między zerem a temi wartościami zawarte, które przejście S‴ do σ uskuteczniają.

Wewnątrz małego odstępu od x, y do x', y' funkcyje Z_3, z_0 przechodzą przez zero, możemy przeto z uwzględnieniem (40) napisać :

$$\text{(41)}\qquad \begin{gathered} Z_0 Z'_0 < 0, \quad z_0 z'_0 < 0, \quad Z''_0 Z'''_0 < 0, \quad Z''_0 Z_0 > 0, \quad Z'''_0 Z'_0 > 0, \\ z''_0 z_0 > 0, \quad z'''_0 z'_0 > . \end{gathered}$$

(**42**) W następstwie przypuścić musimy, iż ilości $\underset{''}{Z_1}$, $\underset{'''}{Z_1}$, $\underset{'}{Z_1}$, $\underset{'}{Z'_1}$ mają znak wspólny, i że podobnie ilości $\underset{''}{z_1}$, $\underset{'''}{z_1}$, $\underset{'}{z_1}$, $\underset{'}{z_1}$, tym samym znakiem są opatrzone. Również wskazówką 2 opatrzone wartości Z i z w (37) i (38) jako jednym i tym samym znakiem obdarzone pomyśleć należy.

Możemy teraz przystąpić do wyłożenia zapowiedzianej metody prawidłowego ścieśniania odstępów pierwiastków. Rozwiązanie tego zadania zawiera się oczywiście w podaniu $4n$ związków, o ile można stopnia pierwszego, ażeby za ich pomocą ze znanych układów S i S′ wynaleźć układy S″, S‴ bardziej do σ przystępujące. Te ze względu na ξ'', ξ''', η'', η''' liniowe równania można otrzymać jedynie z równań (1), i wedle istoty rzeczy spodziewać się należy, iż każde z tych n równań da 4 potrzebne związki.

Dla wykazania wpływu każdego z równań (1) na owe związki przypatrzmy się bliżej jednemu z nich np. tymczasowo nie kreskowanemu równaniu.

$$\text{(43)}\qquad F(x)=0,$$

i przypuśćmy iż już posiadamy $(4n-4)$ wspomnianych związków, które z równań (1) po wyłączeniu równania (43) otrzymaliśmy. Za pomocą nich możemy wyrazić ilości $\xi''_2, \xi''_3, \xi''_4 \ldots \xi''_n, \eta''_2, \eta''_3, \eta''_4 \ldots \eta''$) przez ξ''_1, η''_1 i podstawić to w równania (37) do (48) należnie przysposobione.

Uważając przy prostokątnym układzie współrzędnych grupy (Z''_0, x'', y''), (z''_0, x'', y''), (Z'''_0, x''', y''') i (z'''_0, x''', y''') każdę jako złożoną z trzech bieżących współrzędnych w odpowiednich równaniach (37), to oba równania w pierwszym wierszu, jako też oba równania w drugim wierszu (37), przedstawiają po parze powierzchni, mianowicie pierwszo i drugorzędną powierzchnię posiłkową równania (43). Punkta (Z_0, x, y) i (Z'_0, x', y') leżą po przeciwnych stronach xoy, tak samo punkta (z_0, x, y) i (z'_0, x', y').

Po opuszczeniu wyrazów mających τ^2, otrzymujemy z (37) równania płasczyzn stycznych, których kierunki zależą od ilości Z_1, z_1, Z'_1, z'_1 albo raczej od współczynników należących do ilości $\tau\xi''_1$, $\tau\eta''$, $\tau\xi'''$, $\tau\eta'''$, które wynikają z wyrażeń z_1, Z_1, jeżeli w nich opuścimy ξ'', η'', ξ''', η''' opatrzone znaczkami $2, 3, 4, \ldots n$.

Z punktów styczności (Z_0, x, y) i $(Z'_0\ x', y')$ jeden jest zawsze punktem wklęsłości a drugi punktem wypukłości. Toż samo rozumie się o punktach styczności (z_0, x, y) i (z'_0, x', y'). Wedle zasad w § 4 rozwiniętych nie trudno będzie rozstrzygnąć wedle uważanego równania (43), które z czterech punktów styczności odpowiadają wklęsłości, á które wypukłości i w każdym przypadku dla równania (43) łatwo będzie można 4 wypadkowe związki ustanowić.

(44)

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{array}{l} \underset{1}{Z_0Z_2}>0 \\ \underset{1}{z_0z_2}>0 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \tau\underset{''}{Z_1}+Z_0=0; & -\underset{'''}{Z_1}+Z'_0=0 \\ \tau\underset{''}{z_1}+z_0=0; & -\underset{'''}{z_1}+z'_0=0 \end{array} \right\}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{array}{l} \underset{1}{Z_0Z_2}>0 \\ \underset{1}{z_0z_2}<0 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \tau\underset{''}{Z_1}+Z_0=0; & -\tau\underset{'''}{Z_1}+Z'_0=0 \\ -\tau\underset{''}{z_1}+z_0=0; & \tau\underset{'''}{z_1}+z'_0=0 \end{array} \right\}$$

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{array}{l} \underset{1}{Z_0Z_2}<0 \\ \underset{1}{z_0z_2}>0 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} -\tau\underset{''}{Z'}+Z_0=0; & \tau\underset{'''}{Z'_1}+Z_0=0 \\ \tau\underset{''}{z_1}+z_0=0; & -\tau\underset{'''}{z_1}+z'_0=0 \end{array} \right\}$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{array}{l} \underset{1}{Z_0Z_2}<0 \\ \underset{1}{z_0z_2}<0 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} -\tau\underset{''}{Z_1}+Z_0=0; & \tau\underset{'''}{Z'_1}+Z'_0=0 \\ -\tau\underset{''}{z'_1}+z_0=0; & \tau\underset{'''}{z'_1}+z'_0=0 \end{array} \right\}.$$

Widać że do tych samych związków dochodzi się biorąc, na wyznaczenie kolejnych punktów na powierzchniach posiłkowych, którebądź dwójki np. (ξ''_s, η''_s) i (ξ'''_s, η'''_s) zamiast (ξ''_1, η''_1), (ξ'''_1, η'''_1) Wedle kombinacyi znaków w iloczynach $\underset{1}{Z_0Z_2}$ i $\underset{1}{z_0z_2}$ otrzymamy na mocy (44) z każdego z równań (1) po 4 równania liniowe na wyznaczenie układów S'', S''' i pozostaje tylko odpowiedzieć na pytanie, o ile się zmniejszyła nowa długość odstępów τ_x, τ_y względem przyjętego wspólnego odstępu $\tau=10^{-r}$?

W tym celu z (35) mamy :

(45)

$$Z_0D_{\tau x}+z_0D_{\tau y}=\tau(\underset{1}{Z_1}-\underset{''}{Z_1}-\underset{'''}{Z_1}); \qquad Z'_0D_{\tau x}-z'_0D_{\tau y}=\tau(\underset{1}{Z_1}-\underset{''}{Z'_1}-\underset{'''}{Z'_1}),$$

$$z_0D_{\tau x}+Z_0D_{\tau y}=\tau(\underset{1}{z_1}-\underset{''}{z_1}-\underset{'''}{z_1}); \qquad z'_0D_{\tau x}-Z'_0D_{\tau y}=\tau(\underset{1}{z'_1}-\underset{''}{z'_1}-\underset{'''}{z'_1}),$$

$$Z'_0-Z_0=\tau\underset{1}{Z_1}+\underset{1}{\tau^2{}_2}=\underset{1}{Z\tau Z'_1},-\tau^2\underset{1}{Z'_2},$$

(46) dalej z (83)

$$z'_0-z_0=\tau\underset{1}{z_1}+\tau^2\underset{1}{z_2}=\tau\underset{1}{z'_1}-\tau^2\underset{1}{z'_2}.$$

Z pierwszego wiersza w (I) znajdziemy uwzględniając (46)

$$Z'_0-Z_0=\tau(\underset{11}{Z_1}+\underset{111}{Z_1})=\tau\underset{1}{Z_1}+\tau^2\underset{1}{Z_2},$$

a więc

$$\tau(\underset{1}{Z_1}-\underset{''}{Z_1}-\underset{'''}{Z_1})+\tau^2\underset{1}{Z_2}=0,$$

a ostatecznie z powodu (45)

$$Z_0D_{\tau x}-z_0D_{\tau y}+\tau^2\underset{1}{Z_2}=0.$$

(47) Postępując podobnie z drugim wierszem w (I) otrzymamy :

$$z_0D_{\tau x}+Z_0D_{\tau y}+\tau^2\underset{1}{z_2}=0.$$

Stosując to do każdego równania w (44) wypadnie :

(48)
$$
\begin{array}{lll}
\text{w przypadku} & (\mathrm{I}) \ldots & Z_0 D_{\tau x} - z_0 D_{\tau y} + \tau^2 \underset{1}{Z_2} = 0, \quad z_0 D_{\tau x} + Z_0 D_{\tau y} + \tau^2 \underset{1}{z_2} = 0, \\
\quad » & (\mathrm{II}) \ldots & Z_0 D_{\tau x} - z_0 D_{\tau y} + \tau^2 \underset{1}{Z_2} = 0, \quad z'_0 D_{\tau x} + Z'_0 D_{\tau y} - \tau^2 \underset{1}{z'_2} = 0, \\
\quad » & (\mathrm{III}) \ldots & Z'_0 D_{\tau x} - z'_0 D_{\tau y} - \tau^2 \underset{1}{Z'_2} = 0, \quad z_0 D_{\tau x} + Z_0 D_{\tau y} + \tau^2 \underset{1}{z_2} = 0, \\
\quad » & (\mathrm{IV}) \ldots & Z'_0 D_{\tau x} - z'_0 D_{\tau y} - \tau^2 \underset{1}{Z'_2} = 0, \quad z'_0 D_{\tau x} + Z'_0 D_{\tau y} - \tau^2 \underset{1}{z'_2} = 0,
\end{array}
$$

każde przeto równanie w (1) da w szczególnym odpowiednim mu przypadku dwa liniowe równania. Wynikające ztąd $2n$ równań wprost wystarczają do oznaczenia $2n$ długości odstępów :

$$\tau x_1, \quad \tau x_2, \ldots \tau x_n, \quad \tau y_1, \quad \tau y_2, \ldots \tau y_n.$$

(49) Kładąc w (48) ogólnie $\qquad \tau x = \tau^2 \tau'_x; \quad \tau y = \tau^2 \tau'_y,$

otrzymuje się równania, z których τ^2 wyrugować można. Tak np. w przypadku (I) mamy dwa wypadkowe związki

(50)
$$Z_0 D_{\tau'_x} - z_0 D_{\tau'_y} + \underset{1}{Z_2} = 0, \qquad z_0 D_{\tau'_x} + Z_0 D_{\tau'_y} + \underset{1}{z_2} = 0.$$

Oznaczając przez τ' liczebnie największą z ilości $\tau'_{x_1}, \ \tau'_{y_1}, \ \tau'_{x_2}, \ \tau'_{y_2}, \ldots \tau'_{x_n}, \ \tau'_{y_n}$, i znalazłszy np. z rozwiązania owych $2n$ równań :

(51)
$$\tau' = \pm \left(\frac{m}{10^{k+2}} + \frac{n}{10^{k+2}} + \ldots \right)$$

otrzymamy dla obliczenia zredukowanych granicznych wartości (x''), (x'''), (y''), (y''') potrzebnych w dalszym rachunku, równania :

(52)
$$
\begin{array}{ll}
(x'') = x + \xi''_{2r+k}, & (x''') = (x'') + \dfrac{1}{10^{2r+k}}; \\[2ex]
(y'') = y + \eta''_{2r+k}, & (y''') = (y'') + \dfrac{1}{10^{2r+k}};
\end{array}
$$

i nowy w tym względzie ustanowiony odstęp :

(53)
$$(\tau') = \frac{1}{10^{2r+k}}.$$

Wszystkie uwagi poczynione w § 4 od (36) do (44) przy podobnej sposobności zachowują swą moc i tutaj.

Rozwiązanie równań danych w (1), sprowadziliśmy właściwie do rozwiązania $2n$ równań z $2n$ pierwszorzędnemi niewiadomemi $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$, i otrzymaliśmy odpowiednie równania określające w postaci :

(54)
$$Z'_0 = Z''_0 = \ldots = \overset{(n)}{Z_0} = z'_0 = z''_0 = \ldots = \overset{(n)}{z_0} = 0.$$

Jeżeli równania (1) mają dozwalać na układy jednowyrazowych pierwszo lub drugo-rzędnych pierwiastków, to n pierwszorzędnych ilości $x_1, x_2, \ldots x_n$; muszą także sprawdzać $2n$ równań przy założeniu $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, w drugim zaś razie n drugorzędnych ilosci $y_1, y_2, \ldots y_n$ przy założeniu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Żadnego z tych wypadków w ogólności przyjąć nie można, jednakże w szczególnych razach zdarzyć się one mogą jeżeli spółczynniki w równaniach (1) sprawdzają nadmiarowe warunki podane w (54). Dla tego teżwystarczy wskazać obliczenie układów pierwszorzędnych pierwiastków, tylko dla równań o pierwszorzędnych współczynnikach.

W układach równań o pierwszorzędnych współczynnikach można, dla rozdzielania ich pierwszorzędnych układów pierwiastków, użyć metody skalarnej (Staffelmethode) wskazanej w (17)-(20), z tem nastręczającem się tu uproszczeniem, iż nie z przebiegu linii obwodowej, ale tylko z przebiegu po osi ox, liczbę mutacyi wyznaczyć należy.

Odpowiedni stosunek obwodowy nastręcza nam każdorazowy wielomian równania, z kolei w zakres badania wciągnięty. Miejsca mutacyj stanowią tu właśnie punkta pierwiastkowe, i wyrównywają się co do swej liczby.

I co do prawidłowego ścieśniania pierwszorzędnych układów pierwiastków nie potrzeba nowego badania wprowadzać; gdyż metoda wyprowadzona dla równań (54) zawierająca się w ustawieniu związków (44) prowadzi wprost do wyznaczenia z wszelką żądaną dokładnością pierwszorzędnych układów pierwiastków $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ dla równań (54) o pierwszorzędnych współczynnikach, a to przez prawidłowe ścieśnianie odstępów.

Poszczególny niejako sposób utworzenia (7) i (8) ze względu na równania (1) nie przedstawia nic sprzecznego z wyrażonem tylko co twierdzeniem, gdyż dla

$$D = \frac{d}{dx_1}\xi_1 + \frac{d}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{d}{dx_n}\xi_n + \frac{d}{dy_1}\eta_1 + \frac{d}{dy_2}\eta_2 + \ldots + \frac{d}{dy_n}\eta_n,$$

tenże sam sposób, następującym zwykłym zastąpić można :

$$s!\,Z_s = Z_0 D^s, \quad s!\,z_s = z_0 D^s.$$

Nie zobaczy się też nic zdrożnego w tem, iż ustanowienie związków (44) polega na parzystej liczbie równań, skoro się zauważy, iż z każdego pojedynczego równania w (54), bez uwzględnienia pozostałych wyprowadza się tak istniejące w danym razie kriteryum, jako też i odpowiadające mu oba związki.

Zresztą dla $\varphi = 0$ przedstawiają się równania (1) opatrzone pierwszorzędnemi współczynnikami. Ze względu na pierwszorzędne układy pierwiastków otrzymamy $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 0$, $D_y = z_0 = z_1 = \ldots = z_n = 0$; związki (44) sprowadzają się w drugim wierszu do tożsamości, zawarte zaś w pierwszym wierszu stanowią właśnie wzory potrzebne do ścieśnienia pierwszorzędnych odstępów. Z równań (48) pozostaje w każdym przypadku także tylko pierwsze i służy do wyznaczenia odstępów $\tau_{x_1}, \tau_{x_2}, \tau_{x_3}, \ldots x_n$.

WYPROWADZENIE METODY FOURIER'A PRZY ROZDZIELANIU PIERWIASTKÓW PIERWSZORZĘDNYCH.

Niech będzie :

(1) $$f(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

równanie o pierwszorzędnych współczynnikach.

Bacząc tylko na pierwszorzędne wartości x otrzymamy, według § 1 (5), (7), na $y = \varphi(x) = 0$, a więc $D = 0$, $\operatorname{dos} D = 1$, $\operatorname{wst} D = 0$:

(2) $$s!\,Z_s = f_s(x), \quad s!\,z_s = 0, \qquad \text{a ztąd} \quad \sigma_s = Z_s, \ \alpha_s = 0,$$

gdzie s wyraża liczbę różniczkowań, jakie na wyrażeniu $f(x)$ wykonać należy.

Z (1) znajdziemy zupełnie ogólnie :

$$f_{r-s}(x+\rho)=f_{r-s}(x)+f_{r-s+1}(x)\frac{\rho}{1!}+f_{r-s+2}(x)\frac{\rho^2}{2!}+\dots+f_{r-1}(x)\frac{\rho^{r-1}}{(r-1)!}+\text{etc.}$$

Wprowadzając w to równanie oznaczenia podane w (2) i kładąc nadto :

$$f_{r-s}(x+\rho)=(r-s)!\overset{x+\rho}{Z}_{r-s}$$

otrzymamy :

$$(r-s)!\overset{x+\rho}{Z}_{r-s}=(r-s)!\,Z_{r-s}+\frac{(r-s+1)!}{1!}Z_{r-s+1}\rho+\frac{(r-s+2)!}{2!}Z_{r-s+2}+\dots+\frac{(r-1)!}{(s-1)!}Z_{r-1}\rho^{s-1}+\frac{r!}{s!}Z_r\rho^s+\dots$$

a ztąd, z powodu $\dfrac{(r-s+m)!}{(r-s)!\,m!}=\dbinom{r-s+m}{m}$,

$$(3)\quad \overset{x+\rho}{Z}_{r-s}=Z_{r-s}+\binom{r-s+1}{1}Z_{r-s+1}\rho+\binom{r-s+2}{2}Z_{r-s+2}\rho^2+\dots+\binom{r-1}{s-1}Z_{r-1}\rho^{s-1}+\binom{r}{s}Z_r\rho^s+\dots$$

Niech tu Z_r będzie różnem od zera, a nadto niech kilka kolejnych mniejszą wskazówką niż r opatrzonych Z przyjmie wartość zera dla uważanej tu wartości x, wtedy dla dostatecznie małego ρ znajdziemy :

$$(4)\quad \overset{x+\rho}{Z}_{r-s}=\binom{r}{s}Z_r\rho^s,$$

skoro Z_{r-s} także w szeregu znikających Z się znajduje. Jeżeli jeszcze i Z_{r-s+1} dla tejże wartości x zerem się staje, to znajdziemy również :

$$(5)\quad \overset{x+\rho}{Z}_{r-s+1}=\binom{r}{s-1}Z_r\rho^{s-1}\rho \quad \text{a więc} \quad \overset{x+\rho}{Q}_{r-s}=\frac{\rho}{s},$$

rozumiejąc przez $\overset{x+\rho}{Q}$ stosunek krytyczny objaśniony w (60) i (61) § 4.

Pomyślmy szereg funkcyj :

$$(6)\quad Z_r,\ Z_{r-1},\ Z_{r-2},\ \dots\ Z_{r-m},\ Z_{r-m-1},$$

wraz z należnemi do nich stosunkami krytycznemi :

$$(7)\quad Q_{r-1},\ Q_{r-2},\ Q_{r-3}\dots Q_{r-m},\ Q_{r-m-1},$$

mający tę własność, iż z wyjątkiem Z_r i Z_{r-m-1} wszystkie inne funkcyje w (6) stają się zerami. W tym razie będzie $Q_{r-1}=0$, $Q_{r-m-1}=\pm\infty$, a wszystkie pozostałe ilorazy krytyczne podane w (7) przyjmują postać $\frac{0}{0}$.

Zmieniając x na $x+\rho$, otrzymamy w skutek przyjętej własności szeregu funkcyj (6) oraz związków (5) wskazany w (7) szereg ilorazów w postaci :

$$(8)\quad \frac{\rho}{1},\ \frac{\rho}{2},\ \frac{\rho}{3}\dots,\ \frac{\rho}{m},\ \frac{Z_{r-m-1}}{(r-m)\binom{r}{m}Z_r\rho^m}.$$

Ztąd wynika, iż w (7) z powodu $\rho=0$ tylko ostatni iloraz krytyczny przybiera wartość nieskończenie wielką, kiedy tymczasem wszystkie inne stają się zerami.

Następstwo znaków należących do kolejnych ilorazów krytycznych nazwijmy grupą krytyczną znaków.

Ze względu na parzyste lub nieparzyste m i z uwagi na znak ilorazu $(Z_{r-m-1} : Z_r)$ trzeba w (8) rozróżnić 4 przypadki w tworzeniu grup krytycznych znaków, otrzymamy więc z (8) :

$$
\tag{9}
\begin{array}{llll}
\text{dla} & \dfrac{Z_{r-m-1}}{Z_r} > 0 & \text{i parzystego } \; m & \left\{\begin{array}{ll} \text{dla} & (x-\rho) \; - \; - \; - \; - \; \dots \; - \; +, \\ \text{»} & (x+\rho) \; + \; + \; + \; + \; \dots \; + \; +; \end{array}\right. \\[2ex]
\text{»} & \dfrac{Z_{r-m-1}}{Z_r} > 0 & \text{i nieparzystego } m & \left\{\begin{array}{ll} \text{dla} & (x-\rho) \; - \; - \; - \; - \; \dots \; - \; -; \\ \text{»} & (x+\rho) \; + \; + \; + \; + \; \dots \; + \; +; \end{array}\right. \\[2ex]
\text{»} & \dfrac{Z_{r-m-1}}{Z_r} < 0 & \text{i parzystego } \; m & \left\{\begin{array}{ll} \text{dla} & (x-\rho) \; - \; - \; - \; - \; \dots \; - \; -, \\ \text{»} & (x+\rho) \; + \; + \; + \; + \; \dots \; + \; -; \end{array}\right. \\[2ex]
\text{»} & \dfrac{Z_{r-m-1}}{Z_r} < 0 & \text{i nieparzystego } m & \left\{\begin{array}{ll} \text{dla} & (x-\rho) \; - \; - \; - \; - \; \dots \; - \; +, \\ \text{»} & (x+\rho) \; + \; + \; + \; + \; \dots \; + \; -; \end{array}\right.
\end{array}
$$

Z tablicy tej wynikają następujące prawa :

1. Przy przejściu przez miejsce znikania *parzystej liczby* kolejnych funkcyj Z wypada zawsze *zysk tyluż znaków dodatnych* w odpowiedniej grupie krytycznej znaków.

(**10**) 2. Przy przejściu przez miejsce znikania nieparzystej liczby kolejnych funkcyj Z wypada w odpowiedniej grupie krytycznej znaków *zysk tyluż znaków dodatnych więcej luh mniej jednym* wedle tego, czy funkcye znikające zawarte są między granicznemi funkcyami *jednakowym lub niejednakowym znakiem* opatrzonemi.

W szeregu funkcyj (6) każde 2 sąsiednie wyrazy dają znak dodatny lub odjemny do grupy krytycznej, wedle tego, czy zestawienie ich znaków tworzy *zmianę*, czy *następstwo*. Podług tego można wyrażone w (10) prawo, wysłowić w ten sposób :

(**11**) α. Przejście przez miejsce znikania parzystej liczby kolejnych funkcyj Z objawia się w odpowiednim szeregu znaków jako strata tyluż zmian znaków.

β. Przejście przez miejsce znikania nieparzystej liczby kolejnych funkcyj Z objawia się w odpowiednim szeregu znaków strata tyluż zmian znaków, więcej lub mniej jedna wedle tego, czy znikające funkcyje zawarte są między funkcyjami granicznemi jednakowego czy niejednakowego znaku.

Opuśćmy w szeregu funkcyj (6) ostatni wyraz Z_{r-m-1}, wtedy we wszystkich gromadach znaków podanych w (9) odpadnie znak ostatni, i dochodzimy do wyniku :

(**12**) γ. Przejście przez miejsce znikania ilukolwiekbądź kolejnych funkcyj końcowych, okazuje się jako strata tyluż zmian znaków w odpowiednim szeregu.

δ. Przejście przez miejsce znikania jednej tylko pośredniej funkcyi Z między sąsiedniemi niejednakowym znakiem opatrzonemi funkcyjami zawartej, nie wywiera na mocy β żadnego wpływu na liczbę zmian w odpowiednim szeregu znaków.

Znalazłszy z dotychczasowego rozbioru wystarczające punkta oparcia do należytego ocenienia wpływu, jaki przejście przez miejsce znikania kolejnych funkcyj wywiera na odpowiedni szereg funkcyi jako też na krytyczną grupę znaków, postarajmy się o stosowne rozwiązanie pytania :

(13) *Dla ilu złożonych pierwiastków równania* $Z_{r-m-1}=0$ *należy wartość* x *odpowiadającą takiemu znikaniu uważać za wskazującą?*

Sposobem podanym w (4) znajdziemy dla dostatecznie małego ρ :

(14) $$\overset{x+\rho}{Z}_{r-m-1}=Z_{r-m-1}+\binom{r}{m+1}Z_r\rho^{m+1}=Z_{r-m-1}\left\{1+\binom{r}{m+1}\frac{Z_r}{Z_{r-m-1}}\rho^{m+1}\right\}.$$

Jeżeli ε jest dostatecznie małą ilością dodatną, to zawsze można tak wyznaczyć ρ, iż będzie :

$$\binom{r}{m+1}\frac{Z_r}{Z_{r-m-1}}\rho^{m+1}=-\varepsilon^{m+1}.$$

Z rozwiązania tego równania względem ρ, z uwagi, iż może być $\dfrac{Z_r}{Z_{r-m-1}}\gtrless 0,$

(15) wypada dla $$\frac{Z_r}{Z_{r-m-1}}>0\ldots\rho=(-1)^{\frac{1}{m+1}}\left\{\frac{Z_{r-m-1}}{\binom{r}{m+1}Z_r}\right\}^{\frac{1}{m+1}}\varepsilon;$$

(16) dla $$\frac{Z_r}{Z_{r-m-1}}<0\ldots\rho=(+1)^{\frac{1}{m+1}}\left\{\frac{-Z_{r-m-1}}{\binom{r}{m+1}Z_r}\right\}^{\frac{1}{m+1}}\varepsilon.$$

W obu tych razach otrzymamy z (14) :

$$\overset{x+\rho}{Z}_{r-m-1}=Z_{r-m-1}\left\{1-\varepsilon^{m+1}\right\},$$

a więc co do wartości liczebnej :

(17) $$\overset{x+\rho}{Z}_{r-m-1}<Z_{r-m-1}.$$

Ponieważ każde z wyrażeń $(-1)^{\frac{1}{m+1}}$ i $(+1)^{\frac{1}{m+1}}$ wskazuje na $(m+1)$ wartości, przeto wnioskujemy zupełnie jak w § **1**, iż wartość x odpowiadająca miejscu znikania w kolejnych Z może być uważaną jako wartość początkowa $(m+1)$ pierwiastków równania

(18) $$Z_{r-m-1}=0,$$

biorąc w wyrażeniu Z_{r-m-1} x, za niewiadomę.

Jeżeli w (15) m jest parzyste, to jedna z $(m+1)$ wartości $(-1)^{\frac{1}{m+1}}$ jest pierwszorzędną ujemną; w tym razie odpowiednie x ma wartość *wskazującą* dla m złożonych pierwiastków równania (18).

Jeżeli w (15) m jest nieparzyste, wtedy żadna z $(m+1)$ możebnych wartości $(-1)^{\frac{1}{m+1}}$ nie jest pierwszorzędną, w tym razie odpowiednie x wskazuje na $(m+1)$ złożonych pierwiastków w (18).

(19) Jeżeli w (16) m jest parzyste, wtedy jedna z $(m+1)$ możebnych wartości $(+1)^{\frac{1}{m+1}}$ jest pierwszorzędną dodatną, a odpowiednie x wskazuje na m złożonych pierwiastków w (18).

Jeżeli nareszcie w (16) m jest nieparzyste, wtedy dwie z możebnych $(m+1)$ wartości $(+1)^{\frac{1}{m+1}}$ są pierwszorzędne, a odpowiednie x wskazuje w tym razie na $(m-1)$ złożonych pierwiastków w równaniu (18).

Nadto wiadomo z danego w (62) § 1 orzeczenia, iż wartość x będąca wskazującą dla złożonych pierwiastków w (18) może być również uważaną za wskazującą tyluż pierwiastków złożonych równania:

(20) $$Z_0 = f(x) = 0.$$

Na zasadzie twierdzeń w (18) i (20) możemy łatwo zrozumieć następujące prawa:

α') Wartość x dla której parzysta liczba kolejnych funkcyj Z znika, wskazuje tyleż złożonych pierwiastków w (20), jeżeli Z_0 nie znika równocześnie.

β') Wartość x, dla której nieparzysta liczba kolejnych funkcyj Z znika, zaś Z_0 wypada różnem od zera, wskazuje w (20) tyleż pierwiastków złożonych, więcej lub mniej jednym, wedle tego, czy znikające kolejno funkcyje Z zawarte są między fuukcyjami o jednakowym czy o równych znakach.

γ') Wartość x dla której pewna liczba kolejnych funkcyj końcowych szeregu

(21) $$Z_n, \quad Z_{n-1}, \quad Z_{n-2}, \ldots Z_2, \quad Z_1, \quad Z_0,$$

równocześnie znika, wskazuje tyleż pierwszorzędnych równych sobie pierwiastków w (20).

δ') Może się też zdarzyć, że skutkiem jakiejś wartośćj x funkcyje Z znikają równocześnie grupami w kilku miejscach szeregu (20); w tym razie należy wedle tylko co danego przepisu zbadać liczbę wskazanych pierwiastków ze względu na każdą grupę oddzielnie, i uznać tę wartość x za wskazującą dla całkowitej tak znalezionej liczby pierwiastków (20). Wypada ztąd, iż jedna wartość x może równocześnie wskazywać *złożone* jakoteż pierwszorzędne równe pierwiastki w (20), skoro pomiędzy grupami znikającemi równocześnie funkcyj Z, znajdzie się grupa kolejnych funkcyj końcowych w (21).

Wyprowadziliśmy prawa α), β), γ), δ), α'), β') γ'), δ') na podstawie równań (4) i (14) pozostawiając czytelnikowi wyprowadzenie tychże praw z uwag ogólnych o sprzężonych gałęziach krzywych, a mianowicie ze stanowiska wyniku wyłożonego w (18) § 2.

Wobec tego od (10) do (27) w § 2 prowadzonego rozbioru wyłożone w (20) prawa ustanowione są w oczekiwaniu najmniejszej możebnej liczby wskazanych pierwiastków, które się wskazują sprzężonemi gałęziami krzywych, wychodzącemi z punktów szczególnych odpowiadających warunkom:

$$Z_{r-1} = Z_{r-2} = \ldots = Z_{r-m} = 0.$$

W następstwie udowodnić mamy, iż przypuszczona w (21) liczba wskazanych pierwiastków jest właśnie prawdziwą, że więc w przebiegu tych gałęzi krzywych, liczby tej przekroczyć nie wolno.

W tym celu pomyślmy szereg funkcyj (21), którego wyrazy są na przemian parzystego i nieparzystego rzędu ze względu na niewiadomą x. Odstępu ($-$ L', L) ustanowionego w (68) (70) § 3, a zamykającego wszystkie pierwszorzędne punkta pierwiastkowe równań:

(24) $$Z_{n-1}, \quad Z_{n-2}, \ldots Z_2 = Z_1 = Z_0,$$

użyjemy na to, ażeby dla wszystkich miejsc pośrednich obliczyć podane w (21) funkcyje Z i znaleźć każdorazową gromadę znaków. Dla $x = -$ L' otrzymamy oczywiście gromądę samych zmian znaków, i to w liczbie n. Tak samo dla $x = +$ L gromadę dającą n następstw znaków. Przechodząc przez odstęp od $-$ L' ku $+$ L przychodzi się ewentualnie w części do miejsc sprowadzających znikanie funkcyj środkowych, w części nareszcie do miejsc, które się stają powodem znikania równoczesnego środkowych i końcowych funkcyj Z. W każdym z tych przypadków, a w żadnym innym, ginie liczba zmian znaków wyznaczona wedle α) β) γ) i nigdzie w przechodzie przez odstęp nie ma powodu odnalezienia straconych zmian znaków.

W przebiegu całego odstępu ginie n zmian znaków to jest tyle, ile posiada pierwiastków równanie (20).

(25) Z γ, γ' pokazuje się, iż liczba pierwiastków pierwszorzędnych w (20) daje sie wynaleźć tylko z postępowo jawiącego się znikania funkcyj końcowych. Liczba ginących zmian znaków dająca się wyznaczyć ze znikania grup środkowych jest zawsze parzystą i odpowiada wprost liczbie złożonych pierwiastków w (20). Liczba ta wyrównywa się doniosłością wskazującej wartości x wyznaczającej się wedle α) β) tak dobrze, jak i wedle α') i β') — a doniosłości tej nie wolno zmienić w ten sposób, iżby na rachunek jednej ze wskazujących wartości x więcej złożonych pierwiastków policzono, aniżeli prawa w α,), β), α'), β') pozwalają, gdyż inaczej przyjąćby trzeba, wbrew niezaprzeczalnemu faktowi, iż innej jakiejś wskazującej wartości odpowiada mniej złożonych pierwiastków, aniżeli na mocy powyższych praw odpowiadać może i musi.

(26) Z uwagi na rozbiór w (25) podany, służą prawa α'), β'), γ') nie tylko dla zupełnego szeregu funkcyj danego w (31), ale także dla każdego innego szeregu wynikającego z (21) za opuszczeniem ilukolwiekbądź końcowych wyrazów.

Dla $x=0$ współczynniki w (1) przedstawiają szereg :

(27) $$A_{n-1},\ A_{n-2},\ \ldots A_n,\ A_1,\ A_0,$$

dający w tym razie tę samą grupę znaków, co i (20). Wypadająca ztąd liczba następstw znaków pokazuje, ile zmian znaków zaginęło w ujemnym odstępie $(-L', 0)$ i dowodzi iż równanie (1) może najwyżej tyleż ujemnych pierwszorzędnych pierwiastków posiadać. Tak samo wskazuje zawarta w (27) liczba zmian znaków najwyższą możebną liczbę dodatnych pierwszorzędnych pierwiastków należących do równania (1).

(28) Jeżeli w szeregu (27) znajduje się jeden lub więcej oddzielnych gromad współczynników równych zeru, wtedy $x=0$ uznaje się za wartość wskazującą dla pierwiastków, których liczba wedle α'), β'), γ') zwykłym sposobem się wynajduje. Pojedyncze środkowe współczynniki mające wartość zera, przyczyniają się do wskazania złożonych pierwiastków tylko wtedy, jeżeli się one znajdują między sąsiedniemi współczynnikami jednakowym znakiem opatrzonemi.

Oznaczmy jak w (59) § 4 szereg funkcyj :

$$1,\ \overset{\alpha}{Z}_{n-1},\ \overset{\alpha}{Z}_{n-2},\ \ldots\ \overset{\alpha}{Z}_{r-1},\ \overset{\alpha}{Z}_r,$$

przez $[\alpha]_r$ a liczbę zmian znaków odpowiadających temuż szeregowi przez $(\alpha)_r$, to dla $\beta<\alpha$ wyrażenie :

(29) $$\delta_r=(\beta)_r-(\alpha)_r$$

oznacza stratę zmian znaków pokazującą się w szeregu $[\alpha]_r$ przy przejściu od $x=\beta$ aż do $x=\alpha$.

Dla każdego odstępu (α, β) otrzymamy ze względu na każdą funkcyję Z, jako końcową szeregu poczynającego się od $Z_n=1$ odpowiednie przez δ oznaczone wskazówki, i to w następującym porządku :

(30) $$\delta_{n-1},\ \delta_{n-2},\ \delta_{n-3},\ \ldots\ \delta_2,\ \delta_1,\ \delta_0.$$

Przy przejściu od $[\alpha]_r$ do $[\alpha]_{r-1}$ nie zyskuje się żadnej lub też jedną tylko zmianę znaku. Z tego powodu porównanie dwóch po sobie idących δ może dawać tylko jeden z następujących związków :

(31) $$\delta_{r-1}=\delta_r,\quad \delta_{r-1}=\delta_r+1,\quad \delta_{r-1}=\delta_r-1.$$

Jeżeli $\delta_r = u$, zaś $\delta_{r-s} = u + m$, a żadne δ między δ_r i δ_{r-s} nie ma wartości u, to można twierdzić, że koniecznie

(32) $$\delta_{r-1} = u + 1,$$

wypaść musi. Nie może bowiem wedle założenia δ_{r-1} przybrać wartości u ani też wartości $(u-1)$, gdyż inaczej sprzecznie z założeniem wartość ta rosnąc aż do $u+m$ musiałaby przechodzić przez u; co wraz z tem, co się powiedziało w (31) wystarcza do utwierdzenia (32).

Jeżeli w odstępie $(\alpha\beta)$ otrzymamy np. $\delta_r = \delta_{r-1} = 1$, to mamy znak, że w odstępie (α, β) zawarty jest pierwiastek równania $Z_{r-1} = 0$, oraz pierwiastek równania $Z_r = 0$. Pierwiastki te, które niech będą oznaczone przez x_{r-1} i x_r nie mogą być sobie równe, gdyż pierwiastek wspólny tym równaniom byłby wbrew założeniu $\delta_{r-1} = 1$ pierwiastkiem dwukrotnym równania $Z_{r-1} = 0$.

(33) Jeżeli pierwiastki te są różne i np. $x_r > x_{r-1}$, to można wystawić sobie v czyniące zadość warunkowi $x_r > v > x_{r-1}$ i widzimy że w szczuplejszym odstępie (α, v) leży dla $Z_{r-1} = 0$ jeden pierwiastek, zaś dla $Z_r = 0$ żadnego nie ma, że więc ze względu na odstęp (α, v) wypadają wartości wskazówek $\delta_r = 0$, $\delta_{r-1} = 1$. Gdyby zaś było $x_r < x_{r-1}$ a v zawarte między x_r i x_{r-1}, to w szczuplejszym odstępie (v, β) byłoby z pewnością $\delta_r = 0$, $\delta_{r-1} = 1$. Może się też zdarzyć, iż obok $\delta_{r-1} = 1$ wskazówka $\delta_r = 2$ wypadnie równa 2 i zapowi dwa pierwiastki x_r i x'_r. Pierwiastki te mogą być tylko pierwszorzędne, gdyż inaczej wbrew $\delta_{r-1} = 1$ w pomyślanym odstępie i dla $Z_{r-1} = 0$, dwa złożone pierwiastki byłyby wskazane.

(34) Czy oczywiście pierwszorzędny pierwiastek x_{r-1} przypada wewnątrz odstępu (x_r, x'_r), czy zewnątrz niego, można zawsze w pierwszym razie wewnątrz (x_r, x'_r) w drugim razie zewnątrz tegoż odstępu wyznaczyć odstęp szczuplejszy $(\alpha'\beta')$, dający właśnie $\delta_r = 0$, $\delta_{r-1} = 1$.

(35) Jeżeli w odstępie (α, β) $\delta_2 = 2$, wtedy w $Z_0 = 0$ są wskazane dwa pierwiastki x_1, x_2. Jeżeli pierwiastki te są pierwszorzędne i jeżeli zarazem $x_1 > x_2$, a liczba v zawarta między x_1 i x_2, to równanie $Z_0 = 0$ posiada w odstępach (αv) i $(v\beta)$ po jednym pierwszorzędnym pierwiastku i otrzymamy dla każdego z tych odstępów $\delta_0 = 1$. W odstępie $(\alpha\beta)$ może obok $\delta_0 = 2$ wskazówka δ_1 przybrać najwyżej wartość 3. Jeżeli pierwiastki x_1, x_2 należące do $Z_0 = 0$, są pierwszorzędne, wtedy z trzech dla $Z_1 = 0$ wskazanych pierwiastków jeden będzie z pewnością pierwszorzędnym zawartym w odstępie (x_1, x_2), pozostałe zaś nie mogą być złożone, gdyż wtedy x_1 i x_2 wbrew założeniu musiałyby być złożonemi. Pozostaje tylko przyjąć wszystkie 3 za pierwszorzędne; z tych trzech pierwszorzędnych pierwiastków należących do $Z_1 = 0$ nie mogą wszakże ani dwa ani wszystkie trzy zająć miejsca w odstępie (x_1, x_2), gdyż w takim razie musielibyśmy przypuścić taki odstęp, któryby w sobie mieścił, z wykluczeniem pierwiastków x_1 i x_2, tylko 2 lub 3 pierwiastki równania $Z_1 = 0$. Toby spowodowało w pierwszym razie związki $(\delta_1 = 2, \delta_0 = 0)$, w drugim razie związki $(\delta_1 = 3, \delta_0 = 0)$, które oczywiście stoją w sprzeczności z twierdzeniem (31).

(36) Tak samo możemy zaprzeczyć istnieniu razem obok siebie 2 lub wszystkich 3 pierwiastków równania $Z_1 = 0$ poza obrębem odstępu $(x_1\, x_2)$, i wnosimy, że tylko jeden z tych trzech pierwiastków zająć może i musi miejsce w obrębie odstępu (x_1, x_2). Możemy tedy ścieśniając odstęp $(\alpha\beta)$ dojść do takiego w końcu odstępu $(\alpha'\,\beta')$, który obok pierwiastków x_1, x_2 mieści w obrębie swoim jeden tylko pierwiastek równania $Z_1 = 0$ znajdujący się w odstępie $(x_1 x_2)$.

W takim odstępie $(\alpha'\beta')$ będziemy mieli $\delta_1 = 1$, $\delta_0 = 2$.

Przytoczone dowodzenie moc swą zachowuje, jakkolwiek blizkie siebie byłyby pierwszorzędne pierwiastki x_1 i x_2 wskazane przez $\delta_0 = 2$, a nawet i wtedy, kiedy pierwiastki te ze sobą i z pomiędzy niemi zawartym pierwiastkiem równania $Z_1=0$ się zrównają. Wynik ztąd płynący można wysłowić w ten sposób :

(37) *Jeżeli w jakimkolwiek odstępie, wskazane są tylko 2 i to pierwszorzędne pierwiastki równania* $Z_0=0$, *to w tymże odstępie lub też dostatecznie ścieśnionym spodziewać się należy wskazówki* $\delta_1=1$ *obok* $\delta_0=2$.

Widocznie, iż twierdzenie w (37) przysługuje dowolnie poznaczkowanym funkcyjom Z_r, Z_{r-1}. Pamiętając nadto o tem, co w (33), (34), (35) wypowiedziano, przyjdziemy łatwo do następującego zdania.

Jeżeli w odstępie $(\alpha\beta)$ wskazane są dwa pierwiastki pierwszorzędne równania $Z_{r-1}=0$, wtedy albo przy stosownem rozdzieleniem tego odstępu, znajdują się dwa inne odstępy zawierające po jednym pierwiastku równania $Z_{r-1}=0$ i dające $\delta_{r-1}=1$, albo też odstęp $(\alpha\beta)$ da się zastąpić innym szczupłejszym $(\alpha'\beta')$ dającym gromadę wskazówek $(\delta_{r+1}=0,\ \delta_r=1,\ \delta_{r-1}=2)$.

(39) Jeżeli zaś wodstępie $(\alpha\beta)$, za pośrednictwem $(\delta_0=2,\ Z_0=0)$, ukazują się dwa złożone pierwiastki, wtedy odstępowi temu odpowiada, stosownie do praw (21), wartość wskazująca x, nadająca ; albo funkcyi pojedynczej z grupy $(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots Z_{n-1})$, np. funkcyi Z_r wartość zera, i powodująca dla sąsiednich funkcyj jednakowe znaki, albo też, dla tej wartości x znikają 3 kolejne funkcyje Z np. Z_{r+1}, Z_r, Z_{r-1}, podczas kiedy przytykające do nich funkcyje Z_{r+2}, Z_{r-2} są znaków przeciwnycb. W każdym z tych przypadków można w obrębie $(\alpha\beta)$ wyznaczyć częściowy odstęp $(\alpha'\beta')$, który wskazującą wartość należycie ściśle odgranicza, a ze względu np. na funkcyje (Z_{r+1}, Z_r, Z_{r-1}) daje gromadę wskazówek $(\delta_{r+1}=0,\ \delta_r=1,\ \delta_{r-1}=2)$. Gdyby wskazująca wartość x nadawała funkcyi Z_1 wartość zera a funkcyjom Z_2, Z_0 jednakowe znaki, można byłoby tak samo wyznaczyć odstęp częściowy $(\alpha'\beta')$ objawiający się gromadą wskazówek $(\delta_2=0,\ \delta_1=1,\ \delta_0=2)$.

(40) Z (38) i (39) widać, iż z gromady wskazówek $(\delta_{r+1}=0,\ \delta_r=1,\ \delta_{r-1}=2)$ w odstępie $(\alpha\beta)$ wywnioskować nie można,czy oba piewiastki wskazane w $Z_{r-1}=0$ uważać należy za pierwszorzędne różne, czy równe, lub nawet za złożone sprzężone, gdyż każda z tych rodzajów par pierwiastków zdolną jest sprowadzić wspomnianą gromadę wskazówek. Z tego powodu nazywamy odstęp taki *odstępem wątpliwym*. Podług Fouriera okazać można, w jaki sposób należy użyć obok wskazówek, wartości funkcyj Z_{r+1}, Z_r, Z_{r-1}, odpowiadająccyh takiej gromadzie wskazówek, ażeby w tym względzie stanowczo rozstrzygnąć można.

Jeżeli gromada znaczków :

$$(\delta_{r+1}=0,\ \delta_r=1,\ \delta_{r-1}=2), \tag{41}$$

ma wskazywać dwa pierwszorzędne pierwiastki $x'<x''$ równania $Z_{r-1}=0$, należy dla znalezienia tegoż rozstrzygnięcia utworzyć szeregi funkcyj

$$[\alpha]_{r-1}=\overset{\alpha}{Z}_{n-1},\ \overset{\alpha}{Z}_{n-2},\ \ldots\ \overset{\alpha}{Z}_{r+1},\ \overset{\alpha}{Z}_r,\ \overset{\alpha}{Z}_{r-1}, \qquad [\beta]_{r-1}=\overset{\beta}{Z}_{n-1},\ \overset{\beta}{Z}_{n-2},\ \ldots\ \overset{\beta}{Z}_{r+1},\ \overset{\beta}{Z}_r,\ \overset{\beta}{Z}_{r-1} \tag{42}$$

odpowiednie odstępowi $(\alpha\beta)$, a otrzyma się wedle gromady (41) ilorazy krytyczne :

$$\begin{aligned} &\overset{\alpha}{Q}_{r-1}<0,\ \overset{\alpha}{Q}_r<0; \quad \text{ztąd} \quad \overset{\alpha}{Q}_{r-1}\times\overset{\alpha}{Q}_r=(\overset{\alpha}{Z}_{r-1}\ :\ r(r+1)\overset{\alpha}{Z}_{r+1})>0, \\ &\overset{\beta}{Q}_{r-1}>0,\ \overset{\beta}{Q}_r>0; \quad \text{»} \quad \overset{\beta}{Q}_{r-1}\times\overset{\beta}{Q}_r=(\overset{\beta}{Z}_{r-1}\ :\ r(+1)\overset{\beta}{Z}_{r+1})>0. \end{aligned} \tag{43}$$

gdyż z powodu $\delta_{r+1}=0$, $\overset{\alpha}{Z}_{r+1}$ i $\overset{\beta}{Z}_{r+1}$ muszą mieć jednakowe znaki, a zatem i $\overset{\alpha}{Z}_{r-1}$ i $\overset{\beta}{Z}_{r-1}$ muszą być jednakowego znaku. Punkta $x=\alpha$ i $x=\beta$, na krzywej Descartesa $z=Z_{r-1}$, są obydwa punktami wypukłości, dla tego otrzymujemy w przybliżeniu

$$x'=\alpha-\overset{\alpha}{Q}_{r-1},\quad x''=\beta-\overset{\beta}{Q}_{r-1}\quad\text{a zatem z powodu}\quad x'<x'',\tag{44}$$
$$\beta-\alpha>\overset{\beta}{Q}_{r-1}-\overset{\alpha}{Q}_{r-1}.$$

$\overset{\beta}{Q}_{r-1}$ i $-\overset{\alpha}{Q}_{r-1}$ są według (43) ilościami dodatnemi; mamy więc ze względu na (44) twierdzenie :

(45) *Jeżeli w wątpliwym odstępie* $(\alpha\beta)$ *znajdują się dwa pierwszorzędne pierwiastki danego równania, natenczas suma liczebnych wartości ilorazów krytycznych wypada mniejszą od długości odstępu.*

Jeżeli zaś pierwiastki równania $Z_{r-1}=0$, odpowiadające gromadzie wskazówek (41), są złożone, to funkcyja Z_{r-1} nie zniknie wewnątrz $(\alpha\beta)$, podczas kiedy funkcyja Z_r przy ścieśnianiu granic odstępu coraz bardziej zbliżać się będzie do zera. W tym razie iloraz krytyczny Q_{r-1} przy ścieśnianiu granic nietylko zrówna się z odstępem tychże, ale go nawet znacznie przyspieszy.

(46) 𝔄) *Jeżeli jeden z ilorazów krytycznych* $-\overset{\alpha}{Q}_{r-1}$, $\overset{\beta}{Q}_{r-1}$ *albo ich suma przewyższa odstęp* $(\beta-\alpha)$, *wtedy pierwiastki równania* $Z_{r-1}=0$, *wskazane przez* $\delta_{r-1}=2$, *są złożone.*

(47) Jeżeli wobec gromady wskazówek (41) kryteryum (46) nie stwierdza się, to w odstępie $(\alpha\beta)$ należy spodziewać się dwóch pierwiastków pierwszorzędnych rzetelnych równania $Z_{r-1}=0$, a przy ścieśnianiu granic szukać należy pierwiastku równania $Z_r=0$, w celu oddzielenia od siebie pierwiastków równania $Z_{r-1}=0$. Jeżeli w nowym szczuplejszym odstępie pojawi się znowu gromada wskazówek (41), a kryteryum (46) nie stwierdzi się, to należy się przekonać, czy podczas zbliżania się do zera funkcyi Z_r nie zbliża się też i Z_{r-1} i to coraz prędzej do zera. Innemi słowy, czy szukane pierwiastki równania $Z_{r-1}=0$ nie są równe. O tem można się przekonać następującym sposobem :

Szukajmy największej wspólnej miary $\varphi(x)$ dla Z_r i Z_{r-1}. Jeżeli $\varphi(x)$ znika wewnątrz $(\alpha\beta)$, to pierwiastki równania $Z_{r-1}=0$ są sobie równe. Jeżeli Z_r i Z_{r-1} nie mają żadnej wspólnej miary, albo jeżeli istniejąca wspólna miara $\varphi(x)$ wewnątrz $(\alpha\beta)$ nie znika, to jesteśmy pewni, że pierwiastki równania $Z_{r-1}=0$ są albo pierwszorzędne i różne, albo złożone. Scieśniając ciągle granice odstępu przyjdziemy nareszcie do takiego odstępu, iż, albo pierwszorzędne pierwiastki już będą oddzielone, albo jeżeli takich nie ma, do stanowczego okazania się kryteryum (46).

Przyszedłszy do odstępu $(\alpha\beta)$ dającego gromadę wskazówek

$$(\delta_{r+2}=\delta_{r+1}=0,\ \delta_r=1,\ \delta_{r-1}=2),\tag{48}$$

możemy z jednej strony przedsięwziąć prawidłowe obliczenie pierwiastku równania $Z_r=0$, a z drugiej możemy w tym razie zamiast krzywej Descartesa $z=Z_{r-1}$ wziąć krzywę paraboliczną dotykającą, któraby, jak to wkrótce zobaczymy, odnośnie do właściwości pierwiastków równania wskazanych przez $\delta_{r-1}=2$, dawała proste i stanowcze rozstrzygnięcia.

Ze względu na granice odstępu α i β otrzymujemy podług Taylora następujące wzory dla przybliżonego obliczania dwóch pierwiastków o których mowa :

$$\overset{\alpha}{Z}_{r-1}+\binom{r}{1}\overset{\alpha}{Z}_r(x-\alpha)+\binom{r+1}{2}\overset{\alpha}{Z}_{r+1}(x-\alpha)^2=0;\quad \overset{\beta}{Z}_{r-1}+\binom{r}{1}\overset{\beta}{Z}_r(x-\beta)+\binom{r+1}{2}\overset{\beta}{Z}_{r+1}(x-\beta)^2=0.\tag{49}$$

Podzielmy pierwsze równanie przez $\binom{r+1}{2}\overset{\alpha}{Z}_{r+1}$; drugie przez $\binom{r+1}{2}\overset{\beta}{Z}_{r+1}$; wypadnie :

(50) $$(x-\alpha)^2+2\overset{\alpha}{Q}_r(x-\alpha)+2\overset{\alpha}{Q}_r\overset{\alpha}{Q}_{r-1}=0;\quad (x-\beta)^2+2\overset{\beta}{Q}_r(x-\beta)+2\overset{\beta}{Q}_r\overset{\beta}{Q}_{r-1}=0,$$

a ztąd na oznaczenie przybliżonych wartości x :

(51) $$x-\alpha=-\overset{\alpha}{Q}_r\pm\sqrt{2\overset{\alpha}{Q}_r\left(\frac{1}{2}\overset{\alpha}{Q}_r-\overset{\alpha}{Q}_{r-1}\right)};\quad x-\beta=-\overset{\beta}{Q}_r\pm\sqrt{2\overset{\beta}{Q}_r\left(\frac{1}{2}\overset{\beta}{Q}_r-\overset{\beta}{Q}_{r-1}\right)}.$$

W skutek $\delta_{r+2}=0$, Z_{r+2} nie zmienia znaku wewnątrz $(\alpha\beta)$, tym czasem Z_{r+1} wzrasta albo maleje. Oznaczmy liczebnie większą z funkcyj $\overset{\alpha}{Z}_{r+1}$, $\overset{\beta}{Z}_{r+1}$ symbolem $\underset{\vee}{Z}_{r+1}$, a symbolem $\underset{\wedge}{Z}_{r+1}$ liczebnie mniejszą, wtedy $\underset{\vee}{Z}_{r+1}$ jest największą a $\underset{\wedge}{Z}_{r+1}$ najmniejszą z liczebnych wartości jakie Z_{r+1} wewnątrz $(\alpha\beta)$ przybrać może.

(52) Wstawmy w (49) $\underset{\vee}{Z}_{r+1}$ zamiast $\overset{\alpha}{Z}_{r+1}$ i $\overset{\beta}{Z}_{r+1}$; krzywe styczne paraboliczne znajdują się na stronie wklęsłej krzywej $z=Z_{r-1}$, ztąd wynika, że krzywa $z=Z_{r-1}$ wypukła względem ox przetnie tę oś albowiem krzywe styczne zostających po jej stronie wklęsłej przecinają tę oś.

(53) Kładąc w (49) $\underset{\wedge}{Z}_{r+1}$ zamiast $\overset{\alpha}{Z}_{r+1}$, $\overset{\beta}{Z}_{r+1}$; krzywe styczne będą leżały po stronie wypukłej krzywej $z=Z_{r-1}$, a zatem krzywa $z=Z_{r-1}$ wypukła względem osi ox nie przetnie jej, albowiem krzywe styczne leżące po jej stronie wypukłej względem osi ox nie zchodzą się z tą osią.

W przypadku (52) wypada :

$$\overset{\alpha}{Z}_r:(r+1)\underset{\vee}{\overset{\alpha}{Z}}_r=\underset{\wedge}{Q}_r;\quad \overset{\beta}{Z}_r:(r+1)\underset{\vee}{\overset{\beta}{Z}}_r=\underset{\wedge}{Q}_r,$$

a ztąd :

(54) $$(x-\alpha)=-\underset{\wedge}{\overset{\alpha}{Q}}_r\pm\sqrt{2\underset{\wedge}{\overset{\alpha}{Q}}_r\left(\frac{1}{2}\underset{\wedge}{\overset{\alpha}{Q}}_r-\overset{\alpha}{Q}_{r-1}\right)};\quad x-\beta=-\underset{\wedge}{\overset{\beta}{Q}}_a\pm\sqrt{2\underset{\wedge}{\overset{\beta}{Q}}_r\left(\frac{1}{2}\underset{\wedge}{\overset{\beta}{Q}}_r-\overset{\beta}{Q}_{r-1}\right)}.$$

W przypadku (53) wypada tym samym sposobem :

(55) $$x-\alpha=-\underset{\vee}{\overset{\alpha}{Q}}_r\pm\sqrt{2\underset{\vee}{\overset{\alpha}{Q}}_r\left(\frac{1}{2}\underset{\vee}{\overset{\alpha}{Q}}_r-\overset{\alpha}{Q}_{r-1}\right)};\quad x-\beta=-\underset{\vee}{Q}_r\pm\sqrt{2\underset{\vee}{\overset{\beta}{Q}}_r\left(\frac{1}{2}\underset{\vee}{\overset{\beta}{Q}}_r-\overset{\beta}{Q}_{r-1}\right)}.$$

Jeżeli pod względem liczebnym sprawdza się chociaż jeden ze związków :

(56) $$\overset{\alpha}{Q}_{r-1}<\frac{1}{2}\underset{\wedge}{\overset{\alpha}{Q}}_r;\quad \overset{\beta}{Q}_{r-1}<\frac{1}{2}\underset{\wedge}{\overset{\beta}{Q}}_r,$$

wypadek w (54) będzie pierwszorzędny i odpowiednia krzywa styczna po stronie wklęsłej przetnie oś ox, a tem bardziej krzywa $z=Z_{r-1}$ zejdzie się z tąż osią. W tym razie pierwiastki równania $Z_{r-1}=0$ wskazane przez $\delta_{r-1}=2$ są pierwszorzędne.

Jeżeli przeciwnie pod względem liczebnym sprawdzi się chociaż jeden ze związków:

(57) $$\overset{\alpha}{Q}_{r-1} > \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\underset{\nu}{Q}}_{r}, \quad \overset{\beta}{Q}_{r-1} > \frac{1}{2}\overset{\beta}{\underset{\nu}{Q}}_{r},$$

wypadek w (55) będzie miał postać ilości złożonej. Odpowiednia krzywa styczna po stronie wypukłej krzywej $z = Z_{r-1}$ nie zchodzi się wcale z osią ox, a tem więcej nie można przypuścić zejścia się krzywej $z = Z_{r-1}$ z tą osią. Ostatecznie więc okaże się, iż w tym razie pierwiastki wskazane przez $\delta_{r-1} = 2$ są złożone.

Gdyby wszelako nierówności (56) (57) okazały się w odwrotnym kierunku nierówności, w takim razie nie byłoby pewności o istocie pierwiastków wskazanych przez $\delta_{r-1} = 2$. Odpowiedni odstęp trzeba wtedy innym szczuplejszym zastąpić, ażeby za pomocą niego ostatecznie o istocie tej orzeknąć.

Pojmując ilorazy kierownicze tylko liczebnie, można prawa podane w (56) i (57) wysłowić tak:

𝔅). *Jeżeli w odstępie* ($\alpha\beta$) *okaże się jeden iloraz mniejszym niż połowa słabego najbliższą wyższą wskazówką obdarzonego ilorazu, wtedy pierwiastki wskazane przez* $\delta_{r-1} = 2$ *są pierwszorzędne.*

(58) *Jeżeli zaś w odstępie tym jeden z owych ilorazów większym się okaże, niż połowa silnego najbliższą wyższą wskazówką opatrzonego ilorazu, wtedy pierwiastki wskazane przez* δ_{r-1} *są złożone.*

Na podstawie rozwiniętych tu zasad możemy przystąpić do ustanowienia prawidłowego postępowania: tak dla oddzielenia pierwszorzędnych pierwiastków w odstępie ($\alpha\beta$), jako też dla wyszukania wartości wskazujących odpowiednich złożonym pierwiastkom równania $Z_0 = 0$.

Jeżeli w odstępie ($\alpha\beta$) wypadnie $\delta_0 > 0$, to w odpowiednim szeregu:

(59) $$\delta_{n-1},\ \delta_{n-2}\ .\ .\ .\ \delta_2,\ \delta_1,\ \delta_0,$$

idąc od prawej ku lewej stronie, potrzeba wyszukać pierwsze δ równające się jedności, znalazłszy na tej drodze dajmy $\delta_r = 1$, można być pewnym że oddzielenie pierwiastków doszło już do równania $Z_r = 0$. Gdyż miejsce znikania jednej lub kilku funkcyj $Z_{n-1}, Z_{n-2}\ .\ .\ .\ Z_{r+1}, Z_{r+1}$ w odstępie danym, nie może dla równania $Z_r = 0$ dawać żadnej wartości wskazującej x, albowiem inaczej wbrew $\delta_r = 0$ przynajmniej dwóch złożonych pierwiastków równania $Z_r = 0$ w odstępie tym spodziewaćby się trzeba.

Obok $\delta_r = 1$ znajdzie się z powodu (32) wskazówka $\delta_{r-1} = 2$; ze względu na δ_{r+1} znajdziemy wskazówkę tę: albo już równą zeru, albo też sprawdzi się ona do zera za użyciem częściowego odstępu ($\alpha'\beta'$), a zatem dla tego odstępu da ona gromadę wskazówek $\delta'_{r+1} = 0$, $\delta'_r = 1$. Z dalszych wskazówek δ'_{r-1}, δ'_{r-2}, δ'_{r-3}, . . . δ'_2, δ'_1, δ'_0: albo żadna nie jest jednością a więc $\delta'_{r-1} = 2$, albo jedna z nich $\delta'_{r-s} = 1$ leżąca najbliżej δ'_0 w odstępie (α', β'). W pozostałych częściowych odstępach ($\alpha\alpha'$), ($\beta\beta'$) otrzymamy z pewnością $\delta_r = 0$ i znajdziemy np. $\delta_{r-s} = 1$ jako wskazówkę pod względem własności wartościowej zbliżoną najbardziej do δ_0. W każdym razie posuwa się oddzielanie pierwiastków i wartości wskazujących coraz więcej ku prawej, to jest do tej gromady kolejnych funkcyj Z, w której żaden znaczek po niżej Z stojący wartości r nie dosięga. Idąc tak dalej otrzymuje się wreszcie takie odstępy częściowe, z których każdy z osobna daje $\delta_0 = 0$ albo $\delta_0 = 1$.

Gdyby w jakim odstępie wskazówka $\delta_r = 1$ była w tym względzie najbliższą δ_0, zaś gromada ($\delta_{r+1} = 0$, $\delta_r = 1$, $\delta_{r-1} = 2$) już uzyskaną, wtedy należy za pomocą 𝔄) lub za pomocą 𝔅) zbadać istotę dwóch pierwiastków przez $\delta_{r-1} = 2$ wskazanych. Jeżeli one są złożone, to właśnie ten pierwiastek równania $Z_r = 0$ wskazany przez $\delta_r = 1$ jest wartością wskazującą x dla złożonych dwóch pierwiastków w $Z_0 = 0$. Jeżeli zaś owe pierwiastki wskazane przez $\delta_{r-1} = 2$ są równe, to trzeba się przekonać, czy dla tej wartości x nie znikają też i pozostałe funkcyje $Z_{r-2}, Z_{r-3}, \ldots Z_2, Z_1, Z_0$; a jeżeli tak jest istotnie, to wnieść trzeba, iż ta wartość x jest $(r+1)$-krotnym pierwiastkiem równania $Z_0=0$. Gdyby zaś to x nie sprowadzało wszystkich wyrazów $Z_{r-2}, Z_{r-3}, \ldots Z_1, Z_0$ równocześnie do zera, a tylko częściami je na zero zamieniało, wtedy według α'), β',), γ'), δ'), zbadać wypada, ile pierwiastków równania $Z_0=0$ wskazanych jest taką wartością x.

Jeżeli nareszcie oba wskazane pierwiastki przez $\delta_{r-1}=2$ są pierwszorzędne i różne, wtedy należy dany odstęp rozłożyć na odstępy częściowe, dające każdy $\delta_{r-1}=1$, ażeby dalej wedle poprzednich zasad postępować.

Rozstrzygnąwszy dla odstępu $(\alpha\beta)$, na mocy gromady $(\delta_{r+1}=0, \delta_r=1, \delta_{r-1}=2)$, że zawarty w nim pierwiastek równania $Z_r=0$ jest wskazującą wartością dla złożonych dwóch pierwiastków równania $Z_{r-1}=0$ a więc też i równań $Z_{r-2}=Z_{r-3}=\ldots=Z_3=Z_2=Z_1=Z_0=0$, pewnem jest, że w każdej z odpowiednich wskazówkek $\delta_{r-1}, \delta_{r-2}, \delta_{r-3}, \ldots \delta_2, \delta_1, \delta_0$ po dwie jedności wzięte być muszą jako części przypadające na karb właśnie przez nią wskazanych dwóch złożonych pierwiastków. Odrzuciwszy od każdej z tych wskazówek te dwie jedności otrzymamy nowy szereg zmniejszonych wskazówek :

$$0, \delta'_{r-2}, \delta'_{r-3}, \delta'_{r-4}, \ldots \delta'_2, \delta'_1, \delta'_0,$$

z któremi należy wedle powyżej podanych prawideł postąpić; pozostałe wartości wskazujące odszukać i oddzielenia pierwszorzędnych pierwiastków dokonać.

Jeżeli wogóle w odstępie $(\alpha\beta)$ za pomocą $[\delta_{r+1}=0, \delta_r=1, \delta_{r-1}=2, \delta_{r-2}=3, \ldots \delta_{r-(2s-1)}=2s]$ rozstrzygniemy, iż pierwiastek równania $Z_r=0$ w odstępie tym zawarty wskazuje w każdym z równań :

$$Z_{r-(2s-1)}=Z_{r-2s}=Z_{r-2s-1}=\ldots=Z_2=Z_1=Z_0=0,$$

po jednym układzie o s sprzężonych dwójkach złożonych pierwiastków; to pewnem jest, że w każdej z odpowiednich wskazówzek $\delta_{r-(2s-1)}, \delta_{r-2s}, \ldots \delta_2, \delta_1, \delta_0$ po $2s$ jedności należy wziąć jako część wskazówki przypadającą na karb własnie przez nią wskazanych $2s$ pierwiastków. Po odrzuceniu tej części od każdej z tych wskazówek otrzymamy nowy szereg zmniejszonych wskazówek :

$$0, \delta'_{r-2s}, \delta'_{r-2s-1}, \delta'_{r-2s-2}, \ldots \delta'_2, \delta'_1, \delta'_0,$$

który znanym sposobem zastosowany posłuży do znalezienia pozostałych wartości wskazujących leżących w odstępie $(\alpha\beta)$, oraz do wyszukania pierwszorzędnych pierwiastków równania $Z_0=0$.

Przykłady na oddzielanie pierwiastków równania znajdują się w dziele Fouriera « Analyse des équations » a nadto w encyklopedycznym wykładzie teoryi równań Schnusego, Brunswik, 1850.

CZĘŚĆ DRUGA

§ 1.

O SPOSOBACH OBLICZANIA SZEREGÓW FUNKCYJNYCH.

$$[x]_0 = \left\{ \frac{1}{n!} f_n(x), \quad \frac{1}{(n-1)!} f_{n-1}(x), \ . \ . \ . \ , \frac{1}{1!} f_1(x), \quad \frac{1}{0!} f(x) \right\}.$$

Mając

(1) $$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ . \ . \ . + A_1 x + A_0,$$

otrzymamy za pomocą zwykłego dzielenia

(2) $$\frac{f(x)}{x-\alpha} = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ . \ . \ . + a_2 x + a_1 + \frac{a_0}{x-\alpha},$$

czyli kładąc

(3) $$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ . \ . \ . + a_1 x + a_1 = \overset{x}{q}_0,$$

i mnożąc obustronnie przez $x - \alpha$,

(4) $$f(x) = \overset{x}{q}_0 (x - \alpha) + a_0.$$

Ze względu na współczynniki $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ . \ . \ . \ , a_2, a_1, a_0$ otrzymamy także następujące związki:

(5) $$\begin{aligned} a_n &= 0 . \alpha + A_n, \\ a_{n-1} &= a_n \alpha + A_{n+1}, \\ a_{n-2} &= a_{n-1} \alpha + A_{n-2}, \\ &. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ &. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_1 &= a_2 \alpha + A_1, \\ a_0 &= a_1 \alpha + A_0. \end{aligned}$$

Wyraz $\overset{x}{q}_0$ przedstawia iloraz wynikający z dzielenia funkcyi $f(x)$ przez $(x - \alpha)$, zaś a_0 resztę wynikającą z tej operacyi i równocześnie rezultat podstawienia oznaczonego przez $f(\alpha)$; mamy bowiem z równania (4) kładąc $x = \alpha$

(6) $$f(\alpha) = a_0.$$

Praktyczne tworzenie współczynników odnoszących się do $\overset{x}{q}_0$ z danych współczynników należących do $f(x)$ możnaby zestawić w następujący sposób:

(7) $$\begin{array}{l} f(x) \ . \ . \ . \quad \overset{\alpha}{\overline{A_n + A_{n-1}}} + A_{n-2} + \ . \ . \ . + A_2 + A_1 + A_0, \\ \overset{x}{q}_0 \ . \ . \ . \ 0 + a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ . \ . \ . + a_2 + a_1 + [a_0, \end{array}$$

a prawidło tworzenia dolnego szeregu z danego górnego da się na podstawie związków (5) wysłowić w następujący sposób:

(8) *Wartość którejkolwiek dolnej liczby składa się z odpowiedniej liczby górnej i poprzedzającej obliczonej liczby dolnej pomnożonej przez* α.

W razie jednocyfrowego α liczby dolne dają się pisać bezpośrednio jedna po drugiej według (8) na podstawie danych liczb górnych, bez wypisywania rachunku wskazanego prawidłem (8).

Naśladując sposób postępowania użyty przy przejściu od wyrazu $f(x)$ do wyrazu $\overset{x}{q}_0$, dojdziemy od wyrazu $\overset{x}{q}_0$ do $\overset{x}{q}_1$; od wyrazu $\overset{x}{q}_1$ do $\overset{x}{q}_2 \ldots$ i nareszcie od wyrazu $\overset{x}{q}_{n-1}$ do wyrazu $\overset{x}{q}_n$ i uwidocznimy to postępowanie w następującym szemacie :

$$
(9)\qquad
\begin{array}{llllllllll}
 & \multicolumn{2}{l}{\overline{\quad\alpha\quad}} \\
f(x) \ldots & A_n + A_{n-1} & + A_{n-2} & + \ldots & + A_3 & + A_2 & + A_1 & + A_0 \\
\overset{x}{q}_0 \ldots & a_n + a_{n-1} & + a_{n-2} & + \ldots & + a_3 & + a_2 & + a_1 & + [a_0 \\
\overset{x}{q}_1 \ldots & b_n + b_{n-1} & + b_{n-2} & + \ldots & + b_3 & + b_2 & + [b_1 \\
\overset{x}{q}_2 \ldots & c_n + c_{n-1} & + c_{n-2} & + \ldots & + c_3 & + [c_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\overset{x}{q}_{n-2} \ldots & r_n + r_{n-1} & + [r_{n-2} \\
\overset{x}{q}_{n-1} \ldots & s_n + [s_{n-1} \\
\overset{x}{q}_n \ldots & [t_n
\end{array}
$$

gdzie szczególne wyrazy żądanego wiersza tworzą się podług (8) na podstawie wiersza poprzedniego. Nawiasem [odosobnione liczby a_0, b_1, c_2, ... s_{n-1}, t_n wskazują reszty otrzymywane przy każdorazowem dzieleniu wielomianu przez $x - \alpha$. Liczbę α, za pomocą której wytwarza się szemat (9), nazywać będziemy *argumentem*.

Z szematu (9) mamy np :

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&\overset{x}{q}_2 = c_n x_n^{-3} + c_{n+1} x^{n-4} + \ldots + c_5 x + c_3, \\
&\overset{x}{q}_1 = \overset{x}{q}_2 (x - \alpha) + c_2, \quad \text{zatem} \quad \overset{\alpha}{q}_1 = c_2 \quad \text{i także} \\
&A = a_n = b_n = c_n = \ldots = r_n = s_n = t_n.
\end{aligned}
$$

Otrzymamy także :

$$
(11)\qquad
\begin{array}{lclcl|l}
f(\alpha) & = & \overset{x}{q}_0 (x - \alpha) & + & a_0 & (x-\alpha)^0 \\
\overset{x}{q}_0 & = & \overset{x}{q}_1 (x - \alpha) & + & b_1 & (x-\alpha)^1 \\
\overset{x}{q}_1 & = & \overset{x}{q}_2 (x - \alpha) & + & c_2 & (x-\alpha)^2 \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\overset{x}{q}_{n-2} & = & \overset{x}{q}_{n-1} (x - \alpha) & + & s_{n-1} & (x-\alpha)^{n-1} \\
\overset{x}{q}_{n-1} & = & 0 . (x - \alpha) & + & t_n & (x-\alpha)^n .
\end{array}
$$

Uskuteczniwszy mnożenie tych równań przez odpowiednie po prawej stronie stojące potęgi dwumianu $(x - \alpha)$ dodajmy je do siebie, a otrzymamy, po opuszczeniu wyrazów należących wspólnie do obu stron samego równania, następujące równanie :

$$
(12)\qquad f(x) = t_n (x-\alpha)^n + s_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + r_{n-2}(x-\alpha)^{n-2} + \ldots + b_1 (x - \alpha) + a_0 .
$$

Mając na przykład

(13) $$\varphi(x) = 3x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x^2 - 9 \quad \text{i} \quad \alpha = 2,$$

otrzymamy podług (8) i (9)

$$\begin{array}{l} \underline{2\qquad\qquad} \\ 3 + \ \ 7 - \ \ 6 + \ \ 8 - \ \ 9 \\ 3 + 13 + 20 + 48 + [87 \\ 3 + 19 + 58 + [164 \\ 3 + 25 + [108 \\ 3 + [31 \\ [3 \end{array}$$

a ztąd nareszcie

(14) $$\varphi(x) = 3(x-2)^4 + 31(x-2)^3 + 108(x-2)^2 + 164(x-2) + 87.$$

Podług Mac-Laurina otrzymamy $f(x)$ także w następującej formie:

(15) $$f(x) = f(\alpha) + \frac{f_1(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f_2(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f_{n-1}(\alpha)}{(n-1)!}(x-\alpha)^{n-1} + \frac{f_n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n.$$

Porównując kształty $f(x)$ w (12) i (15) otrzymamy na podstawie działania uwidocznionego szematem (9) obliczony szereg funkcyjny $[\alpha]_0$ w następującej postaci:

(16) $$[\alpha]_0 = \left\{ \frac{f_n(\alpha)}{n}, \ \frac{f_{n-1}(\alpha)}{(n-1)!}, \ \ldots, \ \frac{f_1(\alpha)}{1!}, \ \frac{f(\alpha)}{0!} \right\} = \\ = \{ t_n, \ s_{n-1}, \ r_{n-2}, \ \ldots, \ c_2, \ b_1, \ a_0 \}.$$

Kładąc

$$\sigma = \alpha + \beta,$$

otrzymamy wychodząc z szeregu funkcyjnego $[\alpha_0]$ i argumentu β podług (9) podobnie jak w (12)

(17) $$f(x) = t'_n(x-\sigma)^n + s'_{n-1}(x-\sigma)^{u-1} + r'_{n-2}(x-\sigma)^{n-2} + \ldots + c'_2(x-\sigma)^2 + b'_1(x-\sigma) + a'_0,$$

a zatem

(18) $$[\sigma]_0 = \{ t'_n, \ s'_{n-1}, \ a'_{n-2}, \ \ldots, \ c'_2, \ b'_1, \ a'_0 \}.$$

Do szeregu $[\sigma]_0$ zaprowadzi nas podług (8) także pierwotny szereg

$$[0]_0 = \{ A_n, \ A_{n-1}, \ A_{n-2}, \ \ldots, \ A_1, \ A_1, \ A_0 \}$$

za pomocą argumentu σ.

(19) Jeżeli np. $\alpha = 24'96345$, $\beta = 0'000002457$, zatem $\sigma = 24'963452457$, to otrzymamy szereg $[\sigma]_0$ albo z szeregu $[\alpha]_0$ za pomocą argumentu β albo z szeregu $[0]_0$ za pomocą argumentu σ. Posiadając już obliczony szereg $[\alpha]_0$, korzystniej będzie obliczać z niego szereg $[\sigma]_0$ za pomocą argumentu β, jak z szeregu $[0]_0$ za pomocą argumentu σ.

Jakoż w istocie układanie szematu (9) za pomocą argumentu β odbywa się w przeważnej części powtarzającem się mnożeniem 4 cyfrową liczbą β — układanie zaś szematu (9) za pomocą argumentu σ odbywa się przez daleko mozolniejsze powtarzające się mnożenie liczbą jedynastocyfrową σ.

Jeżeli w układzie równań

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
x_0 &= \alpha \\
x_1 &= x_0 + \alpha_1 \\
x_2 &= x_1 + \alpha_2 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
x_{r-1} &= x_{r-2} + \alpha_{r-1} \\
x = x_r &= x_{r-1} + \alpha_r = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{r-1} + \alpha_r,
\end{aligned}
$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}, \alpha_r$ przedstawiają malejąco uporządkowany szereg składników do obliczenia przedłożonego pierwiastku w takim samym porządku, jak podług metody Fouriera otrzymujemy, to wiemy, że do wyśledzenia takowych potrzebne jest kolejne obliczanie szeregów funkcyjnych

$$
(21) \qquad [x_0]_0, \quad [x_1]_0, \quad [x_2]_0, \ldots [x_{r-1}]_0, \quad [x_r]_0.
$$

Wyprowadzenia tych tu nadmienionych wartości dają się uskutecznić za pomocą kolejnego układania szematów (9) na podstawie po sobie następujących argumentów $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r$.

Widzimy wszakże, że w tym razie wyprowadzenie tej dosyć mozolnej rachuby na barkach jednego i tego samego rachmistrza spoczywać musi, gdyż obliczenie jakiegokolwiek symbolu w (21) nie może nastąpić dopóty, dopóki poprzedni nie został już obliczony.

Celem umożliwienia zajęcia się równoczesnego kilku rachmistrzów przy obliczaniu naprzykład wyrazu $[x_s]_0$ na podstawie obliczonego już wyrazu $[x_{s-1}]_0$ za pomocą argumentu α_s, możemy przedewszystkiem jako już ze względu na współczynniki B obliczone równanie napisać :

$$
(22) \qquad f(x) = B_n(x - x_{s-1})^n + B_{n-1}(x - x_{s-1})^{n-1} + \ldots + B_1(x - x_{s-1}) + B_0,
$$

gdzie oczywiście :

$$
(23) \qquad
\begin{aligned}
n!\,B_n &= f_n(x_{s-1}) \\
(n-1)!\,B_{n-1} &= f_{n-1}(x_{s-1}) \\
(n-2)!\,B_{n-2} &= f_{n-2}(x_{s-1}) \\
&\cdot \\
&\cdot \quad \cdot \\
1!\,B_1 &= f_1(x_{s-1}) \\
0!\,B_0 &= f(x_{s-1}).
\end{aligned}
$$

Dla mającego obliczyć się szeregu funkcyjnego $[x_s]_0$ możemy następujące równanie napisać :

$$
(24) \qquad f(x) = B'_n(x - x_s)^n + B'_{n-1}(x - x_s)^{n-1} + \ldots + B'_1(x - x_s) + B'_0
$$

w którem właśnie współczynniki B′ mają być obliczone.

W tym celu mamy :

$$
\frac{f_r(x_s)}{r!} = \frac{f_r(x_{s-1} + \alpha_s)}{r!} = \frac{f_r(x_{s-1})}{r!\,0!} + \frac{f_{r+1}(x_{s-1})}{r!\;1!}\alpha_s + \frac{f_{r+2}(x_{s-1})}{r!\;2!}\alpha^2_s + \ldots
$$

albo

$$
\frac{f_r(x_s)}{r!} = \frac{f_r(x_{s-1})}{r!} + \binom{r+1}{1}\frac{f_{r+1}(x_{s-1})}{(r+1)!}\alpha_s + \binom{r+2}{2}\frac{f_{r+2}(x_{s-1})}{(r+2)!}\alpha^2_s + \binom{r+3}{3}\frac{f_{r+3}(x_{s-1})}{(r+3)!}\alpha^3_s + \ldots,
$$

ztąd na podstawie związków (23)

$$B'_r = B_r + \binom{r+1}{1} B_{r+1}\alpha_s + \binom{r+2}{2} B_{r+2}\alpha_s^2 + \binom{r+3}{3} B_{r+3}\alpha_s^3 + \ldots$$

albo

(25)
$$B'_r = \sum_{0}^{n-r} {}_{\mu}\left[\left(\frac{n-\mu}{n-\mu-r}\right) B_{n-\mu}\alpha_s^{n-\mu-r} \right].$$

Jeżeli szereg wiadomych już współczynników

(26)
$$B_n,\ B_{n-1},\ B_{n-2},\ \ldots,\ B_2,\ B_1,\ B_0,$$

przerobimy ze względu na znaczek a według związku

(27)
$$\binom{m}{m-r} B_m = \underset{r}{B_m},$$

na odpowiedni szereg spółczynników

(28)
$$\underset{r}{B_n},\ \underset{r}{B_{n-1}},\ \underset{r}{B_{n-2}},\ \ldots\ \underset{r}{B_2},\ \underset{r}{B_1},\ \underset{r}{B_0},$$

to otrzymamy z (25) następujący związek :

(29)
$$B'_r = \underset{r}{B_n}\alpha_s^{n-r} + \underset{r}{B_{n-1}}\alpha^{n-r-1} + \underset{r}{B_{n-2}}\alpha^{n-r-2} + \ldots + \underset{r}{B_{r+1}}\alpha_s + \underset{r}{B_r}.$$

(30) Mając tedy kilku rachmistrzów do dyspozycyi, możemy celem obliczenia szeregu $[x_s]_0$ każdemu z osobna zadać do obliczenia jedno B′. Każdemu z nich przypadnie inny znaczek przyczepiony do B′, według którego przerobiwszy dany szereg współczynników (26) na odpowiedni szereg (28), dojdzie ostatecznie podług (23) na zasadzie argumentu $\alpha 5'$ i metody (7) do wartości zadanego współczynnika B′.

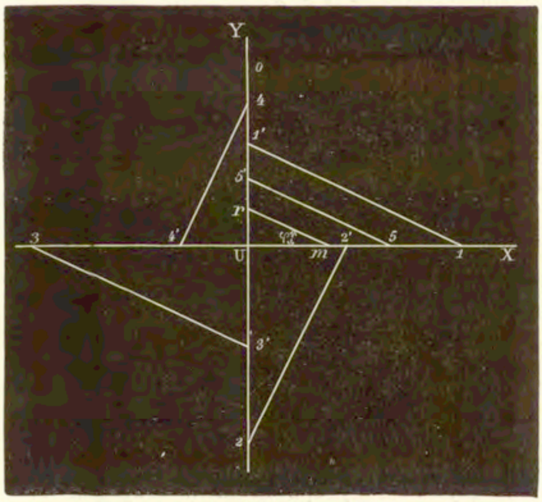

Fig. 7.

Jak widzimy obydwa sposoby obliczania szeregu funkcyjnego $[x_s]_0$ polegają na bardzo łatwem tworzeniu szematu (7).

Na obecnej figurze podajemy sposób tworzenia drugiego wiersza w (7) na podstawie wiadomego pierwszego i argumentu α.

Mając

(31)
$$f(x) = A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0;$$

Uy prostopadłe do Ux, niech w łamanem pasmie 55′44′33′22′11′0 oznaczają :

(32)
$$U5 = A_5,\ 5'4 = A_4,\ 4'3 = A_3,\ 3'2 = A_2,$$
$$2'1 = A_1,\ 1'0 = A_0,$$
$$55' \parallel 33' \parallel 11' \parallel mr;\ 44' \parallel 22' \perp mr$$
$$Um = 1,\ \alpha = Ur;\quad \text{zatem}\quad \operatorname{sty}\varphi = \alpha,$$

ztąd znajdziemy :

$$
(33)\qquad
\begin{array}{l|l}
U5 = A_5 = a_5 & \\
U4 = U5\,\mathrm{sty}\varphi + 5'4 = A_5\alpha + A_4 = a_4 & \alpha^4 \\
U3 = U4\,\mathrm{sty}\varphi + 4'3 = a_4\alpha + A_3 = a_3 & \alpha^3 \\
U2 = U3\,\mathrm{sty}\varphi + 3'2 = a_3\alpha + A_2 = a_2 & \alpha^2 \\
U1 = U2\,\mathrm{sty}\varphi + 2'1 = a_2\alpha + A_1 = a_1 & \alpha^1 \\
U0 = U1\,\mathrm{sty}\varphi + 1'0 = a_1\alpha + A_0 = a_0 & \alpha^0,
\end{array}
$$

a w następstwie mnożąc te równania przez obok wskazane potęgi α i sumując takowe będzie :

$$(34)\qquad f(\alpha) = A_5\alpha^5 + A_4\alpha^4 + A_3\alpha^3 + A_2\alpha^2 + A_1\alpha + A_0 = a_0 = U_0,$$

i równocześnie szereg współczynników należących do ilorazu $\overset{x}{q_0}$

$$U5,\ U4,\ U3,\ U2,\ U1.$$

Widzimy ztąd, że obydwie metody obliczania szeregów funkcyjnych (21) możemy oprzeć na nader łatwej konstrukcyi uwidocznionej na powyższej figurze.

Niech będzie na figurze (36) $UY \perp UX$, $mr \parallel st \perp rs \parallel tv$; $ma' \parallel s't' \perp r's' \parallel t'v'$; $Um = 1$, $Ur = \alpha'$, $Ur' = \alpha'$; $UA = a$, to na zasadzie założonej konstrukcyi mamy :

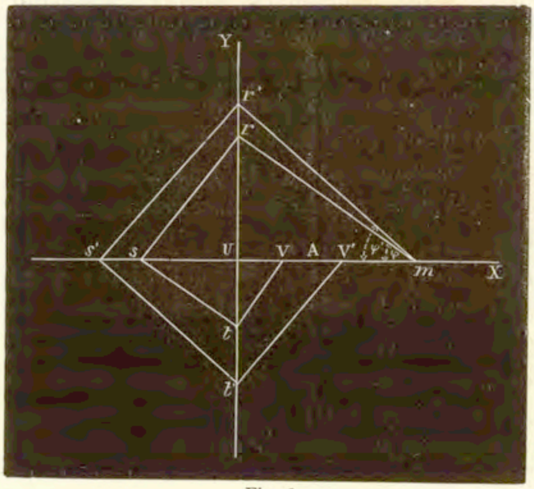

Fig. 8.

$$(36)\qquad \begin{array}{l} Us = \alpha\,\mathrm{sty}\varphi = \alpha^2, \quad Ut = \alpha^2\mathrm{sty}\varphi = \alpha^5, \\ Uv = \alpha^3\,\mathrm{sty}\varphi = \alpha^4 < a \end{array}$$

$$(37)\qquad \begin{array}{l} Us' = \alpha'\mathrm{sty}\varphi' = \alpha'^2 \ : \ Ut' = \alpha'^2\mathrm{sty}\varphi' = \alpha'^3 \\ Uv' = \alpha'^3\,\mathrm{sty}\varphi'^4 < a, \end{array}$$

a ztąd oczywiście

$$(38)\qquad \alpha^4 < a < \alpha'^4 \quad \text{albo} \quad \alpha < \sqrt[4]{a} < \alpha'.$$

Tu mamy uwidocznione bardzo proste konstrukcyjne postępowanie ścieśniania granic dla jakiegokolwiek pierwiastku danej ilości a.

Postępowanie (32) daje się zastosować do wyśledzenia konstrukcyjnego przybliżonych wartości pierwiastków rzetelnych równań liczbowych.

Do ułożenia konstrukcyjnym sposobem całego szematu (9) trzebaby sposobem w (32) uwidocznionym wyznaczyć $f(\alpha)$ i współczynniki do $\overset{x}{q_0}$, następnie $\overset{\alpha}{q_0}$ i współczynniki do $\overset{x}{q_1}$ . . . i tak dalej postępować, aż się dojdzie do wartości na $\overset{\alpha}{q}_{n-1} = s_{n-1}$ i $\overset{\alpha}{q_n} = t_n$.

To kolejne postępowanie możnaby odbywać na dwóch pergaminowych tabliczkach zaopatrzonych stałemi osiami do siebie prostopadłemi. Odbywszy konstrukcyjny pochód na jednej tabliczce, zbiera się z niej wynikające współczynniki, aby na ich podstawie na drugiej tabliczce wynaleźć współczynniki następnego q. Zmazawszy kostrukcyjny rysunek na pierwszej tabliczce, zbiera się z tabliczki drugiej otrzymane współczynniki, aby znowu za ich pomocą wyprowadzić na pierwszej tabliczce współczynniki dalszego q — i tak użytkując te dwie tabliczki na przemian dojdzie się nareszcie do ustalenia całego szematu (9) i wyznaczenia za pomocą konstrukcyi żądanego szeregu funkcyjnego.

PRZEDSTAWIENIE SZEREGU FUNKCYJNEGO ZA POMOCĄ UKŁADU CIĄGŁOKRZYWYCH TAK ZWANYCH KRZYWYCH CAŁKOWYCH.

(39) Podkładkę obecnej figury stanowi kartka białego kartonu, na której znajduje się pole podzielone prostopadle do osi AX na równe paski oznaczone liczbami 1, 2, 3,...10, 11, 12; każdy pasek podzielony jest liniją także prostopadłą do AX na dwie równe części. Szerokość każdego paska wynosi $\frac{1}{3}$ VU $= \frac{1}{3}$ przyjmując długość VU za jedność. Paski liczymy od U jako końcowego punktu jedności VU $= \overline{14}$, i tak

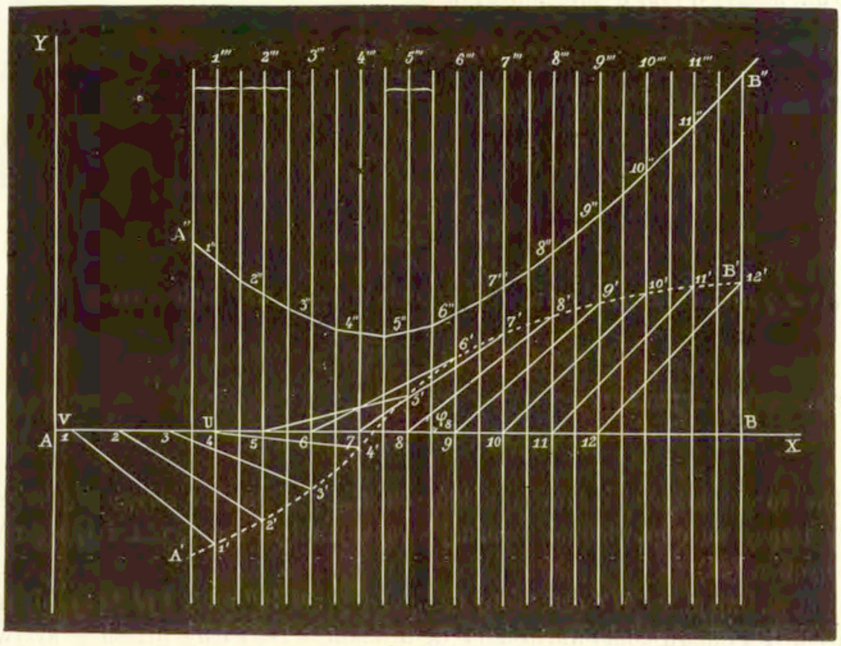

Fig. 9.

oznaczamy przez $4'''$ pasek czwarty, który prostą $74'''$ prostopadłą do AX jest przepołowiony. Aby nie komplikować figury, przyjęliśmy paski o szerokości $\frac{1}{3}$; nadmieniamy wszakże, że w praktyce korzystniej będzie podzielić pole na ile możności wązkie paski, aby uczynić podkładkę przydatną do otrzymania dokładnych rezultatów.

Tak przygotowany karton możemy użyć do przybliżonego przedstawienia tak zwanej linii całkowej

(40) $$Y = \int f(x)dx + C,$$

jeżeli posiadamy już narysowaną linię przedstawioną równaniem

(41) $$y = f(x).$$

W tym celu trzeba krzywę (41) przenieść na przezroczysty papier i zarazem układ osiowy XAY na nim naznaczyć. Tak przerysowaną krzywę układa się na przygotowany karton (39) w ten sposób aby oś AX, pzypadła w położeniu VX, i żeby punkt początkowy krzywej (41) zajął miejsce na linii pionu przechodzącej przez U. Punkta krzywej (41) znaczkują się odpowiednio do pasków, na których się układają, liczbami 1′, 2′, 3′,... 10′, 11′,... Na figurze uwidoczniona krzywa A′B′ niech właśnie przedstawia nam linię (41).

Oznaczmy przez $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \ldots$ kąty zawarte między prostemi

(42) $$\overline{11'},\quad \overline{22'},\quad \overline{33'},\ \ldots\ \overline{77'},\quad \overline{88'},\quad \overline{99'},$$

i osią AX, a otrzymamy według założonego układu rysunkowego ze względu na krzywę (41) np.

$$\overline{85'} = y_5 = f(x_5),\quad \mathrm{sty}\varphi_5 = \frac{\overline{85'}}{58} = \frac{y_5}{1} = f(x_5),$$

i także ogólnie dla każdej w (42) wymienionej prostej

(43) $$\mathrm{sty}\varphi = f(x).$$

Z równania krzywej całkowej w (40) mamy

$$\frac{dY}{dx} = f(x),\quad \text{a zatem według (43),}$$

(44) $$\mathrm{sty}\varphi = \frac{dY}{dx}.$$

Widać ztąd, iż w punktach krzywej całkowej odpowiadających wartościom na x

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{11},\ x_{12},\ \ldots$$

odpowiadają prostym stycznym kąty

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots\ \varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \ldots$$

że zatem drobne łuczki krzywej całkowej, z których każdy w obrębie swego wązkiego paska jako odcinek prosty leżący na odpowiedniej stycznej uważanym być może, układają się równoległe do prostych podanych w (42).

Pierwszy punkt na linii pionu 11‴ oznaczony na figurze przez 11″ może być dowolnie obrany, i daje nam wstawiony w (40) odpowiednią wartość na C, a wskutek tego cały przebieg krzywej całkowej.

Nakreślenie krzywej całkowej poczynającej się w punkcie 1″ odbędzie się w sposób następujący:

Pierwszy łuczek idzie przez obrany punkt 1″ i przecina pasek 1‴ prostokreślnie i równolegle do $\overline{11'}$, od końca pierwszego łuczku poczyna się łuczek drugi przecinający prostokreślnie i równolegle do $\overline{22'}$ następny pasek 2‴; od punktu końcowego drugiego łuczku idzie łuczek trzeci przecinając prostokreślnie i równolegle do $\overline{33'}$ pasek 3‴; i tak dalej postępując dojdziemy aż do ostatniego łuczku żądanej krzywej całkowej, odpowiadającego założonemu ostatniemu punktowi w linii A′B′, czyli raczej w linii (41).

Tym sposobem z drobnych łuczków złożona krzywa A″B″ przedstawi nam linię całkową tym dokładniej, im węższe są paski, na które podkładka podzieloną została.

Szereg funkcyjny

(45) $$f_n(x),\ f_{n-1}(x),\ f_{n-2}(x),\ \ldots\ f_2(x),\ f_1(x),\ f(x),$$

odpowiadający równaniu

(46) $$f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_n x + A_0 = 0,$$

da się przedstawić geometrycznie krzywemi :

(47) $$y=f_n(x),\ y=f_{n-1}(x),\ y=f_{n-2}(x),\ \ldots\ y=f_2(x),\ y=f_1(x),\ y=f(x),$$

z których każda następna jest krzywą całkową krzywej poprzedzającej. Idąc od lewej strony ku prawej, przedstawia się nam pierwsza jako prosta równoległa do osi AX, druga zaś jako prosta odchylona od AX o pewien kąt. Trzecia jako całkowa do drugiej przedstawi się jako zwykła parabola. Wszystkie inne nazwiemy także linijami parabolicznemi należącemi odpowiednio do rzędów 3^{go}, 4^{go}, 5^{go},... n^{go}. Na podstawie paraboli rzędu 2^{go} narysujemy podług wyłożonej metody jej krzywę całkową i otrzymamy krzywę paraboliczną rzędu 3^{go}, i tak dalej postępując dojdziemy nareszcie do przedstawienia ostatniej linii całkowej nacechowanej równaniem $y=f(x)$.

Rozpoczynając np. od $x=\alpha$, obliczymy wartości

(48) $$f_{n-1}(\alpha),\ f_{n-2}(\alpha),\ f_{n-3}(\alpha),\ \ldots,\ f_2(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f(\alpha),$$

i otrzymamy tym sposobem początkowe punkta każdej nakreślić się mającej krzywej całkowej. Tym sposobem nakreśliwszy krzywę $y=f(x)$, otrzymamy punkta, w których ta linija przecina oś AX; każdy z tych punktów ma na y wartość zera, i różni się od innych tylko wartością swego x. Oznaczając przez $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_r$ wartości na x przynależne punktom przecięcia krzywej $y=f(x)$ z osią AX, otrzymamy dla każdej z tych wartości np. dla wartości x_s następujące równanie :

$$0=f(x_s)=A_n x_s^n+A_{n-1}x_s^{n-1}+\ldots+A_1x_s+A_0,$$

i wnosimy ztąd, że $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_r$ są pierwiastkami rzetelnemi równania

(49) $$A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0=0.$$

Wstawiając w równanie (40) pierwszy raz $x=x_p$, drugi raz $x=x_k$, możemy dla pewnego C t.j. dla pewnej krzywej całkowej obliczyć długości Y_p i Y_k i dojdziemy do następujących związków :

$$Y_k=\left(\int f(x)dx+C\right)_{x=x_k},\qquad Y_p=\left(\int f(x)dx+C\right)_{x=x_p};$$

(50) i nareszcie

$$Y_k-Y_p=\int_{x_p}^{x_k}f(x)dx=$$

= [powierzchnia ograniczona krzywą całkową, osią AX, i leżąca między pionami należącemi do x_p i x_k].

(51) Jeżeli ze względu na oś AX i początek współrzędnych A″, krzywa $A''B''_1$ jest całkową dla krzywej $A'_1B'_1$, a krzywa $A''B''$ całkową dla krzywej $A'B'$, to liczba dająca długość B''_1B'' przedstawiać będzie ograniczoną powierzchnię, zawartą między $A'_1B'_1$ i $A'B'$ jako też między prostemi $A'A'_1$ i $B'B'_1$. Niech $\omega'B'_1=l$ będzie liczbą długości przedstawiającą część powierzchni $A'_1B'_1B'A'$ w stosunku $\frac{B''_1\omega}{B''_1C}$ odciąć się mającą; weźmy prostokreślnie wycięty pasek papieru z dwoma, w odległości $=l$, naznaczonemi na nim punktami b''_1, b'' i przesuńmy pasek ten tak daleko aż B''_1 wpadnie

np. w b''_1 na krzywę $A''_1B''_1$, zaś ω' zajmie miejsce b'' na krzywej $A''B''$, przyczem prosta b''_1b'' zostaje równoległą do $B''_1\omega$. W tym razie powierzchnia $A'_1nmA'A_1$ jest żądaną częścią w stosunku danym podzielonej powierzchni $A'_1B'_1B'A'A'_1$.

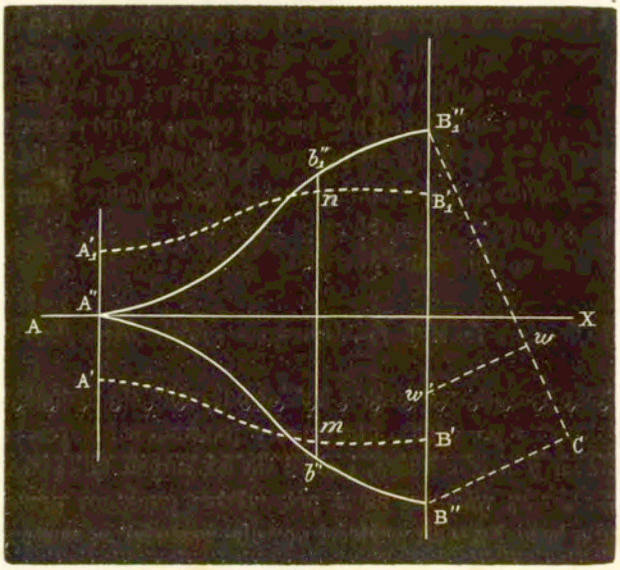

Fig. 10.

Widać z tego, że starannie wykonana krzywa całkowa przydaje się do rozwiązywania zadań planimetrycznych tak samo dobrze, a w niektórych razach nawet i lepiej, niż jakikolwiek na ten cel zbudowany przyrząd planimetryczny.

§ 2.

RYSUNKOWE ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ TRZECIEGO I CZWARTEGO STOPNIA ZE WZGLĘDU NA PIERWIASTKI RZETELNE. W CIĄGU DALSZYM O ROZWIĄZANIU OKRESOWEM RÓWNAŃ ALGEBRYCZNYCH.

Z (9) § 1 mamy:

(1) $$a_{n-1} = A_{n-1} + \alpha A_n,\quad b_{n-1} = A_{n-1} + 2\alpha A_n,\quad c_{n-1} = A_{n-1} + 3\alpha A_n, \ldots$$
$$r_{n-1} = A_{n-1} + (n-1)\alpha A_n,\quad s_{n-1} = A_{n-} + n\alpha A_n;$$

kładąc

(2) $$s_{n-1} = 0 \quad \text{znajdziemy} \quad \alpha = -\frac{A_{n-1}}{nA_n},$$

ze względu na równanie

(3) $$f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

taką wartość argumentu α, na podstawie którego szemat (9) złożony prowadzi do równania

$$f(x) = A_n(x-n)^n + r_{n-2}(x-\alpha)^{n-2} + \ldots + b_1(x-\alpha) + a_0 = 0,$$

czyli zakładając

(4) $$x = y + \alpha.$$

do równania

5) $$f(x) = A_n y^n + r_{n-2}y^{n-2} + \ldots + c_2 y^2 + b, \quad y + a_0 = 0.$$

(6) Równanie (5) jest w tym względzie prostsze niż (3), gdyż w niem drugi od początku wyraz otrzymał współczynnik $s_{n-1}=0$. Pierwiastki równania (5) powiększone każdy o argument α stanowią po kolei pierwiastki równania (3). Wystarczyłoby przeto podać sposoby rozwiązywania równań kształtu (5), ażeby za ich pomocą zupełne równanie (3) rozwiązanem być mogło.

Do rozwiązania zadania w paragrafie bieżącym podanego, potrzeba więc tylko pzzedstawić rysunkowy sposób rozwiązywania zredukowanych równań

(7) $$ax^4+bx^2+cx+d=0,$$

(8) $$ax^3+bx+c=0.$$

Kładąc w (7) $x^2=y$, otrzymamy w miejsce (7) następujące dwa równania

(9) $$x^2=y,\quad ay^2+by+cx+d=0.$$

Mnożąc pierwsze przez a i dodając do drugiego, dalej mnożąc pierwsze przez $4a$ i dodając do drugiego będzie :

(10) $$\left\{\begin{aligned} &ax^2+ay^2+(b-a)y+cx+d=0,\\ &4ax^2+ay^2+(b-4a)y+cx+d=0.\end{aligned}\right.$$

Równania te można napisać w kształcie następującym :

(11) $$\left\{\begin{aligned} &a\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2+a\left(y+\frac{b-a}{2a}\right)^2-\frac{c^2}{4a}-\frac{(b-a)^2}{4a}+d=0\\ &4a\left(x+\frac{c}{8a}\right)^2+a\left(y+\frac{b-4a}{2a}\right)^2-\frac{c^2}{16a}-\frac{(b-4a)^2}{4a}+d=0.\end{aligned}\right.$$

Kładąc w tych równaniach

(12) $$\left\{\begin{aligned} &r^2=\frac{c^2+(b-a)^2-4ad}{4a^2},\quad \alpha=-\frac{c}{2a},\quad \beta=-\frac{b-a}{2a}\\ &m^2=\frac{c^2+4(b-4a)^2-16ad}{16a^2},\quad \alpha'=-\frac{c}{8a},\quad \beta'=-\frac{b-4a}{2a}\end{aligned}\right.$$

dojdziemy nareszcie do następujących kształtów równań (11)

(13) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{(x-\alpha)^2}{r^2}+\frac{(y-\beta)^2}{r^2}=1;\\ &\frac{(x-\alpha')^2}{\left(\frac{1}{2}m\right)^2}+\frac{(y-\beta')^2}{m^2}=1,\end{aligned}\right.$$

które, rugując z nich y, prowadzą oczywiście do równania (7); przeto też wartości na x czyniące zadość równaniom (13) sprowadzają także równanie (7) do zera i są jego pierwiastkami.

Z powodu (9) do rzetelnych x należą dodatne wartości y, a takie dwie do siebie należące wartości x, y mogą za użyciem układu prostokątnego współrzędnych służyć do wyznaczenia położenia punktu. Znalazłszy w (12) wartości r^2 i m^2 dodatne, pierwsze równanie w (13) przedstawia koło, drugie zaś elipsę odniesioną do układu prostokątnego. Punkta wspólne obu tym linijom będą miały dodatne współrzędne y, i można je uważać za punkta pierwiastkowe pierwszorzędne równania (7), gdyż przynależne im wartości rzetelne sprawdzają równania (13), a tem samem czynią zadość i równaniu (7).

Jeżeli wszelako jedna z wartości r^2 lub m^2 albo obie ujemne wypadną, to będzie to znakiem, że równanie (7) nie ma pierwiastków rzetelnych. Może się to jednak i przy dodatnem r^2 i m^2 pokazać, mianowicie w przypadku, kiedy linije przedstawione w (13), koło i elipsa wcale się nie przecinają.

Ten pobieżny wykład daje już dostateczne punkta oparcia do wyprowadzenia stanowczych orzeczeń o istocie pierwiastków.

Należące tu zadanie rachunkowe pozostawiamy czytelnikowi i przystępujemy bezpośrednio do rysunkowego przedstawienia równań (13) a wskutek tego do wyznaczenia pierwiastków równania (7).

Nad równaniem (8) nie potrzeba oddzielnie zastanawiać się, gdyż jest ono szczególnym przypadkiem równania (7), jeżeli tylko wykonamy rysunek dla (12) i (13) w założeniu $d = 0$. Tym sposobem wyprowadza się właściwie rozwiązanie równania

(14)
$$ax^4 + bx^2 + cx = 0;$$

widać atoli od razu, iż z wyjątkiem pierwiastku $x = 0$, wszystkie trzy pozostałe pierwiastki tego równania należeć także muszą do równania (8).

(15) Dla równania

$$x^4 - 9x + 4x + 12 = 0,$$

znajdziemy podług (12)

$$r = 4'12 \ldots m = 5'59,$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = 5; \quad \alpha' = -\frac{1}{2}, \quad \beta' = 6'5.$$

(16) Dla równania

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0,$$

mamy

$$r = 5'59 \ldots; \quad m = 5'65 \ldots$$

$$\alpha = -4, \quad \beta = \frac{7}{2}; \quad \alpha' = -1, \quad \beta' = 5.$$

(17) Dla równania

$$x^4 - qx = 0,$$

znajdziemy:

$$r^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2; \qquad m^2 = \left(\frac{q}{4}\right)^2 + 2^2,$$

$$\alpha = \frac{q}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad \alpha' = \frac{q}{8}, \quad \beta' = 2.$$

W przykładach tu wybranych zaznaczyliśmy rachunkiem elementa podane w (12), nic wszakże nie przeszkadza elementa te znaleźć za pomocą samego wykreślenia.

(18) Na figurze 11 przedstawionem jest wykreślenie, tyczące się rozwiązania równań przygotowanych w (15), (16) i (17). Ze względu na prostokątny układ osi XOY wyznaczony jest każdorazowy środek koła k przez odpowiednie współrzędne α i β; zaś środek elipsy przez odpowiednie współrzędne α' i β'. Promień każdego z kół konstrukcyjnych ma długość odpowiedniego r, a długość połówek wielkiej i małej osi elips konstrukcyjnych są odpowiednio m i $\frac{m}{2}$.

Ad (15) mamy w oddziale górnym figury 11, pierwiastki:

(19) $$x_1 = 0a' = -3, \quad x_2 = 0b' = -1, \quad x_3 = x_4 = 0c' = 2.$$

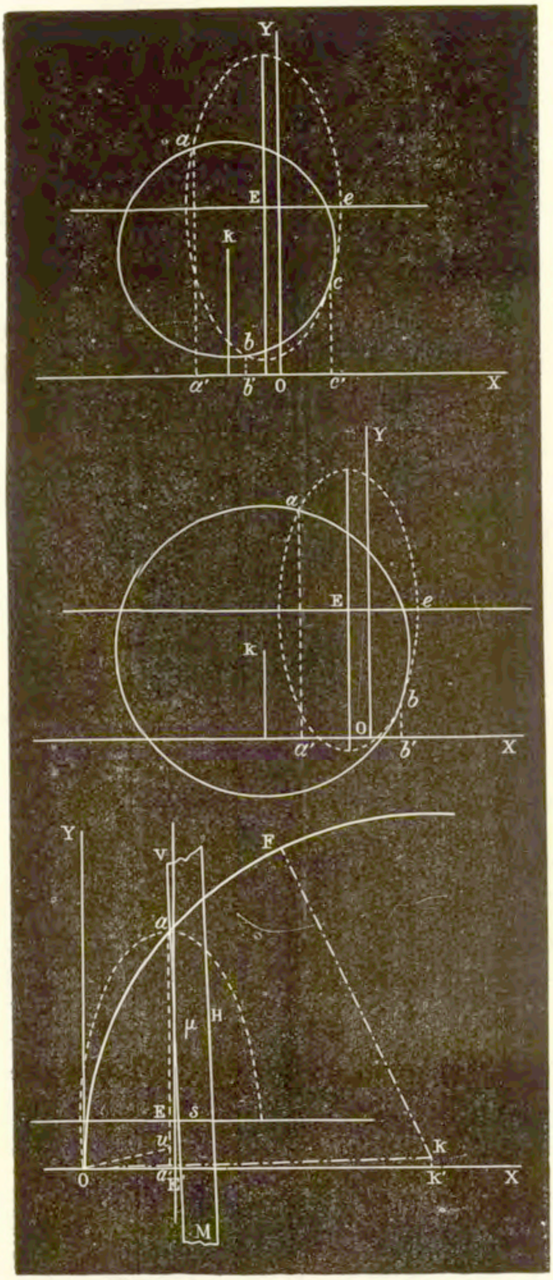

Fig. 11.

Ad (16) w oddziale średnim

(20) $$x_1 = 0a' = -3, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0b' = 1.$$

Ad (17) w oddziale dolnym jest $q = 27$, a pierwiastki następujące:

(21) $$x_1 = 0, \quad x_2 = 0a' = 3 = \sqrt[3]{q}, \quad x_3 \text{ i } x_4,$$

są pierwiastkami złożonemi.

W pierwszym oddziale punkt c przedstawia punkt podwójny t. j. punkt styczności koła krzywiznowego z elipsą.

W oddziale drugim, punkt c jest punktem potrójnym t. j. takim, który przedstawia zarazem i zetknięcie i przecięcie koła z elipsą.

W oddziale trzecim przeprowadzony jest rysunek nawet ze względu na (12). Tu:

$$ok' = \frac{q}{2} = \frac{27}{2}, \quad kk' = \frac{1}{2},$$

$$oE' = \frac{q}{8} = \frac{27}{8}, \quad E'u = Eu = 1;$$

a więc

$$ou = \frac{m}{2} = \sqrt{\left(\frac{q}{8}\right)^2 + 1}.$$

(22) Elipsa w tym oddziale wykonaną jest za pomocą paska papierowego VMH, mającego na prosto odciętym brzegu trzy równooddalone znaczki s, μ, a, których odległość wzajemna wynosi $\frac{m}{2} = ou$. Pasek ten poruszać należy tak, żeby s na prostej należącej do małej osi, μ zaś na prostej należącej do wielkiej osi pozostawało. Na wyznaczenie punktów przecięcia koła i elipsy, niech koło będzie już wykreślonem, a następnie szukajmy za pomocą paska VMH tylko tych punktów na obwodzie koła, w które pada znaczek a przy należytem położeniu paska papierowego.

Prawdziwość tego, co tu powiedziano, wyjaśni się z następnego, zupełnie ogólnie przeprowadzonego rysunku.

Niech będzie fig. (12) linijał VM opatrzony znaczkami n, a, e tak, że $en = \mathfrak{A}$, $ea = \mathfrak{B}$, a ruch jego niech będzie taki, że zawsze a na OX, zaś n na OY pozostaje. Niech linijał w jednem ze swych położeń tworzy z osią OX kąt φ, i niech $x = oP$, $y = Pe$ będą współrzędne odpowiedniego położenia znaczku e, a otrzymamy wtedy :

$$\frac{Qe}{en} = \operatorname{dos}\varphi; \quad \frac{Pe}{ea} = \operatorname{wst}\varphi,$$

albo

$$\frac{x}{\mathfrak{A}} = \operatorname{dos}\varphi; \quad \frac{y}{\mathfrak{B}} = \operatorname{wst}\varphi,$$

a ztąd dla dowolnych φ

(23) $$\frac{x^2}{\mathfrak{A}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{B}^2} = 1.$$

(**24**) Ztąd widzimy, iż każdy z punktów linijału opisze obwód elipsy, skoro dwa jego punkta np. a i n, w czasie poruszania VM, pozostają : pierwszy na ox, drugi na oy. Łatwo okazać, iż przy takim ruchu każdy punkt płaszczyzny, w której linijał leży, elipsę opisać musi.

(**25**) Bardzo łatwo wyznaczyć tym sposobem za użyciem znaczkowanego linijału, punkta zetknięcia α, β, γ, δ, w których elipsa przecina wykreśloną już poprzednio linię RST.

Pojmując w ten sposób przecięcia za pomocą elipsy, można ze względu na wykreślenia (15) i (16) wogóle powiedzieć, iż każde najwyżej czwartego stopnia sięgające równanie daje się rozwiązać wprost za użyciem cyrkla i poznaczkowanego linijału.

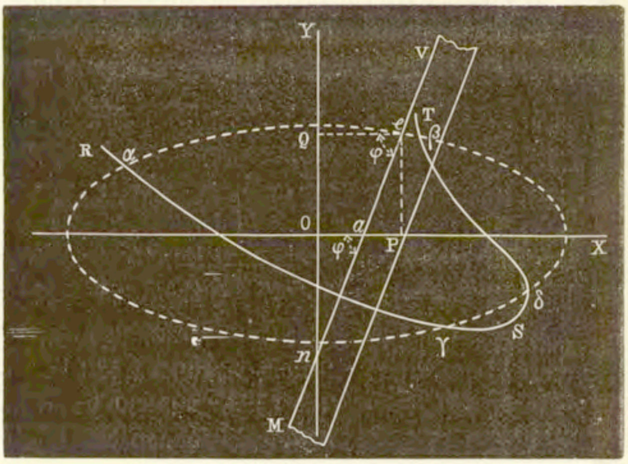

Fig. 12.

(**26**) Z fig. ad (17) widać zupełną wykreślną metodę wyciągania pierwiastku sześciennego. Należy tu także szukane od niepamiętnych czasów zdwojenie sześcianu.

Twierdzenie w (25) jest usprawiedliwionem tylko ze względu na pierwiastki rzetelne wspomnianych równań. Matematyka podała wzory na obliczenie także pierwiastków złożonych równań 3go stopnia, a za ich pomocą także i równań 4go stopnia. Lekkie zastanowienie uczy nas, iż działanie wedle wzorów tych odbyć się mające, można wykonać i za pomocą rysunku, albowiem rysunkiem możemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny, i podzielić kąt na trzy równe części. Pierwsze rozwiązanie podaliśmy na figurze ad (17), a trisekcyę kąta zaraz poznamy.

Mamy

$$2\operatorname{dos}^3\frac{\varphi}{2} = \operatorname{dos}\frac{\varphi}{3}\left(1 + \operatorname{dos}\frac{2\varphi}{3}\right) = \operatorname{dos}\frac{\varphi}{3} + \frac{1}{2}\,2\operatorname{dos}\frac{2}{3}\varphi\,\operatorname{dos}\frac{\varphi}{3} = \operatorname{dos}\frac{\varphi}{3} + \frac{1}{2}\operatorname{dos}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{dos}\frac{\varphi}{3},$$

$$2\operatorname{wst}^3\frac{\varphi}{3} = \operatorname{wst}\frac{\varphi}{3}\left(1 - \operatorname{dos}\frac{2\varphi}{3}\right) = \operatorname{wst}\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{2}\,2\operatorname{wst}\frac{2\varphi}{3}\operatorname{wst}\frac{\varphi}{3} = \operatorname{wst}\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{2}\operatorname{wst}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{wst}\frac{\varphi}{3},$$

zatem

(**27**) $$\operatorname{dos}\varphi = 4\operatorname{dos}^3\frac{\varphi}{3} - 3\operatorname{dos}\frac{\varphi}{3}, \quad \operatorname{wst}\varphi = -4\operatorname{wst}^3\frac{\varphi}{3} + 3\operatorname{wst}\frac{\varphi}{3} = \operatorname{wst}\frac{\varphi}{3}\left[\left(2\operatorname{dos}\frac{\varphi}{3}\right)^2 - 1\right];$$

kładąc :

$$2\,\mathrm{dos}\,\frac{\varphi}{3} = x, \quad 2\,\mathrm{dos}\,\varphi = k, \quad 2\,\mathrm{wst}\,\varphi = s, \quad \text{będzie}$$

(28)
$$x^3 - 3x - k = 0, \quad \frac{s}{2} = \mathrm{wst}\,\frac{\varphi}{3}\,(x^2 - 1).$$

Danemu kątowi odpowiadają ilości oznaczone przez s i k, które bardzo łatwo wykreślić się dają. Według (18) znajdziemy z równania (28) np. pierwiastki x_1, x_2, x_3. Połowa każdego z tych pierwiastków przedstawia dostawę szukanego kąta $\frac{\varphi}{3}$. Do jednego pierwiastka np. x_1 znajdziemy wykreśleniem kąt odpowiedni dajmy na to ψ_1, i równocześnie kąt $\psi'_1 = 2\pi - \psi_1$. Dwa te kąty mają wstawy o przeciwnych znakach, a z powodu (28) może w tym razie z pomiędzy równań :

(29)
$$\mathrm{wst}\,\psi_1\,(x^2 - 1) = \frac{s}{2}; \quad \mathrm{wst}\,\psi'_1\,(x^2 - 1) = \frac{s}{2},$$

jedno tylko być prawdziwe, a więc z obu tych kątów jeden tylko uczyni zadość przedłożonemu zadaniu.

Jeżeli ψ_1, ψ_2, ψ_3 są kątami, sprawdzającemi równocześnie związki (28), to kąty $3\psi_1$, $3\psi_2$, $3\psi_3$, φ będą miały wszystkie tęż samą wstawę i dostawę, a więc mogą się różnić między sobą tylko o pewną liczbę kątów pełnych. Układ kątów wynikających z (28) można przeto zastąpić następującemi

$$\frac{\varphi}{3}, \quad \frac{\varphi}{3} + 120^\circ, \quad \frac{\varphi}{3} + 240^\circ;$$

a ponieważ

$$\mathrm{dos}\,120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{dos}\,240^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{wst}\,120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{wst}\,240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

otrzymamy pierwiastki równania (28) w następującym kształcie

$$x_1 = 2\,\mathrm{dos}\,\frac{\varphi}{3},$$

(30)
$$x_2 = 2\,\mathrm{dos}\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) = -\,\mathrm{dos}\,\frac{\varphi}{3} - \mathrm{wst}\,\frac{\varphi}{3}\cdot\sqrt{3},$$

$$x_3 = 2\,\mathrm{dos}\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) = -\,\mathrm{dos}\,\frac{\varphi}{2} + \mathrm{wst}\,\frac{\varphi}{3}\cdot\sqrt{3},$$

gdzie na wyznaczenie kąta φ posłuży warunek $\mathrm{dos}\,\varphi = \frac{k}{2}$.

Rysunkowe wyznaczenie pierwszego z tych kątów stanowi właśnie rozwiązanie zadania podziału kąta na trzy równe części (Trisectio anguli). Drugie znacznie prostsze rozwiązanie tego zadania jest następujące :

(31) Ażeby wyznaczyć trzecią część danego kąta $\varphi = \angle XON$, weźmy linijał VS z trzema równooddalonemi znaczkami A, m, B, odetnijmy na ramieniu ON długość OE $= m$B $= m$A i zaznaczmy punkt E; następnie wystawmy OY prostopadłe do OX i poruszajmy linijał VS tak, ażeby znaczek A

leżał wciąż na X'X, zaś znaczek B na Y'Y, aż dojdziemy do położenia, w którem linijał przechodzi także i przez punkt E. Otrzymamy tym sposobem punkt A na OX i prostę AE; kąt $XAE = \psi_1$ jest trzecią częścią kąta φ.

Dowód. — W trójkącie prostokątnym mamy $mO = mA = mB = OE$, ztąd :

$$< OEm = Emo = 2\psi_1,$$

a więc ostatecznie

$$\sphericalangle EOX = \sphericalangle OEA + \sphericalangle EAO,$$

czyli

(32) $$\varphi = 2\psi_1 + \psi_1 = 3\psi_1, \ q.\ e.\ d.$$

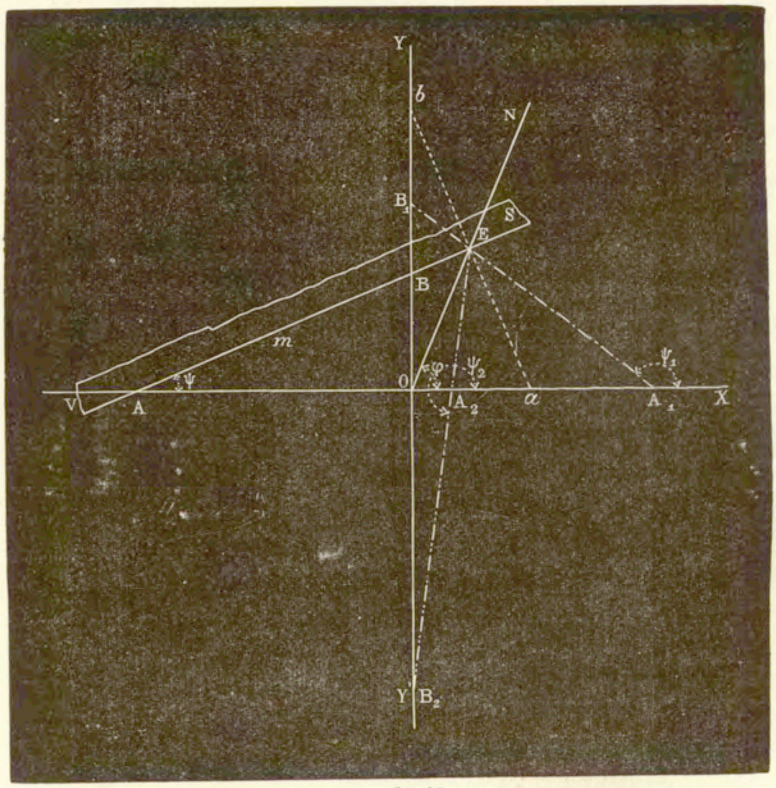

fig. 13.

Wykreślenie fig.13 daje również dwa pozostałe kąty układu (30), jeżeli położymy linijał VS najprzód w ćwiartkę xoy' a następnie w ćwiartkę xoy.

W ćwiartce Y'OA należyte położenie VS jest niemożliwem, gdyż jeżeli A leży na OA, zaś B na OY', nie może wtedy linijał przechodzić przez E.

Rozwiązanie szczególnego równania (28), uskutecznione wzorami uwidocznionemi w (30), może nam posłużyć za podstawę do uskutecznienia rozwiązania rachunkowego równania

(33) $$y^3 - py + q = 0,$$

o dowolnych współczynnikach p i q, a to w następujący sposób.

Kładąc w (28) i (30)

(34) $$x=\frac{y}{r},$$

otrzymamy równanie:

(35) $$\frac{y^3}{r^3}-\frac{3y}{r}-k=0,$$

albo

$$y^3-3r^2y-kr^3=0,$$

a jego pierwiastki

(36)
$$y_1=2r\operatorname{dos}\frac{\varphi}{3},$$

$$y_2=2r\operatorname{dos}\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)=-r\operatorname{dos}\frac{\varphi}{3}-r\sqrt{3}\operatorname{wst}\frac{\varphi}{3}.$$

$$y_3=2r\operatorname{dos}\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)=-r\operatorname{dos}\frac{\varphi}{3}+r\sqrt{3}\operatorname{wst}\frac{\varphi}{3},$$

obliczywszy kąt φ z równania $\operatorname{dos}\varphi=\frac{k}{2}$.

Porównywając równanie (33) z równaniem (35) mamy:

$$3r^2=p,\quad -kr^3=q,$$

a ztąd

(37) $$r=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}},\quad k=2\operatorname{dos}\varphi=\frac{-q}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

zatem

$$\operatorname{dos}\varphi=\frac{\frac{-q}{2}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \operatorname{wst}\varphi=\frac{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

(38) $$e^{\varphi i}=\frac{\frac{-q}{2}+i\mathrm{R}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}},\quad e^{-\varphi i}=\frac{\frac{-q}{2}-i\mathrm{R}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

położywszy dla skrócenia $\sqrt{-1}=i$, $\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2}=\mathrm{R}$.

Z (38) mamy dalej

(39)
$$e^{\frac{\varphi}{3}i}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}:\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$e^{-\frac{\varphi}{3}i}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}}:\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dodając te równania do siebie, a potem odejmując drugie od pierwszego, otrzymamy:

$$
(40)\qquad
\begin{aligned}
2\cos\frac{\varphi}{3} &= \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}},\\
2i\sin\frac{\varphi}{3} &= \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Otrzymamy nareszcie, ze względu na wzory (30) i wartości otrzymane w (40), pierwiastki równania (33) w następującym kształcie:

$$
(41)\qquad
\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}},\\
y_2 &= -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}}\right]-\frac{\sqrt{3}}{2i}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}}\right],\\
y_3 &= -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}}\right]+\frac{\sqrt{3}}{2i}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}}\right],
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
i\mathrm{R} = i\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2},\quad i=\sqrt{-1}=-\frac{1}{i}.
$$

Dla równania

$$
(42)\qquad y^3+py+q=0,
$$

otrzymamy odpowiednie wzory z (41) kładąc na miejscu p ilość $-p$.

W tym razie będzie

$$
(43)\qquad i\mathrm{R} = i\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2} = \mathrm{R}',
$$

zatem pierwiastki

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\mathrm{R}'}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\mathrm{R}'},\\
y_2 &= -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\mathrm{R}'}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\mathrm{R}'}\right]-\frac{\sqrt{3}}{2i}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\mathrm{R}'}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\mathrm{R}'}\right];\\
y_3 &= -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\mathrm{R}'}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\mathrm{R}'}\right]+\frac{\sqrt{3}}{2i}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\mathrm{R}'}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\mathrm{R}'}\right].
\end{aligned}
$$

(I) Rozwiązanie równania (33) odbywa się najprościej za pomocą wzoru (36) w tym razie, gdy $p>0$ i $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{p}{3}\right)^3$, ponieważ w tym przypadku dostaniemy podług (37) rzetelne wartości na r i φ, a na podstawie tak obliczonych elementów układają się podług (36) trzy rzetelne pierwiastki równania (33).

Wzory (41) przedstawiają także w tym samym przypadku trzy rzetelne pierwiastki równania (33) — aczkolwiek w kształcie mniej dogodnym, gdyż te trzy rzetelne pierwiastki składają się w tym razie ze składników tak zwanych urojonych i sprzężonych. Przy pojawieniu się po raz pierwszy rozwiązania równań 3go stopnia przez włoskiego matematyka Cardana, nie umiano, w tym przypadku, ze składników urojonych złożyć rzeczywistych wartości pierwiastków w postaci rzetelnej, i dla tego też nazwano ten właśnie przypadek zachodzący przy równaniu 3go stopnia *casus irreducibilis*.

(II) Jeżeli w (33) $p>0$, $\left(\frac{q}{2}\right)^2>\left(\frac{p}{3}\right)^3$, możemy i w tym razie należące pierwiastki w (41) przedstawić w postaci goniometrycznej kładąc :

(45) $$\mathrm{wst}\psi=\frac{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{q}{2}},\qquad \frac{q}{2}=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{dosie}\,\psi,\quad \text{zatem}$$

$$i\mathrm{R}=i\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3\mathrm{dosie}^2\psi}=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mathrm{dosie}^2\psi-1}=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{doty}\,\psi,$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\mathrm{R}}+\sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{dosie}\psi+\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{doty}\,\psi}=-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{1-\mathrm{dos}\psi}{\mathrm{wst}\psi}}=-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\mathrm{sty}\,\frac{\psi}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\mathrm{R}}=-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{1+\mathrm{dos}\,\psi}{\mathrm{wst}\psi}}=-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\mathrm{doty}\,\frac{\psi}{2}};$$

$$y=-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt[3]{\mathrm{sty}\frac{\psi}{2}}+\sqrt[3]{\mathrm{doty}\,\frac{\psi}{2}}\right],$$

(46) $$y=-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left[\sqrt[3]{\mathrm{sty}\frac{\psi}{2}}+\sqrt[3]{\mathrm{doty}\,\frac{\psi}{2}}\right]+\sqrt{-3}\left[\sqrt[3]{\mathrm{sty}\,\frac{\psi}{2}}-\sqrt[3]{\mathrm{doty}\,\frac{\psi}{2}}\right]\right\},$$

$$y=-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left[\sqrt[3]{\mathrm{sty}\frac{\psi}{2}}+\sqrt[3]{\mathrm{doty}\,\frac{\psi}{2}}\right]-\sqrt{-3}\left[\sqrt{\mathrm{sty}\frac{\psi}{2}}-\sqrt[3]{\mathrm{doty}\,\frac{\psi}{2}}\right]\right\}.$$

(III) Jeżeli nareszcie mamy do rozwiązania równanie (42) dla $p>0$, możemy i w tym razie należące tu pierwiastki w (44) przedstawić w postaci goniometrycznej, kładąc :

(47) $$\mathrm{doty}\,\psi=\frac{\frac{q}{2}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{q}{2}=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{doty}\,\psi,\quad \text{a więc}$$

$$\mathrm{R}'=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{dosie}\,\psi,$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\mathrm{R}'}=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{1-\mathrm{dos}\,\psi}{\mathrm{wst}\,\psi}}=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\mathrm{sty}\,\frac{\psi}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\mathrm{R}'}=-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{1+\mathrm{dos}\,\psi}{\mathrm{wst}\,\psi}}=-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\mathrm{doty}\,\frac{\psi}{2}},$$

$$y_1=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt[3]{\operatorname{sty}\frac{\psi}{2}}-\sqrt[3]{\operatorname{doty}\frac{\psi}{2}}\right],$$

$$(48)\qquad y_2=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left[-\sqrt[3]{\operatorname{sty}\frac{\psi}{2}}+\sqrt[3]{\operatorname{doty}\frac{\psi}{2}}\right]+\sqrt{-3}\left[\sqrt[3]{\operatorname{sty}\frac{\psi}{2}}+\sqrt[3]{\operatorname{doty}\frac{\psi}{2}}\right]\right\},$$

$$y_3=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left[-\sqrt[3]{\operatorname{sty}\frac{\psi}{2}}+\sqrt[3]{\operatorname{doty}\frac{\psi}{2}}\right]-\sqrt{-3}\left[\sqrt[3]{\operatorname{sty}\frac{\psi}{2}}+\sqrt[3]{\operatorname{doty}\frac{\psi}{2}}\right]\right\}.$$

W przypadkach tedy (II) i (III) obliczamy z warunku (45), a względnie z warunku (47), odpowiednią wartość kąta ψ, a następnie same pierwiastki podług (45), a względnie podług (48).

Rozpatrzywszy wszystkie trzy przypadki, zachodzące przy rozwiązywaniu równań 3go stopnia widzimy, że w każdym razie równanie 3go stopnia posiadać musi przynajmniej jeden pierwiastek rzetelny. W przypadku pierwszym jawią się wszystkie trzy pierwiastki w postaci rzetelnej, w dwóch innych przypadkach przynależy równaniu prócz jednego pierwiastku rzetelnego jeszcze para pierwiastków *złożonych* tak zwanych *sprzężonych*.

Rozwiązanie równania (42) podane pod liczbą (44), uskutecznione zostało wyrażeniami zbudowanemi ze współczynników równania p i q. Te trzy pierwiastki w (44) mogą być uważane za rozwiązanie dla wszystkich trzech przypadków. Rozwiązania ze względu na poszczególne przypadki różnią się tylko z powodu każdorazowego wprowadzenia goniometrycznych funkcyj w celu przygotowania wzorów do praktycznego obliczania pierwiastków.

(49) Pierwiastek y_1 składa się z dwóch składników i prowadzi do drugiego pierwiastka y_2 za pomocą pomnożenia pierwszego składnika przez $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)=\beta$, drugiego zaś przez $\beta^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)$. Pierwiastek y_1 zamienia się na pierwiastek y_3 za pomocą pomnożenia pierwszego składnika przez β^2, drugiego zaś przez β. Liczby β i β^2 są trzeciemi pierwiastkami z jedności, i znajdziemy zawsze $\beta^3=1$, $(\beta^2)^3=(\beta^3)^2=1$. Ztąd wypada wzór ogólny na którykolwiek pierwiastek :

$$x_s=\beta^s\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\mathrm{R}'}+\beta^{2s}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\mathrm{R}'},\quad (\text{dla}\quad s=1,2,3).$$

Kładąc w równaniu

$$(50)\qquad x^3+ax^2+bx+c=0,$$

$x=y-\frac{a}{3}$, otrzymamy, pisząc dla skrócenia

$$(51)\qquad q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27},\qquad p=\frac{3b-a^2}{3},$$

równanie

$$(52)\qquad y^3+py+q=0,$$

którego ogólne rozwiązanie podaliśmy w (44).

Wprowadźmy w (44) we wzorze na y_1 wartości na p i q podane w (51) a otrzymamy pierwiastek x_1 równania (50) :

$$(53)\qquad x=x_1=y_1-\frac{a}{3}=-\frac{a}{3}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{4\mathrm{Q}+12\sqrt{3}\sqrt{\mathrm{H}}}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{4\mathrm{Q}-12\sqrt{3}\sqrt{\mathrm{H}}},$$

gdzie

$$Q = 9ab - 2a^2 - 27c, \qquad H = 4b^3 + 4ca^3 + 27c^2 - a^2b^2 - 18abc. \tag{54}$$

Oznaczając przez x_1, x_2, x_3, pierwiastki równania (50), otrzymamy, na podstawie ogólnych własności równań, następujące związki :

$$\begin{aligned} -a &= x_1 + x_2 + x_3, \\ b &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \\ -c &= x_1x_2x_3; \end{aligned}$$

a rozumiejąc przez symboliczne wyrażenie (ghk) sumę jednorodną utworzoną z x_1, x_2, x_3, o wykładnikach g, h, k, będzie oczywiście :

$$(ghk) = x^g{}_1 x^h{}_2 x^k{}_3 + x^g{}_1 x^k{}_2 x^h{}_3 + x^h{}_1 x^g{}_2 x^k{}_3 + x^h{}_1 x^k{}_2 x^g{}_3 + x^k{}_1 x^g{}_2 x^h{}_3 + x^k{}_1 x^h{}_2 x^g{}_3, \tag{55}$$

a następnie :

$$\begin{aligned} -ab &= (012) + 3(111), \\ -a^3 &= (003) + 3(012) + 6(111), \\ -c &= (111), \\ b^3 &= (033) + 3(123) + 6(222), \\ ca^3 &= (114) + 3(123) + 6(222), \\ c^2 &= (222), \\ a^2b^2 &= 2(114) + 15(222) + 8(123) + 2(033) + (024), \end{aligned} \tag{56}$$

a wskutek tego

$$\begin{aligned} Q &= 9ab - 2a^3 - 27c = 2(003) - 3(012) + 2(111), \\ 4Q &= 8x^3{}_1 + 8x^3{}_2 + 8x^3{}_3 - 12(x^2{}_1x_2 + x_1x^2{}_2 + x^2{}_2x_3 + x_2x^2{}_3 + x^2{}_3x_1 + x_3x^2{}_1) + 8x_1x_2x_3, \\ H &= 4b^3 + 4ca^3 + 27c^2 - a^2b^2 - 18abc = -1\,[(024) - 2(114) - 6(222) + 2(123) - 2(033)] = \\ &= [(x^2{}_1x_2 - x_1x^2{}_2)\,i + (x^2{}_2x_3 - x_2x^2{}_3)\,i + (x^2{}_2x_1 - x_3x^2{}_1)\,i]^2, \\ \sqrt{H} &= \pm\, i\,[x^2{}_1x_2 - x_1x^2{}_2 + x^2{}_2x_3 - x_2x^2{}_3 + x^2{}_2x_1 - x_3x^2{}_1]. \end{aligned} \tag{57}$$

Z tych dwóch wartości przeciwnego znaku jedna wejdzie do jednego, druga zaś do drugiego składnika w (53).

Otrzymamy nareszcie z (53)

$$\begin{aligned} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} &+ \frac{1}{6}\sqrt[3]{[[8x^3{}_1 + 24x^2{}_2x_3\beta^2 + 24x_2x^2{}_3\beta] + \ldots] + 8x_1x_2x_3} + \\ &+ \frac{1}{6}\sqrt[3]{[(8x^3{}_1 + 24x^2{}_2x_3\beta + 24x_2x^2{}_3\beta^2) + \ldots] + 8x_1x_2x_3}, \end{aligned} \tag{58}$$

gdzie znak ... ma przypominać, że wyrażenie ujęte nawiasem uzupełnione być musi jeszcze dwoma podobnemi wyrażeniami powstałemi z pierwszego przez równoczesne posunięcie wszystkich dolnych znaczków o jedność a względnie o dwie jedności.

Pierwiastkowanie daje się uskutecznić, w obydwóch wyrazach (58) i trzeci pierwiastek otrzymamy w następującej formie :

(59) $$[2x_1\sqrt[3]{1}+2x_2\sqrt[3]{1}+2x_3\sqrt[3]{1}],$$

gdzie stosownie do wyrażeń znajdujących się pod znakiem $\sqrt[3]{}$ wartości na $\sqrt[3]{1}$ oznaczone być muszą. Jeżeli $\beta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}$, to każdy z wyrazów β, β^2, β^3, może nam przedstawiać wartość na $\sqrt[3]{1}$, i chodzi nam teraz tylko o zbadanie, w jaki sposób te trzy wartości przyczyniają się do złożenia trójmianu (59) aby tak uzyskany trójmian przedstawiał rzeczywiście jeden lub drugi z żądanych pierwiastków w (21). Stosownie do wyrazu $8x_1x_2x_3$ znajdującego się pod znakiem $\sqrt[3]{}$ muszą w (58) wartości na $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{1}$ tak być dobrane, aby ich iloczyn był równy jedności. Ta okoliczność sama wskazuje dla trójmianu (59) jeden z kształtów

(60) $$2(\beta^sx_1+\beta^sx_2+\beta^sx_3),\quad 2(\beta^sx_1+\beta^{s+1}x_2+\beta^{s+2}x_3),\quad [s=1,2,3]$$

a mianowicie na kształty, gdzie wszystkie trzy pierwiastki zastąpione są albo równemi albo zupełnie różnemi potęgami ilości β.

Uwzględniając wyrazy kształtu $x^2_1x_2$ stojące pod pierwiastkiem przekonamy się, że tylko zupełnie różne ilości β przedstawiać mogą współczynniki w trójmianie (59).

Uwzględniwszy te uwagi, możemy to równanie (58) napisać w formie następującej :

$$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)+\frac{1}{6}(2x_1\beta^s+2x_2\beta^{s+1}+2x_3\beta^{s+2})+\frac{1}{6}(2x_1\beta^{2s}+2x_2\beta^{2(s+1)}+2x_3\beta^{2(s+2)}),$$

albo

(61) $$x=\frac{x_1}{3}[1+\beta^s+\beta^{2s}]+\frac{x_2}{3}[1+\beta^{s+1}+\beta^{2(s+1)}]+\frac{x_3}{3}[1+\beta^{s+2}+\beta^{2(s+2)}].$$

Kładąc tu

(62)
$s=0$ otrzymamy $x=x_1$,
$s=1$ » $x=x_3$.
$s=2$ » $x=x_2$.

Dla dalszych wartości na s wartości na x właśnie otrzymane będą się peryodycznie powtarzały.

Widzimy ztąd, że wartość na x podana w (53) przedstawia nam wszystkie trzy pierwiastki równania (50), jeżeli tylko pierwiastkowanie 3go stopnia w odpowiednich znaczeniach zastosujemy.

Z równania (61) można się także przekonać, że biorąc je dla jakiejkolwiek *pewnej* wartości na s, dojdziemy zawsze do jednego z żądanych pierwiastków równania (50), a do reszty dwóch pierwiastków dojdzie się na podstawie tej samej wartości na s, posuwając w równaniu (61) wszystkie dolne znaczki o jedność a względnie o dwie jedności. Nadmieniamy tylko, że znaczek 3 posunięty o jedność wyda nam wprawdzie znaczek 4, który wszakże jest równoważny znaczkowi 1.

Nadmieniamy także, że wartość ogólna na x podana w (53) nie przestaje czynić zadość równaniu (50) i wtedy, z pomiędzy ilości a, b, c jeżeli nie wszystkie to przynajmniej niektóre przedstawiają liczby tak zwane urojone.

Przypatrzywszy się wyrazom H i Q stojącym pod znakiem pierwiastkowania a wyrażonym za pomocą pierwiastków x_1, x_2, x_3, przekonamy się, że te wyrazy są, ze względu na x_1, x_2, x_3, funkcyjami symetrycznemi, które się nie zmieniają w skutek przestawienia dwóch jakichkolwiek ze wskazówek 1, 2, 3 między sobą.

Uskuteczniwszy pierwiastkowanie $\sqrt{H}$ doszliśmy do funkcyi już nie symetrycznej, lecz do funkcyi tak zwanej półsymetrycznej czyli do funkcyi dwuwartościowej, która w skutek przestawienia dwóch znaczków między sobą przybiera wartość tę samą ale o znaku przeciwnym. Wyciągnąwszy nareszcie trzecie pierwiastki ze składników wyrazu (53) otrzymaliśmy pod liczbą (61) funkcyję tak zwaną trzywartościową, przedstawiającą którykolwiek z pierwiastków x_1, x_2, x_3 li tylko za pomocą odpowiedniego ustawienia znaczków 1, 2, 3.

Wskutek tych tu wymienionych własności wyrazu (53), nazywamy go *pierwiastkiem ogólnym* równania (50), czyli także tegoż równania *rozwiązaniem ogólnem* [1].

(Ciąg dalszy.)

O ROZWIĄZANIACH OKRESOWYCH.

Do rozwiązania ogólnego równania stopnia trzeciego doszliśmy drogą syntetyczną, polegając na goniometrycznej własności wyrazu okresowego $x_s = 2r \operatorname{dos}\left(\psi + (s-1)\frac{2\pi}{3}\right)$, który dla stałego r i φ i dowolnych całkowitych wartości na s tylko trzy między sobą różne szczególne wartości x_1, x_2, x_3 przybrać może. Kładąc nadto $k = 2\operatorname{dos}(3\varphi + (s-1)2\pi)$ moglibyśmy powiedzieć, że wyraz $x_s = 2r\operatorname{dos}\left(\varphi + (s-1)\frac{2\pi}{3}\right)$ dla stałych r i k i dowolnych całkowitych wartości na s przedstawia tylko trzy między sobą różne szczególne wartości x_1, x_2, x_3.

Szukając równania, któreby te trzy wartości x_1, x_2, x_3 jako pierwiastki posiadało, moglibyśmy zamiast metody użytej pod liczbą (27), (28) i (34) postąpić drogą następującą:

Mamy przedewszystkiem

$$x_1 = 2r \operatorname{dos}\varphi,$$

$$x_2 = -r\operatorname{dos}\varphi + r\sqrt{3}\operatorname{wst}\varphi, \tag{63}$$

$$x_3 = -r\operatorname{dos}\varphi - r\sqrt{3}\operatorname{wst}\varphi,$$

i równanie posiadające pierwiastki x_1, x_2, x_3,

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0, \quad \text{albo}$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0. \tag{64}$$

Na podstawie (63) będzie:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = [-2r^2\operatorname{dos}^2\varphi - 2r^2\sqrt{3}\operatorname{dos}\varphi\operatorname{wst}\varphi] +$$
$$+ [r^2\operatorname{dos}^2\varphi - 3r^2\operatorname{wst}^2\varphi] + [-2r^2\operatorname{dos}^2\varphi + 2r^2\sqrt{3}\operatorname{dos}\varphi\operatorname{wst}\varphi] =$$
$$= -3r^2(\operatorname{dos}^2\varphi + \operatorname{wst}^2\varphi) = -3r^2;$$

---

[1] Opierając się na powyższem pojmowaniu rozwiązania ogólnego włoski matematyk RUFFINI udowodnił, że równania sięgające ponad stopień czwarty nie posiadają ogólnego rozwiązania.

i nareszcie

$$x_1x_2x_3 = 2r^3 \operatorname{dos}\varphi[\operatorname{dos}^2\varphi - 3\operatorname{wst}^2\varphi] = r^3\operatorname{dos}\varphi[1 + \operatorname{dos}2\varphi - 3(1-\operatorname{dos}2\varphi)] =$$

$$= r^3\operatorname{dos}\varphi[-2 + 4\operatorname{dos}2\varphi] = -2r^3\operatorname{dos}\varphi + 2r^3.2\operatorname{dos}2\varphi\operatorname{dos}\varphi =$$

$$= 2r^3[-\operatorname{dos}\varphi + (\operatorname{dos}3\varphi + \operatorname{dos}\varphi)] = 2r^3\operatorname{dos}3\varphi = r^3k,$$

i nareszcie na podstawie tych tu wyprowadzonych wartości wyrazów :

$$(x_1 + x_2 + x_3), \quad (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1), \quad x_1x_2x_3$$

otrzymamy równanie (64) w postaci następującej

(65) $$x^3 - 3r^2x - r^3k = 0,$$

które zupełnie się zgadza z równaniem (35).

Przygotowawszy tym sposobem, do założonego trójwartościowego wyrazu okresowego

$$x_s = 2r\operatorname{dos}\left(\varphi + (s-1)\frac{2\pi}{3}\right),$$

odpowiednie równanie trzeciego stopnia pozbawione wyrazu zawierającego drugą potęgę niewiadomej, staraliśmy się stałe r i k tak dobrać, aby otrzymane równanie (65) swemi współczynnikami było podobne do współczynników równania danego do rozwiązania a mianowicie już tak przerobionego, aby nie posiadało już wyrazu o potędze drugiej ilości niewiadomej. Przedstawiwszy tak stałe r i k a pośrednio i φ za pomocą współczynników równania zadanego i wstawiwszy takowe we wzorach (63) doszliśmy nareszcie do rozwiązania okresowego zadanego równania trzeciego stopnia.

Z porządku rzeczy wypada nam się zająć uogolnieniem tej syntetycznej metody, i zbadać jakie równania ogółem za pomocą tej metody rozwiązane być mogą.

Łatwo zrozumiemy, że związek :

(66) $$k = 2\operatorname{dos}[m\varphi + (s-1)2\pi] = 2\operatorname{dos}m\varphi,$$

dla dowolnego całkowitego s zawsze do tej samej wartości k prowadzić musi, dopóty, dopóki liczba łukowa $m\varphi$ zatrzymuje tę samą wartość.

Inaczej rzecz się ma z wyrazem okresowym :

(67) $$x_s = 2r\operatorname{dos}\left[\varphi + (s-1)\frac{2\pi}{m}\right],$$

który dla stałego r, φ i całkowitego m, dla wszelkich możliwych całkowitych wartości na s, okazuje się wyrazem m-wartościowym, przedstawiającym różne między sobą wartości $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ i żadnej innej.

Celem otrzymania równania m^{tego} stopnia posiadającego rozwiązanie okresowe (67) otrzymamy rozwijając funkcyję $\operatorname{dos}m\varphi$ w szereg uporządkowany według wzrastających potęg ilości $\operatorname{dos}\varphi$, postępując drogą wskazaną w II$^{\text{im}}$ tomie mojej matematyki [1] na stronnicy 596, następujące równanie :

(68) $$2\operatorname{dos}m\varphi = k_m = \operatorname{wst}\frac{m\pi}{2}\mathrm{P}'_m + \operatorname{dos}\frac{m\pi}{2}\mathrm{P}''_m, \quad \text{z określeniami :}$$

(69) $$\begin{aligned} \mathrm{P}'_m &= \frac{2m}{1!}\operatorname{dos}\varphi - \frac{2m(m^2-1^2)}{3!}\operatorname{dos}^3\varphi + \frac{2m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\operatorname{dos}^5\varphi - \ldots \\ \mathrm{P}''_m &= 2 - \frac{2m^2}{2!}\operatorname{dos}^2\varphi + \frac{2m^2(m^2-2^2)}{4!}\operatorname{dos}^4\varphi - \frac{2m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\operatorname{dos}^6\varphi + \ldots \end{aligned}$$

---

[1] *Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach*, w 2 tomach. Lwów, 1864, drukiem Kornela Pillera.

Wskutek $\operatorname{dos}(2n+1)\frac{\pi}{2}=\operatorname{wst}2n\frac{\pi}{2}=0$, $\operatorname{wst}(2n+1)\frac{\pi}{2}=\operatorname{dos}2n\frac{\pi}{2}=(-1)^n$ równanie (68) przedstawia się stosownie do tego czy m jest parzyste lub nie, w następujących postaciach:

(70)
$$2\operatorname{dos}m\varphi=k_m=(-1)^{\frac{m}{2}}\mathrm{P}''_m \quad \text{dla parzystego } m,$$
$$2\operatorname{dos}m\varphi=k_m=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\mathrm{P}'_m \quad \text{dla nieparzystego } m;$$

w każdem równaniu (70) wielomian P kończy się wyrazem zawierającym m^{ta} potęgę ilości $\operatorname{dos}\varphi$.

Przerabiając wyrażenia $[m^2-(2s)^2]$, $[m^2-(2s+1)^2]$ według wzorów:

(71)
$$m^2-(2s)^2=2^2\left(\frac{m}{2}+s\right)\left(\frac{m}{2}-s\right),$$
$$m^2-(2s+1)^2=2^2\left(\frac{m+1}{2}+s\right)\left[\frac{m+1}{2}-(s+1)\right],$$

i kładąc ogólnie

(72)
$$(-1)^s\frac{m(m-s-1)(m-s-2)\ldots(m-2s+1)}{s!}=[m,s],$$

możemy równaniom (70) nadać następujące podobne kształty:

(73)
$$(2\operatorname{dos}\varphi)^m-m(2\operatorname{dos}\varphi)^{m-2}+[m,2](2\operatorname{dos}\varphi)^{m-4}-[m,3](2\operatorname{dos}\varphi)^{m-7}+\ldots$$
$$\ldots+\left[m,\frac{m}{2}-1\right](2\operatorname{dos}\varphi)^2+(-1)^{\frac{m}{2}}2=2\operatorname{dos}m\varphi=k_m$$
$$(2\operatorname{dos}\varphi)^m-m(2\operatorname{dos}\varphi)^{m-2}+[m,2](2\operatorname{dos}\varphi)^{m-4}-[m,3](2\operatorname{dos}\varphi)^{m-6}+\ldots$$
$$\ldots+\left[m,\frac{m-3}{2}\right](2\operatorname{dos}\varphi)^3+(-1)^{\frac{m-1}{2}}m(2\operatorname{dos}\varphi)=2\operatorname{dos}m\varphi=k_m.$$

Te rownania przybiorą, za podstawieniem $2\operatorname{dos}\varphi=\frac{x}{r}$ i po obustronnem pomnożeniu przez r^m, następującą formę:

(74)
$$x^m-mr^2x^{m-2}+[m,2]r^4x^{m-4}-\ldots+\left[m,\frac{m}{2}-1\right]r^{m-2}x^2+(-1)^{\frac{m}{2}}2r^m=$$
$$=2r^m\operatorname{dos}m\varphi=k_mr^m,$$
$$x^m-mr^2x^{m-2}+[m,2]r^4x^{m-4}-\ldots+\left[m,\frac{m-3}{2}\right]r^{m-3}x^3+(-1)^{\frac{m-1}{2}}mr^{m-1}x=$$
$$=2r^m\operatorname{dos}m\varphi=k_mr^m.$$

Łatwo pojąć, że bez naruszenia wartości stałej k_m można obustronnie w równaniach (73), dla dowolnego całkowitego s, zastąpić φ wyrazem $\varphi+\frac{(s-1)2\pi}{m}$; w tym bowiem razie wyraz po prawej stronie zamieni się na $2\operatorname{dos}[m\varphi+(s-1)2\pi]=2\operatorname{dos}m\varphi=k_m$.

Wskutek tego, co się powiedziało, można w równaniach (74), bez naruszenia stałych r i k_m dla dowolnego całkowitego s, ilość x zastąpić wyrazem okresowym

(75)
$$x_s=2r\cos\left[\varphi+\frac{(s-1)2\pi}{m}\right]=r\beta^{s-1}e^{i\varphi}+r\beta^{1-s}e^{-i\varphi}$$
$$\text{gdzie}\qquad \beta=\sqrt[m]{1}=\sqrt[m]{e^{2\pi i}}=e^{\frac{2\pi i}{m}}=\operatorname{dos}\frac{2\pi}{m}+i\operatorname{wst}\frac{2\pi}{m},$$

i powiedzieć, że pierwiastki $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ należą do równań (74).

Równania (74) posiadające w (75) rozwiązanie okresowe mają tę szczególną postać, że zawierają w sobie niewiadomę tylko w potęgach parzystych lub nieparzystych wedle tego, czy ich stopień m okazuje się parzysty lub nie.

Celem porównania zadanego równania

(76) $$y^m + b_1 y^{m-1} + b_2 y^{m-2} + b_3 y^{m-3} + \ldots + b_{m-1} y + b_m = 0,$$

z równaniem typowem (74) postawmy w niem $y = x - \frac{b_1}{m}$ a otrzymamy równanie przerobione

(77) $$x^m + px^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + \ldots + c_{m-2} x^2 + c_{m-1} x + q = 0,$$

które oczywiście okazać musi

$$c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = c_{2s+1} = 0$$

jeżeli mówiwy o jego podobieństwie do typowego równania (74).

Jeżeli w samej rzeczy przerobione równanie (76) okaże się w postaci :

(78) $$x^m + px^{m-2} + c_4 x^{m-4} + c_6^{m-6} + \ldots + c_{m-2} x^2 + q = 0,$$

możemy zająć się badaniem, czy stałe k_m i r mogą być tak dobrane, aby równanie (74) zgodziło się ze względu na wszystkie współczynniki z równaniem (76).

W tym celu postawmy :

(79) $$-mr^2 = p, \quad \text{a} \quad \text{znajdziemy} \quad r = \left[\frac{-p}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = i\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{1}{2}},$$

a na podstawie porównania ze względu na współczynniki oznaczone przez c następujące związki :

(80) $$\begin{aligned} c_4 &= [m, 2]\left(\frac{-p}{m}\right)^2, \\ c_6 &= [m, 3]\left(\frac{-p}{m}\right)^3, \\ c_8 &= [m, 4]\left(\frac{-p}{m}\right)^4, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ c_{2s} &= [m, s]\left(\frac{-p}{m}\right)^s, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

które koniecznie spełnione być muszą, jeżeli ma być mowa o rozwiązaniu równania (78) za pomocą znanego rozwiązania równania (74).

Przekonawszy się już o rzeczywistem istnieniu związków (80), kładziemy dalej :

(81) w przypadku parzystego m $\quad [2r^m(-1)^{\frac{m}{2}} - 2r^m \operatorname{dos} m\varphi = q,$

(82) w przypadku zaś nieparzystego m $\quad -2r^m \cos m\varphi = q.$

Na podstawie (81) i (79) znajdziemy:

$$\operatorname{dos} m\varphi = \left[(-1)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{-p}{m}\right)^{\frac{m}{2}} - \frac{q}{2}\right] : r^m = \left[\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}} - \frac{q}{2}\right] : r^m,$$

$$\text{i}\ \operatorname{wst} m\varphi = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}}} : r^m,$$

(83)
$$e^{m\varphi i} = \left[\left(\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}} - \frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}}}\right] : r^m = \mathrm{H}_1 : r^m$$

$$e^{-m\varphi i} = \left[\left(\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}} - \frac{q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}}}\right] : r^m = \mathrm{H}_2 : r^m.$$

$$e^{\varphi i} = \pm\sqrt[m]{\mathrm{H}_1} : r, \qquad e^{-\varphi i} = \pm\sqrt[m]{\mathrm{H}_2} : r,$$

zatem dla parzystego m

(84)
$$x_s = \beta^{s-1}\sqrt[m]{\mathrm{H}_1} - \beta^{1-s}\sqrt[m]{\mathrm{H}_2}; \qquad y_s = x_s - \frac{b_1}{m},$$

z określeniami:

$$\mathrm{H}_1 = \left[\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}} - \frac{q}{2}\right] + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}}},$$

(85)
$$\mathrm{H}_2 = \left[\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}} - \frac{q}{2}\right] - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{2}}},$$

$$\beta = \operatorname{dos}\frac{2\pi}{m} + i\operatorname{wst}\frac{2\pi}{m}.$$

W rozwiązaniu okresowem użyliśmy znaków przeciwnych przy m-tych pierwiastkach wyrazów H_1 i H_2, jak się o tem łatwo przekonać można w przypadku szczególnym dla $m = 4$ podstawiając x_s w odpowiedniem równaniu 4[tego] stopnia.

Na podstawie (82) i (79) mamy dla nieparzystego m

$$\operatorname{dos} m\varphi = -\frac{q}{2} : r^m,$$

$$\text{i}\ \operatorname{wst} m\varphi = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{m}\right)^m} : r,$$

$$e^{m\varphi i} = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{m}\right)^m}\right] : r^m = \mathrm{H}'_1 : r^m,$$

(86)

$$e^{-m\varphi i} = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{m}\right)^m}\right] : r^m = \mathrm{H}'_2 : r^m,$$

$$e^{\varphi i} = \sqrt[m]{\mathrm{H}'_1} : r,$$

$$e^{-\varphi i} = \sqrt[m]{\mathrm{H}'_2} : r,$$

zatem dla nieparzystego m:

$$x_s = \beta^{s-1}\sqrt[m]{\mathrm{H}'_1} + \beta^{1-s}\sqrt[m]{\mathrm{H}'_2},\quad y_s = x_s - \frac{b_1}{m}, \tag{87}$$

z określeniami:

$$\mathrm{H}'_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{m}\right)^m},$$

$$\mathrm{H}'_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{m}\right)^m}, \tag{88}$$

$$\beta = \mathrm{dos}\,\frac{2\pi}{m} + i\,\mathrm{wst}\,\frac{2\pi}{m}.$$

Rozwiązania okresowe podane w (84) i (87) należą tylko natenczas do przedłożonego równania (26), (27), jeżeli spełnione są warunki (80).

Dla równania $x^2 + q = 0$ mamy $x = \sqrt{-q}$; postępując zaś podług (84) kładąc tam $m = 2$, $s = 1$ otrzymamy:

$$x = \sqrt{\frac{p}{2} - \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\frac{p}{2}}} - \sqrt{\frac{p}{2} - \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\frac{p}{2}}},$$

a ztąd dla dowolnego p:

$$\sqrt{-q} = \sqrt{\frac{p}{2} - \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\frac{p}{2}}} - \sqrt{\frac{p}{2} - \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\frac{p}{2}}}. \tag{89}$$

Równanie $z^2 + pz + q = 0$ daje $z = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; atoli porównywając to równanie z równaniem (78) dla $m = 4$ otrzymamy $z = x^2$, i dojdziemy na podstawie (84) do następującego związku:

$$z = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = x^2 = \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{4}\right)^2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{4}\right)^2}} - \frac{p}{2},$$

albo

$$\sqrt{p^2 - 4q} = \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{4}\right)^2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{4}\right)^2}}, \tag{90}$$

i także

$$\sqrt{-\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}} = \sqrt[4]{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{4}\right)^2}} - \sqrt[4]{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - q\left(\frac{p}{4}\right)^2}}. \tag{91}$$

Do rozwiązania równań może się także przydać znany następujący związek:

$$\mathrm{sty}\, m\varphi = \frac{m\,\mathrm{sty}\,\varphi - \binom{m}{3}\mathrm{sty}^3\varphi + \binom{m}{5}\mathrm{sty}^5\varphi - \ldots}{1 - \binom{m}{2}\mathrm{sty}^2\varphi + \binom{m}{4}\mathrm{sty}^4\varphi - \ldots} = t, \tag{92}$$

który dla całkowitych m i odpowiednich stałych wartości na φ i t istnieć nie przestaje, choćbyśmy w nim ilość φ zastąpili wyrazem $\left[\varphi + (s-1)\frac{\pi}{m}\right]$ o dowolnych całkowitych wartościach na s.

Kładąc w nim $\operatorname{sty}\varphi = \frac{x}{r}$ uporządkujmy go według malejących potęg x, otrzymamy następujące równania m^{tego} stopnia:

(93)
$$tx^m + \binom{m}{1} rx^{m-1} - \binom{m}{2} tr^2x^{m-2} - \binom{m}{3} r^3x^{m-3} + \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} tr^m = 0,$$
$$\ldots\ t = \operatorname{sty} m\varphi$$
$$x^m = \binom{m}{1} trx^{m-1} - \binom{m}{2} r^2x^{m-2} + \binom{m}{3} tr^3x^{m-3} + \ldots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} tr^m = 0,$$

z których, pierwsze ma miejsce dla parzystych m, drugie zaś dla nieparzystych.

Na podstawie poprzedzającej uwagi otrzymamy okresowe rozwiązanie równań (93) w następującej formie:

(94)
$$x_s = r \operatorname{sty}\left[\varphi + (s-1)\frac{\pi}{m}\right],$$

albo

$$x_s = \frac{r}{i}\,\frac{e^{i\varphi}\left(e^{\frac{2\pi}{m}i}\right)^{s-1} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}\left(e^{\frac{2\pi}{m}i}\right)^{s-1} + e^{-i\varphi}}, \quad \text{gdzie} \quad \operatorname{sty} m\varphi = t.$$

Dla równania

(95)
$$x^2 + px + q = 0,$$

mamy

$$m = 2, \quad \frac{\binom{m}{1} r}{t} = \frac{2r}{t} = p, \quad \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} tr^m}{t} = -r^2 = q, \quad t = \operatorname{sty} 2\varphi,$$

zatem

$$r = i\sqrt{q}, \quad t = \frac{2i\sqrt{q}}{p} = \operatorname{sty} 2\varphi, \quad \operatorname{dos} 2\varphi = p : \sqrt{p^2 - 4q}, \quad i \operatorname{wst} 2\varphi = -2\sqrt{q} : \sqrt{p^2 - 4q},$$

$$e^{2\varphi i} = (p - 2\sqrt{q}) : \sqrt{p^2 - 4q}, \quad e^{\varphi i} = \sqrt{p - 2\sqrt{q}} : \sqrt[4]{p^2 - 4q},$$

$$e^{-2\varphi i} = (p + 2\sqrt{q}) : \sqrt{p^2 - 4q}, \quad e^{-\varphi i} = \sqrt{p + 2\sqrt{q}} : \sqrt[4]{p^2 - 4q}, \quad e^{\frac{i2\pi}{m}} = -1,$$

(96)
$$x_s = \sqrt{q}\,\frac{(-1)^{s-1}\sqrt{p - 2\sqrt{q}} - \sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{(-1)^{s-1}\sqrt{p - 2\sqrt{q}} + \sqrt{p + 2\sqrt{q}}} = -\frac{1}{2}p + \frac{(-1)^{s-1}}{2}\sqrt{p^2 - 4q}.$$

Dla równania

(97)
$$x^3 + \mathrm{P}x^2 + \mathrm{Q}x + \mathrm{H} = 0,$$

mamy

$$m = 3, \quad -\binom{m}{1} tr = \mathrm{P} = -3tr, \quad -\binom{m}{2} r^2 = -3r^2 = \mathrm{Q}, \quad \binom{m}{3} r^3t = \mathrm{H} = r^3t,$$

(98)
$$\mathrm{PQ} = 9r^3t = 9\mathrm{H}, \quad r = i\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{3}}, \quad t = \operatorname{sty} 3\varphi = \frac{i\mathrm{P}}{3} : \sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{3}},$$

$$i \operatorname{wst} 3\varphi = -\frac{P}{3} : \sqrt{\frac{Q}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2}, \quad \operatorname{dos}\varphi = \sqrt{\frac{Q}{3}} : \sqrt{\frac{Q}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2},$$

$$e^{3i\varphi} = \left(\sqrt{\frac{Q}{3}} - \frac{P}{3}\right) : \sqrt{\frac{Q}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2}, \quad e^{-3i\varphi} = \left(\sqrt{\frac{Q}{3}} + \frac{P}{3}\right) : \sqrt{\frac{Q}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2},$$

$$e^{i\varphi} = \sqrt[3]{-\frac{P}{3} + \sqrt{\frac{Q}{3}}} : \sqrt[6]{\frac{Q}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2}, \quad e^{-i\varphi} = -\sqrt[3]{-\frac{P}{3} - \sqrt{\frac{Q}{3}}} : \sqrt[6]{\frac{Q}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2},$$

$$\frac{r}{i} = \sqrt{\frac{Q}{3}}, \quad \beta = e^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2},$$

zatem podług (94) wzór

(99)
$$x_s = \sqrt{\frac{Q}{3}}\,\frac{\beta^{s-1}\sqrt[3]{-\frac{P}{3} - \sqrt{\frac{Q}{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{P}{3} - \sqrt{\frac{Q}{3}}}}{\beta^{s-1}\sqrt[3]{-\frac{P}{3} + \sqrt{\frac{Q}{3}}} - \sqrt[3]{-\frac{P}{3} - \sqrt{\frac{Q}{3}}}},$$

służący do rozwiązania równania, jeżeli jego współczynniki P, Q, H spełniają warunek

(100)
$$PQ = 9H.$$

Mając np. rozwiązać równanie

(101)
$$z^3 + 3pz + 2q = 0,$$

musimy je za pomocą odpowiedniego α przerobić na inne podstawiając w niem $z = x - \alpha$ tak, aby współczynniki przerobionego równania, oznaczone przez P, Q, H spełniły warunek (100).

Wzmiankowane podstawienie przeistacza równanie (101) na następujące :

(102)
$$x^3 - 3\alpha x^2 + (3p + 3\alpha^2)x + (2q - 3p\alpha - \alpha^3) = 0,$$

zkąd

$$P = -3\alpha, \quad Q = 3p + 3\alpha^2, \quad H = 2q - 3p\alpha - \alpha^3,$$

i zarazem na oznaczenie wartości na α według (100) :

$$PQ = -9p\alpha - 9\alpha^3 = 9H = 18q - 27p\alpha - 9\alpha^3,$$

albo

$$p\alpha = q, \quad \alpha = \frac{q}{p},$$

$$\frac{P}{3} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{Q}{3} = \frac{p^3 + q^2}{p^2},$$

nareszcie podług (99) rozwiązanie przerobionege równania (102)

$$x_s = \frac{1}{p}\sqrt{p^3 + q^2}\,\frac{\beta^{s-1}\sqrt[3]{-q - \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}}}{\beta^{s-1}\sqrt[3]{-q - \sqrt{p^3 + q^2}} - \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}}}.$$

Sprowadźmy x_s do wymiernego mianownika, a otrzymamy:

$$x_s = \frac{1}{p}\sqrt{p^3+q^2}\,\frac{-2q - 2p\left[\beta^{2(s-1)}\sqrt[3]{-q-\sqrt{p^3+q^2}}+\beta^{(s-1)}\sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q^2}}\right]}{-2\sqrt{p^3+q^2}},$$

$$x_s = \frac{q}{p} + \beta^{2(s-1)}\sqrt[3]{-q-\sqrt{p^3+q^2}}+\beta^{s-1}\sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q^2}},$$

a zatem

(103) $$z = x_s - \alpha = x_s - \frac{q}{p} = \beta^{2(s-1)}\sqrt[3]{-q-\sqrt{p^3+q^2}}+\beta^{s-1}\sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q^2}},$$

jako już nam dobrze wiadomy wzór przedstawiający rozwiązanie równania (101).

Nareszcie znajdziemy, zwykłem tu już uwidocznionem postępowaniem, na rozwiązanie równania:

(104) $$x^m + \mathrm{P}x^{m-1} + \mathrm{Q}x^{m-2} + \mathrm{H}_3x^{m-3} + \mathrm{H}_4x^{m-4} + \ldots + \mathrm{H}_m = 0,$$

w razie m parzystego lub nieparzystego

(105) $$x_s = \sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\binom{m}{2}}}\,\frac{\beta^{s-1}\sqrt[m]{\frac{\mathrm{P}}{m}-\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\binom{m}{2}}}}-\sqrt[m]{\frac{\mathrm{P}}{m}+\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\binom{m}{2}}}}}{\beta^{s-1}\sqrt[m]{\frac{\mathrm{P}}{m}-\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\binom{m}{2}}}}+\sqrt[m]{\frac{\mathrm{P}}{m}+\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\binom{m}{2}}}}}, \qquad \beta = e^{\frac{2\pi}{m}i}$$

jeżeli dla wszystkich, równaniu (104) odpowiadających wartości znaczka s, spełniają się następujące związki:

(106) $$\mathrm{H}_{2s} = \binom{m}{2s}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\binom{m}{2}}\right)^s, \quad \mathrm{H}_{2s+1} = \binom{m}{2s+1}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\binom{m}{2}}\right)^s\frac{\mathrm{P}}{m},$$

Na podstawie własności funkcyj goniometrycznych i rozwinięcia funkcyj goniometrycznych kątów wielokrotnych na szeregi uporządkowane według potęg żądanej funkcyi goniometrycznej kąta pojedynczego doszliśmy drogą syntetyczną do rozwiązania okresowego rozlicznych równań *szczególnych*, to jest takich, których współczynniki spełniają okolicznościowo żądane warunki. Na dwóch gatunkach szeregów goniometrycznych wykazaliśmy dosadnie sposób postępowania, jak za pomocą takowych dojść można do kryteryów rozpoznawczych tych równań szczególnych, które za ich pomocą mogą być rozwiązane, i podaliśmy każdorazowe samo rozwiązanie w zupełnie ogólnej formie. Za przewodem tak rozwiniętego postępowania łatwo możnaby użyć i innych szeregów goniometrycznych dla wydobycia zupełnego rozwiązania odpowiednich równań szczególnych. Na szczególniejszą uwagę zasługują równania ogólne, to jest takie, których współczynniki niepodlegając żadnym koniecznym warunkom dopuszczają wyprowadzenia wzoru okresowego na obliczanie wszystkich pierwiastków tego równania. Poszukiwania dotychczasowe oparte na własnościach szeregów goniometrycznych przekonały nas, że postępując drogą systematyczną nie mogliśmy dla ogólnych równań sięgających powyżej trzeciego stopnia dojść do rozwiązania zupełnego, tylko pod zastrzeżeniem spełnienia współczynnikami takiej liczby warunków, która właśnie wskazuje na ilość jedności, zawartych w stopniu równania ponad stopień trzeci. I już z natury tej metody nie mogło to się stać inaczej; zakładając bowiem niewiadomę x w kształcie $(2r\,\mathrm{dos}\varphi+\alpha)$ lub $(r\,\mathrm{sty}\varphi+\alpha)$ rozporządzaliśmy w każdym razie tylko trzema argumentami r, φ i α, aby za pomocą stosownego doboru ich wartości, sprowadzić równanie typowe do takiego kształtu któryby swemi współczynnikami był podobny do współczynników zadanego równania ogólnego. Zwiększenie liczby argumentów pociągnęłoby za sobą tę okoliczność, że szeregi goniometryczne przestałyby w takim razie być skończonemi, a wskutek tego nie mogłyby być przydatnemi do pośredniczenia w rozwiązywaniu równań algebraicznych, złożonych z wyrażeń o liczbie skończonej.

Celem dojścia do rozwiązywania równań stopnia powyż-trzeciego pozostaje nam jeszcze metoda analityczna, która nie przysądzając już z góry kształtu wzorów na pierwiastki, postępuje w duchu stopniowego rozwoju działań matematycznych w ten sposób, że na podstawie rozwiązania zadania niższego rzędu, wzbija się o ile to jest możliwe do osiągnięcia rozwiązania rzędu wyższego. Mając tedy na względzie wyszukiwanie pierwiastków równania, szukamy tem samem czynników pierwiastkowych tego równania, i usiłujemy rozbić równanie albo na pojedyncze czynniki pierwiastkowe, albo według okoliczności na wielomiany przedstawiające czynniki pierwiastkowe grupami. Każdy taki wielomian przyrównany do zera, będzie równaniem stopnia niższego jak równanie założone, i do rozwiązania oczywiście łatwiejszem. Pierwiastki tego równania stopnia niższego należą niewątpliwie jako pierwiastki do równania założonego.

Poszukiwaniem tego rodzaju zajmiemy się w paragrafie następnym.

§ 3.

Każde równanie możemy uważać jako równanie stopnia parzystego, albowiem równanie stopnia nieparzystego zamienić można, mnożąc je przez niewiadomę, na równanie stopnia parzystego. Dla równania o stopniu nieparzystym przybywa tym sposobem jeden pierwiastek o wartości zera.

Z tego powodu zajmować się będziemy tylko rozwiązywaniem równań o stopniach parzystych. Jeżeli równanie $2n^{\text{tego}}$ stopnia ma rozwiązanie ogólne, możemy z tego rozwiązania, za pomocą stosownego specyalizowania wieloznaczności zawartych w niem pierwiastkowań, dojść do wartości wszystkich temu równaniu przynależnych pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, i tym sposobem przedstawić równanie

$$(1)\qquad f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{2n-1} + x^{2n-1} + x^{2n} = 0,$$

w sposób następujący :

$$(2)\qquad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{2n-1})(x - x_{2n}) = 0.$$

Z tych czynników dwumiennych możemy zestawić grupy po n czynników w liczbie

$$(3)\qquad 2s_{2n} = \binom{2n}{n}, \quad s_{2n} = \binom{2n-1}{n},$$

i oznaczyć takowe przez

$$P_1,\ P'_1;\ P_2,\ P'_2;\ \ldots\ P_s,\ P'_s,$$

rozumiejąc np. przez parę P_r, P'_r takie grupy, które między sobą różnią się ze względu na wszystkie czynniki w nich zawarte, w ten sposób, że w grupach P_r i P'_r znajdują się wszystkie czynniki uwidocznione w (2).

(4) Takie grupy możemy nazwać *grupami spełniającemi się*.

Uważając każde P jako iloczyn z wszystkich w tej grupie zawartych czynników pierwiastkowych, możemy wielomian równaniowy $f(x)$ przedstawić w następujących postaciach:

(5) $$f(x) = P_1P'_1 = P_2P'_2 = \ldots = P_{s_{2n}}P'_{s_{2n}},$$ gdzie

(6) $$s_{2n} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n}.$$

Po wykonaniu mnożenia dwumianów zawartych w P, przedstawi się każde P jako wielomian n^{tego} stopnia

(7) $$P = x^n + B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \ldots + B_2x^2 + B_1x + B_0,$$

ztąd

$$\frac{1}{2}(P + P') = x^n + \frac{1}{2}(B_{n-1} + B'_{n-1})x^{n-1} + \ldots + \frac{1}{2}(B_1 + B'_1)x + \frac{1}{2}(B_0 + B'_0),$$

$$\frac{1}{2}(P - P') = \frac{1}{2}(B_{n-1} - B'_{n-1})x^{n-1} + \ldots + \frac{1}{2}(B_1 - B'_1)x + \frac{1}{2}(B_0 - B'_0),$$

albo

(8) $$\frac{1}{2}(P + P') = x^n + mx^{n-1} + px^{n-2} + \ldots + hx + l,$$
$$\frac{1}{2}(P - P') = m'x^{n-1} + p'x^{n-2} + \ldots + h'x + l';$$

a ponieważ $f(x) = PP' = \left[\frac{1}{2}(P + P')\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(P - P')\right]^2$, otrzymamy na podstawie (8) dla jakiejkolwiek pary spełniających się grup równanie (1) w następującym kształcie:

(9) $$f(x) = [x^n + mx^{n-1} + px^{n-2} + \ldots + hx + l]^2 - [m'x^{n-1} + p'x^{n-2} + \ldots + h'x + l']^2 = 0,$$

gdzie układ współczynników $m, m', p, p', \ldots h, h', l, l'$, dla każdej poszczególnej pary spełniających się grup, przedstawia się jako układ liczb zauważanej parze odpowiednich.

(10) Ztąd wypływa, *że wielomian $2n^{\text{tego}}$ stopnia zamienić można, na* $s_{2n} = \binom{2n-1}{n}$ *różnych sposobów, na kwadrat wielomianu n^{tego} stopnia pomniejszony o kwadrat innego wielomianu o stopniu* $(n-1)^{\text{szym}}$.

Jeżeli w (9) wyraz po prawej stronie uporządkujemy według malejących potęg niewiadomej x, otrzymamy, ze względu na każdą parę spełniających się grup, wielomian $2n^{\text{tego}}$ stopnia, który oczywiście równoważnym być musi wielomianowi równaniowemu $f(x)$ w ten sposób, że równym potęgom niewiadomej x odpowiadają obustronnie równe współczynniki.

Równości zachodzące między odpowiedniemi współczynnikami po lewej i po prawej stronie w (9) dadzą nam $2n$ warunków, ktore układem współczynników $m, m', \ldots h, h', l, l'$, należących do jakiejkolwiek pary spełniających się grup spełnić trzeba, aby wielomian $f(x)$ zamienić na różnicę kwadratów dwóch wielomianów należących do stopnia n^{tego} a względnie do stopnia $(n-1)^{\text{go}}$.

(11) Z tych warunków jeden odpadnie, jeżeli raz na zawsze założemy $2m = A_{2n-1}$, i pozostanie nam tylko $2n - 1$ warunków, z których, jeżeli np. ilości $p, \ldots h, m', p', \ldots h', l'$, wyrugujemy, dojść musimy do równania eliminacyjnego (R), posiadającego pozostałą niewiadomę l przynajmniej

w s_{2n}^tym^ stopniu, gdyż ono do s_{2n} różnych wartości niewiadomej prowadzić musi, aby ilość l poszczególnie do każdej pary spełniających się grup zastosować się mogła. Ogółem powinny wspomniane $2n-1$ warunki dostarczyć nam s_{2n} różnych układów wartości na współczynniki $m', p, p', \ldots$ $\ldots h, h', l, l'$.

Oznaczając przez W_n i W_{n-1} wielomiany odpowiadające jednemu z uzyskanych układów $m', p, p', \ldots$ $\ldots h, h', l, l'$, otrzymamy :

(12) $$f(x) = W^2_n - W^2_{n-1} = (W_n + W_{n-1})(W_n - W_{n-1}) = PP' = 0.$$

Pierwiastki równań

(13) $$P = W_n + W_{n-1} = 0,$$

(14) $$P' = W_n - W_{n-1} = 0,$$

są oczywiście pierwiastkami równania (1). Każde z tych równań dostarczy nam po n pierwiastków, a więc razem $2n$ pierwiastków, t. j. wszystkie pierwiastki równania (1).

Będąc już w posiadaniu wszystkich spełniających się par PP', moglibyśmy, bez uprzedniego rozwiązywania równań (13) i (14), dojść do pierwiastków równania (1) następującym sposobem :

Szukamy, między dwoma niespełniającemi się grupami czynników pierwiastkowych, naprzykład między P_w i P_q, wspólnej miary m_{wq}, i otrzymamy dajmy na to :

(15) $$P_w = p_w m_{wq}, \quad P_q = p_q m_{wq}.$$

Stopnie wielomianów p_w i p_q są równe, i albo zgadzają się ze stopniem wielomianu m_{wq} albo nie. W pierwszym razie wspólny stopień wielomianów wynosi $\frac{n}{2}$, w drugim zaś razie otrzymamy różnicę v między stopniami wielomianów p i m_{wq}; dojdziemy zatem do wielomianu o stopniu $\frac{n-v}{2} < \frac{n}{2}$, który przyrównany do zera może nam da równanie o tak nizkim stopniu iż potrafimy już je rozwiązać. Otrzymane pierwiastki należą oczywiście do zadanego równania (1).

Zresztą szukając wspólnej miary do każdej pary niespełniających się P, natrafić musimy na $2n$ takich wspólnych miar, które są stopnia 1^go^ i bezpośrednio prowadzą do wszystkich pierwiastków zadanego równania (1).

Ztąd widzimy, że metoda rozkładania wielomianu równaniowego na różnicę dwóch kwadratów prowadzi tak samo do zupełnego rozwiązania tegoż równania, jak bezpośrednie rozwiązanie równania zadanego. Równanie ogólne o współczynnikach niepodpadających żadnym warunkom i niedopuszczające rozwiązania okresowego staramy się poddać działaniu rozłożenia jego wielomianu na czynniki grupowe P i P' w tej nadziei, że może równanie pomocnicze (R) okaże się albo jako okresowo rozwiązalne albo przynajmniej do rozwiązania łatwiejsze i doprowadzi nas swemi pierwiastkami do pierwiastków zadanego równania. O ile i kiedy na taką ewentualność wypada liczyć, okaże się to najlepiej z po sobie następujących wartości, przynależnych każdorazowemu wyrazowi $s_{2n} = \binom{2n-1}{n-1}$,

Kładąc zamiast n wartości : 1, 2, 3, 4, 5, 6,... otrzymamy

(16) $$s_2 = \binom{1}{0} = 1; \quad s_4 = \binom{3}{1} = 3; \quad s_6 = \binom{5}{2} = 10; \quad s_8 = \binom{7}{3} = 35; \quad s_{10} = \binom{9}{4} = 252; \quad s_{12} = \binom{11}{6} = 462; \ldots$$

zatem : $s_{2.1} < 2.1, \quad s_{2.2} < 2.2, \quad s_{2.3} > 2.3, \quad s_{2.4} > 2.4, \quad s_{2.5}, > 2.5$, i t. d.

Wobec tych nierówności możemy tylko dla równań nie sięgających po nad stopień czwarty spodziewać się pomocniczego równania (R) mniejszego ze względu na stopień niż równanie założone. Dla równań zaś wyższych nad czwarty stopień, stopień równania pomocniczego (R) wynosi więcej niż stopień równania założonego. Ze względu więc na stopień wypadałoby równanie pomocnicze (R) uważać za trudniejsze, do rozwiązania niż równanie założone; ale z uwagi, że równanie (R), jako eliminacyjne, może swemi współczynnikami podpadać pewnym warunkom, a okolicznościowo, może nawet takim warunkom, wskutek których mogłoby jako równanie szczególne być rozwiązane okresowo, musimy ten przypadek zbadać bliżej i przekonać się o rzeczywistym stanie rzeczy.

Jakoż dążąc do rozwiązania równania o współczynnikach a_1, a_2, a_3,... a_{2n} niepodlegających żadnym warunkom, które wskutek $2n > 4$, dajmy na to, wskutek $2n = 3 + q$ i $q > 1$ nie da się rozwiązać okresowo, zmuszeni jesteśmy udać się do równania pomocniczego (R) o stopniu $m > 2n$, gdzie przypuśćmy $m = 3 + q + Q$.

Współczynniki A_1, A_2, A_3,... A_m równania (R) dadzą się drogą rugowania przedstawić jako zależne od współczynników a_1, a_2, a_3, . . . a_{2n} i prowadzą do m równań w następującej postaci :

(17) $$A_g = \varphi_g(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n}), \qquad (1 \leqq g \leqq m).$$

Rugując z tych m równań ilości a_1, a_2, a_3, . . . a_{2n} otrzymamy najwyżej $m - 2n = Q$ związków niezawisłych, którym wyłącznie współczynniki A_1, A_2, A_3, . . . A_m podlegać mają.

Na podstawie ostatniego ustępu wnosimy, że równanie (R) nie może być okresowo rozwiązane, albowiem rozwiązanie okresowe żądałoby spełnienia $q + Q$ stosownych związków współczynikami A_1, A_2, A_3, . . . A_m, co żadną miarą stać się nie może, gdyż w myśl powyższego wywodu te współczynniki najwyżej do Q związków i do tego niekoniecznie okresowemu rozwiązaniu odpowiednich zobowiązane być mogą.

Z szeregu wartości na s_4, s_6, s_8,.... widzimy że $s_4 = 3$; równanie (R), należące do ogólnego równania stopnia czwartego okaże się, jak się w następnym ustępie przekonamy, być równaniem stopnia trzeciego, i na podstawie okresowego swego rozwiązania prowadzi do zupełnego rozwiązania równania stopnia czwartego o współczynnikach ogólnych. Atoli już dla równań piątego i szóstego stopnia mamy $s_6 = 10$, i wiemy że pomocnicze równanie (R), które jest co najmniej stopnia dziesiątego i nie posiada rozwiązania okresowego nie może być rozwiązane na podstawie dotąd zdobytej już teoryi równań, sięgających li tylko do stopnia czwartego włącznie. Rozwiązania tego, przynajmniej do dziesiątego stopnia należącego, równania jako też równań pomocniczych, należących do równań dalszych stopni nawet znikąd oczekiwać nie wypada; inaczej znaczyłoby to uznawać niedorzeczne, naturze samej sprzeciwiające się analityczne zjawisko, według którego analiza miałaby załatwiać sprawy działań niższego rzędu na podstawie luźnie i samopas stojących rozwiązań równań stopni wyższych, rozstawionych w odstępach geometrycznie rozbieżnych i nie będących z sobą w żadnym związku.

Zresztą już sam pogląd na szereg (16) uczy nas, że rozwiązania ogólne rozdzielają się wobec tej analizy na dwa działy, według tego, czy odpowiednie równanie pomocnicze okazuje się w stopniu wyższym czy niższym niż równanie zadane. Do pierwszego działu należą równania aż po stopień czwarty włącznie i posiadają rzeczywiście ogólne rozwiązanie. Takiego rozwiązania dla równań wyższych nad czwarty stopień nawet nie można przypuścić, gdyż w przeciwnym razie nie moglibyśmy zrozumieć zachowania się analizy wobec tej samej kategoryi równań w dwóch różnych zupełnie sob.

przeciwnych kierunkach i niemoglibyśmy pojąć, dlaczegoby analiza, biorąc tylko niektóre z tych równań w swoją szczególną protekcyję, wpływała na ich rozwiązanie ułatwiająco, zaś wprost utrudniająco na rozwiązanie reszty równań, chociaż według obecnego przypuszczenia, należących także zarówno z pierwszemi do tej samej kategoryi.

Celem usunięcia wszelkich pojawić się mogących sprzeczności nie mamy wobec powyżej przytoczonych wyjaśnień żadnego innego wyjścia, jak ostatecznie orzeknąć, że

(18) *Równania ogólne wyższe nad czwarty stopień nie mają rozwiązania ogólnego.*

Uwaga. — Jak już z powyższych wyjaśnień widać twierdzenie (18) odnosi się li tylko do rozwiązań algebraicznych, i że na mocy tego twierdzenia niepodobna wnioskować o możliwości lub niemożliwości innego rozwiązania jak algebraicznego.

ZASTOSOWANIE METODY ANALITYCZNEJ DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ.

Ze względu na równanie 2go stopnia

(19) $$x^2+2ax+b=0$$

mamy $n=1$, $s_2=\binom{2n-1}{n}=\binom{1}{1}=1$; a następnie podług (12),

$$x^2+2ax+b=(x+a)^2-m^2=(x+a+m)(x+a-m)=x^2+2ax+(a^2-m\ ).$$

Z porównania obustronnych współczynników mamy na oznaczenie m

(20) $$a^2-m^2=b,\quad m=\sqrt{a^2-b},$$

zatem na oznaczenie pierwiastków równania (19)

$$x+a+\sqrt{a^2-b}=0,\quad x+a-\sqrt{a^2-b}=0,$$

(21) $$x=-a-\sqrt{a^2-b},\quad x=-a+\sqrt{a^2-b}=0.$$

Jak już z góry dorozumiewaliśmy się, rozwiązaliśmy idąc tą drogą równanie drugiego stopnia za pomocą dwóch równań stopnia pierwszego i równania pomocniczego (20), które do rozwiązania jest oczywiście łatwiejszem niż równanie zadane.

Ze względu na równanie 4go stopnia

(22) $$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+d=0,$$

mamy $n=2$, $s_4=\binom{2n-1}{n}=\binom{2}{3}=3$; a następnie podług (12)

$$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+d=(x^2+\alpha x+p)^2-(mx+q)^2 0=.$$

Z porównania obustronnych współczynników otrzymamy na wyznaczenie ilości p, m, i q następujące warunki :

(23) $$\left\{\begin{aligned} 2p+a^2-m^2&=b\\ ap-mq&=c\\ p^2-q&=d\end{aligned}\right.$$

Warunki (23) dają

$$m^2 = 2p + a^2 - b,$$

$$q^2 = p^2 - d,$$

$$mq = ap - c,$$

zatem

$$m^2q^2 = (2p + a^2 - b)(p^2 - d) = (ap - c)^2,$$

a zatem, zgodnie z wartością podaną na s_4 na oznaczenie niewiadomej 3go stopnia

(24) $$2p^3 - bp^2 + 2(ac - d)p + [d(b - a^2) - c^2] = 0.$$

Obliczywszy podług (53) poprzedniego paragrafu jeden pierwiastek równania (24) i oznaczywszy go przez p_1, otrzymamy z (23)

(25) $$q_1 = \sqrt{p^2 - d}, \qquad m_1 = \frac{ap_1 - c}{\sqrt{p_1^2 - d}} = \sqrt{2p_1 + a^2 - b}$$

a pierwiastki równania założonego w (22) dadzą się wyciągnąć z dwóch równań 2go stopnia,

(26) $$\begin{aligned} x^2 + (a + m_1)x + (p_1 + q_1) &= 0, \\ x^2 + (a - m_1)x + (p_1 - q_1) &= 0, \end{aligned}$$

w następującym kształcie

(27) $$\begin{aligned} 2x_1 &= -(a + m_1) + \sqrt{(a + m_1)^2 - 4(p_1 + q_1)}, \\ 2x_2 &= -(a + m_1) - \sqrt{(a + m_1)^2 - 4(p_1 + q_1)}, \\ 2x_3 &= -(a - m_1) + \sqrt{(a - m_1)^2 - 4(p_1 - q_1)}, \\ 2x_4 &= -(a - m_1) - \sqrt{(a - m_1)^2 - 4(p_1 - q_1)}, \end{aligned}$$

Pisząc

(28) $$x = -\frac{1}{2}(a + \sqrt{2p + a^2 - b}) + \frac{1}{2}\sqrt{(a + \sqrt{2p + a^2 - b})^2 - 4(p + \sqrt{p^2 - d})}$$

gdzie p oznaczać ma jeden z pierwiastków równania

$$2p^3 - bp^2 + 2(ac - d)p + [d(b - a^2) - c^2] = 0$$

wyrażony podług (53) poprzedniego paragrafu, kładąc tam na miejsce współczynników a, b i c wyrazy $-\frac{b}{2}$; $(ac - d)$; $\frac{1}{2}[d(b - a^2) - c^2]$, mamy rozwiązanie ogólne równania 4go stopnia podanego pod liczbą (22).

Aby z (28) dojść do wszystkich pierwiastków równania (22) wybiera się przedewszystkiem na oznaczenie p jedna z trzech kombinacyj różnowartościowych pierwiastkowań uwidocznionych w (53) poprzedniego paragrafu, a następnie dobiera się podług (27) cztery stosowne kombinacyje trzech w (28) uwidocznionych pierwiastkowań drugiego rzędu.

W razie $d = 0$ przedstawia się nam w (28) rozwiązanie ogólne równania 3go stopnia pomnożonego przez x, i rzeczywiście mamy w tym razie na mocy ostatniego warunku podanego w (23) $p = q$, a wskutek tego okaże się w (27) $x_3 = 0$. Zobaczemy tu zaraz, ze względu na równanie trzeciego stopnia, inną budowę reszty dwóch pierwiastków, skoro jeden pierwiastek tego samego równania jest już wiadomy.

Przypatrzywszy się bowiem równaniu pomocniczemu (24) w przypadku $d=0$ łatwo dostrzeżemy że ono powstaje z równania $x^3+2ax^2+bx+2c=0$, jeżeli w tem równaniu podstawimy $x=\frac{-c}{p}$. Jeśli tedy x' jest jedynym pierwiastkiem równania założonego $x^3+2ax^2+bx+2c=0$, to otrzymamy $p=\frac{-c}{x'}$, jako jeden pierwiastek równania pomocniczego (24). Na podstawie tego otrzymamy rozwiązanie ogólne równania

$$x^3+2ax^2+bx+2c=0 \tag{29}$$

w następującej formie:

$$x=-\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{\frac{-2c}{x'}+a^2-b}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(a+\sqrt{\frac{-2c}{x'}+a^2-b}\right)^2-4\left(\frac{-c}{x'}\pm\frac{c}{x'}\right)}\right. \tag{30}$$

gdzie x' przedstawia jeden pierwiastek równania (29).

Według (25) można (30) napisać w następującej postaci.

$$x=-\frac{1}{2}\left(a+\frac{\frac{-ca}{x'}-c}{\sqrt{\frac{c^2}{x'^2}}}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(a+\frac{\frac{-ca}{x'}-c}{\sqrt{\frac{c_2}{x'^2}}}\right)^2-4\left(\frac{-c}{x'}\pm\frac{c}{x'}\right)}$$

(31) albo

$$x=-\frac{1}{2}\left[a-(a+x')\sqrt{1}\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\left[a-(a+x')\sqrt{1}\right]^2-\frac{4c}{x'}\left[-1+\sqrt{1}\right]}$$

z której, za pomocą stosownego specyalizowania znaczeń zachodzących tu pierwiastkowań drugiego rzędu, wszystkie trzy pierwiastki równania (29) otrzymać można.

Po wyczerpującem zbadaniu rozwiązywania równań trzeciego i czwartego stopnia w najogólniejszej ich postaci wypadałoby jeszcze zapytać, czy nie istnieją jakie szczególne przypadki równań tego rodzaju, któreby dały się rozwiązać bez uprzedniego rozwiązania równania pomocniczego (24)?

Mogą to być oczywiście tylko takie przypadki, gdzie bez uprzedniego rugowania i ustawiania równań (24), już same warunki (23) mogłyby nam bezpośrednio dostarczyć wartości na m, p, q. Tu zastanowimy się szczególnie nad wykryciem takich równań, dla których jedna z ilości m, p, q wartość zera przybrać może.

Aby warunkom

$$2p+a^2-m^2=b; \quad ap-mq=c, \quad p^2-q^2=d, \tag{32}$$

uczynić zadość dla $p=0$, mamy

$$q^2=-d, \quad m^2=a^2-b, \quad m^2q^2=c,$$

a zatem i równanie

$$d(b-a^2)-c^2=0, \qquad b=\frac{c^2}{d}+a^2, \tag{33}$$

któremu współczynniki danego równania 4^{go} stopnia zadość uczynić muszą, jeżeli takowe ma być rozwiązane zapomocą $p=0$.

Rugując tedy zapomocą (33) b z równania (22), otrzymamy pierwszy typ szczególnego równania 4go stopnia w następującej formie :

(34) $$x^4+2ax^3+\left(a^2+\frac{c^2}{d}\right)x^2+2cx+d=0. \qquad \text{(I)}$$

Celem otrzymania pierwiastków równania (I) mamy

$$p=0; \quad q=i\sqrt{d}, \quad m=\frac{ci}{d},$$

zatem

(35) $$2x_{1,2}=-\left(a+\frac{ci}{a}\right)\pm\sqrt{\left(a+\frac{ci}{a}\right)^2-4i\sqrt{d}},$$
$$2x_{3,4}=-\left(a-\frac{ci}{a}\right)\pm\sqrt{\left(a-\frac{ci}{a}\right)^2+4i\sqrt{d}}.$$

Tu zatrzymujemy przy x znaczek przyczepiony pierwszy lub drugi według tego, czy po prawej stronie równań (35) uwzględniamy znak plus lub minus. Dojdziemy tym sposobem do wartości pierwiastków x_1, x_2, x_3, x_4.

Chcąc warunkom (32) uczynić zadość na mocy założenia $q=0$, mamy :

$$p=\sqrt{d}=\frac{c}{a}, \quad m^2=a^2+2\sqrt{d}-b,$$

ztąd równanie typowe następujące :

(36) $$x^4+2ax^3+bx^2 2cx+\frac{c^2}{a^2}=0. \qquad \text{(II)}$$

Do wyznaczenia pierwiastków mamy tutaj :

$$p=\frac{c}{a}, \quad m^2=a^2-b+\frac{2c}{a}, \quad q=0,$$

zatem :

(37) $$2x_{1,2}=-\left(a+\sqrt{a^2-b+\frac{2c}{a}}\right)\pm\sqrt{\left(a+\sqrt{a^2-b+\frac{2c}{a}}\right)^2-4\frac{c}{a}},$$
$$2x_{3,4}=-\left(a-\sqrt{a^2-b+\frac{2c}{a}}\right)\pm\sqrt{\left(a-\sqrt{a^2-b+\frac{2c}{a}}\right)^2-4\frac{c}{a}}.$$

Chcąc warunkom (32) uczynić zadość założeniem $m=0$, mamy

$$p=\frac{c}{a}=\frac{b-a^2}{2}, \quad q^2=\frac{c^2}{a^2}-d,$$

ztąd równanie typowe :

(38) $$x^4+2ax^3+bx^2+(ab-a^3)x+d=0. \qquad \text{(III)}$$

Do wyznaczenia jego pierwiastków mamy :

$$p=\frac{1}{2}(b-a^2), \quad m=0, \quad q=\sqrt{\frac{1}{4}(b-a^2)^2-d},$$

zatem

(39) $$2x_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-4\left[\frac{1}{2}(b-a^2)+\sqrt{\frac{1}{4}(b-a^2)^2-d}\right]},$$
$$2x_{3,4}=-a\pm\sqrt{a^2-4\left[\frac{1}{2}(b-a^2)-\sqrt{\frac{1}{4}(b-a^2)^2-d}\right]}.$$

Zamiast równania (22) można napisać następujące :

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4+\frac{2c}{d}\left(\frac{1}{x}\right)^3+\frac{b}{d}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2a}{d}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{d}=0. \tag{40}$$

Równania warunkowe ze względu na to równanie otrzymamy z (32), jeżeli w nich za ilości a, b, c, d podstawimy wyrażenia :

$$\frac{c}{d},\quad \frac{b}{d},\quad \frac{a}{d},\quad \frac{1}{d};$$

tym sposobem otrzymamy z (32) :

$$2p+\frac{c^2}{d^2}-m^2=\frac{b}{d},\quad \frac{c}{d}p-mq=\frac{a}{d},\quad p^2-q^2=\frac{1}{d}. \tag{41}$$

Zakładając tu $p=0$, mamy

$$m^2=\frac{c^2}{d^2}-\frac{b}{d},\qquad q^2=-\frac{1}{d}=\frac{a^2}{d^2\left(\frac{c^2}{d^2}-\frac{b}{d}\right)},$$

zatem

$$b=\frac{c^2}{d}+a^2,$$

a więc równanie typowe zupełnie to samo, któreśmy pod (I) przytoczyli i już rozwiązali.

Zakładając w (41) $q=0$, mamy :

$$p=\frac{1}{\sqrt{d}}=\frac{a}{c},\qquad m^2=2\frac{a}{c}+\frac{c^2}{d^2}-\frac{b}{d},$$

zatem

$$d=\frac{c^2}{a^2},$$

a równanie typowe to samo, któreśmy pod znakiem (II) przytoczyli i rozwiązali.

Zakładając wreszcie w (41) $m=0$, otrzymamy

$$p=\frac{b}{2d}-\frac{c^2}{2d^2}=\frac{a}{c},\qquad q^2=\frac{a^2}{c^2}-\frac{1}{d},$$

zatem

$$b=2\left(\frac{ad}{c}+\frac{c^2}{2d}\right),$$

a równanie typowe następujące :

$$x^4+2ax^3+2\left(\frac{ad}{c}+\frac{c^2}{2d}\right)x^2+2cx+d=0. \qquad \text{(IV)} \tag{42}$$

Rozwiązanie tego równania otrzymamy rozwiązując równanie (40) na podstawie $m=0$, $p=\frac{a}{c}$, $q=\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-\frac{1}{d}}$; znajdziemy

$$\frac{2}{x_{1,2}}=-\frac{c}{d}\pm\sqrt{\frac{c^2}{d^2}-4\left(\frac{a}{c}+\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-\frac{1}{d}}\right)},$$

$$\frac{2}{x_{3,4}}=-\frac{c}{d}\pm\sqrt{\frac{c^2}{d^2}-4\left(\frac{a}{c}-\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-\frac{1}{d}}\right)},$$

a ztąd

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{c}{d}\mp\sqrt{\frac{c^2}{d^2}-4\left(\frac{a}{c}+\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-\frac{1}{d}}\right)}}{2\left(\frac{a}{c}+\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-\frac{1}{d}}\right)},$$

(48)

$$x_{3,4}=\frac{-\frac{c}{d}\mp\sqrt{\frac{c^2}{d^2}-4\left(\frac{a}{c}-\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-\frac{1}{d}}\right)}}{2\left(\frac{a}{c}-\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-\frac{1}{d}}\right)}.$$

Zostawiając czytelnikowi znalezienie wszelkich innych ułatwień na podstawie których warunkom (32) bezpośrednio zadość uczynić można, poprzestajemy na podaniu bezpośredniego rozwiązania równań 4go stopnia w czterech tu przytoczonych postaciach typowych, i przystępujemy do zbadania tą metodą równań 5go i 6go stopnia.

Jakkolwiek moglibyśmy dla wszystkich równań bardzo łatwo wprowadzić uproszczenie, wskutek którego mielibyśmy raz na zawsze w danych równaniach współczynnik $a=0$, odstępujemy w dalszej rozprawie od tego szczególnego założenia, i zatrzymujemy we wszystkich równaniach $a \lessgtr 0$ w przekonaniu, że czytelnik odpowiednie obliczenia dla $a=0$ sam sobie przekształci lub uzupełni.

Ze względu na równanie 6go stopnia

(44) $$f(x)=x^6+2ax^5+bx^4+2cx^3+dx^2+2ex+f=0,$$

mamy

(45) $$n=3, \qquad s_6=\binom{2n-1}{n}=\binom{5}{3}=10,$$

(46) $$f(x)=(x^3+ax^2+px+q)^2-(mx^2+hx+k)^2=0.$$

Z porównania obustronnych współczynników otrzymamy następujące warunki:

(47) $$\begin{aligned} b&=a^2-m^2+2p,\\ c&=q+ap-mh,\\ d&=p^2+2aq-h^2-2mk,\\ e&=pq-hk,\\ f&=q^2-k^2. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania 6go stopnia w (44) zależy więc od rozwiązania równań:

(48) $$\begin{aligned} &x^3+(a+m)x^2+(p+h)x+(q+k)=0,\\ &x^3+(a-m)x^2+(p-h)x+(q-k)=0, \end{aligned}$$

i równania pomocniczego (R), które wyprowadza się z warunków (47) za pomocą rugowania czterech niewiadomych ilości p, q, m, h, k i uporządkowania rezultatu eliminacyjnego według potęg pozostałej piątej niewiadomej. Ze względu na wartość $s_6 = 10$ dojdziemy za pomocą rugowania do równania pomocniczego, które należąc co najmniej do stopnia dziesiątego jest oczywiście do rozwiązania trudniejszem, niż założone równanie samo, które tylko do 5go lub 6go stopnia należy.

Jakkolwiek już wyżej podaliśmy, że właśnie z tej przyczyny ogólne rozwiązanie równania (44) nie istnieje, nie idzie zatem, abyśmy bliższego zbadania równań takich zupełnie zaniechali. Zdarzyć się bowiem może, że wskutek przypadkowych między współczynnikami a, b, c, d, e, f zachodzących szczególnych związków albo równanie (R), albo już same równania (47) dadzą się rozwiązać, i dostarczą nam pewnych wartości na p, q, m, h, k. W takich szczególnych razach możemy oznaczyć także i równania (48) i takowe rozwiązać, i tym sposobem dojść do pierwiastków tego szczególnego równania.

Przystępujemy zatem wprost do równań szczególnych 6go stopnia, t. j. do wykrycia znamion i najgłówniejszych związków między współczynnikami równania 6go stopnia, a mianowicie takich, które dozwalają niektórym z niewiadomych p, q, m, h, k przybrać wartość zera, i tym sposobem umożliwiają rozwiązanie równań (47) a pośrednio rozwiązanie odpowiedniego równania szczególnego.

1° Dla $m = 0$ mamy na podstawie związków (47)

$$p = \frac{1}{2}(b - a^2), \quad q = \frac{2c - (ab - a^3)}{2},$$

(49)

$$h^2 = \frac{1}{4}(b - a^2)^2 + 2ac - a^2b + a^4 - d,$$

$$k^2 = \frac{(2c - ab + a^3)^2 - 4f}{4},$$

$$h^2 k^2 = (pq - e)^2 = \frac{[(b - a^2)(2c - ab + a^3) - 4e]^2}{4^2};$$

ztąd wypływa następujący związek warunkowy między współczynnikami danego równania :

$$4\left[\frac{1}{4}(b - a^2)^2 + 2ac - a^2b + a^4 - d\right][(2c - ab + a^3)^2 - 4f] = [(b - a^2)(2c - ab + a^2) - 4e]^2,$$

albo

(50)
$$f = \frac{[(b - a^2)^2 + 8ac - 4a^2b + 4a^4 - d][2c - ab + a^3]^2 - [(b - a^2)(2c - ab + a^2) - 4e]^2}{4[(b - a^2)^2 + 8ac - 4a^2b + 4a^4 - 4d]} = (f),$$

na mocy tego mamy następujące równanie typowe :

(51)
$$x^6 + 2ax^5 + bx^4 + 2cx^3 + dx^2 + 2ex + (f) = 0, \qquad \text{(I)}$$

gdzie nawias przy f ma przypominać na w (50) wyłuszczone powstawanie współczynnika f ze współczynników a, b, c, d, e.

Wstawiwszy, w przypadku $m = 0$ wartości znalezione na p, q, h, k i uwidocznione w (49), w równania (48), otrzymamy dwa równania 3go stopnia, których pierwiastki będą zarazem pierwiastkami typowego równania (I).

2° W przypadku $p=0$ mamy :

$$(52)\quad \begin{cases} m^2 = a^2 - b, \\ k^2 = q^2 - f, \\ h^2 = 2aq - 2\sqrt{(a^2-b)(q^2-f)} - d, \\ h = \dfrac{q-c}{\sqrt{a^2-b}}, \\ k^2h^2 = e^2 = \dfrac{(q^2-f)(q-c)^2}{a^2-b}, \\ h^2 = 2aq - d - 2\sqrt{(a^2-b)(q^2-f)} = \dfrac{(q-c)^2}{a^2-b}. \end{cases}$$

Ostatnie dwa równania uporządkowane według q dają :

$$(53)\quad \begin{cases} q^4 - 2cq^3 + (c^2-f)q^2 + 2cfq + [be^2 - e^2a^2 - c^2 f] = 0, \\ q^4 + Q_3q^3 + Q_2q^2 + Q_1q + Q_0 = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(54)\quad \begin{cases} Q_3 = -4(a^3 - ab + c), \\ Q_2 = \quad 4(a^3 - ab + c)^2 - 2(db - c^2 - da^2) - 4(a^2 - b), \\ Q_1 = \quad 4(a^3 - ab + c)(db - c^2 - da^2), \\ Q_0 = \quad (db - c^2 - da^2)^2 + 4f(a^2 - b). \end{cases}$$

Widzimy tu, że przypapek $p=0$ tylko dla takiego równania zachodzić może, którego współczynniki a, b, c, d, e, f dopuszczają dla równań (53), ze względu na niewiadomą q, przynajmniej jeden pierwiastek wspólny. Oznaczając przez (q) taką wartość na q otrzymamy z (52) odpowiednie wartości na m, k, h, a na podstawie tych wartości dojdziemy do oznaczenia równań 3go stopnia w (48), których pierwiastki w tym razie będą pierwiastkami równania (44), jeżeli jego współczynniki a, b, c, d, e, f dopuszczają wspólny pierwiastek dla równań (53) ze wzgędu na niewiadomę q.

Niechaj będzie

$$(55)\quad \varphi(a, b, c, d, e, f) = \varphi = 0,$$

równaniem wypadkowem rugowania ilości q z pomiędzy równań (53); możemy dla dowolnego λ w przypadku $p=0$, równanie typowe napisać w następującej postaci :

$$(56)\quad x^6 + 2ax^5 + bx^4 + 2cx^3 + dx^2 + ex + f + \lambda\varphi = 0. \qquad \text{(II)}$$

3° W przypadku $q=0$ mamy :

$$(57)\quad \begin{cases} k^2 = -f, \\ h = \dfrac{-e}{i\sqrt{f}}, \\ p^2 = d - \dfrac{e^2}{f} + 2mi\sqrt{f}, \\ p^2 = \left(c - \dfrac{me}{i\sqrt{f}}\right)^2 \dfrac{1}{a^2}, \\ p^2 = \dfrac{1}{4}(b - a^2 + m^2)^2; \end{cases}$$

ztąd na oznaczenie m następujące równania:

$$(58)\qquad \begin{cases} am^2 + \dfrac{2e}{i\sqrt{f}}\,m + (ab - a^3 - 2c) = 0, \\ \dfrac{e^2}{f}\,m^2 + 2\left(ai\sqrt{f} + \dfrac{ec}{\sqrt{f}}\right)m + \left(da^2 - \dfrac{de^2}{f} - c^2\right) = 0. \end{cases}$$

Przypadek więc $q = 0$ może tylko wtedy zachodzić, jeżeli współczynniki a, b, c, d, e, f dopuszczają dla równań (58) ze względu na niewiadomę m przynajmniej jeden pierwiastek wspólny. Oznaczając wartość takiego pierwiastka przez (m), otrzymamy z (57) odpowiednie wartości na k, h, p, a na podstawie tych wartości dojdziemy do oznaczenia równań 3^{go} stopnia w (48), których pierwiastki w tym razie będą pierwiastkami równania (44), jeżeli jego współczynniki a, b, c, d, e, f dopuszczają wspólny pierwiastek dla równań (58) ze względu na niewiadomę m.

Niechaj będzie

$$(59)\qquad \psi(a, b, c, d, e, f) = \psi = 0,$$

równaniem wypadkowem rugowania ilości m z pomiędzy równań (58); możemy dla dowolnego λ w przypadku $q = 0$ równanie typowe napisać jak następuje:

$$(60)\qquad x^6 + 2ax^5 + bx^4 + 2cx^3 + dx^2 + 2ex + f + \lambda\psi = 0. \qquad \text{(III)}$$

4. W przypadku $h = 0$ mamy:

$$(61)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{e}{q}, \\ k^2 = q^2 - f, \\ m = \dfrac{\dfrac{e^2}{q^2} + 2aq - d}{2\sqrt{q^2 - f}}, \\ p = \dfrac{c - q}{a}, \\ m^2 = a^2 + \dfrac{2e}{q} - b; \end{cases}$$

ztąd

$$p = \frac{e}{q} = \frac{c - q}{a}, \quad m^2 = a^2 + \frac{2e}{q} - b = \frac{\left[\dfrac{e^2}{q^2} + 2aq - d\right]^2}{4(q^2 - f)},$$

zatem na oznaczenie wartości q następujące równania:

$$(62)\qquad \begin{cases} q^2 - cq + ae = 0, \\ 4(q^2 - f)\left(a^2 + \dfrac{2e}{q} - b\right) - \left[\dfrac{e^2}{q^2} + 2aq - d\right]^2 = 0. \end{cases}$$

Jeżeli tu współczynniki a, b, c, d, e, f dopuszczają, aby przynajmniej jedna z wartości uzyskanych na q z pierwszego równania (62) czyniła zadość równaniu drugiemu, natenczas oznaczając takową wartość przez (q) otrzymamy z (61) odpowiednie wartości na p, k, m, a na podstawie tych wartości otrzymamy w tym razie z równań (48) pierwiastki równania (44), jeżeli jego współczynniki a, b, c, d, e, f dopuszczają wspólny pierwiastek dla równań (62) ze względu na niewiadomę q.

Niechaj będze

$$(63)\qquad \chi(a, b, c, d, e, f) = \chi = 0.$$

równaniem uzyskanem za pomocą rugowania ilości q z pomiędzy równań (62), natenczas otrzymamy dla dowolnego λ w przypadku $h=0$ równanie typowe następujące :

(64) $$x^6+2ax^5+bx^4+2cx^3+dx^2+2ex+f+\lambda\chi=0. \qquad \text{(IV)}$$

5. W przypadku $k=0$ mamy na podstawie (47) :

(65) $$\left\{\begin{aligned} q^2 &= f, \\ p &= \frac{e}{\sqrt{f}}, \\ m^2 &= a^2+\frac{2e}{\sqrt{f}}-b, \\ h^2 &= \frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}-d, \\ m &= \frac{\sqrt{f}+\frac{ae}{\sqrt{f}}-c}{\sqrt{\frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}-d}}, \end{aligned}\right.$$

zatem

$$m^2=a^2+\frac{2e}{\sqrt{f}}-b=\frac{\left[\sqrt{f}+\frac{ae}{\sqrt{f}}-c\right]^2}{\frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}-d},$$

ztąd

(66) $$b=a^2+\frac{2e}{\sqrt{f}}-\frac{\left[\sqrt{f}+\frac{ae}{\sqrt{f}}-c\right]^2}{\frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}-d}=(b).$$

Otrzymamy tedy w przypadku $k=0$ równanie typowe :

(67) $$x^6+2ax^5+(b)x^4+2cx^3+dx^2+2ex+f=0, \qquad \text{(V)}$$

gdzie symbol (b) ma przypominać, że b ma wartość taką samą, jakąbyśmy podług formuły (66) otrzymali na podstawie znanych wartości a, b, c, d, e, f.

Dla równania (67) otrzymamy z (65) odpowiednie wartości na p, q, m, h, k, i oznaczymy równania (48), których pierwiastki będą pierwiastkami równania (V).

6. W przypadku $p=q=0$ mamy :

(68) $$\left\{\begin{aligned} m^2 &= a^2-b, \\ h &= \frac{-c}{\sqrt{a^2-b}}, \\ k &= \frac{e\sqrt{a^2-b}}{c}=i\sqrt{f}, \\ h^2 &= -d-2i\sqrt{f(a^2-b)}, \qquad \text{ztąd} \\ c &= -ei\sqrt{\frac{a^2-b}{f}}, \qquad d=\frac{e^2}{f}-2i\sqrt{f(a^2-b)}, \end{aligned}\right.$$

i równanie typowe tu należące :

$$x^6+2ax^5+bx^4-2ei\sqrt{\frac{a^2-b}{f}}\,x^3+\left(\frac{e^2}{f}-2i\sqrt{f(a^2-b)}\right)x^2+2ex+f=0. \qquad \text{(VI)}$$

7. W przypadku $p=m=0$ mamy :

(69)
$$\begin{cases} b = a^2, \\ q = c, \\ h^2 = 2ac - d, \\ k^2 = c^2 - f, \\ h = \dfrac{-e}{\sqrt{c^2-f}}, \quad \text{ztąd} \\ b = a^2, \quad f = c^2 - \dfrac{e^2}{(2ac-d)^2}, \quad \text{a równanie typowe :} \\ x^6 + 2ax^5 + a^2x^4 + 2cx^3 + dx^2 + 2ex + \left[c^2 - \dfrac{e^2}{(2ac-d)^2}\right] = 0. \end{cases} \qquad \text{(VII)}$$

8. W razie $p=h=0$ mamy :

(70)
$$\begin{cases} e = 0, \\ q = c, \\ k^2 = c^2 - f, \\ m^2 = a^2 - b, \\ k = \dfrac{2ac-d}{2\sqrt{a^2-b}}; \quad \text{zatem} \\ f = c^2 - \dfrac{(2ac-d)^2}{4(a^2-b)}, \\ \text{i równanie typowe} \\ x^6 + 2ax^5 + bx^4 + 2cx^3 + dx^2 + \left[c^2 - \dfrac{(2ac-d)^2}{4(a^2-b)}\right] = 0. \end{cases} \qquad \text{(VIII)}$$

9. W przypadku $p=k=0$ mamy :

(71)
$$\begin{cases} m^2 = a^2 - b, \\ q^2 = f, \\ e = 0, \\ c = \sqrt{f} - h\sqrt{a^2-b}, \\ d = 2a\sqrt{f} - h^2 \quad \text{zatem} \\ h^2 = 2a\sqrt{f} - d = \dfrac{(\sqrt{f}-c)^2}{a^2-b}, \quad \text{ztąd} \\ e = 0, \quad d = 2a\sqrt{f} - \dfrac{(\sqrt{f}-c)^2}{a^2-b}, \quad \text{i równanie typowe} \\ x^6 + 2ax^5 + bx^4 + 2cx^3 + \left[2a\sqrt{f} - \dfrac{(\sqrt{f}-c)^2}{a^2-b}\right]x^2 + f = 0. \end{cases} \qquad \text{(IX)}$$

10. W przypadku $q = m = 0$ mamy :

$$
\text{(72)} \quad \begin{cases}
p = \dfrac{b - a^2}{2} = \dfrac{c}{a}, \\[2mm]
h^2 = \dfrac{(b - a^2)^2}{4} - d, \\[2mm]
k^2 = - f, \\[2mm]
h = \dfrac{-e}{i\sqrt{f}} = \dfrac{ie}{\sqrt{f}}; \qquad \text{zatem} \\[2mm]
c = \dfrac{ab - a^3}{2}, \quad d = \dfrac{(b - a^2)^2}{4} + \dfrac{e^2}{f}, \\[2mm]
\text{i równanie typowe} \\[2mm]
x^6 + 2ax^5 + bx^4 + (ab - a^3)x^3 + \left[\dfrac{(b - a^2)^2}{4} + \dfrac{e^2}{f}\right]x^2 + 2ex + f = 0. \qquad \text{(X)}
\end{cases}
$$

11. W razie $q = h = 0$ mamy :

$$
\text{(73)} \quad \begin{cases}
k^2 = - f, \\[2mm]
e = 0, \\[2mm]
p = \dfrac{c}{a}, \\[2mm]
m^2 = a^2 - b + \dfrac{2c}{a}, \\[2mm]
d = \dfrac{c^2}{a^2} - 2\sqrt{a^2 - b + \dfrac{2c}{a}} \cdot i\sqrt{f}; \qquad \text{i równanie typowe} \\[2mm]
x^6 + 2ax^5 + bx^4 + 2cx^3 + \left[\dfrac{c^2}{a^2} - 2i\sqrt{\left(a^2 - b + \dfrac{2c}{a}\right)f}\right]x^2 + f = 0. \qquad \text{(XI)}
\end{cases}
$$

(74) 12. — W przypadku $q = h = 0$ musi być $f = e = 0$, zatem równanie typowe podzielone przez x^2 staje się równaniem 4go stopnia i może być tu opuszczone.

13. W razie $m = h = 0$ mamy :

$$
\text{(75)} \quad \begin{cases}
p = \dfrac{b - a^2}{2}, \\[2mm]
q = \dfrac{2e}{b - a^2}, \\[2mm]
k = \sqrt{\dfrac{4e^2}{(b - a^2)^2} - f}, \\[2mm]
c = \dfrac{4e + a(b - a^2)^2}{2(b - a^2)}, \\[2mm]
d = \dfrac{(b - a^2)^3 + 16ae}{4(b - a^2)}; \qquad \text{a równanie typowe :} \\[2mm]
x^6 + 2ax^5 + bx^4 + \left[\dfrac{4e + a(b - a^2)^2}{b - a^2}\right]x^3 + \left[\dfrac{(b - a^2)^3 + 16ae}{4(b - a^2)}\right]x^2 + 2ex + f = 0. \quad \text{(XII)}
\end{cases}
$$

14. W razie $m=k=0$ mamy:

$$(76)\quad \begin{cases} p=\dfrac{b-a^2}{2}, \\ q=\sqrt{f}, \\ h^2=\dfrac{(b-a^2)^2}{4}+2a\sqrt{f}-d, \\ c=\sqrt{f}+\dfrac{ab-a^3}{2}, \\ e=\dfrac{b-a^2}{2}.\sqrt{f}; \quad \text{zatem należące tu równanie typowe:} \\ x^6+2ax^5+bx^4+(2\sqrt{f}+ab-a^3)x^3+dx^2+(b-a^2)\sqrt{f}\,x+f=0. \qquad \text{(XIII)} \end{cases}$$

15. Jeżeli nareszcie:

$$(77)\quad \begin{cases} h=k=0, \quad \text{mamy} \\ q=\sqrt{f}, \\ p=\dfrac{e}{\sqrt{f}}, \\ m^2=a^2-b+\dfrac{2e}{\sqrt{f}}, \\ c=\sqrt{f}+\dfrac{ae}{\sqrt{f}}, \\ d=\dfrac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}, \\ \text{i odpowiednie równanie typowe:} \\ x^6+2ax^5+bx^4+2\left(\sqrt{f}+\dfrac{ae}{\sqrt{f}}\right)x^3+\left(\dfrac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}\right)x^2+2ex+f=0. \qquad \text{(XIV)} \end{cases}$$

W przypadku, gdy ze współczynników p, q, m, h, k trzy mogą stać się zerami np. gdy $p=q=m=0$, mamy:

$$(78)\quad \begin{cases} c=0, \quad b=a^2, \quad f=\dfrac{e^2}{d}, \\ h=i\sqrt{d}, \\ k=\dfrac{ie}{\sqrt{d}} \quad \text{i równanie typowe} \\ x^6+2ax^5+a^2x^4+dx^2+2ex+\dfrac{e^2}{d}=0 \qquad \text{(XV)} \end{cases}$$

Resztę dziewięć kombinacyj, gdzie równocześnie trzy ze współczynników p, q, m, h, k stać się mogą zerem, zostawia się czytelnikowi, aby sobie odpowiednią rachubę przysposobił. Również zostawiamy czytelnikowi, aby sobie zestawił równania typowe należące do równania

$$(79)\quad \left(\frac{1}{x}\right)^6+\frac{2e}{f}\left(\frac{1}{x}\right)^5+\frac{d}{f}\left(\frac{1}{x}\right)^4+\frac{2c}{f}\left(\frac{1}{x}\right)^3+\frac{b}{f}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2a}{f}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{f}=0,$$

które do rozwiązania równania (44) przyczynią się w ten sposób, że odwrotności pierwiastków równania (79) będą już pierwiastkami równania (44).

Ze względu na równanie 8^{go} stopnia

$$(80) \qquad f(x) = x^8 + 2ax^7 + bx^6 + 2cx^5 + dx^4 + 2ex^3 + fx^2 + 2gx + h = 0$$

mamy

$$s_8 = \binom{7}{4} = 35$$

$$(81) \qquad f(x) = [x^4 + ax^3 + px^2 + qx + k]^2 - [a'x^3 + p'x^2 + q'x + k']^2 = 0.$$

Z porównauia obustronnych współczynników otrzymamy na oznaczenie ilości p, q, k, p', q', k' następujące warunki.

$$(82) \qquad \left\{\begin{aligned} b &= 2p + a^2 - a'^2 \\ c &= q + ap - a'p' \\ d &= 2k + 2aq + p^2 - 2a'q' - p'^2 \\ e &= ak + pq - a'k' - p'q' \\ f &= 2pk + q^2 - 2p'k' - q'^2 \\ g &= qk - q'k' \\ h &= k^2 - k'^2. \end{aligned}\right.$$

Ponieważ z powodu $s_8 > 8$ równanie 8^{go} stopnia nie posiada rozwiązania ogólnego, przeto przystąpimy wprost do wykrycia znamion i najgłówniejszych związków między współczynnikami równania (80), a mianowicie takich, które dozwalają niektórym z ilości p, q, ,k a', p', a', k' przybrać wartość zera i tym sposobem czynią możliwem rozwiązanie równań (82) a pośrednio rozwiązanie samego równania szczególnego.

Zakładając dla jednej tylko z pomiędzy ilości p, q, k, a', p', q', k' wartość zera, nie dadzą się jeszcze warunki (82) z łatwością i ogólnie rozwiązać; zaczniemy przeto od przyrównania dwóch z powyższych ilości do zera i postawimy np.

$$p = q = 0.$$

W tym razie będzie na podstawie (82)

$$(83) \qquad \left\{\begin{aligned} & a'^2 = a^2 - b \\ & p' = \frac{-c}{\sqrt{a^2 - b}}, \\ & q'k' = -g \\ & ak - \sqrt{a^2 - b}\, k' + \frac{c}{\sqrt{a^2 - b}} q' = e, \\ & 2k - 2\sqrt{a^2 - b}.q' - \frac{c^2}{a^2 - b} = d \end{aligned}\right.$$

Rugując k z ostatnich dwóch równań, będzie:

$$(84) \qquad q'\left[\frac{2c}{\sqrt{a^2 - b}} + 2a\sqrt{a^2 - b}\right] - 2\sqrt{a^2 - b}\cdot k' = 2e - a\left(d + \frac{c^2}{a^2 - b}\right) = 0.$$

Mnożąc ostatnie równanie przez k', otrzymamy po zastąpieniu jawiącego się iloczynu qk' ilością $-g$, następujące równanie

$$2\sqrt{a^2-b}.k'^2+\left[2e-a\left(d+\frac{c^2}{a^2-b}\right)\right]k'+2g\left(\frac{c}{\sqrt{a^2-b}}+a\sqrt{a^2-b}\right)=0. \tag{85}$$

Za pomocą wartości otrzymanej na k' z równania (85) mamy z trzeciego równania w (83) wartość na q', a za pomocą wartosci na q' otrzymamy nareszcie z piątego równania (83) wartość na k. Jeżeli tą drogą otrzymane wartości na $q,' k, k'$ uczynią zadość warunkowi piątemu i siódmemu w (82), przystąpimy na podstawie tych wartości do oznaczenia równań :

$$(86)\quad \begin{aligned} &x^4+(a+a')x^3+(p+p')x^2+(q+q')x+(k+k')=0\\ &x^4+(a-a')x^3+(p-p')x^2+(q-q')x+(k-k')=0, \end{aligned}$$

które rozwiązane według x dostarczą nam po cztery pierwiasttki należące do równania (80) w tym przypadku, jeżeli jego współczynniki dozwalają rozwiązania warunków (82), na podstawie założenia $p=q=0$.

Wyraziwszy za pomocą równań (84) i (85) ilości k' i q', a potem z ostatniego równania (83) ilość k współczynnikami $a, b, c, d, e, g,$ i wstawiwszy te wartości w piąte i siódme równanie (82), otrzymamy dajmy na to

$$(87)\quad \begin{aligned} f&=\varphi(a, b, c, d, e, g)=\varphi\\ h&=\psi(a, b, c, d, e, g)=\psi \end{aligned}$$

i nareszcie równanie typowe w następującym kształcie :

$$x^8+2ax^7+bx^6+2cx^5+dx^4+2ex^3+\varphi x^2+2gx+\psi=0. \tag{88}\qquad (I)$$

Zakładając $p=k=q'=0$ mamy podług (82)

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} &a'^2=a^2-b, \qquad g=0\\ &k'^2=-h, \qquad e=-\sqrt{h(b-a_1)}\\ &c=q-\sqrt{a^2-b}.p\\ &d=2aq-p'^2\\ &f=q^2-2i\sqrt{h}.p'; \end{aligned}\right.$$

z przedostatnich dwóch równań otrzymamy na oznaczenie ilości p' i q następujące równania :

$$(90)\quad \begin{aligned} &p'^2-2a\sqrt{a^2-b}p'+(d^2-2ac)=0\\ &q=c+\sqrt{a^2-b}.p'. \end{aligned}$$

Wyszukane zaś wartości na p' i q wstawione w ostatnie równanie (89) dają f wyrażone przez $a, b, c, d,$ dajmy na to w następującym kształcie :

$$f=\varphi(a, b, c, d)=\varphi; \tag{91}$$

ztąd równanie typowe :

$$x^8+2ax^6+bx^6+2cx_5+dx^4-2\sqrt{h(b-a)^2}x^2+\varphi x^2+h=0, \tag{92}\qquad (II)$$

Zostawiając czytelnikowi przygotowanie rachuby dla wyprowadzenia równań typowych i ich rozwiązania w przypadku różnych kombinacyj współczynników p, q, k, a', p', q', k', mogących przybierać wartość zera, przystępujemy jeszcze do pobieżnego rozebrania równania stopnia 10^{go}.

(93) $$f(x) = x^{10} + 2ax^9 + bx^8 + 2cx^7 + dx^6 + 2ex^5 + fx^4 + 2gx^3 + hx^2 + 2kx + l = 0.$$

Kładąc

(94) $$f(x) = [x^5 + ax^4 + px^3 + qx^2 + rx + t]^2 - [a'x^4 + p'x^2 + q'x^2 + r'x + t'] = 0,$$

mamy

(95) $$\begin{aligned} P &= x^5 + (a + a')x^4 + (p + p')x^3 + (q + q')x^2 + (r + r')x + (t + t') = 0 \\ P' &= x^5 + (a - a')x^4 + (p - p')x^3 + (q - q')x^2 + (r - r')x + (t - t') = 0. \end{aligned}$$

Z porównania obustronnych współczynników w (94) otrzymamy następujące warunki:

(96) $$\left\{ \begin{aligned} b &= 2p + a^2 - a'^2, \\ c &= q + ap - a'p', \\ d &= 2r + 2aq + p^2 - 2a'q' - p'^2 \\ e &= t + ar + pq - a'r' - p'q', \\ f &= 2at + 2pr + q^2 - 2a't' - 2p'r' - q'^2, \\ g &= tp + qr - t'p' - q'r'. \\ h &= 2tq + r^2 - 2t'q' - r'^2, \\ k &= tr - t'r', \\ l &= t^2 - t'^2. \end{aligned} \right.$$

Celem uzyskania równania typowego np. dla założenia:

(97) $$p = q = r = 0$$

otrzymamy:

(98) $$\left\{ \begin{aligned} a'^2 &= a^2 - b, \\ p' &= \frac{-c}{\sqrt{a^2 - b}}, \\ q' &= -\frac{[d(a^2 - b) + c^2]}{2(a^2 - b)\sqrt{a^2 - b}}; \end{aligned} \right.$$

(99) $$\left\{ \begin{aligned} e &= t - r'\sqrt{a^2 - b} - \frac{c[d(a^2 - b) + c^2]}{2(a^2 - b)^2}, \\ f &= 2at - 2t'\sqrt{a^2 - b} + \frac{2c}{\sqrt{a^2 - b}}r' - \frac{[d(a^2 - b) + c^2]^2}{4(a^2 - b)^3} \\ g &= \frac{ct'}{\sqrt{a^2 - b}} + \frac{[d(a^2 - b) + c^2]}{2(a^2 - b)\sqrt{a^2 - b}}r' \end{aligned} \right.$$

(100) $$\left\{ \begin{aligned} h &= \frac{[d(a^2 - b) + c^2]}{(a^2 - b)\sqrt{a^2 - b}}t' - r'^2, \\ k &= -r't', \\ l &= t^2 - t'^2 \end{aligned} \right.$$

Obrawszy $p=q=r=0$ mamy do wyszukania jeszcze 6 niewiadomych a', p', q', r', t, t', z których trzy pierwsze już są w (98) oznaczone; trzy ostatnie mają czynić zadość trzem równaniom pierwszego stopnia w (99), więc takowe łatwo obliczyć możemy.

Wstawiwszy wszystkie tak oznaczone wartości w równania (100) otrzymamy z łatwością dajmy na to

$$(101)\qquad \begin{aligned} h &= \varphi_1(a, b, c, d, e, f, g) = \varphi_1 \\ k &= \varphi_2(a, b, c, d, e, f, g) = \varphi_2 \\ l &= \varphi_3(a, b, c, d, e, f, g) = \varphi_3 \end{aligned}$$

a wskutek tego mamy dla przypadku $p=q=r=0$ następujące równanie typowe:

$$(102)\qquad x^{10}+2ax^9+bx^8+2cx^7+dx^6+2ex^5+fx^4+2gx^3+\varphi_1x^2+2\varphi_2x+\varphi_3=0,\ ..\ (\mathrm{I})$$

którego pierwiastki wyprowadzić się dadzą z równań (95) na podstawie wartości na $p=q=r=0$ i na podstawie wartości na a', p', q', r', t, t' otrzymanych z (98) i (99).

W przypadku $t'=r'=0$ mamy

$$(102)\qquad \left\{\begin{aligned} t &= \sqrt{l}, \\ r &= \frac{k}{\sqrt{l}}, \\ q &= \frac{h}{2\sqrt{l}} - \frac{k^2}{2l\sqrt{l}}, \\ p &= \frac{g}{\sqrt{l}} - \frac{kh}{2l\sqrt{l}} + \frac{k^3}{2l^2\sqrt{l}}, \\ a'^2 &= \frac{1}{\sqrt{l}}\left[2g + \frac{k^3}{l^2} - \frac{kh}{l}\right] + a^2 - b. \\ p' &= \frac{\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{h}{2} - \frac{k^2}{2l}\right) + \frac{a}{\sqrt{l}}\left(g - \frac{kh}{2l} + \frac{k^3}{2l^2}\right) - c}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{l}}\left[2g + \frac{k^3}{l^2} - \frac{kh}{l}\right] + a^2 - b}}, \\ q' &= \frac{\frac{2k}{\sqrt{l}} + \frac{a}{\sqrt{l}}\left(h - \frac{k^2}{l}\right) + \frac{1}{l}\left[g - \frac{kh}{2l} + \frac{k^3}{2l^2}\right]^2 - p'^2 - d}{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{l}}\left(2g + \frac{k^3}{l^2} - \frac{kh}{l}\right) + a^2 - b}}, \end{aligned}\right.$$

a na podstawie tych wartości znajdziemy podług czwartego i piątego równania w (96) dajmy na to:

$$(103)\qquad \begin{aligned} e &= \varphi_1(a, b, c, d, g, h, k, l) = \varphi_1, \\ f &= \varphi_2(a, b, c, d, g, h, k, l) = \varphi_2, \end{aligned}$$

i nareszcie przypadkowi $t'=r'=0$ odpowiednie typowe równanie

$$(104)\qquad x^{10}+2ax^9+bx^8+2cx^7+dx^6+2\varphi_1x^5+\varphi_2x^4+2gx^3+hx^2+2kx+l=0,\qquad (\mathrm{II})$$

którego pierwiastki wyznaczają się pierwiastkami równań (95), wyznaczonych na podstawie wartości (102).

Gdyby przedłożone równanie dziesiątego stopnia przedstawić się dało w dwóch postaciach typowych, dajmy na to w postaciach (I) i (II), to zaraz wykażemy, że takie równanie da się ogólnie rozwiązać.

Jeżeli równania (95) wskutek postaci (I) symbolicznie oznaczymy przez

$$P_I = P'_I = 0, \tag{105}$$

i tak samo wskutek postaci (II) przez

$$P_{II} = P'_{II} = 0, \tag{106}$$

wiemy z rozprawy wstępnej w tym paragrafie, że wspólna największa miara między P_I i P_{II}, P_I i P'_{II}, P'_I i P_{II}, P'_I i P'_{II} w każdym razie przedstawia się jako wielomian niższego stopnia niż stopień 5[ty].

Jeżeli np.

$$\begin{aligned} P_I &= p_I\, M_{I,II}, \quad P'_I = p'_I\, M'_{I,II}, \\ P_{II} &= p_{II}\, M_{I,II}, \quad P'_{II} = p'_{II}\, M'_{I,II}, \end{aligned} \tag{107}$$

to mamy oczywiście

$$f(x) = P_I\, P'_I = p_I\, p'_I\, M_{I,II}\, M'_{I,II} = 0, \tag{108}$$

a ztąd równania :

$$\begin{aligned} p_I &= 0, \\ p'_I &= 0, \\ M_{I,II} &= 0, \\ M'_{I,II} &= 0, \end{aligned} \tag{109}$$

które wszystkie są niższego stopnia niż piąty, w ten sposób, że suma odpowiednich najwyższych wykładników stanowi liczbę 10.

(110) Rozwiązanie tych równań jest możliwe, a pierwiastki otrzymane z tych równań są także pierwiastkami równania zadanego.

Użytkując ze wszystkich wspólnych miar, które do powyżej wytkniętych kombinacyj wyrazów P i P′ należą, łatwo pojmiemy, że nawet równanie 20go stopnia dające się przedstawić w dwóch typowych postaciach możemy rozwiązać ze względu na wszystkie przynależne mu pierwiastki.

(111) Aby równania jeszcze wyższego stopnia można tą metodą ogólnie rozwiązać, musiałyby takowe dać się przedstawić w trzech, a według okoliczności, i w większej liczbie postaci typowych.

(112) Ustawiliśmy dla równań szóstego, ósmego i dziesiątego stopnia sporadycznie po kilka równań typowych i to tylko na podstawie przypadków, w których kilka z niewiadomych współczynników wartość zera przybrać mogą; stało to się dla tego, aby okazać istotę metody nieutrudniając poglądu utrudnianiem rachuby. Zdarzyć się bowiem może, że w przypadkach rzeczywistych wyprowadzić się dadzą równania typowe na podstawie wartości różnych od zera dla niewiadomych współczynników.

Ogółem chodzi tu przedewszystkiem o wartości na niewiadome współczynniki, któreby zadosyć czyniły warunkom służącym do przerobienia równania na różnicę kwadratów.

Równania specyalne występują przeważnie przy poszukiwaniach praw w naturze, a mianowicie przy badaniach fizycznych. Współczynniki takich równań są zwykle wyrażeniami utworzonemi z kilku parametrów.

(113) Jeżeli liczba parametrów, które jako elementa wchodzą w skład współczynników równaniowych nie dochodzi liczby stopnia równaniowego, natenczas domyślamy się pewnej liczby warunków, którym współczynniki równaniowe zadość czynić powinny.

Różnica między stopniem równania a liczbą parametrów wchodzących w skład współczynników równaniowych, stanowi właśnie liczbę wspomnianych warunków. W takich więc tylko przypadkach, gdy liczba parametrów okazuje się mniejszą niż najwyższy wykładnik równaniowy, istnieją pewne warunki zachodzące między współczynnikami, które mogą być właśnie tego rodzaju, że na ich podstawie okażą się te równania rozwiązalne. Metoda w tym paragrafie wyłożona nastręcza badaczowi sposób dojścia do ogólnego rozwiązania takiego równania.

W celu rozwiązania równań, których współczynniki są liczbami, bez względu na to, czy one są rzetelnemi czy złożonemi (urojonemi), możemy z wielką korzyścią tej tu wyłożonej metody użyć. Jak właśnie przekonaliśmy się, równania warunkowe, ustanowione w celu rozłożenia równaniowego wielomianu na różnicę dwóch kwadratów posiadają, kształt bardzo prosty, bo należą ze względu na niewiadome najwyżej do stopnia drugiego.

(114) Do rozwiązania tych równań da się bardzo korzystnie zastosować metoda wyłożona w części I tej rozprawy w § 5 a to z tego powodu, że zakładając jednę lub dwie niewiadome równe zeru, (co aż do zadanego równania 10go stopnia włącznie wystarcza) wciąga się od razu wszystkie równania warunkowe prócz jednego a względnie dwóch w próbną rachubę, wskutek czego ma się do ukończenia prób i ostatecznego obliczenia wartości niewiadomych tylko jeszcze z jednem a względnie z dwoma równaniami do czynienia.

Tak próbne jako też ostateczne obliczania niewiadomych współczynników odbywają się w sposób bardzo prosty, albowiem i te ostatnie równania należą tylko do stopnia drugiego i nie zawierają w sobie wszystkich niewiadomych.

Przy równaniu 6go i 8go stopnia wystarcza obliczenie jednego układu niewiadomych współczynników, począwszy zaś od równania stopnia dziesiątego aż do równania 20go stopnia włącznie zachodzi potrzeba obliczania dwóch układów niewiadomych współczynników i t. d. i dojdzie się nareszcie okolicznościowo za pomocą szukania największej wspólnej miary dla równań tak nizkich stopni, że takowe bezpośrednio rozwiązywać możemy; tym sposobem dojdziemy do pierwiastków, które rownocześnie są już pierwiastkami zadanego równania.

§ 4.

O ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ ZA POMOCĄ KRZYWYCH CYKLOIDALNYCH.

(1)

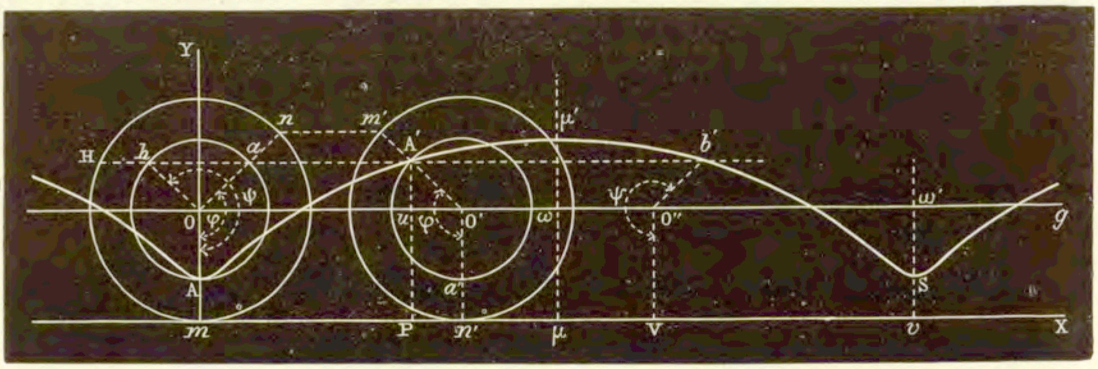

Fig. 14.

(2) Każdy punkt A stale połączony z kołem mnH toczącem się wzdłuż prostej $x'x$ opisuje liniję ciągłą, która znaną jest pod ogólnem nazwiskiem *cykloidy*. Jeżeli a przedstawia nam promień toczącego się koła a długość α oddalenie punktu A od środka tego koła, to linija opisana punktem A

będzie cykloidą *skróconą zwyczajną* lub *wydłużoną* według tego czy długość a jest *krótszą*, *równą* lub *dłuższą* niż promień r.

Podczas toczenia się koła, mnH postępuje w kierunku $x'x$ punkt styczności prostej $x'x$ z kołem mnH, a mianowicie w punktach obwodu koła mnH kolejno po sobie następujących w kierunku na figurze podanej strzałki. Jeżeli tedy punkt końcowy n łuku $\varphi =$ łuk $\sphericalangle\, mon$ wejdzie w stan styczności n' to odcinek mn' przedstawia nam właśnie długość wyprostowanego łuku $r\varphi = \widehat{mn}$ jako części obwodu odpowiadającej ilości wykonanego toczenia sią koła mnH, i prowadzi do związku

$$(3)\qquad \widehat{mn} = \widehat{mn'} = r\varphi.$$

Promień $oA = a$, który podczas toczenia się koła mnH, zostając ciągle swym początkiem o w osi cykloidalnej oo', a swym końcem A opisuje samą cykloidę, nazywać będziemy *promieniem cykloidalnym* odróżniając go tym sposobem od r jako *promienia toczenia*.

Po wykonaniu toczenia się o łuk $r\varphi$ promień początkowy $r = om$ zajmie położenie $o'm'$, a odpowiedni punkt A' zajmie ze względu na jego współrzędne x, y położenie cechujące się następującemi związkami:

$$x = mP = mn' - o'u, \quad y = PA' = n'o' + uA',$$

$$mn' = r\varphi, \quad o'u = o'A' \operatorname{dos}\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right) = a \operatorname{wst}\varphi,$$

$$uA' = o'A' \operatorname{wst}\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right) = -a \operatorname{dos}\varphi,$$

zatem ostatecznie

$$(4)\qquad x = r\varphi - a \operatorname{wst}\varphi, \quad y = r - a\operatorname{dos}\varphi,$$

z których rugując φ będzie:

$$(5)\qquad x = r.\text{łuk}\left(\operatorname{dos} = \frac{r-y}{a}\right) - \sqrt{a^2 - (r-y)^2}.$$

Równania (4) lub też równanie (5) cechują analitycznie cykloidę skróconą, zwyczajną lub wydłużoną według tego, czy promień a założymy krótszym, równym lub dłuższym niż r.

Z (4) mamy:

$$(6)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a \operatorname{wst}\varphi}{r - a\operatorname{dos}\varphi} = \operatorname{sty}\sigma = \frac{n'P}{PA'} = \operatorname{sty} \sphericalangle\, n'A'P,$$

gdzie σ przedstawia kąt zawarty między styczną do cykloidy w punkcie A' i osią współrzędnych $x'x$. Ten kąt równa się kątowi zawartemu między prostą łączącą punkt styczności n' z punktem A' i osią my. Ztąd idzie, że właśnie prosta łącząca n' z punktem A' jest normalną do cykloidy w punkcie A'.

Oznaczając przez x_φ, y_φ współrzędne obliczone na podstawie ilości toczenia $= \varphi$, możemy z (4) wypisać następujące związki:

Dla $p = 2r\pi$,

$$(7)\qquad y_{\varphi+2n\pi} = y_\varphi, \quad x_{\varphi+2n\pi} = x_\varphi + np,$$

$$(8)\qquad y_{2\pi-\varphi} = y_\varphi, \quad x_\varphi + x_{2\pi-\varphi} = p,$$

$$(9)\qquad y_{-\varphi} = y_\varphi, \quad x_{-\varphi} + x_\varphi = 0.$$

(10) Odcinek na osi $x'x$ odpowiadający toczeniu się koła o kąt pełny nazwiemy rozpiętością cykloidy. Odcinek nieskończonej krzywej cykloidalnej odpowiadający jednej rozpiętości nazwiemy cykloidą pojedynczą.

Na figurze (1) ciągnie się pojedyncza cykloida np. od punktu A aż do punktu s. Według (7) składa się krzywa cykloidalna z nieskończenie wielu pojedynczych cykloid.

(11) Licząc od początku osiowego oznaczmy kolejno po sobie następujące wspólną długość p posiadające rozpiętości przez :

$$p_{-h}, \quad p_{-(h-1)}, \ldots p_{-2}, \quad p_{-1}, \quad p_0, \quad p_{+1}, \quad p_2, \quad p_3, \ldots$$

i odpowiednio do tego kolejno po sobie idące pojedyncze cykloidy przez :

$$C_{-h}, \; C_{-(h-1)}, \ldots \; C_{-2}, \; C_{-1}, \; C_0, \; C_1, \; C_2, \; C_3, \ldots$$

a przez V_m prostę prostopadłą do $x'x$ przecinającą pojedynczą cykloidę C_m.

Według (8) punkta równo oddalone od początku i końca cykloidy pojedynczej znajdują się w równej wysokości.

(12) Punkt środkowy pojedynczej cykloidy jest tedy punktem szczególnym i przedstawia ze względu na swoją wysokość tak zwany punkt maxymalny.

(13) Według (9) punkta krzywej cykloidalnej odpowiadające równym oddaleniom po obu stronach od osi my znajdują się w równej wysokości, dlatego też miejsce rozgraniczające dwie po sobie następujące pojedyncze cykloidy wskazuje wysokość najmniejszą czyli minimalną.

(14) Według (6) miejscom maxymalnym i minimalnym odpowiadają styczne poziome, z wyjątkiem miejsca minimalnego cykloidy zwyczanej, w którym styczna jest prostopadłą do $x'x$.

(15) Podczas ruchu toczącego się koła promień cykloidalny a opisuje odpowiednią cykloidę w ten sposób, że przesuwając się swym początkiem o wzdłuż osi cykloidalnej o odstęp np. l, w tym samym czasie doznaje obrotu o taki kąt ψ, który równaniu $r\psi = l$ zadość czyni.

(16) Zresztą łatwo dostrzedz, że opisując jednę i tę samą pojedynczą cykloidę promień a w każdem położeniu znajduje się swym końcem A w bliższem oddaleniu od pionu maxymalnego $\mu\mu'$, niż początkiem o.

(17) Mając na podstawie promienia r i promienia cykloidalnego o pewnej długości a_1 jedną pojedynczą cykloidę narysowaną, nietrudno nam będzie na podstawie promienia r inną cykloidę wypunktować należącą do jakiejkolwiek długości promienia cykloidalnego $= b \lesseqgtr a$.

(18) (*fig.* 15) W tym celu bierze się pasek przezroczystego papieru LL', wytyka się na nim trzy w prostej linii leżące znaczki o', A', B' w ten sposób, aby ich odstępy odpowiadały żądanym długościom $o'A' = a$, $o'B' = b$. Ukłóciem igłą otrzymamy na pasku w punkcie B' malutki otworek tak, aby przez niego cieniutki koniec ołówka przeprowadzić można.

Poruszając ten pasek z uwzględnieniem uwagi (16) tak, aby znaczek o' ślizgał się na osi oo', zaś znaczek A' po narysowanej już pojedynczej cykloidzie, ołówek sięgający otworkiem B' do papieru rysunkowego znaczyć będzie punkta należące do cykloidy odpowiadającej promieniowi cykloidalnemu o żądanej długości b, i odpowiadającej analitycznemu równaniu :

(19) $$x = r\,\text{łuk}\left(\cos = \frac{r-y}{b}\right) - \sqrt{b^2 - (r-y)^2}.$$

Za pomocą wyżej opisanego paska możnaby tylko pewne punkta wyznaczać np. takie, które równocześnie się mieszczą na linijach już na papierze rysunkiem przedstawionych, a zatem takie punkta, w których żądana cykloida B przecina liniję już narysowaną.

Na figurze widzimy oznaczony punkt B′ jako punkt spotkauia cykloidy B z liniją CC′.

Na *fig.* 15 widzimy punkt w, w którym spotykają się dwie po sobie idące wydłużone pojedyncze cykloidy.

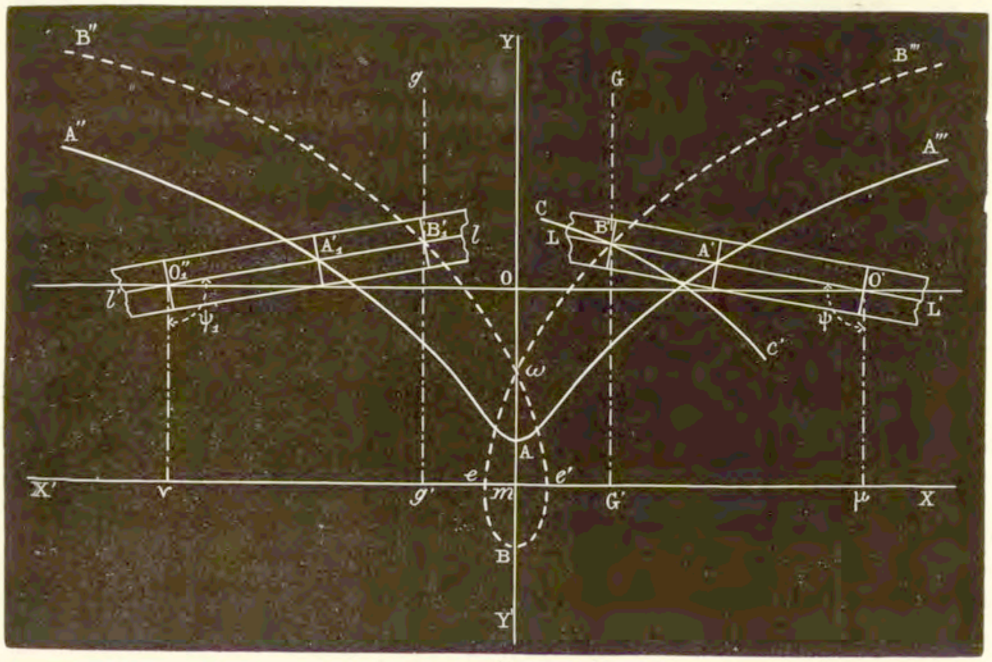

fig. 15.

(20) Taki punkt podwójny nazywać będziemy węzłem. Część łuku cykloidalnego zawarta między dwoma po sobie idącemi węzłami, niech się nazywa łukiem głównym, rozróżniając ją tym sposobem od części drugiej pojedynczej cykloidy tworzącej z podobną częścią sąsiedniej cykloidy zamknięty owal, który niech się *pętlica* nazywa.

Każda pętlica przecina oś $x'x$ w dwóch punktach leżących w równem oddaleniu po obu stronach pionu węzłowego. Dla oznaczenia wszystkich punktów przecięcia osi $x'x$ pętlicami, wystarczy obliczyć owe punkta e i e', w których pętlica złożona z resztek cykloid B_0 i B_1 przecina oś $x'x$. Według (19) otrzymamy dla $y = 0$:

(21) $$x_e = r\,\text{łuk}\left(\text{dos} = \frac{r}{b}\right) - \sqrt{b^2 - r^2}, \qquad x_{e'} = \sqrt{b^2 - r^2} - r\,\text{łuk}\left(\text{dos} = \frac{r}{b}\right).$$

Za pomocą (6) łatwo dopatrzeć, że styczne w punktach e i e' mają kierunek prostopadły do osi $x'x$.

(22) Odcinek ee' przedstawia szerokość pętlicy. Prostopadła do $x'x$, idąca przez jakikolwiek punkt zawarty między dwoma punktami e i e', przetnie odpowiednią pętlicę z pewnością w dwóch punktach.

Przy większych b może się zdarzyć, że $x_{e'} = -x_e$ zajmie kilka całych rozpiętości p albo nawet przekroczy wielokrotną rozpiętość o jakąś część $u < p$.

(23) W takim razie tworzy się około punktu, rozgraniczającego dwie sąsiednie rozpiętości, pętlica, która z góry i z dołu rozpina się po nad kilkoma po sobie idącemi całemi rozpiętościami i nadto jeszcze nad odcinkiem części owej następnej rozpiętości p.

Skutkiem tego stać się może, że przy odpowiednio długiem b każdą pojedynczą rozpiętość p nakrywają z góry i z dołu łuki pętlicowe sąsiednich cykloid, i prócz tego główny łuk do tego p należącej cykloidy.

Jeżeli np. uważając n jako całkowitą dodatnią liczbę otrzymamy

(24) $$x_{c'} = \sqrt{b^2 - r^2} - r\,\text{łuk}\left(\cos = \frac{r}{b}\right) = np + u,$$

(25) gdzie $u < p$, to nad każdą pojedynczą rozpiętością p rozpinają się najpierw z góry główny łuk odpowiedniej cykloidy, potem z góry i z dołu $2n$ pętlic sąsiednich cykloid wzdłuż całego p, i nareszcie ostatnia sąsiednia pętlica nad początkowym, jako też nad końcowym odcinkiem tej rozpiętości odpowiadającym długości u

Niechaj będzie $v < p$ odstęp pionu V od początku jakiegoś p należącego do cykloiidy, z której zaczerpnęliśmy ilości u i n dla związku (24). Niechaj dalej symbol (v, u, n) wyraża liczbę punktów spotkania się pionu V z pasmem cykloidalnem, to równoważność

(26) $$\mathfrak{A} \equiv (v, u, n,)$$

czytamy jak następuje : Liczba $\mathfrak{A}$ oznacza ilość punktów, w których pion V przecina pasma cykloidalne nacechowane ilościami u i n.

Ze względu na ilość punktów przecięcia musimy każdą pętlicę, rozpinającą się po nad jakoteż i pod rozpiętością p uważać za łuk podwójny.

Odcinając z początku i z końca rozpiętości p długość u rozpadnie się długość p na dwa równe odcinki skrajne, między któremi znajduje się odcinek średni. Uważając łuk główny pojedynczej cykloidy za łuk pojedynczy, możemy wypowiedzieć, że każdy odcinek skrajny znajduje się między $(2n+3)$ łukami; odcinek zaś średni znajduje się między $(2n+1)$ lub $(2n+5)$ łukami według tego, czy u wynosi mniej lub więcej niż długość p.

Ze względu na ilość przecięć pionu V z cykloidą możemy na podstawie tej uwagi i (26) ułożyć następującą tabliczkę :

(27)

	(u, v, n)		(v, u, n)
$u = 0$, v dowolne	$4n+1$	$u < \frac{1}{2}p$, $(p-u) \leqq 0$. . . .	$4n+3$
$u = \frac{1}{2}p$, $v \lesseqgtr u$.	$4n+1$	$u > \frac{1}{2}p$, $v = u$.	$4n+5$
$u = \frac{1}{2}p$, $v = u$.	$4n+5$	$u > \frac{1}{1}p$, $v = p - u$. . . .	$4n+5$
$u < \frac{1}{2}p$, $u < v < p - n$	$4n+1$	$u > \frac{1}{2}p$., $v > u$.	$4n+3$
$u < \frac{1}{2}p$, $u \gtreqless 0$.	$4n+3$	$u > \frac{1}{2}p$, $v < (p-u)$. . . .	$4n+3$
		$u > \frac{1}{2}p$, $u > v > (p-u)$.	$4n+5$

Tabliczka (27) tyczy się rzeczywiście tylko cykloid wydłużonych. Cykloidy skrócone jako też zwyczajne mogą mieć z pionem tylko jeden punkt styczności z wyjątkiem punktu rozgraniczającego dwie pojedyncze cykloidy zwyczajne, przez który przechodzi linija pionu i jest styczną i który skutkiem tego uważany być musi jako podwójny punkt przecięcia.

Odpowiednio do tabliczki (27) chodzi teraz o wskazanie punktów przecięć a mianowicie o oznaczenie liczb łukowych odpowiadających wykonanemu toczeniu się koła od początku aż do nakreślenia punktu przecięcia o którym mowa. W praktyce wystarcza jedna pojedyncza jakimkolwiek promieniem a narysowana cykloida np. C_0, aby dojść do oznaczenia wszystkich właśnie co wspomnianych liczb łukowych.

Uważając ogólnie V_m jako pion odcinający od początku rozpiętości $p_m = p$ długość v, pomyślmy sobie układ pionów

(28) $$\ldots\ V_{-3},\ T_{-2},\ V_{-1},\ V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots$$

tak ustawiony, żeby odległość dwóch sąsiednich pionów wynosiła : długość rozpiętości p, i pojedynczą cykloidę C_0 na odpowiedniem miejscu narysowaną jakimkolwiek promieniem a. Podług przepisu uwidocznionego na (fig. 17) możemy na podstawie narysowanej cykloidy C_0, za pomocą paska z papieru opatrzonego znaczkami O, A, B w odstępach $oA = a$, $oB = b$, oznaczać punkta należące do cykloidy C'_0 o żądanym promieniu cykloidalnym b. Za pomocą takiego paska oznaczmy tylko punkta spotkania się cykloidy C'_0 z układem pionów (28) t. j. punkta należące do układów wziętych po parze

(29) $$\begin{array}{l}(C'_0V_0);\ (C'_0V_1);\ (C'_0V_3);\ \ldots,\\ (C'_0V_{-1});\ (C'_0V_{-2});\ (C'_0V_{-3});\ \ldots\end{array}$$

z których tylko pierwsza para wskazuje na jedyny punkt, zaś każda inna para na dwójkę punktów Do każdego w (29) wskazanego punktu należy odpowiednia dodatna liczba łukowa mniejsza niż 2π. Liczby łukowe przedstawiające każdorazowy kierunek promienia b prowadzącego do punktu przecięcia cykloidy C'_0 z pionem należącym do układu (20) oznaczmy, odpowiednio do (29), następującym układem :

(30) $$\begin{array}{l}\psi_0;\ \psi_1,\ \psi'_1;\ \psi_2,\ \psi'_2;\ \psi_3,\ \psi'_3;\ \ldots\\ \psi_{-1},\ \psi'_{-1};\ \psi_{-2},\ \psi'_2;\ \psi_{-3},\ \psi'_3;\ \ldots\end{array}$$

Aby dostać liczby łukowe należące do punktów, w których np. pion V_m przecina pasmo cykloidalne C' o promieniu b, pomyślmy sobie znaczki każdej pary w (29) przesunięte równocześnie o tyle jedności, aby w każdej parze znaczek przy V wynosił m; otrzymamy tym sposobem nowe pary i również nowe punkta przecięcia, posiadające wszakże tę własność, że kierunki promieni cykloidalnych b prowadzących do tych punktów pozostaną takie same, jakie im wskutek liczb łukowych w (30) należą. Tylko liczby łukowe przedstawiające ilości wykonanego otoczenia się koła aż do zakreślenia tych punktów różnić się będą od liczb (30), względnie o tyle razy po 2π, ile jedności przybyło znaczkowi przy C przy przejściu układu (29) na układ taki, aby się każdy pion V zamienił na pion V_m. Układ (29) zamieniłby się w tym razie na układ

(31) $$\begin{array}{l}(C'_mV_m),;\ (C'_{m-1}V_m);\ (C'_{m-5}V_m);\ (C'_{m-3}V_m);\ \ldots\\ (G'_{m+1}V_m);\ (C'_{m+2}V_m);\ C'_{m+3}V_m);\ \ldots\end{array}$$

a liczby łukowe w (30) zmienią się stosownie do układu (31) w następujący sposób :

(32) $$\begin{array}{l}(2m\pi+\psi_0);\ [2(m-1)]\pi+\psi'_1],\ [2(m-1)\pi+\psi'_1];\ [2(m-2)\pi+\psi_2],\ [2(m-2)\pi+\psi'_2];\ \ldots\\ [2(m+1)\pi+\psi_{-1}],\ [2(m+1)\pi+\psi'_{-1}];\ [2(m+2)\pi+\psi_{-2}],\ [1(m+2)\pi+\psi'_{-2}];\end{array}$$

Równanie pionu V_m jest oczywiście

(33) $$x = 2rm\pi + v = X_m$$

gdzie X_m jest ilością stałą.

Każda z liczb łukowych w (32) należy do odpowiedniego punktu, w którym pasmo cykloidalne o promieniu b przecina pion (33), a każdemu tak otrzymanemu punktowi pasma C' przynależy ilość stała X_m jako wspólna współrzędna x. Ponieważ dla pasma C' ogólnie mamy

$$x = r\psi - b \operatorname{wst} \psi,$$

to kładąc $x = X_m$ otrzymamy równanie

$$X_m = r\psi - b \operatorname{wst} \psi,$$

w którem niewiadoma ψ każdą z liczb układu (32) zastąpioną być może.

Liczby układu (31) przedstawiają nam tedy wszystkie rzetelne pierwiastki równania

(34) $$X_m = 2rm\pi + v = r\psi - b \operatorname{wst} \psi,$$

jeżeli w niem ψ jako niewiadomę uważamy. W tem równaniu ilość ψ jest zależną od wartości stosunków $\frac{X}{r}$ i $\frac{b}{r}$ i możnaby na tej podstawie napisać

(35) $$\psi = f\left(\frac{X}{r}, \frac{b}{r}\right).$$

Widzimy ztąd, że wartości liczebne pierwiastków równania (34) zależą tylko od stosunków ilości X_m i b do promienia toczącego się koła, że wskutek tego wolno nam ten promień uważać za jednostkę pomiaru. Cykloida więc narysowana jakimkolwiek promieniem r może służyć za podstawę konstrukcyjną pierwiastków równania (34) czyli raczej uważając r za jednostkę pomiaru równania o współczynnikach liczbowych

(36) $$X_m = \psi - b \operatorname{wst} \psi.$$

Liczba pierwiastków zależy dla danego pionu $x = X_m = 2m\pi + v$ od długości promienia cykloidalnego b. Liczbę tę znajdziemy, badając rysunkowo największe znaczki dodatne i odjemne pionów skrajnych, które przy postępowaniu podanem w (29) spotykać się jeszcze mogą z cykloidą C'_0. Liczbę pierwiastków rzetelnych możnaby wyznaczyć także bez uprzedniego rysunku za pomocą tabliczki (27) na podstawie obliczonych ilości $x_e = 2n\pi + u$ i założonych ilości v i b.

Równanie (36) nazywa się równaniem Kepplera według astronoma tego imienia, który na potrzebę rozwiązania takiego równania pierwszy zwrócił uwagę. Rozwiązał je La Place szeregiem nieskończonym, nie podając wszakże sposobu obliczania wszystkich pierwiastków rzetelnych temu równaniu przynależnych, ani też kryteryów służących do rozróżniania i policzenia takowych.

Metoda właśnie wyłożona służąca do rozwiązywania równania Kepplerowskiego polega na wskazaniu cykloidy C' i odpowiedniej prostej V_m, a ostatecznie na wytknięciu punktów spotkania się tych kształtów i oznaczeniu tym punktom odpowiednich łukowych liczb wyrażających ilości wykonać się mającego toczenia koła aż do naznaczenia owych punktów promieniem cykloidalnym.

(37) Zastępując w postępowaniu podanem w numerach od (29) aż do (33) układ pionów (28) układem innych równoległych prostych lub układem krzywych ... $k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \ldots$ do siebie przystających ozsuniętych równolegle do rozpiętości cykloidy o stałe odległości $p = 2r\pi$, nietrudno zrozumieć rysunkowe postępowanie, aby otrzymać punkta spotkania się cykloidy C' z kształtem k_m, jako też liczby łukowe tym punktom odpowiednie. Wyznaczenie punktów przecięcia żąda oczywiście łatwego narysowania nietylko cykloidy C' ale także i krzywej pomocniczej k.

(38) Poznaliśmy już w poprzednim paragrafie stopniowe tworzenie linii tak zwanej całkowej, i niektóre ułatwienia przy nakreśleniu elipsy; zwracamy uwagę na dodatek stanowiący ostatni paragraf tej części, gdzie podajemy teoretycznie i praktycznie uzasadnione przyrządy mechaniczne, służące do ciągłego wykreślenia dowolnie żądanej elipsy, paraboli i hiperboli, jakoteż cykloidy dla toczącego się koła o promieniu $r = 1$.

(39) W następnym paragrafie zajmiemy się wykazaniem niepospolitych korzyści, w dziedzinie teoryi równań, wypływających ze stosownego zestawienia cykloidy z innemi łatwo przedstawić się dającem krzywemi, celem uzyskania punktów przecięcia i tym punktom odpowiednich liczb łukowych.

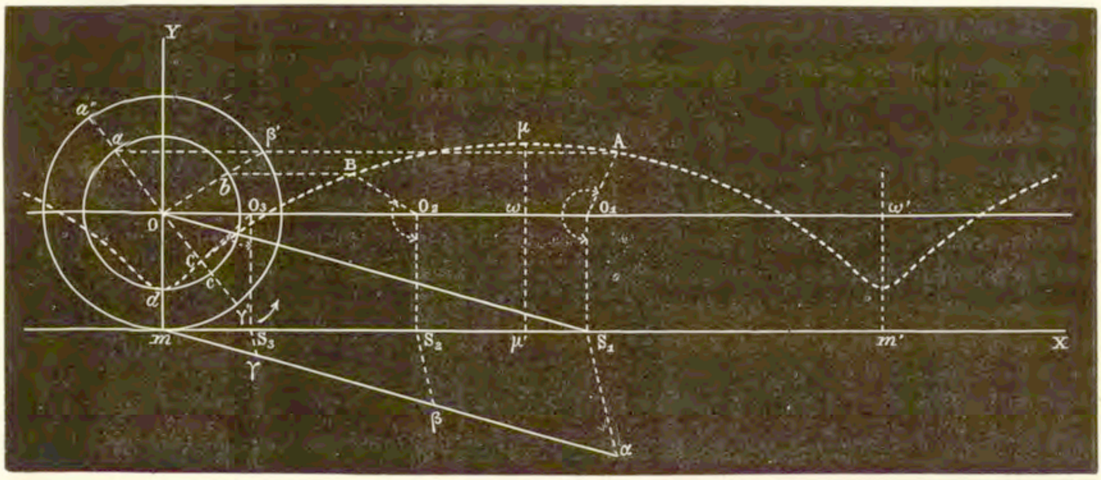

Fig. 16.

Na figurze obecnej mamy dokładnie narysowane promieniem $om = 1$, koło toczące się; promieniem zaś ad koło, którego punkt d podczas ruchu toczenia porusza się po linii cykloidalnej na figurze dokładnie narysowanej.

Wychodząc z pewnego punktu α' koła toczącego się otrzymamy w kierunku $\alpha' o$ na kole tworzącem punkt a; od a idąc równolegle do mx otrzymamy na cykloidzie odpowiedni punkt A, ztąd za pomocą promienia cykloidalnego $Ao_1 = od$ odpowiedni środek cykloidalny o_1 i odpowiedni punkt styczności S_1. Na podstawie pochodu pasmem łamanem od punktu α' do S_1 łatwo widać, jak się ma dochodzić drogą w kierunku przeciwnym z punktu S_1 do punktu α'. Na figurze mamy uwidocznione pochody od punktu β' do S_2, od punktu γ' do S_3 i na odwrót.

Łatwo możemy na podstawie tej konstrukcyi zrozumieć następujące związki:

$$
\begin{aligned}
&\text{arc} \sphericalangle mo\beta' = \overline{mS_2},\\
(40)\qquad &\text{arc} \sphericalangle mo\alpha' = \overline{mS_1},\\
&\text{arc} \sphericalangle mo\gamma' = \overline{mS_3},
\end{aligned}
$$

wraz z postępowaniem, jak się na podstawie danego kąta np. $mo\alpha'$ dochodzi do długości temu kątowi odpowiadającego łuku mS_1 o promieniu 1.

I równocześnie postępowanie, jak się na podstawie danej długości łukowej $\overline{mS_3}$ dochodzi do wielkości odpowiedniego kąta $mo\gamma'$. Mamy tedy klucz do rozwiązywania rysunkowego następujących zagadnień :

1° Zamienić długość łuku leżącego na obwodzie koła toczącego się i poczynającego się w punkcie m na prostokreślną z punktu m wychodzącą długość;

2° Prostokreślnie daną długość mS_1 nawinąć na obwodzie koła toczącego się, i oznaczyć punkt końcowy α' zajętego łuku.

3° Wynaleźć trójkąt mający tę samą powierzchnię, co dany wycinek kołowy. Tak np. trójkąt prostokątny omS_1 odpowiada wycinkowi ograniczonemu łukiem $\overline{m\alpha'}$.

4° Na odcinku $\overline{mS_1}$ przedstawiającym długość łuku $m\alpha'$ otrzymamy na podstawie przedłożonego podziału odcinka $m\alpha$ w punktach dowolnych γ, β, α, odpowiednie punkta działowe S_2, S_2, S_1, a w następstwie na obwodzie koła odpowiednie końce łukowe γ', β', α'. I widzimy jasno, jak postępować należy, aby jakikolwiek dany łuk lub kąt podzielić na podstawie danych stosunków wymiernych lub niewymiernych.

Ogółem dochodzimy za pomocą cykloidy z łatwością do rozwiązania rysunkowego zagadnień, któremi się z niewielkiem powodzeniem zajmowano już od czasów starożytnych, a mianowicie :

(42) *Do tak zwanego wyprostowania (rektyfikacyi) łuków kołowych, i dowolnego podziału takowych ;*
Do wyznaczenia powierzchni wycinków kołowych, za pomocą trójkątów lub czworoboków prostokreślnych.

Na obecnej figurze mamy wycinek kołowy o promieniu $r = oq = ot$. Wysokość odpowiedniego odcinka oznaczamy przez $h = nt$ a długość przynależnego łuku i cięciwy przez $2l = 2.\widehat{tq}$ i $2g = 2.\widehat{nq}$. Kąt wycinkowy oznaczamy przez $2\varphi'$ a jego spełnienie przez $2\varphi'$.

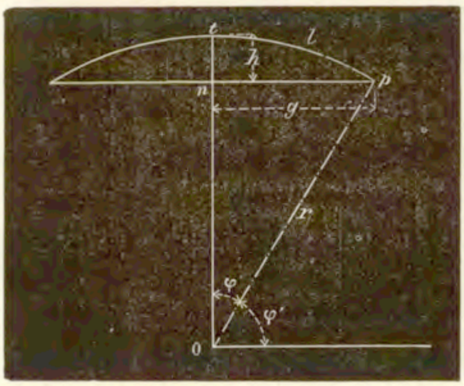

Fig. 16.

Mamy :

(43) $$r - h = r\,\mathrm{dos}\,\varphi = r\,\mathrm{wst}\,\varphi', \qquad g = a_l\,\mathrm{wst}\,\varphi, \qquad l = r\varphi.$$

Rugując za pomocą trzeciego równania ilość r możemy równanie pierwsze i drugie napisać w następujących kształtach :

$$\frac{l}{\varphi} - h = \frac{l}{\varphi}\,\mathrm{dos}\,\varphi, \qquad \text{albo}$$

$$\frac{l}{\frac{\pi}{2} - \varphi'} - h = \frac{l}{\frac{\pi}{2} - \varphi'}\,\mathrm{wst}\,\varphi' \qquad \text{zatem :}$$

(44) $$\frac{\pi}{2} - \frac{l}{h} = \varphi' - \frac{l}{h}\,\mathrm{wst}\,\varphi', \quad \ldots \; r = l : \left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right),$$

(45) $$o = \varphi - \frac{l}{g}\,\mathrm{wst}\,\varphi, \quad \ldots \; r = l : \varphi.$$

Każdy pierwiastek φ' równania (44) daje odpowiednią długość promienia r a zatem takie koło, na którego obwodzie nawinięta długość $2l$ prowadzi do odcinka kołowego o danej wysokości h.

Każdy pierwiastek φ równania (45) daje odpowiednią długość promienia r takiego koła, na którego obwodzie nawinięta długość $2l$ prowadzi do wycinka kołowego o danej cięciwie $2g$.

Przy końcu paragrafu następnego umieszczamy rysunkowe rozwiązanie równań kształtu (44) i (45).

§ 5.

Niech równanie

(1) $$f(x, y)=0,$$

odnośnie do osi prostokątnych, przedstawia nam krzywę k, która rysunkiem daje się łatwo przedstawić jako linija ciągła.

Dla punktów przecięcia krzywej k z cykloidą

(2) $$y=1-b\operatorname{dos}\varphi. \quad x=\varphi-b\operatorname{wst}\varphi,$$

dostaniemy, wstawiając w równanie (1) wartości na x i y wyrażone w (2) przez φ, następujący warunek:

(3) $$f[(\varphi-b\operatorname{wst}\varphi), \quad (1-b\operatorname{dos}\varphi)]=F(\varphi, \operatorname{dos}\varphi, \operatorname{wst}\varphi)=0,$$

który liczbami łukowemi należącemi do punktów przecięcia dopełniony być musi.

Mając na odwrót równanie

(4) $$F(\varphi, \operatorname{dos}\varphi, \operatorname{wst}\varphi)=0.$$

podane do rozwiązania, możemy następującym sposobem spróbować, czyby się ono nie dało rozwiązać za pomocą punktów przecięcia stosownej cykloidy z jakąś krzywą k, do których należące liczby łukowe przedstawiają pierwiastki rzetelne równania (4).

W tym celu niechaj cykloida, co do b jeszcze nieoznaczona, odpowiada równaniom (2). Z tych równań otrzymamy:

(5) $$(1-y)^2+(\varphi-x)^2=b^2; \quad \varphi=\pm\sqrt{b^2-(1-y)^2}+x;$$
$$\operatorname{dos}\varphi=\frac{1-y}{b}, \quad \operatorname{wst}\varphi=\frac{\sqrt{b^2-(1-y)^2}}{b}.$$

Równanie (4) przybierze na podstawie związków (5) następującą postać:

(6) $$F\left[(\sqrt{b^2-(1-y)^2}+x), \quad \frac{1-y}{b}, \quad \frac{\sqrt{b^2-(1-y)^2}}{b}\right]=0,$$

w której ilość b mamy prawo tak dobrać, aby równanie (6), jeżeli to być może, przyjęło postać ile możności najprostszą i przedstawiało nam krzywę k, dającą się łatwo przedstawić rysunkiem.

Jeżeli to wszystko się ziści, szukamy znanym nam już sposobem przecięć $(C'k)$ i dochodzimy do liczb łukowych na φ, które już będą pierwiastkami rzetelnemi równania (4).

Jeżeli podane równanie (4) jest funkcyą złożoną algebraicznie z elementów φ, $\operatorname{dos}\varphi$ i $\operatorname{wst}\varphi$, to i równanie (6) da się ostatecznie przedstawić jako funkcya algebraiczna ze zmiennych x i y.

Badanie ogólnej funkcyi (4) nie może być dalej prowadzone jak tylko do otrzymania związku (6) — a specyalizowanie funkcyi (4) nie mogłoby nigdy być wyczerpujące, i tylko w rzadkich przypadkach zaprowadziłoby nas do rezultatów praktycznych.

W tym paragrafie ograniczymy się tylko na wyszukaniu kształtów równań (4) odpowiednich zestawieniom cykloidy z każdą po kolei liniją, której kształt rysunkowo liniję ciągłą przedstawić potrafimy.

Wychodząc z równania prostej

(7) $$f(x, y)=x-Ay-B=0,$$

otrzymamy wskutek podstawień (2)

(8) $$\varphi - b \,\mathrm{wst}\, \varphi + Ab \,\mathrm{dos}\, \varphi - (A + B) = 0.$$

Na odwrót mając do rozwiązania dane równanie w tym samym kształcie np :

(9) $$\varphi - P \,\mathrm{wst}\, \varphi + Q \,\mathrm{dos}\, \varphi + R = 0, \quad P > 0, \qquad (I)$$

otrzymamy z porównania (9) i (8)

(10) $$b = P, \quad A = \frac{Q}{P}, \quad B = -\left(\frac{Q}{P} + R\right).$$

Cykloida na podstawie tu otrzymanej wartości na b, zestawiona z prostą nacechowaną wartościami na A i B zaprowadzi nas do punktów przecięcia i do tych punktów przynależnych liczb łukowych, które przedstawiać będą rzetelne pierwiastki danego równania (9).

Jeżeli $Q = 0$, to mamy także i $A = 0$, a linija prosta (7) będzie w takim razie prostopadłą do rozpiętości cykloidy. W tym przypadku równanie (9) posiada kształt znanego nam już równania Kepplera.

Jeżeli $P < 0$, otrzymalibyśmy odjemne b, coby wskazywało tę okoliczność, iż dla $\varphi = 0$ cykloida rozpoczynałaby się w punkcie najwyższym, dla którego mielibyśmy $x = 0$, $y = 1 - b$. Zresztą punkta przecięcia otrzymane w tym razie prowadziłyby również do rzetelnych pierwiastków zadanego równania. Atoli ocenianie liczby punktów przecięcia, na podstawie tabliczki (27) w § 4 uzasadniliśmy na dodatnem b, dla tego będziemy się starać, według możności, omijać w rezultatach odjemne b.

Dla odjemnego $P = -P'$ mielibyśmy zamiast (9) równanie :

(11) $$\varphi + P' \,\mathrm{wst}\, \varphi + Q \,\mathrm{dos}\, \varphi + R = 0, \qquad (I)'$$

Kładąc tutaj

$$\varphi = \varphi' + \pi, \quad R + \pi = R', \quad Q = Q',$$

otrzymamy

(12) $$\varphi' - P' \,\mathrm{wst}\, \varphi' + Q' \,\mathrm{dos}\, \varphi' + R' = 0, \qquad P' > 0,$$

którego rozwiązanie polega już na dodatnych b, a którego pierwiastki powiększone o π przechodzą na pierwiastki należące do równania (11).

Nareszcie dla $P = 0$ mielibyśmy na miejscu równania (9) następujące

(13) $$\varphi + Q \,\mathrm{dos}\, \varphi + R = 0. \qquad (I)''$$

Kładąc w niem $\varphi = \varphi' \pm \frac{\pi}{2}$, $R \pm \frac{\pi}{2} = R'$ według tego, czy Q jest ilością dodatną lub odjemną, otrzymamy

$$\varphi' - Q' \,\mathrm{wst}\, \varphi' + R' = 0,$$

gdzie Q' jest ilością dodatną i numerycznie równoważną ilości Q. Rozwiązanie tego równania polega już na dodatnem b, a jego piewiastki powiększone o $\pm \frac{\pi}{2}$ staną się pierwiastkami równnani a. (13

Równanie

$$2\varphi + 2P\,\mathrm{wst}^2\varphi + 2Q\,\mathrm{dos}^2\varphi + R = 0, \qquad (14) \qquad (I)'''$$

można napisać

$$2\varphi + P(1 - \mathrm{dos}\,2\varphi) + Q(1 + \mathrm{dos}\,2\varphi) + R = 0,$$

albo kładąc

$$2\varphi = \varphi', \quad Q - P = Q', \quad R + P + Q = R',$$

$$\varphi' + Q'\,\mathrm{dos}\,\varphi' + R' = 0, \qquad (15)$$

które jest oczywiście kształtu (I)''; jego pierwiastki rozmnożone przez 2 przechodzą na pierwiastki równania (I)'''.

Równanie (9) rozwiązuje się dla $PQ \gtrless 0$ za pomocą prostej nie prostopadłej do rozpiętości cykloidy. Możemy jednak i takie równanie rozwiązywać za pomocą prostopadłej. W tym celu musielibyśmy równanie (9) przerobić za pomocą podstawienia.

$$P = b\,\mathrm{dos}\,\mu, \quad Q = -b\,\mathrm{wst}\,\mu,$$

zatem

$$b = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \mathrm{dos}\,\mu = \frac{P}{b}, \quad \mathrm{wst}\,\mu = \frac{-Q}{b},$$

na następujące:

$$\varphi - b\,\mathrm{wst}(\varphi + \mu) + R = 0,$$

albo kładąc

$$\varphi = \varphi' - \mu, \quad R - \mu = R',$$

na równanie:

$$\varphi' - b\,\mathrm{wst}\,\varphi' + R = 0, \qquad (16)$$

które się rozwiązuje za pomocą prostopadłej do rozpiętości cykloidy, a którego pierwiastki pomniejszone o μ stają się pierwiastkami równania (9).

Zapytajmy się teraz o kształt równania z niewiadomą φ w takim razie, kiedy prosta P przecinająca cykloidę zawierać ma w sobie promień cykloidalny w położeniu punktowi przecięcia odpowiedniem — i przechodzić przez dany punkt $[x = \xi,\ y = \eta]$. Oznaczając przez φ liczbę łukową należącą do punktu przecięcia, a przez ψ liczbę łukową kąta przedstawiającego kierunek prostej P, otrzymamy

$$\psi = \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

(17)

$$\mathrm{sty}\,\psi = \frac{y - \eta}{x - \xi},$$

a ponieważ punkt (x, y) leżeć ma na cykloidzie (2)

$$\mathrm{sty}\,\psi = \frac{1 - b\,\mathrm{dos}\,\varphi - \eta}{\varphi - b\,\mathrm{wst}\,\varphi - \xi} = \mathrm{sty}\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\mathrm{dos}\,\varphi}{\mathrm{wst}\,\psi},$$

zatem warunek spełnić się mający przez φ:

$$\varphi + (\mu - 1)\,\mathrm{sty}\,\varphi - \xi = 0. \qquad (18)$$

Jeżeli na odwrót mamy do rozwiązania równanie

(19) $$\varphi + \mathrm{A}\,\mathrm{sty}\,\varphi + \mathrm{B} = 0, \qquad \text{(II)}$$

dojdziemy z porównania (19) i (18) do następujących wartości :

(20) $$\eta = \mathrm{A} + 1, \qquad \xi = -\mathrm{B}.$$

Ponieważ równanie (18) jest niezależne od b, możemy każdej cykloidy użyć do konstrukcyi pierwiastków równania (19).

Mając tedy już narysowaną cykloidę o promieniu cykloidalnym dajmy na to b, opatrzmy pasek papierowy dwoma znaczkami O i B w ten sposób, aby promień cykloidalny narysowanej cykloidy równał się długości odcinka OB. Posuwając ten pasek w ten sposób, aby poruszając się punktem O po linii środków toczącego się koła, drugim znaczkiem B zostawał zawsze w nakreślonej cykloidzie, dojdziemy podczas takiego ruchu i do takich położeń paska, gdzie jego prostokreślna krawędź przechodzi przez punkt obliczony w (20) i równocześnie wskazuje na punkta cykloidy, które przynależnemi liczbami łukowemi czynią zadość równaniu (19).

Równanie

(21) $$\varphi + \mathrm{A}\,\mathrm{doty}\,\varphi + \mathrm{B} = 0, \qquad \text{(II)}''$$

przybiera dla

$$\varphi = \varphi' + \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{A} = -\mathrm{A}', \qquad \mathrm{B} + \frac{\pi}{2} = \mathrm{B}',$$

następujący kształt :

(22) $$\varphi' + \mathrm{A}'\,\mathrm{sty}\,\varphi' + \mathrm{B}' = 0.$$

To równanie rozwiązane według metody poprzedzającej daje nam pierwiastki rzeczelne, które o $\frac{\pi}{2}$ powiększone przechodzą na pierwiastki równania (21).

Między prostemi, któremi cykloidę przecinać zamierzamy, wybierzmy jeszcze takie, które z danego punktu wychodząc spotykają cykloidę albo podług stycznych albo podług normalnych. Do narysowanej już cykloidy bardzo łatwo z danego punktu poprowadzić styczną i podług orzeczenia w § 4 przy liczbie (6) wyśledzić punkt styczności i jemu przynależną liczbę łukową. Miejsce przecięcia normalnego idącego z danego punktu szuka się w przybliżeniu za pomocą trójkąta prostokątnego, wprowadzając go w ruch w ten sposób, aby jeden bok kąta prostego przechodził przez dany punkt i aby równocześnie wierzchołek kąta prostego poruszał się po cykloidzie. Podczas takiego ruchu można na oko ocenić miejsce, gdzie drugi bok kąta prostego schodzi się z cykloidą podług stycznej. Ztąd wynajdzie się prawdziwe miejsce za pomocą kilku prób, mając zawsze na uwadze regułę wypowiedzianą w § 4 przy liczbie (6).

Dla stycznej do cykloidy w punkcie $[x = \varphi - b\,\mathrm{wst}\,\varphi,\ y = 1 - b\,\mathrm{dos}\,\varphi]$ przechodzącej zarazem przez dany punkt $(x = \xi,\ y = \eta)$ otrzymamy następujące związki :

(23) $$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \frac{b\,\mathrm{ws}\,\varphi}{1 - b\,\mathrm{dos}\,\varphi} = \frac{1 - b\,\mathrm{dos}\,\varphi) - \eta}{(\varphi - b\,\mathrm{wst}\,\varphi) - \xi},$$

a na podstawie takowych następujący warunek:

(24) $$\varphi + (2 - \eta)\,\mathrm{doty}\,\varphi + \frac{\eta - 1 - b^2}{b}\,\mathrm{dosie}\,\varphi - \xi = 0.$$

Mając odwrotnie dane równanie

(25) $$\varphi + \mathrm{P}\,\mathrm{doty}\varphi + \mathrm{Q}\,\mathrm{dosie}\varphi + \mathrm{R} = 0, \qquad \text{(III)}$$

możemy je porównać z równaniem (24), a otrzymamy:

(26) $$\begin{cases} \mathrm{P} = 2 - \eta, \\ \mathrm{Q} = \dfrac{\eta - 1 - b^2}{b}, \\ \mathrm{R} = -\xi. \end{cases}$$

Z tych równań wypływają, na oznaczenie punktu wyjścia, jakoteż na oznaczenie promienia cykloidalnego b, następujące wzory:

(27) $$\begin{cases} \xi = -\mathrm{R}, \\ \eta = 2 - \mathrm{P}, \\ b = \dfrac{-\mathrm{Q} \pm \sqrt{\mathrm{Q}^2 - 4\mathrm{P} + 4}}{2}. \end{cases}$$

Obliczywszy podług (27) punkt wyjścia (ξ, η) i odpowiednie 2 pasma cykloidalne, prowadzi się, podług powyżej (23) podanych wskazówek, wszystkie możliwe punkta styczności z punktu (ξ, η) i szuka się liczb łukowych tym punktom styczności odpowiednich, a dojdzie się do wszelkich pierwiastków rzetelnych równania (III).

Dla normalnej do cykloidy w punkcie $[x = \varphi - b\,\mathrm{wst}\,\varphi, \quad y = 1 - b\,\mathrm{dos}\,\varphi]$ przechodzącej przez dany punkt (ξ, η) mamy:

(28) $$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \frac{b\,\mathrm{dos}\,\varphi - 1}{b\,\mathrm{wst}\,\varphi} = \frac{(1 - b\,\mathrm{dos}\,\varphi) - \eta}{(\varphi - b\,\mathrm{wst}\,\varphi) - \xi},$$

a ztąd następujący warunek:

(29) $$(\varphi - \xi)[b\,\mathrm{doty}\,\varphi - \mathrm{dosie}\,\varphi] + b\eta = 0.$$

Mając naodwrót dane równanie

(30) $$(\varphi + \mathrm{P})[\mathrm{Q}\,\mathrm{doty}\,\varphi + \mathrm{R}\,\mathrm{dosie}\,\varphi] + \mathrm{T} = 0, \qquad \text{(IV)}$$

porównajmy go z równaniem poprzedzającem a otrzymamy na wyznaczenie ξ, η, b następujące wzory:

(31) $$\begin{cases} \xi = -\mathrm{P}, \\ \eta = \dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{Q}}, \\ b = -\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}. \end{cases}$$

Narysowawszy do cykloidalnego promienia $b = -\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$ odpowiednią cykloidę, prowadzi się z punktu wyjścia $\xi = -\mathrm{P}, \ \eta = \dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{Q}}$, według wskazówek podadnych powyżej w (23), wszelkie możliwe normalne do cykloidy aż do spotkania się z tą krzywą. Liczby łukowe odpowiadające tym punktom spotkania będą pierwiastkami rzetelnemi równania (IV).

Jak już wspomniano powyżej, krzywe drugiego stopnia jako linije ciągłe dają się narysować przyrządami opisanemi w ostatnim paragrafie. Rozróżniamy dwa kształty równania ogólnego tych linij według tego, czy równanie to wskazuje liniję posiadającą środek czy nie.

Elipsa i hyperbola jako linije posiadające środek dają się analitycznie nacechować wspólnem równaniem odniesionem do osi prostokątnych :

(32) $$A[(y-\eta)\,\mathrm{wst}\,\gamma+(x-\xi)\,\mathrm{dos}\,\gamma]^2+B[(y-\eta)\,\mathrm{dos}\,\gamma-(x-\xi)\,\mathrm{wst}\,\gamma]^2-1=0,$$

rozumiejąc pod A i B kwadraty odwróconych pół-osi głównych, pod γ kąt nachylenia osi głównej do osi xx', a pod ξ, η współrzędne środka należącego do tej krzywej. Równanie (32) wskazuje zresztą elipsę, jeżeli A i B są dodatnemi, zaś hyperbolę, jeżeli A i B posiadają znaki różne.

Kładąc

(33) $$\begin{aligned} A\,\mathrm{dos}^2\gamma+B\,\mathrm{wst}^2\gamma &= \mathfrak{A}, \\ A\,\mathrm{wst}^2\gamma+B\,\mathrm{dos}^2\gamma &= \mathfrak{B}, \\ 2(A-B)\,\mathrm{wst}\,\gamma\,\mathrm{dos}\,\gamma = 2\mathfrak{C} &= (A-B)\,\mathrm{wst}\,2\gamma, \end{aligned}$$

możemy równanie (32) i tak pisać :

(34) $$\mathfrak{A}(x-\xi)^2+\mathfrak{B}(x-\eta)^2+2\mathfrak{C}(x-\xi)(y-\eta)-1=0.$$

Z (33) otrzymamy

(35) $$\begin{aligned} \mathfrak{A}+\mathfrak{B} &= A+B, \\ \mathfrak{A}-\mathfrak{B} &= (A-B)\,\mathrm{dos}\,2\gamma \\ 2\mathfrak{C} &= (A-B)\,\mathrm{wst}\,2\gamma, \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} A+B &= \mathfrak{A}+\mathfrak{B}, \\ A-B &= \sqrt{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2+4\mathfrak{C}^2}, \\ \mathrm{sty}\,2\gamma &= \frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}; \end{aligned}$$

na podstawie wiadomych $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mamy na oznaczenie pół-osi i kąta γ następujące wzory :

(36) $$\begin{aligned} 2A &= (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+\sqrt{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2+4\mathfrak{C}^2}, \\ 2B &= (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})-\sqrt{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2+4\mathfrak{C}^2}, \\ AB &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2. \\ \mathrm{sty}\,2\gamma &= \frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}} = \mathrm{sty}\,2\tau, \\ \gamma_1 &= \tau, \quad \gamma_2 = \tau+\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

Wychodząc z wiadomych $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mamy na odpowiedź dwie zupełnie jednakowe krzywe, które różnią się tylko w kierunku głównych osi o ćwiartkę obrotu. Zważywszy nadto, że na podstawie drugiego i trzeciego równania w (35) i podstawienia γ_2 na miejscu γ_1 pół-osie A, B zmienić się muszą na pół-osie B, A możemy ostatecznie twierdzić, że krzywe należące do γ_1 i γ_2 wpadają jedna w drugą.

Celem oznaczenia punktów przecięcia krzywej (34) z cykloidą

(37) $$x=\varphi-b\,\mathrm{wst}\,\varphi, \qquad y=1-b\,\mathrm{dos}\,\varphi,$$

otrzymamy wskutek rugowania z równania (34) x, y za pomocą równań cykloidy (37), następujące równania:

$$(38)\qquad \mathfrak{A}\varphi^2 + 2\varphi[-b\mathfrak{A}\,\mathrm{wst}\varphi - b\mathfrak{C}\,\mathrm{dos}\varphi + (\mathfrak{C}\eta' - \mathfrak{A}\xi)] + 2b\,\mathrm{wst}\,\varphi[\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{C}\eta'] +$$
$$+ 2b\,\mathrm{dos}\varphi\,[\mathfrak{C}\xi - \mathfrak{B}\eta'] + b^2\,\mathrm{wst}^2\varphi\,[\mathfrak{A} - \mathfrak{B}] + 2b^2\mathfrak{C}\,\mathrm{wst}\,\varphi\,\mathrm{dos}\varphi +$$
$$+ [\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta'^2 - 2\mathfrak{C}\xi\eta' + \mathfrak{B}b^2 - 1] = 0,$$

w którem dla skrócenia położyliśmy $1 - \eta = \eta'$.

Liczby łukowe należące do punktów przecięcia cykloidy (37) z krzywą (34) są rzetelnemi pierwiastkami równania (38).

Zajmiemy się teraz zadaniem odwrotnem właściwie ważnem dla nas, mianowicie, ustanowieniem wzorów uskuteczniających przejście z danego równania kształtu (38) do odpowiedniej cykloidy (37) i krzywej (34) tak, aby liczby łukowe należące do punktów spotkania się tych krzywych tworzyły rzetelne pierwiastki założonego równania w kształcie (38).

Niechaj będzie dane równanie kształtu (38) następujące:

$$(39)\qquad \varphi^2 + 2\varphi[A_1\,\mathrm{wst}\varphi + B_1\,\mathrm{dos}\varphi + C_1] + 2D_1\,\mathrm{wst}\varphi + 2E_1\,\mathrm{dos}\varphi + F_1\,\mathrm{wst}^2\varphi + 2G_1\,\mathrm{wst}\varphi\,\mathrm{dos}\varphi + H_1 = 0.$$

Mnożąc to równanie przez μ i porównywając je z kształtem (38), otrzymamy:

$$(40)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mu, \\ -b\mathfrak{A} &= A_1\mu, \\ -b\mathfrak{C} &= B_1\mu, \\ \mathfrak{C}\eta' - \mathfrak{A}\xi &= C_1\mu, \\ -b[\mathfrak{C}\eta' - \mathfrak{A}\xi] &= D_1\mu, \\ b[\mathfrak{C}\xi - \mathfrak{B}\eta'] &= E_1\mu, \\ b^2[\mathfrak{A} - \mathfrak{B}] &= F_1\mu, \\ b^2\mathfrak{C} &= G_1\mu, \\ -\xi[\mathfrak{C}\eta' - \mathfrak{A}\xi] - \eta'[\mathfrak{C}\xi - \mathfrak{B}\eta'] + \mathfrak{B}b^2 - 1 &= H_1\mu. \end{aligned}$$

Związki (40) w liczbie dziewięciu mają nam posłużyć do wyznaczenia cykloidy (37) i krzywej (34). Za pomocą tych związków bowiem mamy wynaleźć ilości μ, b, ξ, η', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, które na podstawie wzorów napisanych w (36) pośredniczą do obliczania ilości μ, b, ξ, η, A, B, γ.

Nie wchodząc jeszcze w ostateczne rozwiązywanie równań (40), spostrzegamy bezpośrednio, że celem zadość uczynienia równaniom w liczbie *dziewięciu* mamy uskutecznić stosowny wybór ilości μ, b, ξ, η', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ w liczbie tylko *siedmiu*. Siedem ilości dobranych tak, aby zadość czyniły siedmiu warunkom w (40), muszą także zadość uczynić i dwom ostatnim warunkom. Ztąd wypływa: że współczynniki w (39) nie są między sobą niezależnemi, że owszem muszą one dopełnić dwu warunków pewnych jeżeli zachodzić ma możliwość rozwiązania równania (39) za pomocą punktów przecięcia się między sabą stosownie dobranej cykloidy i krzywej drugiego rzędu posiadającej środek.

Celem rozwiązania równań (40), uważajmy z początku μ jako już obliczone i w miarę możności wyraźmy szukane ilości przez μ. Przedewszystkiem mamy :

(41) $$\mathfrak{A}=\mu, \quad b=-\frac{A_1\mu}{\mathfrak{A}}=-\frac{A_1\mu}{\mu}=-A_1, \quad \mathfrak{C}=\frac{B_1\mu}{-b}=\frac{B_1}{A_1}\mu.$$

Z równania ósmego w (40) mamy także $\mathfrak{C}=\frac{G_1}{A_1^2}\mu$, a z porównania tej wartości z wartością na $\mathfrak{C}$ w (41) wypada następujący warunek :

(42) $$G_1=A_1B_1.$$

Dzieląc piąte równanie w (40) przez czwarte, otrzymamy drugi warunek :

(43) $$D_1=A_1C_1.$$

Wyraziwszy w siódmem równaniu ilości b, $\mathfrak{A}$ za pomocą (41) otrzymamy :

(44) $$\mathfrak{B}=\frac{(A_1^2-F_1)}{A_1^2}\mu.$$

Celem wyznaczenia ilości ξ i η' wyraźmy w równaniach piątem i szóstem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, b za pomocą (41) i (44) przez μ, a otrzymamy :

$$A_1[-\mu\xi+\frac{B_1}{A_1}\mu\eta']=D_1\mu, \quad -A_1\left[\frac{B_1}{A_1}\mu\xi-\frac{(A_1^2-F_1)}{A_1^2}\mu\eta'\right]=E_1\mu,$$

a po wypuszczeniu wspólnego czynnika μ, i pomnożeniu drugiego równania przez A_1 będzie ze względu na (42) i 43)

(45) $$-A_1\xi+B_1\eta'=D_1, \quad -G_1\xi+(A_1^2-F_1)\eta'=E_1A_1;$$

ztąd otrzymamy :

(46) $$\xi=\frac{C_1(A_1^2-F_1)-B_1F_1}{B_1^2-A_1^2+F_1}, \quad \eta'=\frac{A_1[B_1C_1-E_1]}{B_1^2-A_1^2+F_1}.$$

Celem obliczenia ilości μ, równanie dziewiąte przybierze ze względu na czwarte i szóste postać następującą :

$$\mu[-C\xi+\frac{E_1}{A_1}\eta'+A_1^2-F_1]-1=H_1\mu,$$

a ztąd

$$\mu[-A_1C_1\xi+E_1\eta'+(A_1^2-F_1)A_1-H_1A_1]=A_1,$$

i nareszcie

(47) $$\mu=\frac{A_1}{-C_1A_1\xi+E_1\eta'+A_1(A_1^2-F_1-H_1)},$$

gdzie ilości ξ i η' zastąpione być winny wartościami obliczonemi w (46).

Uwzględniając warunki (42) i (43), napiszemy równanie (39) w następujący sposób :

(48) $$\varphi^2+2\varphi(A_1\,\mathrm{wst}\varphi+B_1\mathrm{dos}\varphi+C_1)+2A_1C_1\mathrm{wst}\varphi+2E_1\mathrm{dos}\varphi+F_1\mathrm{wst}^2\varphi+2A_1B_1\mathrm{wst}\varphi\,\mathrm{dos}\varphi+H_1=0. \quad \text{(IV)}$$

Rozwiązanie tego równania przy zresztą dowolnych współczynnikach, dla których wyraz $(B_1^2-A_1^2+F_1)$ nie niknie, odbywa się za pomocą przecięć cykloidy z krzywą drugiego rzędu posiadającą środek.

W celu bliższego oznaczenia tych dwóch krzywych mamy następujące wzory:

$$b = - A_1,$$

$$\xi = \frac{C_1(A_1^2 - F_1) - B_1E_1}{B_1^2 - A_1^2 + F_1},$$

$$\eta' = \frac{A_1(B_1C_1 - E_1)}{B_1^2 - A_1 + F_1},$$

$$\mu = \frac{A_1}{- C_1A_1\xi + E_1\eta' + A_1(A_1^2 - F_1 - H_1)},$$

(49) $$\mathfrak{A} = \mu,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{A_1^2 - F_1}{A_1^2}\mu,$$

$$\mathfrak{C} = \frac{B_1}{A_1}\mu;$$

(50) $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = AB = \frac{A_1^2 - F_1 - B_1^2}{A_1^2},$$

i nierówność $A_1^2 - F_1 - B_1^2 \gtrless$ wskazującą górnym znakiem na elipsę, dolnym zaś na hyperbolę.

Na podstawie obliczonych wartości $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, obliczymy, podług (36), ilości A, B, γ_1, γ_2 i otrzymamy dwie krzywe drugiego rzędu posiadające środek wspólny, zresztą do siebie przystające i różniące się tylko co do kierunku ich głównych osi o kąt 180°. Krzywa ta przecinająca cykloidę o cykloidalnym promieniu b dostarczy nam odpowiednich liczb łukowych przedstawiających pierwiastki rzetelne równania (IV).

W razie spełnienia warunku:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = AB = A_1^2 - B_1^2 - F_1 = 0,$$

mielibyśmy nieskończenie długą elipsę czyli tak zwaną parabolę.

Z tego względu wypada nam przystąpić do wyśledzenia równań, które dają się rozwiązywać za pomocą połączenia cykloidy z parabolą.

Równanie paraboli wysuniętej wierzchołkiem do punktu (ξ, η), nachylonej główną osią do osi xx' o kąt γ i posiadającej rozpiętość p, przedstawia się analitycznie w następującej postaci:

(51) $$[(y - \eta)\mathrm{dos}\gamma - (x - \xi)\,\mathrm{wst}\gamma]^2 - p[(y - \eta)\mathrm{wst}\gamma + (x - \xi)\mathrm{dos}\gamma] = 0;$$

kładąc w tem równaniu za x, y wartości wyrażone, na podstawie cykloidy (37), przez φ, otrzymamy, z uwagi na $\eta' = 1 - \eta$, następujące równanie warunkowe:

(52)
$$\mathrm{wst}^2\gamma\varphi^2 + \varphi[-2b\,\mathrm{wst}^2\gamma\,\mathrm{wst}\varphi + 2b\,\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma\,\mathrm{dos}\varphi - (p\,\mathrm{dos}\gamma + 2\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\eta' + 2\mathrm{wst}^2\gamma.\xi)] +$$
$$+ b\,\mathrm{wst}\varphi[p\,\mathrm{dos}\gamma + 2\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\eta' + 2\mathrm{wst}^2\gamma.\xi] + b\,\mathrm{dos}\varphi[p\,\mathrm{wst}\gamma - 2\mathrm{dos}^2\gamma.\eta' - 2\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma\ \xi] +$$
$$+ b^2\mathrm{wst}^2\varphi[\mathrm{wst}^2\gamma - \mathrm{dos}^2\gamma] - 2\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma\,b^2\,\mathrm{wst}\varphi\,\mathrm{dos}\varphi +$$
$$+ \{b^2\mathrm{dos}^2\gamma + [p\,\mathrm{dos}\gamma + \mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\eta' + \mathrm{wst}^2\gamma.\xi]\xi - [p\,\mathrm{wst}\gamma - \mathrm{dos}^2\gamma.\eta' - \mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\xi]\eta'\} = 0.$$

Widzimy ztąd, że i parabola połączona z cykloidą prowadzi do równania warunkowego w kształcie (39). Porównywając to równanie zrównaniem podanem w (39) pomnożonem przez μ, otrzymamy następujące związki:

$$
(53)\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{wst}^2\gamma &= \mu,\\
-2b\,\mathrm{wst}^2\gamma &= 2A_1\mu,\\
2b\,\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma &= 2B_1\mu,\\
-[p\,\mathrm{dos}\gamma + 2\,\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\eta' + 2\,\mathrm{wst}^2\gamma.\xi] &= 2C_1\mu,\\
b[p\,\mathrm{dos}\gamma + 2\,\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\eta' - 2\mathrm{wst}^2\gamma\,\xi] &= 2D_1\mu,\\
b[p\,\mathrm{wst}\gamma - 2\,\mathrm{dos}^2\gamma.\eta' - 2\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\xi] &= 2E_1\mu,\\
b^2[\mathrm{wst}^2\gamma - \mathrm{dos}^2\gamma] &= F_1\mu,\\
-2\,\mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.b^2 &= 2G_1\mu,
\end{aligned}
$$

$$b^2\,\mathrm{dos}^2\gamma + [p\,\mathrm{dos}\gamma + \mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\eta' + \mathrm{wst}^2\gamma.\xi]\xi - [p\,\mathrm{wst}\gamma - \mathrm{dos}^2\gamma.\eta' - \mathrm{wst}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma.\xi]\eta' = H_1\mu.$$

Tu stosownie dobranemi ilościami μ, p, ξ, η', γ, b, mamy spełnić dziewięć warunków w (53), co się tylko wtedy stać może, jeżeli te ilości, wyprowadzone na podstawie sześciu z owych warunków, uczynią zadość trzem pozostałym. I w tym więc razie współczynniki równania (39) nie mogą być uważane za niezależne między sobą.

Cel zatem wytknięty łączeniem paraboli z cykloidą możemy tylko wtedy osiągnąć, jeżeli założone równanie (39), ze względu na współczynniki, uczyni zadość pewnym poniżej bliżej oznaczonym warunkom.

Z pierwszego, drugiego i siódmego równania w (53) otrzymamy z łatwością:

$$
(54)\qquad
\begin{gathered}
\mathrm{wst}^2\gamma = \mu,\qquad b = -A_1,\qquad b^2(\mathrm{wst}^2\gamma - 1 + \mathrm{wst}^2\gamma) = b^2(2\mu - 1) = F_1\mu,\qquad \text{zatem}\\
\mu = \frac{A_1^2}{2A_1^2 - F_1};\qquad \mathrm{wst}\gamma = \frac{\pm A_1}{\sqrt{2A_1^2 - F_1}},\qquad \mathrm{dos}\gamma = \frac{\sqrt{A_1^2 - F_1}}{\sqrt{2A_1^2 - F_1}};\qquad b = -A_1.
\end{gathered}
$$

Te otrzymane wartości muszą czynić zadość trzeciemu i ósmemu warunkowi i prowadzą do następujących związków:

$$(55)\qquad B_1 = -\sqrt{A_1^2 - F_1},$$

$$(56)\qquad G_1 = -A_1\sqrt{A_1^2 - F_1}.$$

Dzieląc równanie piąte przez czwarte, będzie:

$$(57)\qquad \frac{D_1}{C_1} = -b = A_1.$$

Równania (55), (56) i (57) stanowią właśnie na wstępie zapowiedziane trzy warunki, którym współczynniki w (39) zadość uczynić muszą, jeżeli ma być mowa o rozwiązywaniu równania za pomocą przecięć między cykloidą i parabolą. Aby wobec spełnienia tych warunków rozwiązanie równania (39) rzeczywiście nastąpić mogło, wymaga się nadto, aby pozostałe równania piąte, szóste i dziewiąte prowadziły do pewnych i skończonych wartości na p, ξ i η'.

Z równania piątego i szóstego otrzymamy:

$$
(58)\qquad
\begin{aligned}
2\mu(D_1\xi - E_1\eta) &= pb(\xi\,\mathrm{dos}\gamma - \eta'\,\mathrm{wst}\gamma) + 2b(\xi\,\mathrm{wst}\gamma + \eta'\,\mathrm{dos}\gamma)^2,\\
2\mu(D_1\,\mathrm{wst}\gamma - E_1\,\mathrm{dos}\gamma) &= 2b(\xi\,\mathrm{wst}\gamma + \eta'\,\mathrm{dos}\gamma),
\end{aligned}
$$

a równanie dziewiąte można i tak napisać:

(59) $$bH_1\mu = pb(\xi\,\mathrm{dos}\gamma - \eta'\,\mathrm{wst}\gamma) + b(\xi\,\mathrm{wst}\gamma + \eta'\,\mathrm{dos}\gamma)^2 + b^3\,\mathrm{dos}^2\gamma.$$

Z pierwszego w (58) i równania (59) mamy

(60) $$2\mu\left(D_1\xi - E_1\eta - \frac{b}{2}H_1\right) = b(\xi\,\mathrm{wst}\gamma + \eta'\,\mathrm{dos}\gamma)^2 + b^3\,\mathrm{dos}^2\gamma.$$

Wstawiwszy w (60) wartość dwumianu $(\xi\,\mathrm{wst}\gamma + \eta'\,\mathrm{dos}\gamma)$ otrzymaną z drugiego równania w (58), mamy nareszcie:

(61) $$2\mu\left(D_1\xi - E_1\eta - \frac{b}{2}H_1\right) = \frac{\mu^2}{b}(D_1\,\mathrm{wst}\gamma - E_1\,\mathrm{dos}\gamma)^2 + b^3\,\mathrm{dos}^2\gamma,$$

Możemy tedy układ obejmujący równanie piąte, szóste i dziewiąte zastąpić następującym układem:

(62) $$\begin{cases} \xi\,\mathrm{wst}\gamma + \eta'\,\mathrm{dos}\gamma = \frac{\mu}{b}(D_1\,\mathrm{wst}\gamma - E_1\,\mathrm{dos}\gamma), \\ 2\mu D_1\xi - 2\mu E_1\eta' = \mu b H_1 + b^3\,\mathrm{dos}^2\gamma + \frac{\mu^2}{b}(D_1\,\mathrm{wst}\gamma - E_1\,\mathrm{dos}\gamma)^2. \\ p\,\mathrm{wst}\gamma = \frac{2E_1\mu}{b} + 2\,\mathrm{dos}^2\gamma\eta' + 2\,\mathrm{dos}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma\,.\,\xi. \end{cases}$$

Wstawiwszy w te równania wartości na μ, b, γ podane w (54), pozostaną w nich tylko ilości ξ, η, p jako niewiadome. Pierwsze dwa równania rozwiązane według ξ, η' dostarczą nam wartości na ξ i η', które wstawione w równanie trzecie prowadzą do wartości na p.

Warunki podane w (55), (56) i (57) mogą być napisane jak następuje:

(63) $$\begin{aligned} A_1^2 - B_1^2 - F_1 &= 0, \\ G_1 &= H_1B_1, \\ D_1 &= A_1C_1. \end{aligned}$$

Za uwzględnieniem tych warunków równanie (39) przybierze następującą postać:

(64) $$\varphi^2 + 2\varphi(A_1\,\mathrm{wst}\varphi + B_1\,\mathrm{dos}\varphi + C_1) + 2A_1C_1\,\mathrm{wst}\varphi + 2E_1\,\mathrm{dos}\varphi + \\ + (A_1^2 - B_1^2)\,\mathrm{wst}^2\varphi + 2A_1B_1\,\mathrm{wst}\varphi\,\mathrm{dos}\varphi + H_1 = 0. \qquad (V)$$

Rozwiązanie tego równania dla dowolnych A_1, B_1, C_1, E_1, H_1, odbywa się za pomocą przecięć paraboli z cykloidą, które ze względu na położenie i rozmiary obliczają się za pomocą następujących wzorów:

(65) $$\mu = \frac{A_1^2}{A_1^2 + B_1^2}, \quad \mathrm{wst}\gamma = \frac{\pm A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad \mathrm{dos}\gamma = \frac{\pm B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad b = -A_1;$$

(66) $$\begin{cases} \mathrm{wst}.\xi + \mathrm{dos}.\eta' = \frac{\mu}{b}[C_1A_1\,\mathrm{wst}\gamma - E_1\,\mathrm{dos}\gamma], \\ 2\mu A_1C_1\xi - 2\mu E_1\eta' = \mu b H_1 + b^3\,\mathrm{dos}^2\gamma + \frac{\mu^2}{b}(A_1C_1\,\mathrm{wst}\gamma - E_1\,\mathrm{dos}\gamma)^2, \\ p = \frac{2E_1\mu}{b\,\mathrm{wst}\gamma} + \frac{2\,\mathrm{dos}^2\gamma.\eta'}{\mathrm{wst}\gamma} + 2\,\mathrm{dos}\gamma.\xi. \end{cases}$$

Z wzorów (65) widzimy, że oś główna paraboli może zajmować cztery kierunki. Na podstawie każdego z tych kierunków oblicza się za pomocą pierwszych dwóch równań (66) położenie wierzchołka paraboli, aby ostatecznie za pomocą trzeciego równania w (66) dojść do wartości na p, stanowiącej rozpiętość tej paraboli. Każda z tych czterech parabol wskaże nam punktami spotkania się z cykloidą o promieniu $b = -A_1$ odpowiednie liczby łukowe, będące już pierwiastkami rzetelnemi równania założonego (V).

Warunki (63) są właśnie te same, których istnienie już się nam nasuwało przy rozpatrywaniu równania (IV), zalecając nam wzięcie pod szczególną uwagę przypadku połączenia paraboli z cykloidą i w następstwie ustanowienie rezultatów (65) i (66).

Celem rozwiązania równania

(67) $$\varphi = B\,\mathrm{wst}\,\varphi + B_0 + B_1 \mathrm{dos}\,\varphi + B_2 \mathrm{dos}^2\varphi + \ldots + B_n \mathrm{dos}^n\varphi, \qquad \text{(IV)}$$

szukajmy do cykloidy

(68) $$\varphi - B\,\mathrm{wst}\,\varphi = x, \qquad 1 - B\,\mathrm{dos}\,\varphi = y,$$

odpowiedniej krzywej, która punktami spotkania się z nią wskazuje pierwiastki rzetelne równania (67).

Rugując z równań (67) i (68) liczbę łukową φ, otrzymamy :

(69) $$x = B_0 + \frac{B_1}{B}(1-y) + \frac{B_2}{B^2}(1-y)^2 + \ldots + \frac{B_n}{B^n}(1-y)^n = f(\eta),$$

$$\eta = 1 - y.$$

Rozumiejąc pod $f_r(\eta)$ r-tą pochodnę funkcyi $f(\eta)$ możemy krzywe

$$\begin{aligned} x &= f_{n-2}(\eta), \\ x &= f_{n-3}(\eta), \\ x &= f_{n-4}(\eta), \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ x &= f_1(\eta), \\ x &= f(\eta), \end{aligned}$$

z których piewsza jest zwykłą parabolą a każda następna krzyw całkową ze względu na krzywę poprzedzającą — postępując sposobem w § 1 wyłożonym kolejn góry na dół przedstawić jako linije ciągłe, a dojdziemy ostatecznie do przedstawienia rysunkiem krzywej (69), która punktami spotkania się z cykloidą (68) wskaże liczby łukowe będące pierwiastkami rzetelnemi równania (67).

Na zakończenie tego paragrafu podajemy praktyczne rozwiązanie rysunkowe niektórych w tym paragrafie podanych typowych równań o współczynnikach liczbowych.

Mając równanie

(70) $$\varphi = 6'2\,\mathrm{wst}\,\varphi - [12\pi + 2'5] = 0, \qquad (1)$$

do rozwiązania, możemy uważać φ jako liczbę łukową należącą do przecięć cykloidy o cykloidalnym promieniu $b = 6'2$ z prostą równoległą do yy' przedstawioną równaniem $x = 12\pi + 2'5$, która zatem stoi prostopadle na podstawie cykloidy C_7 w oddaleniu $A_7V_7 = 2'5$. Przedstawmy sobie na rozpiętościach każdej cykloidy w oddaleniach

$$\ldots\ldots = A_{-3}V_{-3} = A_{-2}V_{-2} = A_{-1}V_{-1} = A_0V_0 = A_{+1}V_{+1} = A_{+2}V_{+2} = \ldots = 2'5,$$

wystawione prostopadle $\ldots V_{-3},\ V_{-2},\ V_{-1},\ V_0,\ V_{+1},\ Y_{+2},\ \ldots$ i przetnijmy owe prostopadłe

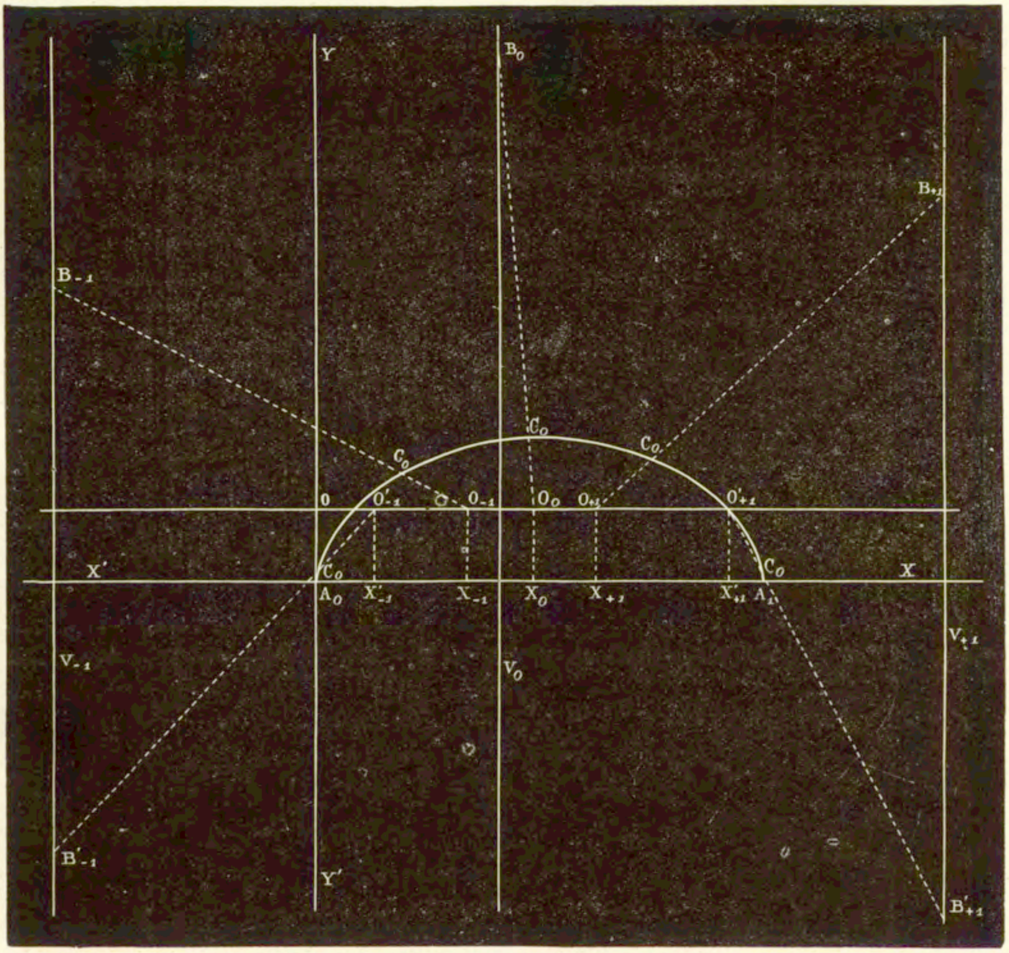

Fig. 18.

cykloidą C_0 o promieniu $b = 6'2$; pokaże się stosownie do powyższej figury, że cykloida C_0 może się zejść tylko z prostopadłemi V_{-1}, V_0. V_{+1}, a mianowicie :

$$(71)\qquad \begin{array}{llllll} C_0 & \text{zejdzie się z prostopadłą} & V_{-1} & \text{w punktach} & B_{-1},\ B'_{-1}, \\ » & » \quad » \qquad » & V_0 & \text{w punkcie} & B_0, \\ » & » \quad » \qquad » & V_{+1} & \text{w punktach} & B_{+1},\ B'_{+1}. \end{array}$$

Ponieważ właściwie wszystkie te punkta uważać winniśmy za punkta leżące na prostopadłej V_{+7}, dla tego musimy pierwsze dwa punkta odnieść do cykloidy C_{+8}, punkt B_0 do cykloidy C_{+7}, a punkta B_{+1} i B'_{+1} do cykloidy C_{+6}. Odpowiednie liczby łukowe przedstawiające rzetelne pierwiastki równania (40) wyrazimy następującemi długościami :

$$[\varphi_{-1}] = 8.2\pi + A_0 x_{-1}, \quad [\varphi'_{-1}] = 8.2\pi + A_0 x'_{-1},$$

(72) $$[\varphi_0] = 7.2\pi + A_0 x_0, \quad [\varphi_{+1}] = 6.2\pi + A_0 x_{+1}, \quad [\varphi'_{+1}] = 6.2\pi + A_0 x'_{+1}.$$

Te pięć wartości na φ przedstawione na podstawie pomiaru jednostką $A_0 0$ stanowić będą przybliżone wartości pierwiastków równania (70).

Celem rozwiązania równania

(73) $$13\varphi^2 + 2\varphi[-52\,\mathrm{wst}\varphi + 20\,\mathrm{dos}\varphi - 114] + 912\,\mathrm{wst}\varphi - 528\,\mathrm{dos}\varphi - 160\,\mathrm{wst}\varphi\,\mathrm{dos}\varphi + 1252 = 0, \quad \text{(II)}$$

mamy

$$A_1 = -\frac{52}{13}, \quad B_1 = \frac{20}{13}, \quad C_1 = -\frac{114}{13},$$

(74) $$D_1 = -\frac{456}{13}, \quad E_1 = -\frac{264}{13}, \quad F_1 = 0,$$

$$G_1 = -\frac{80}{13}, \quad H_1 = \frac{1252}{13}, \quad \text{i oraz}$$

(75) $$D_1 = C_1 A_1 = \frac{456}{13}, \quad G_1 = A_1 B_1 = \frac{-80}{13}, \quad A_1 - F_1^2 - B_1^2 > 0.$$

i wnosimy, że pierwiastki równania (70) mogą być przedstawione liczbami łukowemi należącemi do punktów przecięć stosownej cykloidy odpowiednią hyperbolę.

Rozmiary i położenia tych krzywych otrzymamy podług związków (49) :

$$\mathfrak{A} = 13\mu, \quad b = 4, \quad \mathfrak{C} = 5\mu, \quad \mathfrak{B} = 13\mu, \quad \gamma = 45^\circ,$$

(76) $$A + B = 26\mu, \quad A - B = -10\mu, \quad A : B = \frac{1}{9} : \frac{1}{4},$$

$$\eta' = 2, \quad \xi = 8, \quad \eta = -1, \quad \mu = \infty.$$

Z powodu $\mu = \infty$ hyperbola przedstawia się jako układ dwóch przecinających się prostych, które są ledwoniestycznemi hyperboli :

(77) $$\frac{(x-8)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1,$$

obróconej około swego środka tak, aby jej oś rzetelna z osią ox tworzyła kąt $\gamma = 45^\circ$.

Obrawszy A_0 za początek osi, przedstawiliśmy rzeczony układ ledwoniestycznych prostemi $(o)n$, om wychodzącemi z punktu o, którego współrzędne są $\xi = A_0\,o = 8$, $\eta = po = -1$. W odstępach 2π przesunięte są, równolegle do mo, proste przez punkta -5, -4, -3, -2, -1, $+1$, i również w takim samym odstępie równolegle do drugiej prostej $(o)n$ prosta (-1). Możemy zatem powiedzieć że prosta (-1) znajduje się względem cykloidy C_{-1} tak samo położona, jak prosta on względem C_0, i t. p. Na podstawie toczącego się koła o promieniu $= 1$ narysowaliśmy promieniem cykloidalnym wynoszącym 4 jedności cykloidę C_0 nad podstawą A_0A_1, która przecina rzeczony układ prostych równoległych -5, -4, -3, -2, -1, 0, $+1$, w punktach:

$$(70)\quad \begin{array}{l}(C_0,\ -5),\ (C_0,\ -4),\ (C_0,\ -3),\ (C_0,\ -2),\ (C_0,\ -1),\ (C_0,\ 0),\ (C_0,\ +1)\\ (C_0,\ -5)',\ (C_0,\ -4)',\ (C_0,\ -3)',\ (C_0,\ -2)',\ (C_0,\ -1)',\ (C_0,\ 0)',\end{array}$$

a proste *on* i (-1) w punktach:

$$[C_0,\ (0)],\ [C_0,\ (0)]',\ [C_0,\ (-1)].$$

Jeżeli jaka z tych prostych przecina cykloidę w dwóch punktach, oznaczamy tę okoliczność tym sposobem; punkt względnie po lewej stronie lub na dole leżący opatrujemy kreską u góry poprawej stronie.

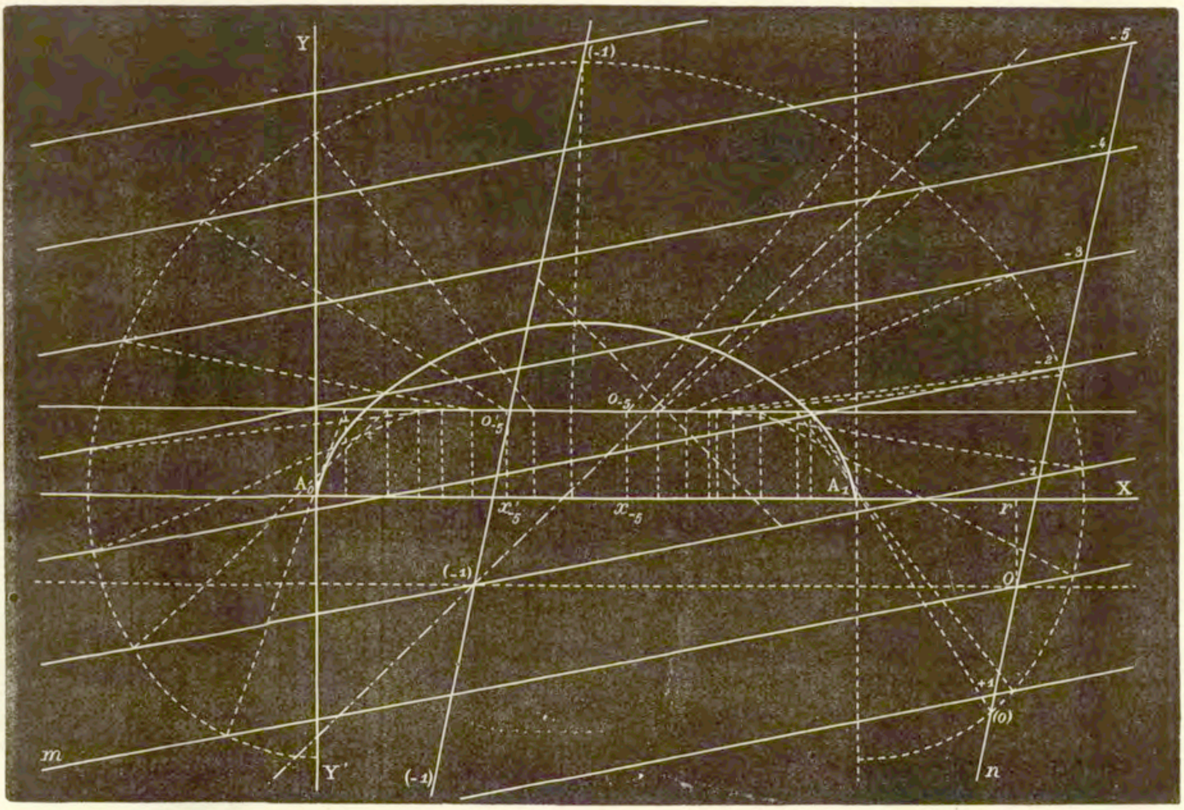

Fig. 19.

Do każdego z tych punktów jak np. do punktów $(C_0,\ -5)$, $(C_0,\ -5)'$ szuka się promieniem cykloidalnym $=4$, odpowiednich punktów środkowych O_{-5} i O'_{-5} i wyznacza się położenia x_{-5}, x'_{-5}. Długości A_0x_{-5}, $A_0x'_{-5}$ przedstawią nam długości łuków, wyrażających ilości toczenia się koła, odpowiadające punktom $(C_0,\ -5)$, $(C_0,\ -5)'$.

Nam właśnie chodzi o długości łukowe należące do punktów spotkania się prostych *om* i *on* z różnemi cykloidami; musimy zatem punkta np. $(C_0,\ -5)$, $(C_0,\ -5)'$ zamienić na punkta $(C_5,\ 0)$, $(C_5,\ 0)'$ dodając do znaczków po tyle jedności, ile potrzeba żeby znaczek drugi zamienił się na 0. To właśnie tu wyrażone dodawanie 5 jedności do znaczków wyraża, że punkta $(C_0,\ -5)$, $(C_0,\ -5)'$ mają być posunięte równolegle do A_0x o długość 5.2π.

Na tej podstawie wyrazimy pierwiastki równania (73) odpowiednio do punktów $(C_0, -5)$, $(C_0, -5)$, następującemi długościami łukowemi:

(80)
$$[x_{-5}] = 5.2\pi + A_0 x_{-5},$$
$$[x_{-5}]' = 5.2\pi + A_0 x'_{-5}.$$

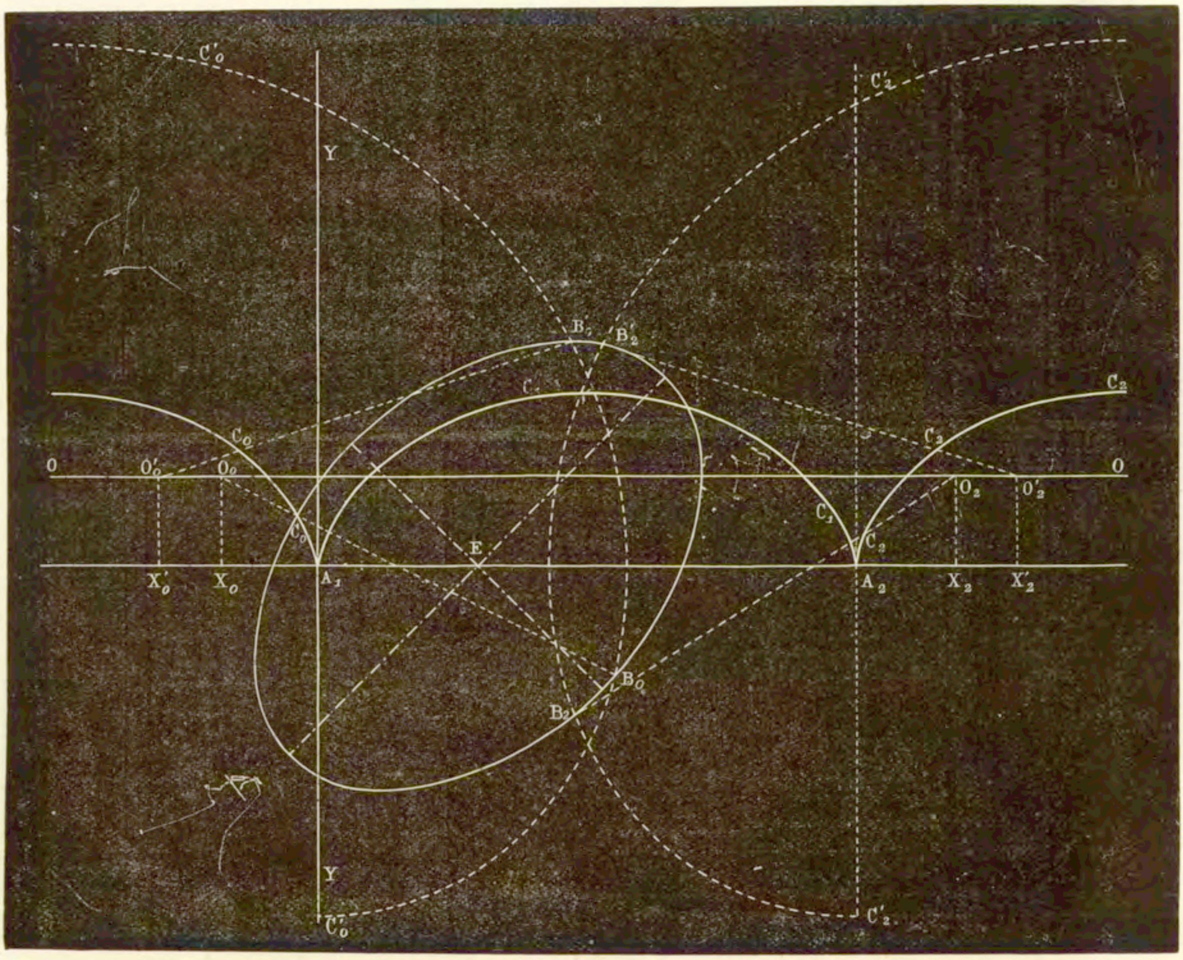

Fig. 20.

Podobnie otrzymamy odpowiednio do punktów $(C_0, -2)$, $(C_0, -2)'$, $(C_0, +1)$, $[C_0, (-1)]'$, $[C_0, (-1)]'$ następujące pierwiastki równania (73).

(81)
$$[x_{-2}] = 2.2\pi + A_0 x_2,$$
$$[x'_{-2}] = 2.2\pi + A_0 x'_{-2},$$
$$[x_{+1}] = -1.2\pi + A_0 x_{+1},$$
$$[x_{(-1)}] = 1.2\pi + A_0 x_{(-1)},$$
$$[x'_{(-1)}] = 1.2\pi + A_0 x'_{(-1)},$$

nadmieniając zarazem, że punkta po prawej stronie w tych równaniach przedstawione znaczkami x_{-2}, x'_{-2}, x_{+1}, $x_{(-1)}$, $x'_{(-1)}$ szukają się na figurze za pomocą promieni cykloidalnych prowadzących od punktów przecięcia do odpowiednich środków cykloidalnych.

Z powyższego tłomaczenia figury widać, że równanie (73) posiada 16 rzetelnych pierwiastków.

Celem rozwiązania równania

$$(82)\quad 13\varphi^2+2\varphi[-65\,\mathrm{wst}\varphi+25\,\mathrm{dos}\varphi-109]+1090\,\mathrm{wst}\varphi-530\,\mathrm{dos}\varphi-250\,\mathrm{wst}\varphi\,\mathrm{dos}\varphi+1178=0 \quad \text{(III)}$$

mamy

$$A_1=\frac{-65}{13},\quad B_1=\frac{25}{13},\quad C_1=\frac{-109}{13},$$

$$D_1=\frac{545}{13},\quad E_1=\frac{-265}{13},\quad F_1=0,$$

$$(83)\qquad G_1=\frac{-125}{13},\quad H_1=\frac{+1178}{13},$$

zarazem

$$D_1=C_1A_1=\frac{545}{13},\quad G_1=A_1B_1=\frac{-125}{13},\quad A_1^2-F_1-B_1^2>0,$$

i wnosimy, że pierwiastki równania (82) mogą być przedstawione liczbami łukowemi należącemi do punktów przecięcia stosownej cykloidy odpowiednio dobraną elipsą.

Rozmiary i położenie tych krzywych otrzymamy podług związków (49) jak następuje:

$$\mathfrak{A}=\mu,\quad b=5,\quad \mathfrak{C}=\frac{-5\mu}{13},\quad \mathfrak{B}=\mu,$$

a na oznaczenie punktu $(\xi\,\eta)$.

$$5\eta'+13\xi=109,\qquad 13\eta'+5\xi=53,$$

zatem

$$\eta'=1=1-\eta,\quad \xi=8,$$

i nareszcie

$$\mu=\frac{13}{72},$$

zatem

$$\mathfrak{A}=\frac{13}{72},\quad \mathfrak{B}=\frac{13}{72},\quad \mathfrak{C}=\frac{-5}{72},\quad b=5,\quad \xi=8,\quad \eta=0,$$

$$(85)\qquad A+B=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\frac{13}{36},\quad \mathfrak{A}-\mathfrak{B}=0=(A-B)\,\mathrm{dos}2\gamma,\quad 2\gamma=\frac{\pi}{2},\quad \gamma=\frac{\pi}{4},$$

$$(A-B)\,\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{2}=2\mathfrak{C}=\frac{-10}{72}=A-B,\qquad A=\frac{1}{a'^2}=\frac{1}{9},\quad B=\frac{1}{b'^2}=\frac{1}{4},\quad a'=3,\quad b'=2.$$

Na figurze 20tej uwidocznione są pasma cykloidalne C_0, C_1, C_2 o promieniu cykloidalnym $b=6$, nad podstawami A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_0 i A_3 wypadły one w lewo i prawo po za tłem rysunku.

Założywszy koło toczące się o promieniu $xo=1$ mamy:

$$A_0E=\xi=8=2\pi+A_1E.$$

Ze środka E nakreślono elipsę o pół-osiach $a'=3$, $b'=2$, gdzie oś a' z osią $x'x$ tworzy kąt 45°.

Punktom przecięcia B_0, B'_0, B_2, B'_2 odpowiadają w tym samym porządku następujące liczby łukowe :

$$
\begin{array}{lll}
\text{Do} & B_0 \ldots & \text{łuk} = A_0x_0 = 8 - x_0E = \varphi_0, \\
\text{»} & B'_0 \ldots & \text{»} = A_0x'_0 = 8 - x'_0E = \varphi'_0, \\
\text{»} & B_2 \ldots & \text{»} = A_0x_2 = 8 + Ex_2 = \varphi_2, \\
\text{»} & B'_2 \ldots & \text{»} = A_0x'_2 = 8 + Ex'_2 = \varphi'_2.
\end{array}
\tag{86}
$$

W miarę dokładności rysunku przedstawiają nam łuki :

$$\varphi_0, \quad \varphi'_0, \quad \varphi_2, \quad \varphi'_2,$$

przybliżone wartości rzetelnych pierwiastków równania (82).

§ 6.

O PRZYRZĄDACH KONOGRAFICZNYCH.

Te przyrządy służą do kreślenia krzywych rzędu drugiego, czyli tak zwanych przecięć stożkowych mianowicie elipsy, paraboli i hyperboli.

Przyrząd konograficzny składa się z trzech części mianowicie, z elipsografu, parabolografu i hyperbolografu.

I. — ELIPSOGRAF.

a. Zasada i opis elipsografu.

(1) Wykreślmy z punktu o pęk promieni $on = on' = on'' = b'$, tudzież $oA' = oA' = a$, przyzem $a \geqq b'$, a na prostolinijnym pasku papieru dd' zróbmy znaczki e', , t' w ten sposób, żeby było $t'e' = a$, $l'e' = b'$; poruszajmy następnie pasek papieru tak, iżby znaczek t' posuwał się naprostej nn', a znaczek l' naprostej $A'A$, to znaczek e' opisze wskutek tego ruchu krzywę zamkniętą przechodzącą przez punkta n, n', A i A', której środkiem jest punkt o. Okażemy, że krzywa opisana jest elipsą, dla której proste $A'A$, i nn' jako osie konstrukcyjne uważać należy.

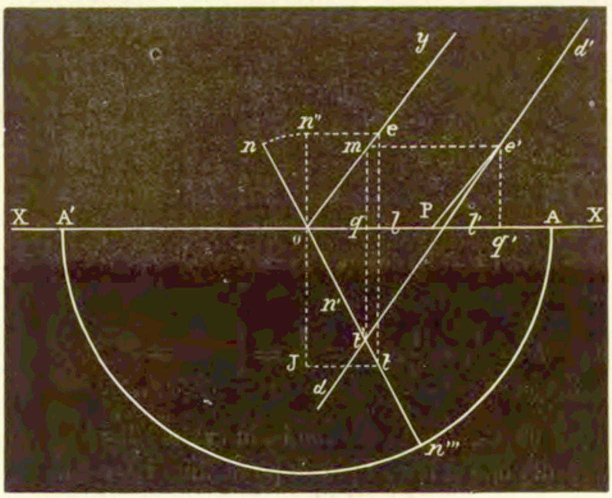

Fig. 21.

Jakoż wystawmy w punkcie o prostopadłę $n''J$ do $A'A$, i uczyńmy

$$on' = on'' = on = b, \quad n'' = a;$$

przesuńmy prostę $Jt \parallel A'A$ aż do przecięcia się z prostą nn'' i wystawmy prostokąt $n''Jte$. Biorąc oA i oe jako osie współrzędnych ox, oy, ałóżmy $x = oP$, $y = Pe' \parallel oe$, to otrzymamy z figury kreśląc $t'm \parallel n''J$:

$$\frac{qm}{le} = \frac{oq}{ol} = \frac{t'q}{tl} = \frac{t'q}{t'l'} = \frac{q'e}{l'e'} = \frac{q'e'}{le}, \tag{2}$$

zkąd wynika

(3) $$qm = q'e', \quad me' = qq' \quad \mathrm{P}q' = oq,$$

a zatem

$$x = o\mathrm{P} = qq' = me', \quad y = \mathrm{P}e' = om,$$

co daje kładąc $oe = b$:

(4) $$\frac{x}{a} = \frac{o\mathrm{P}}{t'e'} = \frac{me'}{t'e'}; \quad \frac{y}{b} = \frac{\mathrm{P}e'}{oe} = \frac{om}{oe} = \frac{t'q}{tl} = \frac{t'q}{t'l'} = \frac{q'e'}{e'l'} = \frac{t'm}{t'e'};$$

a więc

(5) $$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\overline{me'}^2 + \overline{t'm}^2}{\overline{t'e'}^2} = 1.$$

Ponieważ x i y są spółrzędnemi ruchomego punktu e', przeto okazuje się, że punkt e' opisze elipsę, której osiami sprzężonemi są proste $o\mathrm{A} = a$, i $oe = b$.

Elipsograf kreśli elipsę na zasadzie powyższej figury, przyczem mogą być dane bądź osie konstrukcyjne a i b', bądź osie sprzężone a i b. Jeżeli dane są osie sprzężone to należy przed ustawieniem elipsografu wykreślić zawsze osie konstrukcyjne, a dopiero płaszczyzna rysunku jest należycie przysposobiona do kreślenia elipsy.

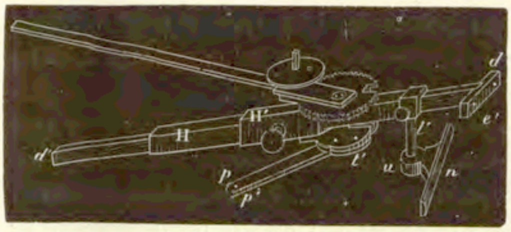

Fig. 22.

Drążek metalowy dd' przesuwalny w podwójnej pochwie, i zaopatrzony na drugim końcu w rysik e' wyobraża w elipsografie znaczkowany pasek papieru. Pochwa wewnętrzna H połączona jest na końcu z pionową osią l', przyśrubowaną jest do poziomej płyty u, opatrzonej płytką przesuwalną n. U spodu pochwy zewnętrznej H' znajduje się nóżka t' w kształcie podkowy, otwartej ku końcowi d, połączona z płytą p, tudzież z płytką przesuwalną p'; obie płytki p i p' dają się obracać około nóżki t'. Do stałego połączenia obydwóch pochewek H i H' służy śruba przyciskająca, za pomocą której żądana odległość $t'l'$ może być ustaloną.

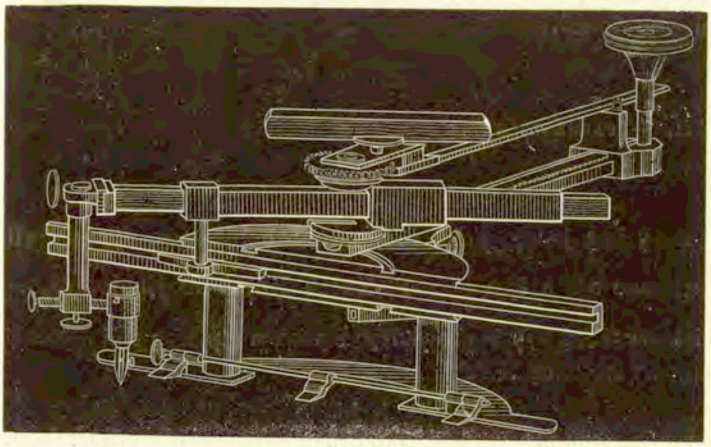
Fig. 23.

Powyżej opisany przyrząd, zwany cyrklem drążkowym, może być bądź za pomocą trybu zegarowego, bądź ręką w ruch wprawiony, przezco rysik e' obraca się około nóżki t'. Cyrkiel drążkowy należy tak ustawić, żeby stosownie do wymiarów elipsy było $t'e' = a$, $e't' = b'$. Płytka n jest przesuwalna w kierunku pierwszej, płytka zaś p w kierunku drugiej osi kostrukcyjnej. Do tego przesuwania służy tak zwana *podstawa kierownicza* (fig. 23 daje nam obraz podstawy kierowniczej, na której jest ustawiony cyrkiel drążkowy). Płytka n posuwa się w rurce pryzmatycznej, z boku wciętej, która przyśrubowana jest do płaskiej ściany metalowego odcinka koła i ustawiona być musi równolegle do pierwszej osi konstrukcyjnej. Do tego ustawienia służą trzy ruchome wskazówki przy nóżkach wycinka, które obracają się około wspólnej osi; wskazówki stawia się na płaszczyznę rysunku średnią na środek elipsy a dwie inne na pierwszą oś konstrukcyjną. Na powyższym wycinku spoczywa druga rurka pryzmatyczna, wcięta u góry, i dająca się obracać około środka wycinka, a tem samem w dowolnem ustalić położeniu. Na tej rurce znajduje się drążek zębaty, zazębiający się z kółkiem, które służy do przesuwania płytki p' w rurce. Swobodny koniec rurki zaopatrzony jest w nóżkę ze znaczkiem, który ustawia się na płaszczyznie rysunku na drugiej osi konstrukcyjnej, aby ruchowi płytki p' nadać odpowiedni kierunek. Wprowadziwszy płytką n do pierwszej rurki, a płytką p' do drugiej, otrzymujemy przedstawiony przyrząd do kreślenia elipsy zwany elipsografem.

b. Ustawienie elipsografu na płaszczyznie rysunku.

Wykreśliwszy z danego środka o, dwie osie konstrukcyjne a i b', stawiamy trzy dolne wzkazówki na pierwszą, a znaczek na nóżce górnej rurki kierującej na drugą oś; ustalamy obydwa położenia przez odpowiednie śrubki przyciskające; nadajemy cyrklowi drążkowemu kierunek drugiej osi b'; przesuwamy i ustalamy drążek w pochwie wewnętrznej H w takim położeniu, iżby rysik e' padł na punkt końcowy osi b'; nadajemy dalej cyrklowi drążkowemu kierunek pierwszej osi a, a na koniec przesuwamy i ustalamy go w pochwie zewnętrznej H$'$ w takiem położeniu, iżby rysik e' padł na punkt końcowy pierwszej osi a. Udzieliwszy cyrklowi pół obrotu, otrzymujemy jedną połowę żądanej elipsy, a drugą połowę nakreślimy przez odwrotne ustawienie i użycie przyrządu.

Jeżeli różnica osi jest znaczna, to najstosowniej użyć do poruszania rysika trybu ręcznego w górnej rurce, tudzież trybu zegarowego w cyrklu drążkowym, przez co nietylko kreślenie elipsy staje się jednostajnem, ale nadto elipsa jednostajnie wykropkowana być może. Jeżeli cyrkiel drążkowy zajmie podczas ruchu takie położenie, iż czyni z pierwszą osią konstrukcyjną kąt mało różniący się od prostego, to tryb zegarowy prawie wyłącznie ruch sprawia, tryb bowiem ręczny zwraca się w takich miejscach, i jest z tego powodu prawie nieruchomy. To położenie cyrkla zachodzi zawsze w chwili przejścia rysika e' przez punkt końcowy osi sprzężonej b. Przy małej różnicy osi możnaby cyrkiel wprawiać w ruch bez pomocy trybów.

Powyższy elipsograf pozwala wykreślać elipsy o dowolnych stosunkach osi w granicach od zera do 60 cm. długości, a od zera do 40 cm. szerokości.

II. — PARABOLOGRAF.

a. Zasada i opis parabolografu.

(6) Dla wykreślić się mającej paraboli dany jest jeden punkt o na tej paraboli leżący, styczna oB w tym punkcie, tudzież ognisko F, wyznaczone odcinkiem $\frac{s}{4} = o\text{F}$. Z tych danych otrzymujemy normalnę NN w punkcie o, kierunek ogniskowy Ff, kąt γ, a prowadząc z punktu o prostę pod kątem γ po drugiej stronie prostej NN, otrzymujemy średnicę XX$'$.

(7) Prostę OB uważać będziemy jako pierwszą, średnicę zaś XX$'$ jako drugą oś konstrukcyjną paraboli.

Przenieśmy pęk promieni OA, OL, ON, OB, który oznaczymy symbolem (O, ABLN) na wycinek papieru przezroczystego tym sposobem, iżby ramiona l'A$'$ i l'B$'$ krawędzi prostej tego wycinka przedstawiały promień podwójny OA, OB, a proste l'L$'$ i l'N$'$ odpowiadały promieniom OL i ON, to otrzymamy tym sposobem przenośny pęk promieni (l', A$'$B$'$L$'$N$'$) o wierzchołku l'. Posuwajmy ten pęk tak na płaszczyznie rysunku, iżby wierzchołek l' posuwał się po prostej AB, a promień l'L przechodził ciągle przez ognisko F, to w każdym położeniu wycinka otrzymamy na ruchomej krawędzi A′B′ odcinek l'J, zawarty między obiema osiami konstrukcyjnemi, a odcinając tę długość l'J po przeciwnej stronie wierzchołka l', wyznaczymy punkt M żądanej paraboli. Jakoż niechaj będzie :

$$\varphi = \sphericalangle\, oFl' = Al'A',$$

to widocznie

$$\sphericalangle\, Jol' = \sphericalangle\, l'oF = \gamma + 90^\circ,$$

a przeto trójkąty Jol' i $l'o$F są podobne, z czego wynika proporcya

$$oJ : ol' = ol' : oF.$$

Biorąc układ osi spółrzędnych oxy, połóżmy :

$$x = oP = oJ, \quad y = PM = 2.ol',$$

to powyższa proporcya daje

(8) $$x : \frac{y}{2} = \frac{y}{2} : \frac{s}{4} \quad \text{a zatem} \quad y^2 = sx;$$

z czego się okazuje, że punkt M opisuje rzeczywiście żądaną parabolę.

Poruszając tym sposobem ruchomy pęk promieni, iżby wierzchołek l' posuwał się w kierunku

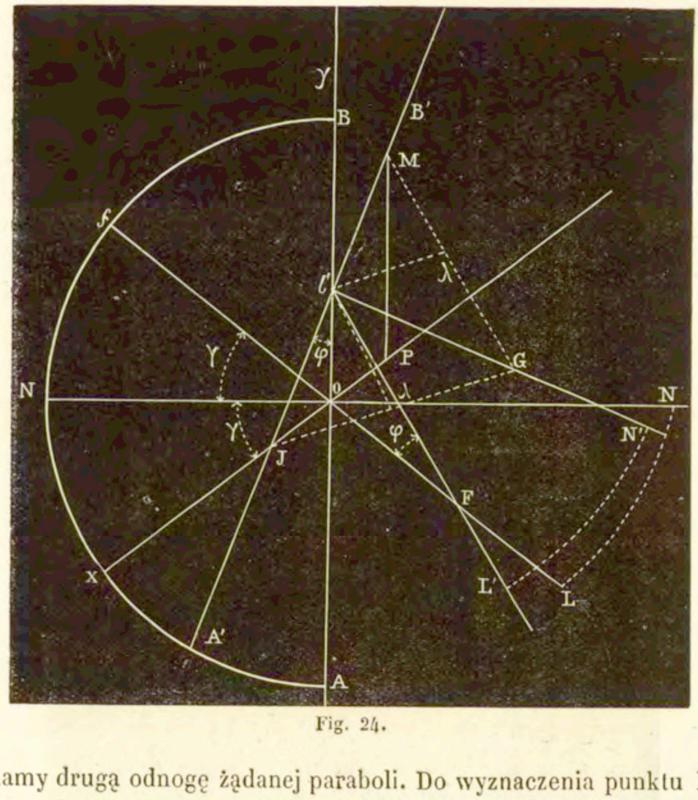

Fig. 24.

od o ku A, otrzymamy drugą odnogę żądanej paraboli. Do wyznaczenia punktu M służy tak zwany *dwójsiecznik* (bissector), który w powyższej figurze oznaczony jest jako układ prostych JλG, Mλ′lλ.

Dwójsiecznik składa się z dwóch cyrklów JGM i λlλ′, z których pierwszy posiada dwa razy tak długie ramiona, jak drugi, a końce ramion cyrkla mniejszego obracają się około środków ramion cyrkla większego. Przy każdym otworze dwójsiecznika wierzchołek l' cyrkla mniejszego połowi wzajemną odległość końców ramion większego. Nóżki na końcach ramion cyrkla większego mają kształt podkowy, przez co układają się spółśrodkowo z osią l' przy zamknięciu dwójsiecznika, a około każdej z nóżek obraca się płaska łapka. W główce G dwójsiecznika, znajduje się tryb zegarowy, za pomocą którego dwójsiecznik wedle potrzeby otwiera się lub zamyka. Prosta łącząca środki nóżek dwójsiecznika wyobraża promień podwójny $l'A'$, $l'B'$ przenośnego pęku promieni; główka cyrkla mniejszego wyobraża wierzchołek pęku (l', $A'B'L'N'$) a główka G cyrkla większego posuwa się na prostej $l'N'$. Parę promieni $l'L'$ i $l'N'$ wyobrażają dwie pryzmatyczne rurki, leżące jedna na drugiej i dające się obracać około osi l'. Górna rurka wcięta jest u góry, dolna zaś na powierzchni dolnej. Pionowe nóżki obydwóch rurek spoczywają w rynewkach, które umieszczone są w płycie kołowej, spoczywającej na płaszczyznie rysunku, a każda nóżka może być za pomocą muterki przyciskającej w takim położeniu na płycie ustaloną, iżby rurki czyniły żądany wycinek kołowy odpowiadający kątowi γ. Osadzając główkę mniejszego cyrkla dwójsiecznika na osi l' wycinka kołowego, a nóżkę główki G w rynewce górnej rurki, otrzymujemy *regulator* ruchu do opisywania paraboli. Około osi l' tego regulatora daje się obracać płytka, mająca się przesuwać zawsze równolegle do pierwszej osi konstrukcyjnej. Pod dolną rurką regulatora znajduje się tak zwany drążek ogniskowy, obracający się około kolca ogniskowego, który osadzony jest w płytce, przesuwającej się w rynewce tej dolnej rurki. Podczas kreślenia paraboli nóżka drążka ogniskowego spoczywa na płaszczyznie rysunku, a znaczek na tej nóżce ustawia się w kierunku ogniskowym na punkt, który licząc od punktu *o* znajduje się o dwa centymetry dalej, niż prawdziwe ognisko.

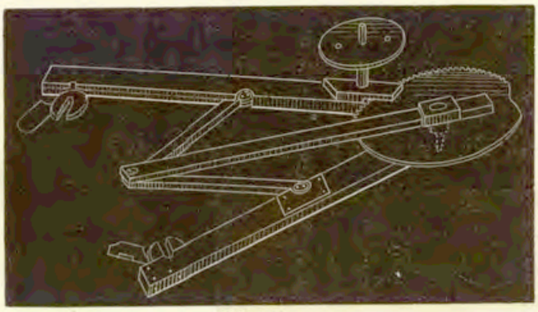

Fig. 25.

Opisany powyżej regulator paraboliczny wyobraża przenośny pęk promieni, o którem była mowa.

Na ubocznej figurze mamy obraz dwójsiecznika przedstawiony w perspektywie w formacie pomniejszonym.

Podstawa kierownicza jest ta sama, co dla elipsografu, z tą tylko różnicą, iż nie używa się cyrkla

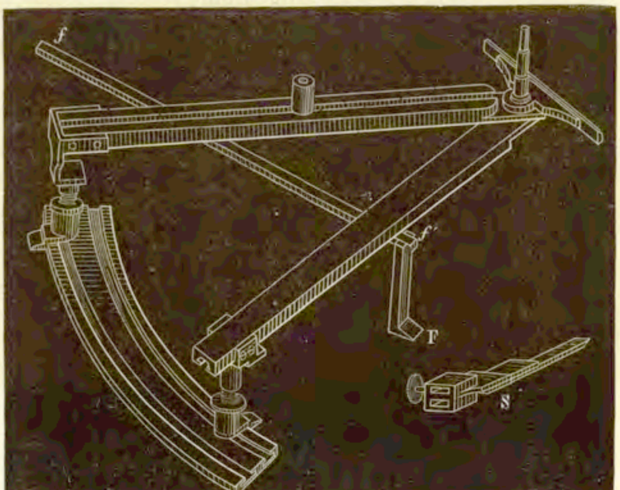

Fig. 26.

drążkowego, lecz regulatora parabolicznego (fig. 26), który w następujący sposób łączy się z podstawą kierowniczą: Drążek ogniskowy wsuwa się i ustala w pochewce ogniskowej, umieszczonej u spodu podstawy kierowniczej, a w górną rurkę wprowadza się suwak S o dwóch pochewkach. Według potrzeby wprowadza się i ustala łapkę jednej z nóżek dwójsiecznika w odpowiedniej pochewce powyższego suwaka, a swobodną nóżkę dwójsiecznika zaopatruje się w rysik, i tym sposobem parabolograf przygotowany jest do użytku. Tryb zębaty w górnej rurce łączy się z powyżej opisanym suwakiem, a obrót tego trybu wprawia nóżkę dwójsiecznika w stosowny ruch wzdłuż górnej rurki.

b. Ustawienie parabolografu na płaszczyznie rysunku.

Jakiekolwiek elementa paraboli byłyby dane, zawsze należy z nich wyszukać ognisko, jeden punkt *o* i styczną w tym punkcie — a ztąd wyjdzie bezpośrednio normalna i kierunek ogniskowy. W tym celu uważamy punkt *o* jako środek konstrukcyi; bocznej rurce podstawy kierowniczej nadajemy kierunek pierwszej, górnej zaś rurce kierunek drugiej osi konstrukcyjnej. Przy zamkniętym dwójsieczniku dajemy górnej rynewce wycinka regulatora kierunek normalnej, posługując się przytem znaczkiem na tym wycinku; wprowadzamy drążek ogniskowy w odpowiednią pochewkę i dajemy mu kierunek ogniskowy. Znaczek F na nóżce drążka ogniskowego wysuwa się przytem w kierunku ogniska o dwa centymetry przed prawdziwe ognisko. Ustaliwszy jeszcze jednę nóżkę dwójsiecznika w górnym suwaku, a nóżkę swobodną zaopatrzywszy w rysik, wprawiamy ręką tryb zębaty w ruch, równocześnie zaś luzujemy tryb zegarowy, przez co ramiona dwójsiecznika zaczynają się roztwierać. Z początku należy regulatorowi nadać mały obrot aby pokonać opór w punkcie martwym. Opisawszy jednę odnogę paraboli, wprowadza się drugą nóżkę dwójsiecznika w suwak, a pierwszą zaopatruje się w rysik, aby tym sposobem drugą odnogę paraboli otrzymać.

Jeżeli żąda się dłuższych odnóg paraboli, to kreśli się parabolę, poczynając od tej stycznej, która jest prostopadła do kierunku ogniskowego, a następnie obiera się dalszą styczną jako nową oś konstrukcyjną. W tym celu najdogodniej użyć tej stycznej, która z kierunkiem ogniskowym czyni kąt 45°. Odpowiedni tej stycznej punkt styczności otrzymamy, przecinając parabolę cięciwą, wystawioną w ognisku prostopadle do drugiej osi konstrukcyjnej.

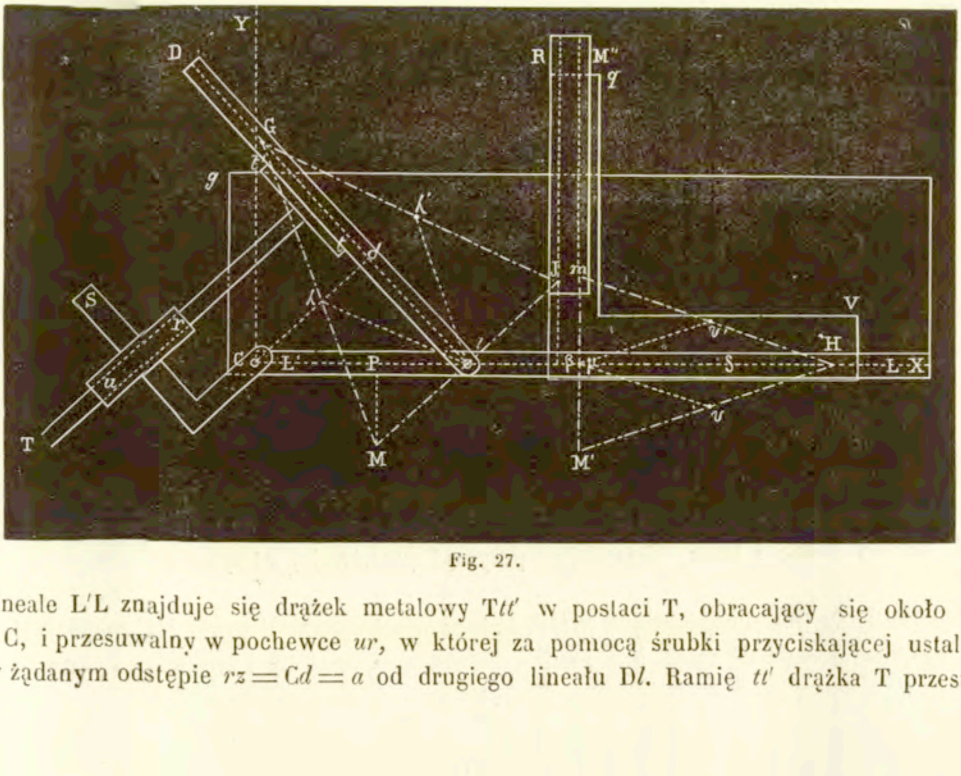

Fig. 27.

Na lineale L'L znajduje się drążek metalowy T*tt'* w postaci T, obracający się około punktu stałego C, i przesuwalny w pochewce *ur*, w której za pomocą śrubki przyciskającej ustalony być może w żądanym odstępie $rz = Cd = a$ od drugiego linealu D*l*. Ramię *tt'* drążka T przesuwa się

Łatwo ztąd zrozumieć, że płytka kołowa K odbywać musi ruch dokładnego toczenia się, jeżeli suwak W wprawiamy w ruch wzdłuż górnej rynewki Ł.

U spodu płyty K przytwierdzona jest pryzmatyczna rurka służąca do utwierdzania w dowolnej żądanej długości drążka *d* opatrzonego na wolnym końcu w rysik P, który stosownie do przyjętej długości drążka *d* opisywać będzie odpowiednią cykloidę, podczas podłużnego ruchu suwaka W.

Do utrzymania płytki K w położeniu poziomem służą jeszcze dwa kółka toczące się wzdłuż tej samej rynewki, w której się odbywa toczenie się kółka *r*. Te kółka są obracalnie przytwierdzone do pionowych osi na ramionach tak zwanych, za pomocą sprężyny otwierających się, nożyczek, utwierdzonych na pionowej osi u końca belki B. Zamykając za pomocą ściskania wspomnianych nożyczek wychodzą kółka z rynewki, a płyta K może być uwolniona od związku z belką B i ławeczką Ł.

OMYŁKI DRUKARSKIE (spostrzeżone).

Strona	*wiersz*	*zamiast*	*powinno być.*
1	11 od góry	Korespondent	Korespondent towarzystwa
2	20 »	$\overset{x_1}{\underset{x}{Q}}$	$\overset{x_1}{\underset{0}{Q}}$
4	4 od dołu	w §§ 3. 5. 6 zawierające	paragrafami 2. 3. 5. 6; zawierającymi
7	9 »	$u = X + iYF(u) = 0$	$F(u) = F(x + iY) = 0$
11	10 o góry	$\underset{v}{F_s}\ \underset{v}{F_{s+1}}$	$F_s \cdot F_{s+1}$
23	14 »	Q_{ay}	$Q_{a'y}$
23	2 od dołu	ζ	ζ_r
40	9 od góry	$Z(Z_2)$	(Z_2)
48	14 od dołu	η''	η''_n
47	3 i 4 »	$'$	$_1$
47	5 »	$''$	$'''$
47	15 od góry	$y' - \tau\eta''$	$y' - \eta'''$
67	6 »	a	r
68	19 »	$\alpha'^3 \mathrm{sty}\varphi' < a$	$\alpha'^3 \mathrm{sty}\varphi' = \alpha'^4 < a$
68	16 »	α^5	α^3
68	15 »	$U_r = \alpha'$	$U_r = \alpha$
68	14 od góry	ma'	mr'
72	1 od dołu	b, y	$b_1 y$
83	10 »	$x^2{}_2 x_1$	$x^2{}_3 x_1$
88	2 »	$(-1)^{\frac{m}{3}}$	$(-1)^{\frac{m}{2}}$
