Zofji Mizgierówny

„WIEDZA MATEMATYCZNA"
ZBIÓR DZIEŁ Z DZIEDZINY MATEMATYKI CZYSTEJ I STOSOWANEJ WYDAWANY PRZEZ
S. KWIETNIEWSKIEGO, S. STRASZEWICZA I W. WOJTOWICZA.

G. H. HARDY, M. A., F. R. S.
PROF. UNIWERSYTETU W CAMBRIDGE.

WYKŁADY ELEMENTARNE Z DZIEDZINY ANALIZY.

PRZEŁOŻYŁ
WŁ. WOJTOWICZ.

Z zapomogi Kasy Pomocy dla osób pracujących na polu naukowem
im. D-ra Józefa Mianowskiego.

WARSZAWA 1916.
Skład główny w księgarni E. Wendego i S-ki.

Drukarnia Naukowa, miasto stoł. Warszawa, Rynek Starego Miasta 11.

Książka niniejsza jest przekładem dzieła: *A course of pure mathematics* by G. H. Hardy. Pozwoliłem sobie zmienić tytuł książki, zupełnie zrozumiały dla studenta angielskiego, ale nic nie mówiący czytelnikowi polskiemu. Przekład był już częściowo wydrukowany, gdy ukazało się nowe, znacznie zmienione i rozszerzone wydanie oryginału. Chcąc uwzględnić wszystkie poprawki, jakie Autor do nowego wydania wprowadził, musiałem przedrukować kilka pierwszych arkuszy przekładu, co spowodowało podwójną paginację w arkuszu 2-im.

Z przedmowy autora do I wydania.

Książka niniejsza jest przeznaczona dla słuchaczów I roku... Mam nadzieję, że może się ona przydać innym czytelnikom, ale pisałem ją dla studentów matematyki... Z rozdziału IV starałem się uczynić jeden z głównych działów książki. Pojęcie granicy przedstawia trudności nawet dla zdolnych studentów. W ciągu ostatnich ośmiu czy dziewięciu lat brałem udział w przygotowaniu wielu z pośród najzdolniejszych kandydatów, jacy stawali do egzaminów: „Mathematical Tripos"; rzadko spotykałem śród nich takich, którzy byli w stanie z taką samą pewnością rozwiązywać dość proste zagadnienia, dotyczące granic, ciągłości i t. p., z jaką przystępowali do zagadnień o wiele trudniejszych, ale mających inny charakter... Nie mogę uwierzyć, żeby temu winna była wyłącznie natura samego zagadnienia. Niewątpliwie pojęcia granicy i t. p. zawierają pewne trudności, ale trudności te nie są większe od tych, które młody matematyk przezwycięża w każdym innym dziale swej nauki. Winien tu nie przedmiot, lecz książka i nauczyciel. Jeżeli nauczyciel chce w tym dziale wpoić uczniowi poprawne pojęcia, nie może on poprzestać na ścisłym wykładzie: nie wystarcza powiedzieć prawdę, trzeba wyłożyć ją szczegółowo i dobitnie... Kierując się temi względami, poświęciłem wiele miejsca najbardziej elementarnym pojęciom, związanym z granicą; byłem rozmyślnie drobiazgowy tam, gdzie chodziło o rzeczy zasadnicze; ilustrowałem je mnóstwem przykładów i napisałem pięćdziesiąt stronic, nie posuwając się poza szereg gieometryczny...

Rozdziały IX i X poświęciłem teorji funkcji logarytmicznej i wykładniczej, przyczym punktem wyjścia było dla mnie określenie logarytmu jako całki. Właściwie do napisania tej książki skłoniła mnie pierwotnie chęć podania elementarnego wykładu tej właśnie teorji; wybierając materjał do poprzednich rozdziałów, uwzględniałem głównie to, co mi było potrzebne do dwuch ostatnich rozdziałów.

Uważam tę książkę za zupełnie elementarną. Czytelnik znajdzie tu pewną ilość trudnych zadań (przeważnie w końcu każdego rozdziału): dodałem do nich wskazówki, dotyczące metody rozwiązania. Natomiast starałem się, o ile możności, unikać trudnych pojęć: nie posługuję się np. pojęciem zbieżności jednostajnej, nie wprowadzam szeregów podwójnych, iloczynów nieskończonych, nie dowodzę ogólnych twierdzeń o odwracalności działań granicznych... W dwuch ostatnich rozdziałach wypadło mi w kilku miejscach całkować szereg potęgowy, poprzestałem jednak na najprostszych przykładach i w każdym poszczególnym przypadku przeprowadziłem szczegółowe badanie...

Przykłady do rozwiązania, podawane w środku rozdziału, składają się albo z bezpośrednich zastosowań poprzednio dowiedzionych twierdzeń, albo z zagadnień teoretycznych, których nie mogłem włączyć do właściwego tekstu. Śród nich są ważne twierdzenia, do których odwołuję się w dalszych rozdziałach...

Wszędzie kładłem nacisk na te strony przedmiotu, które nie są, moim zdaniem, dostatecznie uwydatnione w innych podręcznikach, natomiast bardziej pobieżnie traktowałem zagadnienia, które gdzieindziej są należycie uwzględnione. Kierowałem się myślą, że książką niniejszą prawdopodobnie posługiwać się będą *obok* innych podręczników...

Idąc za przykładem p.p. Leathema i Bromwicha, piszę wszędzie

$$\lim_{x\to\infty},\quad \lim_{n\to\infty},\quad \lim_{x\to a}$$

zamiast powszechnie używanych symbolów $\lim_{x=\infty}$, $\lim_{n=\infty}$, $\lim_{x=a}$. Ta zmiana wydaje mi się bardzo ważną, szczególnie tam, gdzie chodzi o „dążenie do nieskończoności”. Sądzę, że symbole „$n=\infty$, $x=\infty$”, jakkolwiek dogodne na wyższym poziomie, w wykładzie początkowym mogą prowadzić tylko do gmatwania zasadniczych pojęć Analizy...

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

O zmiennych rzeczywistych.

ROZDZIAŁ II.

O funkcjach zmiennej rzeczywistej.

ROZDZIAŁ III.

O liczbach zespolonych.

ROZDZIAŁ IV.

O granicach funkcji zmiennej całkowitej dodatniej.

ROZDZIAŁ V.

O granicach funkcji zmiennej ciągłej. O funkcjach ciągłych i nieciągłych.

ROZDZIAŁ VI.

O pochodnych i całkach.

ROZDZIAŁ VII.

Dalsze twierdzenia z rachunku różniczkowego i całkowego.

ROZDZIAŁ VIII.

O zbieżności szeregów nieskończonych i całek nieskończonych.

ROZDZIAŁ IX.

O funkcjach logarytmicznych i wykładniczych zmiennej rzeczywistej.

ROZDZIAŁ X

Ogólna teorja funkcji logarytmicznej, wykładniczej oraz funkcji kołowych.

ROZDZIAŁ I.

O ZMIENNYCH RZECZYWISTYCH.

1. Liczby wymierne. Ułamek $r=p/q$, w którym p i q są liczbami całkowitemi, dodatniemi lub ujemnemi, nazywamy liczbą wymierną. Możemy założyć, (1) że p i q nie mają spólnych czynników, gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy skrócić ułamek p/q; (2) że q jest liczbą dodatnią, gdyż

$$\frac{p}{-q}=\frac{-p}{q}; \quad \text{a} \quad \frac{-p}{-q}=\frac{p}{q}.$$

Do określonych w ten sposób liczb wymiernych możemy dołączyć „liczbę wymierną 0", którą otrzymujemy, kładąc w naszym ułamku $p=0$.

Przypuszczamy, że czytelnik zna arytmetykę liczb wymiernych.

1a. Przedstawianie liczb wymiernych za pomocą punktów na prostej. Ilustracje gieometryczne bywają bardzo pożyteczne w wielu zagadnieniach analizy matematycznej. Posługując się w ten sposób obrazami gieometrycznemi, nie zakładamy żadnej zależności analizy od gieometrji: obrazy gieometryczne służą nam tylko do pojaśnienia wykładu, dowodu zaś wcale na nich nie opieramy. Wobec tego nie mamy potrzeby zajmować się teraz analizą logiczną pojęć gieometrji elementarnej: możemy przypuścić, że czytelnik wie, co oznaczają pojęcia linji prostej, odcinka prostej i długości odcinka.

Na prostej nieograniczonej L obieramy dowolny odcinek A_0A_1. Punkt A_0 nazywamy punktem początkowym lub zerowym (punktem 0), A_1 zaś nazywamy punktem 1.

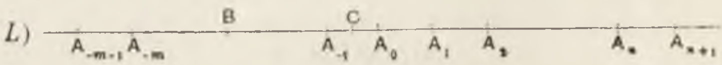
Na prostej L wyznaczamy dalej ciąg punktów

$$\ldots\ldots A_{-m-1},\ A_{-m},\ \ldots\ldots,\ A_{-1},\ A_0,\ A_1,\ \ldots\ldots,\ A_n,\ \ldots\ldots$$

w taki sposób, żeby było

$$\ldots\ldots = A_{-m-1}A_{-m} = \ldots\ldots = A_{-1}A_0 = A_0A_1 = \ldots\ldots,$$

przyczym wszystkie odcinki odmierzamy na prostej L od strony lewej ku prawej.



Rys. 1.

Wobec tego musi zachodzić równość

$$\frac{A_0A_n}{A_0A_1} = n \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią.

Umówimy się, że każdą d ł u g o ś ć będziemy uważali za w i e l k o ś ć, k t ó r e j m o ż n a p r z y p i s a ć z n a k, a mianowicie znak dodatni, jeżeli długość została zmierzona w jednym zwrocie prostej L (np. w zwrocie od B do C), znak zaś ujemny — jeżeli została ona zmierzona w zwrocie przeciwnym (np. od C do B). Wskutek tej umowy musi być $BC = -CB$. Przypuśćmy, iż zwrot od lewej strony ku prawej uważać będziemy za dodatni.

W takim razie

$$\frac{A_0A_{-n}}{A_0A_1} = -\frac{A_{-n}A_0}{A_0A_1} = -n\,.$$

Widzimy tedy, że na mocy przyjętej przez nas umowy możemy uważać równanie (1) za słuszne niezależnie od tego, czy liczba całkowita n jest dodatnia czy ujemna.

Chcąc uniknąć wyjątków, umawiamy się dalej, iż równanie (1) będzie miało sens nawet wówczas, gdy $n=0$. A mianowicie założymy, że

$$\frac{A_0A_0}{A_0A_1} = 0\,.$$

Innemi słowy, umawiamy się, że np. BB, który, właściwie mówiąc, nie jest wcale odcinkiem, będziemy uważali za odcinek o długości zero.

Weźmy teraz pod uwagę dowolny ułamek dodatni nieskracalny, np. p/q, gdzie p i q są to liczby całkowite, względem siebie pierwsze, i przypuśćmy, iż $p < q$. Podzielmy odcinek A_0A_1 na q równych części, punkty zaś podziału oznaczmy przez

$$A_0, A_{1/q}, A_{2/q}, \ldots, A_{p/q}, \ldots A_{(q-1)/q}, A_1.$$

Oczywista rzecz, iż

$$\frac{A_0A_{p/q}}{A_0A_1}=\frac{p}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Mamy tedy na prostej L punkty, odpowiadające wszystkim ułamkom właściwym p/q.

Każdy ułamek niewłaściwy dodatni możemy przedstawić w postaci $n+(p/q)$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, a p/q ułamkiem właściwym. Jeśli obierzemy punkt $A_{n+(p/q)}$ tak, by było $A_nA_{n+(p/q)}=A_0A_{p/q}$, wówczas musi być

$$\frac{A_0A_{n+(p/q)}}{A_0A_1}=n+\frac{p}{q}.$$

Jeśli więc w powyższy sposób wyznaczymy punkty $A_{n+(p/q)}$, odpowiadające wszelkim możliwym wartościom dodatnim całkowitym na n, p i q, wówczas każdej liczbie dodatniej f (całkowitej lub ułamkowej) odpowiadać będzie punkt A_f taki, iż

$$\frac{A_0A_f}{A_0A_1}=f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wreszcie, jeżeli $-f$ jest dowolnym ułamkiem ujemnym (właściwym lub niewłaściwym), obieramy taki punkt A_{-f}, by było $A_{-f}A_0=A_0A_f$, czyli

$$\frac{A_0A_{-f}}{A_0A_1}=-\frac{A_0A_f}{A_0A_1}=-f.$$

Z powyższego widzimy, że d l a k a ż d e j l i c z b y c a ł k o w i t e j l u b u ł a m k o w e j r, c z y t o d o d a t n i e j c z y u j e m n e j, m o ż e m y w y z n a c z y ć o d p o w i a d a j ą c y j e j o d c i n e k A_r, tj. taki odcinek, żeby zachodziła równość

$$\frac{A_0A_r}{A_0A_1}=r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Jeżeli odcinek $A_0 A_1$ obierzemy jako jednostkę długości, tak iż $A_0 A_1 = 1$, wówczas poprzednie równanie przybierze postać

$$A_0 A_r = r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Określenie. *Punktami wymiernemi prostej nazywamy wszystkie punkty A_r prostej L, które odpowiadają liczbom wymiernym na mocy poprzednio wyłożonej konstrukcji.*

Przykłady I. 1. Jeżeli r, s są liczbami wymiernemi, wówczas $r+s$, $r-s$, rs i r/s są również liczbami wymiernemi. Wyjątek stanowi tylko przypadek, gdy w symbolu r/s mamy $s=0$; w tym przypadku symbol r/s nie ma żadnego sensu.

2. Jeżeli P i Q są punktami wymiernemi i jeżeli odcinek PQ podzieliliśmy na dowolną ilość równych części, wówczas każdy punkt podziału jest punktem wymiernym.

3. Jeżeli λ, m, n są liczbami wymiernemi dodatniemi, wówczas $\lambda(m^2-n^2)$, $2\lambda mn$, $\lambda(m^2+n^2)$ są również liczbami wymiernemi dodatniemi. Oprzeć na tym twierdzeniu wyznaczenie dowolnej ilości trójkątów prostokątnych, w których długości wszystkich boków wyrażałyby się zapomocą liczb wymiernych.

4. Każdy ułamek dziesiętny skończony jest liczbą wymierną, której mianownik nie zawiera innych czynników prócz 2 i 5. I odwrotnie: każda tego rodzaju liczba wymierna da się wyrazić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego.

[Ogólną teorję ułamków dziesiętnych rozważać będziemy w rozdziale IV].

5. Liczby wymierne dodatnie możemy ustawić w następujący ciąg:

$$\tfrac{1}{1};\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{3}{1},\ \tfrac{2}{2},\ \tfrac{1}{3};\ \tfrac{4}{1},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4};\ \ldots$$

Dowieść, że ułamek p/q zajmuje w tym ciągu miejsce $[\frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2)+q]$-te.

W powyższym ciągu każda liczba wymierna powtarza się nieograniczoną ilość razy. Np. liczba 1 występuje jako $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, ... Moglibyśmy usunąć z ciągu wszystkie liczby, które już poprzednio w tym ciągu występowały w prostszej postaci: np. pozostawilibyśmy liczbę $\frac{1}{1}$, wyrzucilibyśmy natomiast liczby $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$... Ale w takim razie wyznaczenie miejsca, które w tym ciągu zajmuje liczba p/q, byłoby trudniejsze.

2. Liczby niewymierne. Jeśli czytelnik zechce wyznaczyć na prostej wszystkie punkty, odpowiadające liczbom wymiernym o mianownikach 1, 2, 3..., przekona się z łatwością, iż prostą może pokryć dowolnie gęsto punktami wymiernemi. Spostrzeżenie to możemy wyrazić ściślej w postaci twierdzenia: *mając dany na prostej L dowolny odcinek BC, możemy na tym odcinku wyznaczyć dowolną ilość punktów wymiernych.*

Jakoż przypuśćmy np., iż BC zawiera się w odcinku A_1A_2. Jak wiadomo, możemy znaleźć taką liczbę całkowitą dodatnią k, by zachodziła nierówność

$$k \,.\, BC > A_1A_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)^{*)}$$

Jeśli więc podzielimy A_1A_2 na k równych części, przynajmniej jeden z punktów podziału (powiedzmy punkt P) musi upaść w e w n ą t r z odcinka BC, czyli musi należeć do BC, nie zlewając się ani z punktem B, ani z C. Gdyby bowiem tak nie było, wówczas cały odcinek BC musiałby zawierać się w jednej z owych k części, na które podzieliliśmy A_1A_2, co przeczy nierówności (1). Tak więc przynajmniej jeden punkt wymierny P leży pomiędzy B i C. Ale w taki sam sposób możemy wyznaczyć punkt wymierny Q, leżący między B i P, dalej punkt wymierny R, leżący między B i Q, i t. d., nieograniczenie, czyli możemy wyznaczyć na BC dowolną ilość punktów wymiernych. Możemy wysłowić to inaczej, mówiąc, że BC zawiera n i e s k o ń c z e n i e w i e l e punktów wymiernych**).

Opierając się na tych rozważaniach, czytelnik mógłby z łatwością dojść do wniosku, że k a ż d y p u n k t na prostej jest wymierny. Niewątpliwie, gdybyśmy wyobrazili sobie prostą, jako złożoną wyłącznie z punktów wymiernych, t. j. gdybyśmy w myśli usunęli z prostej wszystkie inne punkty (o ile takowe istnieją), wówczas otrzymalibyśmy figurę, posiadającą wiele takich własności, jakie zdrowy rozsądek przypisuje prostej.

A jednak przy bliższym badaniu okazuje się, że taki punkt widzenia nie da się utrzymać, gdyż uwikłałby nas w wiele trudności.

Spójrzmy na tę sprawę ze stanowiska zdrowego rozsądku i weźmy pod uwagę własności, które prosta powinna posiadać, jeżeli ma odpowiadać pojęciu, jakie wytworzyliśmy sobie o niej w gieometrji elementarnej.

---

*) Jest to równoważne założeniu t. zw. postulatu Archimedesa.

**) Znaczenie zwrotu „n i e s k o ń c z e n i e w i e l e“ objaśnimy szczegółowo w rozdziale IV. Na razie wystarczy zaznaczyć, że zdanie: „BC zawiera nieskończenie wiele punktów wymiernych“ oznacza poprostu: „na odcinku BC możemy znaleźć d o w o l n ą i l o ś ć p u n k t ó w wymiernych“. Żadnego innego znaczenia nie należy przywiązywać do tego zdania.

Z tego punktu widzenia prosta musi składać się z punktów, a każdy odcinek — ze wszystkich punktów, leżących między jego końcami. Z każdym odcinkiem musi być związana pewna d ł u g o ś ć, która musi być wielkością, dającą się z m i e r z y ć, w y r a z i ć l i c z b o w o za pomocą dowolnej jednostki długości. Te długości powinny być tego rodzaju, by można je było łączyć z sobą za pomocą dodawania i mnożenia, i to zgodnie z zwykłemi regułami algiebry. Następnie, powinno być rzeczą możliwą zbudowanie odcinka, równego sumie lub iloczynowi jakichkolwiek dwu danych odcinków. Jeżeli długość odcinka PQ równa się a, długość zaś odcinka QR, leżącego na tej samej prostej, równa się b, wówczas długość odcinka PR powinna równać się $a+b$. Dalej, jeżeli długości odcinków OP, OQ, leżących na jednej prostej, równają się odpowiednio 1 i a, długość zaś odcinka OR, leżącego na innej prostej, równa się b, i jeżeli za pomocą znanej konstrukcji zbudujemy odcinek OS, czwarty proporcjonalny do OP, OQ, OR, wówczas jego długość powinna równać się ab, t. j. algiebraicznej czwartej proporcjonalnej do 1, a, b. Rzecz oczywista, że określone w ten sposób sumy i iloczyny odcinków winny podlegać zwykłym prawom algiebraicznym (prawu przemienności, łączności itd.), czyli prawom, które wyrażamy symbolicznie, pisząc

$$a+b=b+a; \quad a+(b+c)=(a+b)+c; \quad ab=ba \quad \text{i t. d.}$$

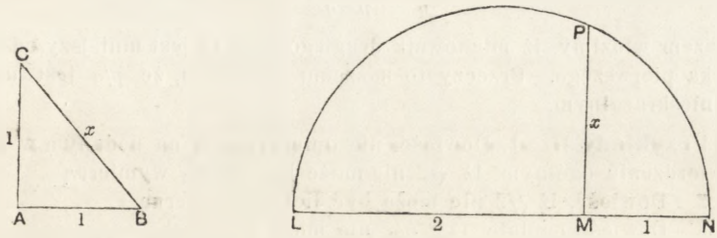
Długości odcinków powinny również podlegać pewnym prawom, dotyczącym n i e r ó w n o ś c i. Jeżeli np. A, B, C są trzema punktami, leżącemi na prostej L w wymienionym porządku od lewej ku prawej stronie, wówczas powinno być $AB < AC$ itd. Wreszcie, jakikolwiek odcinek byłby dany czy to na prostej L, czy na innej jakiej prostej, trzeba, żebyśmy mogli wyznaczyć na L taki punkt P, iżby A_0P równał się odcinkowi danemu.

Otóż różnemi elementarnemi sposobami możemy zbudować odcinek o takiej długości x, żeby było $x^2=2$. Możemy np. zbudować trójkąt prostokątny równoramienny ABC taki, żeby było $AB=AC=1$; jeżeli $BC=x$, wówczas $x^2=2$. Albo też możemy wyznaczyć długość x za pomocą znanej konstrukcji, jako średnią proporcjonalną długości 1 i 2.

Tak więc na prostej L musi istnieć punkt P taki, iż

$$A_0P = x, \text{ przyczym } x^2 = 2.$$

Łatwo jednak przekonać się, iż niema liczby wymiernej, której kwadrat równałby się 2. Można nawet posunąć się o krok dalej i powiedzieć: jeżeli m/n jest ułamkiem dodatnim nieskracalnym, liczby zaś m i n nie są obie



Rys. 2.

kwadratami zupełnemi, wówczas niema liczby wymiernej, której kwadrat równałby się m/n.

Istotnie, przypuśćmy, jeśli to możliwe, iż

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{m}{n},$$

przyczym p jest liczbą pierwszą względem q, zaś m — liczbą pierwszą względem n.

Wówczas musi być

$$np^2 = mq^2.$$

Liczba np^2 musi być podzielna przez każdy dzielnik liczby q^2, że zaś p i q są względem siebie pierwsze, zatym n musi być podzielne przez każdy dzielnik liczby q^2. W takim razie musi być $n = \lambda q^2$, gdzie λ jest liczbą całkowitą. Ale wówczas musi być również $m = \lambda p^2$, że zaś m i n są względem siebie pierwsze, zatym $\lambda = 1$, czyli musi być $m = p^2$, $n = q^2$, c.b.d.d.

Tak więc musimy założyć istnienie liczby x i odpowiadającego jej punktu P, który nie należy do zbudowanych poprzednio punktów wymiernych, a przytym jest taki, iż $A_0P = x$ oraz $x^2 = 2$. Ten ostatni warunek możemy napisać w postaci $x = \sqrt{2}$. Jeżeli Q jest takim punktem, że $QA_0 = A_0P$, wówczas $A_0Q = -\sqrt{2}$.

Możemy podać inny dowód na to, że kwadrat liczby wymiernej nie może równać się 2.

Przypuśćmy, jeśli to możliwe, iż p/q jest ułamkiem dodatnim nieskracalnym i że $(p/q)^2=2$, czyli że $p^2=2q^2$. W takim razie musi być słuszne równanie $(2q-p)^2=2(p-q)^2$, czyli ułamek $(2q-p)/(p-q)$ musi posiadać taką samą własność, jak ułamek p/q. Ale rzecz jasna, że $q<p<2q$, skąd $p-q<q$. W ten sposób mamy dwa ułamki, które powinny być sobie równe, mianowicie powinno być

$$\frac{p}{q}=\frac{2q-p}{p-q},$$

a zarazem widzimy, iż mianownik drugiego ułamka jest mniejszy od mianownika pierwszego. Przeczy to naszemu założeniu, że p/q jest ułamkiem nieskracalnym.

Przykłady II. 1. Dowieść, nie opierając się na podanym w tekście twierdzeniu ogólnym, iż $\sqrt{2}$ nie może być liczbą wymierną

2. Dowieść, iż $\sqrt[3]{2}$ nie może być liczbą wymierną.

3. Dowieść ogólnie, iż $\sqrt[3]{p/q}$ nie może być liczbą wymierną, jeżeli p/q jest ułamkiem nieskracalnym i jeżeli p i q nie są sześcianami zupełnemi.

4. Pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitej musi być albo liczbą całkowitą, albo liczbą niewymierną (t. j. nie może być ułamkiem wymiernym).

[Przypuśćmy, jeśli to możliwe, że $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, gdzie p, q są to liczby całkowite, względem siebie pierwsze. W takim razie $nq^2=p^2$, zatym n musi być podzielne przez p^2, gdyż p i q nie mają spólnych czynników. Innemi słowy, musi być $n=\lambda p^2$, gdzie λ jest liczbą całkowitą, czyli $\lambda q^2=1$, skąd wynika, że $\lambda=1$, $q=1$, $n=p^2$, a więc $\sqrt{n}=p$].

5. Gauss dowiódł ogólniejszego twierdzenia:
równanie algiebraiczne o spółczynnikach całkowitych

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0$$

nie może mieć pierwiastków wymiernych, które nie byłyby liczbami całkowitemi.

[Jakoż przypuśćmy, że nasze równanie posiada pierwiastek a/b, gdzie a, b są liczbami całkowitemi, nie mającemi spólnych czynników, b zaś jest nadto liczbą dodatnią. Podstawiając do równania a/b zamiast x i mnożąc przez b^{n-1}, mamy

$$-\frac{a^n}{b}=p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+\ldots+p_nb^{n-1}.$$

Otrzymaliśmy tedy ułamek nieskracalny równy liczbie całkowitej, co jest niedorzecznością. Wobec tego musi być $b=1$, pierwiastkiem zaś równania musi być a. Rzecz oczywista, iż p_n jest podzielne przez a].

6. Dowieść, że jeżeli $p_n=1$ i jeżeli ani $1+p_1+p_2+p_3+\ldots$, ani też $1-p_1+p_2-p_3+\ldots$ nie równają się zeru, wówczas równanie nie może mieć pierwiastka wymiernego.

7. Wyznaczyć pierwiastki wymierne (o ile takowe istnieją) równania

$$x^4-4x^3-8x^2+13x+10=0.$$

[Pierwiastki te mogą być li tylko liczbami całkowitemi, a mianowicie mogą się równać tylko ±1, ±2, ±5, ±10. Pozostaje sprawdzić, czy liczby te są istotnie pierwiastkami danego równania. Rzecz jasna, że w ten sposób możemy wyznaczyć pierwiastki wymierne każdego równania tego kształtu.]

2a. Liczby niewymierne *(ciąg dalszy).* Przedstawienie gieometryczne liczb wymiernych nasunęło nam myśl, że należałoby rozszerzyć nasze pojęcie „liczby" przez wprowadzenie nowego rodzaju liczb.

Do tego samego wniosku można dojść na innej drodze, nie odwołując się do obrazów gieometrycznych. Do najważniejszych zagadnień algiebry należy rozwiązywanie równań. Otóż weźmy dwa równania:

$$x^2=1\,, \quad x^2=2\,.$$

Pierwsze posiada dwa pierwiastki wymierne, mianowicie $+1$ i -1. Jeśli jednak pojęcie „liczby" ma być ograniczone do liczb wymiernych, musimy powiedzieć, że drugie równanie nie posiada wcale pierwiastków. To samo wypadłoby, oczywiście, powiedzieć o równaniach $x^3=2$, $x^4=7$ itp. Tak więc rozszerzenie pojęcia „liczby" byłoby wielce pożądane; pozostaje zbadać, czy da się ono osiągnąć.

Powróćmy do równania $x^2=2$. Widzieliśmy, że niema liczby wymiernej x, któraby czyniła zadość temu równaniu. Kwadrat każdej liczby wymiernej jest albo większy, albo mniejszy od 2. Możemy tedy podzielić wszystkie liczby wymierne na dwie klasy: na liczby, których kwadraty są mniejsze od 2, i na takie, których kwadraty są od 2 większe. Nazwijmy pierwszą z nich *klasą* T, albo *klasą niższą*, drugą zaś *klasą* U, albo *klasą wyższą*. Rzecz jasna, że każda liczba klasy U jest większa od każdej liczby klasy T. Prócz tego, możemy znaleźć w klasie T taką liczbę, której kwadrat, jakkolwiek mniejszy od 2, różni się jednak dowolnie mało od 2. Jeśli np. zastosujemy znany sposób wyciągania pierwiastka kwadratowego, otrzymamy ciąg liczb wymiernych

$$1, \quad 1{\cdot}4, \quad 1{\cdot}41, \quad 1{\cdot}414, \quad 1{\cdot}4142, \ldots$$

których kwadraty

$$1,\quad 1{\cdot}96,\quad 1{\cdot}9881,\quad 1{\cdot}999396,\quad 1{\cdot}99996164, \ldots$$

są wszystkie mniejsze od 2, lecz coraz mniej różnią się od 2. Obliczając dostateczną ilość znaków dziesiętnych, możemy zbliżyć się do liczby 2 tak, jak się nam podoba. Tak samo w klasie U możemy znaleźć liczby, których kwadraty, jakkolwiek większe od 2, różnią się jednak dowolnie mało od 2. W tym celu wystarczy w pierwszym ciągu zwiększyć o 1 ostatnią cyfrę każdej liczby; otrzymamy ciąg liczb

$$2,\quad 1{\cdot}5,\quad 1{\cdot}42,\quad 1{\cdot}415,\quad 1{\cdot}4143, \ldots$$

których kwadraty

$$4,\quad 2{\cdot}25,\quad 2{\cdot}0164,\quad 2{\cdot}002225,\quad 2{\cdot}00024449, \ldots$$

są wszystkie większe od 2, lecz mogą dowolnie mało różnić się od 2.

Powyższe rozumowanie może wydawać się przekonywującym, nie ma jednak cechy ścisłego dowodu, jakiego wymaga matematyka nowożytna.

Dowód tego twierdzenia opiera się na fakcie, że *każda* liczba wymierna należy bądź do jednej klasy, bądź do drugiej. Niech będzie a dowolna liczba klasy T, oraz b dowolna liczba klasy U. Załóżmy, że n jest liczbą całkowitą dodatnią, i weźmy pod uwagę zbiór liczb

$$a,\ a+\frac{b-a}{n},\quad a+\frac{2(b-a)}{n},\quad a+\frac{3(b-a)}{n}, \ldots a+\frac{(n-1)(b-a)}{n},\ b.$$

Każda z tych liczb jest wymierna i każda należy albo do T, albo do U. Niech będzie $a+\frac{r(b-a)}{n}$ — *ostatnia* liczba tego zbioru, należąca do T; w takim razie liczba $a+\frac{(r+1)(b-a)}{n}$ musi należeć do klasy U. W ten sposób znaleźliśmy dwie liczby: jedną, należącą do klasy T, drugą, należącą do klasy U, przytym takie, że ich różnica równa się $\frac{b-a}{n}$. Dając na liczbę n dostatecznie wielkie wartości, możemy ten ułamek uczynić tak małym, jak się nam podoba.

Łatwo teraz dowieść, że w klasie T można znaleźć taką liczbę x, a w klasie U taką liczbę y, że zarówno x^2 jak y^2 dowolnie mało różnią się od 2. Przypuśćmy np., iż chcemy, aby te dwa kwadraty różniły się od 2 mniej, niż o ε. (Liczba ε jest dowolna: może to być 0·1, albo 0·001, albo 0·000001 i t. d.). Na mocy poprzedniego twierdzenia, możemy dobrać liczby x i y tak, by zachodziła nierówność

$$y-x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

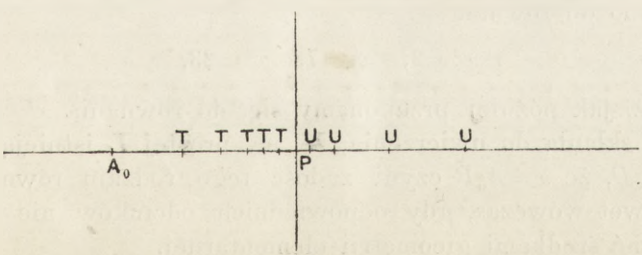
Ponieważ $x^2<2$, zatym musi być $x<2$; możemy też założyć, że $y\leqq 2$, gdyby bowiem y było większe od 2, moglibyśmy zastąpić je przez 2. W takim razie

$$y^2-x^2=(y-x)(y+x)<4(y-x)<\varepsilon,$$

ponieważ zaś $y^2>2$, a $x^2<2$, zatym tym bardziej muszą być mniejsze od ε obie liczby $2-x^2$ i y^2-2.

Wynika stąd, że w klasie T niema liczby największej, w klasie zaś U niema najmniejszej liczby. Istotnie, jeżeli jakakolwiek liczba x należy do klasy T, musi być $x^2<2$. Niech będzie $x^2=2-\varepsilon$. Możemy znaleźć w klasie T taką liczbę x_1, że x_1^2 różni się od 2 mniej niż o ε, że zatym $x_1^2>x^2$ czyli $x_1>x$. Tak więc w klasie T istnieją liczby większe od x, że zaś x jest dowolną liczbą tej klasy, zatym w klasie T nie istnieje największa liczba. W taki sam sposób dowodzimy, że w klasie U nie istnieje najmniejsza liczba.

2b. Liczby niewymierne *(ciąg dalszy)*. Podzieliliśmy wszystkie liczby wymierne na dwie klasy T, U, które posiadają następujące własności: (1) każda liczba klasy U jest większa od każdej liczby klasy T; (2) możemy znaleźć dwie liczby dowolnie mało różniące się od siebie, a przytym takie, że jedna z nich należy do klasy T, druga do U; (3) w klasie T nie istnieje największa liczba, w klasie zaś U nie istnieje najmniejsza.



Rys. 3.

Zarówno intuicyjne pojęcie linji prostej, jak potrzeby elementarnej gieometrji i algiebry wymagają, byśmy założyli, że *istnieje liczba x większa od wszystkich liczb klasy T*

i mniejsza od wszystkich liczb klasy U i, że na prostej L istnieje punkt P, odpowiadający tej liczbie x i oddzielający te punkty prostej L, które odpowiadają liczbom klasy T, od punktów, odpowiadających na tej prostej liczbom klasy U.

Przypuśćmy na chwilę, że taka liczba x istnieje i że możemy wykonywać na niej działania według zwykłych praw arytmetycznych, czyli że np. wyrażenie x^2 ma znaczenie w zupełności określone. Jeżeli postawimy taką hipotezę, łatwo można będzie dowieść, że x^2 nie może być ani większe, ani mniejsze od 2. Istotnie, niech będzie np. $x^2 < 2$. Z poprzedniego rozumowania wynika, że możemy znaleźć taką liczbę ζ, że ζ^2 zawiera się między x^2 a 2. Innemi słowami: możemy znaleźć w klasie T liczbę większą od x, co przeczy naszemu założeniu, że x oddziela liczby klasy T od liczb klasy U. Tak więc x^2 nie może być mniejsze od 2. W taki sam sposób dowodzimy, że x^2 nie może być większe od 2. Dochodzimy do wniosku, że wobec przyjętej przez nas hipotezy musi być $x^2=2$, co możemy wyrazić też symbolem $x=\sqrt{2}$. Rzecz jasna, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, gdyż dowiedliśmy, że niema liczby wymiernej, której kwadrat równałby się 2. Mamy tu najprostszy przykład t. zw. **liczby niewymiernej.**

Poprzednie rozumowania dadzą się zastosować niemal dosłownie do innych jeszcze równań, np. do równania $x^2=N$, gdzie N jest liczbą całkowitą, lecz nie jest kwadratem zupełnym, albo do równań

$$x^3=2, \quad x^3=7, \quad x^4=23,$$

albo też, jak później przekonamy się, do równania $x^3=3x+8$. To nas skłania do uwierzenia, że na prostej L istnieją takie punkty P, że $x=A_0P$ czyni zadość tego rodzaju równaniom, i to nawet wówczas, gdy odpowiednich odcinków nie można zbudować środkami gieometrji elementarnej.

Czytelnik niewątpliwie pamięta, że w algiebrze elementarnej oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{q}$ pierwiastek równania $x^n=q$ i że symbolom

$$n^{p/q} \quad \text{oraz} \quad n^{-p/q}$$

nadajemy znaczenie za pomocą równań

$$n^{p/q}=\sqrt[q]{n^p} \quad \text{oraz} \quad n^{p/q}\cdot n^{-p/q}=1.$$

Na mocy tych definicji, „prawa wykładników“ w rodzaju

$$n^r \times n^s = n^{r+s}, \quad (n^r)^s = n^{rs}$$

rozszerzamy na przypadek, gdy r i s są dowolnemi liczbami wymiernemi.

Teraz otwierają się przed nami dwie dalsze drogi. Możemy poprostu założyć, że istnieją „liczby niewymierne" w rodzaju $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$... i że wolno postępować z niemi według ogólnych praw algiebry. Ale takie naiwne stanowisko nie odpowiada wymaganiom matematyki spółczesnej, wobec czego musimy obrać drugą drogę, mianowicie poddać dokładniejszemu badaniu samo pojęcie liczby wymiernej i na podstawie tego badania uogólnić pojęcie „liczby". Uczynimy to w następnych paragrafach i radzimy czytelnikowi, aby uważnie teorję tę przestudjował.

Przykłady III. 1. Dowieść, że jeżeli m/n jest przybliżoną wartością pierwiastka $\sqrt{2}$, wówczas $(m+2n)/(m+n)$ jeszcze mniej różni się od $\sqrt{2}$, i że jeżeli $m/n > \sqrt{2}$, wówczas $(m+2n)/(m+n) < \sqrt{2}$. Oprzeć na tym twierdzeniu sposób wyznaczania przybliżonych wartości dowolnego pierwiastka kwadratowego.

2. Jeżeli liczby x i y są przybliżonemi wartościami pierwiastka $\sqrt{2}$, jedna z nadmiarem, druga z niedomiarem, i jeżeli $2-x^2<\varepsilon$ oraz $y^2-2<\varepsilon$, wówczas $y-x<\varepsilon$.

3. Równaniu $x^2=4$ czyni zadość wartość $x=2$. Zbadać, czy rozumowanie poprzedniego paragrafu da się zastosować do tego równania.

[Klasy T, U określamy jak poprzednio. Czy zawierają one *wszystkie* liczby wymierne? Czy istnieje *punkt podziału* P i, jeżeli istnieje, czy jest to punkt wymierny czy niewymierny?].

3. Liczby niewymierne *(ciąg dalszy)*. W § 2-im mieliśmy do czynienia z pewnym podziałem liczb wymiernych dodatnich x na dwie klasy, mianowicie na liczby, których kwadraty są mniejsze od 2, i na takie, których kwadraty są od 2 większe. Taki podział wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy nazwijmy **przekrojem** w dziedzinie tych liczb. Rzecz jasna, że moglibyśmy utworzyć inne przekroje, np. oparte na nierównościach $x^3 < 2$, $x^3 > 2$ albo na nierównościach $x^4 < 7$, $x^4 > 7$ i t. d. Sprobujmy teraz sformułować zupełnie ogólnie zasady, na których opiera się tworzenie takich „przekrojów".

Niech P i Q oznaczają dwie własności, wyłączające się nawzajem, i przypuśćmy, że każda liczba wymierna dodatnia musi posiadać jedną z tych własności. Przypuśćmy dalej, że każda liczba, posiadająca własność P, musi być mniejsza od każdej liczby, posiadającej własność Q. (Np. P mogłoby oznaczać własność „$x^2 < 2$”, a Q własność „$x^2 > 2$”). Liczby, mające własność P, moglibyśmy nazwać niższą klasą T, liczby zaś, mające własność Q, nazwalibyśmy wyższą klasą U. Wogóle biorąc, istnieją obie klasy T i U, ale w pewnych szczególnych przypadkach może się zdarzyć, że istnieje jedna tylko klasa i że do niej należą wszystkie liczby. Taki przypadek miałby np. miejsce, gdyby P (albo Q) oznaczało: „jest liczbą dodatnią”. W niniejszym badaniu poprzestaniemy na rozważaniu tych przypadków, w których istnieją obie klasy, a w takim razie, na mocy takiego samego rozumowania jak w § 2, powiemy: można zawsze znaleźć dwie liczby dowolnie mało różniące się od siebie, przytym takie, że jedna z nich należy do klasy T, druga zaś do klasy U.

W szczególnym przypadku, z którym mieliśmy do czynienia w § 2, klasa T nie zawierała liczby największej, klasa zaś U nie zawierała liczby najmniejszej. Zagadnienie istnienia lub nieistnienia w danej klasie liczby największej (względnie: najmniejszej) posiada, jak zobaczymy, pierwszorzędną doniosłość. Przedewszystkim zauważmy, że nigdy nie może się zdarzyć, żeby klasa T posiadała największą liczbę, a j e d n o c z e ś n i e klasa U posiadała najmniejszą. Istotnie, przypuśćmy, że l jest największą liczbą klasy T, a r jest najmniejszą liczbą klasy U; w takim razie liczba wymierna dodatnia $\frac{1}{2}(l+r)$ leżałaby między l i r, zatym nie należałaby ani do klasy T, ani do klasy U, co przeczy naszemu założeniu, że wszystkie liczby wymierne dodatnie zostały podzielone na te dwie klasy. Wobec tego mogą zachodzić tylko trzy przypadki: (1) klasa T posiada największą liczbę l; (2) klasa U posiada najmniejszą liczbę r; (3) w klasie T niema największej liczby, a w klasie U niema najmniejszej.

Przykład, rozważony w § 2, ilustruje ten trzeci przypadek. Aby zilustrować pierwszy przypadek, możemy założyć, że P oznacza własność „$x^2 \leqq 1$“, a Q oznacza własność „$x^2 > 1$“: mamy tu $l = 1$. Gdybyśmy przypuścili, że P oznacza własność „$x^2 < 1$“, a Q oznacza „$x^2 \geqq 1$“, mielibyśmy $r = 1$ czyli zachodziłby przypadek drugi. Zauważmy, że nie otrzymamy żadnego przekroju, jeżeli przypuścimy, że P oznacza „$x^2 < 1$“, a Q oznacza „$x^2 > 1$“, gdyż liczba 1 nie będzie należała do żadnej klasy. (Porówn. Przykłady III. 3).

W pierwszych dwuch przypadkach powiadamy, że przekrój odpowiada liczbie wymiernej dodatniej, a mianowicie liczbie l w pierwszym przypadku i liczbie r w drugim. Odwrotnie: każdej liczbie wymiernej dodatniej a odpowiada pewien przekrój, który możemy oznaczyć symbolem α. Istotnie, wystarczy założyć, że P i Q oznaczają odpowiednio własności

$$x \leq a, \quad x > a$$

albo też własności $\quad x < a, \quad x \geq a.$

Przy pierwszym założeniu a byłoby największą liczbą klasy T, przy drugim — najmniejszą liczbą klasy U.

W gruncie rzeczy każdej liczbie wymiernej dodatniej a odpowiadają, jak widzimy, dwa przekroje. Aby uniknąć nieporozumień, obierzemy raz na zawsze jeden z tych dwuch możliwych przekrojów, a mianowicie ten, przy którym liczba a należy do klasy *wyższej*. Innemi słowami: umówimy się raz na zawsze, że będziemy rozważali tylko takie przekroje, w których klasa T nie posiada największej liczby.

Widzimy, że istnieje doskonała odpowiedniość między liczbami wymiernemi dodatniemi z jednej strony, a wyznaczonemi przez nie przekrojami z drugiej. Wobec tego możemy w badaniach matematycznych zastąpić liczby wymierne przez przekroje i uważać, że symbole, wchodzące w skład wzorów algiebraicznych, oznaczają przekroje. Tak więc np. $\alpha > \alpha'$ oznaczałoby to samo, co $a > a'$, jeżeli α, α' są to przekroje, odpowiadające liczbom a, a'.

Jeśli jednak zastąpimy liczby wymierne przez przekroje w dziedzinie liczb wymiernych, wówczas będziemy niemal zmuszeni do uogólnienia naszego układu liczb. W rzeczy samej, istnieją przekroje, nie odpowiadające żadnym liczbom wymiernym. Zbiór przekrojów jest obszerniejszy od zbioru liczb wymiernych: zawiera on przekroje, odpowiadające tym liczbom, a prócz tego zawiera inne jeszcze przekroje. Na tym fakcie opieramy uogólnienie pojęcia liczby i wypowiadamy następujące określenie, które zresztą należy uważać za tymczasowe, gdyż w następnym zaraz paragrafie zmodyfikujemy je.

Przekrój w dziedzinie liczb dodatnich wymiernych, przy którym istnieją obie klasy liczb, a niższa klasa nie zawiera liczby największej, nazywamy **liczbą dodatnią rzeczywistą.**

Liczbę dodatnią rzeczywistą, nie odpowiadającą żadnej liczbie dodatniej wymiernej, nazywamy **niewymierną.**

3a. Liczby rzeczywiste. Mówiliśmy dotąd o pewnych przekrojach w dziedzinie liczb dodatnich wymiernych, które nazwaliśmy tymczasowo „liczbami rzeczywistemi dodatniemi". Zanim podamy ostateczne określenie liczb rzeczywistych, musimy nieco zmienić nasz punkt widzenia. Mianowicie musimy wziąć pod uwagę przekroje czyli podziały na dwie klasy, utworzone nie tylko z liczb dodatnich wymiernych, lecz ze wszystkich wogóle liczb wymiernych, włączając w to i zero. O tych nowych przekrojach możemy powtórzyć wszystko, co mówiliśmy w dwuch poprzednich paragrafach, opuszczając tylko wyraz: dodatni.

Określenia. **Liczbą rzeczywistą** (albo krótko: **liczbą**) *nazywamy każdy przekrój liczb wymiernych, w którym istnieją obie klasy i w którym klasa niższa nie posiada liczby największej.*

Liczbą niewymierną *nazywamy każdą liczbę rzeczywistą (t. j. każdy przekrój w dziedzinie liczb wymiernych), która nie odpowiada żadnej liczbie wymiernej.*

Jeżeli jakiemuś przekrojowi (czyli jakiejś liczbie rzeczywistej) odpowiada liczba wymierna, będziemy ten przekrój nazywali „liczbą wymierną".

Jak widać z powyższych określeń, termin „liczba wymierna" jest dwuznaczny: może on oznaczać albo to, co w § 1 nazwaliśmy liczbą wymierną, albo też może oznaczać pewien przekrój, t. j. pewną liczbę rzeczywistą. Gdy mówimy np. $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, możemy mieć na myśli dwie rzeczy: albo pewne twierdzenie z arytmetyki elementarnej, albo też pewne twierdzenie, dotyczące przekrojów. W matematyce spotykamy nieraz takie dwuznaczne wyrażenia; dwuznaczność ta jest nieszkodliwa, jeżeli między dwoma zbiorami, odpowiadającemi tym dwom różnym pojęciom, zachodzi odpowiedniość doskonała, gdyż wówczas związki między twierdzeniami pozostają bez zmian, bez względu na to, które z dwuch znaczeń nadamy terminom. Np. z nierówności $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ wysnuwamy nierówność $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, przyczym wniosek pozostaje słuszny bez względu na to, czy $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ oznaczają zwykłe ułamki arytmetyczne, czy też liczby rzeczywiste. Zresztą można czasem odrazu z wzoru wyczytać, które z tych dwuch pojęć mamy na myśli; np. jeżeli piszemy $\frac{1}{2} > \sqrt{\frac{1}{8}}$, nie ulega wątpliwości, że $\frac{1}{2}$ oznacza tu przekrój, t. j. liczbę rzeczywistą.

Musimy jeszcze zauważyć, że przyjęta przez nas forma określenia liczb rzeczywistych nie jest logicznie konieczna. Określiliśmy je jako przekrój, t. j. jako parę klas. Równie dobrze możnaby określić liczbę rzeczywistą zapomocą jednej tylko klasy: wyższej lub niższej, możnaby nawet znaleźć dowolnie wiele klas przedmiotów, z których każda posiadałaby własności klasy „liczb rzeczywistych". W matematyce jest rzeczą zasadniczej wagi, żeby symbole miały *jakiś oznaczony* sens, w wielu jednak razach mogą one mieć kilka różnych znaczeń, a wtedy, z punktu widzenia czystej matematyki, jest rzeczą obojętną, które z tych możliwych znaczeń przypisujemy im. Bertrand Russell powiedział kiedyś, że „matematyka jest nauką, w której nie wiemy, o czym mianowicie mówimy, i nie dbamy, czy to, co mówimy jest czy nie jest prawdą". Uwaga ta ma formę paradoksalną, zawiera jednak dwie bardzo ważne prawdy. Jedną z nich jest ta, że symbolom matematycznym można nieraz nadawać rozmaite znaczenia i że, wogóle biorąc, mamy prawo wybrać to lub inne znaczenie. Druga prawda, zawarta w powiedzeniu Russella, polega na tym, że matematyka zajmuje się związkami *logicznego zawierania się*, t. j. bada, czy z danych przesłanek wypływają dane wnioski, natomiast nie interesuje się wcale tym, czy przesłanki lub wnioski są prawdziwe same przez się.

Musimy rozróżnić trzy rodzaje przekrojów. Może się zdarzyć, że wszystkie liczby wymierne ujemne należą do klasy niższej, zero zaś i wszystkie dodatnie liczby należą do wyższej. Taki przekrój nazywamy **liczbą rzeczywistą zero.** Powtóre, może się zdarzyć, że niższa klasa zawiera jakieś liczby dodatnie; taki przekrój nazywamy **liczbą rzeczywistą dodatnią.** Wreszcie, może się zdarzyć, że do wyższej klasy należą jakieś liczby ujemne; taki przekrój nazwiemy **liczbą rzeczywistą ujemną.**

Powyższe określenie liczby rzeczywistej dodatniej różni się od podanego w poprzednim paragrafie tym, że obecnie dołączyliśmy do niższej klasy zero i wszystkie liczby ujemne. Z łatwością można znaleźć przykład liczby rzeczywistej ujemnej; wystarczy założyć, że P oznacza własność $x+1<0$, a Q własność $x+1\geqq 0$. Otrzymany przekrój odpowiada liczbie wymiernej ujemnej -1. Zakładając, że P oznacza własność $x^3<-2$, a Q własność $x^3>-2$, otrzymalibyśmy liczbę rzeczywistą ujemną, a przytym niewymierną.

4. O równości i nierówności liczb rzeczywistych. Skoro rozszerzyliśmy nasze pierwotne pojęcie liczby, musimy w odpowiedni sposób rozszerzyć pojęcia równości, nierówności, dodawania, mnożenia itp. Wypada dowieść, że te pojęcia dadzą się zastosować do nowych liczb; w szczególności należy wykazać, że w dziedzinie liczb rzeczywistych wszystkie prawa arytmetyki pozostają słuszne, jednym słowem, że na liczbach rzeczywistych możemy wykonywać wszystkie działania w taki sam sposób, w jaki wykonywamy je na liczbach wymiernych (w sensie § 1-go). Szczegółowe przeprowadzenie całego dowodu zabrałoby nam zbyt wiele czasu, to też poprzestaniemy na naszkicowaniu biegu rozumowania.

Oznaczmy liczby rzeczywiste przez α, β, γ..., liczby wymierne, zawarte w ich niższych i wyższych klasach, przez a, A; b, B; c, C;..., wreszcie same klasy oznaczmy przez (a), (A)...

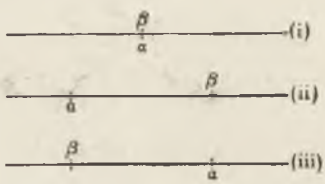
Jeżeli α, β są dwiema liczbami rzeczywistemi, mogą zachodzić trzy przypadki:

(I) każde a jest zarazem b i każde A jest B; w takim razie zarówno klasy (a) i (b) są tożsame, jak i klasy (A) i (B);

(II) każde a jest b, ale nie każde A jest B; w takim razie klasa (a) jest właściwą częścią klasy (b), klasa zaś (B) jest właściwą częścią klasy (A);

(III) każde A jest B, ale nie każde a jest b.

Te trzy przypadki dadzą się łatwo zilustrować gieometrycznie (rys. 3a).



Rys 3a.

W przypadku (I) piszemy $\alpha=\beta$, w przypadku (II) $\alpha<\beta$, w przypadku (III) $\alpha>\beta$. Rzecz jasna, że jeśli α i β są liczbami wymiernemi, wówczas te określenia zgadzają się zupełnie z tym, co w arytmetyce elementarnej rozumiemy przez równość lub nierówność liczb. Oczywista rzecz również, że według tych określeń musimy uważać każdą liczbę dodatnią za większą od ujemnej.

Musimy jeszcze określić związek, zachodzący między liczbą dodatnią rzeczywistą α i liczbą ujemną $-\alpha$. Jeżeli liczba α jest wyznaczona przez klasy (a), (A), wówczas tworzymy nowy przekrój, zaliczając do niższej klasy wszystkie liczby $-A$, do wyższej zaś wszystkie liczby $-a$; utworzony w ten sposób przekrój nazywamy liczbą ujemną $-\alpha$. W taki sam sposób moglibyśmy określić liczbę $-\alpha$ w tym przypadku, gdy α jest liczbą ujemną lub zerem; jeżeli α jest liczbą ujemną, wówczas $-\alpha$ jest dodatnią. Rzecz jasna również, że $-(-\alpha)=\alpha$. Z dwuch liczb α i $-\alpha$ jedna jest zawsze dodatnia (o ile, naturalnie α nie jest zerem). Tę z nich, która jest dodatnia, oznaczamy nieraz symbolem $|\alpha|$ i nazywamy *modułem* albo *wartością bezwzględną* liczby dodatniej lub ujemnej α.

Przykłady IIIa. 1. Dowieść, że $\beta=\alpha$, $\beta<\alpha$, $\beta>\alpha$, jeżeli $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$, $\alpha<\beta$.

2. Jeżeli $\alpha=\beta$ i $\beta=\gamma$, wówczas $\alpha=\gamma$.

3. Jeżeli $\alpha\leqq\beta$, $\beta<\gamma$, albo jeżeli $\alpha<\beta$, $\beta\leqq\gamma$, wówczas $\alpha<\gamma$.

4. Jeżeli $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$, albo $\alpha>\beta$, wówczas $-\beta=-\alpha$, $-\beta<-\alpha$, $-\beta>-\alpha$.

5. Dowieść, że $\alpha<0$, jeżeli α jest ujemną liczbą, i $\alpha>0$, jeżeli α jest liczbą dodatnią.

6. Dowieść, że $\alpha\leqq|\alpha|$.

7. Dowieść, że $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$.

8. Jeżeli α, β są dwiema różnemi liczbami rzeczywistemi, możemy zawsze znaleźć nieskończenie wiele liczb rzeczywistych, zawartych między α i β.

[Wszystkie te własności liczb wynikają bezpośrednio z naszych określeń].

5. Działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych. Musimy teraz określić działania arytmetyczne w zastosowaniu do liczb rzeczywistych.

(I) *Dodawanie.* Weźmy pod uwagę dwie klasy liczb: klasę (c), utworzoną ze wszystkich sum takich, jak $c=a+b$, oraz klasę (C), utworzoną ze wszystkich sum $C=A+B$. Rzecz jasna, że mamy zawsze $c<C$.

Śród liczb wymiernych może istnieć conajwyżej jedna, nie należąca ani do klasy (c), ani do klasy (C). Jakoż przypuśćmy, że istnieją dwie takie liczby, np. r i s i niech będzie $r<s$. W takim razie liczby r i s musiałyby być większe od każdej liczby c i mniejsze od każdej liczby C, wobec czego różnica $C-c$ nie mogłaby w żadnym razie być mniejsza od $s-r$. Ale z drugiej strony

$$C-c=(A-a)+(B-b);$$

otóż możemy tak dobrać liczby a, b, A, B, że zarówno $A-a$, jak $B-b$ staną się dowolnie małe, co przeczy naszemu założeniu.

Jeżeli każda liczba wymierna należy do jednej z klas (c) lub (C), wówczas klasy te wyznaczają przekrój czyli liczbę rzeczywistą γ. Jeżeli istnieje liczba wymierna, nie należąca do żadnej klasy, dołączamy ją do klasy (C) i znów mamy przekrój γ, odpowiadający, rzecz prosta, liczbie rzeczywistej wymiernej. *W obu tych przypadkach nazywamy* γ *sumą liczb rzeczywistych* α, β *i piszemy*

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

Jeżeli obie liczby α, β są wymierne, wówczas są one najmniejszemi liczbami klas wyższych (A) i (B). W takim razie $\alpha+\beta$ jest najmniejszą liczbą klasy (C) i nasze określenie zgadza się w zupełności z tym, co w arytmetyce elementarnej rozumiemy przez dodawanie.

(II) *Odejmowanie.* Określamy odejmowanie $\alpha-\beta$ za pomocą równania

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta);$$

w takim razie pojęcie odejmowania nie wprowadza żadnych nowych trudności.

Przykłady IIIb. 1. Dowieść, że $\alpha+(-\alpha)=0$.

2. Dowieść, że $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$.

3. Dowieść, że $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

4. Dowieść, że $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

5. Dowieść, że $\alpha-\alpha=0$.

6. Dowieść, że $\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)$.

7. Z określenia odejmowania i z przykładu 2 wynika, że

$$(\alpha-\beta)+\beta=\{\alpha+(-\beta)\}+\beta=\alpha+\{(-\beta)+\beta\}=\alpha+0=\alpha.$$

Moglibyśmy więc określić różnicę $\alpha-\beta=\gamma$ za pomocą równania $\gamma+\beta=\alpha$.

8. Dowieść, że $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta+\gamma$.

9. Podać określenie odejmowania niezależne od pojęcia dodawania liczb rzeczywistych. [Tworzymy klasy (c), (C) tak, by było $c=a-B$, $C=A-b$. Wykazać, że jest to równoznaczne z określeniem, podanym w tekście.]

10. Dowieść, że $||\alpha|-|\beta||\leqq|\alpha\pm\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|$.

(III) *Mnożenie.* Najłatwiej jest rozpocząć od mnożenia liczb d o d a t n i c h i z e r a, przyczym można oprzeć się na pierwotnym określeniu liczby rzeczywistej dodatniej, podanym w § 2a. Można mianowicie założyć, że $(c)=(ab)$ oraz $(C)=(AB)$, poczym wypadnie dowieść, że wszystkie liczby wymierne, z wyjątkiem conajwyżej jednej liczby, należą albo do klasy (c) albo do klasy (C). W tym celu dowodzimy, że można tak dobrać liczby a, b, A, B, że różnica $C-c$ stanie się dowolnie mała; wynika to z tożsamości

$$C-c=AB-ab=(A-a)B+a(B-b).$$

Skoro pojęcie mnożenia liczb dodatnich zostało ustalone, możemy przejść do mnożenia ujemnych liczb. Umawiamy się mianowicie, że jeśli α, β oznaczają dwie liczby rzeczywiste dodatnie, wówczas

$$(-\alpha)\beta=-\alpha\beta, \quad \alpha(-\beta)=-\alpha\beta, \quad (-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta.$$

(IV). *Dzielenie.* Rozpoczynamy od określenia $1/\alpha$ czyli odwrotności liczby α (z zastrzeżeniem, że $\alpha \neq 0$). Poprzestając z początku na liczbach dodatnich, określamy $1/\alpha$ jako przekrój, wyznaczony przez niższą klasę $(1/A)$ oraz wyższą klasę $(1/a)$. Odwrotność liczby ujemnej $-\alpha$ określamy zapomocą równania $1/(-\alpha)=-(1/\alpha)$. Wreszcie iloraz α/β określamy zapomocą równania

$$\alpha/\beta=\alpha.(1/\beta).$$

Po ustaleniu tych określeń mamy możność zastosowania do liczb rzeczywistych wszystkich pojęć i metod algiebry elementarnej.

Poprzestajemy na powyższym szkicu teorji działań na liczbach rzeczywistych; kto pragnąłby poznać teorję tę bardziej szczegółowo, musi zajrzeć do specjalnych dzieł, poświęconych arytmetyce teoretycznej.

Przykłady IIIc. Dowieść twierdzeń, wyrażonych za pomocą następujących wzorów:

1. $\alpha\times0=0\times\alpha=0$.	2. $\alpha\times1=1\times\alpha=\alpha$.	3. $\alpha\times(^1/\alpha)=1$
4. $\alpha\beta=\beta\alpha$.	5. $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.	6. $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.
7. $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.	8. $\lvert\alpha\beta\rvert=\lvert\alpha\rvert.\lvert\beta\rvert$.	

5a. O liczbie $\sqrt{2}$. Powróćmy na chwilę do tego szczególnego rodzaju liczb niewymiernych, który stanowił punkt wyjścia naszych rozumowań. Utworzyliśmy wówczas przekrój zapomocą nierówności $x^2<2$, $x^2>2$. Był to przekrój w dziedzinie liczb wymiernych dodatnich; teraz możemy go zastąpić (jak to wyjaśniliśmy w § 3a) przekrojem w dziedzinie wszystkich liczb wymiernych, dodatnich i ujemnych. Określony w ten sposób przekrój czyli liczbę oznaczamy symbolem $\sqrt{2}$.

Chcąc określić iloczyn $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, musimy wziąć pod uwagę dwie klasy: (I) klasę (aa'), gdzie a i a' są to liczby dodatnie wymierne, których kwadraty są mniejsze od 2; (II) klasę (AA'), gdzie A i A' są to liczby dodatnie wymierne, których kwadraty są od 2 większe. Te dwie klasy zawierają wszystkie liczby dodatnie wymierne z wyjątkiem jednej tylko liczby, a mianowicie z wyjątkiem liczby 2. Wobec tego mamy

$$(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2\,.$$

W podobny sposób otrzymujemy związek

$$(-\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2\,.$$

Tak więc *równanie* $x^2 = 2$ *posiada dwa pierwiastki* $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$. W taki sam sposób możnaby zbadać równania $x^2 = 3$, $x^3 = 7$... i odpowiadające im liczby niewymierne $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$...

6. Pierwiastki kwadratowe. Jeżeli a jest dowolną liczbą wymierną, wówczas obie liczby $\pm\sqrt{a}$ są albo wymierne, albo niewymierne, a jak widać z poprzedniego, częściej bywają niewymierne. Liczby tego kształtu, o ile są niewymierne, możnaby nazwać c z y s t e m i n i e w y m i e r n o ś c i a m i k w a d r a t o w e m i, liczby zaś, które są sumami wymiernych i czystych niewymiernych, t. j. liczby kształtu $a + \sqrt{b}$, można nazwać n i e w y m i e r n o ś c i a m i k w a d r a t o w e m i m i e s z a n e m i.

Rozważania gieometryczne § 2-go dowiodły, właściwie mówiąc, tylko istnienia niewymierności kwadratowych (czystych i mieszanych), jak również takich liczb niewymiernych, które dają się przedstawić za pomocą kolejnego wyciągania pierwiastków kwadratowych. Takiemi np. są liczby kształtu

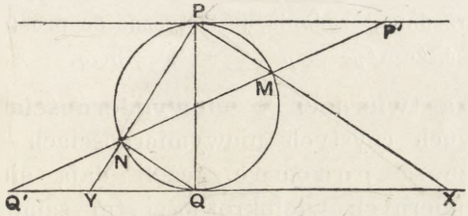
$$\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}\,.$$

Czytelnik powinien sam przekonać się, że można istotnie zbudować odcinek o długości, równej dowolnej liczbie tego kształtu. Za pomocą konstrukcji euklidesowych (t. j. posługując się wyłącznie cyrklem i linjałem) można zbudować tylko liczby niewymierne powyższego kształtu, na razie jednak nie możemy podać na to dowodu*). Ta osobliwość niewymierności kwadratowych czyni je szczególnie interesującemi dla nas.

Przykłady IV. 1. Podać konstrukcję gieometryczną dla liczb

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2+\sqrt{2}},\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

2. Równanie kwadratowe $ax^2+2bx+c=0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, jeżeli $b^2-ac>0$**). Załóżmy, iż a, b, c są liczbami wymiernemi. Możemy w takim razie założyć, że są one liczbami całkowitemi, gdyż w przeciwnym razie pomnożylibyśmy równanie przez najmniejszą spólną wielokrotność mianowników.



Rys. 3b.

Wiadomo, iż pierwiastki tego równania wyrażają się wzorem $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$. Czytelnik z łatwością zbuduje pierwiastki, jeśli zacznie od zbudowania liczby $\sqrt{b^2-ac}$. O wiele ładniejsza, chociaż nie tak łatwa do znalezienia, jest następująca konstrukcja***);

*Wykreślmy koło promieniem $=1$, poprowadźmy średnicę PQ oraz dwie styczne w końcach tej średnicy. Odłóżmy $PP'=-2a/b$ i $QQ'=-c/2b$, uwzględniając przy tym znaki. Poprowadźmy prostą $P'Q'$, która przetnie okrąg w M i N, oraz proste PM, PN, które przetną prostą QQ' w punktach X i Y. Odcinki QX, QY są pierwiastkami równania z ich właściwemi znakami*****).

---

*) Patrz w końcu rozdziału II, zadanie 41.

**) Czyli istnieją dwie wartości na x, przy których istotnie $ax^2+2bx+c=0$. Jeżeli $b^2-ac<0$, wówczas niema takich wartości na x. Czytelnik oczywiście pamięta, że podręczniki algiebry elementarnej powiadają, iż równanie ma w tym przypadku „dwa pierwiastki urojone“. Co należy przez to rozumieć, wyjaśnimy w rozdziale III.

Jeżeli $b^2=ac$, równanie posiada tylko jeden pierwiastek. W celu jednak zachowania jednostajności w wysłowieniu twierdzeń, powiadamy zazwyczaj, iż równanie ma w tym razie „dwa równe pierwiastki“. Jest to oczywiście tylko pewien umówiony sposób wysłowiania się.

***) Tę konstrukcję zapożyczyłem z książki: F. Klein *Leçons sur certaines questions de Géometrie Élémentaire*, trad. J. Griess. Paris 1896.

****) Rysunek odpowiada przypadkowi, gdy b i c mają ten sam znak, a zaś ma znak przeciwny. Czytelnik winien wykonać sam rysunki, odpowiadające innej kombinacji znaków.

Czytelnik sam uzasadni powyższą konstrukcję. Inna, jeszcze prostsza konstrukcja jest następująca: *na dowolnej prostej m odkładamy odcinek* $AB=1$, *w punkcie B wystawiamy prostopadłą do m i na niej odkładamy* $BC=-2b/a$, *w punkcie C wystawiamy prostopadłą do BC i na niej odkładamy (w zwrocie zgodnym ze zwrotem BA) odcinek* $CD=c/a$. *Na AD jako na średnicy wykreślamy okrąg, który przecina BC w punktach X, Y. Długości odcinków BX, BY są pierwiastkami równania.*

3. Jeżeli ac jest liczbą dodatnią, odcinki PP', QQ' poprzedniego zadania mają zwroty zgodne. Sprawdzić, że gdy $b^2<ac$, wówczas $P'Q'$ nie spotyka okręgu; jeżeli zaś $b^2=ac$, wówczas $P'Q'$ jest styczną do koła.

Sprawdzić również, iż gdy $b^2=ac$, koło, o którym mowa w drugiej konstrukcji poprzedniego zadania, jest styczne do prostej BC.

4. Dowieść, że $\sqrt{pq}=\sqrt{p}\cdot\sqrt{q}$; $\sqrt{p^2q}=p\sqrt{q}$.

6a. Kilka twierdzeń o niewymiernościach kwadratowych. O dwuch czystych niewymiernościach kwadratowych powiadamy, że są p o d o b n e, jeżeli dają się przedstawić w postaci wymiernych wielokrotności tej samej liczby pierwiastkowej; w przeciwnym zaś razie powiadamy, że nie są one podobne. Np. mamy

$$\sqrt{8}=2\sqrt{2}; \quad \sqrt{\tfrac{25}{2}}=\tfrac{5}{2}\sqrt{2},$$

wobec czego $\sqrt{8}$ i $\sqrt{\frac{25}{2}}$ nazywamy niewymiernościami podobnemi. Z drugiej strony, jeżeli liczby całkowite M i N nie mają spólnych czynników i żadna z nich nie jest kwadratem zupełnym, wówczas $\sqrt{M}$ i $\sqrt{N}$ są to niewymierności do siebie nie podobne. Jakoż przypuśćmy, jeśli to możliwe, że

$$\sqrt{M}=\frac{p}{q}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \sqrt{N}=\frac{r}{s}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},$$

gdzie wszystkie litery są symbolami liczb całkowitych.

W takim razie $\sqrt{MN}$ musi być liczbą wymierną i, co za tym idzie, całkowitą (Przykłady II, 4). Mamy więc $MN=P^2$, gdzie P jest liczbą całkowitą. Przypuśćmy, iż $a, b, c,\ldots$ są czynnikami pierwszemi liczby P, tak iż

$$MN=a^2b^2c^2\ldots$$

Ale w takim razie MN musi być podzielne przez a^2, zatym albo (1) M jest podzielne przez a^2, albo (2) N jest podzielne przez a^2, albo wreszcie (3) każda z liczb M, N jest podzielna przez a. To trzecie przypuszczenie musimy odrzucić, gdyż M i N nie mają, według założenia, spólnych czynników. To samo rozumowanie zastosować można po kolei do wszystkich innych czynników b^2, c^2,... Widzimy tedy, iż M musi być podzielne przez niektóre z tych czynników, N zaś przez pozostałe czynniki, zatym mamy

$$M=\lambda P_1^2, \quad N=\lambda P_2^2,$$

gdzie P_1^2 oznacza iloczyn niektórych czynników z pośród a^2, b^2, c^2..., P_2^2 zaś oznacza iloczyn pozostałych czynników. Ponieważ M i N nie mają czynników spólnych, zatym musi być $\lambda=1$, $M=P_1^2$, $N=P_2^2$, czyli M i N są to kwadraty zupełne, co jest sprzeczne z naszym założeniem.

Twierdzenie. *Jeżeli A, B, C, D są liczbami wymiernemi i jeżeli*

$$A+\sqrt{B}=C+\sqrt{D},$$

wówczas albo (I) $A=C$ i $B=D$, *albo też* (II) B i D *są kwadratami liczb wymiernych.*

Istotnie, zarówno $B-D$ jest liczbą wymierną, jak i

$$\sqrt{B}-\sqrt{D}=C-A.$$

Jeżeli $B=D$, wówczas mamy odrazu $C=A$, jeżeli zaś $B\neq D$, wówczas suma

$$\sqrt{B}+\sqrt{D}=\frac{B-D}{\sqrt{B}-\sqrt{D}}$$

jest liczbą wymierną, zatym wymiernemi muszą być obie liczby $\sqrt{B}$ i $\sqrt{D}$.

Wniosek. Jeżeli $A+\sqrt{B}=C+\sqrt{D}$, wówczas $A-\sqrt{B}=$ $=C-\sqrt{D}$, chyba że $\sqrt{B}$ i *$\sqrt{D}$ są liczbami wymiernemi.*

Przykłady IVa. 1. Dowieść, iż $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ nie są niewymiernościami podobnemi.

2. Dowieść, że $\sqrt{x}$ i $\sqrt{(1/x)}$ są niewymiernościami podobnemi (o ile, oczywiście, nie są liczbami wymiernemi).

3. Jeżeli a, b są liczbami dodatniemi i wymiernemi, wówczas $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ może być liczbą wymierną tylko w takim razie, gdy $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ są liczbami wymiernemi. To samo powiedzieć można o liczbie $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, chyba że $a=b$.

4. Jeżeli $$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D},$$
wówczas albo (I) $A=C$ i $B=D$, albo (II) $A=D$ i $B=C$, albo wreszcie (III) $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$ są wszystkie liczbami wymiernemi lub wszystkie niewymiernościami podobnemi.

[Podnieść obie części równania do kwadratu i zastosować twierdzenie, dowiedzione w tekście].

5. Niewymierność kwadratowa nie może być sumą dwuch niepodobnych do siebie niewymierności kwadratowych.

6. Ani $(a+\sqrt{b})^3$, ani $(a-\sqrt{b})^3$ nie mogą być liczbami wymiernemi jeżeli $\sqrt{b}$ nie jest liczbą wymierną.

7. Dowieść, iż jeżeli p i q są liczbami wymiernemi i jeżeli $x=p+\sqrt{q}$, wówczas x^m, gdzie m jest liczbą całkowitą, da się przedstawić w postaci $P+Q\sqrt{q}$, gdzie zarówno P, jak Q są liczbami wymiernemi. Naprzykład

$$(p+\sqrt{q})^2=p^2+q+2p\sqrt{q}; \quad (p+\sqrt{q})^3=p^3+3pq+(3p^2+q)\sqrt{q}.$$

Na podstawie tego twierdzenia dowieść, że każdy wielomian kształtu

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

gdzie a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ są liczbami wymiernemi, daje się przedstawić w postaci $P+Q\sqrt{q}$.

8. Przedstawić w takiej samej formie liczbę $\dfrac{1}{p+\sqrt{q}}$.

$\left[\text{Otrzymujemy } \dfrac{1}{p+\sqrt{q}}=\dfrac{p}{p^2-q}-\dfrac{\sqrt{q}}{p^2-q}\right]$.

9. Opierając się na przykładach 7-ym i 8-ym, dowieść, że każde wyrażenie kształtu $G(x)/H(x)$, w którym $G(x)$ i $H(x)$ są wielomianami zmiennej x o spółczynnikach wymiernych, daje się przedstawić w postaci $P+Q\sqrt{q}$, gdzie P i Q są wymierne.

10. Jeżeli b nie jest kwadratem zupełnym i jeżeli $a+\sqrt{b}$ jest pierwiastkiem równania algiebraicznego o spółczynnikach wymiernych, wówczas $a-\sqrt{b}$ jest także pierwiastkiem tego samego równania.

11. Jeżeli p, q oraz p^2-q są liczbami dodatniemi, wówczas

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}$$

możemy przedstawić w postaci $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, gdzie

$$x=\tfrac{1}{2}(p+\sqrt{p^2-q}) \qquad y=\tfrac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-q}).$$

12. Przy jakich warunkach można $\sqrt{p+\sqrt{q}}$ (gdzie p i q są liczbami wymiernemi) przedstawić w postaci $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, gdzie x i y są liczbami wymiernemi?

13. Jeżeli a^2-b jest liczbą dodatnią, wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

było liczbą wymierną, jest ten, żeby a^2-b oraz $\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})$ były kwadratami liczb wymiernych.

7. Continuum. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (wymiernych i niewymiernych) zowiemy **continuum liczbowym** albo **arytmetycznym.**

Dogodną jest rzeczą przypuścić, że prosta L, o której mówiliśmy w § 1, składa się z wszystkich punktów, odpowiadających liczbom continuum arytmetycznego, i nie składa się z żadnych innych punktów*). Wobec tego zbiór wszystkich punktów prostej L można nazwać **continuum linjowym**; daje ono nam obraz continuum liczbowego.

W poprzednich dwuch paragrafach badaliśmy nieco szczegółowiej główne własności pewnych typów liczb rzeczywistych, np. liczb wymiernych i niewymierności kwadratowych. Podamy tu jeszcze kilka przykładów liczb rzeczywistych, a to w celu okazania, że niewymierności kwadratowe czyste i mieszane są drobną tylko cząstką liczb, stanowiących continuum arytmetyczne.

(I). Weźmy pod uwagę wzór bardziej złożony

$$z=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\,.$$

Że wzór ten na z posiada wogóle jakiś sens i że istnieje na prostej taki punkt P, iż $A_0P=z$, o tym można się przekonać w następujący sposób. Przedewszystkim, w taki sam sposób jak poprzednio wykazujemy istnienie takiego punktu P_1, że jeżeli $y=A_0P_1$, wówczas $y^2=15$ Następnie możemy już wyznaczyć punkty, odpowiadające liczbom $4+\sqrt{15}$ i $4-\sqrt{15}$. A teraz weźmy pod uwagę równanie

$$z_1^3=4+\sqrt{15}\,.$$

Prawa część równania nie jest wymierna, ale to samo rozumowanie, które nas skłoniło do przypuszczenia, iż na prostej istnieje punkt x, dla którego $x^2=2$, to samo rozumowanie, powiadam, prowadzi do wniosku, że na prostej istnieje również punkt z_1, dla którego $z_1^3=4+\sqrt{15}$. W ten sposób znajdujemy punkt P', dla którego

$$z_1=A_0P'=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\,.$$

Analogicznie znajdujemy punkt P'', dla którego

$$z_2=A_0P''=\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\,,$$

kładąc zaś $A_0P=A_0P'+A_0P''$, mamy ostatecznie

$$A_0P=z=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\,.$$

---

*) Zakładamy taką hipotezę, gdyż (1) wystarcza ona do potrzeb gieometrji, (2) daje nam doskonały obraz gieometryczny procesów analitycznych. Raz jeszcze musimy zaznaczyć, że w książce tej posługujemy się językiem gieometrji li tylko w celu ilustrowania twierdzeń, że zatym teorji naszych nie opieramy na rozważaniach gieometrycznych, a to zwalnia nas od obowiązku badania podstaw gieometrji.

Łatwo sprawdzić, iż w danym razie

$$z^3 = 3z + 8.$$

Moglibyśmy udowodnić bezpośrednio istnienie jednej tylko liczby z, czyniącej zadość równaniu $z^3 = 3z + 8$. Z łatwością można przekonać się, iż niema dwuch takich liczb. Gdyby bowiem było $z_1^3 = 3z_1 + 8$ oraz $z_2^3 = 3z_2 + 8$, wówczas odejmując te równości od siebie i dzieląc przez $z_1 - z_2$, znaleźlibyśmy, że $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 3$. Jeśli jednak z_1 i z_2 mają być liczbami dodatniemi, wówczas $z_1^3 > 8$ i $z_2^3 > 8$, zatym $z_1 > 2$, $z_2 > 2$, a $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 > 12$, co przeczy otrzymanej przez nas równości. Równie łatwo przekonać się, iż ani z_1, ani z_2 nie mogą być liczbami ujemnemi. Przypuśćmy np., iż z_1 jest liczbą ujemną, równą $-\zeta$; wówczas ζ jest dodatnie i mamy $\zeta^3 - 3\zeta + 8 = 0$, czyli $3 - \zeta^2 = 8/\zeta$. Stąd wynika, że $3 - \zeta^2 > 0$, czyli $\zeta < 2$. Ale w takim razie musi być $8/\zeta > 4$ i przez to samo nie może równać się liczbie $3 - \zeta^2$, która jest mniejsza od 3.

Tak więc istnieje conajwyżej j e d n a l i c z b a z, przy której $z^3 - 3z = 8$. Liczba ta nie może być wymierna. Istotnie, pierwiastek wymierny takiego równania musiałby być liczbą całkowitą, a zarazem musiałby być dzielnikiem liczby 8 (Przykłady II, 5); otóż łatwo sprawdzić, iż żadna z liczb ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 nie jest pierwiastkiem naszego równania.

Tak więc równanie $z^3 = 3z + 8$ posiada conajwyżej jeden pierwiastek, i ten nie może być wymierny. Wszystkie liczby wymierne x możemy podzielić na dwie klasy T, U, zaliczając do pierwszej z nich te, przy których zachodzi nierówność $x^3 < 3x + 8$, do drugiej zaś te, przy których $x^3 > 3x + 8$. Istotnie, z łatwością można się przekonać, iż jeśli $x^3 > 3x + 8$ i jeśli y jest jakąkolwiek liczbą większą od x, wówczas $y^3 > 3y + 8$. Jakoż przypuśćmy, jeśli to możliwe, iż $y^3 \leqq 3y + 8$. W takim razie, odejmując od siebie dwie nierówności, mielibyśmy

$$y^3 - x^3 < 3(y - x), \quad \text{czyli} \quad y^2 + xy + x^2 < 3,$$

co jest niedorzeczne, gdyż y jest dodatnie, x zaś jest większe od 2 (ponieważ $x^3 > 8$). W taki sam sposób dowiedzie czytelnik, że jeśli $x^3 < 3x + 8$, a $y < x$, wówczas $y^3 < 3y + 8$.

Tak więc podzieliliśmy wszystkie liczby wymierne na dwie klasy T, U, zupełnie analogiczne do tych, które rozważaliśmy w § 5. Mamy tedy przekrój w dziedzinie liczb wymiernych dodatnich czyli mamy liczbę rzeczywistą dodatnią z, czyniącą zadość równaniu $z^3 = 3z + 8$.

Czytelnik, o ile umie rozwiązywać równania sześcienne zapomocą t. zw. wzoru Cardana, może z powyższego równania otrzymać bezpośrednio wzór

$$z = \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}.$$

(II). Rozumowanie, które stosowaliśmy do równania $x^3 = 3x + 8$, dałoby się zastosować (lubo nie tak łatwo) do równania

$$x^5 = x + 16$$

i doprowadziłoby nas do wniosku, iż istnieje jedna tylko liczba, czyniąca zadość temu równaniu. W tym wypadku jednak niepodobna otrzymać wzoru na x, złożonego z jakiejś kombinacji symbolów pierwiastkowania. Jakoż w algiebrze wyższej dowodzimy twierdzenia, że pierwiastki równań stopnia wyższego nad czwarty nie dają się w ogólności wyrazić za pomocą kombinacji symbolów pierwiastkowania.

Tak więc obok liczb niewymiernych, które mogą być wyrażone za pomocą niewymierności kwadratowych lub innych jakichś pierwiastków wyższego stopnia, istnieją inne, nie dające się w ten sposób wyrazić. *Tylko w szczególnych przypadkach można wyrazić liczbę niewymierną zapomocą takich symbolów.*

(III). Ale nawet jeżeli do poprzednio rozważanych liczb niewymiernych dołączymy te, które są pierwiastkami równań stopnia wyższego nad czwarty, nie wyczerpiemy jeszcze różnych rodzajów liczb niewymiernych, zawartych w continuum. Wykreślmy okrąg koła promieniem $A_0A_1 = 1$. Drogą zupełnie naturalną powstaje przypuszczenie, że okręgowi temu można przypisać pewną długość, którą można zmierzyć *). Długość takiego okręgu oznaczamy, jak wiadomo, literą π. Otóż zostało dowiedzione (dowód ten, niestety, jest długi i trudny), że liczba π nie może być pierwiastkiem żadnego równania algiebraicznego o spółczynnikach całkowitych, tak że nie mogą istnieć równania kształtu

$$\pi^2 = n\,, \quad \pi^3 = n\,, \quad \pi^5 = \pi + n\,,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą. W ten sposób określiliśmy liczbę, która nie jest wymierna, ale nie należy również do tych typów liczb niewymiernych, które poznaliśmy w poprzednich przykładach. A liczba π nie jest wcale jedyną, ani nawet wyjątkową. Rzecz się ma wprost przeciwnie: tylko niektóre szczególne rodzaje liczb niewymiernych mogą być pierwiastkami równań algiebraicznych, a z pośród nich znów tylko niektóre dają się wyrazić zapomocą symbolów pierwiastkowania.

7a. O zmiennej rzeczywistej ciągłej. Na „liczby rzeczywiste" możemy zapatrywać się z dwuch punktów widzenia: możemy myśleć o nich jako o pewnym zbiorze — mamy wówczas do czynienia z continuum arytmetycznym, albo też

---

*) Dowód podamy w rozdziale VII.

możemy myśleć o nich jako o indywiduach. W tym drugim przypadku możemy myśleć o nich jako o pewnych liczbach w zupełności oznaczonych (np. o 1, o $\frac{1}{2}$, o π, o $\sqrt{2}$), ale możemy też mieć na myśli dowolną, nieoznaczoną liczbę, liczbę x. Na tym ostatnim punkcie widzenia stajemy, gdy stwierdzamy np., że „x jest liczbą", że „x jest miarą pewnej długości", że „x może być wymierne lub niewymierne". Owo x, które w tych zdaniach figuruje, zowiemy *zmienną ciągłą rzeczywistą*, poszczególne zaś, indywidualne liczby nazywamy *wartościami* zmiennej.

„Zmienna" może jednak nie być ciągła. Zamiast rozważać zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, możemy brać pod uwagę tylko jakiś częściowy zbiór, zawarty w poprzednim, np. zbiór liczb wymiernych albo zbiór liczb całkowitych dodatnich. Przypuśćmy, iż rozważamy zbiór liczb całkowitych. W takim razie w sądach o dowolnych lub bliżej nieoznaczonych liczbach całkowitych dodatnich, np. w sądzie „n jest albo parzyste, albo nieparzyste", nazywamy n zmienną, mianowicie *zmienną dodatnią całkowitą*, poszczególne zaś liczby dodatnie nazywamy wartościami tej zmiennej.

W powyższych przykładach t. zw. „obszar zmienności" zmiennej x składa się ze wszystkich liczb rzeczywistych, obszar zaś zmienności zmiennej n—ze wszystkich liczb dodatnich całkowitych. Te dwa obszary zmienności są może najważniejsze, niemniej jednak w wielu razach musimy brać pod uwagę inne obszary. Naprzykład w teorji ułamków dziesiętnych możemy oznaczyć przez x dowolną cyfrę jakiegoś ułamka; w takim razie x jest zmienną, ale obszar jej zmienności składa się tylko z dziesięciu wartości, a mianowicie: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Czytelnik powinien poszukać przykładów innych zmiennych o różnych obszarach zmienności. Ciekawe przykłady można znaleźć w życiu codziennym. Możemy np. myśleć o policjancie x, o dorożkarzu x, o gwieździe x w katalogu Herschela, o roku x, o x-owym dniu tygodnia itp.

8. Przekroje w dziedzinie liczb rzeczywistych. Rozważaliśmy dotąd przekroje w dziedzinie liczb wymiernych, t. j. sposoby dzielenia wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy T i U, posiadające trzy charakterystyczne własności:

(1) każda liczba wymierna należy do jednej i tylko do jednej z dwuch klas;

(2) obie klasy istnieją;

(3) każda liczba klasy T jest mniejsza od każdej liczby klasy U.

Rzecz jasna, że ten sposób postępowania można również zastosować do zbioru wszystkich liczb rzeczywistych i, jak zobaczymy w dalszych rozdziałach, ma on wielkie znaczenie w analizie*).

Przypuśćmy, że P i Q są to dwie wyłączające się nawzajem własności i że każda liczba rzeczywista posiada jedną z tych własności. Przypuśćmy dalej, że każda liczba, mająca własność P, jest mniejsza od każdej liczby, mającej własność Q. Liczby, posiadające własność P, nazwiemy *klasą niższą* T, te zaś, które posiadają własność Q, nazwiemy *klasą wyższą* U.

Np. P może oznaczać własność $x \leq \sqrt{2}$, Q zaś własność $x > \sqrt{2}$. Należy zauważyć, że dwie własności, wystarczające do wyznaczenia przekroju w dziedzinie liczb wymiernych, mogą nie wystarczać do wyznaczenia przekroju w dziedzinie liczb rzeczywistych. Takiemi np. są własności: „$x < \sqrt{2}$", „$x > \sqrt{2}$". Istotnie, każda liczba wymierna posiada jedną z tych dwu własności, ale nie można powiedzieć tego o liczbach rzeczywistych, gdyż $\sqrt{2}$ nie posiada żadnej z nich, zatym liczba ta nie została objęta przez naszą klasyfikację.

Mogą teraz zachodzić dwa przypadki**): albo w klasie T istnieje największa liczba l, albo w klasie U istnieje najmniejsza r. Dwa te przypadki nie mogą zachodzić jednocześnie, gdyż liczba $\frac{1}{2}(l+r)$ byłaby większa od wszystkich liczb klasy T i mniejsza od wszystkich liczb klasy U, czyli nie należałaby do żadnej z tych klas. Z drugiej strony, j e d e n z tych dwu przypadków musi zawsze zachodzić.

Istotnie, oznaczmy przez T_1, U_1 klasy, utworzone ze wszystkich liczb wymiernych, należących odpowiednio do klas T, U. Klasy T_1, U_1 wyznaczają przekrój w dziedzinie liczb wymiernych, przyczym mogą zachodzić dwa przypadki:

---

*) Roztrząsania niniejszego paragrafu są bardzo podobne do tych, które przeprowadziliśmy w § 3. Te powtarzania są jednak konieczne, gdyż każdy czytelnik powinien doskonale owładnąć pojęciem przekroju.

**) Przy przekrojach, o których mówiliśmy w § 3, możliwe były trzy różne przypadki.

1) Klasa T_1 może zawierać największą liczbę α. W takim razie α jest również największą liczbą klasy T, gdyby bowiem istniała w klasie T liczba β większa od α, wówczas między α i β leżałyby jakieś liczby wymierne; te liczby należałyby do klasy T (jako mniejsze od β), a więc i do klasy T_1, co przeczy założeniu.

2) W klasie T_1 może nie być największej liczby, a w takim razie przekrój w dziedzinie liczb wymiernych, wyznaczony przez klasy T_1, U_1, jest liczbą rzeczywistą α. Ta liczba α musi należeć albo do T, albo do U. Jeżeli należy ona do T, łatwo wykazać, jak poprzednio, że jest ona największą liczbą tej klasy, jeśli zaś należy do U, to w taki sam sposób można dowieść, że jest ona najmniejszą liczbą klasy U.

Tak więc albo w klasie T istnieje największa liczba, albo w U istnieje najmniejsza, zatym każdy przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych „odpowiada" jakiejś oznaczonej liczbie rzeczywistej. Jest to bardzo ważny wniosek. Istotnie, widzieliśmy, że pojęcie przekroju w dziedzinie liczb wymiernych prowadzi do nowego, ogólniejszego pojęcia liczby; można było oczekiwać, że jeśli wprowadzimy pojęcie przekroju w dziedzinie liczb rzeczywistych, otrzymamy z kolei liczby ogólniejsze od rzeczywistych. Tymczasem okazuje się, że tak nie jest i że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych czyli continuum arytmetyczne posiada pewnego rodzaju zupełność, której brakowało zbiorowi liczb wymiernych. Ten fakt wyrażamy w języku technicznym, mówiąc, że continuum jest zamknięte.

Osiągnięte wyniki możemy ująć w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie Dedekinda. *Jeżeli wszystkie liczby rzeczywiste podzieliliśmy na dwie klasy T, U w taki sposób, że*

(1) *każda liczba należy do jednej z tych dwu klas,*

(2) *każda klasa zawiera conajmniej jedną liczbę,*

(3) *każda liczba klasy T jest mniejsza od każdej liczby klasy U, wówczas istnieje jedna liczba α, posiadająca tę własność, że wszystkie mniejsze od niej liczby należą do klasy T, wszystkie zaś większe od niej—do klasy U. Samą liczbę α możemy dowolnie zaliczyć do jednej lub do drugiej klasy.*

W wielu zagadnieniach wypada rozważać przekroje nie w dziedzinie wszystkich liczb, lecz jedynie w pewnym przedziale (β, γ), t.j.

wypada rozważać przekroje w dziedzinie takich liczb x, że $\beta \leqq x \leqq \gamma$. Rzecz jasna, że te przekroje posiadają wszystkie trzy powyższe własności i dają się zamienić w przekroje, dokonane w dziedzinie wszystkich liczb, jeżeli do T dołączymy wszystkie liczby mniejsze od β, do U zaś wszystkie liczby większe od γ. Rzecz jasna również, że twierdzenie Dedekinda pozostaje słusznym, jeżeli zamiast „wszystkie liczby rzeczywiste" powiemy: „wszystkie liczby rzeczywiste, zawarte w przedziale (β, γ)", i że liczba α czyni w tym przypadku zadość nierównościom $\beta \leqq \alpha \leqq \gamma$.

8a. O punktach skupienia. Układ, złożony z liczb rzeczywistych, określonych w taki lub inny sposób, jak również układ odpowiadających im punktów na prostej nazywamy **zbiorem** albo **mnogością** liczb (względnie: punktów). Mówimy tedy o mnogości liczb całkowitych dodatnich, o mnogości liczb wymiernych, o mnogości liczb rzeczywistych, zawartych w pewnym przedziale, itp.

W celu uproszczenia wykładu, użyjmy języka gieometrji. Przypuśćmy, że mamy daną na prostej mnogość punktów S. Weźmy dowolny punkt ζ na tej prostej, który może należeć lub nie należeć do S. Możliwe są dwa przypadki: (I) albo można znaleźć taką liczbę dodatnią δ, że w przedziale $(\zeta-\delta, \zeta+\delta)$ nie zawiera się żaden punkt mnogości S z wyjątkiem tylko punktu ζ; (II) albo też liczby takiej znaleźć nie można.

Przypuśćmy np., że S jest mnogością wszystkich punktów, odpowiadających liczbom całkowitym. Jeżeli ζ również odpowiada liczbie całkowitej, wówczas wystarczy obrać $\delta < 1$, a będziemy mieli przypadek (I). Jeżeli ζ leży dokładnie po środku między dwoma punktami, odpowiadającemi liczbom całkowitym, możemy obrać $\delta < \frac{1}{2}$. Natomiast jeżeli S jest mnogością wszystkich punktów wymiernych, wówczas, jakikolwiek byłby punkt ζ, zawsze zachodzić musi przypadek (II), gdyż w każdym przedziale możemy znaleźć dowolną ilość punktów wymiernych.

Przypuśćmy, że zachodzi przypadek (II). W takim razie w każdym dowolnie małym przedziale $(\zeta-\delta, \zeta+\delta)$ zawiera się conajmniej jeden punkt ζ_1, różny od ζ i należący do mnogości S; ma to miejsce zawsze, niezależnie od tego, czy ζ należy czy nie należy do S. W takim wypadku powiadamy, że ζ jest **punktem skupienia** mnogości S. Łatwo dostrzec, że przedział $(\zeta-\delta, \zeta+\delta)$ musi zawierać nie jeden, lecz nieskończenie wiele punktów mnogości S. W rzeczy samej, skoro wyznaczyliśmy punkt ζ_1, możemy obrać mniejszy od poprzedniego przedział

$(\zeta-\delta_1, \zeta+\delta_1)$, nie sięgający do punktu ζ_1; w tym przedziale musi istnieć punkt ζ_2, różny od ζ i należący do mnogości S. Postępując dalej w ten sposób, możemy wyznaczyć dowolną ilość punktów

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$$

które wszystkie leżą w przedziale $(\zeta-\delta, \zeta+\delta)$ i należą do mnogości S.

Punkt skupienia może należeć do mnogości S, może jednak również nie należeć do niej.

Przykłady IVb. 1. Jeżeli S składa się z punktów, odpowiadających liczbom całkowitym, wówczas S nie posiada punktu skupienia.

2. Jeżeli S składa się z wszystkich punktów, odpowiadających liczbom wymiernym, wówczas każdy punkt mnogości jest punktem skupienia, a nawet każdy punkt na prostej L jest punktem skupienia.

3. Jeżeli S składa się z punktów $1, {}^1/_2, {}^1/_3 \ldots$, wówczas istnieje jeden tylko punkt skupienia, mianowicie punkt zerowy.

4. Jeżeli S składa się z wszystkich punktów dodatnich wymiernych, wówczas punktami skupienia są: punkt zerowy i wszystkie punkty dodatnie na prostej.

8b. Twierdzenie Weierstrassa. Ogólna teorja mnogości punktowych ma niezmierną doniosłość w różnych zagadnieniach matematyki wyższej, nie możemy jednak zajmować się nią teraz. Dowiedziemy jednego tylko twierdzenia tej teorji, które z łatwością wysnuć można z twierdzenia Dedekinda, a które w dalszym wykładzie będzie nam nieraz potrzebne.

TWIERDZENIE. *Jeżeli mnogość S, złożona z nieskończenie wielu punktów, zawiera się cała w przedziale (α, β), wówczas przynajmniej jeden punkt tego przedziału jest punktem skupienia mnogości S.*

Podzielmy wszystkie punkty prostej L na dwie klasy, a to w następujący sposób: punkt P zaliczymy do klasy T, jeżeli nieskończenie wiele punktów mnogości S leży wprawo od P, w przeciwnym zaś razie zaliczymy ten punkt do klasy wyższej U. Rzecz jasna, że podział ten czyni zadość warunkom (I) i (III) twierdzenia Dedekinda, ponieważ zaś α należy do T, a β do U, zatym i warunkowi (II) uczyniliśmy zadość.

Istnieje tedy taki punkt ζ, że przy dowolnie małym δ punkt $\zeta-\delta$ należy do T, a $\zeta+\delta$ należy do U, że zatym przedział ($\zeta-\delta$, $\zeta+\delta$) zawiera nieskończenie wiele punktów mnogości S. Tak więc ζ jest punktem skupienia mnogości S.

Oczywista rzecz, że ζ może w pewnych szczególnych przypadkach zlewać się z α albo z β; np. jeżeli S składa się z punktów 1, $1/2$, $1/3$... i jeżeli $\alpha=0$, $\beta=1$, wówczas $\zeta=\alpha=0$.

Zadania do rozdziału I.

1. Przy jakich warunkach zachodzi równanie $ax+by+cz=0$, jeżeli (I) bierzemy pod uwagę wszelkie możliwe wartości zmiennych x, y, z; jeżeli (II) uwzględniamy tylko wartości na x, y, z, czyniące zadość związkowi $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$; jeżeli (III) uwzględniamy tylko te wartości na x, y, z, które czynią zadość jednocześnie związkom $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ i $Ax+By+Cz=0$?

2. Każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić jednym i tylko jednym sposobem pod postacią

$$a_1+\frac{a_2}{1.2}+\frac{a_3}{1.2.3}+....+\frac{a_k}{1.2.3....k},$$

gdzie a_1, a_2, a_3 ... a_k są liczbami całkowitemi, przyczym

$$0\leqq a_1,\quad 0\leqq a_2<2,\quad 0\leqq a_3<3,...0\leqq a_k<k.$$

[Naprzykład $\dfrac{47}{21}=\dfrac{11280}{7!}=\dfrac{7\cdot1611+3}{7!}=\dfrac{3}{7!}+\dfrac{6\cdot268+3}{6!}$

$$=\frac{3}{7!}+\frac{3}{6!}+\frac{5\cdot53+3}{5!}=\frac{3}{7!}+\frac{3}{6!}+\frac{3}{5!}+\frac{4\cdot13+1}{4!}$$

$$=\frac{3}{7!}+\frac{3}{6!}+\frac{3}{5!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}+\frac{0}{2!}+2.$$

Rzecz jasna, iż k może *conajwyżej* równać się największemu czynnikowi pierwszemu mianownika danej liczby].

3. Każdą liczbę dodatnią wymierną można przedstawić jednym i tylko jednym sposobem w postaci ułamku ciągłego

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+...+\cfrac{1}{a_n}}}},$$

gdzie a_1, a_2 ... a_n są liczbami całkowitemi dodatniemi, przyczym tylko a_1 może równać się zeru.

4. Znaleźć pierwiastki wymierne (o ile takowe istnieją) równania $9y^2-6x^3+15x-10=0$.

[Podstawić $3x=y$ i zastosować metodę Przykł. II, 7.]

5. Punkt C wyznacza na odcinku AB **podział złoty** (czyli $AB.AC=BC^2$); dowieść, iż stosunek AC/AB jest niewymierny.

6. Niech będzie A liczba niewymierna, a, b, c, d liczby wymierne. W jakim wypadku $\dfrac{aA+b}{cA+d}$ może być liczbą wymierną?

7. **Kilka elementarnych nierówności.** Niech a_1, a_2... oznaczają dowolne liczby dodatnie (lub zero), a p, q... niech oznaczają liczby całkowite dodatnie. Ponieważ $a_1^p-a_2^p$ oraz $a_1^q-a_2^q$ są tego samego znaku, zatym $(a_1^p-a_2^p)(a_1^q-a_2^q)\geqq 0$

czyli
$$a_1^{p+q}+a_2^{p+q}\geqq a_1^p a_2^q+a_1^q a_2^p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
co można również napisać w postaci
$$\frac{a_1^{p+q}+a_2^{p+q}}{2}\geqq\left(\frac{a_1^p+a_2^p}{2}\right)\left(\frac{a_1^q+a_2^q}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
Stosując ten wzór kilkakrotnie, otrzymujemy
$$\frac{a_1^{p+q+r\ldots}+a_2^{p+q+r\ldots}}{2}+\left(\frac{a_1^p+a_2^p}{2}\right)\left(\frac{a_1^q+a_2^q}{2}\right)\left(\frac{a_1^r+a_2^r}{2}\right) \quad \ldots \quad (3)$$
a w szczególności
$$\frac{a_1^p+a_2^p}{2}\geqq\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
Jeżeli we wzorze (1) uczynimy $p=q=1$, albo też we wzorze (4) uczynimy $p=2$, otrzymamy nierówność $a_1^2+a_2^2\geqq 2a_1a_2$, wyrażającą znane twierdzenie, że średnia arytmetyczna dwuch liczb dodatnich jest nie mniejsza od ich średniej gieometrycznej.

8. **Uogólnienie poprzednich wzorów.** Jeżeli napiszemy $\frac{1}{2}n(n-1)$ nierówności typu (1), utworzonych z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, i dodamy je, otrzymamy
$$n\Sigma a^{p+q}\geqq\Sigma a^p\Sigma a^q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$
czyli
$$\frac{\Sigma a^{p+q}}{n}\geqq\frac{\Sigma a^p}{n}\cdot\frac{\Sigma a^q}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Czytelnik sam z łatwością otrzyma uogólnienie wzoru (3), a w szczególności nierówność
$$\frac{\Sigma a^p}{n}\geqq\left(\frac{\Sigma a}{n}\right)^p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

9. **Ogólna postać twierdzenia o średniej arytmetycznej i średniej gieometrycznej.** Trochę odmienną od poprzedniej nierówności jest ta, która formułuje znany fakt, że średnia arytmetyczna liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest nie mniejsza od ich średniej gieometrycznej. Przypuśćmy, że a_r i a_s są odpowiednio największą i najmniejszą z pośród liczb a (jeżeli mamy kilka najmniejszych lub największych liczb a, wybieramy którąkolwiek z nich); niech G będzie średnią gieometryczną tych dwu liczb. Gdyby

było $G=0$, twierdzenie byłoby oczywiste; możemy tedy założyć $G>0$. Zastąpmy teraz a_r i a_s przez

$$a'_r=G\,,\quad a'_s=\frac{a_r a_s}{G}\,.$$

Wartość średniej gieometrycznej nie ulegnie zmianie, a ponieważ

$$a'_r+a'_s-a_r-a_s=\frac{(a_r-G)\,(a_s-G)}{G}\leqq 0\,,$$

niewątpliwie więc nie powiększyliśmy średniej arytmetycznej.

Rzecz jasna, że możemy to postępowanie powtarzać dopóty, dopóki wszystkich liczb $a_1, a_2, \ldots a_n$ nie zastąpimy przez G; w tym celu conajwyżej n razy wypadnie je powtórzyć. Ostateczna wartość średniej arytmetycznej będzie G, zatym pierwotna jej wartość nie mogła być mniejsza od G.

10. **Nierówność Schwarza.** Przypuśćmy, że mamy dwa dowolne zbiory liczb dodatnich lub ujemnych $a_1, a_2, \ldots a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots b_n$. Łatwo sprawdzić nierówność

$$(\Sigma a_r b_r)^2=\Sigma a_r^2 \Sigma a_s^2-\Sigma(a_r b_s-a_s b_r)^2,$$

w której r, s przybierają wartości 1, 2, ... n. Wynika stąd, że

$$(\Sigma a_r b_r)^2\leqq \Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2.$$

Nierówność ta nosi zwykle nazwę nierówności Schwarza.

11. Jeżeli $a_1, a_2, \ldots a_n$ są dodatnie i $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, wówczas

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\leqq 1+s_n+\frac{s_n^2}{2!}+\ldots+\frac{s_n^n}{n!}\,.$$

(*Mathem. Tripos.* 1909).

12. Jeżeli mamy dwa zbiory liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$, uporządkowanych według wielkości, wówczas

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)\leqq n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)$$

13. Jeżeli mamy dwa zbiory liczb $a, b, c, \ldots k$ oraz $A, B, C, \ldots K$, przyczym pierwszy zbiór składa się wyłącznie z liczb dodatnich, wówczas

$$\frac{aA+bB+\ldots+kK}{a+b+\ldots+k}$$

zawiera się pomiędzy algiebraicznie największą i najmniejszą z liczb $A, B, \ldots K$.

14. Jeżeli $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ są niewymiernościami do siebie niepodobnemi i jeżeli $a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}+d\sqrt{(pq)}=0$, gdzie a, b, c, d są liczby wymierne, wówczas musi być $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$.

[Wyrazić $\sqrt{p}$ w postaci $M+N\sqrt{q}$, gdzie M i N są liczbami wymiernemi, i zastosować twierdzenie § 4-go.]

15. Wykazać, iż, jeśli $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernemi, wówczas musi być $a=0$, $b=0$, $c=0$.

16. Jeżeli m, n są liczbami całkowitemi, A zaś jest dowolną liczbą wymierną, wówczas wielomian $\Sigma A(\sqrt{p})^m(\sqrt{q})^n$, czyli suma skończonej liczby wyrazów kształtu $A(\sqrt{p})^m(\sqrt{q})^n$ da się przedstawić w postaci

$$a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}+d\sqrt{pq},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami wymiernemi.

17. Jeżeli a, b, c, d, e, f są liczbami wymiernemi, wówczas $\frac{a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}}{d+e\sqrt{p}+f\sqrt{q}}$ daje się przedstawić w postaci

$$A+B\sqrt{p}+C\sqrt{q}+D\sqrt{pq},$$

gdzie A, B, C, D są liczbami wymiernemi.

[Oczywista rzecz, iż

$$\frac{a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}}{d+e\sqrt{p}+f\sqrt{q}}=\frac{(a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q})(d+e\sqrt{p}-f\sqrt{q})}{(d+e\sqrt{p})^2-f^2q}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q}+\delta\sqrt{pq}}{\varepsilon+\zeta\sqrt{q}},$$

gdzie $\alpha, \beta \ldots \zeta$ są to liczby wymierne, łatwe do wyznaczenia. Pozostaje pomnożyć licznik i mianownik przez $\varepsilon-\zeta\sqrt{p}$.]

Np. dowieść, iż

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

18. Jeżeli a, b, x, y są liczbami wymiernemi, przyczym

$$(ay-bx)^2+4(a-x)(b-y)=0,$$

wówczas albo (I) $x=a$, $y=b$, albo też (II) $1-ab$ oraz $1-xy$ są kwadratami liczb wymiernych.

(*Mathem. Tripos.* 1903).

[Kładąc $a-x=\zeta$, $b-y=\eta$, mamy

$$a^2\eta^2+b^2\zeta^2+(4-2ab)\zeta\eta=0.$$

Wyznaczając z tego równania stosunek (wymierny) ζ/η, widzimy, iż zależy on od liczby

$$\sqrt{(2-ab)^2-a^2b^2}=2\sqrt{1-ab},$$

zatym albo $\zeta=\eta=0$, albo też $1-ab$ musi być kwadratem liczby wymiernej.

Ale to samo równanie można napisać w postaci

$$x^2\eta^2+y^2\zeta^2+(4-2xy)\zeta\eta=0,$$

skąd wynika odpowiedni wniosek, dotyczący $\sqrt{1-xy}$.]

19. Jeżeli są wymierne wszystkie wartości x i y, dane przez równania

$$ax^2+2hxy+by^2=1, \quad a'x^2+2h'xy+b'y^2=1$$

(gdzie a, b, h, a', b', h' są liczbami wymiernemi), wówczas

$$(h-h')^2-(a-a')(b-b') \text{ oraz } (ab'-a'b)^2+4(ah'-a'h)(bh'-b'h)$$

muszą być kwadratami liczb wymiernych.

(*Mathem. Tripos.* 1899.)

20. Wykazać, iż $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ są funkcjami sześciennemi liczby $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ o spółczynnikach wymiernych, i że $\sqrt{2}-\sqrt{6}+3$ jest stosunkiem dwuch funkcji linjowych liczby $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

(*Mathem. Tripos.* 1905).

21. Wyrażenie

$$\sqrt{a+2m\sqrt{a-m^2}}+\sqrt{a-2m\sqrt{a-m^2}}$$

równa się $2m$, jeżeli $2m^2>a>m^2$,
albo też równa się

$$2\sqrt{a-m^2},$$

jeżeli $a>2m^2$.

22. Każdy wielomian, utworzony z liczby $\sqrt[3]{2}$ i mający spółczynniki wymierne, daje się wyrazić w postaci

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4},$$

gdzie a, b, c są liczbami wymiernemi.

Albo ogólniej: każdy wielomian, utworzony z $\sqrt[m]{p}$ i mający spółczynniki wymierne, daje się przedstawić w postaci

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{m-1}x^{m-1},$$

gdzie $x=\sqrt[m]{p}$, liczby zaś a_0, a_1, $a_2 \ldots a_{m-1}$ są wymierne.

[Każdy taki wielomian można napisać w postaci

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_kx^k,$$

gdzie b_0, $b_1 \ldots b_k$ są liczbami wymiernemi. Jeżeli $k\leqq m-1$, zadanie jest rozwiązane: przypuśćmy więc, iż $k>m-1$. i niech x^r będzie jakąś potęgą x wyższą od potęgi $(m-1)$-szej. W takim razie $r=\lambda m+s$, gdzie λ jest liczbą całkowitą, a $0\leqq s\leqq m-1$, czyli $x^r=x^{\lambda m+s}=p^\lambda x^s$. Możemy tedy usunąć wszystkie potęgi x wyższe od $(m-1)$-szej.]

23. Wyrazić $(\sqrt[3]{2}-1)^5$ w postaci $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczby wymierne.

23a. Wyrazić w takiej samej postaci liczbę $(\sqrt[3]{2}-1)/(\sqrt[3]{2}+1)$.

24. Jeżeli
$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0,$$
gdzie a, b, c są wymierne, wówczas $a=b=c=0$.

[Niech będzie $y=\sqrt[3]{2}$; wówczas

$$cy^2+by+a=0,$$

mamy tedy
$$ay^2+2cy+2b=0.$$

Mnożąc te dwa równania odpowiednio przez a i c i odejmując, otrzymujemy

$$y=-(a^2-2bc)/(ab-2c^2),$$

co jest niedorzecznością, gdyż y nie jest liczbą wymierną. Pozostaje tedy tylko przypuszczenie, iż $a^2-2bc=0$, $ab-2c^2=0$.

Mamy więc $ab=2c^2$, $a^4=4b^2c^2$. Jeżeli $ab\neq 0$, dzielimy drugie równanie przez pierwsze i otrzymujemy $a^3=2b^3$, co znowu prowadzi do niedorzeczności, gdyż $\sqrt[3]{2}$ nie może się równać liczbie wymiernej a/b. Musi więc być $ab=0$, $c=0$, a po uwzględnieniu pierwotnego równania, mamy $a=b=c=0$.

Wynika stąd, iż gdy

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=d+e\sqrt[3]{2}+f\sqrt[3]{4}.$$

wówczas $a=d$, $b=e$, $c=f$.

Można dowieść twierdzenia ogólniejszego: jeżeli p nie jest m-tą potęgą liczby wymiernej i jeżeli przy a_0, $a_1 \dots a_{m-1}$ wymiernych, mamy

$$a_0+a_1 p^{1/m}+a_2 p^{2/m}+\dots+a_{m-1} p^{(m-1)/m}=0,$$

wówczas musi być $a_0=a_1=a_2=\dots a_{m-1}=0$. Dowód zresztą jest w tym przypadku trudniejszy].

25. Jeżeli $A+\sqrt[3]{B}=C+\sqrt[3]{D}$, wówczas albo $A=C$, $B=D$, albo też B i D są sześcianami liczb wymiernych.

[Zakładamy $A=C+x$, podnosimy do sześcianu i stosujemy zadanie 20.]

26. Jeżeli $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}=0$, wówczas albo jedna z liczb A, B, C równa się zeru, dwie zaś drugie mają znaki przeciwne i wartości bezwzględne równe, albo też $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$, $\sqrt[3]{C}$ są wymiernemi wielokrotnościami tej samej liczby niewymiernej $\sqrt[3]{X}$.

27. Wyznaczyć dwie liczby wymierne α, β tak, by

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\alpha+\beta\sqrt{2}.$$

28. Jeżeli $(a-b^3)b>0$, wówczas

$$\sqrt[3]{a+\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}+\sqrt[3]{a+\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

jest liczbą wymierną.

[Liczby, znajdujące się pod znakiem pierwiastka sześciennego, dają się przedstawić w postaci

$$\left\{\alpha+\beta\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right\}^3,$$

gdzie α, β są liczbami wymiernemi.]

29. Jeżeli $a=\sqrt[n]{A}$, wówczas wielomian utworzony z a jest pierwiastkiem równania stopnia n o spółczynnikach wymiernych.

[Wielomian, o którym mowa, a który oznaczymy przez x, ma kształt

$$x=l_1+m_1 a+\dots+r_1 a^{(n-1)},$$

gdzie l_1, m_1, ... są liczbami wymiernemi (porów. Zadanie 22).

Tak samo musi być

$$x^2=l_2+m_2 a+\dots+r_2 a^{(n-1)}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x^n=l_n+m_n a+\dots+r_n a^{(n-1)}.$$

Stąd wynika, iż

$$L_1x+L_2x^2+...+L_nx^n=\Delta,$$

gdzie

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & .... & r_1 \\ l_2 & m_2 & .... & r_2 \\ . & . & . & . \\ l_n & m_n & .... & r_n \end{vmatrix}$$

a L_1, L_2... są minorami, odpowiadającemi elementom pierwszej kolumny.]

30. Zastosować powyższą metodę do przypadku $x=p+\sqrt{q}$. [Otrzymujemy

$$x^2-2px+(p^2-q)=0.]$$

30a. Na mocy poprzedniego zadania dowieść, iż jeżeli $p+\sqrt{q}=r+\sqrt{s}$, wówczas albo $p=r$, $q=s$, albo też q, s są kwadratami liczb wymiernych. [Łatwo dostrzec, że jeśli $p+\sqrt{q}$ nie jest liczbą wymierną, musi być

$$x^2-2px+(p^2-q)\equiv x^2-2rx+(r^2-s).]$$

31. Wykazać, iż $y=a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}$ czyni zadość równaniu

$$y^3-3ay^2+3y(a^2-bcp)-a^3-b^3p-c^3p^2+3abcp=0.$$

32. **Liczby algiebraiczne.** Widzieliśmy, że niektóre liczby niewymierne (np. $\sqrt{2}$) mogą być pierwiastkami równania kształtu

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0,$$

gdzie a_0, a_1, a_2 ... a_n są liczbami całkowitemi. Ten rodzaj liczb niewymiernych nazywamy *liczbami algiebraicznemi*, wszystkie zaś inne niewymierne liczby (do których należy np. π) nazywamy *przestępnemi*. Dowieść, że jeśli x jest liczbą algiebraiczną, wówczas algiebraiczne są również liczby kx oraz $x^{m/n}$, gdzie k jest dowolną liczbą wymierną, m zaś i n są to liczby całkowite.

33. Jeżeli x, y są liczbami algiebraicznemi, wówczas algiebraiczne są również liczby $x+y$, $x-y$, xy oraz x/y.

[Istotnie, mamy równania

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m=0$$

$$b_0y^n+b_1y^{n-1}+...+b_n=0$$

gdzie a_0, a_1 ... oraz b_0, b_1 ... są liczbami całkowitemi. Kładąc $x+y=z$, możemy wyrugować zmienną x z tych dwuch równań, przez co otrzymamy

$$c_0z^p+c_1z^{p-1}+...+c_p=0,$$

czyli równanie takiego samego typu, jak poprzednie.]

34. Jeżeli $\qquad \alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+...+\alpha_n=0,$

gdzie α_0, α_1, α_n są dowolnemi liczbami algiebraicznemi, wówczas x musi być liczbą algiebraiczną.

[Mamy $n+1$ równań kształtu

$$a_{0,r}\alpha_r^{m_r}+a_{1,r}\alpha_r^{m_r-1}+\ldots+a_{m_r,r}=0,$$

$(r=0,\ 1,\ 2\ldots,n)$, przyczym wszystkie spółczynniki $a_{0,r}$, $a_{1,r}\ldots$ są liczbami całkowitemi. Pozostaje wyrugować z nich α_0, $\alpha_1\ldots\alpha_n$ przy pomocy pierwotnego równania.]

35. Zastosować ten sposób postępowania do równania

$$x^2-2x\sqrt{2}+\sqrt{3}=0.$$

[Odpowiedź: $x^8-16x^6+58x^4-48x^2+9=0$.]

36. Ułożyć równania o spółczynnikach wymiernych, którym czyniłyby zadość liczby:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad 1+\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\quad \sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\quad \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3},\quad 1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3},\quad \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}.$$

37. Jeżeli $x^3=x+1$, wówczas $x^{3n}=a_nx+b_n+c_n/x$, gdzie

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\quad b_{n+1}=a_n+b_n+c_n,\quad c_{n+1}=a_n+c_n.$$

38. Jeżeli $x^6+x^5-2x^4-x^3+x^2+1=0$ oraz $y=x^4-x^2+x-1$, wówczas y czyni zadość równaniu kwadratowemu o spółczynnikach wymiernych.

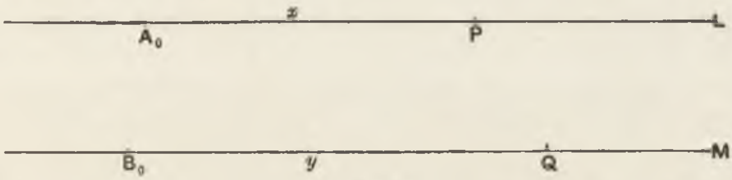
(*Mathem. Tripos.* 1903).

[Odpowiedź: $y^3+y+1=0$.]

ROZDZIAŁ II.

O FUNKCJACH ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ.

9. O pojęciu funkcji. Przypuśćmy, iż x i y są to dwie zmienne rzeczywiste ciągłe. Możemy przedstawić je gieometrycznie, odmierzając na prostych L, M odpowiednie odcinki $A_0P=x$, $B_0Q=y$, poczynając od stałych punktów A_0, B_0. Przypuśćmy dalej, że położenia punktów P, Q nie są od siebie nie-



Rys. 5.

zależne, że przeciwnie istnieje między niemi pewien związek. Możemy wyobrazić sobie, iż związek ten został wyrażony w postaci jakiegoś wzoru, zawierającego dwie zmienne: x i y. W takim razie, o ile znamy P i x, znamy również Q i y. Możemy np. przypuścić, iż związek ten dany jest w postaci równania $y=x$, albo $y=2x$, albo $y={}^1/_2x$, $y=x^2+1$ itp. We wszystkich tego rodzaju przypadkach wartość zmiennej x wyznacza odpowiednią wartość zmiennej y. Równie dobrze moglibyśmy założyć, że związek pomiędzy x i y dany jest nie w postaci wzoru algiebraicznego, lecz za pomocą konstrukcji gieometrycznej, która pozwala na wyznaczenie punktu Q, skoro tylko punkt P jest znany.

Powiadamy w takich wypadkach, iż zmienna y jest **funkcją** zmiennej x. Pojęcie zależności funkcjonalnej jednej zmiennej od innej jakiejś zmiennej jest może najważniejszym pojęciem w całej matematyce wyższej. W niniejszym rozdziale zilustrujemy pojęcie funkcji mnóstwem przykładów, aby czytelnik mógł przekonać się, czy istotnie dokładnie zrozumiał to ważne pojęcie.

Zanim jednak przejdziemy do zilustrowania pojęcia funkcji, musimy zaznaczyć, iż w powyższych prostych przykładach zależności funkcjonalnej można dostrzec trzy cechy, które wcale nie są cechami charakterystycznemi ogólnego pojęcia funkcji, a mianowicie:

(1) w powyższych przykładach zmienna y była w zupełności wyznaczona *dla każdej wartości* zmiennej x;

(2) każdej wartości zmiennej x odpowiadała *jedna i tylko jedna wartość* na y;

(3) związek między x a y był wyrażony zapomocą *wzoru analitycznego.*

Otóż śród najważniejszych funkcji istnieje mnóstwo takich, które posiadają wymienione cechy, ale z dalszych przykładów przekonamy się, iż nie są to cechy istotne funkcji. Natomiast naprawdę istotnym w pojęciu funkcji jest to, że między x i y zachodzi pewien związek, na mocy którego przynajmniej niektórym wartościom na x odpowiadają oznaczone wartości na y.

Przykłady VII. 1. Niech będzie $y=0$, *jakąkolwiek wartość nadamy zmiennej x.* Mamy prawo uważać y za funkcję zmiennej x, gdyż jakąkolwiek wartość nadamy tej zmiennej, zawsze wartość na y jest nam znana (a mianowicie $=0$). W przykładzie tym na mocy związku funkcyjnego wszystkim wartościom zmiennej x odpowiada ta sama wartość na y. Oczywiście postać rzeczy nie zmieniłaby się, gdyby w tych samych warunkach y stale równało się 1, albo $\frac{1}{2}$, albo $\sqrt{2}$ itp. Tego rodzaju funkcję zmiennej x nazywamy *stałą.*

2. Niech będzie $y^2=x$. Jeżeli x jest liczbą dodatnią, wówczas każdej wartości na x odpowiadają *dwie* wartości na y, mianowicie $\pm\sqrt{x}$. Jeżeli $x=0$, wówczas $y=0$. Szczególnej więc wartości $x=0$ odpowiada *tylko jedna* wartość na y. Jeżeli zaś x jest liczbą ujemną, wówczas *niema żadnej wartości* na y, któraby czyniła zadość temu równaniu. Innemi słowy: *funkcja y nie jest wcale wyznaczona dla ujemnych wartości zmiennej x.*

Jak widzimy, funkcja ta posiada cechę (3), lecz nie posiada cech (1) i (2).

3. Weźmy pod uwagę oznaczoną objętość gazu przy stałej temperaturze, zamkniętą w cylindrze z ruchomym tłokiem*).

---

*) Ten pouczający przykład zapożyczyłem z książki: H. S. Carslaw *Introduction to the Calculus.*

Oznaczmy przez A pole poprzecznego przekroju tłoka, przez W ciężar tłoka. Gaz, ściśnięty przez tłok, wywiera na jednostkę pola tłoka ciśnienie p_0, które równoważy jego ciężar W, tak iż mamy

$$W = Ap_0.$$

Niech będzie v_0 objętość gazu w chwili, gdy ten układ jest w równowadze. Jeżeli na tłok położymy jakiś dodatkowy ciężar, tłok opuści się, objętość (v) gazu zmniejszy się, natomiast ciśnienie (p) gazu na jednostkę pola tłoka wzrośnie. Prawo doświadczalne Boyle'a powiada, iż iloczyn p przez v jest, mniej więcej, stały. Gdyby to prawo było ścisłe, wówczas zależność między ciśnieniem a objętością gazu wyrażałaby się wzorem

$$pv = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie a jest liczbą, którą doświadczalnie możnaby w przybliżeniu wyznaczyć.

Prawo Boyle'a jednak daje mniej więcej wierny opis faktów tylko wówczas, gdy ciśnienie nie jest wielkie. Przy zmniejszaniu się v nastaje chwila, kiedy wzór (1) daje wartości na p, zupełnie niezgodne z rzeczywistością. Wiadomo, że w takich razach o wiele lepsze przybliżenie można otrzymać, posługując się t. zw. „prawem van der Waalsa" czyli wzorem

$$\left(p + \frac{\alpha}{v^2}\right)(v - \beta) = \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

gdzie α, β, γ są to liczby, które doświadczalnie można w przybliżeniu wyznaczyć.

Oczywista rzecz, że powyższe dwa równania, nawet razem wzięte, nie dają nam zupełnego obrazu związku pomiędzy p i v. Nie ulega wątpliwości, iż ten związek jest w rzeczywistości o wiele bardziej złożony i że, gdy v się zmienia, forma tego związku zmienia się również, przechodząc od kształtu podobnego do wzoru (1) do kształtu podobnego do wzoru (2). Z punktu widzenia matematycznego mamy zupełne prawo wyobrazić sobie idealny stan rzeczy, przy którym istniałaby taka objętość V, iż dla wszystkich wartości v, mniejszych od V, byłby słuszny wzór (2), dla wszystkich zaś wartości v, większych od V, byłby słuszny wzór (1). W takim razie moglibyśmy uważać, iż równania (1) i (2) razem wzięte wyznaczają p jako pewną funkcję zmiennej v.

Mamy tu przykład funkcji, która *dla jednych wartości zmiennej v jest wyznaczona zapomocą jednego wzoru, dla innych zaś wartości v—zapomocą innego wzoru.*

Funkcja ta posiada cechę (2), gdyż każdej wartości v odpowiada jedna tylko wartość p. Natomiast nie posiada ona cechy (1), gdyż funkcja p nie jest wyznaczona dla wartości ujemnych zmiennej v; istotnie, ujemna objętość nie ma dla nas sensu i stąd ujemnych wartości na v nie bierzemy wcale pod uwagę.

4. Przypuśćmy, iż z wysokości $\frac{1}{2}g\tau^2$ kula idealnie sprężysta spada (nie wirując) na stałą płaszczyznę poziomą i odbija się od niej.

Wiadomo z elementarnej mechaniki, że jeśli h oznacza odległość (w czasie t) kuli od położenia początkowego, wówczas

$$h=\frac{1}{2}gt^2,$$

o ile $0 \geq t \leq \tau$,

$$h=\frac{1}{2}g(2\tau-t)^2,$$

o ile $\tau \leq t \leq 3\tau$,

i wogóle

$$h=\frac{1}{2}g(2n\tau-t)^2,$$

o ile $(2n-1)\tau \leq t \leq (2n+1)\tau$.

W przykładzie tym h jest funkcją czasu t, oznaczoną tylko dla wartości dodatnich zmiennej t.

Czytelnik powinien poszukać w zagadnieniach fizycznych innych przykładów funkcji.

5. Przypuśćmy, iż przez y oznaczyliśmy *największy czynnik pierwszy liczby* x. Mamy tu przykład funkcji, wyznaczonej tylko dla szczególnych wartości zmiennej x, mianowicie dla wartości całkowitych. „Największy czynnik pierwszy liczby $\frac{1}{2}$, albo $\sqrt{2}$, albo liczby π" nic wogóle nie znaczy. Tak więc funkcja nasza nie posiada cechy (1); posiada ona cechę (2), ale nie posiada cechy (3), gdyż związku między y a x nie umiemy wyrazić wzorem analitycznym.

6. Przez y oznaczmy *mianownik liczby* x, *gdy liczba ta została przedstawiona w postaci ułamka nieskracalnego*. Mamy tu przykład funkcji, wyznaczonej tylko dla wartości *wymiernych* zmiennej x. Np. $y=7$, jeśli $x=-{}^{11}/_{7}$, ale przy $x=\sqrt{2}$, y nie jest wcale wyznaczone, gdyż „mianownik liczby $\sqrt{2}$" niema żadnego sensu.

7. Przez y oznaczmy wyrażony w calach *wzrost policjanta* x *w mieście* A, *dnia* 8 *sierpnia* 1907 *r. o godzinie* 5.30 *po południu*. W tym przykładzie y jest funkcją zmiennej x, wyznaczoną tylko dla niektórych wartości całkowitych x, mianowicie dla $x=1, 2, 3 \ldots N$, gdzie N oznacza liczbę policjantów w mieście A w takiej a takiej chwili.

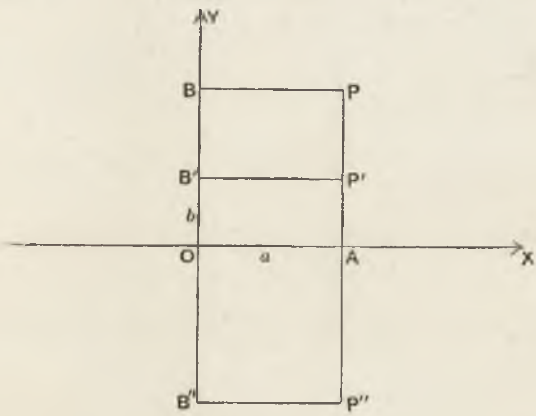
10. Wykreślne przedstawienie funkcji. Geometrja analityczna dwuwymiarowa. Przypuśćmy, iż zmienna y jest funkcją zmiennej x. Wobec istnienia związku funkcjonalnego między x i y, moglibyśmy, wogóle biorąc, uważać równie dobrze x za funkcję zmiennej y, ale na razie będziemy się trzymali pierwszego punktu widzenia. Nazwiemy x *zmienną niezależną*, y zaś *zmienną zależną*. Jeśli rodzaj zależności funkcjonalnej nie jest bliżej określony, wyrażamy tę zależność ogólną formą równania

$$y=f(x).$$

Zamiast symbolu $f(x)$ będziemy nieraz pisali $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ i t. p.

W wielu wypadkach można z łatwością zilustrować istotę poszczególnych funkcji w następujący sposób: kreślimy dwie prostopadłe do siebie proste OX, OY i, obrawszy dowolną jednostkę miary, odkładamy na tych prostych, poczynając od punktu O, odcinki, których długości odpowiadają wartościom x i y. Oczywista rzecz, iż musimy przy tym uwzględniać znaki tych liczb, t. j. musimy na prostych OX, OY obrać zwroty dodatnie, które zazwyczaj oznaczamy strzałkami (porów. rys. 6).

Niech będzie a wartość zmiennej x, przy której zmienna y posiada jedną tylko, w zupełności wyznaczoną wartość b. Odłóżmy odcinki $OA=a$, $OB=b$ i zbudujmy na nich prostokąt $OAPB$. Wyznaczenie na rysunku punktu P możemy uważać za równoznaczne ze wskazaniem, iż wartości $x=a$ odpowiada wartość $y=b$.



Rys. 6.

Gdyby wartość $x=a$ odpowiadała *kilku* naraz wartościom y (np. b, b', b''...), wówczas zamiast jednego punktu P mielibyśmy kilka punktów P, P', P''...

Punkt P nazwiemy *punktem* (a, b); a i b nazwiemy *spółrzędnemi punktu P w odniesieniu do osi OX, OY*, przyczym a będziemy nazywali *odciętą*, b zaś *rzędną* punktu P. Proste OX, OY nazywamy *osiami spółrzędnych*, a mianowicie OX nazywa się *osią odciętych* albo *osią x-ów*, OY zaś *osią rzędnych* albo *osią y-ów*. Punkt O nazywamy *początkiem spółrzędnych* albo krótko: *początkiem*.

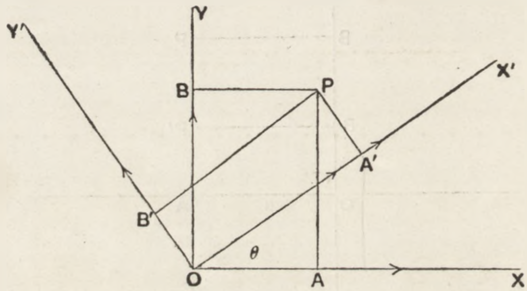
Przykłady VIII. 1. Niech będzie P punkt (a, b), Q zaś punkt (α, β). Wykreślić równoległobok $OPRQ$ i wykazać, że R jest punktem $(a+\alpha, b+\beta)$.

2. Środkiem odcinka PQ jest punkt $\left(\frac{a+\alpha}{2}, \frac{b+\beta}{2}\right)$.

3. Ogólniej rzecz biorąc, punkt, dzielący odcinek PQ w stosunku $\rho:\lambda$, jest punktem $\left(\frac{\lambda a+\rho\alpha}{\lambda+\rho}, \frac{\lambda b+\rho\beta}{\lambda+\rho}\right)$. Wzory te dają nam spółrzędne każdego punktu na odcinku PQ, jeżeli w odpowiedni sposób dobierzemy stosunek $\rho:\lambda$.

4. Jeżeli w punktach (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... (a_n, b_n) znajdują się cząstki materjalne o równych masach, wówczas środek masy układu znajduje się w punkcie $\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}, \frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}\right)$.

5. **Zmiana osi spółrzędnych.** Przez punkt O poprowadźmy proste OX', OY', tworzące z osiami OX, OY kąt ϑ (rys. 7). Wykreślmy PA' PB' prostopadle do OX', OY'. Rzecz jasna, iż punkt P jest równie dobrze wyznaczony przez OA', OB', jak i przez OA, OB. Niech będzie $OA=x$, $OB=y$, $OA'=x'$, $OB'=y'$. W takim razie x', y' są to *spółrzędne punktu P w odniesieniu do nowych osi OX', OY'.*



Rys. 7.

Dowieść, iż $x'=x\cos\vartheta+y\sin\vartheta$, $y'=-x\sin\vartheta+y\cos\vartheta$, i wyrazić x i y w zależności od x', y'.

6. W poprzednim zadaniu początek spółrzędnych pozostawał bez zmiany, nowe zaś osie były nachylone do dawnych pod kątem ϑ. Moglibyśmy jednak wykreślić nowe osie równolegle do dawnych tak, by nowym początkiem spółrzędnych był punkt O'. Przypuśćmy, iż spółrzędne punktu O' w odniesieniu do dawnych osi są α, β. Wyrazić x', y' zapomocą x, y, i odwrotnie.

7. Obierzmy nowy początek spółrzędnych O' i poprowadźmy nowe osie, nachylone do dawnych pod dowolnym kątem. Opierając się na przykł. 5 i 6-ym, dowieść, iż x', y' można wyrazić w postaci $x'=ax+by+c$, $y'=dx+ey+f$, gdzie a, b ... f są liczbami, niezależnemi od x i y.

11. Równanie linji prostej. Przypuśćmy, że zmienna y została określona dla pewnych wartości a zmiennej x i że dla każdej takiej wartości a wyznaczyliśmy odpowiadającą jej wartość b zmiennej y oraz odpowiadający tym liczbom a, b punkt P (albo ogólniej: wyznaczyliśmy wartości b', b'', b'''... i punkty P', P'', P'''..., odpowiadające wartości a zmiennej x). Zbiór wszystkich takich punktów P zowiemy **wykresem** funkcji y.

Weźmy najprostszy przykład. Dajmy na to, że y zostało określone, jako funkcja zmiennej x, za pomocą równania

$$ax+by+c=0 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

w którym a, b, c są liczbami stałemi. W takim razie y jest funkcją zmiennej x, posiadającą cechy (1), (2), (3), wymienione w § 9-ym. Z łatwością można wykazać, że *wykres tej funkcji jest linją prostą*.

Przypuśćmy najpierw, że $a=0$. W takim razie y posiada stałą wartość $-c/b$, zatym wszystkie punkty P, odpowiadające tej funkcji, leżą na prostej, równoległej do osi OX i odległej od tej osi o $-c/b$ jednostek. I odwrotnie: dla każdego punktu tej prostej mamy $y=-c/b$. Widzimy tedy, iż wykresem tej funkcji jest pewna prosta, równoległa do OX.

Przypuśćmy dalej, że a nie równa się zeru i że (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) są dwoma punktami, leżącemi na wykresie naszej funkcji. W takim razie musi być

$$ax_1+by_1+c=0 \quad \text{i} \quad ax_2+by_2+c=0 \quad \dots\dots \quad (2)$$

Wiemy (Przykł. VIII, 3), że jeśli jakikolwiek punkt P leży na prostej, łączącej punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2), wówczas spółrzędne punktu P dają się wyrazić w postaci

$$\xi=\frac{\lambda x_1+\mu x_2}{\lambda+\mu}, \quad \eta=\frac{\lambda y_1+\mu y_2}{\lambda+\mu}.$$

Jeżeli równania (2) pomnożymy odpowiednio przez λ i μ, i dodamy, sumę zaś podzielimy przez $\lambda+\mu$, otrzymamy

$$a\xi+b\eta+c=0.$$

Równanie to wskazuje, że punkt P leży na wykresie funkcji y, czyli, że wykres zawiera wszystkie punkty prostej, o której mowa. Nie może też wykres zawierać żadnych innych punktów. W rzeczy samej, prosta ta nie jest równoległa do osi OX (albowiem y nie ma wartości stałej), wskutek czego każdej dowolnej wartości zmiennej y odpowiada jeden tylko punkt na prostej, łączącej punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2); gdyby więc wykres naszej funkcji zawierał jakiś punkt (x', y') nie leżący na prostej, wówczas z równania $ax+by+c=0$ powinnibyśmy otrzymać dwie wartości na x, dając na y wartość y'. Otóż wiemy, że tak nie jest, zatym wykres naszej funkcji zawiera wszystkie punkty tej prostej i nie zawiera żadnych innych.

Będziemy się nieraz posługiwali innym sposobem wysłowienia. Jeżeli x i y zmieniają się w ten sposób, że równanie (1) pozostaje zawsze słuszne, będziemy mówili, iż *miejscem gieometrycznym punktu (x, y) jest prosta*, równanie zaś (1) będziemy nazywali *równaniem tego miejsca*, albo też będziemy mówili, że równanie (1) *przedstawia* owo miejsce gieometryczne. O „miejscu gieometrycznym“, o „równaniu miejsca gieometrycznego“ możemy mówić we wszystkich tych przypadkach, kiedy wykres funkcji y jest krzywą, w zwykłym znaczeniu tego wyrazu*), i kiedy związek pomiędzy zmiennemi x i y daje się ująć w postaci wzoru analitycznego.

Poprzednie rozumowanie nie stosuje się do przypadku, gdy $b=0$. Równanie (1) daje wtedy $x=-c/a$, tak iż odległość punktów P od osi OY jest stała, czyli wszystkie punkty P leżą na równoległej do tej osi. W danym przypadku w równaniu niema wcale zmiennej y, nie można jej tedy uważać za funkcję zmiennej x. Ale za to mamy prawo uważać x za funkcję zmiennej y, mianowicie za stałą $-c/a$, gdyż jakąkolwiek damy wartość na y, zawsze $x=-c/a$.

Równanie $ax+by+c=0$ jest ogólnym równaniem pierwszego stopnia, gdyż $ax+by+c$ jest najogólniejszym wielomianem, jaki można utworzyć z pierwszych potęg zmiennych x, y. Doszliśmy więc do wniosku, iż *ogólne równanie stopnia pierwszego przedstawia prostą*. Równie łatwo można dowieść odwrotnego twierdzenia: *równanie prostej jest zawsze równaniem pierwszego stopnia*. Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Przykłady IX. 1. Prosta $ax+by+c=0$ tworzy z osią OX kąty równe $\mathrm{arctg}(-a/b)$ i $\pi-\mathrm{arctg}(-a/b)$, gdzie $\mathrm{arctg}\lambda$ oznacza najmniejszy kąt, którego styczna równa się λ.

---

*) Oczywista rzecz, iż pojęcie „krzywej“ zawiera, jako szczególny przypadek, pojęcie prostej. W przykładach XVI pozna czytelnik funkcje, których „wykres“ nie jest krzywą, w zwykłym znaczeniu tego wyrazu.

2. Jeżeli punkt P leży na prostej, a x', y' są określone takiemi wzorami, jak w Przykl. VIII. (5). wówczas mamy równanie

$$Ax'+By'+C=0,$$

gdzie $A=a\cos\vartheta+b\sin\vartheta$, $B=b\cos\vartheta-a\sin\vartheta$.

Nazywamy je *równaniem prostej, odniesionej do nowych osi OX', OY'*. Jest to związek, zachodzący między nowemi spółrzędnemi x', y'. Podkreślamy, iż równanie to jest stopnia pierwszego, czego zresztą można się było spodziewać, gdyż dowód twierdzenia, iż równanie prostej jest stopnia pierwszego, nie był zależny od wyboru osi.

3. Punkt przecięcia się prostych $ax+by+c=0$ i $a'x+b'y+c'=0$ ma spółrzędne

$$\frac{bc'-cb'}{ab'-a'b},\quad \frac{a'c-c'a}{ab'-a'b}.$$

Wyjątek stanowi przypadek, gdy $ab'-a'b=0$; proste są wtedy równoległe do siebie.

4. Styczne trygonometryczne kątów, utworzonych przez proste poprzedniego zadania, równają się

$$\pm\frac{ab'-a'b}{aa'+bb'}.$$

Proste są do siebie prostopadłe, jeżeli $aa'+bb'=0$.

5. Długość prostopadłej, poprowadzonej z punktu (ξ, η) do prostej $ax+by+c=0$, równa się

$$\frac{a\xi+b\eta+c}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

uważamy ją za liczbę dodatnią, jeżeli przy $c>0$ punkt (ξ, η) leży z tej samej strony prostej, co punkt O, lub jeśli przy $c<0$ dwa te punkty leżą po różnych stronach prostej. W przeciwnym razie długość prostopadłej jest ujemna.

6. Równanie $(ax+by+c)+\lambda(a'x+b'y+c')=0$ przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych $ax+by+c=0$ i $a'x+b'y+c'=0$. Wybierając odpowiednio spółczynnik λ, możemy w ten sposób przedstawić każdą prostą, przechodzącą przez ten punkt. Zbadać przypadek, gdy $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$.

7. Ułożyć równanie prostej, przechodzącej przez punkt przecięcia się dwuch danych prostych, i prostopadłej do trzeciej danej prostej.

8. Równanie koła, mającego środek w punkcie (a, b) i promień równy r, jest

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Odwrotnie: każde równanie tego kształtu przedstawia koło.

9. Najogólniejsze równanie *drugiego* stopnia, nie zawierające wyrazu xy i mające równe spółczynniki przy x^2 i y^2, ma kształt

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0.$$

Dowieść, iż jest to równanie koła, jeżeli $f^2+g^2>ac$. Zbadać przypadek, gdy $f^2+g^2\leqq ac$.

10. Sprawdzić, iż zmiana osi nie powoduje zmiany kształtu ogólnego równania koła (Przykład 9).

11. Ogólne równanie koła, przechodzącego przez punkt przecięcia się dwuch kół

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \text{oraz} \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2,$$

jest

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2+\lambda\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\rho^2\}=0.$$

12. Jeżeli $\lambda=-1$, równanie, o którym mowa w poprzednim zadaniu, jest tylko pierwszego stopnia i przedstawia *spólną cięciwę* danych dwu kół.

13. Dwa koła

$$x^2+y^2+2dx+2ey+k^2=0\,,\quad x^2+y^2+2\delta x+2\varepsilon y+\varkappa^2=0$$

przecinają się, jeżeli

$$d^2+e^2-k^2>0\;,\quad \delta^2+\varepsilon^2-\varkappa^2>0$$

oraz

$$4(d^2+e^2-k^2)(\delta^2+\varepsilon^2-\varkappa^2)>(2d\delta+2e\varepsilon-k^2-\varkappa^2)^2.$$

14. Dowieść, że koła poprzedniego przykładu przecinają się pod kątem prostym, jeżeli

$$2d\delta+2e\varepsilon-k^2-\varkappa^2=0.$$

15. Pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty $(x_1,\,y_1)$, $(x_2,\,y_2)$ $(x_3,\,y_3)$, równa się

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Oprzeć na tym dowód twierdzenia § 11-go.

Przykłady X. 1. Punkt porusza się tak, że (1) odległość jego od danej prostej jest stała: (2) odległości jego od dwu danych prostych są sobie równe. Dowieść (*a*) za pomocą rozumowania gieometrycznego, (*b*) za pomocą rozumowania, opartego na § 11-ym i na Przykł. IX. 5, że w obu wypadkach miejsce gieometryczne tego punktu składa się z dwuch prostych.

2. Odległości punktu P od kilku prostych danych równają się p', p'', p'''... Punkt P porusza się tak, że

$$ap'+bp''+cp'''+\ldots=0,$$

przyczym a, b, c... są stałe. Dowieść, że miejsce punktu P składa się z kilku prostych.

3. A, B są stałe punkty, P zaś jest punkt ruchomy, przyczym mamy zawsze (I) $\lambda.AP^2+\mu.BP^2=$stałej, albo (II) $AP/BP=$stałej. Dowieść, że w obu wypadkach miejscem punktu P jest okrąg koła.

4. Odcinek o stałej długości porusza się tak, że końce jego znajdują się zawsze na osiach OX, OY. Znaleźć równanie miejsca punktu P, który dzieli odcinek w stosunku $\lambda:\mu$.

[Przypuśćmy, że odcinek AB spotyka oś OX w A, oś OY w B, i niech będzie $OA=a$, $OB=b$. Spółrzędne punktu P, o którym mowa, są $\frac{\lambda a}{\lambda+\mu}$, $\frac{\mu b}{\lambda+\mu}$. Mamy również a^2+b^2 stałej, powiedzmy $=c^2$. Jeśli więc mamy

$$x=\frac{\lambda a}{\lambda+\mu}, \quad y=\frac{\mu b}{\lambda+\mu},$$

wówczas

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}=\frac{c^2}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Jeżeli $\lambda=\mu$, czyli jeżeli P jest środkiem odcinka AB, wówczas otrzymane równanie staje się równaniem koła.]

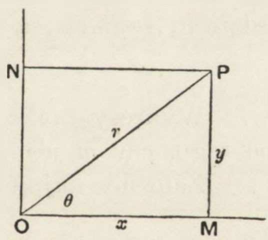
5. Odcinek o stałej długości porusza się tak, że końce jego opierają się na okręgu danego koła. Dowieść, że każdy punkt, dzielący ten odcinek w stałym stosunku, zakreśla koło spółśrodkowe.

12. O spółrzędnych biegunowych. Położenie punktu P na płaszczyźnie wyznaczaliśmy dotąd zapomocą odcinków $OM=x$, $MP=y$. Jeżeli oznaczymy odcinek OP przez r, kąt zaś $\sphericalangle MOP$ przez ϑ (przyczym kąt ϑ będziemy zawsze mierzyli w zwrocie dodatnim i będziemy zawsze zakładali $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$), wówczas otrzymamy związki następujące:

$$x=r\cos\vartheta\ ; \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y=r\sin\vartheta\ , \quad \cos\vartheta : \sin\vartheta : 1 = x : y : r.$$

Widzimy, że położenie punktu P moglibyśmy równie dobrze wyznaczyć, znając wartości r i kąta ϑ. Nazywać będziemy r, ϑ *spółrzędnemi biegunowemi* punktu P. Spółrzędną r będziemy zawsze uważali za dodatnią.



Rys. 8.

Jeżeli P zakreśla krzywą, wówczas zmieniają się r i ϑ, przyczym zachodzi między niemi pewna zależność, którą możemy wyrazić, pisząc $r=f(\vartheta)$ albo $\vartheta=F(r)$. Takie równania nazwiemy *równaniami biegunowemi* danych miejsc gieometrycznych. Od równania biegunowego możemy przejść do równania w zmiennych x, y i odwrotnie, a to za pomocą powyżej otrzymanych wzorów.

Należy zauważyć, że spółrzędne (x, y) i (r, ϑ) są to tylko dwa przykłady „układów spółrzędnych", które służą do wyznaczania położenia punktu P. Układów takich można przytoczyć dowolną ilość.

Przykłady XI. 1. Równanie biegunowe prostej ma kształt

$$r\cos(\vartheta-\alpha)=p,$$

gdzie p i α są stałe.

2. Równanie $r=2a\cos\vartheta$ przedstawia koło, przechodzące przez początek spółrzędnych. To samo powiedzieć można o równaniach $r=2a\sin\vartheta$ oraz $r=\lambda\cos\vartheta+\mu\sin\vartheta$. Znaleźć długość promieni tych kół.

3. Ogólne równanie koła w spółrzędnych biegunowych ma kształt

$$r^2+c^2-2rc.\cos(\vartheta-\alpha)=a^2,$$

gdzie a, c i α są stałe.

13. Dalsze przykłady funkcji oraz ich wykresów. We wszystkich przykładach IX i X mieliśmy do czynienia tylko z dwiema bardzo prostemi funkcjami zmiennej x, mianowicie z funkcjami y, określonemi za pomocą równań $ax+by+c=0$ i $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. Tylko w przykładzie X, 4 natrafiliśmy na nieco ogólniejszy typ związku funkcjonalnego. Podamy teraz szereg przykładów, z których czytelnik przekona się o istnieniu nieskończenie wielu różnych typów funkcji.

A. **Wielomiany.** Wielomianem, utworzonym ze zmiennej x, albo krócej: wielomianem zmiennej x będziemy nazywali każdą funkcję, mającą kształt

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m,$$

gdzie a_0, $a_1 \ldots a_m$ są to stałe. Najprostsze typy wielomianów są

$$y=x,\ y=x^2,\ \ldots\ y=x^m.$$

Wykresy funkcji $y=x^m$ bywają dwuch rodzajów, zależnie od tego, czy m jest parzyste czy nieparzyste.

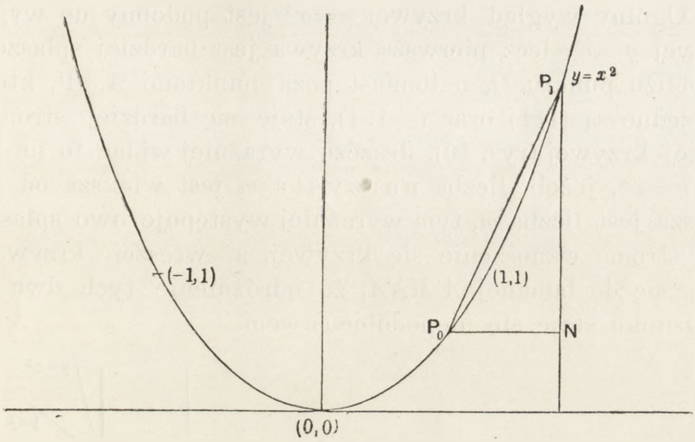
Założmy najpierw $m=2$. Trzy punkty

$$(0,0),\quad (1,1),\quad (-1,1)$$

leżą na wykresie. Dowolną liczbę punktów wykresu możemy wyznaczyć, dając na x różne wartości. Np.

$$\begin{array}{lllllll} \text{wartościom} & x=\frac{1}{2}, & 2, & 3, & -\frac{1}{2}, & -2, & -3 \\ \text{odpowiadają} & y=\frac{1}{4}, & 4, & 9, & \frac{1}{4}, & 4, & 9. \end{array}$$

Jeżeli czytelnik zaznaczy na rysunku dostateczną ilość takich punktów, będzie mógł przypuszczać, że wykres funkcji $y=x^2$ wygląda, mniej więcej, tak, jak krzywa na rys. 9. Jeśli teraz czytelnik poprowadzi przez zaznaczone punkty krzywą i wyliczy nowe wartości zmiennej y, odpowiadające nowym wartościom na x, przekona się, że odpowiednie punkty leżą tak blizko krzywej, jak tylko można było tego oczekiwać, uwzględniając nieuniknione błędy rysunku.



Rys. 9.

Powstaje tu pytanie natury zasadniczej, na które jednak nie możemy jeszcze dać dokładnej odpowiedzi. Czytelnik posiada niewątpliwie wyobrażenie krzywej c i ą g ł e j, bez przerw i skoków, t. j. takiej krzywej, jaką z gruba przedstawia rys. 9. Otóż powstaje pytanie, czy wykres funkcji $y=x^2$ jest istotnie taką *krzywą ciągłą?* Dowieść, że tak jest, nie możemy przez wyznaczanie coraz większej ilości punktów, jakkolwiek im więcej punktów wykresu wyznaczymy, tym bardziej prawdopodobnym staje się przypuszczenie, że mamy do czynienia z krzywą ciągłą.

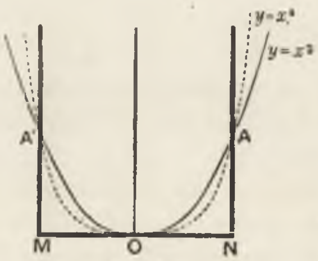
Dopiero w rozdziale IV będziemy mogli dać wyczerpującą odpowiedź na to pytanie. W rozdziale tym zbadamy szczegółowo intuicyjne pojęcie ciągłości, co da nam możność dowiedzenia, że wszystkie wykresy, jakie dotąd rozpatrywaliśmy lub jakie roztrząsać będziemy w niniejszym rozdziale, są krzywemi ciągłemi. Na razie może czytelnik poprzestać na wykreślaniu krzywych zgodnie z intuicją.

Z łatwością można się przekonać, że krzywa $y=x^2$ w każdym punkcie jest zwrócona swą *stroną wypukłą* ku osi x-ów. Niech będą P_0, P_1 punkty (x_0, x_0^2), (x_1, x_1^2). W takim razie

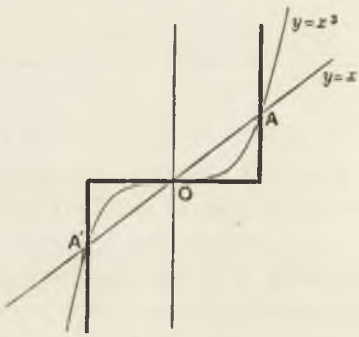
$$\operatorname{tg} NP_0P_1 = \frac{NP_1}{P_0N} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = x_0 + x_1 .$$

Jeżeli P_0 jest stałym punktem, P_1 zaś zmiennym (czyli x_0 jest stałą liczbą, x_1 zmienną), wówczas $\operatorname{tg} NP_0P_1$ wzrasta wraz ze wzrastaniem x_1, czyli wzniesienie cięciwy P_0P_1 staje się coraz bardziej strome.

Ogólny wygląd krzywej $y=x^4$ jest podobny do wyglądu krzywej $y=x^2$, lecz pierwsza krzywa jest bardziej spłaszczona w pobliżu punktu O, natomiast poza punktami A, A', których spółrzędne są $(1, 1)$ oraz $(-1, 1)$, staje się bardziej stromą od drugiej krzywej (rys. 10). Jeszcze wyraźniej widać to na krzywej $y=x^m$, jeżeli liczba p a r z y s t a m jest większa od 4. Im większa jest liczba m, tym wyraźniej występuje owo spłaszczenie i strome wznoszenie się krzywej, aż wreszcie krzywa tak zbliża się do łamanej $A'MNA$, że odróżnienie tych dwu linji na rysunku staje się niepodobieństwem.



Rys. 10

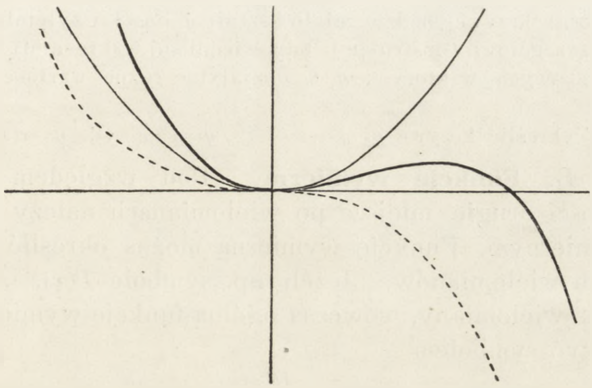


Rys. 11.

Czytelnik powinien zbadać z kolei krzywe $y=x^m$ w przypadku, gdy m jest liczbą n i e p a r z y s t ą. Krzywe te zasadniczo różnią się od poprzednich tym, że przy m parzystym mamy $(-x)^m = x^m$, zatym odpowiednie krzywe są symetryczne względem osi OY, natomiast przy m nieparzystym mamy $(-x)^m = -x^m$, zatym y jest liczbą ujemną, gdy x jest ujemne. Na rys. 11 mamy wykresy krzywych $y=x$, $y=x^3$ oraz łamaną, do której zbliża się kształt krzywej $y=x^m$, gdy liczba nieparzysta m rośnie.

Teraz już łatwo zorjentować się, w jaki sposób można, przynajmniej teoretycznie, zbudować wykres każdego wielomianu. Przedewszystkim z wykresu funkcji $y = x^m$ można odrazu otrzymać wykres funkcji $y=Cx^m$, gdzie C jest stałą; wystarczy w tym celu pomnożyć przez C wszystkie rzędne pierwszej krzywej. Jeżeli zaś mamy wykresy funkcji $f(x)$ i $F(x)$, otrzymujemy wykres funkcji $f(x)+F(x)$, dodając do siebie rzędne odpowiednich punktów pierwszych dwuch krzywych.

Na rys. 12 mamy zbudowany w ten sposób wykres funkcji $y=2x^2-x^3$. Cienka linja odpowiada funkcji $y=2x^2$, kropkowana funkcji $y=-x^3$. Przy wykreślaniu tych funkcji obraliśmy na osi OY skalę cztery razy mniej-



Rys. 12.

szą niż na osi x-ów, a to w tym celu, żeby rysunek nie wypadł zbyt duży. Takie postępowanie bywa nieraz potrzebne: oczywista rzecz, że skala na jednej osi może być dowolną ilość razy mniejsza od skali, obranej na drugiej osi.

Nad sprawą wykreślania wielomianów nie będziemy się zatrzymywali, gdyż poznamy później metody, które ogromnie ułatwiają budowanie takich wykresów.

Przykłady XII. 1. Wykreślić krzywe $y=7x^4$, $y=3x^5$, $y=x^{10}$.

[Wykresy winny być sporządzone bardzo starannie, przy odpowiednio dobranych skalach na osiach, przyczym wszystkie trzy krzywe należy wykreślić na j e d n y m r y s u n k u. W ten sposób czytelnik uprzytomni sobie, z jak wielką prędkością rosną wyższe potęgi zmiennej x, gdy zmienna ta rośnie; uprzytomni sobie dalej, że w wielomianach takich, jak

$$x^{10}+3x^5+7x^4$$

(lub nawet $x^{10}+30x^5+700x^4$), t y l k o p i e r w s z y wyraz gra ważną rolę, gdy na x dajemy wartości dość duże. Np. już dla $x=4$, mamy $x^{10}>1000000$, gdy tymczasem $30x^5<35000$, a $700x^4<180000$; jeżeli damy na x wartość 10, przewaga wyrazu x^{10} wystąpi jeszcze wyraźniej].

2. Porównać względne wielkości liczb x^{12}, $1000000x^6$, $1000000000000x$ przy wartościach $x=1$, 10, 100 i t. d.

[Radzimy czytelnikowi przerobić kilka takich przykładów, gdyż pojęcie *względnej prędkości wzrastania* różnych funkcji jest bardzo ważnym pojęciem, którym w dalszym ciągu często będziemy się posługiwali].

3. Wykreślić krzywą $y=ax^2+2bx+c$.

[Mamy tu $y-\dfrac{ac-b^2}{a}=a\left\{x+\dfrac{b}{a}\right\}^2$. Jeżeli obierzemy nowe osie, równoległe do dawnych i mające początek w punkcie $\left(-\dfrac{b}{a}, \dfrac{ac-b^2}{a}\right)$, wówczas nowe równanie krzywej będzie miało kształt $y'=ax'^2$. Czytelnik powinien przerobić szczegółowo (ilustrując je odpowiedniemi wykresami) kilka przykładów liczbowych, w których a, b, c miałyby różne wartości dodatnie i ujemne].

4. Wykreślić krzywe $y=x^3-3x+1$; $y=x^2(x-1)$; $y=x(x-1)^2$.

14. B. Funkcje wymierne. Pod względem prostoty i doniosłości drugie miejsce po wielomianach należy się funkcjom wymiernym. Funkcję wymierną można określić jako iloraz dwuch wielomianów. Jeżeli np. symbole $P(x)$, $Q(x)$ oznaczają dwa wielomiany, wówczas ogólną funkcję wymierną można oznaczyć symbolem

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $Q(x)$ równa się jedności lub innej jakiejś stałej, czyli gdy nie zawiera zmiennej x, funkcja $R(x)$ staje się wielomianem; tak więc klasa wielomianów zawiera się, jako przypadek szczególny, w klasie funkcji wymiernych. Należy zwrócić baczną uwagę na następujące kwestje, odnoszące się do określenia funkcji wymiernej:

(1) Zakładamy zazwyczaj, że $P(x)$ i $Q(x)$ nie mają spólnego czynnika kształtu $x+a$ lub kształtu $x^p+ax^{p-1}+bx^{p-1}+\ldots+k$, że wszystkie takie czynniki zostały uprzednio usunięte za pomocą dzielenia.

(2) Należy jednak zauważyć, że to *usuwanie spólnych czynników zmienia, naogół biorąc, samą funkcję.* Weźmy jako przykład funkcję wymierną x/x. Po skróceniu otrzymujemy $1/1=1$. Ale pierwotnie dana funkcja n i e z a w s z e równała się 1; tak było istotnie, ale tylko wówczas, gdy $x\neq 0$. Przy $x=0$ pierwotna funkcja miała kształt $0/0$, co wogóle nic nie znaczy. Tak więc funkcja wymierna x/x ma wartość 1, gdy $x\neq 0$, nie

jest zaś wcale określona dla wartości zmiennej niezależnej $x=0$, zatym różni się od „funkcji $1/1$", która ma zawsze wartość 1.

(3) Funkcję

$$\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\Big/\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right)$$

można przedstawić, według ogólnych reguł algiebraicznych, w postaci

$$\frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2(x+1)},$$

czyli w typowej postaci funkcji wymiernej. Ale i tu musimy zaznaczyć, że przekształcenie nie zawsze jest uprawnione. Chcąc wyznaczyć wartość funkcji, odpowiadającą danej wartości zmiennej niezależnej, powinniśmy wykonać odnośne podstawienie w pierwotnej formie funkcji. W naszym przykładzie pierwotnie dana funkcja jest nieokreślona przy $x=-1, 1, 0, 2$; we wszystkich tych przypadkach funkcja nie ma żadnego sensu. Natomiast funkcja przekształcona jest nieokreślona przy $x=\pm 1$, lecz przy $x=0$ lub $x=2$ ma wartość 0. Widzimy tedy, że dwie te funkcje nie są, ściśle biorąc, równoważne sobie.

(4) Jak widać z poprzedniego przykładu, funkcja wymierna może nie być określona dla pewnych wartości zmiennej niezależnej; są to mianowicie te wartości, przy których mianownik funkcji równa się zeru. Np. funkcja $(x^2-7)/(x^2-3x+2)$ jest nieokreślona przy $x=1$ lub $x=2$.

(5) Mając do czynienia z funkcjami takiemi, jak wymienione pod (2) i (3), często umawiamy się, że nie będziemy zwracali uwagi na wyjątkowe wartości zmiennej x, dla których uproszczenie kształtu funkcji nie jest uprawnione, i że będziemy je sprowadzali do typowego kształtu funkcji wymiernych. Przy takim założeniu zachodzi twierdzenie (którego czytelnik dowiedzie sam), że suma, iloczyn i iloraz dwuch funkcji wymiernych jest też funkcją wymierną. Ogólniej można powiedzieć: *funkcja wymierna funkcji wymiernej jest sama funkcją wymierną*, tj. jeżeli mamy $z=P(y)/Q(y)$, gdzie P, Q są wielomianami, i jeśli wykonamy podstawienie $y=P_1(x)/Q_1(x)$, otrzymamy równanie kształtu $z=P_2(x)/Q_2(x)$.

(6) W określeniu *funkcji wymiernej* nie zakładamy bynajmniej, że *stałe* spółczynniki mają być koniecznie *liczbami wymiernemi*. Wyraz „wymierny“ dotyczy w tym określeniu li tylko sposobu, w jaki zmienna x występuje w danej funkcji. Tak więc

$$\frac{x^2+x+\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{4}-\pi}$$

jest funkcją wymierną. Nazwa „funkcja wymierna” powstała stąd, że $P(x)/Q(x)$ możemy utworzyć ze zmiennej x, wykonując na niej skończoną liczbę działań, składających się z mnożenia zmiennej przez nią samą i przez liczby stałe, z dodawania otrzymanych w ten sposób wyrazów i z dzielenia dwuch wielomianów, utworzonych w powyższy sposób.

Do typowej formy funkcji wymiernej daje się sprowadzić każda funkcja, którą można utworzyć ze zmiennej x zapomocą powyższych działań elementarnych, posługując się w każdym stadjum tylko funkcjami zmiennej x, utworzonemi za pomocą tych samych czterech działań. Ogólny rodzaj funkcji, które dają się w ten sposób utworzyć, można zilustrować zapomocą przykładu następującego:

$$\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x+7}{x^2+\dfrac{11x-3\sqrt{2}}{9x+1}}\right):\left(17+\frac{2}{x^2}\right).$$

Rzecz jasna, że taką funkcję można sprowadzić do kształtu $P(x)/Q(x)$.

15. Wykreślanie funkcji wymiernych jest ogromnie ułatwione przez zastosowanie metod, opartych na rachunku różniczkowym. Wobec tego poprzestaniemy na razie na kilku wykresach.

Przykłady XIII. 1. Zbudować wykresy funkcji $y=1/x$, $y=1/x^2$, $y=1/x^3$, ...

[Na rysunku mamy wykresy pierwszych dwuch funkcji. Zauważmy, że wyrażenia $1/0$, $1/0^2$... są pozbawione wszelkiego sensu, zatym funkcje nasze nie są wcale określone dla wartości $x=0$].

2. Wykreślić funkcje $y=x+(1/x)$, $x-(1/x)$, $x+(1/x^2)$, $x-(1/x^2)$, oraz funkcję $y=ax+(b/x)$, dając na a i b różne wartości, dodatnie i ujemne.

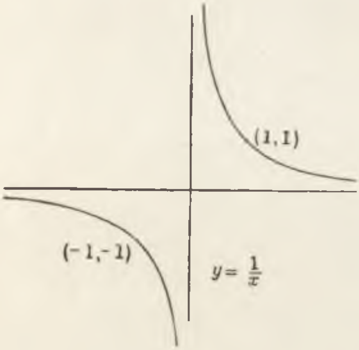
3. Wykreślić funkcje

$$y=\frac{x+1}{x-1},\ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2,\ \frac{x^2+1}{x^2-1},\ \frac{1}{(x-1)^2},\ (x+1)^2-\frac{1}{(x-1)^2}.$$

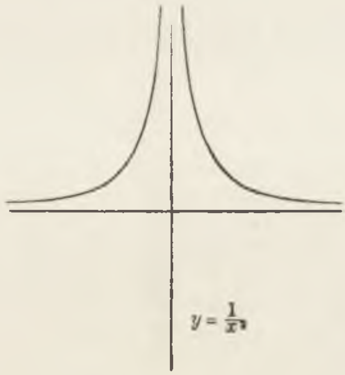
4. Wykreślić funkcje

$$y=\frac{1}{(x-a)(x-b)},\quad y=\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

zakładając, że $a<0<b<c$.



Rys. 13.



Rys. 14.

5. Naszkicować ogólny kształt, który przybierają krzywe $y=1/x^m$, gdy m rośnie nieograniczenie. Rozróżnić przytym dwa przypadki: gdy m jest liczbą parzystą i gdy m jest nieparzyste.

16. C. Funkcje algiebraiczne wyraźne. Następną ważną klasę stanowią *funkcje algiebraiczne wyraźne*, które dają się utworzyć ze zmiennej x zapomocą skończonej liczby dodawań, odejmowań, mnożeń, dzieleń, potęgowań i pierwiastkowań. Takiemi są np. funkcje

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}},\quad \sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{x^2+x+\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{2}+\pi}\right)^{3/2},$$

jak również funkcja $x^{m/n}$, gdzie m, n są to liczby całkowite.

Funkcje te różnią się zasadniczo od wymiernych, i to pod dwoma względami. Przedewszystkim funkcja wymierna jest zawsze określona dla wszystkich wartości x, z wyjątkiem skończonej liczby wyjątkowych wartości tej zmiennej. Natomiast funkcja $\sqrt{x}$ nie jest wcale określona dla nieskończenie wielu wartości x (mianowicie dla wartości ujemnych). Powtóre, każdej wartości x, przy której funkcja jest określona, odpowiada zazwyczaj kilka różnych wartości funkcji. Np. przy $x>0$, funkcja $\sqrt{x}$ ma zawsze dwie wartości o różnych znakach.

Przykłady XIV. 1. Funkcja $\sqrt{(x-a)(b-x)}$, gdzie $a<b$, jest określona tylko dla wartości zmiennej niezależnej, danych przez nierówności $a\leqq x\leqq b$. Jeżeli $a<x<b$, funkcja ma dwie wartości: jeżeli $x=a$ lub $x=b$, ma ona jedną tylko wartość, mianowicie zero.

2. Zbadać w podobny sposób funkcje

$$\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}, \text{ jeżeli } a<b<c,$$

$$\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)}, \text{ jeżeli } a<b,$$

$$\sqrt{x(x^2-a^2)}, \quad \sqrt{x+\sqrt{x}},$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$

3. Wykreślić funkcje

$$y=\sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad \sqrt[3]{x^2}, \quad \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

4. Wykreślić funkcje

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, \quad y=b\sqrt{1-(x^2/a^2)}.$$

17. D. **Funkcje algiebraiczne uwikłane.** Z łatwością można sprawdzić, że jeśli

$$y=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1-x}},$$

wówczas
$$\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^6=\frac{(1+x)^3}{(1-x)^2},$$

jeżeli zaś
$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},$$

wówczas
$$y^4-x(4y^2+4y+1)=0.$$

W obu przykładach otrzymanym przez nas równaniom nadaliśmy lub mogliśmy nadać kształt

$$y^m+R_1y^{m-1}+R_2y^{m-2}+\ldots+R_m=0 \quad \ldots \ldots (1)$$

gdzie R_1, $R_2 \ldots R_m$ są wymiernemi funkcjami zmiennej x. Czytelnik może sprawdzić, że każda funkcja, którą badaliśmy w przykładach XIV, dają się sprowadzić do tego kształtu. Powstaje pytanie, czy to samo powiedzieć można o każdej funkcji algiebraicznej wyraźnej? Odpowiedź jest twierdząca; nie-trudno nawet byłoby dowieść tego twierdzenia ogólnie, wolimy jednak nie zatrzymywać się nad tym i wskażemy tylko na przykładzie ogólne zarysy takiego dowodu.

Niech będzie dana funkcja

$$y=\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt[3]{1+x}}{x-\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt[3]{1+x}}.$$

Możemy napisać układ równań

$$y=\frac{x+u+v+w}{x-u-v-w},$$

$$u^2=x,\quad v^2=x+u,\quad w^2=1+u.$$

Pozostaje tylko wyrugować z tych równań u, v, w, aby otrzymać równanie żądanego kształtu.

To nas prowadzi do następującego określenia: $y=f(x)$ *nazwiemy funkcją algiebraiczną zmiennej* x, *jeżeli jest ona pierwiastkiem równania kształtu* (1), *czyli pierwiastkiem równania* m*-tego stopnia, którego spółczynniki są funkcjami wymiernemi zmiennej* x.

Ta klasa funkcji zawiera wszystkie funkcje wyraźne, o których była mowa w § 16-ym. Ale prócz tego zawiera ona inne funkcje, które nie dają się przedstawić w postaci funkcji algiebraicznych wyraźnych. Jakoż wiemy, że gdy $m>4$, niepodobna w ogólnym przypadku rozwiązać algiebraicznie równania kształtu (1); otrzymać takie rozwiązanie możemy tylko przy $m=1, 2, 3, 4$ oraz w niektórych przypadkach przy $m>4$.

Czytelnik powinien porównać powyższe określenie funkcji algiebraicznych z określeniem liczb algiebraicznych (str. 25, zadanie 30).

Przykłady XV. 1. Jeżeli $m=1$, y jest funkcją *wymierną*.

2. Jeżeli $m=2$, równanie ma kształt $y^2+R_1y+R_2=0$, tak iż

$$y=\tfrac{1}{2}\{-R_1\pm\sqrt{R_1^2-4R_2}\}.$$

Funkcja ta jest określona tylko dla takich wartości x, dla których $R_1^2\geqq 4R_2$. Ma ona dwie wartości, jeżeli $R_1^2>4R_2$, i jedną wartość, jeżeli $R_1^2=4R_2$.

O ile $m=3$ lub 4, moglibyśmy rozwiązać równanie, stosując znane wzory algiebraiczne. Ten sposób postępowania jest jednak zazwyczaj żmudny, wyniki zaś badania otrzymuje się w formie bardzo niewygodnej i mało przejrzystej, tak że o wiele lepiej jest przeprowadzić odpowiednie badanie bezpośrednio na danym równaniu.

3. Zbadać funkcje

$$y^2-2y-x^2=0\,;\quad y^2-2y+x^2=0\,;\quad y^4-2y^2+x^2=0,$$

a mianowicie wyznaczyć y jako funkcję wyraźną zmiennej x i ustalić, dla jakich wartości x funkcję y możemy uważać za określoną.

4. Znaleźć równania, których spółczynniki byłyby funkcjami wymiernemi zmiennej x, i którym czyniłyby zadość funkcje

$$\sqrt{x}+\sqrt{(1/x)}\,,\quad \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(1/x)}\,,\quad \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{(1/x)}\,,\quad \sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\,,$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}\,,\quad \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,.$$

5. Zbadać równanie $y^4=x^2$.

[Mamy $y^2=\pm x$. Jeżeli x jest dodatnie, mamy $y=\pm\sqrt{x}$, jeżeli zaś x jest ujemne, mamy $y=\pm\sqrt{-x}$. Tak więc funkcja ma dwie wartości przy każdej wartości zmiennej x, z wyjątkiem $x=0$, kiedy również $y=0$].

6. Funkcja algiebraiczna funkcji algiebraicznej zmiennej x jest sama funkcją algiebraiczną.

[Mamy

$$y^m+R_1(z)\,.\,y^{m-1}+R_2(z)\,.\,y^{m-2}+\ldots.+R_m(z)=0\,,$$

gdzie

$$z^n+S_1(x)\,.\,z^{n-1}+S_2(x)\,.\,z^{n-2}+\ldots+S_n(x)=0\,.$$

Rugując zmienną z, otrzymujemy równanie kształtu

$$y^p+T_1(x)\,.\,y^{p-1}+\ldots.+T_p=0\,.]$$

7. Jako przykład funkcji algiebraicznej, która nie daje się przedstawić w postaci funkcji wyraźnej, można przytoczyć następującą:

$$y^5-y-x=0\,.$$

Dowodu jednak na to podać nie możemy, gdyż jest on zbyt długi i trudny.

18. Funkcje przestępne. Wszystkie funkcje zmiennej x, które nie są algiebraicznemi, nazywamy *przestępnemi*. Ta klasa funkcji, określona w sposób negatywny, zawiera nieskończoną rozmaitość różnych rodzajów funkcji mniej lub więcej złożonych i mających dla nas mniejsze lub większe znaczenie. Dwa rodzaje są dla nas szczególnie ważne, mianowicie:

F. **Funkcje trygonometryczne oraz ich funkcje odwrotne, czyli funkcje kołowe.** Są to, oczywiście, te funkcje, z któremi ma do czynienia trygonometrja elementarna. Zakładamy, że czytelnik zna ich zasadnicze własności.

Przykłady XVI. 1. Wykreślić funkcje $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=a\cos x+b\sin x$.

[Ponieważ $a\cos x+b\sin x=\beta\cos(x-\alpha)$, gdzie $\beta=\sqrt{a^2+b^2}$, α zaś jest kątem, którego dostawa i wstawa równają się odpowiednio $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, zatym ogólny wygląd wykresów tych trzech funkcji jest podobny].

2. Wykreślić funkcje $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $a\cos^2 x+b\sin^2 x$.

3. Przypuśćmy, że mamy dane wykresy funkcji $f(x)$ oraz $F(x)$. Wykres funkcji $f(x)\cos^2 x+F(x)\sin^2 x$ ma kształt fali, wahającej się pomiędzy krzywemi $y=f(x)$ i $y=F(x)$. Wykreślić powyższą funkcję, wybierając dowolnie na $f(x)$, $F(x)$ dwie z pośród następujących funkcji:

$$1/x^2,\quad 1/x,\quad 1,\quad x,\quad x^2,\quad ax+b,\quad x+(1/x).$$

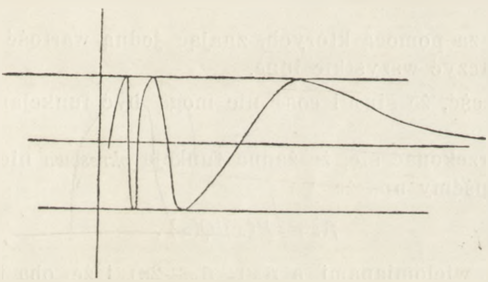
4. W taki sam sposób zbadać wykres funkcji

$$y=f(x).\cos x+F(x).\sin x.$$

5. Wykreślić funkcje $x+\sin x$, $x^2+\sin x$, $(1/x)+\sin x$, $x.\sin x$, $x^2.\sin x$, $(\sin x)/x$.

6. Wykreślić funkcję $y=\sin(1/x)$.

[Jeżeli $y=\sin(1/x)$, wówczas $y=0$, gdy $x=1/m\pi$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Jeżeli $x=1/(2m+{}^1/_2)\pi$, to $y=1$, jeżeli zaś $x=1/(2m-{}^1/_2)\pi$, to $y=-1$. Krzywa zawiera się całkowicie między dwiema prostemi $y=\pm 1$, waha się ona w górę i w dół, prędkość zaś wahań wzrasta, gdy x zbliża się do zera. Przy $x=0$ funkcja jest zupełnie nieokreślona. Gdy x przybiera duże wartości, y jest małą liczbą. Druga połowa krzywej, odpowiadająca ujemnym wartościom na x, jest odwróceniem pierwszej (Rys. 15).]



Rys. 15.

7. Wykreślić funkcję $y=x.\sin(1/x)$.

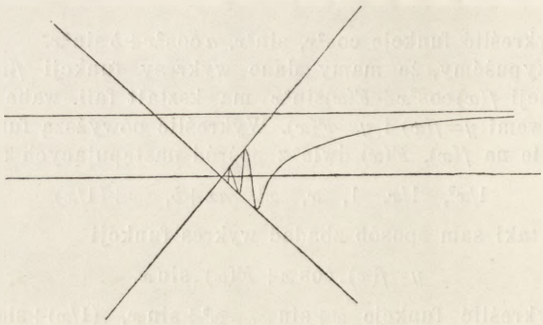
[Krzywa zawiera się między prostemi $y=\pm x$. (Rys. 16).]

8. Wykreślić funkcje $x^2.\sin(1/x)$, $(1/x).\sin(1/x)$, $\sin^2(1/x)$, $\{x.\sin(1/x)\}^2$, $a.\cos^2(1/x)+b.\sin^2(1/x)$, $\sin x+\sin(1/x)$, $\sin x.\sin(1/x)$.

9. Wykreślić funkcje $\cos x^2$, $\sin x^2$, $a.\cos x^2+b.\sin x^2$.

10. Wykreślić funkcje $y=\text{arc}\sin x$, $y=\text{arc}\cos x$.

[Jeżeli $y=\text{arc}\cos x$, wówczas $x=\cos y$. Możemy tedy wykreślić x jako funkcję zmiennej y; krzywa ta da nam zarazem y jako funkcję zmiennej x. Rzecz jasna, że y jest określone tylko przy $-1\leqq x\leqq 1$ i ma nieskończenie wiele wartości, odpowiadających tym wartościom zmiennej x. Czytelnik niewątpliwie pamięta, że gdy $-1<x<1$, wówczas y posiada jedną wartość, powiedzmy α, zawartą między 0 a π, inne zaś war-



Rys. 16.

tości znajdujemy ze wzoru $y=2n\pi\pm\alpha$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną.]

11. Wykreślić funkcje

$$\mathrm{tg}x,\ \mathrm{ctg}x,\ \sec x,\ \mathrm{cosec}x,\ \mathrm{tg}^2x,\ \mathrm{ctg}^2x,\ \sec^2x,\ \mathrm{cosec}^2x.$$

12. Wykreślić funkcje

$$\mathrm{arctg}x,\quad \mathrm{arcctg}x,\quad \mathrm{arccosec}x,\quad \mathrm{arcsec}x,$$

i podać wzory, za pomocą których, znając jedną wartość takiej funkcji, możnaby wyznaczyć wszystkie inne.

13. Dowieść, że $\sin x$ i $\cos x$ nie mogą być funkcjami wymiernemi zmiennej x.

[Łatwo przekonać się, że żadna funkcja *okresowa* nie może być wymierna. Przypuśćmy np., że

$$f(x)=P(x)/Q(x)\ ,$$

gdzie P i Q są wielomianami, a $f(x)=f(x+2\pi)$, i że oba te równania są słuszne przy wszelkich wartościach na x. Niech będzie $f(0)=k$. W takim razie równaniu

$$P(x)-kQ(x)=0$$

czyni zadość nieskończenie wiele wartości zmiennej x, mianowicie $x=0$, 2π, 4π i t. d., zatym równanie to jest *tożsamością*. Wobec tego musi być $f(x)=k$, czyli $f(x)$ jest stałą.]

14. Dowieść ogólniej, że żadna funkcja okresowa nie może być funkcją algiebraiczną zmiennej x.

[Równanie, określające funkcję algiebraiczną, niech będzie

$$y^m+R_1y^{m-1}+\ldots+R_m=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie R_1, $R_2 \ldots R_m$ są funkcjami wymiernemi zmiennej x. Można to równanie napisać w postaci

$$P_0 y^m + P_1 y^{m-1} + \ldots + P_m = 0\,,$$

gdzie P_1, $P_2 \ldots P_m$ są wielomianami, zawierającemi zmienną x. Rozumując tak, jak w poprzednim zadaniu, przekonamy się, że

$$P_0 k^m + P_1 k^{m-1} + \ldots + P_m = 0$$

musi być tożsamością, zatym wartość $y=k$ czyni zadość równaniu (1) przy wszelkich wartościach na x, wskutek czego jedna grupa wartości naszej funkcji algiebraicznej sprowadza się do stałej.

Pozostaje teraz podzielić (1) przez $y-k$ i powtórzyć m razy to samo rozumowanie. Ostatecznie dochodzimy do wniosku, że przy wszelkich wartościach na x, nasza funkcja algiebraiczna posiada zawsze te same m wartości: k, k', $k'' \ldots$, czyli poprostu składa się z m stałych.]

16. Funkcje $\arcsin x$ i $\arccos x$ nie mogą być ani wymiernemi, ani algiebraicznemi funkcjami.

[Wynika to z faktu, że dla wartości $-1 \leqq x \leqq 1$, funkcje te mają nieskończenie wiele wartości.]

19. F. Inne klasy funkcji przestępnych. Obok trygonometrycznych, najważniejsze są funkcje: wykładnicza i logarytmiczne, które zbadamy szczegółowo w rozdziałach IX i X. Na razie zajmować się niemi nie będziemy. Inne klasy funkcji przestępnych, które dotąd zbadano, jak np. funkcje eliptyczne, funkcje gama, funkcje Bessela i t. p., przekraczają ramy naszej książki. Istnieją jednak pewne bardzo elementarne typy funkcji, które nie posiadają wprawdzie takiej doniosłości teoretycznej, jak funkcje wymierne, algiebraiczne i trygonometryczne, ale są bardzo pouczające, gdyż ilustrują nadzwyczajną rozmaitość związków funkcjonalnych.

Przykłady XVII. 1. Niech będzie $y=[x]$, gdzie symbol $[x]$ oznacza największą (algiebraicznie) liczbę całkowitą, zawierającą się w liczbie x. Wykres tej funkcji mamy na rys. 17(a).

2. $y=x-[x]$. (Rys. 17b.)

3. $y=\sqrt{x-[x]}$. (Rys. 17c.)

4. $y=[x]+\sqrt{x-[x]}$. (Rys. 17d.)

5. $y=\{x-[x]\}^2$, $[x]+\{x-[x]\}^2$.

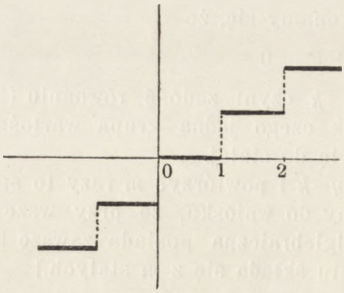
6. $y=[\sqrt{x}]$, $[x^2]$, $\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$, $x^2-[x^2]$, $[1-x^2]$.

7. Określmy y jako *największy czynnik pierwszy liczby* x. (Porów. Przykł. VII. 6).

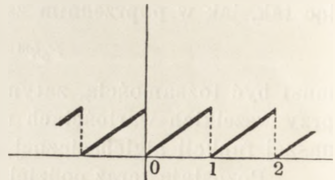
Funkcja y jest, oczywiście, określona tylko dla wartości całkowitych zmiennej x.

Jeżeli	$x = \pm 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...$
to	$y = 1, 2, 3, 2, 5, 3, 7, 2, 3, 5, 11, 3, 13...$

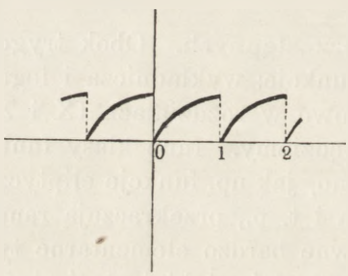
Wykres składa się z odosobnionych punktów.



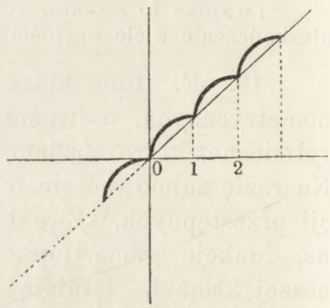
Rys. 17*a*.



Rys. 17*b*.



Rys. 17*c*.



Rys. 17*d*.

8. Określmy y jako *mianownik liczby* x (porów. Przykł. VII. 7). Funkcja y jest określona tylko dla wymiernych wartości zmiennej x. Możemy wyznaczyć dowolną liczbę punktów wykresu, nie otrzymamy jednak krzywej, w zwykłym znaczeniu tego wyrazu. Nie będziemy też mieli punktów, któreby odpowiadały wartościom niewymiernym zmiennej niezależnej.

Wykreślmy prostą, łączącą punkt $(N-1, N)$ z punktem (N, N). Dowieść, że na prostej leży tyle punktów naszego wykresu, ile jest liczb mniejszych od N i pierwszych względem N.

9. Niech będzie $y=0$, gdy x jest liczbą całkowitą, oraz $y=x$, gdy x nie jest całkowite. Wykres możemy otrzymać z prostej $y=x$, usuwając z niej w myśli punkty

$$...(-1, 1), \quad (0, 0), \quad (1, 1), \quad (2, 2)...$$

a natomiast dołączając do niej punkty

$$...(-1, 0), \quad (0, 0), \quad (1, 0), \quad (2, 0)...$$

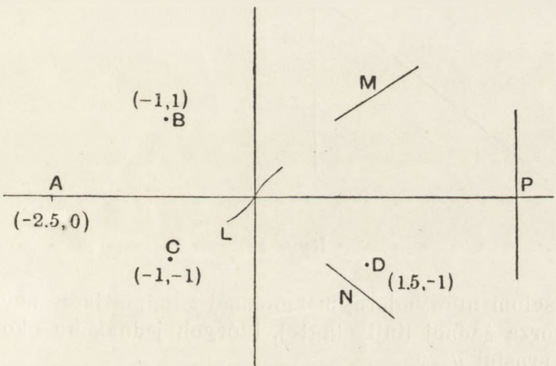
leżące na osi x-ów.

Czytelnik może nam zarzucić, że funkcja ta jest dziwaczna, sprzeczna ze zdrowym rozsądkiem. Jeżeli $y=x$ przy wszystkich wartościach x z wyjątkiem całkowitych, to dlaczego nie miałoby ono równać się temuż x przy całkowitych wartościach na x? Odpowiedź na to prosta: dlaczego y miałoby zawsze równać się x? Przecież nasza funkcja w zupełności odpowiada określeniu funkcji: istnieje związek pomiędzy x i y, na mocy którego, znając x, możemy wyznaczyć odpowiednią wartość na y. Sam rodzaj związku mamy prawo wybrać zupełnie dowolnie.

10. Niech będzie

$$\begin{array}{ll} y=0, & \text{gdy } x=-2^1/_2, \\ y^2=1, & \text{gdy } x=-1 \\ y=\sin x, & \text{gdy } -^1/_2 \leqq x \leqq {}^1/_2 \\ y^2=x^2, & \text{gdy } 1<x\leqq 2, \end{array}$$

z wyjątkiem tylko przypadku, gdy $x=1^1/_2$; y niech się równa wówczas -1. Przy $x=3$, niech y przybiera wszelkie wartości pomiędzy -1 a $+1$. Wreszcie załóżmy, że y nie jest wcale określone dla innych wartości zmiennej x. Wykres tej funkcji mamy na rys. 18. Składa się on z łu-



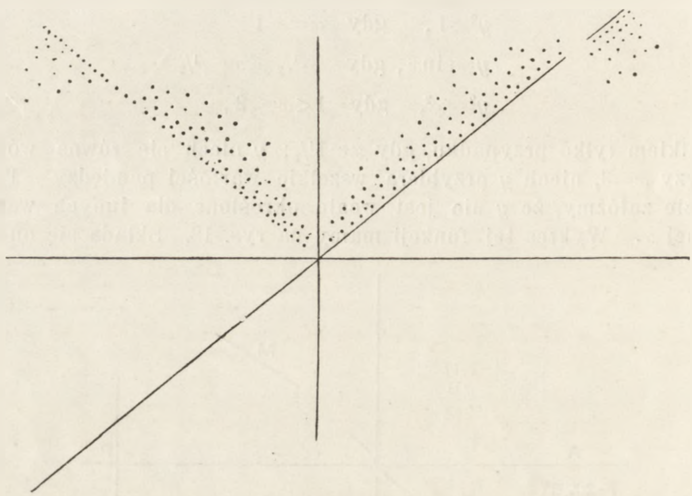
Rys. 18.

ku L, z odcinka P, z odcinków M, N, (z których jednak należy w myśli usunąć punkty środkowe i końce, bliżej leżące do osi x-ów), wreszcie z odosobnionych punktów A, B, C, D. Podkreślamy, że y ma nieskończenie wiele wartości dla $x=3$, po dwie wartości dla $x=-1$, dla $1<x<1^1/_2$ i dla $1^1/_2<x\leqq 2$, jedną wartość dla $x=-2^1/_2$, dla $-^1/_2\leqq x\leqq {}^1/_2$ i dla $x=1^1/_2$, wreszcie nie ma żadnej wartości dla innych wartości x.

Powyższy przykład przytoczyliśmy jedynie w celu zilustrowania różnych możliwych funkcji; nie twierdzimy wcale, że taka funkcja może mieć praktyczne zastosowanie. Niemniej jednak czytelnik nie powinien sądzić, że tylko to, co jest proste i oczywiste, posiada wartość praktyczną: w Przykł. VII. 4, 5 widzieliśmy funkcje, które nasunęły się nam przy badaniu zjawisk fizycznych, a które były określone **różnemi** wzorami dla różnych wartości zmiennej niezależnej.

11. Niech będzie $y=1$, gdy x jest wymierne, i $y=0$, gdy x jest niewymierne. Wykres składa się z punktów, leżących na dwuch prostych: na $y=1$ i na $y=0$. Oko nie potrafi odróżnić tego wykresu od dwuch wymienionych prostych, w rzeczywistości jednak na każdej z tych prostych brak nieskończenie wielu punktów.

12. Niech będzie $y=x$, gdy x jest niewymierne, oraz $y=\sqrt{(1+p^2)/(1+q)^2}$, gdy x jest liczbą wymierną p/q.



Rys. 19.

Wartościom niewymiernym zmiennej x odpowiada zbiór punktów, które nie tworzą żadnej linji ciągłej, których jednak na oko niepodobna odróżnić od prostej $y=x$.

Weźmy teraz pod uwagę wartości wymierne na x, a mianowicie dodatnie. Nie możemy mieć teraz $y=x=p/q$, chyba tylko wówczas, gdy $p=q$, czyli gdy $x=1$. Tak więc żaden punkt tej części wykresu nie może leżeć na prostej $y=x$, z wyjątkiem tylko punktu $(1, 1)$. Jeżeli $p<q$, to $\sqrt{(1+p^2)/(1+q^2)}>p/q$, jeżeli zaś $p>q$, to $\sqrt{(1+p^2)/(1+q^2)}<p/q$. Tak więc punkty wykresu leżą nad prostą $y=x$, o ile tylko $0<x<1$, leżą zaś pod tą prostą, o ile $x>1$. Dla dużych wartości p, q, wartość funkcji $\sqrt{(1+p^2)/(1+q^2)}$ mało się różni od p/q. Otóż w pobliżu każdej wartości na x możemy znaleźć dowolną liczbę ułamków wymiernych o dużych licznikach i mianownikach, zatym wykres nasz musi zawierać dowolną liczbę punktów, skupionych w pobliżu prostej $y=x$. Część wykresu, odpowiadająca wartościom dodatnim na x, wygląda tak: prosta $y=x$, otoczona rojem odosobnionych punktów, które się zagęszczają coraz bardziej, gdy zbliżamy się do tej prostej.

Część wykresu, odpowiadająca wartościom ujemnym na x, składa się z takiego samego roju punktów odosobnionych, skupionych przy prostej $y=-x$, lecz sama ta prosta do wykresu nie należy.

20. Wykreślne rozwiązywanie równań z jedną niewiadomą. Wiele równań można z łatwością przedstawić w postaci

$$f(x)=\varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie $f(x)$ i $\varphi(x)$ są to funkcje, których wykresy łatwo dają się zbudować. Rzecz jasna, że jeśli krzywe

$$y=f(x) \quad \text{oraz} \quad y=\varphi(x)$$

przecinają się w punkcie P o odciętej ζ, to $x=\zeta$ jest pierwiastkiem równania (1).

Przykłady XVIII. 1. **Równanie kwadratowe** $ax^2+2bx+c=0$ możemy rozwiązać wykreślnie wieloma różnemi sposobami. Możemy np. wykreślić funkcje

$$y=ax+2b, \quad y=-c/x,$$

przecięcie się tych wykresów da nam pierwiastki równania, o ile takowe istnieją. Moglibyśmy też wziąć dwie inne funkcje

$$y=x^2, \quad y=-\frac{2bx+c}{a}.$$

Ale najprostszy sposób jest prawdopodobnie następujący: wykreślamy koło

$$a(x^2+y^2)+2bx+c=0,$$

którego środek leży w punkcie $(-b/a, 0)$, promień zaś równa się $\dfrac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$. Punkty przecięcia się tego koła z osią x-ów dają pierwiastki równania.

2. Rozwiązać temi trzema sposobami równania

$$x^2+2x-3=0, \quad x^2-7x+4=0, \quad 3x^2+2x-2=0.$$

3. **Równanie** $x^m+ax+b=0$ daje się rozwiązać zapomocą krzywych $y=x^m$, $y=-(ax+b)$.

4. Sprawdzić następującą tabliczkę pierwiastków rzeczywistych (o ile takowe istnieją) równania

$$x^m+ax+b=0$$

(1) m parzyste $\begin{cases} b \text{ dodatnie, dwa pierwiastki albo żadnego,} \\ b \text{ ujemne, dwa pierwiastki.} \end{cases}$

(2) m nieparzyste $\begin{cases} a \text{ dodatnie, jeden pierwiastek,} \\ a \text{ ujemne, trzy pierwiastki albo jeden.} \end{cases}$

Ułożyć przykłady liczbowe, któreby ilustrowały wszystkie powyższe przypadki.

5. Wykazać, że równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma zawsze nieskończenie wiele pierwiastków rzeczywistych.

6. Wyznaczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych w równaniach

$$\sin x = x, \quad \sin x = x/3, \quad \sin x = x/8, \quad \sin x = x/120.$$

7. Dowieść, że jeśli a jest niewielką liczbą (np. $a = 0{\cdot}01$), wówczas równanie

$$x - a = \tfrac{1}{2}\pi \sin^2 x$$

ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Zbadać przypadek, gdy a jest ujemne i blizkie zera. Jak zmienia się liczba pierwiastków wraz ze zmianą liczby a?

21. O funkcjach dwuch zmiennych i o ich wykresach. W § 9-ym mówiliśmy o dwuch zmiennych, związanych z sobą pewną zależnością. Możemy również badać trzy zmienne (x, y, z), związane z sobą pewną zależnością, na mocy której wartość (lub wartości) zmiennej z możemy uważać za dane, skoro tylko znamy wartości zmiennych x i y. W takim razie z nazywamy *funkcją dwuch zmiennych* x, y; zmienne x, y nazywamy konsekwentnie *niezależnemi*, z zaś nosi nazwę *zmiennej zależnej*. Możemy tę zależność wyrazić symbolicznie równaniem

$$z = f(x, y).$$

Uwagi § 9-go dadzą się, mutatis mutandis, zastosować i do tego przypadku.

Metoda wykreślnego przedstawienia funkcji dwu zmiennych jest w zasadzie taka sama, jak dla funkcji jednej zmiennej. Musimy tylko wziąć trzy prostopadłe do siebie osie OX, OY, OZ w przestrzeni trójwymiarowej. Punktem (a, b, c) będziemy nazywali punkt, którego odległości od płaszczyzn YOZ, ZOX, XOY, mierzone równolegle do osi OX, OY, OZ, wnają się odpowiednio a, b, c. Naturalnie, musimy uwzględnić znaki odcinków, mianowicie długości, mierzone w kierunkach OX, OY, OZ będziemy uważali za dodatnie. Określenia *spółrzędnych*, *osi i początku spółrzędnych* pozostają bez zmiany.

Przypuśćmy, że mamy daną funkcję

$$z = f(x, y).$$

Gdy x i y zmieniają się, punkt (x, y, z) porusza się w przestrzeni. Zbiór wszystkich jego położeń nazywamy *miejscem gieometrycznym* punktu (x, y, z) albo też *wykresem* funkcji $z = f(x, y)$. Jeżeli zależność pomiędzy zmiennemi z, x, y daje się wyrazić zapomocą analitycznego wzoru, nazywamy ten wzór *równaniem miejsca gieometrycznego.*

22. O równaniu płaszczyzny. Czytelnik dowiedzie z łatwością, że spółrzędne punktu, dzielącego odcinek PQ w stosunku $\mu:\lambda$, są

$$\frac{\lambda a+\mu\alpha}{\lambda+\mu},\quad \frac{\lambda b+\mu\beta}{\lambda+\mu},\quad \frac{\lambda c+\mu\gamma}{\lambda+\mu},$$

gdzie a, b, c są spółrzędnemi punktu P, a α, β, γ spółrzędnemi punktu Q (porów. Przykł. VIII. 3).

Możemy stąd otrzymać bezpośrednio następujące ważne twierdzenie: *ogólne równanie pierwszego stopnia z trzema zmiennemi przedstawia płaszczyznę.*

Jakoż niech będzie dane równanie

$$ax+by+cz+d=0$$

i niech będą (x_1, y_1, z_1) oraz (x_2, y_2, z_2) dwa punkty P, Q, leżące na wykresie funkcji z (albo, innemi słowy, należące do miejsca gieometrycznego, przedstawionego przez powyższe równanie). W takim razie musi być

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0,$$

$$ax_2+by_2+cz_2+d=0.$$

Mnożąc te dwa równania odpowiednio przez λ i μ, dodając do siebie i dzieląc sumę przez $\lambda+\mu$, otrzymujemy

$$a\frac{\lambda x_1+\mu x_2}{\lambda+\mu}+b\frac{\lambda y_1+\mu y_2}{\lambda+\mu}+c\frac{\lambda z_1+\mu z_2}{\lambda+\mu}+d=0\,.$$

Widzimy, że miejsce gieometryczne, o które chodzi, jest tego rodzaju, że jeśli P i Q leżą na nim, to leży na nim również punkt R, dzielący odcinek PQ w stosunku dowolnym $\mu:\lambda$, innemi słowy: prosta PQ leży na tym miejscu gieometrycznym. Ponieważ zaś punkty P, Q (a więc i prostą PQ) obraliśmy dowolnie, zakładając tylko, że należą one do danego miejsca gieometrycznego, zatym miejsce to czyni zadość określeniu płaszczyzny.

Odwrotnie: *równanie każdej płaszczyzny jest stopnia pierwszego.* Istotnie, niech będą (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)

trzy dowolne punkty płaszczyzny. Możemy dobrać liczby a, b, c, d tak, by zachodziły związki

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0,$$

$$ax_2+by_2+cz_2+d=0,$$

$$ax_3+by_3+cz_3+d=0.$$

Możemy tedy wyznaczyć miejsce gieometryczne, przechodzące przez trzy nasze punkty i mające równanie

$$ax+by+cz+d=0,$$

Ale widzieliśmy, że miejsce o takim równaniu jest płaszczyzną, i rzecz jasna, może to być tylko owa dana nam płaszczyzna. Tak więc równanie płaszczyzny jest równaniem pierwszego stopnia.

Przykłady XIX. 1. Jeżeli mamy dane trzy punkty (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), wyznaczające płaszczyznę, wówczas na tej płaszczyźnie leży również punkt o spółrzędnych $\frac{\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3}{\lambda+\mu+\nu}$ i t. d. Dobierając w odpowiedzi sposób stosunki $\lambda:\mu:\nu$, możemy osiągnąć to, że powyższy punkt zleje się z jakimkolwiek zgóry danym punktem tej płaszczyzny.

2. Za pomocą takiego rozumowania, jak zastosowane w § 11-ym, dowieść, że ogólne równanie pierwszego stopnia przedstawia płaszczyznę.

3. Równanie kuli, mającej środek w punkcie (a, b, c) i promień równy r, jest

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Odwrotnie: równanie powyższego kształtu zawsze przedstawia kulę.

4. Otrzymać dla płaszczyzny i kuli twierdzenia, analogiczne do podanych w Przykład. IX. 3—9, 11—14.

23. O krzywych płaskich. Chcąc zaznaczyć, że między zmiennemi x i y istnieje zależność funkcjonalna, posługiwaliśmy się dotąd symbolem

$$y=f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Rzecz jasna, że symbol ten jest szczególnie dogodny w przypadku, gdy y daje się wyrazić w postaci jakiegoś wzoru, zawierającego tylko zmienną x, np. gdy mamy

$$y=x^2, \quad y=a\cos^2 x+b\sin^2 x \text{ i t. p.}$$

Nieraz jednak miewamy do czynienia z funkcjami, które albo nie dają się wcale w ten sposób wyrazić, albo też prowadzą do wzorów w praktyce nieużytecznych. Jeśli np. mamy $y^5-y-x=1$ albo $x^5+y^5-ay=0$, wówczas, jak wiadomo, niepodobna rozwiązać takiego równania względem zmiennej y, czyli niepodobna wyrazić y zapomocą wzoru, zawierającego tylko zmienną x. Jeżeli mamy równanie

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

możemy wprawdzie otrzymać wzór

$$y=-f\pm\sqrt{f^2-x^2-2gx-c},$$

ale o wiele łatwiej można zbadać ten związek funkcyjny, posługując się pierwotnym równaniem.

Zauważmy, że w powyższych przypadkach możnaby wyrazić istnienie związku funkcjonalnego *przez przyrównanie do zera symbolu funkcji dwuch zmiennych*, czyli przez równanie postaci

$$f(x,\,y)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Bardzo często będziemy się posługiwali tym równaniem jako sposobem wyrażania związku funkcjonalnego. Zawiera ono równanie (1) jako przypadek szczególny, gdyż $y-f(x)$ jest tylko szczególną formą symbolu $f(x, y)$. Możemy tedy mówić o miejscu gieometrycznym punktu (x, y), odpowiadającym równaniu $f(x, y)=0$, o wykresie funkcji y, określonej przez wzór $f(x, y)=0$, o krzywej $f(x, y)=0$ i o równaniu tej krzywej.

Istnieje inny jeszcze sposób przedstawiania krzywych, w wielu razach bardzo dogodny. Przypuśćmy, że zmienne x i y są obie funkcjami pewnej zmiennej t, którą uważamy za pomocniczą i której nie nadajemy żadnego znaczenia gieometrycznego. Możemy wówczas napisać

$$x=f(t)\,, \quad y=F(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Jeżeli na t damy jakąkolwiek wartość, wyznaczymy odpowiednie wartości na x i y. Każda para takich wartości wyznacza punkt (x, y). Badając wszystkie punkty, odpowiadające różnym wartościom zmiennej pomocniczej t, otrzymamy *wykres krzywej, określonej przez równania* (3). Przypuśćmy np., że mamy równania

$$x=a\cos t\,, \quad y=a\sin t$$

i że t zmienia się od 0 do 2π. Łatwo przekonać się, że punkt

(x, y) zakreśla okrąg koła, którego środek leży w początku spółrzędnych, promień zaś równa się a. Jeżeli t przekracza wartość 2π, punkt (x, y) zakreśla znów ten sam okrąg. W danym wypadku możemy z łatwością otrzymać wzór, dający bezpośrednio związek między x i y. Jakoż wystarczy wyrugować zmienną t przez podniesienie do kwadratu obu równań i dodanie ich do siebie; otrzymujemy równanie $x^2+y^2=a^2$.

Przykłady XX. 1. Punkty przecięcia się krzywych $f(x, y)=0$ i $\varphi(x, y)=0$ wyznaczamy, rozwiązując ten układ dwuch równań.

2. Wykreślić krzywe $(x+y)^2=1$, $xy=1$, $x^2-y^2=1$.

3. Równanie $f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)=0$ przedstawia krzywą, przechodzącą przez wszystkie punkty przecięcia się krzywych $f(x, y)=0$ i $\varphi(x \quad)=0$

4. Jakie miejsca gieometryczne dane są przez równania

$$\text{(I)} \quad x=at+b\,, \quad y=ct+d\,;$$

$$\text{(II)} \quad x/a=2t/(1+t^2)\,, \quad y/a=(1-t^2)/(1+t^2)\,,$$

jeżeli zmienna pomocnicza t przybiera wszelkie wartości rzeczywiste?

24. O miejscach gieometrycznych w przestrzeni. Miejsca gieometryczne w przestrzeni bywają dwuch różnych rodzajów, których najprostszemi przykładami są: płaszczyzna i prosta.

Punkt poruszający się po prostej posiada j e d e n s t o p i e ń s w o b o d y. Kierunek jego ruchu jest ustalony; jeżeli znamy jego prędkość (którą możemy uważać za liczbę względną), wówczas ruch możemy uważać za wyznaczony w zupełności. Innemi słowy: położenie dowolnego punktu A na oznaczonej prostej daje się ustalić za pomocą jednego pomiaru, mianowicie wystarczy w tym celu zmierzyć odległość punktu A od jakiegoś stałego punktu na tej prostej. Jeśli tę prostą utożsamimy z prostą L w rozdziale I, wówczas położenie dowolnego jej punktu będzie wyznaczone przez j e d n ą s p ó ł r z ę d n ą x. Przeciwnie, punkt poruszający się po płaszczyźnie ma d w a s t o p n i e s w o b o d y. Chcąc ustalić rodzaj jego ruchu, musimy znać jego prędkości składowe w d w u c h różnych kierunkach. Innemi słowy: aby wyznaczyć położenie punktu na płaszczyźnie, musimy znać d w i e j e g o s p ó ł r z ę d n e.

A teraz przyjrzyjmy się równaniom tych dwu miejsc gieometrycznych. Płaszczyzna dana jest przez równanie kształtu $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$. Z pośród tych trzech spółrzędnych możemy d w i e np. y, z wybrać dowolnie; trzecia jest wówczas wyznaczona. Prosta jest przecięciem się dwuch płaszczyzn, które niech będą dane przez równania

$$ax+by+cz+d=0\,,\quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\quad .\ .\ .\quad (1)$$

Jeżeli jedną z trzech spółrzędnych obierzemy dowolnie, dwie inne będą przez to samo wyznaczone, i tak samo położenie punktu na prostej będzie wyznaczone.

Przez daną prostą możemy, oczywiście, poprowadzić dowolnie wiele płaszczyzn. Mogłoby się wobec tego wydawać, że między spółrzędnemi punktu na prostej może zachodzić więcej niż dwa związki. Tak jest istotnie, ale te związki nie są od siebie niezależne. Równanie każdej płaszczyzny, przechodzącej przez prostą przecięcia się płaszczyzn (1), ma kształt

$$ax+by+cz+d+\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0,$$

jest więc prostym wynikiem dwu równań (1).

Miejsce gieometryczne punktów, dane przez równanie

$$z=f(x,\ y)\,,$$

nazwiemy *powierzchnią*. Może ono odpowiadać albo nie odpowiadać zwykłemu pojęciu powierzchni.

Rozważania § 21-go możemy, oczywiście, uogólnić tak, by otrzymać określenie funkcji trzech zmiennych $f(x,\ y,\ z)$ albo nawet funkcji dowolnej liczby zmiennych. I, jak w § 23-im umówiliśmy się, że symbol $f(x,\ y)=0$ będziemy uważali za ogólne równanie krzywej płaskiej, tak samo teraz umówimy się, że

$$f(x,\ y,\ z)=0$$

będziemy uważali za ogólne równanie powierzchni.

Konsekwentnie *krzywą przestrzenną* nazwiemy miejsce gieometryczne, dane przez układ dwuch równań bądź to typu $z=f(x,\ y)$, bądź typu $f(x,\ y,\ z)=0$. Tak np. *prosta* może być dana przez układ dwuch równań kształtu $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$. *Koło* możemy otrzymać, przecinając kulę płaszczyzną, zatym koło może być dane w przestrzeni przez układ dwuch następujących równań:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,\quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0.$$

Przykłady XXI. 1. Co przedstawia układ trzech równań kształtu $f(x,\ y,\ z)=0$?

[Dwa którekolwiek równania wyznaczają *krzywą*, która przecina *powierzchnię*, wyznaczoną przez trzecie równanie, w pewnej liczbie punktów. Tak więc układ nasz wyznacza wogóle pewną liczbę odosobnionych punktów].

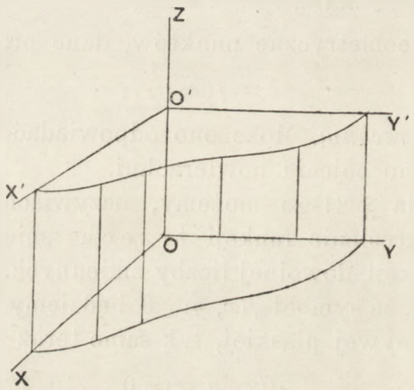
2. Trzy równania linjowe przedstawiają punkt.

3. Równania krzywej tym się różnią od równania powierzchni, że nie zmieniając osi, możemy równaniem krzywej nadawać rozmaite kształty, mianowicie którekolwiek z dwuch równań, wyrażających krzywą, możemy przekształcić zapomocą drugiego z nich. Np. dwa równania $y=1$, $x^2+y^2+z^2=2$, wyznaczające pewne koło, możemy zastąpić układem $y=1$, $x^2+z^2=1$.

4. Na płaszczyźnie XOY mamy daną krzywą $f(x, y)=0$; jakie są równania tej krzywej, jeśli rozważamy ją w przestrzeni? [$f(x, y)=0$, $z=0$.]

5. **Walce.** Jakie miejsce gieometryczne w przestrzeni (jaka powierzchnia) odpowiada równaniu $f(x, y)=0$?

[Wszystkie punkty powierzchni czynią zadość równaniu $f(x, y)=0$, bez względu na to, jaką mają trzecią spółrzędną z. Krzywa $f(x, y)=0$, $z=0$ wyznaczona jest jako przekrój powierzchni płaszczyzną



Rys. 20.

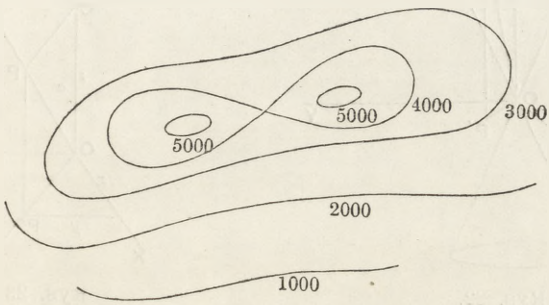
XOY. Wykreślmy płaszczyznę $z=a$, przecinającą płaszczyzny ZOX, ZOY według prostych $O'X'$, $O'Y'$; te dwie proste wraz z prostą $O'Z$ obierzmy jako nowe osie spółrzędnych (rys. 20). Rzecz jasna, że mamy $x=x'$, $y=y'$, zatym $f(x', y')=0$. Tak więc krzywe, według których dwie równoległe płaszczyzny $z=0$ i $z=a$ przecinają powierzchnię, różnią się od siebie tylko położeniem w przestrzeni: gdybyśmy pierwszą z nich przesunęli równolegle do osi z-ów o odcinek a, pokryłaby się ona z drugą. Wobec tego możemy utworzyć tę powierzchnię, prowadząc ze wszystkich punktów krzywej $f(x, y)=0$, $z=0$ proste, równoległe do osi OZ. Taką powierzchnię nazywamy *walcową*.]

6. Znaleźć interpretację gieometryczną dla równań: (I) $y=mx+c$, (II) $y=mx+c$, $z=a$, (III) $x^2+y^2=1$, (IV) $x^2+y^2=1$, $z=a$, jeżeli mają to być równania miejsc gieometrycznych w przestrzeni trójwymiarowej.

7. **Wykreślne przedstawienie powierzchni na płaszczyźnie. Mapy topograficzne.** Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać rze-

czą niemożliwą dokładne przedstawienie powierzchni za pomocą rysunku płaskiego; tak jest istotnie, ale pewne pojęcie o powierzchni taki rysunek dać może.

Przypuśćmy np., że mamy daną powierzchnię $z=f(x, y)$. Dając na z wartość a, otrzymujemy równanie pewnej krzywej, którą możemy wyrysować, opatrując ją znaczkiem, albo *cechą* (a). Ta krzywa (a), zwana *warstwicą*, nie jest niczym innym, jak rzutem na płaszczyznę XOY przekroju powierzchni $z=f(x, y)$ przez płaszczyznę $z=a$. (Rys. 20). Powtarzając tę czynność przy różnych wartościach na a, otrzymujemy figurę w rodzaju tej, którą mamy na rys. 21. Widok tej figury przypomina nam mapy sztabowe, jakoż mapy te są na tej zasadzie rysowane. Na rys. 21 warstwica 1000 jest rzutem na płaszczyznę poziomu morza przekroju po-



Rys. 21.

wierzchni ziemi przez płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny poziomu morza leżącą na wysokości 1000 metrów nad tym poziomem*).

8. Wykreślić warstwice, któreby zilustrowały kształt powierzchni $2z=3xy$.

9. **Stożki proste kołowe.** Obierzmy początek spółrzędnych w wierzchołku stożka i skierujmy oś z-ów wdłuż osi stożka (rys. 22 i 23). Niech będzie P dowolny punkt na powierzchni stożka, C i P' rzuty jego na oś OZ i na płaszczyznę XOY, wreszcie α niech będzie kąt POZ. Jeżeli x, y, z są spółrzędnemi punktu P, wówczas

$$x^2+y^2=OP'^2=CP^2=OC^2 . \operatorname{tg}^2\alpha=z^2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Tak więc równanie stożka ma kształt $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\alpha=0$, przyczym stożek należy wyobrażać sobie jako rozciągający się nieograniczenie w górę i w dół od płaszczyzny XOY na naszym rysunku.

10. **Powierzchnie obrotowe w ogólności.** Stożek, o którym mowa w poprzednim zadaniu, przecina płaszczyznę ZOX według dwu prostych $x=\pm z\operatorname{tg}\alpha$, tak iż $x^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha$ możemy uważać za łączne równanie

---

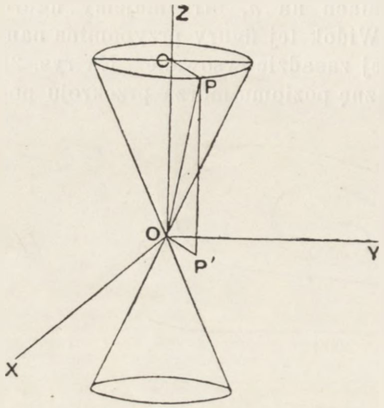
*) Oczywiście, nie uwzględniamy w tym rozumowaniu krzywizny ziemi.

tych prostych. Porównywując to równanie z równaniem stożka, widzimy, że drugie otrzymać można z pierwszego, zastępując x^2 przez x^2+y^2.

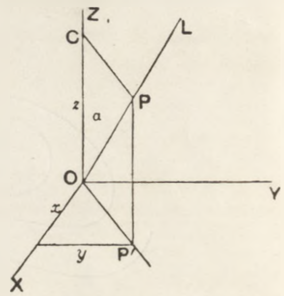
Dowieść ogólnie, że równanie powierzchni, utworzonej przez obrót dokoła osi z krzywej $y=0$, $x=f(z)$, ma kształt $\sqrt{x^2+y^2}=f(z)$, czyli

$$x^2+y^2=\{f(z)\}^2,$$

Sprawdzić to (I) na prostej $y=0$, $x=1$; (II) na kole $y=0$, $x^2+\quad=1$.



Rys. 22.



Rys. 23.

11. **O stożkach w ogólności.** Powierzchnię, utworzoną przez proste, przechodzące przez stały punkt, nazywamy *stożkiem*; stały punkt nazywa się *wierzchołkiem stożka.* Stożek kołowy jest, oczywiście, tylko szczególnym przypadkiem ogólnego pojęcia stożka.

Dowieść, że równanie stożka, mającego wierzchołek w początku spółrzędnych, jest kształtu

$$f\left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}\right)=0,$$

i że odwrotnie: każde równanie tego kształtu przedstawia stożek.

[Jeżeli punkt (x, y, z) leży na stożku, to musi na nim leżeć również punkt $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, bez względu na wartość spółczynnika λ].

12. **Powierzchnie prostolinjowe.** Walce i stożki są tylko szczególnym przypadkiem *powierzchni, utworzonych przez proste*, czyli *powierzchni prostolinjowych.*

Układ dwuch równań

$$\left.\begin{array}{l} x=az+b \\ y=cz+d \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

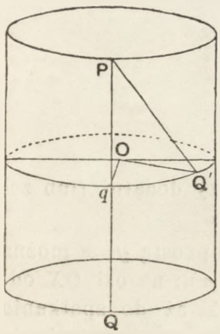
przedstawia prostą. Przypuśćmy, że spółczynniki a, b, c, d nie są liczbami stałemi, lecz przeciwnie są funkcjami pewnej zmiennej pomocniczej t. Dla każdej poszczególnej wartości t, układ (1) daje oznaczoną prostą. Gdy t zmienia się, prosta porusza się i zakreśla powierzchnię, której równanie można znaleźć, rugując zmienną t z równań (1).

Np. na rys. 23 niech proste OL, OZ tworzą kąt α; odcinek PP' niech będzie prostopadły do płaszczyzny XOY, a kąt XOP' niech się równa t. Równania prostej OL są

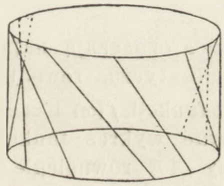
$$\left.\begin{array}{l} x=z\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.\cos t \\ y=z\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin t \end{array}\right\}$$

Rugując t, otrzymujemy równanie stożka $x^2+y^2=z^2\,\mathrm{tg}^2\alpha$.

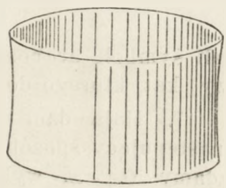
Inny prosty przykład powierzchni prostolinjowej jest następujący: przetnijmy walec kołowy prosty dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi i odległemi od siebie o l (Rys. 24a). Wyobraźmy sobie, że powierzchnia walca jest utworzona przez cienkie równoległe pręciki prostolinjowe (takie, jak PQ) o długości l; pręciki te są przytwierdzone z obu końców do dwuch okręgów o promieniu a.



Rys. 24a.



Rys. 24b.



Rys. 24c.

Przypuśćmy dalej, że w odległości h od płaszczyzny jednego z okręgów przecięliśmy walec nową płaszczyzną, równoległą do obu poprzednich przekrojów; otrzymaliśmy trzeci okrąg (rys. 24a, okrąg przez punkty q, Q'). Wyobraźmy sobie teraz, że pręcik PQ odwiązaliśmy z jednego końca, obróciliśmy dokoła P tak, by koniec Q znalazł się na tym trzecim okręgu, powiedzmy w punkcie Q', i tam go przytwierdziliśmy. Jeżeli powtórzymy to ze wszystkiemi pręcikami, leżącemi na walcu, powstanie nowa powierzchnia, której kształt ogólny mamy na rys. 24b. Rzecz jasna, że kąt $qOQ'=\alpha$ dany jest przez równanie

$$l^2-h^2=qQ'^2=\left(2a\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 .$$

Zadania do rozdziału II.

1. Jeżeli $y=f(x)=(ax+b)/(cx-a)$, wówczas $x=f(y)$.
2. Jeżeli przy wszelkich wartościach zmiennej x mamy $f(x)=f(-x)$,

nazywamy $f(x)$ funkcją *parzystą*, jeżeli zaś mamy $f(x)=-f(-x)$, nazywamy $f(x)$ funkcją *nieparzystą*. Dowieść, że każdą funkcję, określoną dla wszelkich wartości zmiennej x, możemy uważać za sumę funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

[Wyjść z tożsamości $f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}+\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}$.]

3. Wyznaczyć wszystkie wartości x, przy których $y=\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x}$ jest liczbą wymierną.

4. Wykreślić funkcje

$$3\sin x+4\cos x\,,\quad \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin x\right).$$

5. Wykreślić funkcje

$$\sin x(a\cos^2 x+b\sin^2 x),\quad \frac{\sin x}{x}(a\cos^2 x+b\sin^2 x),\quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

6. Wykreślić funkcje

$$\text{(I)}\quad \operatorname{arc}\cos(2x^2-1)-2\operatorname{arc}\cos x,$$

$$\text{(II)}\quad \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{a+x}{1-ax}-\operatorname{arc}\operatorname{tg}a-\operatorname{arc}\operatorname{tg}x\,,$$

jeżeli symbole $\operatorname{arc}\cos\alpha$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\alpha$ oznaczają najmniejszy dodatni (lub zerowy) kąt, którego dostawa lub styczna równają się α.

7. Mając dane wykresy funkcji $f(x)$ i $\varphi(x)$ oraz prostą $y=x$ można w następujący sposób zbudować wykres funkcji $f\{\varphi(x)\}$: na osi OX odkładamy $OA=x$, wykreślamy AB równolegle do OY aż do spotkania w punkcie B z krzywą $y=\varphi(x)$, następnie prowadzimy BC równolegle do OX aż do spotkania w punkcie C z prostą $y=x$, dalej kreślimy CD równolegle do OY aż do spotkania w D z krzywą $y=f(x)$, wreszcie kreślimy DP równolegle do OX aż do spotkania w P z prostą AB; punkt P leży na żądanym wykresie.

8. Dowieść, że odcięte punktów przecięcia się paraboli $y=x^2$ z kołem $x^2+y^2+(p-1)y+qx=0$, różnych od początku spółrzędnych, są pierwiastkami równania

$$x^3+px+q=0\,.$$

9. Pierwiastki równania $x^4+nx^3+px^2+qx+r=0$ są odciętemi punktów, w których parabola $x^2=y-\frac{1}{2}nx$ przecina koło

$$x^2+y^2+\left(\frac{n^2}{8}-\frac{pn}{2}+\frac{n}{2}+q\right)x+\left(p-1-\frac{n^2}{4}\right)y+r=0\,.$$

10. Zbadać rozwiązanie wykreślne równania

$$x^m+ax^2+bx+c=0$$

za pomocą krzywych $y=x^m$, $y=-ax^2-bx-c$. Ułożyć tabliczkę, wskazującą liczbę możliwych pierwiastków.

11. Wykazać, że równanie

$$2x=(2n+1)\pi(1-\cos x),$$

w którym n jest liczbą całkowitą dodatnią, ma dokładnie $2n+3$ pierwiastki rzeczywiste. Wskazać, gdzie, mniej więcej, leżą te pierwiastki. (*Mathem. Trip.* 1896).

12. Zbadać liczbę i wartość pierwiastków następujących równań:

$$(1)\ \operatorname{ctg} x+x+\tfrac{3}{2}\pi=0,\quad (2)\ x^2+\sin^2 x=1,\quad (3)\ \operatorname{tg} x=2x/(1+x^2),$$

$$(4)\ \sin x-x+\tfrac{1}{6}x^3=0,\quad (5)\ (1-\cos x)\operatorname{tg}\alpha-x+\sin x=0.$$

13. Wyznaczyć wielomian 5-go stopnia, który przy $x=-1$, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1 przybierałby odpowiednio wartości 3, 7, 2, 0, 4.

14. Dowieść, że wielomian drugiego stopnia, który przy $x=a$, b, c ma odpowiednio wartości α, β, γ, posiada kształt

$$\alpha\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\beta\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\gamma\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Znaleźć analogiczny wzór dla wielomianu stopnia $(n-1)$-ego, który przy $x=a_1, a_2, \ldots a_n$ ma odpowiednio wartości $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

15. Jeżeli x jest funkcją wymierną zmiennej y, a y funkcją wymierną zmiennej x, wówczas musi być $Axy+Bx+Cy+D=0$.

16. Jeżeli y jest funkcją wymierną zmiennej x o spółczynnikach wymiernych, wówczas każdej wymiernej wartości na x odpowiada wymierna wartość na y.

17. Jeżeli y jest funkcją algiebraiczną zmiennej x, wówczas, odwrotnie, x jest funkcją algiebraiczną zmiennej y.

18. Sprawdzić, że gdy $0<x<1$, wówczas

$$1-\frac{x^2}{x+(x-1)\sqrt{\dfrac{2-x}{3}}}$$

daje przybliżoną wartość funkcji $\cos\dfrac{\pi x}{2}$. Przy jakich wartościach na x wartości dwu tych funkcji są sobie równe?

19. Równanie

$$a_0x^n+na_1x^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}y^2+\ldots+a_ny^n=0$$

przedstawia n prostych, przechodzących przez początek spółrzędnych.

20. Dowieść, że prosta $Ax+By+C=0$ tworzy trójkąt równoboczny z dwiema prostemi

$$(Ax+By)^2-3(Ay-Bx)^2=0.$$

(*Mathem. Trip.* 1906).

21. Jeżeli na odcinku, łączącym punkt (x, y) z punktem (x', y'), wykreślimy jako na średnicy koło, to równanie koła będzie

$$(x-x')(x-x'')+(y-y')(y-y'')=0.$$

22. Ogólne równanie koła, przechodzącego przez punkty (x', y') i (x'', y''), można napisać w dwuch postaciach następujących:

$$\text{(I)}\quad (x-x')(y-y'')-(x-x'')(y-y')=\{(x-x')(x-x'')+(y-y')(y-y'')\}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\text{(II)}\quad (x-x')\left(x-x''+\frac{\lambda}{x''-x'}\right)+(y-y')\left(y-y''+\frac{\lambda}{y''-y'}\right)=0,$$

gdzie α jest kątem, wpisanym w jeden z odcinków koła. Wyrazić λ zapomocą α.

23. Ogólne równanie koła, przecinającego pod kątem prostym koło $x^2+y^2+2\lambda x+c=0$, jest $x^2+y^2+2\mu y-c=0$. Dając różne wartości na λ, wykreślić układ takich kół prostokątnych do siebie.

24. Ogólne równanie koła, przecinającego pod kątem prostym dwa dane koła

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0,\quad x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0,$$

można napisać w postaci

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(*Mathem. Trip.* 1906).

25. Dowieść, że walce $x^2+y^2=1$ i $x^2+z^2=1$ przecinają się według dwuch krzywych płaskich. Naszkicować walce oraz krzywe ich przecięcia.

26. **Przecięcia stożka kołowego prostego przez płaszczyzny.** Dowieść, że stożek $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha$ i płaszczyzna $z=x\operatorname{tg}\vartheta+c$ przecinają się według krzywej, której rzutem na płaszczyznę XOY jest krzywa

$$x^2+y^2=(x\operatorname{tg}\vartheta+c)^2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Jeżeli dokonamy zmiany osi, a mianowicie za nowy początek przyjmiemy punkt O', w którym oś OZ przecina płaszczyznę przekroju, nową oś $O'\eta$ poprowadzimy w płaszczyźnie przekroju równolegle do OY, oś zaś $O'\zeta$ w tej samej płaszczyźnie prostopadle do $O'\eta$, wówczas równanie krzywej przecięcia będzie

$$\zeta^2\cos^2\vartheta+\eta^2=(\zeta\sin\vartheta+c)^2\operatorname{tg}^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dowieść, że krzywa ta składa się albo z jednej zamkniętej gałęzi, albo z jednej nieskończonej, albo wreszcie z dwuch nieskończonych gałęzi, zależnie od tego, czy $\vartheta \lesseqgtr \frac{\pi}{2}-\alpha$, a w każdym z tych przypadków jest symetryczna względem $O'\zeta$.

27. Dowieść, że równanie (1) poprzedniego zadania daje się wyrazić w postaci

$$(\zeta-\gamma)^2+\eta^2=e^2(\zeta-\varkappa)^2,$$

gdzie
$$e=\sin\vartheta\,.\,\sec\alpha\,,\quad \gamma=-\frac{c\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin\vartheta}{\sin\alpha\pm\cos\vartheta}\,,$$

$$\varkappa=-\frac{c\,.\,\sin\alpha}{\sin\vartheta}\,.\,\frac{1\pm\sin\alpha\,.\,\cos\vartheta}{\sin\alpha\pm\cos\vartheta}\,,$$

z wyjątkiem tylko przypadku, gdy $\vartheta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, gdyż w tym przypadku mamy

$$e=1,\quad \gamma=-\tfrac{1}{2}c\,.\,\cos\alpha\,,\quad \varkappa=-\tfrac{1}{2}c\,.\,\sec\alpha(1+\sin^2\alpha).$$

28. Dowieść, że krzywa, o której mowa w poprzednich dwu zadaniach, ma następującą własność: odległość każdego punktu krzywej od stałego punktu $(\gamma,\,0)$ jest e razy większa, niż odległość tego punktu krzywej od stałej prostej $\zeta-\varkappa=0$, czyli że krzywa jest stożkową, zgodnie z określeniem, znanym z kursu gieometrji elementarnej. Ta stożkowa jest elipsą, parabolą lub hiperbolą zależnie od tego, czy $e \lesseqgtr 1$, i ma dwa ogniska oraz dwie kierownice, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy $e=1$ lub $e=0$.

29. Niech będą A, A' wierzchołki stożkowej, czyli punkty, w których stożkowa przecina oś symetrji $O'\zeta$; niech będą S, S' ogniska, wreszcie K, K' niech będą punkty, w których kierownice przecinają oś $O'\zeta$. Dowieść, że A i A' dane są przez równanie $\zeta=\mp c\,.\,\sin\alpha/\cos(\alpha\mp\vartheta)$, że A leży między S i K, punkt zaś A' pomiędzy S' i K' i że długość osi wielkiej AA' równa się $2c\,.\,\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\vartheta/(\cos^2\vartheta-\sin^2\alpha)$.

30. Jeżeli środek C osi AA' obierzemy jako początek spółrzędnych, nowe zaś osie poprowadzimy równolegle do $O'\zeta$, $O'\eta$, wówczas zależnie od tego, czy $e<1$, czy też $e>1$, równanie krzywej przybierze kształt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

gdzie $a=\tfrac{1}{2}AA'$, $b=a\sqrt{1-e^2}$,

albo też kształt

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

gdzie $a=\tfrac{1}{2}AA'$, $b=a\sqrt{e^2-1}$. Naszkicować kształt obu tych krzywych.

31. Jeżeli $e=1$, wówczas oś $O'\zeta$ przecina krzywą w jednym tylko punkcie A, którego odcięta $\zeta=-\tfrac{1}{2}c\,.\,\sec\alpha$. Jeżeli przeniesiemy osie równolegle do tego punktu, równanie krzywej przybierze kształt $y^2=4ax$, gdzie $a=\tfrac{1}{2}c\,.\,\sin\alpha\,.\,\mathrm{tg}\alpha$.

[Pragnących poznać dokładniej własności stożkowych, odsyłamy do podręczników gieometrji analitycznej.]

32. Dowieść, że najogólniejsze równanie kwadratowe z dwiema niewiadomemi

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

przedstawia stożkową.

33. Dowieść, że powyższe równanie przedstawia elipsę, parabolę lub hiperbolę, zależnie od tego, czy $h^2 \lesseqgtr ab$.

34. Równanie

$$ax^2+2hxy+by^2+2(gx+fy)(lx+my)+c(lx+my)^2=0$$

jest równaniem dwuch prostych, łączących początek spółrzędnych z punktami, w których prosta $lx+my=1$ przecina stożkową

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$

35. Jeżeli stożek $x^2+y^2=1$ przetniemy dowolną płaszczyzną, byle nie równoległą ani też prostopadłą do osi stożka, wówczas przekrój jest krzywą, posiadającą własności ogniskowe stożkowej.

36. Krzywa

$$\lambda f(x, y)\varphi(x, y)+\mu F(x, y)\Phi(x, y)=0$$

przechodzi przez wszystkie punkty przecięcia się następujących krzywych: $f(x,y)=0$ z $F(x,y)=0$; $f(x,y)=0$ z $\Phi(x,y)=0$; $\varphi(x,y)=0$ z $F(x,y)=0$, wreszcie $\varphi(x,y)=0$ z $\Phi(x,y)=0$.

36. Jeżeli mamy $\lambda_r=a_rx+b_ry+c_r$, wówczas równanie $\lambda L_1L_3+\mu L_2L_4=0$ jest ogólnym równaniem stożkowej, opisanej na czworoboku, utworzonym przez cztery proste: $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$, $L_4=0$, wzięte we wskazanym porządku.

38. Znaleźć równanie powierzchni, utworzonej przez obrót koła

$$y=0, \quad (x-a)^2+z^2=1$$

dokoła osi z-ów. Naszkicować kształt tej powierzchni.

39. Jaki kształt mają wykresy funkcji

$$\text{(I)} \quad z=[x]+[y], \quad \text{(II)} \quad z=x+y-[x]-[y]\,?$$

40. Jaki kształt mają wykresy funkcji

$$z=\sin x+\sin y, \quad z=\sin x\,.\,\sin y, \quad z=\sin xy, \quad z=\sin(x^2+y^2)?$$

41. **Wykreślanie liczb niewymiernych.** W rozdziale I wskazaliśmy dwa proste sposoby zbudowania odcinka o długości równej $\sqrt{2}$, wychodząc z danej jednostki długości. Wskazaliśmy również, w jaki sposób zbudować możemy pierwiastki równania $ax^2+bx+c=0$, jeżeli umiemy zbudować odcinki, których długości równają się dowolnie danym stosunkom liczb a, b, c. Wszystkie takie konstrukcje można byłoby nazwać euklidesowemi, gdyż posługiwaliśmy się przy nich tylko cyrklem i linjałem.

Rzecz jasna, że można zastosować te metody do zbudowania dowolnej liczby niewymiernej, o ile tylko ta liczba składa się *z niewymierności kwadratowych.* Do takich należy np. liczba

$$\sqrt[4]{\sqrt{\frac{17+3\sqrt{11}}{17-3\sqrt{11}}}-\sqrt{\frac{17-3\sqrt{11}}{17+3\sqrt{11}}}},$$

gdyż pierwiastek stopnia czwartego możemy uważać za pierwiastek kwadratowy z pierwiastka kwadratowego. W danym razie zbudowalibyśmy najpierw odcinek o długości $\sqrt{11}$, jako średnią gieometryczną odcinków 1 i 11; następnie zbudowalibyśmy odcinki $17 \pm 3\sqrt{11}$ i t. d. Albo też moglibyśmy odrazu zbudować te dwie niewymierności kwadratowe mieszane jako pierwiastki równania $x^2-34x+190=0$.

I odwrotnie: metodami euklidesowemi dają się zbudować *tylko niewymierności kwadratowe.* Obrawszy dowolną jednostkę długości, możemy zbudować każdą długość *wymierną*, zatym możemy zbudować prostą $ax+by+c=0$ oraz koło $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0$, *byle tylko w tych równaniach stałe były liczbami wymiernemi.*

Otóż w konstrukcjach euklidesowych wyznaczamy każdy punkt jako punkt przecięcia się dwuch prostych lub dwuch kół, lub wreszcie prostej i koła. Jeżeli spółczynniki powyższych równań koła i prostej są wymierne, spólne pierwiastki tych równań mają kształt $m+n\sqrt{p}$, gdzie m, n, p są liczbami wymiernemi, gdyż rugując z tych równań jedną zmienną, np. x, otrzymamy na y równanie kwadratowe ze spółczynnikami wymiernemi. Tak więc spółrzędne wszystkich punktów, wyznaczonych jako przecięcia się naszych prostych i kół wyrażają się liczbami wymiernemi albo też niewymiernościami kwadratowemi. To samo, oczywiście, powiedzieć można o liczbie $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, która daje odległość dwuch punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

Po zbudowaniu takich niewymierności kwadratowych możemy budować proste i koła, których równania zawierają, jako spółczynniki, niewymierności kwadratowe. Rzecz jasna, że zapomocą tych nowych kół i prostych możemy budować dalej niewymierności bardziej skomplikowane, ale w każdym razie tylko takie, które same składają się wyłącznie z liczb wymiernych i z niewymierności kwadratowych. I t. d. Zatym *metody konstrukcyjne Euklidesa dają nam możność zbudowania każdej niewymierności kwadratowej, i tylko takiej.* W szczególności nie możemy zbudować tą drogą liczby $\sqrt[3]{2}$, czyli nie możemy rozwiązać słynnego zagadnienia *o podwojeniu sześcianu.*

42. **Przybliżone wyprostowanie okręgu.** Niech O będzie środkiem koła o promieniu R. Przez punkt A na okręgu prowadzimy styczną, na niej odkładamy w jednym zwrocie $AP=\frac{11}{5}R$ oraz $AQ=\frac{13}{5}R$. Na AO odkładamy $AN=OP$ i wykreślamy NM równolegle do OQ. Niech prosta NM przecina AP w punkcie M.

Dowieść, że

$$AM=\frac{13}{25}\sqrt{146}\,.\,R$$

i że, przyjmując AM za długość okręgu, otrzymamy wartość na π z dokładnością do 0·00001.

Jeżeli R jest promieniem kuli ziemskiej, wówczas AM różni się od długości koła wielkiego na ziemi mniej, niż o 10 metrów.

43. Dowieść, że mając daną dowolną jednostkę długości, można zapomocą *samego tylko linjału* zbudować *wszystkie liczby wymierne*, i nie można zbudować żadnych innych.

44. **Przybliżona konstrukcja odcinka o długości $\sqrt[3]{2}$.** Niech O będzie wierzchołkiem, S zaś ogniskiem paraboli $y^2=4x$, i niech P będzie jednym z punktów, w których ta parabola przecina parabolę $x^2=2y$. Dowieść, że OP przecina bok prosty pierwszej paraboli w takim punkcie Q, że $SQ=\sqrt[3]{2}$.

45. Zakreślmy koło promieniem równym 1, poprowadźmy średnicę OA i styczną do koła w punkcie A. Wykreślmy dalej cięciwę OBC, przecinającą okrąg w B, styczną zaś w C. Na cięciwie odłóżmy $OM=BC$. Jeżeli O jest początkiem spółrzędnych, a średnica OA jest osią x-ów, wówczas miejscem gieometrycznym punktu M jest krzywa

$$(x^2+y^2)\,x-y^2=0.$$

Jest to *cysoida Dioklesa.* Wykreślić tę krzywą.

Jeżeli na osi y-ów odłożymy $OD=2$, i jeżeli AD przecina cysoidę w punkcie P, prosta zaś OP przecina w punkcie Q styczną, poprowadzoną przez punkt A, wówczas mamy $AQ=\sqrt[3]{2}$.

ROZDZIAŁ III.

O LICZBACH ZESPOLONYCH.

25. O przesunięciach wzdłuż prostej i na płaszczyźnie. Liczbę „rzeczywistą” x, o której mówiliśmy w dwuch poprzednich rozdziałach, można traktować z różnych punktów widzenia. Można ją uważać za *czystą liczbę*, pozbawioną wszelkiego znaczenia gieometrycznego, ale można też przypisywać jej pewne znaczenie gieometryczne, a nawet conajmniej trzy różne znaczenia gieometryczne. Można uważać ją za *miarę długości*, np. za miarę długości odcinka A_0P na prostej L, jak to czyniliśmy w rozdziale I-ym. Można ją uważać za *znak przywiązany do punktu* P, którego odległość od A_0 równa się x. Można wreszcie uważać ją za *miarę przesunięcia* wzdłuż prostej L. W niniejszym rozdziale staniemy na tym trzecim stanowisku.

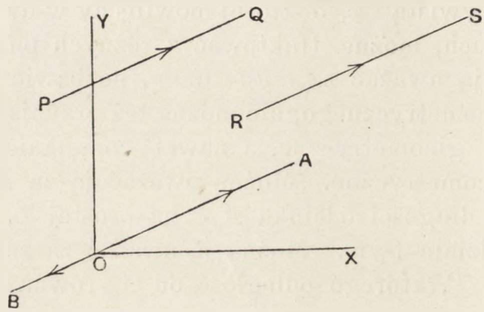
Przypuśćmy, że punkt ruchomy został przesunięty po prostej L z P do Q; przesunięcie to będziemy nazywali przesunięciem $\overline{PQ}$. Do wyznaczenia przesunięcia potrzeba trzech rzeczy: trzeba mianowicie znać jego *wielkość*, *zwrot* i *punkt początkowy*, t. j. pierwotne położenie ruchomego punktu na prostej L. W pewnych wypadkach możemy nie dbać o to, jaki był ten punkt początkowy, i uważać za równoważne każde dwa przesunięcia, mające ten sam zwrot i równe wielkości. W takim razie długość odcinka $PQ=x$ wyznacza przesunięcie, gdyż zwrot jest wyznaczony przez znak dodatni lub ujemny liczby x, która jest miarą długości odcinka. Możemy tedy mówić o przesunięciu $[x]$ i pisać

$$\overline{PQ}=[x].$$

Zamknęliśmy x w nawiasie, aby odróżnić *przesunięcie* $[x]$

od długości lub *liczby* x *). Jeżeli a jest spółrzędną punktu P, wówczas $a+x$ jest spółrzędną punktu Q, zatym przesunięcie $[x]$ przenosi ruchomy punkt z punktu a do punktu $a+x$.

A teraz zastanówmy się nad *przesunięciem na płaszczyźnie.* Aby wyznaczyć przesunięcie PQ na płaszczyźnie, musimy mieć więcej danych. A mianowicie, musimy znać: (I) *wielkość* jego, czyli długość odcinka PQ; (II) *kierunek* jego, czyli kąt między prostą PQ a pewną stałą prostą na płaszczyźnie; (III) *zwrot* przesunięcia; (IV) *punkt początkowy.* Z tych czterech warunków, wyznaczających przesunięcie, możemy odrzucić czwarty, jeżeli umówimy się, że będziemy uważali za równoważne każde dwa przesunięcia, mające ten sam kierunek, ten sam zwrot



Rys. 25.

i równe wielkości. Innemi słowy: jeżeli odcinki PQ i RS równają się sobie i są do siebie równoległe, jeżeli nadto zwrot od P do Q jest ten sam, co zwrot od R do S, wówczas przesunięcia $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ uważamy, na mocy naszej umowy, za równoważne i piszemy

$$\overline{PQ} = \overline{RS}.$$

Obierzmy dowolnie osie spółrzędnych na płaszczyźnie (np. OX, OY na rys. 25). Wykreślmy odcinek OA równy PQ i równoległy do niego. Zwrot od O do A jest ten sam, co

*) Właściwie należałoby w jakiś sposób odróżniać długość x od liczby x, będącej miarą tej długości. Czytelnik może uważać takie rozróżnianie pojęć za zbyteczną subtelność i pedantyzm, ale im głębiej poznawać będzie matematykę, tym jaśniejszą stawać się będzie dla niego prawda, że dokładne rozróżnianie rzeczy pokrewnych, lecz *nie tożsamych* jest bezwzględnie konieczne.

zwrot od P do Q, zatym przesunięcia $\overline{PQ}$ i $\overline{OA}$ uważamy za równoważne. Niech będą x, y spółrzędne punktu A. Rzecz jasna, że $\overline{OA}$ jest w zupełności wyznaczone przez spółrzędne x, y. Nazywamy $\overline{OA}$ *przesunięciem* $[x, y]$ i piszemy

$$\overline{OA}=\overline{PQ}=\overline{RS}=[x, y].$$

26. Równoważność przesunięć. Mnożenie przesunięć przez liczby. Jeżeli ζ, η są spółrzędnemi punktu P, a ζ', η' spółrzędnemi punktu Q, mamy

$$x=\zeta'-\zeta, \quad y=\eta'-\eta.$$

Wobec tego przesunięcie od (ζ, η) do (ζ', η') jest

$$[\zeta'-\zeta, \quad \eta'-\eta].$$

Oczywista rzecz, że dwa przesunięcia $[x, y]$, $[x', y']$ są sobie równoważne wówczas i tylko wówczas, gdy $x=x'$, $y=y'$.

Tak więc

$$[x, y]=[x', y'],$$

jeżeli mamy jednocześnie

$$x=x', \quad y=y' \quad \text{. . . . . (1)}$$

Przesunięcie przeciwne poprzedniemu, czyli przesunięcie $\overline{QP}$ oznaczymy konsekwentnie przez $[\zeta-\zeta', \eta-\eta']$ i u m ó w i m y s i ę, że

$$[\zeta-\zeta', \eta-\eta']=-[\zeta'-\zeta, \eta'-\eta],$$

albo inaczej $\qquad \overline{QP}=-\overline{PQ}.$

Te dwie ostatnie równości są o k r e ś l e n i a m i symbolów $-[\zeta'-\zeta, \eta'-\eta]$ i $-\overline{PQ}$. Ponieważ umowę naszą możnaby jeszcze wyrazić symbolem

$$-[x, y]=[-x, -y],$$

przeto postąpimy konsekwentnie, jeżeli umówimy się ogólniej, że

$$\alpha[x, y]=[\alpha x, \alpha y] \quad \text{. . . . . (2)}$$

gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą, dodatnią lub ujemną. Np. (rys. 25) jeżeli $OB=-\frac{1}{2}OA$, mamy

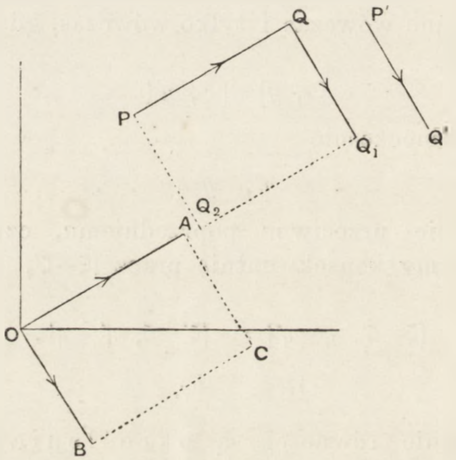
$$\overline{OB}=-\tfrac{1}{2}\overline{OA}=-\tfrac{1}{2}[x, y]=[-\tfrac{1}{2}x, -\tfrac{1}{2}y].$$

Równania (1) i (2) są to określenia dwuch ważnych pojęć: *równoważności* przesunięć i *mnożenia przesunięć przez liczby rzeczywiste*.

27. Dodawanie przesunięć. Nie podaliśmy dotąd żadnego określenia, któreby nadawało jakieś znaczenie symbolom

$$\overline{PQ}+\overline{P'Q'}, \text{ albo } [x, y]+[x', y'].$$

Zdrowy rozsądek nakazywałby określić sumę dwuch przesunięć jako wynik kolejnego dokonania tych dwu przesunięć. Innemi słowy, jeżeli wykreślimy odcinek QQ_1 równy i równoległy do $P'Q'$, tak iż skutkiem dwuch kolejno wykonanych przesunięć $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q'}$ jest przesunięcie punktu ruchomego z P do Q, a następnie z Q do Q_1, wówczas określimy sumę prze-



Rys. 26.

sunięć $\overline{PQ}$ i $\overline{P'Q'}$ jako przesunięcie $\overline{PQ_1}$. Albo, co na jedno wychodzi, jeżeli wykreślimy przez punkt O prostą równoległą do $P'Q'$, na niej odłożymy odcinek $OB=P'Q'$, przytym tak, żeby zwroty od O do B i od P' do Q' były zgodne z sobą, wreszcie zbudujemy równoległobok $OACB$, wówczas

$$\overline{PQ}+\overline{P'Q'}=\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{PQ_1}.$$

Zbadajmy, jakie konsekwencje wynikają z przyjęcia takiej definicji dodawania. Jeżeli x', y' są spółrzędnemi punktu

B, wówczas spółrzędne środka odcinka AB są $\frac{1}{2}(x+x')$, $\frac{1}{2}(y+y')$, spółrzędne zaś punktu C są $x+x'$, $y+y'$.

Mamy tedy

$$[x, y]+[x', y']=[x+x', y+y'] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

co możemy uważać jako *określenie dodawania przesunięć*, wyrażone zapomocą symbolów.

Zauważmy, że

$$[x, y]+[x', y']=[x+x', y+y']=[x'+x, y'+y]=[x'+y']+[x+y],$$

zatym *dodawanie przesunięć podlega prawu przemienności*, które wyrażamy w arytmetyce symbolem $a+b=b+a$.

Wyrażamy w ten sposób fakt gieometryczny, że gdybyśmy najpierw wykonali przesunięcie punktu P o odcinek PQ_2, równy i równoległy do $P'Q'$, przytym mający ten sam zwrot co $P'Q'$, następnie zaś wykonali przesunięcie o odcinek, równy i równoległy do PQ i mający ten sam zwrot, co PQ, doszlibyśmy do tego samego punktu Q_1, co i poprzednio.

Ponieważ, dalej, mamy

$$[x, y]+[x, y]=[2x, 2y]=2[x, y],$$

zatym nasze określenie dodawania jest w zgodzie z poprzednio przyjętym określeniem mnożenia przesunięć przez liczby rzeczywiste.

W szczególności mamy

$$[x, y]=[x, 0]+[0, y] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Symbol $[x, 0]$ oznacza tu przesunięcie o odcinek x wdłuż prostej, równoległej do osi OX. To samo przesunięcie oznaczaliśmy poprzednio symbolem $[x]$, gdy mowa była tylko o przesunięciach wzdłuż oznaczonej prostej. Przesunięcia $[x, 0]$, $[0, y]$ nazwiemy *składowemi*, przesunięcie zaś $[x, y]$ nazwiemy *wypadkowym* tych dwu przesunięć składowych.

Skoro określiliśmy sumę dwu przesunięć, łatwo otrzymać możemy określenie sumy dowolnej liczby przesunięć. Mamy np.

$$[x, y]+[x', y']+[x'', y'']=([x, y]+[x', y'])+[x'', y'']=$$
$$=[x+x', y+y']+[x'', y'']=[x+x'+x'', y+y'+y''].$$

Odejmowanie przesunięć określamy symbolicznie w następujący sposób:

$$[x, y]-[x', y']=[x, y]+(-[x', y']) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

co nie różni się w gruncie rzeczy od sumy $[x, y]+[-x', -y']$ lub od przesunięcia $[x-x', y-y']$.

W szczególności mamy

$$[x, y]-[x, y]=[0,0].$$

Przesunięcie $[0,0]$ *pozostawia punkt ruchomy na miejscu.* Nazwiemy je *przesunięciem zerowym* i umówimy się, że będziemy pisali $[0,0]=0$.

Przykłady XXII. 1. Dowieść, że dodawanie przesunięć oraz mnożenie przesunięć przez liczby podlegają wszystkim zwykłym prawom arytmetycznym, wyrażonym przez następujące równania:

(I) $\alpha[\beta x, \beta y]=\beta[\alpha x, \alpha y]=[\alpha\beta x, \alpha\beta y]$,

(II) $([x, y]+[x', y'])+[x'', y'']=[x, y]+([x', y']+[x'', y''])$,

(III) $[x, y]+[x', y']=[x', y']+[x, y]$,

(IV) $(\alpha+\beta)[x, y]=\alpha[x, y]+\beta[x, y]$,

(V) $\alpha\{[x, y]+[x', y']\}=\alpha[x, y]+\alpha[x', y']$.

[Dowiedliśmy już prawa (III). Czytelnik powinien nietylko dowieść pozostałych praw, lecz zbadać znaczenie gieometryczne każdego z nich].

2. Jeżeli M jest środkiem odcinka PQ, wówczas $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OP}+\overline{OQ})$. Albo ogólniej: jeżeli punkt M dzieli odcinek PQ w stosunku $\mu:\lambda$, mamy

$$\overline{OM}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overline{OP}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overline{OQ}.$$

3. Jeżeli G jest środkiem masy równych cząstek, leżących w punktach $P_1, P_2, .. P_n$, wówczas

$$\overline{OG}=\frac{\overline{OP_1}+\overline{OP_2}+...+\overline{OP_n}}{n}.$$

4. Jeżeli P, Q, R są trzema punktami spółlinjowemi (t. j. leżącemi na jednej prostej), możemy zawsze znaleźć trzy liczby α, β, γ, które nie są wszystkie trzy równe zeru, i które sprawdzają równość

$$\alpha.\overline{OP}+\beta.\overline{OQ}+\gamma.\overline{OR}=0.$$

I odwrotnie: o ile równość taka zachodzi, punkty P, Q, R są spółlinjowe.

[Wykazać, że jest to inny sposób wysłowienia Przykładu 2.]

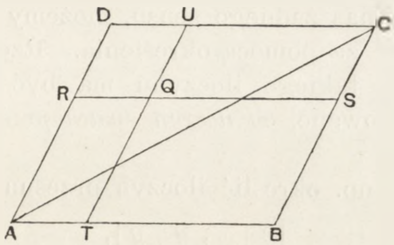
5. Jeżeli $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ są dwoma przesunięciami na dwuch różnych prostych i jeżeli

$$\alpha.\overline{AB}+\beta.\overline{AD}=\gamma.\overline{AB}+\delta.\overline{AD},$$

wówczas $\alpha=\gamma$ i $\beta=\delta$.

[Wykreślamy $\overline{AB_1}=\alpha.\overline{AB}$, $\overline{AD_1}=\beta.\overline{AD}$ i budujemy równoległobok $AB_1P_1D_1$. Mamy $\overline{AP_1}=\alpha.\overline{AB}+\beta\overline{AD}$. Rzecz jasna, że $\overline{AP_1}$ da się tak wyrazić tylko jednym sposobem].

6. $ABCD$ jest równoległobokiem. Przez punkt wewnętrzny Q prowadzimy proste RQS i TQU, równoległe do boków równoległoboku. Dowieść, że RU i TS przecinają się w punkcie, leżącym na przekątnej AC.



Rys. 27.

[Oznaczmy przez α, β stosunki $AT:AB$ i $AR:AD$. Mamy

$$\overline{AT}=\alpha.\overline{AB},\ \overline{AR}=\beta.\overline{AD},\ \overline{AU}=\alpha.\overline{AB}+\overline{AD},\ \overline{AS}=\overline{AB}+\beta.\overline{AD}.$$

Przypuśćmy, że RU przecina przekątną AC w punkcie P. W takim razie, wobec tego że R, U, P są spółlinjowe, mamy

$$\overline{AP}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overline{AR}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overline{AU},$$

gdzie $\mu:\lambda$ jest stosunkiem, w którym P dzieli odcinek RU. Innemi słowy:

$$\overline{AP}=\frac{\alpha\mu}{\lambda+\mu}\overline{AB}+\frac{\beta\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\overline{AD}.$$

Ponieważ jednak punkt P leży na AC, zatym $\overline{AP}$ musi być wielokrotnością $\overline{AC}$, np. musi być

$$\overline{AP}=k.\overline{AC}=k.\overline{AB}+k.\overline{AD}.$$

Na mocy poprzedniego przykładu, mamy

$$\alpha\mu=\beta\lambda+\mu=(\lambda+\mu)k,$$

skąd

$$k=\alpha\beta/(\alpha+\beta-1).$$

Z symetrji wzoru tego widać odrazu, że zupełnie analogiczne rozumowanie doprowadziłoby nas do wniosku, że

$$\overline{AP'}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}\overline{AC},$$

gdzie P' jest punktem przecięcia się TS z przekątną AC. Tak więc P i P' są tym samym punktem.]

7. $ABCD$ jest równoległobokiem, M jest środkiem AB. Dowieść, że DM dzieli AC w stosunku 1:2 i że AC dzieli DM w tym samym stosunku.

28. Mnożenie przesunięć. Mówiliśmy tylko o mnożeniu przesunięć przez liczby, natomiast wyrażenie

$$[x,\ y] \times [x',\ y']$$

nie ma dotąd dla nas żadnego sensu, możemy mu tedy nadać dowolne znaczenie za pomocą określenia. Rzecz jednak jasna, że jeśli określenie takiego iloczynu ma być użyteczne, musi ono być tak zbudowane, *by iloczyn dwuch przesunięć był zawsze przesunięciem.*

Moglibyśmy np. określić iloczyn przesunięć jako równy

$$[x+x',\ y+y'],$$

t. j. moglibyśmy uważać go za równy sumie tych samych dwu przesunięć. Ale przeciw takiemu określeniu można podnieść dwa zarzuty. Przedewszystkim byłoby ono zbyteczne, gdyż na mocy tego określenia wprowadzilibyśmy do teorji coś, co już do niej należy i co daje się doskonale wyrazić w inny, znany nam sposób. Powtóre określenie nasze byłoby niewygodne i dawałoby powód do gmatwaniny pojęć, a to z następujących względów. Jeżeli α jest liczbą rzeczywistą, wówczas, na mocy znanego nam już określenia, mamy $\alpha[x,\ y]=[\alpha x,\ \alpha y]$. Otóż widzieliśmy w § 25-ym, że liczbę rzeczywistą α możemy uważać za przesunięcie $[\alpha]$ wzdłuż osi OX, czyli, według znakowania wprowadzonego w § 27-ym, za przesunięcie $[\alpha,\ 0]$. Wobec tego nie jest wprawdzie rzeczą konieczną, ale w każdym razie jest bardzo pożądane, żeby z definicji, którą mamy wprowadzić, wypływało, iż

$$[\alpha,\ 0]\,.\,[x,\ y]=[\alpha x,\ \alpha y].$$

Na pierwszy rzut oka możnaby za odpowiednie określenie mnożenia uważać wzór

$$[x,\ y]\,.\,[x',\ y']=[xx',\ yy'],$$

ale w takim razie mielibyśmy

$$[\alpha,\ 0]\,.\,[x,\ y]=[\alpha x,\ 0],$$

i drugi zarzut pozostałby słuszny.

Widzimy, że znalezienie odpowiedniego określenia nie jest rzeczą łatwą. Na razie jest jasne,

(I) że jeżeli określenie to ma być użyteczne, wówczas iloczyn dwuch przesunięć musi być przesunięciem, którego spółrzędne byłyby funkcjami spółrzędnych x i y, x' i y', czyli że powinniśmy mieć

$$[x, y] . [x', y'] = [X, Y];$$

(II) że z określenia naszego powinien wypływać wzór

$$[x, 0] . [x', y'] = [xx', xy'];$$

(III) że określony przez nas iloczyn dwuch przesunięć powinien podlegać prawom przemienności, łączności i rozdzielności, czyli że powinno być

$$[x, y] . [x', y'] = [x', y'] . [x, y],$$

$$\{[x, y] . [x', y']\} . [x'', y''] = [x, y] . \{[x', y'] . [x'', y'']\},$$

$$\{[x, y] + [x', y']\} . [x'', y''] = [x, y] . [x'', y''] + [x', y'] . [x'', y''],$$

$$[x, y] . \{[x', y'] + [x'', y'']\} = [x, y] . [x', y'] + [x, y] . [x'', y''] .$$

29. Następujące rozważania mogą nasunąć pomysł właściwej definicji. Wiemy, że jeśli trójkąty OAB, OCD są do siebie podobne, przyczym $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D$, wówczas mamy

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC},$$

czyli $$OB . OC = OA . OD$$

Spróbujmy określić mnożenie i dzielenie przesunięć zgodnie z temi dwiema równościami.

Niech będzie

$$\overline{OB} = [x, y], \quad \overline{OC} = [x', y'], \quad \overline{OD} = [X, Y],$$

wreszcie A niech będzie punktem $(1, 0)$, czyli niech będzie przesunięcie $\overline{OA} = [1, 0]$.

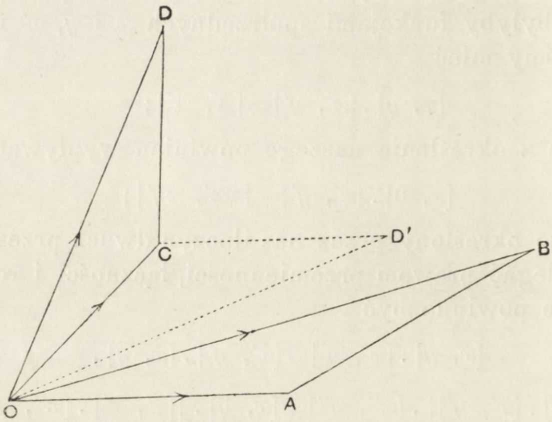
Przy tych założeniach mamy

$$\overline{OA} . \overline{OD} = [1, 0] . [X, Y] = [X, Y],$$

czyli $$[x, y] . [x', y'] = [X, Y] .$$

Tak więc iloczyn $\overline{OB} . \overline{OC}$ określimy jako przesunięcie

$\overline{OD}$, przyczym punkt D otrzymujemy, budując na OC trójkąt, podobny do trójkąta OAB. Zauważmy jednak, że na OC można zbudować dwa takie trójkąty, mianowicie OCD i OCD'; chcąc



Rys. 28.

więc usunąć z naszego określenia wszelką dwuznaczność, musimy raz na zawsze umówić się, że obierać będziemy ten trójkąt, w którym kąt COD jest równy kątowi AOB nietylko co do wielkości, ale również co do zwrotu. O dwuch takich trójkątach powiemy, że *są do siebie podobne w tym samym zwrocie.*

Jeżeli spółrzędne biegunowe punktów B, C oznaczymy odpowiednio przez (ρ, ϑ) i przez (σ, φ), tak iż

$$x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta,\quad x'=\sigma\cos\varphi,\quad y'=\sigma\sin\varphi,$$

wówczas spółrzędne biegunowe punktu D muszą być, oczywiście, $(\rho\sigma, \vartheta+\varphi)$. Wobec tego mamy

$$X=\rho\sigma\cos(\vartheta+\varphi)=xx'-yy',$$

$$Y=\rho\sigma\sin(\vartheta+\varphi)=xy'+yx',$$

i żądana *definicja mnożenia* przybiera kształt

$$[x,\ y]\,.\,[x',\ y']=[xx'-yy',\ xy'+yx'] \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Zauważmy,

(1) że gdy $y=0$, mamy $X=xx'$, $Y=xy'$ tak, jak tego chcieliśmy;

(2) że prawa część równania (6) nie ulegnie zmianie, jeśli przestawimy litery x, x' oraz y, y', czyli że mamy

$$[x, y] \cdot [x', y'] = [x', y'] \cdot [x, y];$$

(3) że mamy

$$\{[x, y] + [x', y']\} \cdot [x'', y''] = [x + x', y + y'] \cdot [x'', y'']$$
$$= [(x+x')x'' - (y+y')y'', \quad (x+x')y'' + (y+y')x'']$$
$$= [xx'' - yy'', xy'' + yx''] + [x'x'' - y'y'', x'y'' + y'x'']$$
$$= [x, y] \cdot [x'', y''] + [x', y'] \cdot [x'', y''].$$

Czytelnik przekona się sam zapomocą analogicznych rachunków, że określenie czyni zadość wszystkim innym warunkom, wymienionym w § 28 (III).

Opierając się na gieometrycznym określeniu mnożenia przesunięć, dowieść można, że podlega ono prawu przemienności. Iloczyn $\overline{OB} \cdot \overline{OC}$ jest przesunięciem $\overline{OD}$ (rys. 28), przyczym trójkąty COD, AOB są do siebie podobne. Chcąc zbudować iloczyn $\overline{OC} \cdot \overline{OB}$, musielibyśmy zbudować na $\overline{OB}$ trójkąt BOD_1, podobny do trójkąta AOC; pozostaje dowieść, że punkty D i D_1 zlewają się z sobą, czyli że trójkąty BOD, AOC są do siebie podobne. Dowód pozostawiamy czytelnikowi. Radzimy również czytelnikowi, aby dowiódł na drodze gieometrycznej, że iloczyn przesunięć podlega prawu rozdzielności.

30. Liczby zespolone. Przesunięciu $[x]$ na osi OX odpowiada punkt (x) i liczba rzeczywista x; tak samo przesunięciu $[x, y]$ na płaszczyźnie odpowiada punkt (x, y) i *para liczb rzeczywistych* x, y.

Oznaczmy tę parę symbolem

$$x + yi.$$

Racja, dla której wybraliśmy taki symbol, stanie się później zrozumiałą. Na razie będziemy uważali $x+yi$ po prostu za *inny sposób oznaczania przesunięcia* $[x, y]$. Nazwijmy $x+yi$ *liczbą zespoloną*.

Przedewszystkim określmy równość, dodawanie i mnożenie liczb zespolonych. Każdej liczbie zespolonej odpowiada przesunięcie. Dwie liczby zespolone będziemy uważali za równe, jeśli odpowiadające im przesunięcia są sobie równoważne. Sumę i iloczyn liczb zespolonych określimy jako liczby zespolone, odpowiadające sumie i iloczynowi odpowiednich przesunięć. Mamy tedy

$$x+yi=x'+y'i, \text{ jeżeli } x=x', \; y=y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')i \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$(x+yi)(x'+y'i)=(xx'-yy')+(xy'+yx')i \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

W szczególności, gdy α jest liczbą rzeczywistą, mamy

$$\alpha(x+yi)=\alpha x+\alpha yi.$$

Liczbę zespoloną kształtu $x+0i$ możemy uważać za równoznaczną z liczbą rzeczywistą x, tak iż

$$x+0i=x;$$

w szczególności $\quad 0+0i=0.$

Potęgi o wykładniku całkowitym i wielomiany, utworzone z liczb zespolonych, określamy tak, jak się to czyni w algiebrze liczb rzeczywistych. Np. z wzoru (3), kładąc $x=x'$, $y=y'$, otrzymujemy

$$(x+yi)^2=(x+yi)(x+yi)=x^2-y^2+2xyi.$$

Czytelnik sam sprawdzi z łatwością, że dodawanie i mnożenie liczb zespolonych podlega prawom przemienności, łączności, rozdzielności, czyli że mamy

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x'+y'i)+(x+yi),$$

$$\{(x+yi)+(x'+y'i)\}+(x''+y''i)=x+yi+\{(x'+y'i)+(x''+y''i)\},$$

$$(x+yi).(x'+y'i)=(x'+y'i).(x+yi),$$

$$(x+yi).\{(x'+y'i)+(x''+y''i)\}=(x+yi).(x'+y'i)+(x+yi).(x''+y''i),$$

$$\{(x+yi)+(x'+y'i)\}.(x''+y''i)=(x+yi).(x''+y''i)+(x'+y'i).(x''+y''i),$$

$$(x+yi).\{(x'+y'i).(x''+y''i)\}=\{(x+yi).(x'+y'i)\}.(x''+y''i).$$

Dowody tych twierdzeń są zupełnie analogiczne do dowodów odpowiednich twierdzeń o przesunięciach.

Odejmowanie i dzielenie określimy zupełnie tak, jak dla liczb rzeczywistych. Powiemy więc, albo że

$$(x+yi)-(x'+y'i)=(x+yi)+\{-(x'+y'i)\}=(x+yi)+(-x'-y'i)$$
$$=(x-x')+(y-y')i,$$

albo też, że różnica $(x+yi)-(x'+y'i)$ jest to taka liczba zespolona $\zeta+\eta i$, że

$$(x'+y'i)+(\zeta+\eta i)=x+yi.$$

Łatwo sprawdzić, że przy obu określeniach otrzymujemy identyczne wyniki.

Iloraz $(x+yi)/(x'+y'i)$ określamy jako liczbę zespoloną $\zeta+\eta i$ taką, iż

$$(x'+y'i)(\zeta+\eta i)=(x+yi).$$

Z tego określenia wynika, że

$$(x'\zeta-y'\eta)+(x'\eta+y'\zeta)i=x+yi.$$

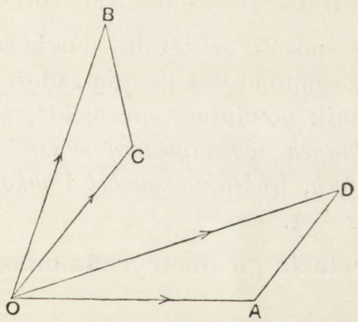
czyli
$$x=x'\zeta-y'\eta\,,\quad y=x'\eta+y'\zeta\quad .\ .\ .\ .\ .\ (4).$$

Rozwiązując te równania względem ζ i η, otrzymujemy

$$\zeta=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}\,,\qquad \eta=\frac{yx'-y'x}{x'^2+y'^2}\,.$$

Rzecz jasna, że ζ i η nie dają się wyznaczyć, jeżeli liczby x', y' są obie jednocześnie zerami. Tak więc odejmowanie daje się zawsze wykonać, dzielenie zaś—zawsze, z wyjątkiem przypadku, gdy dzielnik jest zerem.

Przykłady. (1). Z gieometrycznego punktu widzenia, podzielić przesunięcie $\overline{OB}$ przez $\overline{OC}$ znaczy tyleż, co znaleźć taki punkt D, by trójkąty COB, AOD były do siebie podobne, to zaś jest zawsze możliwe (i da-



Rys. 29.

je się wykonać tylko jednym sposobem), *jeżeli tylko C i O są różnemi punktami, czyli gdy $CO \neq 0$.*

2. Liczby $x+yi$, $x-yi$ nazywamy *sprzężonemi*. Sprawdzić, że

$$(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2,$$

tak iż iloczyn dwu liczb sprzężonych zespolonych jest liczbą rzeczywistą.

Sprawdzić również, że

$$\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{xx'+yy'+i(x'y-xy')}{x'^2+y'^2}\,.$$

31. Do najważniejszych własności liczb rzeczywistych należy ta, że *iloczyn dwuch liczb równa się zeru tylko wówczas, gdy jeden z czynników jest zerem.* Łatwo dowieść, że tę samą własność posiadają liczby zespolone. W tym celu w równaniu (4) poprzedniego paragrafu kładziemy $x=0$, $y=0$, zatym mamy

$$x'\zeta-y'\eta=0\,,\quad x'\eta+y'\zeta=0,$$

skąd wynika, że albo $\zeta=0$, $\eta=0$, czyli że

$$\zeta+\eta i=0,$$

albo też, że $x'=0$, $y'=0$, czyli $x'+y'i=0$. Tak więc jeśli $x+yi$ jest zerem, wówczas musi być zerem albo $x'+y'i$, albo też $\zeta+\eta i$.

32. O równaniu $i^2=-1$. Umówiliśmy się poprzednio, że zamiast $x+0i$ będziemy pisali poprostu x. Tak samo zamiast $0+yi$ możnaby pisać poprostu yi. Liczbę zespoloną $0+1i$ czyli $1i$ będziemy oznaczali krótszym symbolem i. Liczba ta odpowiada *przesunięciu jednostkowemu wzdłuż osi OY.* Wobec tych umów, mamy

$$i^2=ii=(0+1i)(0+1i)=(0.0-1.1)+(0.1+1.0)i=-1.$$

W taki sam sposób czytelnik dowiedzie, że $(-i)^2=-1$. Tak więc liczby zespolone $\pm i$ czynią zadość równaniu $x^2=-1$.

Teraz czytelnik powinien sprawdzić, że *cztery działania na liczbach zespolonych wykonywamy w taki sam sposób, jak na liczbach rzeczywistych, traktując symbol* i *jako liczbę i zastępując iloczyn* $\mathrm{ii}=\mathrm{i}^2$ *przez* -1.

33. Interpretacja gieometryczna mnożenia przez i. Ponieważ

$$(x+yi)i=-y+xi,$$

zatym jeżeli $x+yi$ odpowiada przesunięciu OP i jeśli wykreślimy odcinek $OQ=OP$, przyczym kąt POQ będzie kątem prostym dodatnim, wówczas przesunięciu OQ odpowiadać musi liczba $-y+xi$, czyli liczba $(x+yi)i$. Innemi słowami: *mnożenie liczby zespolonej przez* i *jest równoznaczne z obrotem odpowiedniego przesunięcia o kąt prosty.*

Moglibyśmy postąpić odwrotnie i powiedzieć: jeżeli x jest długością pewnego odcinka na osi OX, a xi długością równego mu odcinka na osi OY, możemy uważać i za symbol jakiegoś działania równoznacznego z obrotem odcinka x o kąt prosty dokoła punktu O. Wobec tego rzeczą naturalną będzie uważać, że $xi^2 = xii$ oznacza wynik dokonanego dwa razy na odcinku x obrotu o kąt prosty. Po takich dwuch obrotach odcinek ten musi znaleźć się znów na osi OX w położeniu, symetrycznym z pierwotnym względem osi OY, wobec czego konsekwentnie musimy założyć $xi^2 = -x$. Oznaczając przez i odcinek $1i$ (czyli odcinek jednostkowy, leżący na osi OY), mamy z powyższego równania $i^2 = -1$, a stąd łatwo otrzymać regułę mnożenia liczb zespolonych.

34. O równaniach $x^2 + 1 = 0$, $ax^2 + 2bx + c = 0$. Niema liczby rzeczywistej, którąby sprawdzała równanie $x^2 + 1 = 0$; fakt ten wyrażamy słowami: *równanie* $x^2 + 1 = 0$ *nie ma pierwiastków rzeczywistych.* Widzieliśmy jednak przed chwilą, że dwie liczby zespolone $\pm i$ czynią zadość temu równaniu. Wobec tego powiadamy, że równanie to posiada *dwa pierwiastki zespolone* $\pm i$. Ponieważ i czyni zadość równaniu $x^2 = -1$, możemy symbol i zastąpić symbolem $\sqrt{-1}$.

Liczby zespolone nazywają niekiedy *urojonemi* dla odróżnienia od liczb *rzeczywistych*. Jest to termin bardzo niefortunny, musimy się jednak z nim pogodzić, gdyż zyskał on prawo obywatelstwa. W każdym razie podkreślamy, że t. zw. „liczba urojona" nie jest w rzeczywistości ani „urojona", ani nawet nie jest „liczbą". Liczby „rzeczywiste" możnaby nazwać „zwykłemi" albo „pospolitemi" liczbami arytmetycznemi. Natomiast „liczba zespolona", albo „urojona" nie jest wcale liczbą, lecz *parą liczb* (x, y), które dla pewnych celów łączymy w jeden symbol $x + yi$. Taka para liczb jest równie „rzeczywista", jak liczba $^1/_2$, jak papier, na którym tę książkę wydrukowano, jak układ słoneczny.

W rzeczywistości symbol

$$i = 0 + 1i$$

oznacza poprostu parę liczb (0, 1) i daje się przedstawić gieometrycznie jako punkt albo też jako przesunięcie [0, 1]. Mówiąc: „i jest pierwiastkiem równania $x^2 + 1 = 0$", chcemy przez to powiedzieć tylko tyle: określiliśmy taki sposób kombinowania par liczb (lub, jeśli kto woli, przesunięć), nazwany przez nas „mnożeniem", że jeśli skombinujemy, według tego określenia, parę (0, 1) z nią samą, otrzymamy parę (—1, 0).

Weźmy teraz pod uwagę ogólniejsze równanie

$$ax^2 + 2bx + c = 0\,,$$

w którym a, b, c są liczbami rzeczywistemi.

Jeżeli $b^2 > ac$, mamy dwa pierwiastki rzeczywiste

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}\,.$$

Jeżeli $b^2 < ac$, równanie nie ma żadnych pierwiastków rzeczywistych. Napiszmy to równanie w postaci

$$\{x + (b/a)\}^2 = -(ac - b^2)/a^2\,.$$

Równaniu temu uczynimy zadość, zakładając, że $x + (b/a)$ równa się liczbie zespolonej $\frac{\pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}$. Fakt ten wyrażamy słowami: *równanie ma dwa pierwiastki zespolone*

$$\frac{-b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}\,.$$

Jeżeli prócz tego umówimy się, że gdy $b^2 = ac$, czyli gdy równaniu czyni zadość jedna tylbo liczba $\frac{-b}{a}$, będziemy mówili: *równanie ma dwa pierwiastki równe sobie*, wówczas możemy wypowiedzieć ogólne twierdzenie:

równanie kwadratowe o spółczynnikach rzeczywistych ma zawsze dwa pierwiastki, które są albo różne i rzeczywiste, albo różne i zespolone, albo równe i rzeczywiste.

Powstać może pytanie, czy równanie kwadratowe nie może mieć więcej niż dwa pierwiastki, jeśli uwzględnimy pierwiastki zespolone. Łatwo przekonać się, że to jest niemożliwe; wystarczy w tym celu zastosować do równania kwadratowego to samo rozumowanie, za pomocą którego dowodzi się w algiebrze, że równanie n-ego stopnia nie może mieć więcej niż n pierwiastków rzeczywistych. Niech będzie $z = x + yi$ i niech $f(z)$ oznacza dowolny wielomian, utworzony ze zmiennej z, czyli wielomian

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\,,$$

gdzie spółczynniki a_0, $a_1 \dots a_n$ są dowolnemi liczbami rzeczywistemi lub zespolonemi.

Dowodzimy po kolei trzech twierdzeń:

(1) reszta od podzielenia $f(z)$ przez $z-a$ (gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą lub zespoloną) równa się $f(a)$;

(2) jeżeli a jest pierwiastkiem równania $f(z)=0$, wówczas wielomian $f(z)$ jest podzielny przez $z-a$;

(3) jeżeli $f(z)$ jest wielomianem n-tego stopnia i jeżeli równanie $f(z)=0$ ma n pierwiastków a_1, a_2, ... a_n, wówczas zachodzi tożsamość

$$f(z) \equiv A(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n),$$

w której A jest stałą (rzeczywistą lub zespoloną), a mianowicie jest to spółczynnik wyrazu z^n w wielomianie $f(z)$.

Z ostatniego twierdzenia wynika odrazu, że $f(z)$ nie może mieć więcej niż n pierwiastków.

Przekonamy się później, że takie twierdzenie istotnie zachodzi, mianowicie że k a ż d e r ó w n a n i e n-tego s t o p n i a m a d o k ł a d n i e *n pierwiastków*. Naprawdę trudnym do dowiedzenia jest tylko podstawowe twierdzenie: *każde równanie ma conajmniej jeden pierwiastek.* Na razie nie możemy zająć się dowodem tego twierdzenia, ale zwrócimy już teraz uwagę na pewne ciekawe wnioski, wypływające z niego. W teorji liczb wychodzimy z pojęcia liczby całkowitej dodatniej i z pojęć dodawania, mnożenia, odejmowania i dzielenia tych liczb. Przekonywamy się, że dwa ostatnie działania nie zawsze są wykonalne, dopóki nie wprowadzimy nowych rodzajów liczb. Wyrażeniu 3—7 możemy nadać sens, jeżeli wprowadzimy *liczby ujemne*, wyrażeniu $^3/_7$ nadajemy sens, wprowadzając *liczby ułamkowe.* Jeżeli do działań arytmetycznych dołączymy wyciąganie pierwiastków i rozwiązywanie równań, okaże się, że niektóre działania, np. wyciąganie pierwiastka kwadratowego z liczby, która nie jest kwadratem zupełnym, nie dadzą się wykonać, o ile nie rozszerzymy naszego pojęcia liczby i nie wprowadzimy *liczb niewymiernych.*

Inne działania, np. wyciąganie pierwiastka kwadratowego z -1, nie są możliwe, dopóki nie posuniemy się o krok dalej i nie wprowadzimy *liczb zespolonych.* Stąd mogłoby się łatwo zrodzić przypuszczenie, że przy rozwiązywaniu równań wyższych stopni możemy natrafić na takie, które nie dadzą się rozwiązać nawet zapomocą liczb zespolonych, tak iż wypadnie stwarzać coraz to nowe liczby. Otóż tak nie jest: do rozwiązania każdego równania algiebraicznego wystarczą liczby zespolone. Z drugiej strony, każde działanie algiebraiczne, wykonane na liczbach zespolonych, daje znów tylko liczby zespolone. Mówiąc językiem technicznym, „liczby zespolone stanowią zamknięte pole ze względu na działania algiebraiczne".

Zanim przejdziemy do innych spraw, musimy zaznaczyć, że wszystkie twierdzenia algiebry elementarnej, które zostały dowiedzione dla liczb rzeczywistych za pomocą dodawania i mnożenia, *pozostają słuszne dla liczb zespolonych*, gdyż prawa tych działań są jednakowe dla obu rodzajów liczb.

Tak np., jeżeli α, β są pierwiastkami równania

$$ax^2+2bx+c=0,$$

wówczas
$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a};$$

jeżeli α, β, γ są pierwiastkami równania

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0,$$

wówczas

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{3b}{a}, \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{3c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a},$$

zupełnie niezależnie od tego, czy a, b..., α, β... są liczbami rzeczywistemi czy zespolonemi.

35. Djagram Arganda. Niech będzie P punkt (x, y) na rys. 30 i niech będą r, ϑ jego spółrzędne biegunowe, tak iż

$$x=r\cos\vartheta, \quad y=r\sin\vartheta, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\vartheta:\sin\vartheta:1=x:y:r.$$

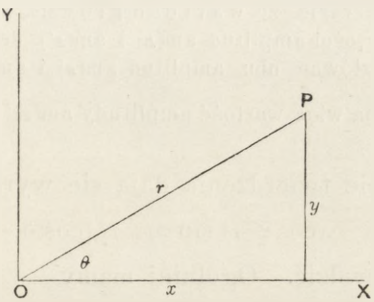
Oznaczmy liczbę zespoloną $x+yi$ przez z i nazwijmy ją *zmienną zespoloną*; P nazwijmy *punktem* z, lub punktem, odpowiadającym zmiennej z; zmienną z nazwijmy *argumentem* punktu P. Nazwijmy dalej x *częścią rzeczywistą* zmiennej, y *częścią urojoną*; wreszcie r nazwijmy *modułem*, a ϑ *amplitudą* zmiennej z. Symbolicznie możemy pisać:

$$x=R(z), \quad y=U(z),$$

$$r=|z|, \quad \vartheta=\mathrm{am}\, z.$$

Należy zauważyć, że r jest zawsze dodatnie, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy $z=0$: wówczas $r=0$.

Jeżeli $y=0$, będziemy mówili, że z jest *rzeczywiste*; jeżeli $x=0$, powiemy, że z jest *czysto urojone*. Dwie liczby $x+yi$, $x-yi$, różniące się tylko znakami części urojonych, nazwiemy *sprzężonemi*. Zarówno suma dwuch liczb sprzężonych $(=2x)$, jak ich iloczyn $(=x^2+y^2)$ są rzeczywiste; moduły $(\sqrt{x^2+y^2})$ dwuch takich liczb są sobie równe, iloczyn zaś modułów równa się kwadratowi modułu którejkolwiek z nich. Pierwiastki



Rys. 30.

równania kwadratowego, o ile nie są rzeczywiste, są zawsze liczbami zespolonemi sprzężonemi.

Zauważmy następnie, że ϑ czyli am z jest wielowartościową funkcją zmiennej z; każdej wartości z odpowiada nieskończenie wiele wartości ϑ, różniących się od siebie o wielokrotności liczby 2π. Każda z tych wartości wskazuje, o jaki kąt należy obrócić odcinek OX, by doprowadzić go do przystania z OP. Jedną z tych wartości, mianowicie zawartą między $-\pi$ a $+\pi$, nazwiemy *główną wartością* amplitudy. Dwuznaczność może powstać tylko wówczas, gdy tą główną wartością jest π, gdyż mamy wtedy drugą wartość główną $-\pi$ (lub odwrotnie). W tym szczególnym przypadku wypadłoby wprowadzić dodatkową umowę, którą z tych dwu wartości mamy uważać za główną. W dalszym ciągu, mówiąc o amplitudzie zmiennej z, będziemy mieli na myśli wartość główną tej amplitudy.

Badanie liczb zespolonych z punktu widzenia gieometrycznego rozpoczęli w końcu XVIII i na początku XIX w. Wessel, Gauss i Argand. Figura 30 nosi zwykle nazwę djagramu Arganda.

36. Twierdzenie De Moivre'a. Z określenia dodawania i mnożenia wynikają bezpośrednio następujące wnioski:

(1) część rzeczywista (względnie: urojona) sumy dwu liczb zespolonych jest sumą ich części rzeczywistych (względnie: urojonych);

(2) moduł iloczynu dwuch liczb zespolonych jest iloczynem ich modułów;

(3) jedna z pośród wartości amplitudy iloczynu dwu liczb zespolonych jest sumą amplitud czynników.

Nie wolno twierdzić, że wartość główna amplitudy $\operatorname{am}(zz')$ jest sumą głównych wartości amplitud $\operatorname{am}(z)$ i $\operatorname{am}(z')$. Jeżeli np. $z=z'=-1+i$, wówczas wartości główne obu amplitud $\operatorname{am}(z)$ i $\operatorname{am}(z')$ równają się $^3/_4\pi$. Ale $zz'=-2i$, główna więc wartość amplitudy $\operatorname{am}(zz')$ jest $-\frac{\pi}{2}$, nie zaś $^3/_2\pi$.

Dwa ostatnie twierdzenia dają się wyrazić wzorem

$$r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\times\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\rho\{\cos(\vartheta+\varphi)+i\sin(\vartheta+\varphi)\},$$

który łatwo sprawdzić. Ogólniej mamy

$$r_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1)\times r_2(\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2)\times\ldots\times r_n(\cos\vartheta_n+i\sin\vartheta_n)$$
$$=r_1r_2\ldots r_n\{\cos(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n)+i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n)\}.$$

Ze względów praktycznych ciekawy jest przypadek szczególny, gdy

$$r_1=r_2=\ldots=r_n=1,\quad \vartheta_1=\vartheta_2=\ldots=\vartheta_n=\vartheta.$$

Mamy wtedy wzór

$$(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^n=\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta,$$

gdzie n jest liczbą dodatnią całkowitą. Wzór ten znany jest pod nazwą *twierdzenia De Moivre'a**.

Jeżeli

$$z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta),$$

wówczas $$1/z=(\cos\vartheta-i\sin\vartheta)/r.$$

---

*) W pewnych wypadkach może być dogodnym prostsze znakowanie, wprowadzone przez prof. Harknessa i Morley'a, mianowicie $\operatorname{Cis}\vartheta$ zamiast $\cos\vartheta+i\sin\vartheta$. Przy tym znakowaniu twierdzenie De Moivre'a wyrazilibyśmy wzorem $(\operatorname{Cis}\vartheta)^n=\operatorname{Cis}n\vartheta$. [Niektórzy matematycy polscy posługują się symbolem $r_\vartheta=r(\cos\vartheta+i\operatorname{sn}\vartheta)$; przy tym znakowaniu wzór De Moivre'a wyraża się równaniem symbolicznym $(1_\vartheta)^n=1_{n\vartheta}$.

Przyp. tłum.]

Innemi słowy: moduł odwrotności zmiennej z równa się odwrotności modułu, amplituda zaś odwrotności równa się amplitudzie zmiennej z ze znakiem przeciwnym. Wobec tego z (2) i (3) wynika:

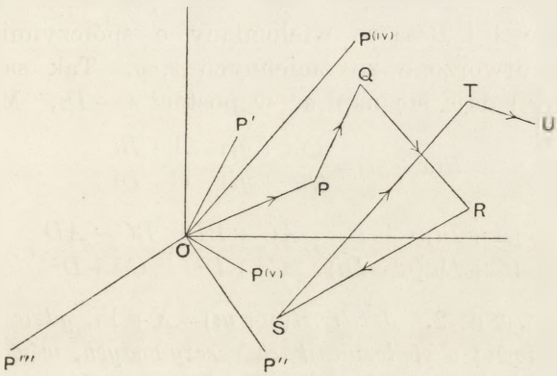
(4) moduł ilorazu dwu liczb zespolonych jest ilorazem ich modułów;

(5) jedna z pośród wartości amplitud ilorazu dwu liczb zespolonych jest różnicą amplitud tych liczb.

Mamy również

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{-n} = (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n = \{\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\}^n$$
$$= \cos(-n\vartheta) + i\sin(-n\vartheta),$$

skąd wnosimy, że *twierdzenie De Moivre'a jest słuszne dla wszel-*



Rys. 31.

kich wykładników całkowitych, dodatnich lub ujemnych. W dalszym ciągu poznamy wiele ciekawych zastosowań tego twierdzenia (§§ 38 i nast.).

Do twierdzeń (1)—(5) możemy jeszcze dodać następujące:

(6) moduł sumy dowolnej ilości liczb zespolonych *nie jest większy* od sumy ich modułów.

Niech będą $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$... przesunięcia, odpowiadające danym liczbom zespolonym. Wykreślmy odcinek PQ równy i równoległy do OP', następnie QR równy i równoległy do OP'' i t. d. Dojdziemy w ten sposób do punktu U takiego, iż

$$\overline{OU} = \overline{OP} + \overline{OP'} + \overline{OP''} + \ldots$$

Długość odcinka OU jest modułem sumy danych liczb zespolonych, suma zaś ich modułów jest to długość linji łamanej $OPQR...U$, skąd odrazu wynika prawdziwość naszego twierdzenia (porów. też Przykłady XXIII, 1).

37. Podamy tu jeszcze kilka twierdzeń o funkcjach wymiernych zmiennej zespolonej. *Funkcję wymierną* zmiennej z określamy w zwykły sposób, jako iloraz dwuch wielomianów, utworzonych ze zmiennej z.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli $R(x+yi)$ jest funkcją wymierną zmiennej $x+yi$, możemy ją przedstawić w postaci $X+Yi$, gdzie X, Y są funkcjami wymiernemi zmiennych rzeczywistych x, y o spółczynnikach rzeczywistych.*

Przedewszystkim każdy wielomian $P(x+yi)$ daje się, na mocy określeń dodawania i mnożenia, przestawić w postaci $A+Bi$, gdzie A i B są to wielomiany o spółczynnikach rzeczywistych, utworzone ze zmiennych x, y. Tak samo wielomian $Q(x+yi)$ daje się napisać w postaci $C+Di$. Mamy więc

$$R(x+yi)=\frac{P(x+yi)}{Q(x+yi)}=\frac{A+Bi}{C+Di}$$

$$=\frac{(A+Bi)(C-Di)}{(C+Di)(C-Di)}=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}+\frac{BC-AD}{C^2+D^2}i.$$

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli $R(x+yi)=X+Yi$, gdzie R oznacza funkcję wymierną o spółczynnikach rzeczywistych, wówczas*

$$R(x-yi)=X-Yi.$$

Przedewszystkim twierdzenie łatwo sprawdzić dla $(x+yi)^n$, rozwijając tę potęgę. Stąd, na mocy praw dodawania, wynika, że twierdzenie jest słuszne dla każdego wielomianu o spółczynnikach rzeczywistych. Tak więc, posługując się temi samemi symbolami, co w twierdzeniu poprzednim, mamy

$$R(x-yi)=\frac{A-Bi}{C-Di}=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}-\frac{BC-AD}{C^2+D^2}i.$$

Rzecz jasna, że dla funkcji dowolnej liczby zmiennych zespolonych mamy wzory zupełnie analogiczne do wzorów twierdzenia 1 i 2.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli równanie o spółczynnikach rzeczywistych*

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n=0$$

posiada pierwiastki zespolone, wówczas można je uporządkować w pary sprzężone.

Jakoż z twierdzenia 2-go wynika, że jeśli $x+yi$ jest pierwiastkiem naszego równania, wówczas $x-yi$ jest również pierwiastkiem tego samego równania. Jako przypadek szczególny, mamy znaną własność równania kwadratowego: równanie kwadratowe o spółczynnikach rzeczywistych ma albo rzeczywiste pierwiastki, albo zespolone sprzężone.

Warto zanotować analogję między tym twierdzeniem, a wnioskiem, do którego doszliśmy w Przykł. IV. 10, a który możnaby tak wysłowić: *w równaniu o spółczynnikach wymiernych pierwiastki niewymierne występują zawsze w postaci par sprzężonych* *).

Przykłady XXIII. 1. Dowieść twierdzenia 6 w § 36-ym, opierając się bezpośrednio na określeniu i nie odwołując się do rozważań gieometrycznych.

[Dowieść, że $|z+z'| \leqq |z|+|z'|$, znaczy dowieść, że

$$(x+y)^2+(x'+y')^2 \leqq \{\sqrt{(x^2+y^2)}+\sqrt{(x'^2+y'^2)}\}^2$$

Potym już łatwo uogólnić twierdzenie.]

2. Równość

$$|z|+|z'|+\ldots=|z+z'+\ldots|$$

może mieć miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby z, z'... mają tę samą amplitudę. Dowieść tego twierdzenia zarówno gieometrycznie, jak analitycznie.

3. Moduł sumy dowolnej ilości liczb zespolonych jest nie mniejszy od sumy ich części rzeczywistych (lub urojonych).

4. Jeżeli zarówno suma jak iloczyn dwuch liczb są rzeczywiste, wówczas dwie te liczby są albo rzeczywiste, albo zespolone sprzężone.

5. Jeżeli $a+b\sqrt{2}+(c+d\sqrt{2})i=A+B\sqrt{2}+(C+D\sqrt{2})i$,

i jeżeli a, b, c, d, A, B, C, D są to liczby rzeczywiste wymierne, wówczas musi być

$$a=A, \quad b=B, \quad c=C, \quad d=D.$$

6. Następujące liczby wyrazić w postaci $A+Bi$. gdzie A i B są liczbami rzeczywistemi:

$$(1+i)^2, \quad (1-i)^2, \quad (3-2i)/(2+3i), \quad (\lambda+\mu i)/(\lambda-\mu i),$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3, \quad \left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2-\left(\frac{\lambda-\mu i}{\lambda+\mu i}\right)^2.$$

Symbole λ, μ oznaczają tu dowolne liczby rzeczywiste.

---

*) Liczby $a+\sqrt{b}$, $a-\sqrt{b}$ nazywają też niekiedy sprzężonemi.

7. Następujące funkcje zmiennej $z=x+yi$ wyrazić w postaci $X+Yi$, gdzie X, Y są funkcjami rzeczywistemi zmiennych x, y:

$$z^2,\ z^3,\ z^n,\ 1/z,\ z+(1/z),\ (1+z)/(1-z),\ (\alpha+\beta z)/(\gamma+\delta z).$$

Symbole α, β, γ, δ oznaczają tu dowolne liczby rzeczywiste.

8. W dwuch poprzednich przykładach znaleźć moduły poszczególnych liczb i funkcji.

9. Prosta, łącząca punkty $z=a$, $z=b$, jest prostopadła do prostej, łączącej punkty $z=c$, $z=d$, jeżeli

$$\text{amplituda}\left(\frac{a-b}{c-d}\right)=\pm\frac{\pi}{2},$$

czyli jeżeli $(a-b)/(c-d)$ jest liczbą czysto urojoną. Jaki jest warunek równoległości tych dwu prostych?

10. Trzy wierzchołki trójkąta leżą w punktach $z=\alpha$, $z=\beta$, $z=\gamma$, gdzie α, β, γ są liczbami zespolonemi. Dowieść następujących własności:

(I) *środek ciężkości trójkąta leży w punkcie* $z=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$;

(II) *środek koła opisanego leży w punkcie* $|z-\alpha|=|z-\beta|=|z-\gamma|$;

(III) *trzy wysokości przecinają się w punkcie*

$$R\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\gamma}\right)=R\left(\frac{z-\beta}{\gamma-\alpha}\right)=R\left(\frac{z-\gamma}{\alpha-\beta}\right)=0$$

[Niech będą A, B, C wierzchołki trójkąta, P zaś niech będzie dowolny punkt z; prosta AP jest prostopadła do BC (przykł. 6), jeżeli $(z-\alpha)/(\beta-\gamma)$ jest czysto urojoną liczbą, czyli jeżeli

$$R(z-\alpha)\,.\,R(\beta-\gamma)+I(z-\alpha)\,.\,I(\beta-\gamma)=0.$$

Temu równaniu, jak również dwom analogicznym, otrzymanym przez kołowe przestawienie symbolów α, β, γ, δ, czynią zadość te same wartości zmiennej z, co wynika z faktu, że suma lewych części tych trzech równań równa się tożsamościowo zeru. Dowodzi to, że trzecie równanie jest prostym wnioskiem z dwuch poprzednich.]

(IV) *Wewnątrz trójkąta istnieje taki punkt* P, *że*

$$\sphericalangle CBP=\sphericalangle ACP=\sphericalangle BAP=\omega,$$

i że

$$\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C.$$

[Z równań *)

$$\omega=\sphericalangle CBP=\operatorname{am}(z-\beta)-\operatorname{am}(\gamma-\beta),$$

$$\operatorname{ctg}\{\operatorname{am}(z-\beta)\}=R(z-\beta)/I(z-\beta)\ \text{itd.},$$

mamy

$$\operatorname{ctg}\omega\{I(z-\beta)\,.\,R(\gamma-\beta)-R(z-\beta)\,.\,I(\gamma-\beta)\}$$
$$=R(z-\beta)\,.\,R(\gamma-\beta)+I(z-\beta)\,.\,I(\gamma-\beta)\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

*) Zakładamy, że gdy obchodzimy kontur trójkąta w zwrocie ABC, punkty wewnętrzne trójkąta pozostają ze strony lewej.

Równanie (1) i dwa inne, które otrzymujemy z niego przez kołowe przestawienie symbolów α, β, γ, wystarczają do wyznaczenia $\operatorname{ctg}\omega$ oraz części rzeczywistej i urojonej zmiennej z. Dodając te trzy równania do siebie, rugujemy z i otrzymujemy wzór

$$\operatorname{ctg}\omega\Sigma\{I(\beta)\,.\,R(\gamma)-R(\beta)\,.\,I(\gamma)\}=\Sigma\{R(\beta)\,.\,R(\gamma-\beta)+I(\beta)\,.\,I(\gamma-\beta)\}\,.\quad(2),$$

w którym znak sumowania rozciąga się na trzy wyrazy, utworzone przez kołowe przestawienie symbolów α, β, γ.

Otóż $$\operatorname{ctg} A=\operatorname{ctg}\{\operatorname{am}(\gamma-\alpha)-\operatorname{am}(\beta-\alpha)\}$$
$$=\frac{R(\gamma-\alpha)\,.\,R(\beta-\alpha)+I(\gamma-\alpha)\,.\,I(\beta-\alpha)}{I(\gamma-\alpha)\,.\,R(\beta-\alpha)-R(\gamma-\alpha)\,.\,I(\beta-\alpha)},$$

łatwo zaś przekonać się, że mianownik tego ułamka równa się spółczynnikowi przy $\operatorname{ctg}\omega$ w równaniu (2), wziętemu ze znakiem przeciwnym. Stąd wynika, że $\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C$.]

11. Dwa trójkąty o wierzchołkach a, b, c oraz x, y, z są podobne, jeżeli

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=0.$$

[Musimy mieć $\overline{AB}/\overline{AC}=\overline{XY}/\overline{XZ}$ czyli $(b-a)/(c-a)=(y-x)/(z-x)$.]

12. Na mocy poprzedniego zadania dowieść, że jeśli punkty x, y, z leżą na jednej prostej, możemy znaleźć trzy liczby *rzeczywiste* α, β, γ takie, że będzie $\alpha+\beta+\gamma=0$ i $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, i odwrotnie. (Porówn. Przykł. XXII. 4).

13. **Ogólne równanie pierwszego stopnia ze spółczynnikami zespolonemi.** Równanie $az+b=0$ posiada jedno tylko rozwiązanie $z=-(b/a)$, jeżeli $a\neq 0$. Kładąc

$$a=\alpha+i\alpha',\quad b=\beta+i\beta',\quad z=x+iy$$

i przyrównywując do siebie wyrazy rzeczywiste i urojone, otrzymujemy dwa równania stopnia pierwszego, z których wyznaczamy liczby rzeczywiste x, y. Równanie dane ma pierwiastek rzeczywisty, jeżeli $y=0$, czyli jeżeli jednocześnie mamy $\alpha x+\beta=0$ i $\alpha' x+\beta'=0$, co jest możliwe tylko wówczas, gdy $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$.

14. **Ogólne równanie kwadratowe ze spółczynnikami zespolonemi** ma kształt

$$(a+iA)z^2+2(b+iB)z+(c+iC)=0.$$

Jeżeli a i A nie są jednocześnie równe zeru, możemy podzielić równanie przez $a+iA$, czyli za zasadniczy kształt równania możemy uważać

$$z^2+2(b+iB)z+(c+iC)=0\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(1)$$

Kładąc w tym równaniu $z=x+iy$ i przyrównywując do siebie wyrazy rzeczywiste i urojone, otrzymujemy układ dwu równań

$$x^2-y^2+2(bx-By)+c=0, \quad 2xy+2(by+Bx)+C=0.$$

Kładąc dalej

$$x+b=\zeta, \quad y+B=\eta, \quad b^2-B^2-c=h, \quad 2bB-C=k,$$

otrzymujemy przekształcone równania

$$\zeta^2-\eta^2=h, \quad 2\zeta\eta=k,$$

skąd

$$\zeta^2+\eta^2=\sqrt{(h^2+k^2)}, \quad \zeta=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\{\sqrt{(h^2+k^2)}+h\}}, \quad \eta=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\{\sqrt{(h^2+k^2)}-h\}}.$$

Znaki musimy tak obrać, by $\zeta\eta$ miało ten sam znak, co k; jeżeli np. k jest dodatnie, muszą być ζ i η jednego znaku.

Warunek równości pierwiastków. Pierwiastki mogą być równe tylko pod warunkiem, że $h=0$ i $k=0$, czyli że $c=b^2-B^2$, $C=2bB$. Te dwa warunki są równoważne jednemu warunkowi: $c+iC=(b+iB)^2$, który wyraża, oczywiście, fakt, że lewa część równania (1) jest kwadratem zupełnym.

Warunek rzeczywistości pierwiastków. Jeżeli $x^2+2(b+iB)x+(c+iC)=0$ i jeżeli x ma być liczbą rzeczywistą, wówczas musi być jednocześnie

$$x^2+2bx+c=0, \quad 2Bx+C=0,$$

skąd otrzymujemy żądany warunek w postaci

$$C^2-4bBC+4cB^2=0.$$

Warunek, aby pierwiastek był czysto urojony, jest, jak łatwo przekonać się, następujący

$$C^2-4bBC-4b^2c=0.$$

Warunek, aby pierwiastki były zespolone sprzężone. Ponieważ zarówno suma jak iloczyn pierwiastków muszą być w takim razie rzeczywiste, zatym musi być $B=0$, $C=0$. Tak więc równanie (1) ma pierwiastki zespolone sprzężone tylko wówczas, gdy spółczynniki jego są rzeczywiste. Ale zauważmy, że w takim razie mamy przy $b^2 \geqq c$ pierwiastki rzeczywiste; aby więc pierwiastki były zespolone sprzężone, muszą być spełnione jednocześnie trzy warunki: $B=0$, $C=0$, $b^2<c$.

15. **Równanie sześcienne.** Niech będzie dane równanie sześcienne

$$z^3+3Hz+G=0.$$

gdzie H i G są liczbami zespolonemi. Niech będzie $H=\lambda+i\mu$, $G=\rho+i\sigma$. Przypuśćmy, że równanie ma:

(I) *Jeden pierwiastek rzeczywisty.* Jeżeli $\mu\neq 0$, wówczas pierwiastek rzeczywisty równa się $-\sigma/3\mu$, a zarazem mamy $\sigma^3+27\lambda\mu^2\sigma-27\mu^3\rho=0$. Z drugiej strony, jeżeli $\mu=0$, wówczas musi być również $\sigma=0$ i spółczynniki są wszystkie rzeczywiste. W tym przypadku równanie może mieć trzy pierwiastki rzeczywiste.

(II) *Jeden pierwiastek czysto urojony.* Jeżeli $\mu\neq 0$, pierwiastek ten równa się $i(\rho/3\mu)$, i mamy $\rho^3-27\lambda\mu^2\rho-27\mu^3\sigma=0$. Jeżeli $\mu=0$, to $\rho=0$, pierwiastek zaś iy jest dany przez równanie $y^3-3\lambda y-\sigma=0$, mające spółczynniki rzeczywiste. W tym przypadku dane równanie może mieć trzy pierwiastki czysto urojone.

(III) *Dwa pierwiastki zespolone sprzężone.* Niech $x \pm iy$ będą temi pierwiastkami. Ponieważ suma trzech pierwiastków jest zerem, zatym trzeci pierwiastek równa się $-2x$. Ze związków między spółczynnikami i pierwiastkami równania wnosimy, że

$$y^2-3x^2=3H, \quad 2x(x^2+y^2)=G,$$

czyli że zarówno G jak H są rzeczywiste.

We wszystkich trzech przypadkach możemy albo znaleźć jeden pierwiastek (zatym obniżyć stopień równania zapomocą dzielenia), albo też możemy rozwiązanie sprowadzić do rozwiązania równania sześciennego o spółczynnikach rzeczywistych.

16. Równanie $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$, w którym $a_1=A_1+iA_1'$ i t. d., niech ma dwa pierwiastki zespolone sprzężone. Dowieść, że jeśli $A'_3 \neq 0$, wówczas trzeci pierwiastek równania równa się $-A_1'a_3/A_3'$, pomiędzy zaś spółczynnikami A_1, A_1', A_2, ... zachodzą dwie podobne tożsamości. Zbadać przypadek, gdy $A_3'=0$.

17. Dowieść, że jeśli równanie $z^3+3Hz+G=0$ ma dwa urojone pierwiastki, wówczas równanie

$$8\alpha^3+6\alpha H-G=0$$

ma jeden pierwiastek rzeczywisty, który jest częścią rzeczywistą α pierwiastków pierwszego równania. Dowieść również, że α i G mają ten sam znak.

18. Równanie dowolnego stopnia ze spółczynnikami zespolonemi nie ma naogół ani pierwiastków rzeczywistych, ani zespolonych sprzężonych. Ilu warunkom muszą czynić zadość spółczynniki, żeby równanie miało: (*a*) jeden pierwiastek rzeczywisty, (*b*) jedną parę pierwiastków zespolonych sprzężonych?

19. **Koła spółosiowe.** Na rys. 32 niech będą a, b, z argumentami punktów A, B, P. W takim razie

$$\operatorname{am}\frac{z-b}{z-a}=\sphericalangle APB,$$

przyczym bierzemy główną wartość amplitudy, kąt zaś APB uważamy za dodatni i mniejszy od π. Jeżeli dwa koła, zaznaczone na rysunku, są sobie równe i jeżeli z', z_1, z_1' są argumentami punktów P', P_1, P_1', a $\sphericalangle APB=\vartheta$, wówczas

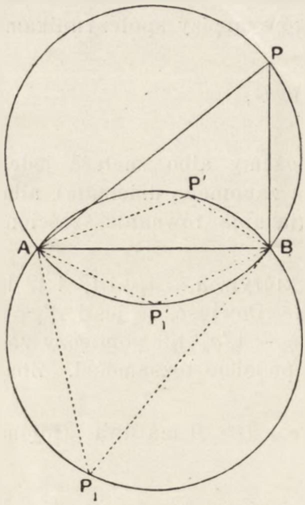
$$\operatorname{am}\frac{z'-b}{z'-a}=\pi-\vartheta, \quad \operatorname{am}\frac{z_1-b}{z_1-a}=-\vartheta, \quad \operatorname{am}\frac{z_1'-b}{z_1'-a}=-\pi+\vartheta.$$

Miejsce geometryczne, określone przez równanie

$$\operatorname{am}\frac{z-b}{z-a}=\vartheta,$$

gdzie ϑ jest stałe, jest łukiem APB. Pisząc $\pi-\vartheta$, $-\vartheta$, $-\pi+\vartheta$, zamiast ϑ, otrzymujemy trzy inne łuki.

Uważając ϑ za parametr, zmieniający się od $-\pi$ do $+\pi$, otrzymamy układ równań, odpowiadających *układowi kół, które można wykreślić przez punkty* A, B.



Rys. 32.

Należy jednak zaznaczyć, że na każdym kole trzeba odróżniać dwa łuki, odpowiadające dwom różnym wartościom parametru ϑ.

20. Niech będzie dane równanie

$$|(z-b)/(z-a)|=\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

gdzie λ jest stałą.

Na przedłużeniu BA obierzmy punkt K tak, by $\sphericalangle KPA = \sphericalangle KBP$. Trójkąty KPA, KBP są podobne i mamy

$$\frac{AP}{BP}=\frac{KP}{KB}=\frac{KA}{KP}=\lambda,$$

skąd $KA/KB=\lambda^2$, czyli K jest stałym punktem dla wszystkich położeń punktu P, czyniących zadość równaniu (1). Mamy również $KP^2=KA\,.\,KB$=stałej; tak więc *miejscem gieometrycznym punktu P jest okrąg, mający środek w K*. Przy zmiennych wartościach na λ, równanie (1) przedstawia układ kół.

Każde koło tego układu przecina pod kątem prostym każde koło układu, rozważanego w poprzednim zadaniu. Istotnie, z równania $KP^2=KA\,.\,KB$ widać, że KP jest styczną do koła APB.

Układ kół takich, jak w przykł. 19, nazywamy *układem kół spółosiowych o dwuch punktach spólnych*, taki zaś układ, jak w niniejszym zadaniu, nazywa się *układem kół spółosiowych o dwuch punktach granicznych*. Jeżeli λ jest bardzo małą liczbą, koło jest małe i zawiera punkt B; jeżeli λ jest bardzo dużą liczbą, koło jest bardzo małe i zawiera punkt A. Z tego właśnie powodu nazwano nasz układ układem o punktach granicznych.

21. **Przekształcenie dwulinjowe.** Weźmy pod uwagę równanie

$$z=Z+a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

w którym $z=x+iy$, $Z=X+iY$. Możemy sobie wyobrazić, że te dwie zmienne zespolone zostały zobrazowane na dwu różnych płaszczyznach xoy, XOY. Każdej wartości z odpowiada jedna wartość Z, i odwrotnie. Jeżeli $a=\alpha+i\beta$, wówczas

$$x=X+\alpha, \quad y=Y+\beta,$$

i punktowi (x, y) odpowiada punkt (X, Y). Jeżeli punkt (x, y) zakreśla w swej płaszczyźnie dowolną krzywą, wówczas pnnkt (X, Y) zakreśla w swojej płaszczyźnie odpowiednią krzywą. Tak więc każdej figurze jednej płaszczyzny odpowiada oznaczona figura drugiej płaszczyzny. Przejście z figury w płaszczyźnie xoy do odpowiadającej jej figury w płaszczyźnie XOY, dokonane zapomocą takiego związku między z i Z, jak związek (1), nazywa się *przekształceniem*. W naszym przykładzie łatwo jest znaleźć związek między figurami. Figura (X, Y) jest pod względem wielkości, kształtu i zwrotu taka sama, jak figura (x, y), lecz jest przesunięta w lewo o α i w dół o β. Takie przekształcenie zowiemy *przesunięciem*.

Weźmy teraz pod uwagę równanie

$$z=\rho Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

w którym ρ jest liczbą rzeczywistą. Mamy $x=\rho X$, $y=\rho Y$. Obie figury są podobne i podobnie położone względem początków spółrzędnych, ale skala figury (X, Y) jest $(1/\rho)$ razy większa od skali figury (x, y). Takie przekształcenie nazwiemy *powiększeniem*.

Weźmy wreszcie równanie

$$z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Rzecz jasna, że $|z|=|Z|$, $\operatorname{am} z=\operatorname{am} Z+\varphi$ i że dwie te figury różnią się tylko tym, że figura (X, Y) jest figurą (x, y), obróconą dokoła początku spółrzędnych o kąt φ w zwrocie ujemnym. Takie przekształcenie nazwiemy *obrotem*.

Ogólne przekształcenie linjowe

$$z=aZ+b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

jest kombinacją tych trzech przekształceń (1), (2) i (3). Istotnie, jeżeli $|a|=\rho$ i $\operatorname{am} a=\varphi$, możemy równanie (4) zastąpić przez trzy równania

$$z=z'+b,\quad z'=\rho Z',\quad Z'=(\cos\varphi+i\sin\varphi)Z.$$

Tak więc *ogólne przekształcenie linjowe jest równoważne kombinacji trzech przekształceń: przesunięcia, powiększenia i obrotu.*

Zbadajmy z kolei przekształcenie

$$z=1/Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Jeżeli $|Z|=R$ i $\operatorname{am} Z=\vartheta$, wówczas $|z|=1/R$ i $\operatorname{am} z=-\vartheta$. Chcąc więc przejść od figury (x, y) do figury (X, Y), musimy pierwszą przekształcić *inwersyjnie* względem początku o (potęga inwersji $=1$), następnie zaś przekształcić otrzymaną figurę *symetrycznie* względem osi ox. Otrzymamy tą drogą w płaszczyźnie (x, y) figurę przekształconą, niczym nie różniącą się od figury (X, Y).

Wreszcie zbadajmy przekształcenie

$$z=(aZ+b)/(cZ+d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Jest ono równoważne kombinacji trzech przekształceń

$$z=\frac{a}{c}+(bc-ad)\,\frac{z'}{c}, \quad z'=\frac{1}{Z'}, \quad Z'=cZ+d,$$

czyli pewnej kombinacji trzech znanych nam przekształceń.

Przekształcenie

$$z=\frac{aZ+b}{cZ+d}$$

nazwiemy *ogólnym przekształceniem dwulinjowym*. Rozwiązując to ostatnie równanie względem Z, otrzymujemy

$$Z=\frac{dz-b}{cz-a}.$$

Jest to najogólniejszy typ przekształcenia jednojednoznacznego, przy którym każdej wartości z odpowiada jedna i tylko jedna wartość Z, i odwrotnie.

22. *Ogólne przekształcenie dwulinjowe przekształca koło na koło.* Dowieść tego można w rozmaity sposób. Można założyć tę własność inwersji, jako znaną z gieometrji elementarnej; można wyjść z równania

$$x+iy=\frac{(\alpha+i\alpha')(X+iY)+(\beta+i\beta')}{(\gamma+i\gamma')(X+iY)+(\delta+i\delta')},$$

założyć, że x, y czynią zadość równaniu koła, wyrazić x i y w zależności od X, Y i zapomocą prostego rachunku algiebraicznego znaleźć związek między X i Y. Można wreszcie oprzeć się na wynikach, otrzymanych w Przykł. 19 i 20. To jest najprostszy i najlepszy sposób. Jeżeli np. koło, odpowiadające zmiennym (x, y), jest

$$\left|\frac{z-\sigma}{z-\rho}\right|=\lambda,$$

wówczas przez podstawienie mamy

$$\left|\frac{Z-\sigma'}{Z-\rho'}\right|=\lambda',$$

gdzie $$\sigma'=-\frac{b-\sigma d}{a-\sigma c}, \quad \rho'=-\frac{b-\rho d}{a-\rho c}, \quad \lambda'=\lambda\left|\frac{a-\rho c}{a-\sigma c}\right|.$$

23. Zbadać przekształcenia $z=1/Z$, $z=(1+Z)/(1-Z)$ i narysować krzywe, które w płaszczyźnie (X, Y) odpowiadają (1) kołom ze środkiem w początku spółrzędnych, (2) prostym, przechodzącym przez początek spółrzędnych w płaszczyźnie (x, y).

24. Żeby kołu $x^2+y^2=1$ odpowiadała w płaszczyźnie (X, Y) prosta, na mocy przekształcenia

$$z=\frac{aZ+b}{cZ+d},$$

trzeba i wystarcza, żeby było $|a|=|c|$.

25. **Stosunek anharmoniczny** albo stosunek podwójnego podziału $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ określamy jako

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}.$$

Jeżeli cztery punkty z_1, z_2, z_3, z_4 leżą na prostej, określenie to nie różni się od określenia, znanego nam z gieometrji elementarnej. Przestawiając wskaźniki przy z, możemy utworzyć 24 stosunki anharmoniczne, a mianowicie sześć grup, zawierających po cztery równe stosunki. Jeżeli jeden stosunek jest λ, wówczas mamy sześć różnych stosunków: λ, $1-\lambda$, $1/\lambda$, $1/(1-\lambda)$, $1-(1/\lambda)$, $\lambda/(\lambda-1)$. Cztery punkty nazywamy *harmonicznie sprzężonemi*, jeżeli jeden z tych sześciu stosunków równa się -1. W tym wypadku stosunki te równają się -1, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2, 2.

Jeżeli jeden stosunek anharmoniczny jest rzeczywisty, wszystkie są rzeczywiste i cztery punkty leżą na okręgu koła.

W tym wypadku

$$\operatorname{am}\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=0 \text{ (albo też } =\pi),$$

tak iż

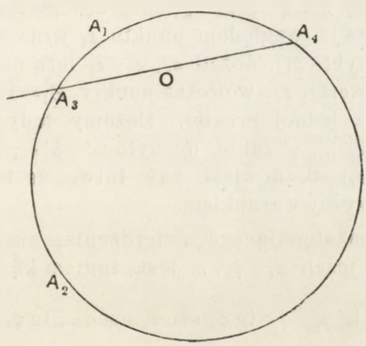
$$\operatorname{am}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{am}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

albo równają się sobie, albo różnią się o π. (Porówn. Przykł. 19).

Jeżeli $(z_1, z_2; z_3, z_4)=-1$, mamy dwa równania

$$\operatorname{am}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}=\pi+\operatorname{am}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}, \quad \left|\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right|=\left|\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right|.$$

Cztery punkty A_1, A_2, A_3, A_4 leżą na kole, przyczym A_1, A_2 są



Rys. 33.

przedzielone przez punkty A_3, A_4. Mamy też $A_1A_3/A_1A_4=A_2A_3/A_2A_4$. Niech będzie O środek cięciwy A_3A_4. Równanie

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=-1$$

możemy napisać w postaci

$$(z_1+z_2)(z_3+z_4)=2(z_1z_2+z_3z_4)$$

lub, co na jedno wychodzi, w postaci

$$\{z_1-\tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\}\{z_2-\tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\}=\{\tfrac{1}{2}(z_3-z_4)\}^2.$$

To równanie jest równoznaczne z $\overline{OA_1}\,.\,\overline{OA_2}=\overline{OA_3}^2=\overline{OA_4}^2$. Zatym OA_1 i OA_2 tworzą równe kąty z A_3A_4, a prócz tego $OA_1\,.\,OA_2=OA_3^2=OA_4^2$. Zauważmy, że związek między parami A_1, A_2 oraz A_3, A_4 jest symetryczny. Jeśli więc O' jest środkiem cięciwy A_1A_2, wówczas $O'A_3$ i $O'A_4$ muszą tworzyć równe kąty z A_1A_2 i powinniśmy mieć

$$O'A_3\,.\,O'A_4=O'A_1^2=O'A_2^2.$$

26. Jeżeli punkty A_1, A_2 dane są przez równanie $az^2+2bz+c=0$, punkty zaś A_3, A_4 przez równanie $a'z^2+2b'z+c'=0$, jeżeli, dalej, O jest środkiem odcinka A_3A_4 i jeżeli $ac'+a'c-2bb'=0$, wówczas OA_1 i OA_2 tworzą równe kąty z A_3A_4 i zachodzi związek $OA_1\,.\,OA_2=OA_3^2=OA_4^2$.

(*Mathem. Tripos*, 1901.)

27. **Warunek konieczny i dostateczny, aby cztery punkty leżały na jednym okręgu,** polega na tym, by ich stosunki anharmoniczne były rzeczywiste. W innej formie można ten warunek wyrazić tak: musi być rzeczą możliwą znalezienie takich liczb rzeczywistych α, β, γ, by było

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ z_1z_4+z_2z_3 & z_2z_4+z_3z_1 & z_3z_4+z_1z_2 \end{vmatrix}=0.$$

Żeby dowieść tego, zauważmy, iż przekształcenie $Z=1/(z-z_4)$ jest równoważne inwersji względem punktu z_4 wraz z symetrją względem pewnej osi. (Przykł. 21). Jeżeli z_1, z_2, z_3 leżą na okręgu, przechodzącym przez biegun inwersji z_4, wówczas punkty $Z_1=1(z_1-z_4)$, $Z_2-1/(z_2-z_4)$, $Z_3=1/(z_3-z_4)$ leżą na jednej prostej. Możemy tedy (Przykł. 12) znaleźć liczby rzeczywiste α', β', γ' takie, by było $\alpha'+\beta'+\gamma'=0$ oraz $\alpha'/(z_1-z_4)+$ $+\beta'/(z_2-z_4)+\gamma'/(z_3-z_4)=0$, dowieść zaś łatwo, że to jest równoznaczne z przytoczonym powyżej warunkiem.

28. Dowieść następującego twierdzenia, analogicznego do twierdzenia De Moivre'a: jeżeli φ_1, φ_2, ... jest ciągiem kątów dodatnich ostrych i jeżeli

$$\operatorname{tg}\varphi_{m+1}=\operatorname{tg}\varphi_m\sec\varphi_1+\sec\varphi_m\operatorname{tg}\varphi_1\,,$$

w takim razie

$$\operatorname{tg}\varphi_{m+n}=\operatorname{tg}\varphi_m\sec\varphi_n+\sec\varphi_m\operatorname{tg}\varphi_n$$

$$\sec\varphi_{m+n}=\sec\varphi_m\sec\varphi_n+\operatorname{tg}\varphi_m\operatorname{tg}\varphi_n$$

oraz

$$\operatorname{tg}\varphi_m+\sec\varphi_m=(\operatorname{tg}\varphi_1+\sec\varphi_1)^m.$$

[Zastosować indukcję matematyczną].

29. **Przekształcenie** $z=Z^m$. W tym wypadku $r=R^m$, kąty zaś ϑ i $m\Theta$ różnią się o wielokrotność 2π. Jeżeli Z zakreśla okrąg dokoła początku spółrzędnych, z zakreśla m razy okrąg dokoła początku.

Cała płaszczyzna (x, y) odpowiada któremukolwiek z pośród m równych wycinków w płaszczyźnie (X, Y), mających kąt $=2\frac{\pi}{m}$. Każdemu punktowi płaszczyzny (x, y) odpowiada m punktów płaszczyzny (X, Y).

30. **Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej.** Jeżeli $f(t)$, $\varphi(t)$ są dwiema funkcjami rzeczywistemi zmiennej rzeczywistej t, określonemi dla pewnego obszaru zmienności argumentu t, wówczas funkcję

$$z=f(t)+i\varphi(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

nazywamy funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej t. Możemy ją przedstawić graficznie zapomocą krzywej

$$x=f(t)\,,\quad y=\varphi(t)\,.$$

Jeżeli z jest funkcją całkowitą albo funkcją wymierną zmiennej t ze spółczynnikami zespolonemi, możemy z przedstawić w postaci (1) i w ten sposób wyznaczyć krzywą, określoną przez tę funkcję.

(I) Niech będzie $z=a+(b-a)t\,,$

gdzie a, b są liczbami zespolonemi. Jeżeli $a=\alpha+\alpha' i$, $b=\beta+\beta' i$, mamy

$$x=\alpha+(\beta-\alpha)t\,,\quad y=\alpha'+(\beta'-\alpha')t\,.$$

Krzywa jest w danym razie prostą, łączącą punkty $z=a$ i $z=b$. Odcinek, zawarty między temi punktami, odpowiada obszarowi zmienności t od 0 do 1. Jakim wartościom t odpowiadają przedłużenia tego odcinka?

(II) Jeżeli $z=c+\rho\,\frac{1+it}{1-it}$

krzywa jest kołem o promieniu ρ i środku c. Gdy t przebiega wszelkie wartości rzeczywiste, z zakreśla okrąg koła raz jeden.

(III) Wogóle równanie $z=\frac{a+bt}{c+dt}$

przedstawia koło. Można dowieść tego, obliczając x, y i rugując, ale prościej jest oprzeć się na Przykł. 22. Niech będzie $z=(a+bZ)/(c+dZ)$ oraz $Z=t$. Gdy t zmienia się, Z wykreśla prostą, mianowicie oś X-ów, zatym z kreśli okrąg koła.

(IV) Równanie $z=a+2bt+ct^2$

przedstawia wogóle parabolę, w szczególnym zaś przypadku, gdy b/c jest liczbą rzeczywistą, przedstawia prostą.

(V) Równanie $z=\frac{a+2bt+ct^2}{\alpha+2\beta t+\gamma t^2}$,

gdzie α, β, γ są liczbami rzeczywistemi, przedstawia stożkową.

[Wyrugować t z równań

$$x=(A+2Bt+Ct^2)/(\alpha+2\beta t+\gamma t^2), \quad z=(A'+2B't+C't^2)/(\alpha+2\beta t+\gamma t^2)$$

gdzie $a=A+iA', \quad b=B+iB', \quad c=C+iC'$.]

38. Wzory na $\sin n\vartheta$ i $\cos n\vartheta$. Twierdzenie De Moivre'a daje nam możność wyrażenia $\sin n\vartheta$ i $\cos n\vartheta$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, zapomocą $\sin\vartheta$ i $\cos\vartheta$. Istotnie, z wzoru

$$\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta=(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^n,$$

w którym n oznacza dowolną liczbę całkowitą dodatnią, otrzymujemy

$$\cos n\vartheta=R[(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^n]$$

$$=(\cos\vartheta)^n\left\{1-\binom{n}{2}\mathrm{tg}^2\vartheta+\binom{n}{4}\mathrm{tg}^4\vartheta-\ldots\right\},$$

$$\sin n\vartheta=I[(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^n]$$

$$=(\cos\vartheta)^n\left\{\binom{n}{1}\mathrm{tg}\,\vartheta-\binom{n}{3}\mathrm{tg}^3\vartheta+\ldots\right\},$$

gdzie symbol $\binom{n}{r}$ oznacza ilość kombinacji z n rożnych elementów po r, czyli spółczynnik

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}$$

w rozwinięciu potęgi dwumianu.

Mamy tedy

$$\frac{\cos n\vartheta}{(\cos\vartheta)^n}=1-\binom{n}{2}t^2+\binom{n}{4}t^4-\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(1)$$

$$\frac{\sin n\vartheta}{(\cos\vartheta)^n}=\binom{n}{1}t-\binom{n}{3}t^3+\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(2)$$

gdzie przez t oznaczyliśmy funkcję $\mathrm{tg}\,\vartheta$.

Dzieląc te dwa wzory przez siebie, otrzymujemy

$$\mathrm{tg}\,n\vartheta=\left\{\binom{n}{1}t-\binom{n}{3}t^3+\ldots\right\}\Big/\left\{1-\binom{n}{2}t^2+\ldots\right\}\quad.\quad.\quad.\quad(3)$$

Z wzorów (1) i (2) można otrzymać dalsze wzory, wyrażające

$$\cos n\vartheta, \quad \frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}$$

jedynie za pomocą $\cos\vartheta$. Jakoż

$$\cos^n\vartheta\,\mathrm{tg}^{2r}\vartheta = \sin^{2r}\vartheta\cos^{n-2r}\vartheta = \cos^{n-2r}\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^r.$$

Podstawiając do wzoru (1) i mnożąc przez $\cos^n\vartheta$, otrzymujemy

$$\cos n\vartheta = a_n\cos^n\vartheta + a_{n-2}\cos^{n-2}\vartheta + \dots,$$

gdzie a_n, a_{n-2}, ... są stałe, ostatni zaś wyraz jest albo stały albo też jest wielokrotnością $\cos\vartheta$, zależnie od tego, czy n jest parzyste czy nieparzyste.

W taki sam sposób z (2) mamy

$$\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} = b_{n-1}\cos^{n-1}\vartheta + b_{n-3}\cos^{n-3}\vartheta + \dots$$

Bezpośrednie wyznaczenie tych spółczynników w sposób ogólny przy zastosowaniu wyłącznie metod elementarnych, jest nieco kłopotliwe. Wzory ostateczne są

$$2\cos n\vartheta = (2\cos\vartheta)^n - \frac{n}{1!}(2\cos\vartheta)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}(2\cos\vartheta)^{n-4} -$$

$$\dots + (-1)^r\frac{n(n-r-1)\dots(n-2r+1)}{r!}(2\cos\vartheta)^{n-2r} + \dots \quad (4),$$

$$\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} = (2\cos\vartheta)^{n-1} - \frac{n-2}{1!}(2\cos\vartheta)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2!}(2\cos\vartheta)^{n-5} - \dots$$

$$\dots + (-1)^r\frac{(n-r-1)\dots(n-2r)}{r!}(2\cos\vartheta)^{n-2r-1} + \dots \quad (5).$$

Wzory te łatwo sprawdzić zapomocą indukcji. Istotnie, mamy

$$2\cos(n+1)\vartheta = \cos\vartheta(2\cos n\vartheta) - 2(1-\cos^2\vartheta)\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$$\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} = \cos\vartheta\left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}\right) + \cos n\vartheta;$$

pozostaje sprawdzić wzory (4) i (5) dla $n=1, 2, 3$ i dowieść, że jeżeli są słuszne dla $n=k$, to muszą być słuszne dla $n=k+1$. Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

39. Równanie trzecie możemy przez skrócenie pisać w postaci $\mathrm{tg}\,n\vartheta = f(t)$. Możemy je uważać za równanie n-tego stopnia względem t, mające pierwiastek $t = \mathrm{tg}\,\vartheta$.

Tak samo równanie

$$\operatorname{tg}\left\{n\left(\vartheta+\frac{k\pi}{n}\right)\right\}=f(t)$$

ma pierwiastek $t=\operatorname{tg}\{\vartheta+(k\pi/n)\}$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Ponieważ jednak

$$\operatorname{tg}(n\vartheta+k\pi)=\operatorname{tg} n\vartheta,$$

przeto oba poprzednie równania są właściwie tym samym równaniem. Tak więc $\operatorname{tg}\{\vartheta+(k\pi/n)\}$ jest pierwiastkiem równania (3) dla wszelkich wartości całkowitych k.

Wyrażenie to przybierać może n i tylko n różnych wartości:

$$\operatorname{tg}\vartheta,\quad \operatorname{tg}\left(\vartheta+\frac{\pi}{n}\right),\quad \operatorname{tg}\left(\vartheta+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots \operatorname{tg}\left\{\vartheta+\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}.$$

Są to więc pierwiastki równania (3). Stąd wnosimy, że każda funkcja symetryczna tych liczb da się wyrazić zapomocą spółczynników równania (3), czyli zapomocą $\operatorname{tg} n\vartheta$. Oczywista rzecz, że równania (1), (2), (4), (5) można traktować w podobny sposób. W następujących przykładach znajdzie czytelnik kilka ćwiczeń, odnoszących się do tej kwestji.

Przykłady XXIV. 1. Równanie (3) można napisać w postaci

$$t^n-\binom{n}{2}t^{n-2}+\binom{n}{4}t^{n-4}-\ldots-\frac{\operatorname{tg}}{\operatorname{ctg}}n\vartheta\left\{\binom{n}{1}t^{n-1}-\binom{n}{3}t^{n-3}+\ldots\right\}=0,$$

przyczym bierzemy $\operatorname{tg} n\vartheta$ lub $\operatorname{ctg} n\vartheta$ zależnie od tego, czy n jest nieparzyste czy parzyste.

2. Dowieść, że

$$\sec^2\vartheta+\sec^2\left(\vartheta+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\sec^2\left\{\vartheta+\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}$$

równa się $n^2\sec^2 n\vartheta$ lub $n^2\operatorname{cosec}^2 n\vartheta$ zależnie od tego, czy n jest nieparzyste czy parzyste.

(*Mathem. Tripos*, 1900.)

3. Dowieść, że $\sec^2\frac{\pi}{9}+\sec^4\frac{2\pi}{9}+\sec^4\frac{3\pi}{9}+\sec^4\frac{4\pi}{9}=1120$.

4. Przy n nieparzystym

$$t^n-\binom{n}{2}t^{n-2}+\binom{n}{4}t^{n-4}-\ldots=t\left(t^2-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\right)\left(t^2-\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(t^2-\operatorname{tg}^2\frac{r\pi}{n}\right),$$

gdzie $r=\frac{1}{2}(n-1)$. Znaleźć analogiczny wzór dla n parzystego.

5. Pierwiastkami równania $2\cos n\vartheta=x^n-\frac{n}{1!}x^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2!}x^{n-4}-\ldots$ są liczby

$$2\cos\vartheta,\ 2\cos\left(\vartheta+\frac{2\pi}{n}\right),\ \ldots\ldots,\ 2\cos\left\{\vartheta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}.$$

6. Pierwiastkami równania $64x^3-112x^2+56x-7=0$ są liczby

$$\sin^2\frac{\pi}{7},\ \sin^2\frac{2\pi}{7},\ \sin^2\frac{4\pi}{7}.$$

Na tej podstawie dowieść, że

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}=\tfrac{1}{2}\sqrt{7}.$$

7. Dowieść, że $4\cos^2(\pi/7)$ jest pierwiastkiem równania

$$x^3-5x^2+6x-1=0$$

i znaleźć pozostałe pierwiastki.

(*Mathem. Tripos*, 1898.)

8. **Przedstawienie funkcji** $\cos n\vartheta$ **oraz** $(\sin n\vartheta)/(\sin\vartheta)$ **w postaci iloczynu*).** Dowieść, że $2\cos n\vartheta$ równa się albo

$$2^n\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{3\pi}{2n}\right)\ldots\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)\cos\vartheta,$$

albo też

$$2^n\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{3\pi}{2n}\right)\ldots\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right),$$

zależnie od tego, czy n jest liczbą nieparzystą czy parzystą.

9. Dowieść, że $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{3\pi}{2n}\ldots\sin\dfrac{r\pi}{2n}=2^{-\frac{1}{2}(n-1)}$, gdzie r równa się albo $n-2$, albo $n-1$ zależnie od tego, czy n jest nieparzyste czy parzyste.

[W Przykładzie 8 założyć $\vartheta=0$ i starannie uwzględniać znaki przy pierwiastkowaniu.]

10. Dowieść, że $(\sin n\vartheta)/(\sin\vartheta)$ równa się albo

$$2^{n-1}\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)\cos\vartheta,$$

albo też

$$2^{n-1}\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right),$$

zależnie od tego, czy n jest parzyste czy nieparzyste.

11. Na podstawie poprzedniego zadania oraz równania (2) w § 38-ym dowieść, że przy n nieparzystym

---

*) Wzory w zadaniach 8—11 mają doniosłe znaczenie praktyczne dla Analizy.

$$2^{n-1}\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{2\pi}{n}\right)\dots\left(\cos^2\vartheta-\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$
$$=n\cos^{n-1}\vartheta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\vartheta.\sin^2\vartheta+\dots$$

Stąd, kładąc $\vartheta=0$, dowieść, że

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=(2^{-\frac{1}{2}(n-1)})\sqrt{n}.$$

Otrzymać odpowiedni wzór dla przypadku, gdy n jest liczbą parzystą.

40. Pierwiastkowanie liczb zespolonych. Nie nadaliśmy dotąd żadnego znaczenia symbolom takim, jak $\sqrt[n]{a}$, $a^{m/n}$ w których a jest liczbą zespoloną, m zaś i n są liczbami rzeczywistemi całkowitemi. Otóż będzie rzeczą zupełnie naturalną, jeżeli określimy te symbole zgodnie ze znaczeniem, jakie nadajemy im w algiebrze elementarnej, gdy a jest liczbą rzeczywistą. Określimy tedy $\sqrt[n]{a}$ i $a^{1/n}$ (gdzie n jest liczbą całkowitą) jako liczbę z, czyniącą zadość równaniu $z^n=a$; tak samo $a^{m/n}$, gdzie m i n są całkowite, określimy jako $(a^{1/n})^m$. Określenie to nie przesądza kwestji, czy równanie $z^n=a$ posiada wogóle pierwiastki i ile ma pierwiastków.

41. Rozwiązanie równania $z^n=a$. Niech będzie

$$a=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

gdzie ρ jest dodatnie, kąt zaś φ taki, że $-\pi<\varphi\leqq\pi$.

W takim razie, jeżeli mamy

$$z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta),$$

musi być

$$r^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

tak iż

$$r^n=\rho,\quad \cos n\vartheta=\cos\varphi,\quad \sin n\vartheta=\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Jedyną możliwą wartością na r jest $\sqrt[n]{\rho}$, czyli zwykły pierwiastek arytmetyczny n-tego stopnia z ρ. Dwom drugim równaniom (1) czyni zadość związek $n\vartheta=\varphi+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, czyli

$$\vartheta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Jeżeli $k=np+q$, gdzie p i q są liczbami całkowitemi, przyczym $0\leqq q<n$, wówczas

$$\vartheta = 2p\pi + \frac{\varphi + 2q\pi}{n} ;$$

liczba p może tu być dowolną liczbą całkowitą. Widzimy, że

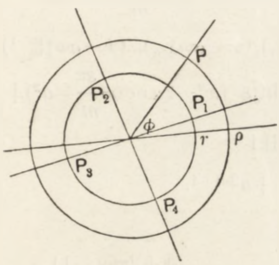
równanie $z^n = a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

ma n *i tylko* n *pierwiastków, danych przez wzór* $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, *w którym*

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \vartheta = \frac{\varphi + 2q\pi}{n} \quad (q = 0, 1, 2, \dots n-1).$$

Ze wszystkie te pierwiastki są różne, łatwo spostrzec, kreśląc djagram Arganda. Na rys. 34 mamy cztery pierwiastki z liczby

$$(1{\cdot}6)(\cos 55^0 + i\sin 55^0).$$



Rys. 34.

Pierwiastek

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nazywają *główną wartością* pierwiastka $\sqrt[n]{a}$.

Szczególnie ciekawy jest przypadek, gdy $a = 1$, $\rho = 1$, $\varphi = 0$; otrzymujemy równanie $z^n = 1$, które ma n pierwiastków

$$\cos(2q\pi/n) + i\sin(2q\pi/n), \qquad (q = 0, 1, 2, \dots n-1).$$

Liczby te nazywamy n-temi pierwiastkami z jedności; główną wartością jest tu sama jedność. Jeżeli $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ oznaczymy symbolem ω_n, możemy wszystkie n-te pierwiastki z jedności napisać w postaci

$$1, \ \omega_n, \ \omega_n^2, \dots \omega_n^{n-1}.$$

Przykłady XXV. 1. Pierwiastkami kwadratowemi z 1 są liczby $+1$, -1; pierwiastkami sześciennemi 1, $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$; pierwiastkami czwartego stopnia są 1, i, -1, $-i$; pierwiastkami piątego stopnia

$$1, \ \tfrac{1}{4}\{\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\}, \ \tfrac{1}{4}\{-\sqrt{5}-1+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\},$$

$$\tfrac{1}{4}\{-\sqrt{5}-1-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\}, \ \tfrac{1}{4}\{\sqrt{5}-1-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\}.$$

2. Dowieść, że $1 + \omega_n + \omega_n^2 + \dots + \omega_n^{n-1} = 0$.

3. Dowieść, że $(x + y\omega_3 + z\omega_3^2)(x + y\omega_3^2 + z\omega_3) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$.

4. Pierwiastek n-tego stopnia z a ma n wartości

$$\sqrt[n]{a},\quad \omega_n\sqrt[n]{a},\quad \omega_n^2\sqrt[n]{a},\ldots,\ \omega_n^{n-1}\sqrt[n]{a},$$

gdzie $\sqrt[n]{a}$ oznacza główną wartość pierwiastka.

5. Z Przykł. XXIII. 14 wynika, że pierwiastkami równania $z^2=\alpha+i\beta$ są liczby

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)}\pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)},$$

przyczym znaki bierzemy te same lub różno zależnie od tego, czy β jest dodatnie, czy ujemne. Dowieść, że zgadza się to z wynikiem, otrzymanym w § 41.

6. Dowieść, że $(x^{2m}-a^{2m})/(x^2-a^2)$ da się przedstawić w postaci

$$\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{m}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{m}+a^2\right)\ldots\left(x^2-2ax\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+a^2\right).$$

[$x^{2m}-a^{2m}$ rozkłada się na czynniki $(x-a)$, $(x-a\omega_{2m})$, $(x-a\omega_{2m}^2)\ldots(x-a\omega_{2m}^{2m-1})$, każde zaś dwa czynniki $(x-a\omega_{2m}^s)$, $(x-a\omega_{2m}^{2m-s})$ dają $\left(x^2-2ax\cos\frac{s\pi}{m}+a^2\right)$.]

7. Rozłożyć w podobny sposób na czynniki

$$x^{2m+1}-a^{2m+1},\quad x^{2m}+a^{2m},\quad x^{2m+1}+a^{2m+1}.$$

8. Dowieść, że $x^{2n}-2x^na^n\cos\vartheta+a^{2n}=$

$$=\left(x^2-2xa\cos\frac{\vartheta}{n}+a^2\right)\left(x^2-2xa\cos\frac{\vartheta+2\pi}{n}+a^2\right)\ldots\left(x^2-2xa\cos\frac{\vartheta+2\pi(n-1)}{n}+a^2\right).$$

[Można wyjść z wzoru

$$x^{2n}-2x^na^n\cos\vartheta+a^{2n}=\{x^n+a^n(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\}\{x^n-a^n(\cos\vartheta-i\sin\vartheta)\}].$$

9. Zagadnienie wyznaczenia ω_n zapomocą wzoru, zawierającego tylko pierwiastki kwadratowe (takim jest np. wzór $\omega_3=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$) jest zarazem zagadnieniem gieometrycznym wpisania w koło wielokąta foremnego metodą Euklidesa, czyli zapomocą cyrkla i linjału. Widzieliśmy w rozd. I i II, że można zbudować tą metodą wszelkie niewymierności kwadratowe, ale tylko takie niewymierności. Euklides podał konstrukcje dla $n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15$. Rzecz jasna, że konstrukcje są jeszcze możliwe dla 2^kn, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Istnieją inne jeszcze wartości na n (np. $n=17$), przy których konstrukcja taka jest możliwa.

42. Ogólna postać twierdzenia De Moivre'a. Z poprzedniego paragrafu widzimy, że gdy q jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, jedną z wartości wyrażenia $(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^{1/q}$ jest

$$\cos\frac{\vartheta}{q}+i\sin\frac{\vartheta}{q}.$$

Podnosząc oba te wyrażenia do potęgi p (gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą, dodatnią lub ujemną), otrzymamy twierdzenie, że jedną z wartości wyrażenia

$$(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^{p/q} \quad \text{jest} \quad \cos(p\vartheta/q)+i\sin(p\vartheta/q).$$

Innemi słowami: *jeżeli α jest dowolną liczbą wymierną, wówczas jedną z wartości wyrażenia* $(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^\alpha$ *jest*

$$\cos\alpha\vartheta+i\sin\alpha\vartheta.$$

Mamy tu twierdzenie De Moivre'a w postaci uogólnionej.

Zadania do rozdziału III.

1. Warunek, aby trójkąt (xyz) był równoboczny brzmi:

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=0.$$

[Niech będzie XYZ dany trójkąt. Przesunięcie $\overline{ZX}$ jest przesunięciem $\overline{YZ}$, obróconym o kąt dodatni lub ujemny $\frac{2}{3}\pi$; otóż $\mathrm{Cis}\,\frac{2}{3}\pi=\omega_3$, $\mathrm{Cis}(-\frac{2}{3}\pi)=1/\omega_3=\omega_3^2$, mamy tedy $x-z=(z-y)\omega_3$ albo też $x-z=(z-y)\omega_3^2$. Stąd $x+y\omega_3+z\omega_3^2=0$ albo $x+y\omega_3^2+z\omega_3=0$ i t. d. Porówn. Przykł. XXV.3.]

2. Jeżeli XYZ, $X'Y'Z'$ są to dwa trójkąty i jeżeli

$$\overline{YZ}.\overline{Y'Z'}=\overline{ZX}.\overline{Z'X'}=\overline{XY}.\overline{X'Y'},$$

wówczas oba trójkąty są równoboczne.

[Z równań $(y-z)(y'-z')=(z-x)(z'-x')=(x-y)(x'-y')=k^2$ otrzymujemy $\Sigma 1/(y'-z')=0$ albo $\Sigma x'^2-\Sigma y'z'=0$. Pozostaje zastosować poprzednie zadanie.]

3. Na bokach trójkąta ABC budujemy podobne do niego trójkąty CBX, CAY, ABZ. Dowieść że trójkąty ABC, XYZ mają spólny środek ciężkości.

[Mamy $(x-c)/(b-c)=(y-a)/(c-a)=(z-b)/(a-b)=\lambda$. Wyrazić $\frac{1}{3}(x+y+z)$ zapomocą a, b, c.]

4. Jeżeli X, Y, Z są punktami na bokach trójkąta ABC, przyczym

$$\frac{BX}{XC}=\frac{CY}{YA}=\frac{AZ}{ZB}=r,$$

i jeżeli trójkąty ABC, XYZ są do siebie podobne, wówczas albo $r=1$, albo oba trójkąty są równoboczne.

5. Z faktu, że stosunki anharmoniczne czterech punktów, leżących na jednym okręgu, są rzeczywiste, wysnuć twierdzenie Ptolomeusza o czworobokach wpisanych w koło.

[Punktem wyjścia może być tożsamość

$$(x_2-x_3)(x_1-x_4)+(x_3-x_1)(x_2-x_4)+(x_1-x_2)(x_3-x_4)=0.]$$

6. Jeżeli $z^2+z'^2=1$, wówczas z, z' są końcami średnic sprzężonych

elipsy, której ogniskami są punkty 1, -1. [Jeżeli CP, CD są połówkami średnic sprzężonych elipsy, której ogniska znajdują się w punktach S, H, wówczas prosta CD jest równoległa do zewnętrznej dwusiecznej kąta SPH i mamy $SP.HP=CD^2$.]

7. Dowieść, że $|a+b|^2+|a-b|^2=2\{|a|^2+|b|^2\}$. Jest to odpowiednik analityczny dla twierdzenia gieometrycznego, że jeśli M jest środkiem PQ, wówczas $OP^2+OQ^2=2OM^2+2MP^2$.

8. Na mocy poprzedniego zadania dowieść, że

$$|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|=|a+b|+|a-b|.$$

[Oznaczając $a+\sqrt{a^2-b^2}$ przez z_1, $a-\sqrt{a^2-b^2}$ przez z_2, mamy

$$|z_1|^2+|z_2|^2=\tfrac{1}{2}|z_1+z_2|^2+\tfrac{1}{2}|z_1-z_2|^2=2|a|^2+2|a^2-b^2|.$$

Wobec tego

$$(|z_1|+|z_2|)^2=2\{|a|^2+|a^2-b^2|+|b|^2\}=|a+b|^2+|a-b|^2+2|a^2-b^2|.$$

Można powiedzieć jeszcze inaczej: jeżeli z_1, z_2 są pierwiastkami równania $\alpha z^2+2\beta z+\gamma=0$, wówczas

$$|z_1|+|z_2|=\frac{1}{|\alpha|}.\{|-\beta+\sqrt{\alpha\gamma}|+|-\beta-\sqrt{\alpha\gamma}|\}.$$

9. Jeżeli równanie $x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ ma spółczynniki rzeczywiste i jeżeli dwa jego pierwiastki są rzeczywiste, dwa zaś zespolone, przyczym leżą one na jednym kole na wykresie Arganda, wówczas musi zachodzić związek

$$a_3^2+a_1^2a_4+a_2^3-a_2a_4-2a_1a_2a_3=0.$$

10. Cztery pierwiastki równania

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$$

są harmoniczne, jeżeli mamy

$$a_0a_3^2+a_1^2a_4+a_2^3-a_0a_2a_4-2a_1a_2a_3=0.$$

[Znaleźć wzór na $Z_{23,14}$ $Z_{31,24}$ $Z_{12,34}$, gdzie

$$Z_{23,14}=(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_3)(z_2-z_4),$$

a z_1, z_2, z_3, z_4 są pierwiastkami równania].

11. **Punkty urojone i proste urojone.** Niech będzie dane równanie $ax+by+c=0$ o spółczynnikach zespolonych, które w szczególnym przypadku mogą być również liczbami rzeczywistemi.

Dając na x oznaczoną wartość rzeczywistą lub zespoloną, możemy wyznaczyć odpowiednią wartość na y. W ten sposób otrzymujemy pary wartości (rzeczywistych lub zespolonych) na x i y; zbiór wszystkich takich par nazywamy *prostą urojoną*, każdą zaś poszczególną parę nazywamy *punktem urojonym* i powiadamy, że punkt ten *leży na prostej*. Wartości zmiennych x i y nazywamy *spółrzędnemi* punktu (x, y). Jeżeli wartości x i y są rzeczywiste, nazywamy punkt (x, y) *rzeczywistym*. jeżeli spółczynniki a, b, c są wszystkie trzy rzeczywiste (lub mogą się stać rzeczywistemi po podzieleniu przez spólny czynnik), prostą nazywamy *rzeczywistą*. Punkty $x=\alpha+i\beta$, $y=\gamma+i\delta$ oraz $x=\alpha-i\beta$, $y=\gamma-i\delta$ nazywamy *sprzężonemi*. Tak samo *sprzężonemi* nazywamy proste

$$(A+iA')x+(B+iB')y+(C+iC')=0$$

oraz

$$(A-iA')x+(B-iB')y+(C-iC')=0.$$

Zbadać słuszność następujących twierdzeń: na każdej prostej rzeczywistej istnieje nieskończenie wiele par punktów urojonych sprzężonych; na każdej prostej urojonej leży jeden i tylko jeden punkt rzeczywisty; na prostej urojonej niema nigdy pary punktów urojonych sprzężonych. Znaleźć również, przy jakich warunkach (*a*) prosta, łącząca dwa dane punkty urojone, jest rzeczywista; (*b*) punkt przecięcia się dwuch prostych urojonych jest rzeczywisty.

12. Znaleźć sumy n wyrazów szeregów

$$\cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+\ldots$$

$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots$$

[Znaleźć sumę n wyrazów postępu

$$(\cos a+i\sin a)\{1+(\cos b+i\sin b)+(\cos b+i\sin b)^2+\ldots\}$$

i porównać wyrazy rzeczywiste i zespolone.]

13. Znaleźć sumy $n+1$ wyrazów szeregów

$$1+\binom{n}{1}\cos a+\binom{n}{2}\cos 2a+\ldots$$

$$1+\binom{n}{1}\sin a+\binom{n}{2}\sin 2a+\ldots$$

14. Znaleźć sumę

$$\cos\alpha+x\cos(\alpha+\beta)+\ldots+x^{n-1}\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1905.)

15. Znaleźć moduł i amplitudę liczb

$$1+\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\quad 1+\cos\vartheta-i\sin\vartheta,\quad 1-\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\quad 1-\cos\vartheta-i\sin\vartheta.$$

16. Wyciągnąć pierwiastki kwadratowe z liczb poprzedniego zadania.

17. Dowieść, że

$$\left(\frac{1+\sin\vartheta+i\cos\vartheta}{1+\sin\vartheta-i\cos\vartheta}\right)^n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\vartheta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\vartheta\right).$$

18. Dowieść następujących tożsamości:

$$(x+y+z)(x+\omega_3 y+\omega_3^2 z)(x+\omega_3^2 y+\omega_3 z)=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

$$(x+y+z)(x+\omega_5 y+\omega_5^4 z)(x+\omega_5^2 y+\omega_5^3 z)(x+\omega_5^3 y+\omega_5^2 z)(x+\omega_5^4 y+\omega_5 z)$$

$$=x^5+y^5+z^5-5x^3yz+5xy^2z^2.$$

19. Rozwiązać równania

$$x^3-3ax+(a^3+1)=0 \text{ oraz } x^5-5ax^3+5a^2x+(a^5+1)=0.$$

20. Jeżeli $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k$, wówczas

$$\frac{f(x)+f(\omega x)+\ldots+f(\omega^{n-1}x)}{n}=a_0+a_nx^n+a_{2n}x^{2n}+\ldots+a_{\lambda n}x^{\lambda n},$$

gdzie ω jest pierwiastkiem równania $x^n=1$ (różnym od 1), zaś λn jest największą wielokrotnością n zawartą w k. Znaleźć podobny wzór dla $a_\mu+a_{\mu+n}x^n+a_{\mu+2n}x^{2n}+\ldots$

21. Jeżeli $(1+x)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, wówczas

$$p_0-p_2+p_4-\ldots=2^{\frac{1}{2}n}\cos\frac{n\pi}{4},$$

$$p_1-p_3+p_5-\ldots=2^{\frac{1}{2}n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

22. Znaleźć sumę

$$\frac{x}{2!(n-2)!}+\frac{x^2}{5!(n-5)!}+\frac{x^3}{8!(n-8)!}+\ldots+\frac{x^{n/3}}{(n-1)!},$$

gdzie n jest wielokrotnością liczby 3.

(*Mathem. Tripos.* 1899.)

23. Otrzymać wzory § 38-go, nie posługując się liczbami zespolonemi.

24. Dowieść, że przy m nieparzystym, mamy $3\Sigma\operatorname{cosec}^2(r\pi/m)=m^2-1$, gdzie r przybiera wartości 1, 2..., $m-1$.

Oznaczmy przez S sumę tych wartości funkcji $\operatorname{cosec}^2(r\pi/m)$, w których r jest liczbą mniejszą od m i pierwszą względem m. Dowieść, że gdy m jest iloczynem liczb nieparzystych pierwszych $a, b, c...k$, wówczas $3S=(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)....(k^2-1)$.

(*Mathem. Tripos.* 1902.)

25. Jeżeli m jest liczbą nieparzystą, wówczas

$$\sum_{r=0}^{r=m-1}\operatorname{tg}^4\left(\frac{(2r+1)\pi}{m}\right)=\frac{1}{3}m(m-1)(m^2+m-3).$$

(*Mathem. Tripos.* 1903).

26. Jeżeli $a_r=a+b\cos\{\vartheta+(2r\pi/n)\}$, gdzie $r=1, 2, 3..., n$, wówczas przy $n>3$ mamy

$$3n(n-2)\Sigma a_1\Sigma a_1a_2=3n^2\Sigma a_1a_2a_3+(n-1)(n-2)(\Sigma a_1)^2$$

(*Mathem. Tripos* 1906).

27. Pierwiastkami równania

$$1-nx-\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}x^n=0$$

są liczby $\qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n},\quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4n},\ldots,\quad \operatorname{tg}\frac{(4n-3)\pi}{4n}.$

[Równanie sprowadzić można do postaci $(1-xi)^n+i(1+xi)^n=0$.]

28. Pierwiastkami równania

$$x^n-nx^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}-\ldots=0$$

są liczby $\qquad \operatorname{ctg}\alpha,\ -\operatorname{ctg}3\alpha,\ \operatorname{ctg}5\alpha,\ldots(-1)^{n-1}\operatorname{ctg}(2n-1)\alpha,$

gdzie $\alpha=\pi/4n$.

Dowieść również, że suma n wyrazów szeregu

$$\operatorname{ctg}\alpha\,.\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{ctg}3\alpha\operatorname{cosec}^23\alpha+\ldots$$

równa się $2n^3$.

(*Mathem. Tripos.* 1901).

29. Istnieją naogół dwa punkty, które nie zmieniają się przy przekształceniu $z=(aZ+b)/(cZ+d)$. Jeżeli punkty te oznaczymy przez α, β, wówczas przekształcenie da się przedstawić w postaci

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta}=k\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}.$$

Sprowadzić w szczególności do tego kształtu przekształcenie $z=(1+Z)/(1-Z)$. Podzielić płaszczyznę zmiennej Z na 8 obszarów za pomocą osi spółrzędnych i koła jednostkowego oraz wyznaczyć na płaszczyźnie zmiennej z obszary, odpowiadające tym 8 obszarom.

30. Jeżeli $z=Z^2-1$, wówczas, gdy z zakreśla koło $|z|=\varkappa$, każdy z dwu odpowiadających punktów Z zakreśla owal Cassini'ego $\rho_1\rho_2=\varkappa$, gdzie ρ_1, ρ_2 oznaczają odległości punktu Z od punktów ±1. Wykreślić owale dla różnych wartości $\varkappa$.

31. Jeżeli t jest zmienną zespoloną i jeżeli $|t|=1$, wówczas punkt $x=(at+b)/(t-c)$ zakreśla koło, o ile tylko $|c|\neq1$, jeżeli zaś $|c|=1$, punkt x kreśli prostą.

32. Niech będzie t zmienna zespolona taka, że $|t|=1$. Dowieść, że punkt $x=\frac{1}{2}\{at+(b/t)\}$ kreśli wogóle elipsę, której ogniskami są punkty $x^2=ab$, osiami zaś odcinki $|a|+|b|$ oraz $|a|-|b|$. Jeżeli jednak mamy $|a|=|b|$, wówczas punkt x kreśli odcinek, łączący punkty $\pm\sqrt{ab}$.

33. Jeżeli $z=2Z+Z^2$, wówczas kołu $|Z|=1$ odpowiada na płaszczyźnie z kardiojda.

34. Zbadać przekształcenie $z=\frac{1}{2}\{Z+(1/Z)\}$; w szczególności dowieść że kołom $X^2+Y^2=a^2$ odpowiadają elipsy spółogniskowe

$$\frac{4x^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\frac{4y^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=1.$$

35. Jeżeli $(z+1)^2=4/Z$, wówczas kołu jednostkowemu płaszczyzny z odpowiada na płaszczyźnie Z parabola $R\cos^2\frac{1}{2}\Theta=1$, a wewnętrznym punktom koła odpowiadają zewnętrzne punkty paraboli.

36. Dowieść, że zapomocą przekształcenia $z=\{(Z-ic)/(Z+ic)\}^2$ można górnej części płaszczyzny z podporządkować wnętrze pewnego półkola na płaszczyźnie Z.

37. Niech będzie dany związek $az^2+2hzZ+bZ^2+2gz+2fZ+c=0$. Dowieść, że istnieją dwie wartości zmiennej Z takie, że odpowiadające im wartości z są sobie równe, i odwrotnie. Nazwiemy je *punktami rozgałęzienia* na płaszczyznach Z i z. Dowieść, że gdy z zakreśla elipsę, której ogniskami są punkty rozgałęzienia, wówczas Z kreśli również elipsę.

[Czytelnik dowiedzie najpierw, że powyższy związek można napisać w postaci

$$z^2+2zZ\cos\omega+Z^2=1.$$

Punktem rozgałęzienia są na obu płaszczyznach punkty $\pm\operatorname{cosec}\omega$. Równanie elipsy, o której mowa,

$$|z+\operatorname{cosec}\omega|+|z-\operatorname{cosec}\omega|=\text{const.}$$

jest równoważne równaniu (Przykł. 8)

$$|z+\sqrt{z^2-\operatorname{cosec}^2\omega}|+|z-\sqrt{z^2-\operatorname{cosec}^2\omega}|=\text{const.}$$

Do tego ostatniego równania podstawić Z.]

38. Jeżeli $z=aZ^m+bZ^n$, gdzie m i n są liczbami dodatniemi i całkowitemi, liczby zaś a i b są rzeczywiste, wówczas, gdy Z zakreśla koło, z zakreśla hipocyklojdę albo epicyklojdę.

39. Dowieść, że

$$\frac{\sin(2n+1)\vartheta}{(2n+1)\sin\vartheta}=\prod_{r=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\{r\pi/(2n+1)\}}\right).$$

(*Mathem. Tripos*. 1907).

40. Kładąc w poprzednim zadaniu $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$, dowieść, że

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n+1}\cdot\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{2n+1}\dots\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

41 Dowieść, że

$$\sin n\vartheta=2^{n-1}\sin\vartheta\,.\,\sin\left(\vartheta+\frac{\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\vartheta+\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

[W Przykł. XXV.8 położyć $x=a=1$; zamiast ϑ wstawić 2ϑ.]

42. Dowieść, że $\cos\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}\ldots\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{128}$.

43. Dowieść, że $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}\ldots\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}=1$.

44. Dowieść, że

$$\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{2x}=A\left(x^2+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\right)\left(x^2+\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(x^2+\operatorname{tg}^2\frac{r\pi}{n}\right),$$

gdzie przy n nieparzystym $A=1$, $r=\frac{1}{2}(n-1)$, przy n zaś parzystym $A=n$, $r=\frac{1}{2}n-1$.

45. Jeżeli $1\Big/\prod\limits_{r=1}^{n}\left(x+\operatorname{tg}^2\frac{r\pi}{2n+1}\right)$ przedstawimy w postaci

$$\prod_{r=1}^{n} A_r\Big/\left(x+\operatorname{tg}^2\frac{r\pi}{2n+1}\right),$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, wówczas

$$A_r=\frac{(-1)^{r-1}}{2n+1}\cdot 2\sin^2\frac{r\pi}{2n+1}\cdot\cos^{2n-3}\frac{rn}{2n+1}.$$

(*Mathem. Tripos.* 1905).

[Stosując zwykłą regułę ułamków prostych, mamy

$$A_r=(-1)^{r-1}\cdot 2\sin^2\frac{r\pi}{2n+1}\cos^{2n-3}\frac{r\pi}{2n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2n+1},$$

poczym możemy oprzeć się na zadaniu 40-ym.]

46. Dowieść, że

$$\sum_{r=0}^{n-1}\sin\frac{(2r+1)\pi}{2n}\cdot\operatorname{cosec}\left\{\frac{(2r+1)\pi}{2n}-\alpha\right\}=n\cos(n-1)\alpha\cdot\sec n\alpha.$$

(*Mathem. Tripos* 1907).

[Strona prawa równa się

$$n\cdot\frac{x^{n-1}+x^{-(n-1)}}{x^n+x^{-n}}=n\cdot\frac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+1},$$

gdzie $x=\cos\alpha+i\sin\alpha=\operatorname{Cis}\alpha$. Pierwiastkami równania $x^{2n}+1=0$

są $\qquad \operatorname{Cis}\frac{(2r+1)\pi}{2n}\qquad (r=0, 1, \ldots, 2n-1)$.

Prawą część rozkładamy na ułamki proste kształtu

$$A_r\Big/\left\{x-\operatorname{Cis}\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right\}.$$

Okazuje się, że $A_r = -i\sin\frac{(2r+1)\pi}{2n}\,\mathrm{Cis}\,\frac{(2r+1)\pi}{2n}$. W celu otrzymania żądanego wyniku, musimy łączyć wyrazy parami $(r, n+r)$.]

47. Dowieść, że jeśli m i n są liczbami całkowitemi dodatniemi, przyczym $m \leqq n$, wówczas $x^{m-1}/(1+x^n) = (1/n)\Sigma\frac{\omega^{m-n}}{x-\omega}$, gdzie ω jest pierwiastkiem równania $x^n+1=0$. Dowieść, że jeśli n jest parzyste, mamy

$$\frac{1}{1+x^n} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{0}^{\frac{1}{2}n-1}\left\{1-x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n}\right\}\Big/\left\{1-2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n}+x^2\right\}.$$

Znaleźć analogiczny wzór dla przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą.

48. Rozłożyć $x^{m-1}/(1-x^n)$ na ułamki proste, zakładając, że m, n są liczbami całkowitemi dodatniemi i $m \leqq n$. Znaleźć również wzór na $1/(1-x^n)$, analogiczny do wzoru poprzedniego zadania.

49. Wykazać, że

$$\frac{x^n - a^n\cos n\vartheta}{x^{2n}-2x^n a^n\cos n\vartheta + a^{2n}} = \frac{1}{nx^{n-1}}\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{x-a\cos\left(\vartheta+\frac{2r\pi}{n}\right)}{x^2-2xa\cos\left(\vartheta+\frac{2r\pi}{n}\right)+a^2}.$$

50. Jeżeli przez $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ oznaczymy odległości punktu P, leżącego na płaszczyźnie foremnego wielokąta, od wierzchołków tego wielokąta, wówczas mamy

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{\rho_v^2} = \frac{n}{r^2-a^2}\cdot\frac{r^{2n}-a^{2n}}{r^{2n}-2r^n a^n\cos n\vartheta + a^{2n}},$$

gdzie a oznacza promień koła opisanego na wielokącie, r odległość punktu P od środka O wielokąta, ϑ kąt między OP i promieniem, łączącym O z którymkolwiek wierzchołkiem wielokąta.

51. Jeżeli $A_1A_2\ldots A_n$ oraz $B_1B_2\ldots B_n$ są to dwa wielokąty foremne spółśrodkowe, liczby zaś m, n są względem siebie pierwsze, wówczas

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{(A_rB_s)^2} = \frac{mn}{b^2-a^2}\cdot\frac{b^{2mn}-a^{2mn}}{b^{2mn}-2b^{mn}a^{mn}\cos mn\vartheta + a^{2mn}},$$

gdzie a i b są promieniami kół opisanych na wielokątach, a ϑ jest kątem między dwoma promieniami, poprowadzonemi do wierzchołków dwuch wielokątów.

(*Mathem. Tripos.* 1903).

52. Jeżeli p, q są liczbami całkowitemi względnie pierwszemi i jeżeli mamy daną liczbę dodatnią nieparzystą $k<2p$ oraz $\vartheta = q\pi/p$, wówczas

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{\cos k(\alpha+n\vartheta)}{\sin(\alpha+n\vartheta)} = p \operatorname{ctg} p\alpha , \quad \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\sin k(\alpha+n\vartheta)}{\sin(\alpha+n\vartheta)} = p .$$

[Mamy $$\frac{px^{\lambda-1}}{x^p-1} - \frac{1}{x-1} = \sum_{1}^{p-1} \frac{t^{n\lambda}}{x-t^n} ,$$

gdzie $$t = \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta , \quad 1 \leqq \lambda \leqq p .$$

Kładziemy $$\tfrac{1}{2}(k+1) = \lambda \quad \text{oraz} \quad x = \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha .]$$

ROZDZIAŁ IV.

O GRANICACH FUNKCJI ZMIENNEJ CAŁKOWITEJ DODATNIEJ.

43. Funkcje zmiennej całkowitej dodatniej. W rozdziale II mówiliśmy o funkcjach zmiennej rzeczywistej x i wyjaśniliśmy to pojęcie na wielu przykładach. Czytelnik niewątpliwie pamięta, że przykłady te różniły się od siebie w jednym zasadniczym szczególe: niektóre funkcje były określone dla wszystkich wartości x, inne tylko dla wartości wymiernych, jeszcze inne były określone tylko dla wartości całkowitych zmiennej x, itd.

Weźmy np. pod uwagę następujące funkcje: (I) $y=x$, (II) $y=\sqrt{x}$, (III) y=mianownikowi liczby x, (IV) y=pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu licznika przez mianownik liczby x, (V) y=największemu czynnikowi pierwszemu liczby x, (VI) y=iloczynowi $\sqrt{x}$ przez największy czynnik pierwszy liczby x, (VII) $y=x$-owa liczba pierwsza, (VIII) y=zmierzonemu w calach wzrostowi więźnia x w takim a takim więzieniu.

Funkcje te są określone dla różnych obszarów zmienności liczby x, mianowicie (I) dla wszelkich wartości x, (II) dla wszystkich dodatnich wartości x, (III) dla wszystkich wymiernych wartości x, (IV) dla wszystkich dodatnich wymiernych wartości x, (V) dla wszystkich całkowitych wartości x, (VI) i (VII) dla wszystkich dodatnich całkowitych wartości x, (VIII) dla pewnej liczby dodatnich całkowitych wartości x, mianowicie dla 1, 2, 3 ... N, gdzie N oznacza liczbę wszystkich więźniów, znajdujących się w danej chwili w tym więzieniu*).

---

*) Można powiedzieć, że liczba N zależy od czasu, że osobnik x jest różny w różnych chwilach czasu. Jeśli więc zechcemy uwzględnić czas, będziemy mieli przykład funkcji dwuch zmiennych $y=F(x, t)$. Funkcja ta jest określona dla pewnych wartości zmiennej t (np. dla okresu czasu od chwili założenia więzienia aż do chwili obecnej), jak również dla pewnej liczby dodatnich i całkowitych wartości na x, przyczym liczba tych wartości zmienia się wraz ze zmianą czasu t.

Weźmy pod uwagę taką funkcję, jaką w powyższych przykładach była funkcja (VII), t. j. określoną dla wszystkich wartości dodatnich całkowitych zmiennej x i nie określoną dla żadnych innych wartości x. Możemy taką funkcję traktować z dwuch nieco różnych stanowisk. Możemy ją uważać za funkcję zmiennej rzeczywistej x, określoną tylko dla pewnych wartości tej zmiennej, mianowicie dla wartości całkowitych dodatnich; co zaś do innych możliwych wartości x, to powiemy, że funkcja dla nich nie została określona. Ale możemy również postąpić tak, jak w rozdziale I, § 7a; mianowicie możemy nie brać wcale pod uwagę wszystkich wartości x, lecz jedynie wartości dodatnie i całkowite zmiennej, i powiedzieć: funkcja nasza jest funkcją zmiennej całkowitej dodatniej n, która to zmienna może przybierać wartości

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

W tym drugim przypadku napiszemy symbolicznie

$$y = \varphi(n)$$

i będziemy uważali y za funkcję zmiennej n, określoną dla wszystkich wartości tej zmiennej.

Rzecz jasna, że skoro tylko mamy funkcję, określoną dla wszystkich wartości rzeczywistych x, możemy utworzyć funkcję zmiennej n, określoną dla wszystkich wartości n. Np., mając daną funkcję $y=x^2$, możemy otrzymać funkcję $y=n^2$, jeżeli po prostu postanowimy, że nie będziemy brali pod uwagę innych wartości x, jak tylko całkowite dodatnie, ani też innych wartości y, jak tylko odpowiadające tym całkowitym dodatnim wartościom x. Z drugiej strony, mając daną jakąkolwiek funkcję zmiennej n, możemy z niej otrzymać dowolną ilość funkcji zmiennej x, a to w ten sposób, że na podstawie nowego, zresztą zupełnie dowolnego określenia wyznaczamy wartości y, odpowiadające tym wartościom x, które nie są liczbami całkowitemi dodatniemi.

44. Interpolacja. Poruszyliśmy zagadnienie niezmiernej wagi w matematyce wyższej, mianowicie zagadnienie wyznaczenia takiej funkcji zmiennej rzeczywistej x, która dla całkowitych i dodatnich x przybierałaby takie same wartości, jakie przybiera dana funkcja zmiennej n. Jest to zagadnienie *interpolacji funkcyjnej*.

Gdyby chodziło o znalezienie byle jakiej funkcji $f(x)$, czyniącej zadość tym warunkom, sprawa nie przedstawiałaby najmniejszej trudności. Możnaby brakujące wartości uzupełnić dowolnie. możnaby nawet oświadczyć, że $f(x)$ jest funkcją, określoną tylko dla wartości całkowitych zmiennej x. Oczywista rzecz jednak, że w danym razie chodzi o coś zupełnie innego, mianowicie o *znalezienie możliwie prostego wzoru*, zawierającego zmienną x i przybierającego pewne, z góry zadane wartości przy $x=1, 2, 3...$

W pewnych szczególnych przypadkach, gdy znamy wzór na funkcję $\varphi(n)$, zagadnienie rozwiązać możemy w sposób bardzo prosty. Jeżeli np. $\varphi(n)$ wyraża się wzorem, mającym sens nie tylko przy całkowitych i dodatnich wartościach n (np. wzorem $y=n$, $y=n^2$, $y=(n-1)/(n+1)$ itp.), możemy poprostu założyć $y=\varphi(x)$. Łatwo jednak otrzymać inne jeszcze rozwiązania. Np. funkcja

$$y=\varphi(x)+\sin x\pi$$

przybiera przy $x=n$ te same wartości, co funkcja zmiennej całkowitej $\varphi(n)$.

W innych wypadkach $\varphi(n)$ może być wyznaczone zapomocą wzoru, który dla pewnych wartości x nie ma sensu. Przypuśćmy np., że $y=(-1)^n$; wzór ten nie miałby dla nas sensu przy wykładniku ułamkowym o mianowniku parzystym albo przy wykładniku niewymiernym. Nieraz jednak łatwo można przekształcić wzór w ten sposób, że nabiera on znaczenia przy wszelkich wartościach x; np. wystarczy zauważyć, że $\cos n\pi=(-1)^n$, wobec czego możemy założyć $y=\cos x\pi$.

Zdarza się, że funkcja $\varphi(x)$ jest określona nie tylko dla dodatnich wartości x, nie jest jednak określona dla wszystkich wartości zmiennej. Przypuśćmy np. że funkcję $y=n^n$ chcemy zastąpić przez $y=x^x$. Ten drugi wzór ma sens tylko dla pewnych wartości x. Aby uprościć rozumowanie, weźmy pod uwagę tylko dodatnie wartości x; w takim razie x^x ma sens tylko dla wymiernych wartości x, gdyż

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{p/q}=\sqrt[q]{\left(\frac{p}{q}\right)^p},$$

zgodnie z określeniem wykładników ułamkowych, wprowadzonym w algiebrze elementarnej. Jeśli jednak x jest liczbą niewymierną, wówczas x^x niema dla nas (przynajmniej dotąd) żadnego sensu. Widzimy, że zagadnienie interpolacji prowadzi tu do innego ważnego zagadnienia: do takiego uogólnienia definicji potęgi, by wzór x^x miał sens nawet przy niewymiernych wartościach zmiennej. Później zobaczymy, w jaki sposób uogólnienie to da się osiągnąć.

Weźmy jeszcze dla przykładu wzór

$$y=1.2.3...=n!$$

Nie znamy w matematyce elementarnej żadnego wzoru na x, któryby przy $x=n$ sprowadzał się do $n!$, gdyż $x!$ ma sens tylko przy dodatnich całkowitych wartościach zmiennej. W tym wypadku próba rozwiązania zagadnienia interpolacji funkcyjnej doprowadziła do ważnych odkryć, gdyż udało się matematykom znaleźć funkcję (zwaną funkcją gama), która posiada żądaną własność, a prócz tego ma mnóstwo innych ciekawych własności.

45. Klasy skończone i nieskończone. Zanim będziemy mogli przystąpić do badania własności funkcji zmiennej całkowitej, musimy uczynić kilka uwag, dotyczących pewnych pojęć logicznych, któremi matematyka ciągle się posługuje.

Czytelnik zna niewątpliwie **pojęcie klasy**. Nie mamy zamiaru roztrząsać trudności logicznych, związanych z tym pojęciem; do naszego celu wystarczy, jeżeli klasę będziemy uważali poprostu za zbiór wszystkich przedmiotów (lub elementów), posiadających pewną spólną własność, prostą lub złożoną. W tym sensie możemy mówić o klasie obywateli angielskich, o klasie rudowłosych Germanów, o klasie liczb rzeczywistych i t. p.

Prócz tego czytelnik niezawodnie zdaje sobie sprawę z tego, co nazywa się **klasą skończoną**, a co **nieskończoną**. Np. klasa „obywateli angielskich" jest klasą skończoną: zbiorowi wszystkich teraźniejszych, przeszłych i przyszłych obywateli angielskich odpowiada pewna liczba n, jakkolwiek nie umiemy podać dokładnej wartości tej liczby. Klasie „teraźniejszych obywateli angielskich" odpowiada liczba n, którą moglibyśmy ustalić za pomocą spisu ludności, gdyby metody spisu były doskonałe.

Natomiast klasa liczb całkowitych dodatnich *nie jest skończona*; nazywamy ją nieskończoną. Można to ściślej wyrazić w ten sposób: jeżeli przez n oznaczymy dowolną liczbę całkowitą dodatnią (np. 1000, 1000000 albo jakąkolwiek inną liczbę), wówczas istnieje więcej niż n liczb całkowitych dodatnich. Jeżeli np. na n damy wartość 1000000, wówczas istnieje niewątpliwie przynajmniej 1000001 liczb całkowitych dodatnich. Tak samo klasa liczb rzeczywistych, klasa punktów odcinka są to klasy nieskończone. W celu wyrażenia tego faktu bywa rzeczą dogodną posługiwać się zwrotem: istnieje **nieskończenie wiele** punktów na odcinku (lub: nieskończenie wiele liczb rzeczywistych, itp.). Czytelnik jednak powinien zawsze pamiętać, że w takich wypadkach chcemy powiedzieć **tylko tyle**: *rzeczona klasa nie ma oznaczonej* ilości elementów (np. 1000 lub 1000000 elementów), lecz może ich mieć dowolnie wiele.

46. O własnościach funkcji zmiennej n, odpowiadających dużym wartościom na n. Powróćmy do funkcji zmiennej n, o których mówiliśmy w §§ 43, 44. Różnią się one pod wieloma względami od funkcji zmiennej x, które poznaliśmy w Rozdziale II, mają jednak z temi funkcjami jedną ważną spólną cechę: *wartości zmiennej, przy których funkcja jest określona, tworzą klasę nieskończoną*. Na tym podstawowym fakcie opierają się dalsze nasze rozważania, które, jak się o tym przekonamy w następnym rozdziale, dają się mutatis mutandis zastosować również do funkcji zmiennej x.

Przypuśćmy, że $\varphi(n)$ jest dowolną funkcją zmiennej n, i że P jest dowolną własnością, którą funkcja $\varphi(n)$ może posiadać lub której może nie posiadać. (Np. P może być własnością: „równa się liczbie całkowitej", albo: „jest większy od 1" itp.). Przypuśćmy, dalej, że przy wszelkich wartościach $n=1, 2, 3, \ldots$ badamy, czy $\varphi(n)$ posiada własność P, czy też nie posiada jej. Mogą zachodzić trzy przypadki zasadniczo różne:

(a) $\varphi(n)$ może posiadać własność P przy wszystkich wartościach n, albo też przy wszystkich wartościach n z wyjątkiem pewnej oznaczonej liczby N tych wartości;

(b) $\varphi(n)$ może nie posiadać tej własności przy żadnych wartościach n, albo też może ją posiadać tylko dla pewnej liczby N tych wartości;

(c) ani (a), ani (b) nie jest prawdą.

Jeżeli prawdą jest (b), wówczas wartości n, przy których $\varphi(n)$ posiada własność P, tworzą klasę skończoną. Jeżeli prawdą jest (a), wówczas wartości n, przy których $\varphi(n)$ nie posiada własności P, tworzą klasę skończoną. W trzecim przypadku żadna z tych dwu klas nie jest skończona. Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

(1) Niech będzie $\varphi(n)=n$ i niech P oznacza własność: „jest liczbą całkowitą dodatnią". Funkcja $\varphi(n)$ posiada własność P przy wszystkich wartościach n. Gdyby P oznaczało własność: „jest liczbą całkowitą nie mniejszą od 1000", wówczas $\varphi(n)$ miałaby tę własność przy wszystkich wartościach

n z wyjątkiem skończonej liczby tych wartości, mianowicie z wyjątkiem $n=1, 2, 3, \ldots, 999$. W obu przypadkach prawdą jest (a).

(2) Jeżeli $\varphi(n)=n$, a P oznacza własność: „jest mniejszy od 1000", wówczas prawdą jest (b).

(3) Jeżeli $\varphi(n)=n$ a P oznacza: „jest liczbą nieparzystą", wówczas prawdą jest (c). Istotnie $\varphi(n)$ jest parzyste lub nieparzyste, gdy n jest parzyste lub nieparzyste, zarówno zaś wartości parzyste n jak i wartości nieparzyste tworzą klasę nieskończoną.

Przykłady. W każdym z następujących przykładów oznaczyć, który z przypadków (a), (b) lub (c) zachodzi:

(1) $\varphi(n)=n$; P oznacza: „jest kwadratem zupełnym".

(2) $\varphi(n)=n$-ta liczba pierwsza; P oznacza: „jest liczbą nieparzystą".

(3) $\varphi(n)=n$-ta liczba pierwsza; P oznacza: „jest liczbą parzystą".

(4) $\varphi(n)=n$-ta liczba pierwsza; P oznacza: „jest większy od n".

(5) $\varphi(n)=1-\dfrac{(-1)^n}{n}$; P oznacza własność $\varphi(n)<1$.

(6) $\varphi(n)=1-\dfrac{(-1)^n}{n}$; P oznacza własność $\varphi(n)<2$.

(7) $\varphi(n)=1000\{1+(-1)^n\}/n$; P oznacza własność $\varphi(n)<1$.

(8) $\varphi(n)=1/n$; P oznacza własność $\varphi(n)<0{\cdot}001$.

(9) $\varphi(n)=(-1)^n/n$; P oznacza własność $|\varphi(n)|<0{\cdot}001$.

(10) $\varphi(n)=10000/n$, albo też $\varphi(n)=(-1)^n.1000/n$; P oznacza albo własność $\varphi(n)<0{\cdot}001$, albo też $|\varphi(n)|<0{\cdot}001$.

(11) $\varphi(n)=(n-1)/(n+1)$; P oznacza własności $1-\varphi(n)<0{\cdot}0001$.

47. Przypuśćmy, że $\varphi(n)$ i P są tego rodzaju, że zachodzi przypadek (a), czyli że $\varphi(n)$ posiada własność P albo przy wszelkich wartościach n, albo też przy wszystkich wartościach n z wyjątkiem pewnej oznaczonej liczby N tych wartości. Te wyjątkowe wartości możemy oznaczyć przez

$$n_1, n_2, \ldots n_N.$$

Niema oczywiście powodu, dla którego te wartości wyjątkowe miałyby być pierwszemi N wartościami, które przybiera zmienna n, jakkolwiek w wielu wypadkach ma to istotnie miejsce.

W każdym razie wiemy, że $\varphi(n)$ posiada własność P, jeżeli $n > n_N$. Np. n-ta liczba pierwsza jest nieparzysta, jeżeli $n > 2$, ($n = 2$ stanowi w danym razie jedyną wartość wyjątkową); $1/n < 0{\cdot}001$, jeżeli $n > 1000$ (pierwsze 1000 wartości n stanowią wartości wyjątkowe); dalej

$$1000\{1+(-1)^n\}/n < 1,$$

jeżeli $n > 2000$; wartościami wyjątkowemi są tu $n = 2, 4, 6, \ldots 2000$. We wszystkich tych przykładach $\varphi(n)$ posiada oznaczoną własność przy wszystkich wartościach n, większych od pewnej liczby N.

Fakt ten będziemy czasem przez skrócenie wyrażali słowami: $\varphi(n)$ posiada taką a taką własność przy **wielkich**, albo: *bardzo wielkich*, albo: *dostatecznie wielkich* wartościach n. Jeśli więc powiemy: $\varphi(n)$ posiada własność P przy wielkich wartościach n, będziemy przez to rozumieli, że możemy wyznaczyć taką liczbę, powiedzmy n_0, że przy $n \geqq n_0$, funkcja $\varphi(n)$ posiada własność P. Tą liczbą n_0 mogłaby być każda liczba całkowita większa od n_N, czyli od największej z pośród wyjątkowych wartości zmiennej n. Najprościej, oczywiście, przyjąć $n_0 = n_N + 1$.

W tym sensie możemy powiedzieć: „wszystkie wielkie liczby pierwsze są nieparzyste", albo „$1/n$ jest mniejsze od 0.001 przy wielkich wartościach na n". Czytelnik powinien oswoić się z tym sposobem używania wyrazu: wielki. W matematyce, tak samo jak w życiu codziennym, wyraz *wielki* nie ma znaczenia bezwzględnego. Ta sama liczba może być w jednych okolicznościach uważana za wielką, w innych za małą. *Wielki* oznacza zwykle w matematyce: *dostatecznie wielki*, a to, co ze względu na pewien cel uważamy za dostatecznie wielkie, może być zupełnie niewystarczające do innego celu.

Teraz już wiemy, co znaczy orzeczenie: „$\varphi(n)$ posiada własność P przy wielkich wartościach zmiennej n". W dalszym ciągu tego rozdziału będziemy wciąż mieli do czynienia z takiemi orzeczeniami. Jeśli mamy daną funkcję $\varphi(n)$, powstaje pytanie, czy istnieją własności, co do których takie orzeczenie jest prawdziwe?

48. Zdanie: „n dąży do nieskończoności". Przypuśćmy, że n przybiera kolejno wartości 1, 2, 3, 4... Wyraz „kolejno" nasuwa wyobrażenie czasu i, jeśli kto chce, może wyobrażać sobie, że np. n przybiera te wartości w początku każdej z kolei sekundy. Gdy sekundy płyną, n staje się coraz większe, i wzrastanie to odbywa się nieograniczenie. Jakkolwiek wielką liczbę pomyślimy, musi nastąpić chwila, gdy n stanie się od tej liczby większe.

Dogodną jest rzeczą posiadać krótkie zdanie, któreby wyrażało fakt nieograniczonego wzrastania zmiennej n; w tym celu posługujemy się zdaniem: „n **dąży do nieskończoności**“, co piszemy symbolicznie: $n \to \infty$. Symbol ∞ oznacza tu „nieskończoność”. Wyraz ‚dąży’, tak samo jak wyraz ‚kolejno’ nasuwa wyobrażenie czasu i, jeśli kto chce, może sobie dla ułatwienia wyobrażać te zmiany, jako odbywające się w czasie, musimy jednak zaznaczyć, że zmienna n jest tworem czysto logicznym, i, jako taka, nie ma właściwie nic spólnego z czasem.

Czytelnik powinien dokładnie zrozumieć i zapamiętać, że mówiąc: „n dąży do ∞“, chcemy poprostu powiedzieć, że n przybiera wartości, które rosną nieograniczenie. **Niema liczby ‚nieskończoność‘** i równanie $n = \infty$ jest absolutnie pozbawione sensu; n nie może równać się nieskończoności, gdyż zwrot: „równa się nieskończoności” nic wogóle nie znaczy. Symbol ∞ ma dla nas znaczenie tylko w zdaniu: „dąży do ∞”, jak zaś zdanie to rozumieć należy, objaśniliśmy poprzednio. Z czasem dowiemy się, w jaki sposób można nadać pewien sens innym zdaniom, zawierającym symbol ∞, ale czytelnik powinien zawsze pamiętać:

1) że ∞ samo przez się nic nie znaczy, jakkolwiek pewne zdania, zawierające ten symbol, mogą niekiedy mieć sens;

2) że ilekroć zdanie, zawierające symbol ∞, ma sens, dzieje się to tylko dlatego, że uprzednio nadaliśmy mu ten sens zapomocą specjalnego określenia.

Teraz jest rzeczą jasną, że jeśli funkcja $\varphi(n)$ posiada własność P przy wielkich wartościach zmiennej n i jeśli n „dąży do nieskończoności“ (w znaczeniu tylko co wyjaśnionym) to n po pewnym czasie zaczyna przybierać wartości dostatecznie wielkie, aby funkcja $\varphi(n)$ posiadała własność P. Tak więc pytanie: „jakie własności posiada funkcja $\varphi(n)$ przy dostatecznie wielkich wartościach n?“ można sformułować inaczej, mianowicie: „jak zachowuje się $\varphi(n)$, gdy n dąży do nieskończoności?“

49. O zachowaniu się funkcji zmiennej n, gdy n dąży do nieskończoności. Opierając się na uwagach poprzedniego paragrafu, zbadamy teraz pewien rodzaj orzeczeń, które w matematyce wyższej spotykamy na każdym kroku. Weźmy jako przykład dwa następujące orzeczenia: (I) $1/n$ *jest małą liczbą przy wielkich wartościach* n; (II) $1-1/n$ *równa się prawie* 1 *przy wielkich wartościach* n. Sądzę, że nikt nie zaprzeczy prawdziwości tych dwu orzeczeń, a jednak mimo ich oczywistość tkwi w nich wiele rzeczy godnych bliższego zbadania. Przyjrzyjmy się najpierw orzeczeniu (I), jako nieco prostszemu.

Mieliśmy już do czynienia z orzeczeniem: „$1/n$ jest mniejsze od 0·01 przy wielkich wartościach n”. Widzieliśmy, że znaczy ono po prostu: „$1/n < 0{\cdot}01$ przy wszelkich wartościach zmiennej n, większych od pewnej w zupełności oznaczonej liczby, mianowicie większych od 100“. Z równą słusznością moglibyśmy powiedzieć, że „$1/n$ jest mniejsze od 0·0001 przy wielkich wartościach n“; istotnie, jeżeli $n > 10000$, wówczas $1/n < 0{\cdot}0001$. Zamiast ułamków 0·01 lub 0·0001 moglibyśmy wziąć liczbę 0·0000001 lub jakąkolwiek liczbę dodatnią, a orzeczenie nasze pozostałoby słuszne.

Ponieważ często będziemy mieli do czynienia z podobnemi orzeczeniami, warto więc odrazu ustalić jakiś sposób wysłowienia faktu, że każde orzeczenie typu „$1/n$ *jest mniejsze od* 0·001 *przy wielkich wartościach* n” jest prawdziwe, jeżeli zamiast 0·001 podstawimy jakąkolwiek jeszcze mniejszą liczbę dodatnią. Do tego celu może służyć następujące orzeczenie:

„jakkolwiek małą obralibyśmy liczbę dodatnią δ, przy dostatecznie wielkich wartościach n mamy zawsze $1/n < \delta$.”

Prawdziwość tego orzeczenia nie ulega kwestji. Istotnie, aby było $1/n < \delta$ wystarczy, by $n > 1/\delta$, tak iż owe „dostatecznie wielkie“ wartości n muszą być tylko większe od $1/\delta$. A jednak orzeczenie to jest bardzo złożone, gdyż zastępuje właściwie całą klasę orzeczeń, które otrzymujemy, dając na δ poszczególne wartości, np. 0·01, 0·001 itd. Oczywista rzecz, że im mniejszą liczbą jest δ, tym $1/\delta$ jest większe i tym większa musi być najmniejsza z owych „dostatecznie wielkich“ wartości na n; wartości zmiennej n, które są dostatecznie wielkie przy pewnej oznaczonej wartości δ, mogą być zbyt małe przy innej wartości δ.

Podkreślone przez nas zdanie tłumaczy dokładnie, co znaczy orzeczenie (I). Tak samo orzeczenie (II) znaczy właściwie:

„jeżeli $\varphi(n) = 1 - 1/n$, wówczas orzeczenie: ‚$1-\varphi(n) < \delta$ przy dostatecznie wielkich wartościach zmiennej n' jest prawdziwe, jakąkolwiek wartość dodatnią przypiszemy liczbie δ". Że to jest prawdą, widać odrazu z tego, że $1-\varphi(n) = 1/n$.

Orzeczenia (I) i (II) możemy wysłowić w inny jeszcze sposób, mianowicie możemy powiedzieć: „$1/n$ dąży do 0, gdy n dąży do ∞", oraz „$1-(1/n)$ dąży do 1, gdy n dąży do ∞". Tak więc oba orzeczenia:

$1/n$ jest małą liczbą, gdy n jest wielką liczbą

$1/n$ dąży do zera, gdy n dąży do ∞

są równoważne sobie i równoważne ściślejszemu orzeczeniu:

jeżeli δ jest dowolnie małą liczbą dodatnią, wówczas $1/n < \delta$ przy dostatecznie wielkich wartościach zmiennej n, oraz równoważne następującemu, jeszcze ściślejszemu orzeczeniu:

jeżeli δ jest dowolnie małą liczbą dodatnią, możemy zawsze znaleźć taką liczbę n_0, że przy wszystkich wartościach n równych n_0 lub większych od n_0, będzie $1/n < \delta$.

Liczba n_0, o której mowa w tych orzeczeniach, jest, oczywiście, funkcją liczby δ. Niekiedy, chcąc podkreślić tę zależność liczby n_0 od liczby δ, będziemy posługiwali się symbolem $n_0(\delta)$.

Możemy wyobrazić sobie, że prowadzimy spór o słuszność powyższego orzeczenia. Oponent nasz wymienia coraz mniejsze liczby δ, poczynając np. od 0·001. Odpowiadamy mu, że $1/n < 0{\cdot}001$, jeżeli tylko $n > 1000$. Oponent wymienia wówczas mniejszą liczbę, np. 0·000001; na to odpowiadamy, że $1/n < 0{\cdot}000001$, jeżeli $n > 1000000$, itd. Rzecz jasna, że zawsze w tym sporze słuszność będzie po naszej stronie.

Tę samą własność funkcji $1/n$ można wyrazić inaczej, mianowicie:

gdy n dąży do ∞, $1/n$ dąży do **granicy** 0.

Orzeczeniu temu nadajemy formę symboliczną

$$\lim_{n\to\infty}(1/n)=0.$$

O ile nie będzie to groziło wywołaniem nieporozumienia, będziemy czasem pisali przez skrócenie

$$\lim(1/n)=0,\ \text{albo}\ \underset{(n\to\infty)}{1/n\to 0}\ \text{albo, jeszcze krócej,}\ 1/n\to 0.$$

Analogicznie możemy napisać:

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\right]=1\,,\quad \left[\underset{(n\to\infty)}{1-(1/n)}\right]\to 1\,,\quad \left[1-\frac{1}{n}\right]\to 1.$$

50. Weźmy teraz odmienny przykład. Niech będzie $\varphi(n)=n^2$. W tym przykładzie „n^2 j e s t w i e l k ą l i c z b ą, gdy n j e s t w i e l k ą l i c z b ą".

Orzeczenie to jest równoznaczne z następującemi dwoma ściślejszemi orzeczeniami:

jeżeli G jest dowolnie wielką liczbą dodatnią, wówczas $n^2 > G$ przy dostatecznie wielkich wartościach zmiennej n;

możemy znaleźć taką liczbę n_0, że, przy wszelkim n większym od n_0 lub równym n_0, mamy $n^2 > G$.

W takich wypadkach mówią nieraz: „n^2 dąży do ∞, gdy n dąży do ∞", albo też: „n^2 dąży wraz z n do ∞". Symbolicznie napiszemy to orzeczenie tak:

$$\underset{(n\to\infty)}{n^2\to\infty}\ \text{albo, krócej,}\ n^2\to\infty.$$

Weźmy wreszcie pod uwagę funkcję $\varphi(n)=-n^2$. Gdy na n dajemy duże wartości, $\varphi(n)$ jest wielką liczbą ujemną; zachowując więc poprzednią formę wysłowienia, powiemy: „$-n^2$ dąży do $-\infty$, gdy n dąży do ∞", i napiszemy

$$-n^2\to-\infty.$$

Z tego przykładu łatwo domyślić się, że w wielu wypadkach dogodnie będzie pisać: $n^2\to+\infty$, czyli posługiwać się symbolem $+\infty$ zamiast symbolu ∞.

W każdym razie musimy raz jeszcze z naciskiem zaznaczyć, że we wszystkich tych i im podobnych orzeczeniach symbole $+\infty$, $-\infty$, ∞ s a m e p r z e z s i ę a b s o l u t n i e n i c n i e z n a c z ą; mają one sens tylko wówczas, gdy występują w pewnych szczególnych związkach, i sens ten mają tylko na mocy wyłożonych poprzednio umów.

51. Określenie granicy. Sądzimy, że po powyższych roztrząsaniach czytelnik z łatwością zrozumie ogólne pojęcie ‚*granicy*'. Wyrażając się obrazowo lecz nieściśle, możnaby powiedzieć, że „$\varphi(n)$ dąży do granicy l, gdy n dąży do ∞, jeżeli przy wielkich wartościach n funkcja $\varphi(n)$ prawie równa się l". Jakkolwiek takie powiedzenie byłoby może zrozumiałe po wyjaśnieniach poprzedniego paragrafu, nie jest ono jednak dość precyzyjne, by mogło grać rolę określenia matematycznego. Jest ono równoważne całej klasie orzeczeń typu: „*przy dostatecznie wielkich wartościach zmiennej n, funkcja $\varphi(n)$ różni się od l mniej, niż o δ*". Po pierwsze, takie orzeczenie powinno być słuszne przy $\delta = 0{\cdot}01$, lub $0{\cdot}001$ i wogóle przy *wszelkiej dodatniej* wartości na δ; powtóre, przy każdej zadanej wartości δ orzeczenie winno być słuszne dla *wszelkich wartości* zmiennej n, poczynając od pewnej wartości $n_0(\delta)$, przyczym im mniejszą liczbą jest δ, tym zazwyczaj większą liczbą musi być n_0.

Prowadzi to nas do następującego ścisłego określenia granicy:

Określenie I. *Powiadamy, że gdy n dąży do ∞, funkcja $\varphi(n)$ dąży do granicy l, jeżeli dla każdej dowolnie małej (byle różnej od zera) liczby dodatniej δ możemy wyznaczyć odpowiednią liczbę $n_0(\delta)$ taką, że przy wszelkich wartościach zmiennej n, równych $n_0(\delta)$ lub większych od $n_0(\delta)$, funkcja $\varphi(n)$ różni się od l mniej niż o δ.*

Bezwzględną wartość różnicy między $\varphi(n)$ a l oznaczamy symbolem $|\varphi(n)-l|$. Wielkość ta równa się albo $\varphi(n)-l$, albo też $l-\varphi(n)$, zależnie od tego, która z tych dwuch różnic jest dodatnia. Należy zauważyć, że symbol ten zgadza się z określeniem modułu, podanym w § 35, jakkolwiek na razie mówimy tylko o liczbach rzeczywistych.

Za pomocą symbolu wartości bezwzględnej można nieco krócej wysłowić określenie granicy. Możemy, mianowicie, powiedzieć:

jeżeli dla każdej liczby dodatniej δ (różnej od zera) możemy wyznaczyć odpowiadającą jej liczbę $n_0(\delta)$ taką, iż mamy zawsze

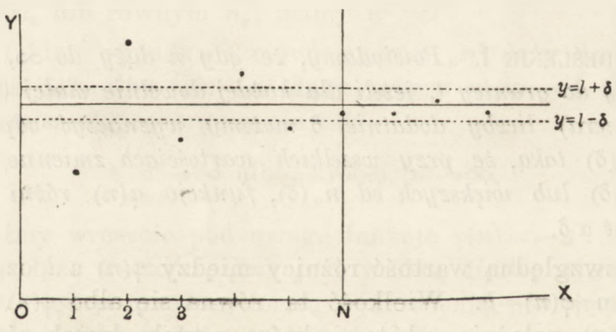
$|\varphi(n)-l|<\delta$, *byle tylko było* $n \geqq n_0(\delta)$, *wówczas powiadamy, że* $\varphi(n)$ *dąży do granicy* l, *gdy* n *dąży do* ∞, *i piszemy*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n)=l.$$

W pewnych wypadkach, gdy nie grozi żadne nieporozumienie, możemy opuścić symbol $n\to\infty$, a nawet możemy pisać wprost: $\varphi(n)\to l$.

Należy zauważyć, że n_0 jest funkcją liczby δ. Niech będzie np. dana funkcja $\varphi(n)=1/n$; rzecz jasna, że $l=0$, jeżeli tylko $1/n<\delta$, gdy $n\geqq n_0$. Temu warunkowi czyni zadość liczba $n_0=1+[1/\delta]$, gdzie $[1/\delta]$ oznacza największą liczbę całkowitą, zawartą w liczbie $1/\delta$. Istnieje jeden i tylko jeden przypadek, w którym *ta sama liczba* n_0 *odpowiada wszystkim* wartościom na δ. Jeżeli N oznacza pewną stałą liczbę i jeżeli, przy $n\geqq N$, funkcja $\varphi(n)$ jest stałą i równa się, powiedzmy, C, wówczas rzecz jasna, że $\varphi(n)-C=0$ przy $n\geqq N$, zatym przy *wszelkich* wartościach δ nierówność $|\varphi(n)-C|<\delta$ jest spełniona, o ile tylko $n\geqq N$. Odwrotnie: jeżeli $|\varphi(n)-l|<\delta$ przy $n\geqq N$, gdzie N jest liczbą stałą, i jeżeli ta nierówność jest spełniona przy *wszystkich* dodatnich wartościach na δ, wówczas $\varphi(n)=l$ przy $n\geqq N$, czyli $\varphi(n)$ ma stałą wartość przy $n\geqq N$.

52. Określenie granicy można zilustrować gieometrycznie w następujący sposób. Wykres funkcji $\varphi(n)$ składa się z odosobnionych punktów, odpowiadających wartościom $n=1, 2, 3\ldots$



Rys. 35.

Wykreślmy prostą $y=l$ oraz dwie równoległe do niej proste $y=l-\delta$, $y=l+\delta$, odległe od niej o δ. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n)=l$$

wówczas i tylko wówczas, jeżeli możemy wykreślić taką prostą $x=N$ (jak na rysunku 35), że wszystkie punkty wykresu, leżące w prawo od tej prostej, zawarte są między równoległemi $y=l-\delta$, $y=l+\delta$, bez względu na to, j a k b l i z k i e s i e b i e s ą t e d w i e r ó w n o l e g ł e. Później, gdy będziemy mieli do czynienia z funkcjami, określonemi dla wszelkich wartości zmiennej niezależnej (nie zaś wyłącznie dla wartości całkowitych), przekonamy się, że ten obraz gieometryczny jest w wielu razach bardzo dogodny.

53. Musimy teraz utworzyć analogiczne do poprzedniego określenie dla tych funkcji, które, jak np. n^2 lub $-n^2$, dążą do $+\infty$ lub do $-\infty$. Sądzimy, że czytelnik bez żadnych trudności zrozumie już teraz następujące

Określenie II. *Powiadamy, że funkcja $\varphi(n)$ dąży wraz z n do $+\infty$, jeżeli dla każdej dowolnie wielkiej liczby dodatniej G możemy wyznaczyć odpowiadającą jej liczbę n_0 taką, że $\varphi(n) > G$, o ile tylko $n \geqq n_0$.*

Możnaby to samo wyrazić krócej, mówiąc: „jeżeli możemy uczynić $\varphi(n)$ dowolnie wielkim, biorąc na n dostatecznie wielkie wartości", ale takie sformułowanie określenia nie jest precyzyjne, gdyż nie uwidocznia zasadniczego faktu: że $\varphi(n) > G$ przy *wszelkich* wartościach zmiennej n, równych n_0 lub większych od n_0.

Jeżeli funkcja $\varphi(n)$ dąży do $+\infty$, piszemy symbolicznie

$$\varphi(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Pozostawiamy czytelnikowi utworzenie odpowiedniego określenia dla przypadku, gdy $\varphi(n)$ dąży do $-\infty$.

54. Kilka uwag, dotyczących pojęcia granicy. Czytelnik powinien dokładnie zastanowić się nad następującemi uwagami.

(1) Możemy w dowolny sposób z m i e n i ć s k o ń c z o n ą i l o ś ć w a r t o ś c i funkcji $\varphi(n)$, co nie wpłynie bynajmniej na zachowanie się naszej funkcji, gdy n dąży do ∞. Naprzykład $1/n$ dąży do 0, gdy n dąży do ∞. Zmieniając skończoną ilość wartości funkcji $1/n$, możemy otrzymać z niej dowolną ilość nowych funkcji. Możemy np. rozważać funkcję $\varphi(n)$, która równa się 3 przy $n = 1, 2, 7, 9, 106, 107, 108, 237$, przy wszystkich zaś innych wartościach zmiennej n, $\varphi(n) = 1/n$. Dla tej nowej funkcji, tak samo jak dla funkcji $1/n$, mamy $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(n) = 0$. Tak samo dla funkcji $\psi(n)$, która równa się 2 przy $n = 1, 2, 7, 9, 106$

107, 108, 237, przy innych zaś wartościach n równa się n^2, mamy $\psi(n) \to +\infty$.

(2) Natomiast nie możemy, wogóle biorąc, zmienić nieskończenie wielu wartości funkcji $\varphi(n)$, nie zmieniając zasadniczo jej zachowania się, gdy n dąży do ∞. Gdybyśmy np. zmienili funkcję $1/n$ w ten sposób, że założylibyśmy, iż $\varphi(n)=1$, gdy n jest wielokrotnością liczby 100, przy wszystkich zaś innych wartościach na n funkcja $\varphi(n)=1/n$, wówczas nie byłoby już prawdą twierdzenie, że $\varphi(n) \underset{(n\to\infty)}{\to} 0$. Istotnie, dopóki zmiana dotyczyła skończonej ilości wartości funkcji, mogliśmy zawsze obrać liczbę n_0 tak, by była ona większa od tych wszystkich wartości n, przy których funkcja była zmieniona. W powyższych przykładach moglibyśmy np. obrać $n_0 > 237$, a nawet musielibyśmy tak uczynić, gdyby nam w pierwszym przykładzie dano 3 jako wartość dowolnie małej liczby δ, a w drugim przykładzie dano 2 jako wartość dowolnie wielkiej liczby G. Teraz jednak mamy do czynienia z taką funkcją, że jakkolwiek wielką obierzemy liczbę n_0, będą zawsze istniały większe od niej wartości n, przy których funkcja nasza posiada wartość 1.

(3) Jeżeli chcemy poznać, czy jakaś funkcja $\varphi(n)$ dąży, zgodnie z Określeniem I, do granicy l, musimy przekonać się, czy nierówność $|\varphi(n)-l| < \delta$ zachodzi nietylko przy $n=n_0$, ale też przy wszelkim $n > n_0$, t. j. czy zachodzi ona przy n_0 i przy wszystkich większych wartościach na n. W ostatnim przykładzie moglibyśmy np. dla każdej dowolnie małej liczby δ znaleźć takie n_0, że przy $n=n_0$ mielibyśmy $\varphi(n) < \delta$; wystarczyłoby w tym celu wziąć wartości $n_0 = 1 + [1/\delta]$, gdzie $[1/\delta]$ oznacza największą liczbę całkowitą zawartą w liczbie $1/\delta$, ale musielibyśmy brać takie tylko wartości na n_0, które nie są wielokrotnościami liczby 100. Jeżeli jednak obraliśmy taką wartość n_0, to nie mamy prawa twierdzić, że $|\varphi(n)| < \delta$ przy $n \geq n_0$, gdyż istnieje nieskończenie wiele wartości n (mianowicie wszystkie większe od n_0 wielokrotności liczby 100), przy których $\varphi(n)=1$.

(4) Jeżeli $\varphi(n)$ jest zawsze większe od l, możemy zastąpić $|\varphi(n)-l|$ przez $\varphi(n)-l$. Jeśli np. chodzi o to, czy $1/n$ dąży do granicy 0, gdy n dąży do ∞, wystarczy zbadać, czy

mamy $1/n < \delta$ przy $n \geqq n_0$. Gdyby jednak chodziło o funkcję $\varphi(n)=(-1)^n/n$, wówczas granica l byłaby znów zerem, ale różnica $\varphi(n)-l$ byłaby raz dodatnia, to znów ujemna. W takich razach musimy koniecznie brać pod uwagę wartość bezwzględną różnicy, czyli musimy badać, czy zachodzi nierówność $|\varphi(n)-l| < \delta$. W naszym przykładzie badalibyśmy nierówność $|\varphi(n)| < \delta$.

(5) Granica l może sama być jedną z wartości funkcji $\varphi(n)$. Jeśli np. mamy $\varphi(n)=0$ przy wszelkich wartościach zmiennej n, wówczas rzecz jasna, że granicą funkcji $\varphi(n)$ jest zero. Albo przypuśćmy, że mamy do czynienia z funkcją $\varphi(n)$, która równa się zeru, gdy n jest wielokrotnością stu, przy innych zaś wartościach n mamy $\varphi(n)=1/n$. Gdy n dąży do nieskończoności, granicą tej funkcji jest liczba 0, a zarazem funkcja przybiera wartość 0 nieskończenie wiele razy.

Należy jednak zauważyć, że granica nie musi wcale być i zazwyczaj nie jest jedną z wartości funkcji. Widać to wyraźnie na przykładzie funkcji $1/n$; granicą jej jest 0, a jednak żadna z wartości tej funkcji nie równa się zeru.

Czytelnik powinien dobrze sobie uświadomić ten fakt, że **granica funkcji a wartość funkcji, są to dwie rzeczy różne,** jakkolwiek granica jest określona przez związek, jaki zachodzi między nią a wartościami funkcji. Może się zdarzyć, że granica równa się niektórym z pośród wartości, które funkcja przybiera, ale to jest, że tak powiem, rzecz przypadkowa.

Gdy $n \to \infty$, granica funkcji $\varphi(n)=1$ równa się wszystkim wartościom funkcji;
granice funkcji

$$\varphi(n)=1/n, \quad \varphi(n)=(-1)^n/n, \quad \varphi(n)=1+(1/n)$$

nie równają się ani jednej wartości funkcji;
granice funkcji

$$\varphi(n)=\frac{\sin(\frac{1}{2}n\pi)}{n}, \quad \varphi(n)=1+\frac{\sin(\frac{1}{2}n\pi)}{n}$$

są (gdy n dąży do ∞), jak łatwo widzieć, 0 i 1, zatem równają się wartościom, które przybierają funkcje $\varphi(n)$ przy wszelkich parzystych wartościach na n, natomiast wartości tych funkcji przy n nieparzystym są wszystkie różne od siebie i różne od granicy.

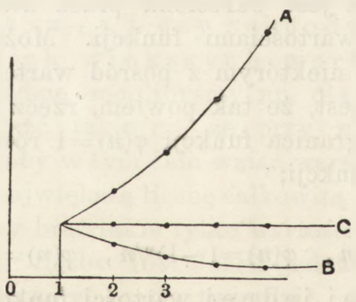
(6) Może się zdarzyć, że funkcja nie dąży ani do $+\infty$, ani do $-\infty$, jakkolwiek przy wielkich wartościach n przybiera wielkie wartości liczbowe. Jako przykład można przytoczyć funkcje $\varphi(n)=(-1)^n . n$, $\varphi(n)=(-1)^n . n^2$. Funkcja dążyć może do ∞ tylko wówczas, gdy, poczynając od pewnej wartości n, posiada stały znak.

Przykłady XXIV. Zbadać, jak zachowują się następujące funkcje zmiennej n, gdy n dąży do ∞:

1. $\varphi(n)=n^k$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną, albo też jest ułamkiem wymiernym. Jeżeli k jest dodatnie n^k dąży wraz z n do $+\infty$. Jeżeli k jest ujemne, wówczas $\lim n^k=0$. Jeżeli $n=0$, wówczas (na mocy określenia symbolu n^0) mamy zawsze $n^k=1$ przy wszelkim n, zatym $\lim n^k=1$.

Radzimy nawet w tak prostym przypadku, jak niniejszy przeprowadzić szczegółowy dowód, że warunkom określenia granicy stało się zadość. Przypuśćmy np. że $k>0$. Niech będzie G dana liczba dowolnie wielka. Chodzi o taki wybór liczby n_0, by przy $n \geqq n_0$ było $n^k > G$. Wystarczy wziąć $n_0 > \sqrt[k]{G}$. Np. jeżeli $k=4$, wówczas $n^4 > 10000$ przy $n \geqq 11$; $n^4 > 100\,000\,000$ przy $n \geqq 101$ itd.

Z punktu widzenia gieometrycznego można sprawę tak przedstawić. Jeżeli $k>0$, wówczas wykres funkcji $y=x^k$ ma ogólny kształt krzywej A na rys. 36; jeżeli $k<0$, krzywa ma kształt B; jeżeli wreszcie $k=0$, krzywa ma kształt C czyli jest prostą równoległą do osi x-ów. W naszym za-



Rys. 36.

gadnieniu mamy właściwie do czynienia tylko z poszczególnemi punktami tych krzywych (co zostało zaznaczone na rysunku) nie zaś z całkowitemi krzywemi.

2. $\varphi(n)=n$-ta liczba pierwsza. Powstaje przedewszystkim pytanie, czy funkcja ta jest określona dla skończonej liczby wartości n czy też dla nieskończenie wielu. Otóż Euklides dowiódł, że istnieje nieskończe-

nie wiele liczb pierwszych. Jakoż przypuśćmy, że istnieje skończona ilość liczb pierwszych, mianowicie 1, 2, 3, 5, 7 ... N. Weźmy pod uwagę liczbę $1+(1.2.3.5 \ldots N)$; liczba ta nie jest podzielna przez 2, 3, 5, 7 ... N, zatym musi być liczbą pierwszą, co przeczy naszemu założeniu.

Łatwo przytym dostrzec, że dla wszystkich wartości n (z wyjątkiem tylko $n=1, 2, 3$) mamy $\varphi(n)>n$, zatym $\varphi(n)\to+\infty$.

3. $\varphi(n)$ = ilość liczb pierwszych mniejszych od n. Znów mamy $\varphi(n)\to+\infty$.

4. $\varphi(n)=[\alpha n]$, gdzie α jest dowolną liczbą dodatnią. Mamy

$$\varphi(n)=0 \qquad (0\leqq n<1/\alpha)$$
$$\varphi(n)=1 \qquad (1/\alpha\leqq n<2/\alpha)$$

itd., zatym $\varphi(n)\to+\infty$.

5. Jeżeli $\varphi(n)=1000000/n$, to $\lim\varphi(n)=0$, jeżeli zaś $\psi(n)=n/1000000$, wówczas $\psi(n)\to+\infty$. Zauważmy, że aż do $n=1000000$, $\varphi(n)$ ma większe wartości niż $\psi(n)$.

6. $\varphi(n)=1/\{n-(-1)^n\}$; $\varphi(n)=n-(-1)^n$, $\varphi(n)=n\{1-(-1)^n\}$. Pierwsza funkcja dąży do 0, druga do $+\infty$, trzecia nie dąży do żadnej granicy ani też do $+\infty$.

7. $\varphi(n)=(\sin n\vartheta\pi)/n$, gdzie ϑ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Ponieważ $|\sin n\vartheta\pi|\leqq 1$, zatym $|\varphi(n)|<1/n$ i $\lim\varphi(n)=0$.

8. $\varphi(n)=(\sin n\vartheta\pi)/\sqrt{n}$; $\varphi(n)=(\sin n\vartheta\pi)/n^2$; $\varphi(n)=(a\cos^2 n\vartheta+b\sin^2 n\vartheta)/n$, gdzie a, b są dowolnemi liczbami rzeczywistemi.

9. $\varphi(n)=\sin n\vartheta\pi$. Jeżeli ϑ jest dowolną liczbą całkowitą, wówczas $\varphi(n)=0$ przy wszelkich wartościach n, zatym $\lim\varphi(n)=0$.

Przypuśćmy, że ϑ jest liczbą wymierną, np. $\vartheta=p/q$, gdzie p, q są dowolnemi liczbami całkowitemi dodatniemi. Niech będzie $n=aq+b$, czyli a niech będzie ilorazem, b zaś resztą od dzielenia n przez q. W takim razie $\sin(np\pi/q)=(-1)^{ap}\sin(bp\pi/q)$.

Przypuśćmy np., że p jest liczbą parzystą; gdy n rośnie od 0 do $q-1$, funkcja $\varphi(n)$ przybiera wartości

$$0,\quad \sin(p\pi/q),\quad \sin(2p\pi/q), \ldots \sin\{(q-1)p\pi/q\}.$$

Gdy n rośnie od q do $2q-1$, powyższe wartości funkcji $\varphi(n)$ powtarzają się; to samo dzieje się wówczas, gdy n zmienia się od $2q$ do $3q-1$, od $3q$ do $4q-1$ itd. Tak więc wartości funkcji $\varphi(n)$ tworzą *nieskończenie wiele cyklów powtarzających się liczb, przyczym każdy cykl składa się z skończonej liczby różnych wartości.* Rzecz jasna, że wobec tego $\varphi(n)$ nie może dążyć ani do oznaczonej granicy, ani do $+\infty$, ani do $-\infty$, gdy n dąży do nieskończoności.

Przypadek, w którym ϑ jest liczbą niewymierną, jest nieco trudniejszy do zbadania. Zajmiemy się nim w następnej grupie przykładów.

55. Funkcje wahające się (oscylujące). OKREŚLENIE. *Gdy n dąży do ∞, funkcja zaś $\varphi(n)$ nie dąży ani do oznaczonej* *granicy, ani do* $+\infty$, *ani do* $-\infty$, *wówczas powiadamy, że* $\varphi(n)$ **oscyluje** (albo: **waha się**).

Funkcja $\varphi(n)$ niewątpliwie waha się, jeżeli wartości jej tworzą, jak w ostatnim przykładzie, cykle powtarzających się liczb, ale rzecz jasna, że funkcja może wahać się, pomimo, że nie posiada tej szczególnej własności. Określiliśmy oscylowanie funkcji jako własność **wyłącznie negatywną**: funkcja oscyluje (waha się), jeżeli nie zachowuje się w pewien sposób, przewidziany w określeniach I i II.

Funkcja $\varphi(n)=(-1)^n$ jest najprostszym przykładem funkcji wahającej się; przybiera ona dwie tylko różne wartości $+1$ i -1, które tworzą cykl. Weźmy teraz pod uwagę funkcję

$$\varphi(n)=(-1)^n+(1/n).$$

Przybiera ono wartości

$$-1+1,\quad 1+\tfrac{1}{2},\quad -1+\tfrac{1}{3},\quad 1+\tfrac{1}{4},\quad -1+\tfrac{1}{5},\ldots$$

Gdy n jest bardzo dużą liczbą, każda wartość funkcji jest bardzo bliska do $+1$ lub do -1; rzecz oczywista, że $\varphi(n)$ nie dąży do żadnej oznaczonej granicy, ani do $+\infty$, ani też do $-\infty$, zatym funkcja $\varphi(n)$ waha się, wartości jej jednak nie powtarzają się. Zauważmy, że wartość liczbowa $\varphi(n)$ jest zawsze równa lub mniejsza od $^3/_2$.

Funkcja $$\varphi(n)=(-1)^n 100+\frac{1000}{n}$$

oscyluje. Przy dostatecznie wielkim n, wartość funkcji jest prawie równa $+100$ lub -100. Największa wartość liczbowa funkcji jest 900 (przy $n=1$). A teraz porównajmy z nią funkcję $\varphi(n)=(-1)^n.\,n$, która przybiera wartości $-1, 2, -3, 4, -5,\ldots$ Znów mamy do czynienia z funkcją wahającą się, gdyż nie dąży ona ani do oznaczonej granicy, ani do $+\infty$, ani do $-\infty$. Ale w tym wypadku nie możemy wskazać liczby, której nie przekroczyłyby wartości bezwzględne funkcji. To spostrzeżenie prowadzi do następującego określenia:

Określenie. *Jeżeli* $\varphi(n)$ *waha się, gdy* n *dąży do* ∞, *powiadamy, że wahania funkcji są* **skończone lub nieskończone**, *zależnie od tego, czy możemy czy też nie możemy znaleźć takiej liczby* K, *by było* $|\varphi(n)| < K$ *przy wszelkich wartościach* n.

Następujące przykłady posłużą do wyjaśnienia zarówno tych określeń, jak określeń § 53-go.

Przykłady XXVII. Zbadać, jak zachowują się następujące funkcje, gdy n dąży do ∞.

1. $(-1)^n$, $5+3(-1)^n$, $(100000/n)+(-1)^n$. $100000(-1)^n+(1/n)$.

2. $(-1)^n . n$, $100000+(-1)^n . n$.

3. $1000000-n$, $(-1)^n . (1000000-n)$.

4. $n . \{1+(-1)^n\}$. W tym przypadku $\varphi(n)$ przybiera wartości

$$0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, 16 \ldots$$

Wyrazy nieparzyste tego ciągu wszystkie równają się zeru, wyrazy zaś parzyste dążą do $+\infty$, wobec czego wahania funkcji $\varphi(n)$ są nieskończone.

5. $n^2+(-1)^n . 2n$. Drugi wyraz wykonywa wahania nieskończone, ale przy dużych wartościach na n pierwszy wyraz jest o wiele większy od drugiego. Istotnie, $\varphi(n) \geqq n^2-n$, ponieważ zaś $n^2-2n=(n-1)^2-1$ jest większe od każdej dowolnie zadanej liczby G, jeżeli tylko $n>1+\sqrt{G+1}$, zatym $\varphi(n) \rightarrow +\infty$.

Zauważmy, że $\varphi(2k+1)$ jest mniejsze od $\varphi(2k)$, wobec czego $\varphi(n)$ dąży do $+\infty$, robiąc, jeśli można się tak wyrazić, po kolei krok naprzód i krok wstecz. Niemniej jednak nie wolno $\varphi(n)$ nazywać funkcją oscylującą, gdyż nie byłoby to zgodne z naszym określeniem oscylacji.

6. $n^3+(-1)n^2$, $n^2\{1+(-1)^n\}$, $(-1)^n . n^2+n$.

7. $11+3.(-1)^n$, $(11/n)+3.(-1)^n$, $11n+3.(-1)^n$, $11+\dfrac{3.(-1)^n}{n}$

$11+3n(-1)^n$, $\{11+3.(-1)^n\}/n$, $\{11+3.(-1)^n\}n$, $(11/n)+3n.(-1)^n$, $11n+\dfrac{3(-1)^n}{n}$.

8. $\operatorname{Sin} n\vartheta\pi$. Widzieliśmy już (Przykł. XXVI, 9), że gdy ϑ jest liczbą całkowitą, wówczas $\varphi(n)=0$, zatym $\varphi(n) \rightarrow 0$, gdy zaś ϑ jest liczbą wymierną ułamkową, $\varphi(n)$ wykonywa wahania skończone.

Nieco trudniejszy do zbadania jest przypadek, w którym ϑ jest liczbą niewymierną. Ale i tu łatwo można zauważyć, że $\varphi(n)$ wykonywa wahania skończone. Nie zmniejszając ogólności rozumowań, możemy założyć, że $0<\vartheta<1$. Przedewszystkim, $|\varphi(n)|<1$, zatym $\varphi(n)$ albo dąży do granicy, albo wykonywa wahania skończone. Zbadajmy, czy pierwsza ewentualność istotnie może mieć miejsce. Przypuśćmy, że

$$\lim \sin n\vartheta\pi = l.$$

W takim razie, do każdej dowolnie małej liczby dodatniej ε możemy dobrać taką liczbę n_0, żeby przy wszelkim n większym od n_0 lub równym n_0, $\sin n\vartheta\pi$ zawierało się między $l-\varepsilon$ i $l+\varepsilon$. Przy każdej takiej wartości na n wartość bezwzględna różnicy $\sin(n+1)\vartheta\pi-\sin n\vartheta\pi$ musiałaby być mniejsza od 2ε, mielibyśmy więc

$$|\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\pi\,.\cos(n+\tfrac{1}{2})\vartheta\pi|<\varepsilon.$$

Stąd wynika, że

$$|\cos(n+\tfrac{1}{2})\vartheta\pi|<\frac{\varepsilon}{|\sin\frac{1}{2}\vartheta\pi|}.$$

W taki sam sposób dochodzimy do wniosku, że

$$|\cos(n-\tfrac{1}{2}\vartheta\pi)|<\frac{\varepsilon}{|\sin\frac{1}{2}\vartheta\pi|},$$

a ponieważ

$$\cos(n+\tfrac{1}{2})\vartheta\pi=\cos n\vartheta\pi\,.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\pi-\sin n\vartheta\pi\,.\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\pi,$$

$$\cos(n-\tfrac{1}{2})\vartheta\pi=\cos n\vartheta\pi\,.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\pi+\sin n\vartheta\pi\,.\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\pi,$$

przeto musi być

zarówno $|\cos n\vartheta\pi\,.\cos\frac{1}{2}\vartheta\pi|<\dfrac{\varepsilon}{|\sin\frac{1}{2}\vartheta\pi|}$, jak $|\sin n\vartheta\pi\,.\sin\frac{1}{2}\vartheta\pi|<\dfrac{\varepsilon}{|\sin\frac{1}{2}\vartheta\pi|}$.

Tak więc, jeżeli n jest dużą liczbą, $\cos n\vartheta\pi\cos\frac{1}{2}\vartheta\pi$ musi być bardzo małą liczbą, co jest możliwe tylko wówczas, gdy $\cos n\vartheta\pi$ jest bardzo małą liczbą. Z ostatniej nierówności wnosimy, że przy dużych wartościach na n, $\sin n\vartheta\pi$ musi być bardzo małą liczbą (t. j. granica l musi być zerem). Otóż te dwa wnioski są sprzeczne: $\cos n\vartheta\pi$ i $\sin n\vartheta\pi$ nie mogą być jednocześnie bardzo małemi liczbami, gdyż suma ich kwadratów równa się 1. Musimy tedy odrzucić hipotezę, że $\sin n\vartheta\pi$ dąży do granicy l, i uznać, że $\sin n\vartheta\pi$ wykonywa wahania skończone, gdy n dąży do ∞.

Czytelnik powinien dobrze rozważyć użyty przez nas argument: „$\cos n\vartheta\pi\cos\frac{1}{2}\vartheta\pi$ jest bardzo małą liczbą, co jest możliwe tylko wówczas, gdy $\cos n\vartheta\pi$ jest bardzo małą liczbą". Dlaczego drugi czynnik, t. j. $\cos\frac{1}{2}\vartheta\pi$ nie mógłby być „bardzo małą liczbą"? Odpowiedzi szukać należy w znaczeniu, które nadajemy wyrazom „bardzo mały". Mówiąc: „$\varphi(n)$ jest bardzo małą liczbą, gdy n jest dużą liczbą", chcemy powiedzieć: „do każdej zgóry zadanej dowolnie małej liczby ε możemy dobrać taką liczbę n_0, że przy $n\geqq n_0$ wartości bezwzględne funkcji $\varphi(n)$ są mniejszą od ε". Otóż rzecz jasna, że nie można takiego orzeczenia zastosować do stałej liczby, różnej od zera, jaką jest $\cos\frac{1}{2}\vartheta\pi$.

9. $\sin n\vartheta\pi+(1/n)$, $\sin n\vartheta\pi+(100000/n)$, $\sin n\vartheta\pi+1$, $\sin n\vartheta\pi+n$, $(-1)^n\sin n\vartheta\pi$, $\sin n\vartheta\pi+(-1)^n$, $\sin n\vartheta\pi+\dfrac{(-1)^n}{n}$, $\sin n\vartheta\pi+(-1)^n n$.

10. $a\cos n\vartheta\pi+b\sin n\vartheta\pi$, $\sin^2 n\vartheta\pi$, $\cos^2 n\vartheta\pi$, $a\cos^2 n\vartheta\pi+b\sin^2 n\vartheta\pi$.

11. $a+bn+(-1)^n(c+dn)+e\cos n\vartheta\pi+f\sin n\vartheta\pi$.

12. $n\sin n\vartheta\pi$. Przy n całkowitym, $\varphi(n)=0$, zatym $\varphi(n)\to 0$. Jeżeli n jest liczbą wymierną ułamkową albo też liczbą niewymierną, $\varphi(n)$ wykonywa wahania nieskończone.

13. $n(a\cos^2 n\vartheta\pi+b\sin^2 n\vartheta\pi)$. Jeżeli a i b są liczbami dodatniemi, $\varphi(n)\to+\infty$; jeżeli a i b są liczbami ujemnemi, $\varphi(n)\to-\infty$. Zbadać szczególne przypadki, gdy $a=0$, $b>0$, albo gdy $a>0$, $b=0$, albo wreszcie gdy

$a=0$, $b=0$. Jeżeli a i b mają różne znaki, wówczas $\varphi(n)$ w ogólności wykonywa nieskończone wahania. Zbadać jakikolwiek szczególny przypadek, mogący tu zachodzić.

14. $\sin(n^2\vartheta\pi)$. Jeżeli ϑ jest liczbą całkowitą, wówczas $\varphi(n)\to 0$. W innych wypadkach $\varphi(n)$ wykonywa wahania skończone, co daje się dowieść metodą, analogiczną do użytej w Przykł. XXVI. 9 i Przykł. XXVII.8.

15. $\sin(n!\vartheta\pi)$. Jeżeli ϑ jest jakąkolwiek liczbą wymierną p/q, wówczas przy $n \geqq q$ musi być niewątpliwie $n!\vartheta$ liczbą całkowitą, zatym $\varphi(n)\to 0$. Przypadek, gdy ϑ jest niewymierne, nie da się rozstrzygnąć w sposób elementarny.

16. $\cos(n!\vartheta\pi)$, $a\cos^2(n!\vartheta\pi)+b\sin^2(n!\vartheta\pi)$, gdzie ϑ jest liczbą wymierną.

17. $an-[bn]$, $(-1)^n(an-[bn])$.

18. $[\sqrt{n}]$, $(-1)^n[\sqrt{n}])$, $\sqrt{n}-[\sqrt{n}]$.

19. $\varphi(n)=$*najmniejszy czynnik pierwszy liczby* n. Jeżeli n jest liczbą pierwszą, $\varphi(n)=n$. Jeżeli n jest parzyste $\varphi(n)=2$. Tak więc $\varphi(n)$ wykonywa wahania nieskończone.

20. $\varphi(n)=$*największy czynnik pierwszy liczby* n.

21. $\varphi(n)=$*liczba dni w roku* n *po Chr.*

Przykłady XXVIII. 1. Jeżeli $\varphi(n)\to+\infty$, a przy wszelkich wartościach n mamy $\psi(n)\geqq\varphi(n)$, wówczas musi być $\psi(n)\to+\infty$.

2. Jeżeli $\varphi(n)\to 0$, a zarazem przy wszelkich wartościach n mamy $|\psi(n)|\leqq|\varphi(n)|$, wówczas $\psi(n)\to 0$.

3. Jeżeli mamy $|\varphi(n)|=0$, wówczas musi być również $\lim\varphi(n)=0$.

4. Jeżeli $\varphi(n)$ albo dąży do granicy, albo wykonywa wahania skończone, i jeżeli przy $n\geqq n_0$ mamy $|\psi(n)|\leqq|\varphi(n)|$, wówczas $\psi(n)$ albo dąży do granicy, albo wykonywa wahania skończone.

5. Jeżeli $\varphi(n)\to+\infty$ albo też $\varphi(n)\to-\infty$, albo wreszcie $\varphi(n)$ wykonywa wahania nieskończone, i jeżeli przy $n\geqq n_0$ mamy $|\psi(n)|\geqq|\varphi(n)|$ wówczas $\psi(n)$ albo dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$, albo też wykonywa wahania nieskończone.

6. Czy jest prawdą następujące twierdzenie: „jeżeli $\varphi(n)$ oscyluje i jeżeli dla dowolnie wielkiego n_0 możemy znaleźć takie $n=n_0$, przy którym $\psi(n)>\varphi(n)$ jak również takie $n>n_0$, przy których $\psi(n)<\varphi(n)$, wówczas $\psi(n)$ oscyluje“? Jeżeli twierdzenie nie jest słuszne, wykazać to na przykładzie. [$\varphi(n)=(-1)^n$, $\psi(n)=0$].

7. Jeżeli $\varphi(n)\to l$, gdy $n\to\infty$, wówczas $\varphi(n+p)\to l$, jeżeli p jest dowolną liczbą stałą. [Wynika to odrazu z określenia granicy. Jeżeli $\varphi(n)\to+\infty$ lub $\varphi(n)\to-\infty$ albo też, jeżeli $\varphi(n)$ oscyluje, to samo powiedzieć można o funkcji $\varphi(n+p)$.]

8. Do takich samych wniosków dojdziemy (z wyjątkiem przypadku funkcji oscylujących), jeżeli założymy, że p jest liczbą zmienną, lecz mniejszą, co do wartości bezwzględnej, od stałej liczby dodatniej N, albo

też, że p jest liczbą dodatnią, zresztą zmieniającą się w dowolny sposób w zależności od zmian liczby n.

9. Wyznaczyć najmniejsze wartości na n_0, przy których zachodzić mogą nierówności:

(a) $n^2+n>1000 \quad (n \geqq n_0)$, (b) $n^2+n>1000000 \quad (n \geqq n_0)$.

10. Wyznaczyć najmniejsze wartości na n_0, przy których zachodzić mogą nierówności:

(a) $n+(-1)^n>1000 \quad (n \geqq n_0)$, (b) $n+(-1)^n>1000000 \quad (n \geqq n_0)$.

11. Niech będzie G dana, zresztą dowolna liczba dodatnia; wyznaczyć najmniejsze wartości na n_0, przy których zachodzić mogą nierówności

(a) $n^2+n>G \quad (n \geqq n_0)$, (b) $n+(-1)^n>G \quad (n \geqq n_0)$.

[W przypadku (a) mamy $n_0=[\frac{1}{2}+\sqrt{G+\frac{1}{4}}]$, w przypadku zaś (b) mamy $n_0=1+[G]$ albo też $n_0=2+[G]$, zależnie od tego, czy $[G]$ jest liczbą nieparzystą czy parzystą, czyli mamy $n_0=1+[G]+\frac{1}{2}\{1+(-1)^{[G]}\}$.]

12. Wyznaczyć najmniejszą wartość na n_0, przy której zachodzić mogą nierówności

(a) $n/(n^2+1)<0{\cdot}0001$, (b) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}<0.000001$ przy $(n \geqq n_0)$.

[W przypadku (b) mamy

$$\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2} \leqq \frac{n+1}{n^2}.$$

Otóż przy $n \geqq n_0$ wystarczy wziąć $n_0=1000002$, by było $\dfrac{n+1}{n^2}<0.000001$, ale dla danej nierówności, jak łatwo przekonać się, wystarczy wziąć $n_0=1000001$.]

56. Niektóre twierdzenia ogólne dotyczące granic. A. Zachowanie się sumy dwuch funkcji, których zachowanie się jest znane.

Twierdzenie I. *Jeżeli $\varphi(n)$ i $\psi(n)$ dążą odpowiednio do granic a i b, wówczas funkcja $\varphi(n)+\psi(n)$ dąży do granicy $a+b$.*

Twierdzenie to jest niemal oczywiste*). Rozumowanie, któ-

---

*) Zdanie to jest dwuznaczne. Istotnie, orzeczenie: „dane twierdzenie jest oczywiste" może mieć dwojaki sens. Może ono znaczyć tyleż, co: „trudno wątpić o prawdziwości tego twierdzenia", „zdrowy rozsądek lub intuicja wskazują, że twierdzenie jest słuszne". Przykładem takich „oczywistych" twierdzeń może być: „2+2=4", „kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego równają się sobie". Otóż takie „oczywiste" twierdzenia nie zawsze bywają prawdziwe, gdyż intuicja nieraz wprowadza nas w błąd. Zresztą i wówczas, gdy twierdzenia te są prawdziwe, niema powodu nie dowodzić ich, a nawet dowód może być sam przez się

re niewątpliwie przyjdzie odrazu na myśl czytelnikowi, jest następujące: „gdy n jest dużą liczbą, $\varphi(n)$ mało różni się od a, $\psi(n)$ mało różni się od b, zatym suma tych funkcji mało różni się od $a+b$". Należy jednak rozumowanie to przeprowadzić szczegółowo i z należytą ścisłością.

Niech będzie δ jakakolwiek z góry zadana liczba dodatnia (np. 0·0001, 0·0000001,...). Chcemy dowieść, że można znaleźć taką liczbę n_0, iż przy każdym $n \geq n_0$ będziemy mieli

$$|\varphi(n)+\psi(n)-a-b|<\delta \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

W rozdziale III dowiedliśmy, że moduł sumy dwuch liczb jest niewiększy od sumy ich modułów, zatym

$$|\varphi(n)+\psi(n)-a-b| \leqq |\varphi(n)-a|+|\psi(n)-b|.$$

Widzimy tedy, że nierówności (1) uczynimy zadość, jeżeli uda się nam znaleźć taką liczbę n_0, by przy $n \geqq n_0$ było

$$|\varphi(n)-a|+|\psi(n)-b|<\delta \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Otóż to jest zupełnie możliwe. Istotnie, założyliśmy, że $\lim \varphi(n)=a$, zatym z określenia granicy wynika, że możemy znaleźć taką liczbę n_1, by przy każdym $n \geqq n_1$ zachodziła nierówność $|\varphi(n)-a|<\delta'$, jakkolwiek małą liczbą dodatnią byłoby δ'. Możemy wziąć $\delta'=\frac{1}{2}\delta$, wobec czego przy $n \geqq n_1$ będziemy mieli nierówność $|\varphi(n)-a|<\frac{1}{2}\delta$. Tak samo możemy znaleźć taką liczbę n_2, by przy $n \geqq n_2$ zachodziła nierówność $|\psi(n)-b|<\frac{1}{2}\delta$. Teraz wystarczy założyć, że n_0 równa się większej z dwuch liczb n_1 i n_2. Przy tym założeniu, dla każdego $n \geqq n_0$ będziemy mieli jednocześnie

$$|\varphi(n)-a|<\tfrac{1}{2}\delta \quad \text{i} \quad |\psi(n)-b|<\tfrac{1}{2}\delta.$$

a stąd wynika odrazu nierówność (2).

---

bardzo ciekawy. Matematyka ma za zadanie wykazać, że z pewnych przesłanek wynikają pewne wnioski; może się przytym zdarzyć, że wnioski są nie mniej „oczywiste" od przesłanek, to jednak nie zwalnia nas od obowiązku podania szczegółowego dowodu tych wniosków.

W naszym przykładzie wyraz „oczywisty" został użyty w innym sensie. Zdanie: „dane twierdzenie jest oczywiste" może oznaczać tyleż, co: „chwila zastanowienia wystarczy do naszkicowania ścisłego dowodu". Jeżeli twierdzenie jest „oczywiste" w tym drugim znaczeniu, można czasem opuścić dowód, nie dlatego jednak, żeby dowód był wogóle zbyteczny, lecz jedynie w celu zaoszczędzenia czasu i miejsca, jeżeli jesteśmy pewni, że czytelnik potrafi sam znaleźć ten dowód.

Rozumowanie nasze da się streścić w następujący sposób: ponieważ $\lim\varphi(n)=a$ i $\lim\psi(n)=b$, zatym możemy znaleźć takie liczby n_1, n_2, by było

$$|\varphi(n)-a|<\tfrac{1}{2}\delta \quad (n \geqq n_1) \quad \text{oraz} \quad |\psi(n)-b|<\tfrac{1}{2}\delta \quad (n \geqq n_2),$$

jeśli więc n jest większe od każdej z liczb n_1, n_2, wówczas musi być

$$|\varphi(n)+\psi(n)-a-b| \leqq |\varphi(n)-a|+|\psi(n)-b|<\delta$$

zatym
$$\lim\{\varphi(n)+\psi(n)\}=a+b.$$

Czytelnikowi może się wydawać, że rozumowanie nasze, nawet w tej skróconej postaci, jest przejawem pedantyzmu i dążenia do stwarzania trudności tam, gdzie sprawa przedstawia się prosto i jasno. Nie przeczę, że otrzymany wynik jest w danym wypadku istotnie oczywisty, ale czytelnik powinien uprzytomnić sobie, że mamy do czynienia z jednym z najważniejszych i najbardziej podstawowych twierdzeń matematycznych: każdy matematyk codziennie posługuje się nim, świadomie lub nieświadomie. Otóż takiego twierdzenia należy dowieść w sposób bezwzględnie jasny, ścisły i drobiazgowy: wszystko, co mogłoby później wywołać nieporozumienie lub gmatwaninę pojęć, winno być z góry usunięte. Ale nie dość tego. Czytelnik wkrótce przekona się, że większość twierdzeń o granicach nie jest wcale tak prosta i oczywista, jak powyższe twierdzenie. W danym przypadku rozwiązanie, wskazane przez zdrowy rozsądek, było prawdziwe, w innych jednak przypadkach „zdrowy rozsądek“ nasuwa nam zarówno poprawne, jak i mylne rozwiązania, a czasem nie daje żadnych wskazówek. Wszelkie argumenty oparte na ogólnikach nietylko są nieużyteczne, ale prowadzą do grubych błędów i wywołują zupełne pomieszanie pojęć. Jeżeli czytelnik nie zada sobie trudu zbadania i zrozumienia, w jaki sposób stosuje się ściste metody do prostych i jasnych przypadków, gdzie zastosowanie tych metod jest rzeczą łatwą, w takim razie, gdy natrafi na zagadnienia trudniejsze, nie będzie mógł sobie dać z niemi rady.

57. Wnioski z Twierdzenia I. Czytelnik sprawdzi z łatwością następujące wnioski:

1. *Jeżeli* $\varphi(n)$ *dąży do granicy, funkcja zaś* $\psi(n)$ *dąży do* $+\infty$ *lub do* $-\infty$, *albo też wykonywa wahania skończone lub nieskończone, wówczas* $\varphi(n)+\psi(n)$ *zachowuje się tak, jak* $\psi(n)$.

2. *Jeżeli* $\varphi(n)\to+\infty$ *i* $\psi(n)\to+\infty$, *albo też jeżeli* $\varphi(n)\to+\infty$, *a* $\psi(n)$ *wykonywa wahania skończone, wówczas* $\varphi(n)+\psi(n)\to+\infty$.

Oczywista rzecz, że w tym wniosku możemy wszędzie zastąpić $+\infty$ przez $-\infty$.

3. *Jeżeli* $\varphi(n)\to\infty$, *a* $\psi(n)\to-\infty$, *wówczas* $\varphi(n)+\psi(n)$ *może dążyć do oznaczonej granicy, albo do* $+\infty$, *albo do* $-\infty$, *albo wreszcie może wykonywać wahania skończone lub nieskończone.*

Te pięć możliwych przypadków zilustrujemy następującemi przykładami: (1) $\varphi(n)=n$, $\psi(n)=-n$; (2) $\varphi(n)=n^2$, $\psi(n)=-n$; (3) $\varphi(n)=n$. $\psi(n)=-n^2$; (4) $\varphi(n)=n+(-1)^n$, $\psi(n)=-n$; (5) $\varphi(n)=n^2+(-1)^n.n$, $\psi(n)=-n^2$. Czytelnik powinien sam znaleźć inne przykłady.

4. *Jeżeli* $\varphi(n)\to+\infty$, *a* $\psi(n)$ *wykonywa wahania nieskończone, wówczas* $\varphi(n)+\psi(n)$ *może albo dążyć do* $+\infty$, *albo też wykonywać wahania nieskończone, ale nie może dążyć do oznaczonej granicy, ani też do* $-\infty$, *ani wreszcie nie może wykonywać wahań skończonych.*

Istotnie, $\psi(n)=\{\varphi(n)+\psi(n)\}-\varphi(n)$, gdyby więc funkcja $\varphi(n)+\psi(n)$ zachowywała się w jeden z trzech ostatnich sposobów, wówczas, na mocy poprzednich wniosków, mielibyśmy: $\psi(n)\to-\infty$, co przeczy założeniu. Jako przykłady dwuch możliwych przypadków, podajemy następujące: (1) $\varphi(n)=n^2$, $\psi(n)=(-1)^n.n$; (2) $\varphi(n)=n$, $\psi(n)=(-1)^n.n^2$. Rzecz jasna, że w niniejszym twierdzeniu można wszędzie zastąpić $+\infty$ przez $-\infty$.

5. *Jeżeli* $\varphi(n)$ *i* $\psi(n)$ *wykonywują wahania skończone, wówczas* $\varphi(n)+\psi(n)$ *albo dąży do granicy, albo wykonywa wahania skończone.*

Przykłady: (1) $\varphi(n)=(-1)^n$, $\psi(n)=(-1)^{n+1}$; (2) $\varphi(n)=\psi(n)=(-1)^n$.

6. *Jeżeli* $\varphi(n)$ *wykonywa wahania skończone, a* $\psi(n)$ *nieskończone, wówczas* $\varphi(n)+\psi(n)$ *wykonywa wahania nieskończone.*

Istotnie, wartość bezwzględna funkcji $\varphi(n)$ jest zawsze mniejsza od pewnej stałej K, natomiast $\psi(n)$ musi przybierać wartości liczbowe większe od każdej dowolnie zadanej liczby (np. większe od $100K$, $1000K$,...), Zatym funkcja $\varphi(n)+\psi(n)$ musi przybierać wartości liczbowe większe od każdej dowolnie zadanej liczby (np. większe od $99K$, $999K$...). Tak więc $\varphi(n)+\psi(n)$ albo dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$, albo też wykonywa wahania nieskończone. Gdyby jednak funkcja ta dążyła do $+\infty$, wówczas funkcja

$$\psi(n)=\{\varphi(n)+\psi(n)\}-\varphi(n)$$

musiałaby również dążyć do $+\infty$, na mocy poprzedniego wniosku. Widzimy tedy, że funkcja $\varphi(n)+\psi(n)$ nie może dążyć do $+\infty$. W taki sam sposób łatwo wykazać, że nie dąży ona do $-\infty$, zatym musi wykonywać wahania nieskończone.

7. *Jeżeli zarówno* $\varphi(n)$, *jak* $\psi(n)$ *wykonywują wahania nieskończone, wówczas* $\varphi(n)+\psi(n)$ *może dążyć do oznaczonej granicy albo do* $+\infty$, *albo do* $-\infty$, *ale może również wykonywać wahania czy to skończone, czy nieskończone.*

Przypuśćmy np., że $\varphi(n)=(-1)^n.n$, na $\psi(n)$ zaś weźmy po kolei każdą z następujących funkcji: $(-1)^{n+1}.n$, $\{1+(-1)^{n+1}\}.n$, $-\{1+(-1)^n\}.n$, $(-1)^{n+1}.(n+1)$, $(-1)^n.n$. Otrzymamy w ten sposób wszystkie pięć możliwych przypadków.

Z łatwością można wszystkie te wnioski uogólnić na przypadek sumy kilku funkcji, dążących każda do granicy, gdy $n \to \infty$.

58. B. Zachowanie się iloczynu dwuch funkcji, których zachowanie się jest znane. Możemy dowieść całego szeregu twierdzeń, zupełnie analogicznych do poprzednich. Najważniejsze z nich jest następujące:

Twierdzenie II. *Jeżeli* $\lim \varphi(n) = a$, $\lim \psi(n) = b$, *wówczas*

$$\lim \varphi(n).\psi(n) = ab.$$

Niech będzie $\varphi(n) = a + \varphi_1(n)$, $\psi(n) = b + \psi_1(n)$, wobec czego musi być $\lim \varphi_1(n) = 0$, $\lim \psi_1(n) = 0$.

W takim razie mamy

$$\varphi(n)\psi(n) = ab + a\psi_1(n) + b\varphi_1(n) + \varphi_1(n)\psi_1(n),$$

skąd widać odrazu, że wartość bezwzględna różnicy $\varphi(n)\psi(n) - ab$ napewno nie jest większa od sumy wartości bezwzględnych $|a\psi_1(n)| + |b\varphi_1(n)| + |\varphi_1(n).\psi_1(n)|$.

Obierzmy n_0 tak, by przy każdym $n \geqq n_0$ było

$$|\varphi_1(n)| < \frac{\delta}{3|b|}, \quad |\psi_1(n)| < \frac{\delta}{3|a|}.$$

Wówczas mamy $|\varphi(n).\psi(n) - ab| < \dfrac{\delta}{3} + \dfrac{\delta}{3} + \dfrac{\delta^2}{9|a.b|}$.

Jeśli więc $\delta < \dfrac{1}{3|a.b|}$, wówczas niewątpliwie musi być

$$|\varphi(n).\psi(n) - ab| < \delta$$

przy każdym $n \geqq n_0$, i twierdzenie zostało dowiedzione.

Rzecz jasna, że twierdzenie II, tak samo jak twierdzenie I, da się uogólnić na przypadek iloczynu kilku funkcji zmiennej n. Można też otrzymać cały szereg wniosków, analogicznych do wniosków poprzedniego paragrafu, musimy tu jednak rozróżniać już nie pięć, lecz s z e ś ć możliwych sposobów zachowania się funkcji $\varphi(n)$, gdy $n \to \infty$.

Mianowicie $\varphi(n)$ może (1) dążyć do zera, (2) dążyć do granicy różnej od zera, (3a) dążyć do $+\infty$, (3b) dążyć do $-\infty$, (4) wykonywać wahania skończone, (5) wykonywać wahania nieskończone.

Dowód wszystkich wniosków wymagałby zbyt wiele miejsca, wobec czego poprzestaniemy na sformułowaniu dwuch z nich dla przykładu; resztę czytelnik zbada sam, co będzie stanowiło doskonałe ćwiczenie.

(I) *Jeżeli* $\varphi(n) \to +\infty$, *a* $\psi(n)$ *wykonywa wahania skończone, wówczas iloczyn* $\varphi(n).\psi(n)$ *albo dąży do* $+\infty$ *lub do* $-\infty$, *albo też wykonywa wahania nieskończone.*

Łatwo znaleźć przykłady tych trzech możliwych przypadków. Wystarczy np. założyć, że $\varphi(n)=n$ i że $\psi(n)$ równa się jednej z trzech następujących funkcji: $2+(-1)^n$, $-2-(-1)^n$, $(-1)^n$.

(II) *Jeżeli* $\varphi(n)$ *i* $\psi(n)$ *wykonywują wahania skończone, wówczas iloczyn* $\varphi(n).\psi(n)$ *albo dąży do oznaczonej granicy* (*którą w szczególnym przypadku może być zero*), *albo wykonywa wahania skończone.*

Jako przykłady podajemy: (a) $\varphi(n)=\psi(n)=(-1)^n$; (b) $\varphi(n)=1+(-1)^n$, $\psi(n)=1-(-1)^n$; (c) $\varphi(n)=\cos\frac{n\pi}{3}$, $\psi(n)=\sin\frac{n\pi}{3}$.

Ważny przypadek szczególny twierdzenia II mamy wówczas, gdy $\psi(n)$ równa się stałej. Twierdzenie nasze orzeka wtedy, że jeśli $\lim\varphi(n)=a$, wówczas $\lim k\varphi(n)=ka$. Możemy dołączyć do tego twierdzenie, że jeśli $k\neq 0$ i $\varphi(n)\to+\infty$, wówczas $k\varphi(n)\to+\infty$ lub też $k\varphi(n)\to-\infty$ zależnie od tego, czy k jest liczbą dodatnią czy ujemną. Jeżeli $k=0$, wówczas $k\varphi(n)=0$ przy wszelkich wartościach na n, zatym $\lim k\varphi(n)=0$. Jeżeli $k\neq 0$, a $\varphi(n)$ wykonywa wahania skończone lub nieskończone, wówczas w taki sam sposób waha się funkcja $k\varphi(n)$.

59. C. Zachowanie się ilorazu dwuch funkcji, których zachowanie się jest znane. Z poprzednich twierdzeń wynika szereg wniosków, dotyczących ilorazu dwuch funkcji. Zaczniemy od następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE III. *Jeżeli* $\lim\varphi(n)=a$, *przyczym* $a\neq 0$, *wówczas*

$$\lim\frac{1}{\varphi(n)}=\frac{1}{a}.$$

Niech będzie
$$\varphi(n)=a+\varphi_1(n),$$
tak iż $\lim\varphi_1(n)=0$. Mamy

$$\left|\frac{1}{\varphi(n)}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{\varphi_1(n)}{a.a+\varphi_1(n)}\right|.$$

Możemy obrać taką liczbę n_0, że dla każdego $n\geqq n_0$ powyższy ułamek będzie mniejszy od dowolnie małej, z góry zadanej liczby dodatniej δ.

Z Twierdzeń II i III wynika odrazu podstawowe dla ilorazów

Twierdzenie IV. *Jeżeli* $\lim\varphi(n)=a$ *i* $\lim\psi(n)=b$, *przyczym* $b\neq 0$, *wówczas*

$$\frac{\lim\varphi(n)}{\lim\psi(n)}=\frac{a}{b}.$$

Radzimy czytelnikowi, by sformułował sam wynikające stąd wnioski, analogicznie do wniosków z twierdzeń I i II, żeby dowiódł ich i poparł odpowiedniemi przykładami.

60. Twierdzenie V. *Jeżeli* $R\{\varphi(n), \psi(n), \chi(n),....\}$ *jest dowolną funkcją wymierną kilku funkcji* $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $\chi(n)...$, *czyli jeśli jest to funkcja kształtu*

$$\frac{P\{\varphi(n), \psi(n), \chi(n),...\}}{Q\{\varphi(n), \psi(n), \chi(n),...\}},$$

gdzie P i Q oznaczają wielomiany, utworzone z funkcji $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $\chi(n),...$ *i jeżeli mamy*

$$\lim\varphi(n)=a,\quad \lim\psi(n)=b,\quad \lim\chi(n)=c,...$$

przyczym
$$Q\{\varphi(n), \psi(n), \chi(n),...\}\neq 0,$$
wówczas
$$\lim R\{\varphi(n), \psi(n), \chi(n),...\}=R(a, b, c...)$$

Istotnie, P jest sumą skończonej liczby wyrazów kształtu

$$A\{\varphi(n)\}^p\{\psi(n)\}^q...,$$

gdzie A jest liczbą stałą, a p, q,... są to liczby całkowite dodatnie. Wyraz ten, na mocy twierdzenia II (albo właściwie, na mocy uogólnienia tego twierdzenia na przypadek dowolnej liczby funkcji) dąży do granicy $Aa^pb^q...$, zatym P dąży do granicy $P(a, b, c,...)$ na mocy takiegoż uogólnienia twierdzenia I. Tak samo Q dąży do granicy $Q(a, b, c,...)$, a stąd, na mocy twierdzenia IV, wynika słuszność twierdzenia V.

61. Powyższe twierdzenie ogólne zastosujemy do szczególnego przypadku, mianowicie do zadania: *zbadać zachowanie się ogólnej funkcji wymiernej zmiennej n, czyli funkcji*

$$S(n)=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+...+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+...+b_q}$$

w przypadku, gdy n dąży do ∞ i gdy ani a_0, ani b_0 nie są zerami.

Przedewszystkim przekształćmy $S(n)$ w następujący sposób:

$$S(n)=n^{p-q}\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots.+\frac{a_p}{n^p}\right)\Big/\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots.+\frac{b_q}{n^q}\right)$$

Spółczynnik przy n^{p-q} ma kształt $R\{\varphi(n)\}$, gdzie $\varphi(n)=1/n$, zatym na mocy twierdzenia V, dąży on do granicy $R(0)=a_0/b_0$, gdy n dąży do ∞. Otóż $n^{p-q}\to 0$, jeżeli $p<q$, jeżeli zaś $p=q$, wówczas $n^{p-q}=1$ czyli $n^{p-q}\to 1$; jeżeli wreszcie $p>q$, wówczas $n^{p-q}\to+\infty$. Mamy tedy na mocy twierdzenia II:

$$\begin{array}{ll} \lim S(n)=0 & (p<q) \\ \lim S(n)=a_0/b_0 & (p=q) \\ S(n)\to+\infty & (p>q;\ a_0/b_0>0) \\ S(n)\to-\infty & (p>q;\ a_0/b_0<0). \end{array}$$

Przykłady XXIX. 1. Jak zachowują się funkcje

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,\quad (-1)^n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,\quad \frac{n^2+1}{n},\quad (-1)^n\cdot\frac{n^2+1}{n}$$

gdy $n\to\infty$?

2. Czy którakolwiek z następujących funkcji

$$1\Big/\left(\cos^2\frac{n\pi}{2}+n\sin^2\frac{n\pi}{2}\right),\quad 1\Big/\left\{n\left(\cos^2\frac{n\pi}{2}+n\sin^2\frac{n\pi}{2}\right)\right\},$$

$$\left(n\cos^2\frac{n\pi}{2}+\sin^2\frac{n\pi}{2}\right)\Big/\left\{n\left(\cos^2\frac{n\pi}{2}+n\sin^2\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

dąży do granicy, gdy $n\to\infty$?

3. Oznaczając przez $S(n)$ ogólną funkcję wymierną zmiennej n (jak w § 61), dowieść, że

$$\lim\frac{S(n+1)}{S(n)}=1,\quad \lim\frac{S\{n+(1/n)\}}{S(n)}=1.$$

62. O funkcjach stale rosnących wraz z n. Specjalną, ale bardzo ważną klasę stanowią te funkcje, które stale rosną (lub stale maleją), gdy n stale rośnie. Ponieważ $-\varphi(n)$ stale rośnie, jeżeli $\varphi(n)$ stale maleje, niema zatym powodu osobno rozważać funkcji malejących, osobno zaś rosnących: twierdzenia, dowiedzione dla jednych, dadzą się odrazu uogólnić i na drugie.

OKREŚLENIE. *Funkcję $\varphi(n)$ nazywamy stale rosnącą wraz* *z n, jeżeli dla wszelkich wartości zmiennej n mamy zawsze* $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)$.

Zauważmy, że powyższe określenie nie wyłącza przypadku, gdy $\varphi(n)$ pozostaje stałe dla kilku wartości zmiennej n, natomiast wyłącza ono możliwość malenia funkcji. Wobec tego funkcję

$$\varphi(n) = 2n + (-1)^n,$$

która przy $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ przybiera wartości

$$1, 1, 5, 5, 9, 9, \ldots$$

nazywamy stale rosnącą wraz z n. Właściwie mówiąc, pod nasze określenie podpadają nawet takie funkcje, które, poczynając od pewnej wartości n, zachowują stałą wartość. Np. funkcję $\varphi(n) = 1$ wypadłoby, według tego określenia, nazwać rosnącą. Ponieważ jednak są to funkcje bardzo specjalnego rodzaju, a przytym wiemy z góry, jak się one zachowują, gdy n dąży do ∞, zatym ta pozorna dziwaczność naszego określenia nie może być szkodliwa.

O funkcjach stale rosnących można wypowiedzieć następujące, bardzo ważne

TWIERDZENIE. *Jeżeli $\varphi(n)$ stale rośnie wraz z n, wówczas* (1) *albo $\varphi(n)$ dąży do oznaczonej granicy, gdy n dąży do ∞,* (2) *albo też $\varphi(n) \to +\infty$.*

Innemi słowy: gdy chodzi o zachowanie się funkcji przy dążeniu zmiennej n do ∞, mamy do rozważenia p i ę ć możliwych przypadków, tu zaś, przy funkcjach rosnących, mogą zachodzić t y l k o d w a przypadki.

Twierdzenie nasze jest po prostu wnioskiem z twierdzenia Dedekinda (§ 8). Dzielimy liczby rzeczywiste ζ na dwie klasy L, R, zaliczając każdą liczbę do L albo do R zależnie od tego, czy $\varphi(n) \geq \zeta$ przy jakichś wartościach zmiennej n (a więc i przy wszystkich większych wartościach), czy też $\varphi(n) < \zeta$ przy wszelkich wartościach zmiennej n.

Klasa L niewątpliwie istnieje, natomiast klasa R może istnieć, może jednak i nie istnieć. Przypuśćmy, że R nie istnieje; w takim razie, jakkolwiek wielką mogłaby być liczba Δ, możemy zawsze znaleźć tak wielkie n_0, że dla $n \geq n_0$ będziemy mieli $\varphi(n) > \Delta$, zatym mamy

$$\varphi(n) \to +\infty.$$

Jeżeli klasa R istnieje, w takim razie klasy L, R tworzą przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych. Niech a będzie liczbą odpowiadającą przekrojowi, δ zaś niech będzie dowolną liczbą dodatnią. Przy wszelkich wartościach zmiennej n, musi być $\varphi(n) < a+\delta$, czyli $\varphi(n) \leqq a$. Poczynając jednak od pewnych wartości n, musi być $\varphi(n) > a-\delta$, zatym przy dostatecznie wielkim n, mamy

$$a-\delta < \varphi(n) \leqq a.$$

Stąd wnosimy, że $\varphi(n) \to a$.

W ogólności mamy $\varphi(n) < a$ przy wszelkich wartościach n, jeżeli bowiem $\varphi(n)=a$ przy jakiejś wartości n, wówczas równość ta musi być zachowana przy wszelkich większych wartościach n. Tak więc $\varphi(n)$ może równać się a tylko w takim razie, jeżeli, poczynając od pewnej jakiejś wartości funkcji $\varphi(n)$, wszystkie dalsze jej wartości są sobie równe i równe a. W tym wypadku a jest największą liczbą klasy L, w innych zaś wypadkach w klasie L niema liczby największej.

Wniosek 1. *Jeżeli $\varphi(n)$ rośnie stale wraz z n, wówczas $\varphi(n)$ dąży do granicy, jeżeli możemy znaleźć taką liczbę K, że $\varphi(n) < K$ przy wszelkim n; jeżeli zaś takiej liczby K znaleźć nie można, wówczas $\varphi(n) \to +\infty$.*

Przekonamy się później, że wniosek ten oddaje ważne usługi przy badaniu różnych funkcji.

Wniosek 2. *Jeżeli $\varphi(n)$ rośnie stale wraz z n i jeżeli $\varphi(n) < K$ przy wszelkich wartościach zmiennej n, wówczas $\varphi(n)$ dąży do granicy, która jest albo mniejsza od K, albo równa się K.*

Granica może równać się liczbie K; jeżeli np. $\varphi(n)=3-(1/n)$, wówczas każda wartość funkcji $\varphi(n)$ jest mniejsza od 3, ale granicą funkcji jest liczba 3.

Wniosek 3. *Jeżeli $\varphi(n)$ stale rośnie wraz z n i dąży do granicy, wówczas przy wszelkich wartościach zmiennej n musi być*

$$\varphi(n) \leqq \lim \varphi(n).$$

Czytelnik sformułuje sam twierdzenia i wnioski, dotyczące funkcji $\varphi(n)$, która stale maleje, gdy n rośnie.

63. Powyższe twierdzenia mają doniosłe znaczenie: w wielu wypadkach dają nam możność rozpoznania, czy dana funkcja zmiennej n dąży czy nie dąży do granicy, gdy $n \to \infty$, i to nawet wówczas, gdy nie jesteśmy w stanie granicy tej dokładnie wyznaczyć. Jeżeli wiemy zgóry, że granica, o ile wogóle istnieje, powinna równać się takiej a takiej liczbie, możemy zastosować sprawdzian

$$|\varphi(n)-l|<\delta \quad (n \geqq n_0),$$

jak np. w przypadku funkcji $\varphi(n)=1/n$, gdzie widać odrazu, że granica, jeśli istnieje, nie może być różna od zera. Ale przypuśćmy, że mamy do czynienia z funkcją

$$\varphi(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

i chcemy zbadać, czy dąży ona do jakiejś granicy. Nie widać tu wcale ani czemu może się równać granica l, ani też czy wogóle istnieje ona. Rzecz jasna, że powyższego sprawdzianu zastosować tu nie można, przynajmniej bezpośrednio.

Należy jednak dodać, że czasem można ten sprawdzian stosować pośrednio, jeżeli metodą sprowadzenia do niedorzeczności chcemy dowieść, że dana funkcja granicy mieć nie może. Jeżeli np. $\varphi(n)=(-1)^n$, wówczas jest oczywiste, że l musiałoby równać się albo $+1$, albo -1, co jest niedorzeczne.

64. Inny dowód twierdzenia Weierstrassa (§ 8b). Wyniki, osiągnięte w § 62, dają możność dowiedzenia innym sposobem tego ważnego twierdzenia.

Podzielmy odcinek PQ na dwie równe części: przynajmniej jedna z nich musi zawierać nieskończenie wiele punktów mnogości S. Wybierzmy tę część, która zawiera nieskończenie wiele punktów mnogości, jeśli zaś obie zawierają ich nieskończenie wiele, wybierzmy część, leżącą z lewej strony. Oznaczmy wybraną część odcinka przez P_1Q_1; jeżeli P_1Q_1 jest lewą połową odcinka PQ, wówczas punkty P i P_1 są tożsame.

Podzielmy, dalej, P_1Q_1 na połowy: przynajmniej jedna z nich musi zawierać nieskończenie wiele punktów mnogości S. Wybieramy tę połowę, która spełnia ten warunek, jeśli zaś obie go spełniają, wybieramy lewą połowę. Postępując dalej w ten sposób, otrzymujemy ciąg przedziałów

$$PQ,\ P_1Q_1,\ P_2Q_2,\ P_3Q_3, \ldots$$

z których każdy jest dwa razy mniejszy od poprzedniego i każdy zawiera nieskończenie wiele punktów mnogości S.

Każdy z punktów $P, P_1, P_2, \ldots$ leży w prawo od punktu, poprzedzającego go w tym ciągu, wobec czego P_n dąży do położenia granicznego T. Tak samo Q_n dąży do położenia granicznego T'. Ale odcinek TT' jest niewątpliwie mniejszy od P_nQ_n przy każdej wartości na n, ponieważ zaś $P_nQ_n=\frac{PQ}{2^n}$, zatym P_nQ_n dąży do zera, a stąd wynika, że punkt T' zlewa się z T i że zarówno P_n, jak Q_n dążą do T.

Powiadam, że T jest punktem skupienia mnogości S. Istotnie, niech ζ będzie spółrzędną tego punktu; weźmy pod uwagę dowolny przedział $(\zeta-\delta, \zeta+\delta)$. Jeżeli n ma dostatecznie dużą wartość, wówczas P_nQ_n leży całkowicie wewnątrz tego przedziału: wystarcza mianowicie tak wybrać liczbę n; żeby było $PQ/2^n<\delta$. Ale w takim razie przedział $(\zeta-\delta, \zeta+\delta)$ zawiera nieskończenie wiele punktów mnogości S.

65. Granica funkcji x^n, gdy n dąży do ∞. Wyniki, otrzymane w § 62, zastosujemy do bardzo ważnej funkcji $\varphi(n)=x^n$. Jeżeli $x=1$, to $\varphi(n)=1$ i $\lim\varphi(n)=1$, jeżeli zaś $x=0$, to $\varphi(n)=0$ i $\lim\varphi(n)=0$. Te szczególne przypadki pominiemy w dalszym badaniu.

Przypuśćmy najpierw, że x jest liczbą dodatnią. Ponieważ $\varphi(n+1)=x\varphi(n)$, zatym $\varphi(n)$ wzrasta wraz z n, jeżeli $x>1$, i maleje wraz ze wzrastaniem zmiennej n, jeżeli $x<1$.

Jeżeli $x>1$, wówczas x^n musi dążyć albo do granicy (oczywiście większej od 1), albo też do $+\infty$. Przypuśćmy, że x^n dąży do granicy l. W takim razie, na mocy Przykładu XXVIII, 7, musi być $\lim\varphi(n+1)=\lim\varphi(n)=l$, ale

$$\lim\varphi(n+1)=\lim x\varphi(n)=x\lim\varphi(n)=xl,$$

czyli $l=xl$, co jest niedorzeczne, ponieważ zarówno l, jak x mają być większe od 1. Dochodzimy do wniosku, że

$$x^n\to+\infty \qquad (x>1).$$

Czytelnik zbuduje sam inny dowód, oparty na nierówności $x^n>1+n\delta$, gdzie $x=1+\delta$, a δ jest liczbą dodatnią. Nierówności tej można dowieść albo za pomocą indukcji matematycznej, albo za pomocą wzoru na rozwinięcie potęgi całkowitej i dodatniej dwumianu.

Z drugiej strony, jeżeli $x<1$, wówczas x^n maleje, gdy zmienna n rośnie, a więc x^n albo dąży do granicy, albo do $-\infty$. Przy naszych założeniach x^n jest zawsze liczbą dodatnią, zatym ta druga możliwość jest wyłączona i musimy mieć $\lim x^n=l$; ponieważ zaś możemy dowieść (jak wyżej), że $l=xl$, zatym l musi być zerem i mamy

$$\lim x^n=0 \qquad (x<1).$$

Czytelnik przeprowadzi sam inny dowód, oparty na tym, że gdy $0<x<1$, wówczas $(1/x)^n$ dąży do $+\infty$.

Pozostaje do zbadania przypadek, gdy x jest liczbą ujemną. Jeżeli $-1<x<0$ i jeżeli x oznaczymy przez $-y$, wówczas $0<y<1$, zatym $\lim y^n=0$, a wobec tego musi być $\lim x^n=0$.

Jeżeli $x=-1$, wówczas x^n waha się, przybierając kolejno wartości -1 i $+1$. Jeżeli wreszcie $x<-1$ i jeżeli znów oznaczymy x przez $-y$, wówczas musi być $y>1$ i $y^n \to +\infty$; ponieważ zaś x^n przybiera kolejno wartości ujemne i dodatnie, zatym x^n wykonywa wahania nieskończone. Streszczając osiągnięte wyniki, mamy

$$\begin{array}{ll}
\varphi(n)=x^n \to +\infty & (x>1) \\
\lim \varphi(n)=1 & (x=1) \\
\lim \varphi(n)=0 & (-1<x<1) \\
\varphi(n) \text{ wykonywa wahania skończone} & (x=-1) \\
\varphi(n) \quad\text{,,}\qquad\text{,,}\quad \text{nieskończone} & (x<-1).
\end{array}$$

Przykłady XXX.*) 1. Jeżeli $\varphi(n)$ jest dodatnie i jeżeli przy wszelkich wartościach na n mamy $\varphi(n+1)>K\varphi(n)$, gdzie $K>1$, wówczas $\varphi(n)\to+\infty$.

[Mamy $\qquad \varphi(n)>K\varphi(n-1)>K^2\varphi(n-2)>\ldots>K^{n-1}\varphi(1)$,
a ponieważ $K^n \to +\infty$, zatym itd.].

2. Poprzednie twierdzenie jest słuszne i wówczas, gdy
$$\varphi(n+1)>K\varphi(n) \text{ przy } n \geqq n_0.$$

3. Jeżeli $\varphi(n)$ jest dodatnie, a $\varphi(n+1)<K\varphi(n)$, gdzie $0<K<1$, wówczas $\lim \varphi(n)=0$. Twierdzenie jest słuszne i wówczas, gdy warunki jego są spełnione nie dla każdego n, lecz tylko dla $n \geqq n_0$.

4. Jeżeli $|\varphi(n+1)|<K|\varphi(n)|$ przy $n \geqq n_0$ i jeżeli $0<K<1$, wówczas $\lim \varphi(n)=0$.

5. Jeżeli $\varphi(n)$ jest dodatnie, a $\lim \dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=l>1$, wówczas $\varphi(n)\to+\infty$.

[Możemy tak wyznaczyć n_0, by było $\dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}>K>1$ przy $n>n_0$, poczym stosujemy Przykł. 1.]

6. Jeżeli $\lim \dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=l$, gdzie $|l|<1$, wówczas $\lim \varphi(n)=0$.

[Oprzeć się na Przykł. 4.]

7. Jak zachowuje się funkcja $\varphi(n)=n^r x^n$ (gdzie r jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią), gdy $n\to\infty$.

[Jeżeli $x=0$, to $\varphi(n)=0$, a więc $\varphi(n)\to 0$. W innych przypadkach mamy
$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^r x \to x.$$

*) Przykłady te są bardzo ważne i w dalszym wykładzie będziemy nieraz powoływać się na nie. Należy więc je dokładnie przestudjować.

Załóżmy najpierw, że x jest liczbą dodatnią. W takim razie $\varphi(n)\to+\infty$, jeżeli $x>1$ (Przykł. 5), oraz $\varphi(n)\to 0$, jeżeli $x<1$ (Przykł. 6). Jeżeli $x=1$, mamy $\varphi(n)=n^r\to+\infty$. Przypuśćmy teraz, że x jest liczbą ujemną. W takim razie $|\varphi(n)|=n^r|x|^n\to+\infty$, jeżeli $|x|\geqq 1$, albo też $|\varphi(n)|\to 0$, jeżeli $|x|<1$. Tak więc $\varphi(n)$ wykonywa wahania nieskończone, jeżeli $x\leqq -1$, jeśli zaś $-1<x<0$, to $\varphi(n)\to 0$.]

8. W taki sam sposób zbadać funkcję $\varphi(n)=n^{-r}x^n$. [Wyniki podobne, z wyjątkiem przypadku, gdy $x=\pm 1$; wówczas $\varphi(n)\to 0$.]

9. Ułożyć tabliczkę, któraby wskazywała, jak zachowuje się $n^k x^n$, gdy $n\to\infty$. Przypuszczamy przytym, że x może przybierać wszelkie wartości rzeczywiste, a k — wszelkie wartości całkowite, dodatnie i ujemne.

[Zauważmy, że wartość k ma wpływ tylko wówczas, gdy $x=\pm 1$. Bez względu na to, czy k jest liczbą dodatnią czy ujemną, mamy zawsze $\lim \{(n+1)/n\}^k=1$, zatym granica funkcji $\dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ zależy tylko od x, a na zachowanie się funkcji $\varphi(n)$ największy wpływ ma, wogóle biorąc, czynnik x^n. Wpływ czynnika n^k ujawnia się tylko wówczas, gdy $x=\pm 1$.]

10. Jeżeli x jest liczbą dodatnią, wówczas $\sqrt[n]{x}\to 1$, gdy $n\to\infty$. [Przypuśćmy, że $x>1$; wówczas liczby x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}, \ldots$ tworzą ciąg malejący, przyczym $\sqrt[n]{x}>1$ przy wszelkim n, wobec czego musi być $\sqrt[n]{x}\to l$, gdzie $l\geqq 1$. Gdyby jednak było $l>1$, musielibyśmy mieć, przy dowolnie wielkim n, nierówność $\sqrt[n]{x}>l$ czyli $x>l^n$, co jest niemożliwe, gdyż $l^n\to+\infty$.]

11. $\sqrt[n]{n}\to 1$. [Mamy $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$, jeżeli tylko $(n+1)^n<n^{n+1}$ czyli $\{1+(1/n)\}^n<n$, a to ma miejsce zawsze, byle tylko było $n\geqq 3$. (Dowód podamy w następnym paragrafie). Tak więc $\sqrt[n]{n}$ maleje, gdy n rośnie, poczynając od 3, że zaś $\sqrt[n]{n}>1$, zatym $\sqrt[n]{n}\to l$, gdzie $l\geqq 1$. Gdyby jednak było $l>1$, mielibyśmy $n>l^n$, co jest niemożliwe przy dostatecznie wielkich wartościach na n, gdyż $l^n/n\to+\infty$ (Przykł. 7 i 8).]

12. $\sqrt[n]{(n!)}\to+\infty$. [Jakkolwiek wielką liczbą byłoby Δ, mamy zawsze $n!>\Delta^n$, jeżeli n jest dostatecznie wielkie. Istotnie, jeżeli $u_n=\Delta^n/(n!)$, wówczas $u_{n+1}/u_n=\Delta/(n+1)\to 0$, gdy $n\to\infty$, a więc $u_n\to 0$ (Przykł. 6).]

13. Jeżeli $-1<x<1$, wówczas funkcja

$$u_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=\binom{m}{n}x^n$$

dąży do zera, gdy $n\to\infty$.

$$[\text{Mamy } \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n}{n+1}x\to -x, \text{ jeżeli } x\neq 0.]$$

66. Granica funkcji $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Z wzoru na rozwinięcie potęgi dwumianu mamy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2}+....+\frac{n(n-1)...(n-n+1)}{1.2....n}.\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+....$$

$$+\frac{1}{1.2...n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Wyraz $(p+1)$-szy tego wzoru czyli wyraz

$$\frac{1}{1.2...p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{p-1}{n}\right)$$

jest dodatni i stanowi funkcję rosnącą zmiennej n, liczba zaś wyrazów również rośnie wraz z n. Wobec tego funkcja $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ rośnie wraz z n, musi więc dążyć albo do oznaczonej granicy, albo do $+\infty$, gdy $n\to+\infty$.

Ale łatwo zauważyć, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+....+\frac{1}{1.2.3....n}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Stąd wynika, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nie może dążyć do $+\infty$, że zatym musi dążyć do jakiejś oznaczonej granicy i że granicą tą jest liczba większa od 2 lecz nie większa od 3. Oznaczając tę granicę literą e, piszemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

przyczym $2<e\leqq3$.

67. Kilka twierdzeń pomocniczych z algiebry. Dowiedziemy kilku prostych nierówności, które oddadzą nam później duże usługi.

(I) Jeżeli $\alpha>1$, a r jest liczbą całkowitą dodatnią, wówczas

$$r\alpha^r>\alpha^{r-1}+\alpha^{r-2}+...+1.$$

Mnożąc obie strony nierówności przez liczbę dodatnią $\alpha-1$, mamy

$$r\alpha^r(\alpha-1)>\alpha^r-1,$$

dodając zaś z obu stron po $r(\alpha^r-1)$ i dzieląc przez $r(r+1)$, otrzymujemy

$$\frac{\alpha^{r+1}-1}{r+1}>\frac{\alpha^r-1}{r}\qquad(\alpha>1)\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

W taki sam sposób dowodzimy, że

$$\frac{1-\beta^{r+1}}{r+1} < \frac{1-\beta^r}{r} \qquad (0<\beta<1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Stąd wynika, że jeśli r i s są liczbami całkowitemi dodatniemi i jeżeli $r>s$, wówczas musi być

$$\frac{\alpha^r-1}{r} > \frac{\alpha^s-1}{s}; \quad \frac{1-\beta^r}{r} < \frac{1-\beta^s}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

W tych wzorach zakładamy nierówności $0<\beta<1<\alpha$. W szczególności, jeżeli $s=1$, mamy

$$\alpha^r-1>r(\alpha-1); \quad 1-\beta^r<r(1-\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(II) Dowiedliśmy nierówności (3) i (4) w założeniu, że r, s są liczbami całkowitemi dodatniemi. Łatwo jednak dostrzec, że nierówności pozostają słuszne i wówczas, gdy r, s są dowolnemi liczbami wymiernemi dodatniemi. Weźmy np. pod uwagę pierwszą z pośród nierówności (3). Niech będzie $r=a/b$, $s=c/d$, gdzie a, b, c, d są to liczby całkowite dodatnie; wobec nierówności $r>s$, mamy $ad>bc$. Jeżeli założymy, że $\alpha=\gamma^{bd}$, wówczas nierówność (3) przybierze kształt

$$(\gamma^{ad}-1)/ad>(\gamma^{bc}-1)/bc.$$

To samo rozumowanie da się zastosować do innych nierówności. W taki sam sposób możemy dowieść, że

$$\alpha^s-1<s(\alpha-1); \quad 1-\beta^s>s(1-\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gdzie s jest dowolną liczbą wymierną mniejszą od 1.

(III) Załóżmy teraz, że wszystkie litery są symbolami liczb dodatnich, że r i s są to liczby wymierne, i że α i r są większe od 1, a β i s mniejsze od 1.

Jeżeli w nierówności (4) zamiast α napiszemy $1/\beta$, a zamiast β napiszemy $1/\alpha$, otrzymamy

$$\alpha^r-1<r\alpha^{r-1}(\alpha-1); \qquad 1-\beta^r>r\beta^{r-1}(1-\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

W taki sam sposób z nierówności (5) otrzymujemy

$$\alpha^s-1>s\alpha^{s-1}(\alpha-1); \qquad 1-\beta^s<s\beta^{s-1}(1-\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Z nierówności (4) i (6) mamy

$$r\alpha^{r-1}(\alpha-1)>\alpha^r-1>r(\alpha-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Jeżeli zamiast α napiszemy x/y, otrzymamy

$$rx^{r-1}(x-y)>x^r-y^r>ry^{r-1}(x-y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

przyczym $x>y>0$. Stosując to samo postępowanie do nierówności (5) i (7), otrzymujemy

$$sx^{s-1}(x-y)<x^s-y^s<sy^{s-1}(x-y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Przykłady XXXI. 1. Sprawdzić nierówności (9) i (10), kładąc $r=2$ lub 3, $s=1/2$ lub $1/3$.

2. Dowieść, że (9) i (10) pozostają słuszne, jeżeli $y>x>0$.

3. Dowieść, że nierówności (9) pozostają słuszne przy $r<0$.

4. Jeżeli $l>0$ i $\varphi(n)\rightarrow l$, gdy $n\rightarrow+\infty$, wówczas $\varphi^k\rightarrow l^k$, gdzie k jest dowolną liczbą wymierną.

[Wobec twierdzenia III, § 59, możemy założyć $k>0$. Z początku przypuśćmy, że $k>1$. W takim razie

$$k\varphi^{k-1}(\varphi-l)>\varphi^k-l^k>kl^{k-1}(\varphi-l)$$

lub też
$$kl^{k-1}(l-\varphi)>l^k-\varphi^k>k\varphi^{k-1}(l-\varphi),$$

zależnie od tego, czy $\varphi>l$, czy też $\varphi<l$.

Z tych wzorów wynika, że stosunek $|\varphi^k-l^k|$ do $|\varphi-l|$ jest zawsze zawarty między dwiema stałemi liczbami dodatniemi, gdy $n\rightarrow\infty$, a stąd wynika słuszność naszego twierdzenia. Czytelnik w taki sam sposób dowiedzie twierdzenia w przypadku, gdy $0<k<1$. Twierdzenie pozostaje słuszne, gdy $l=0$, jeżeli $k>0$.]

5. Wynik, otrzymany w Przykł. XXX. 7, 8, 9 rozciągnąć na przypadek, gdy r lub k są dowolnemi liczbami wymiernemi.

68. Granica funkcji $n(\sqrt[n]{x}-1)$. Jeżeli w pierwszej z pośród nierówności (3) poprzedniego paragrafu założymy $r=1/(n-1)$, $s=1/n$, przekonamy się, że

$$(n-1)(\sqrt[n-1]{\alpha}-1)>n\sqrt[n]{\alpha}-1$$

gdzie $\alpha>1$. Jeśli więc $\varphi(n)=n.\sqrt[n]{\alpha}-1$, wówczas $\varphi(n)$ jest zawsze dodatnie, ale stale maleje, gdy n rośnie Wobec tego $\varphi(n)$ dąży do granicy l nie mniejszej od zera, gdy $n\rightarrow\infty$.

Tak samo, jeżeli w pierwszej z pośród nierówności (7) położymy $s=1/n$, otrzymamy

$$n\sqrt[n]{\alpha-1}>\sqrt[n]{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)>1-\frac{1}{\alpha}.$$

Widzimy, że $l\geqq 1-\dfrac{1}{\alpha}>0$. Jeśli więc $\alpha>1$, mamy

$$\lim_{n\rightarrow\infty} n\sqrt[n]{\alpha}-1=f(\alpha),$$

gdzie $f(\alpha)>0$.

Przypuśćmy dalej, że $\beta<1$. Niech będzie $\beta=1/\alpha$; wówczas $n\sqrt[n]{\beta-1}=-n\sqrt[n]{\alpha-1}/\sqrt[n]{\alpha}$. Otóż $n\sqrt[n]{\alpha-1}\rightarrow f(\alpha)$, a $\sqrt[n]{\alpha}\rightarrow 1$ (Przykł. XXX. 10), jeśli więc $\beta=1/\alpha<1$, to

$$n\sqrt[n]{\beta-1}\rightarrow -f(\alpha)\ .$$

Jeżeli wreszcie $x=1$, to $n\sqrt[n]{x}-1=0$ przy wszelkich wartościach na n.

Dochodzimy do wniosku, że *przy wszelkich wartościach dodatnich na* x

$$\lim n\sqrt[n]{x-1}$$

wyznacza pewną funkcję zmiennej x. *Ta funkcja* $f(x)$ *posiada własności następujące:*

$$f(1/x) = -f(x), \quad f(1) = 0,$$

i jest dodatnia lub ujemna, zależnie od tego, czy $x > 1$ czy też $x < 1$.

Później dowiedziemy, że funkcja ta jest identyczna z logarytmem naturalnym liczby x.

Przykład. Dowieść, że $f(xy) = f(x) + f(y)$ [Oprzeć się na równaniach

$$f(xy) = \lim n(\sqrt[n]{xy} - 1) = \lim \{n\sqrt[n]{y}\,(\sqrt[n]{x} - 1) + n(\sqrt[n]{y} - 1)\}.]$$

69. Szeregi nieskończone. Przypuśćmy, że $u(n)$ jest funkcją zmiennej n, określoną dla wszystkich wartości n. Jeżeli dodamy do siebie wartości, które przybiera funkcja $u(\nu)$ przy $\nu = 1, 2, 3, \dots n$, otrzymamy nową funkcję, mianowicie

$$s(n) = u(1) + u(2) + \dots + u(n),$$

która jest również określona dla wszelkich wartości zmiennej n. W wielu wypadkach może okazać się dogodniejszym nieco odmienny symbol tej funkcji, mianowicie

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

albo jeszcze krótszy symbol

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu.$$

Jeżeli s_n dąży do granicy, gdy n dąży do ∞, i jeżeli granicę tę oznaczymy przez s, możemy napisać

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = s.$$

To samo wyrażają niekiedy krótszemi symbolami, pisząc

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu = s \quad \text{albo też} \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots = s,$$

przyczym kropki w drugim symbolu oznaczają, że ciąg wyrazów u_1, u_2 itd. jest nieskończony.

Zapomocą powyższych symbolów chcemy powiedzieć, że jakkolwiek małą byłaby liczba dodatnia δ, możemy znaleźć liczbę całkowitą dodatnią $n_0(\delta)$ taką, że suma wszystkich $n_0(\delta)$ pierwszych wyrazów, jak również suma jakiejkolwiek liczby wyrazów większej od $n_0(\delta)$ zawiera się zawsze pomiędzy liczbami $s - \delta$ i $s + \delta$, czyli że

$$s-\delta < s_n < s+\delta,$$

jeżeli tylko $n \geq n_0(\delta)$.

Jeżeli jakiś szereg nieskończony

$$u_1+u_2+\dots$$

czyni zadość temu warunkowi, nazywamy go **szeregiem nieskończonym zbieżnym,** liczbę zaś s nazywamy *sumą szeregu.*

Tak więc orzeczenie: „szereg $u_1+u_2+\dots$ jest zbieżny i ma za sumę s" jest równoznaczne z orzeczeniem: „suma n wyrazów $s_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ jest funkcją zmiennej n, dążącą do granicy s, gdy $n\to\infty$". Rozważanie tego rodzaju szeregów nie wprowadza nowych pojęć, odmiennych od tych, które poznaliśmy w pierwszej części niniejszego rozdziału. Istotnie s_n jest po prostu pewną funkcją $\varphi(n)$ zmiennej całkowitej n, wyrażoną w pewnej szczególnej postaci. Zresztą każdą funkcję $\varphi(n)$ można wyrazić w tej postaci, pisząc

$$\varphi(n)=\varphi(1)+\{\varphi(2)-\varphi(1)\}+\{\varphi(3)-\varphi(2)\}+\dots+\{\varphi(n)-\varphi(n-1)\}.$$

Jeżeli $s_n\to+\infty$ albo też $s_n\to-\infty$, gdy $n\to\infty$, powiadamy, że szereg $u_1+u_2+\dots$ jest **rozbieżny.** Moglibyśmy tak samo nazwać rozbieżnemi wszelkie funkcje $\varphi(n)$ dążące do $+\infty$ lub $-\infty$, zbieżnemi zaś te, które dążą do oznaczonej granicy l.

Jeżeli s_n nie dąży ani do granicy, ani do $+\infty$ lub $-\infty$, jeśli więc szereg $u_1+u_2+\dots$ nie jest ani zbieżny, ani rozbieżny, nazywamy go **wahającym się** *).

70. Ogólne twierdzenia dotyczące szeregów nieskończonych. Przy badaniu szeregów nieskończonych wypadnie nam wciąż posługiwać się następującemi twierdzeniami:

(1) Jeżeli $u_1+u_2+\dots$ jest szeregiem zbieżnym i jeżeli s jest jego sumą, wówczas szereg $a+u_1+u_2+\dots$ jest również zbieżny i ma za sumę liczbę $a+s$. Tak samo szereg $a+b+c+\dots$

*) Należy zauważyć, że niektórzy autorowie posługują się inną terminologją. Jedni nazywają rozbieżnemi wszelkie szeregi nieskończone, które nie są zbieżne (a więc i te, które nazwaliśmy wahającemi się), inni znów (jak np. Hobson w swej *Theory of Functions of a Real Variable*) nazywają wahającemi się tylko te szeregi, w których s_n wykonywa wahania *skończone*, gdy $n\to\infty$, te zaś, w których s_n wykonywa wahania nieskończone, nazywają rozbieżnemi.

$+k+u_1+u_2+\ldots$ jest zbieżny i ma za sumę liczbę $a+b+c+\ldots+k+s$.

(2) Jeżeli szereg $u_1+u_2+\ldots$ jest zbieżny i jeżeli s jest jego sumą, wówczas szereg $u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots$ jest również zbieżny, a sumą jego jest liczba

$$s-u_1-u_2-\ldots-u_m\,.$$

(3) Jeżeli szereg $u_1+u_2+\ldots$ jest rozbieżny albo wahający się, wówczas rozbieżnemi albo wahającemi się również szeregi $a+b+c+\ldots+k+u_1+u_2+\ldots$ oraz $u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots$

(4) Jeżeli $u_1+u_2+\ldots$ jest szeregiem zbieżnym i jeżeli sumą jego jest s, wówczas szereg $ku_1+ku_2+\ldots$ jest zbieżny i sumą jego jest liczba ks.

(5) Jeżeli szereg $u_1+u_2+\ldots$ jest rozbieżny albo wahający się, wówczas szereg $ku_1+ku_2+\ldots$ jest również rozbieżny albo wahający się.

(6) Jeżeli szeregi $u_1+u_2+\ldots$ oraz $v_1+v_2+\ldots$ są oba zbieżne, wówczas szereg $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots$ jest również zbieżny i suma jego równa się sumie dwuch poprzednich szeregów.

Wszystkich tych sześciu twierdzeń czytelnik dowiedzie z łatwością, opierając się albo bezpośrednio na określeniu zbieżności i rozbieżności szeregów, albo też na twierdzeniach, dowiedzionych w §§ 56—59. Nieco odmienny charakter mają następujące twierdzenia:

(7) Jeżeli szereg $u_1+u_2+\ldots$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Istotnie, $u_n=s_n-s_{n-1}$, że zaś s_n i s_{n-1} dążą do tej samej granicy s, zatym $\lim u_n=s-s=0$.

Czytelnik może pomyśleć, że twierdzenie odwrotne jest słuszne i że szereg Σu_n jest zbieżny, jeżeli $\lim u_n=0$. Łatwo przekonać się, że tak nie jest. Weźmy np. szereg

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots,$$

w którym $u_n=1/n$. Suma pierwszych czterech wyrazów szeregu

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}>1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{4}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\,.$$

Suma następnych czterech wyrazów $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Suma następnych ośmiu wyrazów jest większa niż $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, itd. Suma pierwszych 2^{n+1} wyrazów jest większa niż

$$2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}(n+3),$$

funkcja zaś $\frac{1}{2}(n+3)$ rośnie nieograniczenie wraz z n. Tak więc pierwotnie dany szereg jest rozbieżny.

(8) Jeżeli szereg $u_1+u_2+\dots$ jest zbieżny, wówczas każdy inny szereg, jaki tylko da się z niego utworzyć przez grupowanie jego wyrazów i zamykanie ich w nawiasy (przyczym nie zmieniamy porządku wyrazów, a każdą grupę uważamy za jeden wyraz nowego szeregu), jest również zbieżny i wszystkie te szeregi mają tę samą sumę, co i dany szereg $u_1+u_2+\dots$

Czytelnik z łatwością sam dowiedzie twierdzenia. Zwracamy uwagę, że i tu odwrotne twierdzenie nie jest słuszne. Np. $1-1+1-1\dots$ jest szeregiem wahającym się, a jednak mamy

$$(1-1)+(1-1)+\dots=0+0+\dots=0.$$

(9) Jeżeli każdy wyraz u_n szeregu jest dodatni (albo równy zeru), wówczas szereg Σu_n albo jest zbieżny, albo rozbieżny, a w tym drugim przypadku $s_n \to +\infty$. Jeżeli szereg ten jest zbieżny, wówczas suma jego jest liczbą dodatnią (z wyjątkiem, oczywiście, przypadku, gdy wszystkie wyrazy są zerami, gdyż wówczas i suma jest zerem).

Istotnie, s_n jest w takim razie rosnącą funkcją zmiennej n i możemy do niej zastosować twierdzenie § 62.

(10) Jeżeli każdy wyraz szeregu Σu_n jest liczbą dodatnią (albo zerem), wówczas, aby szereg był zbieżny, potrzeba i wystarcza, żeby istniała taka liczba K, by suma dowolnej liczby wyrazów szeregu była mniejsza od K. Jeżeli taka liczba K istnieje, to suma szeregu nie jest większa od K.

I to twierdzenie wynika bezpośrednio z § 62. Twierdzenie nie jest słuszne, jeżeli nie wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie. Np. szereg $1-1+1-1+\dots$ waha się, pomimo że z łatwością można wskazać liczbę K, większą od sumy dowolnej liczby wyrazów szeregu.

(11) Jeżeli wszystkie wyrazy szeregów $u_1+u_2+\dots$ oraz $v_1+v_2+\dots$ są dodatnie (albo równe zeru) i jeżeli drugi szereg jest zbieżny, a przy

wszelkich wartościach na n mamy $u_n \leqq v_n$, wówczas pierwszy szereg jest też zbieżny i suma jego jest nie większa od sumy drugiego szeregu.

W rzeczy samej, jeżeli przez t oznaczymy sumę szeregu $v_1+v_2+\dots$, to przy wszelkich wartościach na n będzie $v_1+v_2+\dots+v_n \leqq t$, zatym i $u_1+u_2+\dots+u_n \leqq t$, a stąd wynika słuszność twierdzenia.

Odwrotnie: jeżeli szereg Σu_n jest rozbieżny i jeżeli $v_n \geqq u_n$, wówczas Σv_n jest szeregiem rozbieżnym.

71. Szereg gieometryczny nieskończony. Zbadajmy teraz t. zw. szereg gieometryczny. Ogólny jego wyraz $u_n = r^{n-1}$. Mamy

$$s_n = 1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Tylko w razie, gdy $r=1$, mamy

$$s_n = 1+1+\dots+1 = n.$$

W tym ostatnim przypadku $s_n \to +\infty$, natomiast w przypadku ogólnym s_n dąży do granicy, jeżeli r^n dąży do granicy. Opierając się na wynikach, osiągniętych w § 65, możemy powiedzieć, że szereg $1+r+r^2+\dots$ jest zbieżny wówczas i tylko wówczas, gdy $-1<r<1$; sumą szeregu jest w tym przypadku liczba $1/(1-r)$.

Jeżeli $r \geqq 1$, to $s_n \geqq n$, zatym $s_n \to +\infty$ czyli szereg jest rozbieżny. Jeżeli $r=-1$, wówczas s_n równa się albo 1, albo 0, zależnie od tego, czy n jest liczbą nieparzystą czy parzystą; tak więc s_n wykonywa wahania skończone. Jeżeli $r<-1$, s_n wykonywa wahania nieskończone.

Jednym słowem, szereg $1+r+r^2+\dots$ jest rozbieżny i $s_n \to +\infty$, jeżeli $r \geqq 1$; szereg jest zbieżny i $s_n \to 1/(1-r)$ jeżeli $-1<r<1$; wreszcie szereg jest wahający się a mianowicie jeżeli $r=-1$, s_n wykonywa wahania skończone, jeśli zaś $r<-1$, to s_n wykonywa wahania nieskończone.

Przykłady XXXII. 1. **Ułamki dziesiętne okresowe.** Najpospolitszym przykładem szeregu gieometrycznego jest ułamek okresowy. Zbadajmy np. ułamek 0.217(13). Wiadomo, że symbol ten oznacza tyleż, co

$$\frac{2}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\frac{3}{10^7}+\dots = \frac{217}{1000}+\frac{13}{10^5}\Big/\left(1-\frac{1}{10^2}\right) = \frac{2687}{12375}.$$

Rzeczą czytelnika jest zbadać, na jakich twierdzeniach ogólnych oparliśmy to przekształcenie.

2. Dowieść, że ułamek

$$0{\cdot}a_1a_2\ldots a_m(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)=\frac{a_1a_2\ldots a_m\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k-a_1a_2\ldots a_m}{99\ldots900\ldots0},$$

przyczym w mianowniku mamy k dziewiątek i m zer.

3. Czysty ułamek okresowy jest szeregiem, którego suma równa się ułamkowi zwyczajnemu, niemającemu w mianowniku ani czynnika 2, ani czynnika 5.

4. Ułamek okresowy mieszany ma k cyfr w okresie oraz m cyfr poprzedzających pierwszy okres; dowieść, że jest on szeregiem, którego suma równa się ułamkowi zwyczajnemu, mającemu mianownik podzielny przez 2^m i przez 5^m.

5. Dwa poprzednie twierdzenia dają się odwrócić. Niech będzie $r=p/q$; przypuśćmy najpierw, że q jest liczbą pierwszą względem 10. Dzieląc przez q wszelkie potęgi liczby 10, możemy otrzymać conajwyżej q różnych reszt. Możemy tedy znaleźć dwie liczby, n_1 i n_2 takie, że $n_2>n_1$ i że 10^{n_1} oraz 10^{n_2} dają przy dzieleniu przez q tę samą resztę. Wobec tego liczba $10^{n_2}-10^{n_1}=10^{n_1}(10^{n_2-n_1}-1)$ jest podzielna przez q. Różnicę n_2-n_1 oznaczmy przez n. Możemy r przedstawić w postaci $P/(10^n-1)$ czyli w postaci ułamka okresowego czystego

$$\frac{P}{10^n}+\frac{P}{10^{2n}}+\ldots$$

Jeżeli teraz założymy, że $q=2^\alpha 5^\beta Q$, gdzie Q jest liczbą pierwszą względem 10, i jeżeli przez m oznaczymy większą z dwuch liczb α, β, wówczas $10^m.r$ musi mieć mianownik pierwszy względem 10, zatym daje się przedstawić w postaci sumy liczby całkowitej i czystego okresowego ułamka. Nie można tego jednak powiedzieć o żadnej liczbie $10^s.r$, gdzie $s<m$, zatym rozwijając r na ułamek dziesiętny, musimy otrzymać dokładnie m cyfr niepowtarzających się (poprzedzających pierwszy okres).

6. Jeżeli zauważymy, że

$$0{\cdot}(9)=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots=1,$$

widzimy, że każdy skończony ułamek dziesiętny daje się przedstawić w postaci ułamka okresowego mieszanego, którego okres składa się wyłącznie z dziewiątek. Np. $0.217=0{\cdot}216(9)$. Tak więc każdy ułamek i każda wogóle liczba wymierna daje się przedstawić w postaci ułamka okresowego.

7. Ułamki dziesiętne w ogólności. Wyrażanie liczb niewymiernych w postaci ułamków dziesiętnych nieskończonych nieokresowych. Każdy ułamek dziesiętny, czy to okresowy czy nieokresowy, wyraża pewną liczbę, zawartą między 0 a 1. Jakoż ułamek $0{\cdot}a_1a_2a_3\ldots$ możemy uważać za pewien specjalny sposób pisania szeregu

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots$$

Otóż wszystkie cyfry a_1, a_2... są dodatnie, suma więc s_n pierwszych n wyrazów tego szeregu wzrasta wraz z n, a jednak jest niewątpliwie niewiększa od 0·(9) czyli od 1. Zatym s_n dąży do granicy, zawartej między 0 a 1.

Dwa różne ułamki dziesiętne nie mogą odpowiadać tej samej liczbie (z wyjątkiem przypadku, rozważanego poprzednio w Przykł. 6). Jakoż przypuśćmy, że mamy dwa ułamki $0{\cdot}a_1a_2a_3\ldots$ oraz $0{\cdot}b_1b_2b_3\ldots$, w których $r-1$ pierwszych znaków dziesiętnych jest jednakowych, lecz $a_r>b_r$. W takim razie $a_r \geqq b_r+1>b_r.(b_{r+1}b_{r+2}\ldots)$, zatym

$$0{\cdot}a_1a_2\ldots a_ra_{r+1}\ldots>0{\cdot}b_1b_2\ldots b_rb_{r+1}\ldots$$

Wyjątek stanowi tylko ten przypadek, gdy $b_{r+1}=b_{r+2}=\ldots=9$.

Wynika stąd, że dla każdego ułamka wymiernego istnieje tylko jedno rozwinięcie na ułamek okresowy dziesiętny. Wynika stąd również, że każdy ułamek dziesiętny nieskończony, o ile nie jest okresowy, przedstawia liczbę *niewymierną*, zawartą między 0 a 1. I odwrotnie: każda taka liczba niewymierna daje się rozwinąć na ułamek dziesiętny nieskończony. Istotnie, musi ona leżeć w jednym z przedziałów

$$0,\ {}^1/_{10};\quad {}^1/_{10},\ {}^2/_{10};\quad {}^2/_{10},\ {}^3/_{10};\ \ldots;\quad {}^9/_{10},\ 1.$$

Jeżeli leży ona między $r/10$ a $(r+1)/10$, wówczas r musi być pierwszą cyfrą jej rozwinięcia na ułamek dziesiętny. Dzieląc ten przedział znów na 10 równych części, możemy wyznaczyć drugą cyfrę rozwinięcia, itd. Ale te cyfry nie mogą powtarzać się okresowo (Przykł. 3, 4). Np. rozwijając $\sqrt{2}$ na ułamek dziesiętny 1·414..., nie możemy otrzymać ułamka okresowego.

8. Ułamki 0·1010010001... oraz 0·2020020002..., w których liczba zer, zawartych między każdemi dwiema cyframi znaczącemi, wzrasta wciąż o jedno, przedstawiają liczby niewymierne.

9. Ułamek 0·11101010001010..., w którym n-ty znak dziesiętny $=1$, jeżeli n jest liczbą pierwszą, w przeciwnym zaś razie $=0$, przedstawia liczbę niewymierną.

[Liczb pierwszych istnieje nieskończenie wiele, a więc ułamek nasz musi być nieskończony; ale nie może on być okresowym, gdyby bowiem był okresowy, moglibyśmy wyznaczyć dwie liczby m, p takie, że m, $m+p$, $m+2p$, $m+3p$, ... byłyby wszystkie liczbami pierwszemi, co jest niedorzeczne, ponieważ w ciągu tym zawiera się, między innemi, liczba $m+mp$.]*

*) Wszystkie omówione tu własności ułamków dziesiętnych dadzą się (z odpowiedniemi zmianami) przenieść na rozwinięcia systematyczne w dowolnym układzie liczenia.

Przykłady XXXIII. 1. Szereg $r^m+r^{m+1}+\dots$ jest zbieżny, jeżeli $-1<r<1$, a suma jego $=\frac{1}{1-r}-1-r-r^2-\dots-r^{m-1}$.

2. Sumę poprzedniego szeregu można napisać w postaci $\frac{r^m}{1-r}$.

3. Dowieść trzema sposobami, że szereg $1+2r+2r^2+\dots$, jest zbieżny i że suma jego $=(1+r)/(1-r)$, a mianowicie: (α) pisząc szereg w postaci $-1+2(1+r+r^2+\dots)$; (β) pisząc go w postaci $1+2(r+r^2+\dots)$; (γ) dodając do siebie dwa szeregi $1+r+r^2+\dots$ oraz $r+r^2+\dots$ W każdym z tych sposobów zaznaczyć wyraźnie, na jakich twierdzeniach opieramy się.

4. Dowieść, że szereg arytmetyczny

$$a+(a+b)+(a+2b)+\dots$$

jest zawsze rozbieżny, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy $a=b=0$. Dowieść, że gdy $b\neq 0$, wówczas s_n dąży do $+\infty$ lub $-\infty$, zależnie od znaku liczby b; jeżeli zaś $b=0$, wówczas s_n dąży do $+\infty$ lub $-\infty$, zależnie od znaku liczby a.

5. W jakim wypadku szereg

$$(1-r)+(r-r^2)+(r^2-r^3)+\dots$$

jest zbieżny i jaka jest wtedy jego suma? [Szereg jest zbieżny tylko przy $-1<r\leqq 1$.]

6. Zbadać zbieżność szeregu $r^2+\frac{r^2}{1+r^2}+\frac{r^2}{(1+r^2)^2}+\dots$. [Szereg jest zawsze zbieżny; suma jego $=1+r^2$, z wyjątkiem przypadku, gdy $r=0$; wówczas $s=0$.]

7. Jeżeli założymy, że szereg $1+r+r^2+\dots$ jest zbieżny, możemy na mocy § 70, (1) i (4) dowieść, że suma jego $=1/(1-r)$. Istotnie, jeżeli $1+r+r^2+\dots=s$, to

$$s=1+r(1+r+r^2+\dots)=1+rs.$$

8. Zbadać szereg $r+\frac{r}{1+r}+\frac{r}{(1+r)^2}+\dots$. [Szereg jest zbieżny przy $-1<\frac{1}{1+r}<1$, t. j. gdy albo $r<-2$, albo $r>0$. Suma jego $=1+r$. Jest on również zbieżny przy $r=0$, a suma jego wówczas $=0$.]

9. W taki sam sposób zbadać szeregi

$$r-\frac{r}{1+r}+\frac{r}{(1+r)^2}-\dots, \qquad r+\frac{r}{1-r}+\frac{r}{(1-r)^2}+\dots,$$

$$1-\frac{r}{1+r}+\left(\frac{r}{1+r}\right)^2-\dots, \qquad 1+\frac{r}{1-r}+\left(\frac{r}{1-r}\right)^2+\dots.$$

10. Zbadać zbieżność szeregów

$$(1+r)+(r^2+r^3)+\dots, \quad (1+r+r^2)+(r^3+r^4+r^5)+\dots,$$

$$1-2r+r^2+r^3-2r^4+r^5+\dots, \quad (1-2r+r^2)+(r^3-2r^4+r^5)+\dots.$$

i w przypadku zbieżności wyznaczyć sumę każdego szeregu.

11. Jeżeli $0 \leqq a_n \leqq 1$, wówczas szereg $a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots$ jest zbieżny przy $0 \leqq r < 1$, a suma jego jest nie większa od $\frac{1}{1-r}$.

12. Jeżeli w dodatku szereg $a_0+a_1+a_2+\ldots$ jest zbieżny, to szereg $a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots$ jest również zbieżny przy $0 \leqq r \leqq 1$, a suma jego jest nie większa od mniejszej z pośród dwuch liczb, z których jedna $=\frac{1}{1-r}$, druga zaś jest sumą szeregu $a_0+a_1+a_2+\ldots$

13. Szereg

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots \text{ jest zbieżny. } \left[\text{Istotnie, } \frac{1}{1.2\ldots n} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}\right].$$

14. Szeregi

$$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots, \quad \frac{1}{1}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

są zbieżne.

15. Ogólny szereg harmoniczny

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\ldots,$$

gdzie a, b są liczbami dodatniemi, jest rozbieżny, a s_n dąży do $+\infty$.

$\left[u_n=\frac{1}{a+nb} > \frac{1}{n(a+b)}\right.$; pozostaje porównać z szeregiem $\left.1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right]$.

16. Szereg $(u_0-u_1)+(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+\ldots$ jest zbieżny wówczas i tylko wówczas, jeżeli u_n dąży do granicy, gdy $n \to \infty$.

17. Jeżeli szereg $u_1+u_2+\ldots$ jest rozbieżny, wówczas rozbieżnym jest każdy szereg, jaki można z niego utworzyć, grupując jego wyrazy i zamykając je w nawiasy.

18. Jeżeli szereg zbieżny składa się wyłącznie z wyrazów dodatnich i jeżeli z dowolnie wybranych jego wyrazów utworzymy nowy szereg, to i ten nowy szereg będzie zbieżny.

72. O przedstawianiu funkcji zmiennej ciągłej rzeczywistej za pomocą granic. W poprzednich paragrafach mieliśmy nieraz do czynienia z granicami kształtu

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

jak również z szeregami kształtu

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots=\lim_{n \to \infty} \{u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)\}.$$

Odznaczały się one tym, że funkcja zmiennej n, której granicy szukaliśmy, zawierała prócz n inną jeszcze zmienną x.

Oczywista rzecz, że granica jest w takim razie funkcją zmiennej x. Tak np. w § 68 mieliśmy do czynienia z funkcją

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1);$$

tak samo, suma szeregu gieometrycznego $1+x+x^2+\dots$ jest funkcją zmiennej x, a mianowicie funkcja ta ma wartość $f(x)=\frac{1}{1-x}$, jeżeli $-1<x<1$, przy innych zaś wartościach tej zmiennej funkcja ta jest nieokreśloną.

Wiele „dziwacznych" funkcji, rozpatrywanych w rozdziale II, możemy z łatwością w ten sposób zinterpretować; czytelnik przekona się o tym z następujących przykładów.

Przykłady XXXVI. 1. $\varphi_n(x)=x$. W tym przykładzie n nie figuruje wcale we wzorze na wartość funkcji; przy wszelkim x mamy $\varphi(x)=\lim \varphi_n(x)=x$.

2. $\varphi_n(x)=x/n$. Przy wszelkich wartościach na x, mamy $\varphi(x)=\lim \varphi_n(x)=0$.

3. $\varphi_n(x)=nx$. Jeżeli $x>0$, to $\varphi_n(x)\to+\infty$; jeżeli $x<0$, to $\varphi_n(x)\to-\infty$. Tylko przy $x=0$ funkcja $\varphi_n(x)$ dąży do granicy (mianowicie do zera), gdy $n\to\infty$. Wobec tego $\varphi(x)=0$ przy $x=0$, przy innych zaś wartościach na x funkcja $\varphi(x)$ nie jest określona.

4. $\varphi_n(x)=1/nx$; $\varphi_n(x)=nx/(nx+1)$.

5. $\varphi_n(x)=x^n$. Mamy $\varphi(x)=0$, $(-1<x<1)$; $\varphi(x)=1$, $(x=1)$, dla innych zaś wartości x funkcja nie jest określona.

6. $\varphi_n(x)=x^n(1-x)$. Funkcja różni się od poprzedniej tym, że $\varphi(x)=0$ przy $x=1$.

7. $\varphi_n(x)=x^n/n$. Funkcja $\varphi(x)$ tym się różni od $\varphi(x)$ poprzedniego zadania, że przy $x=1$ oraz przy $x=-1$ mamy $\varphi(x)=0$.

8. $\varphi_n(x)=x^n/(x^n+1)$. [$\varphi(x)=0$, $(-1<x<1)$; $\varphi(x)=\frac{1}{2}$, $(x=1)$; $\varphi(x)=1$, $(x<-1$ albo $x>1)$, natomiast przy $x=-1$ funkcja $\varphi(x)$ nie jest określona.]

9. $\varphi_n(x)=x^n/(x^n-1)$; $1/(x^n+1)$; $1/(x^n-1)$; $1/(x^n+x^{-n})$; $1/(x^n-x^{-n})$.

10. $\varphi_n(x)=(x^n-1)/(x^n+1)$; $(nx^n-1)/(nx^n+1)$; $(x^n-n)/(x^n+n)$. [W pierwszym przypadku mamy $\varphi(x)=1$, gdy $|x|>1$, $\varphi(x)=-1$, gdy $|x|<1$, $\varphi(x)=0$, gdy $x=1$, natomiast przy $x=-1$ funkcja $\varphi(x)$ nie jest określona. Drugi i trzeci przykład tym się różni od pierwszego, że $\varphi(x)$ jest w zupełności określona przy $x=1$.]

11. Znaleźć przykład funkcji takiej, żeby było $\varphi(x)=1$, gdy $|x|>1$; $\varphi(x)=-1$, gdy $|x|<1$, wreszcie $\varphi(x)=0$, gdy $x=\pm 1$.

12. $\varphi_n(x)=x.\{(x^{2n}-1)/(x^{2n}+1)\}^2$; $n/(x^n+x^{-n}+n)$.

13. $\varphi_n(x)=\{x^n f(x)+g(x)\}/(x^n+1)$. [Mamy $\varphi(x)=f(x)$, gdy $|x|>1$; $\varphi(x)=g(x)$, gdy $|x|<1$; $\varphi(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}$, gdy $x=1$, a przy $x=-1$ funkcja $\varphi(x)$ nie jest określona.

14. $\varphi_n(x)=(2/\pi)\mathrm{arctg}(nx)$. [$\varphi(x)=1$, gdy $x>0$; $\varphi(x)=0$, gdy $x=0$; $\varphi(x)=-1$, gdy $x<0$. Funkcja ta gra ważną rolę w teorji liczb; oznacza się ją zazwyczaj symbolem $sgn x$.]

15. $\varphi_n(x)=\sin n x\pi$. [$\varphi(x)=0$, gdy x jest liczbą całkowitą: przy innych wartościach x funkcja ta nie jest określona.]

16. Jeżeli $\varphi_n(x)=\sin(n!\,x\pi)$, wówczas $\varphi(x)=0$ przy wszelkich wymiernych wartościach x.

17. $\varphi_n(x)=(\cos^2 x\pi)^n$. [$\varphi(x)=1$, gdy x jest całkowite, przy innych zaś wartościach x mamy $\varphi(x)=0$.]

18. Jeżeli $N\geqq 1752$, wówczas liczba dni w roku N po Chr. wyraża się wzorem

$$\lim\{365+(\cos^2 \tfrac{1}{4}N\pi)^n-(\cos^2 \tfrac{1}{100}N\pi)^n+(\cos^2 \tfrac{1}{400}N\pi)^n\}.$$

73. **Wyższa i niższa granica funkcji.** W niniejszym paragrafie i w kilku następnych zbadamy dokładniej różne możliwe przypadki zachowania się funkcji $\varphi(n)$, gdy $n\to\infty$.*)

Jeżeli istnieje taka liczba H, że przy wszelkim n mamy $H<\varphi(n)$, powiadamy, że funkcja $\varphi(n)$ posiada *kres dolny* albo że jest *ograniczona od dołu*. Jeżeli istnieje taka liczba K, że przy wszelkim n mamy $K>\varphi(n)$, powiadamy, że $\varphi(n)$ posiada *kres górny* albo że jest *ograniczona od góry*. Jeżeli funkcja jakaś posiada oba kresy: górny i dolny, powiadamy o niej krótko, że jest *funkcją ograniczoną*. Rzecz jasna, że funkcja ograniczona może albo dążyć do granicy, albo wykonywać wahania skończone.

Przypuśćmy, że $\varphi(n)$ jest funkcją ograniczoną i że $H<\varphi(n)<K$. Oznaczmy przez ζ dowolną liczbę rzeczywistą. Możliwe są dwa przypadki: (1) albo istnieje nieskończenie wiele wartości n, przy których $\varphi(n)>\zeta$, (2) albo też istnieje tylko skończona liczba takich wartości n, czyli możemy znaleźć taką liczbę $n_0(\zeta)$, że przy $n\geqq n_0(\zeta)$ mamy $\varphi(n)\leqq\zeta$.

Liczby rzeczywiste ζ możemy podzielić na dwie klasy L, R, zaliczając je do klasy L, jeżeli zachodzi przypadek (1), do klasy zaś R, jeżeli zachodzi przypadek (2). Rzecz jasna, że każda liczba należy bądź do jednej, bądź do drugiej klasy i że każda liczba klasy L jest mniejsza od każdej liczby klasy R, a prócz tego H należy do L, liczba zaś K należy do R. W ten sposób uczyniliśmy zadość wszystkim trzem warunkom twierdzenia Dedekinda, zatym musi istnieć taka liczba ν, że przy wszelkim dodatnim δ mamy: (I) $\varphi(n)>\nu-\delta$ dla nieskończenie wielu wartości n; (II) $\varphi(n)<\nu+\delta$, jeżeli $n\geqq n_1(\delta)$. Liczbę ν nazwiemy *wyższą granicą* funkcji $\varphi(n)$, gdy $n\to\infty$, i oznaczać ją będziemy symbolem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\varphi(n)=\nu\,.$$

W taki sam sposób możemy ustalić istnienie takiej liczby λ, że przy wszelkim dodatnim δ funkcja $\varphi(n)$ musi spełniać dwa następujące

---

*) Rozważania te są mniej elementarne od poprzednich; czytelnik może przy pierwszym czytaniu opuścić te ustępy i przejść odrazu do § 78.

warunki: (I) $\varphi(n)<\lambda+\delta$ dla nieskończenie wielu wartości n, (II) $\varphi(x)>\lambda-\delta$, skoro tylko $n\geq n_2(\delta)$. Liczbę λ nazwiemy *niższą granicą* funkcji i oznaczymy ją symbolem

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \varphi(n)=\lambda.$$

74. Ponieważ dla nieskończenie wielu wartości n mamy $\varphi(n)>\nu-\delta$, a dla dostatecznie wielkich n mamy $\varphi(n)<\nu+\delta$, zatym, jakkolwiek małą byłaby liczba δ, w przedziale $(\nu-\delta,\ \nu+\delta)$ zawiera się zawsze nieskończenie wiele wartości funkcji $\varphi(n)$. Wobec tego możemy wyznaczyć taki ciąg wartości zmiennej n, powiedzmy $n_1, n_2, \dots n_k \dots$, że

$$\varphi(n_k)\to\nu,$$

gdy $k\to\infty$. A ponieważ $\varphi(n)<\nu+\delta$ przy dostatecznie wielkich wartościach n, zatym żadna liczba ζ większa od ν nie może posiadać tej własności. Widzimy, że *wyższa granica funkcji $\varphi(n)$ jest największą liczbą, do której dążyć może, jako do granicy, ciąg $\varphi(n_k)$ wybrany z pośród wartości funkcji $\varphi(n)$*.

Tak samo dowodzimy, że niższa granica jest najmniejszą liczbą, do której zmierzać może, jako do granicy, ciąg wartości funkcji $\varphi(n)$.

75. Dolny i górny kres funkcji ograniczonej. Przy badaniu funkcji $\varphi(n)$ możemy nieco zmodyfikować postępowanie § 73, a wtedy otrzymamy inny przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych. Zaliczymy mianowicie ζ do klasy L, jeżeli przy *jakiejkolwiek* wartości n mamy $\varphi(n)>\zeta$, natomiast do klasy R zaliczymy liczbę ζ wówczas, jeżeli przy *wszystkich* n mamy $\varphi(n)\leqq\zeta$. Otrzymany przekrój wyznacza pewną liczbę h, którą nazwiemy *kresem górnym funkcji* $\varphi(n)$. W takim razie h jest *najmniejszą liczbą rzeczywistą ζ taką, że $\varphi(n)\leqq\zeta$ przy wszystkich wartościach n*.

W sposób zupełnie analogiczny możemy określić *kres dolny g* funkcji $\varphi(n)$ jako największą liczbę ζ taką, że $\varphi(n)\geqq\zeta$ przy wszelkich wartościach na n. Przedział (h, g) jest najmniejszym przedziałem, zawierającym wszystkie wartości funkcji $\varphi(n)$.

Co się tyczy górnego kresu h, to mogą zachodzić dwa przypadki. Może się zdarzyć, że dla jednej lub kilku (a nawet dla nieskończenie wielu) wartości n mamy $\varphi(n)=h$. W takim razie h jest największą z pośród wartości funkcji $\varphi(n)$. Ale może również zdarzyć się, że $\varphi(n)<h$ przy wszelkich wartościach na n. W tym przypadku, jakkolwiek małą byłaby liczba dodatnia δ, mamy zawsze dla niektórych wartości n nierówność $\varphi(n)>h-\delta$, możemy zatym wyznaczyć taki ciąg $n_1, n_2, \dots n_k, \dots$, że

$$\varphi(n_k)\to h,$$

gdy $k\to\infty$. Ale w takim razie, jak wiemy, h musi równać się wyższej granicy ν naszej funkcji; w tym przypadku funkcja $\varphi(n)$ nie posiada największej wartości. Jednym słowem: *jeżeli $\varphi(n)$ posiada największą wartość, to górny kres równa się tej największej wartości funkcji, jeśli zaś $\varphi(n)$ nie posiada największej wartości, to górny kres równa się wyższej granicy funkcji.*

Zasadniczą własność liczby h można jeszcze inaczej sformułować: *górny kres h jest najmniejszą liczbą ζ taką, że przy wszelkich wartościach na* *n i przy wszelkich dodatnich wartościach na* δ *mamy zawsze* $\varphi(n)<\zeta+\delta$. Przy takim sformułowaniu staje się rzeczą oczywistą, że $\nu \leqq h$. Istotnie, ν jest najmniejszą liczbą ζ taką, że przy *dostatecznie wielkich* wartościach na n mamy $\varphi(n)<\zeta+\delta$; otóż to orzeczenie jest zawsze prawdziwe, jeżeli jest prawdziwym poprzednie orzeczenie, dotyczące liczby h

Tak więc $\nu \leqq h$, a w przypadku szczególnym, gdy $\varphi(n)$ nie posiada największej wartości, mamy $\nu=h$. Może jednak zdarzyć się, że $\nu=h$, pomimo że $\varphi(n)$ posiada największą wartość; ma to np. miejsce wówczas, gdy przy wszelkim n mamy $\varphi(n)=1$. Łatwo znaleźć przykład funkcji, w której $\nu<h$; np. gdy $\varphi(n)=1/n$, mamy $\nu=0$, $h=1$.

Chcąc zdać sobie sprawę z różnicy, zachodzącej między górnym kresem funkcji a jej wyższą granicą, zauważmy, że istnienie wyższej granicy zależy od zachowania się funkcji gdy $n \to \infty$, i że wskutek tego zmiana skończonej liczby wartości funkcji $\varphi(n)$ nie może wywrzeć wpływu na wyższą jej granicę. Natomiast zmiana taka może się odbić na górnym kresie funkcji. Jeżeli np. funkcję $\varphi(n)=1/n$ zmienimy w ten sposób, że umówimy się iż $\varphi(1)=0$, wówczas ν pozostanie bez zmiany, natomiast h będzie się teraz równało $\frac{1}{2}$, nie zaś 1.

Wysnuć można analogiczne wnioski, dotyczące λ i g. W szczególności g równa się najmniejszej wartości funkcji $\varphi(n)$, jeżeli taka wartość istnieje, jeżeli zaś nie istnieje, wówczas $g=\lambda$.

Przykłady XXXV. 1. Jeżeli przy wszelkim n mamy $\varphi(n)<K$, wówczas $\nu \leqq K$ i $h \leqq K$. To samo powiedzieć można i wówczas, gdy $\varphi(n) \leqq K$. Sformułować analogiczne twierdzenie o λ i g.

2. Jeżeli przy wszelkim n mamy $\varphi(n)=a$, to $\lambda=\nu=g=h=a$.

3. Jeżeli $\varphi(n)=1/n$, to $\lambda=\nu=g=0$, lecz $h=1$.

4. Jeżeli $\varphi(n)=(-1)^n$, wówczas $\lambda=g=-1$, a $\nu=h=1$.

5. Jeżeli $\varphi(n)=\dfrac{(-1)^n}{n}$, wówczas $\lambda=\nu=0$, $g=-1$, $h=\frac{1}{2}$.

6. Jeżeli $\varphi(n)=(-1)^n\{1+(1/n)\}$, wówczas $\lambda=-1$, $\nu=1$, $g=-2$, $h={}^3/_2$.

7. Niech będzie $\varphi(n)=\sin n\vartheta\pi$, gdzie $\vartheta>0$. Jeżeli ϑ jest liczbą całkowitą, mamy $\lambda=\nu=g=h=0$. Jeżeli ϑ jest liczbą wymierną lecz nie całkowitą, mogą zachodzić różne przypadki. Przypuśćmy np., że $\vartheta=p/q$, gdzie p, q są to liczby dodatnie nieparzyste względem siebie pierwsze, i niech będzie $q>1$. Funkcja $\varphi(n)$ przybiera powtarzające się okresowo wartości

$$\sin(p\pi/q),\quad \sin(2p\pi/q), \ldots,\quad \sin\{(2q-1)p\pi/q\},\quad \sin(2qp\pi/q), \ldots$$

Łatwo sprawdzić, że największe i najmniejsze wartości liczbowe funkcji $\varphi(n)$ są $\cos(\pi/2q)$ oraz $-\cos(\pi/2q)$, tak iż

$$\lambda=g=-\cos(\pi/2q),\quad \nu=h=\cos(\pi/2q).$$

Czytelnik zbada w taki sam sposób przypadek, gdy liczby p, q nie są obie nieparzyste.

Trudniejszy do zbadania jest przypadek, gdy ϑ jest liczbą niewymierną. Można dowieść, że w tym wypadku $\lambda=g=-1$, $\nu=h=1$. Można również dowieść, że wartości $\varphi(n)$ tak są rozsiane w przedziale $(-1, 1)$, że jeśli ζ jest *dowolną* liczbą tego przedziału, wówczas istnieje taki ciąg $n_1, n_2, \ldots$, że $\varphi(n_k)\to\zeta$, gdy $K\to\infty$ *).

8. Jeżeli $(n)\to l$, wówczas $\lambda=\nu=l$.

76. Ogólna zasada zbieżności w zastosowaniu do funkcji ograniczonej. Opierając się na poprzednich paragrafach, możemy sformułować warunek konieczny i dostateczny, by funkcja ograniczona $\varphi(n)$ dążyła do granicy. Ważny ten warunek nazywają zazwyczaj *ogólną zasadą zbieżności.* Zaczniemy od następującego twierdzenia.

Twierdzenie I. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcja ograniczona dążyła do granicy, jest ten, żeby niższa i wyższa granica funkcji były tożsame.*

Innemi słowy: aby funkcja $\varphi(n)$ dążyła do granicy l, trzeba i wystarcza. żeby było $\nu=\lambda=l$. Właściwie dowód twierdzenia jest już implicite zawarty w rozważaniach §§ 73—74, ze względu jednak na wielką doniosłość tego twierdzenia, podamy szczegółowy jego dowód.

Przedewszystkim warunek ten jest k o n i e c z n y. Istotnie, jeżeli $\varphi(n)\to l$, a δ jest dowolną liczbą dodatnią, wówczas

$$l-\delta<\varphi(n)<l+\delta$$

przy wszelkich dostatecznie wielkich wartościach n, tak iż tylko skończona liczba wartości funkcji $\varphi(n)$ może być większa od $l+\delta$. Ale istnieje nieskończenie wiele wartości funkcji większych od $\nu-\delta$, musi więc być

$$l+\delta>\nu-\delta$$

czyli $l\geqq\nu$. W taki sam sposób dowodzimy, że $l\leqq\lambda$, że zaś $\lambda\leqq\nu$, musi więc być $\lambda=\nu=l$.

Powtóre, rzeczony warunek jest d o s t a t e c z n y, gdyż conajwyżej skończona liczba wartości funkcji $\varphi(n)$ może być mniejsza od $\lambda-\delta$ lub większa od $\nu+\delta$, jeśli więc $\lambda=\nu=l$, wówczas tylko skończona liczba wartości funkcji może nie leżeć w przedziale $(l-\delta, l+\delta)$. Wobec tego $\varphi(n)\to l$.

Stąd wypływa ogólna zasada zbieżności, którą wypowiemy w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Warunek konieczny i dostateczny, aby funkcja* $\varphi(n)$ *dążyła do granicy, polega na tym. żeby do każdej zadanej liczby dodatniej* δ *można było dobrać taką liczbę* $n_0(\delta)$, *by przy* $n_2>n_1\geqq n_0(\delta)$ *było zawsze*

$$|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|<\delta\,.$$

Przedewszystkim warunek ten jest k o n i e c z n y. Istotnie, jeśli $\varphi(n)\to l$, możemy znaleźć taką liczbę n_0, by przy $n\geqq n_0$ było

$$l-\tfrac{1}{2}\delta<\varphi(n)<l+\tfrac{1}{2}\delta,$$

---

*) Proste dowody tych twierdzeń można znaleźć w pracy: Hardy and Littlewood, „Some problems of Diophantine Approximation“, *Acta Mathematica*, vol. XXXVII.

a więc przy $n_1 \geqq n_0$ oraz $n_2 \geqq n_0$ musi być

$$|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|<\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Powtóre, warunek jest wystarczający. Aby tego dowieść, wystarczy wykazać, że wynika z niego równość $\lambda=\nu$. Gdyby było $\lambda<\nu$. wówczas przy dowolnie małym δ mielibyśmy zawsze nieskończenie wiele wartości n takich, że $\varphi(n)<\lambda+\delta$, oraz nieskończenie wiele takich wartości n, że $\varphi(n)>\nu-\delta$, a więc jakkolwiek wielką byłaby liczba n_0, moglibyśmy znaleźć większe od niej liczby n_1 i n_2, spełniające warunek

$$\varphi(n_2)-\varphi(n_1)>\nu-\lambda-2\delta.$$

Otóż przy dostatecznie małym δ mamy nierówność $\nu-\lambda-2\delta>\frac{1}{2}(\nu-\lambda)$, zatym zachodzi nierówność

$$\varphi(n_2)-\varphi(n_1)>\tfrac{1}{2}(\nu-\lambda),$$

co przeczy nierówności (1). Musi więc być $\lambda=\nu$ i, co zatym idzie, $\varphi(n)\to l$.

77. O funkcjach nieograniczonych. Poprzestawaliśmy dotąd na badaniu funkcji ograniczonych, ale ogólna zasada zbieżności dotyczy wszelkich funkcji—ograniczonych i nieograniczonych, tak iż w twierdzeniu 2, mówiąc o funkcji $\varphi(n)$, możemy usunąć przymiotnik *„ograniczona"*.

Przedewszystkim, jeżeli $\varphi(n)$ dąży do granicy l, musi to być funkcja ograniczona, gdyż tylko skończona liczba jej wartości może być większa od $l+\delta$ lub mniejsza od $l-\delta$, wszystkie zaś inne jej wartości zawarte są w przedziale $(l-\delta,\ l+\delta)$.

Powtóre, jeżeli spełnione są warunki twierdzenia 2, to musi być

$$|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|<\delta,$$

skoro tylko $n_1 \geqq n_0$ i $n_2 \geqq n_0$. Obierzmy jakąś liczbę n_1 większą od n_0. Mamy wówczas

$$\varphi(n_1)-\delta<\varphi(n_2)<\varphi(n_1)+\delta,$$

jeżeli $n_2 \geqq n_0$. Wobec tego funkcja nasza jest ograniczona i możemy do niej zastosować drugą część dowodu poprzedniego paragrafu.

Ogólna zasada zbieżności ma niezwykłą doniosłość teoretyczną. Tak samo jak twierdzenia § 62, daje ona możność rozpoznania, czy dana jakaś funkcja $\varphi(n)$ dąży czy nie dąży do granicy. Ale zasada zbieżności ma tę wyższość nad twierdzeniami § 62, że jest od nich ogólniejsza. W elementarnych jednak badaniach można się obejść bez niej, posługując się różnemi specjalnemi twierdzeniami. To też czytelnik przekona się, że w dalszym ciągu bardzo rzadko wypadnie nam odwoływać się do tej zasady *).

Zauważmy jeszcze, że jeśli

$$\varphi(n)=s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

wówczas z ogólnej zasady zbieżności funkcji wynika warunek konieczny

---

*) Kilka dowodów, podanych w rozdziale VIII, dałoby się uprościć przy pomocy tej zasady.

i dostateczny zbieżności szeregów nieskończonych, czyli następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 3. *Warunek konieczny i dostateczny zbieżności szeregu nieskończonego* $u_1+u_2+\ldots$ *polega na tym, żeby do każdej dowolnie zadanej liczby dodatniej* δ *można było dobrać liczbę* n_0 *taką, by przy wszelkich wartościach na* n_1 *i* n_2, *czyniących zadość warunkowi* $n_2 > n_1 \geqq n_0$, *zachodziła nierówność*

$$|u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\ldots+u_{n_2}|<\delta.$$

78. O granicach funkcji zespolonych i o szeregach, utworzonych z wyrazów zespolonych. W niniejszym rozdziale badaliśmy tylko funkcje rzeczywiste zmiennej n oraz szeregi, utworzone z wyrazów rzeczywistych. Z łatwością jednak możemy te same pojęcia i określenia rozciągnąć na przypadek, gdy mamy do czynienia z funkcjami zespolonemi oraz z szeregami, których wyrazy są zespolone.

Przypuśćmy, że funkcja $\varphi(n)$ jest zespolona, a mianowicie

$$\varphi(n)=\rho(n)+i\sigma(n),$$

gdzie $\rho(n)$, $\sigma(n)$ są to funkcje rzeczywiste zmiennej n.

Jeżeli $\rho(n)$ *i* $\sigma(n)$ *dążą odpowiednio do granic* r, s, *gdy* $n\to\infty$, *wówczas powiadamy, że* $\varphi(n)$ *dąży do granicy* $l=r+is$, *co wyrażamy symbolem*

$$\lim \varphi(n)=l.$$

Niech u_n jest liczbą zespoloną, a mianowicie $u_n=v_n+iw_n$; powiadamy, że *szereg*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

jest zbieżny i że suma jego $l=r+is$, *jeżeli zbieżne są oba szeregi*

$$v_1+v_2+\ldots \text{ oraz } w_1+w_2+\ldots$$

i jeżeli sumami ich są odpowiednie liczby r, s.

Powiedzenie: „szereg $u_1+u_2+\ldots$ jest zbieżny i ma za sumę l" jest równoznaczne z powiedzeniem: „suma

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=v_1+v_2+\ldots+v_n+i(w_1+w_2+\ldots+w_n)$$

dąży do granicy l, gdy $n\to\infty$".

Mówiąc o funkcjach i szeregach rzeczywistych, ustaliliśmy pojęcia *rozbieżności* i *wahania się skończonego lub nieskończonego*. Przy badaniu funkcji i szeregów zespolonych możemy natrafić na tak wielką ilość rozmaitych przypadków, że ustalenie odpowiednich pojęć i określeń byłoby rzeczą niepraktyczną. Wobec tego w każdym poszczególnym przykładzie poprzestaniemy na zaznaczeniu, jak zachowuje się część rzeczywista, a jak część urojona funkcji lub szeregu.

79. Czytelnik sam dowiedzie następujących twierdzeń, wynikających bezpośrednio ze znanych nam własności funkcji rzeczywistych.

(1) Jeżeli $\lim \varphi(n)=l$, a p jest liczbą stałą, wówczas $\lim \varphi(n+p)=l$.

(2) Jeżeli $u_1+u_2+\dots$ jest szeregiem zbieżnym i ma za sumę l, wówczas szereg $a+b+c+\dots+k+u_1+u_2+\dots$ jest również zbieżny i ma za sumę $a+b+c+\dots+k+l$. Tak samo zbieżny jest szereg $u_{p+1}+u_{p+2}+\dots$ i suma jego równa się

$$l-u_1-u_2-\dots-u_p.$$

(3) Jeżeli $\lim \varphi(n)=l$ oraz $\lim \psi(n)=m$, wówczas

$$\lim \{\varphi(n)+\psi(n)\}=l+m.$$

(4) Jeżeli $\lim \varphi(n)=l$, wówczas $\lim k\varphi(n)=kl$.

(5) Jeżeli $\lim \varphi(n)=l$, a $\lim \psi(n)=m$, to $\lim \varphi(n).\psi(n)=lm$.

(6) Jeżeli szereg $u_1+u_2+\dots$ jest zbieżny i ma za sumę l, a szereg $v_1+v_2+\dots$ ma za sumę m, wówczas szereg $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\dots$ jest zbieżny i suma jego równa się $l+m$.

(7) Jeżeli l jest sumą szeregu $u_1+u_2+\dots$, wówczas $ku_1+ku_2+\dots$ jest szeregiem zbieżnym, którego suma $=kl$.

(8) Jeżeli $u_1+u_2+\dots$ jest szeregiem zbieżnym, to $\lim u_n=0$.

(9) Jeżeli $u_1+u_2+\dots$ jest szeregiem zbieżnym, wówczas zbieżnym jest każdy szereg, otrzymany z niego przez zamykanie grup kolejnych wyrazów w nawiasy. Sumy wszystkich tych szeregów są tożsame.

Dla przykładu dowiedziemy twierdzenia (5). Niech będzie

$$\varphi(n)=\rho(n)+i\sigma(n), \quad \psi(n)=\rho'(n)+i\sigma'(n), \quad l=r+is, \quad m=r'+is'.$$

W takim razie $\rho(n)\to r, \quad \sigma(n)\to s, \quad \rho'(n)\to r', \quad \sigma'(n)\to s'.$

Ale $\varphi(n).\psi(n)=\rho\rho'-\sigma\sigma'+i(\rho\sigma'+\rho'\sigma),$

a $\rho\rho'-\sigma\sigma'\to rr'-ss', \quad \rho\sigma'+\rho'\sigma\to rs'+r's,$

tak iż $\varphi(n).\psi(n)\to rr'-ss'+i(rs'+r's),$

czyli $\varphi(n).\psi(n)\to(r+is)(r'+is')=lm.$

Nieco odmienny charakter mają następujące twierdzenia:

(10) *Aby funkcja $\varphi(n)=\rho(n)+i\sigma(n)$ dążyła do zera, gdy $n\to\infty$, trzeba i wystarcza, żeby do zera dążyła funkcja*

$$|\varphi(n)| = \sqrt{[\rho(n)]^2+[\sigma(n)]^2}.$$

Jeżeli $\rho(n)$ i $\sigma(n)$ dążą do zera, wówczas, rzecz jasna, dąży do zera również $\sqrt{\rho^2+\sigma^2}$. Odwrotne twierdzenie wynika z tego, że wartości liczbowe ρ i σ nie mogą być większe od $\sqrt{\rho^2+\sigma^2}$.

(11) Albo ogólniej: *aby funkcja $\varphi(n)=\rho(n)+i\sigma(n)$ dążyła do granicy l, trzeba i wystarcza, żeby funkcja*

$$|\varphi(n)-l|$$

dążyła do zera.

(12) *Twierdzenia 2 i 3, dowiedzione w §§ 76—77, pozostają słuszne i wówczas, gdy $\varphi(n)$ i u_n są zespolone.*

Mamy dowieść, że istnienie nierówności

$$|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|<\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

przy $n_2>n_1\geqq n_0$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcja $\varphi(n)$ dążyła do l.

Jeżeli $\varphi(n)\to l$, wówczas $\rho(n)\to r$, $\sigma(n)\to s$, możemy więc do każdej liczby dodatniej δ dobrać takie dwie liczby n_0' i n_0'', że

$$|\rho(n_2)-\rho(n_1)|<\tfrac{1}{2}\delta \quad \text{oraz} \quad |\sigma(n_2)-\sigma(n_1)|<\tfrac{1}{2}\delta,$$

przyczym w pierwszej nierówności zakładamy $n_2>n_1\geqq n_0'$, w drugiej zaś $n_2>n_1\geqq n_0''$.

Stąd wynika, że

$$|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|\leqq|\rho(n_2)-\rho(n_1)|+|\sigma(n_2)-\sigma(n_1)|<\delta,$$

skoro tylko $n_2>n_1\geqq n_0$, gdzie n_0 jest większe zarówno od n_0', jak od n''_0. Tak więc warunek (1) jest *konieczny*. Aby dowieść, że jest on zarazem *wystarczający*, dość jest zauważyć, że przy $n_2>n_1\geqq n_0$ mamy

$$|\rho(n_2)-\rho(n_1)|\leqq|\varphi(n_2)-\varphi(n_1)|<\delta.$$

Wobec tego $\rho(n)\to r$; w taki sam sposób dowodzimy, że $\sigma(n)\to s$.

80. Granica funkcji z^n, gdy $n\to\infty$ i gdy z jest dowolną liczbą zespoloną. Podobne zagadnienie, dotyczące liczb rzeczywistych, zbadaliśmy w § 65.

Jeżeli $z^n\to l$, wówczas, na mocy tw. (1) § 79, mamy $z^{n+1}\to l$. Ale, na mocy tw. (4) § 79, musi być

$$z^{n+1}=zz^n\to zl,$$

zatym $l=zl$, co jest możliwe albo wówczas, gdy $l=0$, albo też gdy $z=1$. Jeżeli $z=1$, mamy $z^n=1$. Pomijając ten szczególny przypadek, dochodzimy do wniosku, że granica funkcji z^n o ile istnieje, może być tylko zerem.

Ale $z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$, gdzie r jest liczbą dodatnią; zatym

$$z^n=r^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta),$$

tak iż $|z^n|=r^n$. Widzimy, że $|z^n|$ może dążyć do zera tylko wówczas, gdy $r<1$, a stąd i z tw. (10) § 79 wynika, że

$$\lim z^n=0$$

wówczas i tylko wówczas, gdy $r<1$. W żadnym innym przypadku z^n nie może dążyć do granicy, z wyjątkiem, oczywiście, tego przypadku, gdy $z=1$ i $z^n\to 1$.

81. Szereg gieometryczny $1+z+z^2+\dots$

Jeżeli $z=1$, wówczas $s_n=n$; w innych przypadkach mamy

$$s_n=1+z+z^2+\dots+z^n=(1-z^n)/(1-z).$$

Stąd wynika, że szereg $1+z+z^2+\dots$ *jest zbieżny wówczas i tylko wówczas, gdy* $r=|z|<1$ *i że suma jego równa się w tym przypadku* $1/(1-z)$.

Jeżeli $z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)=r\operatorname{Cis}\vartheta$, a przytym $r<1$, mamy

$$1+z+z^2+\dots=1+r\operatorname{Cis}\vartheta+r^2\operatorname{Cis}2\vartheta+\dots$$

$$=\frac{1}{1-r\operatorname{Cis}\vartheta}=\frac{1-r\cos\vartheta+ir\sin\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2}.$$

Oddzielając wyrazy urojone od rzeczywistych, otrzymujemy dwa równania

$$1+r\cos\vartheta+r^2\cos2\vartheta+\dots=\frac{1-r\cos\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2}$$

$$r\sin\vartheta+r^2\sin2\vartheta+\dots=\frac{r\sin\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2},$$

przyczym zakładamy, że $r<1$. Zastępując ϑ przez $\pi+\vartheta$, widzimy, że związki te pozostają słuszne dla wartości ujemnych r, byle mniejszych liczbowo od 1. Tak więc są one słuszne, jeżeli $-1<r<1$.

Przykłady XXXVI. 1. Dowieść, że $\varphi(n)=r^n\cos n\vartheta$ dąży do 0, jeżeli $r<1$, i dąży do 1, jeżeli $r=1$, a ϑ jest wielokrotnością 2π. Dowieść również, że jeśli $r=1$ a ϑ nie jest wielokrotnością 2π, wówczas $\varphi(n)$ wykonywa wahania skończone; jeżeli $r>1$, a ϑ jest wielokrotnością 2π, to $\varphi(n)\to+\infty$, jeżeli zaś $r>1$, a ϑ nie jest wielokrotnością 2π, to $\varphi(n)$ wykonywa wahania nieskończone.

2. Ustalić analogiczne twierdzenie, dotyczące funkcji $\varphi(n)=r^n \sin n\vartheta$.

3. Dowieść, że $z^m+z^{m+1}+\ldots=\dfrac{z^m}{1-z}$,

$$z^m+2z^{m+1}+2z^{m+2}+\ldots=\frac{z^m(1+z)}{1-z}$$

w razie i tylko w razie, gdy $|z|<1$. Na których twierdzeniach § 79 musimy się oprzeć?

4. Dowieść, że przy $-1<r<1$, mamy

$$1+2r\cos\vartheta+2r^2\cos 2\vartheta+\ldots=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta+r^2}.$$

5. Szereg $$1+\frac{z}{1+z}+\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\ldots$$

jest zbieżny i ma za sumę $1+z$, jeżeli $\left|\dfrac{z}{1+z}\right|<1$. Dowieść, że warunek ten jest równoważny warunkowi, że część rzeczywista zmiennej z musi być większa od $-\frac{1}{2}$.

Zadania do rozdziału IV.

1. Przy $n=0, 1, 2, \ldots$ funkcja $\varphi(n)$ przybiera wartości $1,0,0,0,1,0,0,0,1,\ldots$ Zależność między n a $\varphi(n)$ przedstawić zapomocą wzoru, nie zawierającego funkcji trygonometrycznych. [$\varphi(n)=\frac{1}{4}\{1+(-1)^n+i^n+(-i)^n\}$.]

2. Jeżeli $\varphi(n)$ stale rośnie a $\psi(n)$ stale maleje, gdy $n\to\infty$, i jeżeli przy wszelkich wartościach na n mamy $\psi(n)>\varphi(n)$, wówczas obie te funkcje dążą do granicy, przyczym $\lim\varphi(n)\leqq\lim\psi(n)$. [Wynika z § 62].

3. Jeżeli $$\varphi(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \psi(n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n},$$

wówczas $\varphi(n+1)>\varphi(n)$ a $\psi(n+1)<\varphi(n)$.

4. Dowieść również, że przy wszelkich wartościach na n mamy $\psi(n)>\varphi(n)$ i że obie te funkcje dążą do granicy, gdy $n\to\infty$.

5. Weźmy pod uwagę wszystkie różne pary liczb takie, że suma każdej pary $=n$. Oznaczmy przez S_n średnią arytmetyczną iloczynów tych par; dowieść, że $(S_n/n^2)\to\frac{1}{6}$.

(*Mathem. Tripos.* 1903).

6. Jeżeli $x_1=\frac{1}{2}\{x+(A/x)\}$, $x_2=\frac{1}{2}\{x_1+(A/x_1)\}$, itd. i jeżeli x, A są liczbami dodatniemi, wówczas $\lim x_n=\sqrt{A}$.

$$\left[\text{Dowieść najpierw, że } \frac{x_n-\sqrt{A}}{x_n+\sqrt{A}}=\left(\frac{x-\sqrt{A}}{x+\sqrt{A}}\right)^{2^n}.\right]$$

7. Jeżeli $\varphi(n)$ jest liczbą dodatnią całkowitą przy wszelkim n,

i jeżeli $\varphi(n)\to\infty$, gdy $n\to\infty$, wówczas $x^{\varphi(n)}\to 0$, gdy $0<x<1$, jeśli zaś $x>1$, to $x^{\varphi(n)}\to+\infty$. Zbadać zachowanie się tej funkcji przy innych wartościach na x.

8. Jeżeli a_n stale rośnie lub stale maleje wraz z n, wówczas to samo powiedzieć można o funkcji $(a_1+a_2+...+a_n)/n$.

9. Jeżeli $x_{n+1}=\sqrt{k+x_n}$, gdzie k, x_1 są to liczby dodatnie, wówczas ciąg x_1, x_2, x_3,... jest ciągiem rosnącym lub malejącym, zależnie od tego, czy x_1 jest mniejsze czy też większe od dodatniego pierwiastka równania $x^2=x+k$. Jeżeli pierwiastek ten oznaczymy przez α, wówczas mamy $x_n\to\alpha$, gdy $n\to\infty$.

10. Jeżeli $x_{n+1}=k/(1+x_n)$, gdzie k i x_1 są liczbami dodatniemi, wówczas z dwuch ciągów x_1, x_3, x_5,... oraz x_2, x_4, x_6,... jeden jest rosnący, drugi zaś malejący, i oba dążą do granicy, którą jest dodatni pierwiastek równania $x^2+x=k$.

11. Niech będzie $f(x)$ funkcja ciągła (patrz Rozdział V) i rosnąca przy wszelkich wartościach zmiennej x; wyznaczamy ciąg x_1, x_2, x_3,... zapomocą równania $x_{n+1}=f(x_n)$. Zbadać, czy x_n dąży do jednego z pierwiastków równania $x=f(x)$. Zbadać w szczególności przypadek, gdy równanie to posiada tylko jeden pierwiastek, rozróżniając przytym przypadek, gdy krzywa $y=f(x)$ przecina prostą $y=x$ z dołu do góry, od przypadku, gdy $y=f(x)$ przecina tę prostą z góry na dół.

12. Jeżeli x_1, x_2 są liczbami dodatniemi i jeżeli $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$, wówczas jeden z ciągów x_1, x_3, x_5,... oraz x_2, x_4, x_6,... jest rosnący, drugi malejący i oba dążą do granicy $\frac{1}{3}(x_1+2x_2)$.

13. Wykreślić krzywą, wyznaczoną przez równanie

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}\sin\dfrac{\pi x}{2}+x^2}{x^{2n}+1}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1901.)

14. Funkcja $$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n\sin^2\pi x}$$

równa się 0, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy x jest liczbą całkowitą: wówczas $y=1$.

Funkcja $$y=\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(x)+n\varphi(x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$$

równa się $\varphi(x)$, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy x jest liczbą całkowitą: wówczas $y=\psi(x)$.

15. Dowieść, że wykres funkcji

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n\varphi(x)+x^{-n}\psi(x)}{x^n+x^{-n}}$$

składa się z części wykresów funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ oraz (w ogólnym przypadku) z dwuch punktów odosobnionych. Czy y jest określone przy $x=1$, $x=-1$, $x=0$?

16. Funkcja y, równająca się 0 przy wszelkim wymiernym x, przy wszelkim zaś niewymiernym x równająca się 1, daje się przedstawić zapomocą wzoru

$$y=\lim_{n\to\infty} sgn\{\sin^2(m!\pi x)\},$$

gdzie

$$sgn\, x=\lim_{n\to\infty} (2/\pi)\operatorname{arctg}(nx).$$

[Przy x wymiernym mamy, poczynając od pewnej wartości m, $\sin^2(m!\pi x)=0$, a więc i $sgn\{\sin^2(m!\pi x)\}=0$; jeżeli x jest liczbą niewymierną, wówczas $\sin^2(m!\pi x)$ jest zawsze liczbą dodatnią, a więc $sgn\{\sin^2(m!\pi x)\}=1$.] Dowieść, że tę samą funkcję można przedstawić zapomocą wzoru

$$y=1-\lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}].$$

17. Znaleźć sumy szeregów

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)},\quad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k)}.$$

18. Jeżeli $|z|<|a|$, to $\dfrac{L}{z-a}=-\dfrac{L}{a}\left(1+\dfrac{z}{a}+\dfrac{z^2}{a^2}+\ldots\right)$,

jeżeli zaś $|z|>|a|$, to $\dfrac{L}{z-a}=\dfrac{L}{z}\left(1+\dfrac{a}{z}+\dfrac{a^2}{z^2}+\ldots\right)$.

19. **Rozwinięcie funkcji** $(Az+B)/(az^2+2bz+c)$ **według potęg zmiennej** z. Niech α, β będą pierwiastkami równania $az^2+2bz+c=0$, tak iż $az^2+2bz+c=a(z-\alpha)(z-\beta)$. Możemy założyć, że A, B, a, b, c są to liczby rzeczywiste, a prócz tego $\alpha\neq\beta$. W takim razie

$$\frac{Az+B}{az^2+2bz+c}=\frac{1}{a(\alpha-\beta)}\left(\frac{A\alpha+B}{z-\alpha}-\frac{A\beta+B}{z-\beta}\right).$$

Należy rozróżniać dwa przypadki, zależnie od tego, czy $b^2>ac$, czy też $b^2<ac$.

(1) Jeżeli $b^2>ac$, to α, β są różne i rzeczywiste. Jeżeli $|z|$ jest mniejsze od $|\alpha|$ i od $|\beta|$, możemy rozwinąć $1/(z-\alpha)$ oraz $1/(z-\beta)$ według potęg rosnących zmiennej z (zadanie 18). Jeżeli $|z|$ jest większe i od $|\alpha|$ i od $|\beta|$, wówczas rozwijamy ułamki według potęg malejących zmiennej z, jeśli wreszcie $|z|$ zawiera się między $|\alpha|$ i $|\beta|$, wówczas jeden ułamek rozwijamy według potęg malejących, drugi według potęg rosnących. Jeżeli $|z|$ równa się albo $|\alpha|$, albo $|\beta|$, takie rozwinięcia nie są możliwe.

(2) Jeżeli $b^2<ac$, wówczas α, β są liczbami zespolonemi sprzężonemi. Możemy tedy napisać

$$\alpha=\rho\operatorname{Cis}\varphi,\quad \beta=\rho\operatorname{Cis}(-\varphi),$$

gdzie $\rho^2=\alpha\beta=c/a$, $\rho\cos\varphi=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=-b/a$, wobec czego $\cos\varphi=-\sqrt{b^2/ac}$, $\sin\varphi=\sqrt{1-(b^2/ac)}$.

Jeżeli $|z|<\rho$, możemy oba ułamki rozwinąć według potęg rosnących zmiennej z. Spółczynnik przy z^n równa się

$$\frac{A\rho\sin n\varphi+B\sin\{(n+1)\varphi\}}{a\rho^{n+1}\sin\varphi}.$$

Jeżeli $|z|>\rho$, mamy analogiczne rozwinięcie według potęg malejących, jeżeli zaś $|z|=\rho$, wówczas żadne tego rodzaju rozwinięcie nie jest możliwe.

20. Jeżeli $|z|<1$, to

$$1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n+\ldots=1/(1-z)^2$$

$$\left[s_n=\frac{1-z^n}{(1-z)^2}-\frac{nz^n}{1-z}\right].$$

21. Rozwinąć $\dfrac{L}{(z-a)^2}$ według potęg rosnących lub malejących z, zależnie od tego, czy $|z|<|a|$, czy też $|z|>|a|$.

22. Jeżeli $b^2=ac$ i jeżeli $|az|<|b|$, to

$$\frac{Az+B}{az^2+2bz+c}=\sum_0^\infty p_n z^n,$$

gdzie $p_n=\dfrac{(-a)^n}{b^{n+2}}\cdot\{(n+1)aB-nbA\}$. Znaleźć analogiczne rozwinięcie według potęg malejących dla przypadku, gdy $|az|>|b|$.

23. Wyniki, otrzymane w zadaniu 19, sprawdzić na funkcji $1/(1+z^2)$.

24. Dowieść, że przy $|z|<1$ mamy

$$\frac{1}{1+z+z^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_0^\infty z^n\sin\{^2/_3(n+1)\pi\}.$$

25. Rozwinąć według potęg rosnących z funkcje $(1+z)/(1+z^3)$, $(1+z^2)/(1+z^3)$ oraz $(1+z+z^2)/(1+z^4)$. Przy jakich wartościach z otrzymane wyniki są słuszne?

26. Jeżeli $a/(a+bz+cz^2)=1+p_1z+p_2z^2+\ldots$, wówczas

$$1+p_1^2z+p_2^2z^2+\ldots=\frac{a+cz}{a-cz}\cdot\frac{a^2}{a^2-(b^2-2ac)z+c^2z^2}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1900.)

27. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=l$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}=l.$$

[Niech będzie $s_n=l+t_n$; musimy dowieść, że $(t_1+t_2+\ldots+t_n)/n$ dąży do zera, jeżeli $t_n\to 0$.

Podzielmy liczby t_1, t_2, $t_3,\ldots$ na dwie grupy, mianowicie na

$t_1, t_2, \ldots t_p$ i na $t_{p+1}, t_{p+2}, \ldots, t_n$. Zakładamy, że p jest funkcją zmiennej n, dążącą wraz z n do nieskończoności, ale dążącą do ∞ *wolniej niż* n; wobec tego mamy $p/n \to 0$. Możemy np. założyć, że p jest częścią całkowitą pierwiastka $\sqrt{n}$.

Oznaczmy przez ε dowolną liczbę dodatnią. Jakkolwiek małą liczbą byłoby ε, możemy znaleźć takie n_0, żeby przy $n \geqq n_0$ wartości bezwzględne liczb $t_{p+1}, t_{p+2}, \ldots t_n$ były wszystkie mniejsze od $\frac{1}{2}\varepsilon$, wobec czego musi być

$$\left|\frac{t_{p+1}+t_{p+2}+\ldots+t_n}{n}\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{(n-p)}{n} < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Jeżeli A jest największym modułem liczb $t_1, t_2, \ldots$, mamy nierówność

$$\left|\frac{t_1+t_2+\ldots+t_p}{n}\right| < \frac{pA}{n},$$

a ponieważ $p/n \to 0$, zatym przy dostatecznie wielkim n_0 i przy $n \geqq n_0$ musi być $\left|\frac{t_1+t_2+\ldots+t_p}{n}\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Tak więc przy $n \geqq n_0$ mamy

$$\left|\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right| \leqq \left|\frac{t_1+t_2+\ldots+t_p}{n}\right| + \left|\frac{t_{p+1}+\ldots+t_n}{n}\right| < \varepsilon$$

i twierdzenie zostało dowiedzione.

Czytelnik, o ile pragnie nabrać wprawy w rozwiązywaniu zagadnień dotyczących granic, powinien dokładnie przestudjować powyższe rozumowanie. Chcąc dowieść, że dane jakieś wyrażenie dąży do zera, musimy nieraz rozbijać je na dwa różne wyrażenia i dowodzić, że oba one dążą do zera.]

28. Jeżeli $\varphi(n)-\varphi(n-1) \to l$, gdy $n \to \infty$, wówczas $\varphi(n)/n \to l$.

[Jeżeli $\varphi(n)=s_1+s_2+\ldots+s_n$, to $\varphi(n)-\varphi(n-1)=s_n$ i zadanie sprowadza się do poprzedniego.]

29. Jeżeli $s_n=\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$, tak iż s_n równa się 1 lub 0 zależnie od tego, czy n jest liczbą nieparzystą czy parzystą, wówczas

$$(s_1+s_2+\ldots+s_n)/n \to \tfrac{1}{2}, \text{ gdy } n \to \infty.$$

[Dowodzi to, że twierdzenie, dowiedzione w zadaniu 27, nie daje się odwrócić.]

30. Jeżeli przez c_n, s_n oznaczymy sumy pierwszych n wyrazów szeregów

$$\tfrac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\ldots, \quad \sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots$$

wówczas $\lim(c_1+c_2+\ldots+c_n)/n=0, \quad \lim(s_1+s_2+\ldots+s_n)/n=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}$.

ROZDZIAŁ V.

O GRANICACH FUNKCJI ZMIENNEJ CIĄGŁEJ. O FUNKCJACH CIĄGŁYCH I NIECIĄGŁYCH.

82. O granicy funkcji $\varphi(x)$, **gdy** $x \to \infty$. Powróćmy do funkcji zmiennej ciągłej rzeczywistej. Poprzestaniemy na rozważaniu funkcji j e d n o z n a c z n y c h*), które oznaczać będziemy symbolem $\varphi(x)$. Zakładamy, że x przybiera kolejno wszystkie wartości, odpowiadające punktom na prostej L, poczynając od pewnego oznaczonego punktu tej prostej i posuwając się wciąż wprawo. Jeżeli x zmienia się w ten sposób, powiadamy, że x dąży do ∞, i piszemy $x \to \infty$. Różnica między „dążeniem n do ∞", o którym była mowa w zeszłym rozdziale, a „dążeniem x do ∞" polega na tym, że punkt ruchomy P, odpowiadający zmiennej x, zlewa się po kolei ze wszystkiemi punktami prostej L, leżącemi wprawo od początkowego położenia punktu P, gdy tymczasem zmienna n dążyła do ∞ skokami. Różnicę tę wyrażamy słowami: x dąży do ∞ *w sposób ciągły*.

Na początku zeszłego rozdziału mówiliśmy, że istnieje bardzo ścisła zależność między funkcjami zmiennej x a funkcjami zmiennej n. Każdą funkcję zmiennej n możemy uważać za wynik wybrania pewnych oznaczonych wartości z pośród tych, które przybiera funkcja zmiennej x. Mówiliśmy o różnych sposobach zachowania się funkcji $\varphi(n)$, gdy $n \to \infty$. Musimy teraz zająć się analogicznym zbadaniem funkcji $\varphi(x)$; otrzymane przy tym określenia i twierdzenia są niemal dokładnym

---

*) Wobec tego w niniejszym rozdziale symbol $\sqrt{x}$ oznacza funkcję jednoznaczną $+\sqrt{x}$, nie zaś funkcję dwuznaczną, mającą dwie wartości: $+\sqrt{x}$ i $-\sqrt{x}$.

powtórzeniem tych, które podaliśmy w poprzednim rozdziale. Mamy tedy następujące określenie.

Określenie 1. *Powiadamy, że* $\varphi(x)$ *dąży do granicy* l, *gdy* x *dąży do* ∞, *jeżeli do każdej z góry zadanej dowolnie małej liczby dodatniej* δ *możemy dobrać taką liczbę* $x_0(\delta)$, *że przy wszelkich wartościach zmiennej* x, *nie mniejszych od* $x_0(\delta)$, *wartość bezwzględna funkcji różni się od* l *mniej niż o* δ, *t. j. jeżeli przy* $x \geqq x_0(\delta)$ *mamy zawsze*

$$|\varphi(x)-l| < \delta.$$

Jeżeli funkcja taką własność posiada, piszemy

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(x) = l,$$

albo krócej (o ile nie grozi to wywołaniem nieporozumienia)

$$\lim \varphi(x) = l \quad \text{lub} \quad \varphi(x) \to l.$$

Tak samo mamy

Określenie 2. *Powiadamy, że* $\varphi(x)$ *dąży do* ∞, *jeżeli do każdej zgóry zadanej, dowolnie wielkiej liczby dodatniej* Δ *możemy dobrać taką liczbę* $x_0(\Delta)$, *że przy każdym* $x \geqq x_0(\Delta)$ *mamy*

$$\varphi(x) > \Delta.$$

Tę własność funkcji oznaczamy symbolem $\varphi(x) \to \infty$.

W sposób analogiczny określamy symbol $\varphi(x) \to -\infty$.

Mamy wreszcie

Określenie 3. *Jeżeli* $\varphi(x)$ *nie czyni zadość warunkom, podanym w dwuch poprzednich określeniach, powiadamy, że* $\varphi(x)$ *waha się (oscyluje), gdy* x *dąży do* ∞. *Jeżeli przy* $x \geqq x_0$ *mamy zawsze* $|\varphi(x)| < K$, *gdzie* K *jest liczbą stałą, powiadamy, że* $\varphi(x)$ *wykonywa wahania skończone, w przeciwnym zaś razie mówimy, że* $\varphi(x)$ *wykonywa wahania nieskończone* *).

---

*) Podając analogiczne określenie w § 57, założyliśmy, że $|\varphi(n)| < K$ przy wszelkich wartościach n, nie zaś tylko przy $n \geqq n_0$. Ale w gruncie rzeczy te dwie hipotezy są równoważne, jeśli chodzi o funkcję zmiennej całkowitej, gdyż jeśli $|\varphi(n)| < K$ przy $n \geqq n_0$, to musi być $|\varphi(n)| < K'$ przy wszelkim n, gdzie K' jest największą z liczb $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n_0-1), K$. Natomiast jeśli chodzi o funkcje zmiennej ciągłej, wówczas sprawa nie przedstawia się tak prosto, gdyż istnieje nieskończenie wiele wartości x, mniejszych od x_0.

Czytelnik pamięta, że w poprzednim rozdziale zbadaliśmy szczegółowo kilka mniej ścisłych sposobów określania symbolów $\varphi(n)\to l$, $\varphi(n)\to\infty$. To samo dałoby się powtórzyć i teraz. Możnaby np. powiedzieć, że $\varphi(x)$ jest prawie równe l albo że $\varphi(x)$ jest bardzo wielką liczbą, gdy x jest wielką liczbą, używając przytym wyrazów „prawie równy“, „wielki“ w takim samym sensie, jak w rozdziale IV.

Przykłady XXXVII. 1. Jak zachowują się funkcje $1/x$, $1+(1/x)$, x^2, x^k, $[x]$, $x-[x]$, $[x]+\sqrt{x-[x]}$, gdy $x\to\infty$?

Pierwsze cztery funkcje odpowiadają dokładnie analogicznym funkcjom zmiennej n, które zbadaliśmy w rozdziale IV. Co się tyczy trzech ostatnich, to $[x]\to\infty$, $x-[x]$ wykonywa wahania skończone, a

$$[x]+\sqrt{x-[x]}\to\infty, \text{ gdy } x\to\infty.$$

Zauważmy, że $\varphi(x)=x-[x]$ waha się między 0 a 1 i że funkcja ta równa się 0, gdy x jest liczbą całkowitą; wobec tego, jeśli utworzymy z niej odpowiednią funkcję $\varphi(n)$, będzie ona zawsze równa 0, zatym będzie dążyć do granicy 0. To samo da się powiedzieć o funkcjach

$$\varphi(x)=\sin x\pi, \quad \varphi(n)=\sin n\pi=0.$$

Widzimy, że z własności funkcji $\varphi(x)\to l$, $\varphi(x)\to+\infty$, $\varphi(x)\to-\infty$ wynikają odpowiednie własności funkcji $\varphi(n)$, ale odwrócić tego twierdzenia nie można.

2. W taki sam sposób zbadać funkcje

$$\frac{\sin x\pi}{x}, \quad x\sin x\pi, \quad (x\sin x\pi)^2, \quad \operatorname{tg} x\pi, \quad a\cos^2 x\pi+b\sin^2 x\pi$$

i zbudować odpowiednie wykresy.

3. Podać illustrację gieometryczną Określenia 1, analogiczną do podanej w § 52.

4. Jeżeli $\varphi(x)\to l$, przyczym $l\neq 0$, wówczas funkcje $\varphi(x).\cos x\pi$ oraz $\varphi(x).\sin x\pi$ wykonywują wahania skończone. Jeżeli $\varphi(x)\to+\infty$ albo $\varphi(x)\to-\infty$, wówczas funkcje te wykonywują wahania nieskończone. Wykresy tych funkcji mają kształt linji falistej, wahającej się między krzywemi $y=\varphi(x)$ i $y=-\varphi(x)$.

5. Zbadać zachowanie się funkcji

$$y=f(x)\cos^2 x\pi+F(x)\sin^2 x\pi,$$

gdy $x\to\infty$, jeżeli $f(x)$ i $F(x)$ są jakiemiś prostemi funkcjami, np. x albo x^2. [Wykres funkcji y jest krzywą, wahającą się między krzywemi $y=f(x)$ i $y=F(x)$.]

83. Granica funkcji, gdy $x\to-\infty$. Czytelnik z łatwością sam sformułuje określenia symbolów „$x\to-\infty$“ oraz

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=l, \quad \varphi(x)\to-\infty.$$

Istotnie, jeżeli $x = -y$, to $\varphi(x) = \varphi(-y) = \psi(y)$, a y dąży do $+\infty$, gdy x dąży do $-\infty$. Tak więc zagadnienie, dotyczące zachowania się $\varphi(x)$ gdy $x \to -\infty$, sprowadza się do zagadnienia o zachowaniu się $\psi(y)$, gdy $y \to +\infty$.

84. Twierdzenia, odpowiadające twierdzeniom §§ 56—60. Twierdzenia o granicach sumy, iloczynu i ilorazu funkcji, dowiedzione w rozdziale IV, pozostają słuszne dla funkcji zmiennej ciągłej; czytelnik sam zauważy, jakie zmiany uczynić należy w wysłowieniu tych twierdzeń. Nie tylko zresztą same twierdzenia, ale i dowody pozostają słuszne i wymagają tylko drobnych zmian.

85. O funkcjach stale rosnących lub stale malejących. *Jeżeli przy wszelkim $x_2 > x_1$ mamy $\varphi(x_2) \geqq \varphi(x_1)$, wówczas $\varphi(x)$ nazywamy funkcją stale rosnącą.* Oczywista rzecz, że w wielu razach warunek ten jest spełniony, poczynając dopiero od pewnego x, t.j. gdy $x_2 > x_1 \geqq x_0$. Następne twierdzenie § 62 wymaga tylko zastąpienia n przez x, a w dowodzie wymaga kilku drobnych i oczywistych zmian wysłowienia.

Jeżeli mamy zawsze $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, tak iż $\varphi(x)$ niema nigdy równych wartości przy różnych wartościach zmiennej niezależnej, wówczas $\varphi(x)$ nazywamy *funkcją stale rosnącą w ściślejszym znaczeniu.* Przekonamy się, że w wielu wypadkach rozróżnienie tych pojęć jest potrzebne (§§ 101—102).

Czytelnik powinien zbadać, czy następujące funkcje są stale rosnące (przynajmniej poczynając od pewnej wartości x):

$$x^2 - x, \quad x + \sin x, \quad x + 2\sin x, \quad x^2 + 2\sin x,$$

$$[x], \quad [x] + \sin x, \quad [x] + \sqrt{x - [x]}\,.$$

86. Granica funkcji, gdy x dąży do zera. Przypuśćmy, że mamy

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = l\,.$$

Niech będzie $y = 1/x$. W takim razie mamy

$$\varphi(x) = \varphi(1/y) = \psi(y).$$

Jeżeli $x \to \infty$, to $y \to 0$, a $\psi(y)$ dąży do granicy l.

A teraz zapomnijmy na chwilę o zmiennej x i rozważajmy $\psi(y)$ po prostu jako funkcję zmiennej y. Chodzi nam o te wartości y, które odpowiadałyby dużym wartościom x, tj. chodzi nam o małe dodatnie wartości na y. Funkcja $\psi(y)$ posiada tę własność, że, przy dostatecznie małym y różni się dowolnie mało od l. Albo, wyrażając się ściślej: jeżeli mówimy, że $\lim \varphi(x) = l$, znaczy to, że dla każdej dowolnie małej liczby δ możemy znaleźć takie x_0, żeby przy $x \geqq x_0$ było $|\varphi(x) - l| < \delta$; ale ten sam fakt mamy prawo wysłowić tak: do każdej dowolnie małej liczby dodatniej δ możemy dobrać taką liczbę $y_0 = 1/x_0$, że przy każdym dodatnim $y \leqq y_0$ mamy zawsze $|\varphi(y) - l| < \delta$.

To prowadzi do następujących określeń:

A. *Jeżeli do każdej dowolnie małej liczby dodatniej δ możemy dobrać taką liczbę $y_0(\delta)$, żeby przy $0 < y \leqq y_0(\delta)$ było zawsze*

$$|\varphi(y) - l| < \delta,$$

wówczas powiadamy, że $\varphi(y)$ dąży do granicy l, gdy y dąży do zera przez wartości dodatnie i piszemy

$$\lim_{y \to +0} \varphi(y) = l.$$

B. *Jeżeli do każdej dowolnie wielkiej liczby Δ możemy dobrać taką liczbę $y_0(\Delta)$, żeby przy $0 < y \leqq y_0(\Delta)$ było zawsze*

$$\varphi(y) > \Delta,$$

wówczas mówimy, że $\varphi(y)$ dąży do ∞, gdy y dąży do zera przez wartości dodatnie, i piszemy

$$\varphi(y) \to \infty.$$

W analogiczny sposób określamy orzeczenia: „$\varphi(y)$ dąży do granicy l, gdy y dąży do 0 przez wartości ujemne", „$\lim \varphi(y) = l$, gdy $y \to -0$" itp. Należy np. w określeniu A zmienić warunek $0 < y \leqq y_0(\delta)$ na $-y_0(\delta) \leqq y < 0$.

Jeżeli mamy jednocześnie $\lim\limits_{y \to +0} \varphi(y) = l$ i $\lim\limits_{y \to -0} \varphi(y) = l$, wówczas piszemy krótko $\lim\limits_{y \to 0} \varphi(y) = l$.

Przypadek ten ma tak wielką doniosłość, że musimy podać ścisłe jego określenie.

Jeżeli do każdej dowolnie małej liczby dodatniej δ możemy dobrać takie $y_0(\delta)$, żeby przy wszelkich wartościach y różnych od zera, lecz liczbowo równych $y_0(\delta)$ lub mniejszych od $y_0(\delta)$, funkcja $\varphi(y)$ różniła się od l mniej niż o δ, wówczas powiadamy, że $\varphi(y)$ dąży do granicy l, gdy y dąży do 0, i piszemy

$$\lim_{y \to 0} \varphi(y) = l.$$

Tak samo, jeżeli zarówno przy $y \to +0$, jak i przy $y \to -0$, mamy $\varphi(y) \to \infty$, powiadamy krótko, że $\varphi(y) \to \infty$ gdy $y \to 0$. To samo da się powiedzieć o przypadku, gdy $\varphi(y) \to -\infty$.

Jeżeli wreszcie $\varphi(y)$ nie dąży ani do granicy, ani do $+\infty$ lub $-\infty$, gdy $y \to +0$, powiadamy, że $\varphi(y)$ waha się. Oczywista rzecz, że wahania te mogą być zarówno skończone jak nieskończone. W podobny sposób określamy funkcję wahającą się dla przypadku, gdy $y \to -0$.

87. Granica funkcji, gdy x dąży do a. Przypuśćmy, że $\varphi(y) \to l$ gdy $y \to 0$, i wprowadźmy podstawienia

$$y = x - a, \quad \varphi(y) = \varphi(x-a) = \psi(x).$$

Jeżeli $y \to 0$, to $x \to a$, a funkcja $\psi(x) \to l$, co piszemy w postaci symbolu

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = l,$$

albo krótko: $\psi(x) \to l$. Symbol ten (i odpowiednie orzeczenie) określamy w taki sposób: *jeżeli do każdej dowolnie zadanej liczby dodatniej δ możemy dobrać taką liczbę $\varepsilon(\delta)$, że przy $0 < |x-a| \leqq \varepsilon(\delta)$ mamy zawsze*

$$|\varphi(x) - l| < \delta,$$

wówczas powiadamy, że $\varphi(x)$ dąży do granicy l, gdy x dąży do a. i piszemy

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = l.$$

Jeżeli poprzestaniemy na rozważaniu wartości x większych od a, tj. jeżeli w powyższym określeniu zastąpimy warunek $0 < |x-a| < \varepsilon(\delta)$ przez warunek $0 < x \leqq a + \varepsilon(\delta)$, otrzymamy określenie orzeczenia: „funkcja $\varphi(x)$ dąży do l, gdy x dąży do a ze strony prawej“; orzeczenie to możemy wyrazić symbolem

$$\lim_{x \to a+0} \varphi(x) = l.$$

W sposób analogiczny określamy orzeczenie i symbol

$$\lim_{x \to a-0} \varphi(x) = l.$$

Wobec tego orzeczenie $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = l$ jest równoważne dwom naraz orzeczeniom

$$\lim_{x \to a+0} \varphi(x) = l \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a-0} \varphi(x) = l.$$

W sposób analogiczny można określić, co znaczy „$\varphi(x) \to \infty$ gdy $x \to a$ przez wartości większe (lub mniejsze) od a”. Nie zatrzymujemy się dłużej nad tą sprawą, gdyż określenia te są analogiczne do ustalonych poprzednio w przypadku szczególnym, gdy $a = 0$; a zresztą, jeśli chodzi o zbadanie, jak zachowuje się taka funkcja, gdy $x \to a$, można ją zawsze zastąpić przez inną, znaną nam, a to kładąc $x-a=y$ i badając, jak zachowuje się funkcja $\varphi(y)$, gdy $y \to 0$.

88. Funkcje stale rosnące lub stale malejące. *Jeżeli istnieje liczba ε taka, że przy $a-\varepsilon<x'<x''<a+\varepsilon$ mamy zawsze $\varphi(x') \leqq \varphi(x'')$, powiadamy, że $\varphi(x)$ rośnie stale w pobliżu $x=a$.*

Przypuśćmy, że $x<a$ i że $y=1/(a-x)$. Gdy $x \to a-0$, wówczas $y \to \infty$, a funkcja $\varphi(x)=\psi(y)$ jest stale rosnącą funkcją zmiennej y, nie większą jednak od $\varphi(a)$. Z § 85 wynika, że $\varphi(x)$ dąży do granicy nie większej od $\varphi(a)$, co wyrażamy symbolem

$$\lim_{x \to a+0} \varphi(x)=\varphi(a+0).$$

W podobny sposób określamy symbol $\varphi(a-0)$; rzecz jasna, że mamy

$$\varphi(a-0) \leqq \varphi(a) \leqq \varphi(a+0).$$

Takie same rozważania przeprowadzić można co do funkcji *stale malejących*.

Jeżeli przy $a-\varepsilon<x'<x''<a+\varepsilon$ mamy zawsze $\varphi(x')<\varphi(x'')$, a nigdy nie może być $\varphi(x')=\varphi(x'')$, wówczas $\varphi(x)$ nazywamy *funkcją stale rosnącą w ściślejszym znaczeniu.*

89. Wyższa i niższa granica oraz zasada zbieżności. Bardzo wiele z tego, co mówiliśmy w §§ 73—77, da się zastosować do funkcji zmiennej ciągłej x, gdy ta funkcja dąży do granicy a. W szczególności, jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją *ograniczoną* w przedziale, zawierającym a (t.j. jeżeli możemy znaleźć takie liczby ε, H, K, że przy $a-\varepsilon \leqq x \leqq a+\varepsilon$ mamy $H<\varphi(x)<K$)*), wówczas możemy określić granicę niższą λ oraz wyższą ν przy $x \to a$ i dowieść, że warunkiem koniecznym i dostatecznym, żeby $\varphi(x) \to l$, jest $\lambda=\nu=l$. Można również ustalić twierdzenie analogiczne do ogólnej zasady zbieżności, mianowicie: *warunek konieczny i dostateczny, by funkcja $\varphi(x)$ dążyła do granicy, gdy $x \to a$, jest ten, żeby przy każdym danym δ można było znaleźć taką liczbę $\varepsilon(\delta)$, że $|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|<\delta$, skoro tylko* $0<|x_2-a|<|x_1-a| \leqq \varepsilon(\delta)$.

Przykłady XXXVIII. 1. Jeżeli przy $x \to a$ mamy

$$\varphi(x) \to l, \quad \psi(x) \to l',$$

wówczas $\varphi(x)+\psi(x) \to l+l'$, $\varphi(x) \cdot \psi(x) \to ll'$, a $\varphi(x)/\psi(x) \to l/l'$, jeżeli tylko $l' \neq 0$.

2. Jeżeli m jest liczbą całkowitą dodatnią, to $x^m \to 0$, gdy $x \to 0$.

3. Jeżeli m jest liczbą całkowitą ujemną, to $x^m \to +\infty$, gdy $x \to +0$, a $x^m \to -\infty$ lub $x^m \to +\infty$, gdy $x \to -0$, zależnie od tego, czy m jest liczbą nieparzystą czy parzystą. Jeżeli $m=0$, wówczas $x^m=1$ i $x^m \to 1$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} (a+bx+cx^2+\ldots+kx^m)=a$.

---

*) Pojęcie *funkcji ograniczonej w przedziale* zbadamy szczegółowo w § 95.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a+bx+cx^2+\ldots+kx^m}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots+\kappa x^{\mu}} = \dfrac{a}{\alpha}$, jeżeli $\alpha \neq 0$. Przy $\alpha=0$, $a \neq 0$, $\beta \neq 0$, funkcja dąży do $+\infty$ lub $-\infty$, gdy $x \to +0$, zależnie od tego, czy a i β mają znaki jednakowe czy różne; rzecz się ma wprost przeciwnie, gdy $x \to -0$. Przypadek, gdy $\alpha=0$, $a=0$, rozważymy w Przykł. XXXIX.5. Zbadać przypadek, gdy $a \neq 0$, lecz mianownik ma kilka spółczynników równych zeru.

6. $\lim\limits_{x \to a} x^m = a^m$, jeżeli m jest dowolną liczbą całkowitą. [Jeżeli $m>0$, kładziemy $x=y+a$ i stosujemy Przykł. 4. Jeżeli $m<0$, stosujemy Przykład 1. Wyjątkowy przypadek zachodzi, gdy $a=0$ i $m<0$. Wynika stąd, że $\lim P(x)=P(a)$, jeżeli $P(x)$ jest dowolnym wielomianem.]

7. $\lim\limits_{x \to a} R(x)=R(a)$, jeżeli R oznacza dowolną funkcję wymierną i jeżeli a nie jest pierwiastkiem mianownika tej funkcji.

8. $\lim\limits_{x \to a} x^m = a^m$ przy wszelkich wymiernych wartościach na m, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy $a=0$ i $m<0$. [Przy $a>0$ wynika to odrazu z nierówności (9) i (10) w § 67. Istotnie, $|x^m-a^m|<H|x-a|$, gdzie H oznacza większą z dwuch wartości bezwzględnych $|mx^{m-1}|$ i $|ma^{m-1}|$. (Porówn. Przykł. XXXI.4.) Jeżeli $a<0$, kładziemy $x=-y$ i $a=-b$. Wówczas

$$\lim x^m = \lim(-1)^m y^m = (-1)^m b^m = ax^m.]$$

90. Czytelnik zapewne nie zrozumie odrazu, dlaczego trzeba dowodzić takich twierdzeń, jak podane w Przykł. 4, 5, 6, 7, 8, dlaczego nie można poprostu położyć $x=0$ lub $x=a$ i otrzymać odrazu odpowiednie granice a, a/α, a^m, $P(a)$, $R(a)$. Jest rzeczą niezmiernej wagi, żeby czytelnik dokładnie zrozumiał, gdzie tkwi błąd w jego rozumowaniu.

Orzeczenie
$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = l$$
dotyczy wartości, które przybiera funkcja $\varphi(x)$, gdy x przybiera wszelkie wartości, *dowolnie blizkie zeru, lecz od zera różne**). W tym orzeczeniu n i e m a w c a l e m o w y o t y m, c o d z i e j e s i ę z f u n k c j ą, g d y $x=0$. Może zdarzyć się, że funkcja wcale nie jest określona przy $x=0$, albo że ma wtedy wartość różną od l. Dla przykładu weźmy funkcję $\varphi(x)$, która równa się zeru przy wszelkich wartościach x, z wyjątkiem tylko $x=0$, przy którym $\varphi(x)=1$. Mamy wówczas

*) Np. w § 86 w określeniu A postawiliśmy warunek $0<y \leqq y_0$; pierwszą z tych dwu nierówności włączyliśmy w tym celu, żeby zaznaczyć, że y nie może równać się zeru.

$$\lim \varphi(x) = 0,$$

gdyż przy x dowolnie blizkim zera, zawsze $\varphi(x)=0$; lecz zarazem $\varphi(0)=1$. Wykres tej funkcji składa się ze wszystkich punktów osi x, z wyjątkiem tylko punktu (0,0), oraz z punktu odosobnionego (0,1).

Czytelnik może zarzucić, że funkcja ta została sztucznie określona, by służyć mogła do naszego celu. Ale można z łatwością podać funkcje, wyrażone zapomocą prostych wzorów i zachowujące się w pobliżu zera tak, jak powyższa funkcja. Weźmy np. pod uwagę funkcję

$$\psi(x) = [1-x^2],$$

gdzie $[1-x^2]$ oznacza największą liczbę całkowitą, nie większą od $1-x^2$. Przy $x=0$, mamy $\psi(x)=[1]=1$, natomiast przy $0<x<1$ lub przy $-1<x<0$ mamy $0<1-x^2<1$, a więc $\psi(x)=$ $=[1-x^2]=0$.

Albo też weźmy funkcję

$$y = x/x,$$

o której była już mowa w rozdziale II. Funkcja ta ma stałą wartość 1, jeżeli $x \neq 0$, natomiast przy $x=0$ nie jest ona wcale określona. Istotnie, jeżeli powiadamy o jakiejś funkcji $\varphi(x)$, że jest ona określona przy $x=0$, chcemy przez to powiedzieć, że możemy znaleźć jej wartość, kładąc $x=0$ we wzorze, wyrażającym funkcję. Otóż w danym wypadku jest to rzeczą niemożliwą, gdyż otrzymalibyśmy wyrażenie 0/0, które nic zgoła nie znaczy. Czytelnik mógłby powiedzieć: „podzielmy wpierw licznik i mianownik przez x“, ale i to jest rzeczą niemożliwą, gdy $x=0$. Niemniej jednak

$$\lim (x/x) = 1,$$

gdyż x/x jest stale równe 1, dopóki x różni się od zera o jakąkolwiek, dowolnie małą liczbę.

Tak samo $\varphi(x) = \dfrac{(x+1)^2-1}{x} = x+2$, dopóki $x \neq 0$, a przy $x=0$ funkcja $\varphi(x)$ nie jest określona. Niemniej jednak $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 2$.

Z drugiej strony jest rzeczą oczywistą, że w wielu wypadkach $\lim \varphi(x)$ może równać się $\varphi(0)$, czyli wartości, którą przybiera funkcja przy $x=0$. Np. jeżeli $\varphi(x)=x$, wówczas

$\varphi(0)=0$ i $\lim \varphi(x)=0$. Takie funkcje w praktyce najczęściej się zdarzają.

Przykłady XXXIX. 1. $\lim\limits_{x\to a} (x^2-a^2)/(x-a)=2a$.

2. $\lim\limits_{x\to a} (x^m-a^m)/(x-a)=ma^{m-1}$, jeżeli m jest liczbą całkowitą lub zerem.

3. Dowieść, że funkcja poprzedniego zadania ma tę samą granicę przy wszelkim wymiernym m, byle a było liczbą dodatnią. [Wynika to odrazu z nierówności (9) i (10) w § 67.]

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^7-2x^5+1}{x^3-3x^2+2}=1$.

5. Zbadać zachowanie się funkcji

$$\varphi(x)=(a_0x^m+a_1x^{m+1}+\ldots+a_kx^{m+k})/(b_0x^n+b_1x^{n+1}+\ldots+b_px^{n+p})$$

gdy x dąży do zera przez wartości dodatnie lub przez ujemne.

[Jeżeli $m>n$, $\lim \varphi(x)=0$. Jeżeli $m=n$, $\lim \varphi(x)=a_0/b_0$. Jeżeli $m<n$, a $n-m$ jest liczbą parzystą, wówczas $\varphi(x)\to+\infty$, gdy $a_0/b_0>0$, oraz $\varphi(x)\to-\infty$, gdy $a_0/b_0<0$. Jeżeli $m<n$, a $n-m$ jest liczbą nieparzystą, wówczas przy $a_0/b_0>0$ mamy $\varphi(x)\to+\infty$, gdy $x\to+0$ oraz $\varphi(x)\to-\infty$, gdy $x\to-0$, natomiast przy $a_0/b_0<0$ mamy $\varphi(x)\to-\infty$, gdy $x\to+0$ oraz $\varphi(x)\to+\infty$ gdy $x\to-0$.]

6. **O małych różnych rzędów.** Łatwo dowieść, że

$$\lim_{x\to 0} (x^2/x)=0, \quad \lim_{x\to 0} (x^3/x^2)=0, \ldots$$

Fakt ten można wyrazić inaczej, mówiąc, że gdy x dąży do zera, wówczas $x^2, x^3, \ldots$ dążą również do zera, ale x^2 dąży do zera prędzej niż x, x^3 dąży jeszcze prędzej, itd. W wielu zagadnieniach może być rzeczą dogodną posiadanie skali, za pomocą której można byłoby zmierzyć, jak prędko maleje dana jakaś funkcja, dążąca do 0 wraz ze zmienną x. Sama przez się nasuwa się myśl użycia w tym celu funkcji $x, x^2, x^3, \ldots$

Powiemy tedy, że $\varphi(x)$ jest *małą pierwszego rzędu*, jeżeli $\varphi(x)/x$ dąży do granicy różnej od 0, gdy $x\to 0$. Np. $2x+3x^2+x^7$ jest małą pierwszego rzędu, gdyż $\lim\limits_{x\to 0} (2x+3x^2+x^7)/x=2$.

W taki sam sposób określamy małe rzędu drugiego, trzeciego,... Nie należy sądzić, że nasza skala jest zupełna. Gdyby tak było, wówczas każda funkcja $\varphi(x)$ dążąca do zera musiałaby być małą pierwszego rzędu, albo drugiego, albo jakiegoś innego wyższego rzędu. Łatwo przekonać się, że tak nie jest. Np. funkcja $\varphi(x)=x^{7/5}$ dąży do zera prędzej niż x, lecz wolniej niż x^2.

Czytelnik pomyśli może, że skala nasza dałaby się uzupełnić przez wprowadzenie *ułamkowych* rzędów, że moglibyśmy np. powiedzieć: $x^{7/5}$ jest małą rzędu $7/5$. Przekonamy się jednak wkrótce, że i wówczas skala nie byłaby zupełna. A z drugiej strony rzędy *całkowite*, określone powyżej, są w zastosowaniach praktycznych o tyle ważniejsze od wszelkich innych, że nie warto próbować uzupełniania naszej skali.

Liczby wielkie różnych rzędów. Możemy ustalić analogiczne określenia dla przypadku, w którym $\varphi(x)$ przybiera duże wartości, gdy x jest małą liczbą. Powiemy tedy, że $\varphi(x)$ jest liczbą wielką rzędu k, jeżeli $\varphi(x)/x^{-k}=x^k\varphi(x)$ dąży do granicy różnej od zera, gdy $x\to 0$.

Można również ustalić odpowiednie określenia dla przypadku, gdy $x\to\infty$ lub gdy $x\to a$. Jeżeli np. $x^k\varphi(x)$ dąży do granicy różnej od zera, gdy $x\to\infty$, wówczas powiemy, że $\varphi(x)$ jest liczbą małą rzędu k, gdy x jest wielką liczbą, jeżeli zaś $(x-a)^k\varphi(x)$ dąży do granicy różnej od zera, gdy $x\to a$, powiemy, że $\varphi(x)$ jest liczbą wielką rzędu k, gdy x jest blizkie a.

7*). $\lim\sqrt{1+x}=\lim\sqrt{1-x}=1$.

8. $\lim\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$. [Pomnożyć licznik i mianownik przez $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$.]

9. Zbadać zachowanie się funkcji $(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})/x^n$ w założeniu, że $x\to 0$ i że m i n są liczbami całkowitemi dodatniemi.

10. $\lim(\sqrt{1+x+x^2}-1)/x={}^1/_2$.

11. $\lim\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}=1$.

12. Zbudować wykres funkcji

$$y=\left\{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-{}^1/_2}+\frac{1}{x-{}^1/_3}+\frac{1}{x-{}^1/_4}\right\}\Big/\left\{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-{}^1/_2}+\frac{1}{x-{}^1/_3}+\frac{1}{x-{}^1/_4}\right\}.$$

Czy funkcja ta dąży do granicy, gdy $x\to 0$?

13. $\lim\dfrac{\sin x}{x}=1$.

[W podręcznikach elementarnej trygonometrji można znaleźć dowód następujących nierówności (które zresztą wynikają bezpośrednio z określenia miary łukowej i funkcji trygonometrycznych **):

$$\text{przy}\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\quad\text{mamy}$$

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

Stąd wynika, że
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

---

*) W tym i w następnych przykładach należy rozumieć, że $x\to 0$, jeżeli nie jest wyraźnie zaznaczone, do jakiej wartości dąży x.

**) Określenie miary łukowej opiera się na założeniu, że każdemu łukowi koła daje się podporządkować jednoznacznie liczba, zwana *długością* łuku. Dowód nierówności, o których mowa, opiera się na pewnych własnościach „długości", np. na tym, że cięciwa jest krótsza od podpartego przez nią łuku: w szkole średniej zakładamy zazwyczaj te własności, jako „oparte na intuicji gieometrycznej". W rozdziale VII pomówimy o sposobach przeprowadzenia ścisłego dowodu tych twierdzeń.

czyli $$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Ale $2\sin^2\frac{x}{2}<2(\frac{1}{2}x)^2<\frac{x^2}{2}$, zatym $\lim\limits_{x\to+0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0$ czyli

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Ponieważ $\frac{\sin x}{x}$ jest funkcją parzystą, zatym twierdzenie zostało dowiedzione.]

14. $\lim\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. 15. $\lim\frac{\sin ax}{x}=a$. Czy to jest prawdą przy $a=0$?

16. $\lim\frac{\text{arc}\sin x}{x}=1$. [Kładziemy $x=\sin y$.]

17. $\lim\frac{\text{tg}\, ax}{x}=a$; $\lim\frac{\text{arc tg}\, ax}{x}=a$.

18. $\lim\frac{\text{cosec}\, x-\text{ctg}\, x}{x}=\frac{1}{2}$. 19. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{\text{tg}^2\pi x}=\frac{1}{2}$.

20. Jak zachowują się funkcje $\sin(1/x)$, $(1/x).\sin(1/x)$, $x\sin(1/x)$, gdy $x\to0$? [Pierwsza wykonywa wahania skończone, druga nieskończone, trzecia dąży do zera. Żadna z nich nie jest określona przy $x=0$.]

21. Czy funkcja $y=\frac{\sin(1/x)}{\sin(1/x)}$ dąży do granicy, gdy $x\to0$?

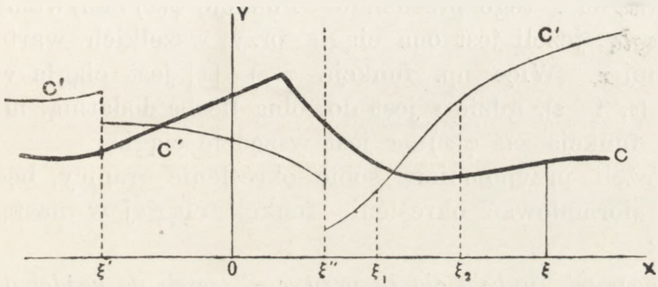
[*Nie.* Mamy $y=1$ z wyjątkiem przypadku, gdy $\sin(1/x)=0$, czyli gdy $x=1/\pi, 1/2\pi, \ldots, -1/\pi, -1/2\pi, \ldots$ Przy tych wartościach na x, funkcja przybiera kształt $^0/_0$, który nie ma żadnego sensu, zatym y nie jest określone dla nieskończenie wielu wartości zmiennej x, leżących w pobliżu wartości $x=0$.]

22. Dowieść, że przy m całkowitym mamy $[x]\to m$ oraz $x-[x]\to0$, gdy $x\to m+0$, i że $[x]\to m-1$, $x-[x]\to1$, gdy $x\to m-0$.

91. Funkcje ciągłe zmiennej rzeczywistej. Czytelnik posiada wyobrażenie *krzywej ciągłej*. Np. krzywą C na rys. 37 nazwie on niewątpliwie ciągłą, natomiast o krzywej C' powie zapewne, że jest ona naogół ciągła, ale staje się nieciągłą w punktach $x=\xi'$ i $x=\xi''$.

Każdą z tych krzywych możemy uważać za wykres jakiejś funkcji; stąd powstaje myśl nazwania ciągłemi tych funkcji, których wykresy są krzywemi ciągłemi; wszystkie inne funkcje wypadnie nazwać nieciągłemi. Postarajmy się zbadać dokładniej, na jakich własnościach opiera się ta klasyfikacja funkcji.

Przedewszystkim jest rzeczą jasną, że badanie własności funkcji $y=\varphi(x)$, której wykresem jest krzywa C, daje się sprowadzić do badania jakiejś własności, którą ta krzywa posiada w każdym swoim punkcie. Jeśli chcemy określić pojęcie ciągłości *dla wszystkich wartości zmiennej* x, musimy najpierw uczynić to *dla poszczególnych wartości* tej zmiennej. Obierzmy tedy



Rys. 37.

jakąś wartość zmiennej x, np. $x=\xi$, i zastanówmy się, jakie są własności charakterystyczne funkcji $\varphi(x)$ przy $x=\xi$.

Przedewszystkim, funkcja $\varphi(x)$ *jest określona przy* $x=\xi$. Oczywista rzecz, że warunek ten jest konieczny, gdyż w przeciwnym razie na krzywej brakowałoby punktu, odpowiadającego wartości $x=\xi$.

Powtóre, funkcja $\varphi(x)$ *jest określona przy wszystkich wartościach* x *w pobliżu* $x=\xi$. Ściślej mówiąc, możemy znaleźć taki przedział, którego wewnętrznym punktem jest $x=\xi$, że każdej wartości x, należącej do tego przedziału, odpowiada w zupełności określona wartość funkcji $\varphi(x)$.

Po trzecie, *gdy* x *dąży z którejkolwiek strony do* ξ, *wówczas* $\varphi(x)$ *dąży do wartości* $\varphi(\xi)$.

Wymienione cechy nie wyczerpują wszystkich własności, które posiada obraz krzywej C, ale są to niewątpliwie najprostsze i najbardziej zasadnicze własności: wykres jakiejkolwiek funkcji, posiadający te własności, odpowiada naszej intuicji linji krzywej ciągłej. Wobec tego przyjmujemy powyższe własności za cechy charakterystyczne ciągłości i wypowiadamy następujące

Określenie. *O funkcji* $\varphi(x)$ *powiadamy, że jest ciągła przy* $x=\xi$, *jeżeli dąży ona do granicy, gdy* x *dąży do* ξ, *czy to z jednej czy z drugiej strony, i jeżeli obie te granice naszej funkcji równają się* $\varphi(\xi)$.

Teraz możemy określić, co należy rozumieć przez *ciągłość w przedziale.* Powiadamy, że funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła w pewnym przedziale wartości zmiennej x, jeżeli jest ciągła dla każdej wartości x tego przedziału. Funkcję $\varphi(x)$ nazywamy *wszędzie ciągłą,* jeżeli jest ona ciągła przy wszelkich wartościach zmiennej x. Więc np. funkcja $\varphi(x)=[x]$ jest ciągła w przedziale $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią, mniejszą od $^1/_2$, funkcja zaś $\varphi(x)=x$ jest wszędzie ciągła.

Jeżeli przypomnimy sobie określenie granicy, będziemy mogli sformułować określenie funkcji ciągłej w następujący sposób:

$\varphi(x)$ *jest funkcją ciągłą przy* $x=\xi$, *jeżeli do każdej dowolnie zadanej liczby dodatniej* δ *możemy dobrać taką liczbę* $\varepsilon(\delta)$, *że*

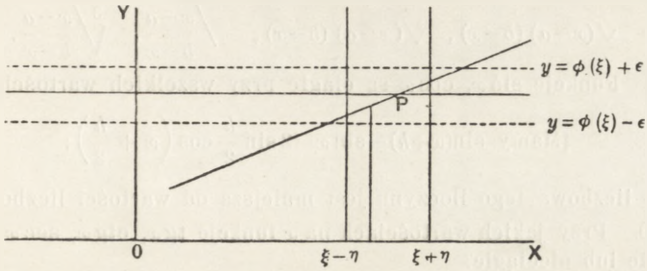
$$|\varphi(x)-\varphi(\xi)|<\delta,$$

o ile tylko
$$0\leqq|x-\xi|\leqq\varepsilon(\delta).$$

Często musimy rozważać zachowanie się i własności funkcji w jakimś oznaczonym przedziale (a, b). W tym wypadku, jeżeli chodzi o ciągłość funkcji przy krańcach przedziału, powiadamy, że funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła przy $x=a$, jeżeli $\varphi(a+0)$ istnieje i równa się $\varphi(a)$; tak samo powiadamy, że $\varphi(x)$ jest ciągła przy $x=b$, jeżeli $\varphi(b-0)$ istnieje i równa się $\varphi(b)$.

92. Powyższe określenie ciągłości można w prosty sposób zilustrować gieometrycznie. Poprowadźmy dwie równoległe proste $y=\varphi(\xi)-\varepsilon$, $y=\varphi(\xi)+\varepsilon$. Nierówność $|\varphi(x)-\varphi(\xi)|<\varepsilon$ wyraża fakt, że pomiędzy temi dwiema prostemi leży punkt krzywej, odpowiadający wartości x. Tak samo nierówność $|x-\xi|\leqq\eta$ wyraża fakt, że x leży w przedziale $(\xi-\eta, \xi+\eta)$. Wobec tego nasze określenie funkcji ciągłej powiada, że jeżeli poprowadzimy dwie dowolnie blizkie siebie proste poziome, będziemy mogli wyznaczyć zapomocą dwuch prostych pionowych taki pas płaszczyzny, że część krzywej, zawarta w tym pasie będzie jednocześnie zawarta między naszemi prostemi poziomemi.

Zbadamy teraz ciągłość niektórych szczególnych typów



Rys. 38.

funkcji. W rozdziale II mieliśmy już z niemi do czynienia, lecz tam, jak w swoim czasie zaznaczyliśmy, byliśmy zmuszeni założyć, że funkcje te są ciągłe.

Przykłady XL. 1. Suma (lub iloczyn) funkcji, ciągłych w pewnym punkcie, jest funkcją ciągłą w tym punkcie. Iloraz dwuch funkcji, ciągłych w pewnym punkcie, jest również funkcją ciągłą w tym punkcie, o ile mianownik nie równa się w tym punkcie zeru. [Wynika z Przykł. XXXVIII, 1.]

2. Wielomian zmiennej x jest funkcją ciągłą przy wszelkich wartościach x. Funkcja ułamkowa wymierna jest ciągła przy wszystkich wartościach x z wyjątkiem tylko tych, przy których mianownik przybiera wartość 0. [Wynika z Przykł. XXXVIII, 6, 7.]

3. $\sqrt{x}$ jest funkcją ciągłą przy wszelkich dodatnich wartościach x [Przykł. XXXVIII, 8.] Funkcja ta nie jest określona przy $x<0$, natomiast przy $x=0$ jest ona ciągła, na mocy uwagi, uczynionej w końcu § 91. To samo powiedzieć można o $x^{m/n}$, gdzie m, n są to dowolne liczby dodatnie całkowite, a n jest liczbą parzystą.

4. Funkcja $x^{m/n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, jest ciągła przy wszelkich wartościach na x.

5. Funkcja $1/x$ nie jest ciągła przy $x=0$. Nie posiada ona żadnej wartości przy $x=0$, jak również nie dąży do żadnej granicy, gdy $x\to 0$.

6. Zbadać ciągłość funkcji $x^{-m/n}$ przy $x=0$, gdzie m, n to liczby całkowite dodatnie.

7. Jeżeli a jest pierwiastkiem równania $Q(x)=0$, wówczas funkcja wymierna $R(x)=P(x)/Q(x)$ jest nieciągła przy $x=a$. Np. funkcja $(x^2+1)/(x^2-3x+2)$ jest nieciągła przy $x=1$. Jeżeli funkcja wymierna jest nieciągła przy jakiejś wartości x, wówczas można zauważyć dwa fakty: (a) funkcja nie jest określona dla tej wartości x, (b) funkcja dąży

do $+\infty$ lub do $-\infty$, zależnie od tego, z której strony x zbliża się do tej swej wartości. Ten szczególny rodzaj nieciągłości nazywają **nieskończonością** funkcji. Jest to najpospolitszy rodzaj nieciągłości.

8. Zbadać ciągłość funkcji

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}, \quad \sqrt[3]{(x-a)(b-x)}, \quad \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}, \quad \sqrt[3]{\frac{x-a}{b-x}}.$$

9. Funkcje $\sin x$, $\cos x$ są ciągłe przy wszelkich wartościach x.

[Mamy $\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$;

wartość liczbowa tego iloczynu jest mniejsza od wartości liczbowej h.]

10. Przy jakich wartościach na x funkcje $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ są ciągłe lub nieciągłe?

11. Jeżeli $f(y)$ jest funkcją ciągłą przy $y=\eta$ i jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x, przyczym $\varphi(\zeta)=\eta$, wówczas $f\{\varphi(x)\}$ jest funkcją ciągłą przy $x=\zeta$.

12. Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą przy pewnej wartości x, wówczas każdy wielomian kształtu $a\{\varphi(x)\}^m+\dots$ jest funkcją ciągłą przy tej samej wartości x.

13. Zbadać ciągłość funkcji

$$1/(a\cos^2 x+b\sin^2 x), \quad \sqrt{2+\cos x}, \quad \sqrt{1+\sin x}, \quad 1/\sqrt{1+\sin x},$$

14. Funkcje $\sin(1/x)$, $x\sin(1/x)$, $x^2\sin(1/x)$ są ciągłe przy wszelkich wartościach x, z wyjątkiem tylko $x=0$.

15. Funkcja $\varphi(x)$, równa zeru przy $x=0$, przy innych zaś wartościach x równa $x\sin(1/x)$, jest ciągła przy wszelkich wartościach na x.

16. Funkcje $[x]$ oraz $x-[x]$ są nieciągłe przy wszelkich całkowitych wartościach na x.

17. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

$$[x^2], \quad [\sqrt{x}], \quad \sqrt{x-[x]}, \quad [x]+\sqrt{x-[x]}, \quad [2x], \quad [x]+[-x].$$

18. **Klasyfikacja nieciągłości.** Powyższe przykłady nasuwają pomysł następującej klasyfikacji różnych typów nieciągłości:

(I) Przypuśćmy, że $\varphi(x)$ dąży do granicy, gdy $x\to a$ czy to przez wartości mniejsze od a, czy przez wartości od a większe. Oznaczmy te granice przez $\varphi(a-0)$ i $\varphi(a+0)$. Aby funkcja $\varphi(x)$ była ciągła przy $x=a$, trzeba i wystarcza, żeby $\varphi(x)$ była określona przy $x=a$ i żebyśmy mieli $\varphi(a-0)=\varphi(a)=\varphi(a+0)$. Nieciągłość może powstać w rozmaity sposób.

(α) Może się zdarzyć, że $\varphi(a-0)=\varphi(a+0)$, ale $\varphi(a)$ nie jest określone albo też nie równa się $\varphi(a-0)$ ani $\varphi(a+0)$. Np. jeżeli $\varphi(x)=x\sin(1/x)$ i $a=0$, wówczas $\varphi(0-0)=\varphi(0+0)=0$, ale $\varphi(x)$ nie jest określone przy $x=0$. Jeżeli $\varphi(x)=[1-x^2]$ i $a=0$, wówczas $\varphi(0-0)=\varphi(0+0)=0$, ale $\varphi(0)=1$.

(β) Może zdarzyć się, że $\varphi(a-0)\neq\varphi(a+0)$. W takim razie $\varphi(a)$ może równać jednej którejkolwiek z tych granic, może jednak nie równać się ani jednej ani drugiej, a nawet może być nieokreślone. Przykładem pierwszego przypadku jest funkcja $\varphi(x)=[x]$, dla której $\varphi(0-0)=-1$, $\varphi(0+0)=\varphi(0)=0$. Przykładem drugiego przypadku jest $\varphi(x)=[x]-[-x]$, gdzie $\varphi(0-0)=-1$, $\varphi(0+0)=1$, $\varphi(0)=0$. Przykładem trzeciego przypadku jest funkcja $\varphi(x)=[x]+x\sin(1/x)$, dla której $\varphi(0-0)=-1$, $\varphi(0+0)=0$, a $\varphi(0)$ jest nieokreślone.

We wszystkich tych przypadkach powiadamy, że funkcja $\varphi(x)$ ma **prostą nieciągłość** w punkcie $x=a$. Do tej samej kategorji możemy zaliczyć te przypadki, w których funkcja jest określona tylko z jednej strony wartości $x=a$, tak iż istnieje jedna tylko z dwuch granic $\varphi(a+0)$, $\varphi(a-0)$, ale $\varphi(a)$ albo wcale nie jest określone, albo jest różne od tej z dwuch powyższych granic, która dla danej funkcji istnieje.

Z rozważań § 88 wynika odrazu, że *funkcja, stale rosnąca lub stale malejąca w pobliżu wartości $x=a$, może mieć conajwyżej prostą nieciągłość przy $x=a$.*

(II) Może się zdarzyć, że z dwuch granic $\varphi(a-0)$, $\varphi(a+0)$ istnieje jedna tylko (albo nie istnieje żadna) i że np. przy nieistnieniu granicy $\varphi(a+0)$ mamy $\varphi(x)\to+\infty$ lub $\varphi(x)\to-\infty$, gdy $x\to a+0$, tak iż $\varphi(x)$ dąży albo do granicy albo do $+\infty$ lub do $-\infty$, gdy x dąży do a z jednej lub z drugiej strony. Do tego typu należą np. funkcje $\varphi(x)=1/x$ i $\varphi(x)=1/x^2$, gdy $a=0$. W takich wypadkach powiadamy, że w punkcie $x=a$ funkcja $\varphi(x)$ posiada **nieskończoność** albo, że przechodzi przez nieskończoność. Do tej kategorji zaliczamy te funkcje, które dążą do $+\infty$ lub $-\infty$, gdy $x\to a$ z którejś jednej strony, lecz zarazem nie są określone po drugiej stronie wartości $x=a$.

(III) Punkt nieciągłości, nie należący do żadnej z dwuch poprzednich kategorji, nazywamy punktem **nieciągłości oscylacyjnej.** Takim jest np. punkt $x=0$ dla funkcji $\sin(1/x)$ lub $(1/x)\sin(1/x)$.

19. Zbadać rodzaj nieciągłości funkcji $\dfrac{\sin x}{x}$, $[x]+[-x]$, $\operatorname{cosec} x$, $\sqrt{1/x}$, $\sqrt[3]{1/x}$, $\operatorname{cosec}(1/x)$, $\dfrac{\sin(1/x)}{\sin(1/x)}$ przy $x=0$.

20. Funkcja, równa 1 przy x wymiernym, przy x zaś niewymiernym równa 0, jest nieciągła przy wszelkich wartościach x. Wszędzie nieciągła jest również każda funkcja, która jest określona wyłącznie dla niewymiernych, albo wyłącznie dla wymiernych wartości x.

21. Funkcja, która równa się x przy x niewymiernym, przy x zaś wymiernym i równym p/q równa się $\sqrt{(1+p^2)/(1+q^2)}$, jest nieciągła dla wszelkich ujemnych i dla wszelkich dodatnich wymiernych wartości zmiennej x, natomiast jest ciągła dla dodatnich niewymiernych wartości x.

22. Zbadać, które z funkcji, rozważanych w Przykł. XXXIV, są nieciągłe i określić rodzaj ich nieciągłości. [Dla przykładu zbadajmy funkcję $y=\lim x^n$. Tu y jest określone przy $-1<x\leqq 1$, a mianowicie: $y=0$ przy $-1<x<1$, oraz $y=1$ przy $x=1$. Punkty $x=1$ i $x=-1$ są punktami prostej nieciągłości.]

93. O zasadniczej własności funkcji ciągłych. Czytelnik sądzi może, że analiza wyobrażenia krzywej ciągłej, przeprowadzona w § 91, nie jest najprostsza ani najbardziej naturalna, że prostszą byłaby następująca analiza. Niech A, B będą dwoma punktami na wykresie funkcji $\varphi(x)$ i niech spółrzędne ich będą odpowiednie x_0, $\varphi(x_0)$ oraz x_1, $\varphi(x_1)$. Wykreślmy dowolną prostą λ, przechodzącą pomiędzy punktami A i B. Zdrowy rozsądek powiada, że jeśli wykres funkcji $\varphi(x)$ jest ciągły, musi on przeciąć prostą λ.

Jeżeli uważamy to za zasadniczą własność krzywych ciągłych, wówczas bez szkody dla ogólności rozumowania możemy przypuścić, że prosta λ jest równoległa do osi x-ów. Rzędne punktów A, B nie mogą w takim razie być równe sobie; przypuśćmy, że $\varphi(x_1) > \varphi(x_0)$. Niech $y = \eta$ będzie równaniem prostej λ; mamy wobec tego nierówności $\varphi(x_0) < \eta < \varphi(x_1)$. Orzeczenie: „wykres funkcji $\varphi(x)$ przecina prostą λ" jest równoznaczne z orzeczeniem: „istnieje wartość x, zawarta między x_0 i x_1, przy której $\varphi(x) = \eta$".

Wnosimy stąd, że funkcji ciągłej $\varphi(x)$ powinniśmy przypisać następującą własność:

$$\textit{jeżeli} \qquad \varphi(x_0) = y_0\,, \quad \varphi(x_1) = y_1$$

i jeżeli $y_0 < \eta < y_1$, *wówczas istnieje taka wartość zmiennej* x, *zawarta między* x_0 *i* x_1, *przy której* $\varphi(y) = \eta$. *Innemi słowami: gdy* x *zmienia się od* x_0 *do* x_1, *wówczas* y *musi bodaj raz jeden przybierać wszelkie wartości, zawarte między* y_0 *i* y_1.

Dowiedziemy, że jeśli $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, w znaczeniu § 91-go, wówczas posiada ona istotnie taką własność. Istnieją wartości x, leżące w prawo od x_0 i takie, że $\varphi(x) < \eta$. W rzeczy samej, $\varphi(x_0) < \eta$, zatym $\varphi(x) < \eta$, jeżeli różnica $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ jest liczbowo mniejsza od $\eta - \varphi(x_0)$. Ponieważ jednak $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą przy $x = x_0$, zatym dla wartości x, dostatecznie blizkich x_0, warunek ten jest spełniony. W taki sam sposób dowodzimy, że istnieją wartości x, leżące w lewo od x_1, takie, że $\varphi(x) > \eta$.

Teraz możemy dowieść naszego twierdzenia zapomocą sprowadzenia do niedorzeczności. Jakoż przypuśćmy, że niema żadnej wartości x, zawartej między x_0 i x_1, dla której byłoby $\varphi(x) = \eta$. W takim razie dla każdej wartości x przedziału

(x_0, x_1) funkcja $\varphi(x)$ ma wartość albo większą, albo mniejszą od η.

Podzielmy wszystkie wartości x przedziału (x_0, x_1) na dwie klasy L, R, a to w następujący sposób:

(1) do klasy L zaliczmy wszystkie takie wartości ζ zmiennej x, dla których spełniona jest nierówność $\varphi(x) < \eta$ nie tylko przy $x=\zeta$, ale również przy jakimkolwiek x, zawartym w przedziale (x_0, ζ);

(2) do klasy R zaliczmy wszystkie inne wartości zmiennej x, tj. wszystkie wartości ζ, które albo spełniają nierówność $\varphi(\zeta) \geqq \eta$, albo też mają tę własność, że w przedziale (x_0, ζ) istnieje jakaś wartość zmiennej x, spełniająca nierówność $\varphi(x) \geqq \eta$.

Rzecz jasna, że podział ten spełnia trzy warunki twierdzenia Dedekinda i że wyznacza on przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych. Niech ζ_0 będzie liczbą rzeczywistą, odpowiadającą temu przekrojowi. Zgodnie z naszą hipotezą, musi być $\varphi(\zeta_0) \neq \eta$.

Przypuśćmy z początku, że $\varphi(\zeta_0) > \eta$, że więc ζ_0 należy do klasy wyższej, i niech będzie $\varphi(\zeta_0) = \eta + k$. W takim razie, dla wszelkiego $\zeta' < \zeta_0$ mielibyśmy $\varphi(\zeta') < \eta$, zatym byłoby

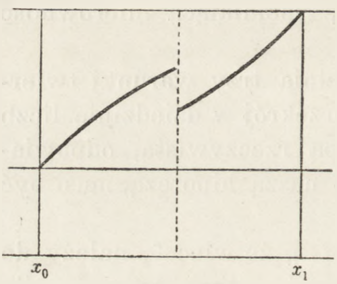
$$\varphi(\zeta_0) - \varphi(\zeta') > k,$$

co przeczy warunkowi ciągłości funkcji przy $x = \zeta_0$.

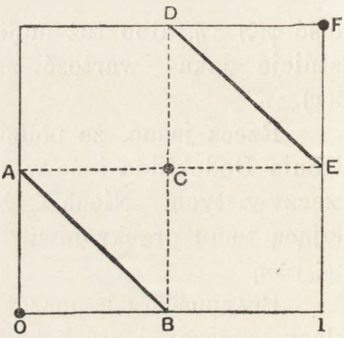
Teraz przypuśćmy, że $\varphi(\zeta_0) < \eta$. Jeżeli $\zeta' > \zeta_0$, wówczas albo zachodzi nierówność $\varphi(\zeta') \geqq \eta$, albo też możemy znaleźć taką liczbę ζ'', zawartą między ζ_0 i ζ', że będzie $\varphi(\zeta'') \geqq \eta$. W każdym razie możemy znaleźć liczbę, dowolnie mało różniącą się od ζ_0, a przytym taką, że odpowiadająca jej wartość funkcji różni się od $\varphi(\zeta_0)$ więcej niż o k. Znów mamy wniosek, sprzeczny z hipotezą ciągłości funkcji $\varphi(x)$ przy $x = \zeta_0$.

Tak więc przypuszczenie, że $\varphi(x)$ nie przybiera nigdzie wartości η, jest mylne, i twierdzenie zostało dowiedzione. Oczywista rzecz, że musi być mianowicie $\varphi(\zeta_0) = \eta$.

94. Łatwo przekonać się, że twierdzenie odwrotne nie jest słuszne. Np. funkcja przedstawiona na rys. 39, jakkolwiek jest nieciągła, jednak przybiera przynajmniej raz jeden każdą wartość, zawartą między $\varphi(x_0)$ i $\varphi(x_1)$. Powiem więcej: funkcja może nie być ciągłą, pomimo że przybiera w pewnym przedziale każdą wartość *tylko raz jeden.* Niech będzie np. funkcja $\varphi(x)$, określona w przedziale od $x=0$ do $x=1$ w następujący sposób: przy $x=0$, $\varphi(x)=0$; przy $0<x<{}^1/_2$, $\varphi(x)={}^1/_2-x$; przy $x={}^1/_2$, $\varphi(x)={}^1/_2$; przy ${}^1/_2<x<1$, $\varphi(x)={}^3/_2-x$; wreszcie przy $x=1$, $\varphi(x)=1$. Wykres funkcji mamy na rys. 40; zawiera on punkty O, C, F, lecz nie zawiera punktów A, B, D, E. Rzecz jasna, że gdy x zmienia się od 0 do 1, $\varphi(x)$ przybiera raz i tylko raz jeden każdą wartość między $\varphi(0)=0$ i $\varphi(1)=1$, a jednak funkcja $\varphi(x)$ jest nieciągła przy $x=0$, ${}^1/_2$, 1.



Rys. 39.



Rys. 40.

Zresztą krzywe, z któremi mamy do czynienia w matematyce elementarnej, składają się zawsze ze s k o ń c z o n e j l i c z b y c z ę ś c i, w z d ł u ż k t ó r y c h y z m i e n i a s i ę w t y m s a m y m k i e r u n k u. Otóż łatwo wykazać, że jeśli $y=\varphi(x)$ stale rośnie lub stale maleje, gdy x zmienia się od x_0 do x_1, wówczas dwa pojęcia ciągłości, omówione w §§ 91 i 93, są równoważne, to znaczy, że jeśli $\varphi(x)$ przybiera każdą wartość między $\varphi(x_0)$ i $\varphi(x_1)$, wówczas $\varphi(x)$ musi być funkcją ciągłą w znaczeniu, omówionym w § 91. Istotnie, niech ζ będzie jakąkolwiek wartością zmiennej x, zawartą między x_0 i x_1. Gdy $x\to\zeta$ przez wartości mniejsze od ζ, wówczas $\varphi(x)$ dąży do granicy $\varphi(\zeta-0)$; gdy $x\to\zeta$ przez wartości większe od ζ, wówczas $\varphi(x)$ dąży do granicy $\varphi(\zeta+0)$. Funkcja nasza jest ciągła wówczas i tylko wówczas, jeżeli

$$\varphi(\zeta-0)=\varphi(\zeta)=\varphi(\zeta+0).$$

Gdyby którekolwiek z tych dwu równań było niesłuszne, np. pierwsze, to funkcja $\varphi(x)$, wbrew naszym założeniom, nie mogłaby przybierać żadnej wartości, zawartej między $\varphi(\zeta-0)$ i $\varphi(\zeta)$. Tak więc $\varphi(x)$ musi być funkcją ciągłą.

95. Obszar zmienności funkcji ciągłej. W niniejszym i w następnym paragrafie dowiedziemy kilku ogólnych twierdzeń, dotyczących funkcji ciągłych. Weźmy pod uwagę funkcję $\varphi(x)$, co do której zakładamy na razie tylko tyle, że jest ona określona przy każdej wartości x, należącej do przedziału (a, b).

Może istnieć taka liczba K, że $\varphi(x) \leqq K$ przy wszelkich wartościach x, należących do tego przedziału. W takim razie powiadamy, że funkcja $\varphi(x)$ jest **ograniczona od góry** (porówn. § 73 i nast.).

Jeżeli istnieje jedna taka liczba K, to istnieje ich nieskończenie wiele, gdyż każda liczba $K' > K$ czyni zadość temu samemu warunkowi. Istnieje jednak *najmniejsza liczba* K, której nie może przekroczyć funkcja $\varphi(x)$. Istotnie, podzielmy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych na dwie klasy L, R, zaliczając do L te wszystkie liczby, które mogą być przekroczone przez naszą funkcję, do R zaś te, których $\varphi(x)$ nigdy nie przekroczy. Otrzymujemy w ten sposób przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych, któremu odpowiada jakaś liczba M. Ta liczba M musi należeć do klasy R, gdyż w przeciwnym razie funkcja $\varphi(x)$ mogłaby przybrać wartość od M większą, np. $M+\delta$, a wówczas istniałoby nieskończenie wiele liczb, zawartych w przedziale od M do $M+\delta$, i takich, że funkcja $\varphi(x)$ przekroczyłaby każdą z nich. Otóż to jest niemożliwe, gdyż liczby większe od M w żadnym razie nie mogą należeć do klasy L. Tak więc *M jest najmniejszą liczbą, której nie może przekroczyć funkcja* $\varphi(x)$; tę liczbę M nazywamy **kresem (górnym) wyższym** *funkcji* $\varphi(x)$ *w przedziale* (a, b).

Tak samo może się zdarzyć, że istnieje *największa liczba* m, poniżej której nie mogą spaść wartości funkcji $\varphi(x)$; powiadamy wówczas, że $\varphi(x)$ jest funkcją **ograniczoną od dołu,** a liczbę m nazywamy **dolnym (niższym) kresem** tej funkcji. Jeżeli istnieją obie liczby M i m, nazywamy $\varphi(x)$ funkcją ograniczoną w przedziale (a, b). Są to liczby: największa i najmniejsza, dla których sprawdzają się nierówności

$$m \leqq \varphi(x) \leqq M,$$

gdy x jest zawarte w przedziale (a, b). Rzecz jasna, że, jeśli $a < b < c$, a funkcja $\varphi(x)$ jest ograniczona zarówno w przedziale (a, b), jak i w przedziale (b, c), to jest również ograniczona w przedziale (a, c).

Jeżeli nie istnieje liczba M, o której wyżej była mowa, wówczas $\varphi(x)$ nie posiada górnego kresu i może przybierać wartości, większe od jakiejkolwiek zadanej liczby. Tak samo zdarzyć się może, że $\varphi(x)$ nie posiada dolnego kresu.

Twierdzenie I. *Funkcja $\varphi(x)$, ciągła w przedziale (a, b), jest w tym przedziale ograniczona.*

Dla zmiennej x możemy znaleźć przedział (a, b), w którym $\varphi(x)$ jest funkcją ograniczoną, gdyż z ciągłości funkcji $\varphi(x)$ w punkcie $x=a$ wynika, że jakkolwiek małą byłaby liczba δ, możemy znaleźć przedział (a, ζ) taki, że dla każdego x w tym przedziale wartość funkcji $\varphi(x)$ zawiera się między $\varphi(a)-\delta$ i $\varphi(a)+\delta$. Tak więc $\varphi(x)$ jest w tym przedziale ograniczona.

Podzielmy teraz wszystkie punkty ζ przedziału (a, b) na dwie klasy L, R, zaliczając do L te punkty ζ, w których $\varphi(\zeta)$ jest funkcją, ograniczoną w przedziale (a, ζ), do klasy zaś R wszystkie inne punkty. Klasa L niewątpliwie istnieje; pozostaje tedy dowieść, że klasa R nie istnieje. Jakoż przypuśćmy, że R istnieje, i niech β będzie liczbą, odpowiadającą przekrojowi, wyznaczonemu przez L i R. Funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła w punkcie $x=\beta$, zatym, jakkolwiek mała byłaby liczba δ, możemy wyznaczyć przedział $(\beta-\eta, \beta+\eta)$*), w którym

$$\varphi(\beta)-\delta < \varphi(x) < \varphi(\beta)+\delta .$$

Tak więc $\varphi(x)$ jest ograniczona w przedziale $(\beta-\eta, \beta+\eta)$. Ale $\beta-\eta$ należy do klasy L, zatym funkcja $\varphi(x)$ jest ograniczona w przedziale $(a, \beta-\eta)$ i, co za tym idzie, w przedziale $(a, \beta+\eta)$. Według naszego założenia, $\beta+\eta$ powinno należeć do klasy R, tak iż $\varphi(x)$ nie może być ograniczona w przedziale $(a, \beta+\eta)$. Ta sprzeczność wskazuje, że klasa R nie istnieje i że $\varphi(x)$ jest ograniczona w całym przedziale (a, b).

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła w prze-*

---

*) Jeżeli $\beta=b$, należy przedział ten zastąpić przez $(\beta-\eta, \beta)$, a liczbę $\beta+\eta$ zastąpić w tym dowodzie przez β.

dziale (a, b) *i jeżeli* M, m *stanowią jej górny i dolny kres w tym przedziale, wówczas* $\varphi(x)$ *musi w tym przedziale przybrać przynajmniej raz jeden każdą z wartości* M, m.

Istotnie, niech będzie dowolna liczba dodatnia δ; możemy znaleźć taką wartość x, że będzie $M-\varphi(x) < \delta$ czyli $1/[M-\varphi(x)] > 1/\delta$. Tak więc $1/[M-\varphi(x)]$ nie jest funkcją ograniczoną i, na mocy twierdzenia 1, nie może być ciągłą. Ale $M-\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, zatym $1/[M-\varphi(x)]$ może być nieciągła tylko w tych punktach, w których mianownik równa się zeru (Przykł. XL, 1.). Takim jest właśnie punkt, w którym $M=\varphi(x)$. W taki sam sposób okazać można, że istnieje punkt, w którym $m=\varphi(x)$.

Dowód ten jest dość subtelny, to też wskażemy wkrótce dowód bezpośredni tego twierdzenia.

Przykłady XLI. 1. Jeżeli przy $x=0$ mamy $\varphi(x)=0$, przy innych zaś wartościach zmiennej x, mamy $\varphi(x)=1/x$, wówczas $\varphi(x)$ nie posiada ani górnego ani dolnego kresu w żadnym przedziale, którego punktem wewnętrznym jest $x=0$, np. w przedziale $(-1, +1)$.

2. Jeżeli przy $x=0$ mamy $\varphi(x)=0$, przy innych zaś wartościach x mamy $\varphi(x)=1/x^2$, wówczas w przedziale $(-1, +1)$ funkcja $\varphi(x)$ posiada kres dolny $=0$, ale nie posiada kresu górnego.

3. Niech będzie $\varphi(x)=0$ przy $x=0$ oraz $\varphi(x)=\sin(1/x)$ przy wszelkich innych wartościach na x. Funkcja $\varphi(x)$ jest nieciągła przy $x=0$. W każdym przedziale $(-\delta, +\delta)$ ma ona kres dolny $=-1$ i kres górny $=+1$; te dwie wartości przybiera ona nieskończenie wiele razy.

4. Niech będzie $\varphi(x)=x-[x]$. Jest to funkcja nieciągła przy wszystkich całkowitych wartościach na x. W przedziale $(0, 1)$ dolny jej kres $=0$, górny zaś $=1$. Funkcja przybiera wartość 0 przy $x=0$ lub $x=1$, ale nigdy nie przybiera wartości 1.

5. Niech będzie $\varphi(x)=0$ przy x niewymiernym oraz $\varphi(x)=q$, jeżeli $x=p/q$, gdzie p, q są to liczby całkowite. Funkcja $\varphi(x)$ posiada dolny kres 0, ale niema kresu górnego. Gdyby przy $x=p/q$ było $\varphi(x)=(-1)^p.q$, wówczas $\varphi(x)$ nie miałaby ani dolnego, ani górnego kresu w żadnym przedziale.

96. O wahaniu się funkcji w przedziale. Niech $\varphi(x)$ oznacza dowolną funkcję, ograniczoną w przedziale (a, b), a M, m niech stanowią jej górny i dolny kres. Te dwie liczby będziemy teraz oznaczali symbolami $M(a, b)$, $m(a, b)$, a to w tym celu, żeby uwydatnić zależność kresów od liczb a, b. Różnicę

$$O(a, b)=M(a, b)-m(a, b)$$

nazwiemy **oscylacją (wahnięciem) funkcji** $\varphi(x)$ w przedziale (a, b).

Najprostsze własności tych liczb $M(a, b)$, $m(a, b)$, $O(a, b)$ są następujące:

(1) *Jeżeli* $a \leqq c \leqq b$, *wówczas* $M(a, b)$ *równa się większej z dwuch liczb* $M(a, c)$ *i* $M(c, b)$, *natomiast* $m(a, b)$ *równa się mniejszej z dwuch liczb* $m(a, c)$ *i* $m(c, b)$.

(2) $M(a, b)$ *jest funkcją rosnącą zmiennej* b, $m(a, b)$ *jest funkcją malejącą, a* $O(a, b)$ *jest funkcją rosnącą tej samej zmiennej* b.

(3) $O(a, b) \leqq O(a, c) + O(c, b)$.

Dwa pierwsze twierdzenia wypływają bezpośrednio z naszych określeń. Oznaczmy przez μ większą z dwuch liczb $M(a, c)$, $M(c, b)$ i niech będzie δ dowolna liczba dodatnia. W takim razie musi być $\varphi(x) \leq \mu$ zarówno w przedziale (a, c), jak w (c, b), a więc i w całym przedziale (a, b). Obok tego musi być $\varphi(x) > \mu - \delta$ dla pewnych punktów przedziału (a, c) lub przedziału (c, b), a więc i całego przedziału (a, b). Stąd wynika, że $M(a, b) = \mu$. W taki sam sposób ustalamy analogiczną własność liczby m. Dowiedliśmy tedy twierdzenia (1); twierdzenie (2) jest prostym wnioskiem z niego.

Oznaczmy teraz przez M_1 i M_2 odpowiednio większą i mniejszą z dwuch liczb $M(a, c)$, $M(c, b)$; tak samo m_1 i m_2 niech będą mniejszą i większą z dwuch liczb $m(a, c)$, $m(c, b)$. Ponieważ c należy do obu przedziałów, zatym $\varphi(c)$ nie jest większe od M_2 i nie jest mniejsze od m_2. Musi więc być $M_2 \geqq m_2$ i mamy

$$O(a, b) = M_1 - m_1 \leqq M_1 + M_2 - m_1 - m_2 .$$

Ale
$$O(a, c) + O(c, b) = M_1 + M_2 - m_1 - m_2 ,$$

a stąd wypływa twierdzenie (3).

97. Inny dowód twierdzenia 2, § 95. Niech ζ oznacza dowolną liczbę przedziału (a, b). Funkcja $M(a, \zeta)$ rośnie stale wraz z ζ i nigdy nie przekracza M. Możemy tedy zbudować przekrój liczb ζ, zaliczając do niższej klasy L wszystkie te liczby ζ, dla których $M(a, \zeta) < M$, do wyższej zaś klasy R te liczby ζ, dla których $M(a, \zeta) = M$. Niech β będzie liczbą, odpowiadającą temu przekrojowi. Jeżeli $a < \beta < b$, to przy wszelkim dodatnim η mamy

$$M(a, \beta - \eta) < M, \quad M(a, \beta + \eta) = M,$$

a więc (tw. (1), § 96)

$$M(\beta-\eta,\ \beta+\eta)=M.$$

Tak więc, gdy x jest dowolnie blizkie β, funkcja $\varphi(x)$ przybiera wartości dowolnie zbliżone do M, że zaś $\varphi(x)$ jest ciągła, zatym musi być $\varphi(\beta)=M$.

Jeżeli $\beta=a$, to $M(a, a+\eta)=M$. Jeżeli $\beta=b$, to $M(a, b-\eta)<M$, czyli $M(b-\eta, b)=M$. Obu tych przypadków łatwo dowieść.

Twierdzenia można dowieść również przez dzielenie przedziału na połowy (jak w § 64). Jeżeli przedział PQ, w którym M jest górnym kresem funkcji $\varphi(x)$, podzielimy na połowy, wówczas w jednej z tych połówek P_1Q_1 to samo M musi być znów górnym kresem naszej funkcji. Postępując dalej w taki sam sposób, utworzymy ciąg przedziałów PQ, P_1Q_1, P_2Q_2,... takich, że w każdym z nich górnym kresem funkcji $\varphi(x)$ będzie liczba M. Te przedziały dążą do pewnego punktu T; łatwo dowieść, że w tym punkcie $\varphi(x)$ przybiera wartość M.

98. O zbiorach przedziałów na prostej. Twierdzenie Heinego-Borela. Dowiedziemy teraz kilku twierdzeń, dotyczących oscylacji funkcji. Twierdzenia te są oderwane, ale bardzo doniosłe, szczególnie w teorji całkowania. Wszystkie one zależą od pewnego ogólnego twierdzenia, dotyczącego przedziałów na prostej.

Przypuśćmy, że mamy daną mnogość przedziałów na prostej. Nie czynimy żadnych założeń co do rodzaju tych przedziałów: może ich być liczba skończona lub nieskończenie wiele, mogą one zachodzić na siebie lub nie zachodzić *), niektóre z nich mogą być zawarte w innych.

Może nie od rzeczy będzie podać kilka przykładów mnogości przedziałów.

(1) Jeżeli przedział (0, 1) podzielimy na n równych części, otrzymamy mnogość skończoną, złożoną z n przedziałów, nie zachodzących na siebie i dokładnie pokrywających cały odcinek.

(2) Każdemu punktowi ζ przedziału (0, 1) podporządkujmy przedział $(\zeta-\varepsilon, \zeta+\varepsilon)$, gdzie ε jest liczbą dodatnią mniejszą od 1; punktowi 0 podporządkujmy przedział $(0, 0+\varepsilon)$, a punktowi 1 przedział $(1-\varepsilon, 1)$. Prócz tego odrzućmy każdą część przedziału, wystającą poza punkty 0 i 1. Określiliśmy w ten sposób nieskończoną mnogość przedziałów, śród których jest wiele zachodzących na siebie.

---

*) Wyrazu „zachodzić na siebie" użyliśmy w zwykłym znaczeniu: dwa odcinki zachodzą na siebie, jeżeli mają spólne punkty oprócz swych krańców. Np. przedziały $(0, {}^2/_3)$ oraz $({}^1/_3, 1)$ zachodzą na siebie. Natomiast o przedziałach $(0, {}^1/_2)$ i $({}^1/_2, 1)$ można powiedzieć, że *stykają się*.

(3) Każdemu punktowi wymiernemu p/q przedziału $(0,1)$ podporządkujmy przedział

$$\left(\frac{p}{q}-\frac{\varepsilon}{q^3},\ \frac{p}{q}+\frac{\varepsilon}{q^3}\right),$$

gdzie ε jest liczbą dodatnią mniejszą od 1. Uważajmy 0 za 0/1, a 1 za 1/1 i odrzućmy części przedziałów, wystające poza punkty 0, 1. Otrzymujemy nieskończoną mnogość przedziałów zachodzących na siebie, gdyż w przedziale, podporządkowanym punktowi p/q, istnieje nieskończenie wiele punktów wymiernych różnych od p/q.

Twierdzenie Heinego-Borela. *Przypuśćmy, że mamy dany przedział (a, b) oraz mnogość M przedziałów, z których każdy zawiera się w przedziale (a, b). Przypuśćmy dalej, że mnogość M posiada następujące własności:*

(1) *każdy punkt wewnętrzny przedziału (a, b)*) jest zarazem punktem wewnętrznym przynajmniej jednego przedziału mnogości M;*

(2) *punkt a jest lewym krańcem przynajmniej jednego przedziału mnogości, i tak samo punkt b jest prawym krańcem przynajmniej jednego przedziału tej samej mnogości.*

Jeżeli te dwa warunki są spełnione, wówczas można z mnogości M wybrać **skończoną liczbę** *przedziałów, tworzących nową mnogość, która posiada własności* (1) i (2).

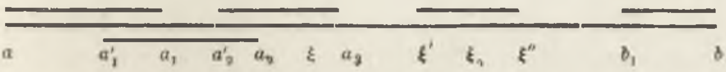
Wiemy, że a jest lewym krańcem przynajmniej jednego przedziału mnogości M, np. przedziału (a, a_1). Wiemy również, że a_1 leży wewnątrz przynajmniej jednego przedziału tej mnogości, powiedzmy przedziału (a_1', a_2). Tak samo a_2 leży wewnątrz przedziału (a_2', a_3) tej samej mnogości, itd.

Rzecz jasna, że jeżeli po skończonej liczbie takich kroków, np. po n krokach, dojdziemy do punktu a_n, zlewającego się z punktem b, wówczas twierdzenie zostanie dowiedzione, gdyż otrzymamy s k o ń c z o n y z b i ó r przedziałów, wybranych z mnogości M i posiadających rzeczone dwie własności. Jeżeli jednak a_n nie zlewa się nigdy z b, wówczas punkty $a_1, a_2, a_3, \ldots$ muszą dążyć do jakiegoś punktu granicznego, gdyż każdy następny leży w prawo od poprzedniego, ale nie jest z góry wykluczone, że ten punkt graniczny leży gdziekolwiek na odcinku (a, b).

*) t. j. punkt, należący do przedziału (a, b), lecz różny od jego krańców.

Przypuśćmy, że zastosowaliśmy powyższe postępowanie na wszelkie możliwe sposoby, czyli otrzymaliśmy wszelkie możliwe zbiory punktów typu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Dowiedziemy, że *istnieje śród tych zbiorów przynajmniej jeden, który dosięga punktu b po skończonej liczbie kroków.*

O każdym punkcie ξ, należącym do przedziału (a, b), możemy powiedzieć jedno z dwojga: (1) albo ξ leży w lewo od *jakiegoś* punktu a_n, należącego do jednego z tych zbiorów, (2) albo też rzecz się ma przeciwnie, t.j. ξ nie leży w lewo od



Rys. 41.

żadnego punktu a_n *żadnego* z tych zbiorów. Wszystkie punkty ξ możemy podzielić na dwie klasy L, R, zaliczając do L te punkty, które spełniają warunek (1), do R zaś te, które spełniają warunek (2). Klasa L niewątpliwie istnieje, gdyż wszystkie punkty przedziału (a, a_1) należą do niej. Postaramy się dowieść, że klasa R nie istnieje.

Gdyby istniała klasa R, wówczas L leżałaby w lewo od R i dwie te klasy wyznaczałyby przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych, należących do przedziału (a, b). Temu przekrojowi odpowiadałaby jakaś liczba ξ_0. Punkt ξ_0 należałby do jakiegoś przedziału mnogości M, powiedzmy do przedziału (ξ', ξ''). Punkt ξ' należałby do L, t.j. musiałby leżeć w lewo od jakiegoś wyrazu a_n jednego z naszych zbiorów. Ale w takim razie mamy prawo założyć, że przedziałem (ξ', ξ'') jest przedział (a'_n, a_{n+1}), ktory został podporządkowany punktowi a_n przy omówionej poprzednio konstrukcji zbioru $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Wszystkie punkty, leżące w lewo od ξ'', leżą w lewo od a_{n+1}, zatym z prawej strony punktu ξ_0 istnieją punkty, należące do klasy L, co przeczy określeniu klasy R. Wobec tego klasa R nie może istnieć.

Tak więc każdy punkt ξ należy do klasy L. Otóż b jest prawym krańcem jakiegoś przedziału, należącego do mnogości M, powiedzmy przedziału (b_1, b), a zarazem należy do L. W takim razie w zbiorze $a_1, a_2, a_3 \ldots$ istnieje wyraz a_n taki, że $a_n > b_1$. Przedział (a'_n, a_{n+1}), który chcemy podporządkować punktowi a_n, możemy utożsamić z przedziałem (b_1, b) i w ten sposób otrzymamy zbiór, którego wyraz następujący po n-tym, czyli wyraz a_{n+1} zlewać się będzie z b, jednym słowem otrzymamy skończony zbiór przedziałów, posiadający dwie rzeczone własności.

Zbadajmy teraz przedziały, o których mówiliśmy na początku niniejszego paragrafu.

(1) Przedział ten nie czyni zadość warunkom twierdzenia: punkty $1/n$, $2/n$, $3/n, \ldots$ nie leżą wewnątrz żadnego przedziału mnogości M.

(2) Ten przedział czyni zadość warunkom twierdzenia. Zbiór przedziałów

$$(0, 2\varepsilon),\ (\varepsilon, 3\varepsilon),\ (2\varepsilon, 4\varepsilon), \ldots (1-2\varepsilon, 1),$$

podporządkowanych punktom ε, 2ε, $3\varepsilon, \ldots$, $1-\varepsilon$ posiada dwie rzeczone własności.

(3) W tym przykładzie możemy dowieść, że przy dostatecznie małym ε istnieją punkty przedziału $(0, 1)$, nie leżące wewnątrz żadnego przedziału mnogości M.

Gdyby każdy punkt przedziału $(0, 1)$, z wyjątkiem, oczywiście, krańców, leżał wewnątrz jednego z przedziałów mnogości M, moglibyśmy wybrać z tej mnogości skończony zbiór przedziałów, posiadających tę samą własność, a przytym takich, że suma ich byłaby większa od 1. Otóż mamy dwa przedziały o długości $=2\varepsilon$, dla których $q=1$, oraz $q-1$ przedziałów, podporządkowanych każdej innej wartości q i takich, że ich długość $=\frac{2\varepsilon(q-1)}{q^3}$. Wobec tego suma jakiejkolwiek skończonej liczby przedziałów mnogości M nie może być większa od iloczynu 2ε przez sumę szeregu

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots.$$

(W rozdziale VIII dowiedziemy, że szereg ten jest zbieżny). Tak więc przy dostatecznie małym ε, założenie, że każdy punkt przedziału $(0, 1)$ lezy wewnątrz jednego z przedziałów mnogości M, prowadzi do sprzeczności.

Czytelnikowi wyda się może, że ten dowód jest zbyt długi, że istnienie w przedziale $(0, 1)$ punktów, nie leżących wewnątrz żadnego przedziału mnogości M, wynika odrazu z faktu, iż suma wszystkich przedziałów tej mnogości jest mniejsza od 1. Ale taki dowód byłby oparty na twierdzeniu wcale nie oczywistym (w przypadku nieskończenie wielu przedziałów), którego nie można dowieść bez pomocy tw. Heinego-Borela lub jakiegoś innego równoważnego mu.

99. Zastosujmy teraz tw. Heinego-Borela w celu ustalenia dwuch bardzo ważnych twierdzeń, dotyczących oscylacji funkcji ciągłej.

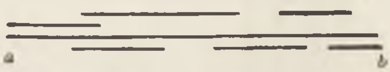
Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b), możemy ten przedział podzielić na skończoną liczbę przedziałów (a, x_1), (x_1, x_2),... $x_n, b)$ takich, że w każdym z nich oscylacja funkcji $\varphi(x)$ będzie mniejsza od dowolnej, z góry zadanej liczby dodatniej δ.*

Niech ξ będzie dowolną liczbą, zawartą między a i b. Ponieważ $\varphi(x)$ jest ciągła przy $x=\xi$, zatym możemy znaleźć taki przedział $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, że oscylacja funkcji będzie w nim mniejsza od δ. Rzecz jasna, że dla każdego ξ i dla każdego δ istnieje nieskończenie wiele takich przedziałów, gdyż jeśli jakaś liczba ε czyni zadość wymienionemu warunkowi, to każda liczba mniejsza od ε tymbardziej musi mu czynić zadość. Wybór wartości na ε zależy, oczywiście, od ξ; nie mamy narazie powodu do myślenia, że jakakolwiek wartość na ε, odpowiadająca pewnej oznaczonej wartości na ξ, czyni zadość naszemu warunkowi przy innych wartościach na ξ. Przedziały, związane w ten sposób z punktem ξ, nazwiemy „przedziałami dla δ i punktu ξ".

Jeżeli $\xi=a$, możemy wyznaczyć przedział $(a, a+\varepsilon)$, a więc i nieskończenie wiele takich przedziałów, które posiadają rzeczoną własność. Nazwiemy je „przedziałami dla δ i punktu a". W taki sam sposób wyznaczamy „przedziały dla δ i punktu b".

Weźmy teraz pod uwagę mnogość M przedziałów, złożoną ze wszystkich „przedziałów dla δ i dla wszystkich punktów przedziału (a, b)". Mnogość ta czyni zadość warunkom twierdzenia Heinego-Borela: każdy punkt wewnętrzny przedziału (a, b) jest zarazem punktem wewnętrznym przynajmniej jednego przedziału mnogości M, każdy zaś z punktów a i b jest krańcem przynajmniej jednego przedziału tej mnogości. Możemy tedy wyznaczyć mnogość skończoną M' przedziałów, posiadających te same własności i wybranych z pośród mnogości M.

W przypadku ogólnym przedziały mnogości M' zachodzą na siebie (jak na rys. 42). Ich punkty krańcowe dzielą przedział (a, b) na skończoną mnogość M'' przedziałów, z których każdy zawiera się w jakimś przedziale mnogości M' i odzna-



Rys. 42.

cza się tym, że oscylacja funkcji $\varphi(x)$ jest w nim mniejsza od δ. W ten sposób dowiedliśmy twierdzenia 1.

Twierdzenie 2. *Do każdej, z góry zadanej liczby δ możemy dobrać taką liczbę η, że gdy podzielimy przedział (a, b) w dowolny sposób na przedziały krótsze od η, wówczas oscylacja funkcji $\varphi(x)$ będzie w każdym z nich mniejsza od δ.*

Obierzmy $\delta_1 < \frac{1}{2}\delta$ i zbudujmy, jak w twierdzeniu 1, skończoną mnogość m przedziałów takich, żeby w każdym z nich oscylacja funkcji $\varphi(x)$ była mniejsza od δ_1. Niech η będzie długością najkrótszego przedziału mnogości m. Możemy podzielić przedział (a, b) na części krótsze od η; każda z tych części musi leżeć całkowicie wewnątrz conajwyżej dwuch przedziałów mnogości m. Wobec tego, na mocy (3), § 96, oscylacja funkcji $\varphi(x)$ w każdej części, krótszej od η, nie może być większa od podwojonej oscylacji tej funkcji w przedziale, należącym do mnogości m, czyli musi być mniejsza od $2\delta_1 < \delta$.

Twierdzenie to ma zasadniczą wagę w teorji całek określonych (rozdział VII). Bez tego twierdzenia (lub innego, równoważnego mu) niepodobna dowieść, że funkcja, ciągła w przedziale, musi posiadać w tym przedziale całkę.

100. O funkcjach ciągłych kilku zmiennych. Pojęcia ciągłości i nieciągłości można rozszerzyć na funkcje kilku zmiennych niezależnych. Powstają tu jednak kwestje o wiele trudniejsze i bardziej złożone od tych, które roztrząsaliśmy w niniejszym rozdziale. Nie możemy tych kwestji szczegółowo rozważać, niemniej jednak musimy ustalić pojęcie funkcji ciągłej dwuch zmiennych.

Funkcja $f(x, y)$ *dwuch zmiennych* x, y *nazywa się* **ciągłą** *przy* $x=\xi$, $y=\eta$, *jeżeli do każdej dowolnie zadanej liczby dodatniej* δ *możemy dobrać taką liczbę* $\varepsilon(\delta)$, *że przy*

$$0 \leqq |x-\xi| \leqq \varepsilon(\delta) \quad \text{oraz} \quad 0 \leqq |y-\eta| \leqq \varepsilon(\delta)$$

mamy
$$|\varphi(x, y)-\varphi(\xi, \eta)| < \delta .$$

Innemi słowy: funkcja $f(x, y)$ *nazywa się ciągłą przy* $x=\xi$, $y=\eta$, *jeżeli możemy wykreślić kwadrat, którego boki równają się* $2\varepsilon(\delta)$ *i są równoległe do osi spółrzędnych, a środek leży w punkcie* (ξ, η), *i jeżeli wartość funkcji* $\varphi(x, y)$ *w każdym punkcie, leżącym wewnątrz lub na konturze tego kwadratu różni się od* $\varphi(\xi, \eta)$ *mniej niż o* δ.

W określeniu tym zakładamy, że funkcja $\varphi(x, y)$ jest określona we wszystkich punktach kwadratu, a w szczególności w punkcie (ξ, η). Określenie to wypowiadają niekiedy w następującej postaci: $\varphi(x, y)$ *jest funkcją ciągłą przy* $x=\xi$, $y=\eta$, *jeżeli* $\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(\xi, \eta)$, *gdy* $x \rightarrow \xi$, *a* $y \rightarrow \eta$ *w dowolny sposób.*

Ta forma określenia jest pozornie prostsza, ale zawiera zdania, których znaczenie nie zostało wyjaśnione i które dadzą się wyjaśnić dopiero zapomocą nierówności takich, jak użyte przez nas w poprzednim określeniu.

Z łatwością dowieść można, że suma, iloczyn oraz (w ogólnym przypadku) iloraz funkcji ciągłych dwu zmiennych są funkcjami ciągłemi. Wielomian całkowity dwu zmiennych jest ciągły przy wszelkich wartościach tych zmiennych. Wszystkie funkcje dwu zmiennych x, y, jakie najczęściej spotykamy w elementarnych zagadnieniach analizy, są *naogół* ciągłe, to znaczy, że bywają nieciągłe tylko dla pewnych szczególnych par wartości x, y.

Czytelnik powinien dokładnie zdać sobie sprawę z tego, że powiedzenie: „funkcja $\varphi(x, y)$ jest ciągła względem obu zmiennych" zawiera coś więcej niż powiedzenie: „funkcja $\varphi(x, y)$ jest ciągła względem każdej zmiennej z osobna". Jeżeli funkcja $\varphi(x, y)$ jest ciągła względem obu zmiennych x, y, to musi być ciągła względem zmiennej x (lub y), gdy druga zmienna y (lub x) ma jakąkolwiek stałą wartość, ale twierdzenie odwrotne nie jest słuszne. Weźmy np. pod uwagę funkcję, określoną w następujący sposób:

$\varphi(x, y)=0$, gdy x lub y równają się zeru,

$$\varphi(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}, \text{ gdy ani } x, \text{ ani } y \text{ nie równają się zeru.}$$

Jeżeli y ma stałą wartość, to $\varphi(x, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x, a w szczególności jest funkcją ciągłą przy $x=0$, gdyż przy $x=0$ mamy $\varphi(x, y)=0$, a przy $x\to0$ mamy $\varphi(x, y)\to0$. Tak samo dowieść można, że $\varphi(x, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej y, jeżeli x ma stałą wartość. Ale ta sama funkcja $\varphi(x, y)$, rozpatrywana jako funkcja dwu zmiennych, jest *nieciągła* w punkcie $x=0$, $y=0$. Istotnie, w tym punkcie wartość jej $=0$, jeżeli zaś x i y dążą do zera wzdłuż prostej $y=\alpha x$, wówczas

$$\varphi(x, y)=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \lim \varphi(x, y)=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

i ta granica może być dowolną liczbą, zawartą między -1 a $+1$.

101. O funkcjach uwikłanych. W rozdziale II natrafiliśmy już na pojęcie funkcji uwikłanej. Jeżeli np. x i y związane są z sobą zależnością

$$y^5-xy-y-x=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

nazywamy y funkcją uwikłaną zmiennej x.

W rozdziale II zakładaliśmy, że takie równanie dokładnie określa y jako funkcję zmiennej x, w rzeczywistości jednak założenie to wcale nie jest oczywiste. Musimy teraz zbadać tę sprawę nieco dokładniej.

Wprowadzimy najpierw pewien dogodny termin. Przypuśćmy, że punkt (a, b) możemy otoczyć takim kwadratem, że dla każdego punktu tego kwadratu spełniony jest pewien warunek. Taki kwadrat nazwiemy *otoczeniem punktu* $(a. b)$ i powiemy, że rzeczony warunek jest spełniony *w otoczeniu* albo *w pobliżu* punktu (a, b). Rozumieć przez to będziemy, że można znaleźć *jakiś* kwadrat, w którym ten warunek jest spełniony. Rzecz jasna, że ten sam termin da się zastosować do funkcji jednej zmiennej, z tą tylko różnicą, że zamiast kwadratu wypadnie brać pod uwagę odcinek prostej.

Twierdzenie.*) *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ dwuch zmiennych x, y spełnia trzy następujące warunki:*

(I) *$f(x, y)$ jest ciągła w otoczeniu punktu (a, b),*

(II) $f(a, b)=0$,

(III) *przy wszelkich wartościach x w pobliżu a, funkcja $f(x, y)$ jest stale rosnącą funkcją (w ściślejszym znaczeniu wyrazu) zmiennej y* (porów. § 88),

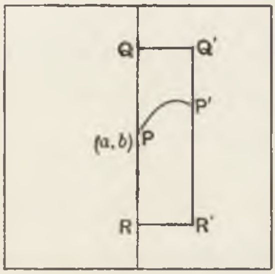
wówczas (1) *istnieje jedna tylko funkcja $y=\varphi(x)$, która, podstawiona zamiast y do równania $f(x, y)=0$, czyni mu zadość przy wszelkich wartościach na x w pobliżu a,*

---

*) W. H. Young, *Proceed. London Mathem. Society*, New Series, vol. VII, p. 404.

(2) $\varphi(x)$ *jest funkcją ciągłą przy wszelkich wartościach na x w pobliżu a.*

Na rysunku P jest punktem (a, b), kwadrat zaś przedstawia „otoczenie“ punktu (a, b), w którym to otoczeniu spełnione są warunki (I) i (III). Jeżeli punkty Q, R obierzemy tak, jak na rysunku, wówczas z (III) wyniknie, że $f(x, y)$ ma wartość dodatnią w punkcie Q, a ujemną w punkcie R. Ponieważ $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą zarówno w Q, jak w R, możemy zatym poprowadzić równolegle do osi x-ów odcinki QQ', RR' w ten sposób, że odcinek $Q'R'$ będzie równoległy do osi y-ów i że $f(x, y)$ będzie przybierać wartości dodatnie wzdłuż odcinka QQ', ujemne zaś wzdłuż odcinka RR'. W szczególności $f(x, y)$ musi mieć wartość dodatnią w punkcie Q', ujemną zaś w R', a więc, na mocy własności (III) i § 93,



Rys. 43.

funkcja $f(x, y)$ w jednym i tylko w jednym punkcie odcinka $Q'R'$ musi równać się zeru. Niech punktem tym będzie P'. W taki sam sposób na każdym odcinku, równoległym do osi rzędnych i zawartym między RR' a QQ', wyznaczymy po jednym punkcie, w którym $f(x, y)=0$. Rzecz jasna, że tę samą konstrukcję można byłoby wykonać w lewo od odcinka QR. Zbiór wszystkich punktów takich, jak P', daje nam wykres żądanej funkcji $y=\varphi(x)$.

Musimy jeszcze dowieść, że $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą. W tym celu najlepiej jest odwołać się do pojęcia granicy wyższej i niższej funkcji $\varphi(x)$, gdy $x \to a$ (§ 89). Przypuśćmy, że gdy $x \to a$, funkcja $\varphi(x)$ posiada granicę niższą λ i wyższą ν. Rzecz jasna, że punkty (a, λ) i (a, ν) leżą na QR. Możemy przytym znaleźć taki ciąg wartości x, że $\varphi(x) \to \lambda$, gdy $x \to a$ poprzez liczby tego ciągu, a ponieważ $f\{x, \varphi(x)\}=0$, funkcja zaś $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennych x, y, zatym

$$f(a, \lambda)=0.$$

Mamy tedy $\lambda=b$. W taki sam sposób wykazujemy, że $\nu=b$. Stąd wynika, że $\varphi(x)$ dąży do granicy b, gdy $x \to a$, i że zatym $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x=a$. W taki sam sposób dowodzimy, że w otoczeniu punktu a funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła przy wszelkich wartościach x.

Rzecz jasna, że twierdzenie pozostanie słuszne, jeżeli w warunku (III) zastąpimy wyraz „rosnący“ przez wyraz „malejący“.

Dla przykładu zbadajmy równanie (1) na str. 216, zakładając $a=0$, $b=0$. Rzecz oczywista, że warunki (I) i (II) są spełnione. Prócz tego przy dostatecznie małych wartościach na x, y i y' znak różnicy

$$f(x, y)-f(x, y')=(y-y')(y^4+y^3y'+y^2y'^2+yy'^3+y'^4-x-1)$$

jest przeciwny znakowi różnicy $y-y'$. Wobec tego spełniony jest warunek (III), w którym wyrazy „funkcja rosnąca" zastąpiliśmy przez „funkcja malejąca". Stąd wynika, że istnieje jedna i tylko jedna funkcja ciągła y, która równa się zeru przy $x=0$ i czyni zadość tożsamościowo równaniu (1).

Do tego samego wniosku doszlibyśmy, badając funkcję

$$y^2-xy-y-x=0.$$

W tym wypadku szukaną funkcją jest

$$y={}^1/_2\{1+x-\sqrt{1+6x+x^2}\},$$

w której bierzemy dodatni pierwiastek kwadratowy.

102. O funkcjach odwrotnych. Przypuśćmy w szczególności, że $f(x, y)$ ma kształt $F(y)-x$. W takim razie mamy następujące twierdzenie:

Jeżeli $F(y)$ jest funkcją zmiennej y, ciągłą w pobliżu $y=b$ i stale rosnącą (lub stale malejącą) w ściślejszym znaczeniu tego wyrazu, i jeżeli $F(b)=a$, wówczas istnieje jedna tylko funkcja ciągła $y=\varphi(x)$, która równa się b przy $x=a$ i czyni zadość tożsamościowo równaniu $F(y)=x$ w pobliżu $x=a$.

Funkcję w ten sposób określoną nazywamy *funkcją odwrotną* względem $F(y)$.

Przypuśćmy np., że $y^3=x$, $a=0$, $b=0$. Wszystkie warunki twierdzenia są spełnione, wobec czego $x=\sqrt[3]{y}$ jest funkcją odwrotną.

Gdybyśmy założyli, że $y^2=x$, to warunki twierdzenia nie byłyby spełnione, gdyż y^2 nie jest funkcją stale rosnącą zmiennej y w przedziale, zawierającym wartość $y=0$: funkcja ta rośnie przy y dodatnim, maleje zaś przy y ujemnym. Jakoż wniosek naszego twierdzenia w tym wypadku nie jest słuszny, lecz równanie $y^2=x$ wyznacza *dwie funkcje*, mianowicie $x=\sqrt{y}$, $x=-\sqrt{y}$. Obie te funkcje równają się zeru przy $x=0$ i obie są określone tylko dla dodatnich wartości zmiennej x, tak iż równanie ma czasem dwa rozwiązania, czasem zaś nie ma żadnego.

Czytelnik zbada w taki sam sposób ogólniejsze równanie

$$y^{2n}=x, \quad y^{2n+1}=x.$$

Inny ciekawy przykład mamy w równaniu

$$y^5-y-x=0.$$

Tak samo równanie

$$\sin y=x$$

posiada jedno rozwiązanie, mianowicie $\arcsin x$, i rozwiązanie to równa się zeru, gdy $x=0$. W danym wypadku istnieje wprawdzie nieskończenie wiele innych rozwiązań, ale te nie czynią zadość postawionemu przez nas warunkowi

Czytelnik powinien poszukać bezpośredniego dowodu naszego twierdzenia, a więc dowodu, niezależnego od § 101. Powinien on też dowieść, że funkcja odwrotna jest również stale rosnąca (lub malejąca).

Zadania do rozdziału V.

1. Jeżeli ani a, ani b nie równają się zeru, wówczas

$$ax^n+bx^{n-1}+\ldots+k=ax^n(1+\varepsilon_x),$$

gdzie ε_x jest liczbą małą pierwszego rzędu, gdy x jest dużą liczbą.

2. Jeżeli $a\neq 0$ i $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+\ldots+k$, wówczas, przy dostatecznie wielkich wartościach x, wartość liczbowa wielomianu $P(x)$ ma ten sam znak, co a. To samo da się powiedzieć o różnicy $P(x+\lambda)-P(x)$, gdzie λ jest dowolną stałą.

3. W ogólności mamy

$$(ax^n+bx^{n-1}+\ldots+k)/(Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+K)=\alpha+(\beta/x)(1+\varepsilon_x),$$

gdzie $\alpha=a/A$, $\beta=(bA-aB)/A^2$, a ε_x jest liczbą małą pierwszego rzędu, gdy x jest dużą liczbą. Jakie przypadki szczególne mogą tu zachodzić?

4. Funkcję $(ax^2+bx+c)/(Ax^2+Bx+C)$ przedstawić w postaci $\alpha+(\beta/x)+(\gamma/x^2)(1+\varepsilon_x)$, gdzie ε_x jest liczbą małą pierwszego rzędu, gdy x jest dużą liczbą.

5. Dowieść, że $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\}={}^1/_2\,a$.

6. Dowieść, że $\sqrt{x+a}=\sqrt{x}+{}^1/_2\,(a/\sqrt{x})(1+\varepsilon_x)$, gdzie ε jest małą pierwszego rzędu, gdy x jest dużą liczbą.

7. Wyznaczyć α i β w ten sposób, by przy $x\to\infty$ funkcja $\sqrt{ax^2+2bx+c}-\alpha x-\beta$ dążyła do zera.

Dowieść, że

$$\lim x\{\sqrt{ax^2+2bx+c}-\alpha x-\beta\}=\frac{ac-b^2}{2a}.$$

8. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} x\{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\}$.

9. Dowieść, że $(\sec x-\operatorname{tg} x)\to 0$, gdy $x\to\frac{\pi}{2}$.

10. Dowieść, że $\varphi(x)=1-\cos(1-\cos x)$ jest małą czwartego rzędu, jeżeli x jest małą liczbą. Znaleźć granicę, do której dąży $\varphi(x)/x^4$, gdy $x\to 0$.

11. Dowieść, że $\varphi(x)=x\sin(\sin x)-\sin^2 x$ jest małą szóstego rzędu, jeżeli x jest małą liczbą. Znaleźć granicę, do której dąży $\varphi(x)/x^6$, gdy $x\to 0$.

12. Z punktu P, leżącego na przedłużeniu promienia OA, prowadzi-

my do koła styczną PT, a z punktu styczności T kreślimy TN prostopadle do OA. Dowieść, że gdy P zbliża się nieograniczenie do A, wówczas $NA/AP \to 1$.

13. Do łuku koła prowadzimy trzy styczne: dwie w jego końcowych punktach, trzecią zaś w środkowym jego punkcie. Oznaczmy przez Δ pole trójkąta, utworzonego przez dwie pierwsze styczne i przez cięciwę łuku, a przez Δ' pole trójkąta, utworzonego przez trzy styczne. Dowieść, że $\Delta/\Delta' \to 4$, gdy długość łuku dąży do zera.

14. Przy jakich wartościach a funkcja $\dfrac{a+\sin(1/x)}{x}$ dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$, gdy $x \to 0$. [Do $+\infty$, gdy $a>1$; do $-\infty$, gdy $a<-1$; przy $-1 \leqq a \leqq 1$ funkcja waha się.]

15. Jeżeli $\varphi(x)=1/q$, gdy $x=p/q$, przy wszelkim zaś niewymiernym x mamy $\varphi(x)=0$, wówczas $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą dla wszystkich niewymiernych wartości zmiennej x, nieciągłą zaś dla wszystkich wymiernych wartości x.

16. Określamy funkcję $\varphi(x)$ w następujący sposób: $\varphi(0)=0$; przy $0<x<1$ mamy $\varphi(x)=1-x$; $\varphi(1)=1$. Dowieść, że funkcję tę można przedstawić zapomocą wzorów

$$1-x+[x]-[1-x] \quad \text{oraz} \quad 1-x-\lim_{n\to\infty}(\cos^{2n+1}\pi x).$$

17. Dowieść, że funkcja, przedstawiona na rys. 40, da się wyrazić za pomocą wzoru

$$\tfrac{1}{2}-x+\tfrac{1}{2}[2x]-\tfrac{1}{2}[1-2x].$$

18. Niech będzie $\varphi(x)=x$ przy x wymiernym oraz $\varphi(x)=1-x$ przy x niewymiernym. Dowieść, że gdy x rośnie od 0 do 1, $\varphi(x)$ przybiera raz i tylko raz jeden wszystkie wartości od 0 do 1, ale jest nieciągła przy wszelkich wartościach zmiennej x, z wyjątkiem tylko $x=\frac{1}{2}$.

19. Gdy x wzrasta od $-\dfrac{\pi}{2}$ do $\dfrac{\pi}{2}$, wówczas $y=\sin x$ jest funkcją ciągłą i rosnącą stale (w ściślejszym znaczeniu) od -1 do 1. Dowieść istnienia funkcji $x=\arcsin y$, ciągłej i stale rosnącej, gdy y wzrasta od -1 do 1.

20. Dowieść, że najmniejsza wartość liczbowa, jaką przybiera $\operatorname{arctg} x$ przy różnych wartościach zmiennej y, jest funkcją ciągłą i stale rosnącą od $-\dfrac{\pi}{2}$ do $\dfrac{\pi}{2}$, gdy y przybiera wszelkie możliwe wartości rzeczywiste.

21. Wzorując się na rozumowaniach §§ 101—102, zbadać rozwiązania równań

$$y^2-y-x=0, \quad y^4-y^2-x^2=0, \quad y^4-y^2+x^2=0$$

w otoczeniu punktu $x=0$, $y=0$.

22. Jeżeli $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey=0$ i jeżeli $\Delta=2bde-ae^2-cd^2$, wówczas jedna wartość na y daje się wyrazić wzorem $y=\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3(1+\varepsilon_x)$, gdzie

$$\alpha=-d/e, \quad \beta=\Delta/2e^3, \quad \gamma=(cd-be)\Delta/2e^5,$$

a ε_x jest małą pierwszego rzędu, gdy x jest małą liczbą.

[Jeżeli $y=\alpha x+\eta$, wówczas

$$-2e\eta=a^2x+2bx(\eta+\alpha x)+c(\eta+\alpha x)^2=Ax^2+2Bx\eta+C\eta^2.$$

Rzecz jasna, że η jest małą drugiego rzędu, $x\eta$ małą trzeciego rzędu, a η^2 małą czwartego rzędu, i że $-2e\eta=Ax^2-(AB/e)x^3$, przyczym błąd jest rzędu czwartego.]

23. Jeżeli $x=ay+by^2+cy^3$, wówczas jedna wartość na y da się wyrazić zapomocą wzoru

$$y=\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3(1+\varepsilon_x),$$

gdzie $\alpha=1/a$, $\beta=-b/a^3$, $\gamma=(2b^2-ac)/a^5$, a ε_x jest małą pierwszego rzędu, gdy x jest małą liczbą.

24. Jeżeli $x=ay+by^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 1, wówczas jedną wartość y możemy wyrazić zapomocą wzoru

$$y=\alpha x+\beta x^n+\gamma x^{2n-1}(1+\varepsilon_x),$$

gdzie $\alpha=1/a$, $\beta=-b/a^{n+1}$, $\gamma=nb^2/a^{2n+1}$, a ε_x jest małą rzędu $(n-1)$-szego, gdy x jest małą liczbą.

25. Dowieść, że najmniejszy dodatni pierwiastek równania $xy=\sin x$ jest funkcją ciągłą zmiennej y w przedziale (0, 1) i stale maleje od π do 0, gdy y wzrasta od 0 do 1. [Jest to funkcja odwrotna względem $\frac{\sin x}{x}$; zastosować § 102.]

26. Najmniejszy dodatni pierwiastek równania $xy=\operatorname{tg} x$ jest funkcją ciągłą zmiennej y w przedziale $(1, \infty)$ i rośnie stale od 0 do $\frac{\pi}{2}$, gdy y rośnie nieograniczenie, poczynając od 1.

ROZDZIAŁ VI.

O POCHODNYCH I CAŁKACH.

103. O pochodnych. Powróćmy do rozważania własności, które intuicja nasza przypisuje krzywym. Widzieliśmy w poprzednim rozdziale, że najprostsza i najoczywistsza z nich jest związana z wrażeniem spójności, jakie czyni na nas krzywa. Tę własność ujęliśmy w formę ścisłego określenia, mianowicie określenia funkcji ciągłej.

Krzywe, z któremi mamy do czynienia w matematyce elementarnej, posiadają, oczywiście, wiele innych ciekawych własności, a między innemi tę, że mają w każdym punkcie styczną. W gieometrji elementarnej określamy nieraz styczną w punkcie P, jako „graniczne położenie cięciwy PQ, gdy punkt Q zbliża się nieograniczenie do P". Zakładamy przez to, oczywiście, istnienie „położenia granicznego". Zbadajmy nieco dokładniej to założenie.

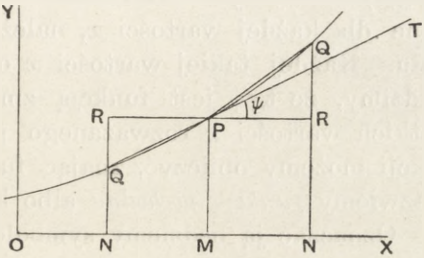
Na rys. 44 punkt P na krzywej jest stały, Q zaś jest punktem zmiennym; PM, QN są równoległe do osi y-ów, a prosta PR jest równoległa do osi x-ów. Spółrzędne punktu P oznaczmy przez x, y, spółrzędne punktu Q przez $x+h$, $y+h$. Rzecz jasna, że h może być liczbą dodatnią lub ujemną, zależnie od tego, czy N leży w prawo czy w lewo od M.

Założyliśmy, że krzywa posiada w punkcie P styczną (czyli że istnieje w zupełności oznaczone „graniczne położenie" cięciwy PQ). Przypuśćmy, że styczna PT tworzy z osią x-ów kąt ψ. Orzeczenie: „PT jest granicznym położeniem cięciwy PQ" będziemy uważali za równoznaczne z orzeczeniem: „kąt ψ jest granicą, do której dąży kąt QPR, gdy Q dąży po krzywej do P z jednej lub z drugiej strony tego punktu". Będziemy musieli rozróżnić dwa przypadki: jeden ogólny, drugi wyjątkowy.

Przypadek ogólny zachodzi wówczas, gdy $\psi \neq \frac{\pi}{2}$, gdy zatym styczna PT nie jest równoległa do osi y-ów. W tym przypadku $\sphericalangle RPQ$ dąży do granicy ψ, a

$$\frac{RQ}{PR} = \operatorname{tg} RPQ$$

dąży do granicy $\operatorname{tg} \psi$.



Rys. 44.

Otóż
$$\frac{RQ}{PR} = \frac{NQ - MP}{MN} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

a więc
$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \operatorname{tg} \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Zwracamy uwagę czytelnika, że we wszystkich powyższych równaniach uważamy wszystkie długości za opatrzone znakami (wobec czego RQ jest ujemne, jeżeli Q leży w lewo od P) i że dążenie powyższej funkcji od granicy nie jest zależne od znaku przy h.

Tak więc założenie, że krzywa, będąca wykresem funkcji $\varphi(x)$, posiada w punkcie P styczną, nie prostopadłą do osi x-ów, jest równoznaczne z założeniem, że $\varphi(x)$ posiada następującą własność: *przy wartości x, odpowiadającej punktowi P, iloraz* $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ *dąży do granicy, gdy h dąży do zera.*

Sformułowane w ten sposób założenie jest równoznaczne z trzema następującemi założeniami:

$$\text{zarówno} \quad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}, \quad \text{jak} \quad \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h}$$

dążą do granicy, gdy $h \to 0$, a przytym obie granice równają się sobie. Jeżeli te dwie granice istnieją, lecz nie równają się sobie, krzywa posiada w punkcie P ostrze, jak na rys. 45.

Przypuśćmy, że krzywa nasza posiada w każdym punkcie styczną, albo przynajmniej, że posiada styczną w każdym punkcie pewnego łuku, odpowiadającego oznaczonemu przedziałowi zmienności x. Przypuśćmy dalej, że styczna ta nigdzie nie jest prostopadła do osi x-ów (gdybyśmy więc mieli do czynienia z kołem, wypadłoby poprzestać na rozważaniu łuków mniejszych od półokręgu). Przy tych założeniach równanie kształtu (1) jest słuszne .dla każdej wartości x, należącej do rozważanego przedziału. Każdej takiej wartości x odpowiada wartość na $\operatorname{tg}\psi$; widzimy, że $\operatorname{tg}\psi$ jest funkcją zmiennej x, określoną dla wszystkich wartości x rozważanego przedziału, i że wartość tej funkcji możemy obliczyć, znając funkcję $\varphi(x)$. Tę nową funkcję nazwiemy *funkcją pochodną* albo krócej: **pochodną** *funkcji* $\varphi(x)$. Oznaczać ją będziemy symbolem

$$\varphi'(x).$$

Działanie, polegające na obliczeniu $\varphi'(x)$, gdy dana jest funkcja $\varphi(x)$, nosi dość niefortunną nazwę **różniczkowania.**

Zanim przejdziemy do zbadania szczególnego przypadku, w którym $\psi = \frac{\pi}{2}$, postaramy się wyjaśnić na kilku przykładach pojęcie pochodnej.

104. Kilka uwag ogólnych. (1) Istnienie pochodnej $\varphi'(x)$ dla wszystkich wartości x przedziału $a \leqq x \leqq b$ wymaga, by funkcja $\varphi(x)$ była ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Istotnie $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ nie może dążyć do granicy, jeżeli nie zachodzi równość $\lim \varphi(x+h) = \varphi(x)$, która stanowi istotę pojęcia ciągłości.

(2) Mimowoli powstaje pytanie: czy twierdzenie odwrotne jest słuszne? Czy każda krzywa ciągła posiada w każdym swoim punkcie styczną i czy każda funkcja posiada pochodną dla każdej wartości x, przy której funkcja ta jest ciągła? *) Odpowiedź wypada *przecząca*; aby się o tym przekonać, wy-

*) Pomijamy tu przypadek szczególny (który rozpatrzymy później), w którym styczna jest prostopadła do OX.

starczy wziąć pod uwagę krzywą, utworzoną przez dwie przecinające się proste (rys. 44).

Czytelnik odrazu spostrzeże, że $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ dąży do granicy $\operatorname{tg}\beta$, jeżeli $h \to 0$ przez wartości dodatnie, do granicy zaś $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $h \to 0$ przez wartości ujemne.

Możnaby powiedzieć, że krzywa nasza ma w punkcie P dwa różne kierunki. Są jednak przypadki, gdy krzywej ciągłej nie można przypisać w danym punkcie żadnego określonego kierunku. Weźmy np. pod uwagę funkcję $y = x\sin(1/x)$. Funkcja ta nie jest określona przy $x=0$, a więc jest w tym punkcie nieciągła. Jeśli jednak określimy funkcję zapomocą dwuch równań

$$\varphi(x) = x\sin(1/x) \quad (x \neq 0), \quad \varphi(x) = 0 \quad (x=0),$$

otrzymamy funkcję, ciągłą w punkcie $x=0$. Wykres tej funkcji jest krzywą ciągłą.

Ale $\varphi(x)$ nie posiada pochodnej w punkcie $x=0$. Istotnie, pochodna $\varphi'(0)$ powinnaby równać się $\lim\{\varphi(h)-\varphi(0)\}/h$ czyli powinnaby równać się $\lim\sin(1/h)$, a taka granica nie istnieje.

Zostało nawet dowiedzione, że istnieją funkcje ciągłe, nie mające pochodnej *dla żadnej wartości* zmiennej niezależnej, nie możemy jednak zajmować się tą sprawą i odsyłamy czytelnika do obszernych kursów teorji funkcji.

(3) Pomysł utworzenia funkcji pochodnej został nam nasunięty przez rozważania gieometryczne, samo jednak pojęcie pochodnej jest absolutnie niezależne od pojęć gieometrycznych. Nie uciekając się do żadnych rozważań gieometrycznych, możemy określić pochodną zapomocą równania

$$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

i powiedzieć, że przy oznaczonej wartości x funkcja $\varphi(x)$ ma pochodną albo nie ma pochodnej, zależnie od tego, czy istnieje owa granica, czy też nie istnieje. Gieometrja krzywych jest tylko jedną z wielu dziedzin, w których stosujemy pojęcie pochodnej.

Inne ważne zastosowanie pojęcia pochodnej mamy w mechanice. Przypuśćmy, że punkt porusza się po prostej w ten sposób, że w czasie t odległość jego od stałego punktu tej prostej wyraża się zapomocą wzoru $s=\varphi(t)$. Prędkość ruchomego punktu w chwili t określamy jako

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}.$$

Pojęcie prędkości jest właściwie tylko szczególnym przypadkiem pojęcia pochodnej.

Przykłady XLII. 1. Jeżeli $\varphi(x)$=stałej, wówczas $\varphi'(x)=0$. Objaśnić zapomocą wykresu.

2. Jeżeli $\varphi(x)=ax+b$, to $\varphi'(x)=a$. Dowieść tego (I) na mocy określenia pochodnej, (II) zapomocą rozważań gieometrycznych.

3. Jeżeli $\varphi(x)=x^m$, gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią, wówczas $\varphi'(x)=mx^{m-1}$.

[Mamy $\varphi'(x)=\lim\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\lim\left\{mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h+\ldots+h^{m-1}\right\}$.

Zauważmy, że metody tej nie mamy prawa stosować do funkcji $x^{p/q}$, gdzie p/q jest liczbą wymierną ułamkową, gdyż $(x+h)^{p/q}$ nie możemy przedstawić w postaci wielomianu (skończonego) zmiennej h. Później (§ 111) przekonamy się, że wzór nasz i w tym wypadku pozostaje słuszny. Na razie czytelnik może ćwiczyć się w wyznaczaniu pochodnej poszczególnych funkcji o wykładniku ułamkowym, np. $x^{1/3}$.]

4. Jeżeli $\varphi(x)=\sin x$, to $\varphi'(x)=\cos x$, jeżeli zaś $\varphi(x)=\cos x$, to $\varphi'(x)=-\sin x$.

[Jeżeli $\varphi(x)=\sin x$, to $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$, granicą zaś tej funkcji przy $h\to0$ jest $\cos x$, gdyż $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\cos x$, a $\frac{\sin(h/2)}{h/2}\to1$.]

5. **Równanie stycznej i normalnej do krzywej** $y=\varphi(x)$. Styczną do krzywej w punkcie (x_0, y_0) jest prosta, przechodząca przez ten punkt i tworząca z osią x-ów kąt ψ taki, że $\operatorname{tg}\psi=\varphi'(x_0)$. Wobec tego równanie stycznej możemy napisać w postaci

$$y-y_0=(x-x_0)\varphi'(x_0),$$

a równanie normalnej (tj. prostej, prostopadłej do stycznej w punkcie styczności) w postaci

$$(y-y_0)\varphi'(x_0)+x-x_0=0.$$

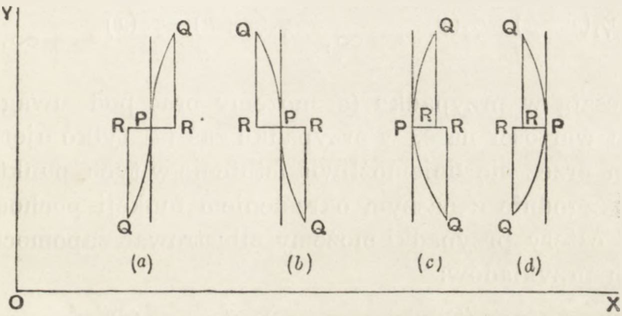
Zakładamy przytym, że styczna nie jest równoległa do osi y-ów. Jeżeli natomiast styczna jest równoległa do osi y-ów, wówczas równania stycznej i normalnej są odpowiednio $x=x_0$, $y=y_0$.

6. Napisać równanie stycznej do paraboli $x^2=4ay$ w dowolnym punkcie tej krzywej. Jeżeli $x_0=2a/m$, $y_0=a/m^2$, wówczas równanie stycznej w punkcie (x_0, y_0) ma kształt $x=my+(a/m)$.

105. Wiemy już, że jeśli funkcja $\varphi(x)$ jest nieciągła przy jakiejś wartości x, wówczas nie może ona mieć pochodnej przy tej wartości x. Np. funkcje $1/x$, $\sin(1/x)$ i t. p., które nie są określone przy $x=0$, a więc są nieciągłe przy $x=0$, nie mogą mieć pochodnej przy $x=0$. Tak samo funkcja $[x]$, która jest nieciągła przy wszystkich całkowitych wartościach na x, nie może mieć pochodnej przy tych wartościach na x.

Funkcja $[x]$ ma stałą wartość pomiędzy każdemi dwiema kolejnemi wartościami całkowitemi na x. Wobec tego pochodna, którą możemy oznaczyć symbolem $[x]'$, równa się zeru przy wszystkich wartościach niecałkowitych zmiennej x, przy całkowitych zaś wartościach na x nie jest określona. Rzecz ciekawa, że tę samą własność posiada funkcja $1-\dfrac{\sin \pi x}{\sin \pi x}$.

W Przykład. XL.7 widzieliśmy, że najpospolitsze przypadki nieciągłości związane są z wzorami kształtu $\varphi(x)\to\infty$



Rys. 45.

lub $\varphi(x)\to-\infty$. I w tych przypadkach funkcja nie ma pochodnej przy pewnych, wyjątkowych wartościach na x.

Istotnie, w § 104.(1) mówiliśmy, że *każdy punkt nieciągłości funkcji $\varphi(x)$ jest również punktem nieciągłości pochodnej $\varphi'(x)$*. Twierdzenie odwrotne nie jest jednak słuszne, o czym łatwo przekonamy się, stając znów na punkcie widzenia gieometrycznym i badając ten szczególny przypadek, gdy wykres funkcji $\varphi(x)$ posiada styczną, równoległą do osi y-ów. Można przytym rozróżnić kilka przypadków, z których najbardziej typowe zostały zobrazowane na rys. 45. W przypadkach (c) i (d) funkcja ma z jednej strony punktu P dwie wartości, z drugiej zaś strony nie jest wcale określona. W takich wypadkach możemy uważać podwójne wartości, które funkcja $\varphi(x)$ przybiera z jednej strony punktu P, jako dwie różne funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$. Górną część krzywej będziemy uważali za wykres funkcji $\varphi_1(x)$.

Czytelnik przekonać się może z łatwością, że w przypadku (a) mamy

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \to +\infty.$$

gdy $h \to 0$; w przypadku (b) mamy

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \to -\infty,$$

gdy $h \to 0$; natomiast w przypadku (c)

$$\frac{\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)}{h} \to +\infty, \qquad \frac{\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)}{h} \to -\infty,$$

w przypadku zaś (d)

$$\frac{\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)}{h} \to -\infty, \qquad \frac{\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)}{h} \to +\infty.$$

Zresztą w przypadku (c) możemy brać pod uwagę tylko dodatnie wartości na h, w przypadku zaś (d) tylko ujemne; ten fakt sam przez się uniemożliwia istnienie w tych punktach pochodnej (zgodnie z naszym określeniem funkcji pochodnej).

Te cztery przypadki możemy zilustrować zapomocą następujących przykładów:

$$(a)\ y^3=x; \quad (b)\ y^3=-x, \quad (c)\ y^2=x, \quad (d)\ y^2=-x.$$

Oczywista rzecz, że wyjątkową wartością zmiennej niezależnej jest tu $x=0$.

106. Kilka reguł różniczkowania. We wszystkich twierdzeniach niniejszego paragrafu zakładamy, że $f(x)$ i $F(x)$ mają pochodne w tym przedziale zmienności x, który rozważamy.

(1) *Jeżeli* $\varphi(x)=f(x)+F(x)$, *wówczas*

$$\varphi'(x)=f'(x)+F'(x).$$

(2) *Jeżeli* $\varphi(x)=kf(x)$, *gdzie* k *jest stałą, wówczas*

$$\varphi'(x)=kf'(x).$$

Czytelnik sam dowiedzie tych dwu twierdzeń, opierając się na Przykł. XXXVIII.1.

(3) *Jeżeli* $\varphi(x)=f(x)\,.\,F(x)$, *wówczas*

$$\varphi'(x)=f'(x)\,.\,F(x)+f(x)\,.\,F'(x).$$

Istotnie, $\varphi'(x)=\lim\frac{f(x+h)F(x+h)-f(x).F(x)}{h}$

$$=\lim\left\{f(x+h)\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+F(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$$

$$=f(x).F'(x)+F(x).f'(x).$$

(4) *Jeżeli* $\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}$, *wówczas*

$$\varphi'(x)=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}.$$

Oczywiście należy rozumieć, że w rozważanym przedziale $f(x)\neq 0$. W takim razie mamy

$$\varphi'(x)=\lim\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)f(x)}\right\}=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}.$$

(5) *Jeżeli* $\varphi(x)=\frac{f(x)}{F(x)}$, *wówczas*

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)F(x)-F'(x).f(x)}{\{F(x)\}^2}.$$

Wynika to odrazu z twierdzeń (3) i (4).

(6) *Jeżeli* $\varphi(x)=F[f(x)]$, *wówczas*

$$\varphi'(x)=F'[f(x)].f'(x).$$

Istotnie, niech będzie $f(x)=y$, $f(x+h)=y+k$. Gdy $h\to 0$, wówczas jednocześnie $k\to 0$ oraz $k/h\to f'(x)$. Mamy więc

$$\varphi'(x)=\lim\frac{F[f(x+h)]-F[f(x)]}{h}$$

$$=\lim\left\{\frac{F(y+k)-F(y)}{k}\right\}\times\lim\left(\frac{k}{h}\right)$$

$$=F'(y).f'(x).$$

Twierdzenie to zawiera, jako przypadki szczególne, twierdzenia (2) i (4); chcąc się o tym przekonać, wystarczy założyć $F(x)=kx$ lub $F(x)=1/x$. Inny ciekawy przypadek szczególny przedstawia funkcja $f(x)=ax+b$; z twierdzenia naszego wynika, że $aF'(ax+b)$ jest pochodną funkcji $F(ax+b)$.

Ostatnie twierdzenie, które podamy, wymaga kilku słów wyjaśnienia. Niech będzie $x=\psi(y)$, gdzie $\psi(y)$ jest dla pewnego przedziału zmiennej y funkcją ciągłą stale rosnącą (lub malejącą) w ściślejszym znaczeniu. W takim razie możemy napisać równanie $y=\varphi(x)$, gdzie φ oznacza funkcję odwrotną względem ψ.

(7) *Jeżeli* $y=\varphi(x)$, *gdzie* φ *oznacza funkcję odwrotną względem* ψ, *tak że* $x=\psi(y)$, *i jeżeli* $\psi(y)$ *posiada pochodną* $\psi'(y)$ *nie równą zeru, wówczas* $\varphi(x)$ *ma pochodną*

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\psi'(y)}.$$

W rzeczy samej, jeżeli $\varphi(x+h)=y+k$, wówczas $k\to 0$, skoro tylko $h\to 0$, i mamy

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{(x+h)-x}=\lim_{k\to 0}\frac{(y+k)-y}{\psi(y+k)-\psi(y)}=\frac{1}{\psi'(y)}.$$

Otrzymaną funkcję możemy wyrazić w postaci funkcji zmiennej x, a to zapomocą związku $y=\varphi(x)$, tak że

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\psi'[\varphi(x)]}.$$

Na mocy tego twierdzenia możemy znaleźć pochodną każdej funkcji, jeżeli znamy pochodną funkcji odwrotnej.

107. O pochodnych funkcji zespolonych. Zakładaliśmy dotąd, że $y=\varphi(x)$ jest funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej x. Jeżeli y jest funkcją zespoloną kształtu $\varphi(x)+i\psi(x)$, możemy określić pochodną jako $\varphi'(x)+i\psi'(x)$. Czytelnik przekona się z łatwością, że twierdzenia (1)—(5) pozostają słuszne. Co się tyczy twierdzeń (6) i (7), to dla funkcji zespolonych istnieją wprawdzie twierdzenia analogiczne, ale dowód ich opiera się na pojęciu funkcji zmiennej zespolonej, które dopiero później poznamy dokładniej.

108. Znakowanie rachunku różniczkowego. Do oznaczenia pochodnej funkcji $y=\varphi(x)$ służyć może nie tylko symbol $\varphi'(x)$, którym dotąd posługiwaliśmy się, ale również inne symbole. Z nich najbardziej używane są

$$D_x y \quad \text{oraz} \quad \frac{dy}{dx}.$$

Najczęściej używany i najdogodniejszy z nich w wielu wypadkach jest ostatni symbol. Czytelnik powinien tylko zawsze pamiętać, że symbol ten dy/dx nie znaczy wcale: „liczba dy podzielona przez liczbę dx“, lecz znaczy: „wynik działania D_x czyli d/dx, wykonanego na funkcji $y=\varphi(x)$”. Działanie, o którym mowa, polega na utworzeniu ilorazu $\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ i na wyznaczeniu jego granicy przy $h\to 0$.

Ten nieco dziwaczny symbol powstał w następujący sposób. Mianownik h ułamka $\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}/h$ jest różnicą dwuch wartości: $x+h$ i x zmiennej niezależnej x; tak samo licznik jest różnicą odpowiednich wartości zmiennej zależnej y, mianowicie wartości $\varphi(x+h)$ i $\varphi(y)$. Dwie te różnice możemy nazwać odpowiednio *przyrostami* zmiennych x i y, i oznaczyć zapomocą symboli δx i δy. W takim razie ułamek nasz możemy napisać w postaci $\delta y/\delta x$, granicę zaś, do której ten ułamek dąży, gdy $h\to 0$, możemy oznaczyć symbolem dy/dx. Należy tylko pamiętać, że jest to symbol jednolity, że dotychczasowe rozumowania nie pozwalają nam na rozszczepienie go na dwa symbole dy i dx. W szczególności musimy podkreślić, że dy i dx *nie oznaczają* wcale $\lim \delta y$ i $\lim \delta x$, gdyż obie te granice są poprostu zerami. Czytelnik powinien oswoić się z tym symbolem pochodnej, na razie jednak, jeżeli użycie symbolu tego sprawia mu trudności, może pisać pochodną w postaci $D_x y$ lub $\varphi'(x)$.

W rozdziale VII przekonamy się, że stając na nieco odmiennym punkcie widzenia, można symbolom dy i dx nadać znaczenie w zupełności określone i że iloraz tych symboli, *odpowiednio określonych*, istotnie równa się pochodnej.

Twierdzenie § 106 możemy napisać w następującej postaci:

(1) *jeżeli* $y=y_1+y_2$, *wówczas* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy_1}{dx}+\dfrac{dy_2}{dx}$;

(2) *jeżeli* $y=ky_1$, *wówczas* $\dfrac{dy}{dx}=k\dfrac{dy_1}{dx}$;

(3) *jeżeli* $y=y_1y_2$, *wówczas* $\dfrac{dy}{dx}=y_1\dfrac{dy_2}{dx}+y_2\dfrac{dy_1}{dx}$;

(4) *jeżeli* $y=\dfrac{1}{y_1}$, *wówczas* $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{y_1^2}\dfrac{dy_1}{dx}$;

(5) *jeżeli* $y=\dfrac{y_1}{y_2}$, *wówczas* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_2\dfrac{dy_1}{dx}-y_1\dfrac{dy_2}{dx}}{y_2^2}$;

(6) *jeżeli y jest funkcją x, a x jest funkcją z, wówczas*

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx};$$

(7) $$\frac{dy}{dx}=1\Big/\left(\frac{dx}{dy}\right).$$

Przykłady XLIII. 1. Jeżeli $y=y_1y_2y_3$, wówczas

$$\frac{dy}{dx}=y_2y_3\frac{dy_1}{dx}+y_3y_1\frac{dy_2}{dx}+y_1y_2\frac{dy_3}{dx},$$

jeżeli zaś $y=y_1y_2y_3\dots y_n$, wówczas

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{r=1}^{n}y_1y_2\dots y_{r-1}y_{r+1}\dots y_n\frac{dy_r}{dx}.$$

W szczególności, jeżeli $y=z^n$, wówczas $\frac{dy}{dx}=nz^{n-1}\frac{dz}{dx}$, jeżeli zaś $y=x^n$, to $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$. (Dowiedliśmy tego w inny sposób w Przykł. XLII.3.)

2. Jeżeli $y=y_1y_2\dots y_n$, wówczas

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}+\dots+\frac{1}{y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

W szczególności, jeżeli $y=z^n$, wówczas $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{n}{z}\cdot\frac{dz}{dx}$.

109. Zbadamy teraz w sposób bardziej systematyczny różniczkowanie kilku najprostszych typów funkcji.

A. **Pochodne wielomianów.** Jeżeli

$$\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n,\ \text{wówczas}$$

$$\varphi'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1}.$$

W pewnych wypadkach bywa rzeczą dogodną wprowadzenie do wzoru na $\varphi(x)$ spółczynników dwumianowych; w takim razie funkcja nasza przybiera postać

$$\varphi(x)=a_0x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\dots+a_n,$$

a jej pochodna

$$\varphi'(x)=n\left\{a_0x^{n-1}+\binom{n-1}{1}a_1x^{n-2}+\binom{n-1}{2}a_2x^{n-3}+\dots+a_{n-1}\right\}.$$

Wzór ten na $\varphi(x)$ piszą niekiedy w postaci

$$\varphi(x)=(a_0,\ a_1,\dots a_n \between x,\ 1)^n\ ;$$

w takim razie wzór na pochodną ma kształt

$$\varphi'(x)=n(a_0,\ a_1,\dots a_{n-1} \between x,\ 1)^{n-1}.$$

Przekonamy się później, że $\varphi(x)$ można zawsze przedstawić w postaci iloczynu n czynników, a mianowicie w postaci

$$\varphi(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n),$$

gdzie $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots\alpha_n$ są liczbami rzeczywistemi lub zespolonemi. W takim razie pochodna ma kształt

$$\varphi'(x)=a_0\Sigma(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n),$$

gdzie symbol sumy Σ oznacza, że dodajemy do siebie wszystkie iloczyny, jakie dadzą się utworzyć z $n-1$ czynników kształtu $x-\alpha_k$.

Czytelnik sprawdzi z łatwością, że jeśli

$$\varphi(x)=a_0(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_\nu)^{m_\nu},$$

wówczas

$$\varphi'(x)=a_0\Sigma m_1(x-\alpha_1)^{m_1-1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_\nu)^{m_\nu}.$$

Przykłady XLIV. 1. Dowieść, że jeśli $\varphi(x)$ jest wielomianem, wówczas $\varphi'(x)$ jest spółczynnikiem przy h w rozwinięciu funkcji $\varphi(x+h)$ według potęg h.

2. Jeżeli $\varphi(x)$ jest podzielne przez $(x-\alpha)^2$, wówczas $\varphi'(x)$ jest podzielne przez $x-\alpha$, i ogólnie: jeżeli $\varphi(x)$ jest podzielne przez $(x-\alpha)^m$, to $\varphi'(x)$ jest podzielne przez $(x-\alpha)^{m-1}$.

3. Odwrotnie: jeżeli zarówno $\varphi(x)$ jak $\varphi'(x)$ są podzielne przez $x-\alpha$, to $\varphi(x)$ jest podzielne przez $(x-\alpha)^2$; i ogólnie: jeżeli $\varphi(x)$ jest podzielne przez $x-\alpha$, a $\varphi'(x)$ jest podzielne przez $(x-\alpha)^{m-1}$, wówczas $\varphi(x)$ jest podzielne przez $(x-\alpha)^m$.

4. Znaleźć elementarny algiebraiczny sposób wyznaczania pierwiastków wielokrotnych równania $P(x)=0$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem.

[Jeżeli H_1 jest największym spólnym dzielnikiem wielomianów P i P', H_2 jest największym spólnym dzielnikiem wielomianów H_1 i P'', H_3 największym spólnym dzielnikiem wielomianów H_2 i P''', i t. d. wówczas pierwiastki równania $\dfrac{H_1H_3}{H_2^2}=0$ są *podwójnemi* pierwiastkami równania $P=0$; pierwiastki równania $\dfrac{H_2H_4}{H_3^2}=0$ są *potrójnemi* pierwiastkami równania $P=0$ i t. d. Może się jednak zdarzyć, że nie potrafimy rozwiązać tych równań. Np. jeżeli $P(x)=(x-1)^3(x^5-x-7)^2$, wówczas $\frac{H_1H_2}{H_2^2}=x^5-x-7$, a $\frac{H_3H_4}{H_3^2}=x-1$; otóż pierwszego równania, mianowicie $x^5-x-7=0$ nie umiemy rozwiązać.]

5. Znaleźć pierwiastki wielokrotne równań

$$x^4+3x^3-3x^2-11x-6=0, \quad x^6+2x^5-8x^4-14x^3+11x^2+28x+12=0.$$

6. Jeżeli równanie $ax^2+2bx+c=0$ posiada pierwiastek podwójny, a więc daje się sprowadzić do równania $a(x-\alpha)^2=0$, wówczas $2(ax+b)$ musi być podzielne przez $x-\alpha$, zatym musi być $\alpha=-b/a$. Wartość $x=-b/a$ musi czynić zadość naszemu równaniu. Sprawdzić, że otrzymujemy w ten sposób znany z algiebry elementarnej warunek $ac-b^2=0$.

7. Równanie $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ może mieć jedną parę równych pierwiastków tylko wówczas, gdy $a=b=c$.

(*Mathem. Tripos*, 1905.)

8. Równanie $$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$ ma podwójny pierwiastek, jeżeli $G^2+4H^3=0$, gdzie $G=a^2d-3abc+2b^3$, a $H=ac-b^2$.

[Kładąc $ax+b=y$, otrzymujemy równanie $y^3+3Hy+G=0$. Równanie to musi mieć spólny pierwiastek z równaniem $y^2+H=0$.]

9. Jeżeli α, β, γ, δ są pierwiastkami równania

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0,$$

wówczas równanie $$4\vartheta^3-g_2\vartheta-g_3=0,$$

gdzie $$g_2=ae-4bd+3c^2, \quad g_3=ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3,$$

ma trzy pierwiastki, które otrzymujemy przez kołowe przestawienie liter α, β, γ w wielomianie

$$a/12.\{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)\}.$$

Rzecz jasna, że jeśli dwa pierwiastki z pośród α, β, γ, δ są sobie równe, wówczas dwa pierwiastki równania sześciennego są sobie równe. Opierając się na poprzednim zadaniu, dowieść, że $g_2^3\ 27g_3^2=0$.

10. **Twierdzenie Rolle'a w zastosowaniu do wielomianów.** *Jeżeli $\varphi(x)$ jest dowolnym wielomianem, wówczas między każdą parą pierwiastków równania $\varphi(x)=0$ leży pierwiastek równania $\varphi'(x)=0$.*

To niezmiernie ważne twierdzenie zostanie później dowiedzione dla innych klas funkcji, oprócz wielomianów. Narazie podajemy dowód algiebraiczny dla przypadku, gdy $\varphi(x)$ jest wielomianem. Przypuśćmy, że α i β są to dwa pierwiastki, z których pierwszy powtarza się m razy, drugi n razy. Mamy tedy

$$\varphi(x)=(x-\alpha)^m(x-\beta)^n.\vartheta(x),$$

gdzie $\vartheta(x)$ jest wielomianem, mającym stały znak, np. znak dodatni, przy $\alpha \leqq x \leqq \beta$. W takim razie

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\vartheta'(x) + \{m(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^n + n(x-\alpha)^m(x-\beta)^{n-1}\}.\vartheta(x)\\ &= (x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}[(x-\alpha)(x-\beta)\vartheta'(x) + \{m(x-\beta)+n(x-\alpha)\}.\vartheta(x)]\\ &= (x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}.F(x).\end{aligned}$$

Otóż $F(\alpha)=m(\alpha-\beta)\vartheta(\alpha)$, $F(\beta)=n(\beta-\alpha)\vartheta(\beta)$, zatym $F(\alpha)$ i $F(\beta)$ są znaków przeciwnych, a wobec tego $F(x)$ musi równać się zeru przy jakiejś wartości x, leżącej pomiedzy α i β. Stąd wynika, że przy tej wartości x musi być również $\varphi'(x)=0$.

110. B. **Pochodne funkcji wymiernych.** Jeżeli mamy

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie P i Q oznaczają wielomiany, wówczas z § 106.(5) wynika, że

$$R'(x)=\frac{P'(x).Q(x)-Q'(x).P(x)}{\{Q(x)\}^2}.$$

W ten sposób możemy znaleźć pochodną każdej funkcji wymiernej. Forma, w jakiej otrzymamy tę pochodną, może jednak nie być najprostsza z możliwych. Jeżeli mianowicie $Q(x)$ i $Q'(x)$ mają spólny czynnik, innemi słowy: jeżeli $Q(x)$ posiada pierwiastki wielokrotne, wówczas pochodna $R'(x)$, obliczona według powyższego wzoru, da się uprościć.

W niektórych wypadkach dogodniej bywa zastosować rozwinięcie na ułamki proste. Przypuśćmy, że

$$Q(x)=a_0(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_\nu)^{m_\nu}.$$

Z algiebry wyższej wiemy, że

$$\begin{aligned}R(x)=\Pi(x)&+\frac{A_{1,1}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2}+\dots+\frac{A_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}\\ &+\frac{A_{2,1}}{x-\alpha_2}+\frac{A_{2,2}}{(x-\alpha_2)^2}+\dots+\frac{A_{2,m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}}+\dots\end{aligned}$$

gdzie $\Pi(x)$ jest wielomianem. Innemi słowy, $R(x)$ daje się przedstawić w postaci sumy wielomianu oraz pewnej liczby ułamków kształtu

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p},$$

gdzie α jest pierwiastkiem równania $Q(x)=0$. Wobec tego, na mocy § 106.(4) (lub też na mocy § 107, jeżeli α jest liczbą zespoloną), mamy

$$R'(x)=\Pi'(x)-\frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)^2}-\frac{2A_{2,1}}{(x-\alpha_1)^3}-\ldots-\frac{A_{2,1}}{(x-\alpha_2)^2}-\frac{2A_{2,2}}{(x-\alpha_2)^3}-\ldots$$

Między innemi, dowiedliśmy w ten sposób, że *pochodną funkcji* x^m *jest* mx^{m-1}, *przy wszelkich całkowitych wartościach wykładnika* m, *zarówno dodatnich jak ujemnych.*

Wyłożona tu metoda jest szczególnie użyteczna wówczas, gdy musimy kilkakrotnie różniczkować funkcję wymierną. (Porów. Przykł. XLVIII).

Przykłady XLV. 1. Dowieść, że

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=-\frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

2. Dowieść, że

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C}\right)=\frac{(ax+b)(Bx+C)-(bx+c)(Ax+B)}{(Ax^2+2Bx+C)^2}.$$

3. Jeżeli Q jest podzielne przez $(x-\alpha)^m$ i jeżeli w pochodnej R' zostały wykonane wszelkie możliwe skrócenia, wówczas R' jest podzielne przez $(x-\alpha)^{m+1}$, ale nie jest podzielne przez żadną wyższą potęgę dwumianu $x-\alpha$.

4. Mianownik pochodnej R' nie może zawierać raz jeden czynnika $x-\alpha$. Stąd wynika, że funkcja wymierna, której mianownik zawiera raz jeden jakiś czynnik prosty (np. funkcja $1/x$), nie może być pochodną innej funkcji wymiernej.

111. C. **Pochodne funkcji algiebraicznych.** Opierając się na otrzymanych poprzednio wynikach oraz na twierdzeniu (6), § 106, możemy wyznaczyć pochodną każdej wyraźnej funkcji algiebraicznej.

Najważniejszą z tych funkcji jest x^m, gdzie m oznacza dowolną liczbę wymierną. Widzieliśmy już (§ 110), że gdy m jest liczbą całkowitą (dodatnią lub ujemną), pochodna równa się mx^{m-1}; teraz dowiedziemy, że wzór pozostaje słuszny przy każdej wymiernej wartości wykładnika m. Przypuśćmy, że $y=x^m=x^{p/q}$, gdzie p i q są to liczby całkowite, a q jest przytym liczbą dodatnią. Niech będzie $z=x^{1/q}$, czyli $x=z^q$, $y=z^p$. W takim razie

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dz}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{p}{q} z^{p-q} = mx^{m-1}.$$

Do tego samego wniosku prowadzi również Przykład XXXIX.3. Istotnie, niech będzie $\varphi(x) = x^m$; w takim razie

$$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

$$= \lim_{\xi \to x} \frac{\xi^m - x^m}{\xi - x} = mx^{m-1}.$$

Rzecz jasna, że i wzór ogólniejszy

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma(ax+b)^{m-1}$$

pozostaje słuszny przy wszelkim wymiernym m.

Różniczkowanie funkcji algiebraicznych uwikłanych zawiera pewne trudności teoretyczne, które rozważymy w rozdziale VII, ale sam proces obliczania pochodnych takich funkcji jest zupełnie łatwy. Sposób obliczania najlepiej zilustruje następujący przykład. Przypuśćmy, że y, jako funkcja zmiennej x, dana jest zapomocą równania

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Różniczkując względem x, otrzymujemy

$$x^2 + y^2 \frac{dy}{dx} - a\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

skąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Przykłady XLVI. 1. Wyznaczyć pochodne następujących funkcji:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \sqrt{\frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C}}, \quad (ax+b)^m.(cx+d)^n.$$

2. Dowieść że

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\} = \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}, \quad \frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

3. Znaleźć pochodną funkcji y, jeżeli

(I) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$; (II) $x^5 + y^5 - 5ax^2y^2 = 0$.

112. D. **Pochodne funkcji przestępnych.** Dowiedliśmy już, że

$$D_x \sin x = \cos x, \quad D_x \cos x = -\sin x.$$

Za pomocą twierdzeń (4) i (5), § 106, czytelnik dowiedzie, że

$$D_x \operatorname{tg} x = \sec^2 x, \qquad D_x \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x,$$

$$D_x \sec x = \operatorname{tg} x \,.\, \sec x, \quad D_x \operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \,.\, \operatorname{cosec} x.$$

Opierając się na twierdzeniu (7), możemy wyznaczyć pochodne funkcji odwrotnych, czyli kołowych. Otrzymujemy mianowicie następujące wzory:

$$D_x \operatorname{arc} \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D_x \operatorname{arc} \cos x = \mp \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$D_x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}, \quad D_x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$D_x \operatorname{arc} \sec x = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad D_x \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x = \mp \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Znak pochodnej funkcji $\operatorname{arc}\sin x$ lub $\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x$ musi być zgodny ze znakiem $\cos(\operatorname{arc}\sin x)$, znak zaś pochodnej funkcji $\operatorname{arc}\cos x$ lub $\operatorname{arc}\sec x$ musi być zgodny ze znakiem $\sin(\operatorname{arc}\cos x)$.

Często bywają potrzebne wzory ogólniejsze:

$$D_x \operatorname{arc} \sin(x/a) = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad D_x \operatorname{arctg}(x/a) = \frac{a}{a^2+x^2},$$

które z łatwością otrzymujemy, opierając się na twierdzeniu (7), § 106. W pierwszym z tych wzorów należy wziąć znak, zgodny ze znakiem $a\cos\{\operatorname{arc}\sin(x/a)\}$, gdyż mamy

$$a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pm\sqrt{a^2-x^2},$$

zależnie od tego, czy a jest liczbą dodatnią czy ujemną.

Wreszcie twierdzenie (6), § 106 daje możność różniczkowania funkcji złożonych, zawierających symbole zarówno funkcji algiebraicznych, jak i trygonometrycznych.

Przykłady XLVII.*) 1. Wyznaczyć pochodne funkcji

$$\cos^m x, \quad \sin^m x, \quad \cos x^m, \quad \sin x^m, \quad \cos(\sin x), \quad \sin(\cos x),$$

*) W tych przykładach m oznacza liczbę wymierną, a symbole $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ mogą przybierać tylko takie wartości liczbowe, przy których funkcje, zawierające te symbole, są rzeczywiste.

$$\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}, \quad \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}},$$

$$x \operatorname{arc}\sin x+\sqrt{1-x^2}, \quad (1+x)\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}.$$

2. Sprawdzić zapomocą różniczkowania, że funkcja $\operatorname{arc}\sin x+$ $+\operatorname{arc}\cos x$ ma stałą wartość, jeżeli x zawiera się między 0 a 1, funkcja zaś $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$ ma stałą wartość przy wszelkiej dodatniej wartości x.

3. Znaleźć pochodne funkcji

$$\operatorname{arc}\sin\sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{arc}\sin\{2x\sqrt{1-x^2}\}, \quad \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right).$$

4. Zróżniczkować funkcje

$$\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc}\sin\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}},$$

5. Dowieść, że funkcje

$$2\operatorname{arc}\sin\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}}, \quad 2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-x}}, \quad \operatorname{arc}\sin\frac{2\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)}}{\alpha-\beta}$$

mają wszystkie tę samą pochodną

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)}}.$$

6. Dowieść, że

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{\cos 3\vartheta}{\cos^3\vartheta}}\right\}=\sqrt{\frac{3}{\cos\vartheta\cos 3\vartheta}}.$$

7. Dowieść, że

$$\frac{1}{\sqrt{C(Ac-aC)}}\cdot\frac{d}{dx}\left\{\operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{C(ax^2+c)}{c(Ax^2+C)}}\right\}=\frac{1}{(Ax^2+C)\sqrt{ax^2+c}}$$

8. Funkcje

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\operatorname{arc}\cos\left(\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right), \quad \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\}$$

mają tę samą pochodną $\dfrac{1}{a+b\cos x}$.

9. Jeżeli $X=a+b\cos x+c\sin x$ i jeżeli

$$y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\cdot\operatorname{arc}\cos\frac{aX-a^2+b^2+c^2}{X\sqrt{b^2+c^2}},$$

wówczas $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{X}$.

10. Dowieść, że pochodną funkcji $F[f\{\varphi(x)\}]$ jest $F'[f\{\varphi(x)\}]f'\{\varphi(x)\}\varphi'(x)$. Uogólnić.

11. Jeżeli u, v są funkcjami zmiennej x, wówczas

$$D_x \operatorname{arctg}(u/v) = (vD_x u - uD_x v)/(u^2+v^2).$$

12. Pochodną funkcji $y=(\operatorname{tg} x+\sec x)^m$ jest $my \sec x$.

13. Pochodną funkcji $y=\cos x+i\sin x$ jest iy.

14. Zróżniczkować funkcje $x\cos x$, $(\sin x)/x$. Dowieść, że wartości zmiennej x, przy których styczne do krzywych $y=x\cos x$ oraz $y=(\sin x)/x$ są równoległe do osi x-ów, są odpowiednio pierwiastkami równań $\operatorname{ctg} x=x$ oraz $\operatorname{tg} x=x$.

15. Z łatwością można stwierdzić, że przy $a \geqq 1$ równanie $\sin x=ax$ posiada jeden tylko pierwiastek rzeczywisty $x=0$, natomiast przy $0<a<1$ posiada skończoną liczbę pierwiastków rzeczywistych, która rośnie, gdy a maleje. Dowieść, że wartości spółczynnika a, przy których zmienia się liczba pierwiastków naszego równania, są wartościami funkcji $\cos\xi$, gdzie ξ jest dodatnim pierwiastkiem równania $\operatorname{tg}\xi=\xi$. [Żądane wartości są temi wartościami a, przy których prosta $y=ax$ i krzywa $y=\sin x$ są do siebie styczne.]

16. Jeżeli $\varphi(x)=x^2\sin(1/x)$, gdy $x \neq 0$, i jeżeli $\varphi(0)=0$, wówczas

$$\varphi'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x),$$

gdy $x \neq 0$, a $\varphi'(0)=0$. Funkcja $\varphi'(x)$ jest nieciągła w punkcie $x=0$. [Porówn. § 104, (2).]

17. Znaleźć styczną i normalną do koła $x^2+y^2=r^2$ w punkcie (x_0, y_0).

18. To samo zadanie rozwiązać w przypadku elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ oraz hiperboli $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

19. W punkcie, którego parametr $=t$, styczna i normalna do krzywej $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ wyrażają się równaniami

$$\frac{x-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y-\psi(t)}{\psi'(t)} \quad \text{oraz} \quad \{x-\varphi(t)\}\varphi'(t)+\{y-\psi(t)\}\psi'(t)=0.$$

113. Różniczkowanie wielokrotne. Z $\varphi'(x)$ możemy utworzyć nową funkcję $\varphi''(x)$ dokładnie w taki sposób, w jaki z $\varphi(x)$ utworzyliśmy funkcję $\varphi'(x)$. Tę funkcję $\varphi''(x)$ nazywamy *drugą pochodną* funkcji $\varphi(x)$. Drugą pochodną oznaczają też symbolami

$$D^2_x y,\ \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

W taki sam sposób możemy określić *n-tą pochodną* funkcji $y=\varphi(x)$; oznaczać ją będziemy symbolami

$$\varphi^{(n)}(x), \quad D^n{}_x y, \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n y, \quad \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Przykłady XLVIII. 1. Jeżeli $\varphi(x)=x^m$, wówczas

$$\varphi^{(n)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}.$$

2. Jeżeli $\varphi(x)=(ax+b)^m$, wówczas

$$\varphi^{(n)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}.$$

W obu tych przykładach m może mieć dowolną wartość wymierną. Jeżeli m jest liczbą dodatnią całkowitą i jeżeli $n>m$, wówczas $\varphi^{(n)}(x)=0$.

3. Za pomocą wzoru

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{A}{(x-\alpha)^p}=(-1)^n\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)A}{(x-\alpha)^{p+n}}$$

możemy napisać odrazu n-tą pochodną każdej funkcji wymiernej, jeśli rozwiniemy tę funkcję na ułamki proste.

4. Dowieść, że n-ta pochodna funkcji $1/(1-x^2)$ równa się

$$\tfrac{1}{2}(n!)\{(1-x)^{-n-1}+(-1)^n(1+x)^{-n-1}\}.$$

5. **Twierdzenie Leibniza.** Jeżeli $y=uv$ i jeżeli umiemy napisać n pierwszych pochodnych funkcji u i v, wówczas n-tą pochodną funkcji y możemy utworzyć za pomocą wzoru

$$(uv)_n=u_nv+\binom{n}{1}u_{n-1}v_1+\binom{n}{2}u_{n-2}v_2+\dots+\binom{n}{r}u_{n-r}v_r+\dots+uv_n.$$

We wzorze tym wskaźniki oznaczają różniczkowanie, tak iż np. u_n jest symbolem n-tej pochodnej funkcji u.

W celu dowiedzenia tego wzoru zauważmy, że

$$(uv)_1=u_1v+uv_1,$$

$$(uv)_2=u_2v+2u_1v_1+uv_2, \text{ i t. d.}$$

Jednym słowem mamy wzór kształtu

$$(uv)_n=u_n v+a_{n,1}u_{n-1}v_1+a_{n,2}u_{n-2}v_2+\dots+uv_n.$$

Załóżmy, że $a_{n,r}=\binom{n}{r}$ przy $r=1,2,\dots n-1$; dowiedziemy, że w takim razie $a_{n+1,r}=\binom{n+1}{r}$ przy $r=1, 2, \dots n$. Istotnie, gdy różniczkując funkcję $(uv)_n$, tworzymy funkcję $(uv)_{n+1}$, otrzymujemy oczywiście przy wyrazie $u_{n+1-r}v_r$ spółczynnik, równy

$$a_{n,r}+a_{n,r-1}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}.$$

Opierając się tedy na zasadzie indukcji matematycznej, mamy prawo twierdzić, że przy wszelkich wartościach n i r zachodzi równość $a_{n,r}=\binom{n}{r}$ i że zatym wzór Leibniza jest słuszny.

6. n-ta pochodna funkcji $x^m f(x)$ równa się

$$\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}f(x)+n\frac{m!}{(m-n+1)!}x^{m-n+1}f'(x)+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{m!}{(m-n+2)!}x^{m-n+2}f''(x)+\ldots$$

Szereg ten posiada wogóle $n+1$ wyrazów.

7. Dowieść, że $D_x{}^n\cos x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $D_x{}^n\sin x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

8. Jeżeli $y=A\cos mx+B\sin mx$, wówczas $D_x{}^2y+m^2y=0$.
Jeżeli zaś
$$y=A\cos mx+B\sin mx+P_n(x),$$
gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia n-tego, wówczas
$$D_x^{n+3}y+m^2D_x^{n+1}y=0.$$

9. Jeżeli $x^2D_x{}^2y+xD_xy+y=0$, wówczas
$$x^2D_x^{n+2}y+(2n+1)\,xD_x^{n+1}y+(n^2+1)\,D_x{}^ny=0.$$

10. Jeżeli U_n oznacza n-tą pochodną funkcji $(Lx+M)/(x^2-2Bx+C)$, wówczas
$$\frac{x^2-2Bx+C}{(n+1)\,(n+2)}U_{n+2}+\frac{2(x-B)}{n+1}U_{n+1}+U_n=0.$$
(*Mathem. Tripos.* 1900).

[Sprawdzić najpierw przy $n=0$, następnie zastosować wzór Leibniza.]

11. Ponieważ
$$\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right),\quad \frac{x}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-ai}+\frac{1}{x+ai}\right),$$
zatym
$$D_x{}^n\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)=\frac{(-1)^n.\,n!}{2i}\cdot\left\{\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right\}.$$
Analogiczny wzór mamy dla $D_x{}^n\{x/(a^2+x^2)\}$. Jeżeli $\rho=\sqrt{(a^2+x^2)}$, a ϑ jest najmniejszym kątem, którego dostawa i wstawa równają się odpowiednio x/ρ, a/ρ, wówczas $x+ai=\rho\operatorname{Cis}\vartheta$, $x-ai=\rho\operatorname{Cis}(-\vartheta)$, a więc
$$D_x{}^n\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)=\frac{(-1)^n.\,n!}{2i}.\rho^{-n-1}\,[\operatorname{Cis}\{(n+1)\vartheta\}-\operatorname{Cis}\{-(n+1)\vartheta\}]$$
$$=(-1)^n.\,n!(x^2+a^2)^{-\frac{n+1}{2}}.\sin\{(n+1)\operatorname{arctg}(a/x)\}.$$
Analogicznie
$$D_x{}^n\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)=(-1)^n.\,n!\,(x^2+a^2)^{-\frac{n+1}{2}}.\cos\{(n+1)\operatorname{arctg}(a/x)\}.$$

Opierając się na tym, możemy napisać n-tą pochodną funkcji $(\lambda x+\mu)/(x^2+a^2)$. Jeśli chodzi o funkcję $(\lambda x+\mu)/(Ax^2+2Bx+C)$, gdzie $B^2<AC$, tak iż pierwiastki mianownika są zespolone, wówczas n-tą pochodną można znaleźć w taki sam sposób, kładąc $Ax+B=At$. Gdyby pierwiastki mianownika były rzeczywiste, wówczas funkcję naszą moglibyśmy przedstawić w postaci $\frac{H}{x-\alpha}+\frac{K}{x-\beta}$, gdzie H, K, α, β są liczbami rzeczywistemi, a więc n-tą pochodną możnaby napisać odrazu w postaci rzeczywistej.

12. Dowieść, że

$$D_x^n\left(\frac{\cos x}{x}\right)=\frac{P_n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+Q_n\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}$$

$$D_x^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{P_n\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-Q_n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}},$$

gdzie P_n, Q_n są wielomianami zmiennej x stopnia n i $n-1$.

13. Dowieść wzorów:

$$\frac{dx}{dy}=1\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right);\quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^3;\quad \frac{d^3x}{dy^3}=-\left\{\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{dy}{dx}-3\frac{d^2y}{dx^2}\right\}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^5.$$

14. Jeżeli $yz=1$, a $y_r=(1/r!).D_x^r y$ oraz $z_s=(1/s!)D_x^s z$,

wówczas
$$\frac{1}{z^3}\begin{vmatrix} z & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}=\frac{1}{y^2}\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

(*Mathem. Tripos.* 1905).

15. Jeżeli $W(y,z,u)=\begin{vmatrix} y & z & u \\ y' & z' & u' \\ y'' & z'' & u'' \end{vmatrix}$

przyczym kreski oznaczają różniczkowanie względem zmiennej x, wówczas

$$W(y,z,u)=y^3\,W\left(1,\ \frac{z}{y},\ \frac{u}{y}\right).$$

16. Jeżeli $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$

wówczas
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f},$$

a
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2}{(hx+by+f)^3}.$$

114. Kilka twierdzeń ogólnych, dotyczących pochodnych. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że $\varphi(x)$ jest funkcją, posiadającą pochodną $\varphi'(x)$ przy wszelkich wartościach x rozważanych przedziałów. Co za tym idzie, zakładamy, że $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą.

Znaczenie znaku pochodnej. Twierdzenie A. *Jeżeli* $\varphi'(x_0) > 0$, *wówczas mamy* $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ *przy wszelkich wartościach* x, *mniejszych od* x_0 *lecz dostatecznie blizkich do* x_0, *oraz* $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ *przy wszelkich wartościach* x, *większych od* x_0 *lecz dostatecznie blizkich do* x_0.

Istotnie, jeżeli przy $h \to 0$ iloraz $\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$ dąży do dodatniej granicy $\varphi'(x_0)$, wówczas przy dostatecznie małych wartościach na h dzielna i dzielnik tego wyrażenia muszą mieć jednakowe znaki, a to było właśnie do dowiedzenia. Z punktu widzenia gieometrycznego twierdzenie to jest niemal oczywiste, gdyż nierówność $\varphi'(x) > 0$ wyraża fakt, że styczna do krzywej $y=\varphi(x)$ tworzy kąt ostry dodatni z osią x-ów. Czytelnik sam sformułuje odpowiednie twierdzenie dla przypadku, gdy $\varphi'(x) < 0$.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia A jest następujące, bardzo ważne twierdzenie, zwane twierdzeniem Rolle'a. Z powodu wielkiej jego doniosłości podkreślamy raz jeszcze, że opiera się ono na założeniu istnienia pochodnej $\varphi'(x)$ dla wszelkich wartości x, o których mowa w twierdzeniu.

Twierdzenie B. *Jeżeli* $\varphi(a)=0$ *i* $\varphi(b)=0$, *wówczas pomiędzy* a *i* b *zawiera się przynajmniej jedna taka wartość* x, *że* $\varphi'(x)=0$.

Dwa przypadki są tu możliwe: albo $\varphi(x)$ w całym rozważanym przedziale (a, b) równa się zeru, albo też tak nie jest. W pierwszym przypadku musi być w całym przedziale $\varphi'(x)=0$. Jeżeli zachodzi drugi przypadek, t. j. jeżeli w przedziale (a, b) funkcja $\varphi(x)$ nie równa się stale zeru, wówczas dla pewnych wartości x tego przedziału $\varphi(x)$ musi być dodatnią lub ujemną liczbą. Przypuśćmy np., że $\varphi(x)$ przybiera czasem wartości dodatnie. W takim razie, na mocy twierdzenia 2, § 95, istnieje taka wartość ξ zmiennej x, nie równa ani a, ani b, że $\varphi(\xi)$ jest nie mniejsze od wartości $\varphi(x)$ w każdym innym punkcie przedziału. Otóż musi być $\varphi'(\xi)=0$, gdyby bowiem było $\varphi'(\xi)>0$, wówczas na mocy tylko co wyłożonego twierdzenia A, funkcja $\varphi(x)$ musiałaby przybierać wartości większe od $\varphi(\xi)$ przy wartościach zmiennej x większych od ξ, lecz dostatecznie blizkich do ξ, a więc niewątpliwie istniałyby wartości funkcji $\varphi(x)$ większe od $\varphi(\xi)$. W taki sam sposób dowodzimy, że pochodna $\varphi'(\xi)$ nie może być ujemna.

Wniosek 1. *Jeżeli $\varphi(a)=\varphi(b)=k$, wówczas musi istnieć przynajmniej jedna wartość x, zawarta między a i b, dla której $\varphi'(x)=0$.*

Wystarczy założyć $\varphi(x)-k=\psi(x)$ i zastosować twierdzenie B do funkcji $\psi(x)$.

Wniosek 2. *Jeżeli przy wszelkich wartościach x, należących do pewnego przedziału, mamy $\varphi'(x)>0$; wówczas $\varphi(x)$ jest w tym przedziale funkcją rosnącą w ściślejszym znaczeniu wyrazu.*

Niech będą x_1, x_2 dwie wartości zmiennej x, należące do rzeczonego przedziału, i niech będzie $x_1<x_2$. Mamy dowieść, że $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$. Przedewszystkim $\varphi(x_1)$ nie może równać się $\varphi(x_2)$, gdyż, na mocy twierdzenia B, musiałoby istnieć takie x, zawarte między x_1 i x_2, że $\varphi'(x)=0$. Ale $\varphi(x_1)$ nie może być również większe od $\varphi(x_2)$. Istotnie, $\varphi'(x_1)>0$, zatym, na mocy twierdzenia A, $\varphi(x)$ musi być większe od $\varphi(x_1)$ dla wartości zmiennej x większych od x_1, lecz dostatecznie blizkich do x_1. Widzimy tedy, że dla pewnego x_3, zawartego między x_1 i x_2, zachodziłaby równość $\varphi(x_3)=\varphi(x_1)$, że więc, na mocy twierdzenia B, istniałoby takie x, zawarte między x_1 i x_3, że $\varphi'(x)=0$.

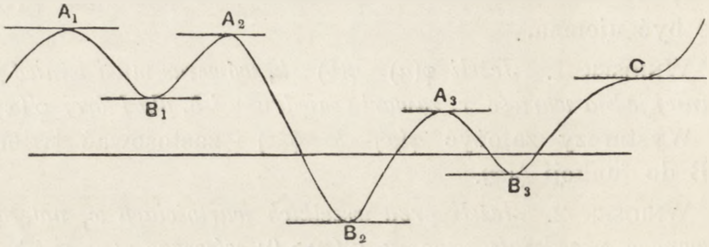
Wniosek 3. *Jeżeli $\varphi'(x)>0$ w przedziale (a, b) i jeżeli $\varphi(a)\geq 0$, wówczas $\varphi(x)$ ma wartość dodatnią w przedziale (a, b).*

Czytelnik powinien starannie porównać Wniosek 2 z Twierdzeniem A. Jeżeli, jak w Twierdzeniu A, zakładamy tylko, że pochodna $\varphi'(x)$ jest dodatnia *w jednym punkcie* $x=x_0$, wówczas możemy dowieść, że $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$, o ile x_1 i x_2 leżą dostatecznie blizko do x_0 i o ile spełnione są nierówności $x_1<x_0<x_2$. Istotnie, na mocy Twierdzenia A, mamy $\varphi(x_1)<\varphi(x_0)$ oraz $\varphi(x_2)>\varphi(x_0)$. Ale to jeszcze nie dowodzi istnienia przedziału, zawierającego x_0, w którym to przedziale funkcja $\varphi(x)$ byłaby stale rosnąca. W § 117 powrócimy jeszcze do tej sprawy.

115. Maximum i minimum. O wartości $\varphi(\xi)$, którą przybiera funkcja $\varphi(x)$, gdy $x=\xi$, powiadamy, że stanowi ona *maximum*, jeżeli $\varphi(\xi)$ jest większe od każdej wartości, jaką funkcja $\varphi(x)$ przybiera w pobliżu punktu $x=\xi$. Innemi słowy: $\varphi(\xi)$

nazywamy *maximum*, jeżeli dla wartości zmiennej x możemy wyznaczyć taki przedział $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, że mamy zawsze $\varphi(\xi)>\varphi(x)$, skoro tylko $\xi-\varepsilon<x<\xi$ lub też $\xi<x<\xi+\varepsilon$.

W sposób analogiczny określamy *minimum* funkcji $\varphi(x)$. Na rys. 47 punkty A oznaczają maxima, punkty B oznaczają



Rys. 47.

minima. Zaznaczamy, że jakkolwiek wartość funkcji jest większa w punkcie B_1 niż w A_3, jednak w B_1 mamy minimum, w A_3 zaś maximum.

TWIERDZENIE C. *Równość* $\varphi'(\xi)=0$ *jest warunkiem* **koniecznym** *istnienia w punkcie* $x=\xi$ *maximum lub minimum funkcji* $\varphi(x)$ *).

Wynika to odrazu z twierdzenia A. Żeby przekonać się, że warunek ten *nie jest dostateczny*, wystarczy rzucić okiem na punkt C na rysunku 47. Jeżeli np. $y=x^3$, to $\varphi'(x)=3x^2$, zatym $\varphi'(0)=0$, ale w punkcie $x=0$ nie zachodzi ani maximum ani minimum naszej funkcji, co widać odrazu z jej wykresu (rys. 11, str. 40).

W punkcie $x=\xi$ *funkcja niewątpliwie osiąga maximum, jeżeli* $\varphi'(\xi)=0$, *a prócz tego* $\varphi'(x)>0$, *przy wszelkich wartościach* x *mniejszych od* ξ, *lecz blizkich do* ξ, *oraz* $\varphi'(x)<0$ *przy wszelkich wartościach* x *większych od* ξ, *lecz blizkich do* ξ.

Jeżeli w powyższym orzeczeniu zmienimy znaki obu nierówności, wówczas w punkcie $x=\xi$ otrzymamy minimum funkcji.

Istotnie, orzeczenie to powiada, że możemy wyznaczyć przedział $(\xi-\varepsilon, \xi)$, w którym $\varphi(x)$ rośnie wraz z x, i drugi przedział $(\xi, \xi+\varepsilon)$ w którym $\varphi(x)$ maleje, gdy x rośnie, a to

*) Funkcja ciągła, nie mająca pochodnej, może posiadać maxima i minima. My jednak takich funkcji nie rozważamy i zakładamy, że każda funkcja, o której mowa, posiada pochodną.

jest równoznaczne z powiedzeniem, że $\varphi(\xi)$ stanowi maximum funkcji.

Można to jeszcze inaczej sformułować: jeżeli w punkcie $x=\xi$ pochodna $\varphi'(x)$ zmienia znak, a mianowicie z dodatniej staje się ujemną, wówczas funkcja $\varphi(x)$ osiąga w tym punkcie maximum; jeżeli zaś pochodna z ujemnej staje się dodatnią, wówczas $\varphi(x)$ osiąga minimum.

116. Warunki, przy których funkcja posiada maximum lub minimum, można sformułować jeszcze inaczej, i to nowe sformułowanie bywa w praktyce bardzo dogodne. Przypuśćmy, że $\varphi(x)$ posiada drugą pochodną $\varphi''(x)$. Zastrzegamy się, że jak z istnienia $\varphi(x)$ nie wynika istnienie pierwszej pochodnej $\varphi'(x)$, tak samo z istnienia pierwszej pochodnej nie wynika istnienie drugiej. W praktyce jednak mamy przeważnie do czynienia z funkcjami, które posiadają drugą pochodną.

TWIERDZENIE D. *Jeżeli* $\varphi'(\xi)=0$, *a* $\varphi''(\xi)\neq 0$, *wówczas* $\varphi(x)$ *posiada maximum lub minimum w punkcie* $x=\xi$, *a mianowicie posiada maximum, jeżeli* $\varphi''(\xi)<0$, *i minimum, jeżeli* $\varphi''(\xi)>0$.

Przypuśćmy np., że $\varphi''(\xi)>0$. Na mocy twierdzenia A., pierwsza pochodna $\varphi'(x)$ musi być ujemna przy x mniejszym od ξ, lecz dostatecznie blizkim do ξ, natomiast przy x większym od ξ, lecz dostatecznie blizkim do ξ pochodna ta jest dodatnia. Zatym w punkcie $x=\xi$ funkcja $\varphi(x)$ osiąga minimum.

117. W poprzednich rozważaniach (pomijając ostatni paragraf) zakładaliśmy, że $\varphi(x)$ ma pochodną przy wszelkich wartościach x, należących do rozważanego przedziału. O ile warunek ten nie jest spełniony, twierdzenia nasze przestają być słuszne. Np. Twierdzenie B nie daje się zastosować do funkcji

$$y=1-\sqrt{x^2},$$

gdzie pierwiastek bierzemy ze znakiem dodatnim. Wykres tej funkcji mamy na rys. 48. W danym wypadku

$$\varphi(-1)=\varphi(1)=0,$$

ale $\varphi'(x)$ równa się 1, gdy x jest ujemne, natomiast przy x dodatnim równa się -1; pochodna ta nigdy nie równa się zeru. Przy $x=0$ funkcja nie posiada pochodnej, a wykres jej nie posiada stycznej w punkcie P. Rzecz jasna, że przy $x=0$ funkcja osiąga maximum, ale $\varphi'(0)$ nie istnieje, a więc

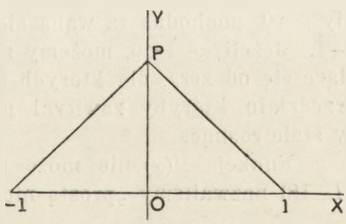


Fig. 48.

cecha, po której mieliśmy rozpoznać istnienie maximum, w danym razie zawodzi.

W naszych rozumowaniach zakładaliśmy tylko istnienie pochodnej $\varphi'(x)$; w szczególności nigdzie nie zakładaliśmy ciągłości pochodnej. Tu powstaje dość subtelne zagadnienie: czy może się zdarzyć, żeby funkcja $\varphi(x)$ posiadała pochodną dla wszystkich wartości x, ale żeby ta pochodna nie była ciągła? Innemi słowy: czy może się zdarzyć, żeby krzywa miała styczną w każdym swoim punkcie, ale żeby kierunek tej stycznej nie zmieniał się w sposób ciągły? Jeżeli zechcemy się oprzeć na intuicji gieometrycznej, prawdopodobnie damy na to pytanie odpowiedź przeczącą, a jednak taka odpowiedź nie byłaby słuszna.

Weźmy pod uwagę funkcję $\varphi(x)$, określoną w następujący sposób:

$$\text{przy } x\neq 0 \qquad \varphi(x)=x^2\sin(1/x)$$
$$\text{„} \quad x=0 \qquad \varphi(x)=0.$$

Taka funkcja jest ciągła przy wszelkich wartościach zmiennej x.

Jeżeli $x\neq 0$, mamy

$$\varphi'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x),$$

a

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(1/h)}{h}=0.$$

Tak więc pochodna $\varphi'(x)$ istnieje przy wszelkich wartościach na x, ale jest nieciągła przy $x=0$, gdyż $2x\sin(1/x)$ dąży do 0, gdy $x\to 0$, natomiast $\cos(1/x)$ waha się pomiędzy -1 a $+1$, wobec czego $\varphi'(x)$ również waha się między temi samemi granicami.

Zupełnie podobny przykład pozwoli nam na wyjaśnienie uwagi, uczynionej w końcu § 114. Niech będzie

$$\varphi(0)=0$$

oraz

$$\varphi(x)=x^2\sin(1/x)+\alpha x \qquad (x\neq 0),$$

gdzie $0<\alpha<1$. Wówczas $\varphi'(0)=\alpha>0$, tak iż warunki twierdzenia A, § 114 są spełnione. Jeżeli jednak $x\neq 0$, to

$$\varphi'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)+\alpha;$$

gdy $x\to 0$, pochodna ta waha się pomiędzy wyższą granicą $\alpha+1$ i niższą $\alpha-1$. Jeżeli $\alpha-1<0$, możemy znaleźć wartości na x dowolnie mało różniące się od zera, dla których $\varphi'(x)<0$; wobec tego niepodobna znaleźć przedziału, któryby zawierał punkt $x=0$ i w którym funkcja $\varphi(x)$ byłaby stale rosnąca.

Funkcja $\varphi'(x)$ nie może posiadać tego, co w rozdziale V (Przykł. XL, 18) nazwaliśmy „prostą nieciągłością". Za chwilę dowiedziemy tego.

Przykłady XLIX. 1. Sprawdzić Twierdzenie B w przypadku, gdy $\varphi(x)=(x-a)^m(x-b)^n$ lub też $\varphi(x)=(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p$, gdzie m, n, p są liczbami całkowitemi dodatniemi, a przytym $a<b<c$.

[Pierwsza funkcja równa się zeru przy $x=a$ lub $x=b$. Pochodna jej

$$\varphi'(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\{(m+n)x-mb-na\}$$

równa się zeru przy $x=(mb+na)/(m+n)$, która to wartość zawiera się między a i b. W drugim przykładzie należy dowieść, że w równaniu kwadratowym

$$(m+n+p)x^2-\{m(b+c)+n(c+a)+p(a+b)\}x+mbc+nca+pab=0$$

jeden pierwiastek zawiera się między a i b, drugi zaś między b i c.]

2. Dowieść, że przy $x>1$ wielomiany

$$2x^3+3x^2-12x+7,\quad 3x^4+8x^3-6x^2-24x+19$$

przybierają wartości dodatnie.

3. Wykazać, że $x-\sin x$ jest funkcją rosnącą w każdym przedziale zmienności x, i że $\operatorname{tg} x-x$ jest funkcją rosnącą, gdy x rośnie od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$. Przy jakich wartościach spółczynnika a funkcja $ax-\sin x$ stale rośnie lub stale maleje, gdy x rośnie?

4. Dowieść, że $\operatorname{tg} x-x$ rośnie, gdy x zmienia się od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{2}$, od $\frac{3\pi}{2}$ do $\frac{5\pi}{2}$, i t. d. Dowieść, że równanie $\operatorname{tg} x=x$ posiada po jednym tylko pierwiastku w każdym z tych przedziałów.

5. Na mocy przykł. 3 dowieść, że przy $x>0$ musi być $\sin x-x<0$, a więc $\cos x-1+\frac{x^2}{2}>0$, jak również $\sin x-x+\frac{x^3}{6}>0$. Dowieść ogólnie, że jeżeli $x>0$ i jeżeli

$$C_{2m}=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\ldots-(-1)^m\frac{x^{2m}}{2m!},$$

$$S_{2m+1}=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\ldots-(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

wówczas C_{2m} i S_{2m+1} są liczbami dodatniemi lub ujemnemi zależnie od tego, czy m jest liczbą nieparzystą czy parzystą.

6. Jeżeli $f(x)$ i $f''(x)$ są ciągłe i mają jednakowe znaki w każdym punkcie przedziału (a, b), wówczas przedział ten może zawierać conajwyżej po jednym pierwiastku równań $f(x)=0$, $f'(x)=0$.

7. Funkcje u, v i ich pochodne u', v' są ciągłe w pewnym przedziale zmienności argumentu x, a funkcja $uv'-u'v$ nigdzie w tym przedziale nie równa się zeru. Dowieść, że między każdą parą pierwiastków równania $u=0$ zawiera się jeden pierwiastek równania $v=0$, i odwrotnie. Sprawdzić twierdzenie, gdy $u=\cos x$, $v=\sin x$.

[Jeżeli v nie równa się zeru między dwoma pierwiastkami równania $u=0$ (powiedzmy między α i β), wówczas funkcja u/v jest ciągła w przedziale (α, β), a na krańcach tego przedziału równa się zeru. Zatym $(u/v)'=(u'v-v'u)/v^2$ musi równać się zeru dla jakiejś wartości x przedziału (α, β), co przeczy naszym założeniom.]

8. Wyznaczyć (o ile istnieją) maxima i minima następujących

funkcji: $(x-1)^2(x+2)$; x^3-3x, $2x^3-3x^2-36x+10$, $4x^3-18x^2+27x-7$, $3x^4-4x^3+1$, x^5-15x^3+3. Naszkicować wykresy poszczególnych funkcji.

[Zbadajmy np. ostatnią funkcję. Mamy $\varphi'(x)=5x^2(x^2-9)$; pochodna równa się zeru przy $x=-3$, $x=0$ lub $x=3$. Łatwo widzieć, że $x=-3$ daje maximum, $x=3$ daje minimum, a $x=0$ nie daje ani maximum ani minimum, gdyż pochodna $\varphi'(x)$ jest ujemna z obu stron wartości $\varphi'(0)$.]

9. Zbadać maxima i minima funkcji $(x-a)^m(x-b)^n$, gdzie m, n są to liczby całkowite dodatnie. Uwzględnić różne przypadki, które mogą zachodzić, gdy m, n są parzyste lub nieparzyste. Naszkicować wykres funkcji.

10. W podobny sposób zbadać funkcję $(x-a)(x-b)^2(x-c)^3$, uwzględniając różne kształty wykresu, odpowiadające różnym wartościom spółczynników a, b, c.

11. Dowieść, że $(ax+b)/(cx+d)$ nie posiada maximum ani minimum przy żadnych wartościach na a, b, c, d. Naszkicować wykres.

12. Zbadać maxima i minima funkcji

$$y=\frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C}$$

w przypadku, gdy mianownik ma pierwiastki zespolone.

[Możemy założyć, że $a>0$ i $A>0$. Pochodna równa się zeru, jeżeli

$$(ax+b)(Bx+c)-(Ax+B)(bx+c)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Równanie to musi mieć pierwiastki rzeczywiste, gdyż w przeciwnym razie pochodna miałaby stały znak, co jest niemożliwe, ponieważ y jest funkcją ciągłą, a mamy $y\to a/A$, zarówno gdy $x\to+\infty$, jak gdy $x\to-\infty$. Łatwo sprawdzić, że krzywa przecina w jednym punkcie prostą $y=a/A$ i że leży ona powyżej tej prostej przy dużych wartościach dodatnich na x, natomiast leży pod tą prostą przy dużych wartościach ujemnych na y, albo też odwrotnie, zależnie od tego, czy $b/a>B/A$, czy też $b/a<B/A$. Tak więc większy pierwiastek równania (1) daje maximum, jeżeli $b/a>B/A$, w przeciwnym zaś razie daje minimum.]

13. Największe i najmniejsze wartości, jakie przybiera funkcja poprzedniego zadania, są to te wartości parametru λ, które zamieniają wielomian $ax^2+2bx+c-\lambda(Ax^2+2Bx+C)$ w kwadrat zupełny. [Jest to warunek, żeby prosta $y=\lambda$ była styczna do krzywej.]

14. Wogóle maxima i minima funkcji $R(x)=P(x)/Q(x)$ znajdują się śród wartości λ, przy których równanie $P(x)-\lambda Q(x)=0$ posiada dwa równe pierwiastki.

15. Jeżeli równanie $Ax^2+2Bx+C=0$ posiada pierwiastki rzeczywiste, można postąpić w następujący sposób. Mamy

$$y-(a/A)=(\lambda x+\mu)/\{A(Ax^2+2Bx+C)\},$$

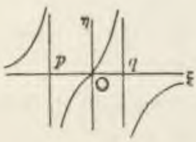
gdzie $\lambda=bA-aB$, $\mu=cA-aC$. Kładąc $\xi=\lambda x+\mu$ oraz $\eta=(A/\lambda^2)(Ay-a)$, mamy równanie kształtu

$$\eta=\frac{\xi}{(\xi-p)(\xi-q)}.$$

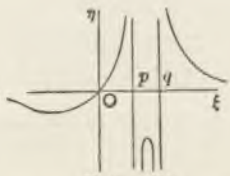
To przejście od spółrzędnych (x, y) do spółrzędnych (ξ, η) sprowadza się do przesunięcia równoległego osi, do zmiany skali na obu osiach i, w razie jeżeli $\lambda<0$, do zmiany zwrotu na osi odciętych. Wobec tego każdemu maximum (lub minimum) w jednym układzie odpowiada maximum (lub minimum) w drugim układzie, i odwrotnie. Pochodna η względem ξ równa się zeru, jeżeli

$$(\xi-p)(\xi-q)-\xi(\xi-p)-\xi(\xi-q)=0,$$

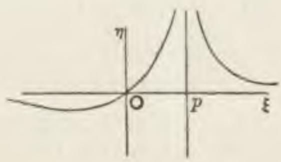
czyli jeżeli $\xi^2=pq$. Tak więc pochodna ma dwa pierwiastki, jeżeli p i q są tego samego znaku, nie ma zaś żadnego pierwiastka, jeżeli p i q są różnych znaków. W tym drugim przypadku wykres funkcji ma kształt taki, jak na rys. 49a.



Rys. 49*a*.



Rys. 49*b*.



Rys. 49*c*.

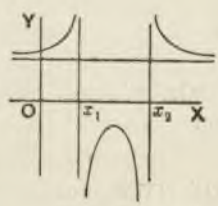
Jeżeli p, q są dodatnie, krzywa ma kształt jak na rys. 49*b*; łatwo widzieć, że $\xi=\sqrt{pq}$ daje maximum, a $\xi=-\sqrt{pq}$ daje minimum. Maximum równa się $-1/(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2$, minimum $=-1/(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2$; oczywista rzecz, że minimum jest tu większe od maximum.

W przypadku szczególnym, gdy $p=q$, mamy $\eta=\xi/(\xi-p)^2$; wykres krzywej ma kształt taki, jak na rys. 49*c*.

Poprzednie rozumowanie nie da się zastosować do przypadku, gdy $\lambda=0$, t. j. gdy $a/A=b/B$. Ale w tym przypadku mamy

$$y-(a/A)=\mu/\{A(Ax^2+2Bx+C)\}=\mu/\{A^2(x-x_1)(x-x_2)\},$$

a równanie $dy/dx=0$ daje jedną tylko wartość $x=\frac{x_1+x_2}{2}$. Na wykresie widać odrazu, że wartość ta daje maximum lub minimum zależnie od tego, czy μ jest dodatnie czy ujemne. Rys. 50 odpowiada przypadkowi, gdy $\mu>0$.



Rys. 50.

16. Dowieść, że jeśli $\alpha<\gamma<\beta$, wówczas funkcja $\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x-\gamma}$ przybiera wszelkie rzeczywiste wartości, jeżeli zaś γ nie zawiera się między α i β, wówczas funkcja przybiera wszelkie wartości, z wyjątkiem zawartych w przedziale o długości $4\sqrt{|\alpha-\beta||\beta-\gamma|}$.

17. Jeżeli $0<c<1$, to

$$y=\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$$

może przybierać wszelkie wartości rzeczywiste. Wykreślić tę funkcję.

(*Mathem. Tripos.* 1910).

18. Wyznaczyć funkcję kształtu $(ax^2+2bx+c)/(Ax^2+2Bx+C)$, która miałaby maxima lub minima równe 2 i 3 przy $x=1$ i $x=-1$, a przy $x=0$ miałaby wartość 2·5.

(*Mathem. Tripos* 1908).

19. Maxima i minima funkcji $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}$, przy dodatnich a, b, są

$$-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2, \quad -\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2.$$

20. Największa wartość funkcji $(x-1)^2/(x+1)^3$ jest 2/27.

21. Zbadać maxima i minima funkcji

$$\frac{x(x-1)}{x^2+3x+3}, \quad \frac{x^4}{(x-1)(x-3)^3}, \quad \frac{(x-1)^2(3x^2-2x-37)}{(x+5)^2(3x^2-14x-1)}.$$

22. Wyznaczyć maxima i minima funkcji $a\cos x+b\sin x$. Sprawdzić odpowiedź, pisząc funkcję w postaci $A\cos(x-\alpha)$.

23. Znaleźć maxima i minima funkcji

$$a^2\cos^2x+b^2\sin^2x, \quad A\cos^2x+2H\cos x\sin x+B\sin^2x.$$

24. Dowieść, że $\sin(x+a)/\sin(x+b)$ nie posiada ani maximum ani minimum. Wykreślić tę funkcję.

25. Dowieść, że funkcja

$$\frac{\sin^2x}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \qquad (0<a<b<\pi)$$

posiada nieskończenie wiele minimów równych 0 oraz nieskończenie wiele maximów równych

$$-4\sin a\sin b/\sin^2(a-b).$$

(*Mathem. Tripos.* 1909).

26. Najmniejszą wartością funkcji $a^2\sec^2x+b^2\operatorname{cosec}^2x$ jest $(a+b)^2$.

27. Dowieść, że $\operatorname{tg}3x.\operatorname{ctg}2x$ nie może zawierać się między 1/9 a 3/2.

28. Jeżeli suma przeciwprostokątnej i jednej przyprostokątnej jest stała, wówczas trójkąt ma największe pole, gdy kąt między temi bokami $=60^0$.

29. Przez stały punkt (a, b) prowadzimy prostą, przecinającą osie OX, OY w punktach P i Q. Dowieść, że najmniejsze wartości PQ, $OP+OQ$, $OP.OQ$ są odpowiednio $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ i $4ab$.

30. Styczna do elipsy przecina osie w punktach P, Q. Dowieść, że najmniejsza wartość odcinka PQ równa się połowie sumy osi elipsy.

31. Znaleźć długości i kierunki osi stożkowej

$$ax^2+2hxy+by^2=1.$$

[Jeżeli r jest połową średnicy, tworzącej kąt ϑ z osią x-ów, wówczas

$$1/r^2=a\cos^2\vartheta+2h\cos\vartheta\sin\vartheta+b\sin^2\vartheta;$$

r osiąga najmniejszą lub największą wartość, gdy $\operatorname{tg}2\vartheta=2h/(a-b)$.

Rugując z tych dwuch równań ϑ, mamy

$$\{a-(1/r^2)\}\{b-(1/r^2)\}=h^2.]$$

32. Jeżeli x, y są dodatnie i $x+y=k$, wówczas największa wartość funkcji $x^m y^n$ równa się

$$\frac{m^m n^n k^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}.$$

33. Jeżeli x, y są dodatnie i $x^2+xy+y^2=3k^2$, wówczas największa wartość funkcji $ax+by$ równa się

$$2k\sqrt{a^2-ab+b^2}.$$

34. Jeżeli między kątami ostremi ϑ i φ zachodzi związek $a\sec\vartheta+b\sec\varphi=c$, gdzie a, b, c są liczby dodatnie, wówczas $a\cos\vartheta+b\cos\varphi$ ma najmniejszą wartość przy $\vartheta=\varphi$.

118. Twierdzenie o wartości pośredniej. Dowiedziemy teraz następującego twierdzenia:

Twierdzenie. *Jeżeli $\varphi(x)$ posiada pochodną dla wszystkich wartości x, zawartych w przedziale (a, b), wówczas w przedziale tym istnieje taka wartość ξ zmiennej x, że*

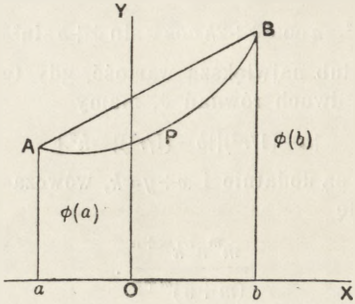
$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(\xi).$$

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, najważniejszego może w całym rachunku różniczkowym, pokażemy, jaki jest jego sens gieometryczny. Cięciwa AB (rys. 51) tworzy z osią x-ów kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$; z drugiej strony wiemy, że $\varphi'(\xi)=\operatorname{tg}\psi$, gdzie ψ jest kątem między osią x-ów a styczną do krzywej, poprowadzoną w punkcie o spółrzędnych ξ i $\varphi(\xi)$. Tak więc twierdzenie nasze powiada, że jeśli w każdym punkcie łuku AB istnieje styczna, wówczas można na tym łuku znaleźć taki punkt P, że styczna, poprowadzona przez P, będzie równoległa do cięciwy AB.

Dowód analityczny jest bardzo prosty. Weźmy pod uwagę funkcję

$$\varphi(b)-\varphi(x)-\frac{b-x}{b-a}\{\varphi(b)-\varphi(a)\},$$

która równa się zeru przy $x=a$ lub $x=b$. Z twierdzenia B,



Rys. 51.

§ 114 wynika, że istnieje wartość $x=\xi$, przy której pochodna tej funkcji równa się zeru. Ale pochodna ta równa się

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}-\varphi'(x),$$

zatym twierdzenie zostało dowiedzione.

Twierdzenie o wartości pośredniej będziemy nieraz pisali w postaci wzoru

$$\varphi(b)=\varphi(a)+(b-a)\varphi'\{a+\vartheta(b-a)\},$$

gdzie ϑ jest liczbą, zawartą między 0 a 1. Oczywista rzecz, że $a+\vartheta(b-a)$ znaczy w tym wzorze tyle, co: „jakaś liczba ξ, zawarta między a i b".

Kładąc $b=a+h$, otrzymujemy najczęściej używaną postać wzoru

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a+\vartheta h).$$

Przykłady L. 1. Dowieść, że funkcja

$$\varphi(b)-\varphi(x)-\frac{b-x}{b-a}\{\varphi(b)-\varphi(a)\}$$

wyraża różnicę między rzędną punktu na krzywej a rzędną odpowiedniego punktu na cięciwie.

2. Sprawdzić twierdzenie, gdy $\varphi(x)=x^2$ lub gdy $\varphi(x)=x^3$.

[W tym drugim przypadku mamy dowieść, że $(b^3-a^3)/(b-a)=3\xi^2$, gdzie $a<\xi<b$, czyli że ξ zawiera się między a i b, jeżeli $^1/_3(b^2+ab+a^2)=\xi^2$.]

3. Zapomocą twierdzenia o wartości pośredniej dowieść twierdzenia, podanego w końcu § 117.

[Ponieważ $\varphi'(0)=c$, możemy znaleźć tak małą wartość dodatnią na x, że iloraz $\{\varphi(x)-\varphi(0)\}/x$ będzie się prawie równał c, a więc możemy znaleźć tak małą wartość dodatnią na ξ, że $\varphi'(\xi)$ będzie się prawie równało c; otóż ten fakt nie da się pogodzić z równością $\lim\limits_{x\to+0}\varphi'(x)=a$, jeżeli nie zachodzi równość $a=c$.]

4. Zapomocą twierdzenia o wartości pośredniej dowieść twierdzenia (6), § 106, zakładając, że pochodne, z któremi mamy do czynienia, są ciągłe.

[Pochodna funkcji $F\{f(x)\}$ równa się

$$\lim \frac{F\{f(x+h)-f(x)\}}{h}.$$

Ale wiemy, że $f(x+h)=f(x)+hf'(\xi)$, gdzie ξ jest liczbą, zawartą między x a $x+h$. Prócz tego

$$F\{f(x)+hf'(\xi)\}=F\{f(x)\}+hf'(\xi)F'(\xi_1),$$

gdzie ξ_1 jest liczbą, zawartą między $f(x)$ a $f(x)+hf'(\xi)$. Tak więc pochodna funkcji $F\{f(x)\}$ równa się

$$\lim f'(\xi)F'(\xi_1)=f'(x)F'\{f(x)\},$$

ponieważ $\xi\to x$, a $\xi_1\to f(x)$, skoro tylko $h\to 0$.]

119. Twierdzenie o wartości pośredniej pozwala nam dowieść bardzo ważnej własności funkcji, a mianowicie: *jeżeli dla wszystkich wartości zmiennej x, zawartych w pewnym przedziale, mamy $\varphi'(x)=0$, wówczas funkcja $\varphi(x)$ ma w tym przedziale stałą wartość.*

Istotnie, niech a, b będą dwiema dowolnemi wartościami x w tym przedziale. Mamy

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'\{a+\vartheta(b-a)\}=0.$$

Stąd wypływa oczywisty wniosek, że jeśli we wszystkich punktach pewnego przedziału mamy $\varphi'(x)=\psi'(x)$, wówczas funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ różnią się w tym przedziale o stałą.

120. O całkowaniu. Widzieliśmy, w jaki sposób można w wielu razach znaleźć pochodną funkcji $\varphi(x)$. Teraz powstaje zagadnienie odwrotne: *czy można znaleźć pierwotną funkcję, jeżeli znamy jej pochodną?*

Przypuśćmy, że mamy daną funkcję $\psi(x)$. Zagadnienie polega na znalezieniu takiej funkcji $\varphi(x)$, żeby było $\varphi'(x)=\psi(x)$.

Chwila zastanowienia wystarcza, żeby dostrzec, że nasze zagadnienie rozpada się właściwie na trzy różne zagadnienia.

(1) Przedewszystkim chodzi o to, *czy funkcja $\varphi(x)$ naprawdę istnieje.* To pytanie należy odróżniać od pytania, czy umiemy znaleźć prosty jakiś wzór na $\varphi(x)$.

(2) Powtóre, chodzi o to, czy nasze zagadnienie posiada *jedno tylko* rozwiązanie, czy też ma ich więcej; innemi słowami: czy istnieje jedna tylko funkcja $\varphi(x)$ taka, że $\varphi'(x)=\psi(x)$, czy też funkcji takich jest więcej? Jeżeli takich funkcji jest kilka, to jaki związek zachodzi między niemi, i czy możemy, znając jedną z nich, znaleźć wszystkie inne?

(3) Wreszcie, jeżeli istnieje rozwiązanie, to *chodzi o znalezienie wzoru, za pomocą którego można byłoby to rozwiązanie wyrazić.*

Czytelnik zrozumie może dokładniej te trzy zagadnienia, jeżeli porównamy je z trzema zagadnieniami, dotyczącemi pochodnych.

(1) Funkcja $\varphi(x)$ może posiadać pochodną dla wszelkich wartości x, jak np. funkcja $\sin x$, albo x^m, gdzie m jest liczbą dodatnią całkowitą. Może się jednak zdarzyć, że funkcja n a o g ó ł posiada pochodną, ale nie ma jej przy pewnych wartościach zmiennej x; do takich należą np. funkcje $\sqrt[3]{x}$, $\sec x$. Może wreszcie zdarzyć się, że funkcja wcale nie ma pochodnej, jak np. funkcja, rozważana w Przykł. XL.20, która jest wszędzie nieciągła, a więc nie ma pochodnej przy żadnej wartości na x. W niniejszym rozdziale mieliśmy do czynienia z funkcjami ciągłemi, które posiadają pochodne, z wyjątkiem chyba pewnych wyjątkowych wartości na x (jak np. funkcja $\sqrt[3]{x}$, która niema pochodnej przy $x=0$). Ale może powstać pytanie: czy każda funkcja ciągła ma pochodną? albo: czy może istnieć krzywa ciągła, nie posiadająca stycznej? Zdrowy rozsądek powiada, że krzywa taka nie jest możliwa, ale, jak już poprzednio nadmieniliśmy, zdrowy rozsądek jest w błędzie.

W każdym razie jest rzeczą jasną, że na pytanie: „czy $\varphi(x)$ posiada pochodną?“ odpowiedź może wypaść rozmaicie. Mamy prawo oczekiwać, że tak samo rozmaicie wypadnie odpowiedź na pytanie odwrotne: „czy istnieje funkcja $\varphi(x)$, której pochodną byłaby dana funkcja $\psi(x)$?“. Widzieliśmy już, że w pewnych wypadkach odpowiedź jest przecząca; jeżeli np.

$\psi(x)$ równa się a, b lub c, zależnie od tego, czy x jest mniejsze od zera, równe zeru lub większe od zera, i jeżeli $a \neq b \neq c$, wówczas na nasze pytanie musimy dać odpowiedź przeczącą. Ale taka funkcja jest nieciągła, my zaś będziemy zawsze zakładali, że $\psi(x)$ jest funkcją ciągłą. Otóż, *jeżeli funkcja $\psi(x)$ jest ciągła, wówczas istnieje zawsze taka funkcja $\varphi(x)$, że $\varphi'(x) = \psi(x)$*. Ważnego tego twierdzenia dowiedziemy w rozdziale VII.

(2) Drugie pytanie daje się z łatwością rozstrzygnąć. Z określenia pochodnej wynika, że dana funkcja nie może mieć więcej niż jedną pochodną. Gdy chodzi o zagadnienie odwrotne, to z § 119 odrazu wynika, że jeśli $\varphi(x)$ jest jednym rozwiązaniem zagadnienia, wówczas $\varphi(x)+C$, gdzie C jest dowolną stałą, jest też rozwiązaniem tego samego zagadnienia.

(3) Wyznaczenie pochodnej, wyrażenie jej zapomocą wzoru jest rzeczą łatwą, o ile mamy do czynienia ze skończoną kombinacją symbolów zwykłych funkcji. Przekonamy się zaraz, że zagadnienie odwrotne jest o wiele trudniejsze.

Określenie. *Jeżeli $\psi(x)$ jest pochodną funkcji $\varphi(x)$, wówczas $\varphi(x)$ nazywamy* **całką** *funkcji $\psi(x)$. Działanie, zapomocą którego, znając funkcję $\psi(x)$, wyznaczamy $\varphi(x)$, nazywamy* **całkowaniem.**

Będziemy się posługiwali symbolem

$$\varphi(x) = \int \psi(x)dx,$$

przyczym należy pamiętać, że $\int \ldots dx$, tak samo jak d/dx są to wyłącznie symbole działań, że więc znaki $\int$ lub dx same przez się nic nie znaczą.

121. Zagadnienie praktyczne całkowania. Opierając się na wynikach poprzednich rozważań i rachunków, możemy odrazu wyznaczyć całki niektórych funkcji, często spotykanych. Np. mamy

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \int \cos x\, dx = \sin x, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x\ . \quad (1)$$

Wzory te należy pojmować w ten sposób, że funkcja w prawej części równania jest *jedną z całek*; jeżeli zaś chcemy otrzymać *całkę ogólną*, musimy do tej funkcji dodać *dowolną stałą* C, zwaną często *stałą całkowania*.

Pierwszy z powyższych wzorów nie da się zastosować w przypadku, gdy $m=-1$; istotnie, widzieliśmy (Przykł. XLV.4), że $1/x$ nie może być pochodną żadnej funkcji wymiernej. W następnym rozdziale dowiedziemy istnienia funkcji $F(x)$, której pochodna równa się $1/x$; na razie musimy założyć, że taka funkcja istnieje. Wiemy, że nie jest ona wymierna, a można dowieść, że nie jest ona również algiebraiczna i wogóle nie daje się wyrazić za pomocą żadnej skończonej kombinacji symbolów tych funkcji, które dotąd poznaliśmy. Niestety, dowód tego twierdzenia jest zbyt długi, byśmy go mogli w tej książce zamieścić; w każdym razie w rozdziale IX poznamy tę funkcję nieco dokładniej i zbadamy jej własności w sposób systematyczny.

Przypuśćmy najpierw, że x jest liczbą dodatnią. W takim razie napiszemy

$$\int\frac{dx}{x}=\lg x \qquad (2)$$

i funkcję, wypisaną z prawej strony tej równości, nazwiemy **funkcją logarytmiczną.** Jak dotąd, jest ona określona tylko dla dodatnich wartości zmiennej x.

Przypuśćmy teraz, że x jest liczbą ujemną. W takim razie $-x$ jest dodatnie i funkcja $\lg(-x)$ jest określona przez wzór (2). Otóż mamy

$$\frac{d}{dx}\lg(-x)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x},$$

a więc, gdy x jest ujemne, mamy

$$\int\frac{dx}{x}=\lg(-x) \qquad (3)$$

Wzory (2) i (3) dadzą się połączyć w jeden wzór

$$\int\frac{dx}{x}=\lg(\pm x)=\lg|x| \qquad (4)$$

w którym znak należy dobrać w ten sposób, żeby liczba $\pm x$ była dodatnia. Wzór ten jest słuszny dla wszelkich rzeczywistych wartości x różnych od zera.

Najważniejsze własności funkcji $\lg x$, których dowiedziemy w rozdziale IX, wyrażają się zapomocą równań

$$\lg 1 = 0, \quad \lg(1/x) = -\lg x, \quad \lg xy = \lg x + \lg y.$$

Rzecz jasna, że drugie równanie wynika z pierwszego i trzeciego. W niniejszym rozdziale równania te nie są nam właściwie potrzebne, ale czasem ułatwiają one zwięźlejsze pisanie wzorów.

Z trzeciego równania wynika, że $\lg x^2 = 2\lg x$, jeżeli $x > 0$, jeżeli zaś $x < 0$, to $\lg x^2 = 2\lg(-x)$, a w obu wypadkach mamy $\lg x^2 = 2\lg|x|$. Wobec tego wzór (4) możemy napisać w postaci

$$\int \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} \lg x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wzory (1)—(3) należą do podstawowych wzorów rachunku całkowego. Do nich należy dodać jeszcze dwa wzory, mianowicie

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\,, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arcsin x\,^{*)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

122. Całkowanie wielomianów. Twierdzenia, dowiedzione w § 106, prowadzą bezpośrednio do wzorów

$$\int \{f(x) + F(x)\} dx = \int f(x)dx + \int F(x)dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Zakładamy tu, że stałe całkowania są odpowiednio dobrane, że więc np. wzór (1) powiada: „*dowolna* całka funkcji $f(x)$, dodana do *dowolnej* całki funkcji $F(x)$, daje *jedną z całek* funkcji $f(x) + F(x)$“.

Na mocy tych wzorów możemy napisać całkę każdej funkcji, mającej kształt $\Sigma A_\nu f_\nu(x)$, jeżeli suma ta rozciąga się na skończoną liczbę składników i jeżeli znamy całkę funkcji $f_\nu(x)$. W szczególności możemy napisać całkę wielomianu

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) dx = \frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \ldots + a_n x\,.$$

123. Całkowanie funkcji wymiernych. Niech $R(x)$ będzie funkcją wymierną, rozłożoną na ułamki proste, a więc przedstawioną w postaci wielomianu $\Pi(x)$ i sumy ułamków kształtu $A/(x-\alpha)^p$.

---

*) W sprawie znaków porów. § 112.

Potrafimy napisać odrazu całki wielomianu oraz wszystkich ułamków, w których $p \neq 1$. Istotnie

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^p}\, dx = -\frac{A}{p-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{p-1}},$$

gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą lub zespoloną (§ 110).

Nieco trudniej jest wyznaczyć całkę ułamka, w którym $p=1$. Z twierdzenia (6), § 106 wynika, że

$$\int F'\{f(x)\} . f'(x) dx = F\{f(x)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

W szczególności, jeżeli $f(x)=ax+b$, gdzie a, b są to liczby rzeczywiste, i jeżeli $F(x)$ zastąpimy przez $\varphi(x)$, a $F'(x)$ przez $\psi(x)$, tak iż $\varphi(x)$ będzie całką funkcji $\psi(x)$, otrzymamy wzór

$$\int \psi(ax+b) dx = \frac{1}{a}\, \varphi(ax+b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wobec tego mamy np.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \lg |ax+b|\,;$$

w szczególności, jeżeli α jest liczbą rzeczywistą, mamy

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \lg |x-\alpha|.$$

Tak więc potrafimy całkować wszystkie wyrazy funkcji $R(x)$, w których $p=1$, a α jest liczbą rzeczywistą. Pozostaje do zbadania przypadek, gdy α jest liczbą zespoloną.

Przedewszystkim wprowadzimy pewne założenie ograniczające, a mianowicie założymy, że wszystkie spółczynniki funkcji $R(x)$ są rzeczywiste. W takim razie, jeżeli $\alpha = \gamma + \delta i$ jest m-krotnym pierwiastkiem równania $Q(x)=0$, to liczba sprzężona $\bar{\alpha} = \gamma - \delta i$ musi być m-krotnym pierwiastkiem tego samego równania. Jeżeli, dalej, rozkładając funkcję $R(x)$ na ułamki proste, otrzymujemy ułamek $A_p/(x-\alpha)^p$, to musimy również otrzymać ułamek $\bar{A}_p/(x-\bar{\alpha})^p$, gdzie A_p i $\bar{A}_p$ są to liczby sprzężone. Twierdzeń tych nie dowodzimy, gdyż czytelnik powinien je znać z kursu algiebry.

Jeżeli np. w rozwinięciu $R(x)$ na ułamki proste mamy wyraz $(\lambda+\mu i)/(x-\gamma-\delta i)$, to niewątpliwie mamy również wyraz $(\lambda-\mu i)/(x-\gamma+\delta i)$, a suma tych dwu wyrazów równa się

$$\frac{2\{\lambda(x-\gamma)-\mu\delta\}}{(x-\gamma)^2+\delta^2}.$$

Ten ostatni ułamek jest najogólniejszym ułamkiem kształtu

$$\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c},$$

gdzie $b^2<ac$. Czytelnik z łatwością sprawdzi to sam.

Jeżeli we wzorze (3) założymy $F\{f(x)\}=\lg|f(x)|$, otrzymamy

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\lg|f(x)| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

a jeżeli prócz tego założymy, że $f(x)=(x-\lambda)^2+\mu^2$, otrzymamy

$$\int\frac{2(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx=\lg\{(x-\lambda)^2+\mu^2\}.$$

Na mocy równań (6), § 121 oraz powyższego wzoru (4), mamy

$$\int\frac{-2\delta\mu}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx=-2\delta\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\lambda}{\mu}\right).$$

Te dwa wzory dają nam możność zcałkowania sumy dwuch ułamków, o które chodziło; potrafimy tedy napisać całkę każdej funkcji wymiernej, o ile umiemy wyznaczyć wszystkie czynniki w mianowniku tej funkcji. Całka ta jest *sumą wielomianu, pewnej liczby funkcji wymiernych kształtu*

$$-\frac{A}{p-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{p-1}},$$

pewnej liczby funkcji logarytmicznych oraz funkcji arctg.

Przykłady LI. 1. Dowieść, że jeśli $\Delta=ac-b^2$, $D=aB-bA$ i jeżeli $\Delta<0$, to

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}dx=\frac{A}{2a}\lg|X|+\frac{D}{2a\sqrt{-\Delta}}\lg\left|\frac{ax+b-\sqrt{-\Delta}}{ax+b+\sqrt{-\Delta}}\right|,$$

gdzie $X=ax^2+2bx+c$. Jeżeli zaś $\Delta>0$, to

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}dx=\frac{A}{2a}\lg X+\frac{D}{a\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\left(\frac{ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right).$$

2. Jeżeli $ac=b^2$, wówczas całka poprzedniego zadania przybiera kształt

$$-\frac{D}{a(ax+b)}+\frac{A}{a}\lg|ax+b|.$$

3. Jeżeli pierwiastki równania $Q(x)=0$ są wszystkie różne i rzeczywiste i jeżeli stopień wielomianu $P(x)$ jest niższy od stopnia wielomianu $Q(x)$, wówczas

$$\int R(x)dx=\Sigma\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}\lg|x-\alpha|,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie pierwiastki α równania $Q(x)=0$.

4. Jeżeli pierwiastki równania $Q(x)=0$ są rzeczywiste, przyczym α jest pierwiastkiem podwójnym, wszystkie zaś inne pierwiastki są pojedyńcze, i jeżeli stopień $P(x)$ jest niższy od stopnia $Q(x)$, wówczas

$$\int R(x)dx=\frac{A}{x-\alpha}+A'\lg|x-\alpha|+\Sigma B\lg|x-\beta|,$$

gdzie $$A=-\frac{2P(\alpha)}{Q''(\alpha)},\quad A'=\frac{2\{3P'(\alpha)Q''(\alpha)-P(\alpha)Q'''(\alpha)\}}{3\{Q''(\alpha)\}^2},\quad B=\frac{P(\beta)}{Q'(\beta)},$$

a sumowanie rozciąga się na wszystkie pojedyńcze pierwiastki β równania $Q(x)=0$.

5. Dowieść, że

$$\int\frac{dx}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2}=-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x^2+1)}-$$
$$-{}^1/_2\lg|x-1|+{}^1/_4\lg(x^2+1)+{}^1/_4\operatorname{arc}\operatorname{tg}x.$$

6. Zcałkować funkcje

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)},\quad\frac{x}{(x-a)^2(x-b)},\quad\frac{x}{(x-a)^2(x-b)^2},\quad\frac{x}{(x-a)^3},$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\quad\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b)^2},\quad\frac{x^2-a^2}{x^2(x^2+a^2)},\quad\frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)^2}.$$

7. Dowieść słuszności wzorów

$$\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\lg\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)+2\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)\right\}$$

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{-\lg\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)+2\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)\right\}$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2+x^4}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\lg\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)+2\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)\right\}.$$

124. Uwaga, dotycząca całkowania funkcji wymiernych. Poznaliśmy ogólną metodę całkowania funkcji wymiernych $R(x)$, przyczym zakładaliśmy, że *umiemy rozwiązać równanie* $Q(x)=0$. Metoda ta jest naogół prosta, bywają jednak wypadki, w których prowadzi ona do zbyt złożonych rachunków; w takim razie musimy szukać innej, prostszej metody. W niniejszej książce nie możemy badać szczegółowo praktycznych metod całkowania, wobec czego odsyłamy czytelnika do dzieł specjalnych, np. do Goursat *Cours d'Analyse*, t. I.

Jeżeli równania $Q(x)=0$ nie umiemy rozwiązać, wówczas metoda ułamków prostych nie da się zastosować i musimy szukać innej jakiejś drogi.*)

125. Całkowanie funkcji algiebraicznych. Z kolei musimy zbadać, w jaki sposób całkuje się funkcje algiebraiczne zmiennej x. W tym celu weźmy pod uwagę całkę pozornie ogólniejszą, mianowicie

$$\int R(x, y)dx\,,$$

gdzie $R(x)$ jest dowolną funkcją wymierną zmiennych x i y, przyczym y jest funkcją algiebraiczną zmiennej x. Całka ta jest tylko pozornie ogólniejsza, gdyż widzieliśmy (Przykł. XV.6), że przy naszych założeniach $R(x, y)$ musi być funkcją algiebraiczną zmiennej x. Obraliśmy taką całkę w celu ułatwienia rachunków, gdyż np. w wielu razach dogodniej bywa uważać funkcję

$$\frac{px+q+\sqrt{ax^2+2bx+c}}{px+q-\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

za funkcję wymierną, zależną od zmiennej x i od prostej algiebraicznej funkcji $\sqrt{ax^2+2bx+c}$, niż traktować ją odrazu jako funkcję algiebraiczną zmiennej x.

126. Całkowanie przez podstawienie i przez usunięcie niewymierności. Z równania (3), § 123 wynika, że jeśli $\int\psi(x)dx=\varphi(x)$, to

$$\int\psi\{f(t)\}f'(t)dt=\varphi\{f(t)\}\,. \qquad \text{(1)}$$

To równanie daje nam możność wyznaczania całek w wie-

*) Porów. Hardy: *The integration of functions of a single variable*, str. 10.

lu wypadkach, gdy kształt całki nie jest z góry oczywisty. Metodę tę możemy ująć w następującą regułę: kładziemy $x = f(t)$, gdzie $f(t)$ jest jakąkolwiek, odpowiednio dobraną funkcją nowej zmiennej t; otrzymany wzór mnożymy przez $f'(t)$; wyznaczamy (o ile to okaże się możliwym) całkę funkcji $\varphi\{f(t)\}f'(t)$; wreszcie znalezioną całkę wyrażamy znów za pomocą zmiennej x.

W wielu wypadkach otrzymujemy funkcję zmiennej t, która daje się z łatwością całkować. Tak bywa zawsze, jeżeli potrafiliśmy znaleźć taki związek między x i t, że otrzymana funkcja zmiennej t jest wymierna. Np. funkcję $R(\sqrt{x})$ możemy przekształcić w funkcję wymierną zmiennej t, kładąc $x = t$ jakoż otrzymamy $2tR(t)$. Tę metodę postępowania nazywamy **całkowaniem przez usuwanie niewymierności.**

Stosując ją do naszego zagadnienia, t. j. do wyznaczenia całki $\int R(x, y)dx$, powiemy:

Jeżeli potrafimy znaleźć taką zmienną t, żeby x i y były funkcjami wymiernemi tej zmiennej, np. żeby było $x = R_1(t)$, $y = R_2(t)$, wówczas będziemy mieli

$$\int R(x, y)dx = \int R\{R_1(t),\ R_2(t)\}R_1'(t)dt,$$

a ta druga całka da się obliczyć zapomocą metody § 123, jako funkcja wymierna zmiennej t.

Nie możemy roztrząsać, kiedy takie podstawienie jest wogóle możliwe, gdyż przekraczałoby to ramy niniejszej książki. Poprzestaniemy tedy na poznaniu kilku prostych przypadków szczególnych.

127. Całki, związane z teorją stożkowych. Przypuśćmy, że x i y związane są równaniem

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

czyli że wykres funkcji y jest stożkową.

Niech (ξ, η) będzie dowolnym punktem stożkowej. Kładąc w naszym równaniu $x - \xi = X$, $y - \eta = Y$, otrzymamy

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2GX + 2FY = 0,$$

gdzie $F=h\xi+b\eta+f$, $G=a\xi+h\eta+g$. Jeżeli w nowym równaniu położymy $Y=tX$, przekonamy się, że zarówno X jak Y dają się wyrazić w postaci funkcji wymiernych zmiennej t, a więc to samo da się powiedzieć o x i y. Jakoż mamy

$$x-\xi=-\frac{2(G+Ft)}{a+2ht+bt^2},\quad y-\eta=-\frac{2t(G+Ft)}{a+2ht+bt^2},$$

a stąd wynika, że usunięcie niewymierności z naszej funkcji daje się uskutecznić.

Czytelnik sprawdzi sam, że

$$hx+by+f=-\tfrac{1}{2}(a+2ht+bt^2)\frac{dx}{dt},$$

że więc
$$\int\frac{dx}{hx+by+f}=-2\int\frac{dt}{a+2ht+bt^2}.$$

Jeżeli $h^2>ab$, wówczas dogodniej jest postąpić w następujący sposób. Stożkowa jest hiperbolą, której asymptoty są równoległe do pary prostych

$$ax^2+2hxy+by^2=0,$$

czyli do prostych
$$b(y-\mu x)(y-\mu' x)=0.$$

Kładąc $y-\mu x=t$, otrzymamy dwa równania

$$y-\mu x=t,\quad y-\mu' x=-\frac{2gx+2fy+c}{bt}.$$

Jest rzeczą jasną, że z dwuch tych równań możemy wyznaczyć x i y jako funkcje wymierne zmiennej t. Postępowanie to wyjaśnimy zaraz na bardzo ważnym przykładzie.

128. Całka $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$. Przypuśćmy, że $y^2=ax^2+2bx+c$, gdzie $a>0$. Kładąc $y+x\sqrt{a}=t$, otrzymamy

$$2\frac{dx}{dt}=\frac{(t^2+c)\sqrt{a}+2bt}{(t\sqrt{a}+b)^2},\quad 2y=\frac{(t^2+c)\sqrt{a}+2bt}{t\sqrt{a}+b},$$

tak iż
$$\int\frac{dx}{y}=\int\frac{dt}{t\sqrt{a}+b}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lg\left|x\sqrt{a}+y+\frac{b}{\sqrt{a}}\right| \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

W szczególności, jeżeli $a=1$, $b=0$, $c=\alpha^2$, albo jeżeli $a=1$, $b=0$, $c=-\alpha^2$, mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \lg|x+\sqrt{x^2+\alpha^2}|, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \lg|x+\sqrt{x^2-\alpha^2}| \quad \ldots \quad (2)$$

Do tych dwuch wzorów należy dodać jeszcze trzeci

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \operatorname{arc} \sin(x/\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

który odpowiada przypadkowi, gdy $a<0$. We wzorze (3) założyliśmy, że $\alpha>0$; gdyby było $\alpha<0$, całka miałaby kształt $\operatorname{arc}\sin\frac{x}{|\alpha|}$.

Wzór (3) na pozór różni się bardzo znacznie od wzoru (2); dopiero w rozdziale X przekonamy się, że w istocie zachodzi między niemi bardzo ścisły związek.

129. Całka $\int \frac{\lambda x+\mu}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}dx$. Całka ta daje się zawsze wyznaczyć za pomocą metody poprzedniego paragrafu. Ponieważ

$$\lambda x+\mu = \frac{\lambda(ax+b)}{a} + \mu - \frac{\lambda b}{a},$$

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}dx = \sqrt{ax^2+2bx+c},$$

zatym

$$\int \frac{\lambda x+\mu}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}dx = \frac{\lambda}{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}$$

$$+\left(\mu-\frac{\lambda b}{a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

W tej drugiej całce spółczynnik a może być zarówno dodatni, jak ujemny. Jeżeli $a>0$, kładziemy $x\sqrt{a}+(b/\sqrt{a})=t$ i mamy

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}},$$

gdzie $k=(ac-b^2)/a$. Jeżeli $a<0$, kładziemy $A=-a$ oraz $x\sqrt{A}-(b/\sqrt{A})=t$ i otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{-k-t^2}}.$$

Widzimy tedy, że naszą całkę można zawsze sprowadzić do jednej z trzech znanych nam postaci

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\alpha^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2-t^2}}.$$

130. Całka $\int(\lambda x+\mu)\sqrt{ax^2+2bx+c}\,dx$. W taki sam sposób otrzymujemy

$$\int(\lambda x+\mu)\sqrt{ax^2+2bx+c}\,dx=\frac{\lambda}{3a}(ax^2+2bx+c)^{3/2}+$$
$$+\left(\mu-\frac{\lambda b}{a}\right)\int\sqrt{ax^2+2bx+c}\,dx\,,$$

a tę drugą całkę można z łatwością sprowadzić do jednej z trzech postaci

$$\int\sqrt{t^2+\alpha^2}\,dt\,,\quad \int\sqrt{t^2-\alpha^2}\,dt\,,\quad \int\sqrt{\alpha^2-t^2}\,dt\,.$$

W celu wyznaczenia tych całek wprowadzimy nową metodę całkowania.

131. Całkowanie przez części. Z reguły różniczkowania iloczynu wypływa odrazu następujący wzór:

$$\int f'(x)F(x)dx=f(x)\,F(x)-\int f(x)F'(x)dx\,.$$

Wzór ten jest bardzo praktyczny, jeżeli umiemy wyznaczyć całkę $\int f(x)F'(x)dx$.

Dla przykładu zastosujemy go do funkcji, rozważanej w poprzednim paragrafie.

Kładąc

$$f(x)=ax+b\,,\quad F(x)=\sqrt{ax^2+2bx+c}=y\,,$$

otrzymujemy

$$a\int ydx=(ax+b)y-\int\frac{(ax+b)^2}{y}dx=$$
$$=(ax+b)\,y-a\int ydx+(ac-b^2)\int\frac{dx}{y}\,,$$

skąd
$$\int ydx=\frac{(ax+b)y}{2a}+\frac{ac-b^2}{2a}\int\frac{dx}{y}\,,$$

a tę ostatnią całkę umiemy już wyznaczać (§ 128).

Przykłady LII. 1. Dowieść, że przy $a>0$ mamy

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\tfrac{1}{2}a^2\lg|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \lg|x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin(x/a).$$

2. Zapomocą podstawienia $x=a\sin\vartheta$ wyznaczyć całki $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ i sprawdzić, że odpowiedź zgadza się z tą, którą otrzymaliśmy w § 128 i w Przykł. 1.

3. Trzema sposobami obliczyć $\int x(x+a)^m\,dx$, gdzie m jest liczbą wymierną, a mianowicie: (1) stosując całkowanie przez części, (2) stosując podstawienie $(x+a)^m=t$, (3) pisząc $(x+a)-a$ zamiast x.

4. Zapomocą podstawień $ax+b=1/t$ i $x=1/u$ dowieść, że

$$\int \frac{dx}{y^3} = \frac{ax+b}{\Delta y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y^3} = -\frac{bx+c}{\Delta y},$$

gdzie $y=\sqrt{ax^2+2bx+c}$, $\Delta=ac-b^2$.

5. Całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, gdzie $b>a$, obliczyć trzema sposobami: (1) metodą ogólną, (2) za pomocą podstawienia $(b-x)/(x-a)=t^2$, (3) zapomocą podstawienia $x=a\cos^2\vartheta+b\sin^2\vartheta$.

6. Obliczyć całki $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$, $\int \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,dx$.

7. Za pomocą podstawienia $2x+a+b=\frac{1}{2}(a-b)\{t^2+(1/t)^2\}$ albo też mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$ wykazać, że przy $a>b$ mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{3t^3}\right).$$

8. Zapomocą odpowiedniego podstawienia usunąć niewymierności w całce $\int \frac{dx}{(x+a)^{3/2}+(x-a)^{3/2}}$.

(*Mathem. Tripos*, 1899.)

9. Dowieść, że zapomocą podstawienia $y^n=ax+b$ można usunąć niewymierność w całce $\int R\{x, \sqrt[n]{ax+b}\}\,dx$.

10. Dowieść, że

$$\int f''(x)F(x)dx = f'(x)F(x) - f(x)F'(x) + \int f(x)F''(x)dx,$$

i że ogólnie

$$\int f^{(n)}(x)F(x)dx = f^{(n-1)}(x)F(x) - f^{(n-2)}(x)F'(x) + \ldots + (-1)^n \int f(x)F^{(n)}(x)dx.$$

11. Całkę $\int (1+x)^p x^q dx$, gdzie p i q są to liczby wymierne, można obliczyć w trzech przypadkach: (1) gdy p jest liczbą całkowitą; (2) gdy q jest liczbą całkowitą; (3) gdy $p+q$ jest liczbą całkowitą. [W (1) przypadku kładziemy $x=u^s$, gdzie s jest mianownikiem liczby q; w (2) przypadku $x+1=t^s$, gdzie s jest mianownikiem liczby p; w (3) przypadku $1+x=xt^s$, gdzie s jest mianownikiem liczby p.]

12. Całkę $\int x^m (ax^n+b)^q dx$ można sprowadzić do poprzedniej całki zapomocą podstawienia $ax^n=bt$. Zresztą w praktyce stosuje się zazwyczaj t. zw. wzory redukcyjne (porów. Zadanie 39 w końcu rozdziału.)

13. Za pomocą podstawienia $4x=-(b/a)\{t+(1/t)\}^2-(d/c)\{t-(1/t)\}^2$ możemy usunąć niewymierności z całki

$$\int R\{x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\} dx.$$

14. Za pomocą odpowiedniego podstawienia usunąć niewymierność z całki $\int R(x, y)dx$, gdzie $y^2(x-y)=x^2$. [Kładziemy $y=tx$.]

15. Uczynić to samo z poprzednią całką, jeżeli (1) $y(x-y)^2=x$, (2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. [W pierwszym przypadku kładziemy $x-y=t$, w drugim $x^2+y^2=t(x-y)$.]

16. Jeżeli $x=y(x-y)^2$, to $\int \frac{dx}{x-3y} = \frac{1}{2} \lg \{(x-y)^2-1\}$.

17. Jeżeli $(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)$, to $\int \frac{dx}{y(x^2+y^2+c^2)} = -\frac{1}{c^2} \lg\left(\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)$.

132. Całka $\int R(x, y)\, dx$, **gdzie** $y^2=ax^2+2bx+c$. Najogólniejszą całką, związaną ze stożkową $y^2=ax^2+2bx+c$ i należącą do typu, rozważanego w § 127, jest

$$\int R(x, \sqrt{X})dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie $X=y^2=ax^2+2bx+c$. Zakładamy, że R jest funkcją rzeczywistą.

Funkcja, stojąca pod znakiem całki, ma kształt P/Q, gdzie P i Q oznaczają wielomiany zmiennych x i $\sqrt{X}$; możemy ją tedy sprowadzić do postaci

$$\frac{A+B\sqrt{X}}{C+D\sqrt{X}}=\frac{(A+B\sqrt{X})(C-D\sqrt{X})}{C^2-XD^2}=E+F\sqrt{X},$$

przyczym A, B,... oznaczają funkcje wymierne zmiennej x. Natrafiamy tu na jedno tylko nowe zagadnienie, mianowicie na całkowanie funkcji $F\sqrt{X}$ lub, co na jedno wychodzi, funkcji $G/\sqrt{X}$, gdzie G jest funkcją wymierną zmiennej x. Otóż całkę

$$\int \frac{G}{\sqrt{X}}dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

możemy obliczyć, rozkładając G na ułamki proste. Możemy przytym otrzymać trzy różne typy całek.

(I) Przedewszystkim możemy mieć całkę

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{X}}dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

w której m jest liczbą całkowitą dodatnią. W § 129 nauczyliśmy się obliczania takich całek w przypadku, gdy $m=0$ lub $m=1$. Chcąc tę sprawę rozstrzygnąć ogólnie, zauważmy, że

$$\frac{d}{dx}(x^{m-1}\sqrt{X})=(m-1)x^{m-2}\sqrt{X}+\frac{(ax+b)x^{m-1}}{\sqrt{X}}=\frac{\alpha x^m+\beta x^{m-1}+\gamma x^{m-2}}{\sqrt{X}}$$

gdzie α, β, γ są to stałe, dające sie z łatwością wyznaczyć. Rzecz jasna, że całkując to równanie, otrzymamy związek między trzema kolejnemi całkami kształtu (3), a ponieważ znamy wartości takich całek przy $m=0$ i $m=1$, możemy więc kolejno obliczyć te całki przy wszelkich wartościach na m.

(II) Powtóre możemy otrzymać całkę typu

$$\int \frac{dx}{(x-p)^m\sqrt{X}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

gdzie p jest liczbą rzeczywistą. Kładąc $x-p=1/t$, sprowadzamy tę całkę do typu (3).

(III) Możemy wreszcie otrzymać całki, odpowiadające zespolonym pierwiastkom mianownika funkcji G. Poprzestaniemy na rozważeniu najprostszego przypadku, gdy mianowicie wszystkie takie pierwiastki są pojedyńcze. Parze pierwiastków zespolonych sprzężonych odpowiada wówczas całka

$$\int \frac{Lx+M}{(Ax^2+2Bx+C)\sqrt{ax^2+2bx+c}}dx \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Kładziemy

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1},$$

gdzie μ i ν są tak dobrane, by było

$$a\mu\nu+b(\mu+\nu)+c=0, \quad A\mu\nu+B(\mu+\nu)+C=0,$$

czyli że μ i ν są pierwiastkami równania

$$(aB-bA)\xi^2-(cA-aC)\xi+(bC-cB)=0.$$

Pierwiastki tego równania są niewątpliwie rzeczywiste, a więc możemy znaleźć rzeczywiste wartości na μ i ν, czyniące zadość naszym wymaganiom.

Po wykonaniu podstawienia przekonamy się, że całka (5) przybiera postać

$$H\int\frac{tdt}{(\alpha t^2+\beta)\sqrt{\gamma t^2+\delta}}+K\int\frac{dt}{(\alpha t^2+\beta)\sqrt{\gamma t^2+\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

W drugiej całce usuwamy niewymierność zapomocą podstawienia

$$\frac{t}{\sqrt{\gamma t^2+\delta}}=u$$

i otrzymujemy

$$\int\frac{dt}{(\alpha t^2+\beta)\sqrt{\gamma t^2+\delta}}=\int\frac{du}{\beta+u^2(\alpha\delta-\beta\gamma)}.$$

Jeżeli wreszcie w pierwszej z całek (6) założymy, że $t=1/u$, otrzymamy całkę drugiego typu, którą obliczymy, kładąc

$$\frac{u}{\sqrt{\gamma+\delta u^2}}=v, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma t^2+\delta}}=v. \text{*)}$$

Przykłady LIII. 1. Obliczyć

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}, \quad \int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}, \quad \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

2. Dowieść, że

$$\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}}=\frac{2}{q-p}\sqrt{\frac{x-q}{x-p}}.$$

3. Jeżeli $ag^2+ch^2=-\nu<0$, to

$$\int\frac{dx}{(hx+g)\sqrt{ax^2+c}}=-\frac{1}{\sqrt{\nu}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{\nu(ax^2+c)}}{ch-agx}\right].$$

4. Dowieść, że całkę $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-x_0)\,y}$, gdzie $y^2=ax^2+2bx+c$, można wyrazić w jednej z dwuch następujących postaci:

---

*) Powyższa metoda całkowania zawodzi, jeżeli mamy $a/A=b/B$, ale wtedy możemy zastosować podstawienie $ax+b=t$. Więcej szczegółów o całkowaniu funkcji algiebraicznych znaleźć można w dziełach: Stolz, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung*, Bd. I, str. 331; Bromwich, *Elementary Integrals*. Cambridge Bowes a. Bowes 1911. Inną metodę redukcji podał Sir G. Greenhill *A chapter in the integral calculus*. Porównaj też pracę autora, cytowaną na str. 263.

$$-\frac{1}{y_0}\lg\left|\frac{axx_0+b(x+x_0)+c+yy_0}{x-x_0}\right|,\quad \frac{1}{z_0}\operatorname{arctg}\left\{\frac{axx_0+b(x+x_0)+c}{yz_0}\right\},$$

zależnie od tego, czy $ax_0^2+2bx_0+c$ jest dodatnie i równa się y_0^2, czy też jest ujemne i równa się $-z_0^2$.

5. Za pomocą podstawienia $y=\sqrt{(ax^2+2bx+c)/(x-p)}$ dowieść, że

$$\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\int\frac{dy}{\sqrt{\lambda y^2-\mu}},$$

gdzie $\lambda=ap^2+2bp+c$, $\mu=ac-b^2$.

6. Dowieść, że z całki

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x+1}}$$

można usunąć niewymierności zapomocą podstawienia $x=(1+y^2)/(3-y^2)$.

(*Mathem. Tripos*, 1911.)

7. Obliczyć $\displaystyle\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}}$.

8. Obliczyć $\displaystyle\int\frac{dx}{(5x^2+12x+8)\sqrt{5x^2+2x-7}}$.

[Zastosować metodę § 132. Spółczynniki μ, ν czynią zadość równaniu $\xi^2+3\xi+2=0$, tak iż $\mu=-2$, $\nu=-1$, a $x=-(2t+1)/(t+1)$. Całka przybiera postać

$$-\int\frac{dt}{(4t^2+1)\sqrt{9t^2-4}}-\int\frac{tdt}{(4t^2+1)\sqrt{9t^2-4}}.$$

Z pierwszej całki usuwamy niewymierność, kładąc $t/\sqrt{9t^2-4}=u$, a z drugiej, kładąc $1/\sqrt{9t^2-4}=v$.]

9. Obliczyć

$$\int\frac{(x+1)dx}{(2x^2-2x+1)\sqrt{3x^2-2x+1}},\quad \int\frac{(x-1)dx}{(2x^2-6x+5)\sqrt{7x^2-22x+19}}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1911.)

10. Dowieść, że z całki $\displaystyle\int R(x,y)\,dx$, w której $y^2=ax^2+2bx+c$, można usunąć niewymierność, kładąc $t=\dfrac{x-p}{y+q}$, gdzie (p,q) jest punktem na stożkowej $y^2=ax^2+2bx+c$. [Oczywista rzecz, że możnaby również założyć $t=\dfrac{x-p}{y-q}$; porówn. § 127.]

133. Całkowanie funkcji przestępnych. Wobec nadzwyczajnej rozmaitości typów funkcji przestępnych niepodobna opracować teorji ich całkowania w sposób systematyczny. Poprzestaniemy na zbadaniu kilku typów funkcji przestępnych, których całki dają się zawsze wyznaczyć.

134. Wielomiany, utworzone z wstaw i dostaw wielokrotności argumentu x. Możemy zawsze znaleźć całkę każdej funkcji, która jest sumą skończonej liczby wyrazów kształtu

$$A\cos^m ax\sin^{m'}ax\cos^n bx\sin^{n'}bx\dots,$$

gdzie $m, m', n, n'\dots$ są liczbami całkowitemi dodatniemi, a $a, b,\dots$ są dowolnemi liczbami rzeczywistemi. Jakoż wyraz taki można przedstawić w postaci sumy skończonej liczby wyrazów kształtu

$$\alpha\cos\{x(pa+qb+\dots)\} \text{ lub } \beta\sin\{x(pa+qb+\dots)\},$$

które dają się z łatwością zcałkować.

Przykłady LIV. 1. Obliczyć $\int\sin^3x\cos^2 2x\,dx$. Możemy oprzeć się na wzorach $\sin^3x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$, $\cos^2 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 4x)$.

Otrzymamy

$$\frac{1}{16}\int(7\sin x-5\sin 3x+3\sin 5x-\sin 7x)dx=-\frac{7}{16}\cos x+$$
$$+\frac{5}{48}\cos 3x-\frac{3}{80}\cos 5x+\frac{1}{112}\cos 7x.$$

Możemy, oczywiście, postąpić inaczej. Np. możemy napisać

$$\int\sin 3x\cos^2 2x\,dx=\int(4\cos^4x-4\cos^2x+1)(1-\cos^2x)\sin x\,dx,$$

a kładąc $\cos x=t$, otrzymamy

$$\int(4t^6-8t^4+5t^2-1)dt=\frac{4}{7}\cos^7x-\frac{8}{5}\cos^5x+\frac{5}{3}\cos^3x-\cos x.$$

Czytelnik sprawdzi sam, że dwie otrzymane przez nas całki różnią się o stałą.

2. Obliczyć całki następujących funkcji: $\cos ax\cos bx$. $\sin ax\sin bx$, $\cos ax\sin bx$, $\cos^2x$, $\sin^3x$, $\cos^4x$, $\cos x\cos 2x\cos 3x$, $\cos^3 2x\sin^2 3x$ $\cos^5x$ $\sin^7x$.

135. Całki $\int x^n\cos x\,dx$, $\int x^n\sin x\,dx$. Możemy tu zastosować metodę całkowania przez części. Otrzymujemy

$$\int x^n\cos x\,dx=x^n\sin x-n\int x^{n-1}\sin x\,dx$$

$$\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx.$$

Rzecz jasna, że, stosując to postępowanie odpowiednią ilość razy, możemy przy n całkowitym obliczyć nasze całki. Stąd wynika, że potrafimy wyznaczyć całki $\int x^n \cos ax\, dx$ oraz $\int x^n \sin ax\, dx$, jeżeli n jest liczbą całkowitą, i, co za tym idzie, potrafimy obliczyć całkę

$$\int P(x, \cos ax, \sin ax, \cos bx, \sin bx, ...)dx,$$

gdzie P jest dowolnym wielomianem.

Przykłady LV. 1. Obliczyć całki następujących funkcji: $x \sin x$, $x^2 \cos x$, $x^2 \cos^2 x$, $x^2 \sin^2 x \sin^2 2x$, $x \sin^2 x \cos^4 x$, $x^3 \sin^3 \frac{x}{3}$.

2. Wyznaczyć wielomiany P i Q w ten sposób, by zachodziła równość

$$\int \{(3x-1)\cos x + (1-2x)\sin x\}\, dx = P \cos x + Q \sin x.$$

3. Dowieść, że $\int x^n \cos x\, dx = P_n \cos x + Q_n \sin x$,

gdzie $P_n = nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + ..$, $Q_n = x^n - n(n-1)x^{n-2} + ...$

136. Funkcje wymierne wstaw i dostaw zmiennej x. Całki tych funkcji możemy obliczyć, kładąc $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Istotnie

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

zatym otrzymamy funkcję wymierną zmiennej t.

Przykłady LVI. 1. Dowieść, że

$$\int \sec x\, dx = \lg|\sec x + \operatorname{tg} x|, \quad \int \operatorname{cosec} x\, dx = \lg\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

[Pierwszą całkę można przedstawić w postaci $\lg\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$ albo też $\frac{1}{2}\lg\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$.]

2. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\lg|\cos x|$, $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \lg|\sin x|$, $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x$.

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x, \quad \int \operatorname{tg} x \sec x\, dx = \sec x,$$

$$\int \operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x\, dx = -\operatorname{cosec} x.$$

3. Dowieść, że oznaczając $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ przez t, możemy całkę $\int\frac{dx}{a+b\cos x}$, gdzie $a+b$ jest liczbą dodatnią, przedstawić w jednej z dwuch następujących postaci:

$$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left\{t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right\}, \quad \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\lg\left|\frac{\sqrt{b+a}+t\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-t\sqrt{b-a}}\right|,$$

zależnie od tego, czy $a^2>b^2$ czy też $a^2<b^2$. Jeżeli $a^2=b^2$, całka sprowadza się do stałej wielokrotności funkcji $\sec^2\frac{x}{2}$ albo $\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$. Znaleźć całkę w przypadku, gdy $a+b$ jest liczbą ujemną.

4. Jeżeli $a>0$ i $a^2>b^2$, i jeżeli y jest funkcją uwikłaną zmiennej x, określoną przez równanie

$$(a+b\cos x)(a-b\cos y)=a^2-b^2,$$

wówczas, gdy x zmienia się od 0 do π, jedna z wartości na y zmienia się również od 0 do π. Dowieść również, że

$$\sin x=\frac{\sin y\sqrt{a^2-b^2}}{a-b\cos y}; \quad \frac{\sin x}{a+b\cos x}\frac{dx}{dy}=\frac{\sin y}{a-b\cos y}.$$

Na mocy tego dowieść, że gdy $0<x<\pi$, wówczas

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\left(\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right).$$

5. Obliczyć $\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$. [Przedstawić $b\cos x+c\sin x$ w postaci $\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)$.]

6. Obliczyć $\int\frac{a+b\cos x+c\sin x}{\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x}dx$.

[Wyznaczyć λ, μ, ν tak, by było

$$a+b\cos x+c\sin x=\lambda+\mu(\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x)+\nu(-\beta\sin x+\gamma\cos x).$$

Całka przybierze wtedy postać

$$\mu x+\nu\lg|\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x|+\lambda\int\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x}.$$

7. Znaleźć całkę $\int\frac{dx}{a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x}$.

[Podstawienie $\operatorname{tg} x=t$.]

137. Całki, zawierające funkcje arc sin x, arctg x, lg x. Stosując całkowanie przez części, mamy

$$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2} \lg(1+x^2)$$

$$\int \lg x\,dx = x \lg x - \int dx = x(\lg x - 1).$$

Jeżeli φ oznacza funkcję, odwrotną względem funkcji f, wówczas, znając całkę funkcji $y=f(x)$, możemy znaleźć całkę funkcji $x=\varphi(y)$. Jakoż, kładąc $y=f(x)$, mamy

$$\int \varphi(y)\,dy = \int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx.$$

Czytelnik wyznaczy tą drogą całki arc sin y i arc tg y.

Możemy również obliczyć całki kształtu

$$\int P(x, \arcsin x) dx, \qquad \int P(x, \lg x) dx,$$

gdzie P oznacza wielomian. Np. w pierwszym przykładzie musimy obliczyć pewną ilość całek kształtu $\int x^m (\arcsin x)^n\,dx$. Kładąc $x=\sin y$, otrzymujemy całkę $\int y^n \sin^m y \cos y\,dy$, którą możemy obliczyć zapomocą metody, podanej w § 135. W drugim przykładzie mamy do obliczenia pewną ilość całek kształtu $\int x^m (\lg x)^n dx$. Całkując przez części, otrzymujemy

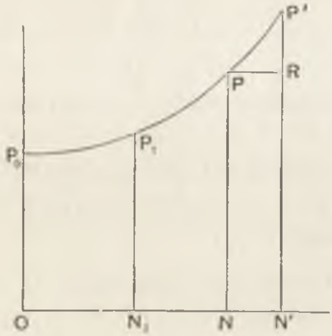
$$\int x^m (\lg x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\lg x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\lg x)^{n-1} dx.$$

Rzecz jasna, że stosując to postępowanie dostateczną ilość razy, w zupełności wyznaczymy żądaną całkę.

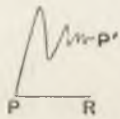
138. O polach krzywych płaskich. Do najważniejszych zastosowań rachunku całkowego należy obliczanie pól, ograniczonych przez krzywe płaskie.

Przypuśćmy, że P_0PP' (rys. 52) jest wykresem funkcji ciągłej $y=\varphi(x)$. Spółrzędne punktu P niech będą (x, y), spółrzędne zaś punktu P' niech będą $(x+h,\ y+k)$, przyczym h może być zarówno dodatnią liczbą, jak ujemną (na rysunku h jest dodatnie).

Pojęcie „pola" należy do tych pojęć, które wymagają ścisłej analizy i zostały dokładnie zbadane. Później powrócimy do tej kwestji i wyjaśnimy szczegółowo, co znaczy: „przypisać pole takiemu obszarowi, jak np. $ONPP_0$". Narazie musimy



Rys. 52.



Rys. 52a.

oprzeć się na intuicji i założyć, że każdemu takiemu obszarowi podporządkowaliśmy zupełnie oznaczoną liczbę, zwaną polem obszaru. Zakładamy również, że „pola" możemy dodawać do siebie (i odejmować) w sposób, zgodny z intuicją, że np. mamy

$$(PRP')+(NN'RP)=(NN'P'P).$$

Przy tych założeniach jest rzeczą jasną, że pole $ONPP_0$ jest funkcją zmiennej x. Oznaczmy tę funkcję przez $\Phi(x)$. Jest to *funkcja ciągła*. Istotnie, mamy

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=(NN'P'P)=(NN'RP)+(PRP')$$
$$=h\varphi(x)+(PRP').$$

Z rysunku widzimy, że pole PRP' jest mniejsze od hk, co zresztą nie zawsze bywa, gdyż (jak np. na rys. 52*a*) łuk PP' niekoniecznie wznosi się lub opada stale od P do P'. W każdym razie pole PRP' jest zawsze mniejsze od $|h|\lambda(h)$, gdzie $\lambda(h)$ oznacza największą odległość punktu, leżącego na łuku PP', od prostej PR. Ponieważ zaś $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, zatym gdy $h\to 0$, musi być również $\lambda(h)\to 0$.

Tak więc $\Phi(x+h)-\Phi(x)=h\{\varphi(x)+\mu(h)\}$,

gdzie $|\mu(h)|<\lambda(h)$, a $\lambda(h)\rightarrow 0$, gdy $h\rightarrow 0$. Stąd wynika bezpośrednio, że $\Phi(x)$ jest funkcją ciągłą. Prócz tego mamy

$$\Phi'(x)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\{\varphi(x)+\mu(h)\}=\varphi(x).$$

Tak więc *rzędna krzywej jest pochodną pola, pole jest całką rzędnej.*

Stąd wynika reguła obliczania pól takich, jak pole obszaru $ONPP_0$. *Obliczamy całkę funkcji* $\varphi(x)$; *otrzymujemy funkcję* $\Phi(x)$, *zawierającą stałą dowolną; stałą tę dobieramy w ten sposób, by było* $\Phi(0)=0$. *Wtedy* $\Phi(x)$ *jest żądanym polem.*

Gdyby chodziło o obliczenie pola obszaru N_1NPP_1, musielibyśmy stałą całkowania wyznaczyć tak, by było $\Phi(x_1)=0$, gdzie x_1 jest odciętą punktu P_1.

139. O długości krzywych płaskich. Pojęcie długości krzywej jest jeszcze trudniejsze od pojęcia pola. Nie wystarcza założyć, że łuk PP_0 (rys. 52) posiada długość, którą możemy oznaczyć symbolem $S(x)$. Nie potrafilibyśmy nawet dowieść, że $S(x)$ jest funkcją ciągłą, że więc lim $[S(P')-S(P)]=0$. Ta własność „długości" wydaje się oczywistą na rys. 52, ale jest już o wiele mniej oczywista na rys. 52*a*.

Niepodobna zgłębić zastosowań analizy do gieometrji, zanim się nie ustali dokładnie pojęcia długości krzywej. Niemniej jednak można z łatwością domyślić się, jaki powinien być *wzór* na długość łuku. Przypuśćmy, że krzywa posiada styczną, której kierunek zmienia się w sposób ciągły, że więc $\varphi'(x)$ jest funkcją ciągłą. Założenie, że łuk krzywej posiada oznaczoną długość, prowadzi do równania

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\frac{\{PP'\}}{h}=\frac{PP'}{h}\cdot\frac{\{PP'\}}{PP'}\,.$$

gdzie symbol $\{PP'\}$ oznacza łuk, którego cięciwą jest odcinek PP'. Otóż

$$PP'=\sqrt{PR^2+RP'^2}=h\sqrt{1+\frac{k^2}{h^2}}$$

$$k=\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'(\xi),$$

przyczym ξ zawiera się między x i $x+h$. Mamy tedy

$$\lim \frac{PP'}{h} = \lim \sqrt{1+[\varphi'(\xi)]^2} = \sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}.$$

Jeżeli założymy, że

$$\lim \frac{\{PP'\}}{PP'} = 1,$$

otrzymamy

$$S'(x) = \lim \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \sqrt{1+[\varphi'(x)]^2},$$

zatym

$$S(x) = \int \sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\, dx.$$

Przykłady LVII. 1. W paraboli $x^2=4ay$ wykreślamy rzędną $x=\xi$; obliczyć pole odcinka, wyznaczonego przez tę rzędną, i długość łuku, ograniczającego ten odcinek.

2, Rozwiązać te same pytania dla krzywej $ay^2=x^3$ i dowieść, że długość łuku równa się

$$\frac{8a}{27}\left\{\left(1+\frac{9\xi}{4a}\right)^{3/2}-1\right\}.$$

3. Za pomocą wzorów, podanych w §§ 138—139, obliczyć obwody i pola kół $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=2ax$.

4. Dowieść, że pole elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ równa się πab.

5. Obliczyć pole obszaru, ograniczonego przez krzywą $y=\sin x$ i przez odcinek osi x-ów od $x=0$ do $x=2\pi$. [Mamy $\Phi(x)=-\cos x$, a różnica między wartościami $\Phi(0)$ i $\Phi(2\pi)$ równa się zeru. Otrzymany wynik tłumaczy się tym, że krzywa nasza od $x=\pi$ do $x=2\pi$ leży pod osią x-ów, że więc przy zastosowaniu naszej metody musimy tę część pola uważać za ujemną. Pole od $x=0$ do $x=\pi$ równa się $-\cos\pi+\cos 0=2$, a więc całe pole, o ile obie jego części uważać będziemy za dodatnie, równa się 4.]

6. Przypuśćmy, że spółrzędne dowolnego punktu na krzywej dają się wyrazić jako funkcje parametru t, a mianowicie $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, i że $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ mają ciągłe pochodne. Jeżeli x stale rośnie, gdy t zmienia się od t_0 do t_1, wówczas pole obszaru, ograniczonego przez oś odciętych, przez krzywą i przez dwie rzędne, odpowiadające wartościom parametru t_0 i t_1, równa się $A(t_1)-A(t_0)$, gdzie

$$A(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)dt = \int y\frac{dx}{dt}dt.$$

7. Przypuśćmy, że C jest krzywą zamkniętą o jednej petli i że żadna prosta, równoległa do jednej lub drugiej osi, nie przecina tej krzywej więcej niż w dwuch punktach. Przypuśćmy dalej, że spółrzędne każdego punktu krzywej możemy wyrazić w postaci funkcji zmiennej t i że,

gdy t zmienia się od t_0 do t_1, punkt P obiega raz jeden dokoła krzywej i wraca do pierwotnego położenia. Dowieść, że pole obszaru, ograniczonego przez krzywą C, równa się różnicy pomiędzy początkową i końcową wartością którejkolwiek z następujących całek:

$$-\int y\frac{dx}{dt}\,dt,\quad \int x\frac{dy}{dt}\,dt,\quad \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt.$$

Oczywista rzecz, że tę różnicę uważamy za dodatnią.

8. Wyniki poprzedniego zadania zastosować do obliczenia pól krzywych:

$$\text{(I)}\quad \frac{x}{a}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \frac{y}{a}=\frac{2t}{1+t^2};\quad \text{(II)}\quad x=a\cos^3 t,\quad y=b\sin^3 t.$$

9. Znaleźć pole krzywej $x^3+y^3=3axy$. [Kładąc $y=tx$, mamy $x=3at/(1+t^3)$, $y=3at^2/(1+t^3)$. Gdy t zmienia się od 0 do ∞, punkt ruchomy obiega pętlę krzywej raz jeden. Mamy

$$^1/_2\int\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)dt=-{}^1/_2\int x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)dt=-{}^1/_2\int\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt=\frac{3a^2}{2(1+t^3)}.$$

Gdy $t\to\infty$, wówczas $\dfrac{3a^2}{2(1+t^3)}\to 0$, zatym żądane pole $=\dfrac{3a^2}{2}$.]

10. Znaleźć pole krzywej $x^5+y^5=5ax^2y^2$.

11. Dowieść, że pole krzywej $x=a\sin 2t$, $y=a\sin t$ równa się $\dfrac{4a^2}{3}$.

(*Mathem. Tripos.* 1908).

12. Elipsa jest dana przez równania $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; dowieść, że łuk jej, zawarty między punktami $t=t_1$ oraz $t=t_2$, równa się $F(t_2)-F(t_1)$, gdzie

$$F(t)=a\int\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt,$$

przyczem e oznacza mimośród elipsy. [Całki tej nie możemy wyrazić za pomocą funkcji, któreśmy dotąd poznali.]

13. **Spółrzędne biegunowe.** Jeżeli $f(\vartheta)$ jest jednowartościową funkcją zmiennej ϑ, wówczas pole obszaru, ograniczonego przez krzywą $r=f(\vartheta)$ i przez promienie $\vartheta=\vartheta_1$, $\vartheta=\vartheta_2$, równa się $F(\vartheta_2)-F(\vartheta_1)$, gdzie $F(\vartheta)={}^1/_2\int r^2 d\vartheta$. Długość odpowiedniego łuku krzywej równa się $\Phi(\vartheta_2)-\Phi(\vartheta_1)$, gdzie

$$\Phi(\vartheta)=\int\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\,d\vartheta.$$

Na tej zasadzie obliczyć (I) długość okręgu i pole koła $r=2a\sin\vartheta$; (II) pole obszaru, ograniczonego przez parabolę $r={}^1/_2 l\sec^2\dfrac{\vartheta}{2}$ i cięciwę, poprowadzoną przez jej ognisko; (III) pole ślimaka $r=a+b\cos\vartheta$ (rozróżnić trzy przypadki: $a>b$, $a=b$, $a<b$); (IV) pola elips $1/r^2=a\cos^2\vartheta+2h\cos\vartheta\sin\vartheta+b\sin^2\vartheta$ oraz $l/r=1+e\cos\vartheta$. [W tym ostatnim przykładzie otrzymujemy całkę $\int\frac{d\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2}$, którą można obliczyć zapomocą podstawienia $(1+e\cos\vartheta)(1-e\cos\varphi)=1-e^2$.]

14. Wykreślić krzywą $2\vartheta=(a/r)+(r/a)$ i dowieść, że pole obszaru, ograniczonego przez promień $\vartheta=\beta$ oraz przez dwie gałęzie krzywej styczne do siebie w punkcie $r=a$, $\vartheta=1$, równa się $\frac{2a^2}{3}(\beta^2-1)^{3/2}$.

(*Mathem. Tripos*, 1900.)

15. Krzywa dana jest przez równanie $p=f(r)$, w którym r jest promieniem wodzącym, a p prostopadłą, poprowadzoną z początku spółrzędnych do stycznej. Dowieść, że obliczenie pola obszaru, ograniczonego przez łuk krzywej i przez dwa promienie wodzące, sprowadza się do obliczenia całki $\frac{1}{2}\int\frac{pr\,dr}{\sqrt{r^2-p^2}}$.

Zadania do rozdziału VI.

1. Funkcję $f(x)$ określamy w następujący sposób: $f(x)=1+x$ przy $x\leq 0$; $f(x)=x$ przy $0<x<1$; $f(x)=2-x$ przy $1\leq x\leq 2$, wreszcie $f(x)=3x-x^2$ przy $x>2$. Zbadać ciągłości tej funkcji oraz istnienie i ciągłość jej pochodnej przy $x=0$, $x=1$, $x=2$.

(*Mathem. Trip.* 1908).

2. Oznaczmy a, $ax+b$, $ax^2+2bx+c, \ldots$ przez $u_0, u_1, u_2, \ldots$ Dowieść, że $u_0^2u_3-3u_0u_1u_2+2u_1^3$ oraz $u_0u_4-4u_1u_3+3u_2^2$ są niezależne od x.

3. Jeżeli $a_0, a_1, \ldots a_{2n}$ są to stałe i jeżeli $U_r=(a_0, a_1, \ldots a_r \between x, 1)^r$, wówczas

$$U_0U_{2n}-2nU_1U_{2n-1}+\frac{2n(2n-1)}{1.2}U_2U_{2n-2}-\ldots+U_{2n}U_0$$

jest niezależne od x.

[Oprzeć się na równaniu $U_r'=rU_{r-1}$.]

(*Mathem. Tripos*, 1896.)

4. Jeżeli $\mu>1$ i $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, to trzy pierwsze pochodne funkcji $\arcsin(\mu\sin x)-x$ są dodatnie.

5. Wszystkie elementy wyznacznika są funkcjami zmiennej x; dowieść, że pochodną wyznacznika otrzymamy, różniczkując elementy jednego jego wiersza i pozostawiając bez zmiany wszystkie inne elementy.

6. Jeżeli f_1, f_2, f_3, f_4 są wielomianami stopnia 4 lub niższego, wówczas wyznacznik

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1' & f_2' & f_3' & f_4' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' & f_4'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' & f_4''' \end{vmatrix}$$

jest również wielomianem stopnia nie wyższego nad 4. [Zróżniczkować wyznacznik 5 razy.]

7. Jeżeli $y^3+3xy+2x^3=0$, wówczas $x^2(1+x^3)y''-{}^3/_2\,xy'+y=0$.

8. Funkcje $y=\varphi(c)+\varphi(x-c)$ oraz $y=2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ czynią zadość równaniu różniczkowemu $y=\varphi\{\psi(y')\}+\varphi\{x-\psi(y')\}$, w którym y' oznacza pochodną $\frac{dy}{dx}$, a ψ oznacza funkcję, odwrotną względem φ'.

9. Jeżeli α jest pierwiastkiem równania $\varphi(\alpha)-\alpha\varphi'(\alpha)=0$ i jeżeli $\beta=\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$, wówczas funkcje $y=c\varphi(x/c)$ oraz $y=\beta x$ czynią zadość równaniu różniczkowemu $y=\frac{x\varphi\{\psi(y')\}}{\psi(y')}$, w którym ψ i y' mają to samo znaczenie, co i w poprzednim zadaniu.

10. Jeżeli $ax+by+c=0$, to $y''=0$, co możemy wyrazić w taki sposób: *ogólnym równaniem różniczkowym linji prostych jest* $y''=0$. Znaleźć ogólne równanie różniczkowe (I) wszystkich kół, mających środek na osi x-ów; (II) wszystkich parabol, których osią symetrji jest oś x-ów; (III) wszystkich parabol, których oś symetrji jest równoległa do osi y-ów; (IV) wszystkich kół; (V) wszystkich parabol; (VI) wszystkich stożkowych.

[Równania te są: (I) $1+y'^2+yy''=0$; (II) $y'^2+yy''=0$; (III) $y'''=0$; (IV) $(1+y'^2)y'''=3y'y''^2$; (V) $5y'''^2=3y''y^{(4)}$; (VI) $9y''^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40y'''^3=0$. W każdym poszczególnym wypadku różniczkujemy równanie krzywej tak długo, aż otrzymamy ilość równań dostateczną do wyrugowania stałych.]

11. Dowieść, że $D_x^2(y''^{-2/3})=0$ jest ogólnym równaniem różniczkowym wszystkich parabol, a $D_x^3(y''^{-2/3})=0$ jest ogólnym równaniem różniczkowym wszystkich stożkowych.

[Równanie stożkowej możemy napisać w postaci

$$y=ax+b\pm\sqrt{px^2+2qx+r},$$

skąd

$$y''=\pm\frac{pr-q^2}{(px^2+2qx+r)^{3/2}}.$$

Jeżeli stożkowa jest parabolą, mamy $p=0$.]

12. Oznaczając $\frac{dy}{dx}$, $\frac{1}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{1}{4!}\frac{d^4y}{dx^4}$,... przez $t, a, b, c, \ldots$ a $\frac{dx}{dy}$, $\frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dy^3}$, $\frac{1}{4!}\frac{d^4x}{dy^4}$,... przez $\tau, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, mamy

$$4ac-5b^2=\frac{4\alpha\gamma-5\beta^2}{\tau^5},\quad bt-a^2=-\frac{\beta\tau-\alpha^2}{\tau^6}.$$

Znaleźć odpowiednie wzory dla funkcji $a^2d-3abc-2b^3$, $(1+t^2)b-2a^2t$, $2ct-5ab$.

13. Jeżeli przez y_k oznaczymy k-tą pochodną funkcji $y=\sin(n \arcsin x)$, wówczas

$$(1-x^2)y_{k+2}-(2k+1)xy_{k+1}+(n^2-k^2)y_k=0.$$

[Najpierw dowieść dla $k=0$, następnie zastosować wzór Leibniza.

14. Dowieść wzoru

$$vD_x{}^n u=D_x{}^n(uv)-nD_x{}^{n-1}(uD_xv)+\frac{n(n-1)}{1.2}D_x{}^{n-2}(uD_x{}^2v)-\ldots$$

[Zastosować indukcję matematyczną.]

15. Krzywa jest dana przez równania

$$x=a(2\cos t+\cos 2t),\quad y=a(2\sin t-\sin 2t).$$

Dowieść, (I) że równania stycznej i normalnej w punkcie, którego parametr $=t$, są

$$x\sin\frac{t}{2}+y\cos\frac{t}{2}=a\sin\frac{3t}{2};\quad x\cos\frac{t}{2}-y\sin\frac{t}{2}=3a\cos\frac{3t}{2},$$

(II) że styczna, poprowadzona przez punkt P, spotyka krzywą w punktach Q, R, których parametry równają się odpowiednio $-\frac{t}{2}$ i $\pi-\frac{t}{2}$; (III) że $QR=4a$; (IV) że styczne, poprowadzone przez Q i R, przecinają się pod kątem prostym i że ich punkt przecięcia leży na kole $x^2+y^2=a^2$; (V) że normalne, poprowadzone przez P, Q i R, przecinają się w jednym punkcie na okręgu koła $x^2+y^2=9a^2$; (VI) że równanie krzywej możemy napisać w postaci

$$(x^2+y^2+12ax+9a^2)^2=4a(2x+3a)^3.$$

Naszkicować krzywą.

16. Dowieść, że krzywą poprzedniego zadania można określić zapomocą równań $\xi/a=2u+(1/u^2)$, $\eta/a=(2/u)+u^2$, gdzie $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$, $u=\operatorname{Cis} t$. Dowieść, że równania stycznej i normalnej w punkcie, wyznaczonym przez u, są

$$u^2\xi-u\eta=a(u^3-1),\quad u^2\xi+u\eta=3a(u^3+1).$$

Stąd wysnuć własności (II)—(V) poprzedniego zadania.

17. Warunek, żeby równanie $x^4+4px^3-4qx-1=0$ miało równe pierwiastki, daje się wyrazić w postaci $(p+q)^{2/3}-(p-q)^{2/3}=1$.

(*Mathem. Tripos.* 1898).

18. Niech α, β, γ będą pierwiastkami równania sześciennego $f(x)=0$, przyczym $\alpha<\beta<\gamma$. Jeżeli każdy z przedziałów (α, β) i (β, γ) podzielimy na 6 równych przedziałów, wówczas pierwiastki równania $f'(x)=0$ będą leżały w czwartym przedziale z lewej strony i w czwartym z prawej strony od punktu β. Jakiego rodzaju jest równanie sześcienne, jeżeli jeden pierwiastek równania $f'(x)=0$ leży w jednym z punktów podziału?

(*Mathem. Tripos.* 1907).

19. Zbadać maxima i minima funkcji $f(x)$, jak również pierwiastki rzeczywiste równania $f(x)=0$, jeżeli

$$f(x)=x-\sin x-\operatorname{tg}\alpha(1-\cos x)$$

$$\text{albo}\quad f(x)=x-\sin x-(\alpha-\sin\alpha)-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha-\cos x),$$

i jeżeli $0<\alpha<\pi$. Dowieść, że w pierwszym przypadku równanie $f(x)=0$ ma dwa równe pierwiastki, jeżeli $\operatorname{tg}\alpha-\alpha$ jest wielokrotnością liczby π.

20. Dobierając w odpowiedni sposób stosunek $\lambda:\mu$, możemy osiągnąć to, że równanie $\lambda(ax^2+bx+c)+\mu(a'x^2+b'x+c')=0$ będzie miało pierwiastki rzeczywiste i że różnica między temi pierwiastkami będzie dowolnie wielka. Wyjątek stanowi przypadek, gdy pierwiastki funkcji ax^2+bx+c, $a'x^2+b'x+c$ są rzeczywiste i przeplatają się; w tym przypadku pierwiastki równania są zawsze rzeczywiste, ale istnieje niższa granica dla różnicy jego pierwiastków.

(*Mathem. Tripos.* 1895).

21. Dowieść, że gdy $0<x<1$, mamy

$$\pi<\frac{\sin\pi x}{x(1-x)}\leqq 4\,.$$

Wykreślić tę funkcję.

22. Naszkicować wykres funkcji y, danej przez równanie

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(6x^2+x-1)(x-1)^2(x+1)^3}{x^2}.$$

(*Mathem. Tripos.* 1908).

23. Wykreślić krzywą $y=\pi\operatorname{ctg}\pi x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$.

24. Kartkę papieru zginamy w ten sposób, żeby róg kartki sięgał dokładnie przeciwległego jej brzegu. W jaki sposób należy zgiąć kartkę, żeby długość rysy, która się przy tym utworzy, była możliwie największa?

25. Największy kąt ostry, pod którym elipsę $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ przeciąć może koło spółśrodkowe, równa się arc tg $\frac{a^2-b^2}{2ab}$.

(*Mathem. Tripos.* 1900).

26. Trójkąt posiada stałe pole Δ i stały półobwód s. Dowieść, że największa lub najmniejsza wartość, jaką może mieć którykolwiek bok, jest pierwiastkiem równania $s(x-s)x^2+4\Delta^2=0$. Zbadać, w jakich warunkach równanie to ma pierwiastki rzeczywiste i kiedy odpowiadają one największym, kiedy zaś najmniejszym wartościom boku.

[Równania $a+b+c=2s$ oraz $s(s-a)(s-b)(s-c)=\Delta^2$ wyznaczają a i b jako funkcje zmiennej c. Różniczkując względem c i zakładając, że $\frac{da}{dc}=0$, otrzymujemy $b=c$, $s-b=s-c=\frac{a}{2}$, skąd wynika, że $s(a-s)a^2+4\Delta^2=0$. Równanie to ma trzy rzeczywiste pierwiastki, jeżeli $s^4>27\Delta^2$, w przeciwnym zaś razie ma jeden pierwiastek rzeczywisty. W trójkącie foremnym (mającym najmniejszy obwód przy danym polu) mamy $s^4=27\Delta^2$, a więc nigdy nie może zachodzić nierówność $s^4<27\Delta^2$. Równanie ma tedy trzy rzeczywiste pierwiastki; z nich jeden jest ujemny, dwa zaś dodatnie, a z tych dwu jeden odpowiada maximum, drugi minimum.]

27. Pole największego trójkąta foremnego, którego boki przechodzą przez punkty A, B, C równa się

$$2\Delta+\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}},$$

gdzie a, b, c są bokami trójkąta ABC, a Δ jest jego polem.

(*Mathem. Tripos.* 1899).

28. Jeżeli przez Δ, Δ' oznaczymy pola dwuch największych trójkątów równoramiennych, jakie można wykreślić w ten sposób, by wierzchołki przy podstawie leżały na kardiojdzie $r=a(1+\cos\vartheta)$, a trzeci wierzchołek żeby leżał w początku spółrzędnych, wówczas $256\Delta\Delta'=25a^4\sqrt{5}$.

(*Mathem. Trip.* 1907).

29. Do jakiej granicy dąży $\frac{x^2-4y+8}{y^2-6x+3}$, gdy punkt (x, y), poruszający się po krzywej $x^2y-4x^2-4xy+y^2+16x-2y-7=0$ dąży do punktu $(2,3)$.

(*Mathem. Tripos.* 1903.)

[Przenosząc początek spółrzędnych do punktu $(2, 3)$, nadajemy równaniu krzywej kształt $\xi^2\eta-\xi^2+\eta^2=0$; nasza funkcja zamieni się wówczas w $(\xi^2+4\xi-4\eta)/(\eta^2+6\eta-6\xi)$. Kładąc $\eta=t\xi$, mamy $\xi=(1-t^2)/t$ oraz $\eta=1-t^2$, krzywa ma dwie gałęzie w początku spółrzędnych, odpowiadające wartościom $t=-1$ i $t=1$. Wyrażając daną funkcję zapomocą t i zakładając, że t dąży do -1 lub do $+1$, otrzymujemy granice $-{}^3/_2$, $-{}^2/_3$.]

30. Jeżeli $$f(x)=\frac{1}{\sin x-\sin\alpha}-\frac{1}{(x-\alpha)\cos\alpha},$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\lim_{x\to\alpha} f(x)\right\}-\lim_{x\to\alpha} f'(x)={}^3/_4\sec^3\alpha-{}^5/_{12}\sec\alpha\,.$$

(*Mathem. Tripos*, 1896.)

31. Jeżeli $\varphi(x)=1/(1+x^2)$, to $\varphi^{(n)}(x)=Q_n(x)/(1+x^2)^{n+1}$, gdzie Q_n jest wielomianem n-tego stopnia. Dowieść również, że

(I) $Q_{n+1}=(1+x^2)Q'_n-2(n+1)xQ_n\,,$

(II) $Q_{n+2}+2(n+2)xQ_{n+1}+(n+2)(n+1)(1+x^2)Q_n=0,$

(III) $(1+x^2)Q''_n-2nxQ'_n+n(n+1)Q_n=0\,,$

(IV) $Q_n=(-1)^n n!\left\{(n+1)x^n-\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}x^{n-2}+\ldots\right\},$

(V) że wszystkie pierwiastki równania $Q_n=0$ są rzeczywiste i że są one przedzielone przez pierwiastki równania $Q_{n-1}=0$.

[Aby dowieść (II), stosujemy wzór Leibniza do funkcji $(1+x^2)\varphi(x)=1$ wzór (III) wynika z (I) i (II); wzór (IV) wynika z (III). Wreszcie, chcąc dowieść wzoru (V), zauważmy, że przy $Q_n=0$ funkcja Q_{n+1} ma ten sam znak, co Q'_n, t. j. przy dużych wartościach bezwzględnych na x, ten sam znak, co $(-1)^n x^n$.]

32. Jeżeli przy $a\leqq x\leqq b$ funkcje $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ posiadają pochodne, wówczas x przybiera w przedziale (a, b) taką wartość ξ, że

$$\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix}=0\,.$$

[Wziąć pod uwagę funkcję, w której trzeci wiersz naszego wyznacznika został zastąpiony przez $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Jeżeli $\varphi(x)=x$, a $\psi(x)=1$, to nasze twierdzenie sprowadza się do twierdzenia o wartości pośredniej.]

33. Z poprzedniego zadania otrzymać wzór

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\,.$$

34. Jeżeli $\varphi'(x)\to a$, gdy $x\to\infty$, to $\dfrac{\varphi(x)}{x}\to a$. Jeżeli $\varphi'(x)\to\infty$, to $\varphi(x)\to\infty$. [Oprzeć się na wzorze $\varphi(x)-\varphi(x_0)=(x-x_0)\varphi'(\xi)$ przy $x_0<\xi<x$.]

35. Jeżeli $\varphi(x)\to a$, gdy $x\to\infty$, to $\varphi'(x)$ nie może dążyć do granicy różnej od zera.

36. Jeżeli $\varphi(x)+\varphi'(x)\to a$, gdy $x\to\infty$, to $\varphi(x)\to a$ i $\varphi'(x)\to 0$.

[Niech będzie $\varphi(x) = a + \psi(x)$, tak iż $\psi(x) + \psi'(x) \to 0$. Jeżeli przy wszystkich dostatecznie wielkich wartościach na x funkcja $\psi'(x)$ ma stały znak, np. znak $+$, to $\psi(x)$ stale rośnie, a więc $\psi(x)$ dąży albo do granicy l, albo do ∞, a $\psi'(x)$ dąży do $-l$, albo do $-\infty$, co jest niemożliwe (Przykł. 35, 34), jeżeli $l \neq 0$. Jeżeli przy x nieograniczenie rosnącym $\psi'(x)$ zmienia znak, to wartościom tym odpowiadają maxima i minima funkcji $\psi(x)$. Jeżeli dużej wartości na x odpowiada maximum lub minimum funkcji $\psi(x)$, to $\psi(x)+\psi'(x)$ jest bardzo małe, a $\psi'(x)=0$, tak iż $\psi(x)$ jest bardzo małe. Tymbardziej więc muszą być bardzo małe inne wartości funkcji $\psi(x)$, odpowiadające dużym wartościom na x.]

37. Wskazać sposób usunięcia niewymierności z całki

$$\int R\left\{x, \sqrt{\frac{ax+b}{mx+n}}, \sqrt{\frac{cx+d}{mx+n}}\right\} dx .$$

[Kładziemy $mx+n=1/t$ i stosujemy Przykł. LII. 13.]

37. Obliczyć następujące całki:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}, \quad \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}},$$

$$\int \sqrt{a^2+\sqrt{b^2+\frac{c}{x}}}\, dx, \quad \int \operatorname{cosec}^3 x\,dx, \quad \int \frac{5\cos x+6}{2\cos x+\sin x+3}\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{(2-\sin^2 x)(2+\sin x-\sin^2 x)}, \quad \int \frac{\cos x \sin x\, dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}, \quad \int \operatorname{cosec} x \sqrt{\sec 2x}\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+\sin x)(2+\sin x)}}, \quad \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\, dx, \quad \int \operatorname{arc\,sec} x\, dx, \quad \int (\arcsin x)^2\, dx,$$

$$\int x \arcsin x\, dx, \quad \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad \int \frac{\arcsin x}{x^3}\, dx, \quad \int \frac{\arcsin x}{(1+x)^2}\, dx,$$

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\, dx, \quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx, \quad \int \frac{\lg(\alpha^2+\beta^2 x^2)}{x^2}\, dx, \quad \int \frac{\lg(\alpha+\beta x)}{(a+bx)^2}\, dx.$$

39. **Wzory redukcyjne.** (I) Dowieść, że

$$2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{x+(p/2)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

[Kładąc $x+(p/2)=t$, $q-(p^2/4)=\lambda$, mamy

$$\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^n} = \frac{1}{\lambda}\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^{n-1}} - \frac{1}{\lambda}\int \frac{t^2 dt}{(t^2+\lambda)^n}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^{n-1}} + \frac{1}{2\lambda(n-1)}\int t \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{(t^2+\lambda)^{n-1}}\right\} dt .$$

poczym stosujemy całkowanie przez części.

Taki wzór nazywamy *redukcyjnym*; przy n całkowitym dodatnim wyrażamy całkę $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ za pomocą całki $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}$, co pozwala na obliczenie tej całki dla kolejnych wartości wykładnika n.]

(II) Dowieść, że jeżeli $I_{p,q}=\int x^p(1+x)^q\,dx$, to

$$(p+1)I_{p,q}=x^{p+1}(1+x)^q-qI_{p+1,\,q-1}.$$

Otrzymać analogiczny związek między $I_{p,q}$ oraz $I_{p-1,\,q+1}$. Wykazać również, zapomocą podstawienia $x=-y/(1+y)$, że

$$I_{p,q}=(-1)^{p+1}\int y^p(1+y)^{-p-q-2}\,dy.$$

(III) Jeżeli $X=a+bx$, to

$$\int xX^{-1/3}dx=-3(3a-2bx)\frac{X^{2/3}}{10b^2},$$

$$\int x^2X^{-1/3}dx=3(9a^2-6abx+5b^2x^2)\frac{X^{2/3}}{40b^3},$$

$$\int xX^{-1/4}dx=-4(4a-3bx)\frac{X^{3/4}}{21b^2},$$

$$\int x^2X^{-1/4}dx=4(32a^2-24abx+21b^2x^2)\frac{X^{3/4}}{231b^3}.$$

(IV) Jeżeli $I_{m,n}=\int\frac{x^m dx}{(1+x^2)^n}$, to

$$2(n-1)I_{m,n}=-x^{m-1}(1+x^2)^{-(n-1)}+(m-1)I_{m-2,\,n-1}.$$

(V) Jeżeli $I_n=\int x^n\cos\beta x\,dx$, a $K_n=\int x^n\sin\beta x\,dx$, to

$$\beta I_n=x^n\sin\beta x-nK_{n-1},\quad \beta K_n=-x^n\cos\beta x+nI_{n-1}.$$

(VI) Jeżeli $I_n=\int\cos^n x\,dx$, $K_n=\int\sin^n x\,dx$, to

$$nI_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2},\quad nK_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)K_{n-2}.$$

(VII) Jeżeli $I_n=\int \operatorname{tg}^n x\,dx$, to $(n-1)(I_n+I_{n-2})=\operatorname{tg}^{n-1}x$.

(VIII) Jeżeli $I_{m,n}=\int\cos^m x\sin^n x\,dx$, to

$$(m+n)I_{m,n}=-\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{m,\,n-2}$$

$$=\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+(m-1)I_{m-2,\,n}.$$

[Mamy $(m+1)I_{m,n} = -\int \sin^{n-1}x \frac{d}{dx}(\cos^{m+1}x)dx$

$$= -\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x + (n-1)\int \cos^{m+2}x \sin^{n-2}x\,dx$$

$$= -\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x + (n-1)(I_{m,\,n-2} - I_{m,\,n}),$$

co prowadzi do pierwszego wzoru redukcyjnego.]

(IX) Znaleźć związek między $I_{m,n} = \int \sin^m x \sin nx\,dx$ a $I_{m-2,\,n}$.

(*Mathem. Tripos*, 1897.)

(X) Jeżeli $I_{m,n} = \int x^m \operatorname{cosec}^n x\,dx$, to

$$(n-1)(n-2)I_{m,n} = (n-2)^2 I_{m,\,n-2} + m(m-1)I_{m-2,\,n-2}$$
$$-x^{m-1}\operatorname{cosec}^{n-1}x\{m\sin x + (n-2)x\cos x\}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1896.)

(XI) Jeżeli $I_n = \int (a+b\cos x)^{-n}dx$, to

$$(n-1)(a^2-b^2)I_n = -b\sin x(a+b\cos x)^{-(n-1)} + (2n-3)aI_{n-1} - (n-2)I_{n-2}.$$

(XII) Jeżeli $I_n = \int (a\cos^2 x + 2h\cos x\sin x + b\sin^2 x)^{-n}dx$, to

$$4n(n+1)(ab-h^2)I_{n+2} - 2n(2n+1)(a+b)I_{n+1} + 4n^2 I_n = -\frac{d^2 I_n}{dx^2}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1898.)

(XIII) Jeżeli $I_{m,n} = \int x^m(\lg x)^n dx$, to

$$(m+1)I_{m,n} = x^{m+1}(\lg x)^n - nI_{m,\,n-1}.$$

40. Jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią, to $\int x^m(\lg x)^n dx =$

$$= x^{m+1}\left\{\frac{(\lg x)^n}{m+1} - \frac{n(\lg x)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)(\lg x)^{n-2}}{(m+1)^3} - \dots + \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}\right\}.$$

41. Najogólniejsza funkcja $\varphi(x)$, która przy wszelkim x czyni zadość warunkowi $\varphi'' + a^2\varphi = 0$, daje się wyrazić w postaci $A\cos ax + B\sin ax$ lub $\rho\cos(ax+\varepsilon)$, gdzie A, B, ρ, ε są to stałe.

[Mnożąc przez $2\varphi'$ i całkując, mamy $\varphi'^2 + a^2\varphi^2 = a^2b^2$, gdzie b jest stałą; stąd wynika $ax = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{b^2-\varphi^2}}$.]

42. Wyznaczyć najogólniejsze funkcje y, z, czyniące zadość równaniom $y'+\omega z=0$ i $z'-\omega y=0$, w których y', z' oznaczają pochodne względem zmiennej x, a ω jest liczbą stałą.

43. Jeżeli α jest kątem ostrym dodatnim, to pole krzywej, danej przez równania

$$x=\cos\varphi+\frac{\sin\alpha\sin\varphi}{1-\cos^2\alpha\sin^2\varphi},\quad y=\sin\varphi-\frac{\sin\alpha\cos\varphi}{1-\cos^2\alpha\sin^2\varphi},$$

równa się
$$\frac{\pi(1+\sin\alpha)^2}{2\sin\alpha}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1904.)

44. Rzut cięciwy koła o promieniu a na średnicę ma stałą długość $2a\cos\beta$; dowieść, że miejsce gieometryczne środka cięciwy składa się z dwuch pętli i że pole każdej z nich $=a^2(\beta-\cos\beta\sin\beta)$.

(*Mathem. Tripos*, 1903.)

45. Długość jednego ćwiercianu krzywej $(x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}=1$ równa się $(a^2+ab+b^2)/(a+b)$.

46. Wewnątrz koła o promieniu a znajduje się punkt A, przyczym odległość jego od środka koła $=b$. Dowieść, że miejsce spodków prostopadłych, poprowadzonych z A do prostych, stycznych do danego koła, jest krzywą, której pole $=\pi\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)$.

(*Mathem. Tripos*, 1909.)

47. Jeżeli $(a, b, c, f, g, h \between x, y, 1)^2=0$ jest równaniem stożkowej, to

$$\int\frac{dx}{(lx+my+n)(hx+by+f)}=\alpha\lg\frac{PT}{PT'}+\beta,$$

gdzie α, β są liczbami stałemi, a PT, PT' są to prostopadłe, poprowadzone z punktu P stożkowej do stycznych, wykreślonych w końcach cięciwy $lx+my+n=0$.

(*Mathem. Tripos*, 1902.)

48. Dowieść, że

$$\frac{ax^2+2bx+c}{(Ax^2+2Bx+C)^2}dx$$

jest funkcją wymierną zmiennej x wówczas i tylko wówczas, gdy albo $AC-B^2=0$, albo $aC+cA-2bB=0$ *).

49. Żeby całka

$$\int\frac{f(x)}{[F(x)]^2}dx,$$

(w której f i F są wielomianami a F nie zawiera czynników wielokrot-

*) Porówn. rozprawę autora, cytowaną na str. 263.

nych) była funkcją wymierną zmiennej x, trzeba i wystarcza, żeby $f'F'-fF''$ było podzielne przez F.

(*Mathem. Tripos*, 1910.)

50. Dowieść, że $\int \frac{\alpha\cos x+\beta\sin x+\gamma}{(1+e\cos x)^2}\,dx$

jest funkcją wymierną zmiennych $\cos x$ i $\sin x$ wówczas i tylko wówczas, gdy $\alpha e+\gamma=0$. Obliczyć całkę w założeniu, że warunek ten jest spełniony.

(*Mathem. Tripos*, 1910.)

ROZDZIAŁ VII.

DALSZE TWIERDZENIA Z RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO.

140. Ogólniejsze twierdzenie o wartości pośredniej. W § 118 dowiedliśmy, że jeśli $f(x)$ posiada w każdym punkcie przedziału (a, b) pochodną $f'(x)$, to

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),$$

gdzie $a<\xi<b$, albo innemi słowami: jeżeli $f(x)$ ma pochodną w każdym punkcie przedziału $(a, a+h)$ i jeżeli $0<\vartheta_1<1$, to

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\vartheta_1 h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dowód opierał się na rozważaniu funkcji

$$f(b)-f(x)-\frac{b-x}{b-a}\{f(b)-f(a)\},$$

która równa się zeru przy $x=a$ i $x=b$.

Przypuśćmy teraz, że $f(x)$ posiada w całym przedziale (a, b) drugą pochodną $f''(x)$, że więc pierwsza pochodna $f'(x)$ jest ciągła w tym przedziale. Weźmy pod uwagę funkcję

$$f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)\}.$$

Ta funkcja również przybiera wartość 0, gdy $x=a$ lub $x=b$; pochodna jej

$$\frac{2(b-x)}{(b-a)^2}\{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\tfrac{1}{2}(b-a)^2f''(x)\}$$

musi równać się zeru przy jakiejś wartości na x, zawierającej się pomiędzy a i b (z wyłączeniem krańców przedziału a i b).

Istnieje tedy w przedziale (a, b) taka wartość zmiennej niezależnej $\xi = a + \vartheta_2(b-a)$, gdzie $0 < \vartheta_2 < 1$, że

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 f''(\xi).$$

Kładąc $b = a + h$, możemy to równanie napisać w postaci

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(a + \vartheta_2 h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wzór ten możnaby nazwać *twierdzeniem drugiego rzędu o wartości pośredniej.*

Analogja, zachodząca między wzorami (1) i (2), nasuwa myśl dalszego uogólnienia tych wzorów, które wypowiadamy w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie Taylora czyli ogólne twierdzenie o wartości pośredniej. *Jeżeli we wszystkich punktach przedziału* (a, b) *funkcja* $f(x)$ *posiada pochodne pierwszych* n *rzędów, to*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) +$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

gdzie $a < \xi < b$. *Kładąc* $b = a + h$, *możemy ten wzór napisać w postaci*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) +$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta_n h),$$

gdzie $0 < \vartheta_n < 1$.

Dowód przeprowadzamy dokładnie w taki sam sposób, jak dla przypadków szczególnych, gdy $n = 1$ lub $n = 2$. Bierzemy mianowicie pod uwagę funkcję

$$F_n(x) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n F_n(a),$$

gdzie
$$F_n(x) = f(b) - f(a) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \ldots$$
$$- \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

Ta funkcja równa się zeru przy $x = a$ i $x = b$; wobec tego pochodna jej

$$\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}\left\{F_n(a)-\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)\right\}$$

musi równać się zeru przy jakiejś wartości x, zawartej między a i b. Stąd wynika odrazu żądany wzór.

Ze względu na wielką doniosłość tego twierdzenia podamy w końcu niniejszego rozdziału inny dowód, nie różniący się wprawdzie zasadniczo od powyższego dowodu, ale różny co do formy i oparty na metodzie całkowania przez części.

Przykłady LVIII. 1. Przypuśćmy, że $f(x)$ jest wielomianem stopnia r. W takim razie $f^{(n)}(x)$ równa się tożsamościowo zeru przy $n>r$ i twierdzenie Taylora prowadzi do tożsamości algiebraicznej

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots\ldots+\frac{h^r}{r!}f^{(r)}(a).$$

2. Stosując twierdzenie Taylora do funkcji $f(x)=1/x$ i zakładając, że x i $x+h$ są dodatnie, otrzymujemy

$$\frac{1}{x+h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}h^{n-1}}{x^n}+\frac{(-1)^n h^n}{(x+\vartheta_n h)^{n+1}}.$$

[Ponieważ $\displaystyle \frac{1}{x+h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}h^{n-1}}{x^n}+\frac{(-1)^n h^n}{x^n(x+h)}$,

możemy sprawdzić wzór, jeżeli dowiedziemy, że $x^n(x+h)$ daje się przedstawić w postaci $(x+\vartheta_n h)^{n+1}$ lub że $x^{n+1}<x^n(x+h)<(x+h)^{n+1}$.]

3. Dowieść słuszności wzoru

$$\sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\cos x$$
$$+(-1)^n\frac{h^{2n}}{2n!}\sin(x+\vartheta_{2n}h).$$

Znaleźć analogiczny wzór dla funkcji $\cos(x+h)$.

4. Jeżeli m, n są liczbami całkowitemi dodatniemi i $n\leq m$, wówczas mamy

$$(x+h)^m=x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}h+\ldots+\binom{m}{n-1}x^{m-n+1}h^{n-1}+\binom{m}{n}(x+\vartheta_n h)^{m-n}h^n.$$

Dowieść również, że jeśli przedział $(x, x+h)$ nie zawiera punktu $x=0$, to wzór jest słuszny dla wszelkich rzeczywistych wartości na m i dla wszystkich dodatnich całkowitych wartości na n; jeżeli zaś $x<0<x+h$ lub też $x+h<0<x$, to wzór pozostaje słuszny, o ile $m-n$ jest liczbą dodatnią.

5. Wzór $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\vartheta_1 h)$ nie jest słuszny, jeżeli $f(x)=1/x$ i jeżeli $x<0<x+h$. [Istotnie, $f(x+h)-f(x)>0$, a

$$hf'(x+\vartheta_1 h)=-h/(x+\vartheta_1 h)^2<0.$$

a więc warunki twierdzenia o wartości pośredniej nie są spełnione.]

6. Jeżeli $x=-a$, $h=2a$, $f(x)=x^{1/3}$, to równanie

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\vartheta_1 h)$$

jest spełnione przy $\vartheta=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{18}$. [Ten przykład dowodzi, że wzór, wyrażający twierdzenie o wartości pośredniej, może być słuszny, pomimo że warunki, któreśmy założyli przy dowodzie tego twierdzenia, nie są spełnione.]

7. **Przybliżone wyznaczanie pierwiastków równania.** Niech ξ będzie przybliżoną wartością pierwiastka równania algiebraicznego $f(x)=0$, prawdziwy zaś pierwiastek będzie $\xi+h$. Mamy

$$f(\xi+h)=f(\xi)+hf'(\xi)+\frac{h^2}{2}f''(\xi+\vartheta_2 h)=0$$

a więc
$$h=-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}-\frac{h^2}{2}\cdot\frac{f''(\xi+\vartheta_2 h)}{f'(\xi)}.$$

Widzimy, że
$$x=\xi-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

jest naogół liczbą, bardziej zbliżoną do prawdziwej wartości pierwiastka, niż liczba $x=\xi$.

Jeżeli pierwiastek jest pojedyńczy, a więc $f'(\xi+h)\neq 0$, i jeżeli h jest dostatecznie małą liczbą, wówczas możemy znaleźć stałą dodatnią K taką, że $|f'(x)|>K$ przy wszelkich rozważanych przez nas wartościach na x. W takim razie, o ile h jest małą pierwszego rzędu, $f(\xi)$ jest również małą pierwszego rzędu, a błąd, popełniony przez założenie $x=\xi-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ jest małą drugiego rzędu. *)

8. Zastosować powyższą metodę do równania $x^2=2$, przyjmując jako pierwsze przybliżenie $\xi={}^3/_2$. [Znajdujemy $h=-{}^1/_{12}$, $\xi+h={}^{17}/_{12}=1{\cdot}417\ldots$, co już stanowi wcale dobre przybliżenie. Powtarzając to samo postępowanie, a więc biorąc $\xi={}^{17}/_{12}$, otrzymujemy $\xi+h={}^{577}/_{408}=1{\cdot}414215\ldots$, tj. mamy 5 dokładnych znaków dziesiętnych.]

9. Jeżeli y w równaniu $x^2-1-y=0$ jest małą liczbą, to biorąc na x przybliżoną wartość $1+\frac{1}{2}y-\frac{y^2}{4(2+y)}$, popełnimy błąd czwartego rzędu.

10. Zakładając, że pierwiastek równa się w przybliżeniu $\xi-(f/f')-\frac{1}{2}(f^2f''/f'^3)$, gdzie ξ jest argumentem każdej funkcji, popełniamy wogóle błąd trzeciego rzędu.

*) Metodę tę wyznaczania przybliżonych wartości pierwiastków wynalazł Newton. Bliższe szczegóły znaleźć można w kursach algiebry wyższej, np. w dziele Tannery *Leçons d'Algèbre et d'Analyse*, t. II str. 302. Zajączkowski *Zasady Algiebry wyższej*, str. 158.

11. Jeżeli α jest małą liczbą, to równanie $\sin x = \alpha x$ posiada pierwiastek, mało różniący się od π. Dowieść, że $(1-\alpha)\pi$ daje lepsze przybliżenie, a $(1-\alpha+\alpha^2)\pi$ daje jeszcze lepsze przybliżenie. [Zauważmy, że jeśli f' i f'' są ciągłe, to metoda, podana w Przykł. 7—10, da się również zastosować do równań przestępnych.]

12. Dowieść, że gdy $h \to 0$, granica liczby ϑ_n we wzorze Taylora równa się $1/(n+1)$, o ile tylko $f^{(n+1)}(x)$ jest funkcją ciągłą.

[Istotnie, $f(x+h) = f(x) + \ldots + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\vartheta_n h)$

i $\quad f(x+h) = f(x) + \ldots + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\vartheta_{n+1} h)$,

gdzie zarówno ϑ_n, jak ϑ_{n+1} zawierają się między 0 a 1. Tak więc

$$f^{(n)}(x+\vartheta_n h) = f^{(n)}(x) + \frac{h f^{(n+1)}(x+\vartheta_{n+1} h)}{n+1}.$$

Otóż, stosując do funkcji $f^{(n)}(x)$ twierdzenie o wartości pośredniej i kładąc $0 < \vartheta < 1$, a zarazem zastępując symbol h we wzorze tego twierdzenia (§ 118) przez $\vartheta_n h$, mamy

$$f^{(n)}(x+\vartheta_n h) = f^{(n)}(x) + \vartheta_n h f^{(n+1)}(x+\vartheta\vartheta_n h),$$

skąd
$$\vartheta_n f^{(n+1)}(x+\vartheta\vartheta_n h) = \frac{f^{(n+1)}(x+\vartheta_{n+1} h)}{n+1},$$

zatym twierdzenie jest słuszne, gdyż przy $h \to 0$ zarówno $f^{(n+1)}(x+\vartheta\vartheta_n h)$ jak $f^{(n+1)}(x+\vartheta_{n+1} h)$ dążą do $f^{(n+1)}(x)$.

13. Jeżeli $h \to 0$, a $f''(x)$ jest funkcją ciągłą, to

$$\{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\}/h^2 \to f''(x).$$

14. Jeżeli w punkcie $x=0$ funkcja $f(x)$ ma ciągłe pochodne pierwszych n rzędów, to

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + (a_n + \varepsilon_x) x^n,$$

$$\text{gdzie } a_r = \frac{f^{(r)}(0)}{r!}, \text{ a } \varepsilon_x \to 0, \text{ gdy } x \to 0.$$

15. Jeżeli mamy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + (a_n + \varepsilon_x) x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + (b_n + \eta_x) x^n,$$

gdzie ε_x i η_x dążą do zera wraz z x, wówczas musi być

$$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \ldots a_n = b_n.$$

[Stąd wynika, że jeśli $f(x)$ posiada ciągłe pochodne pierwszych n rzędów i jeżeli

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + (a_n + \varepsilon_x) x^n, \text{ to } a_r = \frac{f^{(r)}(0)}{r!}.]$$

141. Szereg Taylora. Przypuśćmy, że wszystkie pochodne funkcji $f(x)$ są ciągłe w przedziale $(a-\eta,\ a+\eta)$, otaczającym punkt $x=a$. Jeżeli $|h|<\eta$, to przy wszelkich wartościach na n mamy

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta_n h),$$

gdzie $0<\vartheta_n<1$. Jeżeli wprowadzimy symbole

$$S_n=\sum_0^{n-1}\frac{h^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(a),\quad R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta_n h),$$

możemy ten wzór napisać w postaci

$$f(a+h)-S_n=R_n.$$

Przypuśćmy teraz jeszcze, że $R_n\to 0$, gdy $n\to\infty$; w takim razie

$$f(a+h)=\lim_{n\to\infty}S_n=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

To rozwinięcie funkcji $f(a+h)$ na szereg nieskończony znane jest pod nazwą **szeregu Taylora.**

Jeżeli założymy, że $a=0$, otrzymamy

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\ldots$$

Jest to t. zw. **szereg Maclaurina.** Funkcja R_n nosi nazwę **wzoru Lagrange'a na resztę szeregu.**

Należy pamiętać, że ciągłość wszystkich pochodnych funkcji $f(x)$ nie jest dostatecznym warunkiem słuszności rozwinięcia na szereg Taylora, że konieczne jest prócz tego dążenie reszty do zera. W każdym więc poszczególnym przypadku musimy dokładnie badać, jak zachowuje się R_n, gdy $n\to\infty$.

Przykłady LIX. 1. Niech będzie $f(x)=\sin x$. Wszystkie pochodne tej funkcji są ciągłe przy wszelkich wartościach na x. Mamy również $|f^{(n)}(x)|\leq 1$ przy wszelkich wartościach na x i na n. Tak więc $|R_n|\leq h^n/(n!)$, zatem $R_n\to 0$, gdy $n\to\infty$ (Przykł. XXX, 12), niezależnie od wartości h. Mamy tedy

$$\sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\frac{h^4}{4!}\sin x+\ldots$$

dla wszelkich wartości na x i h. W szczególności

$$\sin h=h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\ldots$$

przy wszelkich wartościach na h. W taki sam sposób dowodzimy, że

$$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x+\frac{h^3}{3!}\sin x+\ldots,\qquad \cos h=1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\ldots$$

2. **Szereg dwumianowy.** Niech będzie $f(x)=(1+x)^m$, gdzie m jest dowolną liczbą wymierną, dodatnią lub ujemną. Mamy

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Szereg Maclaurina przybiera postać

$$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots$$

Jeżeli m jest liczbą całkowitą dodatnią, otrzymujemy wielomian, znany nam z algiebry elementarnej. W przypadku ogólnym, gdy m jest liczbą wymierną, mamy

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta_n x)=\binom{m}{n}x^n(1+\vartheta_n x)^{m-n}$$

i chcąc dowieść, że szereg Maclaurina istotnie przedstawia funkcję $(1+x)^m$ przy wartościach zmiennej x, należących do pewnego przedziału, musimy wykazać, że $R_n\to 0$ przy każdej wartości x, należącej do tego przedziału. Możemy tego łatwo dowieść, jeżeli $0\leqq x<1$, gdyż $(1+\vartheta_n x)^{m-n}<1$, jeżeli $n>m$, a $\binom{m}{n}x^n\to 0$, gdy $n\to\infty$ (Przykł. XXX, 13.) Szereg nasz pozostaje słuszny również dla przedziału $-1<x<0$, ale na razie dowieść tego nie możemy, gdyż przy $n>m$ mamy wówczas $1+\vartheta_n x<1$, a $(1+\vartheta_n x)^{m-n}>1$; otóż wiedząc tylko, że $0<\vartheta_n<1$, nie możemy mieć pewności, czy $1+\vartheta_n x$ nie jest bardzo małą liczbą, a $(1+\vartheta_n x)^{m-n}$ nie jest bardzo dużą liczbą. Do dowodu naszego twierdzenia potrzebna nam jest inna forma reszty, którą poznamy później (§ 155).

142. Zastosowania twierdzenia Taylora. A. **Maxima i minima.** Za pomocą tw. Taylora możemy uzupełnić podane w rozdziale VI (§§ 115—116) cechy, po których poznaje się istnienie maximum lub minimum. Zresztą uzupełnienie to ma znaczenie raczej teoretyczne, gdyż w praktyce rzadko zachodzi potrzeba stosowania tej cechy uogólnionej.

Zakładając, że $\varphi(x)$ posiada pierwszą i drugą pochodną, dowiedliśmy, że warunek dostateczny istnienia w punkcie $x=\xi$ maximum lub minimum da się sformułować tak: *przy* $\varphi'(\xi)=0$ *i* $\varphi''(\xi)>0$ *zachodzi minimum, przy* $\varphi'(\xi)=0$ *i* $\varphi''(\xi)<0$ *zachodzi maximum.*

Rzecz jasna, że cecha ta zawodzi, gdy $\varphi''(\xi)=0$. Otóż przypuśćmy, że pochodne $\varphi'(x)$, $\varphi''(x),\ldots\varphi^{(n)}(x)$ są ciągłe i że wszystkie one, z wyjątkiem ostatniej, równają się zeru w punkcie $x=\xi$. W takim razie, przy dostatecznie małych wartościach na h mamy

$$\varphi(\xi+h)-\varphi(\xi)=\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(\xi+\vartheta_n h).$$

Aby funkcja $\varphi(x)$ miała w punkcie $x=\xi$ maximum lub minimum, trzeba i wystarcza, żeby to ostatnie wyrażenie miało stały znak przy dostatecznie małych wartościach na h, co jest możliwe tylko przy n parzystym. Jeżeli n jest liczbą parzystą, będziemy mieli maximum lub minimum zależnie od tego, czy $\varphi^{(n)}(\xi)$ jest ujemne czy dodatnie.

Mamy tedy następującą ogólną cechę: *Aby funkcja $f(x)$, rozwijalna w pewnym przedziale na szereg Taylora, posiadała maximum lub minimum w punkcie $x=\xi$, należącym do tego przedziału, trzeba i wystarcza, żeby pierwsza jej pochodna, różniąca się w punkcie $x=\xi$ od zera, była rzędu parzystego. Jeżeli ta pochodna jest ujemna, funkcja osiąga maximum, jeżeli zaś dodatnia, funkcja osiąga minimum.*

Przykłady LX. 1. Sprawdzić twierdzenie na przykładzie funkcji $\varphi(x)=(x-a)^m$, kładąc $\xi=a$. Przypuszczamy, że m jest liczbą całkowitą dodatnią.

2. Czy funkcja $(x-a)^m(x-b)^n$ posiada maxima lub minima w punktach $x=a$, $x=b$? Naszkicować różne możliwe wykresy tej funkcji.

3. Czy następujące funkcje posiadają maxima lub minima w punkcie $x=0$:

$$\sin x-x,\quad \sin x-x+\frac{x^3}{6},\quad \sin x-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120},$$

$$\cos x-1,\quad \cos x-1+\frac{x^2}{2},\quad \cos x-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}.$$

143. B. **Obliczanie niektórych granic.** Przypuśćmy, że $f(x)$ i $\varphi(x)$ są to dwie funkcje zmiennej x, których pochodne $f'(x)$, $\varphi'(x)$ są ciągłe w punkcie $x=\xi$; przypuśćmy również, że $f(\xi)$ i $\varphi(\xi)$ równają się zeru. W takim razie funkcja

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

nie jest określona w punkcie $x=\xi$, nie wyłącza to jednak możliwości, że $\psi(x)$ dąży do oznaczonej granicy, gdy $x\to\xi$.

Otóż $\quad f(x)=f(x)-f(\xi)=(x-\xi)f'(x_1),$

gdzie x_1 zawiera się między ξ i x. Tak samo mamy

$$\varphi(x)=(x-\xi)\varphi'(x_2),$$

gdzie x_2 zawiera się między ξ i x. Stąd

$$\psi(x)=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_2)}.$$

Należy rozróżnić cztery przypadki.

(1) Ani $f'(\xi)$, ani $\varphi'(\xi)$ nie równają się zeru. W takim razie

$$f(x)/\varphi(x)\to f'(\xi)/\varphi'(\xi).$$

(2) Jeżeli $f'(\xi)=0$, ale $\varphi'(\xi)\neq 0$, to

$$f(x)/\varphi(x)\to 0.$$

(3) Jeżeli $f'(\xi)\neq 0$, a $\varphi'(\xi)=0$, wówczas wartość bezwzględna stosunku $f(x)/\varphi(x)$ rośnie, gdy $x\to\xi$, dopóki jednak nie wiemy dokładnie, w jaki sposób $\varphi'(x)$ dąży do zera, gdy $x\to\xi$, nie możemy powiedzieć, czy powyższy stosunek dąży do $+\infty$, czy do $-\infty$, czy wreszcie wykonywa wahania nieskończone.

(4) Jeżeli $f'(\xi)=0$, $\varphi'(\xi)=0$, to nie możemy nic powiedzieć o zachowaniu się funkcji $f(x)/\varphi(x)$, gdy $x\to\xi$.

W dwuch ostatnich przypadkach może się zdarzyć, że $f(x)$ i $\varphi(x)$ posiadają drugie pochodne i że te pochodne są ciągłe. W takim razie mamy

$$f(x)=f(x)-f(\xi)-(x-\xi)f'(\xi)=\tfrac{1}{2}(x-\xi)^2f''(x_1)$$

$$\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(\xi)-(x-\xi)\varphi'(\xi)=\tfrac{1}{2}(x-\xi)^2\varphi''(x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 zawierają się między ξ i x. Wobec tego

$$\psi(x)=f''(x_1)/\varphi''(x_2).$$

Tu znów możemy rozróżnić kilka możliwych przypadków. W szczególności, jeżeli $f''(\xi)\neq 0$, $\varphi''(\xi)\neq 0$, mamy

$$f(x)/\varphi(x)\to f''(\xi)/\varphi''(\xi).$$

Rzecz jasna, że to postępowanie można kontynuować nieograniczenie. Mamy tedy następujące twierdzenie: *przypuśćmy, że zarówno funkcje $\varphi(x)$, $f(x)$, jak i wszystkich ich kolejne pochodne, jakie tylko byłyby nam potrzebne, są ciągłe w punkcie $x=\xi$.*

Przypuśćmy dalej, że $f^{(p)}(x)$ *i* $\varphi^{(q)}(x)$ *są to pochodne najniższego rzędu, które w punkcie* $x=\xi$ *nie równają się zeru. W takim razie*

(1) *jeżeli* $p=q$, *to* $f(x)/\varphi(x) \to f^{(p)}(\xi)/\varphi^{(q)}(\xi)$;

(2) *jeżeli* $p>q$, *to* $f(x)/\varphi(x) \to 0$;

(3) *jeżeli* $p<q$, *a* $q-p$ *jest liczbą parzystą, to* $f(x)/\varphi(x) \to +\infty$ *lub też* $f(x)/\varphi(x) \to -\infty$, *przyczym znak jest ten sam, co znak przy* $f^{(p)}(\xi)/\varphi^{(q)}(\xi)$;

(4) *jeżeli* $p<q$, *a* $q-p$ *jest liczbą nieparzystą, to*

$$f(x)/\varphi(x) \to +\infty \quad \textit{albo też} \quad f(x)/\varphi(x) \to -\infty,$$

a mianowicie znak jest zgodny lub niezgodny ze znakiem $f^{(p)}(\xi)/\varphi^{(q)}(\xi)$, *zależnie od tego, czy* $x \to \xi+0$, *czy też* $x \to \xi-0$.

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z równań

$$f(x)=\frac{(x-\xi)^p}{p!}f^{(p)}(x_1), \quad \varphi(x)=\frac{(x-\xi)^q}{q!}\varphi^{(q)}(x_2).$$

Przykłady LXI. 1. Wyznaczyć granicę funkcji

$$\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2},$$

gdy $x \to 1$.

2. Wyznaczyć granice funkcji

$$(\operatorname{tg} x - x)/(x - \sin x), \quad (\operatorname{tg} nx - n \operatorname{tg} x)/(n \sin x - \sin nx),$$

gdy $x \to 0$.

3. Wyznaczyć granicę funkcji $x\{\sqrt{x^2+a^2}-x\}$, gdy $x \to \infty$. [Kładziemy $x=1/y$.]

4. Dowieść, że

$$\lim_{x\to n}(x-n)\operatorname{cosec} x\pi = \frac{(-1)^n}{\pi}, \quad \lim_{x\to n}\frac{1}{x-n}\left\{\operatorname{cosec} x\pi - \frac{(-1)^n}{(x-n)\pi}\right\} = \frac{(-1)^n\pi}{6},$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

5. Wyznaczyć

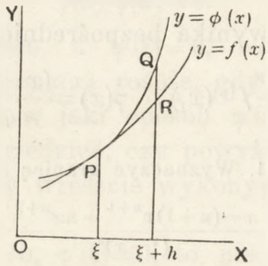
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x} - \frac{x}{6}\right), \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right).$$

6. $\dfrac{\sin x \arcsin x - x^2}{x^6} \to \dfrac{1}{18}$, $\dfrac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x - x^2}{x^6} \to \dfrac{2}{9}$, jeżeli $x \to 0$.

144. C. **Styczność krzywych płaskich.** O dwuch krzywych powiadamy, że się *przecinają* w pewnym punkcie, jeżeli ten punkt leży na obu krzywych. Powiadamy, że dwie krzywe *stykają się* w pewnym punkcie, lub że *są do siebie styczne*, jeżeli posiadają w tym punkcie spólną prostą styczną.

Przypuśćmy, że funkcje $f(x)$, $\varphi(x)$ mają pochodne wszystkich rzędów i że te pochodne są ciągłe w punkcie $x=\xi$. Weźmy pod uwagę wykresy tych funkcji. W ogólnym przypadku $f(\xi)$ nie równa się $\varphi(\xi)$, a więc $x=\xi$ nie odpowiada punktowi przecięcia się krzywych. Jeżeli jednak mamy $f(\xi)=\varphi(\xi)$, to w punkcie $(x=\xi,\ y=f(\xi)=\varphi(\xi))$ krzywe przecinają się. Żeby krzywe nie tylko przecinały się, lecz również stykały się w tym punkcie, trzeba oczywiście, żeby było jednocześnie $f(\xi)=\varphi(\xi)$ i $f'(\xi)=\varphi'(\xi)$.

Kwestję stykania się krzywych można potraktować tro-



Rys. 53.

chę inaczej. Na rys. 53 krzywe stykają się w punkcie P, a odcinek

$$QR=\varphi(\xi+h)-f(\xi+h)=\frac{h^2}{2}\{\varphi''(\xi+\vartheta h)-f''(\xi+\vartheta h)\},$$

(ϑ zawiera się między 0 a 1), ponieważ $\varphi(\xi)=f(\xi)$ i $\varphi'(\xi)=f'(\xi)$. Stąd wynika, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{QR}{h^2}=\tfrac{1}{2}\{\varphi''(\xi)-f''(\xi)\}.$$

Innemi słowy: *jeżeli krzywe są do siebie styczne w punkcie, którego odcięta równa się ξ, i jeżeli h jest małą pierwszego rzędu, wówczas różnica ich rzędnych w punkcie, którego odciętą jest $\xi+h$, jest małą drugiego lub wyższego rzędu.*

Czytelnik sprawdzi z łatwością, że jeśli krzywe przecinają się, lecz nie stykają, to $\lim\frac{QR}{h}=\varphi'(\xi)-f'(\xi)$, tak iż QR jest w tym przypadku małą pierwszego rzędu.

Rzecz jasna, że rząd małości odcinka QR wskazuje, *o ile styczność jest ścisła.* Czytelnik z łatwością dowiedzie, że jeśli przy $x=\xi$ wszystkie pochodne od pierwszej do $(n-1)$-szej równają się sobie, to QR jest małą rzędu n-tego, że więc

$$\lim_{h\to 0}\frac{QR}{h^n}=\frac{1}{n!}\,|\varphi^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(\xi)|.$$

To prowadzi do następującego określenia:

Styczność n-tego rzędu. *Jeżeli* $f(\xi)=\varphi(\xi)$, $f'(\xi)=\varphi'(\xi)$, ..., $f^{(n)}(\xi)=\varphi^{(n)}(\xi)$, *ale* $f^{(n+1)}(\xi)\neq\varphi^{(n+1)}(\xi)$, *wówczas powiadamy, że krzywe* $y=f(x)$ *i* $y=\varphi(x)$ *są do siebie styczne w punkcie, którego odcięta równa się* ξ, *a mianowicie mają styczność rzędu n-tego.*

W poprzednich rozważaniach uzależniliśmy pojęcie styczności od wyboru osi; rozumowanie nasze zawodzi, jeżeli spólna styczna dwuch krzywych jest równoległa do osi y-ów. Można w takim razie przyjąć y za zmienną niezależną, ale postąpimy praktyczniej, uważając x i y za funkcje jednego parametru t. Ramy książki nie pozwalają nam na gruntowniejsze roztrząsanie tej sprawy; znakomity wykład teorji styczności znajdzie czytelnik w dziele de la Vallée-Poussin *Cours d'Analyse*, t. II, str. 396.

Przykłady LXII. 1. Jeżeli $\varphi(x)=ax+b$, t. j. jeżeli $y=\varphi(x)$ jest prostą, wówczas warunki styczności w punkcie o odciętej ξ wyrażają się zapomocą równań $f(\xi)=a\xi+b$, $f'(\xi)=a$. Wyznaczając a i b tak, by uczynić zadość tym równaniom, otrzymujemy $a=f'(\xi)$, $b=f(\xi)-\xi f'(\xi)$, a równanie stycznej do krzywej $y=f(x)$ w punkcie o odciętej ξ ma kształt

$$y=xf'(\xi)+f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

czyli $y-f(\xi)=(x-\xi)f'(\xi)$. Porówn. Przykł. XLII, 5.

2. Prosta jest najzupełniej wyznaczona, jeżeli ma mieć z daną krzywą styczność pierwszego rzędu. Jeżeli styczność ma być rzędu drugiego, musi być $f''(\xi)=\varphi''(\xi)=0$. Punkt, w którym prosta ma z krzywą styczność rzędu drugiego, nazywa się **punktem przegięcia** krzywej.

3. Znaleźć punkty przegięcia krzywych $y=3x^4-6x^3+1$, $y=2x/(1+x^2)$, $y=\sin x$, $y=a\cos^2 x+b\sin^2 x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{arctg} x$.

4. Dowieść, że stożkowa $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ nie posiada punktów przegięcia. [W punkcie przegięcia musiałoby być

$$a+2hy'+by'^2=0$$

czyli $$(ab-h^2)\{ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy\}+af^2-2fgh+bg^2=0,$$

co dałoby się pogodzić z równaniem stożkowej tylko w razie, gdybyśmy mieli

$$af^2-2fgh+bg^2=c(ab-h^2) \text{ czyli } abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0,$$

a to ostatnie równanie wyraża, jak wiadomo, że stożkowa rozpada się na dwie proste.]

5. Krzywa $y=\dfrac{ax^2+2bx+c}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$ ma jeden lub trzy punkty przegięcia, zależnie od tego, czy pierwiastki równania $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ są rzeczywiste czy zespolone.

[Zapomocą zmiany osi (Przykł. XLIX.15) możemy równanie krzywej przedstawić w postaci

$$\eta=\xi/(A\xi^2+2B\xi+C)=\xi/\{A(\xi-p)(\xi-q)\},$$

gdzie p, q mogą być albo rzeczywiste, albo zespolone sprzężone. Warunek, by krzywa miała punkt przegięcia, brzmi: $\xi^3-3pq\xi+pq(p+q)=0$; równanie to ma jeden lub trzy pierwiastki rzeczywiste, zależnie od tego, czy $\{pq(p-q)\}^2$ jest liczbą dodatnią czy ujemną, t. j. zależnie od tego, czy p, q są rzeczywiste czy zespolone.]

6. Zbadać krzywe

$$y=(1-x)/(1+x^2),\quad y=(1-x^2)/(1+x^2),\quad y=(1+x^2)/(1-x^2).$$

7. Jeżeli krzywa przykładu 5 ma trzy punkty przegięcia, leżą one na jednej prostej. [Równanie $\xi^3-3pq\xi+pq(p+q)=0$ możemy napisać w postaci $(\xi-p)(\xi-q)(\xi+p+q)+(p-q)^2\xi=0$, tak iż punkty przegięcia leżą na prostej $\xi+A(p-q)^2\eta+p+q=0$.]

8. Dowieść, że krzywe $y=x\sin x$, $y=(\sin x)/x$ mają nieskończenie wiele punktów przegięcia.

9. **Koło styczne do krzywej.** Ogólne równanie koła

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

zawiera trzy stałe dowolne. Wyznaczmy je tak, żeby koło miało w punkcie $(\xi, \eta=f(\xi))$ styczność możliwie najwyższego rzędu z krzywą $f(x)=y$. Oznaczmy $f'(\xi)$, $f''(\xi)$ przez η_1, η_2. Różniczkując dwa razy równanie koła, mamy

$$(x-a)+(y-b)y'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$1+y'^2+(y-b)y''=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Jeżeli koło styka się z krzywą, wówczas $x=\xi$, $y=\eta$, $y'=\eta_1$ czynią zadość równaniom (1) i (2). To daje $(\xi-a)/\eta_1=-(\eta-b)=r/\sqrt{1+\eta_1^2}$. Jeżeli styczność jest rzędu drugiego, wówczas $y''=\eta_2$ musi czynić zadość równaniu (3). Ale $b=\eta+\dfrac{1+\eta_1^2}{\eta_2}$, zatym

$$a=\xi-\frac{\eta_1(1+\eta_1^2)}{\eta_2},\quad b=\eta+\frac{1+\eta_1^2}{\eta_2},\quad r=\frac{(1+\eta_1^2)^{3/2}}{\eta_2}.$$

Koło, mające z krzywą w punkcie (ξ, η) styczność drugiego rzędu, nazywamy **kołem ściśle stycznym** albo **kołem krzywizny**, a jego promień — **promieniem krzywizny.** Odwrotność promienia jest to t. zw. **miara krzywizny** (przez skrócenie mówi się nieraz krótko: *krzywizna* krzywej w danym punkcie). Tak więc miara krzywizny równa się

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\Big/\left\{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right\}^{3/2}.$$

Środek koła krzywizny nazywa się *środkiem krzywizny* krzywej w danym punkcie.

10. Dowieść, że krzywizna koła jest stała i równa się odwrotności promienia, i że koło jest jedyną krzywą płaską o stałej krzywiźnie.

11. Znaleźć środek i promień krzywizny w dowolnym punkcie stożkowej $y^2=4ax$ lub $(x/a)^2+(y/b)^2=1$.

12. W elipsie promień krzywizny w punkcie P równa się CD^3/ab, gdzie CD jest połową średnicy, sprzężonej z CP.

13. Dowieść, że wogóle można wykreślić stożkową, mającą w danym punkcie P styczność czwartego rzędu z daną krzywą $y=f(x)$.

[Równanie ogólne stożkowej zróżniczkujmy cztery razy względem zmiennej x. Otrzymamy

$$ax+hy+g+(hx+by+f)y'=0$$
$$a+2hy'+by'^2+(hx+by+f)y''=0$$
$$3(h+by')y''+(hx+by+f)y'''=0$$
$$4(h+by')y'''+3by''^2+(hx+by+f)y^{(\text{IV})}=0.$$

Jeżeli stożkowa ma styczność rzędu czwartego, to tym czterem równaniom i równaniu stożkowej muszą czynić zadość wartości $x=\xi$, $y=\eta$, $y'=\eta_1$, $y''=\eta_2$, $y'''=\eta_3$, $y^{(\text{IV})}=\eta_4$. Mamy tedy liczbę równań wystarczającą do wyznaczenia stosunków $a:b:c:f:g:h$.]

14. Można wykreślić nieskończenie wiele stożkowych, mających z daną krzywą styczność trzeciego rzędu w danym punkcie P. Środki tych stożkowych leżą na jednej prostej.

[Przyjmując styczną i normalną w punkcie P za osie spółrzędnych, możemy równanie stożkowej napisać w postaci $2y=ax^2+2hxy+by^2$. Środek leży na prostej $ax+hy=0$.]

15. Wyznaczyć parabolę, mającą z elipsą $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ w końcu jej większej osi styczność rzędu trzeciego.

16. Średnica $\dfrac{x}{a\cos\alpha}=\dfrac{y}{b\sin\alpha}$ elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ jest miejscem gieometrycznym środków stożkowych, mających z elipsą styczność rzędu trzeciego w punkcie $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$.

145. Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych. Pojęcie pochodnej możemy rozciągnąć na funkcje wielu zmiennych x, y, ...

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z funkcją dwuch zmiennych rzeczywistych $f(x, y)$*) i że przy wszelkich wartościach x i y, jakie rozważamy, istnieją granice

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}, \quad \lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}.$$

Innemi słowy: zakładamy, że w pewnym przedziale zmienności x i y funkcja $f(x, y)$ posiada pochodną względem x czyli df/dx albo $D_x f(x, y)$, jak również pochodną względem y czyli df/dy albo $D_y f(x, y)$. Te pochodne nazywamy *pochodnemi cząstkowemi funkcji* $f(x, y)$ i oznaczamy zapomocą symbolów

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

albo $$f_x'(x, y), \quad f_y'(x, y).$$

albo jeszcze krócej $$f_x', \quad f_y'.$$

Nie należy zresztą mniemać, że mamy tu do czynienia z pojęciami zupełnie nowemi: „różniczkowanie cząstkowe" względem x nie jest postępowaniem zasadniczo różnym od zwykłego różniczkowania; różnica polega na tym, że funkcja nasza jest zależna od drugiej jeszcze zmiennej y, która sama jest niezależna od x.

Inaczej przedstawiałaby się sprawa, gdyby między x i y zachodził jakiś związek, gdyby więc jedna z tych zmiennych była zależna od drugiej. W tym przypadku nasze określenie pochodnej cząstkowej f_x' nie miałoby sensu, gdyż, zmieniając x na $x+h$, zmienilibyśmy jednocześnie wartość zmiennej y. Ale $f(x,y)$ nie byłaby wówczas właściwie funkcją dwuch zmiennych. Jeżeli np. między x i y zachodzi związek $y=\varphi(x)$, wówczas mamy

$$f(x, y)=f\{x, \varphi(x)\}$$

i funkcja nasza jest właściwie funkcją jednej zmiennej x. Oczywista rzecz, że moglibyśmy ją równie dobrze traktować jako

---

*) Nowe zagadnienia, które powstają przy różniczkowaniu funkcji wielu zmiennych, można zupełnie dokładnie zilustrować na przykładzie funkcji dwuch zmiennych. Uogólnienia naszych twierdzeń na przypadek funkcji trzech lub więcej zmiennych są, wogóle biorąc, niemal oczywiste.

funkcję jednej zmiennej y, albo też, wyraziwszy x i y w postaci funkcji trzeciej zmiennej t, mielibyśmy

$$f(x, y)=f\{\varphi(t), \psi(t)\}.$$

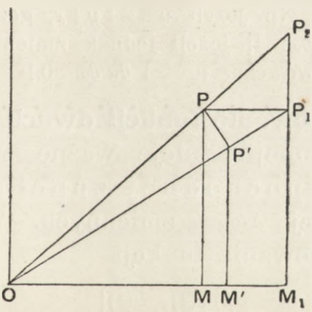
Przykłady LXIII. 1. Jeżeli $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, to

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial\vartheta}=-r\sin\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial\vartheta}=r\cos\vartheta.$$

2. Wytłumaczyć, dlaczego $\frac{\partial r}{\partial x}\neq\frac{1}{(\partial x/\partial r)}$ i $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\neq\frac{1}{(\partial x/\partial\vartheta)}$.

[W teorji funkcji jednej zmiennej widzieliśmy, że $\frac{dy}{dx}$ jest odwrotnością funkcji $\frac{dx}{dy}$. Tu sprawa przedstawia się inaczej. Niech P (rys. 54) będzie punktem (x, y) lub (r, ϑ). Chcąc wyznaczyć pochodną cząstkową $\frac{\partial r}{\partial x}$, musimy zmienić x o pewien przyrost, powiedzmy: o $MM_1=\delta x$, a jednocześnie y musi pozostać bez zmiany, skutkiem czego punkt P zajmie



Rys. 54.

położenie P_1. Jeżeli na prostej OP_1 odłożymy $OP'=OP$, wówczas mamy $P'P_1=\delta r$, a według określenia $\frac{\partial r}{\partial x}=\lim\frac{\delta r}{\delta x}$. Jeśli teraz zechcemy obliczyć pochodną $\frac{\partial x}{\partial r}$, uważając x i y za funkcję zmiennych r i ϑ, będziemy musieli zwiększyć r o Δr, pozostawiając ϑ bez zmiany. Wskutek tego punkt P zajmie położenie P_2, gdzie $PP_2=\Delta r$; odpowiedni przyrost zmiennej x jest $MM_1=\Delta x$, a $\frac{\partial x}{\partial r}=\lim\frac{\Delta x}{\Delta r}$. Otóż $\Delta x=\delta x$*), ale $\Delta r\neq\delta r$: Jakoż łatwo dostrzec, że

$$\lim\frac{\delta r}{\delta x}=\lim\frac{P'P_1}{PP_1}=\cos\vartheta,$$

natomiast
$$\lim\frac{\Delta r}{\Delta x}=\lim\frac{PP_2}{PP_1}=\sec\vartheta,$$

tak iż
$$\lim\frac{\delta r}{\Delta r}=\cos^2\vartheta.$$

Rzecz w tym, że, tworząc pochodne $\frac{\partial r}{\partial x}$ i $\frac{\partial x}{\partial r}$, wychodzimy z różnych założeń co do sposobu, w jaki zmienia się położenie punktu P.]

3. Jeżeli $z=f(ax+by)$, to $b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. W założeniu, że $X+Y=x$, $Y=xy$, obliczyć pochodne cząstkowe $\partial X/\partial x$, $\partial X/\partial y$, i t. d. Wyrazić x i y zapomocą zmiennych X i Y i obliczyć pochodne $\partial x/\partial X$, $\partial x/\partial Y$, i t. d.

5. W założeniu, że $X+Y+Z=x$, $Y+Z=xy$, $Z=xyz$, obliczyć $\partial X/\partial x$, $\partial X/\partial y$, i t. d.

[Rozciągnięcie naszych określeń na funkcje wielu zmiennych nie jest rzeczą trudną, należy jednak dokładnie uświadomić sobie, które zmienne są niezależne. Np. jeżeli $u=x+y+z$, gdzie x, y, z są zmienne niezależne, wówczas $\partial u/\partial x=1$; jeżeli jednak zmiennemi niezależnemi są x, $x+y=\eta$, $x+y+z=\zeta$, wówczas $u=\zeta$ i $\partial u/\partial x=0$.]

148. Różniczkowanie funkcji dwuch funkcji. W teorji funkcji *jednej* zmiennej istnieje ważne twierdzenie, zwane t w i e r d z e n i e m o p o c h o d n e j z u p e ł n e j, które jest zależne od teorji funkcji *dwuch* zmiennych. Twierdzenie to podaje regułę różniczkowania funkcji

$$f\{\varphi(t),\ \psi(t)\}$$

względem zmiennej t.

Przypuśćmy najpierw, że $f(x, y)$ jest funkcją dwuch zmiennych x, y i że pochodne f_x', f_y' są funkcjami ciągłemi obu zmiennych (§ 100) przy wszelkich wartościach, o których będzie mowa. Przypuśćmy dalej, że obszar zmienności obu

*) Oczywista rzecz, że równość ta ma miejsce tylko dlatego, że w odpowiedni sposób wybraliśmy przyrost Δr (czyli odcinek PP_2). Przy innym wyborze przyrostu, otrzymalibyśmy na Δx i Δr wartości, proporcjonalne do powyższych.

zmiennych jest ograniczony przez to, że punkt (x, y) leży na krzywej

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

przyczym pochodne $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$ są ciągłe. W ten sposób $f(x, y)$ sprowadza się do funkcji jednej zmiennej t, którą oznaczymy przez $F(t)$. Zagadnienie nasze polega na wyznaczeniu pochodnej $F'(t)$.

Przypuśćmy, że gdy t zmienia się w $t+\tau$, wówczas x i y zmieniają się w $x+\xi$, $y+\eta$. Na mocy określenia mamy

$$\frac{dF(t)}{dt}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[f\{\varphi(t+\tau),\ \psi(t+\tau)\}-f\{\varphi(t),\ \psi(t)\}]$$

$$=\lim \frac{1}{\tau}\{f(x+\xi,\ y+\eta)-f(x,\ y)\}$$

$$=\lim\left[\frac{f(x+\xi,\ y+\eta)-f(x, y+\eta)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{\tau}+\frac{f(x, y+\eta)-f(x, y)}{\eta}\cdot\frac{\eta}{\tau}\right].$$

Ale, na mocy twierdzenia o wartości pośredniej, mamy

$$\frac{f(x+\xi,\ y+\eta)-f(x, y+\eta)}{\xi}=f_x'(x+\vartheta\xi,\ y+\eta)$$

$$\frac{f(x, y+\eta)-f(x, y)}{\eta}=f_y'(x,\ y+\vartheta'\eta),$$

gdzie ϑ i ϑ' zawierają się między 0 a 1. Gdy $\tau\to 0$, wówczas $\xi\to 0$, $\eta\to 0$, $\xi/\tau\to\varphi'(t)$, $\eta/\tau\to\psi'(t)$, a więc

$$f_x'(x+\vartheta\xi,\ y+\eta)\to f_x'(x, y), \quad f_y'(x,\ y+\vartheta'\eta)\to f_y'(x, y).$$

Mamy tedy

$$F'(t)=D_t f\{\varphi(t),\ \psi(t)\}=f_x'(x, y)\varphi'(t)+f_y'(x, y)\psi'(t)$$

czyli

$$\boxed{\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.}$$

Przykłady LXIV. 1. Przypuśćmy, że $\varphi(t)=(1-t^2)/(1+t^2)$, $\psi(t)=2t/(1+t^2)$, tak iż miejscem punktu (x, y) jest koło $x^2+y^2=1$. W takim razie

$$\varphi'(t)=-4t/(1+t^2)^2, \quad \psi'(t)=2(1-t^2)/(1+t^2)^2,$$

$$F'(t)=\{-4t/(1+t^2)^2\}f_x'+\{2(1-t^2)/(1+t^2)^2\}f_y'.$$

Oczywista rzecz, że po dokonanym różniczkowaniu wstawiamy na x i y ich wartości $(1-t^2)/(1+t^2)$ oraz $2t/(1+t^2)$.

Wzór ten możemy z łatwością sprawdzić na poszczególnych przykładach. Niech będzie np. $f(x, y)=x^2+y^2$; mamy $f_x'=2x$, $f_y'=2y$, skąd $F'(t)=2x\varphi'(t)+2y\psi'(t)=0$, co jest słuszne, gdyż $F(t)=1$.

2. Sprawdzić twierdzenie w przypadku, gdy $x=t^m$, $y=1-t^m$, $f(x, y)=x+y$ lub gdy $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $f(x, y)=x^2+y^2$.

3. Do najważniejszych przypadków szczególnych należy ten, w którym $x=t$. Mamy

$$D_x f\{x, \psi(x)\}=D_x f(x, y)+D_y f(x, y)\psi'(x),$$

gdzie y należy zastąpić przez $\psi(x)$ po dokonaniu różniczkowania.

Ten właśnie przypadek szczególny skłonił do wprowadzenia symbolów $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$. Jakoż wydaje się rzeczą naturalną oznaczać przez df/dx tylko jedną z *dwuch funkcji* $D_x f(x, y)$ oraz $D_x f\{x, \psi(x)\}$, które tym się od siebie różnią, że w jednej położyliśmy $y=\psi(x)$ przed różniczkowaniem, w drugiej zaś po różniczkowaniu. Przypuśćmy np., że $y=1-x$, $f(x, y)=$ $=x+y$. Mamy $D_x f(x, 1-x)=D_x 1=0$, ale $D_x f(x, y)=1$.

Różnicę między temi dwiema funkcjami można uwydatnić, oznaczając $D_x f\{x, \psi(x)\}$ przez df/dx, a $D_x f(x, y)$ przez $\partial f/\partial x$. W takim razie twierdzenie nasze przybiera postać

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}.$$

Zresztą i to znakowanie nie jest bez zarzutu, gdyż w symbolach $\partial f/\partial x$ oraz df/dx oznaczaliśmy tą samą literą f dwie funkcje $f(x, y)$ i $f\{x, \psi(x)\}$, które, jako funkcje zmiennej x, są zupełnie różnej formy.

4. Jeżeli, rugując t z równań $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, otrzymujemy $f(x, y)=0$, wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}=0.$$

5. Jeżeli x, y są funkcjami zmiennej t, a r i ϑ są spółrzędnemi biegunowemi punktu (x, y), wówczas $r'=(xx'+yy')/r$, $\vartheta'=(xy'-yx')/r^2$, gdzie kreski oznaczają różniczkowanie względem t.

147. Twierdzenie o wartości pośredniej w zastosowaniu do funkcji dwuch zmiennych.

Wiele wzorów otrzymaliśmy w poprzednim rozdziale, opierając się na twierdzeniu o wartości pośredniej, t. j. na równaniu

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=hf'(x+\vartheta h),$$

które można napisać w postaci

$$\delta y=f'(x+\vartheta\,.\,\delta x)\delta x,$$

kładąc $y=\varphi(x)$.

Przypuśćmy teraz, że $z=f(x, y)$ jest funkcją dwuch zmiennych niezależnych x, y, którym dajemy przyrosty h, k czyli $\delta x, \delta y$. Postaramy się wyrazić przyrost

$$\delta z=f(x+h, y+k)-f(x, y)$$

zapomocą h, k oraz pochodnych funkcji z względem x i y.

Niech będzie $f(x+ht, y+kt)=F(t)$. Mamy

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=F(1)-F(0)=F'(\vartheta),$$

gdzie $0<\vartheta<1$. Ale na mocy § 146 mamy

$$F'(t)=D_t f(x+ht, y+kt)$$

$$=hf_x'(x+ht, y+kt)+kf_y'(x+ht, y+kt),$$

a stąd wynika żądany wzór

$$\delta z=f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf_x'(x+\vartheta h, y+\vartheta k)+$$

$$+kf_y'(x+\vartheta h, y+\vartheta k).$$

Ponieważ zakładamy, że f_x', f_y' są funkcjami ciągłemi obu zmiennych x, y, zatym

$$f_x'(x+\vartheta h, y+\vartheta k)=f_x'(x, y)+\varepsilon_{h,k}$$

$$f_y'(x+\vartheta h, y+\vartheta k)=f_y'(x, y)+\eta_{h,k},$$

$\varepsilon_{h,k}$, $\eta_{h,k}$ dążą do zera, gdy h i k dążą do zera. Możemy tedy napisać twierdzenie w postaci

$$\delta z=(f_x'+\varepsilon)\delta x+(f_y'+\eta)\delta y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie ε i η są małemi liczbami, gdy δx i δy są małe.

Wzór (1) można wysłowić inaczej, mówiąc, że równanie

$$\delta z=f_x'\delta x+f_y'\delta y$$

jest *w przybliżeniu* słuszne, t. j. że różnica między obu stronami równania jest mała w porównaniu z większym z dwuch przyrostów δx, $\delta \eta$*). Mówimy: „*w porównaniu z większym z dwuch przyrostów*“, gdyż jeden z nich może być mały w porównaniu z drugim, a możemy nawet mieć $\delta x=0$ lub $\delta y=0$.

---

*) Albo w porównaniu z $|\delta x|+|\delta y|$ lub z $\sqrt{(\delta x)^2+(\delta y)^2}$.

Jeżeli równanie $\delta z=\lambda\delta x+\mu\delta y$ jest „w przybliżeniu słuszne“ w tym sensie, jaki nadaliśmy temu wyrażeniu, wówczas musi być $\lambda=f_x'$, $\mu=f_y'$.

Jakoż $\quad \delta z-f_x'\delta x-f_y'\delta y=\varepsilon\delta x+\eta\delta y, \quad \delta z-\lambda\delta x-\mu\delta y=\varepsilon'\delta x+\eta'\delta y.$

gdzie ε, ε', η, η' dążą do zera wraz z δx i δy, a więc

$$(\lambda-f_x')\delta x+(\mu-f_y')\delta y=\rho\delta x+\rho'\delta y,$$

gdzie ρ i ρ' dążą do zera. Mając tedy dowolnie zadaną liczbę dodatnią ζ, możemy dobrać takie σ, że

$$|(\lambda-f_x')\delta x+(\mu-f_y')\delta y|<\zeta\{|\delta x|+|\delta y|\},$$

o ile tylko $|\delta x|<\sigma$ i $|\delta y|<\sigma$. Kładąc $\delta y=0$, mamy $|(\lambda-f_x')\delta x|<\zeta|\delta x|$ czyli $|\lambda-f_x'|<\zeta$, że zaś ζ może być dowolnie małe, zatym $\lambda=f_x'$. Tak samo dowodzimy, że $\mu=f_y'$.

148. O różniczkach. W zastosowaniach rachunku różniczkowego, zwłaszcza w zastosowaniach gieometrycznych, dogodniej bywa posługiwać się t. zw. różniczkami dx, dy, dz niż przyrostami δx, δy, δz.

Powróćmy na chwilę do funkcji jednej zmiennej $y=f(x)$. Jeżeli $f'(x)$ jest funkcją ciągłą, mamy

$$\delta y=\{f'(x)+\varepsilon\}\delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie $\varepsilon\rightarrow 0$, gdy $\delta x\rightarrow 0$. Innemi słowy: równanie

$$\delta y=f'(x).\delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

jest „w przybliżeniu słuszne”. Nie przypisywaliśmy dotąd żadnego znaczenia symbolowi dy; teraz możemy ten symbol określić zapomocą równania

$$dy=f'(x)\delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

W szczególności, jeżeli weźmiemy pod uwagę funkcję $y=x$, otrzymamy

$$\delta x=dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

tak iż możemy napisać

$$dy=f'(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dzieląc obie strony równania przez dx, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Symbol dy/dx ma więc dwojakie znaczenie: możemy nim oznaczać (jak dotąd czyniliśmy) pochodną, albo też możemy go uważać za iloraz dwuch różniczek dy, dx. Dwuznaczność ta nie pociąga za sobą złych skutków, gdyż równanie (6) pozostaje słuszne bez względu na to, które z dwuch znaczeń przypiszemy symbolowi dy/dx.

Równanie (5) ma pewną wyższość nad równaniem (2); najpierw jest ono bezwzględnie słuszne, nie zaś „w przybliżeniu“ tylko; powtóre, nie wymaga ono żadnych założeń co do ciągłości pochodnej $f'(x)$. Ale z drugiej strony główna zaleta równania (5) polega na tym, że w razie potrzeby możemy przejść od niego do „przybliżonego“ równania (2). Znakowanie „różniczkowe“ bywa często dogodniejsze od znakowania pochodnych, zwłaszcza tam, gdzie mamy do czynienia z funkcjami wielu zmiennych.

Jeżeli $f'(x)$ jest funkcją ciągłą, mamy

$$\lim \frac{dy}{\delta y}=1,$$

gdy $\delta x \to 0$. Wyrażamy to niekiedy słowami: „dy jest *główną częścią* przyrostu δy, gdy δx jest małą liczbą“; tak samo moglibyśmy powiedzieć, że gdy x jest małą liczbą, wówczas ax jest „główną częścią“ wyrażenia $ax+bx^2$.

Jeśli chodzi o funkcję dwuch zmiennych x, y, to różniczkę dz określamy zapomocą równania

$$dz=f_x'\delta x+f_y'\delta y \quad \text{. . . . . (7)}$$

Kładąc kolejno $z=x$ i $z=y$, mamy

$$dx=\delta x, \quad dy=\delta y \quad \text{. . . . . (8)}$$

tak iż

$$dz=f_x'dx+f_y'dy \quad \text{. . . . . (9)}$$

Jest to „dokładne” równanie, odpowiadające „przybliżonemu” równaniu (1), § 147.

Na jedną własność równania (9) należy zwrócić uwagę. Widzieliśmy w § 146, że jeśli $z=f(x, y)$, gdzie x i y nie są od siebie niezależne, lecz przeciwnie są funkcjami jednej zmiennej t, wówczas

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Mnożąc równanie to przez dt i zważywszy, że

$$dx=\frac{dx}{dt}dt, \quad dy=\frac{dy}{dt}dt, \quad dz=\frac{dz}{dt}dt,$$

otrzymujemy

$$dz=f_x'dx+f_y'dy.$$

Tak więc *wzór* (9), *wyrażający dz w zależności od dx i dy, pozostaje słuszny bez względu na to, czy zmienne x i y są czy nie są od siebie zależne.* Jest to spostrzeżenie bardzo ważne pod względem praktycznym.

Należy również zauważyć, że jeśli z jest funkcją dwuch zmiennych x i y i jeżeli

$$dz=\lambda dx+\mu dy,$$

wówczas musi być $\lambda=f_x'$, $\mu=f_y'$. Wynika to odrazu z rozważań § 147.

Rzecz jasna, że określenia i twierdzenia trzech ostatnich paragrafów dadzą się bezpośrednio rozciągnąć na funkcje dowolnej liczby zmiennych.

Przykłady LXV. 1. Pole elipsy $A=\pi ab$, gdzie a, b są połówkami osi; dowieść, że

$$\frac{dA}{A}=\frac{da}{a}+\frac{db}{b}.$$

Znaleźć równanie „przybliżone" między przyrostami osi i pola.

2. Pole trójkąta ABC oznaczmy przez Δ. Wyrazić Δ jako funkcję zmiennych (I) a, B, C, (II) A, b, c, (III) a, b, c i dowieść, że

$$\frac{d\Delta}{\Delta}=2\frac{da}{a}+c\frac{dB}{a\sin B}+b\frac{dC}{a\sin C},\quad \frac{d\Delta}{\Delta}=\operatorname{ctg} A\,dA+\frac{db}{b}+\frac{dc}{c},$$

$$d\Delta=R(\cos A\,da+\cos B\,db+\cos C\,dc),$$

gdzie R oznacza promień koła opisanego.

3. Boki trójkąta zmieniają się w ten sposób, że pole jego pozostaje stałe, wobec czego a możemy uważać za funkcję zmiennych b i c. Dowieść, że

$$\frac{\partial a}{\partial b}=-\frac{\cos B}{\cos A},\quad \frac{\partial a}{\partial c}=-\frac{\cos C}{\cos A}.$$

4. Jeżeli a, b, c zmieniają się w ten sposób, że promień R pozostaje stały, wówczas

$$\frac{da}{\cos A}+\frac{db}{\cos B}+\frac{dc}{\cos C}=0$$

a więc

$$\frac{\partial a}{\partial b}=-\frac{\cos A}{\cos B},\quad \frac{\partial a}{\partial c}=-\frac{\cos A}{\cos C}.$$

5. Jeżeli z jest funkcją zmiennych u i v, które same są funkcjami zmiennych x i y, wówczas

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

[Mamy $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$, $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$, $dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$,

poczym pozostaje wykonać podstawienie.]

6. Niech z będzie funkcją zmiennych x i y i niech X, Y, Z będą określone przez równania

$$x = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \quad y = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \quad z = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z.$$

W takim razie Z można uważać za funkcję zmiennych X i Y. Wyrazić $\partial Z/\partial X$, $\partial Z/\partial Y$ zapomocą $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$. [Oznaczając te pochodne odpowiednio przez P, Q, p, q, mamy

$$dz - p dx - q dy = 0$$

czyli

$$(c_1 p + c_2 q - c_3) dZ + (a_1 p + a_2 q - a_3) dX + (b_1 p + b_2 q - b_3) dY = 0$$

Porównywując to równanie z równaniem $dZ - P dX - Q dY = 0$, mamy

$$P = -\frac{a_1 p + a_2 q - a_3}{c_1 p + c_2 q - c_3} \qquad Q = -\frac{b_1 p + b_2 q - b_3}{c_1 p + c_2 q - c_3}.\Big]$$

7. Jeżeli $(a_1 x + b_1 y + c_1 z) p + (a_2 x + b_2 y + c_2 z) q = a_3 x + b_3 y + c_3 z$,

to

$$(a_1 X + b_1 Y + c_1 Z) P + (a_2 X + b_2 Y + c_2 Z) Q = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z.$$

(*Mathem. Tripos*, 1899.)

8. **Różniczkowanie funkcji uwikłanych.** Przypuśćmy, że zarówno $f(x, y)$, jak pochodna $f_y'(x, y)$ są ciągłe w otoczeniu punktu (a, b) i że

$$f(a, b) = 0, \quad f_b'(a, b) \neq 0.$$

W takim razie możemy znaleźć takie otoczenie punktu (a, b), w którym pochodna $f_y'(x, y)$ ma stały znak. Przypuśćmy np., że w tym otoczeniu $f_y'(x, y) > 0$. W takim razie przy wszystkich wartościach x dostatecznie blizkich do a i przy wszystkich wartościach y dostatecznie blizkich do b funkcja $f(x, y)$ jest funkcją rosnącą zmiennej y w ściślejszym znaczeniu wyrazu. Na mocy § 101 możemy powiedzieć, że istnieje jedna tylko funkcja ciągła y, która równa się b przy $x = a$ i która czyni zadość równaniu $f(x, y) = 0$ przy wszelkich wartościach na x, dostatecznie blizkich do a.

Przypuśćmy dalej, że $f(x, y)$ ma pochodną $f_x'(x, y)$, która również jest ciągła w otoczeniu punktu (a, b). Jeżeli $f(x, y) = 0$, $x = a + h$, $y = b + k$,

wówczas

$$0 = f(x, y) - f(a, b) = (f_a' + \varepsilon) h + (f_b' + \eta) k,$$

gdzie ε i η dążą do zera wraz z h i k. Tak więc

$$\frac{k}{h} = -\frac{f_a' + \varepsilon}{f_b' + \eta} \to -\frac{f_a'}{f_b'},$$

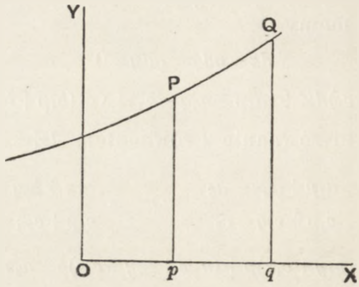
czyli

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_a'}{f_b'}.$$

9. Równanie stycznej, poprowadzonej do krzywej $f(x, y) = 0$ przez punkt x_0, y_0, ma kształt

$$(x - x_0) f'_{x_0}(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_{y_0}(x_0, y_0) = 0.$$

149. Całka określona i pole. W § 138 założyliśmy, że jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x, a PQ jest wykresem funkcji $y=f(x)$, to obszarowi $PpqQ$ (rys. 55) jest podporządkowana liczba, która jest w zupełności oznaczona i która



Rys. 55.

nosi nazwę *pola* tego obszaru. Rzecz jasna, że jeśli Op, Oq oznaczymy przez a i x i uważać będziemy x za wielkość zmienną, wówczas pole musi być funkcją tej zmiennej x. Możemy tę funkcję oznaczyć symbolem $F(x)$.

Opierając się na tym założeniu, dowiedliśmy w § 137, że $F'(x)=f(x)$, i pokazaliśmy, w jaki sposób można to równanie spożytkować przy obliczaniu pól poszczególnych krzywych. Teraz musimy uzasadnić istnienie liczby, którą nazwaliśmy polem $F(x)$.

Wiemy, co należy rozumieć przez pole prostokąta, możemy też uważać pole wielokąta za pojęcie zupełnie określone, a to dzięki elementarnym własnościom wielokątów. Natomiast elementarne wiadomości gieometryczne nie dają możności określenia pola obszaru, ograniczonego przez linję krzywą. Musimy tedy znaleźć takie określenie pola $F(x)$, któreby dało nam możność dowiedzenia, że pole to istnieje*).

Załóżmy, że $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b). Podzielmy ten przedział na mniejsze przedziały zapomocą punktów $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, tak iż

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n=b.$$

*) Wykład nasz oparliśmy na Goursat *Cours d'Analyse*, vol. I, str. 171.

Przedział $(x_\nu, x_{\nu+1})$ oznaczmy przez δ_ν, a przez m_ν oznaczmy niższy kres funkcji $f(x)$ w przedziale δ_ν. Niech wreszcie będzie

$$s = m_0\delta_0 + m_1\delta_1 + \ldots + m_n\delta_n = \Sigma m_\nu \delta_\nu.$$

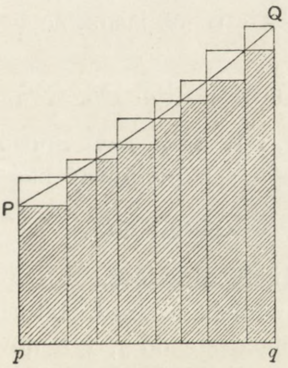
Jeżeli M jest górnym kresem funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b), wówczas musi być oczywiście $s \leqq M(b-a)$. Jeśli więc weźmiemy pod uwagę wartości s, odpowiadające wszystkim możliwym sposobom podziału (a, b) na mniejsze przedziały, wówczas s musi posiadać *kres górny* (§ 95). Istnieją wartości, których s przekroczyć nie może i, tak samo jak w § 95, możemy dowieść, że istnieje najmniejsza liczba j, której s nigdy przekroczyć nie może; tę najmniejszą liczbę możemy nazwać *górnym kresem* sumy s. *)

Tak samo, jeżeli M_ν jest górnym kresem funkcji $f(x)$ w przedziale δ_ν, możemy określić sumę

$$S = \Sigma M_\nu \delta_\nu$$

oraz jej *dolny kres* J.

Jeżeli $f(x)$ stale rośnie w przedziale (a, b), wówczas $m_\nu = f(x_\nu)$,



Rys. 56.

a $M_\nu = f(x_{\nu+1})$. W tym przypadku s jest polem obszaru, zakreskowanego na rys. 56, a S jest polem obszaru, ograniczonego grubszą linją. W ogólności s i S są to sumy pól prostokątów, zawartych w obszarze ograniczonym przez krzywą, lub zawierających ten obszar.

*) Zasadnicze pojęcia i terminy są te same, co i w § 95; różnica polega tylko na tym, że obecnie, zamiast funkcji zmiennej x, rozważamy, że tak powiem, funkcję sposobu dzielenia przedziału (a, b), czyli zmienną liczbę, zależną od sposobu, w jaki ten podział uskuteczniamy.

Dowiedziemy teraz, że *suma s nigdy nie może przekraczać sumy S*. Niech s, S będą sumy, odpowiadające jednemu podziałowi, a s', S' sumy, odpowiadające drugiemu podziałowi. Mamy dowieść, że $s \leqq S'$, a $s' \leqq S$.

Utwórzmy trzeci podział, przyjmując za punkty podziału te wszystkie punkty, które wyznaczały bądź pierwszy, bądź drugi podział. Oznaczmy przez **s**, **S** sumy, odpowiadające temu trzeciemu podziałowi. Z łatwością dostrzegamy, że

$$\mathbf{s} \geqq s, \quad \mathbf{s} \geqq s', \quad \mathbf{S} \leqq S, \quad \mathbf{S} \leqq S' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Np. **s** tym się różni od s, że przynajmniej jeden przedział δ_ν, należący do s, został podzielony na pewną liczbę mniejszych przedziałów

$$\delta_{\nu,1}, \quad \delta_{\nu,2}, \ldots, \delta_{\nu,p},$$

a wobec tego wyraz $m_\nu \delta_\nu$, wchodzący w skład sumy s, został w sumie **s** zastąpiony przez

$$m_{\nu,1}\delta_{\nu,1} + m_{\nu,2} m_{\nu,2} + \ldots + m_{\nu,p}\delta_{\nu,p}.$$

gdzie $m_{\nu,1}, m_{\nu,2}, \ldots$ są niższemi kresami funkcji $f(x)$ w przedziałach $\delta_{\nu,1}, \delta_{\nu,2}, \ldots$ Ale rzecz jasna, że $m_{\nu,1} \geqq m_\nu$, $m_{\nu,2} \geqq m_\nu, \ldots$ zatym

$$m_{\nu,1}\delta_{\nu,1} + m_{\nu,2}\delta_{\nu,2} + \ldots + m_{\nu,p}\delta_{\nu,p} \geqq m_\nu \delta_\nu,$$

Stąd wynika, że $\mathbf{s} \geqq s$. W taki sam sposób możemy dowieść pozostałych nierówności (1), ponieważ zaś $\mathbf{s} \leqq \mathbf{S}$, zatym

$$s \leqq \mathbf{s} \leqq \mathbf{S} \leqq S',$$

a tego właśnie chcieliśmy dowieść.

Wynika stąd również, że $j \leqq J$. Istotnie, możemy znaleźć s dowolnie mało różniące się od j, i S dowolnie mało różniące się od J*), gdyby więc było $j > J$, musiałaby również, dla pewnych wartości s i S, zachodzić nierówność $s > S$.

Nie korzystaliśmy dotąd z faktu, że $f(x)$ jest funkcją ciągłą. Dowiedziemy teraz, że $j = J$ i że obie sumy s, S dążą do granicy J, gdy ilość punktów podziału rośnie nieograniczenie, a każdy przedział δ_ν maleje nieograniczenie. Ściślej mówiąc,

---

*) Te dwie sumy s i S odpowiadają naogół dwom różnym podziałom.

wykażemy, że *mając daną dowolną liczbę dodatnią* ε, *możemy znaleźć taką liczbę* δ, *że*

$$0 \leqq J - s < \varepsilon, \quad 0 \leqq S - J < \varepsilon,$$

o ile tylko $\delta_\nu < \delta$ *przy wszelkich wartościach na* ν.

Na mocy twierdzenia II, § 99 istnieje liczba δ taka, że jeśli przy każdym ν mamy $\delta_\nu < \delta$, wówczas

$$M_\nu - m_\nu < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

zatym
$$S - s = \Sigma (M_\nu - m_\nu)\delta_\nu < \varepsilon.$$

Ale
$$S - s = (S - J) + (J - j) + (j - s);$$

trzy składniki, stanowiące prawą część tej równości, są dodatnie, a więc każdy z nich jest mniejszy od ε. Ponieważ różnica $J - j$ jest stała, zatym musi ona równać się zeru. Tak więc $j = J$, a $0 \leqq j - s < \varepsilon$, $0 \leqq S - J < \varepsilon$, co było do dowiedzenia.

P o l e o b s z a r u $PpqQ$ o k r e ś l a m y jako *spólną granicę sum* s *i* S, *czyli jako* J. Możemy nadać temu określeniu ogólniejszą formę. Weźmy pod uwagę sumę

$$\sigma = \Sigma f_\nu \delta_\nu,$$

gdzie f_ν oznacza wartość funkcji $f(x)$ w jakimkolwiek punkcie przedziału δ_ν. Rzecz jasna, że $s < \sigma < S$, że więc σ dąży do granicy J, gdy przedziały δ_ν maleją nieograniczenie. Możemy tedy określić pole obszaru jako granicę sumy σ.

150. O długości krzywych. Pojęcie *długości* krzywej da się równie dokładnie zanalizować, jak i pojęcie pola, ale analiza ta jest o wiele trudniejsza. Nie możemy, niestety, podać jej tu; poprzestaniemy tylko na zbadaniu pojęcia długości łuku koła, gdyż na nim opierają się najważniejsze twierdzenia trygonometrji elementarnej.

Niech ACB (rys. 57) będzie łukiem koła, C środkiem łuku (czyli punktem łuku, jednakowo odległym od A i B); AT i BT niech będą stycznemi do koła w końcach łuku. Styczna, poprowadzona przez C przecina AT, BT w punktach D, E, leżących odpowiednio między A i T oraz B i T.

Mamy
$$AC + CB > AB$$

$$AT + TB = AD + DT + TE + EB > AD + DE + EB.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$AB = s_0, \quad AC + CB = s_1, \quad AT + TB = S_0, \quad AD + DE + EB = S_1,$$

będziemy mieli
$$s_0 < s_1, \quad S_0 > S_1.$$

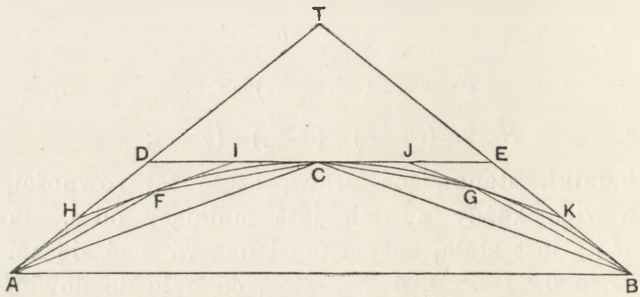
Niech F i G będą środkami łuków AC, CB. a HFI, JGK niech będą odpowiedniemi stycznemi. Kładąc

$$AF+FC+CG+GB=s_2, \quad AH+HI+IJ+JK+KB=S_2,$$

dowiedziemy z łatwością, że

$$s_0<s_1<s_2, \quad S_0>S_1>S_2.$$

Postępując dalej w ten sam sposób, wyznaczamy dwa ciągi liczb



Rys. 57.

$s_0, s_1, s_2, \ldots$ oraz S_0, S_1, S_2, takie, że s_n jest długością łamanej, wpisanej w łuk koła, a S_n długością łamanej, opisanej na łuku, przyczym

$$s_0<s_1<s_2<\ldots<s_n<\ldots, \quad S_0>S_1>S_2>\ldots>S_n>\ldots$$

Łatwo dostrzec, że $s_n<S_n$, a więc zarówno s_n, jak S_n dążą do granicy, gdy $n\to\infty$. Jeżeli oznaczymy przez α kąt środkowy, zawierający między ramionami dany łuk, wówczas kąt środkowy, odpowiadający łukowi o cięciwie s_n, równa się $\frac{\alpha}{2^n}$. Mamy tedy

$$S_n-s_n=S_n\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)<S_0\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right).$$

a więc S_n-s_n dąży do zera, gdy $n\to\infty$. Widzimy, że s_n i S_n dążą do spólnej granicy l, którą możemy nazwać **długością łuku** ACB.

Można z łatwością uogólnić powyższe rozumowanie na przypadek, gdy łuki dzielimy w dowolny sposób, nie zaś na połowy. Można również zastosować podobne rozumowanie do innych krzywych, przyczym najtrudniej jest określić warunki, przy których taki punkt, jak np. D leży między A i T.

Opierając się na osiągniętych wynikach, możemy z łatwością dowieść nierówności $\sin x<x<\operatorname{tg} x$, którą założyliśmy w Przykł. XXXIX.13.

151. Całka określona. Przypuśćmy, że $f(x)$ jest funkcją ciągłą, że więc obszar, ograniczony przez krzywą $y=f(x)$, przez dwie jej rzędne $f(a)$, $f(b)$ i przez oś x-ów, ma oznaczone pole.

W rozdziale VI, § 138 dowiedliśmy, że jeśli $F(x)$ jest całką funkcji $f(x)$, t. j. jeśli mamy

$$F'(x)=f(x), \quad F(x)=\int f(x)\,dx,$$

wówczas rzeczone pole równa się $F(b)-F(a)$.

Wyznaczenie funkcji $F(x)$ nie zawsze jest możliwe, wobec czego może być rzeczą dogodną posiadanie wzoru, któryby wyrażał pole obszaru $PpqQ$ i nie zawierał w sposób jawny tej funkcji. Pole $PpqQ$ będziemy odtąd oznaczali symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Możemy uważać, że symbol ten jest określony w dwojaki sposób: z jednej strony możemy go uważać za wartość pola $PpqQ$, określonego w § 149, z drugiej zaś — za skrócony sposób pisania wzoru $F(b)-F(a)$, gdzie $F(x)$ jest funkcją całkową funkcji $f(x)$, przyczym jest rzeczą obojętną, czy faktycznie umiemy znaleźć wzór na $F(x)$, czy też nie umiemy.

Liczbę $$\int_a^b f(x)\,dx.$$

nazywamy **całką określoną**; a i b nazywamy **niższą i wyższą granicą całkowania**; $f(x)$ nazywamy **funkcją podcałkową**, a przedział (a, b) **przedziałem całkowania.** Całka określona zależy od a i b, jak również od kształtu funkcji $f(x)$, ale sama nie jest funkcją zmiennej x.

Funkcję całkową

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

nazywają niekiedy **całką nieokreśloną.**

Różnica między całką określoną a nieokreśloną jest właściwie różnicą dwuch punktów widzenia. Całka określona $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ jest funkcją zmiennej b; możemy ją uważać za szczególną funkcję całkową funkcji $f(b)$. Z drugiej strony całkę nieokreśloną możemy zawsze wyrazić za pomocą całki określonej, gdyż

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt.$$

Zwykle jednak, mówiąc o całkach nieokreślonych, mamy na myśli *pewien związek między dwiema funkcjami*, na mocy którego jedna z nich jest pochodną drugiej. Natomiast gdy mówimy o całce określonej, nie bierzemy zazwyczaj pod uwagę możliwej zmienności granic całkowania, gdyż granice te są najczęściej stałe. Np.

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0)$$

nie jest funkcją, lecz liczbą.

Należy zauważyć, że całka $\int_a^x f(t)dt$ ma pochodną $f(x)$, a więc jest ciągła.

Ponieważ $1/x$ jest funkcją ciągłą przy $x>0$, zatym na mocy poprzedniego paragrafu możemy powiedzieć, że istnienie funkcji $\lg x$ zostało dowiedzione.

Przykłady LXVI. Obliczanie całek określonych zapomocą nieokreślonych. 1. Dowieść, że

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

a w szczególności
$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

2. $\displaystyle\int_a^b \cos mx\, dx = \frac{\sin mb - \sin ma}{m}, \quad \int_a^b \sin mx\, dx = \frac{\cos ma - \cos mb}{m}.$

3. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} a, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$

[Natrafiamy tu na pewną trudność, gdyż $\operatorname{arc\,tg} x$ jest funkcją wielowartościową. Możemy tę trudność usunąć, zauważywszy, że w równaniu

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} x$$

$\operatorname{arc\,tg} x$ musi oznaczać kąt, zawarty między $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Istotnie, całka równa się zeru przy $x=0$ i rośnie stale wraz z x, a więc to samo powiedzieć można o $\operatorname{arc\,tg} x$; funkcja ta dąży do $\frac{\pi}{2}$ gdy $x \to \infty$. Tak samo można dowieść, że $\operatorname{arc\,tg} x \to -\frac{\pi}{2}$, gdy $x \to -\infty$.

W równaniu
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x,$$

gdzie $-1<x<1$, $\arcsin x$ oznacza kąt, zawarty między $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Jeśli więc a i b są, co wartości bezwzględnej, mniejsze od 1, to

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b - \arcsin a.]$$

4. $$\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} = \frac{\alpha}{2\sin\alpha},$$ jeżeli $-\pi<\alpha<\pi$; wyjątek mamy, gdy $\alpha=0$; wówczas całka równa się $\frac{1}{2}$; jest to granica, do której dąży $\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\alpha$, gdy $\alpha\to 0$.

6. $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4} \qquad (a>0).$$

7. $$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},$$ jeżeli $a>|b|$. [Jeżeli $|a|<|b|$, funkcja podcałkowa przechodzi przez nieskończoność pomiędzy 0 i π.]

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab},$$ jeżeli a i b są liczbami dodatniemi. Jaką wartość ma całka, jeżeli a i b mają znaki różne, albo jeżeli obie te liczby są ujemne?

9. **Całki Fouriera.** Jeżeli m i n są liczbami całkowitemi dodatniemi, wówczas

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx\,dx = 0,$$

a

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx \quad \text{i} \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx$$

równają się zeru, jeżeli $m \neq n$, jeżeli zaś $m=n$, wówczas obie całki równają się π.

10. Dowieść, że $\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx$ i $\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx$ równają się zeru przy $m\neq n$, jeżeli zaś $m=n$, wówczas obie całki równają się $\frac{\pi}{2}$.

Dowieść również, że

$$\int_0^\pi \cos mx \sin nx\,dx$$

równa się albo zeru, albo $\frac{2n}{n^2-m^2}$ zależnie od tego, czy $n-m$ jest liczbą parzystą czy nieparzystą.

152. Obliczanie całek określonych jako granic sum. W niektórych wypadkach możemy obliczyć całkę określoną, opierając się bezpośrednio na określeniach, podanych w §§ 149 i 151. Przerobienie kilku przykładów będzie dla czytelnika rzeczą pouczającą, pomimo że nie jest to sposób postępowania praktyczny.

Przykłady LXVII. 1. Obliczyć $\int_a^b x dx$, dzieląc przedział (a, b) na n równych części zapomocą punktów $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$ i wyznaczając granicę

$$\lim_{n\to\infty} \{(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})f(x_{n-1})\}.$$

[Suma ta równa się

$$\frac{b-a}{n}\left[a+\left\{a+\frac{b-a}{n}\right\}+\left\{a+2\frac{b-a}{n}\right\}+\ldots+\left\{a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right\}\right]$$

$$=(b-a)\left\{a+(b-a)\frac{n(n-1)}{2n^2}\right\},$$

a więc granica sumy przy $n\to\infty$ równa się $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. Czytelnik sprawdzi to zapomocą wykresu.]

2. W taki sam sposób obliczyć $\int_a^b x^2 dx$.

3. Obliczyć $\int_a^b x\,dx$, gdzie $0<a<b$, dzieląc (a, b) na n części za pomocą punktów $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, ar^n$, gdzie $r^n=b/a$. Tę samą metodę zastosować do ogólniejszej całki $\int_a^b x^m dx$.

4. Obliczyć $\int_a^b \cos mx\,dx$ oraz $\int_a^b \sin mx\,dx$ zapomocą metody Przykł. 1.

5. Dowieść, że $n\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+r^2}\to\frac{\pi}{4}$ gdy $n\to\infty$.

[Wynika to z tego, że

$$\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(1/n)}{1+(r/n)^2},$$

a ta suma dąży do $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, gdy $n \to \infty$.]

6. Dowieść, że $\frac{1}{n^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sqrt{n^2-r^2} \to \frac{\pi}{4}$. [Granicą jest $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.]

153. Ogólne własności całek określonych. Całka określona posiada ważne własności, które dają się wyrazić zapomocą następujących równań: *)

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \tag{1}$$

Wynika to odrazu z określenia całki zapomocą funkcji całkowej $F(x)$, gdyż $F(b)-F(a) = -\{F(a)-F(b)\}$. Należy zauważyć, iż określając całkę jako granicę sumy, zakładaliśmy, że górna granica całkowania jest większa od dolnej, jeśli więc chcemy, poprzestając na tym jednym określeniu, rozciągnąć pojęcie całki określonej $\int_b^a f(x)\, dx$ na przypadek, gdy $a<b$, musimy uważać równanie (1) za określenie wzoru, wypisanego w prawej części tego równania.

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0 \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx. \tag{3}$$

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

$$\int_a^b \{f(x)+\varphi(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{5}$$

Czytelnik dowiedzie tych wzorów w dwojaki sposób: (I) wychodząc z określenia całki jako granicy sumy, (II) wychodząc z określenia całki zapomocą funkcji całkowej.

Ważne są również następujące twierdzenia:

6. *Jeżeli* $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, *to* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

*) Wszystkie funkcje, wchodzące w skład tych równań, są ciągłe, gdyż całkę określoną zdefinjowaliśmy jedynie dla funkcji ciągłych.

Wystarczy zauważyć, że suma s w § 149 nie może być ujemna. Później dowiedziemy (Zadanie 41 w końcu rozdziału), że całka może równać się zeru tylko wówczas, jeżeli $f(x)$ jest stale zerem; dowód można również oprzeć na wniosku drugim § 114.

(7) *Jeżeli* $H \leq f(x) \leq K$, *gdy* $a \leq x \leq b$, *wówczas*

$$H(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq K(b-a).$$

Stosujemy wzór (6) do $f(x)-H$ i $K-f(x)$.

(8) $$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi),$$

gdzie ξ *zawiera się między* a *i* b.

Wynika to odrazu z równania (7). Istotnie, możemy założyć, że H oznacza najmniejszą, a K największą wartość funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b). W takim razie całka równa się $\eta(b-a)$, gdzie η zawiera się między H i K. Ponieważ jednak $f(x)$ jest funkcją ciągłą, zatym musi istnieć takie ξ, że $f(\xi)=\eta$.

Jeżeli przez $F(x)$ oznaczymy funkcję całkową, możemy twierdzenie (8) napisać w postaci

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi),$$

skąd widzimy, że twierdzenie (8) jest tylko innym sposobem wysłowienia twierdzenia o wartości pośredniej, które poznaliśmy w § 118. Możemy więc wzór (8) nazwać **twierdzeniem o wartości pośredniej w zastosowaniu do całek.**

(9) **Uogólnione twierdzenie o wartości pośredniej w zastosowaniu do całek.** *Jeżeli* $\varphi(x)$ *jest dodatnie, a* H *i* K *zostały określone tak, jak w równaniu* (7), *wówczas*

$$H\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq K\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx,$$

gdzie ξ *jest określone tak, jak we wzorze* (8).

Otrzymujemy to twierdzenie, stosując wzór (6) do całek

$$\int_a^b \{f(x)-H\}\varphi(x)dx \text{ oraz } \int_a^b \{K-f(x)\}\varphi(x)dx.$$

Czytelnik sformułuje sam odpowiednie twierdzenie w przypadku, gdy $\varphi(x)$ jest stale ujemne.

(10) **Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego.**

Funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

posiada pochodną, równą $f(x)$.

Dowiedliśmy już tego twierdzenia w § 138. Wynika stąd (co już było zaznaczone w § 151), że $F(x)$ *jest funkcją ciągłą zmiennej* x.

Przykłady LXIII. 1. Opierając się na określeniu całki i na równaniach (2)—(5) poprzedniego paragrafu dowieść, że

$$\text{(I)} \quad \int_{-a}^{a} \varphi(x^2)\,dx = 2\int_0^a \varphi(x^2)dx, \quad \int_{-a}^{a} x\varphi(x^2)\,dx = 0;$$

$$\text{(II)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi(\sin x)dx;$$

$$\text{(III)} \quad \int_0^{m\pi} \varphi(\cos^2 x)dx = m\int_0^{\pi} \varphi(\cos^2 x)dx,$$

gdzie m jest liczbą całkowitą.

2. Dowieść, że $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ równa się albo π, albo 0 zależnie od tego, czy n jest nieparzystą liczbą czy parzystą. [Oprzeć się na wzorze

$$(\sin nx)/(\sin x) = 2\cos\{(n-1)x\} + 2\cos\{(n-3)x\} + \ldots$$

w którym ostatni wyraz jest albo 1, albo $2\cos x$.]

3. Dowieść, że $\int_0^{\pi} \sin nx \operatorname{ctg} x\,dx$ równa się 0 albo π, zależnie od tego, czy n jest nieparzyste czy parzyste.

4. Jeżeli

$$\varphi(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

i jeżeli k jest liczbę dodatnią całkowitą nie większą od n, to

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = 2\pi a_0, \quad \int_0^{2\pi} \cos kx\,\varphi(x)dx = \pi a_k, \quad \int_0^{2\pi} \sin kx\,\varphi(x)dx = \pi b_k.$$

Jeżeli $k > n$, wówczas obie ostatnie całki równają się zeru. [Oprzeć się na Przykł. LXVI.9.]

5. Jeżeli $\varphi(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx$, a k jest liczbą dodatnią całkowitą nie większą od n, wówczas

$$\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = \pi a_0\,, \qquad \int_0^{\pi} \cos kx\,\varphi(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi a_k\,.$$

Jeżeli $k>n$, ostatnia całka równa się zeru [Przykł. LXVI. 10.]

6. Jeżeli a i b są dodatnie, wówczas $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{2\pi}{ab}$

[Przykł. 1 oraz Przykł. LXVI.8.]

7. Jeżeli $f(x) \leqq \varphi(x)$, gdy $a \leqq x \leqq b$, to $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

8. Dowieść, że

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\,; \quad 0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,dx.$$

9. Jeżeli $n>1$, wówczas $0{\cdot}5 < \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < 0{\cdot}524$.

[Pierwsza nierówność wynika z tego, że $\sqrt{1-x^{2n}} < 1$, druga zaś z tego, że

$$\sqrt{1-x^{2n}} > \sqrt{1-x^2}.]$$

10. Dowieść, że $\displaystyle {}^1/_2 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}$.

11. Dowieść, że $\displaystyle \frac{3x+8}{16} < \frac{1}{\sqrt{4-3x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{4-3x}}$, jeżeli $0<x<1$

a stąd otrzymać nierówności $\displaystyle \frac{19}{32} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x+x^3}} < \frac{2}{3}$.

12. Dowieść, że $\displaystyle 0{\cdot}573 < \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-3x+x^3}} < 0{\cdot}595$. [Kładziemy $x=1+u$, poczym $2+3u^2+u^3$ zastępujemy przez $2+4u^2$ i $2+3u^2$.]

13. Jeżeli α i φ są to kąty ostre dodatnie, wówczas

$$\varphi < \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \sin^2 x}} < \frac{\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \sin^2\varphi}}.$$

Jeżeli $\alpha=\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, całka zawiera się między $0{\cdot}523$ a $0{\cdot}541$.

14. Dowieść, że $\displaystyle \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

[Jeżeli σ jest sumą, o której była mowa w końcu § 149, a σ' jest sumą, utworzoną w odpowiedni sposób z funkcji $|f(x)|$, wówczas $|\sigma| \leqq \sigma'$.]

15. Jeżeli $|f(x)| \leqq M$, to $\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| \leqq M\int_a^b |\varphi(x)|\,dx$.

154. Całkowanie przez części i zapomocą podstawień. Z rozważań § 131 wynika, że

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = f(b)\,\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx.$$

Jest to t. zw. wzór na całkowanie przez części całki określnej.

Dalej wiemy (§ 126), że jeśli $F(t)$ jest funkcją całkową funkcji $f(t)$, wówczas

$$\int f\{\varphi(x)\}\varphi'(x)\,dx = F\{\varphi(x)\}.$$

Jeśli więc $\varphi(a)=c$, $\varphi(b)=d$, to mamy

$$\int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c) = F\{\varphi(b)\} - F\{\varphi(a)\} = \int_a^b f\{\varphi(x)\}\varphi'(x)dx.$$

Jest to wzór na przekształcenie całki określonej zapomocą podstawienia.

Dzięki tym dwom wzorom możemy nieraz obliczyć całkę określoną, nie wyznaczając całki nieokreślonej, a nawet zdarza się, że potrafimy w ten sposób obliczyć całkę określoną, jakkolwiek nie umiemy obliczyć odpowiedniej całki nieokreślonej. Kilka przykładów znajdzie czytelnik niżej.

Przykłady LXIX. 1. Dowieść, że

$$\int_a^b xf''(x)dx = \{bf'(b) - f(b)\} - \{af'(a) - f(a)\}.$$

2. Ogólniej mamy $\int_a^b x^m f^{(m+1)}(x)dx = F(b) - F(a)$,

gdzie

$$F(x) = x^m f^{(m)}(x) - mx^{m-1}f^{(m-1)}(x) + m(m-1)x^{m-2}f^{(m-2)}(x) - \ldots + (-1)^m m! f(x).$$

3. Dowieść, że $\int_0^1 \operatorname{arc\,sin} x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$, $\int_0^1 x \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

4. Jeżeli a i b są liczbami dodatniemi, to

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x \sin x\,dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}.$$

[Zastosować całkowanie przez części i Przykł. LXVI.8.]

5. Jeżeli $f_1(x)=\int_0^x f(t)dt$, $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt, \ldots, f_k(x)=\int_0^x f_{k-1}(t)dt$,

wówczas $$f_k(x)=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(t).(x-t)^{k-1}dt.$$

6. Stosując całkowanie przez części dowieść, że jeśli

$$u_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx,$$

gdzie m, n są liczbami całkowitemi dodatniemi, wówczas

$$(m+n+1)u_{m,n}=nu_{m,n-1}$$

$$u_{m,n}=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

7. Jeżeli $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^n x\,dx$, to $u_n+u_{n-2}=1/(n-1)$. Zapomocą tego równania obliczyć całkę dla wszelkich całkowitych dodatnich wartości na n.

8. Na mocy poprzedniego zadania dowieść, że

$$\frac{1}{2(n+1)}<u_n<\frac{1}{2(n-1)}.$$

9. Jeżeli $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$, to $u_n=u_{n-2}\cdot\frac{n-1}{n}$. [Zastosować całkowanie przez części.]

10. Dowieść, że u_n równa się

$$\frac{2.4.6\ldots(n-1)}{3.5.7\ldots n} \text{ albo też } \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n},$$

zależnie od tego, czy n jest liczbą nieparzystą czy parzystą.

11. **Drugie twierdzenie o wartości pośredniej.** Jeżeli $f(x)$ ma w każdym punkcie przedziału (a, b) pochodną, która zachowuje w tym przedziale stały znak, wówczas istnieje taka liczba ξ, zawarta między a i b, że

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx+f(b)\int_\xi^b \varphi(x)dx.$$

[Niech będzie $\int_a^x \varphi(t)\,dt=\Phi(x)$. W takim razie

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\Phi'(x)\,dx = f(b)\Phi(b) - \int_a^b f'(x)\Phi(x)dx$$

$$= f(b)\,\Phi(b) - \Phi(\xi)\int_a^b f'(x)dx,$$

czyli
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(b)\Phi(b) + \{f(a) - f(b)\}\Phi(\xi).]$$

12. **Wzór Bonneta na drugie twierdzenie o wartości pośredniej.** Jeżeli $f'(x)$ ma stały znak, a $f(b)$ i $f(a)-f(b)$ mają jednakowe znaki, to

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^X \varphi(x)dx\,,$$

gdzie X zawiera się między a i b.

[Jakoż $f(b)\Phi(b)+\{f(a)-f(b)\}\Phi(\xi)=\mu f(a)$, gdzie μ zawiera się między $\Phi(\xi)$ i $\Phi(b)$. Ważny przypadek szczególny zachodzi, gdy

$$0 \leqq f(b) \leqq f(x) \leqq f(a).]$$

Dowieść, że gdy $f(a)$ i $f(b)-f(a)$ mają ten sam znak, wówczas

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(b)\int_X^b \varphi(x)dx\,,$$

gdzie X zawiera się między a i b. [Wyjść z funkcji $\psi(\xi) = \int_\xi^b \varphi(x)\,dx$.

Przekonamy się, że całkę naszą można przedstawić w postaci

$$f(a)\,.\,\psi(a) + \{f(b) - f(a)\}\psi(\xi).$$

Ważny przypadek szczególny zachodzi, gdy $0 \leqq f(a) \leqq f(x) \leqq f(b)$.]

13. Dowieść, że $\left|\int_X^{X'} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \frac{2}{X}$, gdzie $X' > X > 0$. [Zastosować pierwszy wzór przykładu 12 i oprzeć się na spostrzeżeniu, że całka funkcji $\sin x$ w każdym przedziale jest liczbowo mniejsza od 2.]

14. Dowieść Przykł. LXVIII.1 zapomocą całkowania przez podstawienie. [W przypadku (I) podzielić przedział na dwie części $(-a, 0)$ i $(0, a)$ i w pierwszym przedziale położyć $x=-y$. W przypadku (II) kładziemy w pierwszym równaniu $x=\frac{\pi}{2}-y$, w drugim zaś dzielimy przedział całkowania $(0, \pi)$ na połowy i kładziemy $x=\frac{\pi}{2}+y$. W przypadku (III) dzielimy przedział na m równych części i kładziemy $x=\pi+y$, $x=2\pi+y$, ...]

15. Dowieść, że $\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b F(a+b-x)dx$.

16. Dowieść, że $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^m x\, dx = 2^{-m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx$.

17. Dowieść, że $\int_0^{\pi} x\, \varphi(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \varphi(\sin x) dx$. [Kładziemy $x = \pi - y$.]

18. Dowieść, że $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$.

19. Zapomocą podstawienia $x = a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta$ dowieść, że

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)\,(b-x)}\, dx = \frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

20. Za pomocą podstawienia $(a+b\cos x)(a-b\cos y) = a^2-b^2$ dowieść,

że $$\int_0^{\pi} (a+b\cos x)^{-n}\, dx = (a^2-b^2)^{-\frac{2n-1}{2}} \int_0^{\pi} (a-b\cos y)^{n-1} dy,$$

jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią i $a > |b|$. Obliczyć całkę przy $n = 1, 2, 3$.

21. Jeżeli m, n są to liczby całkowite dodatnie, to

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1} \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}.$$

[Kładziemy $x = a + (b-a)y$ i opieramy się na Przykł. 6.]

155. Dowód twierdzenia Taylora, oparty na całkowaniu przez części. Przypuśćmy, że $f(x)$ posiada pochodne pierwszych n rzędów i że te pochodne są ciągłe. Niech będzie

$$F_n(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

Mamy $$F_n'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x),$$

a więc $$F_n(a) = F_n(b) - \int_a^b F_n'(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx.$$

Kładąc $b = a+h$ oraz $x = a+th$, mamy

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \quad \ldots (1)$$

gdzie $$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+th) dt \quad \ldots\ldots (2)$$

Jeżeli p jest dowolną liczbą dodatnią całkowitą, nie większą od n, mamy na mocy twierdzenia (9), § 153

$$\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+th)dt = \int_0^1 (1-t)^{n-p}(1-t)^{p-1} f^{(n)}(a+th)dt$$

$$= (1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(a+\vartheta h) \int_0^1 (1-t)^{p-1} dt,$$

gdzie $0 < \vartheta < 1$. Tak więc

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(a+\vartheta h) h^n}{p(n-1)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Kładąc $p=n$, otrzymamy wzór Lagrange'a na resztę szeregu (§ 141). Jeżeli zaś położymy $p=1$, otrzymamy **wzór Cauchy'ego na resztę szeregu Taylora.**

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(a+\vartheta h) h^n}{(n-1)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)^{*})$$

156. Zastosowanie wzoru Cauchy'ego do szeregu dwumianowego. Jeżeli $f(x)=(1+x)^m$, gdzie m nie jest liczbą całkowitą dodatnią, wówczas wzór Cauchy'ego daje

$$R_n = \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{1.2. ... (n-1)} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1} x^n}{(1+\vartheta x)^{n-m}}.$$

Otóż przy $-1<x<1$ mamy $\dfrac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}<1$, a $(1+\vartheta x)^{m-1}$ jest mniejsze od stałej liczby K, gdyż przy $m>1$ mamy

$$(1+\vartheta x)^{m-1} < \{1+|x|\}^{m-1}$$

a przy $m<1$

$$(1+\vartheta x)^{m-1} < \{1-|x|\}^{m-1}$$

Tak więc

$$|R_n| < K|m| \left|\binom{m-1}{n-1}\right| |x^n| = \rho_n .$$

Ale $\rho_n \to 0$, gdy $n \to \infty$ (Przykł. XXX. 13), zatym $R_n \to 0$.

Wzór na dwumian został w ten sposób ustalony dla wszelkich wartości wykładnika m i dla wartości x, zawartych między -1 a 1. Przypominamy, że zapomocą wzoru Lagrange'a nie mogliśmy rozstrzygnąć sprawy w przypadku ujemnych wartości na x (Przykł. LIX.2).

157. Całki funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej. Mając daną funkcję zespoloną $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$, możemy określić jej całkę w granicach od a do b zapomocą równań

*) Te dwa wzory na resztę można również otrzymać zapomocą metody § 140.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \{\varphi(x) + i\psi(x)\}dx = \int_a^b \varphi(x)dx + i\int_a^b \psi(x)dx.$$

Rzecz jasna, że własności tych całek możemy wysnuć ze znanych nam własności całek funkcji rzeczywistych.

W dalszych rozdziałach będziemy się posługiwali własnością, którą wyrazić można zapomocą nierówności

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)^*)$$

Tę nierówność możemy z łatwością wysnuć z określeń §§ 149 i 151. Jeżeli δ_ν oznacza to samo, co w § 149, a φ_ν i ψ_ν są wartościami funkcji φ i ψ w jakimś punkcie przedziału δ_ν, i jeżeli $f_\nu = \varphi_\nu + i\psi_\nu$, wówczas mamy

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b \varphi\,dx + i\int_a^b \psi\,dx = \lim \Sigma\varphi_\nu\delta_\nu + i\lim\Sigma\psi_\nu\delta_\nu$$

$$= \lim\Sigma(\varphi_\nu + i\psi_\nu)\delta_\nu = \lim f_\nu\delta_\nu,$$

a więc $$\left|\int_a^b f\,dx\right| = |\lim\Sigma f_\nu\delta_\nu| = \lim|\Sigma f_\nu\delta_\nu|,$$

gdy tymczasem $$\int_a^b |f|\,dx = \lim\Sigma|f_\nu|\delta_\nu.$$

Żądane twierdzenie wynika odrazu z nierówności

$$|\Sigma f_\nu\delta_\nu| \leqq \Sigma|f_\nu|\delta_\nu.$$

Rzecz jasna, że wzory (1) i (2), § 155 pozostają słuszne, jeżeli $f(x)$ jest funkcją zespoloną $\varphi + i\psi$.

Zadania do rozdziału VII.

1. Sprawdzić wyrazy następujących rozwinięć na szereg Taylora:

$$(1) \qquad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

$$(2) \qquad \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \ldots$$

*) Dla całki rzeczywistej dowiedliśmy analogicznej nierówności w Przykł. LXVIII. 14.

$$(3)\qquad x\operatorname{cosec} x = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \dots$$

$$(4)\qquad x\operatorname{ctg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \dots$$

2. Jeżeli $f(x)$ i jej pochodne aż do $(n+2)$-go rzędu włącznie są ciągłe, jeżeli dalej $f^{(n+1)}(0) \neq 0$, a ϑ we wzorze Lagrange'a na R_n ma wartości ϑ_n; wówczas

$$\vartheta_n = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{2(n+1)^2(n+2)}\left\{\frac{f^{(n+2)}(0)}{f^{(n+1)}(0)} + \varepsilon_x\right\}x,$$

gdzie $\varepsilon_x \to 0$, gdy $x \to 0$. [Zastosować metodę Przykł. LVIII. 12.]

3. Sprawdzić wzór poprzedniego zadania na przykładzie funkcji $f(x) = 1/(1+x)$.

[Mamy $(1+\vartheta_n x)^{n+1} = 1+x$.]

4. Jeżeli $f(x)$ posiada pochodne trzech pierwszych rzędów, wówczas

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\{f'(a) + f'(b)\} - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\alpha),$$

gdzie $a < \alpha < b$. [Metodę analogiczną do § 140 zastosować do funkcji

$$f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\{f'(a) + f'(x)\} - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3 [f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\{f'(a) + f'(b)\}].$$

5. Dowieść, że przy tych samych założeniach mamy

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f'''(\alpha).$$

6. Jeżeli $f(x)$ posiada pochodne pięciu pierwszych rzędów, wówczas

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(v)}(\alpha).$$

7. Przy tych samych założeniach mamy

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\{f'(a) + f'(b)\} - \frac{(b-a)^2}{12}\{f''(b) - f''(a)\} + \frac{(b-a)^5}{720}f^{(v)}(\alpha).$$

8. Dowieść dwuch następujących wzorów:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\beta) \\ g(a) & g'(\beta) \end{vmatrix}$$

gdzie β zawiera się między a i b;

$$\text{(II)}\quad \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(b-c)(c-a)(a-b) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\beta) & f''(\gamma) \\ g(a) & g'(\beta) & g''(\gamma) \\ h(a) & h'(\beta) & h''(\gamma) \end{vmatrix}$$

gdzie β i γ zawierają się między największą a najmniejszą z liczb a, b, c.
[W celu dowiedzenia wzoru (II) weźmy pod uwagę funkcję

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{vmatrix} - \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix}$$

która równa się zeru przy $x=a$, $x=b$, $x=c$. Na mocy twierdzenia B, § 114 jej pierwsza pochodna musi równać się zeru przy dwuch różnych wartościach na x, zawartych między największą i najmniejszą z liczb a, b, c; wobec tego druga pochodna musi równać się zeru przy $x=\gamma$, czyniącym zadość wymienionym warunkom. Mamy tedy wzór

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f''(\gamma) \\ g(a) & g(b) & g''(\gamma) \\ h(a) & h(b) & h''(\gamma) \end{vmatrix} .$$

Czytelnik z łatwością dokończy dowód.]

9. Jeżeli pochodne pierwszych n rzędów funkcji $F(x)$ są ciągłe, a z nich pierwsze $n-1$ równają się zeru przy $x=0$, i jeżeli przy $0 \leqq x \leqq h$ mamy $A \leqq F^{(n)}(x) \leqq B$, wówczas

$$\text{przy } 0 \leqq x \leqq h \text{ mamy } A(x^n/n!) \leqq F(x) \leqq B(x^n/n!).$$

Zastosować to twierdzenie do funkcji

$$f(x) - f(0) - xf'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)$$

i na tej drodze dowieść twierdzenia Taylora.

10. Jeżeli $\Delta_h \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x+h)$, $\Delta^2_h \varphi(x) = \Delta_h \{\Delta_h \varphi(x)\}$, i t. d. i jeżeli istnieją pochodne pierwszych n rzędów funkcji $\varphi(x)$, wówczas

$$\Delta^n_h \varphi(n) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \varphi(x+rh) = (-h)^n \varphi^{(n)}(\xi),$$

gdzie ξ zawiera się między x i $x+nh$. Jeżeli $\varphi^{(n)}(x)$ jest funkcją ciągłą, wówczas $\dfrac{\Delta^n_h \varphi(x)}{h^n} \to (-1)^n \varphi^{(n)}(x)$, gdy $h \to 0$. [W Przykł. LVIII. 13 wzór ten został ustalony dla $n=2$.]

11. Na mocy poprzedniego zadania dowieść, że gdy m jest dowolną liczbą wymierną, a n jest całkowite dodatnie i gdy $x \to \infty$, mamy

$$x^{n-m} \Delta^n_h x^m \to m(m-1)\ldots(m-n+1)h^n .$$

W szczególności $x\sqrt{x}\,[\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}]\to -{}^1/_4$.

12. Niech pochodne pierwszych czterech rzędów funkcji $y=\varphi(x)$ będą ciągłe i niech $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, tak iż

$$y=\varphi(x)=x+a_2x^2+a_3x^3+(a_4+\varepsilon_x)x^4,$$

gdzie $\varepsilon_x\to 0$, gdy $x\to 0$. Dowieść, że

$$x=\psi(y)=y-a_2y^2+(2a_2^2-a_3)y^3-(5a_2^3-5a_2a_3+a_4+\varepsilon_y)y^4,$$

przy tej wartości x, która równa się zeru jednocześnie z y. Dowieść również, że

$$\frac{\varphi(x)\psi(x)-x^2}{x^4}\to a_2^2,$$

gdy $x\to 0$.

13. Spółrzędne (ξ, η) środka krzywizny krzywej $x=f(t)$, $y=F(t)$ czynią zadość równaniom

$$-(\xi-x)/y'=(\eta-y)/x'=(x'^2+y'^2)/(x'y''-x''y'),$$

a promień krzywizny równa się

$$(x'^2+y'^2)^{3/2}/(x'y''-x''y'),$$

gdzie kreski oznaczają różniczkowanie względem t.

14. Spółrzędne (ξ, η) środka krzywizny krzywej $27ay^2=4x^3$ czynią zadość związkom

$$3a(\xi+x)+2x^2=0,\quad \eta=4y+\frac{9ay}{x}.$$

15. Koło, ściśle styczne w punkcie (x, y) do krzywej, ma z nią styczność trzeciego rzędu, jeżeli $(1+y'^2)y'''=3y'y''^2$. Dowieść, że koło jest jedyną krzywą, mającą tę własność w każdym punkcie, i że w stożkowej końce osi są jedynemi punktami, mającemi tę własność. [Porównaj Zadanie 10(IV) w końcu rozdziału VI.]

16. Stożkowa $a^3y=a^4x^2+a^2bxy+(ac-b^2)y^2$ jest ściśle styczna w początku spółrzędnych do krzywej $y=ax^2+bx^3+cx^4+\ldots+kx^n$. Dowieść, że

$$18\eta_2^3T=9\eta_2^4(x-\xi)^2+6\eta_2^2\eta_3(x-\xi)T+(3\eta_2\eta_4-4\eta_3^2)T^2,$$

gdzie $T=(y-\eta)-\eta_1(x-\xi)$, jest równaniem stożkowej, ściśle stycznej do krzywej $y=f(x)$ w punkcie (ξ, η).

(*Mathem. Tripos.* 1907).

17. **Funkcje jednorodne.** *) Funkcja $u=f(x, y, z\ldots)$ nazywa się *funkcją jednorodną stopnia* n, jeżeli dla każdej liczby stałej λ mamy

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z\ldots)=\lambda^n f(x, y, z\ldots)$$

*) W tym i w następnych zadaniach zakładamy, że wszystkie pochodne, o których mowa, są ciągłe.

Dowieść, że w takim razie

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+\ldots=nu.$$

Jest to **twierdzenie Eulera** o funkcjach jednorodnych.

18. Jeżeli u jest funkcją jednorodną stopnia n, to pochodne cząstkowe $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y,\ldots$ są funkcjami jednorodnemi stopnia $n-1$.

19. Niech będzie dane równanie $f(x, y)=0$ i przypuśćmy, że po wprowadzeniu trzeciej zmiennej równanie to staje się jednorodne i przybiera kształt $F(x, y, z)=0$. Dowieść, że równanie stycznej, poprowadzonej przez punkt (ξ, η) krzywej $f(x, y)=0$, jest

$$xF_\xi+yF_\eta+zF_\zeta=0,$$

gdzie F_ξ, F_η, F_ξ oznaczają wartości pochodnych F_x, F_y, F_z, w których położono $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta=1$.

20. **Funkcje zależne i niezależne. Jakobiany czyli wyznaczniki funkcyjne.** Przypuśćmy, że u, v są funkcjami zmiennych x, y i że zachodzi między niemi związek

$$\varphi(u, v)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Różniczkując względem x i y, mamy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \ldots \quad (2)$$

a rugując pochodne funkcji φ, otrzymujemy

$$J=\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}=u_xv_y-u_yv_x=0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

gdzie u_x, $u_y\ldots$ oznaczają pochodne funkcji u i v względem x i y. Tak więc równanie (3) jest warunkiem *koniecznym* istnienia związku (1) między funkcjami. Można dowieść, że jest to również warunek *dostateczny*, ale nie możemy się nad tą kwestją zatrzymywać i odsyłamy czytelnika do Goursat *Cours d'Analyse*, t. I, str. 125.

Funkcje u, v nazywamy *zależnemi* lub *niezależnemi* zależnie od tego, czy zachodzi między niemi związek kształtu (1) czy nie zachodzi. J nazywają *Jakobianem* lub *wyznacznikiem funkcyjnym* i oznaczają go zapomocą symbolu

$$J=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

Tak samo dowodzimy, że jeśli trzy funkcje u, v, w zmiennych x, y, z są związane zależnością $\varphi(u, v, w)=0$, to

$$J=\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}=\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}=0.$$

21. Dowieść, że $ax^2+2hxy+by^2$ i $Ax^2+2Hxy+By^2$ są niezależne, jeżeli nie zachodzą równości $a/A=h/H=b/B$.

22. Dowieść, że $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ daje się przedstawić w postaci iloczynu dwuch linjowych funkcji zmiennych x, y, z wówczas i tylko wówczas, jeżeli

$$abc+2fgh-af^2-bg^2+ch^2=0.$$

[Piszemy warunek, by $px+qy+rz$ i $p'x+q'y+r'z$ były zależne od danej funkcji.]

23. Jeżeli u, v są funkcjami zmiennych ξ, η, które same są funkcjami zmiennych x, y, wówczas

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

Uogólnić na dowolną liczbę zmiennych.

24. Niech pochodna funkcji $f(x)$ równa się $1/x$ i niech $f(1)=0$. Dowieść, że jeśli $u=f(x)+f(y)$, $v=xy$, to $u_xv_y-u_yv_x=0$, zatym u i v są od siebie zależne. Kładąc $y=1$, dowieść, że ta zależność musi być kształtu $f(x)+f(y)=f(xy)$.

W taki sam sposób dowieść, że jeśli $f'(x)=1/(1+x^2)$ i jeżeli $f(0)=0$, to

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

25. Dowieść, że jeśli $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, to

$$f(x)+f(y)=f\left\{\frac{x\sqrt{1+y^4}+y\sqrt{1+x^4}}{1+x^2y^2}\right\}.$$

26. Jeżeli istnieje zależność pomiędzy funkcjami

$$u=f(x)+f(y)+f(z),\quad v=f(y)f(z)+f(z)f(x)+f(x)f(y),\quad w=f(x)f(y)f(z)$$

to f musi być stałą. [Warunek istnienia zależności wyraża się równaniem

$$f'(x)f'(y)f'(z)\{f(y)-f(z)\}\{f(z)-f(x)\}\{f(x)-f(y)\}=0.]$$

27. Jeżeli $f(y, z)$, $f(z, x)$, $f(x, y)$ związane są zależnością funkcjonalną, wówczas $f(x, x)$ jest niezależne od x.

(*Mathem. Tripos*, 1909.)

28. Jeżeli $u=0$, $v=0$, $w=0$ są równaniami jednorodnemi trzech kół, wówczas

$$\frac{\partial(u,\,v,\,w)}{\partial(x,\,y,\,z)}=0$$

jest równaniem czwartego koła, przecinającego pierwsze trzy pod kątem prostym.

(*Mathem. Tripos*, 1900).

29. Jeżeli A, B, C są trzema funkcjami zmiennej x i jeżeli wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix}$$

tożsamościowo równa się zeru, wówczas możemy znaleźć trzy stałe λ, μ, ν takie, by $\lambda A+\mu B+\nu C$ tożsamościowo równało się zeru, i odwrotnie. [Niech będzie $\alpha=BC'-B'C, \ldots$, $\alpha'=BC''-B''C, \ldots$ i t. d.; ponieważ wyznacznik równa się zeru, zatym $\beta\gamma'-\beta'\gamma=0$, a więc stosunki $\alpha:\beta:\gamma$ są stałe. Ale $\alpha A+\beta B+\gamma C=0$. Twierdzenie odwrotne jest niemal oczywiste.]

30. Między trzema zmiennemi x, y, z zachodzi związek, na mocy którego (I) z jest funkcją zmiennych x, y, mającą pochodne z_x, z_y; (II) x jest funkcją y i z, mającą pochodne x_y, x_z. Dowieść, że

$$x_y=-z_y/z_x, \quad x_z=1/z_x.$$

[Mamy $$dz=z_x dx+z_y dy, \quad dx=x_z dz+x_y dy,$$

skąd $$dz=(z_x x_y+z_y)dy+z_x x_z dz,$$

co jest możliwe tylko pod warunkiem, że $z_x x_y+z_y=0$, $z_x x_z=1$.]

31. Między zmiennemi x, y, z, u zachodzą dwa związki, zapomocą których możemy którekolwiek dwie zmienne wyrazić jako funkcje dwu drugich. Dowieść, że

$$y_z^u z_x^u x_y^u=-y_z^x z_x^y x_y^z=1, \quad x_z^u z_x^y+y_z^u z_y^x=1,$$

gdzie y_z^u oznacza pochodną zmiennej y, wyrażonej w postaci funkcji z i u, obliczoną względem zmiennej niezależnej z.

(*Mathem. Tripos*, 1897.)

32. Wyznaczyć A, B, C, λ w ten sposób, żeby przy $x=0$ równały się zeru pochodne czterech pierwszych rzędów funkcji

$$\int_a^{a+x} f(t)dt-x[Af(a)+Bf(a+\lambda x)+Cf(a+x)].$$

Wyznaczyć A, B, C, D, λ, μ tak, by przy $x=0$ równały się zeru pochodne pierwszych sześciu rzędów funkcji

$$\int_a^{a+x} f(t)dt-x[Af(a)+Bf(a+\lambda x)+Cf(a+\mu x)+Df(a+x)].$$

33. Jeżeli $a>0$, $ac-b^2>0$, $x_1>x_0$, to

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\left\{\frac{(x_1-x_0)\sqrt{ac-b^2}}{ax_1x_0+b(x_1+x_0)+c}\right\},$$

przyczym łuk zawiera się między 0 a π.*)

34. Obliczyć całkę $\int_{-1}^{1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. Przy jakich wartościach α całka ta jest funkcją nieciągłą argumentu α?

(*Mathem. Tripos*, 1904.)

[Całka równa się $\frac{\pi}{2}$, jeżeli $2n\pi<\alpha<(2n+1)\pi$, lub też równa się $-\frac{\pi}{2}$, jeżeli $(2n-1)\pi<\alpha<2n\pi$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Jeżeli α jest wielokrotnością liczby π, całka równa się zeru.]

35. Jeżeli przy $x_0\leqq x\leqq x_1$ mamy $ax^2+2bx+c>0$, i jeżeli

$$f(x)=\sqrt{ax^2+2bx+c},\ y=f(x),\ y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ X=\frac{x_1-x_0}{y_1+y_0},$$

to $\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{y}$ równa się $\frac{1}{\sqrt{a}}\lg\frac{1+X\sqrt{a}}{1-X\sqrt{a}}$

albo też $\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\{X\sqrt{-a}\}$,

zależnie od tego, czy a jest liczbą dodatnią czy ujemną. W tym drugim przypadku łuk zawiera się między 0 a $\frac{\pi}{2}$.

36. Dowieść, że $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{4}$.

37. Przy $a>1$ mamy $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}dx=\pi\{a-\sqrt{a^2-1}\}$.

38. Przy $p>1$ i $0<q<1$ mamy

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\{1+(p^2-1)x\}\{1-(1-q^2)x\}}}=\frac{2\omega}{(p+q)\sin\omega},$$

gdzie ω jest kątem ostrym dodatnim, którego dostawa $=(1+pq)/(p+q)$.

39. Przy $a>b>0$ mamy $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{a-b\cos\vartheta}=\frac{2\pi}{b^2}\{a-\sqrt{a^2-b^2}\}$.

(*Mathem. Tripos*. 1904.)

---

*) W związku z zadaniami 33—35 i 40 porów. artykuł pr. Bromwicha w t. XXXV czasopisma *Messenger of Mathematics*.

40. Przy $a > \sqrt{b^2+c^2}$ mamy

$$\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{a+b\cos\vartheta+c\sin\vartheta} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{c}\right\},$$

przyczym arctg zawiera się między 0 a π.

41. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą nieujemną, a $\int_a^b f(x)dx = 0$, wówczas $f(x)=0$ przy wszelkich wartościach x przedziału (a, b). [Gdyby było $f(\xi)=k$, gdzie $a<\xi<b$ i $k>0$, to istniałby przedział $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, w którym $f(x)>\frac{1}{2}k$, a więc wartość całki byłaby większa od δk.]

42. **Nierówność Schwarza w zastosowaniu do całek.** Dowieść, że

$$\left(\int_a^b \varphi\psi\, dx\right)^2 \leqq \int_a^b \varphi^2 dx \int_a^b \psi^2 dx.$$

[Oprzeć się na określeniach § 149 i 151 oraz na nierówności

$$(\Sigma\varphi_\nu\psi_\nu\delta_\nu)^2 \leqq \Sigma\varphi_\nu^2\delta_\nu \Sigma\psi_\nu^2\delta_\nu$$

(Zadanie 10 w końcu rozdziału I).]

43. Jeżeli $P_n(x) = \dfrac{1}{(\beta-\alpha)^n n!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \{(x-\alpha)(\beta-x)\}^n$, to $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia n, posiadającym tę własność, że

$$\int_\alpha^\beta P_n(x)\vartheta(x)dx = 0,$$

jeżeli $\vartheta(x)$ jest dowolnym wielomianem stopnia niższego od n.

[Zastosować $m+1$ razy całkowanie przez części, jeżeli $\vartheta(x)$ jest wielomianem stopnia m.]

44. Dowieść, że $\int_\alpha^\beta P_m(x)P_n(x)dx = 0$, jeżeli $m \neq n$, jeśli jednak $m=n$, to całka równa się $(\beta-\alpha)/(2n+1)$.

45. $Q_n(x)$ jest wielomianem stopnia n, mającym tę własność, że $\int_\alpha^\beta Q_n(x)\vartheta(x)dx = 0$, jeżeli $\vartheta(x)$ jest wielomianem stopnia niższego od n. Dowieść, że $Q_n(x)$ jest stałą wielokrotnością $P_n(x)$.

[Możemy dobrać $\varkappa$ tak, że $Q_n - \varkappa P_n$ jest wielomianem stopnia $n-1$; wtedy

$$\int_\alpha^\beta Q_n(Q_n - \varkappa P_n)dx = 0, \quad \int_\alpha^\beta P_n(Q_n - \varkappa P_n)dx = 0,$$

a więc $$\int_{\alpha}^{\beta}(Q_n-\varkappa P_n)^2dx=0.$$

Dalej stosujemy zadanie 41.]

46. **Wartości przybliżone całek określonych.** Zakładając, że $\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{2}\{\varphi(a)+\varphi(b)\}$, popełniamy błąd, mniejszy od $\frac{1}{12}M(b-a)^3$, gdzie M jest największą wartością funkcji $|\varphi''(x)|$ w przedziale (a, b). Gdybyśmy założyli, że całka równa się $(b-a)\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$, popełnilibyśmy błąd mniejszy od $\frac{1}{24}M(b-a)^3$.

[W zadan. 4 i 5 kładziemy $f'(x)=\varphi(x)$.]

Zakładając, że całka równa się

$$\tfrac{1}{6}(b-a)\left\{\varphi(a)+\varphi(b)+4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\},$$

popełniamy błąd, mniejszy od $\frac{1}{2880}M(b-a)^5$, gdzie M oznacza największą wartość funkcji $\varphi^{(4)}(x)$.

[Oprzeć się na zadaniu 6. Wzór ten, dający bardzo dobre przybliżenie, nosi nazwę **wzoru Simpsona.**]

Dowieść, że wartość, wyznaczona za pomocą wzoru Simpsona, przedstawia pole obszaru, ograniczonego przez proste $x=a$, $x=b$, $y=0$ i przez parabolę, przechodzącą przez trzy punkty krzywej $y=\varphi(x)$ o odciętych równych a, $\frac{a+b}{2}$, b, i mającą oś symetrji równoległą do OY.

Zauważmy, że jeśli $\varphi(x)$ jest wielomianem trzeciego stopnia, to $\varphi^{(4)}(x)=0$ i wzór Simpsona daje d o k ł a d n ą wartość całki. Innemi słowy: przez trzy punkty o odciętych a, $\frac{a+b}{2}$, b możemy poprowadzić nieskończenie wiele krzywych typu $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$, a wszystkie one ograniczają obszary o równych polach. Śród nich istnieje jedna krzywa, w której $\delta=0$; jest to parabola.

47. Jeżeli $\varphi(x)$ jest wielomianem piątego stopnia, to

$$\int_0^1 \varphi(x)dx=\tfrac{1}{18}\{5\varphi(\alpha)+8\varphi(\tfrac{1}{2})+5\varphi(\beta)\},$$

gdzie α i β są pierwiastkami równania $x^2-x+\frac{1}{10}=0$.

(*Mathem. Tripos*, 1909).

48. Zastosować wzór Simpsona do obliczenia π zapomocą wzoru $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$. [Otrzymujemy 0·7833... Dzieląc przedział całkowania na połowy (od 0 do $\frac{1}{2}$ i od $\frac{1}{2}$ do 1) i stosując wzór Simpsona do każdej połowy z osobna, otrzymamy 0·7853916... Poprawna wartość $=$0·7853981...]

49. Dowieść, że $$8{\cdot}9 < \int_3^5 \sqrt{4+x^2}\,dx < 9.$$

(*Mathem. Tripos*, 1903.)

50. Obliczyć z dokładnością do 0·01 całki

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \int_0^\pi \sqrt{\sin x}\,dx, \quad \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

[W ostatniej całce funkcja podcałkowa nie jest określona przy $x=0$, jeśli jednak umówimy się, że przypisywać jej wtedy będziemy wartość 1, wówczas funkcja ta będzie ciągła w całym przedziale całkowania.]

ROZDZIAŁ VIII.

O ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW NIESKOŃCZONYCH I CAŁEK NIESKOŃCZONYCH.

158. W rozdziale IV wyjaśniliśmy, co należy rozumieć przez *szeregi zbieżne, rozbieżne, wahające się.* Wykład nasz ilustrowaliśmy zapomocą szeregu gieometrycznego

$$1+x^2+x^3+\ldots$$

oraz innych szeregów, ściśle z nim związanych. W niniejszym rozdziale zbadamy tę kwestję w sposób bardziej systematyczny i dowiedziemy kilku twierdzeń, które dadzą nam możność rozpoznania zbieżności prostych szeregów, najczęściej spotykanych w Analizie.

Będziemy się często posługiwali symbolem

$$\sum_m^n \varphi(\nu)=u_m+u_{m+1}+\ldots+u_n,$$

a szereg $u_0+u_1+u_2+\ldots$ będziemy nieraz oznaczali zapomocą $\sum_0^\infty u_n$ lub po prostu Σu_n.

159. Szeregi o wyrazach dodatnich. Zagadnienie zbieżności jest dość proste, o ile mamy do czynienia z szeregami o wyrazach dodatnich. Od nich więc rozpoczniemy nasze badania, tym bardziej że zbieżność szeregów, zawierających wyrazy ujemne lub zespolone, daje się nieraz sprowadzić do badania zbieżności szeregów o wyrazach wyłącznie dodatnich.

Przy badaniu zbieżności szeregu mamy prawo odrzucić dowolną, byle skończoną liczbę jego wyrazów; jeśli więc szereg zawiera skończoną liczbę wyrazów ujemnych lub zespolonych, możemy je wszystkie odrzucić i stosować do pozostałych wyrazów twierdzenia, które zaraz ustalimy.

160. Zaczniemy od przypomnienia następujących podstawowych twierdzeń, dowiedzionych w § 70.

A. *Szereg o wyrazach dodatnich nie może wahać się, lecz musi być albo zbieżny, albo rozbieżny, a w tym drugim przypadku szereg dąży do* $+\infty$.

B. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu* Σu_n *jest istnienie takiej liczby* K, *by przy wszelkich wartościach na* n *zachodziła nierówność*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n < K.$$

C. **Porównywanie szeregów.** *Jeżeli szereg* Σu_n *jest zbieżny i jeżeli* $v_n \leqq u_n$ *przy wszelkich wartościach na* n, *wówczas szereg* Σv_n *jest zbieżny i* $\Sigma v_n \leqq \Sigma u_n$. *Albo ogólniej: jeżeli* $v_n \leqq K u_n$, *gdzie* K *jest liczbą stałą, wówczas* Σv_n *jest zbieżny i* $\Sigma v_n \leqq K \Sigma u_n$.

Jeżeli Σu_n *jest rozbieżny, a* $v_n \geqq K u_n$, *to* Σv_n *jest rozbieżny*).*

Jako ważny przypadek szczególny tego twierdzenia należy zanotować następujący:

D. *Jeżeli* Σu_n *jest szeregiem zbieżnym (rozbieżnym), a stosunek* u_n/v_n *dąży do granicy od zera różnej, gdy* $n \to \infty$, *wówczas* Σv_n *jest zbieżny (rozbieżny).*

161. Proste zastosowania powyższych cech zbieżności. Wiemy, że jeśli r oznacza liczbę dodatnią, wówczas Σr^n jest zbieżny przy $r < 1$, rozbieżny zaś przy $r \geqq 1$.**) Stosując twierdzenie C i kładąc $u_n = r^n$, otrzymujemy twierdzenie:

1. *Szereg* Σv_n *jest zbieżny, jeżeli przy wszystkich dostatecznie dużych wartościach na* n *mamy* $v_n \leqq K r^n$, *gdzie* $r < 1$.

Kładąc $K = 1$, możemy powyższą nierówność napisać w postaci $\sqrt[n]{v_n} \leqq r < 1$, która nosi nazwę **cechy zbieżności Cauchy'ego** dla szeregów o wyrazach dodatnich. Możemy ją sformułować tak:

---

*) W § 70 nie wspominaliśmy wprawdzie o ostatniej części tego twierdzenia, ale czytelnik sam z łatwością dowiedzie jej.

**) W niniejszym rozdziale będziemy stale oznaczali przez r liczby dodatnie lub zero.

2. *Szereg* Σv^n *jest zbieżny, jeżeli przy wszystkich dostatecznie dużych wartościach na* n *mamy* $\sqrt[n]{v_n} \leqq r < 1$.

Odpowiada jej następująca cecha rozbieżności:

2a. *Szereg* Σv_n *jest rozbieżny, jeżeli przy nieskończenie wielu wartościach na* n *zachodzi nierówność* $\sqrt[n]{v_n} \geqq 1$.

Ta cecha rozbieżności jest oczywista, gdyż z $\sqrt[n]{v_n} \geqq 1$ wynika $v_n \geqq 1$. Twierdzenia 2 i 2a mają szerokie zastosowanie, w wielu jednak wypadkach dogodniej bywa posługiwać się następującą, t. zw. **cechą d'Alemberta.**

3. *Szereg* Σv_n *jest zbieżny, jeżeli* $v_{n+1}/v_n \leqq r < 1$ *przy wszystkich, dostatecznie dużych wartościach na* n.

Istotnie, jeżeli przy wszelkim $n > n_0$ mamy $v_{n+1}/v_n \leqq r$, wówczas

$$v_n = \frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdot \frac{v_{n-2}}{v_{n-3}} \cdots \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \, v_{n_0} \leqq \frac{v_{n_0}}{r^{n_0}} r^n ,$$

skąd odrazu wynika zbieżność szeregu Σv_n, jeśli go porównamy z szeregiem Σr^n.

Przekonamy się później, że cecha d'Alemberta jest mniej ogólna od cechy Cauchy'ego, gdyż tę drugą możemy stosować we wszystkich wypadkach, w których daje się stosować cecha d'Alemberta, a prócz tego czasem i w takich wypadkach, gdy cecha d'Alemberta zawodzi. Tak samo cecha rozbieżności, zawarta w twierdzeniu 2a, jest ogólniejsza od odpowiedniej cechy d'Alemberta. Czytelnik dowiedzie z łatwością, że jeśli przy każdym $n > n_0$ mamy $v_{n+1}/v_n \geqq r \geqq 1$, to szereg Σv_n jest rozbieżny, przekonamy się jednak (Przykł. LXX.9), że nie wystarcza warunek, by nierówność powyższa zachodziła przy *nieskończenie wielu* wartościach na n, większych od n_0, gdy tymczasem twierdzenie 2a wymaga tylko, by nierówność $\sqrt[n]{v_n} \geqq r$ była sprawdzona przez nieskończenie wiele, nie zaś przez wszystkie wartości n większe od n_0. Niemniej jednak cecha d'Alemberta jest bardzo praktyczna i wystarcza do rozwiązania wielu zagadnień.

Często zdarza się, że v_{n+1}/v_n albo $\sqrt[n]{v_n}$ dążą do granicy, gdy $n \to \infty$. Jeżeli ta granica jest mniejsza od 1, warunki twierdzeń 2 i 3 są spełnione, a więc

4. *Jeżeli* $\sqrt[n]{v_n}$ *lub* v_{n+1}/v_n *dążą do granicy mniejszej od* 1, *gdy* $n \to \infty$, *wówczas szereg* Σv_n *jest zbieżny.*

Czytelnik dowiedzie sam, że gdy jedna lub druga z tych funkcji dąży do granicy większej od 1, szereg Σv_n jest rozbieżny.

Jeżeli jednak $\sqrt[n]{v_n}$ lub v_{n+1}/v_n dążą do 1, albo jeżeli funkcje te wahają się w ten sposób, że, pozostając mniejsze od 1, przybierają przy nieskończenie wielu n wartości dowolnie bliskie jedności, wówczas obie cechy Cauchy'ego i d'Alemberta zawodzą. Prócz tego cecha d'Alemberta zawodzi, gdy funkcja v_{n+1}/v_n waha się tak, że nieskończenie wiele razy przybiera wartości mniejsze i większe od 1. Wobec tego jest rzeczą jasną, że w wielu zagadnieniach może zachodzić potrzeba subtelniejszych cech zbieżności.

Przykłady LXX. 1. Zastosować cechy Cauchy'ego i d'Alemberta do szeregu $\Sigma n^k r^n$, gdzie k jest liczbą wymierną dodatnią.

[Mamy $v_{n+1}/v_n \to r$, zatym szereg jest zbieżny przy $r<1$ i rozbieżny przy $r>1$. Przy $r=1$ cecha ta zawodzi, ale wtedy szereg jest oczywiście rozbieżny. Ponieważ $\sqrt[n]{n}\to 1$ (Przykł. XXX. 11), zatym cecha Cauchy'ego prowadzi odrazu do tego samego wniosku.]

2. Zbadać szereg $\Sigma(An^k+Bn^{k-1}+\ldots+K)r^n$. [Możemy założyć, że $A>0$. Oznaczając przez $P(n)$ spółczynnik przy r^n, mamy $P(n)/n^k\to A$, a więc, na mocy twierdzenia D, § 160, szereg zachowuje się tak, jak $\Sigma n^k r^n$.]

3. Zbadać szereg $\Sigma \dfrac{An^k+Bn^{k-1}+\ldots+K}{\alpha n^l+\beta n^{l-1}+\ldots+\varkappa} r^n$ $\quad (A>0,\ \alpha>0)$.

[Zachowuje się on tak, jak $\Sigma n^{k-l} r^n$. W przypadku, gdy $r=1$ i $k<l$, dotychczasowe badania nie wystarczają.]

4. W zadaniu 17 na końcu rozdziału IV widzieliśmy, że szeregi

$$\Sigma \frac{1}{n(n+1)}, \quad \Sigma \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)}$$

są zbieżne. Dowieść, że cechy Cauchy'ego i d'Alemberta zawodzą tu.

5. Jeżeli p jest liczbą całkowitą, nie mniejszą od 2, wówczas szereg Σn^{-p} jest zbieżny. [Wynika to ze zbieżności szeregu, badanego w zadaniu 4, gdyż $\dfrac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{n^p}\to 1$. Dowiedliśmy już dawniej (§ 70), że szereg jest rozbieżny przy $p=1$. Przy $p\leqq 0$ rozbieżność jest oczywista.]

6. Szereg $\Sigma \dfrac{An^k+Bn^{k-1}+\ldots+K}{\alpha n^l+\beta n^{l-1}+\ldots+k}$ jest zbieżny przy $l>k+1$ i rozbieżny przy $l\leqq k+1$.

7. Jeżeli m_n jest liczbą całkowitą dodatnią i $m_{n+1}>m_n$, to szereg

Σr^{m_n} jest zbieżny przy $r<1$ i rozbieżny przy $r \geqq 1$. Np. szereg $1+r+r^4+r^9+\ldots$ jest zbieżny przy $r<1$ i rozbieżny przy $r \geqq 1$.

8. Wyznaczyć sumę szeregu $1+2r+2r^4+\ldots$ z dokładnością do 24-go znaku dziesiętnego przy $r=0{\cdot}1$ i do $0{\cdot}01$ przy $r=0{\cdot}9$. [Jeżeli $r=0{\cdot}1$, suma pięciu pierwszych wyrazów równa się $1{\cdot}2002000020000002$, a błąd

$$2r^{25}+2r^{36}+\ldots<2r^{25}+2r^{36}+2r^{47}+\ldots=2r^{25}/(1-r^{11})<3/10^{25}.$$

Jeżeli $r=0{\cdot}9$, suma pierwszych ośmiu wyrazów równa się $5{\cdot}458\ldots$, a błąd jest mniejszy niż $2r^{64}/(1-r^{17})<0{\cdot}003$.]

9. Jeżeli $0<a<b<1$, to szereg $a+b+a^2+b^2+a^3+\ldots$ jest zbieżny. Dowieść, że cechę Cauchy'ego można tu zastosować, ale cecha d'Alemberta zawodzi.

[Mamy $v_{2n+1}/v_{2n} \to \infty$, $v_{2n+2}/v_{2n+1} \to 0$.]

10. Szeregi $1+r+\dfrac{r^2}{2!}+\dfrac{r^3}{3!}+\ldots$ oraz $1+r+\dfrac{r^2}{2^2}+\dfrac{r^3}{3^3}+\ldots$ są zbieżne przy wszelkich dodatnich wartościach na r.

11. Jeżeli szereg Σu_n jest zbieżny, to Σu_n^2 oraz $\Sigma \dfrac{u_n}{1+u_n}$ są również zbieżne.

12. Jeżeli szereg Σu_n^2 jest zbieżny, to $\Sigma \dfrac{u_n}{n}$ jest również zbieżny.

[Mamy $2u_n/n \leqq u_n^2+(1/n^2)$.]

13. Dowieść, że $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots=\dfrac{3}{4}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots\right)$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=\frac{15}{16}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$$

[Mamy $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$$

na mocy twierdzeń (8) i (6), § 70.]

14. Zapomocą sprowadzenia do niedorzeczności dowieść, że $\Sigma(1/n)$ jest szeregiem rozbieżnym.

[Gdyby szereg był zbieżny, mielibyśmy

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$$

czyli $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots$$

co jest niemożliwe, gdyż każdy wyraz pierwszego szeregu jest mniejszy od odpowiedniego wyrazu drugiego szeregu.]

162. Zanim zbadamy inne cechy zbieżności szeregów, musimy dowieść bardzo ważnego twierdzenia, dotyczącego szeregów o wyrazach dodatnich.

Twierdzenie Dirichleta *). *Suma szeregu o wyrazach dodatnich nie ulega zmianie wskutek zmiany porządku wyrazów.*

Twierdzenie to powiada, że jeśli mamy szereg zbieżny $u_0+u_1+u_2+\dots$ i jeżeli, przestawiając w dowolny sposób jego wyrazy, utworzymy nowy szereg

$$v_0+v_1+v_2+\dots,$$

to nowy szereg będzie zbieżny i suma jego będzie się równała sumie poprzedniego szeregu.

Przedewszystkim zauważmy, że orzeczenie: „szereg Σv_n powstał z szeregu Σu_n przez przestawienie jego wyrazów" oznacza:

1) że między wyrazami tych szeregów istnieje odpowiedniość doskonała, t. j. każdemu wyrazowi u_i jednego szeregu odpowiada oznaczony wyraz v_k drugiego szeregu, i odwrotnie;

2) że odpowiadające sobie wyrazy obu szeregów są sobie równe, t. j. $u_i=v_k$.

Oznaczmy przez S sumę szeregu Σu_n. Do każdej liczby dodatniej ε możemy dobrać taki wskaźnik n, by suma s_n pierwszych n wyrazów szeregu Σu_n była większa od $S-\varepsilon$. Wobec odpowiedniości doskonałej między wyrazami obu szeregów, musi istnieć taki wskaźnik p, że suma σ_p pierwszych p wyrazów szeregu Σv_n jest nie mniejsza od s_n. Ale z drugiej strony, szereg Σv_n nie zawiera ani jednego wyrazu, któremu nie odpowiadałby równy mu wyraz szeregu Σu_n, zatym jakkolwiek wielki byłby wskaźnik r, suma σ_r nie może być większa od S.

Tak więc przy każdym $r\geqq p$

zachodzą nierówności $S\geqq\sigma_r>S-\varepsilon$,

co dowodzi, że szereg $v_0+v_1+v_2+\dots$ jest zbieżny i że suma jego równa się S.

---

*) Dirichlet pierwszy wypowiedział wyraźnie to twierdzenie w 1837 r., niewątpliwie jednak było ono znane dawniejszym matematykom, a szczególnie Cauchy'emu.

163. Mnożenie szeregów o wyrazach dodatnich. Z twierdzenia Dirichleta wynika następujący wniosek: *jeżeli* Σu_n *i* Σv_n *są dwoma szeregami zbieżnemi o wyrazach dodatnich i jeżeli* s *i* σ *są ich sumami, wówczas szereg*

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\dots$$

jest również zbieżny i suma jego równa się $s\sigma$.

Z wszystkich możliwych iloczynów kształtu u_kv_l utwórzmy tabliczkę

$$\begin{array}{ccccc}
u_0v_0 & u_1v_0 & u_2v_0 & u_3v_0 & \dots \\
u_0v_1 & u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 & \dots \\
u_0v_2 & u_1v_2 & u_2v_2 & u_3v_2 & \dots \\
u_0v_3 & u_1v_3 & u_2v_3 & u_3v_3 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Wyrazy, zawarte w tabliczce, możemy uporządkować w postaci nieskończonego szeregu, i to na rozmaite sposoby.

1) Możemy rozpocząć od wyrazu u_0v_0, w którym suma wskaźników $k+l=0$; następnie bierzemy wyrazy u_1v_0, u_0v_1, w których $k+l=1$, i t. d. Tą drogą powstaje szereg

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\dots$$

o którym mowa w naszym twierdzeniu.

2) Możemy rozpocząć również od wyrazu u_0v_0, biorąc następnie wyrazy u_0v_1, u_1v_1, u_1v_0, w których występuje wskaźnik 1, ale niema wyższych wskaźników. Dalej bierzemy wyrazy u_2v_0, u_2v_1, u_2v_2, u_1v_2, u_0v_2, zawierające wskaźnik 2 i nie zawierające wyższych wskaźników; i t. d. Sumy tych kolejnych grup wyrazów równają się odpowiednio

$$u_0v_0,\ (u_0+u_1)(v_0+v_1)-u_0v_0,$$

$$(u_0+u_1+u_2)(v_0+v_1+v_2)-(u_0+u_1)(v_0+v_1),$$

a suma pierwszych $n+1$ grup równa się

$$(u_0+u_1+\dots+u_n)(v_0+v_1+\dots+v_n)$$

i dąży do granicy σs, gdy $n\to\infty$.

Tak więc drugi szereg jest zbieżny i suma jego równa się σs; ale na mocy twierdzenia Dirichleta pierwszy szereg musi być również zbieżny i musi mieć tę samą sumę, twierdzenie tedy zostało dowiedzione.

Przykłady LXXI. 1. Jeżeli $r<1$, to

$$1+r^2+r+r^4+r^6+r^3+\ldots=1+r+r^3+r^2+r^5+r^7+\ldots=1/(1-r).$$

2. Jeżeli jeden z szeregów o wyrazach dodatnich Σu_n i Σv_n jest rozbieżny, wówczas rozbieżny musi być również szereg

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots$$

Wyjątek mamy tylko w tym trywialnym przypadku, gdy każdy wyraz jednego z danych szeregów równa się zeru.

3. Jeżeli r, s, t są sumami szeregów o wyrazach dodatnich Σu_n, Σv_n, Σw_n, to rst jest sumą szeregu $\Sigma\lambda_k$, gdzie $\lambda_k=u_nv_mw_p$, a sumowanie rozciąga się na wszystkie wyrazy o wskaźnikach, czyniących zadość równości $n+m+p=k$.

4. Jeżeli s, t są sumami szeregów Σu_n, Σv_n o wyrazach dodatnich, to st jest sumą szeregu Σw_n, gdzie $w_n=\Sigma u_l v_m$, a sumowanie rozciąga się na wszystkie wyrazy o wskaźnikach l, m takich, że $lm=n$.

164. Inne cechy zbieżności szeregów. Widzieliśmy, że cechy zbieżności, omówione w § 161, nie wystarczają do zbadania wielu prostych i ciekawych szeregów. Jeżeli np. $u_{n+1}/u_n\to 1$, gdy $n\to\infty$, wówczas cecha d'Alemberta naogół zawodzi. Np. w Przykł. LXX.5 musieliśmy uciec się do porównania z szeregiem, zbadanym w Przykł. LXX.4.

Przyczyna leży w tym, że szereg gieometryczny jest *szybkozbieżny*, wskutek czego oparte na nim cechy zbieżności nie są dość subtelne.

W Przykł. XXX.7 dowiedliśmy, że przy $r<1$ i dowolnym k mamy $n^kr^n\to 0$, gdy $n\to\infty$, a w Przykł. LX.1 dowiedliśmy, że szereg Σn^kr^n jest zbieżny. Wynika stąd, że ciąg r, r^2, r^3, ..., gdzie $r<1$, maleje prędzej niż ciąg 1^{-k}, 2^{-k}, 3^{-k}, ... Na pierwszy rzut oka wydaje się to paradoksem, jeżeli r jest nie wiele mniejsze od 1, a k jest dużą liczbą. Np. mając dane ciągi

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27},\ldots \quad \text{oraz } 1,\ \frac{1}{4096},\ \frac{1}{531441},\ldots$$

których wyrazy ogólne równają się odpowiednio $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ i n^{-12}, moglibyśmy sądzić, że drugi ciąg maleje o wiele prędzej od pierwszego. Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę dalsze wyrazy ciągu, przekonamy się, że tak nie jest. Mamy np.

$$(2/3)^4<1/5,\quad (2/3)^{12}<(1/5)^3<(1/10)^2,\quad (2/3)^{1000}<(1/10)^{166},$$

gdy tymczasem $$1000^{-12}=10^{-36}.$$

165. Ustalimy zaraz dwie nowe cechy zbieżności: **cechę Maclaurina-Cauchy'ego** oraz **cechę zagęszczenia** Cauchy'ego. Obie one nie są wprawdzie ogólne, ale do naszych celów w zupełności wystarczają.

Przy zastosowaniu tych dwu cech wprowadzamy pewne dodatkowe założenie. Mianowicie, zakładaliśmy dotąd, że mamy do czynienia z szeregiem o wyrazach dodatnich, teraz zaś przypuszczamy prócz tego, że wyrazy szeregu maleją, czyli że *przy każdym* $n > n_0$ *mamy* $u_{n+1} \leqq u_n$.

Z pewnego punktu widzenia możnaby twierdzić, że nie jest to założenie istotnie nowe, gdyż na mocy twierdzenia Dirichleta mamy prawo w dowolny sposób przestawiać wyrazy szeregu o wyrazach dodatnich, a więc możemy z danego szeregu zbudować nowy szereg o wyrazach dodatnich malejących, co nie może wpłynąć na jego zbieżność.

Zanim jednak ustalimy te dwie cechy, musimy dowieść bardziej elementarnego twierdzenia, zwanego twierdzeniem Abela*). Jest ono jednostronne, gdyż daje tylko *warunek dostateczny rozbieżności szeregu.*

166. Twierdzenie Abela. *Jeżeli* Σu_n *jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich malejących, to* $nu_n \to 0$, *gdy* $n \to \infty$.

Przypuśćmy, że nu_n nie dąży do zera. W takim razie możemy znaleźć liczbę dodatnią δ taką, że $nu_n \geqq \delta$ przy nieskończenie wielu wartościach na n. Niech n_1 będzie pierwszą z tych wartości, n_2 inną wartością, i t. d., a prócz tego niech będą spełnione warunki

$$n_2 > 2n_1 , \quad n_3 > 2n_2 , \dots$$

Wobec tego mamy $\quad n_2 - n_1 > \frac{n_2}{2}, \; n_3 - n_2 > \frac{n_3}{2}, \dots$

oraz $$n_1 u_{n_1} \geqq \delta , \quad n_2 u_{n_2} \geqq \delta , \dots$$

Ponieważ jednak u_n stale maleje, gdy n rośnie, zatym

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n_1-1} \geqq n_1 u_{n_1} \geqq \delta,$$

$$u_{n_1} + \dots + u_{n_2-1} \geqq (n_2 - n_1) u_{n_2} > \frac{n_2 u_{n_2}}{2} \geqq \frac{\delta}{2},$$

---

*) Zostało ono odkryte przez Abela, lecz później zapomniano o nim; powtórnie odkrył je Pringsheim.

$$u_{n_2}+\ldots+u_{n_3-1} \geqq (n_3-n_2)u_{n_3} > \frac{n_3 u_{n_3}}{2} \geqq \frac{\delta}{2},$$

. . . .

Widzimy, że wyrazy szeregu Σu_n dadzą się zgrupować w ten sposób, że suma wyrazów każdej grupy będzie większa od odpowiedniego wyrazu szeregu rozbieżnego

$$\delta+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\ldots$$

a więc szereg Σu_n jest rozbieżny.

Przykłady LXXII. 1. Na mocy twierdzenia Abela dowieść rozbieżności szeregów $\Sigma(1/n)$ i $\Sigma\{1/(an+b)\}$.

2. Twierdzenie Abela przestaje być słuszne, jeżeli odrzucimy warunek, że wyrazy szeregu stale maleją. [Szereg

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10^2}+\ldots$$

(w którym $u_n=1/n$, jeżeli n jest kwadratem zupełnym, i $u_n=1/n^2$, jeżeli n nie jest kwadratem) jest zbieżny. Istotnie, możemy go napisać w postaci

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right),$$

a każdy z tych dwuch szeregów jest zbieżny. Ponieważ jednak $nu_n=1$, o ile tylko n jest kwadratem zupełnym, zatym nu_n nie dąży do zera.]

3. *Twierdzenie odwrotne względem twierdzenia Abela nie jest prawdziwe*, t.j. z warunków, że u_n stale maleje, a $nu_n \to 0$, nie wynika zbieżność szeregu Σu_n.

[Weźmy pod uwagę szereg $\Sigma(1/n)$ i pomnóżmy pierwszy wyraz przez 1, drugi przez $^1/_2$, następne dwa przez $^1/_3$, następne cztery przez $^1/_4$, następne ośm przez $^1/_5$, i t. d. Otrzymamy szereg

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

który jest rozbieżny, gdyż jego wyrazy są większe od odpowiednich wyrazów szeregu rozbieżnego

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\ldots$$

Łatwo widzieć jednak, że w szeregu

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\ldots$$

mamy $nu_n \to 0$, gdyż $nu_n=1/\nu$ przy $2^{\nu-2}<n \leqq 2^{\nu-1}$, a $\nu\to\infty$, gdy $n\to\infty$.]

167. Cecha zbieżności Maclaurina i Cauchy'ego.*) Jeżeli u_n stale maleje, gdy n rośnie, możemy napisać $u_n=\varphi(n)$ i założyć, że $\varphi(n)$ jest wartością, którą przybiera przy $x=n$ funkcja malejąca $\varphi(x)$ zmiennej ciągłej. W takim razie, oznaczając przez ν dowolną liczbę dodatnią całkowitą, mamy

$$\varphi(\nu-1)\geq\varphi(x)\geq\varphi(\nu),$$

jeżeli tylko $$\nu-1\leq x\leq\nu.$$

Niech będzie

$$v_\nu=\varphi(\nu-1)-\int_{\nu-1}^{\nu}\varphi(x)dx=\int_{\nu-1}^{\nu}\{\varphi(\nu-1)-\varphi(x)\}dx,$$

tak iż $$0\leq v_\nu\leq\varphi(\nu-1)-\varphi(\nu).$$

Szereg Σv_n składa się z wyrazów dodatnich i mamy

$$v_2+v_3+\ldots+v_n\leq\varphi(1)-\varphi(n)\leq\varphi(1),$$

wobec czego szereg Σv_n jest zbieżny, a suma $n-1$ kolejnych wyrazów

$$v_2+v_3+\ldots+v_n=\sum_1^{n-1}\varphi(\nu)-\int_1^n\varphi(x)dx$$

dąży do granicy dodatniej, gdy $n\to\infty$.

Połóżmy $$\Phi(\xi)=\int_1^\xi\varphi(x)dx,$$

tak iż $\Phi(\xi)$ jest ciągłą i stale rosnącą funkcją zmiennej ξ.

W takim razie, gdy $n\to\infty$,

$$u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}-\Phi(n)$$

ma za granicę liczbę dodatnią nie większą od $\varphi(1)$, i co za tym idzie, szereg Σu_n jest zbieżny albo rozbieżny zależnie od tego, czy $\Phi(n)$ dąży do granicy, czy też rośnie nieograniczenie, gdy $n\to\infty$. Ponieważ zaś $\Phi(n)$ rośnie stale, zatym zbieżność szeregu Σu_n zależy od tego, czy $\Phi(\xi)$ dąży do granicy, gdy $\xi\to\infty$. Mamy tedy następujące twierdzenie:

jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją zmiennej x, ciągłą i dodatnią przy

*) Twierdzenie to odkrył pierwszy Maclaurin; powtórnie zostało ono znalezione przez Cauchy'ego.

wszelkich wartościach na x większych od 1, i jeżeli $\varphi(x)$ stale maleje, gdy x rośnie, wówczas szereg

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots$$

jest zbieżny lub rozbieżny zależnie od tego, czy

$$\Phi(\xi)=\int_1^\xi \varphi(x)dx$$

dąży do granicy l, czy też rośnie nieograniczenie, gdy $\xi\to\infty$. W pierwszym przypadku suma szeregu nie jest większa od $\varphi(1)+l$.

Właściwie suma musi być mniejsza od $\varphi(1)+l$, gdyż ze wzoru (6), § 153 oraz z Zadania 41 w końcu rozdziału VII wynika, iż $v_\nu<\varphi(\nu-1)-\varphi(\nu)$, o ile tylko nie zachodzi równość $\varphi(x)=\varphi(\nu)$ w całym przedziale $(\nu-1, \nu)$, co nie może mieść miejsca dla wszystkich wartości na ν.

Przykłady LXXIII. 1. Dowieść, że $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

2. Dowieść, że $-\frac{\pi}{2}<\sum\limits_1^\infty \frac{a}{a^2+n^2}<\frac{\pi}{2}$.

(*Mathem. Tripos*, 1909.)

3. Dowieść, że przy $m>0$ mamy

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\ldots<\frac{m+1}{m}.$$

168. Szereg Σn^{-s}. Do najważniejszych zastosowań twierdzenia Maclaurina należy ustalenie warunków zbieżności szeregu

$$1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\ldots+n^{-s}+\ldots,$$

gdzie s jest dowolną liczbą wymierną.

Widzieliśmy już, że szereg jest rozbieżny przy $s=1$. Przy $s\leqq 0$ rozbieżność jest oczywista. Przy $s>0$ wyraz u_n maleje, gdy n rośnie, możemy tedy zastosować cechę Maclaurina. Mamy

$$\Phi(\xi)=\int_1^\xi \frac{dx}{x^s}=\frac{\xi^{1-s}-1}{1-s},$$

o ile tylko $s\neq 1$. Jeżeli $s>1$, to $\xi^{1-s}\to 0$, gdy $\xi\to\infty$, a

$$\Phi(\xi)\to\frac{1}{s-1}.$$

Jeżeli $s<1$, wówczas $\xi^{1-s}\to\infty$, gdy $\xi\to\infty$, a więc i $\Phi(\xi)\to\infty$. Tak więc *szereg Σn^{-s} jest zbieżny przy wszelkim wymiernym $s>1$*

i rozbieżny przy $s \leqq 1$. *W pierwszym przypadku suma szeregu jest mniejsza od* $\dfrac{s}{s-1}$.

Rozbieżność szeregu przy $s<1$ można było ustalić przez porównanie z szeregiem $\Sigma(1/n)$ Możemy zresztą i do tego szeregu zastosować twierdzenie Maclaurina, a to w następujący sposób. Mamy

$$\Phi(\xi)=\int_1^{\xi}\frac{dx}{x};$$

z łatwością możemy przekonać się, że $\Phi(\xi)\to\infty$, gdy $\xi\to\infty$, gdyż przy $\xi>2^n$ mamy

$$\Phi(\xi)>\int_1^{2^n}\frac{dx}{x}=\int_1^{2}\frac{dx}{x}+\int_2^{4}\frac{dx}{x}+\dots+\int_{2^{n-1}}^{2^n}\frac{dx}{x},$$

a kładąc $x=2^r u$, mamy

$$\int_{2^r}^{2^{r+1}}\frac{dx}{x}=\int_1^{2}\frac{du}{u},$$

zatym $\Phi(\xi)>n\displaystyle\int_1^2\frac{du}{u}$, czyli $\Phi(\xi)\to\infty$, gdy $\xi\to\infty$.

Przykłady LXXIV. 1. Za pomocą takiego samego rozumowania, jak wyżej, a więc nie obliczając faktycznie całki, dowieść, że $\Phi(\xi)=\displaystyle\int_1^{\xi}\frac{dx}{x^s}$, gdzie $s<1$, dąży do nieskończoności wraz z ξ.

2. Szeregi Σn^{-2}, $\Sigma n^{-3/2}$, $\Sigma n^{-11/10}$ są zbieżne i ich sumy są odpowiednio nie większe od 2, 3, 11. Szeregi $\Sigma n^{-1/2}$, $\Sigma n^{-99/100}$ są rozbieżne.

3. Szereg $\Sigma\dfrac{n^s}{n^t+a}$, gdzie $a>0$, jest zbieżny lub rozbieżny zależnie od tego, czy $t>1+s$, czy też $t\leqq 1+s$. [Porównać z szeregiem Σn^{s-t}.]

4. Zbadać zbieżność lub rozbieżność szeregu

$$\Sigma\frac{a_1n^{s_1}+a_2n^{s_2}+\dots+a_kn^{s_k}}{b_1n^{t_1}+b_2n^{t_2}+\dots+b_mn^{t_m}},$$

w którym wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie, a s i t oznaczają liczby wymierne malejące.

5. Dowieść, że

$$2\sqrt{n}-2<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$$

$$\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\dots<\frac{\pi+1}{2}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1911.)

6. Jeżeli $\varphi(n)\to l>1$, to szereg $\Sigma n^{-\varphi(n)}$ jest zbieżny, jeżeli zaś $\varphi(n)\to l<1$, wówczas szereg jest rozbieżny.

169. Cecha zagęszczenia. *Jeżeli $u_n=\varphi(n)$ jest funkcją malejącą zmiennej całkowitej dodatniej n, wówczas szereg $\Sigma\varphi(n)$ jest zbieżny lub rozbieżny zależnie od tego, czy szereg $\Sigma 2^n\varphi(2^n)$ jest zbieżny czy rozbieżny.*

Dowód możemy przeprowadzić w sposób analogiczny do tego, którym posługiwaliśmy się w § 70 przy badaniu szeregu $\Sigma(1/n)$. Przedewszystkim mamy

$$\varphi(3)+\varphi(4)\geq 2\varphi(4)$$

$$\varphi(5)+\varphi(6)+\ldots+\varphi(8)\geq 4\varphi(8)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(2^n+1)+\varphi(2^n+2)+\ldots+\varphi(2^{n+1})\geq 2^n\varphi(2^{n+1}).$$

Jeżeli szereg $\Sigma 2^n\varphi(2^n)$ jest rozbieżny, to zarówno $\Sigma 2^{n+1}\varphi(2^{n+1})$, jak $\Sigma 2^n\varphi(2^{n+1})$ są rozbieżne, a powyższe nierówności wskazują, że wówczas i szereg $\Sigma\varphi(n)$ jest rozbieżny.

Z drugiej strony mamy

$$\varphi(2)+\varphi(3)\leq 2\varphi(2)$$

$$\varphi(4)+\varphi(5)+\ldots+\varphi(7)\leq 4\varphi(4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Z tych nierówności wynika, że szereg $\Sigma\varphi(n)$ jest zbieżny, jeżeli $\Sigma 2^n\varphi(2^n)$ jest zbieżny. Tak więc twierdzenie zostało dowiedzione.

Na mocy tego twierdzenia równie łatwo jest ustalić warunki zbieżności szeregu Σn^{-s}, jak za pomocą twierdzenia Maclaurina. Istotnie, Σn^{-s} jest zbieżny (lub rozbieżny), jeżeli $\Sigma\, 2^n . 2^{-ns}$ jest zbieżny (lub rozbieżny), czyli gdy $s>1$ (lub $s\leq 1$).

Przykłady LXXV. 1. Jeżeli liczba całkowita a jest większa od 1, to $\Sigma\varphi(n)$ jest zbieżny lub rozbieżny, zależnie od tego, czy $\Sigma a^n\varphi(a^n)$ jest zbieżny lub rozbieżny.

2. Jeżeli $\Sigma\, 2^n\varphi(2^n)$ jest zbieżny, to $2^n\varphi(2^n)\to 0$. Stąd wysnuć twierdzenie Abela (§ 167).

170. Całki nieskończone. Przypuśćmy, że $\varphi(x)$ jest funkcją całkowitą malejącą zmiennej x; z twierdzenia Maclaurina wiemy, że szereg $\Sigma\varphi(n)$ jest zbieżny lub rozbieżny zależnie od tego, czy całka tej funkcji dąży czy nie dąży do granicy, gdy

$x \to \infty$. Przypuśćmy, że całka ta dąży do granicy l; w takim razie mamy

$$\lim_{x \to \infty} \int_1^x \varphi(t)\, dt = l\,.$$

W takim razie powiemy, że całka $\int_1^{\infty} \varphi(t)dt$ jest **zbieżna** i że l jest jej wartością. Symbol takiego kształtu możemy nazwać **całką nieskończoną.**

To pojęcie całki nieskończonej wogóle, a w szczególności całki nieskończonej zbieżnej możemy uogólnić, wypowiadając następujące

Określenie. *Jeżeli przy $t \geqq a$ funkcja $\varphi(t)$ jest ciągła i jeżeli*

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x \varphi(t)dt = l\,,$$

wówczas powiadamy, że całka nieskończona

$$\int_a^{\infty} \varphi(t)dt\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

jest zbieżna i że l jest wartością tej całki.

Jeżeli

$$\int_a^x \varphi(t)\, dt \to \infty,$$

nazwiemy konsekwentnie tę całkę *rozbieżną* i powiemy, że dąży ona do $+\infty$. Analogicznie określamy całkę rozbieżną, dążącą do $-\infty$. Wreszcie, jeżeli nie zachodzi żaden z tych trzech przypadków, gdy x dąży do ∞, powiadamy, że *całka wykonywa wahania skończone lub nieskończone.*

Nasuwają się tu następujące uwagi:

(1) Jeżeli

$$\int_a^x \varphi(t)dt = \Phi(x),$$

wówczas powiadamy, że przy $x \to \infty$ całka jest zbieżna, rozbieżna lub wahająca się zależnie od tego, czy $\Phi(x)$ dąży do granicy, do $+\infty$ lub $-\infty$, czy też waha się, gdy $x \to \infty$. Jeżeli $\Phi(x)$ dąży do granicy, którą oznaczymy przez $\Phi(\infty)$, powiadamy, że $\Phi(\infty)$ jest wartością całki. Ogólniej, jeżeli $\Phi(x)$ jest funkcją całkową funkcji $\varphi(x)$, wówczas wartością naszej całki nazywamy różnicę $\Phi(\infty) - \Phi(a)$.

(II) W przypadku szczególnym, gdy $\varphi(t)$ jest dodatnie, $\Phi(x)$ jest funkcją rosnącą, a więc całka może być tylko albo zbieżna, albo rozbieżna.

(III) Całka (1) jest zależna od dolnej granicy całkowania a, lecz jest niezależna od t i nie zmieni się, jeśli zastąpimy t przez jakąkolwiek inną literę (porów. § 151).

(IV) Różnica między całką skończoną a nieskończoną jest analogiczna do różnicy między szeregiem skończonym a nieskończonym.

(V) W §§ 149—151 określiliśmy całkę $\int_a^x \varphi(t)dt$ jako granicę pewnej skończonej sumy. Całka nieskończona jest tedy niejako *granicą granic.* Z tego widzimy, że pojęcie całki nieskończonej jest bardziej złożone od pojęcia całki skończonej.

(VI) Cechę zbieżności Maclaurina możemy wysłowić w taki sposób: *jeżeli $\varphi(x)$ przybiera wartości dodatnie malejące, gdy x rośnie, wówczas szereg nieskończony $\Sigma\varphi(n)$ i całka nieskończona $\int_1^\infty \varphi(x)dx$ są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.*

(VII) Czytelnik z łatwością dowiedzie twierdzeń o całkach nieskończonych, analogicznych do twierdzeń (1)—(6), § 70. Np. twierdzenie analogiczne do wzoru (2) brzmi: *jeżeli całka $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ jest zbieżna i jeżeli $b>a$, wówczas $\int_b^\infty \varphi(x)dx$ jest zbieżna i*

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_b^\infty \varphi(x)\,dx\,.$$

171. Przypadek, gdy $\varphi(x)$ jest dodatnie. Możemy zadać sobie pytanie, czy dla całek nieskończonych istnieją twierdzenia, podobne do twierdzeń A — D, § 160. Widzieliśmy już (§ 170), że twierdzenie A jest słuszne, zarówno w zastosowaniu do szeregów, jak i w zastosowaniu do całek. Twierdzeniu B odpowiada następujące: *warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności całki* (1) *jest istnienie takiej stałej K, żeby przy wszelkich wartościach na x większych od a zachodziła nierówność*

$$\int_a^x \varphi(t)dt < K.$$

Twierdzeniu C odpowiada następujące: *jeżeli całka* $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ *jest zbieżna i jeżeli* $\psi(x) \leqq K\varphi(x)$ *przy wszelkich wartościach na* x *większych od* a, *wówczas całka* $\int_a^\infty \psi(x)\,dx$ *jest też zbieżna i*

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx \leqq K \int_a^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Czytelnik sam sformułuje odpowiednią cechę rozbieżności.

Cecha zbieżności d'Alemberta, jako oparta na pojęciu kolejnych wyrazów, nie da się, oczywiście, zastosować do całek, natomiast można znaleźć twierdzenie, analogiczne do cechy Cauchy'ego, ale twierdzenie to nie ma praktycznej wartości, a przytym wymaga głębszego rozważenia funkcji $\varphi(x) = r^x$, którą zbadamy dopiero w rozdziale IX. Najpraktyczniejsze cechy zbieżności całek otrzymujemy zapomocą porównania z całką

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} \qquad (a > 0)$$

nad której zbieżnością lub rozbieżnością zastanawialiśmy się w § 168. Cechy te dadzą się tak sformułować:

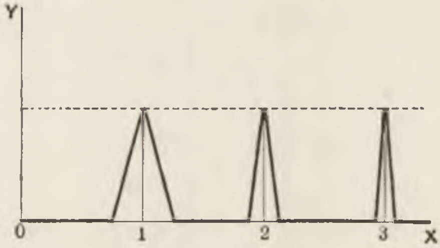
jeżeli przy każdym $x \geqq a$ *zachodzi nierówność* $\varphi(x) < Kx^{-s}$, *w której* $s > 1$, *wówczas całka* $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ *jest zbieżna, jeżeli zaś przy każdym* $x \geqq a$ *mamy* $\varphi(x) > Kx^{-s}$, *gdzie* $s \leqq 1$, *to całka jest rozbieżna.*

W szczególności, jeżeli $\lim x^s\varphi(x) = l$, *gdzie* $l > 0$, *wówczas całka jest zbieżna lub rozbieżna zależnie od tego, czy* $s > 1$, *czy też* $s \leqq 1$.

Szeregi nieskończone zbieżne posiadają pewną zasadniczą własność, której nie odpowiada żadna analogiczna własność całek. Jeżeli szereg $\Sigma\varphi(n)$ jest zbieżny, to $\varphi(n) \to 0$, natomiast jeżeli całka $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ jest zbieżna, to stąd bynajmniej nie wynika, że $\varphi(x) \to 0$.

Weźmy np. pod uwagę funkcję $\varphi(x)$, której wykres oznaczony jest grubszą linją na rys. 58. Wszystkie wzniesienia, odpowiadające odciętym 1, 2, 3,... mają wysokość $=1$, szerokość zaś wzniesienia, odpowiadającego odciętej $x=n$, równa się $2/(n+1)^2$. Pole wzniesienia równa się $1/(n+1)^2$, a dla każdej wartości na ξ mamy

$$\int_0^\xi \varphi(x)\,dx < \sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)^2},$$



Rys. 58.

tak iż całka $\int_0^\infty \varphi(x)dx$ jest zbieżna, pomimo że $\varphi(x)$ nie dąży wcale do zera.

Przykłady LXXVI. 1. Całka

$$\int_a^\infty \frac{\alpha x^r+\beta x^{r-1}+\ldots+\lambda}{Ax^s+Bx^{s-1}+\ldots+L}\,dx,$$

w której a i A są liczbami dodatniemi, a zaś jest większe od największego pierwiastka mianownika, jest zbieżna przy $s>r+1$, w przeciwnym zaś razie jest rozbieżna.

2. Która z całek

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x},\quad \int_a^\infty \frac{dx}{x^{4/3}},\quad \int_a^\infty \frac{dx}{c^2+x^2},\quad \int_a^\infty \frac{x\,dx}{c^2+x^2},\quad \int_a^\infty \frac{x^2dx}{c^2+x^2},\quad \int_a^\infty \frac{x^2dx}{\alpha+2\beta x^2+\gamma x^4}$$

jest zbieżna? W dwuch pierwszych całkach zakładamy, że $a>0$, w ostatniej zaś zakładamy, że a jest większe od największego pierwiastka mianownika (o ile mianownik ma pierwiastki).

3. Całki

$$\int_a^\xi \cos x\,dx,\quad \int_a^\xi \sin x\,dx,\quad \int_a^\xi \cos(\alpha x+\beta)dx$$

wykonywuje wahania skończone, gdy $\xi\to\infty$.

4. Całki

$$\int_a^\xi x\cos x\,dx,\quad \int_a^\xi x^2\sin x\,dx,\quad \int_a^\xi x^n\cos(\alpha x+\beta)dx$$

wykonywują wahania nieskończone, gdy $\xi \to \infty$. (W trzeciej całce n jest liczbą całkowitą dodatnią).

5. **Całki o dolnej granicy** $-\infty$. Jeżeli $\int_{\xi}^{a} \varphi(x)\,dx$ dąży do granicy l, gdy $\xi \to -\infty$, wtedy powiadamy, że całka $\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dx$ jest zbieżna i że jej wartość $=l$. Czytelnik sformułuje własności tych całek, analogiczne do poznanych już własności całek nieskończonych.

6. **Całki od** $-\infty$ **do** $+\infty$. Jeżeli całki

$$\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dx, \quad \int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

są obie zbieżne i równają się odpowiednio k i l, wówczas powiadamy, że całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

jest zbieżna i że jej wartość równa się $k+l$.

7. Dowieść, że

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

8. Dowieść, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x^2)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \varphi(x^2)\,dx,$$

o ile tylko całka $\int_{0}^{\infty} \varphi(x^2)\,dx$ jest zbieżna.

9. Jeżeli całka $\int_{0}^{\infty} x\varphi(x^2)\,dx$ jest zbieżna, to $\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x^2)\,dx = 0$.

10. **Odpowiednik twierdzenia Abela** (§ 166). *Jeżeli* $\varphi(x)$ *jest dodatnie i stale maleje, a całka* $\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx$ *jest zbieżna, wówczas* $x\varphi(x) \to 0$. Dowieść tego w dwojaki sposób: (I) na mocy twierdzeń Abela i Maclaurina; (II) zapomocą metody analogicznej do użytej w § 166.

11. Jeżeli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, jeżeli dalej $x_n \to \infty$, a $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x)\,dx$, wówczas ze zbieżności całki $\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx$ wynika zbieżność szeregu Σu_n.

Twierdzenie odwrotne jest słuszne, jeżeli $\varphi(x)$ ma stale wartość dodatnią. [Że w przypadku ogólnym twierdzenie odwrotne nie jest słuszne, można się przekonać na przykładzie funkcji $\varphi(x)=\cos x$, $x_n=n\pi$.]

172. Reguły podstawienia i całkowania przez części w zastosowaniu do całek nieskończonych. Badania, przeprowadzone w § 154, dadzą się uogólnić na całki nieskończone.

(1) **Przekształcenie przez podstawienie.** Przypuśćmy, że całka

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

jest zbieżna i że przy wszelkim $\xi > a$ mamy, jak w § 154,

$$\int_a^\xi \varphi(x)dx = \int_b^\tau \varphi\{f(t)\}f'(t)dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gdzie $a=f(b)$, $\xi=f(\tau)$. Przypuśćmy dalej, że związek funkcyjny $x=f(t)$ jest tego rodzaju, że $x\to\infty$, gdy $t\to\infty$. Jeżeli w równaniu (2) zmienna τ, a więc i ξ dąży do ∞, wówczas całka

$$\int_b^\infty \varphi\{f(t)\}f'(t)dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

jest zbieżna i równa się całce (1).

Z drugiej strony może się zdarzyć, że $\xi\to\infty$, gdy $\tau\to-\infty$ lub gdy $\tau\to c$. W pierwszym przypadku mamy

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx = \lim_{\tau\to-\infty} \int_b^\tau \varphi\{f(t)\}f'(t)\,dt$$

$$= -\lim_{\tau\to-\infty} \int_\tau^b \varphi\{f(t)\}f'(t)dt = -\int_{-\infty}^b \varphi\{f(t)\}f'(t)dt.$$

W drugim przypadku mamy

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx = \lim_{\tau\to c} \int_b^\tau \varphi\{f(t)\}f'(t)dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Do tego równania powrócimy w § 174.

Analogiczne wzory można ustalić dla całek

$$\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx;$$

czytelnik uczyni to sam.

Przykłady LXXVII. 1. Za pomocą podstawienia $x=t^{\alpha}$ dowieść, że jeśli $s>1$ i $\alpha>0$, to

$$\int_{1}^{\infty} x^{-s}dx = \alpha \int_{1}^{\infty} t^{\alpha(1-s)-1}dt.$$

2. Jeżeli całka $\int_{a}^{\infty} \varphi(x)dx$ jest zbieżna, wówczas równa się ona jednej z dwu całek

$$\alpha \int_{(a-\beta)/\alpha}^{\infty} \varphi(\alpha t+\beta)dt \quad \text{lub} \quad -\alpha \int_{-\infty}^{(a-\beta)/\alpha} \varphi(\alpha t+\beta)dt$$

zależnie od tego, czy α jest liczbą dodatnią czy ujemną.

3. Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją dodatnią i stale malejącą i jeżeli α, β są liczbami dodatniemi, wówczas ze zbieżności szeregu $\Sigma\varphi(n)$ wynika zbieżność szeregu $\Sigma\varphi(\alpha n+\beta)$, i odwrotnie.

[Kładąc $x=\alpha t+\beta$, widzimy odrazu, że całki

$$\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx, \qquad \int_{(a-\beta)/\alpha}^{\infty} \varphi(\alpha t+\beta)dt$$

są obie zbieżne lub obie rozbieżne. Pozostaje zastosować twierdzenie Maclaurina.]

4. Dowieść, że $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}$.

5. Dowieść, że $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = \frac{\pi}{2}$.

6. Jeżeli przy $x\to\infty$ mamy $\varphi(x)\to h$, a przy $x\to-\infty$ mamy $\varphi(x)\to k$, wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x-a)-\varphi(x-b)\}dx = -(a-b)(h-k).$$

[Jakoż $\displaystyle\int_{-\xi'}^{\xi} \{\varphi(x-a)-\varphi(x-b)\}dx = \int_{-\xi'}^{\xi} \varphi(x-a)\,dx - \int_{-\xi'}^{\xi} \varphi(x-b)\,dx$

$$= \int_{-\xi'-a}^{\xi-a} \varphi(t)\,dt - \int_{-\xi'-b}^{\xi-b} \varphi(t)\,dt = \int_{-\xi'-a}^{-\xi'-b} \varphi(t)\,dt - \int_{\xi-a}^{\xi-b} \varphi(t)\,dt.$$

Pierwszą całkę możemy przedstawić jako

$$(a-b)k+\int_{-\xi'-a}^{-\xi'-b}\rho\,dt,$$

gdzie $\rho\to 0$, gdy $\xi'\to\infty$; moduł drugiej całki jest nie większy od $|a-b|k$, gdzie k jest największą wartością na ρ w przedziale $(-\xi'-a,\ -\xi'-b)$. Wobec tego

$$\int_{-\xi'-a}^{-\xi'-b}\varphi(t)dt\to(a-b)\,k\,.$$

W podobny sposób badamy drugą całkę.]

(2) **Całkowanie przez części.** W § 154 poznaliśmy wzór

$$\int_a^\xi f(x)\varphi'(x)dx=f(\xi)\,\varphi(\xi)-f(a)\varphi(a)-\int_a^\xi f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Przypuśćmy teraz, że $\xi\to\infty$. Jeżeli z pośród trzech wyrazów powyższego równania, zawierających zmienną ξ, dwa dążą do granic, wówczas trzeci musi również dążyć do granicy, wskutek czego mamy

$$\int_a^\infty f(x)\varphi'(x)dx=\lim_{\xi\to\infty}f(\xi)\,\varphi(\xi)-f(a)\,\varphi(a)-\int_a^\infty f'(x)\varphi(x)dx\,.$$

Analogiczne wzory otrzymamy dla całek

$$\int_{-\infty}^{a}\quad\text{i}\quad\int_{-\infty}^{\infty}.$$

Przykłady LXXVIII. 1. Dowieść, że

$$\int_0^\infty\frac{x\,dx}{(1+x)^3}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}.$$

2. $$\int_0^\infty\frac{x^2dx}{(1+x)^4}=\frac{2}{3}\int_0^\infty\frac{x\,dx}{(1+x)^3}=\frac{1}{3}.$$

3. Jeżeli m, n są liczbami całkowitemi dodatniemi i jeżeli $I_{m,n}=\int_0^\infty\frac{x^m dx}{(1+x)^{m+n}}$, wówczas $I_{m,n}=\frac{m\,I_{m-1,\,n}}{m+n-1}$. Dowieść też, że

$$I_{m,n}=\frac{m!\,(n-2)!}{(m+n-1)!}\,.$$

4. Jeżeli $I_{m,n}=\int_0^{\infty}\frac{x^{2m+1}\,dx}{(1+x^2)^{m+n}}$, to

$$I_{m,n}=\frac{m\,I_{m-1,n}}{m+n-1},\quad 2\,I_{m,n}=\frac{m!\,(n-2)!}{(m+n-1)!}.$$

Sprawdzić otrzymane wyniki, kładąc $x=t^2$ w Przykł. 3.

173. Inne typy całek nieskończonych. Określając w rozdziale VII całkę zwykłą czyli skończoną, zakładaliśmy: (1) że przedział całkowania jest skończony, (2) że funkcja podcałkowa jest ciągła.

Można jednak pojęcie „całki określonej" uogólnić w taki sposób, by zastosować je do wielu przypadków, w których powyższe dwa założenia nie są spełnione. Rozważaliśmy przed chwilą całki, w których przedział całkowania jest nieskończony; teraz przypuścimy, że założenie (2) nie jest spełnione, przyczym poprzestaniemy na zbadaniu jednego tylko przypadku. Mianowicie założymy, że $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale całkowania (a, A) z wyjątkiem skończonej liczby wartości x, powiedzmy: z wyjątkiem $x=\xi_1, \xi_2, \ldots$ Założymy przytym, że gdy x dąży z jednej lub z drugiej strony do którejkolwiek z tych wyjątkowych wartości, wówczas $\varphi(x)\rightarrow+\infty$ albo też $\varphi(x)\rightarrow-\infty$.

Wystarczy, oczywiście, zbadać przypadek, gdy przedział (a, A) zawiera *jedną wyjątkową wartość* ξ, gdyby bowiem było kilka takich wartości, moglibyśmy (a, A) podzielić na mniejsze przedziały, z których każdy zawierałby tylko jeden wyjątkowy punkt, a określiwszy całkę w każdym przedziale, moglibyśmy powiedzieć, że całka w przedziale (a, A) równa się sumie całek w poszczególnych mniejszych przedziałach. Możemy dalej przypuścić, że ów wyjątkowy punkt ξ zlewa się z jednym krańcem przedziału (a, A), gdyby bowiem leżał on między temi krańcami, moglibyśmy określić całkę $\int_a^A \varphi(x)\,dx$ jako sumę

$$\int_a^{\xi}\varphi(x)\,dx+\int_{\xi}^{A}\varphi(x)\,dx$$

(oczywiście w założeniu, że obie te całki zostały należycie określone).

Przypuśćmy tedy, że $\xi=a$; rzecz jasna, że otrzymane wyniki dadzą się równie dobrze zastosować do przypadku, gdy $\xi=A$.

Tak więc zakładamy, że w przedziale (a, A) funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła, z wyjątkiem tylko punktu $x=a$, i że $\varphi(x)\to\infty$, gdy $x\to a$ przez wartości większe od a.

Jako przykład możemy przytoczyć funkcję

$$\varphi(x)=(x-a)^{-s},$$

gdzie $s>0$, lub też, w przypadku gdy $a=0$, funkcję $\varphi(x)=x^{-s}$. Zobaczmy tedy, w jaki sposób można określić symbol

$$\int_0^A \frac{dx}{x^s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

przy $s>0$.

Całka $\int_{1/A}^{x} y^{s-2}dy$ jest zbieżna, o ile $s<1$, a mianowicie równa się $\lim\limits_{\eta\to\infty}\int_{1/A}^{\eta} y^{s-2}\,dy$. Jeżeli wykonamy podstawienie $y=1/x$, otrzymamy

$$\int_{1/A}^{\eta} y^{s-2}dy=\int_{1/\eta}^{A} x^{-s}\,dx.$$

Widzimy, że przy $s<1$ istnieje $\lim\limits_{\eta\to\infty}\int_{1/\eta}^{A} x^{-s}dx$ lub, co na jedno wychodzi, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{A} x^{-s}\,dx$; będzie tedy rzeczą naturalną, jeżeli symbol (1) określimy jako rzeczoną granicę. Na mocy takich samych rozważań możemy symbol $\int_a^A (x-a)^{-s}\,dx$ określić zapomocą równania

$$\int_a^A (x-a)^{-s}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{A}(x-a)^{-s}dx.$$

To nasuwa nam pomysł ogólnego określenia: *jeżeli całka*

$$\int_{a+\varepsilon}^{A}\varphi(x)\,dx$$

dąży do granicy l, gdy $\varepsilon \to +0$, powiadamy, że całka

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx$$

jest zbieżna i że wartością jej jest l.

Tak samo, jeżeli $\varphi(x) \to \infty$, gdy $x \to A$, określamy symbol $\int_a^A \varphi(x)\,dx$ jako

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{A-\varepsilon} \varphi(x)\,dx\,.$$

Po wprowadzeniu tych określeń, możemy, jak mówiliśmy, rozciągnąć je na przypadek, gdy w przedziale (a, A) funkcja $\varphi(x)$ przechodzi przez nieskończoność skończoną liczbę razy.

Całki, określone w niniejszym paragrafie, nazwiemy *całkami nieskończonemi drugiego rodzaju*, te zaś, które rozważaliśmy w § 170 i nast., nazwiemy *całkami nieskończonemi pierwszego rodzaju*. Prawie wszystkie uwagi (I)—(VII) w § 170 dadzą się zastosować do obu rodzajów całek.

174. Równanie (4), § 172 możemy teraz napisać w postaci

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = \int_b^c \varphi\{f(t)\}f'(t)\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Całkę w prawej części równania określamy jako granicę, do której dąży w przedziale (b, τ) odpowiednia całka, gdy $\tau \to c$, czyli jako całkę nieskończoną drugiego rodzaju. Przypuśćmy np., że $\varphi(x) = (1+x)^{-m}$, gdzie $1 < m < 2$, i że $a=0$ oraz $f(t) = t/(1-t)$. Mamy wtedy $b=0$, $c=1$ i wzór (1) przybiera kształt

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x)^m} = \int_0^1 (1-t)^{m-2}\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Symbol w prawej części równania jest całką nieskończoną drugiego rodzaju.

Może się jednak zdarzyć, że funkcja $\varphi\{f(t)\}f'(t)dt$ jest ciągła przy $t=c$. W takim razie

$$\int_b^c \varphi\{f(t)\}f'(t)dt$$

jest całką skończoną i

$$\lim_{\tau \to c} \int_b^\tau \varphi\{f(t)\}f'(t)\,dt = \int_b^c \varphi\{f(t)\}f'(t)\,dt\,.$$

na mocy wniosku z twierdzenia (10), § 153. Widzimy, że podstawienie $x=f(t)$ może całkę nieskończoną zamienić w skończoną. W naszym przykładzie ma to miejsce, gdy $m \geq 2$.

Przykłady LXXIX. 1. Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, z wyjątkiem tylko punktu $x=a$, i jeżeli $\varphi(x) \to \infty$, gdy $x \to a$, wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności całki $\int_a^A \varphi(x)\,dx$ jest istnienie takiej liczby stałej K, żeby było

$$\int_{a+\varepsilon}^{A} \varphi(x)\,dx < K$$

przy wszelkim ε, jakkolwiek małym. (Porów. § 171).

Rzecz jasna, że między a i A możemy obrać taką liczbę A', żeby $\varphi(x)$ miała wartość dodatnią w przedziale (a, A'). O ile funkcja $\varphi(x)$ ma wartość dodatnią w całym przedziale (a, A), możemy położyć $A'=A$. Otóż

$$\int_{a-\varepsilon}^{A} \varphi(x)dx = \int_{a-\varepsilon}^{A'} \varphi(x)\,dx + \int_{A'}^{A} \varphi(x)\,dx.$$

Gdy ε maleje, pierwsza całka w prawej części równania stale rośnie, a więc dąży do granicy albo też do ∞; stąd wynika słuszność naszego twierdzenia.

Gdyby żadna liczba K nie spełniała wymienionej nierówności, mielibyśmy $\int_{a-\varepsilon}^{A} \varphi(x)\,dx \to \infty$. Taką całkę nazwalibyśmy **rozbieżną.** Rzecz jasna, że jeśli $\varphi(x) \to \infty$, gdy $x \to a+0$, wówczas całka może być tylko zbieżna albo rozbieżna. W podobny sposób badamy przypadek, w którym $\varphi(x) \to -\infty$.

2. Dowieść, że przy $s<1$ mamy

$$\int_a^A (x-a)^{-s}\,dx = \frac{(A-a)^{1-s}}{1-s},$$

natomiast przy $s \geq 1$ całka jest rozbieżna.

3. Jeżeli $\varphi(x) \to \infty$, gdy $x \to a+0$, i jeżeli $\varphi(x) < K(x-a)^{-s}$, gdzie $s<1$, wówczas całka $\int_a^A \varphi(x)dx$ jest zbieżna; natomiast całka ta jest rozbieżna, jeżeli $\varphi(x) > K(x-a)^{-s}$, gdzie $s \geq 1$.

4. Czy całki

$$\int_a^A \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(A-x)}}, \quad \int_a^A \frac{dx}{(A-x)\sqrt[3]{x-a}}, \quad \int_a^A \frac{dx}{(A-x)\sqrt[3]{A-x}},$$

$$\int_a^A \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad \int_a^A \frac{dx}{\sqrt[3]{A^3-x^3}}, \quad \int_a^A \frac{dx}{x^2-a^2}, \quad \int_a^A \frac{dx}{A^3-x^3}$$

są zbieżne czy rozbieżne?

5. Całki $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, $\int_{a-1}^{a+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-a}}$ są zbieżne i obie równają się zeru.

6. Całka $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ jest zbieżna.

7. Całka $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^s}$ jest zbieżna tylko przy $s<1$.

8. Całka $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^s}{(\sin x)^m}$ jest zbieżna przy $m<s+1$.

9. Przy $h>0$ i $p<2$ całka $\int_0^h \frac{\sin x}{x^p} dx$ jest zbieżna. Przy $0<p<2$ wartości bezwzględne całek

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x^p} dx, \ldots$$

stale maleją, a znaki ich są kolejno dodatnie i ujemne.

10. Jeżeli $0<p<2$, to całka $\int_0^h \frac{\sin x}{x^p} dx$ osiąga największą wartość przy $h=\pi$.

(*Mathem. Tripos*, 1911.)

11. Całka $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m (\sin x)^p dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $m>-1$ i $p>-1$.

12. Całka kształtu $\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x} dx$, gdzie $s<1$ nie podpada pod nasze określenia, gdyż nietylko przedział całkowania jest nieskończony, ale zarazem funkcja podcałkowa dąży do ∞, gdy $x \to +0$. Możemy tę całkę *określić* jako sumę

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{1+x} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x} dx$$

w założeniu, że obie te całki są zbieżne.

Pierwsza z nich jest całką nieskończoną zbieżną drugiego rodzaju, jeżeli $0<s<1$. Druga jest całką zbieżną pierwszego rodzaju, jeżeli $s<1$. Jeżeli $s>1$, pierwsza całka jest zwykłą całką skończoną, ale druga staje się wtedy rozbieżna. Tak więc pierwotnie dana całka (w obszarze od 0 do ∞) jest zbieżna, jeżeli $0<s<1$.

13. Całka $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x^n}dx$ jest zbieżna wówczas i tylko wówczas, gdy $0<s<n$.

14. Całka $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}-x^{n-1}}{1-x}dx$ jest zbieżna wówczas i tylko wówczas, gdy $0<s<1$, $0<n<1$. [Funkcja pod znakiem całki nie jest określona przy $x=1$, ale $\frac{x^{s-1}-x^{n-1}}{1-x} \rightarrow n-s$, gdy $x \rightarrow 1$ z którejkolwiek strony, tak więc funkcja ta stanie się ciągłą, jeżeli przy $x=1$ przypiszemy jej wartość $n-s$.

Często bywa, że funkcja podcałkowa jest nieciągła tylko dlatego, że nie jest określona w jakimś punkcie przedziału całkowania; w takim razie możemy ją uczynić ciągłą, przypisując jej w tym punkcie odpowiednią wartość. Np. całki

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin mx}{x}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin mx}{\sin x}dx$$

stają się zwykłemi całkami skończonemi, jeżeli przy $x=0$ przypiszemy funkcjom podcałkowym wartość m.]

15. **Podstawienie i całkowanie przez części.** Czytelnik, wzorując się na § 172, rozciągnie na całki nieskończone obu rodzajów metody podstawiania i całkowania przez części.

16. Zapomocą całkowania przez części dowieść, że przy $s>0$, $n>1$ mamy

$$\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{n-1}{s}\int_0^1 x^s(1-x)^{n-2}\,dx.$$

17. Przy $s>0$ mamy $\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{1+x}dx = \int_1^\infty \frac{t^{-s}}{1+t}dt$.

18. Jeżeli $0<s<1$, to

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}+x^{-s}}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{t^{-s}}{1+t}dt = \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}dt.$$

19. Jeżeli $a+b>0$, to $\int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}$.

(*Mathem. Tripos*, 1909.)

20. Za pomocą podstawienia $x=t/(1-t)$ dowieść, że jeśli k i m są liczbami dodatniemi, to

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{k+m}}\,dx = \int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{m-1}\,dt.$$

21. Za pomocą podstawienia $x=pt/(p-t+1)$ dowieść, że jeśli k, m, p są liczbami dodatniemi, to

$$\int_0^1 \frac{x^{k-1}(1-x)^{m-1}}{(x+p)^{k+m}}\,dx = \frac{1}{(1+p)^k p^m}\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{m-1}\,dt.$$

22. Dowieść, że

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi, \quad \int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{\pi(a+b)}{2},$$

a to mianowicie zapomocą (I) podstawienia $x=a+(b-a)t^2$, (II) podstawienia $\dfrac{b-x}{x-a}=t$, (III) podstawienia $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$.

23. Jeżeli $s>-1$, to

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\vartheta)^s d\vartheta = \int_0^1 \frac{x^s dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{\frac{s-1}{2}}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{s-1}{2}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

24. Dowieść słuszności wzorów

$$\int_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\vartheta)d\vartheta,$$

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\cos^2\vartheta+b\sin^2\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$\int_{-a}^a f\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

25. Dowieść, że

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(2+x)\sqrt{x(1-x)}} = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

(*Mathem. Trip.* 1912).

175. Metodę podstawiania należy stosować z pewną ostrożnością. Niech będzie dana np. całka

$$I = \int_1^7 (x^2-6x+13)\,dx.$$

Całkując bezpośrednio, mamy $I=48$. Jeśli natomiast położymy

$$y=x^2-6x+13$$

czyli $x=3\pm\sqrt{y-4}$, mamy

$$I=\int_8^{20} y\frac{dx}{dy}\,dy=\pm\tfrac{1}{2}\int_8^{20}\frac{y\,dy}{\sqrt{y-4}}.$$

Całka nieokreślona równa się

$$\tfrac{1}{3}(y-4)^{3/2}+4(y-4)^{1/2},$$

zatym na całkę I otrzymujemy dwie wartości $\pm 80/3$, obie błędne.

Ten pozorny paradoks wyjaśnimy sobie, jeśli zbadamy dokładniej związek między x i y. Funkcja $x^2-6x+13$ przechodzi przez minimum przy $x=3$; mamy wtedy $y=4$. Gdy x rośnie od 1 do 3, y maleje od 8 do 4, a pochodna $\dfrac{dx}{dy}$ jest ujemna, tak iż

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{2\sqrt{y-4}}.$$

Gdy x rośnie od 3 do 7, y rośnie od 4 do 20, a pochodna $\dfrac{dx}{dy}$ jest dodatnia. Mamy tedy

$$I=\int_1^7 y\,dx=\int_8^4\left\{-\frac{y}{2\sqrt{y-4}}\right\}dy+\int_4^{20}\frac{y}{2\sqrt{y-4}}\,dy;$$

wzór ten prowadzi do właściwego rezultatu.

Tak samo, jeżeli całkę $\int_0^\pi dx$ przekształcamy zapomocą podstawienia $x=\arcsin y$, musimy uwzględnić, że $dx/dy=1/\sqrt{1-y^2}$ lub też $dx/dy=-1/\sqrt{1-y^2}$ zależnie od tego, czy $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$, czy też $\frac{\pi}{2}<x\leqq\pi$.

Przykład. Zbadać przekształcenie całek

$$\int_0^1 (4x^2-x+1/_{16})\,dx,\quad \int_0^\pi \cos^2 x\,dx$$

zapomocą podstawień $y=4x^2-x+1/_{16}$, $x=\arcsin y$.

176. Szeregi o wyrazach dodatnich i ujemnych. Podane przez nas określenia sumy szeregu nieskończonego i wartości całki nieskończonej (pierwszego lub drugiego rodzaju) stosują się do szeregów o wyrazach czy to dodatnich czy ujemnych, jak również do całek, w których funkcja podcałkowa przybierać może wartości dodatnie i ujemne. Natomiast specjalne cechy zbieżności, ustalone w niniejszym rozdziale, dotyczą prawie wszystkie tylko szeregów o wyrazach dodatnich i funkcji podcałkowych, mających stale wartości dodatnie. Rzecz jasna, że przypadek, gdy wartości czy to wyrazów szeregu, czy funkcji podcałkowej są stale ujemne, niczym się nie różni od poprzedniego, ponieważ kładąc $u_n = -v_n$ lub $\varphi(x) = -\psi(x)$, zamieniamy wszystkie ujemne wyrazy szeregu lub ujemne wartości funkcji podcałkowej na odpowiednie liczby dodatnie.

Przy badaniu szeregów zakładaliśmy zawsze (chociaż nie wszędzie wypowiadaliśmy to wyraźnie), że każdy warunek, któremu mają podlegać wyrazy u_n, może być naruszony dla skończonej liczby wyrazów; istotnym było tylko żądanie, żeby ten *warunek był spełniony dla wszystkich wyrazów, następujących po pewnym jakimś oznaczonym wyrazie*. Tak samo przy badaniu całek nieskończonych zakładaliśmy, że warunki, o których mowa w tym lub owym twierdzeniu, są spełnione *dla wszystkich wartości x, większych od pewnej oznaczonej liczby*, innemi słowy: dla wszystkich wartości x oznaczonego przedziału $(a, a+\delta)$, zawierającego liczbę a, w pobliżu której funkcja podcałkowa dąży do nieskończoności.

Np. ustalone przez nas cechy zbieżności dadzą się zastosować do szeregu

$$\sum \frac{n^2-10}{n^4},$$

(gdyż $n^2-10>0$, gdy $n \geqq 4$) i do całek

$$\int_1^{\infty} \frac{3x-7}{(x+1)^3}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

(gdyż $3x-7>0$ przy $x > {}^7/_3$ oraz $1-2x>0$ przy $0<x<{}^1/_2$).

Badanie zbieżności staje się rzeczą o wiele trudniejszą, jeżeli szereg składa się z nieskończenie wielu wyrazów o różnych znakach (jak np. szereg $1-{}^1/_2+{}^1/_3+{}^1/_4-{}^1/_5+\ldots$) albo jeżeli funkcja $\varphi(x)$ ciągle mienia znak, gdy $x\to\infty$ lub gdy $x\to a$, gdzie a jest punktem nieciągłości tej funkcji, jak to ma miejsce w całkach

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^4}\,dx, \qquad \int_a^A \sin\left(\frac{1}{x-a}\right)\frac{dx}{x-a}.$$

Istotnie, w takich całkach i szeregach musimy się liczyć z możliwością oscylacji.

W niniejszym dziele nie możemy roztrząsać sprawy zbieżności takich całek; poprzestaniemy tedy na badaniu szeregów o nieskończenie wielu wyrazach dodatnich i ujemnych.

177. Szeregi bezwzględnie zbieżne. Weźmy pod uwagę szereg Σu_n, w którym wyrazy o dowolnie wielkich wskaźnikach mogą być dodatnie lub ujemne. Niech będzie

$$|u_n| = \alpha_n .$$

Wprowadźmy jeszcze następujące symbole: niech będzie

$$v_n = u_n \quad \text{lub} \quad v_n = 0$$

zależnie od tego, czy u_n jest liczbą dodatnią czy ujemną, i niech

$$w_n = -u_n \quad \text{lub} \quad w_n = 0$$

zależnie od tego, czy u_n jest liczbą ujemną czy dodatnią. Mamy oczywiście

$$u_n = v_n - w_n , \quad \alpha_n = v_n + w_n .$$

Np. w szeregu $1-(^1/_2)^2+(^1/_3)^2-\dots$ mamy $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, a więc

$$\alpha_n = 1/n^2 ,$$

$$v_n = 1/n^2, \quad w_n = 0 \quad \text{przy } n \text{ nieparzystym}$$

$$v_n = 0, \quad w_n = 1/n^2 \quad \text{przy } n \text{ parzystym.}$$

Możemy odróżnić dwa przypadki zależnie od tego, czy szereg $\Sigma \alpha_n$ jest czy nie jest zbieżny.

A. Przypuśćmy najpierw, że $\Sigma \alpha_n$ jest zbieżny. Zachodzi to np. w powyższym przykładzie, gdzie

$$\Sigma \alpha_n = 1 + (^1/_2)^2 + (^1/_3)^2 + \dots$$

Szeregi Σv_n, Σw_n są oba zbieżne, gdyż (Przykł. XXXIII.18) wybierając w dowolny sposób wyrazy szeregu zbieżnego o wyrazach dodatnich, otrzymamy zawsze szereg zbieżny. Na mocy tedy twierdzenia (6), § 70 szereg

$$\Sigma u_n = \Sigma(v_n - w_n)$$

jest zbieżny i suma jego równa się różnicy sum szeregów Σv_n i Σw_n.

Mamy tedy następujące określenie:

Określenie. *Jeżeli szereg Σa_n czyli $\Sigma |u_n|$ jest zbieżny, wówczas szereg Σu_n nazywamy* **bezwzględnie zbieżnym.**

Powyższe nasze rozumowanie moglibyśmy streścić w taki sposób: jeżeli szereg Σu_n jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny. Zbieżne są również dwa szeregi, utworzone jeden z dodatnich jego wyrazów, drugi z ujemnych, a suma ich sum równa się sumie szeregu Σu_n.

Zaznaczamy, że powiedzenie: „szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny" nie jest wcale tautologją. Nazywając Σu_n szeregiem „bezwzględnie zbieżnym", *nie stwierdzamy wcale*, że posiada on sumę: twierdzimy tylko, że *inny szereg*, mianowicie $\Sigma(u_n)$ posiada sumę czyli jest zbieżny, co a priori nie wyklucza możliwości, że szereg Σu_n oscyluje.

Przykłady LXXX. 1. Opierając się na „ogólnej zasadzie zbieżności" (§ 77), dowieść, że szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. [Szereg $\Sigma(u_n)$ jest zbieżny, możemy więc znaleźć takie n_0, że przy $n_2 > n_1 \geqq n_0$ będziemy zawsze mieli

$$|u_{n_1+1}| + |u_{n_1+2}| + \dots + |u_{n_2}| < \delta,$$

gdzie δ jest dowolną liczbą dodatnią. Tymbardziej musi być

$$|u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \dots + u_{n_2}| < \delta,$$

zatym Σu_n jest zbieżny.]

2. Jeżeli szereg zbieżny Σa_n składa się z wyrazów dodatnich i jeżeli $|b_n| \leqq k a_n$, to Σb_n jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym.

3. Jeżeli szereg zbieżny Σa_n składa się z wyrazów dodatnich, to szereg $\Sigma a_n x^n$ jest bezwzględnie zbieżny, o ile $-1 \leqq x \leqq 1$.

4. Jeżeli szereg zbieżny Σa_n składa się z wyrazów dodatnich, to szeregi $\Sigma a_n \cos n\vartheta$, $\Sigma a_n \sin n\vartheta$ są bezwzględnie zbieżne przy wszelkich wartościach na ϑ.

5. Bezwzględnie zbieżny jest każdy szereg, utworzony z wyrazów, wybranych w dowolny sposób z szeregu bezwzględnie zbieżnego.

6. Jeżeli szereg $\Sigma |u_n|$ jest zbieżny, wówczas

$$|\Sigma u_n| \leqq |\Sigma u_n|.$$

(Równość zachodzi tylko w przypadku, gdy wszystkie wyrazy u_n mają ten sam znak).

178. Twierdzenie Dirichleta w zastosowaniu do szeregów bezwzględnie zbieżnych. Łatwo dowieść, że dowolne przestawienie wyrazów szeregu bezwzględnie zbieżnego nie wpływa ani na jego zbieżność, ani na sumę szeregu. Jakoż niech będzie dany szereg Σu_n, z którego utworzyliśmy $\Sigma u'_n$ zapomocą przestawienia wyrazów. Przypuśćmy, że α'_n, v'_n, w'_n są to wyrazy, utworzone z u'_n w taki sam sposób, w jaki z u_n utworzyliśmy α_n, v_n, w_n. Szereg $\Sigma \alpha'_n$ jest zbieżny, jako powstały z $\Sigma \alpha_n$ przez przestawienie jego wyrazów; zbieżne są również szeregi $\Sigma v'_n$, $\Sigma w'_n$, utworzone z Σv_n, Σw_n zapomocą przestawienia wyrazów. Na mocy twierdzenia Dirichleta musi być

$$\Sigma v'_n = \Sigma v_n, \quad \Sigma w'_n = \Sigma w_n,$$

a więc

$$\Sigma u'_n = \Sigma v'_n - \Sigma w'_n = \Sigma v_n - \Sigma w_n = \Sigma u_n.$$

179. Szeregi warunkowo zbieżne. B. Musimy teraz rozważyć przypadek, gdy szereg $\Sigma \alpha_n$, utworzony z modułów, jest rozbieżny.

Określenie. *Jeżeli szereg Σu_n jest zbieżny, a szereg $\Sigma |u_n|$ rozbieżny, to szereg Σu_n nazywamy* **warunkowo zbieżnym.**

Z określenia wynika, że szeregi Σv_n i Σw_n muszą być rozbieżne.

Jakoż nie mogą być one oba zbieżne, bo w takim razie $\Sigma \alpha_n = \Sigma (v_n + w_n)$ musiałby być zbieżny. Gdyby jeden z nich, np. Σw_n był zbieżny, drugi zaś rozbieżny, mielibyśmy

$$\sum_0^N u_n = \sum_0^N v_n - \sum_0^N w_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

czyli suma N wyrazów szeregu Σu_n dążyłaby wraz z N do ∞, co przeczy założeniu.

Wobec tego zarówno Σv_n, jak Σw_n muszą być rozbieżne. Z równania (1) widzimy, że suma szeregu warunkowo zbieżnego jest granicą różnicy dwuch funkcji, z których każda dąży do ∞ wraz z n. Szeregi o wyrazach dodatnich i szeregi bezwzględnie zbieżne posiadają bardzo ważną własność (Przykł. XXXIII. 18 i LXXX. 5), że dowolnie wybrane ich wyrazy tworzą szereg zbieżny; rzecz jasna, że szereg warunkowo zbieżny własności tej nie posiada. Tak samo wydaje się z góry rzeczą mało prawdopodobną, żeby twierdzenie Dirichleta dało się rozciągnąć na szeregi warunkowo zbieżne, a w każdym razie podany w poprzednim paragrafie dowód nie da się zastosować do nich, gdyż dowód ten oparliśmy na zbieżności szeregów Σv_n i Σw_n.

180. Cechy zbieżności szeregów warunkowo zbieżnych. Można z góry oczekiwać, że ustalenie cech zbieżności dla szeregów warunkowo zbieżnych musi być rzeczą stosunkowo trudniejszą. W szczególności łatwo widzieć, że *o zbieżności takiego szeregu nie można wnosić na mocy porównania go z szeregiem zbieżnym.*

Jakoż przypuśćmy, że chcemy sądzić o zbieżności szeregu Σv_n na mocy porównania go z szeregiem Σu_n. W tym celu musimy porównać z sobą sumy

$$v_1+v_2+...+v_n \quad \text{oraz} \quad u_1+u_2+...+u_n.$$

Jeżeli wszystkie v i wszystkie u są dodatnie, a każde v jest mniejsze od odpowiedniego u, mamy

$$v_1+v_2+...+v_n < u_1+u_2+...+u_n,$$

jeśli więc Σu_n jest zbieżny, to i szereg Σv_n jest zbieżny. Jeżeli dodatnie są tylko wszystkie wyrazy u, ale każdy wyraz v jest *co do wartości bezwzględnej* mniejszy od odpowiedniego u, mamy

$$|v_1|+|v_2|+...+|v_n| < u_1+u_2+...+u_n$$

i szereg Σv_n jest bezwzględnie zbieżny.

Jeżeli jednak zarówno wyrazy u, jak wyrazy v mogą być i dodatnie i ujemne, wówczas możemy conajwyżej powiedzieć, że

$$|v_1|+|v_2|+...+|v_n| < |u_1|+|u_2|+...+|u_n|.$$

Jeżeli szereg Σu_n jest bezwzględnie zbieżny, wówczas na mocy tej nierówności wnosimy, że i Σv_n jest bezwzględnie zbieżny; jeśli jednak Σu_n jest tylko warunkowo zbieżny, to żadnego wniosku z nierówności tej wysnuć nie możemy.

Przykład. Przekonamy się wkrótce, że szereg $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ jest warunkowo zbieżny. Otóż wiemy, że szereg $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ jest rozbieżny, a jednak moduł każdego wyrazu pierwszego szeregu jest większy od modułu odpowiedniego wyrazu drugiego szeregu.

181. Szeregi przemienne. Do najprostszych typów szeregów warunkowo zbieżnych należą szeregi przemienne, których wyrazy są kolejno dodatnie i ujemne. Zbieżność najważniejszych szeregów tego rodzaju możemy ustalić zapomocą następującego twierdzenia.

Jeżeli $\varphi(n)$ jest funkcją dodatnią zmiennej n, dążące **stale** *do zera, gdy $n\to\infty$, wówczas szereg*

$$\varphi(0)-\varphi(1)+\varphi(2)-\dots$$

jest zbieżny, a suma jego zawiera się między $\varphi(0)$ i $\varphi(0)-\varphi(1)$.

Symbole $\varphi(0)$, $\varphi(1)$,... zastąpmy symbolami φ_0, φ_1,... Niech będzie

$$s_n=\varphi_0-\varphi_1+\varphi_2-\dots+(-1)^n\varphi_n.$$

Mamy

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=\varphi_{2n}-\varphi_{2n+1}\geqq 0, \quad s_{2n}-s_{2n-2}=-(\varphi_{2n-1}-\varphi_{2n})\leqq 0.$$

Sumy s_0, s_2, $s_4,\dots,s_{2n},\dots$ tworzą ciąg malejący, a więc dążą albo do granicy, albo do $-\infty$, natomiast sumy s_1, $s_3,\dots,s_{2n+1},\dots$ tworzą ciąg rosnący, a więc dążą albo do granicy, albo do $+\infty$. Ale

$$\lim(s_{2n+1}-s_{2n})=\lim(-1)^{2n+1}\varphi_{2n+1}=0,$$

zatym oba ciągi dążą do spólnej granicy. Stąd wynika, że ciąg s_0, s_1, $s_2,\dots,s_n,\dots$ dąży do granicy. Ponieważ $s_0=\varphi_0$, $s_1=\varphi_0-\varphi_1$, zatym granica ta musi zawierać się między φ_0 i $\varphi_0-\varphi_1$.

Przykłady LXXXI. 1. Szeregi

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots, \quad 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots,$$

$$\sum\frac{(-1)^n}{n+a}, \quad \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+a}}, \quad \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{a}}, \quad \sum\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n}+\sqrt{a})^2},$$

gdzie $a>0$, są warunkowo zbieżne.

2. Szereg $\Sigma(-1)^n(n+a)^{-s}$, w którym $a>0$, jest bezwzględnie zbieżny przy $s>1$, warunkowo zbieżny przy $0<s\leqq 1$, oscylujący przy $s\leqq 0$.

3. Przy wszelkich wartościach na n, suma szeregu, rozważanego w § 181, zawiera się między s_n i s_{n+1}, a błąd, jaki popełnimy, zastępując sumę szeregu przez s_n, jest co do wartości bezwzględnej nie większy od modułu wyrazu $(n+1)$-ego.

4. Weźmy pod uwagę szereg

$$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Chcąc uniknąć trudności, związanych z określeniem pierwszych wyrazów, założymy, że najmniejsza wartość na n równa się 2. Szereg możemy napisać w postaci

$$\sum\left\{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$$

czyli

$$\sum\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}\right\}=\Sigma(\psi_n-\chi_n).$$

Szereg $\Sigma\psi_n$ jest zbieżny, natomiast szereg $\Sigma\chi_n$ jest rozbieżny, zatym badany przez nas szereg jest rozbieżny, pomimo że ma kształt $\varphi_2-\varphi_3+\varphi_4-\ldots$, gdzie $\varphi_n\to 0$. Ten przykład wskazuje, jak dalece jest rzeczą zasadniczą, żeby φ_n dążył *stale* do zera. Jakoż czytelnik sprawdzi, że $\sqrt{2n+1}-1<\sqrt{2n}+1$.

5. Jeśli w twierdzeniu § 181 zamiast „$\varphi(n)$ stale dąży do zera" powiemy: „$\varphi(n)$ stale dąży do granicy dodatniej l", wówczas szereg $\Sigma(-1)^n\varphi_n$ musi wykonywać wahania skończone.

6. **Zmiana sumy szeregu warunkowo zbieżnego zapomocą przestawienia jego wyrazów.** Sumę szeregu $1-{}^1/_2+{}^1/_3-{}^1/_4+\ldots$ oznaczmy przez s. Mamy tedy $s_{2n}\to s$.

Teraz weźmy pod uwagę szereg

$$1+{}^1/_3-{}^1/_2+{}^1/_5+{}^1/_7-{}^1/_4+\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

w którym po każdych dwuch kolejnych wyrazach dodatnich następuje wyraz ujemny. Sumę pierwszych $3n$ wyrazów tego szeregu oznaczmy przez σ_{3n}. Mamy

$$\sigma_{3n}=1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2n}$$

$$=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{4n-1}.$$

Ale
$$\lim\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\ldots+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right]=0,$$

gdyż suma wyrazów, zawartych w nawiasach, jest mniejsza od $n/(2n+1)(2n+2)$. Na mocy §§ 149 i 151 mamy

$$\lim\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}+\ldots+\frac{1}{4n}\right)=\tfrac{1}{2}\lim\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+(r/n)}=\tfrac{1}{2}\int_1^2\frac{dx}{x},$$

zatym
$$\lim\sigma_{3n}=s+\tfrac{1}{2}\int_1^2\frac{dx}{x}.$$

Stąd wynika, że sumą szeregu (1) jest nie s, lecz $s+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$.
Później powrócimy jeszcze do tych szeregów i obliczymy ich sumy (§ 206 i Zadanie 19 w końcu rozdziału IX).

Można dowieść ogólniejszego twierdzenia, że wyrazy szeregu warunkowo zbieżnego możemy tak przestawić, by sumą szeregu była dowolna z góry zadana liczba, a nawet tak, by szereg stał się rozbieżny. Twierdzenie to jednak przekracza ramy, które zakreśliliśmy sobie w niniejszej książce.

7. Szereg $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ jest rozbieżny.

[Mamy $\sigma_{3n}=s_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>s_{2n}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}$,

gdzie $s_{2n}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots-\frac{1}{\sqrt{2n}}$; s_{2n} dąży do granicy, gdy $n\to\infty$.]

182. Cechy zbieżności Dirichleta i Abela. Istnieje cecha zbieżności, ogólniejsza od podanej w § 181, a mianowicie

Cecha Dirichleta. *Jeżeli φ_n czyni zadość warunkom* § 181 *i jeżeli szereg Σa_n jest zbieżny albo wykonywa wahania skończone, wówczas szereg*

$$a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\ldots$$

jest zbieżny.

Czytelnik z łatwością sprawdzi tożsamość

$$a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+\ldots+a_n\varphi_n=s_0(\varphi_0-\varphi_1)+s_1(\varphi_1-\varphi_2)+\ldots+s_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)+s_n\varphi_n,$$

w której

$$s_n=a_0+a_1+\ldots a_n.$$

Otóż szereg

$$(\varphi_0-\varphi_1)+(\varphi_1-\varphi_2)+\ldots$$

jest zbieżny, ponieważ suma n jego wyrazów równa się $\varphi_0-\varphi_n$, a $\varphi_n\to 0$; wszystkie jego wyrazy są dodatnie. Ponieważ, dalej, szereg Σa_n albo jest zbieżny, albo wykonywa wahania skończone, zatym istnieje stała K taka, że $|s_\nu|<K$ przy wszelkich wartościach na ν. Wobec tego szereg

$$\Sigma s_\nu(\varphi_\nu-\varphi_{\nu+1})$$

jest bezwzględnie zbieżny, a więc

$$s_0(\varphi_0-\varphi_1)+s_1(\varphi_1-\varphi_2)+\ldots+s_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)$$

dąży do granicy, gdy $n\to\infty$. Wiemy, że φ_n, a więc i $s_n\varphi_n$ dąży do zera, zatym

$$a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+\ldots+a_n\varphi_n$$

dąży do granicy, czyli szereg $\Sigma a_\nu\varphi_\nu$ jest zbieżny.

Cecha Abela. *Jeżeli φ_n jest dodatnią malejącą funkcją zmiennej n i jeżeli Σa_n jest szeregiem zbieżnym, wówczas szereg $\Sigma a_n\varphi_n$ jest zbieżny.*

Przedewszystkim zauważmy, że założenia są tu inne niż w twierdzeniu Dirichleta. Istotnie, granica funkcji φ_n może być teraz różna od zera, ale za to szereg Σa_n musi być zbieżny i nie może wahać się. Dowód jest następujący: niech będzie

$$\lim(\varphi_n - l) = 0;$$

cecha Dirichleta orzeka, że szereg $\Sigma a_n(\varphi_n - l)$ jest zbieżny, że zaś Σa_n jest zbieżny, więc i $\Sigma a_n \varphi_n$ musi być zbieżny.

Twierdzenie Abela możnaby tak sformułować: *szereg zbieżny pozostaje zbieżnym, jeżeli wyrazy jego pomnożymy przez jakikolwiek ciąg czynników dodatnich malejących.*

Przykłady LXXXII. 1. Cechy zbieżności Abela i Dirichleta możemy też ustalić w inny sposób, opierając się na ogólnej zasadzie zbieżności (§ 77). Przypuśćmy np., że jakiś szereg czyni zadość warunkowi § 182. Mamy tożsamość

$$a_m \varphi_m + a_{m+1} \varphi_{m+1} + \dots + a_n \varphi_n = s_{m,\,m}(\varphi_m - \varphi_{m+1}) + s_{m,\,m+1}(\varphi_{m+1} - \varphi_{m+2}) + \dots$$
$$\dots + s_{m,\,n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + s_{m,\,n}\varphi_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

gdzie
$$s_{m,\,\nu} = a_m + a_{m+1} + \dots + a_\nu .$$

Lewa część tożsamości (1) zawiera się między $h\varphi_m$ i $H\varphi_m$, gdzie h i H są odpowiednio najmniejszą i największą z liczb $s_{m,\,m}, s_{m,\,m+1}, \dots, s_{m,\,n}$. Mając daną jakąkolwiek liczbę dodatnią δ, możemy znaleźć takie m_0, że przy $m \geqq m_0$ mamy zawsze $|s_{m,\,\nu}| < \delta$, a więc przy każdym $n > m \geqq m_0$ mamy

$$|a_m \varphi_m + a_{m+1} \varphi_{m+1} + \dots + a_n \varphi_n| < \delta \varphi_m \leqq \delta \varphi_1 .$$

Stąd wynika, że szereg $\Sigma a_n \varphi_n$ jest zbieżny.

2. Jeżeli ϑ nie jest wielokrotnością liczby π, wówczas szeregi $\Sigma \cos n\vartheta$, $\Sigma \sin n\vartheta$ wykonywują wahania skończone. Istotnie, oznaczając przez s_n, σ_n sumy pierwszych n wyrazów tych szeregów i kładąc $z = \operatorname{Cis}\vartheta$, tak iż $|z| = 1$ i $z \neq 1$, mamy

$$|s_n + i\sigma_n| = \left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \leqq \frac{1 + |z^n|}{|1 - z|} \leqq \frac{2}{|1 - z|},$$

a więc zarówno $|s_n|$, jak $|\sigma_n|$ nie są większe od $\dfrac{2}{|1-z|}$. Zarazem jednak szeregi te nie są zbieżne, gdyż ich wyrazy ogólne nie dążą do zera.

Szereg $\Sigma \sin n\vartheta$ dąży do zera, jeżeli ϑ jest wielokrotnością liczby π. Szereg $\Sigma \cos n\vartheta$ wykonywa wahania skończone, jeżeli ϑ jest nieparzystą wielokrotnością π, i jest rozbieżny, jeżeli ϑ jest parzystą wielokrotnością π.

Stąd wynika, że *jeśli φ_n jest dodatnią funkcją zmiennej n, dążącą stale do zera, gdy $n \to \infty$, wówczas szeregi*

$$\Sigma \varphi_n \cos n\vartheta, \quad \Sigma \varphi_n \sin n\vartheta$$

są zbieżne. Wyjątek stanowić może pierwszy szereg w przypadku, gdy ϑ jest wielokrotnością 2π. W tym przypadku pierwszy szereg przybiera kształt szeregu $\Sigma\varphi_n$, który może nie być zbieżny. Jeżeli szereg $\Sigma\varphi_n$ jest zbieżny, wówczas oba dane szeregi są bezwzględnie zbieżne. (Przykł. LXXX.4) przy wszelkich wartościach na ϑ. Najciekawszy przypadek mamy wówczas, gdy $\Sigma\varphi_n$ jest rozbieżny. Szeregi nasze są wtedy zbieżne *warunkowo*, jak tego dowiedziemy poniżej w Przykł. 6. Kładąc w szeregu dostaw $\vartheta=\pi$, wracamy do wyników § 181, gdyż $\cos n\pi=(-1)^n$.

3. Przy $s>0$ szeregi $\Sigma n^{-s}\cos n\vartheta$, $\Sigma n^{-s}\sin n\vartheta$ są zbieżne. Wyjątek stanowi przypadek, gdy w pierwszym szeregu ϑ jest wielokrotnością 2π, a $0<s\leqq 1$.

4. Szeregi poprzedniego przykładu są naogół bezwzględnie zbieżne przy $s>1$, warunkowo zbieżne przy $0<s\leqq 1$ i oscylują przy $s\leqq 0$ (skończone oscylacje przy $s=0$, nieskończone przy $s<0$). Zbadać, czy istnieją wyjątki.

5. Jeżeli $\Sigma a_n n^{-s}$ jest zbieżny albo wykonywa wahania skończone, wówczas przy $t>s$ szereg $\Sigma a_n n^{-t}$ jest zbieżny.

6. Jeżeli φ_n jest dodatnią funkcją zmiennej n, dążącą stale do 0, gdy $n\to\infty$, i jeżeli $\Sigma\varphi_n$ jest rozbieżny, wówczas szeregi $\Sigma\varphi_n\cos n\vartheta$, $\Sigma\varphi_n\sin n\vartheta$ *nie są bezwzględnie zbieżne*. Wyjątek stanowi szereg wstaw, jeżeli ϑ jest wielokrotnością π.

[Jakoż niech będzie np. $\Sigma\varphi_n|\cos n\vartheta|$ szeregiem zbieżnym. Ponieważ $\cos^2 n\vartheta\leqq|\cos n\vartheta|$, zatym musiałby być zbieżny szereg $\Sigma\varphi_n\cos^2 n\vartheta$ czyli

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\varphi_n(1+\cos 2n\vartheta),$$

co jest niemożliwe, gdyż $\Sigma\varphi_n$ jest rozbieżny, a $\Sigma\varphi_n\cos 2n\vartheta$, na mocy cechy Dirichleta, jest zbieżny, o ile ϑ nie jest wielokrotnością π. W tym ostatnim przypadku szereg $\Sigma\varphi_n|\cos n\vartheta|$ jest oczywiście rozbieżny. Czytelnik przeprowadzi odpowiednie badanie szeregu $\Sigma\varphi_n\sin n\vartheta$ i zwróci szczególną uwagę na przypadek, gdy ϑ jest wielokrotnością π.]

183. Szeregi wyrazów zespolonych. Zbadamy teraz szeregi kształtu

$$\Sigma u_n=\Sigma(v_n+iw_n).$$

Nie ma tu nic istotnie nowego: szereg jest zbieżny wówczas i tylko wówczas, gdy oba szeregi

$$\Sigma v_n,\ w_n$$

są zbieżne.

Określenie. *Szereg Σu_n, w którym $u_n=v_n+iw_n$, nazywamy* **bezwzględnie zbieżnym**, *jeżeli oba szeregi Σv_n, Σw_n są bezwzględnie zbieżne.*

Twierdzenie. *Żeby szereg Σu_n był bezwzględnie zbieżny, trzeba i wystarcza, żeby był zbieżny szereg $\Sigma|u_n|$ czyli szereg $\Sigma\sqrt{v_n^2+w_n^2}$.*

Istotnie, jeżeli Σu_n jest bezwzględnie zbieżny, to szeregi $\Sigma |v_n|$, $\Sigma |w_n|$ są zbieżne, a więc i $\Sigma \{|v_n| + |w_n|\}$ musi być zbieżny. Ale

$$|u_n| = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \leqq |v_n| + |w_n|,$$

a więc $\Sigma |u_n|$ jest zbieżny.

Z drugiej strony mamy

$$|v_n| \leqq \sqrt{v_n^2 + w_n^2}, \quad |w_n| \leqq \sqrt{v_n^2 + w_n^2},$$

tak iż $\Sigma |v_n|$ i $\Sigma |w_n|$ są zawsze zbieżne, skoro tylko $\Sigma |u_n|$ jest zbieżny.

Rzecz jasna, że *szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny*, ponieważ zbieżne są Σv_n i Σw_n.

Twierdzenie Dirichleta (§§ 162, 178) daje się rozciągnąć na bezwzględnie zbieżne szeregi o wyrazach zespolonych, jeżeli zarówno Σv_n, jak Σw_n spełniają warunki tego twierdzenia.

184. Szeregi potęgowe. Do najważniejszych zagadnień teorji elementarnych funkcji (jakiemi są funkcje trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne i t. p.) należy rozwijanie tych funkcji na szeregi kształtu $\Sigma a_n x^n$, zwane *szeregami potęgowemi zmiennej* x. Takie rozwinięcia poznaliśmy w związku z teorją szeregów Taylora i Maclaurina (§ 141), mieliśmy tam jednak do czynienia wyłącznie ze zmienną rzeczywistą, tu zaś chcemy podać kilka własności szeregów potęgowych zmiennej zespolonej z.

A. *Szereg potęgowy* $\Sigma a_n z^n$ *może być zbieżny dla wszystkich wartości* z, *albo dla pewnego obszaru wartości* z, *albo wreszcie może nie być zbieżny dla żadnej wartości, z wyjątkiem tylko* $z = 0$.

Wystarczy podać przykłady tych trzech możliwych przypadków.

1. *Szereg* $\Sigma \dfrac{z^n}{n!}$ *jest zbieżny dla wszystkich wartości* z. Istotnie, jeżeli $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$, to przy $n \to \infty$ mamy

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{n+1} \to 0,$$

jakąkolwiek wartość damy na z. Stosując cechę d'Alemberta, widzimy, że $\Sigma |u_n|$ jest zbieżny przy wszelkich wartościach z, a więc dany szereg jest przy tych wartościach bezwzględnie zbieżny. Przekonamy się później, że szereg potęgowy zbieżny jest *wogóle* bezwzględnie zbieżny.

2. Szereg $\Sigma n!z^n$ *jest zbieżny tylko przy* $z=0$. Istotnie, $u_n=n!z^n$, a więc $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=(n+1)|z|\to\infty$ gdy $n\to\infty$, o ile tylko $z\neq 0$. Tak więc (Przykł. XXX. 1, 2, 5) moduł wyrazu n-tego dąży wraz z n do ∞, zatym przy $z\neq 0$ szereg nie może być zbieżny. Rzecz jasna, że każdy szereg potęgowy jest zbieżny przy $z=0$.

3. *Szereg* Σz^n *jest zawsze zbieżny przy* $|z|<1$ *i nigdy nie jest zbieżny przy* $|z|\geqq 1$. Dowiedliśmy tego w § 81.

185. B. *Jeżeli szereg potęgowy* $\Sigma a_n z^n$ *jest zbieżny przy pewnej szczególnej wartości na z, np. przy* $z_1=r_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1)$, *wówczas jest bezwzględnie zbieżny przy wszelkim z, czyniącym zadość nierówności* $|z|<r_1$.

Ze zbieżności szeregu $\Sigma a_n z_1^n$ wynika, że $\lim a_n z_1^n=0$, a więc istnieje taka stała K, że $|a_n z_1^n|<K$ przy wszelkich wartościach na n. Jeżeli jednak mamy $|z|=r<r_1$, to

$$|a_n z^n|=|a_n z_1^n|\left(\frac{r}{r_1}\right)^n<K\left(\frac{r}{r_1}\right)^n,$$

Porównywując dany szereg z szeregiem gieometrycznym zbieżnym $\Sigma(r/r_1)^n$, otrzymujemy nasze twierdzenie.

Innemi słowami: *jeżeli szereg jest zbieżny w punkcie P, to jest zbieżny w każdym punkcie, leżącym bliżej początku spółrzędnych niż punkt P.*

Twierdzenie pozostaje słuszne i wówczas, gdy w punkcie $z=z_1$ szereg wykonywa wahania skończone. Jeżeli $s_n=a_0+a_1z_1+\ldots+a_nz_1^n$, to istnieje taka stała K, że $|s_n|<K$ przy wszelkich wartościach na n. Ale $|a_nz_1^n|=|s_n-s_{n-1}|\leqq|s_{n-1}|+|s_n|<2K$. Dalszy ciąg dowodu, jak wyżej.

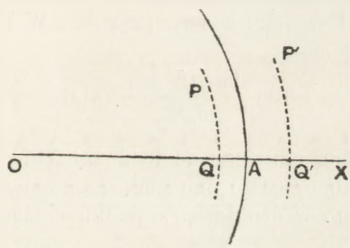
186. Obszar zbieżności szeregu potęgowego. Koło zbieżności. Niech $z=r$ będzie dowolnym punktem na osi liczb rzeczywistych dodatnich. Jeżeli szereg jest zbieżny w punkcie $z=r$, wówczas jest bezwzględnie zbieżny we wszystkich punktach wewnętrznych koła $|z|=r$. W szczególności szereg jest zbieżny przy wszystkich rzeczywistych wartościach na z, mniejszych od r.

Wszystkie punkty r na osi liczb rzeczywistych dodatnich podzielmy na dwie klasy, zaliczając do jednej te punkty, w których szereg jest zbieżny, do drugiej zaś wszystkie inne punkty. Pierwsza klasa zawiera conajmniej jeden punkt $z=0$. Rzecz jasna, że wszystkie punkty pierwszej klasy leżą w lewo od punktów drugiej klasy. Istnieje tedy punkt $z=R$, rozdzielający te dwie klasy; punkt ten może należeć bądź do jednej, bądź do drugiej klasy. *Szereg jest bezwzględnie zbieżny we wszystkich punktach wewnętrznych koła* $|z|=R$.

Jakoż niech P będzie jednym z takich punktów. Ze środka O promieniem mniejszym od R zakreślamy koło, zawierające punkt P. Przypuśćmy, że koło to przecina oś OA w punkcie Q; szereg jest zbieżny w punkcie Q, a więc, na mocy twierdzenia B (§ 185), jest bezwzględnie zbieżny w punkcie P.

Z drugiej strony, szereg nie może być zbieżny w żadnym punkcie P', leżącym poza kołem $|z|=R$, gdyż musiałby być bezwzględnie zbieżny we wszystkich punktach, leżących bliżej do O niż punkt P, co jest niedorzeczne, ponieważ szereg nie jest zbieżny w żadnym punkcie między A i Q' (rys. 59).

Nie braliśmy dotąd pod uwagę dwuch możliwych przypadków: (1) gdy szereg jest zbieżny w każdym punkcie osi



Rys. 59.

liczb rzeczywistych dodatnich, i (2) gdy szereg nie jest zbieżny w żadnym punkcie tej osi z wyjątkiem punktu $z=0$. Rzecz jasna, że w przypadku (1) szereg jest w każdym punkcie płaszczyzny bezwzględnie zbieżny, w przypadku zaś (2) szereg nigdzie nie jest zbieżny z wyjątkiem punktu $z=0$.

Dochodzimy tedy do wniosku, że

Szereg potęgowy może być

(1) *zbieżny tylko w punkcie* $z=0$ *i w żadnym innym,*

(2) *bezwzględnie zbieżny przy wszelkich wartościach na* z;

(3) *bezwzględnie zbieżny przy wszelkich wartościach* z, *leżą-*

cych wewnątrz pewnego koła o promieniu R, w żadnym zaś punkcie zewnątrz tego koła leżącym szereg nie jest zbieżny.

Koło, o którym mowa w przypadku (3), nazywamy **kołem zbieżności,** a jego promień **promieniem zbieżności** szeregu potęgowego.

Podkreślamy, że w naszym twierdzeniu niema mowy o zachowaniu się szeregu *na okręgu koła zbieżności.* Z dalszych przykładów przekonamy się, że to zachowanie się bywa rozmaite.

Przykłady LXXXIII. 1. Szereg $1+az+a^2z^2+\dots$, gdzie $a>0$, ma promień zbieżności równy $1/a$. Nigdzie na okręgu koła zbieżności szereg ten nie jest zbieżny, a mianowicie w punkcie $z=1/a$ jest rozbieżny, a w innych punktach okręgu wykonywa wahania skończone.

2. Promień zbieżności szeregu $\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\dots$ równa się 1; szereg jest bezwzględnie zbieżny we wszystkich punktach okręgu koła zbieżności.

3. Jeżeli $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\to\lambda$ albo $|a_n|^{1/n}\to\lambda$, gdy $n\to\infty$, wówczas $1/\lambda$ jest promieniem zbieżności szeregu $a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$ W pierwszym przypadku

$$\lim\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_nz^n|}=\lambda|z|,$$

a więc jest większe lub mniejsze od jedności zależnie od tego, czy $|z|$ jest $>$ czy $<$ $1/\lambda$, wobec czego możemy zastosować cechę zbieżności d'Alemberta. Tak samo w drugim przypadku możemy zastosować cechę Cauchy'ego.

4. **Szereg logarytmiczny.** Szereg

$$z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\dots$$

nazywamy logarytmicznym (z powodów, które później poznamy). Z Przykł. 3 wynika, że promień zbieżności $=1$.

Gdy z leży na okręgu zbieżności, możemy założyć $z=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$; szereg przybiera kształt

$$\cos\vartheta-{}^1/_2\cos 2\vartheta+{}^1/_3\cos 3\vartheta-\dots+i(\sin\vartheta-{}^1/_2\sin 2\vartheta+{}^1/_3\sin 3\vartheta-\dots)$$

Zarówno część rzeczywista, jak część urojona są zbieżne, jakkolwiek nie są bezwzględnie zbieżne; wyjątek mamy wówczas, gdy ϑ jest nieparzystą wielokrotnością π. (Przykł. LXXXII. 3. 4). Jeżeli ϑ jest nieparzystą wielokretnością liczby π, to $z=-1$, a szereg przybiera kształt $-1-{}^1/_2-{}^1/_3-\dots$, zatym jest rozbieżny i dąży do $-\infty$. Tak więc szereg logarytmiczny jest zbieżny we wszystkich punktach swego okręgu zbieżności, z wyjątkiem punktu $z=-1$.

5. **Szereg dwumianowy.** Weźmy pod uwagę szereg

$$1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\dots$$

Szereg jest skończony, jeżeli m jest liczbą całkowitą dodatnią. Wogóle mamy

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|m-n|}{n+1}\to 1,$$

promień więc zbieżności $=1$.

187. Jednoznaczność rozwinięcia na szereg potęgowy. Jeżeli $\Sigma a_n z^n$ jest szeregiem potęgowym, zbieżnym przy pewnych wartościach z różnych od zera, i jeżeli $f(z)$ jest sumą szeregu, wówczas $f(z)$ możemy przedstawić w postaci

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+(a_n+\varepsilon_z)z^n,$$

gdzie $\varepsilon_z\to 0$, gdy $|z|\to 0$. Istotnie, jeżeli μ jest jakąkolwiek liczbą mniejszą od promienia zbieżności i jeżeli $|z|<\mu$, wówczas $|a_n|\mu^n<K$, gdzie K jest liczbą stałą (§ 185). Wobec tego

$$\left|f(z)-\sum_0^n a_\nu z^\nu\right|\leqq|a_{n+1}||z^{n+1}|+|a_{n+2}||z^{n+2}|+\dots<K\left(\frac{|z|}{\mu}\right)^{n+1}\left(1+\frac{|z|}{\mu}+\frac{|z|^2}{\mu^2}+\dots\right)$$

$$=\frac{K|z|^{n+1}}{\mu^n(\mu-|z|)},$$

przyczym K jest liczbą niezależną od z. Z Przykł. LVIII.15 wynika, że jeśli przy wszelkich wartościach z, których moduł jest mniejszy od liczby μ, mamy $\Sigma a_n z^n=\Sigma b_n z^n$, wówczas przy wszelkim n musi być $a_n=b_n$. Widzimy, że *tej samej funkcji $f(z)$ niepodobna rozwinąć na dwa różne szeregi potęgowe.*

188. Mnożenie szeregów. W § 163 widzieliśmy, że jeśli Σu_n i Σv_n są dwoma szeregami zbieżnemi o wyrazach dodatnich, wówczas $\Sigma u_n\times\Sigma v_n=\Sigma w_n$, gdzie

$$w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\dots+u_nv_0.$$

Możemy to twierdzenie rozciągnąć na przypadek, gdy oba szeregi są *bezwzględnie zbieżne*, gdyż dowód, podany w § 163, wynika z twierdzenia Dirichleta, które już rozciągnęliśmy na szeregi bezwzględnie zbieżne.

Przykłady LXXXIV. 1. Jeżeli $|z|$ jest mniejsze od promieni zbieżności szeregów $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma b_n z^n$, wówczas iloczyn tych szeregów równa się $\Sigma c_n z^n$, gdzie $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0$.

2. Jeżeli R jest promieniem zbieżności, a $f(z)$ sumą szeregu $\Sigma a_n z^n$ przy $|z|<R$, wówczas, o ile $|z|$ jest mniejsze od R lub od jedności, mamy

$$\frac{f(z)}{1-z}=\Sigma s_n z^n, \text{ gdzie } s_n=a_0+a_1+\ldots+a_n.$$

3. Zapomocą podniesienia szeregu do kwadratu dowieść, że przy $|z|<1$ mamy $1/(1-z)^2=1+2z+3z^2+\ldots$

4. Dowieść, że $1/(1-z)^3=1+3z+6z^2+\ldots$, przyczym wyraz ogólny szeregu równa się $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)z^n$.

5. **Szereg dwumianowy dla wykładnika całkowitego ujemnego.** Jeżeli $|z|<1$, a m jest liczbą całkowitą dodatnią, to

$$\frac{1}{(1-z)^m}=1+mz+\frac{m(m+1)}{1.2}z^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}z^n+\ldots$$

[Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wykładników, aż do m. Na mocy Przykł. 2 mamy $1/(1-z)^{m+1}=\Sigma s_n z^n$, gdzie

$$s_n=1+m+\frac{m(m+1)}{1.2}+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1.2\ldots n}.\Big]$$

6. Zapomocą mnożenia szeregów dowieść, że jeśli $|z|<1$, a

$$f(m,z)=1+\binom{m}{1}z+\binom{m}{2}z^2+\ldots,$$

to $f(m,z)f(m',z)=f(m+m',z)$. [Na tym równaniu opiera się podany przez Eulera dowód twierdzenia o dwumianie. W iloczynie szeregów spółczynnik przy z^n równa się

$$\binom{m'}{n}+\binom{m}{1}\binom{m'}{n-1}+\binom{m}{2}\binom{m'}{n-2}+\ldots+\binom{m}{n-1}\binom{m'}{1}+\binom{m}{n}.$$

Wielomian ten staje się równy $\binom{m+m'}{k}$, jeżeli m i m' są liczbami dodatniemi całkowitemi. Jeżeli dwa takie wielomiany równają się sobie przy wszelkich całkowitych dodatnich wartościach na m i m', wówczas muszą być tożsamościowo równe.]

7. Jeżeli $f(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots$, to $f(z)f(z')=f(z+z')$. [Szereg na $f(z)$ jest bezwzględnie zbieżny przy wszelkim z, a $w_n=\frac{(z+z')^n}{n!}$.]

8. Jeżeli $C(z)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots$, $S(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$, to

$$C(z+z')=C(z)C(z')-S(z)S(z'),$$

$$S(z+z')=S(z)C(z')+C(z)S(z'),$$

$$|C(z)|^2+|S(z)|^2=1.$$

9. Jeżeli szeregi Σu_n, Σv_n nie są *bezwzględnie* zbieżne, wówczas twierdzenie o mnożeniu szeregów może nie być słuszne. Niech będzie np.

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Mamy wówczas

$$w_n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(r+1)(n+1-r)}};$$

ale $\sqrt{(r+1)(n+1-r)} \leq \frac{n+2}{2}$, a więc $|w_n| > \frac{2n+2}{n+2}$, że zaś $\frac{2n+2}{n+2}$ dąży do 2, zatym szereg Σw_n nie jest zbieżny.

Zadania do rozdziału VIII.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\Sigma n^k \{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\}$ przy k rzeczywistym.

(*Mathem. Tripos.* 1890).

2. Dowieść, że szereg $\Sigma n^r \Delta^k (n^s)$,

w którym $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$, $\Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n)$, i t. d.,

jest zbieżny wówczas i tylko wówczas, gdy $k > r+s+1$. Wyjątek stanowi przypadek, gdy s jest liczbą całkowitą dodatnią, mniejszą od k.

3. Dowieść, że

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)} = \frac{5}{36}.$$

(*Mathem. Trip.* 1912).

4. Jeżeli $R(n)$ jest funkcją wymierną zmiennej n, możemy wyznaczyć taki wielomian $P(n)$ i taką stałą A, że szereg $\Sigma\{R(n) - P(n) - (A/n)\}$ jest zbieżny. W szczególności zbadać przypadki, gdy $R(n)$ jest jedną z dwuch następujących funkcji:

$$\frac{1}{an+b} \text{ lub też } \frac{an^2+2bn+c}{\alpha n^2+2\beta n+\gamma}.$$

5. Szereg $1 - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+z} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+z} + \ldots$

jest zbieżny, o ile z nie jest liczbą ujemną całkowitą.

6. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\Sigma \sin\frac{a}{n},\ \Sigma \frac{1}{n}\sin\frac{a}{n},\ \Sigma(-1)^n \sin\frac{a}{n},\ \Sigma\left(1-\cos\frac{a}{n}\right),\ \Sigma(-1)^n n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right),$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą.

7. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_1^\infty \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin(n\vartheta+\alpha)}{n},\ \text{gdzie } \vartheta \text{ i } \alpha \text{ są rzeczywiste.}$$

(*Mathem. Tripos*, 1899.)

8. Dowieść, że szereg

$$1-{}^1/_2-{}^1/_3+{}^1/_4+{}^1/_5+{}^1/_6-{}^1/_7-{}^1/_8-{}^1/_9-{}^1/_{10}+\ldots,$$

w którym kolejne wyrazy o jednakowym znaku tworzą grupy, złożone z 1, 2, 3, 4,... wyrazów, jest zbieżny. Odpowiedni szereg, w którym grupy zawierają 1, 2, 4, 8... wyrazów o jednakowym znaku, wykonywa wahania skończone.

(*Mathem. Tripos*, 1908.)

9. Jeżeli mamy ciąg wyrazów dodatnich, dążących do zera $u_1, u_2, u_3, \ldots$, wówczas szeregi

$$u_1-\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1+u_2+u_3}{3}-\ldots,\quad u_1-\frac{u_1+u_2}{3}+\frac{u_1+u_2+u_3}{5}-\ldots$$

są zbieżne.

10. Jeżeli $u_0+u_1+u_2+\ldots$ jest szeregiem rozbieżnym o wyrazach dodatnich malejących, to

$$\frac{u_0+u_2+u_4+\ldots+u_{2n}}{u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n+1}}\to 1.$$

11. Jeżeli $\alpha>0$, to $\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{p}\frac{1}{(p+n)^{1+\alpha}}=0$.

12. Dowieść, że $\lim\limits_{\alpha\to+0}\alpha\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n^{1+\alpha}}=1$.

[Z § 167 wynika, że

$$0<\frac{1}{1^{1+\alpha}}+\frac{1}{2^{1+\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^{1+\alpha}}-\int_1^n\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\leqq 1,$$

a stąd łatwo wysnuć wniosek, że $\Sigma\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ zawiera się między $1/\alpha$ a $(1/\alpha)+1$.]

13. Znaleźć sumę szeregu $\sum\limits_1^\infty u_n$, w którym

$$u_n=\frac{x^n-x^{-n-1}}{(x^n+x^{-n})(x^{n+1}+x^{-n-1})}=\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x^n+x^{-n}}-\frac{1}{x^{n+1}+x^{-n-1}}\right),$$

przy wszelkich rzeczywistych wartościach na x, przy których szereg jest zbieżny.

(*Mathem. Tripos*. 1901).

[Jeżeli $|x| \neq 1$, suma szeregu równa się $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)}$. Jeżeli $x=1$, to $u_n=0$ i suma $=0$. Jeżeli $x=-1$, to $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}$ i szereg wykonywa wahania skończone.]

14. Wyznaczyć sumy szeregów

$$\frac{z}{1+z}+\frac{2z^2}{1+z^2}+\frac{4z^4}{1+z^4}+\ldots, \quad \frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}+\frac{z^4}{1-z^8}+\ldots$$

w przypadku, gdy szeregi te są zbieżne.

[Pierwszy szereg jest zbieżny przy $|z|<1$, a suma jego $=\dfrac{z}{1-z}$; drugi szereg dąży do $\dfrac{z}{1-z}$, jeżeli $|z|<1$, jeżeli zaś $|z|>1$, to suma jest $\dfrac{1}{1-z}$.]

15. Jeżeli $|a_n| \leq 1$ przy wszelkich wartościach na n, wówczas równanie

$$0=1+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

nie może mieć pierwiastka o module mniejszym od $\frac{1}{2}$; tylko przy $a_n=-\mathrm{Cis}(n\vartheta)$ może istnieć pierwiastek o module $=\frac{1}{2}$, a mianowicie pierwiastek $z=\frac{1}{2}\mathrm{Cis}(-\vartheta)$

16. **Szeregi zwrotne.** Szereg potęgowy $\Sigma a_n z^n$ nazywamy *zwrotnym*, jeżeli jego spółczynniki czynią zadość związkowi kształtu

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\ldots+p_ka_{n-k}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

gdzie $n \geqq k$, a $p_1, p_2, \ldots p_k$ są niezależne od n. Każdy szereg zwrotny jest rozwinięciem jakiejś wymiernej funkcji zmiennej z. Chcąc tego dowieść zauważmy, że szereg jest niewątpliwie zbieżny przy wartościach na z, których moduł jest dostatecznie mały. Istotnie, niech G będzie większą z dwuch liczb

$$1, \quad |p_1|+|p_2|+\ldots+|p_k|.$$

Z równania (1) wynika, że $|a_n| \leq G\alpha_n$, gdzie α_n jest modułem liczbowo największego z poprzednich spółczynników, stąd zaś wynika, że $|a_n|<KG^n$, gdzie K jest niezależne od n. Niewątpliwie tedy szereg zwrotny jest zbieżny przy każdej wartości $|z|<1/G$.

Jeżeli jednak szereg $f(z)=\Sigma a_n z^n$ pomnożymy przez $p_1z, p_2z^2, \ldots p_kz^k$ i iloczyny do siebie dodamy, otrzymamy nowy szereg, w którym wszystkie spółczynniki po $(k-1)$-szym równają się zeru na mocy równania (1), tak iż

$$(1+p_1z+p_2z^2+\ldots+p_kz^k)f(z)=P_0+P_1z+\ldots+P_{k-1}z^{k-1},$$

gdzie $P_0, P_1, \ldots P_{k-1}$ są to stałe. Wielomian $1+p_1z+p_2z^2+\ldots+p_kz^k$ nazywają niekiedy *skalą szeregu.*

Z twierdzeń o rozwijaniu funkcji wymiernych kształtu $A/(z-a)^p$ na ułamki proste, jak również z dwumianu Newtona dla wykładnika ujemnego całkowitego wynika, że i *odwrotnie:* każda funkcja wymierna, której mianownik nie jest podzielny przez z, daje się rozwinąć na szereg potęgowy, zbieżny przy wszelkim $|z|<\rho$, gdzie ρ jest najmniejszym śród modułów pierwiastków mianownika (Zadanie 18 i nast. w końcu rozdziału IV). Odwracając powyższe rozumowanie, czytelnik przekona się z łatwością, że szereg ten jest zwrotny. Tak więc, *żeby szereg potęgowy był szeregiem zwrotnym, trzeba i wystarcza, by stanowił rozwinięcie takiej funkcji wymiernej zmiennej z.*

17. **Równania różnicowe.** Związek kształtu takiego, jak (1) w poprzednim zadaniu, nazywa się *równaniem różnicowym linjowym o stałych spółczynnikach*. Metodę rozwiązywania takich równań najłatwiej objaśnić można na przykładzie. Niech będzie dane równanie

$$a_n-a_{n-1}-8a_{n-2}+12a_{n-3}=0.$$

Weźmy pod uwagę szereg zwrotny $\Sigma a_n z^n$. Jak w Przykł. 16, znajdujemy, że suma szeregu równa się

$$\frac{a_0+(a_1-a_0)z+(a_2-a_1-8a_0)z^2}{1-z-8z^2+12z^3}=\frac{A_1}{1-2z}+\frac{A_2}{(1-2z)^2}+\frac{B}{1+3z},$$

przyczym liczby A_1, A_2, B dają się z łatwością wyrazić zapomocą a_0, a_1, a_2. Rozwijając każdy ułamek z osobna, widzimy, że spółczynnik przy z^n równa się

$$a_n=2^n\{A_1+(n+1)A_2\}+(-3)^n B.$$

Wartości A_1, A_2, B zależą od pierwszych trzech spółczynników a_0, a_1, a_2, które możemy, oczywiście, wybrać dowolnie.

18. Równanie różnicowe $u_n-2\cos\vartheta\, u_{n-1}+u_{n-2}=0$ posiada rozwiązanie $u_n=A\cos n\vartheta+B\sin n\vartheta$, gdzie A i B są stałe dowolne.

19. Jeżeli u_n jest wielomianem zmiennej n stopnia k, wówczas $\Sigma u_n z^n$ jest szeregiem zwrotnym, którego skala równa się $(1-z)^{k+1}$.

(*Mathem. Tripos.* 1904.)

20. Rozwinąć $\dfrac{9}{(z-1)(z+2)^2}$ według potęg rosnących zmiennej z.

21. Jeżeli w rozwinięciu funkcji $\dfrac{z}{1+z+z^2}$ na szereg według potęg zmiennej z spółczynnikiem przy z^n jest $f(n)$, wówczas

$$(1)\quad f(n)+f(n-1)+f(n-2)=0,\qquad (2)\quad f(n)=\frac{\omega_3{}^n-\omega_3{}^{2n}}{\omega_3-\omega_3{}^2},$$

gdzie ω_3 jest pierwiastkiem sześciennym z 1. Dowieść, że $f(n)$ równa się 0, $+1$ lub -1, zależnie od tego, czy n jest kształtu $3k$, $3k+1$ czy też $3k+2$. Sprawdzić za pomocą tożsamości $z/(1+z+z^2)=z(1-z)/(1-z^3)$.

22. Dowieść, że

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+n}=\binom{n}{1}\frac{1}{a+1}-\binom{n}{2}\frac{1!}{(a+1)(a+2)}+\ldots,$$

jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią, a zaś nie równa się żadnej z liczb $-1, -2, \ldots, -n$.

[Wynika to z rozwinięcia wyrazów prawej części równości na ułamki proste. Jeżeli $a>-1$, możemy odrazu otrzymać twierdzenie, opierając się na równaniu

$$\int_0^1 x^a \frac{1-x^n}{1-x}\,dx=\int_0^1 (-1-x)^a \{1-(1-x)^n\}\frac{dx}{x}.$$

Rozwijamy mianowicie $(1-x^n)/(1-x)$ oraz $1-(1-x)^n$ według potęg x i całkujemy. Otrzymujemy tożsamość, która musi być słuszna przy wszelkich wartościach na a z wyjątkiem $-1, -2, \ldots -n$.]

23. Dowieść, że

$$\sum_0^n \frac{z^n}{n!}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n\,.\,n!}=\sum_1^\infty\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

[Mnożąc szeregi, widzimy, że spółczynnik przy z^n równa się

$$\frac{1}{n!}\left\{\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\ldots\right\},$$

poczym stosujemy wyniki poprzedniego zadania, kładąc $a=0$.]

24. Jeżeli przy $n\to\infty$ mamy $A_n\to A$, $B_n\to B$, to

$$(A_1B_n+A_2B_{n-1}+\ldots+A_nB_1)/n\to AB.$$

[Niech będzie $A_n=A+\varepsilon_n$. Dane wyrażenie równa się

$$A\,\frac{B_1+B_2+\ldots+B_n}{n}+\frac{\varepsilon_1B_n+\varepsilon_2B_{n-1}+\ldots+\varepsilon_nB_1}{n}.$$

Pierwszy wyraz dąży do AB (Zadanie 27 w końcu rozdziału IV). Moduł drugiego wyrazu jest mniejszy od $\beta\{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\ldots+|\varepsilon_n|\}/n$, gdzie β jest dowolną liczbą, byle większą od największej wartości $|B_\nu|$; stąd wynika, że drugi wyraz dąży do zera.]

25. Jeżeli $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$ oraz

$$A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\quad B_n=b_1+b_2+\ldots+b_n,\quad C_n=c_1+c_2+\ldots+c_n,$$

wówczas mamy

$$C_n=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\ldots+a_nB_1=b_1A_n+b_2A_{n-1}+\ldots+b_nA_1,$$

$$C_1+C_2+\ldots+C_n=A_1B_n+A_2B_{n-1}+\ldots+A_nB_1.$$

Opierając się na tym, dowieść, że jeśli szeregi Σa_n, Σb_n są zbieżne, a ich sumy równają się odpowiednio A i B, tak iż $A_n\to A$, $B_n\to B$, wówczas

$$\frac{C_1+C_2+\ldots+C_n}{n} \to AB.$$

Stąd wysnuć wniosek, że *jeśli szereg* Σc_n *jest zbieżny, to sumą jego jest* AB. Jest to t. zw. **twierdzenie Abela o mnożeniu szeregów.** Dowodzi ono, że możemy mnożyć przez siebie szeregi Σa_n, Σb_n nawet wówczas, gdy nie są one *bezwzględnie* zbieżne, *byle tylko spełniony był warunek, że szereg* Σc_n *jest zbieżny.*

26. Dowieść, że

$$\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots)^2=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})-\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots)^2=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{3})+\tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5})-\ldots$$

27. Przy jakich wartościach na m, n całka

$$\int_0^\pi \sin^m x\,(1-\cos x)^n dx$$

jest zbieżna? [Jeżeli $m+1$ oraz $m+2n+1$ są dodatnie.]

28. Jeżeli $a>1$, to

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

29. Dowieść słuszności wzorów

$$\int_0^\infty F(\sqrt{x^2+1}+x)\,dx=\tfrac{1}{2}\int_1^\infty\left(1+\frac{1}{y^2}\right)F(y)\,dy,$$

$$\int_0^\infty F(\sqrt{x^2+1}-x)\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^1\left(1+\frac{1}{y^2}\right)F(y)\,dy.$$

W szczególności, jeżeli $n>1$, wówczas

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\sqrt{x^2+1}+x)^n}=\int_0^\infty(\sqrt{x^2+1}-x)^n dx=\frac{n}{n^2-1}.$$

[W tym zadaniu i w następnych zakładamy, że dowolne funkcje, o których mowa, są tego rodzaju, iż rozważane całki mają sens, zgodny z określeniami §§ 170 i nast.]

30. Jeżeli $2y=ax-(b/x)$, gdzie a, b są liczby dodatnie, to y stale rośnie od $-\infty$ do ∞, gdy x rośnie od 0 do ∞. Opierając się na tym, dowieść, że

$$\int_0^\infty f\left(\frac{ax^2+b}{2x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^\infty f(\sqrt{y^2+ab})\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+ab}}\right)dy=$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^\infty f(\sqrt{y^2+ab})\,dy.$$

31. Jeżeli $2y=ax+(b/x)$, gdzie a, b są liczby dodatnie, to każdej

wartości y większej od $\sqrt{(ab)}$ odpowiadają dwie wartości na x. Oznaczając większą z tych wartości przez x_1, mniejszą przez x_2, dowieść, że gdy y rośnie od $\sqrt{(ab)}$ do ∞, x_1 rośnie od $\sqrt{(b/a)}$ do ∞, natomiast x_2 maleje od $\sqrt{(b/a)}$ do 0. Opierając się na tym, wykazać, że

$$\int_{\sqrt{b/a}}^{\infty} f(y)dx_1 = \frac{1}{a}\int_{\sqrt{ab}}^{\infty} f(y)\left\{\frac{y}{\sqrt{y^2-ab}}+1\right\}dy;$$

$$\int_{0}^{\sqrt{b/a}} f(y)dx_2 = \frac{1}{a}\int_{\sqrt{ab}}^{\infty} f(y)\left\{\frac{y}{\sqrt{y^2-ab}}-1\right\}dy;$$

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{ax^2+b}{2x}\right)dx = \frac{2}{a}\int_{\sqrt{ab}}^{\infty}\frac{yf(y)}{\sqrt{y^2-ab}}dy = \frac{2}{a}\int_0^{\infty} f(\sqrt{z^2+ab})\,dz.$$

32. Dowieść słuszności wzoru

$$\int_0^{\pi} f\left(\sec\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi} f(\operatorname{cosec} x)\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

33. Jeżeli a, b są liczbami dodatniemi, to

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)};\quad \int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2(a+b)}.$$

Opierając się na tych wzorach, wykazać, że jeśli α, β, γ są liczbami dodatniemi, przyczym $\beta^2 \geqq \alpha\gamma$, i jeżeli $A=\beta+\sqrt{(\alpha\gamma)}$, to

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\alpha x^4+2\beta x^2+\gamma} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\gamma A}};\quad \int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\alpha x^4+2\beta x^2+\gamma} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\alpha A}}.$$

Ostatni wzór można otrzymać z Zadania 30, kładąc $f(y)=1/(c^2+y^2)$. Dwa ostatnie wzory są również słuszne przy założeniu $\beta^2<\alpha\gamma$, ale dowód jest wtedy o wiele trudniejszy.

34. Jeżeli b jest liczbą dodatnią, to

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2b};\quad \int_0^{\infty}\frac{x^4dx}{\{(x^2-a^2)^2+b^2x^2\}^2} = \frac{\pi}{4b^3}.$$

35. Nierówność Schwarza (Zadanie 42 w końcu rozdziału VII) rozciągnąć na całki nieskończone pierwszego i drugiego rodzaju.

36. Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją, którą badaliśmy w końcu § 171, to

$$\int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx = \sum_0^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}.$$

37. Dowieść, że

$$\int_1^\infty dx\left(\int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right)=-1;\quad \int_1^\infty dy\left(\int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right)=1;$$

$$\int_1^\infty dx\left(\int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)=-\frac{\pi}{4};\quad \int_1^\infty dy\left(\int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Otrzymać analogiczne wzory dla przypadku, gdy całkujemy w obszarze od 0 do 1.

(*Mathem. Tripos*, 1913.)

ROZDZIAŁ IX.

O FUNKCJACH LOGARYTMICZNYCH I WYKŁADNICZYCH ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ.

189. Mieliśmy dotąd do czynienia z niewielu typami funkcji; do najważniejszych należały wielomiany, funkcje wymierne, funkcje algiebraiczne (jawne i uwikłane), wreszcie funkcje trygonometryczne i kołowe.

Oczywista rzecz, że nie wyczerpaliśmy listy tych funkcji, które mają doniosłe znaczenie w badaniach matematycznych. Rozwojowi wiedzy matematycznej towarzyszyło i towarzyszy wprowadzanie do Analizy coraz to nowych funkcji. Te nowe funkcje wprowadzamy zazwyczaj wówczas, gdy w badaniach naszych natrafiamy na zagadnienia matematyczne, nie dające się rozwiązać zapomocą znanych funkcji. Jest to poniekąd analogiczne do wprowadzenia liczb niewymiernych i zespolonych w celu rozwiązania równań, które zapomocą liczb poprzednio znanych nie dawały się rozwiązać. Zagadnienie całkowania stanowi najobfitsze źródło nowych funkcji. Przypuśćmy, że próbowano naprożno zcałkować jakąś funkcję $f(x)$ za pomocą znanych funkcji. Po wielu nieudanych próbach w umysłach badaczów powstaje podejrzenie, że zagadnienie to nie da się wogóle rozwiązać. Czasem udaje się *dowieść odrazu niemożliwości* rozwiązania, zazwyczaj jednak ścisły dowód powstaje o wiele później. Zwykle dzieje się tak: skoro tylko matematyk uważa, że ma rozsądne powody do przypuszczenia, że dana funkcja $f(x)$ nie da się zcałkować, wówczas wprowadza nową funkcję $F(x)$, którą *określa* jako żądaną całkę, czyli określa zapomocą równania $F'(x)=f(x)$. Wychodząc z tego określenia, bada on własności funkcji $F(x)$; jeżeli okaże się, że $F(x)$ posiada własności, których nie może mieć żadne skończone połączenie znanych funkcji, wówczas staje się rzeczą oczywistą, że mamy istotnie do czynienia z nową funkcją. W rozdziale IV mieliśmy przykład takiego postępowania: określiliśmy tam nową funkcję $\lg x$ zapomocą równania

$$\lg x = \int \frac{dx}{x}.$$

Przypomnijmy sobie, jakie powody skłoniły nas do mniemania, że $\lg x$ jest istotnie nową funkcją. Widzieliśmy najpierw (Przykł. XLV.4), że nie może to być funkcja wymierna, gdyż pochodna takiej funkcji jest sama funkcją wymierną, której mianownik posiada li tylko pierwiastki wielokrotne. Trudniej jest rozstrzygnąć pytanie, czy nie jest to funkcja algiebraiczna albo trygonometryczna. Po wielu próbach różniczkowania funkcji algiebraicznych dochodzimy do przekonania, że niewymierność algiebraiczna nie da się usunąć zapomocą różniczkowania. Tak samo różniczkując wzory, zawierające $\sin x$ lub $\cos x$, otrzymujemy nowe wzory, zawierające jedną lub drugą z tych funkcji.

W ten sposób powstaje przypuszczenie, że $\lg x$ jest zupełnie nową funkcją. Dowodu na to nie posiadamy dotąd*), ale przypuszczenie to wydaje się wielce prawdopodobne. Dalsze badanie tej funkcji wykaże, że posiada ona własności zupełnie niepodobne do własności znanych funkcji.

190. Określenie funkcji $\lg x$. Logarytm zmiennej x określamy zapomocą równania

$$\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Musimy założyć, że x jest liczbą dodatnią, gdyż (Przykł. LXXIX.2) całka nasza nie ma żadnego sensu, jeżeli obszar całkowania zawiera punkt $x=0$. Mogliśmy obrać inaczej niższą granicę całkowania, ale granica 1 okazuje się, przy bliższym badaniu, najdogodniejszą. Zgodnie z naszym określeniem mamy $\lg 1 = 0$.

Zbadajmy, jak zachowuje się funkcja $\lg x$, gdy x rośnie od 0 do ∞. Z określenia wynika, że $\lg x$ jest funkcją ciągłą, stale rosnącą wraz z x i mającą pochodną

---

*) Dowód znaleźć można w pracy: Hardy *The integration of functions of a single variable*, str. 35.

$$D_x \lg x = \frac{1}{x};$$

z § 168 wynika, że $\lg x$ dąży do ∞, gdy $x \to \infty$.

Jeżeli x jest liczbą dodatnią mniejszą od 1, wówczas $\lg x$ jest liczbą ujemną. Jakoż

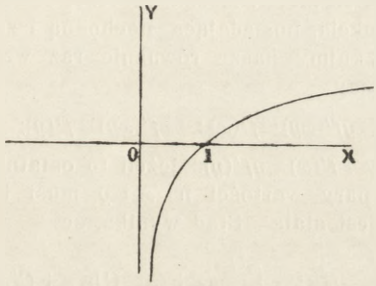
$$\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t} < 0.$$

Kładąc w całce $t = \frac{1}{u}$, mamy

$$\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_1^{1/x} \frac{du}{u} = -\lg(1/x).$$

Tak więc $\lg x$ stale dąży do $-\infty$, gdy x maleje od 1 do 0.

Ogólny kształt wykresu tej funkcji mamy na rys. 60. Po-



Rys. 60.

nieważ pochodna równa się $1/x$, zatym wzniesienie krzywej jest znaczne przy małych wartościach na x, przy dużych zaś wartościach argumentu wzniesienie jest bardzo niewielkie.

Przykłady LXXXV. 1. Na mocy określenia logarytmu dowieść, że przy $u > 0$ mamy

$$\frac{u}{1+u} < \lg(1+u) < u.$$

[Istotnie, $\lg(1+u) = \int_0^u \frac{dt}{1+t}$, a funkcja pod znakiem całki zawiera się między 1 i $\frac{1}{1+u}$.]

2. Jeżeli u jest liczbą dodatnią, to $\lg(1+u)$ zawiera się między $u - \frac{u^2}{2}$ a $u - \frac{u^2}{2(1+u)}$. [Oprzeć się na tym, że $\lg(1+u) = u - \int_0^u \frac{t\,dt}{1+t}$.]

3. Jeżeli $0<u<1$, to $u<-\lg(1-u)<\dfrac{u}{1-u}$.

4. Dowieść, że

$$\lim_{x\to 1}\frac{\lg x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\lg(1+t)}{t}=1.$$

191. Funkcyjne równanie, któremu czyni zadość funkcja $\lg x$. *Funkcja* $\lg x$ *czyni zadość równaniu funkcyjnemu*

$$f(xy)=f(x)+f(y)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

Jakoż, kładąc $t=yu$, mamy

$$\lg xy=\int_1^{xy}\frac{dt}{t}=\int_{1/y}^{x}\frac{du}{u}=\int_1^{x}\frac{du}{u}-\int_1^{1/y}\frac{du}{u}$$
$$=\lg x-\lg(1/y)=\lg x+\lg y.$$

Przykłady LXXXVI. 1. Można dowieść, że równaniu (1) nie czyni zadość żadna funkcja, posiadająca pochodną i zasadniczo różna od $\lg x$. Jakoż zróżniczkujmy nasze równanie raz względem x, drugi raz względem y, otrzymamy

$$yf'(xy)=f'(x)\,;\quad xf'(xy)=f'(y);$$

rugując $f'(xy)$, mamy $xf'(x)=yf'(y)$. Jeżeli to ostatnie równanie ma być słuszne dla każdej pary wartości na x i y, musi być $xf'(x)=C$, czyli $f'(x)=C/x$, gdzie C jest stałą. Stąd wynika, że

$$f(x)=\int\frac{C}{x}\,dx+C'=C\lg x+C'.$$

Łatwo widzieć, że $C'=0$. Tak więc nie istnieje rozwiązanie zasadniczo różne od $\lg x$, z wyjątkiem tylko trywialnego rozwiązania $f(x)=0$, które otrzymujemy, kładąc $C=0$.

2. W taki sam sposób dowieść, że równaniu

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

nie czyni zadość żadna funkcja, mająca pochodną i zasadniczo różna od $\operatorname{arc\,tg} x$.

192. Sposób, w jaki $\lg x$ **dąży do nieskończoności, gdy** $x\to\infty$. W Przykł. XXXIX.6 określiliśmy różne sposoby dążenia funkcji do nieskończoności. Orzekliśmy wtedy, że funkcji $f(x)$ przypisywać będziemy wielkość rzędu k, jeżeli iloraz $f(x)/x^k$ dąży do granicy różnej od zera, gdy $x\to\infty$.

Można z łatwością wyznaczyć ciąg funkcji, dążących wraz z x do nieskończoności, ale takich, że na mocy naszego określenia musimy im przypisać rząd wielkości, mniejszy od pierwszego. Takiemi są np. funkcje $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$,... Moglibyśmy utworzyć ogólniejsze określenie, a mianowicie powiedzieć, że funkcji x^α, gdzie α jest dowolną liczbą wymierną dodatnią, przypisujemy wielkość rzędu α, gdy x jest dużą liczbą. Moglibyśmy, biorąc na α wszelkie możliwe wartości, przypuszczać, że wyczerpiemy wszystkie możliwe „rzędy nieskończoności" funkcji $f(x)$. W każdym razie zdawałoby się, że jakkolwiek wolno dążyłaby do nieskończoności funkcja $f(x)$, możemy znaleźć tak małą wartość na α, że x^α dąży jeszcze wolniej do nieskończoności, i odwrotnie: jakkolwiek szybko dążyłaby do nieskończoności funkcja $f(x)$, możemy znaleźć tak wielką wartość na α, że x^α dąży do nieskończoności jeszcze szybciej.

Łatwo przekonać się, że takie przypuszczenie jest zupełnie mylne. Do najciekawszych własności funkcji $\lg x$ należy jej sposób dążenia wraz z x do nieskończoności. *Funkcja* $\lg x$ *dąży wraz z* x *do nieskończoności, ale wolniej od* **każdej** *dodatniej potęgi zmiennej* x. Innemi słowy: $\lg x \to \infty$, ale $(\lg x)/x^\alpha \to 0$ przy *wszelkich* dodatnich wartościach na α.

Fakt ten wyrażają niekiedy słowami: „rząd nieskończoności funkcji $\lg x$ jest nieskończenie mały", radzimy jednak czytelnikowi unikać takich orzeczeń, gdyż powiedzenie: „nieskończenie mały" jest tak samo pozbawione sensu, jak powiedzenie: „nieskończenie wielki".

193. Dowód twierdzenia, że $(\lg x)/x^\alpha \to 0$, **gdy** $x \to \infty$. Oznaczmy przez β dowolną liczbę dodatnią. W takim razie przy $t > 1$ mamy $1/t < 1/t^{1-\beta}$, a więc

$$\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{t^{1-\beta}},$$

czyli

$$\lg x < \frac{x^\beta - 1}{\beta} < \frac{x^\beta}{\beta},$$

o ile tylko $x > 1$. Jeżeli α jest liczbą dodatnią, możemy znaleźć mniejszą od niej liczbę dodatnią β. Mamy tedy

$$0 < \frac{\lg x}{x^\alpha} < \frac{x^{\beta-\alpha}}{\beta} \qquad (x > 1).$$

Ponieważ, dalej, $\alpha > \beta$, zatym $\frac{x^{\beta-\alpha}}{\beta} \to 0$, gdy $x \to \infty$, a wskutek tego

$$\frac{\lg x}{x^\alpha} \to 0.$$

194. Zachowanie się funkcji $\lg x$, **gdy** $x \to +0$. Kładąc $x = 1/y$, mamy

$$\frac{\lg x}{x^\alpha} = -y^\alpha \lg y,$$

zatym z poprzedniego twierdzenia wynika, że

$$\lim_{y \to +0} (y^\alpha \lg y) = -\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{x^\alpha} = 0.$$

Tak więc, gdy x dąży do zera przez wartości dodatnie, $\lg x$ dąży do $-\infty$, a $\lg(1/x) = -\lg x$ dąży do ∞, ale $\lg(1/x)$ dąży do ∞ wolniej niż jakakolwiek, całkowita czy ułamkowa, potęga dodatnia zmiennej $1/x$.

195. Skale nieskończoności. Skala logarytmiczna. Weźmy pod uwagę ciąg funkcji

$$x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}, \ldots, \sqrt[n]{x}, \ldots$$

posiadający tę własność, że jeśli $f(x)$ i $\varphi(x)$ są dwiema funkcjami tego ciągu, wówczas obie dążą do ∞, gdy $x \to \infty$, ale $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dąży albo do nieskończoności, albo do zera, zależnie od tego, czy $f(x)$ poprzedza w tym ciągu funkcję $\varphi(x)$, czy też następuje po niej.

Ciąg ten możemy przedłużyć, pisząc nowe wyrazy po stronie prawej wszystkich wyrazów poprzedniego ciągu. Po stronie prawej możemy najpierw napisać $\lg x$, jako dążący do ∞ wolniej od wszystkich wyrazów poprzedniego ciągu. Funkcja $\sqrt{\lg x}$ dąży do ∞ wolniej niż $\lg x$, $\sqrt[3]{\lg x}$ jeszcze wolniej dąży do ∞, i t. d. Mamy tedy ciąg

$$x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \ldots, \sqrt[n]{x}, \ldots, \lg x, \sqrt{\lg x}, \sqrt[3]{\lg x}, \ldots, \sqrt[n]{\lg x}, \ldots$$

utworzony z dwuch pojedyńczych ciągów nieskończonych, ustawionych jeden za drugim. Ale nie dość tego. Weźmy pod uwagę funkcję $\lg\lg x$, czyli logarytm logarytmu zmiennej x. Ponieważ $(\lg x)/x^\alpha \to 0$ przy wszelkich dodatnich wartościach na α, zatym kładąc $x = \lg y$, mamy

$$\frac{\lg\lg y}{(\lg y)^\alpha} = \frac{\lg x}{x^\alpha} \to 0.$$

Tak więc $\lg\lg y$ dąży wraz z y do ∞, ale wolniej niż jakakolwiek potęga dodatnia funkcji $\lg y$. Możemy tedy znów przedłużyć nasz ciąg funkcji w ten sposób:

$$x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},\ldots,\ \lg x,\ \sqrt{\lg x},\ \sqrt[3]{\lg x},\ldots,$$

$$\lg\lg x,\ \sqrt{\lg\lg x},\ \sqrt[3]{\lg\lg x},\ldots,\ \sqrt[n]{\lg\lg x},\ldots$$

Rzecz jasna, że wprowadzając funkcje $\lg\lg\lg x$ i t. d., możemy dowolnie kontynuować ten ciąg. Kładąc $x=1/y$, otrzymujemy analogiczną skalę nieskończoności dla funkcji zmiennej y, dążących do ∞, gdy y dąży do zera przez wartości dodatnie*).

Przykłady LXXXVII. 1. Między każde dwa wyrazy $f(x)$, $F(x)$ powyższego ciągu możemy wstawić nowy wyraz $\varphi(x)$, który dąży do ∞ prędzej niż $F(x)$, ale wolniej niż $f(x)$. [Np. między $\sqrt{x}$ i $\sqrt[3]{x}$ możemy wstawić $x^{5/12}$; między $\sqrt{\lg x}$ i $\sqrt[3]{\lg x}$ możemy wstawić $(\lg x)^{5/12}$. Wogóle funkcja $\varphi(x)=\sqrt{f(x)F(x)}$ czyni zadość temu warunkowi.

2. Znaleźć funkcję, któraby dążyła do ∞ wolniej niż $\sqrt{x}$, ale prędzej niż x^{α}, gdzie α jest dowolną liczbą wymierną, mniejszą od $1/2$. [Taką jest funkcja $\sqrt{x}/\lg x$ albo też $\sqrt{x}/(\lg x)^{\beta}$, gdzie β jest dowolną liczbą dodatnią wymierną.]

3. Znaleźć funkcję, któraby dążyła do ∞ wolniej niż $\sqrt{x}$, ale prędzej niż $\sqrt{x}/(\lg x)^{\alpha}$, gdzie α jest liczbą wymierną. [Taką jest np. funkcja $\sqrt{x}/(\lg\lg x)$. Z tych przykładów widać, że logarytmiczna skala nieskończoności jest z natury swej *niezupełna*.]

4. W jaki sposób zachowuje się funkcja

$$f(x)=\frac{x^{\alpha}(\lg x)^{\alpha'}(\lg\lg x)^{\alpha''}}{x^{\beta}(\lg x)^{\beta'}(\lg\lg x)^{\beta''}},$$

gdy $x\to\infty$?

[Przy $\alpha\neq\beta$ zachowanie się funkcji $x^{\alpha-\beta}(\lg x)^{\alpha'-\beta'}(\lg\lg x)^{\alpha''-\beta''}$ jest wyznaczone przez zachowanie się funkcji $x^{\alpha-\beta}$. Przy $\alpha=\beta$ rozstrzyga tu czynnik $(\lg x)^{\alpha'-\beta'}$, o ile tylko $\alpha'\neq\beta'$. Tak więc przy $\alpha>\beta$, jak również przy $\alpha=\beta$, $\alpha'>\beta'$ lub wreszcie przy $\alpha=\beta$, $\alpha'=\beta'$, $\alpha''>\beta''$ mamy $f(x)\to\infty$; natomiast przy $\alpha<\beta$ lub też przy $\alpha=\beta$, $\alpha'<\beta'$ albo wreszcie przy $\alpha=\beta$, $\alpha'=\beta'$, $\alpha''<\beta''$ mamy $f(x)\to 0$.]

5. Uporządkować funkcje $\dfrac{x}{\sqrt{\lg x}}$, $\dfrac{x\sqrt{\lg x}}{\lg\lg x}$, $\dfrac{x\lg\lg x}{\sqrt{\lg x}}$, $\dfrac{x\lg\lg\lg x}{\sqrt{\lg\lg x}}$ podług prędkości, z jaką te funkcje dążą do ∞ wraz z x.

*) Co do „skali nieskończoności" porów. pracę: Hardy, *Orders of infinity*. Cambridge Mathem. Tracts, Nr. 12.

6. Uporządkować funkcje $\frac{\lg\lg x}{x\lg x}$, $\frac{\lg x}{x}$, $\frac{x\lg\lg x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\frac{\sqrt{x+1}}{x(\lg x)^2}$ podług prędkości, z jaką dążą one do zera, gdy $x\to\infty$.

7. Uporządkować funkcje $x\lg\lg(1/x)$, $\frac{\sqrt{x}}{\lg(1/x)}$, $\sqrt{x\sin x\lg(1/x)}$, $(1-\cos x)\lg(1/x)$ podług prędkości, z jaką dążą one do zera, gdy $x\to+0$.

8. Dowieść, że

$$D_x\lg\lg x=\frac{1}{x\lg x},\quad D_x\lg\lg\lg x=\frac{1}{x\lg x\lg\lg x},\ \text{i t. d.}$$

9. Dowieść, że

$$D_x(\lg x)^\alpha=\frac{\alpha}{x(\lg x)^{1-\alpha}},\quad D_x(\lg\lg x)^\alpha=\frac{\alpha}{x\lg x(\lg\lg x)^{1-\alpha}}.$$

196. O liczbie *e*. Wprowadzimy teraz do naszych rozważań liczbę e, mającą niezmiernie doniosłe zastosowania w matematyce wyższej; należy ona wraz z liczbą π do stałych, najczęściej spotykanych w Analizie.

Liczbę e określamy jako *liczbę, której logarytm równa się* 1. Innemi słowami: powiadamy, że

$$1=\int_1^e\frac{dt}{t},$$

Ponieważ $\lg x$ jest funkcją stale rosnącą w ściślejszym znaczeniu wyrazu, zatym $\lg x$ może tylko raz jeden przybierać wartość 1. Dowodzi to, że e jest istotnie zupełnie określoną liczbą.

Otóż $$\lg xy=\lg x+\lg y,$$

$$\lg x^2=2\lg x,\quad \lg x^3=3\lg x,\ldots\ \lg x^n=n\lg x,$$

gdzie n jest dowolną liczbą dodatnią całkowitą. A więc

$$\lg e^n=n\lg e=n.$$

Jeżeli p i q są liczbami całkowitemi dodatniemi, a symbol $e^{p/q}$ oznacza pierwiastek dodatni stopnia q z liczby e^p, wówczas

$$p=\lg e^p=(\lg e^{p/q})^q=q\lg e^{p/q},$$

tak iż $$\lg e^{p/q}=p/q.$$

Jeśli więc y jest dowolną liczbą dodatnią wymierną, a e^y jest dodatnią liczbą, mamy

$$\lg e^y = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\lg e^{-y} = -\lg e^y = -y.$$

Tak więc równanie (1) jest słuszne dla wszelkich wymiernych wartości na y, czy to dodatnich, czy ujemnych. Innemi słowy, równania

$$y = \lg x, \quad x = e^y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wynikają jedno z drugiego, o ile tylko y jest liczbą wymierną, a e^y jest liczbą dodatnią.

Na razie nie podajemy określenia funkcji e^y w przypadku, gdy y jest liczbą niewymierną.

Przykład. Dowieść, że $2 < e < 3$. |Przedewszystkim $\int_1^2 \frac{dt}{t} < 1$, a więc $2 < e$. Mamy również

$$\int_1^3 \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{du}{2-u} + \int_0^1 \frac{du}{2+u} = 4\int_0^1 \frac{du}{4-u^2} > 1,$$

tak iż $e < 3$.|

197. O funkcji wykładniczej. *Funkcję wykładniczą* e^y określamy dla wszelkich wartości rzeczywistych zmiennej y jako odwrócenie funkcji logarytmicznej. Innemi słowy powiadamy, że

$$x = e^y, \quad \textit{jeżeli} \quad y = \lg x.$$

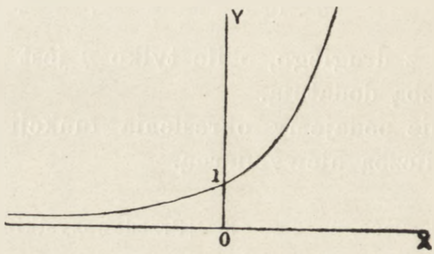
Widzieliśmy, że y rośnie stale (w ściślejszym znaczeniu) od $-\infty$ do ∞, gdy x rośnie od 0 do ∞. Tak więc każdej wartości x odpowiada jedna wartość na y, i odwrotnie. Dalej, y jest funkcją ciągłą zmiennej x, zatym, na mocy rozważań § 102, x musi być funkcją ciągłą zmiennej y.

Można z łatwością dowieść bezpośrednio ciągłości funkcji wykładniczej. Istotnie, jeżeli $x = e^y$ oraz $x + \xi = e^{y+\eta}$, to

$$\eta = \int_x^{x+\xi} \frac{dt}{t};$$

przy $\xi>0$ mamy $|\eta|>\frac{\xi}{x+\xi}$, a przy $\xi<0$ mamy $|\eta|>\frac{|\xi|}{x}$ i jeżeli η jest małą liczbą, to ξ jest również małą liczbą.

Tak więc e^y jest ciągłą dodatnią funkcją zmiennej y, stale rosnącą od 0 do ∞, gdy y rośnie od $-\infty$ do ∞. Prócz tego, jeżeli y jest liczbą wymierną, e^y jest dodatnią wartością potęgi y liczby e. W szczególności, gdy $y=0$, mamy $e^y=1$. Wykres tej funkcji mamy na rys. 61.



Rys. 61.

198. Najważniejsze własności funkcji wykładniczej. (1) Jeżeli $x=e^y$ czyli $y=\lg x$, to $dy/dx=1/x$, a $dx/dy=x=e^y$.

Tak więc *pochodna funkcji wykładniczej równa się tej funkcji.* Ogólniej mamy: *jeżeli* $x=e^{ay}$, *to* $dx/dy=ae^{ay}$.

(2) *Funkcja wykładnicza czyni zadość równaniu funkcyjnemu*

$$f(y+z)=f(y)f(z).$$

Jeżeli y, z są liczbami wymiernemi, słuszność równania wynika z elementarnych reguł działań na wykładnikach. Jeżeli jedna zmienna lub obie są niewymierne, możemy znaleźć ciągi nieskończone liczb wymiernych $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots ; z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ takie, że $\lim y_n=y$, $\lim z_n=z$. Wobec ciągłości funkcji wykładniczej mamy

$$e^y . e^z=\lim e^{y_n} . \lim e^{z_n}=\lim e^{y_n+z_n}=e^{y+z}.$$

W szczególności $e^y . e^{-y}=e^0=1$ czyli $e^{-y}=1/e^y$.

Równanie funkcyjne, któremu czyni zadość funkcja wykładnicza, moglibyśmy również otrzymać z równania funkcyjnego, któremu czyni zadość funkcja logarytmiczna. Istotnie, jeżeli $y_1=\lg x_1$ $y_2=\lg x_2$, a więc $x_1=e^{y_1}$, $x_2=e^{y_2}$, wówczas

$$y_1+y_2=\lg x_1+\lg x_2=\lg x_1x_2 \text{ czyli}$$

$$e^{y_1+y_2}=e^{\lg x_1x_2}=x_1x_2=e^{y_1}\cdot e^{y_2}.$$

Przykłady LXXXVIII. 1. 1. Jeżeli $dx/dy=ax$, to $x=Ke^{ay}$ gdzie K jest stałą.

2. Równanie $f(y+z)=f(y)f(z)$ nie posiada żadnego rozwiązania zasadniczo różnego od funkcji wykładniczej. [Zakładamy, że $f(y)$ posiada pochodną. Różniczkując kolejno względem y i z, mamy

$$f'(y+z)=f'(y)f(z),\quad f'(y+z)=f(y)f'(z),$$

$$\frac{f'(y)}{f(y)}=\frac{f'(z)}{f(z)},$$

a więc oba te stosunki są stałe. Jeśli tedy $x=f(y)$, to $dx/dy=ax$, gdzie a jest stałą, stąd zaś wynika, że $x=Ke^{ay}$ (Przykł. 1).]

3. Dowieść, że $(e^{ay}-1)/y\to a$, gdy $y\to 0$. [Stosując twierdzenie o wartości pośredniej, mamy $e^{ay}-1=aye^{a\eta}$, gdzie $0<|\eta|<|y|$.]

199. (3). *Funkcja e^y dąży wraz z y do nieskończoności, ale dąży prędzej niż jakakolwiek potęga zmiennej y,* czyli

$$\lim \frac{y^\alpha}{e^y}=\lim y^\alpha e^{-y}=0,$$

gdy $y\to\infty$, i to przy wszelkich, dowolnie wielkich wartościach wykładnika α.

Widzieliśmy, że jakkolwiek małą liczbą dodatnią jest β, mamy zawsze $(\lg x)/x^\beta\to 0$, gdy $x\to\infty$. Kładąc $\alpha=1/\beta$, widzimy, że przy dowolnie wielkich dodatnich wartościach na α mamy $(\lg x)^\alpha/x\to 0$. Pozostaje zastąpić x przez e^y.

Rzecz jasna, że $e^{my}\to\infty$, jeżeli $m>0$, jeżeli zaś $m<0$, to $e^{my}\to 0$, a w obu wypadkach dążenie to jest szybsze niż dążenie do ∞ lub do 0 jakiejkolwiek potęgi zmiennej y.

Wynika stąd, że możemy zbudować ciąg funkcji, dążących coraz to prędzej do ∞, gdy $x\to\infty$, a mianowicie ciąg

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ e^x,\ e^{2x},\ \ldots,\ e^{x^2},\ \ldots,\ e^{x^3},\ \ldots,\ e^{e^x},\ \ldots$$

200. O funkcji a^x. Funkcję a^x określiliśmy dotąd tylko w przypadku, gdy x jest liczbą wymierną; ogólne określenie posiadamy tylko dla $a=e$. Postaramy się teraz uogólnić te określenia na przypadek dowolnej liczby dodatniej a i dowolnego wykładnika x.

Przypuśćmy, że x jest liczbą wymierną dodatnią p/q. W takim razie dodatnia wartość y potęgi $a^{p/q}$ dana jest przez równanie $y^q = a^p$, skąd wynika, że

$$q \lg y = p \lg a, \quad \lg y = (p/q) \lg a = x \lg a,$$

a więc
$$y = e^{x \lg a}.$$

Równanie to przyjmujemy jako *określenie symbolu a^x w przypadku, gdy x jest liczbą niewymierną.* Np. $10^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \lg 10}$. Zauważmy, że w tym wypadku symbol a^x określamy tylko dla dodatnich wartości liczby a, że a^x jest wtedy symbolem liczby dodatniej i że $\lg a^x = x \lg a$.

Do najważniejszych własności funkcji a^x należą następujące:

(1) Przy każdej wartości na a mamy $a^x \times a^y = a^{x+y}$ oraz $(a^x)^y = a^{xy}$, czyli że prawa wykładników pozostają słuszne, jeżeli te wykładniki są liczbami niewymiernemi. Istotnie, mamy

$$a^x \times a^y = e^{x \lg a} \times e^{y \lg a} = e^{(x+y) \lg a} = a^{x+y};$$

$$(a^x)^y = e^{y \lg a^x} = e^{xy \lg a} = a^{xy}.$$

(2) Jeżeli $a > 1$, to $a^x = e^{x \lg a} = e^{\alpha x}$, gdzie α jest liczbą dodatnią. Wykres funkcji a^x jest w tym przypadku podobny do wykresu funkcji e^x; gdy $x \to \infty$, to $a^x \to \infty$ prędzej niż jakakolwiek potęga zmiennej x.

Jeżeli $a < 1$, to $a^x = e^{x \lg a} = e^{-\beta x}$, gdzie β jest liczbą dodatnią. I znów $a^x \to 0$ prędzej, niż jakakolwiek potęga zmiennej $1/x$.

(3) a^x jest funkcją ciągłą zmiennej x. Mamy przytym

$$D_x a^x = D_x e^{x \lg a} = e^{x \lg a} \lg a = a^x \lg a.$$

(4) a^x jest również funkcją ciągłą zmiennej a, przyczym

$$D_a a^x = D_a e^{x \lg a} = e^{x \lg a} (x/a) = x a^{x-1}.$$

(5) Mamy $\dfrac{a^x - 1}{x} \to \lg a$, gdy $x \to 0$. Jest to poprostu wniosek z twierdzenia, że $D_x a^x = a^x \lg a$, ale wzór ten, ze względu na swą szczególną formę, bywa często bardzo użyteczny. Jest

on równoznaczny z wzorem $\frac{e^{\alpha x}-1}{x} \to \alpha$, gdy $x \to 0$ (Przykład LXXXVIII. 3).

W poprzednich rozdziałach poznaliśmy wiele twierdzeń, dotyczących funkcji a^x w przypadku, gdy x jest liczbą wymierną; obecnie, na mocy nowych określeń, możemy te twierdzenia uogólnić na przypadek, gdy wykładnik x jest dowolną liczbą rzeczywistą.

201. Liczba e jako granica. W rozdziale IV, § 66 dowiedliśmy, że funkcja $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dąży do granicy, gdy $n \to \infty$, i granicę tę oznaczyliśmy literą e. Teraz dowiedziemy, że ta granica jest tożsama z liczbą e, o której mówiliśmy w poprzednim paragrafie. Możemy przytym dowieść ogólniejszego twierdzenia, a mianowicie

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}=e^x \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Ze względu na doniosłość tego twierdzenia, dowiedziemy go dwoma sposobami:

(1) Ponieważ $\frac{d}{dt}\lg(1+xt)=\frac{x}{1+xt}$,

zatym
$$\lim_{h\to 0}\frac{\lg(1+xh)}{h}=x.$$

Kładąc $h=1/\xi$, mamy

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\left[\xi\lg\left(1+\frac{x}{\xi}\right)\right]=x.$$

Funkcja wykładnicza jest ciągła, zatym

$$\left(1+\frac{x}{\xi}\right)^\xi=e^{\xi\lg(1+(x/\xi))}\to e^x,$$

gdy $\xi\to\pm\infty$; t. j.

$$\lim_{\xi\to\infty}\left(1+\frac{x}{\xi}\right)^\xi=\lim_{\xi\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\xi}\right)^\xi=e^x. \quad . \; . \; . \; (2)$$

Jeżeli przypuścimy, że ξ dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$, przybierając tylko wartości całkowite, otrzymamy wzór (1).

(2) Przy n dowolnie wielkim całkowitym i dodatnim oraz przy $x>1$ mamy

$$\int_1^x \frac{dt}{t^{1+(1/n)}} < \int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{t^{1-(1/n)}},$$

czyli
$$n(1-x^{-1/n}) < \lg x < n(x^{1/n}-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Kładąc $y=\lg x$, tak iż y jest liczbą dodatnią a $x=e^y$, otrzymujemy po kilku prostych przekształceniach

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n < x < \left(1-\frac{y}{n}\right)^{-n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Niech dalej będzie

$$1+\frac{y}{n}=\eta_1, \qquad 1-\frac{y}{n}=\frac{1}{\eta_2}.$$

Mamy $0<\eta_1<\eta_2$ przy dostatecznie dużych wartościach na n; na mocy zaś wzoru (9), § 67 mamy

$$\eta_2{}^n-\eta_1{}^n < n\eta_2{}^{n-1}(\eta_2-\eta_1)=\frac{y^2\eta_2{}^n}{n},$$

a to wyrażenie dąży, oczywiście, do 0, gdy $n\to\infty$. Żądany wzór wynika odrazu z nierówności (4). Chcąc otrzymać ogólniejsze twierdzenie (2), postępujemy w taki sam sposób, zastępując tylko $1/n$ przez zmienną ciągłą h.

202. Funkcja $\lg x$ **jako granica.** Możemy również dowieść, że

$$\lim n(1-x^{-1/n})=\lim n(x^{1/n}-1)=\lg x.$$

Istotnie,
$$n(x^{1/n}-1)-n(1-x^{-1/n})=n(x^{1/n}-1)(1-x^{-1/n}).$$

Iloczyn ten dąży do 0, gdy $n\to\infty$, gdyż $n(x^{1/n}-1)$ dąży do granicy (§ 68), a $x^{-1/n}$ dąży do 1 (Przykł. XXX.10). Pozostaje teraz zastosować nierówności (3) poprzedniego paragrafu.

Przykłady LXXXIX. 1. Kładąc $y=1$, $n=6$ w nierównościach (4) § 201, dowieść, że $2.5<e<2.9$.

2. Jeżeli $t>1$, to $\dfrac{t^{1/n}-t^{-1/n}}{t-t^{-1}}<\dfrac{1}{n}$, a więc, jeśli $x>1$, to

$$\int_1^x \frac{dt}{t^{1-(1/n)}}-\int_1^x \frac{dt}{t^{1+(1/n)}} < \frac{1}{n}\int_1^x \left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}=\frac{1}{n}\left(x+\frac{1}{x}-2\right).$$

Z tych wzorów wysnuć twierdzenie § 202.

3. Jeżeli ξ_n jest funkcją zmiennej n taką, że $n\xi_n\to k$, gdy $n\to\infty$, to $(1+\xi_n)^n\to e^k$. [Pisząc $n\lg(1+\xi_n)$ w postaci

$$k\left(\frac{n\xi_n}{k}\right)\frac{\lg(1+\xi_n)}{\xi_n}$$

i opierając się na Przykł. LXXXV.4, widzimy, że $n\lg(1+\xi_n)\to k$.]

4. Jeżeli $n\xi_n\to\infty$, to $(1+\xi_n)^n\to\infty$; jeżeli zaś $1+\xi_n>0$. a $n\xi_n\to-\infty$, to

$$(1+\xi_n)^n\to 0.$$

5. Na mocy wzoru (1), § 201 dowieść, że e^y dąży do ∞ prędzej, niż jakakolwiek potęga zmiennej y.

203. Logarytmy dziesiętne. W algiebrze elementarnej określają logarytm liczby x przy zasadzie a zapomocą równania

$$x=a^y, \text{ czyli } y=\lg_a x,$$

przyczym często zapominają dodać, że to określenie dotyczy tylko wymiernych wartości zmiennej y, gdyż wykładniki niewymierne nie zostały uprzednio określone.

Zgodnie z tym określeniem, mieliśmy dotąd do czynienia z logarytmami przy zasadzie e. W rachunkach praktycznych stosuje się zawsze logarytmy dziesiętne, t. j. obliczone przy zasadzie 10. Łatwo jest przejść od jednego układu logarytmów do drugiego. Jakoż niech będzie

$$y=\lg_e x,\quad z=\lg_{10} x;$$

w takim razie

$$x=e^y=10^z=e^{z\lg 10},$$

tak iż

$$\lg_{10}x=\frac{\lg_e x}{\lg_e 10}.$$

Badanie kwestji, dotyczących rachunków praktycznych, a w szczególności rachunku logarytmicznego, nie wchodzi w zakres spraw, które mamy zamiar w tej książce roztrząsać.

Przykłady XC. 1. Dowieść, że

$$D_x e^{ax}\cos bx=re^{ax}\cos(bx+\vartheta);\quad D_x e^{ax}\sin bx=re^{ax}\sin(bx+\vartheta),$$

gdzie $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\vartheta=a/r$, $\sin\vartheta=b/r$. Na tej zasadzie obliczyć pochodne rzędu n funkcji $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, a w szczególności wykazać, że $D_x^n e^{ax}=a^n e^{ax}$.

2. Wykreślić krzywą $y=e^{-ax}\sin bx$, gdzie a i b są liczby dodatnie. Dowieść, że y ma nieskończenie wiele największości, których wartości tworzą postęp gieometryczny i które leżą na krzywej

$$y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{-ax}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1912.)

3. **Całki, zawierające funkcje wykładnicze.** Dowieść, że

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\,e^{ax}; \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax}.$$

4. Dowieść, że pola kolejnych obszarów, ograniczonych przez krzywą Przykładu 2 i przez dodatnią część osi x-ów, tworzą postęp gieometryczny i że suma ich równa się

$$\frac{b}{a^2+b^2}\,\frac{1+e^{-a\pi/b}}{1-e^{-a\pi/b}}.$$

5. Jeżeli $a>0$, to

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}; \quad \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

6. Jeżeli $I_n = \int e^{ax}x^n dx$, to $aI_n = e^{ax}x^n - nI_{n-1}$.

7. Jeżeli n jest liczbą dodatnią całkowitą, to

$$\int_0^{\xi} e^{-x}x^n dx = n!\,e^{-\xi}\left(e^{\xi} - 1 - \xi - \frac{\xi^2}{2!} - \ldots - \frac{\xi^n}{n!}\right)$$

oraz

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx = n!$$

8. Wskazać sposób całkowania wszelkich funkcji wymiernych zmiennej e^x.

9. Obliczyć
$$\int \frac{e^{2x}dx}{(c^2e^x+a^2e^{-x})(c^2e^x+b^2e^{-x})}$$
rozróżniając dwa przypadki, zależnie od tego, czy $a=b$, czy też $a \neq b$.

10. Dowieść, że można zcałkować każdą funkcję kształtu $P(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots)$, gdzie P jest symbolem wielomianu.

11. Wskazać sposób całkowania każdej funkcji kształtu

$$P(x,\ e^{ax},\ e^{bx}, \ldots,\ \cos lx,\ \cos mx, \ldots,\ \sin lx,\ \sin mx, \ldots).$$

12. Dowieść zbieżności całki $\int_a^{\infty} e^{-\lambda x}R(x)dx$, gdzie $\lambda>0$, a zaś jest większe od największego pierwiastka mianownika funkcji $R(x)$.

13. Dowieść, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2+\mu x}dx$, gdzie $\lambda>0$, jest zbieżna przy wszelkich wartościach na μ i że to samo da się powiedzieć o całce $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2+\mu x}x^n dx$, w której n jest liczbą całkowitą dodatnią.

14. Wykreślić funkcje e^{x^2}, e^{-x^2}, xe^{x}, xe^{-x}, xe^{x^2}, xe^{-x^2}, $x \lg x$; wyznaczyć maxima, minima oraz punkty przegięcia tych wykresów.

15. Równanie $e^{ax}=bx$, w którym a, b są liczby dodatnie, posiada dwa pierwiastki rzeczywiste, jeden pierwiastek lub też nie ma żadnego, zależnie od tego, czy $b>ae$, $b=ae$, $b<ae$. [Styczna do krzywej $y=e^{ax}$ w punkcie $(\xi, e^{a\xi})$ ma równanie

$$y-e^{a\xi}=ae^{a\xi}(x-\xi);$$

styczna przechodzi przez początek spółrzędnych, jeżeli $a\xi=1$, tak iż prosta $y=aex$ jest styczna do krzywej w punkcie $(1/a, e)$. Wystarczy teraz poprowadzić prostą $y=bx$. Czytelnik powinien sam zbadać przypadek, gdy a i b, albo jedna z tych liczb jest ujemna.]

16. Równanie $e^x=1+x$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty $x=0$, a równanie $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}$ ma trzy rzeczywiste pierwiastki.

17. Wykreślić funkcje

$$\lg(x+\sqrt{x^2+1}), \quad \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad e^{-ax}\cos^2 bx,$$

$$e^{-(1/x)^2}, \quad e^{-(1/x)^2}\sqrt{1/x}, \quad e^{-\operatorname{ctg} x}, \quad e^{-\operatorname{ctg}^2 x}.$$

18. Gdzie, mniej więcej, leżą pierwiastki rzeczywiste równań

$$\lg(x+\sqrt{x^2+1})=\frac{x}{100}; \quad e^x-\frac{2+x}{2-x}=\frac{1}{10000}, \quad e^x\sin x=7;$$

$$e^{x^2}\sin x=10000.$$

19. **Funkcje hiperboliczne.** Funkcje hiperboliczne $\cosh x$, $\sinh x$ (czyli dostawę i wstawę hiperboliczną) określamy zapomocą równań

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x=\frac{\sinh x}{\cosh x}; \quad \operatorname{ctgh} x=\frac{\cosh x}{\sinh x};$$

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{cosech} x=\frac{1}{\sinh x}.$$

Wykreślić te funkcje.

20. Ustalić wzory

$$\cosh(-x)=\cosh x, \quad \sinh(-x)=-\sinh x, \quad \operatorname{tgh}(-x)=-\operatorname{tgh} x,$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1, \quad \operatorname{sech}^2 x+\operatorname{tgh}^2 x=1, \quad \operatorname{ctgh}^2 x-\operatorname{cosech}^2 x=1,$$

$$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x, \quad \sinh 2x=2\sinh x\cosh x,$$

$$\cosh(x+y)=\cosh x \cosh y+\sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y)=\sinh x \cosh y+\cosh x \sinh y.$$

21. Sprawdzić, że wszystkie powyższe wzory dadzą się otrzymać z odpowiednich wzorów na funkcje trygonometryczne, jeżeli w nich położymy $\cosh x$ zamiast $\cos x$ oraz $i\sinh x$ zamiast $\sin x$.

[Przyczynę tej analogji wyjaśnimy w rozdziale X.]

22. Funkcje $\cosh x$, $\sinh x$ wyrazić zapomocą $\cosh 2x$ lub $\sinh 2x$ i zbadać szczegółowo sprawę znaków.

(*Mathem. Tripos*, 1908.)

23. Dowieść, że

$$D_x \cosh x=\sinh x,\quad D_x \sinh x=\cosh x,\quad D_x \operatorname{tgh} x=\operatorname{sech}^2 x,$$

$$D_x \operatorname{ctgh} x=-\operatorname{cosech}^2 x,$$

$$D_x \operatorname{sech} x=-\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x,\quad D_x \operatorname{cosech} x=-\operatorname{cosech} x \operatorname{ctgh} x,$$

$$D_x \lg \cosh x=\operatorname{tgh} x,\quad D_x \lg|\sinh x|=\operatorname{ctgh} x,$$

$$D_x \operatorname{arctg} e^x=\tfrac{1}{2}\operatorname{sech} x,\quad D_x \lg\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right|=\operatorname{cosech} x.$$

24. Dowieść, że $\cosh x>1$ i że $-1<\operatorname{tgh} x<1$.

25. Jeżeli $y=\cosh x$, to $x=\lg(y\pm\sqrt{y^2-1})$; jeżeli $y=\sinh x$, to $x=\lg(y+\sqrt{y^2+1})$; jeżeli $y=\operatorname{tgh} x$, to $x=\frac{1}{2}\lg\dfrac{1+y}{1-y}$. Dlaczego w pierwszym przypadku mamy dwa znaki?

26. Funkcje, odwrotne względem funkcji hiperbolicznych, możemy oznaczyć odpowiednio symbolami $\operatorname{arg\,sinh} x$, $\operatorname{arg\,cosh} x$, $\operatorname{arg\,tgh} x$. Dowieść, że funkcja $\operatorname{arg\,cosh} x$ jest określona tylko przy $x\geqq 1$ i jest naogół funkcją dwuwartościową, natomiast $\operatorname{arg\,sinh} x$ jest określone przy wszelkim rzeczywistym x, a $\operatorname{arg\,tgh} x$ przy $-1<x<1$, przyczym obie te funkcje są jednowartościowe. Naszkicować wykresy tych funkcji.

27. Jeżeli $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, y zaś jest liczbą dodatnią, a $\cos x \cosh y=1$, wówczas

$$y=\lg(\sec x+\operatorname{tg} x),\quad D_x y=\sec x,\quad D_y x=\operatorname{sech} y.$$

28. Jeżeli $\alpha>0$, to $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}=\operatorname{arg\,sinh}(x/\alpha)$, a $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$ równa się $\operatorname{arg\,cosh}(x/\alpha)$ przy $x>0$, natomiast przy $x<0$ całka ta równa się $-\operatorname{arg\,cosh}(-x/\alpha)$.

29. Przy $\alpha>0$ całka $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-\alpha^2}$ równa się albo $-(1/\alpha)\operatorname{arg\,tgh}(x/\alpha)$, albo też $-(1/\alpha)\operatorname{arg\,ctgh}(x/\alpha)$ zależnie od tego, czy $|x|$ jest mniejsze czy większe od α.

30. Dowieść, że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = 2 \lg(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) \qquad (a<b<x),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)}} = 2 \lg(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}) \qquad (x<a<b),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \qquad (a<x<b).$$

31. Dowieść, że

$$\int_0^1 x \lg\left(1+\frac{x}{2}\right) dx = {}^3/_4 - {}^3/_2 \lg {}^3/_2 < \tfrac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = {}^1/_6 .$$

(*Mathem. Tripos*, 1913.)

32. Rozwiązać równanie $a \cosh x + b \sinh x = c$, gdzie $c>0$, a mianowicie wykazać, że przy $b^2+c^2-a^2<0$ nie ma ono pierwiastków rzeczywistych, natomiast przy $b^2+c^2-a^2>0$ równanie ma jeden, dwa lub nie ma żadnego pierwiastka zależnie od tego, czy $a+b$ oraz $a-b$ są dodatnie, różnych znaków, czy też ujemne. Zbadać przypadek, gdy $b^2+c^2-a^2=0$.

33. Rozwiązać układ równań $\cosh x \cosh y = a$, $\sinh x \sinh y = b$.

34. Gdy $x \to \infty$, mamy $x^{1/x} \to 1$. [Istotnie, $x^{1/x} = e^{\lg x/x}$, $\lg x/x \to 0$. Porów. Przykł. XXX.11.] Dowieść również, że $x^{1/x}$ posiada maximum przy $x=e$ i wykreślić tę funkcję przy $x>0$.

35. Przy $x \to +0$ mamy $x^x \to 1$.

36. Jeżeli $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} \to l$ (gdzie $l>0$), gdy $n \to \infty$, wówczas $\sqrt[n]{f(n)} \to l$. [Istotnie, $\lg f(n+1) - \lg f(n) \to l$, a więc $(1/n) \lg f(n) \to \lg l$.]

37. Gdy $n \to \infty$, mamy $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \dfrac{1}{e}$.

38. Gdy $n \to \infty$, mamy $\sqrt[n]{(2n!)/(n!)^2} \to 4$.

39. Znaleźć przybliżone rozwiązanie równania $e^x = x^{1000000}$.

[Z rozważań graficznych łatwo przekonać się, że równanie ma jeden pierwiastek ujemny, cokolwiek większy od -1, oraz dwa pierwiastki dodatnie, z których jeden jest cokolwiek większy od 1, drugi zaś jest b. dużą liczbą. W celu przybliżonego obliczenia tego pierwiastku, możemy postąpić w następujący sposób. Mamy

$$x = 10^6 \lg x, \quad \lg x = 13{\cdot}82 + \lg\lg x, \quad \lg\lg x = 2{\cdot}63 + \lg\left(1 + \frac{\lg\lg x}{13{\cdot}82}\right),$$

przyczym dwa ostatnie równania są „przybliżone", gdyż 13·82 oraz 2·63 są przybliżonemi wartościami $\lg 10^6$ oraz $\lg\lg 10^6$. Z tych równań łatwo dostrzec, że stosunki $\lg x : 13{\cdot}82$ i $\lg\lg x : 2{\cdot}63$ niewiele różnią się od jedności i że, kładąc

$$x = 10^6(13{\cdot}82 + \lg\lg x) = 10^6(13{\cdot}82 + 2{\cdot}63) = 16450000,$$

popełniamy błąd mniejszy od 200000. Przybliżenie to jest, oczywiście niewielkie, ale pozwala na zorjentowanie się co do rzędu wielkości pierwiastka.]

204. Cechy logarytmiczne zbieżności szeregów i całek. W rozdziale VIII (§§ 168 i nast.) dowiedliśmy że

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x^s} \qquad (a>0)$$

są zbieżne przy $s>1$ i rozbieżne przy $s \leqq 1$. Tak więc $\Sigma(1/n)$ jest szeregiem rozbieżnym, natomiast $\Sigma n^{-1-\alpha}$ jest zbieżny przy wszelkich dodatnich wartościach na α.

Otóż w § 193 widzieliśmy, że zapomocą logarytmów możemy zbudować dowolnie wiele funkcji dążących (przy $n \to \infty$) do zera prędzej niż $1/n$, ale wolniej niż $n^{-1-\alpha}$, jakkolwiek małą liczbą dodatnią byłaby liczba α. Taką funkcją jest np. $1/(n \lg n)$. Zagadnienia zbieżności czy rozbieżności szeregu

$$\Sigma \frac{1}{n \lg n}$$

niepodobna rozstrzygnąć przez porównanie z szeregiem kształtu Σn^{-s}.

To samo da się powiedzieć o szeregach

$$\Sigma \frac{1}{n(\lg n)^2}, \quad \Sigma \frac{\lg\lg n}{n\sqrt{\lg n}} \quad \text{i t. p.}$$

Cechy, po których można poznać zbieżność takich szeregów, możemy wysnuć z cechy zbieżności Maclaurina. Istotnie,

$$D_x(\lg x)^{1-s} = \frac{1-s}{x(\lg x)^s}, \quad D_x \lg\lg x = \frac{1}{x \lg x},$$

zatym

$$\int_a^\xi \frac{dx}{x(\lg x)^s} = \frac{(\lg \xi)^{1-s} - (\lg a)^{1-s}}{1-s}, \quad \int_a^\xi \frac{dx}{x \lg x} = \lg\lg\xi - \lg\lg a,$$

o ile $a>1$. Jeżeli $\xi \to \infty$, wówczas przy $s>1$ pierwsza całka dąży do $-(\lg a)^{1-s}/(1-s)$, a przy $s<1$ dąży do ∞. Tak więc *szereg i całka*

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n(\lg n)^s}, \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\lg x)^s},$$

w których n_0 *i* a *są większe od* 1, *są zbieżne, jeżeli* $s > 1$, *i rozbieżne, jeżeli* $s \leq 1$.

Wynika stąd, że szereg $\Sigma\varphi(n)$ jest zbieżny, o ile przy każdym $n > n_0$ funkcja $\varphi(n)$ jest dodatnia i mniejsza od $\dfrac{K}{n(\lg n)^s}$, gdzie $s > 1$; natomiast szereg ten jest rozbieżny, jeżeli przy każdym $n > n_0$ funkcja $\varphi(n)$ jest dodatnia i większa od $\dfrac{K}{n \lg n}$. Analogiczne twierdzenie o całkach czytelnik sam sformułuje.

Przykłady XCI. 1. Szeregi

$$\Sigma \frac{1}{n(\lg n)^2}, \quad \Sigma \frac{(\lg n)^{100}}{n^{101/100}}, \quad \Sigma \frac{n^2-1}{n^2+1} \cdot \frac{1}{n(\lg n)^{7/6}}$$

są zbieżne. [Zbieżność pierwszego szeregu wynika z powyższego twierdzenia. Zbieżność drugiego wynika z faktu, że przy każdym $n > n_0$ mamy $(\lg n)^{100} < n^{\beta}$, gdzie β jest dowolnie małą liczbą dodatnią. Kładąc $\beta = 1/200$, widzimy, że przy $n > n_0$ mamy $u_n < n^{-201/200}$. Zbieżność trzeciego szeregu wynika z rozważań poprzedniego paragrafu.]

2. Szeregi $\Sigma \dfrac{1}{n(\lg n)^{6/7}}$, $\quad \Sigma \dfrac{1}{n^{100/101}(\lg n)^{100}}$, $\quad \Sigma \dfrac{n \lg n}{(n \lg n)^2 + 1}$

są rozbieżne.

3. Przy $s > 0$ szeregi

$$\Sigma \frac{(\lg n)^p}{n^{1+s}}, \quad \Sigma \frac{(\lg n)^p (\lg \lg n)^q}{n^{1+s}}, \quad \Sigma \frac{(\lg \lg n)^p}{n(\lg n)^{1+s}}$$

są zbieżne przy wszelkich wartościach na p i q, natomiast szeregi

$$\Sigma \frac{1}{n^{1-s}(\lg n)^p}, \quad \Sigma \frac{1}{n^{1-s}(\lg n)^p(\lg \lg n)^q}, \quad \Sigma \frac{1}{n(\lg n)^{1-s}(\lg \lg n)^p}$$

są rozbieżne.

4. Kwestji zbieżności lub rozbieżności takich szeregów, jak

$$\Sigma \frac{1}{n \lg n \lg \lg n}, \quad \Sigma \frac{\lg \lg \lg n}{n \lg n \sqrt{\lg \lg n}}$$

niepodobna rozstrzygnąć zapomocą twierdzenia § 204, gdyż w obu szeregach wyraz ogólny dąży do zera prędzej niż $1/(n \lg n)$, ale wolniej niż $n^{-1}(\lg n)^{-1-\alpha}$, gdzie α jest dowolnie małą liczbą dodatnią. Musimy tedy szukać subtelniejszych cech zbieżności. Wychodząc z równań

$$D_x(\lg_k x)^{1-s} = \frac{1-s}{x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_{k-1} x (\lg_k x)^s},$$

$$D_x \lg_{k+1} x = \frac{1}{x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_{k-1} x \lg_k x},$$

w których $\lg_2 x = \lg \lg x$, $\lg_3 x = \lg \lg \lg x$, i t. d., dowieść następującego twierdzenia: *jeżeli przy każdym* $n \geqq n_0$ *lub przy* $x \geqq a$ *funkcje* $\lg_k n$ *oraz* $\lg_k x$ *są dodatnie, wówczas szereg i całka*

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n \lg n \lg_2 n \ldots \lg_{k-1} n (\lg_k n)^s}, \quad \int_a^{\infty} \frac{dx}{x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_{k-1} x (\lg_k x)^s}$$

są zbieżne przy $s > 1$ *i rozbieżne przy* $s \leqq 1$.

Wartości na n_0 i a rosną bardzo szybko wraz z k; np. chcąc mieć $\lg x > 0$, wystarczy założyć $x > 1$; $\lg_2 x > 0$ wymaga, by było $x > e$, $\lg_3 x > 0$ wymaga $x > e^e$, i t. d., a łatwo przekonać się, że $e^e > 10$, $e^{e^e} > 20000$, i t. d.

Zaznaczamy, że funkcje wykładnicze e^{e^x}, $e^{e^{e^x}}$, i t. d. rosną nadzwyczajnie szybko wraz z x. Oczywista rzecz, że to samo możnaby powiedzieć o funkcjach a^{a^x} i t. p., gdzie $a > 1$. Odwrotnie, funkcje kształtu $\lg_k x$ rosną bardzo powoli; np. chcąc mieć $\lg_4 x > 1$, musimy na x wziąć liczbę, mającą więcej niż 8000 cyfr.

5. Dowieść, że całka $\int_0^a \frac{1}{x}\left[\lg\left(\frac{1}{x}\right)\right]^s dx$, w której $0 < a < 1$, jest zbieżna przy $s < -1$ i rozbieżna przy $s \geqq -1$.

6. Dowieść, że symbol $\int_0^1 \frac{1}{x}\left[\lg\left(\frac{1}{x}\right)\right]^s dx$ nie ma żadnego znaczenia, jakąkolwiek liczbą byłoby s.

[Poprzedni przykład wskazuje, że $s < -1$ jest koniecznym warunkiem zbieżności przy niższej granicy, ale $\left[\lg\left(\frac{1}{x}\right)\right]^s \to \infty$, jeżeli $x \to 1-0$ i jeżeli s jest liczbą ujemną, zatym całka jest rozbieżna przy górnej granicy, o ile $s < -1$.]

7. Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności całki

$\int_0^1 x^{a-1}\left[\lg\left(\frac{1}{x}\right)\right]^s dx$ jest spełnienie nierówności $a > 0$, $s > -1$.

Przykłady XCII. 1. **Stała Eulera.** Dowieść, że funkcja

$$\varphi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \lg n$$

dąży do granicy γ, gdy $n \to \infty$, i że $0 < \gamma \leqq 1$. [Wynika to odrazu z § 167; wartość tej stałej γ, zwanej *stałą Eulera* $= 0.577\ldots$]

2. Jeżeli a, b są liczbami dodatniemi, to

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\ldots+\frac{1}{a+(n-1)b}-\frac{1}{b}\lg(a+nb)$$

dąży do granicy, gdy $n\to\infty$.

3. Jeżeli $0<s<1$, to

$$\varphi(n)=1+2^{-s}+3^{-s}+\ldots+(n-1)^{-s}-\frac{n^{1-s}}{1-s}$$

dąży do granicy, gdy $n\to\infty$.

4. Szereg

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2(1+{}^1/_2)}+\frac{1}{3(1+{}^1/_2+{}^1/_3)}+\ldots$$

jest rozbieżny. [Porównać z szeregiem $\Sigma\frac{1}{n\lg n}$.] Z szeregu Σn^{-s} utworzyć nowy szereg tak, jak powyższy został utworzony z szeregu $\Sigma(1/n)$, i dowieść, że nowy ten szereg jest zbieżny tylko przy $s>1$.

5. Jeżeli szereg Σu_n składa się z wyrazów dodatnich i jeżeli

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n\,,$$

to szereg $\Sigma\frac{u_n}{s_{n-1}}$ jest zbieżny lub rozbieżny zależnie od tego, czy Σu_n jest zbieżny czy rozbieżny. [Jeżeli Σu_n jest rozbieżny, to $s_{n-1}\to\infty$, a

$$\frac{u_n}{s_{n-1}}>\lg\left(1+\frac{u_n}{s_{n-1}}\right)=\lg\left(\frac{s_n}{s_{n-1}}\right);$$

jest rzeczą oczywistą, że

$$\lg\left(\frac{s_2}{s_1}\right)+\lg\left(\frac{s_3}{s_2}\right)+\ldots+\lg\left(\frac{s_n}{s_{n-1}}\right)=\lg\left(\frac{s_n}{s_1}\right)\to\infty\,.]$$

6. Dowieść, że to samo powiedzieć można o szeregu $\Sigma\left(\frac{u_n}{s_n}\right)$. [Jeżeli szereg Σu_n jest rozbieżny i jeżeli przy $n\geqq n_0$ mamy $u_n<s_{n-1}$, to $s_n<2s_{n-1}$ i rozbieżność zadanego szeregu wynika z rozbieżności $\Sigma(u_n/s_{n-1})$. Jeżeli, jak się to zdarza w szeregach szybko zbieżnych, mamy $u_n\geqq s_{n-1}$ przy nieskończenie wielu wartościach na n, to $u_n/s_n\geqq\frac{1}{2}$ przy wszelkich takich wartościach na n.]

7. Znaleźć sumę szeregu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ [Mamy $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}=$ $=\lg(2n+1)+\gamma+\varepsilon_n$, $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\lg(n+1)+\gamma+\varepsilon'_n$, gdzie γ oznacza stałą Eulera, a ε_n, ε'_n dążą do zera, gdy $n\to\infty$. Odejmując, widzimy, że sumą danego szeregu jest $\lg 2$. Porówn. też § 206.]

8. Dowieść, że przy $C=\gamma$ szereg

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\lg n-C\right)$$

jest zbieżny, przy innych zaś wartościach na C szereg ten wykonywa wahania skończone.

205. Rozwinięcie funkcji e^x na szereg. Wszystkie pochodne tej funkcji równają się e^x, a więc, według twierdzenia Taylora, mamy

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\vartheta x},$$

gdzie $0<\vartheta<1$. Ale $\frac{x^n}{n!}\to 0$, gdy $n\to\infty$, a $e^{\vartheta x}<e^x$; zakładając tedy, że $n\to\infty$, mamy

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Jest to t. zw. **szereg wykładniczy.** W szczególności przy $x=1$ mamy

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

czyli

$$\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\right)^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad . \quad (3)$$

Mamy, dalej, przy wszelkim dodatnim a

$$a^x=e^{x\lg a}=1+(x\lg a)+\frac{(x\lg a)^2}{2!}+\ldots \quad . \quad . \quad (4)$$

Widzimy, że jeśli zróżniczkujemy każdy wyraz szeregu wykładniczego, otrzymamy znów ten sam szereg wykładniczy; żaden inny szereg potęgowy zmiennej x nie posiada tėj własności. Kilka dalszych uwag, związanych z tą sprawą, znajdzie czytelnik w Dodatku II.

Szereg wykładniczy ma tak wielką doniosłość w Analizie, że zbadamy go zapomocą innej jeszcze metody, niezależnej od twierdzenia Taylora.

Niech będzie

$$E_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;$$

załóżmy przytym, że $x>0$. Mamy

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+n\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots1}{n!}\left(\frac{x}{n}\right)^n,$$

co jest mniejsze od $E_n(x)$. Zakładając, że $n>x$ i posługując się szeregiem dwumianowym dla wykładnika ujemnego całkowitego, mamy

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}=1+n\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\ldots>E_n(x).$$

Tak więc

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<E_n(x)<\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n};$$

ale pierwsza i trzecia funkcja dążą do granicy e^x (§ 201), a więc to samo powiedzieć można o $E_n(x)$. Wynika stąd słuszność wzoru (1) przy x dodatnim; jeżeli x jest ujemne, opieramy się na tym, że, jak wykazaliśmy w Przykł. LXXXIV.7, szereg wykładniczy czyni zadość równaniu funkcyjnemu $f(x)f(y)=f(x+y)$, tak iż $f(x)f(-x)=f(0)=1$.

Przykłady XCIII. 1. Dowieść, że

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots;\quad \sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

2. Jeżeli x jest liczbą dodatnią, to największym wyrazem szeregu wykładniczego jest wyraz $([x]+1)$-szy; jeżeli zaś x jest przytym liczbą całkowitą, to wyrazy $[x]$ i $([x]+1)$-szy są sobie równe.

3. Dowieść, że $n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

4. Dowieść, że $e^n=\frac{n^n}{n!}(2+S_1+S_2)$, gdzie

$$S_1=\frac{1}{1+\nu}+\frac{1}{(1+\nu)(1+2\nu)}+\ldots,\quad S_2=(1-\nu)+(1-\nu)(1-2\nu)+\ldots,$$

a $\nu=1/n$. Dowieść, że $n!$ zawiera się między $2\left(\frac{n}{e}\right)^n$ a $2(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

5. Za pomocą szeregu wykładniczego dowieść, że e^x dąży do ∞ prędzej, niż jakakolwiek potęga zmiennej x. [Można oprzeć się na nierówności $e^x>x^n/(n!)$.]

6. Dowieść, że e nie jest liczbą wymierną. [Gdyby było $e=p/q$, gdzie p i q oznaczają liczby całkowite, wówczas mielibyśmy

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\ldots,$$

a mnożąc przez $q!$, otrzymalibyśmy

$$q!\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{q!}\right)=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots,$$

co jest niedorzeczne, gdyż lewa część tej równości jest liczbą całkowitą, prawa zaś jest mniejsza od $1/q$.]

7. Znaleźć sumę szeregu $\sum\limits_0^\infty P_r(n)\dfrac{x^n}{n!}$, gdzie $P_r(n)$ jest wielomianem stopnia r. [Możemy $P_r(n)$ przedstawić w postaci

$$A_0+A_1n+A_2n(n-1)+\ldots+A_rn(n-1)\ldots(n-r+1),$$

a wówczas

$$\sum_0^\infty P_r(n)\frac{x^n}{n!}=A_0\sum_0^\infty\frac{x^n}{n!}+A_1\sum_1^\infty\frac{x^n}{(n-1)!}+\ldots+A_r\sum_r^\infty\frac{x^n}{(n-r)!}$$

$$=(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_rx^r)e^x.]$$

8. Dowieść, że $\sum\limits_1^\infty\dfrac{n^3}{n!}x^n=(x+3x^2+x^3)e^x$, $\sum\limits_1^\infty\dfrac{n^4}{n!}x^n=$ $=(x+7x^2+6x^3+x^4)e^x$, i że, jeżeli $S_n=1^3+2^3+\ldots+n^3$, to

$$\sum_1^\infty S_n\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{4}(4x+14x^2+8x^3+x^4)e^x.$$

Ostatni szereg równa się zeru przy $x=-2$.

(*Mathem. Tripos*, 1904.)

9. Dowieść, że $\Sigma(n/n!)=e$, $\Sigma(n^2/n!)=2e$, $\Sigma(n^3/n!)=5e$, a $\Sigma(n^k/n!)$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią, jest całkowitą wielokrotnością liczby e.

10. Dowieść, że $\sum\limits_1^\infty\dfrac{(n-1)x^n}{(n+2)n!}=\dfrac{(x^2-3x+3)e^x+{}^1\!/\!_2x^2-3}{x^2}$.

11. Wyznaczyć a, b, c tak, by funkcja $\dfrac{(x+a)e^x+bx+c}{x^2}$ dążyła do granicy, gdy $x\to 0$. Znaleźć tę granicę i wykreślić funkcję $e^x+\dfrac{bx+c}{x+a}$.

12. Wykreślić na jednym rysunku funkcje e^x, $1+x$, $1+x+\dfrac{x^2}{2}$, $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.

13. Dowieść, że funkcja $e^{-x}-1+x-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots-(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}$ ma wartość dodatnią lub ujemną, zależnie od tego, czy n jest liczbą nieparzystą czy parzystą. Stąd otrzymać wzór (3), § 205.

14. Jeżeli $X_0=e^x$, $X_1=e^x-1$, $X_2=e^x-1-x$, $X_3=e^x-1-x-(x^2/2!)$, ... wówczas $dX_\nu/dx=X_{\nu-1}$. Opierając się na tym, dowieść, że przy $t>0$ mamy

$$X_1(t)=\int_0^t X_0 dx < te^t,\quad X_2(t)=\int_0^t X_1 dx < \int_0^t xe^x dx < e^t \int_0^t x dx = \frac{t^2}{2!}e^t,$$

i wogóle $X_\nu(t) < \frac{t^\nu}{\nu!}e^t$.

Na tej zasadzie dowieść słuszności wzoru (3), § 205.

15. Pierwsze wyrazy rozwinięcia pierwiastka dodatniego równania $x^{2+p}=a^2$ na szereg według potęg zmiennej p, równają się

$$a\left\{1-\frac{p}{2}\lg a+\frac{p^2}{8}\lg a(2+\lg a)\right\}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1909.)

206. Szereg logarytmiczny. Ponieważ mamy

$$\lg(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t},$$

a $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\ldots$, o ile $|t|<1$, zatym możemy przypuszczać*), że przy $-1<x<1$ funkcja $\lg(1+x)$ powinna równać się szeregowi, który otrzymamy, całkując szereg $1-t+t^2-\ldots$ wyraz po wyrazie w granicach od $t=0$, do $t=x$. Jednym słowem przypuszczamy, że równość

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

jest słuszna, o ile $-1<x<1$.

Łatwo przekonać się, że tak jest istotnie. Mamy

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\ldots+(-1)^{m-1}t^{m-1}+\frac{(-1)^m t^m}{1+t};$$

jeśli więc $x>-1$, to

$$\lg(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}+(-1)^m R_m,$$

gdzie
$$R_m=\int_0^x \frac{t^m dt}{1+t}.$$

Należy teraz dowieść, że $R_m \to 0$, gdy $m\to\infty$. Jest to niemal oczywiste, o ile $0<x\leqq 1$, gdyż R_m jest wtedy liczbą dodatnią, mniejszą od całki

---

*) Porów. Dodatek II w końcu książki.

$$\int_0^x t^m dt = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

a więc tymbardziej mniejszą od $\frac{1}{m+1}$. Jeżeli natomiast mamy $-1<x<0$, możemy położyć $t=-u$, $x=-\xi$, tak iż

$$R_m=(-1)^m\int_0^\xi \frac{u^m du}{1-u},$$

skąd widać, że R_m oraz $(-1)^m$ mają ten sam znak. W obszarze całkowania największą wartością funkcji $\frac{1}{1-u}$ jest $\frac{1}{1-\xi}$, a więc

$$0<|R_m|<\frac{1}{1-\xi}\int_0^\xi u^m\,du=\frac{\xi^m}{(m+1)(1-\xi)}<\frac{1}{(m+1)(1-\xi)},$$

zatym istotnie $R_m \to 0$.

Mamy tedy

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots,$$

o ile $-1<x\leqq 1$. Przy innych wartościach na x szereg ten nie jest zbieżny. Jeżeli $x=1$, otrzymujemy wzór

$$\lg 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots,$$

którego słuszności dowiedliśmy już w inny sposób. (Przykł. XCII. 7.)

207. Rozwinięcie arc tg x **na szereg.** W taki sam sposób dowiedzie czytelnik, że

$$\operatorname{arc\,tg} x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x (1-t^2+t^4-\ldots)dt$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots,$$

o ile $-1\leqq x\leqq 1$. Dowód jest w danym razie nawet nieco prostszy, gdyż arc tg x jest funkcją nieparzystą, a więc wystarczy zbadać słuszność wzoru przy dodatnich wartościach na x. Szereg ten jest zbieżny zarówno przy $x=-1$, jak przy $x=1$. Oczywista rzecz, że szereg przedstawia tę wartość funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$, która przy $-1 \leqq x \leqq 1$ zawiera się między $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$. W rozdziale VII (Przykł. LXVI. 3) widzieliśmy, że tę właśnie wartość naszej funkcji przedstawia powyższa całka.

Jeżeli $x=1$, wówczas

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

Przykłady XCIV. 1. $\lg\left(\frac{1}{1-x}\right)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$, jeżeli $-1 \leqq x < 1$.

2. $\operatorname{arg\,tgh} x=\frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$, jeżeli $-1<x<1$.

3. Jeżeli x jest liczbą dodatnią, wówczas

$$\lg(1+x)=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots.$$

(*Mathem. Tripos*, 1911.)

4. Rozwinąć na szereg funkcje $\lg(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ za pomocą wzoru Taylora.

[Przy badaniu reszty pierwszego szeregu, należy brać wzór Cauchy'ego.]

5. Jeżeli $y>0$, wówczas

$$\lg y=2\left\{\frac{y-1}{y+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\ldots\right\}.$$

[Oprzeć się na tożsamości $y=\left(1+\frac{y-1}{y+1}\right)\Big/\left(1-\frac{y-1}{y+1}\right)$. Szereg ten nadaje się do obliczenia wartości $\lg 2$, natomiast szereg $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ nie jest do tego celu odpowiedni, jako niedość szybko zbieżny.]

6. Obliczyć $\lg 10$ z dokładnością do 0.001 zapomocą wzoru

$$\lg 10=3\lg 2+\lg\left(1+\frac{1}{4}\right).$$

7. Dowieść, że przy $x>0$ mamy

$$\lg\left(\frac{x+1}{x}\right)=2\left\{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3(2x+1)^3}+\frac{1}{5(2x+1)^5}+\ldots\right\}.$$

i że przy $x>2$ mamy

$$\lg \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = 2\left\{\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 + \dots\right\}.$$

Wiedząc, że $\lg 2 = 0{\cdot}6931471\dots$, $\lg 3 = 1{\cdot}0986123\dots$, i kładąc w drugim wzorze $x=10$, dowieść, że $\lg 11 = 2{\cdot}397895\dots$

(*Mathem. Trip.* 1912).

8. Jeżeli mamy wartości $\lg 2$, $\lg 5$, $\lg 11$, wówczas wzór

$$\lg 13 = 3\lg 11 + \lg 5 - 9\lg 2$$

daje wartość $\lg 13$ z dokładnością do 0.00015.

(*Mathem. Tripos*, 1910).

9. Dowieść, że

$$\tfrac{1}{2}\lg 2 = 7a+5b+3c, \quad \tfrac{1}{2}\lg 3 = 11a+8b+5c, \quad \tfrac{1}{2}\lg 5 = 16a+12b+7c,$$

gdzie $a = \arg\operatorname{tgh}(^1/_{31})$, $b = \arg\operatorname{tgh}(^1/_{49})$, $c = \arg\operatorname{tgh}(^1/_{161})$.

[Za pomocą tych wzorów możemy szybko i z dowolną dokładnością obliczyć $\lg 2$, $\lg 3$, $\lg 5$.]

10. Dowieść, że

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}(^1/_2) + \operatorname{arc\,tg}(^1/_3) = 4\operatorname{arc\,tg}(^1/_5) - \operatorname{arc\,tg}(^1/_{239})$$

i obliczyć π z dokładnością do $0{\cdot}000001$.

11. Dowieść, że pierwsze wyrazy rozwinięcia $(1+x)^{1+x}$ na szereg według potęg zmiennej x równają się $1+x+x^2+\frac{1}{2}x^3$.

(*Mathem. Tripos*, 1910).

12. Dowieść, że w przybliżeniu (przy dużych wartościach na x) mamy

$$\lg_{10} e - \sqrt{x(x+1)}\,\lg_{10}\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{\lg_{10} e}{24x^2}.$$

Kładąc $x=10$, obliczyć $\lg_{10} e$ z powyższego wzoru i wyznaczyć stopień przybliżenia.

(*Mathem. Tripos*, 1910.)

13. Dowieść, że $\dfrac{1}{1-x}\lg\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = x + \left(1+\dfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)x^3 + \dots$,

jeżeli $-1 < x < 1$. [Oprzeć się na Przykł. LXXXIV. 2.]

14. Opierając się na szeregu logarytmicznym oraz wiedząc, że $\lg_{10} 2{\cdot}3758 = 0\,3758099\dots$, $\lg_{10} e = 0{\cdot}4343\dots$, dowieść, że $237{\cdot}58121$ jest przybliżoną wartością pierwiastka równania $x = 100\lg_{10} x$.

(*Mathem. Tripos*, 1910).

15. Obliczyć pierwsze wyrazy (aż do czwartej potęgi zmiennej x) rozwinięcia funkcji $\lg\cos x$ oraz $\lg\dfrac{\sin x}{x}$ na szereg według potęg zmien-

nej x i sprawdzić, że dla tych pierwszych wyrazów zachodzi równość

$$\lg \sin x = \lg x - \frac{1}{45} \lg \cos x + \frac{64}{45} \lg \cos \frac{x}{2}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1908.)

16. Dowieść, że przy $-1 \leqq x \leqq 1$ mamy

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \dots,$$

a stąd wysnuć wzór

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi + 2\lg(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1896.)

[Zastosować postępowanie § 207 i wzór Przykł. LI. 7.]

17. Dowieść, że

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \dots = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^4} = \frac{\pi - 2\lg(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}.$$

18. Jeżeli a, b są liczbami całkowitemi dodatniemi, wówczas

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \dots = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$$

Obliczyć na tej zasadzie sumy szeregów $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots$ oraz $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \dots$

208. Szereg dwumianowy. Badaliśmy już szereg dwumianowy

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \dots$$

w założeniu, że $-1 < x < 1$ i że m jest liczbą wymierną. Jeżeli m jest niewymierne, mamy

$$(1+x)^m = e^{m \lg(1+x)},$$

$$D_x(1+x)^m = \frac{m}{1+x} e^{m \lg(1+x)} = m(1+x)^{m-1},$$

tak iż reguła różniczkowania funkcji $(1+x)^m$ pozostaje bez zmiany, a dowód, podany w § 156, pozostaje słuszny i dla naszego przypadku. Kwestji zbieżności szeregu przy $x = \pm 1$ nie będziemy badali, odsyłając czytelnika do obszerniejszych kursów Analizy.

Przykłady XCV. 1. Dowieść, że przy $-1<x<1$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1.3}{2.4}x^4-\ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots$$

2. **Przybliżone wyznaczanie pierwiastków kwadratowych i pierwiastków wyższych stopni.** Niech $\sqrt{M}$ będzie liczbą niewymierną, a N^2 niech będzie najbliższym do M kwadratem. Kładąc $M=N^2\pm x$, gdzie x jest liczbą dodatnią nie większą od N, mamy

$$\sqrt{M}=N\sqrt{1\pm(x/N^2)}=N\left\{1\pm\frac{1}{2}\left(\frac{x}{N^2}\right)-\frac{1.1}{2.4}\left(\frac{x}{N^2}\right)^2\pm\ldots\right\}$$

Szereg jest szybko zbieżny.

Mamy np.

$$\sqrt{67}=\sqrt{64+3}=8\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{64}\right)-\frac{1.1}{2.4}\left(\frac{3}{64}\right)^2+\ldots\right\}.$$

Przyjmując $8^3/_{16}$ jako wartość przybliżoną (z nadmiarem) pierwiastka $\sqrt{67}$, popełniamy błąd mniejszy od $3^2/64^2$.

3. Jeżeli x jest małą liczbą w porównaniu z N^2, wówczas możemy założyć, że

$$\sqrt{N^2+x}=N+\frac{x}{4N}+\frac{Nx}{2(2N^2+x)}.$$

Popełniony błąd jest rzędu x^4/N^7. Zastosować ten wzór do obliczenia $\sqrt{997}$.

[Rozwinięcie według szeregu dwumianowego daje

$$\sqrt{N^2+x}=N+\frac{x}{2N}-\frac{x^2}{8N^3}+\frac{x^3}{16N^5},$$

przyczym błąd jest mniejszy od wartości bezwzględnej następnego wyrazu, czyli mniejszy od $5x^4/128N^7$. Mamy również

$$\frac{Nx}{2(2N^2+x)}=\frac{x}{4N}\left(1+\frac{x}{2N^2}\right)^{-1}=\frac{x}{4N}-\frac{x^2}{8N^3}+\frac{x^3}{16N^5},$$

przyczym błąd jest mniejszy niż $x^4/32N^7$. Stąd wynika nasze twierdzenie. Tę samą metodę można zastosować do pierwiastków wyższych stopni.]

4. Jeżeli M różni się od N^3 mniej niż o 1% którejkolwiek z tych dwu liczb, wówczas $\sqrt[3]{M}$ różni się od $^2/_3N+{}^1/_3(M/N^2)$ mniej niż o $N/90\,000$.

(*Mathem. Tripos.* 1882).

5. Jeżeli $M=N^4+x$, a x jest małą liczbą w porównaniu z N, wówczas

$$\frac{51}{56}N+\frac{5}{56}\frac{M}{N^3}+\frac{27Nx}{14(7M+5N^4)}$$

jest przybliżoną wartością pierwiastka $\sqrt[4]{M}$. Dowieść, że gdy $x=1$, $N=10$, wówczas powyższy wzór daje wartość pierwiastka z szesnastoma dokładnemi znakami dziesiętnemi.

(*Mathem. Tripos*, 1886).

6. Znaleźć sposób sumowania szeregu

$$\sum_0^\infty P_r(n)\binom{m}{n}x^n,$$

gdzie $P_r(n)$ jest symbolem wielomianu stopnia r.

[Przedstawić $P_r(n)$ w postaci $A_0+A_1 n+A_2 n(n-1)+\ldots$, jak w Przykł. XCIII.7.]

7. Znaleźć sumy szeregów $\sum_0^\infty n\binom{m}{n}x^n$, $\sum_0^\infty n^2\binom{m}{n}x^n$ i dowieść, że

$$\sum_0^\infty n^3\binom{m}{n}x^n=\{m^3x^3+m(3m-1)x^2+mx\}(1+x)^{m-3}.$$

209. Inny sposób uzasadnienia teorji funkcji wykładniczej i logarytmicznej. Naszkicujemy sposób wykładu własności funkcji e^x i $\lg x$, zupełnie różny od wykładu, podanego powyżej. Wychodzimy z szeregu $1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots$

Wiemy, że szereg ten jest zbieżny przy wszelkich wartościach na x, wobec czego możemy nową funkcję $\exp x$ określić zapomocą równania

$$\exp x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots \qquad (1)$$

Następnie dowodzimy (jak w Przykł. LXXXIV.7), że

$$\exp x\times\exp y=\exp(x+y) \qquad (2)$$

Mamy dalej

$$\frac{\exp h-1}{h}=1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\ldots=1+\rho(h),$$

gdzie
$$|\rho(h)|<\left|\frac{h}{2}\right|+\left|\frac{h}{2}\right|^2+\left|\frac{h}{2}\right|^3+\ldots=\frac{|\frac{1}{2}h|}{1-|\frac{1}{2}h|},$$

tak iż $\rho(h)\to 0$, gdy $h\to 0$. Widzimy tedy, że

$$\frac{\exp(x+h)-\exp x}{h}=\exp x\left(\frac{\exp h-1}{h}\right)\to\exp x,$$

gdy $h\to 0$, czyli że

$$D_x\exp x=\exp x \qquad (3)$$

Jednocześnie dowiedliśmy, że $\exp x$ jest funkcją ciągłą.

Dalej możemy kroczyć różnemi drogami. Kładąc $y=\exp x$ i biorąc pod uwagę, że $\exp 0=1$, mamy

$$\frac{dy}{dx}=y, \quad x=\int_1^y \frac{dt}{t}$$

i jeśli teraz funkcję logarytmiczną określimy jako funkcję odwrotną względem $\exp x$, powrócimy do punktu widzenia, na którym stanęliśmy w tym rozdziale.

Możemy jednak postąpić inaczej. Z równania (2) wynika, że jeśli n jest liczbą dodatnią całkowitą, to

$$(\exp x)^n=\exp nx, \quad (\exp 1)^n=\exp n.$$

Jeżeli x jest ułamkiem dodatnim wymiernym m/n, wówczas

$$[\exp(m/n)]^n=\exp m=(\exp 1)^m,$$

a więc $\exp(m/n)$ równa się dodatniej wartości funkcji $(\exp 1)^{m/n}$. Wyniki te możemy rozciągnąć na ujemne wartości zmiennej x zapomocą równania

$$\exp x \exp(-x)=1;$$

mamy tedy

$$\exp x=(\exp 1)^x=e^x,$$

przyczym symbol e określamy zapomocą równania

$$e=\exp 1=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$$

przy wszelkich wymiernych wartościach na x. Wreszcie określamy e^x dla wartości niewymiernych zmiennej x, jako równe $\exp x$. Następnie określamy logarytm jako funkcję odwrotną względem $\exp x$ czyli względem e^x.

Przykład. W podobny sposób, wychodząc z równania

$$f(m, x)f(m', x)=f(m+m', x),$$

rozwinąć teorję szeregu dwumianowego

$$1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\dots=f(m, x).$$

Zadania do rozdziału IX*).

1. Wiedząc, że $\lg_{10}e=0{\cdot}4343\dots$ i że 2^{10} oraz 3^{21} mało się różnią od potęg liczby 10, obliczyć $\lg_{10}2$ i $\lg_{10}3$ z dokładnością do 0.0001.

(*Mathem. Tripos*, 1905.)

*) Wiele zadań zapożyczyliśmy z dzieła: Bromwich *An introduction to the theory of infinite series.* London 1908.

2. Która z dwuch liczb $\left(\frac{e}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ czy $(\sqrt{2})^{\frac{\pi}{2}}$ jest większa?

[Zauważmy, że $\sqrt{3}/\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right) < \frac{2}{5}\sqrt{3} < 0.6929 < \lg 2$.]

3. Jeżeli liczba całkowita dodatnia n nie jest potęgą liczby 10, wówczas $\lg_{10} n$ nie może być liczbą wymierną. [Jeżeli liczba n jest pierwsza względem 10, mielibyśmy $\lg_{10} n = p/q$ czyli $10^p = n^q$, co jest niedorzeczne. Jeżeli $n = 10^\alpha N$, gdzie N jest liczbą pierwszą względem 10, wówczas $\lg_{10} N$ (a więc i $\lg_{10} n$) nie może być liczbą wymierną.]

4. Przy jakich wartościach na x funkcje $\lg x$, $\lg\lg x$, $\lg\lg\lg x, \ldots$ (I) równają się zeru, (II) równają się 1, (III) nie są wcale określone? To samo pytanie rozstrzygnąć dla funkcji lx, llx, $lllx$, gdzie $lx = \lg|x|$.

5. Dowieść, że

$$\lg x - \binom{n}{1}\lg(x+1) + \binom{n}{2}\lg(x+2) - \ldots + (-1)^n \lg(x+n)$$

jest ujemne i stale rośnie, zbliżając się do zera, gdy x rośnie od 0 do ∞.

[Pochodna funkcji równa się

$$\sum_0^n (-1)^r \binom{n}{r} \frac{1}{x+r} = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

To wyrażenie jest dodatnie, a funkcja dąży do 0, gdy $x \to \infty$, ponieważ

$$\lg(x+r) = \lg x + \varepsilon_x,$$

gdzie $\varepsilon_x \to 0$, a $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = 0$.]

6. Dowieść, że

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\lg x}{x} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\lg x - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right).$$

(*Mathem. Tripos*, 1909.)

7. Jeżeli $x > -1$, to $x^2 > (1+x)\{\lg(1+x)\}^2$.

(*Mathem. Tripos*, 1906.)

8. Zarówno $\frac{\lg(1+x)}{x}$, jak $\frac{x}{(1+x)\lg(1+x)}$ stale maleją, gdy x rośnie od 0 do ∞.

Gdy x rośnie od -1 do ∞, funkcja $(1+x)^{-1/x}$ przybiera raz i tylko raz jeden każdą wartość, zawartą między 0 a 1.

(*Mathem. Tripos*, 1910).

10. Dowieść, że $\frac{1}{\lg(1+x)} - \frac{1}{x} \to \frac{1}{2}$, gdy $x \to 0$.

11. Dowieść, że $\frac{1}{\lg(1+x)} - \frac{1}{x}$ maleje stale od 1 do 0, gdy x rośnie od -1 do ∞. [Funkcja jest nieokreślona przy $x=0$, jeżeli jednak umówimy się, że będziemy jej wówczas przypisywali wartość $\frac{1}{2}$, stanie się ona ciągłą w punkcie $x=0$. Chcąc dowieść, że pochodna jest ujemna, opieramy się na Zadaniu 7.]

12. Dowieść, że funkcja $(\lg\xi - \lg x)/(\xi - x)$, gdzie ξ jest liczbą dodatnią, stale maleje, gdy x rośnie od 0 do ξ. Wyznaczyć granicę tej funkcji, gdy $x \to \xi$.

13. Dowieść, że $e^x > Mx^N$, gdzie M, N są to duże liczby dodatnie, jeżeli x jest większe od większej z dwuch liczb $2\lg M$ i $16N^2$.

[Łatwo dowieść, że $\lg x < 2\sqrt{x}$, a więc nierówność żądana jest spełniona, o ile

$$x > \lg M + 2N\sqrt{x},$$

a więc tymbardziej jeżeli $\frac{x}{2} > \lg M$, $\frac{x}{2} > 2N\sqrt{x}$.]

14. Jeżeli $f(x)$ i $\varphi(x)$ dążą do nieskończoności, gdy $x \to \infty$, i jeżeli $f'(x)/\varphi'(x) \to \infty$, wówczas $f(x)/\varphi(x) \to \infty$. Kładąc $f(x) = x^\alpha$, $\varphi(x) = \lg x$, dowieść, że $(\lg x)/x^\alpha \to 0$ przy wszelkich dodatnich wartościach na α.

15. Jeżeli p, q są liczbami dodatniemi całkowitemi, wówczas

$$\frac{1}{pn+1} + \frac{1}{pn+2} + \dots + \frac{1}{qn} \to \lg\left(\frac{q}{p}\right),$$

gdy $n \to \infty$. [Porów. Przykł. LXXXI. 6.]

16. Jeżeli x jest liczbą dodatnią, wówczas $n \lg\left(\frac{1+x^{1/n}}{2}\right) \to -\frac{1}{2}\lg x$, gdy $n \to \infty$.

17. Jeżeli a, b są liczbami dodatniemi, to

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \to \sqrt{ab}.$$

18. Dowieść, że $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \frac{\lg n}{2} + \lg 2 + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon_n$, gdzie γ oznacza stałą Eulera (Przykł. XCII.1), a $\varepsilon_n \to 0$, gdy $n \to \infty$.

19. Dowieść, że $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{3\lg 2}{2}$.

[Szereg ten otrzymujemy z szeregu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$, biorąc kolejno dwa wyrazy dodatnie i jeden ujemny. Suma pierwszych $3n$ wyrazów równa się

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lg 2n+\lg 2+\frac{1}{2}\gamma+\varepsilon_n-\frac{1}{2}(\lg n+\gamma+\varepsilon'_n),$$

gdzie ε_n, ε'_n dążą do 0, gdy $n\to\infty$. Porówn. Przykł. LXXXI.6.]

20. Dowieść, że $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\ldots=\frac{1}{2}\lg 2$.

21. Dowieść, że $\sum\limits_1^n \frac{1}{\nu(36\nu^2-1)}=-3+3\Sigma_{3n+1}-\Sigma_n-S_n$,

gdzie $S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$; $\Sigma_n=1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$. Stąd wysnuć wniosek, że suma szeregu nieskończonego równa się

$$-3+{}^3/_2\lg 3+2\lg 2.$$

(*Mathem. Tripos*, 1905.)

22. Dowieść, że

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(4n^2-1)}=2\lg 2-1,\quad \sum_1^\infty \frac{1}{n(9n^2-1)}=\frac{3}{2}(\lg 3-1).$$

23. Dowieść, że $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi-2}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\lg 2-\frac{1}{4}$ są odpowiednio sumami szeregów

$$\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-1},\quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1},\quad \sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1)^2-1},\quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}.$$

24. Dowieść, że $n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$ dąży do 0 albo do ∞ zależnie od tego, czy $a<e$, czy też $a>e$.

[Jeżeli $u_n=n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$, to $u_{n+1}/u_n\to a/e$.]

25. Zbadać, do jakiej granicy dąży funkcja

$$\left(\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_rx^r}{b_0+b_1x+\ldots+b_rx^r}\right)^{\lambda_0+\lambda_1 x}$$

gdy $x\to\infty$.

(*Mathem. Tripos*, 1886.)

26. Dowieść, że $\Sigma\lg\left(1+\frac{x}{n}\right)$ $\qquad(x>0)$

dąży do ∞. Przy tym samym założeniu

$$\frac{(1+x)(2+x)\ldots(n+x)}{n!}\to\infty,$$

gdy $n\to\infty$.

27. Przy $x>-1$ mamy

$$\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)\,(x+2)}+\frac{1!}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}+\dots$$

(*Mathem. Tripos*, 1908.)

28. Dowieść, że ciąg

$$a_1=e,\ a_2=e^{e^2},\ a_3=e^{e^{e^3}}$$

dąży do nieskończoności prędzej niż jakikolwiek ciąg skali wykładniczej. [Niech będzie $e_1(x)=e^x$, $e_2(x)=e^{e_1(x)}$,... Jeżeli $e_k(x)$ należy do skali wykładniczej, wówczas $a_n>e_k(n)$, jeżeli $n>k$.]

29. Dowieść, że

$$\frac{d}{dx}\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}=\frac{d}{dx}\{\varphi(x)\}^{\alpha}+\frac{d}{dx}\{\beta^{\psi(x)}\},$$

gdzie po dokonanym różniczkowaniu kładziemy $\alpha=\psi(x)$, $\beta=\varphi(x)$.

Ustalić analogiczną regułę różniczkowania funkcji $\varphi(x)^{[\{\psi(x)\}^{\chi(x)}]}$

30. Jeżeli $D_x{}^n e^{-x^2}=e^{-x^2}\varphi_n(x)$, to (I) $\varphi_n(x)$ jest wielomianem stopnia n; (II) $\varphi_{n+1}=-2x\varphi_n+\varphi'_n$, (III) wszystkie pierwiastki równania $\varphi_n=0$ są rzeczywiste i różne, i są przedzielone przez pierwiastki równania $\varphi_{n-1}=0$. [Twierdzenia (III) dowieść można za pomocą indukcji.]

31. Ogólnym rozwiązaniem równania $f(xy)=f(x)f(y)$, w którym f oznacza funkcję różniczkowalną, jest funkcja x^a, gdzie a jest stałą.

Ogólnym rozwiązaniem równania

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\,f(y)$$

jest $\cosh ax$ lub $\cos ax$ zależnie od tego, czy $f''(0)$ jest dodatnie czy ujemne.

[Przy dowodzie drugiego twierdzenia zakładamy, że f posiada pochodne trzech pierwszych rzędów. Przytym

$$2f(x)+y^2\{f''(x)+\varepsilon_y\}=2f(x)[f(0)+yf'(0)+\frac{y^2}{2}\{f''(0)+\varepsilon'_y\}],$$

gdzie ε_y, ε'_y dążą do zera wraz z y. Wynika stąd, że $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(x)=f''(0)f(x)$, tak iż $a=\sqrt{f''(0)}$ albo $a=\sqrt{-f''(0)}$.]

32. Jak zachowują się funkcje $x^{\sin(1/x)}$, $x^{\sin^2(1/x)}$, $x^{\operatorname{cosec}(1/x)}$, gdy $x\to+0$?

33. Wykreślić krzywe $y=\operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x}$, $y=\sin x \lg \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

34. Równanie $e^x=ax+b$ ma jeden pierwiastek rzeczywisty, jeżeli $a<0$ lub $a=0$, $b>0$; jeżeli zaś $a>0$, to równanie nasze ma dwa pierwiastki rzeczywiste albo nie ma żadnego, zależnie od tego, czy $a\lg a>b-a$ czy też $a\lg a<b-a$.

35. Za pomocą badań wykreślnych wykazać, że $e^x=ax^2+2bx+c$

ma jeden, dwa lub trzy pierwiastki rzeczywiste przy $a>0$, nie ma zaś żadnego lub też ma jeden albo dwa pierwiastki, jeżeli $a<0$. W jaki sposób możemy rozróżnić te wszystkie przypadki?

36. Wykreślić krzywą $y=\frac{1}{x}\lg\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ i wykazać, że punkt $(0, \frac{1}{2})$ jest środkiem symetrji, że gdy x przybiera, rosnąc, wszelkie wartości rzeczywiste, y rośnie od 0 do 1. Stąd wysnuć wniosek, że równanie

$$\frac{1}{x}\lg\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\alpha$$

ma jeden pierwiastek rzeczywisty, jeżeli $0<\alpha<1$, że znak pierwiastka jest ten sam, co znak funkcji $\alpha-\frac{1}{2}$, i że przy innych wartościach na α równanie nasze nie posiada pierwiastków rzeczywistych.

[Przedewszystkim $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}\left\{\lg\left(\frac{e^x-1}{x}\right)-\lg e^{x/2}\right\}=\frac{1}{x}\lg\left(\frac{\sinh x/2}{x/2}\right)$ jest funkcją nieparzystą zmiennej x. Mamy też

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\left\{\frac{x}{2}\operatorname{ctgh}\frac{x}{2}-1-\lg\left(\frac{\sinh x/2}{x/2}\right)\right\}.$$

Funkcja, zawarta w nawiasie, dąży do zera, gdy $x\to 0$; pochodna jej równa się

$$\frac{1}{x}\left\{1-\left(\frac{x/2}{\sinh x/2}\right)^2\right\}$$

i ma ten sam znak co x. Wobec tego $dy/dx>0$ przy wszelkim x.]

37. Wykreślić krzywą $y=e^{1/x}\sqrt{x^2+2x}$ i wykazać, że równanie

$$e^{1/x}\sqrt{x^2+2x}=\alpha$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych, jeżeli $\alpha<0$, ma jeden pierwiastek ujemny, jeżeli $0<\alpha<a=e^{1/\sqrt{2}}\sqrt{2+2\sqrt{2}}$; wreszcie jeden ujemny pierwiastek i dwa dodatnie, jeżeli $\alpha>a$.

38. Dowieść, że równanie $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0$ posiada jeden rzeczywisty pierwiastek przy n nieparzystym, przy n zaś parzystym nie ma wcale pierwiastków rzeczywistych.

[Załóżmy słuszność twierdzenia przy $n=1, 2, \ldots 2k$. Równanie $f_{2k+1}(x)=0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, jako równanie stopnia nieparzystego, nie może zaś mieć więcej pierwiastków, gdyż $f'_{2k+1}(x)$ czyli $f_{2k}(x)$ musiałoby przynajmniej raz jeden równać się zeru. Tak więc $f_{2k+1}(x)=0$ posiada dokładnie jeden pierwiastek, wobec czego równanie $f_{2k+2}(x)=0$ nie może mieć więcej od dwuch. Jeżeli ma ono dwa pierwiastki α, β, wówczas $f'_{2k+2}(x)$ czyli $f_{2k+1}(x)$ musi równać się zeru przy $x=\gamma$, gdzie $\alpha<\gamma<\beta$. Mamy

$$f_{2k+2}(\gamma)=f_{2k+1}(\gamma)+\frac{\gamma^{2k+2}}{(2k+2)!}>0.$$

Ale $f_{2k+2}(x)>0$, jeżeli x przybiera duże wartości (dodatnie lub ujemne); chwila zastanowienia wystarczy do spostrzeżenia, że zachodzi tu sprzeczność.]

39. Jeżeli a, b są liczbami dodatniemi, mało różniącemi się od siebie, wówczas zachodzi „przybliżone“ równanie

$$\lg\frac{a}{b}=\frac{a-b}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

przyczym błąd wynosi prawie $\frac{(a-b)^3}{6a^3}$. [Wzór ten jest ciekawy pod względem historycznym, gdyż posługiwał się nim Napier przy obliczaniu logarytmów.]

40. Zapomocą mnożenia szeregów dowieść, że przy $-1<x<1$ mamy

$$\tfrac{1}{2}\{\lg(1+x)\}^2={}^1\!/_2\,x^2-{}^1\!/_3(1+{}^1\!/_2)x^3+{}^1\!/_4(1+{}^1\!/_2+{}^1\!/_3)x^4-\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2={}^1\!/_2\,x^2-{}^1\!/_4(1+{}^1\!/_3)x^4+{}^1\!/_6(1+{}^1\!/_3+{}^1\!/_5)x^6-\ldots$$

41. Dowieść, iż

$$(1+\alpha x)^{1/x}=e^{\alpha}\{1-{}^1\!/_2\,\alpha^2x+{}^1\!/_{24}(8+3\alpha)\alpha^3x^2(1+\varepsilon_x)\},$$

gdzie $\varepsilon_x\to 0$, gdy $x\to 0$.

42. Pierwsze $n+2$ wyrazy w rozwinięciu $\lg\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$ według potęg zmiennej x są to:

$$x-\frac{x^{n+1}}{n!}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{x}{1!(n+2)}+\frac{x^2}{2!(n+3)}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!\,(2n+1)}\right\}$$

(*Mathem. Tripos*, 1899.)

43. Rozwinięcie funkcji

$$\exp\left(-x-\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{x^n}{n}\right)$$

według potęg zmiennej x zaczyna się od wyrazów

$$1-x+\frac{x^{n+1}}{n+1}-\sum_{s=1}^{n}\frac{x^{n+s+1}}{(n+s)(n+s+1)}.$$

(*Mathem. Tripos*, 1909).

44. Przy $-1<x<1$ mamy

$$\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}2^2x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}3^2x^3+\ldots=\frac{x(x+3)}{9(1-x)^{7/3}},$$

$$\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}2^3x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}3^3x^3+\ldots=\frac{x(x^2+18x+9)}{27(1-x)^{10/3}}.$$

[Zastosować metodę Przykł. XCV.6. Prościej prowadzi do celu różniczkowanie, ale teorja różniczkowania szeregów nieskończonych przekracza ramy niniejszej książki.]

45. Dowieść, że

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \lg\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2 b}\left\{a-b-b\lg\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+a)(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left\{a\lg\left(\frac{a}{b}\right)-a+b\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)} = \frac{1}{(a^2+b^2)b}\left\{\frac{\pi a}{2}-b\lg\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+a)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{\frac{\pi b}{2}+a\lg\left(\frac{a}{b}\right)\right\},$$

o ile tylko a i b są dodatnie. Wysnuć stąd (a prócz tego dowieść niezależnie od powyższych całek), że przy wszelkim dodatnim a każda z funkcji

$$a-1-\lg a,\quad a\lg a-a+1,\quad \frac{\pi a}{2}-\lg a,\quad \frac{\pi}{2}+a\lg a$$

jest dodatnia.

46. Jeżeli α, β, γ są liczbami dodatniemi i $\beta^2>\alpha\gamma$, to

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}} \lg\left\{\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\sqrt{\alpha\gamma}}\right\},$$

jeżeli zaś $\alpha>0$ i $\alpha\gamma>\beta^2$, wówczas całka ta równa się

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}{\beta}\right),$$

przyczym łuk zawiera się między 0 a π. Czy istnieją inne, odmienne od poprzednich przypadki zbieżności całki?

47. Jeżeli $\alpha>-1$, wówczas

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{x^2-1}} = \int_0^\infty \frac{dt}{\cosh t+\alpha} = 2\int_1^\infty \frac{du}{u^2+2\alpha u+1}.$$

Jeżeli $-1<\alpha<1$, to wartość całki jest

$$\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}},$$

jeżeli zaś $\alpha>1$, to wartość całki jest

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\lg\frac{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha-1}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\operatorname{arg\,tgh}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}.$$

Zbadać przypadek, gdy $\alpha=1$.

48. W podobny sposób przekształcić całkę $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2+}}$
w której $a>0$, i dowieść, że równa się ona

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \lg \frac{a+1+\sqrt{a^2+1}}{a+1-\sqrt{a^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{a^2+1}} \operatorname{arg\,tgh} \frac{\sqrt{a^2+1}}{a+1}.$$

49. Dowieść, że $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\lg 2}{2}$.

50. Jeżeli $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, wówczas

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \lg \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

51. Jeżeli $a>b>0$, to

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{a\cosh\vartheta+b\sinh\vartheta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

52. Dowieść, że

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x^2}\,dx = -\int_1^\infty \frac{\lg x}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\lg x}{1+x^2}\,dx = 0,$$

a więc przy $a>0$ mamy

$$\int_0^\infty \frac{\lg x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\lg a.$$

53. Dowieść, że przy $a>0$ mamy

$$\int_0^\infty \lg\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx = \pi a.$$

54. Żadne równanie kształtu

$$Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \ldots = 0$$

nie może się sprawdzać przy wszelkich wartościach na x, jeżeli A, B, ... są wielomianami, a α, β, ... różnemi od siebie liczbami rzeczywistemi.

ROZDZIAŁ X.

OGÓLNA TEORJA FUNKCJI LOGARYTMICZNEJ I WYKŁADNICZEJ ORAZ FUNKCJI KOŁOWYCH.

210. O funkcjach zmiennej zespolonej. W rozdziale III określiliśmy zmienną zespoloną

$$z = x + iy$$

i poznaliśmy kilka prostych własności niektórych funkcji zmiennej zespolonej, w szczególności zaś wielomianów $P(z)$. Nie podaliśmy jednak dotąd ogólnego określenia pojęcia: „funkcja zmiennej zespolonej z“.

Zdawałoby się, że najprościej jest wzorować się na określeniu funkcji zmiennej rzeczywistej i powiedzieć: Z jest funkcją zmiennej z, jeżeli między temi dwiema zmiennemi zachodzi związek, na mocy którego pewnym (lub wszystkim) wartościom z odpowiadają jedna lub kilka wartości Z. Okazuje się jednak, że takie określenie nie posiada praktycznej wartości. Istotnie, gdy z jest dane, dane są również x, y, i odwrotnie; a więc „wyznaczyć wartość zmiennej z” jest tym samym, co „wyznaczyć parę wartości zmiennych x, y”. Na mocy tego określenia, „funkcja zmiennej z“ byłaby tym samym, co funkcja zespolona

$$f(x, y) + ig(x, y)$$

dwuch zmiennych rzeczywistych x, y. Np.

$$x - iy, \quad xy, \quad |z| = \sqrt{y^2 + x^2}, \ \operatorname{am} z = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$$

byłyby to „funkcje zmiennej z“.

Takie określenie, jakkolwiek poprawne, byłoby bezcelowe, gdyż nie wprowadzałoby żadnego nowego pojęcia. Postąpimy tedy lepiej, jeżeli terminowi: „funkcja zmiennej zespolonej z“ nadamy znaczenie bardziej specjalne, oznaczając tą nazwą jedną tylko klasę z pośród funkcji zespolonych. Nie możemy roztrząsać tej sprawy w całej ogólności, przekroczylibyśmy bowiem ramy, zakreślone wykładowi elementarnemu Analizy; to też nie podamy ogólnej definicji funkcji zmiennej zespolonej, lecz poprzestaniemy na określeniu bezpośrednim kilku typów takich funkcji.

211. Określiliśmy już dawniej *wielomiany zmiennej* z (§ 32), *funkcje wymierne zmiennej* z (§ 39) *i pierwiastki tej zmiennej* (§ 40). Można również z łatwością rozciągnąć za przypadek zmiennej zespolonej z określenie *funkcji algiebraicznych* wyraźnych i uwikłanych, podane przez nas (§§ 19—20) dla zmiennej rzeczywistej x. We wszystkich tych przypadkach będziemy nazywali liczbę zespoloną z *argumentem* funkcji $f(z)$. W niniejszym rozdziale zajmiemy się określeniem i wyznaczeniem zasadniczych własności funkcji logarytmicznych, wykładniczych i kołowych zmiennej z.

Zaczniemy od funkcji logarytmicznej. Odrazu powstaje myśl uogólnienia określenia, podanego poprzednio dla zmiennej rzeczywistej dodatniej

$$\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (x > 0);$$

chcąc jednak pomysł taki w czyn wprowadzić, musimy wpierw rozszerzyć nieco samo pojęcie całki.

212. Całki krzywolinjowe rzeczywiste i zespolone. Niech AB będzie łukiem (który oznaczymy przez C) krzywej, określonej przez równanie

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

w których φ i ψ są funkcjami zmiennej t, posiadającemi ciągłe pochodne φ', ψ'. Przypuśćmy, że gdy t zmienia się od t_0 do t_1, punkt (x, y) porusza się po krzywej wciąż w tym samym zwrocie od A do B.

Całkę krzywolinjową wzdłuż łuku C

$$\int_C \{g(x, y)dx + h(x, y)dy\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie g, h są funkcjami ciągłemi zmiennych x, y, określamy jako równoznaczną z zwykłą całką określoną, otrzymaną przez podstawienie $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, czyli z całką

$$\int_{t_0}^{t_1} \{g(\varphi, \psi)\varphi' + h(\varphi, \psi)\psi'\} dt.$$

Łuk C nazywamy *drogą całkowania.*

Przypuśćmy teraz, że

$$z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t),$$

tak iż punkt z zakreśla na wykresie Arganda krzywą C. Przypuśćmy dalej, że funkcja

$$f(z) = u + iv$$

jest albo wielomianem, albo funkcją wymierną zmiennej z.

Przy tych założeniach określamy symbol

$$\int_C f(z) dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

jako
$$\int_C (u + iv)(dx + idy),$$

czyli jako
$$\int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy).$$

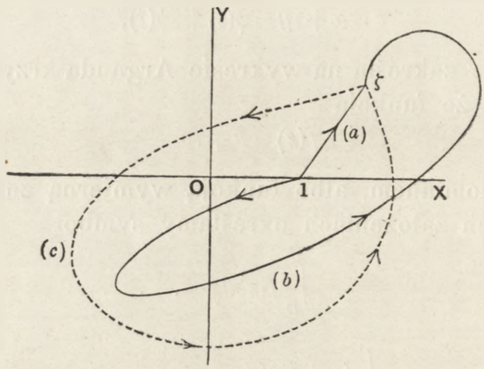
213. Określenie funkcji Log ζ. Niech $\zeta = \xi + i\eta$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Funkcję Log ζ (czyli ogólny logarytm liczby ζ) określamy za pomocą równania

$$\operatorname{Log} \zeta = \int_C \frac{dz}{z},$$

gdzie C jest łukiem krzywej, który zaczyna się w punkcie 1, kończy w punkcie ζ i nie przechodzi przez początek układu. Np. drogi (a), (b), (c) na rys. 62 są właśnie takiemi drogami całkowania, o jakich mowa w naszym określeniu. Tak więc wartość funkcji Log z jest określona, skoro została obrana droga całkowania. Na razie jednak nie widzimy, czy wartość funkcji Log z jest czy nie jest zależna od obranej drogi całkowania. Przypuśćmy np., że ζ jest liczbą rzeczywistą dodatnią równą ξ; w takim razie jako jedną z możliwych dróg całkowania mamy odcinek od 1 do ξ, określony, powiedzmy, przez równania $x=t$, $y=0$. W tym szczególnym przypadku mamy dla naszej drogi całkowania

$$\operatorname{Log}\xi = \int_1^{\xi} \frac{dt}{t},$$

tak iż $\operatorname{Log}\xi$ równa $\lg\xi$, t. j. równa się wartości funkcji logarytmicznej, określonej w poprzednim rozdziale. Niewątpliwie



Rys. 62.

tedy $\lg\xi$ stanowi przynajmniej jedną z wartości funkcji $\operatorname{Log}\xi$, gdzie ξ jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Ale i w tym przypadku możemy znaleźć nieskończenie wiele dróg całkowania i nie mamy żadnej pewności, czy każda wartość funkcji $\operatorname{Log}\xi$ równa się $\lg\xi$. Jest rzeczą zupełnie możliwą, że określona przez nas nowa funkcja $\operatorname{Log}\xi$ okaże się wielowartościową. Na razie możemy tylko powiedzieć, że są jednakowo możliwe trzy następujące przypadki:

(1) może się okazać, że $\operatorname{Log}\zeta$ posiada stałą wartość, niezależną od drogi, po której idziemy od punktu 1 do punktu ζ;

(2) może się okazać, że każdej drodze odpowiada inna wartość naszej funkcji;

(3) jest również rzeczą możliwą, że funkcja nasza posiada kilka różnych wartości, z których każda odpowiada pewnej klasie dróg całkowania.

Dopiero dalsze badanie wykaże, który z tych trzech możliwych przypadków istotnie zachodzi.

214. O wartościach funkcji Log ζ. Przypuśćmy, że ρ i φ są spółrzędnemi biegunowemi punktu $z=\zeta$, że więc

$$\zeta=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Załóżmy, że $-\pi<\varphi<\pi$, że natomiast ρ przybierać może wszelkie wartości dodatnie. Jednym słowem, ζ może przybierać wszelkie wartości z wyjątkiem tylko zera i ujemnych rzeczywistych wartości.

Zarówno spółrzędne (x, y), jak i spółrzędne biegunowe (r, ϑ) każdego punktu, leżącego na „drodze całkowania" C, są funkcjami zmiennej t. Mamy również, na mocy określenia § 212,

$$\operatorname{Log}\zeta=\int_C\frac{dz}{z}=\int_C\frac{dx+i\,dy}{x+i\,y}$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{x+iy}\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

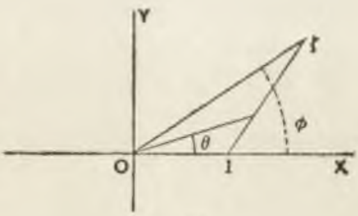
Ale $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ oraz

$$\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}=\left(\cos\vartheta\frac{dr}{dt}-r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right)+i\left(\sin\vartheta\frac{dr}{dt}+r\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$
$$=(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\left(\frac{dr}{dt}+ir\frac{d\vartheta}{dt}\right),$$

tak iż

$$\operatorname{Log}\zeta=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}dt+i\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\vartheta}{dt}dt=[\lg r]+i\,[\vartheta],$$

gdzie symbol $[\lg r]$ oznacza różnicę między wartościami funk-



Rys. 63.

cji $\lg r$ w punktach, odpowiadających wartościom $t=t_1$ i $t=t_0$, a $[\vartheta]$ ma analogiczne znaczenie.

Rzecz jasna, że

$$[\lg r] = \lg \rho - \lg 1 = \lg \rho;$$

co się tyczy wartości $[\vartheta]$, to sprawa wymaga bliższego zastanowienia. Przypuśćmy najpierw, że drogą całkowania był odcinek od 1 do ζ. Pierwotną wartością zmiennej ϑ jest amplituda punktu 1, albo raczej jedna z amplitud tego punktu, czyli pierwotnie $\vartheta = 2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Z rys. 63 widzimy, że ϑ rośnie od $2k\pi$ do $2k\pi + \varphi$, gdy punkt porusza się po odcinku. Tak więc

$$[\vartheta] = (2k\pi + \varphi) - 2k\pi = \varphi,$$

mamy tedy

$$\operatorname{Log} \zeta = \lg \rho + i\varphi,$$

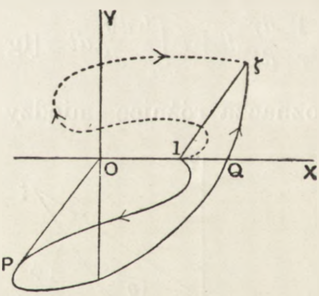
o ile drogą całkowania jest odcinek prostej.

Tę wartość szczególną funkcji $\operatorname{Log} \zeta$ nazwiemy jej **wartością główną.** Jeżeli ζ jest liczbą rzeczywistą dodatnią, mamy $\zeta = \rho$, $\varphi = 0$, tak iż wartość główna funkcji $\operatorname{Log} \zeta$ jest wówczas znaną nam już, pospolitą funkcją logarytmiczną $\lg \zeta$. Możemy wartość główną oznaczać stale symbolem $\lg \zeta$, wobec czego

$$\lg \zeta = \lg \rho + i\varphi;$$

część urojona tej wartości głównej leży między $-\pi$ a π.

Weźmy teraz pod uwagę dowolną drogę całkowania (jak na rys. 64), byle taką, że obszary, zawarte między nią a od-



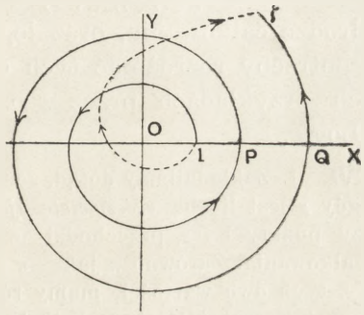
Rys. 64.

cinkiem $(1, \zeta)$, nie zawierają początku spółrzędnych. Łatwo dostrzec, że i tu $[\vartheta] = \varphi$. Jeżeli np. punkt porusza się wzdłuż krzywej, oznaczonej na rysunku linją ciągłą, wówczas ϑ z początku równa się $2k\pi$, następnie maleje do $2k\pi - XOP$, poczym znów wzrasta, przybierając w punkcie Q wartość $2k\pi$, w końcu zaś swej drogi wartość $2k\pi+\varphi$. To samo spostrzec można na krzywej, oznaczonej kropkami, jakkolwiek mamy tu do czynienia z nieco bardziej złożonym przypadkiem, gdyż mamy dwa obszary, z których żaden nie zawiera początku spółrzędnych.

Tak więc, *jeżeli droga całkowania posiada tę własność, że krzywa zamknięta, utworzona przez tę drogę i przez odcinek prostej od* 1 *do* ζ, *nie zawiera początku spółrzędnych, wówczas*

$$\operatorname{Log} \zeta = \lg \zeta = \lg \rho + i\varphi.$$

Z drugiej strony, łatwo jest zbudować taką drogę całkowania, żeby $[\vartheta]$ nie równało się φ. Weźmy np. pod uwagę krzywą, oznaczoną na rys. 65 zapomocą linji ciągłej. Jeżeli



Rys. 65.

początkowo $\vartheta=2k\pi$, to w punkcie P mamy $\vartheta=2k\pi+2\pi$, w punkcie Q mamy $2k\pi+4\pi$, wreszcie w punkcie ζ mamy $2k\pi+4\pi+\varphi$, tak iż $[\vartheta]=4\pi+\varphi$, a

$$\operatorname{Log} \zeta = \lg \rho + i(4\pi+\varphi).$$

W tym przykładzie droga całkowania dwa razy otacza początek spółrzędnych. Rzecz jasna, że gdyby otaczała ona ten początek k razy, mielibyśmy $[\vartheta]=2k\pi+\varphi$ oraz

$$\operatorname{Log} \zeta = \lg \rho + i(2k\pi+\varphi),$$

gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Biorąc krzywą o przeciwnym zwrocie (jak np. krzywą, zaznaczoną na rysunku kropkami), otrzymamy analogiczny wzór, w którym k będzie miało wartości ujemne.

Ponieważ $|\zeta|=\rho$, a różne kąty kształtu $2k\pi+\varphi$ są różnemi wartościami am ζ, zatym każda wartość funkcji $\lg\zeta + i \operatorname{am}\zeta$ jest wartością funkcji $\operatorname{Log}\zeta$. Rzecz jasna, że każda wartość funkcji $\operatorname{Log}\zeta$ musi być tego kształtu.

Dochodzimy tedy do wniosku, że *wartość ogólna funkcji* $\operatorname{Log}\zeta$ *równa się*

$$\lg\zeta + i \operatorname{am}\zeta = \lg\rho + i(2k\pi + \varphi),$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną. Wartość k zależy od obranej przez nas drogi całkowania. Jeżeli tą drogą jest odcinek prostej, wówczas $k=0$ i

$$\operatorname{Log}\zeta = \lg\zeta = \lg\rho + i\varphi.$$

W powyższych badaniach oznaczaliśmy przez ζ argument funkcji $\operatorname{Log}\zeta$, a przez (ξ, η) lub przez (ρ, φ) oznaczaliśmy spółrzędne punktu ζ, natomiast z, (x, y), (r, ϑ) oznaczały dowolny punkt, leżący na drodze całkowania, oraz jego spółrzędne. Teraz nie mamy już potrzeby rozróżniać tych dwu znakowań, to też w następujących przykładach przez z oznaczać będziemy argument funkcji $\operatorname{Log} z$.

Przykłady XCVI. 1. Zakładaliśmy dotąd, że $-\pi < \vartheta < \pi$ czyli usuwaliśmy przypadek, gdy z jest liczbą *rzeczywistą ujemną*. W tym przypadku odcinek, łączący punkty 1 i z, przechodzi przez punkt 0, a więc nie może być drogą całkowania. Zarówno π jak $-\pi$ są wartościami $\operatorname{am} z$, a ϑ równa się jednej z tych dwu wartości; mamy również $r=-z$. Wartości funkcji $\operatorname{Log} z$ są wciąż wartościami funkcji $\lg|z| + i \operatorname{am} z$, a mianowicie równają się

$$\lg(-z) + (2k+1)\pi i,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą. Wartości $\lg(-z)+\pi i$ oraz $\lg(-z)-\pi i$ odpowiadają drogom całkowania od 1 do z, leżącym całkowicie nad i pod osią liczb rzeczywistych. Którąkolwiek z tych dwu wartości możemy uznać za główną; obierzemy wartość $\lg(-z)+\pi i$, odpowiadającą pierwszej drodze.

2. Zarówno część rzeczywista, jak część urojona każdej wartości funkcji $\operatorname{Log} z$ są funkcjami ciągłemi zmiennych x, y, z wyjątkiem punktu $x=0$, $y=0$.

3. **Równanie funkcyjne, któremu czyni zadość** $\operatorname{Log} z$. Funkcja ta czyni zadość równaniu

$$\operatorname{Log} z_1 z_2 = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

w tym sensie, że ***każda wartość*** jednej strony tego równania jest ***jedną z wartości*** drugiej strony. Aby się o tym przekonać, kładziemy

$$z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$

stosujemy wzór poprzedniego paragrafu.

Natomiast równanie

$$\lg z_1 z_2 = \lg z_1 + \lg z_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

nie zawsze bywa słuszne. Jeżeli np. mamy

$$z_1 = z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

wówczas $\lg z_1 = \lg z_2 = \frac{2\pi i}{3}$; otóż suma $\lg z_1 + \lg z_2 = \frac{4\pi i}{3}$ daje wprawdzie jedną z wartości funkcji $\operatorname{Log} z_1 z_2$, ale nie główną jej wartość. Jakoż $\lg z_1 z_2 = -\frac{2\pi i}{3}$.

Równanie typu (1), w którym każda wartość jednej którejkolwiek strony jest jedną z wartości drugiej strony, nazwiemy równaniem *zupełnym*.

4. Równanie $\operatorname{Log} z^m = m \operatorname{Log} z$, w którym m jest liczbą całkowitą, nie jest zupełne: każda wartość prawej części jest jedną z wartości lewej części równania, ale twierdzenie odwrotne nie jest słuszne.

5. Równanie $\operatorname{Log}(1/z) = -\operatorname{Log} z$ jest zupełne. Mamy również $\lg(1/z) = -\lg z$, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy z jest liczbą rzeczywistą ujemną.

6. Równanie

$$\lg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \lg(z-a) - \lg(z-b)$$

jest słuszne, o ile z leży poza obszarem, ograniczonym przez odcinek, łączący punkty $z=a$ i $z=b$, oraz półproste, poprowadzone z tych punktów w zwrocie ujemnym równolegle do OX.

7. Równanie

$$\lg\left(\frac{a-z}{b-z}\right) = \lg\left(1-\frac{a}{z}\right) - \lg\left(1-\frac{b}{z}\right)$$

jest słuszne, o ile z leży poza trójkątem, wyznaczonym przez punkty 0, a, b.

8. Wykreślić funkcję zmiennej rzeczywistej $\mathbf{I}(\operatorname{Log} x)$. [Wykres składa się z dodatnich promieni prostych $y=2k\pi$ i z ujemnych promieni prostych $y=(2k+1)\pi$.]

9. Funkcja $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x, określona przez równanie

$$\pi f(x) = p\pi + (q-p)\mathbf{I}(\lg x),$$

równa się p przy $x>0$, a przy $x<0$ równa się q.

10. Funkcja $f(x)$, określona przez równanie

$$\pi f(x) = p\pi + (q-p)\mathbf{I}\{\lg(x-1)\} + (r-q)\mathbf{I}(\lg x),$$

równa się p przy $x>1$, równa się q przy $0<x<1$, wreszcie równa się r przy $x<0$.

11. Przy jakich wartościach z funkcja $\lg z$ lub jakakolwiek wartość funkcji $\operatorname{Log} z$ są (I) rzeczywiste, (II) czysto urojone?

12. Jeżeli $z=x+iy$, to $\operatorname{Log}\operatorname{Log} z=\lg R+i(\Theta+2k'\pi)$, gdzie

$$R^2=(\lg r)^2+(\vartheta+2k\pi)^2,$$

a Θ oznacza najmniejszy kąt dodatni, wyznaczony przez równania

$$\cos\Theta:\sin\Theta:1=\lg r:(\vartheta+2k\pi):\sqrt{(\lg r)^2+(\vartheta+2k\pi)^2}.$$

Naszkicować nieskończony zbiór wartości $\operatorname{Log}\operatorname{Log}(1+i\sqrt{3})$, zaznaczając, które z nich są wartościami $\lg\operatorname{Log}(1+i\sqrt{3})$, które zaś wartościami $\operatorname{Log}\lg(1+i\sqrt{3})$.

215. Funkcja wykładnicza. Wzorując się na określeniu funkcji e^y zmiennej rzeczywistej y, możemy utworzyć następujące

Określenie. *Jeżeli jakakolwiek wartość funkcji* $\operatorname{Log} z$ *równa się* ζ, *nazywamy* z *funkcją wykładniczą zmiennej* ζ *i piszemy*

$$z=\exp\zeta.$$

Tak więc $z=\exp\zeta$, jeżeli $\zeta=\operatorname{Log} z$. Każdej danej wartości na z odpowiada nieskończenie wiele wartości ζ; możnaby więc przypuszczać, że zachodzi również zjawisko odwrotne, czyli że $\exp\zeta$ jest nieskończenie wielowartościową funkcją zmiennej ζ. Tak jednak nie jest, o czym przekonamy się z następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Funkcja wykładnicza* $\exp\zeta$ *jest jednowartościową funkcją zmiennej* ζ.

Jakoż przypuśćmy, że

$$z_1=r_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1),\quad z_2=r_2(\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2)$$

są to dwie wartości funkcji $\exp\zeta$. W takim razie

$$\zeta=\operatorname{Log} z_1=\operatorname{Log} z_2,$$

a więc $$\lg r_1+i(\vartheta_1+2m\pi)=\lg r_2+i(\vartheta_2+2n\pi),$$

gdzie m, n są liczbami całkowitemi. Stąd wynika, że

$$\lg r_1=\lg r_2,\quad \vartheta_1+2m\pi=\vartheta_2+2n\pi,$$

a więc $r_1=r_2$, a ϑ_1 i ϑ_2 różnią się o wielokrotność 2π, czyli $z_1=z_2$.

Wniosek. *Jeżeli* ζ *jest liczbą rzeczywistą, to* $\exp\zeta=e^\zeta$, *t. j.*

równa się funkcji wykładniczej zmiennej rzeczywistej, którą określiliśmy w rozdziale IX.

Istotnie, jeżeli $z=e^\zeta$, to $\lg z=\zeta$, czyli ζ jest jedną z wartości funkcji $\operatorname{Log} z$, a więc $z=\exp\zeta$.

216. Wartość funkcji $\exp\zeta$. Niech będzie $\zeta=\xi+i\eta$ i niech

$$z=\exp\zeta=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta).$$

W takim razie

$$\xi+i\eta=\operatorname{Log} z=\lg r+i(\vartheta+2m\pi),$$

gdzie m jest liczbą całkowitą. Wobec tego $\xi=\lg r$, $\eta=\vartheta+2m\pi$,

czyli $$r=e^\xi,\quad \vartheta=\eta-2m\pi,$$

a więc $$\exp(\xi+i\eta)=e^\xi(\cos\eta+i\sin\eta).$$

Przy $\eta=0$, mamy $\exp\xi=e^\xi$, co już otrzymaliśmy w § 215. Rzecz jasna, że zarówno część rzeczywista, jak część urojona funkcji $\exp(\xi+i\eta)$ są funkcjami ciągłemi zmiennych ξ, η przy wszelkich wartościach tych zmiennych.

217. Równanie funkcyjne, któremu czyni zadość $\exp\zeta$. Niech będzie $\zeta_1=\xi_1+i\eta_1$, $\zeta_2=\xi_2+i\eta_2$. Mamy

$$\begin{aligned}\exp\zeta_1\times\exp\zeta_2&=e^{\xi_1}(\cos\eta_1+i\sin\eta_1)\times e^{\xi_2}(\cos\eta_2+i\sin\eta_2)\\&=e^{\xi_1+\xi_2}[\cos(\eta_1+\eta_2)+i\sin(\eta_1+\eta_2)]\\&=\exp(\zeta_1+\zeta_2).\end{aligned}$$

Widzimy, że nasza funkcja czyni zadość równaniu funkcyjnemu $f(\zeta_1+\zeta_2)=f(\zeta_1)f(\zeta_2)$, o którym wiemy już (§ 198), że jest słuszne dla wszelkich rzeczywistych wartości na ζ_1 i ζ_2.

218. O funkcji a^ζ. Przy ζ rzeczywistym mamy $\exp\zeta=e^\zeta$; zdawałoby się tedy rzeczą praktyczną używać tego samego symbolu przy ζ zespolonym i zarzucić zupełnie symbol $\exp\zeta$. Nie postąpimy jednak tak, gdyż podamy ogólniejsze określenie symbolu e^ζ, przyczym okaże się, że $\exp\zeta$ jest tylko jedną z wartości funkcji e^ζ.

Określiliśmy już symbol a^ζ w wielu poszczególnych przypadkach. Elementarna algiebra symbol ten określa przy a dodatnim rzeczywistym i przy ζ wymiernym, jak również przy

a rzeczywistym ujemnym i przy ζ wymiernym, mającym mianownik nieparzysty. Na mocy tych określeń a^ζ może mieć conajwyżej dwie wartości. W rozdziale III uogólniliśmy to określenie na przypadek, gdy a jest dowolną liczbą zespoloną lub rzeczywistą, a ζ liczbą wymierną p/q. W rozdziale IX podaliśmy nowe określenie, które wyraziliśmy za pomocą równania

$$a^\zeta = e^{\zeta \lg a},$$

gdzie ζ jest liczbą rzeczywistą, a zaś jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Nie mamy jednak dotąd określenia, na mocy którego moglibyśmy przypisać jakieś znaczenie takim symbolom, jak

$$(1+i)^{\sqrt{2}}, \quad 2^i, \quad (3+2i)^{2+3i}.$$

Podamy tedy określenie ogólne symbolu a^ζ, które da się zastosować do wszelkich wartości rzeczywistych lub zespolonych liczb a, ζ, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy a jest zerem.

Określenie. *Funkcję a^ζ określamy za pomocą równania*

$$a^\zeta = \exp(\zeta \operatorname{Log} a),$$

w którym Log a *jest jakąkolwiek wartością logarytmu liczby* a.

Musimy najpierw przekonać się, czy to nowe określenie nie jest sprzeczne z poprzedniemi i czy zawiera je wszystkie jako przypadki szczególne.

(1) Jeżeli a jest liczbą dodatnią, a ζ liczbą rzeczywistą, wówczas jedna wartość funkcji $\zeta \operatorname{Log} a$, mianowicie $\zeta \lg a$ jest liczbą rzeczywistą, a $\exp(\zeta \lg a) = e^{\zeta \lg a}$, co zgadza się z określeniem, podanym w rozdziale IX. Widzieliśmy już, że określenie rozdziału IX nie jest sprzeczne z określeniem, które podaje algiebra elementarna, a więc to samo da się powiedzieć i o nowym naszym określeniu.

(2) Jeżeli $a = e^\tau(\cos\psi + i\sin\psi)$, to

$$\operatorname{Log} a = \tau + i(\psi + 2m\pi),$$

$$\exp\left(\frac{p}{q}\operatorname{Log} a\right) = e^{p\tau/q}\operatorname{Cis}\left[\frac{p}{q}(\psi + 2m\pi)\right],$$

gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą. Łatwo widzieć, że gdy m przybiera wszelkie możliwe wartości całkowite, wówczas powyższe wyrażenie przybiera q i tylko q różnych wartości, które są właśnie wartościami na $a^{p/q}$, znalezionemi w § 41. Tak więc nasze określenie jest zgodne z określeniem rozdziału III.

219. Ogólna wartość funkcji a^{ζ}. Niech będzie

$$\zeta=\xi+i\eta, \quad a=\sigma(\cos\psi+i\sin\psi),$$

gdzie $-\pi<\psi\leqq\pi$, tak iż, według znakowania poprzedniego paragrafu, mamy $\sigma=e^{\tau}$ czyli $\tau=\lg\sigma$.

W takim razie

$$\zeta \operatorname{Log} a=(\xi+i\eta)\{\lg\sigma+i(\psi+2m\pi)\}=L+iM,$$

gdzie

$$L=\xi\lg\sigma-\eta(\psi+2m\pi), \qquad M=\eta\lg\sigma+\xi(\psi+2m\pi),$$

$$a^{\zeta}=\exp(\zeta\operatorname{Log} a)=e^{L}(\cos M+i\sin M).$$

Tak więc ogólną wartością funkcji a^{ζ} jest

$$e^{\xi\lg\sigma-\eta(\psi+2m\pi)}[\cos\{\eta\lg\sigma+\xi(\psi+2m\pi)\}+i\sin\{\eta\lg\sigma+\xi(\psi+2m\pi)\}].$$

Funkcja a^{ζ} jest więc funkcją nieskończenie wielowartościową. Istotnie, o ile $\eta\neq 0$, wówczas dla każdej wartości na m

$$|a^{\zeta}|=e^{\xi\lg\sigma-\eta(\psi+2m\pi)}$$

ma inną wartość. Jeżeli $\eta=0$, moduły wszystkich wartości a^{ζ} równają się sobie. Ale dwie wartości są różne, o ile nie są równe sobie ich amplitudy lub o ile nie różnią się o wielokrotność liczby 2π. Wobec tego $\xi(\psi+2m\pi)$ oraz $\xi(\psi+2n\pi)$, gdzie m, n są to różne liczby całkowite, muszą różnić się o wielokrotność liczby 2π. Jeśli jednak

$$\xi(\psi+2m\pi)-\xi(\psi+2n\pi)=2k\pi,$$

to $\xi=k/(m-n)$ jest liczbą wymierną. Dochodzimy tedy do wniosku, że *a^{ζ} jest funkcją nieskończenie wielowartościową, o ile ζ nie jest liczbą rzeczywistą wymierną.* Z drugiej strony wiemy już, że gdy ζ jest liczbą rzeczywistą wymierną, wówczas funkcja a^{ζ} posiada tylko skończoną liczbę wartości.

Wartość główną funkcji a^{ζ} otrzymujemy, dając na $\operatorname{Log} a$ jego wartość główną, czyli kładąc we wzorze ogólnym $m=0$. Tak więc

$$e^{\xi\lg\sigma-\eta\psi}\{\cos(\eta\lg\sigma+\psi\xi)+i\sin(\eta\lg\sigma+\xi\psi)\}$$

jest główną wartością funkcji a^{ζ}.

Dwa szczególne przypadki są godne uwagi. Jeżeli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią, a ζ jest liczbą rzeczywistą, wówczas $\sigma=a$, $\psi=0$, $\xi=\zeta$, $\eta=0$ i wartością główną funkcji a^{ζ} jest $e^{\zeta \lg a}$, t. j. wartość, określona w poprzednim rozdziale. Jeżeli $|a|=1$, a ζ jest liczbą rzeczywistą, wówczas $\sigma=1$, $\xi=\zeta$, $\eta=0$, a główną wartością funkcji $(\cos\psi+i\sin\psi)^{\zeta}$ jest $\cos\zeta\psi+i\sin\zeta\psi$. Jest to dalsze uogólnienie twierdzenia De Moivre'a (§§ 38, 41).

Przykłady XCVII. 1. Znaleźć wszystkie wartości i^i.

[Na mocy określenia $i^i=\exp(i\,\mathrm{Log}\,i)$, ale

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{Log}\,i=(2k+\tfrac{1}{2})\pi i,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą. Wobec tego

$$i^i=\exp\{-(2k+\tfrac{1}{2})\pi\}=e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}.$$

Wszystkie więc wartości i^i są rzeczywiste dodatnie.]

2. Znaleźć wszystkie wartości $(1+i)^i$, i^{1+i}, $(1+i)^{1+i}$.

3. Wartości a^{ζ}, wykreślone na djagramacie Arganda, są wierzchołkami wielokąta równokątnego, wpisanego w spiralną równokątną, której kąt jest niezależny od a.

(*Mathem. Tripos*, 1899).

[Jeżeli $a^{\zeta}=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$, mamy

$$r=e^{\xi\lg\sigma-\eta(\psi+2m\pi)},\quad \vartheta=\eta\lg\sigma+\xi(\psi+2m\pi);$$

wszystkie punkty leżą na krzywej

$$r=\sigma^{(\xi^2+\eta^2)/\xi}e^{-\eta\vartheta/\xi}.]$$

4. **Funkcja** e^{ζ}. Kładąc we wzorze ogólnym $a=e$, czyli $\lg\sigma=1$, $\psi=0$, mamy

$$e^{\zeta}=e^{\xi-2m\pi\eta}\{\cos(\eta+2m\pi\xi)+i\sin(\eta+2m\pi\xi)\}.$$

Wartością główną funkcji e^{ζ} jest $e^{\xi}(\cos\eta+i\sin\eta)$ czyli $\exp\zeta$. W szczególności, jeżeli ζ jest liczbą rzeczywistą, tak iż $\eta=0$, mamy wartość ogólną

$$e^{\zeta}(\cos 2m\pi\zeta+i\sin 2m\pi\zeta),$$

główna zaś wartość niczym innym nie jest, jak wartością dodatnią funkcji wykładniczej, określonej w rozdziale IX.

5. Dowieść, że $\mathrm{Log}\,e^{\zeta}=(1+2m\pi i)\zeta+2n\pi i$, gdzie m, n są dowolnemi liczbami całkowitemi, i że $\mathrm{Log}\,a^{\zeta}$ posiada wogóle dwa nieskończone ciągi wartości.

6. Równanie $1/a^{\zeta}=a^{-\zeta}$ jest zupełne. (Przykł. XCVI. 3).

7. Równanie $a^\zeta \times b^\zeta = (ab)^\zeta$ jest zupełne, ale odpowiednie równanie dla wartości głównych nie jest zawsze słuszne.

8. Równanie $a^\zeta \times a^{\zeta'} = a^{\zeta+\zeta'}$ nie jest zupełne, ale jest słuszne w zastosowaniu do wartości głównych. [Każda wartość strony prawej równania jest zarazem wartością jego lewej strony, ale wartość ogólna funkcji $a^\zeta \times a^{\zeta'}$ czyli

$$\exp\{\zeta(\lg a+2m\pi i)+\zeta'(\lg a+2n\pi i)\}$$

nie jest naogół wartością funkcji $a^{\zeta+\zeta'}$, o ile tylko $m \neq n$.]

9. Czy równania

$$\operatorname{Log} a^\zeta = \zeta \operatorname{Log} a, \quad (a^\zeta)^{\zeta'} = (a^{\zeta'})^\zeta = a^{\zeta\zeta'}$$

są zupełne?

10. Przy jakich wartościach na ζ jakakolwiek (albo główna) wartość funkcji e^ζ jest (I) rzeczywista, (II) czysto urojona, (III) ma moduł równy jedności?

11. Żeby wszystkie wartości funkcji a^ζ były rzeczywiste, trzeba i wystarcza, aby zarówno 2ξ, jak $\{\eta \lg|a|+\xi \operatorname{am} a\}/\pi$, gdzie $\operatorname{am} a$ oznacza dowolną wartość amplitudy, były liczbami całkowitemi. Jaki jest warunek konieczny i dostateczny, żeby wszystkie wartości miały moduł równy jedności?

12. Przy $x>0$ ogólną wartością funkcji $|x^i+x^{-i}|$ jest

$$e^{-(m-n)\pi}\sqrt{2\{\cosh 2(m+n)\pi+\cos(2\lg x)\}}.$$

13. Gdzie tkwi błąd w następującym rozumowaniu: ponieważ $e^{2n\pi i}=e^{2m\pi i}=1$, gdzie m, n są liczbami całkowitemi, zatym, podnosząc obie części równania do potęgi i, mamy $e^{-2m\pi}=e^{-2n\pi}$?

14. Kiedy wartości funkcji x^x, gdzie x jest liczbą rzeczywistą, są rzeczywiste?

[Jeżeli $x>0$, mamy

$$x^x=\exp(x \operatorname{Log} x)=\exp(x\lg x)\operatorname{Cis} 2m\pi x,$$

przyczym pierwszy czynnik jest rzeczywisty. Wartość główna, którą otrzymujemy kładąc $m=0$, jest zawsze liczbą rzeczywistą.

Jeżeli x jest albo ułamkiem wymiernym kształtu $p/(2q+1)$, albo liczbą niewymierną, wówczas funkcja nie ma innej wartości rzeczywistej. Jeżeli $x=p/2q$, wówczas istnieje druga rzeczywista wartość przy $m=q$, a mianowicie wartość $-\exp(x\lg x)$.

Jeżeli $x=-\xi<0$, to

$$x^x=\exp\{-\xi \operatorname{Log}(-\xi)\}=\exp(-\xi\lg\xi)\operatorname{Cis}\{-(2m+1)\xi\pi\}.$$

Wartość rzeczywistą możemy otrzymać tylko przy $\xi=p/(2q+1)$, gdy $m=q$; wartość ta równa się

$$\exp(-\xi\lg\xi)\operatorname{Cis}(-p\pi)=(-1)^p\xi^{-\xi}.$$

15. **Logarytm przy dowolnej zasadzie.** Funkcję $\zeta=\mathrm{Log}_a z$ możemy określić w dwojaki sposób; (I) możemy powiedzieć, że $\zeta=\mathrm{Log}_a z$, jeżeli *wartość główna* funkcji a^ζ równa się z; (II) albo też możemy powiedzieć, że równanie to zachodzi, jeżeli *jakakolwiek wartość* funkcji a^ζ równa się z.

Jeżeli $a=e$, wtedy mamy według pierwszego określenia $\zeta=\mathrm{Log}_e z$, o ile wartość główna funkcji e^ζ równa się z czyli $\exp\zeta=z$, wobec czego $\mathrm{Log}_e z$ jest tym samym, co $\mathrm{Log}\, z$. Natomiast według drugiego określenia $\zeta=\mathrm{Log}_e z$, jeżeli

$$e^\zeta=\exp(\zeta\,\mathrm{Log}\, e)=z,\quad \zeta\,\mathrm{Log}\, e=\mathrm{Log}\, z$$

czyli $\zeta=(\mathrm{Log}\, z)/(\mathrm{Log}\, e)$, przyczym bierzemy dowolną wartość logarytmu. Wobec tego

$$\zeta=\mathrm{Log}_e z=\frac{\lg|z|+i\,(\mathrm{am}\, z+2m\pi)}{1+2n\pi i}$$

i każdej wartości z odpowiadają dwa nieskończone zbiory wartości ζ. Na mocy tego określenia mamy ogólnie $\mathrm{Log}_a z=(\mathrm{Log}\, z)/(\mathrm{Log}\, a)$.

16. $\mathrm{Log}_e 1+2m\pi i/(1+2n\pi i)$, $\mathrm{Log}_e(-1)=(2m+1)\pi i/(1+2n\pi i)$, gdzie m i n są liczbami całkowitemi, zresztą dowolnemi.

220. Związki między funkcją wykładniczą a funkcjami trygonometrycznemi. Ze wzoru

$$\exp(\xi+i\eta)=\exp\xi(\cos\eta+i\sin\eta)$$

wynikają ważne wzory pomocnicze. Kładąc $\xi=0$, mamy $\exp(i\eta)=\cos\eta+i\sin\eta$, a zmieniając znak przy η, otrzymujemy $\exp(-i\eta)=\cos\eta-i\sin\eta$. Stąd wynika, że

$$\cos\eta=\tfrac{1}{2}\,[\exp(i\eta)+\exp(-i\eta)]$$

$$\sin\eta=-\frac{i}{2}\,[\exp(i\eta)-\exp(-i\eta)].$$

221. Określenie funkcji $\sin\zeta$, $\cos\zeta$ **dla dowolnych wartości** ζ. Widzieliśmy, że przy ζ rzeczywistym mamy

$$\cos\zeta=\tfrac{1}{2}\,[\exp(i\zeta)+\exp(-i\zeta)]\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (1a)$$

$$\sin\zeta=-\frac{i}{2}\,[\exp(i\zeta)-\exp(-i\zeta)]\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (1b)$$

Trygonometrja elementarna określa lewe części tych równań tylko przy rzeczywistych wartościach na ζ, natomiast prawe części określiliśmy już przy wszelkich wartościach zmiennej ζ, zarówno rzeczywistych jak zespolonych. Stąd powstaje myśl uważania równań $(1a)$ i $(1b)$ za o k r e ś l e n i a f u n k-cji $\cos\zeta$ i $\sin\zeta$ przy wszelkich wartościach zmiennej niezależnej ζ. Na mocy § 220 określenia te są zgodne z elementarnemi określeniami tych funkcji przy rzeczywistych wartościach ζ.

Inne funkcje trygonometryczne określamy za pomocą równań

$$\operatorname{tg}\zeta=\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta},\quad \operatorname{ctg}\zeta=\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta},\quad \sec\zeta=\frac{1}{\cos\zeta},\quad \operatorname{cosec}\zeta=\frac{1}{\sin\zeta}\ .\ .\ (2)$$

Rzecz jasna, że $\cos\zeta$ i $\sec\zeta$ są parzystemi funkcjami zmiennej ζ, wszystkie zaś inne są funkcjami nieparzystemi.

Kładąc $\exp(i\zeta)=t$, mamy

$$\cos\zeta=\tfrac{1}{2}[t+(1/t)],\quad \sin\zeta=-\frac{i}{2}[t-(1/t)],$$

$$\cos^2\zeta+\sin^2\zeta=1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Do wyrażenia funkcji trygonometrycznych zmiennej $\zeta+\zeta'$ za pomocą funkcji zmiennych ζ i ζ' służą te same wzory, co i w trygonometrji elementarnej. Jakoż niech będzie $\exp(i\zeta')=t'$; mamy

$$\cos(\zeta+\zeta')=\tfrac{1}{2}\left(tt'+\frac{1}{tt'}\right)=\tfrac{1}{4}\left\{\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t'+\frac{1}{t'}\right)+\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t'-\frac{1}{t'}\right)\right\}$$

$$=\cos\zeta\cos\zeta'-\sin\zeta\sin\zeta'\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4).$$

W taki sam sposób dowiedzie czytelnik wzoru

$$\sin(\zeta+\zeta')=\sin\zeta\cos\zeta'+\cos\zeta\sin\zeta'\ .\ .\ .\ .\ (5).$$

W szczególności

$$\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\zeta,\quad \sin\left(\zeta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\zeta\ .\ .\ .\ (6)$$

Wszystkie wzory trygonometrji elementarnej są prostemi wnioskami z wzorów (2)—(6), a więc wszystkie te wzory pozostają słuszne przy ogólnym określeniu funkcji trygonometrycznych.

222. Funkcje hiperboliczne ogólne. W Przykł. XC.19 określiliśmy funkcje $\cosh\zeta$, $\sinh\zeta$ przy rzeczywistych wartościach ζ za pomocą równań

$$\cosh\zeta=\tfrac{1}{2}\{\exp\zeta+\exp(-\zeta)\},\quad \sinh\zeta=\tfrac{1}{2}\{\exp\zeta-\exp(-\zeta)\}\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Możemy te określenia rozciągnąć na przypadek, gdy ζ jest liczbą zespoloną, t. j. możemy umówić się, że równania (1) określają funkcje $\sinh\zeta$, $\cosh\zeta$ bez względu na to, czy ζ jest liczbą rzeczywistą czy zespoloną.

Łatwo sprawdzić następujące związki:

$$\cos i\zeta=\cosh\zeta,\quad \sin i\zeta=i\sinh\zeta,\quad \cosh i\zeta=\cos\zeta,\quad \sinh i\zeta=i\sin\zeta.$$

Widzieliśmy, że wzory trygonometrji elementarnej pozostają słuszne, gdy ζ przybiera wartości zespolone. Mamy tedy prawo wstawić do takiego wzoru $\cos i\zeta$ zamiast $\cos\zeta$, $\sin i\zeta$ zamiast $\sin\zeta$, i t. d. W ten sposób np. z wzoru

$$\cos 2\zeta=\cos^2\zeta-\sin^2\zeta$$

wynika wzór

$$\cosh 2\zeta=\cosh^2\zeta+\sinh^2\zeta.$$

Ten fakt tłumaczy również dostrzeżoną w Przykł. XC.21 odpowiedniość między wzorami trygonometrji a wzorami na funkcje hiperboliczne.

223. Wzory na $\cos(\xi+i\eta)$, $\sin(\xi+i\eta)$. Z wzorów na funkcje sumy argumentów wynika, że

$$\cos(\xi+i\eta)=\cos\xi\cos i\eta-\sin\xi\sin i\eta=\cos\xi\cosh\eta-i\sin\xi\sinh\eta$$

$$\sin(\xi+i\eta)=\sin\xi\cos i\eta+\cos\xi\sin i\eta=\sin\xi\cosh\eta+i\cos\xi\sinh\eta.$$

Te wzory są słuszne przy wszelkich wartościach na ξ i η. Ciekawy przypadek szczególny mamy wówczas, gdy ξ i η są rzeczywiste: wzory nasze dają wtedy części rzeczywistą i urojoną wstawy i dostawy liczby zespolonej.

Przykłady XCVIII. 1. Przy jakich wartościach ζ funkcje $\cos\zeta$, $\sin\zeta$ są (I) rzeczywiste, (II) czysto urojone?

2. $$|\cos(\xi+i\eta)|=\sqrt{\cos^2\xi+\sinh^2\eta}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(\cosh 2\eta+\cos 2\xi)}.$$

$$|\sin(\xi+i\eta)|=\sqrt{\sin^2\xi+\sinh^2\eta}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(\cosh 2\eta-\cos 2\xi)}.$$

3. $$\operatorname{tg}(\xi+i\eta)=\frac{\sin 2\xi+i\sinh 2\eta}{\cosh 2\eta+\cos 2\xi},\qquad \operatorname{ctg}(\xi+i\eta)=\frac{\sin 2\zeta-i\sinh 2\eta}{\cosh 2\eta-\cos 2\xi}.$$

4. $$\sec(\xi+i\eta)=\frac{2(\cos\xi\cosh\eta+i\sin\xi\sinh\eta)}{\cosh 2\eta+\cos 2\xi}$$

$$\operatorname{cosec}(\xi+i\eta)=\frac{2(\sin\xi\cosh\eta-i\cos\xi\sinh\eta)}{\cosh 2\eta-\cos 2\xi}.$$

5. Jeżeli $|\cos(\xi+i\eta)|=1$, to $\sin^2\xi=\sinh^2\eta$;

jeżeli zaś $|\sin(\xi+i\eta)|=1$, to $\cos^2\xi=\sinh^2\eta$.

6. Jeżeli $|\cos(\xi+i\eta)|=1$, to

$$\sin\{\operatorname{am}\cos(\xi+i\eta)\}=\pm\sin^2\xi=\pm\sinh^2\eta.$$

7. Dowieść, że $\operatorname{Log}\cos(\xi+i\eta)=A+iB$, gdzie

$$A=\tfrac{1}{2}\lg\frac{\cosh 2\eta+\cos 2\xi}{2},$$

a

$$\frac{\cos B}{\cos\xi\cosh\eta}=-\frac{\sin B}{\sin\xi\sinh\eta}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\eta+\cos 2\xi)}}.$$

Znaleźć analogiczny wzór dla $\operatorname{Log}\sin(\xi+i\eta)$.

8. **Rozwiązanie równania** $\cos\zeta=\alpha$, **gdzie** α **jest liczbą rzeczywistą.** Kładąc $\zeta=\xi+i\eta$, mamy

$$\cos\xi\cosh\eta=\alpha,\quad \sin\xi\sinh\eta=0,$$

zatym albo $\eta=0$, albo też ξ jest wielokrotnością liczby π. Jeżeli $\eta=0$, to $\cos\xi=\alpha$, co jest możliwe tylko przy $-1\leqq\alpha\leqq 1$. To daje rozwiązanie

$$\zeta=2k\pi\pm\operatorname{arc}\cos\alpha,$$

gdzie $\operatorname{arc}\cos\alpha$ zawiera się między 0 a $\frac{\pi}{2}$. Jeżeli zaś $\xi=m\pi$, wówczas $\cosh\eta=(-1)^m\alpha$, tak iż albo $\alpha\geqq 1$ i m jest parzyste, albo też $\alpha\leqq -1$ i m jest nieparzyste. Przy $\alpha=\pm 1$ mamy $\eta=0$ i wracamy do pierwszego przypadku. Jeżeli $|\alpha|>1$, to $\cosh\eta=|\alpha|$, co prowadzi do rozwiązań

$$\zeta=2k\pi\pm i\lg(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1} \qquad (\alpha>1)$$

$$\zeta=(2k+1)\pi\pm i\lg(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1} \qquad (\alpha<-1).$$

Np. ogólnym rozwiązaniem równania

$$\cos\zeta=-{}^5/_3$$

jest

$$\zeta=(2k+1)\pi\pm i\lg 3.$$

9. Rozwiązać równanie $\sin\zeta=\alpha$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą.

10. **Rozwiązanie równania** $\cos\zeta=\alpha+i\beta$, **gdzie** $\beta\neq 0$. Możemy założyć, że $\beta>0$, wystarczy bowiem zmienić znak przy i, aby otrzymać odpowiednie wyniki dla przypadku, gdy $\beta<0$. Mamy

$$\cos\xi\cosh\eta=\alpha,\quad \sin\xi\sinh\eta=-\beta \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1),$$

oraz

$$\left(\frac{\alpha}{\cosh\eta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\sinh\eta}\right)^2=1.$$

Kładąc $\cosh^2\eta=x$, mamy

$$x^2-(1+\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2=0,$$

czyli $x=(A_1\pm A_2)^2$, gdzie

$$A_1=\frac{\sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2}}{2},\qquad A_2=\frac{\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}}{2}.$$

Przypuśćmy, że $\alpha>0$. Wtedy $A_1>A_2>0$, a $\cosh\eta=A_1\pm A_2$. Mamy też

$$\cos\xi=\alpha/(\cosh\eta)=A_1\pm A_2,$$

że zaś $\cosh\eta > \cos\xi$, zatym

$$\cosh\eta = A_1 + A_2, \quad \cos\xi = A_1 - A_2.$$

Rozwiązanie ogólne równania wyraża się zapomocą wzorów

$$\xi = 2k\pi \pm \operatorname{arc\,cos} M, \quad \eta = \pm \lg(L + \sqrt{L^2 - 1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

gdzie $L = A_1 + A_2$, $M = A_1 - A_1$, a $\operatorname{arc\,cos} M$ zawiera się między 0 i $\frac{\pi}{2}$.

Otrzymane wartości na ξ i η zawierają jednak również rozwiązania równań

$$\cos\xi \cosh\eta = \alpha, \quad \sin\xi \sinh\eta = \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

gdyż drugie równanie układu (1) wprowadziliśmy do naszych rozważań podniósłszy je do kwadratu. Chcąc rozróżnić te dwa układy rozwiązań, musimy zwrócić uwagę na to, że $\sin\xi$ ma ten sam znak, co $\operatorname{arc\,cos} M$ w pierwszym z równań (2), a $\sinh\eta$ ma ten sam znak, co prawa strona drugiego z tych równań. Ponieważ $\beta > 0$, dwa te znaki muszą być różne, wobec czego żądane rozwiązanie ogólne jest

$$\zeta = 2k\pi \pm [\operatorname{arc\,cos} M - i \lg(L + \sqrt{L^2 - 1})].$$

11. Zbadać w podobny sposób przypadki, gdy $\alpha < 0$ lub $\alpha = 0$.

12. Jeżeli $\beta = 0$, to $L = \frac{1}{2}|\alpha + 1| + \frac{1}{2}|\alpha - 1|$, $M = \frac{1}{2}|\alpha + 1| - \frac{1}{2}|\alpha - 1|$. Sprawdzić, że wyniki te są w zgodzie z Przykł. 8.

13. Jeżeli $\alpha > 0$, $\beta > 0$, to ogólnym rozwiązaniem równania $\sin\zeta = \alpha + i\beta$ jest

$$\zeta = k\pi + (-1)^k [\operatorname{arc\,sin} M + i \lg(L + \sqrt{L^2 - 1})],$$

gdzie $\operatorname{arc\,sin} M$ zawiera się między 0 a $\frac{\pi}{2}$.

14. Rozwiązać równanie $\operatorname{tg}\zeta = \alpha$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą. [Wszystkie pierwiastki są rzeczywiste.]

15. Jeżeli $\beta \neq 0$, wówczas ogólnym rozwiązaniem równania $\operatorname{tg}\zeta = \alpha + i\beta$ jest

$$\zeta = k\pi + {}^1/_2\vartheta + {}^1/_4 i \lg\left(\frac{\alpha^2 + (1+\beta)^2}{\alpha^2 + (1-\beta)^2}\right),$$

gdzie ϑ jest liczbowo najmniejszym kątem, czyniącym zadość równaniom

$$\cos\vartheta : \sin\vartheta : 1 = (1 - \alpha^2 - \beta^2) : 2\alpha : \sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2}.$$

16. Jeżeli $z = \xi \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$, i jeżeli ξ i c są liczbami rzeczywistemi, wówczas kwadrat modułu funkcji $\cos 2\pi z - \cos 2\pi c$ równa się

$$\frac{1 + \cos 4\pi c + \cos(2\pi\xi\sqrt{2}) + \cosh(2\pi\xi\sqrt{2}) - 4\cos 2\pi c \cos(\pi\xi\sqrt{2})\cosh(\pi\xi\sqrt{2})}{2}.$$

17. Dowieść, że

$$|\exp\exp(\xi + i\eta)| = \exp(\exp\xi \cos\eta).$$

$$\mathbf{R}\{\cos\cos(\xi+i\eta)\}=\cos(\cos\xi\cosh\eta)\cosh(\sin\xi\sinh\eta),$$

$$\mathbf{I}\{\sin\sin(\xi+i\eta)\}=\cos(\sin\xi\cosh\eta)\sinh(\cos\xi\sinh\eta).$$

18 Jeżeli ζ dąży do ∞ wzdłuż prostej, przechodzącej przez początek układu i tworzącej z osią OX kąt mniejszy od $\frac{\pi}{2}$, wówczas $|\exp\zeta|\to\infty$, jeżeli zaś prosta, po której porusza się ζ, tworzą z osią OX kąt większy od prostego, wówczas $|\exp\zeta|\to 0$.

19. Jeżeli ζ dąży do ∞ wzdłuż jakiejkolwiek prostej, przechodzącej przez początek układu i nie zlewającej się z osią liczb rzeczywistych, wówczas zarówno $|\cos\zeta|$, jak $|\sin\zeta|$ dążą do ∞.

20. Jeżeli ζ dąży do ∞ tak, jak w poprzednim przykładzie, to $\operatorname{tg}\zeta$ dąży do $-i$, jeżeli prosta leży nad osią OX; jeżeli zaś prosta leży pod osią, to $\operatorname{tg}\zeta$ dąży do i.

224. Związek między funkcjami logarytmicznemi a kołowemi. Widzieliśmy w rozdz. VI, że całka funkcji algiebraicznej $\varphi(x, \alpha, \beta, ...)$, w której α, β... są stałe, wyraża się czasem za pomocą funkcji logarytmicznej, czasem zaś za pomocą funkcji kołowych, zależnie od wartości stałych α, β.... Ten fakt wskazuje na istnienie jakiegoś związku między temi funkcjami.

Zbadajmy bliżej równanie

$$\int\frac{dx}{x^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\lg\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

które jest słuszne, jeżeli α jest liczbą rzeczywistą, a $(x-\alpha)/(x+\alpha)>0$.

Gdybyśmy mogli podstawić $i\alpha$ zamiast α, otrzymalibyśmy wzór

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\frac{1}{2i}\lg\left(\frac{x-i\alpha}{x+i\alpha}\right)+C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

gdzie C jest stałą. Powstaje pytanie, czy obecnie, gdyśmy już określili logarytm liczby zespolonej, wzór ten nie okaże się słusznym.

Otóż (§ 214)

$$\operatorname{Log}(x\pm i\alpha)=\tfrac{1}{2}\lg(x^2+\alpha^2)\pm i(\varphi+2k\pi),$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, a φ liczbowo najmniejszym kątem, dla którego $\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+\alpha^2}$, $\sin\varphi=\alpha/\sqrt{x^2+\alpha^2}$. Tak więc

$$\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{x-i\alpha}{x+i\alpha}\right)=-\varphi-l\pi,$$

gdzie l jest liczbą całkowitą, a otrzymana wartość różni się istotnie tylko o stałą od wartości funkcji $\operatorname{arctg}(x/\alpha)$.

Zasadniczy wzór, wyrażający związek między funkcjami logarytmicznemi a kołowemi, jest

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

gdzie x jest liczbą rzeczywistą. Najłatwiej sprawdzić ten wzór, kładąc $x=\operatorname{tg} y$; strona prawa przybiera wówczas kształt

$$\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{\cos y+i\sin y}{\cos y-i\sin y}\right)=\frac{1}{2i}\operatorname{Log}(\exp 2iy)=y+k\pi,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, tak iż równanie (3) jest „zupełnie słuszne" (Przykł. XCVI.3). Czytelnik sprawdzi wzory

$$\operatorname{arc}\cos x=-i\operatorname{Log}(x\pm i\sqrt{1-x^2}),\ \operatorname{arc}\sin x=-i\operatorname{Log}(ix\pm\sqrt{1-x^2}) \quad . \quad . \quad (4),$$

w których $-1\leqq x\leqq 1$.

Przykład. Rozwiązując względem y równanie

$$\cos u=x=\frac{y+(1/y)}{2},$$

w którym $y=\exp(iu)$, mamy $y=x\pm i\sqrt{1-x^2}$. Tak więc

$$u=-i\operatorname{Log} y=-i\operatorname{Log}(x\pm i\sqrt{1-x^2}),$$

co jest równoznaczne z pierwszym równaniem (4). W podobny sposób czytelnik otrzyma drugie równanie (4) oraz równanie (3).

225. Rozwinięcie $\exp z$ **na szereg potęgowy.** W § 205 widzieliśmy, że przy z rzeczywistym mamy

$$\exp z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

W § 184 widzieliśmy, że szereg ten pozostaje zbieżny (a nawet bezwzględnie zbieżny), jeżeli z jest zmienną zespoloną. Stąd powstaje przypuszczenie, że równanie (1) jest słuszne przy z zespolonym; dowiedziemy zaraz, że tak jest istotnie.

Sumę szeregu (1) oznaczmy przez $F(z)$. Szereg jest bezwzględnie zbieżny, a więc, stosując mnożenie (jak w Przykł. LXXXIV.7), przekonamy się, że $F(z)$ czyni zadość równaniu funkcyjnemu

$$F(z)F(h)=F(z+h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Połóżmy $z=iy$ oraz $F(z)=f(y)$, gdzie y jest liczbą rzeczywistą. Mamy

$$f(y)\, f(k)=f(y+k),$$

a więc
$$\frac{f(y+k)-f(y)}{k}=f(y)\left\{\frac{f(k)-1}{k}\right\}.$$

Ale
$$\frac{f(k)-1}{k}=i\left\{1+\frac{ik}{2!}+\frac{(ik)^2}{3!}+\ldots\right\},$$

jeśli więc $|k| < 1$, to

$$\left|\frac{f(k)-1}{k} - i\right| < \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right)|k| < (e-2)|k|.$$

Widzimy, że $\frac{f(k)-1}{k} \to i$, gdy $k \to 0$, czyli

$$f'(y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(y+k)-f(y)}{k} = if(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Otóż $$f(y) = F(iy) = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2} + \ldots = \varphi(y) + i\psi(y),$$

gdzie $\varphi(y)$ jest funkcją parzystą, a $\psi(y)$ nieparzystą zmiennej y. Wobec tego

$$|f(y)| = \sqrt{\{\varphi(y)\}^2 + \{\psi(y)\}^2}$$
$$= \sqrt{\{\varphi(y) + i\psi(y)\}\{\varphi(y) - i\psi(y)\}}$$
$$= \sqrt{F(iy)\,F(-iy)} = \sqrt{F(0)} = 1,$$

zatym $$f(y) = \cos Y + i \sin Y$$

gdzie Y jest taką funkcją zmiennej y, że $-\pi < Y \leq \pi$. Ponieważ $f(y)$ posiada pochodną, zatym jej części rzeczywista i urojona, czyli $\cos Y$, $\sin Y$ muszą też posiadać pochodne, a więc tymbardziej muszą być funkcjami ciągłemi zmiennej y. Wobec tego Y jest funkcją ciągłą zmiennej y. Przypuśćmy, że wartości $y+k$ odpowiada wartość $Y+K$; gdy k dąży do zera, K musi również dążyć do zera, a

$$\frac{K}{k} = \frac{\cos(Y+K) - \cos Y}{k} : \frac{\cos(Y+K) - \cos Y}{K}.$$

Z dwuch ułamków, stojących w prawej części tego równania, pierwszy dąży do granicy, gdy $k \to 0$, drugi zaś dąży do $-\sin Y$. Widzimy, że K/k dąży do granicy, tak iż Y posiada pochodną względem y.

Dalej $$f'(y) = (-\sin Y + i \cos Y)\frac{dY}{dy},$$

że zaś $$f'(y) = if(y) = -\sin Y + i \cos Y,$$

zatym $$\frac{dY}{dy} = 1, \quad Y = y + C,$$

gdzie C jest stałą, a

$$f(y)=\cos(y+C)+i\sin(y+C).$$

Ale $f(0)=1$, gdy $y=0$, zatym C jest wielokrotnością liczby 2π, a $f(y)=\cos y+i\sin y$. Tak więc $F(iy)=\cos y+i\sin y$ przy wszelkim rzeczywistym y. Jeżeli x jest również liczbą rzeczywistą, mamy

$$F(x+iy)=F(x)F(iy)=\exp x(\cos y+i\sin y)=\exp(x+iy)$$

czyli
$$\exp z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots$$

przy wszelkich wartościach na z.

226. Rozwinięcie $\cos z$ **oraz** $\sin z$ **na szeregi potęgowe.** Z poprzedniego paragrafu oraz ze wzoru (1), § 221 wynika odrazu, że przy wszelkim z mamy

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots,\quad \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$$

Przykłady XCIX. 1. Obliczyć $\cos i$, $\sin i$ z dokładnością do 0.01 zapomocą powyższych szeregów.

2. Dowieść, że $|\cos z|\leqq\cosh|z|$ i że $|\sin z|\leqq\sinh|z|$.

3. Jeżeli $|z|<1$, to $|\cos z|<2$, a $|\sin z|<\frac{6}{5}|z|$.

4. Ponieważ $\sin 2z=2\sin z\cos z$, zatym

$$(2z)-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-\dots=2\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\dots\right).$$

Mnożąc szeregi w prawej części tego równania, dowieść, że

$$\binom{2n+1}{1}+\binom{2n+1}{3}+\dots\binom{2n+1}{2n+1}=2^{2n}.$$

Otrzymać analogiczne tożsamości, opierając się na równaniach

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1,\quad \cos 2z=2\cos^2 z-1=1-2\sin^2 z.$$

5. Dowieść, że $\exp\{(1+i)z\}=\sum\limits_0^\infty 2^{\frac{1}{2}n}\exp\left(\frac{n\pi i}{4}\right)\frac{z^n}{n!}$.

6. Rozwinąć $\cos z\cosh z$ według potęg zmiennej z. [Mamy

$$\cos z\cosh z+i\sin z\sinh z=\cos\{(1-i)z\}=\tfrac{1}{2}[\exp\{(1+i)z\}+\exp\{-(1+i)z\}]$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty 2^{\frac{n}{2}}\{1+(-1)^n\}\exp\left(\frac{n\pi i}{4}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Tak samo $\cos z \cosh z - i \sin z \sinh z = \cos(1+i)z$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \{1+(-1)^n\} \exp\left(-\frac{n\pi i}{4}\right) \frac{z^n}{n!},$$

zatym $\cos z \cosh z = \tfrac{1}{2} \sum\limits_{0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \{1+(-1)^n\} \cos \dfrac{n\pi}{4} \cdot \dfrac{z^n}{n!} = 1 - \dfrac{2^2 z^4}{4!} + \dfrac{2^4 z^8}{8!} - \ldots]$

7. Rozwinąć $\sin z \sinh z$, $\cos z \sinh z$, $\sin z \cosh z$ według potęg z.

8. Rozwinąć $\sin^2 z$, $\sin^3 z$ według potęg zmiennej z. [Oprzeć się na wzorach $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z)$, $\sin^3 z = \frac{1}{4}(3\sin z - \sin 3z)$, ...

Rzecz jasna, że tę samą metodę możemy zastosować przy rozwijaniu na szereg $\sin^n z$ i $\cos^n z$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią.]

9. Wyznaczyć sumy szeregów

$$C = 1 + \frac{\cos z}{1!} + \frac{\cos 2z}{2!} + \frac{\cos 3z}{3!} + \ldots, \qquad S = \frac{\sin z}{1!} + \frac{\sin 2z}{2!} + \frac{\sin 3z}{3!} + \ldots$$

[Mamy $\quad C + iS = 1 + \dfrac{\exp(iz)}{1!} + \dfrac{\exp(2iz)}{2!} + \ldots = \exp\{\exp(iz)\}$

$$= \exp(\cos z)\{\cos(\sin z) + i \sin(\sin z)\},$$

Tak samo $C - iS = \exp\{\exp(-iz)\} = \exp(\cos z)\{\cos(\sin z) - i \sin(\sin z)\}$,

stąd $\qquad C = \exp(\cos z)\cos(\sin z), \quad S = \exp(\cos z)\sin(\sin z).$

10. Wyznaczyć sumy szeregów

$$1 + \frac{a\cos z}{1!} + \frac{a^2\cos 2z}{2!} + \ldots, \qquad \frac{a\sin z}{1!} + \frac{a^2\sin 2z}{2!} + \ldots$$

11. Znaleźć sumy szeregów

$$1 - \frac{\cos 2z}{2!} + \frac{\cos 4z}{4!} - \ldots, \qquad \frac{\cos z}{1!} - \frac{\cos 3z}{3!} + \ldots$$

oraz analogicznych szeregów, utworzonych z wstaw.

12. Dowieść, że

$$1 + \frac{\cos 4z}{4!} + \frac{\cos 8z}{8!} + \ldots = \tfrac{1}{2}\{\cos(\cos z)\cosh(\sin z) + \cos(\sin z)\cosh(\cos z)\}.$$

13. Dowieść, że podane w Przykł. LIX.1 rozwinięcia $\cos(x+h)$ oraz $\sin(x+h)$ na szeregi według potęg h są słuszne bez względu na to, czy x i h są rzeczywiste czy zespolone.

227. Szereg logarytmiczny. W § 206 widzieliśmy, że

$$\lg(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

gdzie z jest liczbą rzeczywistą, przyczym $|z| < 1$. Szereg w prawej części równania jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli z jest liczbą zespoloną, której moduł jest mniejszy od 1. Dowiedziemy, że równanie (1) pozostaje słuszne przy z zespolonym, a mianowicie jeżeli $|z| \leq 1$, z wyjątkiem tylko wartości $z = -1$.

Przypominamy, że $\lg(1+z)$ jest wartością główną funkcji $\operatorname{Log}(1+z)$ i że

$$\lg(1+z) = \int_C \frac{du}{u},$$

gdzie C jest odcinkiem prostej, łączącym punkt 1 z punktem $1+z$ w płaszczyźnie zmiennej zespolonej u. Możemy założyć, że z nie jest liczbą rzeczywistą, gdyż dla liczb rzeczywistych słuszność wzoru (1) została już dowiedziona.

Jeżeli
$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \zeta r,$$
tak iż
$$|r| \leq 1,$$
a
$$u = 1 + \zeta t,$$
wówczas u zakreśla linję C, gdy t zmienia się od 0 do r. Mamy też

$$\int_C \frac{du}{u} = \int_0^r \frac{\zeta\, dt}{1+\zeta t}$$

$$= \int_0^r \left\{ \zeta - \zeta^2 t + \zeta^3 t^2 - \ldots + (-1)^{m-1}\zeta^m t^{m-1} + \frac{(-1)^m \zeta^{m+1} t^m}{1+\zeta t} \right\} dt$$

$$= \zeta r - \frac{(\zeta r)^2}{2} + \frac{(\zeta r)^3}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{(\zeta r)^m}{m} + R_m$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{z^m}{m} + R_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gdzie
$$R_m = (-1)^m \zeta^{m+1} \int_0^r \frac{t^m dt}{1+\zeta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Z wzoru (1) w § 157 wynika, że

$$|R_m| \leq \int_0^r \frac{t^m dt}{|1+\zeta t|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Otóż $|1+\zeta t|$ nigdy nie jest mniejsze od prostopadłej, poprowadzonej z O do prostej C*). Oznaczmy tę prostopadłą przez ω. Mamy tedy

$$|R_m| \leqq \frac{1}{\omega}\int_0^r t^m dt = \frac{r^{m+1}}{\omega(m+1)} \leqq \frac{1}{\omega(m+1)},$$

tak iż $R_m \to 0$, gdy $m \to \infty$. Z (2) wynika, że

$$\lg(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Oczywista rzecz, że dowiedliśmy zarazem zbieżności szeregu, co zresztą było nam już znane (Przykł. LXXXIII.4). Szereg nasz jest bezwzględnie zbieżny przy $|z| < 1$ i warunkowo zbieżny przy $|z| = 1$.

Kładąc $-z$ zamiast z, mamy

$$\lg\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\lg(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

228. Wiemy, że

$$\lg(1+z) = \lg\{(1+r\cos\vartheta) + ir\sin\vartheta\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\lg(1+2r\cos\vartheta+r^2) + i\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta}\right),$$

przyczym bierzemy tę wartość arc tg, która zawiera się między $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Istotnie, $1+z$ jest to wektor, który przedstawiamy zapomocą odcinka, łączącego -1 z z, zatym główna wartość funkcji $\mathrm{am}(1+z)$ zawiera się zawsze między wymienionemi granicami, jeżeli z leży wewnątrz koła $|z| = 1$.

Ponieważ $z^m = r^m(\cos m\vartheta + i\sin m\vartheta)$, zatym, przyrównywując do siebie części rzeczywiste i urojone w równaniu (5), § 227, mamy

$$\tfrac{1}{2}\lg(1+2r\cos\vartheta+r^2) = r\cos\vartheta - \frac{r^2}{2}\cos 2\vartheta + \frac{r^3}{3}\cos 3\vartheta - \dots,$$

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta}\right) = r\sin\vartheta - \frac{r^2}{2}\sin 2\vartheta + \frac{r^3}{3}\sin 3\vartheta - \dots.$$

*) Ponieważ z nie jest liczbą rzeczywistą, zatym C nie przechodzi przez początek układu. Radzimy zilustrować rozumowanie zapomocą rysunku.

Równania te są słuszne przy wszelkim ϑ, o ile $0 \leq r \leq 1$; tylko przy $r=1$, ϑ nie powinno być nieparzystą wielokrotnością liczby π. Łatwo dostrzec, że równania pozostają słuszne przy $-1 \leq r \leq 0$ z tym zastrzeżeniem, że przy $r=-1$, ϑ nie powinno być parzystą wielokrotnością liczby π.

Ciekawy przypadek szczególny zachodzi, gdy $r=1$. Mamy wówczas

$$\lg(1+z)=\lg(1+\operatorname{Cis}\vartheta)=\tfrac{1}{2}\lg(2+2\cos\vartheta)+i\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right)$$

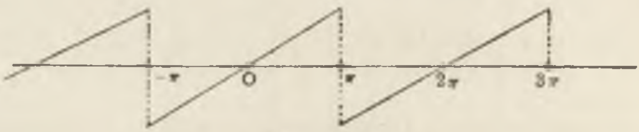
$$=\tfrac{1}{2}\lg\left(4\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)+\tfrac{1}{2}i\vartheta,$$

jeżeli $-\pi<\vartheta<\pi$, tak iż

$$\cos\vartheta-\tfrac{1}{2}\cos 2\vartheta+\tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta-\ldots=\tfrac{1}{2}\lg\left(4\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$\sin\vartheta-\tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta+\tfrac{1}{3}\sin 3\vartheta-\ldots=\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Przy innych wartościach ϑ możemy wyznaczyć sumy szeregów, biorąc pod uwagę, że są one funkcjami okresowemi zmiennej ϑ, przyczym okres $=2\pi$. Tak więc suma szeregu dostaw równa się $\frac{1}{2}\lg\left(4\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)$ z wyjątkiem tylko przypadku, gdy ϑ jest nieparzystą wielokrotnością liczby π (szereg jest wówczas rozbieżny), suma zaś szeregu wstaw równa się



Rys. 66.

$\frac{1}{2}(\vartheta-2k\pi)$, jeżeli $(2k-1)\pi<\vartheta<(2k+1)\pi$, jeżeli zaś ϑ jest nieparzystą wielokrotnością liczby π, wówczas suma równa się zeru. Na rys. 66 mamy wykres funkcji, którą przedstawia szereg wstaw. Funkcja ta jest nieciągła przy $\vartheta=(2k+1)\pi$.

Pisząc iz oraz $-iz$ zamiast z w równ. (5) i odejmując, otrzymujemy

$$\frac{1}{2i}\lg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\ldots$$

Jeżeli z jest liczbą rzeczywistą i $|z|<1$, otrzymujemy (opierając się na § 224) wzór

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots,$$

którego dowiedliśmy już innym sposobem w § 207.

Przykłady C. 1. W każdym trójkącie, w którym $a>b$, mamy

$$\lg c = \lg a - \frac{b}{a}\cos C - \frac{b^2}{2a^2}\cos 2C - \ldots$$

[Wychodzimy z wzoru $\lg c = \frac{1}{2}\lg(a^2+b^2-2ab\cos C)$.]

2. Jeżeli $-1<r<1$ oraz $-\frac{\pi}{2}<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, wówczas

$$r\sin 2\vartheta - \frac{1}{2}r^2\sin 4\vartheta + \frac{1}{3}r^3\sin 6\vartheta - \ldots = \vartheta - \operatorname{arctg}\left\{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)\operatorname{tg}\vartheta\right\},$$

przyczym arc tg zawiera się między $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Wyznaczyć sumę szeregu przy innych wartościach na ϑ.

3. Opierając się na rozwinięciach funkcji $\lg(1+iz)$ oraz $\lg(1-iz)$ na szeregi potęgowe zmiennej z, dowieść, że przy $-1<r<1$ mamy

$$r\sin\vartheta + \frac{1}{2}r^2\cos 2\vartheta - \frac{1}{3}r^3\sin 3\vartheta - \frac{1}{4}r^4\cos 4\vartheta + \ldots = \frac{1}{2}\lg(1+2r\sin\vartheta+r^2),$$

$$r\cos\vartheta + \frac{1}{2}r^2\sin 2\vartheta - \frac{1}{3}r^3\cos 3\vartheta - \frac{1}{4}r^4\sin 4\vartheta + \ldots = \operatorname{arctg}\left(\frac{r\cos\vartheta}{1-r\sin\vartheta}\right),$$

$$r\sin\vartheta - \frac{1}{3}r^3\sin 3\vartheta + \ldots = \frac{1}{4}\lg\left(\frac{1+2r\sin\vartheta+r^2}{1-2r\sin\vartheta+r^2}\right),$$

$$r\cos\vartheta - \frac{1}{3}r^3\cos 3\vartheta + \ldots = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2r\cos\vartheta}{1-r^2}\right),$$

przyczym arc tg zawiera się między $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

4. Dowieść, że

$$\cos\vartheta\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos 2\vartheta\cos^2\vartheta + \frac{1}{3}\cos 3\vartheta\cos^3\vartheta - \ldots = \frac{1}{2}\lg(1+3\cos^2\vartheta),$$

$$\sin\vartheta\sin\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\sin^2\vartheta + \frac{1}{3}\sin 3\vartheta\sin^3\vartheta - \ldots = \operatorname{arc\,ctg}(1+\operatorname{ctg}\vartheta+\operatorname{ctg}^2\vartheta),$$

przyczym arc ctg zawiera się między $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Znaleźć podobne wzory dla szeregów

$$\cos\vartheta\sin\vartheta - \tfrac{1}{2}\cos 2\vartheta\sin^2\vartheta + \ldots,\quad \sin\vartheta\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta\cos^2\vartheta + \ldots$$

229. Kilka zastosowań szeregu logarytmicznego. Niech z będzie dowolną liczbą zespoloną, h zaś liczbą rzeczywistą taką, że $|hz|<1$. Mamy

$$\lg(1+hz)=hz-\tfrac{1}{2}(hz)^2+\tfrac{1}{3}(hz)^3-\dots$$

a więc
$$\frac{\lg(1+hz)}{h}=z+\varphi(h,z),$$

gdzie
$$\varphi(h,z)=-\tfrac{1}{2}hz^2+\tfrac{1}{3}h^2z^3-\tfrac{1}{4}h^3z^4+\dots$$

$$|\varphi(h,z)|<|hz^2|(1+|hz|+|h^2z^2|+\dots)=\frac{|hz^2|}{1-|hz|},$$

tak iż $\varphi(h,z)\to 0$, gdy $h\to 0$. Wynika stąd, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lg(1+hz)}{h}=z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

W szczególności, kładąc $h=1/n$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, mamy

$$\lim_{n\to\infty} n\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)=z,$$

a więc
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{n\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}=\exp z \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Jest to uogólnienie wzoru, którego dowiedliśmy w § 201 dla wartości rzeczywistych zmiennej z.

Z wzoru (1) możemy wysnuć kilka innych wzorów, które się nam przydadzą w następnym paragrafie. Jeżeli t i h są rzeczywiste, h zaś jest przytym dostatecznie małą liczbą, wówczas

$$\frac{\lg(1+tz+hz)-\lg(1+tz)}{h}=\frac{1}{h}\lg\left(1+\frac{hz}{1+tz}\right);$$

gdy $h\to 0$, funkcja ta dąży do $z/(1+tz)$, a więc

$$\frac{d}{dt}\{\lg(1+tz)\}=\frac{z}{1+tz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Potrzebny nam będzie również wzór na pochodną (względem zmiennej t) funkcji $(1+tz)^m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą czy zespoloną. Zauważmy najpierw, że jeśli $\varphi(t)=\psi(t)+i\chi(t)$ jest funkcją zespoloną zmiennej t taką, że jej części rzeczywista i urojona $\psi(t)$ oraz $\chi(t)$ posiadają pochodne, wówczas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp\varphi) &= \frac{d}{dt}\{(\cos\chi+i\sin\chi)\exp\psi\} \\ &= \{(\cos\chi+i\sin\chi)\psi'+(-\sin\chi+i\cos\chi)\chi'\}\exp\psi \\ &= (\psi'+i\chi')(\cos\chi+i\sin\chi)\exp\psi \\ &= (\psi'+i\chi')\exp(\psi+i\chi)=\varphi'\exp\varphi.\end{aligned}$$

Widzimy, że reguła różniczkowania funkcji $\exp\varphi$ jest ta sama, co przy φ rzeczywistym. Wobec tego mamy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(1+tz)^m &= \frac{d}{dt}\exp\{m\lg(1+tz)\} \\ &= \frac{mz}{1+tz}\exp\{m\lg(1+tz)\} \\ &= mz(1+tz)^{m-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).\end{aligned}$$

Zarówno $(1+tz)^m$, jak $(1+tz)^{m-1}$ mają tu swe wartości główne.

230. Ogólna postać szeregu dwumianowego. Dowiedliśmy w § 208, że suma szeregu

$$1+\binom{m}{1}z+\binom{m}{2}z^2+\ldots$$

równa się $(1+z)^m=\exp\{m\lg(1+z)\}$ przy wszelkim rzeczywistym m i przy wszelkich rzeczywistych wartościach na z, zawartych między -1 a 1. Jeżeli a_n jest spółczynnikiem przy z^n, wówczas

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|m-n|}{n+1}\to 1,$$

niezależnie od tego, czy m jest liczbą rzeczywistą czy zespoloną. Wobec tego (Przykł. LXXXIII.3) szereg jest zawsze zbieżny, o ile moduł liczby z jest mniejszy od 1. Dowiedziemy, że sumą szeregu jest wówczas $\exp\{m\lg(1+z)\}$ czyli główna wartość funkcji $(1+z)^m$.

Z § 229 wiemy, że przy t rzeczywistym mamy

$$\frac{d}{dt}(1+tz)^m=mz(1+tz)^{m-1},$$

przyczym m i z mogą mieć dowolne wartości rzeczywiste lub zespolone, funkcje zaś w obu częściach tej równości mają swe wartości główne. Jeśli więc $\varphi(t)=(1+tz)^m$, wówczas

$$\varphi^{(n)}(t)=m(m-1).....(m-n+1)z^n(1+tz)^{m-n}.$$

Wzór ten pozostaje słuszny przy $t=0$, tak iż

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}=\binom{m}{n}z^n.$$

Na mocy uwagi, uczynionej w końcu § 157, mamy

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+....+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+R_n,$$

gdzie
$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt.$$

Jeżeli $z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$, to

$$|1+tz|=\sqrt{1+2tr\cos\vartheta+t^2r^2}\geq 1-tr,$$

a więc
$$|R_n|<\frac{|m(m-1)...(m-n+1)|}{(n-1)!}r^n\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(1-tr)^{n-m}}dt$$

$$<\frac{|m(m-1)...(m-n+1)|}{(n-1)!}\,\frac{(1-\vartheta)^{n-1}r^n}{(1-\vartheta r)^{n-m}},$$

gdzie $0<\vartheta<1$, tak iż (porów. § 156)

$$|R_n|<K\frac{|m(m-1)...(m-n+1)|}{(n-1)!}r^n=\rho_n.$$

Ale
$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=\frac{|m-n|}{n}r\to r,$$

a więc (Przykł. XXX.6) $\rho_n\to 0$, wobec czego $R_n\to 0$, gdy $n\to\infty$. To prowadzi do następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE. *Przy wszelkim m, czy to rzeczywistym czy zespolonym, i przy* $|z|<1$ *sumą szeregu dwumianowego*

$$1+\binom{m}{1}z+\binom{m}{2}z^2+...$$

jest $\exp\{m\lg(1+z)\}$, *gdzie logarytm ma swą wartość główną.*

Bardziej szczegółowe badanie szeregu dwumianowego, uwzględniające przypadek, gdy $|z|=1$, znaleźć można w dziele Bromwich *An introduction to the theory of infinite series* London. 1908. str. 225.

Przykłady CI. 1. Ponieważ

$$\lg(1+z)=\tfrac{1}{2}\lg(1+2r\cos\vartheta+r^2)+i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta}\right),$$

zatym przy m rzeczywistym mamy

$$\sum_0^\infty\binom{m}{n}z^n=\exp\left\{\frac{m}{2}\lg(1+2r\cos\vartheta+r^2)\right\}\mathrm{Cis}\left\{m\,\mathrm{arctg}\left(\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta}\right)\right\}$$

$$=(1+2r\cos\vartheta+r^2)^{m/2}\mathrm{Cis}\left\{m\,\mathrm{arctg}\left(\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta}\right)\right\},$$

przyczym arctg zawiera się między $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. W szczególności, kładąc $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, $z=ir$, mamy

$$1-\binom{m}{2}r^2+\binom{m}{4}r^4-\ldots=(1+r^2)^{m/2}\cos(m\,\mathrm{arctg}\,r),$$

$$\binom{m}{1}r-\binom{m}{3}r^3+\binom{m}{5}r^5-\ldots=(1+r^2)^{m/2}\sin(m\,\mathrm{arctg}\,r).$$

2. Sprawdzić wzory powyższe, kładąc $m=1, 2, 3$.

3. Dowieść, że jeśli $0\leqq r<1$, to

$$1-\frac{1.3}{2.4}r^2+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}r^4-\ldots=\sqrt{\frac{\sqrt{1+r^2}+1}{2(1+r^2)}}$$

$$\frac{1}{2}r-\frac{1.3.5}{2.4.6}r^3+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}r^5-\ldots=\sqrt{\frac{\sqrt{1+r^2}-1}{2(1+r^2)}}.$$

[We wzorach Przykł. 1 kładziemy $m=-\frac{1}{2}$.]

4. Dowieść, że przy $-\frac{\pi}{4}<\vartheta<\frac{\pi}{4}$ mamy

$$\cos m\vartheta=\cos^m\vartheta\left\{1-\binom{m}{2}\mathrm{tg}^2\vartheta+\binom{m}{4}\mathrm{tg}^4\vartheta-\ldots..\right\}$$

$$\sin m\vartheta=\cos^m\vartheta\left\{\binom{m}{1}\mathrm{tg}\,\vartheta-\binom{m}{3}\mathrm{tg}^3\vartheta-\ldots..\right\}$$

przy wszelkim rzeczywistym m.

[Wynika to z równania $\cos m\vartheta+i\sin m\vartheta=\cos^m\vartheta(1+i\,\mathrm{tg}\,\vartheta)^m$.]

5. Za pomocą mnożenia szeregów dowiedliśmy (Przykł. LXXXIV.6), że funkcja $f(m, z)=\Sigma\binom{m}{n}z^n$, gdzie $|z|<1$, czyni zadość równaniu

$$f(m, z)f(m', z)=f(m+m', z).$$

Zapomocą rozumowania analogicznego do tego, któreśmy podali w § 209, i nie opierając się na wynikach, osiągniętych w § 230, dowieść, że przy m rzeczywistym wymiernym mamy

$$f(m, z) = \exp\{m \lg(1+z)\}.$$

6. Jeżeli z i μ są liczbami rzeczywistemi i jeżeli $-1 < z < 1$, wówczas

$$\Sigma \binom{i\mu}{n} z^n = \cos\{\mu \lg(1+z)\} + i \sin\{\mu \lg(1+z)\}.$$

Zadania do rozdziału X.

1. Dowieść, że częścią rzeczywistą liczby $i^{\lg(1+i)}$ jest

$$e^{(4k+1)\pi^2/8} \cos\{{}^1/_4 (4k+1)\pi \lg 2\},$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

2. Jeżeli $a \cos\vartheta + b \sin\vartheta + c = 0$, gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistemi, a $c^2 > a^2 + b^2$, to

$$\vartheta = m\pi + \alpha \pm i \lg \frac{|c| + \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą parzystą, jeżeli $c < 0$, i nieparzystą, jeżeli $c > 0$, α zaś jest kątem, którego wstawa i dostawa równają się odpowiednio $b/\sqrt{a^2+b^2}$ oraz $a/\sqrt{a^2+b^2}$.

3. Jeżeli ϑ jest liczbą rzeczywistą, a $\sin\vartheta \sin\varphi = 1$, wówczas

$$\varphi = (k + \tfrac{1}{2})\pi \pm i \lg \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(k\pi + \vartheta),$$

gdzie k jest liczbą całkowitą parzystą, jeżeli $\sin\vartheta > 0$, i nieparzystą, jeżeli $\sin\vartheta < 0$.

4. Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to

$$\frac{d}{dx} \exp\{(a+ib)x\} = (a+ib) \exp\{(a+ib)x\},$$

$$\int \exp\{(a+ib)x\}\, dx = \frac{\exp\{(a+ib)x\}}{a+ib}.$$

Wysnuć stąd wyniki, osiągnięte w Przykł. XC.3.

5. Dowieść, że przy $a > 0$ mamy $\int_0^\infty \exp\{-(a+ib)x\} dx = \dfrac{1}{a+ib}$, a stąd wysnuć wyniki, osiągnięte w Przykł. XC.5.

6. Jeżeli $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ jest równaniem elipsy, a symbol $f(x, y)$ oznacza najwyższe wyrazy w równaniu innej jakiejś krzywej algebra-

icznej, wówczas suma kątów mimośrodowych, odpowiadających punktom przecięcia się elipsy z krzywą, różni się o wielokrotność liczby 2π od

$$-i\{\lg f(a, ib)-\lg f(a, -ib)\}.$$

{Kąty mimośrodowe dane są przez równanie $f(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)+...=0$ albo przez

$$f\left\{\frac{a}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right),\ -\frac{ib}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right\}+...=0,$$

gdzie $u=\exp i\alpha$, $\Sigma\alpha$ równa się jednej z wartości $-i\lg P$, zaś P jest iloczynem pierwiastków tego równania.]

7. Wyznaczyć liczbę i przybliżone położenie pierwiastków równania $\operatorname{tg} z=az$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą.

[Wiemy, że równanie to ma nieskończenie wiele pierwiastków rzeczywistych. Niech będzie $z=x+iy$; mamy

$$\sin 2x/(\cos 2x+\cosh 2y)=ax, \quad \sinh 2y/(\cos 2x+\cosh 2y)=ay,$$

o ile więc x i y byłyby od zera różne, mielibyśmy

$$(\sin 2x)/2x=(\sinh 2y)/2y,$$

co jest niedorzeczne, gdyż strona lewa jest liczbowo mniejsza od 1, strona zaś prawa większa od 1.

Wobec tego musi być $x=0$ albo $y=0$. Jeżeli $y=0$, wracamy do pierwiastków rzeczywistych. Jeżeli $x=0$, to $\operatorname{tgh} y=ay$. Łatwo widzieć że jeśli $a\leqq 0$ lub $a\geqq 1$, równanie to ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty równy zeru, jeżeli zaś $0<a<1$ mamy dwa czysto urojone pierwiastki, przy innych założeniach wszystkie pierwiastki są rzeczywiste.]

8. Równanie $\operatorname{tg} z=az+b$ nie posiada pierwiastków zespolonych, jeżeli a, b są rzeczywiste i jeżeli $b\neq 0$, $a\leqq 0$. Jeżeli $a>0$, wówczas wartości bezwzględne części rzeczywistych wszystkich pierwiastków zespolonych są $>|b/2a|$.

9. Równanie $\operatorname{tg} z=a/z$ ma dwa czysto urojone pierwiastki przy $a<0$, przy innych zaś wartościach rzeczywistych na a nie ma wcale pierwiastków zespolonych.

10. Równanie $\operatorname{tg} z=a \operatorname{tgh} cz$, w którym a i c są liczbami rzeczywistemi, ma nieskończenie wiele pierwiastków rzeczywistych i czysto urojonych, ale nie ma pierwiastków zespolonych.

11. Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to

$$e^{ax}\cos bx=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}\left\{a^n-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4-.....\right\},$$

przyczym suma zawarta w nawiasie ma $\frac{n+1}{2}$ lub $\frac{n+2}{2}$ składników.

Znaleźć analogiczny wzór dla $e^{ax}\sin bx$.

12. Jeżeli $n\varphi(z, n)\to z$, gdy $n\to\infty$, to $\{1+\varphi(z, n)\}^n\to\exp z$.

13. Jeżeli $\varphi(t)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej t, to

$$\frac{d}{dt}\lg\varphi(t)=\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

14. **Przekształcenia.** W rozdziale III poznaliśmy kilka prostych przykładów związków gieometrycznych, które zachodzą między figurami, leżącemi w płaszczyznach zmiennych z, Z, jeżeli mamy zależność $z=f(Z)$. Teraz poznamy kilka przykładów, w których ta zależność zawiera funkcje logarytmiczne, wykładnicze lub kołowe.

Najpierw przypuśćmy, że

$$z=\exp(\pi Z/a),\quad Z=(a/\pi)\operatorname{Log} z,$$

gdzie $a>0$. Każdej wartości Z odpowiada jedna wartość na z, ale każdej wartości z odpowiada nieskończenie wiele wartości Z. Jeżeli x, y, r, ϑ są spółrzędnemi punktu z, a X, Y, R, Θ spółrzędnemi punktu Z, wówczas

$$x=e^{\pi X/a}\cos(\pi Y/a),\qquad y=e^{\pi X/a}\sin(\pi Y/a),$$

$$X=(a/\pi)\lg r,\qquad Y=(a\vartheta/\pi)+2ka,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Jeżeli założymy, że $-\pi<\vartheta\leqq\pi$, a $\operatorname{Log} z$ ma tu swą wartość główną $\lg z$, wówczas $k=0$, a Z leży w pasie płaszczyzny, ograniczonym przez dwie proste, równoległe do osi OX i odległe od niej o a. Każdy punkt tego pasa odpowiada jednemu punktowi całej płaszczyzny zmiennej z, i odwrotnie. Biorąc pod uwagę inną wartość funkcji $\operatorname{Log} z$, otrzymamy podobny związek między całą płaszczyzną z i innym pasem płaszczyzny Z, którego szerokość $=2a$.

Prostym płaszczyzny Z na których X i Y są stałe, odpowiadają w płaszczyźnie z okręgi i promienie wodzące, dla których r i ϑ są stałe. Jednemu z tych promieni wodzących odpowiada cała jedna prosta równoległa do OX, ale okręgowi o stałym r odpowiada tylko *odcinek* o długości $2a$ równoległy do OY. Żeby punkt Z wykreślił całą prostą, równoległą do osi OY, trzeba, żeby punkt z nieskończenie wiele razy zakreślił okrąg.

15. Dowieść, że prostej leżącej na płaszczyźnie Z, odpowiada w płaszczyźnie z spiralna równokątowa.

16. W podobny sposób zbadać przekształcenie $z=c\cosh(\pi Z/a)$, a w szczególności wykazać, że cała płaszczyzna z odpowiada jednemu któremukolwiek z pasów o szerokości $2a$, które można wykreślić w płaszczyźnie Z, prowadząc proste, równoległe do OX. Dowieść również, że prostej $X=X_0$ odpowiada elipsa

$$\left\{\frac{x}{c\cosh(\pi X_0/a)}\right\}^2+\left\{\frac{y}{c\sinh(\pi X_0/a)}\right\}^2=1,$$

przyczym różnym wartościom na X_0 odpowiada układ elips spółogniskowych, i że proste $Y=Y_0$ odpowiadają sprzężonemu układowi hiperbol spółogniskowych. Wykreślić drogę punktu z, gdy punkt Z przebiega prostą $X=X_0$ lub $Y=Y_0$. Co dzieje się z punktem Z, gdy punkt z kreśli zwyrodniałą stożkową, złożoną z odcinka, łączącego ogniska jednego z poprzednich układów, i z pozostałych części osi x-ów?

17. Sprawdzić, że wyniki poprzedniego przykładu są w zgodzie z wynikami Przykł. 14 oraz z Zad. 25 w końcu rozdziału III. [Przekształcenie $z=c\cosh(\pi Z/a)$ możemy uważać za złożone z przekształceń

$$z=cz_1, \quad z_1=\tfrac{1}{2}\{z_2+(1/z_2)\}, \quad z_2=\exp(\pi Z/a).]$$

18. W taki sam sposób zbadać przekształcenie $z=c\,\mathrm{tgh}(\pi Z/a)$ i wykazać, że prostym $X=X_0$ odpowiadają koła spółosiowe

$$\{x-c\,\mathrm{ctgh}(2\pi X_0/a)\}^2+y^2=c^2\mathrm{cosech}^2(2\pi X_0/a),$$

prostym zaś $Y=Y_0$ odpowiada układ ortogonalny kół spółosiowych.

19 **Rzut stereograficzny i rzut Merkatora.** Dokoła początku spółrzędnych zakreślamy kulę promieniem $=1$ i z bieguna południowego tej kuli, mającego spółrzędne $0, 0, -1$, rzutujemy wszystkie jej punkty na płaszczyznę, styczną do kuli w biegunie północnym. Spółrzędne punktu na kuli niech będą ξ, η, ζ, osie zaś OX, OY obierzmy w płaszczyźnie stycznej, równoległe do osi spółrzędnych ξ, η. Wykazać, że punkt (ξ, η, ζ) rzutuje się jako punkt

$$x=\frac{2\xi}{1+\zeta}, \quad y=\frac{2\eta}{1+\zeta},$$

i że $x+iy=2\,\mathrm{tg}\dfrac{\vartheta}{2}\,\mathrm{Cis}\,\varphi$, gdzie φ jest długością punktu na kuli, mierzoną od płaszczyzny $\eta=0$, a ϑ odległością jego od bieguna północnego.

Rzut ten nazywamy *rzutem stereograficznym*; daje on nam mapę kuli na płaszczyźnie stycznej do tej kuli.

Jeżeli teraz wprowadzimy nową zmienną zespoloną

$$Z=X+iY=-i\,\mathrm{lg}\frac{z}{2}=-i\,\mathrm{lg}\frac{x+iy}{2},$$

tak iż $X=\varphi$, $Y=\mathrm{lg\,ctg}\dfrac{\vartheta}{2}$, otrzymamy w płaszczyźnie Z nową mapę, zwaną *rzutem Mercatora*. Na tej mapie równoleżnikom i południkom odpowiadają proste, równoległe do osi X-ów i Y-ów.

20. Zbadać przekształcenie

$$z=\mathrm{Log}\left(\frac{Z-a}{Z-b}\right)$$

wykazać, że proste, na których x i y są stałe, odpowiadają dwom prostokątnym układom kół spółosiowych, leżących w płaszczyźnie Z.

21. Zbadać przekształcenie

$$z=\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{Z-a}+\sqrt{Z-b}}{\sqrt{b-a}}\right)$$

i wykazać, że proste, na których x i y są stałe, odpowiadają układom elips i hiperbol spółogniskowych, których ogniskami są punkty $Z=a$, $Z=b$.

[Mamy $\sqrt{Z-a}+\sqrt{Z-b}=\sqrt{b-a}\exp(x+iy)$

$\sqrt{Z-a}-\sqrt{Z-b}=\sqrt{b-a}\exp(-x-iy)$;

łatwo wykazać, że

$$|Z-a|+|Z-b|=|b-a|\cosh 2x, \quad |Z-a|-|Z-b|=|b-a|\cos 2y.]$$

22. **Przekształcenie** $z=Z^i$. Jeżeli bierzemy pod uwagę wartość główną funkcji Z^i, wówczas

$$\exp(\lg r+i\vartheta)=z=\exp(i\lg Z)=\exp(i\lg R-\Theta),$$

tak iż $\lg r=-\Theta$, $\vartheta=\lg R+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Wszystkie wartości k dają ten sam punkt z, możemy tedy założyć $k=0$, wobec czego

$$\lg r=-\Theta, \quad \vartheta=\lg R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Gdy R przybiera wszelkie możliwe wartości, Θ zaś zmienia się od $-\pi$ do π, punkt ruchomy zakreśla całą płaszczyznę Z, a wówczas r zmienia się od $\exp(-\pi)$ do $\exp\pi$, zmienna zaś ϑ przybiera wszelkie możliwe wartości rzeczywiste. Tak więc cała płaszczyzna Z odpowiada pierścieniowi, ograniczonemu przez koła $z=\exp(-\pi)$ i $z=\exp\pi$, ale punkt z nieskończenie wiele razy zakreśla ten pierścień. Jeżeli jednak założymy, że ϑ ma się zmieniać od $-\pi$ do π, wówczas R może się zmieniać tylko od $\exp(-\pi)$ do $\exp(\pi)$, czyli że punkt Z kreśli wówczas również pierścień kołowy. Należy jednak zastrzec się, że każdy taki pierścień jest rozcięty wzdłuż osi liczb ujemnych rzeczywistych i że ani punkt z, ani punkt Z nie mogą przekroczyć tego rozcięcia, gdyż ich amplituda zmienia się w granicach od $-\pi$ do π.

Mamy tedy odpowiedniość między dwoma pierścieniami kołowemi

$$z=Z^i, \quad Z=z^{-i},$$

przyczym bierzemy wartości główne obu potęg urojonych. Kołom jednej płaszczyzny, mającym środek w początku spółrzędnych, odpowiadają w drugiej płaszczyźnie proste, przechodzące przez początek spółrzędnych.

23. Wykreślić drogę punktu z, jeżeli punkt Z wyrusza z punktu $\exp\pi$, zakreśla większe koło w zwrocie dodatnim aż do punktu $-\exp\pi$, posuwa się dalej wzdłuż rozcięcia, następnie zakreśla mniejsze koło w zwrocie dodatnim, wzdłuż rozcięcia powraca do większego koła i zakreśla pozostałą część jego okręgu.

24. Przypuśćmy, że obie płaszczyzny podzieliliśmy na nieskończenie wiele pierścieni kołowych za pomocą kół o promieniach

$$\ldots, e^{-(2n+1)\pi}, \ldots, e^{-\pi}, e^{\pi}, e^{3\pi}, \ldots, e^{(2n+1)\pi}, \ldots$$

Dowieść, że wybierając w odpowiedni sposób wartości potęg w równaniach $z=Z^i$, $Z=z^{-i}$, możemy dowolnemu pierścieniowi jednej płaszczyzny podporządkować którykolwiek pierścień drugiej płaszczyzny.

25. Jeżeli $z=Z^i$, przyczym bierzemy dowolną potęgę zmiennej Z, i jeżeli Z kreśli spiralną równokątową, której biegunem jest początek spółrzędnych, wówczas w drugiej płaszczyźnie z kreśli również spiralną równokątową, mającą biegun w początku spółrzędnych.

26. Jak zachowuje się $Z=z^{ai}$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą, jeżeli z zbliża się do początku spółrzędnych wzdłuż osi liczb rzeczywistych? [Z kreśli wciąż koło, którego środkiem jest początek spółrzędnych, części zaś rzeczywista i urojona liczby Z wykonywują wahania skończone; jeżeli na z^a damy główną wartość, wówczas promień tego koła w płaszczyźnie Z równa się 1.]

27. Rozstrzygnąć to samo pytanie o funkcji $Z=z^{a+ib}$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistemi.

28. Przy a rzeczywistym, obszar zbieżności szeregu kształtu $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{na}$ jest kątem, czyli jest obszarem, ograniczonym przez nierówności $\vartheta_0 < \operatorname{am} z < \vartheta_1$. W poszczególnych przypadkach kąt może pokrywać całą płaszczyznę albo też może sprowadzać się do jednej prostej.

29 **Warstwice.** Jeżeli $f(z)$ jest funkcją zmiennej zespolonej z, wówczas krzywe, dla których $|f(z)|$ jest stałą, nazywamy *warstwicami* funkcji $f(z)$. Naszkicować warstwice funkcji

$z-a$ (*koła spółśrodkowe*) $(z-a)(z-b)$ (*owale Kartezjusza*)
$(z-a)/(z-b)$ (*koła spółosiowe*) $\exp z$ (*proste*).

30. Naszkicować kształty warstwic funkcji $(z-a)(z-b)(z-c)$ oraz $(1+z\sqrt{3}+z^2)/z$. [Na rys. 67 mamy niektóre warstwice tej drugiej funkcji, przyczym krzywe, oznaczone numerami I—VII, odpowiadają następującym wartościom funkcji $|f(z)|$:

$$0{\cdot}10,\quad 2-\sqrt{3},\quad 0{\cdot}40,\quad 1{\cdot}00,\quad 2{\cdot}00,\quad 2+\sqrt{3},\quad 4{\cdot}53.$$

31. Naszkicować warstwice funkcji (I) $z\exp z$, (II) $\sin z$. [Rys. 68 przedstawia warstwice funkcji $\sin z$. Krzywe, oznaczone numerami I—VIII, odpowiadają wartościom $k=0{\cdot}35$, $0{\cdot}50$, $0{\cdot}71$, $1{\cdot}00$, $1{\cdot}41$, $2{\cdot}00$, $2{\cdot}83$, $4{\cdot}00$.]

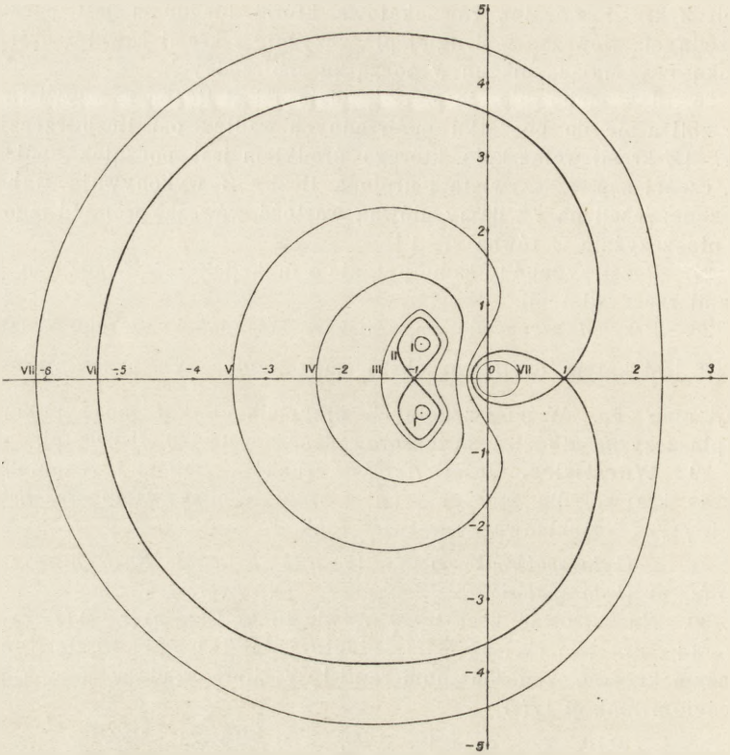
32. Naszkicować warstwice funkcji $\exp z-c$, gdzie c jest stałą rzeczywistą. [Na rys. 69 mamy warstwice funkcji $|\exp z-1|$; krzywe I—VII odpowiadają wartościom na k, danym przez $\lg k=-1{\cdot}00$, $-0{\cdot}20$, $-0{\cdot}05$, $0{\cdot}00$, $0{\cdot}05$, $0{\cdot}20$, $1{\cdot}00$.]

33. Na rys. 70, 71 mamy warstwice funkcji $\sin z-c$, gdzie c jest stałą dodatnią. [Rodzaj krzywych jest różny, zależnie od tego, czy $c>1$, czy też $c<1$. Na rys. 70 mamy $c=0{\cdot}5$, krzywa zaś I—VIII odpowiadają wartościom $k=0{\cdot}29$, $0{\cdot}37$, $0{\cdot}50$, $0{\cdot}87$, $1{\cdot}50$, $2{\cdot}60$, $4{\cdot}50$, $7{\cdot}79$. Na rys 71 mamy $c=2$, a krzywe odpowiadają wartościom $k=0{\cdot}58$, $1{\cdot}00$, $1{\cdot}73$, $3{\cdot}00$, $5{\cdot}20$, $9{\cdot}00$, $15{\cdot}59$. Przy $c=1$ otrzymujemy takie krzywe, jak na rys. 68 z tą tylko różnicą, że skala i początek są inne.]

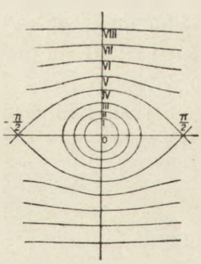
34. Dowieść, że przy $0<\vartheta<\pi$ mamy

$$\cos\vartheta+{}^1/_3\cos 3\vartheta+{}^1/_5\cos 5\vartheta+\ldots\ldots=-{}^1/_4\lg\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}$$

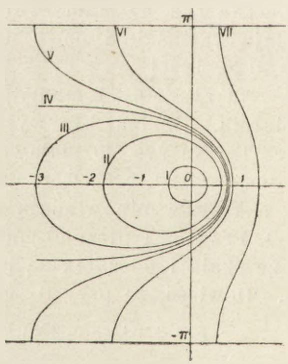
$$\sin\vartheta+{}^1/_3\sin 3\vartheta+{}^1/_5\sin 5\vartheta+\ldots\ldots=\frac{\pi}{4}.$$



Rys. 67.



Rys. 68.

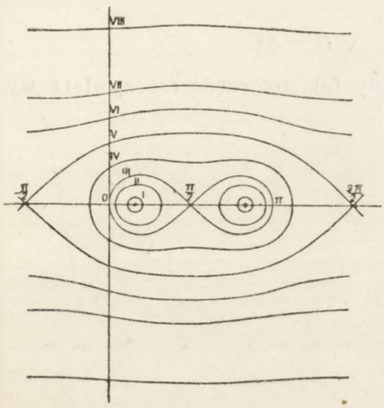


Rys. 69.

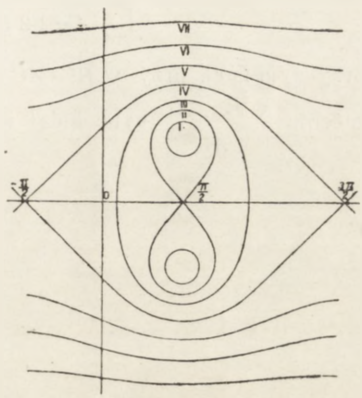
[Oprzeć się na równaniu

$$z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\ldots=\tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

gdzie $z=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$. Jeżeli ϑ zwiększamy o π, sumy obu szeregów zmieniają tylko znak. Wobec tego pierwszy wzór jest słuszny przy wszelkim ϑ (z wyjątkiem tylko, gdy ϑ jest wielokrotnością liczby π, gdyż



Rys. 70.



Rys. 71.

wówczas szereg jest rozbieżny), natomiast suma drugiego szeregu równa się $\frac{\pi}{4}$ przy $2k\pi<\vartheta<(2k+1)\pi$; przy $(2k+1)\pi<\vartheta<(2k+2)\pi$ równa się $-\frac{\pi}{4}$, wreszcie przy $\vartheta=k\pi$, suma ta równa się zeru.]

35. Jeżeli $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, to

$$\cos\vartheta-\tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta+\tfrac{1}{5}\cos 5\vartheta-\ldots=\frac{\pi}{4},$$

$$\sin\vartheta-\tfrac{1}{3}\sin 3\vartheta+\tfrac{1}{5}\sin 5\vartheta-\ldots=\tfrac{1}{4}\lg(\sec\vartheta+\operatorname{tg}\vartheta)^2.$$

Wyznaczyć sumy tych szeregów przy innych wartościach ϑ.

36. Dowieść, że

$$\cos\vartheta\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\cos 2\vartheta\cos 2\alpha+\tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta\cos 3\alpha+\ldots=-\tfrac{1}{4}\lg\{4(\cos\vartheta-\cos\alpha)^2\}$$

o ile $\vartheta-\alpha$ lub $\vartheta+\alpha$ nie są wielokrotnościami liczby 2π.

37. Jeżeli ani a, ani b nie są rzeczywiste, wówczas

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=-\frac{\lg(-a)-\lg(-b)}{a-b},$$

przyczym logarytmy mają tu wartości główne. Zbadać przypadek, gdy a i b (albo jedna z tych liczb) są rzeczywiste ujemne.

38. Jeżeli α, β są rzeczywiste i $\beta > 0$, to

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-(\alpha+i\beta)^2} = \frac{\pi i}{2(\alpha+i\beta)}.$$

Jaka jest wartość całki przy $\beta < 0$?

39. Jeżeli części urojone pierwiastków równania $Ax^2+2Bx+C=0$ są znaków przeciwnych, wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{\pi i}{\sqrt{B^2-AC}},$$

przyczym znak przy $\sqrt{B^2-AC}$ obieramy tak, by część rzeczywista wyrażenia $\frac{\sqrt{B^2-AC}}{Ai}$ była dodatnia.

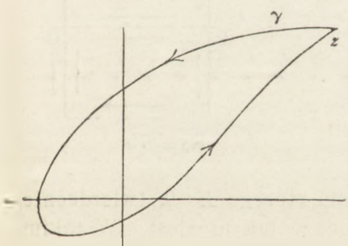
DODATEK I.

(Do rozdziałów III, IV, V).

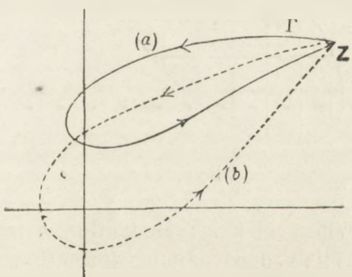
DOWÓD TWIERDZENIA, ŻE KAŻDE RÓWNANIE POSIADA PIERWIASTEK.

Niech
$$Z=P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$$
będzie wielomianem zmiennej z o spółczynnikach rzeczywistych lub zespolonych. Wartości zmiennych z i Z możemy przedstawić w postaci punktów dwuch płaszczyzn, które możemy nazwać odpowiednio płaszczyznami zmiennych z i Z. Jeżeli punkt z zakreśla w swej płaszczyźnie krzywą zamkniętą γ, wówczas Z kreśli w swojej płaszczyźnie odpowiednią krzywą zamkniętą Γ. Zakładamy, że krzywa Γ nie przechodzi przez początek spółrzędnych.

Każdej wartości Z odpowiada nieskończenie wiele wartości $\operatorname{am} Z$, różniących się o 2π, a każda z tych wartości zmienia się w sposób



Rys. 72.



Rys. 73.

ciągły, gdy Z zakreśla krzywą Γ*). Do każdego punktu krzywej Γ możemy dobrać odpowiadającą mu wartość funkcji $\operatorname{am} Z$, a to w ten sposób, że najpierw obieramy pewną wartość $\operatorname{am} Z$, odpowiadającą początkowej

---

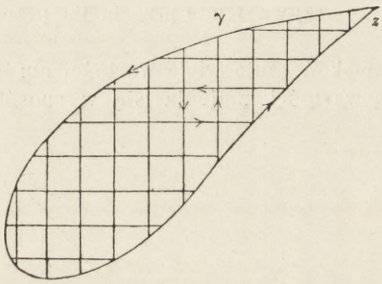
*) Tu właśnie zakładamy, że Γ nie przechodzi przez początek spółrzędnych.

wartości na Z, a następnie uwzględniamy zmienność ciągłą tej wartości, gdy punkt Z zakreśla krzywą Γ. W dalszym ciągu, mówiąc „amplituda punktu Z" lub pisząc am$Z$, będziemy mieli na myśli szczególną wartość amplitudy, obraną w powyższy sposób. W ten sposób symbol am$Z$ oznaczać będzie jednowartościową ciągłą funkcję zmiennych X, Y, czyli części rzeczywistej i urojonej zmiennej Z.

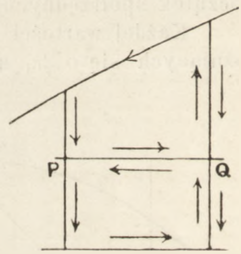
Gdy punkt Z, po zakreśleniu krzywej Γ, powraca do pierwotnego położenia, jego amplituda ma znów pierwotną swą wartość, jeżeli początek spółrzędnych nie leży wewnątrz krzywej Γ (krzywa (a) na rys. 73). W przeciwnym zaś razie amplituda musiała wzrosnąć o wielokrotność liczby 2π. (Jeżeli Γ jest krzywą (b) na rys. 73, wówczas końcowa wartość amplitudy różni się od początkowej o 2π). Uwaga ta dotyczy wszelkiego zamkniętego konturu w płaszczyźnie zmiennej Z, nieprzechodzącego przez początek układu. Każdemu takiemu konturowi możemy podporządkować liczbę, którą możemy nazwać „przyrostem funkcji am$Z$, gdy Z zakreśla dany kontur"; liczba ta jest niezależna od początkowej wartości amplitudy.

Dowiedziemy teraz, że *jeśli końcowa wartość amplitudy Z różni się od początkowej wartości, wówczas albo wewnątrz krzywej, zakreślonej przez punkt z, albo na niej musi leżeć przynajmniej jeden punkt, w którym* $Z=0$.

Krzywą γ możemy podzielić na mniejsze kontury, prowadząc równoległe do osi, w odległości $=\delta_1$ jedna od drugiej (rys. 74). Gdyby na któ-



Rys. 74.



Rys. 75.

rymkolwiek z tych konturów istniał punkt, dla którego $Z=0$, twierdzenie byłoby dowiedzione; możemy tedy przypuścić, że tak nie jest. W takim razie przyrost amplitudy punktu Z, gdy z zakreśla krzywą γ, równa się sumie wszystkich przyrostów, jakie mogłaby mieć ta amplituda, gdyby punkt z zakreślił wszystkie mniejsze kontury w tym samym zwrocie, co krzywą γ. Istotnie, jeżeli z zakreśla te kontury kolejno i w tym samym zwrocie, wówczas ostatecznie zakreśli raz jeden kontur γ, a każdy odcinek równoległych zakreśli po dwa razy w przeciwnych zwrotach (rys. 75). Np. odcinek PQ byłby zakreślony dwa razy: raz od P do Q, drugi raz od Q do P. Gdy z porusza się od P do Q, funkcja am$Z$ zmienia się w sposób ciągły, gdyż punkt Z nie przechodzi przez początek układu; jeżeli funkcja am$Z$ wzrasta przytym o ϑ, wówczas przyrost jej, gdy z

porusza się od Q do P, musi się równać $-\vartheta$. Widzimy, że przy dodaniu wszystkich przyrostów funkcji am Z te przyrosty, które powstały skutkiem zakreślenia mniejszych konturów, zredukują się z wyjątkiem tylko tych, które powstały wskutek zakreślenia poszczególnych łuków krzywej γ.

Wobec tego, jeżeli wartość końcowa funkcji am Z różni się od wartości początkowej, gdy punkt z zakreśla krzywą γ, wówczas musi istnieć *przynajmniej jeden* mniejszy kontur γ_1 taki, że gdy z zakreśla ten kontur, wówczas am Z otrzymuje pewien przyrost. Tym konturem γ_1 może być jeden z wewnętrznych kwadracików albo też jedna z figur, ograniczonych przez część konturu krzywej γ i przez równoległe. W każdym razie każdy punkt tego konturu leży albo na konturze kwadratu Δ_1, którego boki równają się δ_1 i są odcinkami wykreślonych przez nas równoległych, albo też wewnątrz takiego kwadratu.

Możemy dalej podzielić γ_1 zapomocą prostych, równoległych do osi i poprowadzonych w odległości δ_2 od siebie; przyczym $\delta_2 < \delta_1$. Śród otrzymanych małych konturów musi się znaleźć przynajmniej jeden (nazwijmy go γ_2) taki, że gdy z zakreśla ten kontur, wówczas am Z otrzymuje pewien przyrost. Ten kontur γ_2 zawiera się całkowicie w kwadracie Δ_2 o boku $=\delta_2$, który sam zawiera się w kwadracie Δ_1.

A teraz weźmy pod uwagę ciąg nieskończony liczb malejących $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m, \ldots$ Granicą ciągu jest zero*). Powtarzając wciąż powyższe rozumowanie, otrzymamy ciąg kwadratów $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m, \ldots$ oraz ciąg konturów $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \ldots$ takich, że (I) Δ_{m+1} leży całkowicie wewnątrz Δ_m, (II) γ_m zawiera się całkowicie w Δ_m, (III) am Z otrzymuje przyrost, gdy punkt z zakreśla kontur γ_m.

Jeżeli punkty (x_m, y_m) oraz $(x_m+\delta_m, y_m+\delta_m)$ są odpowiednio lewym dolnym i prawym górnym wierzchołkiem kwadratu Δ_m, wówczas jest rzeczą jasną, że liczby $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ tworzą ciąg rosnący, liczby zaś $x_1+\delta_1, x_2+\delta_2, \ldots, x_m+\delta_m, \ldots$ tworzy ciąg malejący, oba zaś ciągi mają spólną granicę x_0. Tak samo y_m i $y_m+\delta_m$ dążą do spólnej granicy y_0, istnieje więc jeden i tylko jeden punkt (x_0, y_0), leżący wewnątrz wszystkich kwadratów Δ_m. Jakkolwiek mały byłby odcinek δ, możemy dokoła punktu (x_0, y_0) wykreślić kwadrat o bokach równoległych do osi i równych δ, wewnątrz zaś tego kwadratu możemy wykreślić taki kontur, że gdy zakreśla go punkt z, wówczas am Z otrzymuje przyrost.

Możemy teraz wykazać, że

$$P(x_0+iy_0)=0.$$

Jakoż niech będzie $P(x_0+iy_0)=a$, gdzie $|a|=\rho>0$. Funkcja $P(x+iy)$ jest funkcją ciągłą dwuch zmiennych x, y, możemy tedy wykreślić kwadrat o środku (x_0, y_0) taki, że boki jego będą równoległe do osi, a przytym będziemy mieli

$$|P(x+iy)-P(x_0+iy_0)|<\tfrac{1}{2}\rho$$

---

*) Możemy np. wziąć $\delta_m=\delta_1/2^{m-1}$.

we wszystkich punktach $x+iy$, leżących wewnątrz kwadratu lub na jego konturze. We wszystkich tych punktach mamy

$$P(x+iy)=a+\varphi,$$

gdzie $|\varphi|<\frac{1}{2}\rho$. Weźmy teraz pod uwagę wewnątrz kwadratu dowolny kontur zamknięty. Gdy z zakreśla ten kontur, punkt $Z=a+\varphi$ również zakreśla kontur zamknięty; ale ten drugi kontur leży oczywiście wewnątrz koła, zakreślonego ze środka a promieniem $\frac{1}{2}\rho$; koło to nie zawiera początku układu, a więc $\operatorname{am} Z$ nie ulega zmianie.

Ten wynik jest sprzeczny z tym, czego dowiedliśmy poprzednio, mianowicie że wewnątrz każdego kwadratu Δ_m możemy znaleźć taki kontur zamknięty, że jeśli punkt z zakreśla ten kontur, to $\operatorname{am} Z$ otrzymuje przyrost. Wnosimy tedy, że $P(x_0+iy_0)=0$.

Pozostaje do dowiedzenia, że możemy zawsze znaleźć *jakiś* kontur γ taki, że $\operatorname{am} Z$ otrzymuje przyrost, gdy z zakreśla krzywą γ. Otóż

$$Z=a_0z^n\left(1+\frac{a_1}{a_0z}+\frac{a_2}{a_0z^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0z^n}\right);$$

możemy tak dobrać R, że przy dowolnie małym dodatnim δ będziemy mieli

$$\frac{|a_1|}{|a_0|R}+\frac{|a_2|}{|a_0|R^2}+\ldots+\frac{|a_n|}{|a_0|R^n}<\delta;$$

jeśli więc γ jest kołem, zakreślonym promieniem R z początku spółrzędnych, wówczas

$$Z=a_0z^n(1+\rho),$$

gdzie $|\rho|<\delta$ we wszystkich punktach, leżących na γ. Rozumując w taki sam sposób jak poprzednio, możemy wykazać, że gdy z zakreśla koło γ w zwrocie dodatnim, wówczas $\operatorname{am}(1+\rho)$ nie ulega zmianie, natomiast $\operatorname{am} z^n$ wzrasta o $2n\pi$. Wobec tego $\operatorname{am} Z$ wzrasta o $2n\pi$ i twierdzenie, że $Z=0$, zostało dowiedzione.

Zakładaliśmy wciąż, że ani Γ, ani żaden mniejszy kontur nie przechodzi przez początek układu; takie założenie jest zupełnie uprawnione, gdyż w przeciwnym razie obracalibyśmy się w błędnym kole, zakładając odrazu prawdziwość twierdzenia.

Czytelnik, opierając się na powyższym rozumowaniu, dowiedzie sam, że *gdy z zakreśla dowolny kontur γ w zwrocie dodatnim*, $\operatorname{am} Z$ *wzrasta o $2k\pi$, gdzie k oznacza liczbę pierwiastków równania $Z=0$ wewnątrz γ, przyczym pierwiastki wielokrotne liczymy wielokrotnie.*

Często spotkać można inny dowód naszego twierdzenia, oparty na uogólnieniu wyników, osiągniętych w § 95 i nast.

Określamy mianowicie, jak w § 95, *kresy górny i dolny* funkcji $f(x, y)$ dla wszystkich par wartości x, y, odpowiadających punktom dowolnego obszaru płaszczyzny (x, y), ograniczonego przez linję zamkniętą. Rozumując tak, jak w § 95, można dowieść, że funkcja ciągła $f(x, y)$ osiąga w każdym takim obszarze swe kresy górny i dolny.

Otóż
$$|Z| = |P(x+iy)|$$
jest funkcją ciągłą dodatnią zmiennych x, y. Jeżeli m jest jej kresem dolnym dla punktów, leżących na γ lub wewnątrz γ, wówczas musi istnieć taki punkt z_0, dla którego zachodzi równość $|Z|=m$, i to musi być *najmniejsza* wartość, jaką może przybierać funkcja $|Z|$. Jeżeli $m=0$, to $P(z_0)=0$ i twierdzenie zostało dowiedzione. Możemy tedy założyć, że $m>0$.

Punkt z_0, o którym mowa, musi leżeć albo na konturze γ, albo wewnątrz tego konturu, jeśli jednak γ jest kołem, zakreślonym z początku układu promieniem R dostatecznie dużym, wówczas pierwsze przypuszczenie musimy odrzucić, gdyż $|P(z)| \to \infty$, gdy $|z| \to \infty$. Możemy tedy założyć, że z_0 leży wewnątrz γ.

Kładąc $z=z_0+\zeta$ i porządkując $P(z)$ według potęg zmiennej ζ, mamy
$$P(z) = P(z_0) + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \ldots + A_n\zeta^n.$$

Niech A_k będzie pierwszym spółczynnikiem różnym od zera i niech $|A_k|=\mu$, $|\zeta|=\rho$. Możemy obrać ρ tak małe, że
$$|A_{k+1}|\rho + |A_{k+2}|\rho^2 + \ldots + |A_n|\rho^{n-k} < \tfrac{1}{2}\mu.$$

Wobec tego
$$|P(z) - P(z_0) - A_k\zeta^k| < \tfrac{1}{2}\mu\rho^k$$
oraz
$$|P(z)| < |P(z_0) + A_k\zeta^k| + \tfrac{1}{2}\mu\rho^k.$$

Przypuśćmy, że z porusza się po kole, zakreślonym z punktu z_0 promieniem ρ; w takim razie
$$P(z_0) + A_k\zeta^k$$
obiega k razy okrąg koła, zakreślonego z punktu $P(z_0)$ promieniem $|A_k\zeta^k| = \mu\rho^k$, i przechodzi k razy przez punkt, w którym koło to przecina odcinek, łączący punkt $P(z_0)$ z początkiem układu. Mamy tedy na okręgu, zakreślanym przez punkt z, takich k punktów, że
$$|P(z_0) + A_k\zeta^k| = |P(z_0)| - \mu\rho^k,$$
czyli
$$|P(z)| < |P(z_0)| - \mu\rho^k + \tfrac{1}{2}\mu\rho^k = m - \tfrac{1}{2}\mu\rho^k < m,$$
co przeczy założeniu, że m jest dolnym kresem funkcji $|P(z)|$.

Stąd wynika, że m musi być zerem i że $P(z_0)=0$.

Przykłady do Dodatku I.

1. Liczba pierwiastków równania $f(z)=0$, zawartych wewnątrz zamkniętego konturu nie przechodzącego przez żaden pierwiastek, równa się przyrostowi funkcji
$$\frac{\lg f(z)}{2\pi i},$$
gdy z zakreśla ten kontur.

2. Jeżeli liczba R czyni zadość nierówności

$$\frac{|a_1|}{R}+\frac{|a_2|}{R^2}+\ldots+\frac{|a_n|}{R^n}<1,$$

to wartość bezwzględna każdego pierwiastka równania $z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0$ jest mniejsza od R. W szczególności wykazać, że wartość bezwzględna każdego pierwiastka równania $z^5-13z-7=0$ jest mniejsza od $2^1/_{67}$.

3. Wyznaczyć liczbę pierwiastków równania $z^{2p}+az+b=0$, których części rzeczywiste są dodatnie (lub ujemne). Zakładamy, że a, b są to liczby rzeczywiste, a p jest liczbą nieparzystą. Jeżeli $a>b$, $b>0$, wówczas pierwiastków mamy $p-1$ i $p+1$; jeżeli $a<0$, $b>0$, mamy $p+1$ i $p-1$ pierwiastków, jeżeli zaś $b<0$, mamy po p pierwiastków obu rodzajów. Zbadać przypadek, gdy $a=0$, $b=0$.

[Wykreślić zmiany funkcji $\operatorname{am}(z^{2p}+az+b)$, gdy z porusza się po konturze, utworzonym przez półkole, zakreślone z początku spółrzędnych promieniem R, i przez odcinek osi liczb urojonych, wyznaczony przez to półkole.[

4. W podobny sposób zbadać równania

$$z^{4p}+az+b=0,\quad z^{4p-1}+az+b=0,\quad z^{4p+1}+az+b=0.$$

5. Jeżeli α, β są liczbami rzeczywistemi, wówczas liczba pierwiastków równania $z^{2n}+\alpha^2z^{2n-1}+\beta^2=0$, mających części rzeczywiste dodatnie (względnie ujemne), równa się $n-1$ (względnie $n+1$), albo też n, zależnie od tego, czy n jest liczbą nieparzystą czy parzystą.

(*Mathem. Tripos*, 1891.)

6. Jeżeli z porusza się po odcinku, łączącym punkty z_1 i z_2, a mianowicie wychodzi z punktu w pobliżu z_1 i dąży do punktu, leżącego w pobliżu z_2, wówczas przyrost funkcji

$$\operatorname{am}\left(\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}\right)$$

prawie równa się π.

7. Kontur, otaczający punkty z_1, z_2, z_3, określony jest przez części trzech boków trójkąta $z_1z_2z_3$ oraz przez zewnętrzne (względem trójkąta) łuki trzech małych kół, zakreślonych z punktów z_1, z_2, z_3. Dowieść, że gdy z obiega ten kontur, przyrost funkcji

$$\operatorname{am}\left(\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}\right)$$

równa się -2π.

8. Owal zamknięty, otaczający pierwiastki równania sześciennego $f(z)=0$, otacza również pierwiastki równania $f'(z)=0$.

[Oprzeć się na zadaniu 7 oraz na równaniu

$$f'(z)=f(z)\left(\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}\right),$$

gdzie z_1, z_3, z_3 są pierwiastkami równania $f(z)=0$.]

9. Dowieść, że pierwiastki równania $f'(z)=0$ są ogniskami elipsy stycznej do boków trójkąta (z_1, z_2, z_3) w ich środkach.

10. Uogólnić zadanie 8 na równanie dowolnego stopnia.

11. $f(z)$, $\varphi(z)$ są wielomianami zmiennej z, a γ jest konturem, nie przechodzącym przez żaden pierwiastek funkcji $f(z)$. Jeżeli $|\varphi(z)| < |f(z)|$ we wszystkich punktach, leżących na γ, wówczas równania

$$f(z)=0, \quad f(z)+\varphi(z)=0$$

mają jednakową liczbę pierwiastków, zawartych wewnątrz krzywej γ.

12. Równania $e^z=az$, $e^z=az^2$, $e^z=az^3$, w których $a>e$, mają odpowiednio: (I) jeden pierwiastek dodatni; (II) jeden dodatni i jeden ujemny; (III) jeden dodatni i dwa zespolone pierwiastki, leżące wszystkie wewnątrz koła $|z|=1$.

(*Mathem. Tripos*, 1910).

DODATEK II.

Do rozdziałów IX i X.

UWAGA O ZAGADNIENIACH, DOTYCZĄCYCH GRANIC PODWÓJNYCH.

W rozdziałach X i X kilkakrotnie mieliśmy do czynienia z pewnym typem zagadnień, które zawsze sprawiają trudność początkującym; potraktowane w formie najogólniejszej, należą one istotnie do bardzo trudnych, ale zarazem do bardzo ważnych i interesujących zagadnień matematyki wyższej.

Weźmy kilka poszczególnych przykładów. W § 206 dowiedliśmy, że przy $-1 < x \leq 1$ mamy

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

a to mianowicie całkując równanie

$$1/(1+t) = 1 - t + t^2 - \ldots$$

w granicach od 0 do x. Dowiedliśmy tedy, że

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2 dt - \ldots$$

czyli że *całka sumy szeregu nieskończonego* $1 - t + t^2 - \ldots$, *wzięta w granicach od* 0 *do* x, *równa się sumie całek (wziętych w tych samych granicach) poszczególnych wyrazów szeregu*. Innemi słowami: w zastosowaniu do funkcji $(-1)^n t^n$ sumowanie od 0 do ∞ i całkowanie w granicach od 0 do x, są *przemienne*, czyli mogą być dokonane w tym lub innym porządku.

W § 209 dowiedliśmy, że pochodna funkcji

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

równa się $\exp x$, czyli że

$$D_x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right) = D_x 1 + D_x x + D_x \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

t. j. że *pochodna sumy szeregu równa się sumie pochodnych poszczególnych jego wyrazów*. Innemi słowy: w zastosowaniu do $x^n/n!$ sumowanie od 0 do ∞ i różniczkowanie względem x są działaniami przemiennemi.

W tym samym paragrafie dowiedliśmy, że funkcja $\exp x$ jest ciągła czyli że

$$\lim_{x\to\xi}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)=1+\xi+\frac{\xi^2}{2!}+\ldots=\lim_{x\to\xi}1+\lim_{x\to\xi}x+\lim_{x\to\xi}\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

t. j. granica sumy szeregu równa się sumie granic wyrazów. Innemi słowy: sumowanie od 0 do ∞ i dążenie x do ξ są, w zastosowaniu do $x^n/n!$, działaniami przemiennemi.

W każdym z tych przypadków dowiedliśmy słuszności odpowiedniego wzoru, nie dowodziliśmy jednak i nie dowiedziemy w tej książce żadnego ogólnego twierdzenia, z którego wypływałyby powyższe wzory. W Przykł. XL.1 widzieliśmy, że suma skończonej liczby wyrazów ciągłych jest sama ciągła; w § 106 widzieliśmy, że pochodna sumy skończonej liczby wyrazów jest sumą ich pochodnych; w § 153 dowiedliśmy odpowiedniego twierdzenia dla całek. Dowiedliśmy tedy, że w pewnych wypadkach działania, oznaczone symbolami

$$\lim_{x\to\xi}\ldots,\quad D_x\ldots,\quad \int\ldots dx,$$

są przemienne z sumowaniem *skończonej* liczby wyrazów. Stąd powstaje przypuszczenie, że w pewnych warunkach, które powinny dać się określić, działania te muszą być przemienne z sumowaniem nieskończenie wielu wyrazów. Dotychczasowe nasze wiadomości nie upoważniają nas jednak do żadnych dalszych wniosków.

Podamy kilka przykładów działań przemiennych i nieprzemiennych, które lepiej myśl naszą objaśnią.

(1) Mnożenie przez 2 i przez 3 jest przemienne, gdyż przy wszelkim x mamy

$$2\times3\times x=3\times2\times x.$$

(2) Działanie oddzielania rzeczywistej części liczby z nigdy nie jest przemienne z mnożeniem przez i, z wyjątkiem tylko przypadku, gdy $z=0$, gdyż

$$i\times\mathbf{R}(x+iy)=ix;\quad \mathbf{R}\{i\times(x+iy)\}=-y.$$

(3) W zastosowaniu do funkcji $f(x, y)$ dążenie zmiennych x, y do granicy zero może być lub nie być przemienne. Mamy np.

$$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to0}(x+y)\}=\lim_{x\to0}x=0,\quad \lim_{y\to0}\{\lim_{x\to0}(x+y)\}=\lim_{y\to0}y=0,$$

ale mamy również

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0}1=1$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=\lim_{y\to0}(-1)=-1.$$

(4) Działania $\sum_1^\infty\ldots\ldots$, $\lim_{x\to1}\ldots$ mogą być lub nie być przemienne. Je-

żeli np. $x \to 1$ przez wartości mniejsze od 1, to

$$\lim_{x \to 1} \left\{ \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} x^n \right\} = \lim_{x \to 1} \lg(1+x) = \lg 2$$

$$\sum_1^\infty \left\{ \lim_{x \to 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n \right\} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} = \lg 2.$$

Ale z drugiej strony mamy

$$\lim_{x \to 1} \left\{ \sum_1^\infty (x^n - x^{n+1}) \right\} = \lim_{x \to 1} \{(1-x)+(x-x^2)+\ldots\} = \lim_{x \to 1} 1 = 1$$

$$\sum_1^\infty \left\{ \lim_{x \to 1} (x^n - x^{n+1}) \right\} = \sum_1^\infty (1-1) = 0+0+0+\ldots = 0.$$

Z powyższych przykładów widzimy, że mogą zachodzić trzy przypadki: (1) działania mogą być *zawsze przemienne*, (2) mogą *nigdy nie być* przemienne, (3) mogą być przemienne *w pewnych wypadkach*, często spotykanych.

Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy oba działania zawierają przejście do granicy, jak np. różniczkowanie lub sumowanie szeregu nieskończonego. Nazwijmy takie działania *granicznemi*. Ogólne zagadnienie możnaby tak sformułować: kiedy dwa działania graniczne są przemienne? Jest to zagadnienie niezwykle doniosłe, ale jego roztrząsanie o wiele przekracza ramy naszej książki.

Możemy jednak zaznaczyć, że odpowiedź na to pytanie wypada w myśl powyższych przykładów: jeżeli L, L' są dwoma działaniami granicznemi, wówczas *wogóle* $LL'z \neq L'Lz$, ale w wielu pospolitych przypadkach odpowiednia równość istotnie zachodzi.

Wiele przykładów szczegółowego badania ważnych zagadnień o granicach podwójnych znaleźć można w dziele: Bromwich *An introduction to the theory of infinite series*. London, 1908.

ERRATA.

Str.	wiersz	zamiast	czytaj
103	16 od góry	(albo też $=\pi$)	(albo też $=\pm\pi$)
„	22 „ „	$\mathrm{am}\,\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}=\pi+\ldots$	$\mathrm{am}\,\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}=\pm\pi+\ldots$
104	14 od dołu	$Z_2-1/(z_2-z_4)$	$Z_2=1/(z_2-z_4)$
112	13 od góry	$x^2-2ax\cos\frac{s\pi}{m}=a^2$	$x^2-2ax\cos\frac{s\pi}{m}+a^2$
„	19 „ „	$=\{x^n+a^n(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\}$	$=\{x^n-a^n(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\}$
308	19 „ „	**148.**	**146.**