TODHUNTER — ALGEBRA POCZĄTKOWA II

ALGEBRA POCZĄTKOWA

S. Wi...

J. TODHUNTER
CZŁONEK TOW. KRÓLEWSKIEGO W LONDYNIE

ALGEBRA POCZĄTKOWA

TŁUMACZYŁ Z ANGIELSKIEGO
WŁ. KWIETNIEWSKI
B. DOCENT B. SZKOŁY GŁÓWNEJ

WYDANIE CZWARTE OPRACOWAŁ I UZUPEŁNIŁ
STEFAN KWIETNIEWSKI
DOKTÓR FILOZOFJI

CZĘŚĆ II

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA KRAKÓW LUBLIN ŁÓDŹ POZNAŃ WILNO
THE POLISH BOOK IMPORTING COMPANY INC. NEW YORK

KRAKÓW. — DRUK W. L. ANCZYCA I SPÓŁKI
1922

PRZEDMOWA.

Rozdziały I—XII tego tomu powstały z rozdziałów XXVIII—XXXVI wydania trzeciego tej książki; ważniejsze zmiany wprowadziłem w wykładzie liczb niewymiernych (rozdziały III i V). W rozdziałach XIII i XIV opracowałem na nowo stosunki, proporcje i proporcjonalność, korzystając z tekstu rozdziałów XXXV—XXXVII wydania pierwszego. W rozdziale XV (funkcja linjowa) wzorowałem się na Algebrze Bourleta (C. Bourlet, Leçons d'algèbre élémentaire, Paris 1896).

Warszawa, w grudniu 1921.

S. Kwietniewski.

ERRATA.

Str. 18, zad. 13 powinno być $49a^4 - 84a^2 b^3 + 36b^2$.

SPIS RZECZY.

I.

Podnoszenie do potęgi.

1. *Wielkość, która jest iloczynem* n *czynników równych danej wielkości* a, *nazywa się potęgą* n-*tego stopnia wielkości a, albo* n-*tą potęgą wielkości* a (§ 35—39 cz. I.); *a* nazywa się *zasadą*, *n wykładnikiem* potęgi.

Tak np. w wyrażeniu $(2a+b)^5$, zasadą jest $2a+b$, wykładnikiem 5; $(-x)^{2n+1}$, jest potęgą, mającą za zasadę $-x$, za wykładnik $2n+1$; liczba 81 jest potęgą o zasadzie 3 i wykładniku 4; ta sama liczba 81 jest także potęgą o zasadzie 9 i wykładniku 2.

Działanie, zapomocą którego z zasady i wykładnika otrzymujemy potęgę, nazywa się *podnoszeniem do potęgi*. Podnoszenie do potęg jest więc szczególnym przypadkiem mnożenia; lecz tak często mamy z niem do czynienia, że wypada poświęcić mu rozdział oddzielny. W rozdziale tym czytelnik spotka zasady, z któremi już po części zapoznał się dawniej.

2. *Każda potęga parzysta ilości ujemnej jest dodatnia, każda zaś jej potęga nieparzysta jest ujemna.*

Jest to bezpośredniem następstwem *prawidła znaków*. Tak np.

$$-a \times -a = a^2;$$
$$-a \times -a \times -a = a^2 \times -a = -a^3;$$
$$-a \times -a \times -a \times -a = -a^3 \times -a = a^4;$$

i tak dalej. W następnych paragrafach, skoro mówić będziemy: *dać znak właściwy*, rozumieć będziemy przez to wyrażenie znak, wypadający z zastosowania prawidła, podanego w tym §.

3. Jakąkolwiek potęgę danej potęgi można przedstawić jako potęgę o tej samej zasadzie, co i potęga dana. W tym celu *wykładnik potęgi, do której już jest podniesiona dana ilość, należy pomnożyć przez wykładnik nowej potęgi, i ten iloczyn wziąć za wykładnik ostatecznego wyniku. Całemu zaś wynikowi należy dać znak właściwy.*

Tak naprzykład:

$$(a^2)^3 = a^6, \qquad (-a^3)^3 = -a^9;$$
$$(a^4)^3 = a^{12}; \qquad (-a^4)^3 = -a^{12}.$$

Prawidło to jest bezpośredniem następstwem prawidła na wykładnik, dowiedzionego w § 77, cz. I. Naprzykład:

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\times 3} = a^6.$$

Prawidło podane wyżej bezpośrednio prowadzi do następującego:

4. *Ażeby podnieść do jakiejkolwiek potęgi jednomian całkowity, wykładnik każdego czynnika należy pomnożyć przez wykładnik potęgi i wynikowi dać znak właściwy.*

Tak naprzykład:

$$(a^2 b^3)^2 = a^4 b^6; \qquad (-a^2 b^3)^3 = -a^6 b^9;$$
$$(ab^2 c^3)^4 = a^4 b^8 c^{12}; \qquad (-a^2 b^3 c^4)^5 = -a^{10} b^{15} c^{20};$$
$$(2\,ab^2 c^3)^6 = 2^6 a^6 b^{12} c^{18} = 64\,a^6 b^{12} c^{18}.$$

5. *Ażeby podnieść do jakiejkolwiek potęgi ułamek, należy licznik i mianownik podnieść do tej potęgi i dać wynikowi znak właściwy.*

Wypada to z paragr. 160, cz. I. Naprzykład:

$$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 = \frac{a^4}{b^6}; \qquad \left(-\frac{a^2}{b^3}\right)^3 = -\frac{a^6}{b^9};$$
$$\left(\frac{2\,a^2}{3\,b}\right)^4 = \frac{2^4 a^8}{3^4 b^4} = \frac{16\,a^8}{81\,b^4}.$$

6. Niektóre przykłady na podnoszenie do potęg *dwumianów* były już podane: patrz §§ 97 i 106, cz. I. Tak np.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3.$$

Uczący się powinien, jako ćwiczenie, znaleźć czwartą, piątą i szóstą potęgę dwumianu $a+b$. Wyniki będą następujące:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$

W podobny sposób znajdziemy:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$
$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4,$
$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5,$
$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$

Widzimy, że w powyższym szeregu równości przed każdym wyrazem, w którym b wchodzi w potędze *nieparzystej*, jest znak *mniej*; tym sposobem możemy każdą potęgę dwumianu $(a-b)$ bezpośrednio wynaleźć z odpowiedniej potęgi dwumianu $(a+b)$, zmieniając znaki na przeciwne w tych wyrazach, do których wchodzi b w potędze nieparzystej.

7. Uczący się przekona się później, że zapomocą wzoru, zwanego *dwumianem Newton'a*, można otrzymać każdą potęgę dwumianu, nie wykonywając działania mnożenia.

8. Wzory podane w § 6 mogą być użyte w ten sposób, jaki wyłożyliśmy w § 102 cz. I. Przypuśćmy np., że chcemy znaleźć czwartą potęgę dwumianu $2x - 3y$. We wzorze na $(a-b)^4$ podstawmy $2x$ zamiast a i $3y$ zamiast b; tym sposobem znajdziemy:

$$(2x-3y)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3(3y) + 6(2x)^2(3y)^2 + \\ - 4(2x)(3y)^3 + (3y)^4 = 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 + \\ - 216xy^3 + 81y^4.$$

To samo otrzymamy, jeżeli we wzorze na $(a+b)^4$ podstawimy $2x$ zamiast a i $(-3y)$ zamiast b.

9. Łatwo się przekonać, że można podniesienie do potęgi wykonać w rozmaity sposób. Tak naprzykład przypuśćmy, że chcemy znaleźć szóstą potęgę $(a+b)$. Możemy ją znaleźć przez wykonanie kilkakrotne mnożenia przez $(a+b)$. Albo też możemy najprzód znaleźć sześcian $(a+b)$ i następnie sześcian ten podnieść do kwadratu, gdyż kwadrat wyrażenia $(a+b)^3$ jest $(a+b)^6$. Albo nakoniec możemy najprzód znaleźć kwadrat $(a+b)$, a następnie otrzymany wynik podnieść do sześcianu, gdyż sześcian wyrażenia $(a+b)^2$ jest $(a+b)^6$. Podobnież ósmą potęgę $(a+b)$ można znaleźć podnosząc do kwadratu wyrażenie $(a+b)^4$, lub podnosząc do potęgi czwartej $(a+b)^2$. I t. d.

10. Niektóre przykłady podnoszenia do potęg *trójmianów* już były dane w cz. I, patrz §§ 103 i 106. Tak np.

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca;$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+ \\ +3c^2(a+b)+6abc.$$

Wzory te mogą być użyte w taki sposób, jaki był wytłumaczony w § 102, cz. I. Tak np. przypuśćmy, że chcemy znaleźć $(1-2x+3x^2)^2$. We wzorze na $(a+b+c)^2$ podstawmy 1 zamiast a, $-2x$ zamiast b, i $3x^2$ zamiast c. Otrzymamy:

$$(1-2x+3x^2)^2 = (1)^2+(-2x)^2+(3x^2)^2+2(1)(-2x)+ \\ +2(-2x)(3x^2)+2(1)(3x^2) = 1+4x^2+9x^4-4x+ \\ -12x^3+6x^2 = 1-4x+10x^2-12x^3+9x^4.$$

Podobnież mieć będziemy;

$$(1-2x+3x^2)^3 = (1)^3+(-2x)^3+(3x^2)^3+ \\ +3(1)^2(-2x+3x^2)+3(-2x)^2(1+3x^2)+3(3x^2)^2(1-2x)+ \\ +6(1)(-2x)(3x^2)= \\ =1-8x^3+27x^6+3(-2x+3x^2)+12x^2(1+3x^2)+ \\ +27x^4(1-2x)-36x^3= \\ =1-6x+21x^2-44x^3+63x^4-54x^5+27x^6.$$

11. Widoczną jest rzeczą, że kwadrat jakiegokolwiek wielomianu można znaleźć zapomocą jednego z trzech następnych sposobów:

1-szy. Ponieważ np.

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+ \\ +2bc+2bd+2cd,$$

przeto możemy powiedzieć, że *kwadrat jakiegokolwiek wielomianu jest równy sumie kwadratów pojedyńczych wyrazów, więcej sumie podwójnych iloczynów tychże wyrazów branych po dwa.*

2-gi. Ten sam wynik możemy przedstawić w takiej postaci:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2a(b+c+d) + b^2 + 2b(c+d) + c^2 + 2cd + d^2,$$

co można tak wyrazić: *kwadrat jakiegokolwiek wielomianu równa się sumie kwadratów pojedyńczych wyrazów, więcej podwójny iloczyn każdego wyrazu przez sumę tych wyrazów które po nim następują.*

3-ci. Również widoczną jest rzeczą, że można ten sam kwadrat:

$$(a+b+c+d)^2$$

przedstawić w ten sposób:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2,$$

czyli: *kwadrat wielomianu równa się sumie kwadratów pojedyńczych wyrazów, więcej podwójny iloczyn każdego wyrazu przez sumę tych wyrazów, które go w wielomianie poprzedzają.*

12. Ostatni wzór, napisany pod postacią:

$$(a+b+c+d)^2 = a \cdot a + (2a+b)b + (2a+2b+c)c + (2a+2b+2c+d)d,$$

można stosować przy podnoszeniu do kwadratu liczb wielocyfrowych.

Jeżeli np. mamy podnieść do kwadratu liczbę 8279, to zakładamy (uwzględniając, że $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$):

$$a = 8000 = 8 \cdot 10^3, \quad b = 200 = 2 \cdot 10^2, \quad c = 70 = 7 \cdot 10, \quad d = 9.$$

Z prawej strony wzoru ogólnego mamy sumę czterech składników, z których każdy jest iloczynem dwóch czynników. Czynniki, stojące na drugiem miejscu, są to kolejno wielkości a, b, c, d, których wartości liczebne piszemy jedną pod drugą, zastępując dla krótkości zera kropkami.

$$\begin{array}{r} 8\,.\,.\,. \\ 2\,.\,. \\ 7\,. \\ 9 \end{array}$$

Obok wypisujemy wartości liczebne czynników, poprzedzających we wzorze ogólnym tamte cztery.

$$a = 8 \cdot 10^3,$$
$$2a + b = 16 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 = (160 + 2)\, 10^2 = 162 \cdot 10^2.$$

Pierwszy czynnik trzeciego składnika dostaniemy, dodając do poprzedniego $b + c$, t. j. $2 \cdot 10^2$ i $7 \cdot 10$, a więc $27 \cdot 10$; tym sposobem:

$$2a + 2b + c = 162 \cdot 10^2 + 27 \cdot 10 = 1647 \cdot 10$$

i podobnie:

$$2a + 2b + 2c + d = 16549.$$

Cały ten rachunek z łatwością wykonywa się w pamięci. W ten sposób otrzymujemy lewą stronę następującego schematu:

$$\begin{array}{rrr}
8\ldots \times & 8\ldots = & 64\ldots\ldots \\
162\,.\,. & 2\,.\,. = & 324\ldots. \\
1647\,. & 7\,. = & 11529\,.\,. \\
16549 & 9 = & 148941 \\
\hline
 & (8279)^2 = & 68541841.
\end{array}$$

Z prawej strony znaków równości wypisujemy wartości czterech iloczynów, pod spodem ich sumę, która jest żądanym kwadratem.

13. Ułamki zwyczajne, podług prawidła podanego w § 5, podnosi się do kwadratu przez podniesienie do kwadratu osobno licznika i osobno mianownika. Przy podnoszeniu do kwadratu całkowitej z ułamkiem, należy najprzód tę całkowitą włączyć w ułamek i następnie stąd otrzymany ułamek podnieść do kwadratu. Naprzykład:

$$\left(5\frac{8}{15}\right)^2 = \left(\frac{83}{15}\right)^2 = \frac{(83)^2}{(15)^2}$$
$$(83)^2 = 80^2 + (2 \cdot 80 + 3) \cdot 3,$$
$$(15)^2 = 10^2 + (2 \cdot 10 + 5) \cdot 5.$$

$$\begin{array}{rcl}
80^2 = 6400 & \qquad & 10^2 = 100 \\
163 \cdot 3 = \ 489 & & 25 \cdot 5 = 125 \\
\hline
(83)^2 = 6889 & & (15)^2 = 225,
\end{array}$$

stąd:

$$\left(5\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{6889}{225} = 30\frac{139}{225}.$$

Czasami jednak dogodniej bywa uważać całkowitą z ułamkiem jako dwumian:

$$\left(18\frac{5}{6}\right)^2=\left(18+\frac{5}{6}\right)^2=(18)^2+2\cdot 18\cdot\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2=324+$$
$$+30+\frac{25}{36}=354\frac{25}{36}.$$

14. Aby ułamek dziesiętny podnieść do kwadratu, należy albo zamienić go na zwyczajny i następnie znaleźć kwadrat otrzymanego ułamka zwyczajnego; albo też podnieść do kwadratu *liczbę otrzymaną przez opuszczenie w nim przecinka, i w znalezionym kwadracie odciąć na dziesiętne dwa razy więcej cyfr, aniżeli było w danym ułamku.*

W rzeczy samej, przypuśćmy, że mamy podnieść do kwadratu 0,006; będzie:

$$(0{,}006)^2=0{,}006\times 0{,}006=0{,}000036.$$

Podobnież:

$$(2{,}5)^2=2{,}5\times 2{,}5=6{,}25.$$

15. Zakończymy ten rozdział następującemi uwagami:

1-sze. Ponieważ każdą liczbę całkowitą można przedstawić pod postacią:

$$10a+b,$$

gdzie a jest liczbą całkowitą, a b całkowitą *jednocyfrową*, przeto kwadrat liczby całkowitej jest sumą trzech wyrazów, których postać otrzymamy, podnosząc powyższy dwumian do kwadratu:

$$(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2.$$

Ponieważ wszystkie składniki, z których otrzymaliśmy kwadrat liczby całkowitej, są zakończone zerami, z wyjątkiem kwadratu jedności, przeto ostatnia cyfra kwadratu jakiejkolwiek całkowitej będzie zawsze taką, jaką jest ostatnia cyfra kwadratu jedności tejże liczby. A że kwadraty liczb jednocyfrowych kończą się cyframi 1, 4, 5, 6 i 9, przeto kwadraty liczb jakichkolwiek mogą być zakończone tylko temi cyframi. Kwadrat więc nie może być zakończony żadną z cyfr: 2, 3, 7 i 8. Podobnież: jeżeli kwadrat jest zakończony zerami, to liczba tych zer musi być parzystą.

2-re. Kwadrat liczby większej od jedności jest większy od tejże liczby; kwadrat zaś liczby mniejszej od jedności jest mniejszy od liczby podnoszonej do kwadratu.

3-cie. Ponieważ:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

przeto, mając już wiadomy kwadrat jakiejkolwiek liczby a, łatwo można znaleźć kwadrat liczby o jedność od niej większej, przez dodanie do tegoż kwadratu podwojonej tej liczby i jedności.

Tak np. skoro wiemy, że:

$$(15)^2 = 225,$$

to $$(16)^2 = 225 + 2 \cdot 15 + 1 = 225 + 30 + 1 = 256;$$

i dalej: $$(17)^2 = 256 + 32 + 1 = 289,$$ i t. d.

Podobnież może być użytecznym wzór:

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1.$$

Np., wiedząc, że: $1000^2 = 1000000$, znajdziemy:

$$(999)^2 = (1000 - 1)^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001.$$

ZADANIA I.

Znaleźć:

1. $(2x^2y^3z^4)^2$.
2. $(-2x^2y^2z^3)^3$.
3. $(-3ab^2c^3)^4$.
4. $\left(\frac{2x^2}{3y^2}\right)^4$.
5. $\left(-\frac{4x}{3y^2}\right)^4$.
6. $\left(-\frac{x^3}{y^2z^2}\right)^4$.
7. $(a+b)^3(a-b)^3$.
8. $(1-x)^3$.
9. $(2+x)^3$.
10. $(3-2x)^3$.
11. $(1+x)^4$.
12. $(x-2)^4$.
13. $(ax+by)^3 + (ax-by)^3$.
14. $(1+x)^4(1-x)^4$.
15. $(1+x+x^2)^2$.
16. $(1+x-x^2)^2$.
17. $(1+3x-2x^2)^2$.
18. $(1-3x+3x^2)^2$.

19. $(2+3x+4x^2)^2+(2-3x+4x^2)^2$.

20. $(1+x+x^2)^3$. 21. $(1+x-x^2)^3$.

22. $(1-x+x^2+x^3)^2$. 23. $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$.

24. $(a+b+c+d)^2-(a-b+c-d)^2$.

25. Podnieść do kwadratu: a) 48; b) 99; c) 301; d) 425; e) 8354; f) 8355; g) 9999.

26. Podnieść do kwadratu: a) $\frac{7}{12}$; b) $4\frac{3}{5}$; c) 0,145; d) 8,91; e) 89,1.

27. Wiedząc, że $5248^2=27541404$, znaleźć 5243^2 i 5253^2.

II.

Pierwiastki.

16. *Jeżeli wielkość* b *jest n-tą potęgą wielkości* a, *wtedy* a *nazywa się pierwiastkiem n-tego stopnia z* b (por. cz. I, rozdz. III).

Tak np. 2 jest pierwiastkiem 3-go stopnia z 8, gdyż $2^3=8$; 3 i -3 są pierwiastkami 4-go stopnia z 81, gdyż $3^4=81$ $(-3)^4=81$; $5xy^2z^3$ i $-5xy^2z^3$ są pierwiastkami drugiego stopnia, czyli kwadratowemi, z $25x^2y^4z^6$.

»Pierwiastek *n*-go stopnia z *b*« oznaczamy w ten sposób:

$$\sqrt[n]{b},$$

jeżeli $n>2$; pierwiastek kwadratowy z b oznacza się przez $\sqrt{b}$.

Jednakże znak i nazwa pierwiastka niezawsze bywają ściśle w jednakowy sposób stosowane. Zauważmy, że jeżeli $a=\sqrt{b}$, to i $-a=\sqrt{b}$, gdyż jeżeli $a^2=b$, to i $(-a)^2=b$. To samo dotyczy pierwiastków jakichkolwiek stopni *parzystych:* o ile pierwiastek taki nie jest 0, to ma dwie wartości przeciwne; jedną z nich — wszystko jedno którą — oznaczamy przez $\sqrt{b}$, jeżeli jednak i drugą trzeba wprowadzić do rachunku czy rozumowania, to oznaczymy ją przez $-\sqrt{b}$, zaś obie razem $\pm\sqrt{b}$.

Możemy więc napisać:

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b;\quad -\sqrt{a^2-2ab+b^2}=b-a,$$

albo też równie dobrze:

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=b-a;\quad -\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b;$$

jeżeli zaś wybór nie został dokonany, to piszemy znaki podwójne:

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\pm a\mp b.$$

W tym ogólnym przypadku nie mamy możności rozstrzygnąć, który z tych dwóch pierwiastków jest dodatni, który ujemny; jeżeli jednak takie rozstrzygnięcie jest możliwe, jeżeli zwłaszcza mamy do czynienia z liczbami szczegółowemi, danemi zapomocą cyfr, wtedy zazwyczaj pierwiastkowi, niepoprzedzonemu znakiem, nadajemy wartość dodatnią. Tak np., pisząc $\sqrt[4]{16}$ zwykle mamy na myśli 2, nie — 2.

Dla uniknięcia wątpliwości można w takich przypadkach stosować znak wartości bezwzględnej (patrz § 169, cz. I):

$$\left|\sqrt[4]{16}\right|=2;\quad -\left|\sqrt[4]{16}\right|=-2,$$

jednakże najczęściej jest to zbyteczne.

17. Zamiast *znaleźć, obliczyć*, lub *wyznaczyć pierwiastek*, mówi się często: *wyciągnąć pierwiastek*.

Zajmiemy się wyciąganiem pierwiastków w najprostszych przypadkach.

$$\sqrt[3]{a^6}=a^2,\text{ gdyż }(a^2)^3=a^6$$

i wogóle

$$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m,\text{ gdyż }(a^m)^n=a^{mn}.$$

Jeżeli więc wyciągamy pierwiastek z potęgi i jeżeli wykładnik potęgi jest podzielny przez wykładnik pierwiastka, wtedy wielkość szukana jest potęgą tej samej zasady o wykładniku równym ilorazowi wykładnika danej potęgi przez wykładnik pierwiastka.

Podobnie

$$\sqrt{a^2b^4x^6} = ab^2x^3, \text{ gdyż } (ab^2x^3)^2 = a^2b^4x^6$$

i ogólniej:

$$\sqrt[n]{a^nb^{2n}x^{mn}} = ab^2x^m, \text{ gdyż } (ab^2x^m)^n = a^nb^{2n}x^{mn}.$$

Tutaj mamy pod znakiem pierwiastka iloczyn potęg o wykładnikach podzielnych przez wykładnik pierwiastka; do każdego czynnika zastosowaliśmy poprzednią metodę.

18. Powyższą metodę nieraz stosujemy przy wyciąganiu pierwiastka z liczb szczególnych. Np.

$$\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = 6 \cdot 10 = 60.$$

Tutaj rozłożyliśmy liczbę daną na dwa czynniki, z których każdy rozpoznajemy z łatwością jako kwadrat: $36 = 6^2$, $100 = 10^2$.

Inny przykład: liczba 441, jak to widać odrazu, jest podzielna przez $9 = 3^2$; $441 : 9 = 49 = 7^2$, a więc:

$$\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 7 = 21.$$

W ogólności możemy tak postąpić. *Rozkładamy liczbę daną na czynniki pierwsze*, sposobem znanym z arytmetyki. *Jeżeli się okaże, że wszystkie liczby czynników równych są podzielne przez wykładnik pierwiastka, wtedy można zastosować metodę* § 17. Np.

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt{2^6 \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

19. *Jeżeli z licznika i mianownika ułamka danego potrafimy wyciągnąć pierwiastki, to tym sposobem otrzymamy licznik i mianownik ułamka, który jest pierwiastkiem ułamka danego.* Istotnie,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ gdyż } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{a})^n} = \frac{a}{b}.$$

Tym sposobem

$$\sqrt[3]{\frac{a^3x^6}{b^3y^6}}=\frac{ax^2}{by^2}; \quad \sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}; \quad \sqrt[4]{\frac{16a^8}{81b^4}}=\frac{2a^2}{3b}.$$

20. Pierwiastek stopnia drugiego lub trzeciego z wielomianu znajduje się w ogólności metodą, która będzie wyłożona w § 23—26; ale w niektórych przypadkach można go znaleźć prostszym sposobem.

Ponieważ

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

to znajdziemy pierwiastek kwadratowy z trójmianu, jeżeli potrafimy wyciągnąć pierwiastki z dwóch jego wyrazów i jeżeli pozostały wyraz jest podwojonym iloczynem tych pierwiastków. Np. w trójmianie

$$4a^2b^2+4abc+c^2$$

pierwiastki kwadratowe wyrazów pierwszego i trzeciego są $2ab$ i c, ich iloczyn podwojony $4abc$ równa się wyrazowi środkowemu trójmianu, przeto

$$\sqrt{4a^2b^2+4abc+c^2}=2ab+c.$$

Inny przykład: wyciągnąć pierwiastek kwadratowy trójmianu

$$36x^4-24x^3+4x^2.$$

Możemy postąpić jak poprzednio, albo też wyprowadzić przedtem czynnik wspólny $4x^2$ za nawias:

$$4x^2(9x^2-6x+1).$$

Pierwiastki z wyrazów pierwszego i trzeciego w trójmianie są tu $\pm 3x$ i ± 1; ażeby ich podwojony iloczyn równał się $-6x$, trzeba im nadać znaki przeciwne: pierwszemu $+$, drugiemu $-$ lub odwrotnie. Znajdziemy więc:

$$\sqrt{36x^4-24x^3+4x^2}=2x(3x-1).$$

Podobnie znajdziemy

$$\sqrt[3]{8x^3-36x^2+54x-27}=2x-3,$$

biorąc pod uwagę wzór:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

21. Przy obliczaniu *pierwiastka kwadratowego z liczby nie więcej niż czterocyfrowej* można jeszcze stosować następującą metodę.

Kwadraty liczb jednocyfrowych znamy z tabliczki mnożenia; stąd mamy pierwiastki kwadratowe z następujących dziewięciu liczb jedno i dwucyfrowych:

$$\sqrt{1}=1;\quad \sqrt{4}=2;\quad \sqrt{9}=3;\quad \sqrt{16}=4;\quad \sqrt{25}=5;$$
$$\sqrt{36}=6;\quad \sqrt{49}=7;\quad \sqrt{64}=8;\quad \sqrt{81}=9.$$

Łatwo zauważyć, że

1) jeżeli zamiast jednej z tych 9-ciu liczb weźmiemy liczbę 100 razy większą, to otrzymamy pierwiastek 10 razy większy, np. $\sqrt{4900}=70$;

2) jeżeli liczba kończy się cyfrą 1, to pierwiastek nie może się kończyć inną cyfrą niż 1 lub 9; podobnie dla cyfry 4 dostajemy 2 lub 8, dla 5 — 5, dla 6 — 4 lub 6, dla 9 — 3 lub 7 (por. § **15**);

3) z dwóch liczb nierównych większa nie może mieć pierwiastka kwadratowego ani mniejszego ani równego pierwiastkowi kwadratowemu z liczby mniejszej, gdyż jeżeli

$$\sqrt{a}=x;\quad \sqrt{b}=y;$$

to dla $x=y$ dostalibyśmy $x^2=y^2$, więc $a=b$, przy $x<y$ $x\cdot x=x^2$ miałby oba czynniki mniejsze aniżeli $y\cdot y=y^2$ a więc byłoby $a<b$.

Wskutek 3) pierwiastek z liczby nie więcej niż czterocyfrowej, a więc <10000, nie może być liczbą więcej niż dwucyfrową.

Niech będzie np. dana liczba 1189. Ponieważ ona jest >9.100 i <16.100, przeto może mieć tylko pierwiastek >30 i <40; ponieważ ostatnia cyfra danej liczby jest 9, przeto druga cyfra pierwiastka nie może być inna jak 3 lub 7. Próbujemy każdą z nich i przekonywamy się zapomocą mnożenia albo metody z § 12, że $37^2=1189$.

22. Podobny sposób można zastosować przy wyciąganiu *pierwiastka sześciennego z liczby nie więcej niż sześciocyfrowej*, korzystając z następującej tabliczki:

$$1^3 = 1; \quad 2^3 = 8; \quad 3^3 = 27;$$
$$4^3 = 64; \quad 5^3 = 125; \quad 6^3 = 216;$$
$$7^3 = 343; \quad 8^3 = 512; \quad 9^3 = 729.$$

Przypuśćmy, że poszukujemy pierwiastka sześciennego z 12167. Ponieważ

$$8 \cdot 10^3 < 12167 < 27 \cdot 10^3,$$

przeto żądany pierwiastek sześcienny nie może być liczbą inną, jak tylko zawartą między $2 \cdot 10$ i $3 \cdot 10$, a więc liczbą dwucyfrową, mającą na pierwszem miejscu cyfrę 2. Ostatnia cyfra liczby danej jest 7; jedyną liczbą jednocyfrową, której sześcian kończy się cyfrą 7, jest 3, a więc druga cyfra pierwiastka nie może być inną, jak 3. Po sprawdzeniu przekonywamy się, że istotnie

$$(23)^3 = 12167.$$

Sprawdzenie wyniku jest tu oczywiście równie konieczne, jak przy znajdywaniu pierwiastka kwadratowego. Też same cyfry 2 i 3 dostalibyśmy np., poszukując pierwiastka sześciennego z 24587; ale co do możliwości znalezienia takiego pierwiastka nasze dotychczasowe metody nie dają żadnych wskazówek.

Ogólniejsze metody wyciągania pierwiastków stopnia drugiego i trzeciego z liczb poznamy w rozdz. IV.

23. Przystępujemy teraz do wyłożenia sposobu wyciągania pierwiastka kwadratowego z wielomianów.

Pierwiastek kwadratowy z $a^2 + 2ab + b^2$ jest $a + b$; rozważanie sposobu, w jaki $a + b$ można otrzymać z $a^2 + 2ab + b^2$, doprowadzi nas do ogólnego prawidła na wyciąganie pierwiastka kwadratowego z jakiegokolwiek wielomianu, który jest kwadratem zupełnym innego wielomianu.

$$\begin{array}{l|l} & \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b. \\ & \underline{a^2} \\ 2a + b & 2ab + b^2 \\ & \underline{2ab + b^2} \end{array}$$

Uporządkujmy najprzód wyrazy podług potęg jednej głoski, np. a; wtedy pierwszym wyrazem będzie a^2; jego pierwiastek kwadratowy jest a i to będzie pierwszym wyrazem szukanego pierwiastka.

Odejmijmy jego kwadrat, to jest a^2, od danego wyrażenia, i podpiszmy resztę $2ab + b^2$. Podzielmy $2ab$ przez $2a$; iloraz będzie b, i to będzie drugim wyrazem pierwiastka. Do podwojonego wyrazu pierwszego dodajmy wyraz drugi, otrzymamy

$2a + b$; pomnóżmy to ostatnie wyrażenie przez wyraz drugi, to jest b; otrzymane $2ab + b^2$ odejmujemy od reszty. I to w obecnym przypadku kończy całe działanie.

Gdyby było więcej wyrazów, wtedy należałoby z $a + b$ tak samo postępować, jak przedtem postępowaliśmy z a; kwadrat tego wyrażenia, to jest: $a^2 + 2ab + b^2$, już został odjęty od wielomianu danego, tym sposobem należy tylko resztę podzielić przez $2(a + b)$ dla otrzymania nowego wyrazu pierwiastka. Aby otrzymać nowy odjemnik, należy pomnożyć sumę z $2(a + b)$ i nowego wyrazu, przez ten nowy wyraz.

24. Przykłady:

1.
$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2} = 2x + 3y \\
 & -4x^2 \\
4x + 3y & 12xy + 9y^2 \\
 & -12xy \pm 9y^2
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{4x^4 - 20x^3 + 37x^2 - 30x + 9} = 2x^2 - 5x + 3 \\
 & -4x^4 \\
4x^2 - 5x & -20x^3 + 37x^2 - 30x + 9 \\
 & \mp 20x^3 \pm 25x^2 \\
4x^2 - 10x + 3 & 12x^2 - 30x + 9 \\
 & \pm 12x^2 \mp 30x \pm 9
\end{array}
$$

3.
$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{x^4 - 4x^3y + 10x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4} = x^2 - 2xy + 3y^2 \\
 & -x^4 \\
2x^2 - 2xy & -4x^3y + 10x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4 \\
 & \mp 4x^3y \pm 4x^2y^2 \\
2x^2 - 4xy + 3y^2 & 6x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4 \\
 & -6x^2y^2 \mp 12xy^3 \pm 9y^4
\end{array}
$$

4.
$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{x^6 + 4x^5 - 10x^3 + 4x + 1} = x^3 + 2x^2 - 2x - 1 \\
 & -x^6 \\
2x^3 + 2x^2 & 4x^5 - 10x^3 + 4x + 1 \\
 & -4x^5 \pm 4x^4 \\
2x^3 + 4x^2 - 2x & -4x^4 - 10x^3 + 4x + 1 \\
 & \mp 4x^4 \mp 8x^3 \pm 4x^2 \\
2x^3 + 4x^2 - 4x - 1 & -2x^3 - 4x^2 + 4x + 1 \\
 & \mp 2x^3 \mp 4x^2 \pm 4x \pm 1
\end{array}
$$

25. Przy wyciąganiu pierwiastka sześciennego z bardziej złożonych wielomianów, dogodną jest rzeczą rozłożyć rachunki działania w trzy tabliczki, jak następuje:

$$
3a+b; \quad \left| \quad \begin{array}{r} 3a^2 \\ (3a+b)\,b \\ \hline 3a^2+3ab+b^2 \end{array} \quad \right| \quad \begin{array}{l} \sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b \\ a^3 \\ \hline \quad 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \quad 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \hline \end{array}
$$

Objaśnienie: Znajdujemy najprzód pierwszy wyraz pierwiastka, to jest a; następnie piszemy a^3 pod danem wyrażeniem w trzeciej tabliczce i odejmujemy je. Piszemy potem $3a$ w pierwszej tabliczce, a $3a^2$ w drugiej; — dzielimy $3a^2b$ przez $3a^2$, i otrzymujemy iloraz b. Dodajemy b do wyrażenia pierwszej tabliczki, mnożymy następnie to, co otrzymamy w tej pierwszej tabliczce przez b, iloczyn piszemy w drugiej tabliczce, i dodajemy go do tego, co już w tejże tabliczce się znajduje, otrzymujemy $3a^2+3ab+b^2$. Mnożymy to ostatnie wyrażenie przez b; otrzymujemy $3a^2b+3ab^2+b^3$, który to iloczyn należy umieścić w trzeciej tabliczce i odjąć. Tym sposobem ukończyliśmy działanie odejmowania $(a+b)^3$ od wyrażenia danego. Gdyby było więcej wyrazów, wtedy należałoby toż samo działanie prowadzić dalej.

Przy wykonywaniu tego działania w dalszym ciągu należy dodawać do wielkości z pierwszej tabliczki taką wielkość, aby po dodaniu otrzymać *potrojoną część pierwiastka, już znalezioną.*

$$
\begin{array}{r} 3a+b \\ +2b \\ \hline 3a+3b \end{array}
$$

W tym celu postępujemy tak: mamy już w pierwszej tabliczce $3a+b$; umieszczamy $2b$ pod b i dodajemy;— wtedy otrzymamy $3a+3b$, czyli potrojoną część już znalezioną. Nadto, do liczb drugiej tabliczki wypada nam dodać taką liczbę, aby otrzymać *potrojony kwadrat tej części pierwiastka, która już jest znalezioną.* To znowu wynajdujemy w ten sposób:

$$
\begin{array}{r} (3a+b)\,b \\ 3a^2+3ab+b^2 \\ +b^2 \\ \hline 3a^2+6ab+3b^2 \end{array}
$$

w drugiej tabliczce mamy już $(3a+b)b$ a pod tą liczbą $3a^2+3ab+b^2$; — umieśćmy jeszcze b^2 poniżej i dodajmy liczby zawarte w trzech ostatnich wierszach, wtedy otrzymamy $3a^2+6ab+3b^2$, co jest właśnie trzy razy wziętym $(a+b)^2$, czyli potrojonym kwadratem znalezionej już części pierwiastka.

26. Przykład: wyciągnąć pierwiastek sześcienny z wyrażenia:

$$8x^6 - 36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64.$$

Działanie:

I)
$$\begin{array}{r} 6x^2 - 3x \\ -6x \\ \hline 6x^2 - 9x + 4 \end{array}$$

II)
$$\begin{array}{r} 12x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ -3x(6x^2 - 3x) \\ \hline 12x^4 - 18x^3 + 9x^2 \\ 9x^2 \\ \hline 12x^4 - 36x^3 + 27x^2 \qquad\qquad\qquad \\ 4(6x^2 - 9x + 4) \\ \hline 12x^4 - 36x^3 + 51x^2 - 36x + 16 \end{array}$$

III)
$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{8x^6 - 36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64} = 2x^2 - 3x + 4 \\ -8x^6 \\ \hline \qquad -36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64 \\ \qquad \mp 36x^5 \pm 54x^4 \mp 27x^3 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 48x^4 - 144x^3 + 204x^2 - 144x + 64 \\ \qquad\qquad\quad - 48x^4 \mp 144x^3 \pm 204x^2 \mp 144x \pm 64. \\ \hline \end{array}$$

Pierwiastek sześcienny z $8x^6$ jest $2x^2$; i to będzie pierwszym wyrazem szukanego pierwiastka: podpisujemy $8x^6$ pod danem wyrażeniem w trzeciej tabliczce i odejmujemy ten wyraz.

Następnie umieszczamy potrojone $2x^2$ w tabliczce pierwszej, a potrojony kwadrat $2x^2$ w tabliczce drugiej; to jest piszemy $6x^2$ w pierwszej, a $12x^4$ w drugiej tabliczce. Dalej dzielimy $-36x^5$ przez $12x^4$, i otrzymujemy tym sposobem iloraz $-3x$, który będzie drugim wyrazem pierwiastka.

Następnie dopisujemy tenże wyraz do pierwszej tabliczki, i to wyrażenie, które teraz znajdować się będzie w pierwszej tabliczce, czyli $6x^2 - 3x$, mnożymy przez $-3x$, tak znaleziony iloczyn umieszczamy pod wyrażeniem, będącem w drugiej tabliczce i dodajemy go do tegoż wyrażenia: — otrzymamy tym sposobem $12x^4 - 18x^3 + 9x^2$. Mnożymy dalej to ostatnie wyrażenie przez $-3x$, podpisujemy je pod resztą w trzeciej tabliczce i odejmujemy. Otrzymamy wtedy w trzeciej tabliczce resztę; a część pierwiastka już znaleziona będzie $2x^2 - 3x$. Teraz należy w tabliczce pierwszej i drugiej wykonać rachunki, wskazane w § 25. W tym celu podpisujemy podwojone $-3x$, to jest $-6x$, w pierwszej tabliczce, i dodajemy te dwa wiersze; — otrzymujemy przez to $6x^2-9x$, i to stanowi potrojoną część pierwiastka już znalezioną. Podobnież podpisujemy kwadrat $-3x$, czyli $9x^2$, w drugiej tabliczce, i dodajemy trzy ostatnie wiersze w tejże tabliczce; — otrzymujemy $12x^4-36x^3+27x^2$, i to jest potrojonym kwadratem znalezionej części pierwiastka.

Po wykonaniu tych działań dzielimy resztę, znajdującą się w trzeciej tabliczce, przez wyrażenie poprzednio otrzymane, i w ten sposób znajdujemy 4, jako ostatni wyraz pierwiastka; z nim znowu postępujemy tak, jak z poprzedniemi. Mianowicie: dołączamy ten wyraz do pierwszej tabliczki, i mnożymy tak otrzymane wyrażenie w tejże tabliczce, to jest: $6x^2-9x+4$, przez 4; iloczyn umieszczamy pod wyrażeniem będącem w drugiej tabliczce, dodajemy go do tegoż wyrażenia: otrzymujemy w ten sposób: $12x^4-36x^3+51x^2-36x+16$; mnożymy to ostatnie przez 4, podpisujemy iloczyn pod resztą w trzeciej tabliczce i odejmujemy go. Ponieważ nie otrzymujemy żadnej reszty, przeto wnosimy stąd, że $2x^2-3x+4$ jest szukanym pierwiastkiem sześciennym.

ZADANIA II.

Znaleźć wartości następujących wyrażeń:

1. $\sqrt{9a^4b^4}$. 2. $\sqrt[3]{8a^3b^3}$. 3. $\sqrt[3]{-64a^3b^6}$.

4. $\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}$. 5. $\sqrt[5]{-a^5b^{10}c^{15}}$.

6. $\sqrt{\dfrac{25a^2b^2}{49c^4}}$. 7. $\sqrt[3]{-\dfrac{216a^3b^9}{125c^6}}$. 8. $\sqrt[4]{\dfrac{81a^4}{b^4c^4}}$.

9. $\sqrt{\dfrac{676}{625}}$. 10. $\sqrt{\dfrac{1156}{2025}}$. 11. $\sqrt[3]{\dfrac{21952}{3375}}$.

Znaleźć pierwiastki kwadratowe z następujących wyrażeń:

12. $16a^2+40ab+25b^2$. 13. $49a^4-84a^2b+36b^2$.

14. $36x^6 + 12x^3 + 1$. 15. $\dfrac{9x^4 - 24x^2 + 16}{4x^2 - 12x + 9}$.

Wyciągnąć pierwiastki sześcienne z następujących wyrażeń:

16. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$.

17. $1728x^6 + 1728x^4y^3 + 576x^2y^6 + 64y^9$.

18. $x^3 - 3x^2(a+b) + 3x(a+b)^2 - (a+b)^3$.

Znaleźć pierwiastki kwadratowe z następujących liczb:

19. 3721. 20. 5184. 21. 7569. 22. 9801.

Znaleźć pierwiastki sześcienne z następujących liczb:

23. 19683. 24. 42875 25. 157464.

26. 681472. 27. 778688.

Znaleźć pierwiastki kwadratowe z następujących wyrażeń:

28. $1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4$.

29. $4x^8 - 4x^6 - 7x^4 + 4x^2 + 4$.

30. $\dfrac{4x^2}{9y^2} - \dfrac{x}{z} - \dfrac{16x^2}{15yz} + \dfrac{9y^2}{16z^2} + \dfrac{6xy}{5z^2} + \dfrac{16x^2}{25z^2}$.

Znaleźć pierwiastki sześcienne następujących wyrażeń:

31. $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

32. $8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6$.

33. $1 - 9x + 39x^2 - 99x^3 + 156x^4 - 144x^5 + 64x^6$.

III.

Liczby pierwiastkowe.

27. W poprzednim rozdziale poznaliśmy niektóre sposoby wyciągania pierwiastków z liczb szczególnych, nie rozstrzygaliśmy jednak pytania, czy wogóle z każdej liczby można wyciągnąć pierwiastek dowolnego stopnia i jeżeli nie — to jak odróżnić liczby, dla których to jest możliwe, od pozostałych? Tem pytaniem teraz się zajmiemy.

Przedewszystkiem zauważmy, że *niema liczby ani dodatniej ani ujemnej, która byłaby pierwiastkiem kwadratowym i wogóle pierwiastkiem stopnia parzystego z liczby ujemnej*, gdyż potęga parzystego stopnia zarówno liczby dodatniej, jak ujemnej, jest dodatnia. 0 oczywiście też nie jest takim pierwiastkiem, gdyż $0^2 = 0$.

Można wprawdzie, nadając wyrazowi »liczba« ogólniejsze znaczenie, obmyśleć nowy rodzaj liczb, których kwadraty byłyby liczbami ujemnemi. Liczby takie nazywają się *urojonemi* [1]). Tutaj jednakże liczbami takiemi operować nie będziemy, możemy więc zadowolić się stwierdzeniem, że w zakresie liczb, jakim rozporządzamy, wyciąganie pierwiastka stopnia parzystego z liczb ujemnych jest niewykonalne.

28. Jeżeli *liczba naturalna* A może być rozłożona na czynniki pierwsze w ten sposób, że każdy czynnik powtarza się liczbę razy podzielną przez n, wtedy z liczby A można wyciągnąć pierwiastek *n-go* stopnia, jak to widzieliśmy w § 18.

W ogólnej postaci możemy napisać:

jeżeli $A = p_1^{r_1 n} . p_2^{r_2 n} \ldots p_s^{r_s n}$,

gdzie $p_1 p_2, \ldots p_s$ *są liczbami pierwszemi,*

a $r_1, r_2, \ldots r_s$, n *liczbami naturalnemi,*

wtedy $\sqrt[n]{A} = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \ldots p_s^{r_s}$.

Można dowieść, że jeżeli ten warunek nie jest spełniony, wtedy niema ani takiej liczby całkowitej, ani takiego ułamka, którego *n-ta* potęga równałaby się A. Wynika to z następującej własności liczb:

Każda liczba naturalna może być przedstawiona, i to tylko jednym sposobem, jako iloczyn liczb pierwszych.

To znaczy, że jeżeli

$$A = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \ldots$$

i:

$$A = q_1^{s_1} \cdot q_2^{s_2} \ldots,$$

gdzie $p_1, p_2 \ldots, q_1, q_2, \ldots$ są liczbami pierwszemi $p_1, p_2 \ldots$ są wszystkie różne i $q_1, q_2 \ldots$ są różne, to wyrażenia z prawej

[1]) Wiadomości o liczbach urojonych można znaleźć w podręcznikach Böttchera, Feldbluma i innych.

strony znaków równości mogą się różnić co najwyżej porządkiem czynników.

Ta własność jest znana z arytmetyki, jakkolwiek zwykle nie bywa dowodzona; i tutaj dowód pominiemy [1]).

Opierając się na tej własności, widzimy odrazu, że jeżeli z liczby naturalnej A nie można wyciągnąć pierwiastka *n-go* stopnia przez rozkład na czynniki, wtedy nie może wogóle istnieć liczba całkowita, której *n-tą* potęgą byłoby A; gdyż gdyby istniała taka liczba

$x = y_1^{z_1} \cdot y_2^{z_2} \ldots$ wtedyby było $A = y_1^{nz_1} \cdot y_2^{nz_2} \ldots$

Ale niema również takiego ułamka; bo przypuśćmy, że ułamek taki istnieje i że po opuszczeniu czynników wspólnych w liczniku i mianowniku ułamkiem tym jest $\frac{x}{y}$; w takim razie musiałoby być:

$$\frac{x^n}{y^n} = A,$$

czyli:

$$x^n = Ay^n.$$

Gdyby ta równość była prawdziwa, wtedy obie jej strony dałyby się rozłożyć na te same czynniki pierwsze; jednakże to jest niemożliwe, gdyż podług założenia liczby x i y nie mają czynników wspólnych.

29. Z powyższego okazuje się jeszcze, że jeżeli pierwiastek *n-go* stopnia z ułamka, sprowadzonego do najprostszej postaci, nie da się wyciągnąć przez rozkład licznika i mianownika na czynniki pierwsze, wtedy nie może istnieć ułamek, którego *n-tą* potęgą byłby ułamek dany. Gdyż jeżeli a i b są pierwsze względem siebie i tak samo x i y, to równanie

$$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n}$$

może być tylko wtedy prawdziwe, jeżeli

$$a = x^n; \qquad b = y^n.$$

30. Wyniki dwóch ostatnich paragrafów można streścić w następującem zdaniu.

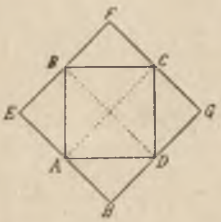
---

[1]) Dowód można znaleźć np. w pierwszem polskiem wydaniu tej książki (z r. 1890), dodatek I, albo w podręczniku Arytmetyki i Algebry Franka.

W zakresie liczb dodatnich całkowitych i ułamkowych wyciąganie pierwiastka jest tylko wtedy możliwe, jeżeli się da wykonać zapomocą rozkładu na czynniki pierwsze.

Jednakże zarówno względy teoretyczne, jak i praktyczne, skłaniają nas do tego, ażeby innych przypadków nie pozostawiać bez rozpatrzenia.

Przypuśćmy np., że mamy obliczyć bok kwadratu, którego pole równałoby się dwom jednostkom powierzchni. Jeżeli długość boku kwadratu ma za miarę liczbę całkowitą albo ułamkową, wtedy miarą pola kwadratu jest druga potęga tej liczby; ale nie można poprzestać na stwierdzeniu, że niema liczby całkowitej ani ułamkowej, której kwadrat równałby się 2, jeżeli praktyka wymaga konkretnej odpowiedzi; nie można również teoretycznie zaprzeczyć istnienia takiego kwadratu, gdyż można go zbudować, opierając się na postulatach konstrucyjnych geometrji. Rzeczywiście, jeżeli $ABCD$ (rys. 1) jest kwadratem o boku równym jednostce długości, a więc kwadratem, którego pole równa się jednostce powierzchni, to poprowadźmy przekątne AC i BD, a z każdego wierzchołka kwadratu prostopadłą do przekątnej, przechodzącej przez ten wierzchołek. Punkty, w których te prostopadłe przecinają się po dwie, niech będą E, F, G, H. Czworokąt $EFGH$ jest kwadratem, podzielonym przez boki i przekątne danego kwadratu na 8 trójkątów równych; 4 z tych trójkątów wypełniają kwadrat $ABCD$, którego pole jest 1, a więc kwadrat $EFGH$ ma pole równe dwom jednostkom powierzchni.



Rys. 1.

31. Mając względy praktyczne na uwadze, możemy w ten sposób odpowiedzieć na postawione pytanie. Dokładność, z jaką wykonywamy pomiary, jest zawsze ograniczona; przypuśćmy, że możemy jeszcze odmierzyć 1 : 100 część jednostki długości, ale nie potrafimy już odróżnić, czy odcinek ma o 1 : 1000 część jednostki więcej czy mniej, nie rozróżniamy więc odcinków, których długości mierzą się liczbami

$$1{,}414 \quad \text{i} \quad 1{,}415,$$

albo też liczbami zawartemi między temi dwiema, jak np. 1,4145. Podnosząc dwie poprzednie liczby do kwadratu, znajdziemy:

$$(1{,}414)^2 = 1{,}999396$$
$$(1{,}415)^2 = 2{,}002225,$$

a więc:

$$(1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415).$$

Biorąc jeszcze pod uwagę, że z dwóch kwadratów nierównych, ten ma dłuższy bok, którego pole jest większe, dochodzimy do wniosku, że szukanego odcinka nie moglibyśmy odróżnić od tego, którego długość wymierzyliśmy liczbą 1,414 lub 1,415. Mówimy, że znaleźliśmy $\sqrt{2}$ *w przybliżeniu*, a mianowicie *z dokładnością do jednej tysiącznej* lub *z błędem nie przewyższającym jednej tysiącznej.*

»Wyciąganie pierwiastka z 2 z dokładnością do 1 : 1000« polega więc na znalezieniu dwóch liczb, różniących się nie więcej niż o 1 : 1000, z których jedna ma kwadrat mniejszy, druga większy od 2.

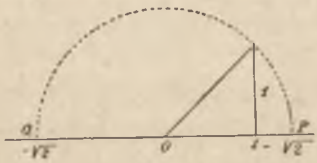
32. Określenie. » *Wyciągnąć pierwiastek n-go stopnia z liczby bezwzględnej* a *z dokładnością do* 1 : k« *to znaczy znaleźć dwie liczby bezwzględne różniące się nie więcej niż o* 1 : k, *z których jedna miałaby n-tą potęgę mniejszą lub równą, druga większą od* a.

Trzeba więc znaleźć dwie liczby bezwzględne x, y, spełniające warunki:

$$y - x \leq \frac{1}{k}; \qquad x^n \leq a < y^n.$$

W określeniu powyższem jest również zawarty przypadek, kiedy wyciąganie pierwiastka może być dokładnie wykonane przez rozkład na czynniki; w tym przypadku może być $x = \sqrt[n]{a}$.

33. W cz. I § 171 była mowa o przedstawianiu liczb zapomocą punktów na prostej w ten sposób, że obrawszy na prostej, którą nazwaliśmy osią odciętych, punkt początkowy O, zwrot dodatni i jednostkę długości, przedstawiliśmy każdą liczbę a zapomocą tego punktu osi, którego odległość od O, zmierzona obraną jednostką długości, wyraża się liczbą a. Teoretycznie musimy rozróżniać punkty o odciętych 1,414 i 1,415; czy możemy je faktycznie rozróżnić na rysunku — to już zależy od jego skali i dokładności. Odmierzmy teraz na osi od O w zwrocie dodatnim bok kwadratu, którego pole = dwom jednostkom długości (rys. 2); na rys. 1 znaleźliśmy taki odcinek EF, który zresztą jest równy przekątnej AC danego kwadratu, o boku = 1, a więc jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym, w którym każda z przyprostokątnych ma długość 1. Koniec P tak odmierzonego odcinka leży między punktami o odciętych 1,414 i 1,415, ale sam nie przedstawia żadnej liczby całkowitej ani ułamkowej; powiemy jednak, że »odciętą punktu P jest *liczba niewymierna* $\sqrt{2}$«. Punktowi Q, położonemu na osi symetrycznie do P względem O, przypiszemy odciętą $-\sqrt{2}$.



Rys. 2.

Wyrazu »liczba« użyliśmy tu w innem znaczeniu, niż dotychczas; ale już w cz. I § 168 zaznaczyliśmy, że wszystkie liczby całkowite i ułamkowe oraz 0 nazywają się liczbami wymiernemi i że tylko przez skrócenie mówiliśmy »liczba« zamiast »liczba wymierna«.

O liczbach 1,414 i 1,415 mówimy, że są »wartościami przybliżonemi liczby niewymiernej $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,001;« i wogóle *jeżeli liczby dodatnie x, y spełniają warunki*

$$y - x \leqq \frac{1}{k}; \qquad x^n \leqq a < y^n,$$

wtedy mówimy, że x i y są wartościami przybliżonemi liczby $\sqrt[n]{a}$ z dokładnością do 1 : k, *a mianowicie x z niedomiarem, y nadmiarem.*

Liczby niewymierne postaci $\sqrt[n]{a}$, gdzie n jest liczbą naturalną, a a liczbą wymierną, nazywają się »*liczbami pierwiastkowemi*«; później poznamy jeszcze inne liczby niewymierne.

ZADANIA III.

1. Z następujących liczb wyciągnąć pierwiastki kwadratowe z dokładnością do 1 z niedomiarem: *a)* 10; *b)* 35; *c)* 112.

2. Z następujących liczb wyciągnąć pierwiastki sześcienne z dokładnością do 1: *a)* 10; *b)* 100; *c)* 250; *d)* 820: *e)* 1100.

3. Znaleźć z dokładnością do 1 pierwiastki wszystkich stopni z następujących liczb: *a)* 27; *b)* 100: *c)* 360. Wyniki przedstawić graficznie.

IV.

Wyciąganie pierwiastków kwadratowych i sześciennych z żądaną dokładnością.

34. W poprzednim rozdziale powiedzieliśmy, na czem polega wyciąganie pierwiastka z żądaną dokładnością, nie wskazaliśmy jednak ogólnej metody, pozwalającej znaleźć pierwiastek przybliżony z danej liczby; w tym rozdziale poznamy metodę, zapomocą której będziemy mogli wyciągać pierwiastki kwadratowe i sześcienne z liczb całkowitych i ułamkowych z wszelką żądaną dokładnością.

Zaczniemy od wyciągania pierwiastków kwadratowych z liczb całkowitych z dokładnością do 1. Jeżeli więc jest dana liczba całkowita A, chcemy znaleźć taką liczbę x, ażeby

$$x^2 \leqslant A < (x+1)^2.$$

Dla x poszukiwać będziemy wartości całkowitej; możemy więc powiedzieć, że *chcemy znaleźć największą liczbę całkowitą x, której kwadrat nie jest większy od A.*

35. Pierwiastek kwadratowy ze 100 jest 10, z 10000 jest 100 i t. d.; wogóle pierwiastek kwadratowy z 10^{2n} jest 10^n. Jeżeli więc dana liczba A jest mniejsza od 100, a zatem i $x^2 < 100$, to $x < 10$, x jest więc liczbą jednocyfrową; jeżeli $100 < A < 10000$, to $10 < x < 100$, liczba x jest dwucyfrowa i t. d. Jeżeli więc cyfry, składające liczbę A, podzielimy na kolumny, począwszy od prawej strony ku lewej, zaliczając po dwie cyfry do każdej kolumny, lub jedną, jeśli się okaże, że dla ostatniej kolumny z lewej strony niema już drugiej cyfry — wtedy liczba kolumn wskaże liczbę cyfr szukanego pierwiastka. Tak np. pierwiastek (z dokł. do 1) z liczby

$$4\dot{7}05$$

składa się z dwóch cyfr. Oznaczmy te cyfry przez a i b, a więc

$$x = a \cdot 10 + b; \quad x^2 = a^2 \cdot 100 + (2a \cdot 10 + b)\, b.$$

Ponieważ $36 \cdot 100 < 4705 < 49 \cdot 100$, przeto $a = \sqrt{36} = 6$; pierwszą cyfrę pierwiastka znajdujemy jako największą liczbę całkowitą, której kwadrat nie jest większy od liczby, wyrażonej przez pierwszą kolumnę z lewej strony, a więc w naszym przykładzie od liczby 47.

Jeżeli teraz od liczby danej odejmujemy $a^2 \cdot 100 = 3600$, to w pozostałej reszcie musi być zawarte

$$(2a \cdot 10 + b)\, b;$$

ponieważ ta reszta $4705 - 3600 = 1105$, przeto musimy znaleźć największą liczbę całkowitą b, spełniającą warunek

$$(2a \cdot 10 + b)\, b \leqslant 1105.$$

Opuszczając w nawiasie b, zmniejszamy lewą stronę, a więc napewno:

$$2a \cdot 10 \cdot b < 1105,$$

czyli:

$$b < \frac{1105}{2a \cdot 10},$$

a ponieważ dla b poszukujemy liczby całkowitej, przeto możemy w tej nierówności licznik z prawej strony zastąpić największą, ale mniejszą od niego, liczbą podzielną przez 10 i skrócić z mianownikiem, skąd otrzymamy:

$$b \leqslant \frac{110}{2a},$$

w naszym przykładzie

$$a = 6, \text{ więc } b \leqslant \frac{110}{12}, \text{ czyli } b \leqslant 9.$$

Zakładając $b = 9$, znajdziemy $(2a \cdot 10 + b)\, b = 129 \cdot 9 = 1161$; ponieważ ta liczba jest większa od 1105, przeto b musi być mniejsze od 9; zakładając $b = 8$, znajdziemy:

$$(2a \cdot 10 + b)\, b = 128 \cdot 8 = 1024 < 1105.$$

Szukany pierwiastek jest więc 68.

Cały rachunek rozkładamy w ten sposób:

$$\sqrt{4\dot{7}05} = 60 + 8 \text{ (z dokł. do 1)}$$

$$\begin{array}{r|l} a^2 = & 3600 \\ \hline 2a+b = 120+8 & 1105 = 4705 - a^2 \\ & 1024 = (2a+b)b \end{array}$$

albo jeszcze prościej, opuszczając zera:

$$\sqrt{4\dot{7}05} = 68 \text{ z dokł. do 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 128 & 1105 \\ & 1024 \end{array}$$

36. Gdyby dana liczba składała się więcej niż z czterech cyfr, wtedy dwie pierwsze cyfry znaleźlibyśmy zupełnie tak samo jak w poprzednim przykładzie, a trzecią cyfrę c w taki sam sposób, w jaki w poprzednim przykładzie znaleźliśmy drugą cyfrę b, tylko w tym razie należałoby z liczbą już znalezioną, złożoną z dwóch pierwszych cyfr pierwiastka, a więc z liczbą $a \cdot 10 + b$, postąpić, jak poprzednio z liczbą a. Ażeby $(a \cdot 10 + b)^2$ odjąć od liczby, złożonej z dwóch pierwszych kolumn, trzeba tylko od otrzymanej pierwszej reszty odjąć $(2 \cdot a \cdot 10 + b)\, b$, gdyż $a^2 \cdot 10^2$ już zostało odjęte.

Tak samo postępujemy przy obliczaniu dalszych cyfr pierwiastka; całe działanie można więc opisać w taki sposób:

Cyfry, składające liczbę daną, dzielimy na kolumny od prawej strony ku lewej, zaliczając do każdej kolumny dwie cyfry, z wyjątkiem ostatniej, z lewej strony, która może się składać tylko z jednej cyfry. Następnie znajdujemy największą liczbę całkowitą, której kwadrat jest zawarty w liczbie, przedstawionej przez pierwszą kolumnę z lewej strony; będzie to pierwsza cyfra pierwiastka. Kwadrat jej odejmijmy od pierwszej kolumny i do reszty dopiszmy kolumnę drugą. Podzielmy tak otrzymaną ilość, opuszczając w niej ostatnią cyfrę, przez podwojoną, znalezioną dotąd część pierwiastka i dopiszmy iloraz i do pierwiastka, i do dzielnika. Pomnóżmy następnie dzielnik wraz z tem, co było dopisane, przez część pierwiastka *ostatnio znalezioną, i odejmijmy znowu iloczyn od całej reszty. Jeżeli w liczbie danej będzie jeszcze więcej kolumn do złożenia, wtedy całe działanie musi być dalej w ten sposób prowadzone.*

37. Przykłady:

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczb: 132496 i 5322249.

$$\sqrt{132496} = 364.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9 \\
\hline
66 & 424 \\
 & 396 \\
\hline
724 & 2896 \\
 & 2896 \\
\hline
\end{array}$$

$$\sqrt{5322249} = 2307.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4 \\
43 & 132 \\
 & 129 \\
\hline
4607 & 32249 \\
 & 32249 \\
\hline
\end{array}$$

Okazuje się, że obie liczby dane są kwadratami zupełnemi.

W pierwszym przykładzie, po znalezieniu pierwszej cyfry pierwiastka i dopisaniu do reszty drugiej kolumny, otrzymujemy 424; podług prawidła dzielimy 42 przez 6, dla otrzymania następnej cyfry pierwiastka; z podzielenia wypada 7, i to byłoby drugą cyfrą. Lecz mnożąc 67 przez 7, otrzymujemy na iloczyn 469, co jest większą liczbą, aniżeli 424. To pokazuje, że druga cyfra nie może być 7, ale jest mniejszą. Próbujemy 6 — ponieważ próba się udaje, przeto 6 jest właściwą cyfrą.

W drugim przykładzie powinien czytelnik zwrócić uwagę na to, że jedna cyfra pierwiastka wypadła zero.

38. Przypuśćmy teraz, że chcemy wyciągnąć z liczby A, która może być albo całkowitą, albo też całkowitą z ułamkiem dziesiętnym, pierwiastek kwadratowy z dokładnością do $1:10$, $1:100$, lub wogóle do $1:10^k$. Chcemy więc znaleźć liczbę x, spełniającą warunek:

$$x^2 \leqslant A < \left(x + \frac{1}{10^k}\right)^2$$

czyli, mnożąc każdą z tych trzech wielkości przez 10^{2k}:

$$(x \cdot 10^k)^2 \leqslant A \cdot 10^{2k} < (x \cdot 10^k + 1)^2.$$

Zadanie będzie więc rozwiązane, jeżeli znajdziemy największą liczbę całkowitą, której kwadrat jest mniejszy od $A \cdot 10^{2k}$ i podzielimy tę liczbę przez 10^k. Gdyby $A \cdot 10^{2k}$ nie było liczbą całkowitą, wtedy ułamek można opuścić, gdyż on nie może mieć wpływu na wartość największej liczby całkowitej, której kwadrat jest w tej liczbie zawarty.

Przypuśćmy np., że mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 0,4 z dokładnością do 0,0000001, czyli do $1 : 10^7$. Znajdujemy największą liczbę całkowitą, której kwadrat jest mniejszy od $0{,}4 \cdot 10^{14}$, czyli od liczby, złożonej z czwórki i 13 zer. Tak znaleziona liczba składać się będzie z 7 cyfr; ażeby ją podzielić przez 10^7, trzeba przed nią umieścić 0 i przecinek.

Całe działanie tak się przedstawi:

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{0{,}40\dot{0}0\ldots\ldots} = 0{,}6324555} \\
 & 36 \\
123 & 400 \\
 & 369 \\
1262 & 3100 \\
 & 2524 \\
12644 & 57600 \\
 & 50576 \\
126485 & 702400 \\
 & 632425 \\
1264905 & 6997500 \\
 & 6324525 \\
12649105 & 67297500 \\
 & 63245525 \\
 & 4051975
\end{array}
$$

Zauważmy, że podział na kolumny trzeba wykonywać w obie strony, począwszy od przecinka, gdyż za przecinkiem musimy zawsze uwzględnić parzystą liczbę cyfr.

Notowanie dokładności jest w tym przypadku zbyteczne, gdyż ta dokładność jest wskazana przez liczbę cyfr zanotowanych; w tym celu jednak trzeba zawsze notować ostatnią obliczoną cyfrę, chociażby to było 0, które na wartość ułamka dziesiętnego nie ma wpływu.

Wartość przybliżoną pierwiastka niezawsze piszemy z niedomiarem: jeżeli wiemy, że cyfra, następująca po ostatniej jaką notujemy, byłaby nie mniejsza od 5, wtedy tę ostatnią notowaną cyfrę zwykle zwiększamy o 1; ażeby to zaznaczyć, pisze się nieraz znak — pod tak zmienioną cyfrą. Napiszemy np:

$$\sqrt{0,4} = 0,632\underline{5}.$$

39. Wyłożony poprzednio (§ 25) sposób wyciągania pierwiastka sześciennego z wyrażeń algebraicznych prowadzi nas do podania sposobu wyciągania pierwiastka sześciennego z jakiejkolwiek liczby.

Pierwiastek sześcienny z 1000 jest 10, pierwiastek sześcienny z 1000000 jest 100; stąd wypada, że pierwiastek sześcienny z liczby mniejszej od 1000 jest jednocyfrowy; pierwiastek sześcienny z liczby, zawartej między 1000 i 1000000, składa się z dwóch cyfr, i t. d. Jeżeli więc cyfry składające daną liczbę, od prawej strony ku lewej podzielimy na kolumny, zaliczając do każdej 3 cyfry, z wyjątkiem ostatniej, która może się składać z 3, 2 lub jednej cyfry, wtedy liczba kolumn pokaże liczbę cyfr w pierwiastku sześciennym.

Tak naprzykład pierwiastek sześcienny z $40\dot{5}224$ składa się z dwóch cyfr, a pierwiastek sześcienny z $1\dot{2}81\dot{2}904$ składa się z trzech cyfr.

Przypuśćmy, że chcemy wyciągnąć pierwiatek sześcienny z 274625.

I-a tab.	II-a tab.	III-cia tab.
180 + 5	10800	$\sqrt[3]{27\dot{4}625} = 60 + 5$
	925	216000
	11725	58625
		58625

Oznaczmy punktem podział na kolumny; pokazuje się z tego, że pierwiastek składać się będzie z dwóch cyfr. Niech $a + b$ będzie szukanym pierwiastkiem, gdzie a oznacza wartość cyfry, stojącej na miejscu dziesiątków, a b wartość cyfry, stojącej na miejscu jedności. Wtedy a musi być największą wielokrotnością dziesięciu, której sześcian jest mniejszy od 274000; — jest to 60. Podpisujemy sześcian 60, to jest 216000, w trzeciej tabliczce pod daną liczbą, i odejmujemy go od tejże liczby. Umieszczamy potrojone 60, to jest 180, w pierwszej tabliczce, a potrojony kwadrat 60, t. j. 10800, w drugiej tabliczce. Resztę, otrzymaną w trzeciej tabliczce, dzielimy przez liczbę będącą w drugiej tabliczce, t. j. dzielimy 58625 przez 10800; otrzymujemy stąd 5 i to jest wartością b. Dodajemy 5 do liczby w pierwszej tabliczce i mnożymy tę sumę przez 5, t. j. mnożymy 185 przez 5; otrzymujemy stąd 925, co umieszczamy w drugiej tabliczce i dodajemy do liczby poprzednio tam wpisanej. Tym sposobem znajdujemy 11725, co mnożymy przez 5, umieszczamy iloczyn w trzeciej kolumnie i odejmujemy. Reszta jest 0, zatem 65 jest szukanym pierwiastkiem sześciennym.

Zera na końcu mogą być dla krótkości poopuszczane, i całe działanie ostatecznie przedstawiać się będzie w ten sposób:

185	108	$\sqrt[3]{274625} = 65$
	925	216
	11725	58625
		58625

40. Przykład. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 109215352.

I-a tab.	II-ga tab.	III-cia tab.
127	48	$\sqrt[3]{109215352} = 478$
14	889	64
1418	5689	45215
	49	39823
	6627	5392352
	11344	5392352
	674044	

Po otrzymaniu dwóch pierwszych cyfr pierwiastka, mianowicie 47, obliczamy pierwszą i drugą tabliczkę sposobem, wyłożonym w § 25. Mianowicie umieszczamy podwojone 7 pod liczbą pierwszej tabliczki, i dodajemy oba wiersze, co nam daje 141; następnie podpisujemy kwadrat 7 pod liczbami drugiej tabliczki i dodajemy trzy ostatnie wiersze, co znowu daje 6627. Dalej działanie jest prowadzone jak poprzednio. Pierwiastek sześcienny jest 478.

Przy wykonywaniu działania, odnoszącego się do tego przykładu, mogło się wydawać, że drugą cyfrą pierwiastka jest 8 lub nawet 9; lecz przez próbowanie każdej z nich okazuje się, że one są zbyt wielkie. Podobnie jak i przy wyciąganiu pierwiastka kwadratowego, może się czasami przytrafić, że wypada nam próbować zbyt wielkich cyfr, szczególniej przy oznaczaniu pierwszych cyfr pierwiastka.

41. P r z y k ł a d. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 8653002877.

605	1200	$\sqrt[3]{8\dot{6}53\dot{0}02\dot{8}77\dot{7}} = 2053.$
10	3025	8
6153	123025	653002
	25	615125
	126075	37877877
	18459	37877877
	12625959	

W tym przykładzie należy zwrócić uwagę na zero, które się otrzymuje jako jedną z cyfr pierwiastka.

42. Jeżeli pierwiastek ma pewną liczbę cyfr dziesiętnych, wtedy jego sześcian mieć będzie trzy razy więcej cyfr; z tego powodu w liczbie, mającej cyfry dziesiętne i wyrażonej w najprostszej postaci, liczba tych cyfr dziesiętnych musi być wielokrotną względem *trzech*, jeżeli dana liczba jest dokładnym sześcianem. W pierwiastku zatem sześciennym z takiej liczby liczba cyfr dziesiętnych będzie trzy razy mniejsza, aniżeli w danej liczbie. Dlatego, jeżeli liczba dana, z której chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny, zawiera ułamek dziesiętny, wtedy podział na kolumny wykonywamy w obie strony, począwszy od przecinka, a następnie postępujemy tak, jak przy wyciąganiu pierwiastka z liczby całkowitej. Liczba kolumn w części dziesiętnej danej liczby pokaże nam liczbę cyfr dziesiętnych w pierwiastku sześciennym.

43. P r z y k ł a d. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 14102,327296.

64	12	$\sqrt[3]{14102,327296} = 24,16.$
8	256	8
721	1456	6102
2	16	5824
7236	1728	278327
	721	173521
	173521	104806296
	1	104806296
	174243	
	43416	
	17467716	

44. Jeżeli dana liczba całkowita, czy też ułamek dziesiętny, nie ma dokładnego pierwiastka sześciennego, wtedy możemy do niej dopisać zera i oznaczyć pierwiastek sześcienny z przybliżeniem do jakiegokolwiek stopnia.

W następującym przykładzie jest wykonane wyciąganie pierwiastka sześciennego z 0,4 z dokładnością do 0,0001:

213	147	$\sqrt[3]{0,400\ldots} = 0,7368.$
6	639	343
2196	15339	57000
12	9	46017
22088	15987	10983000
	13176	9671256
	1611876	1311744000
	36	1301484032
	1625088	10259968
	176704	
	162685504	

45. Przekonamy się później (§ 86), że umiejąc wyciągać pierwiastki kwadratowe i sześcienne, można znaleźć pierwiastek 4-go, 6-go, 8-go stopnia i wogóle stopnia n, jeżeli n składa się wyłącznie z czynników pierwszych 2 i 3. W innych przypadkach można zastosować sposób następujący.

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć $\sqrt[5]{40}$ z dokładnością do 0,01. Znajdujemy dwie liczby całkowite, różniące się o 1, z których pierwsza miałaby potęgę 5-tą mniejszą, druga większą od 40. Takiemi liczbami są 2 i 3; tym sposobem mamy już $\sqrt[5]{40}$ z dokładnością do 1. Ażeby otrzymać ten pierwiastek z dokładnością do 0,1, sprawdzamy, które liczby ułamkowe o mianowniku 10, zawarte między 2 i 3, mają potęgi 5-te mniejsze, które większe od 40. Okaże się, że już $(2{,}1)^5 > 40$, a zatem 2,0 jest $\sqrt[5]{40}$ z dokładnością do 0,1 z niedomiarem; trzeba jeszcze sprawdzić, które liczby dziesiętne o dwóch cyfrach za przecinkiem, zawarte między 2,0 i 2,1, mają potęgi 5-te mniejsze, które większe od 40; okazuje się, że:

$$(2{,}09)^5 < 40 < (2{,}10)^5.$$

Otrzymamy więc odpowiedź $\sqrt[5]{40} = 2{,}09$.

46. W ogólności możemy tak postąpić: jeżeli chcemy wyciągnąć pierwiastek n-go stopnia z a z dokładnością do $1:k$, to zaczynamy od znalezienia liczby całkowitej x, spełniającej warunek

$$x^n < a < (x+1)^n,$$

a następnie sprawdzamy (przez podnoszenie do n-tej potęgi), które liczby ułamkowe o mianowniku k, zawarte między x i $x+1$, mają n-te potęgi mniejsze, które większe od a; największa liczba pierwszej kategorji albo »klasy« i najmniejsza drugiej dają nam żądaną odpowiedź.

Z powyższego sposobu okazuje się, że z wyciąganiem pierwiastka n-go stopnia z liczby dodatniej a można związać podział wszystkich liczb wymiernych na dwie »klasy«, zaliczając do pierwszej wszystkie liczby ujemne i każdą liczbę dodatnią, której n-ta potęga jest mniejsza od a, zaś do drugiej każdą liczbę dodatnią, której n-ta potęga jest większa od a. Każda liczba pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy; i jeżeli jest dany dowolnie mały ułamek $1:k$, to zawsze można znaleźć dwie liczby, z których każda należy do innej klasy i których różnica nie przewyższa $1:k$.

Jeżeli teraz z każdą liczbą *wymierną* zwiążemy podział wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy, zaliczając do pierwszej klasy tę liczbę oraz każdą liczbę od niej mniejszą, zaś do drugiej każdą liczbę od niej większą, — to tym sposobem *z każdą liczbą wymierną i z każdą liczbą pierwiastkową został związany podział wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy, mające następujące własności:*

1) *każda liczba pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy;*
2) *każda liczba należy albo do jednej albo do drugiej klasy;*
3) *jakakolwiek jest liczba k, zawsze można znaleźć dwie liczby, z których każda należy do innej klasy i które się różnią nie więcej niż o 1 : k.*

Każdy podział liczb na dwie klasy, mające powyższe własności nazywamy »*przekrojem liczb.*«

ZADANIA IV.

Znaleźć pierwiastki kwadratowe z następujących liczb:

1. 15129.	2. 103041.	3. 165649.
4. 3080,25.	5. 41,2164.	6. 0,835396.
7. 29376400.	8. 0,24373969.	9. 3,25513764.

Wyciągnąć pierwiastki kwadratowe z następujących liczb z dokładnością do 0,00001:

10. 0,9.	11. 6,21.	12. 0,43
13. 0,00852.	14. 129.	15. 347,259.

Znaleźć pierwiastki sześcienne następujących liczb:

16. 19683.	17. 157464.	18. 778688.
19. 2628072.	20. 60236,288.	21. 191,102976.

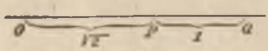
Wyciągnąć pierwiastki sześcienne z następujących liczb z dokładnością do 0,001:

22. 3.	23. 100.	24. 3159.
25. 0,5892.	26. 350,01.	27. 1085,4963.

V.

Działania nad liczbami pierwiastkowemi.

47. W § 33 znaleźliśmy na osi punkt, którego odciętą oznaczyliśmy przez $\sqrt{2}$; niech to będzie punkt P (rys. 3). Odcinek OP ma długość 1,41 z dokładnością do 0,01. Odetnijmy $PQ = 1$; wtedy punkt Q będzie miał odciętą $1 + 1{,}41 = 2{,}41$ z dokładnością do 0,01. Teoretycznie przypiszemy punktowi Q odciętą, którą przedstawimy pod postacią sumy $\sqrt{2} + 1$ i jeżeli



Rys. 3.

$$x^2 < 2 < \left(x + \frac{1}{k}\right)^2,$$

wtedy powiemy, że $x + 1$ jest wartością przybliżoną liczby niewymiernej $\sqrt{2} + 1$ z dokładnością do $\frac{1}{k}$.

Ogólniej: jeżeli liczba wymierna dodatnia x spełnia warunek:

$$x^n < a < \left(x + \frac{1}{k}\right)^n,$$

wtedy powiemy, *że $x + c$ jest wartością przybliżoną liczby niewymiernej $\sqrt[n]{a} + c$ z dokładnością do $\frac{1}{k}$ przez niedomiar.*

Tym sposobem określiliśmy »sumę liczby pierwiastkowej i wymiernej«.

48. Niech będą dane dwie liczby dodatnie a, b; przypuśćmy, że x, y, u, v są jakiemikolwiek, bliżej nieoznaczonemi liczbami dodatniemi, spełniającemi warunki:

$$x^n \leqslant a < y^n; \tag{1}$$

$$u^m \leqslant b < v^m. \tag{2}$$

Z tych warunków wynika:

$$x < y; \qquad u < v,$$

a więc także:

$$x + u < y + v.$$

Jeżeli więc warunki (1) i (2) są spełnione, wtedy sumy $x+u$ i $y+v$ należą do dwóch różnych klas liczb takich, że każda liczba pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy. Ten podział liczb na klasy spełnia więc warunek 1) § 46.

Jeżeli jeszcze zaliczymy do pierwszej klasy każdą liczbę mniejszą od każdej sumy $y+v$, a do drugiej każdą liczbę większą od każdej sumy $x+u$, wtedy będzie spełniony również warunek 2) § 46. Nie będziemy dowodzili, że o każdej liczbie można rozstrzygnąć, czy należy do pierwszej czy do drugiej klasy; okażemy tylko na przykładzie, jak takie rozstrzygnięcie wykónywa się zwykle w praktyce.

Przypuśćmy, że chcemy rozstrzygnąć czy liczba $t=\frac{239}{111}$ należy do pierwszej czy do drugiej klasy, jeżeli $a=2$, $n=2$, $b=0{,}4$, $m=3$. Rozwijamy t, $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{0{,}4}$ na ułamki dziesiętne, obliczając tyle cyfr, ile to się okaże koniecznem. Znajdziemy:

$$\begin{array}{rr} x=1{,}414; & y=1{,}415 \\ u=0{,}736; & v=0{,}737 \\ \hline x+u=2{,}150; & y+v=2{,}152 \end{array}$$

$$2{,}153<t<2{,}154.$$

Okazuje się, że t jest większe od liczby 2,153, która napewno należy do klasy drugiej, a więc i samo t należy do tej klasy. Gdyby było $t=\frac{71}{33}=2{,}1515\ldots$, wtedy musielibyśmy obliczyć większą liczbę cyfr dziesiętnych obu pierwiastków.

Ażeby stwierdzić, że nasz podział liczb na klasy spełnia również warunek 3) § 46, wystarczy zauważyć, że jakakolwiek jest dana liczba l, zawsze można znaleźć liczbę z, należącą do pierwszej klasy, tak ażeby liczba $z+1:l$ należała do klasy drugiej; w tym celu trzeba tylko obliczyć oba pierwiastki z błędem nie przewyższającym $1:2l$.

Jeżeli np. $l=1000$ i obliczymy $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{0{,}4}$ z dokładnością do $1:10000$, to $z=1{,}4142+0{,}7368=2{,}1510$ spełnia żądany warunek: 2,1520, jako liczba większa od 2,1512, napewno należy do klasy drugiej. A więc $\sqrt{2}+\sqrt[3]{0{,}4}=2{,}151$ z dokł. do $1:1000$.

Okazuje się, że omawiany podział na klasy stanowi »przekrój liczb«. Z tym przekrojem zwiążemy »sumę liczb $\sqrt[n]{a}$ *i* $\sqrt[m]{b}$« *w ten sposób, że jeżeli s należy do jednej klasy, a* $s+1:l$ *albo* $s-1:l$ *do innej, wtedy nazwiemy s »wartością przybliżoną sumy* $\sqrt[n]{a}+\sqrt[m]{b}$ *z dokładnością do* $1:l$, *albo z błędem nie przewyższającym* $1:l$«.

Błąd, jaki popełniamy, obliczając sumę dwóch pierwiastków, można zrobić tak małym, jak tylko chcemy; należy w tym celu obrać dostatecznie wielką liczbę l.

49. Zachowując warunki (1) i (2) § 48, zaliczmy do pierwszej klasy każdą różnicę

$$x-v,$$

do drugiej każdą różnicę

$$y-u;$$

oczywiście liczby pierwszej z tych klas są mniejsze, aniżeli drugiej. Oprócz tego zaliczmy do pierwszej klasy każdą liczbę mniejszą od wszystkich różnic $y-u$, zaś do drugiej każdą liczbę większą od wszystkich różnic $x-v$. Ten podział na klasy, podobnie jak rozpatrywany w poprzednim paragrafie, spełnia trzy warunki § 46, jest więc przekrojem liczb.

Z tak otrzymanym przekrojem wiążemy »różnicę pierwiastków $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[m]{b}$« *w ten sposób, że jeżeli r należy do jednej klasy, a* $r+1:l$ *albo* $r-1:l$ *do innej, to r nazwiemy »wartością przybliżoną różnicy* $\sqrt[n]{a}-\sqrt[m]{b}$« *z dokładnością do* $1:l$.

Tę różnicę możemy znaleźć *z dowolną* dokładnością $1:l$, jeżeli obliczymy oba pierwiastki z błędami nie przewyższającemi $1:2l$, gdyż błąd różnicy nie przewyższa sumy błędów odjemnej i odjemnika.

Każdy z pierwiastków może być równie dobrze wymierny, jak niewymierny; np.

$$\sqrt{2}-1=1{,}41-1=0{,}41 \text{ z dokł. do } 0{,}01,$$

ale:

$$\sqrt{2}-1{,}00=0{,}41 \text{ z dokł. do } 0{,}02,$$

gdyż w tym drugim przypadku domyślamy się, że 1,00 przedstawia liczbę przybliżoną z dokładnością do 0,01, a błąd nie przewyższa $0{,}01+0{,}01=0{,}02$.

50. Nie zmieniając warunków (1) i (2) § 48, zaliczmy do klasy pierwszej każdy iloczyn xu, zaś do drugiej każdy iloczyn yv. Zaliczmy jeszcze do klasy pierwszej każdą liczbę mniejszą od wszystkich iloczynów yv, zaś do drugiej każdą liczbę większą od wszystkich iloczynów xu. Taki podział liczb spełnia trzy warunki § 46, jest więc przekrojem; ale dowód, że ten podział spełnia warunek trzeci, jest trudniejszy, niż w przypadku sumy i różnicy [1]).

---

[1]) Przypuśćmy, że jeżeli jest dana jakakolwiek liczba l, chcemy znaleźć taką liczbę p, należącą do pierwszej klasy, ażeby liczba $p+1:l$ należała do klasy drugiej.

Oznaczmy przez a', b' dwie liczby spełniające warunki

$$a'^n \gtrless a; \quad b'^m \gtrless b,$$

a przez a_1, b_1 dwie liczby, spełniające warunki

$$a_1 \gtrless 1;\ a_1 - a' \gtrless \frac{1}{l};\quad b_1 \gtrless 1;\ b_1 - b' \gtrless \frac{1}{l}.$$

Na zasadzie § 46 można zawsze znaleźć liczby x, u, spełniające warunki

$$x^n \lessgtr a < \left(x+\frac{1}{2b_1 l}\right)^n;\quad u^m \leqslant b \leqslant \left(u+\frac{1}{2a_1 l}\right)^m;$$

okażemy, że $p = xu$ czyni zadość żądaniu. Rzeczywiście xu należy do pierwszej klasy, $\left(x+\frac{1}{2b_1 l}\right)\cdot\left(u+\frac{1}{2a_1 l}\right)$ do drugiej; oznaczmy przez d różnicę między temi iloczynami; wtedy

$$d = \frac{x}{2a_1 l} + \frac{u}{2b_1 l} + \frac{1}{4a_1 b_1 l^2},$$

a więc:

$$d < \frac{x}{2a_1 l} + \frac{u}{2b_1 l} + \frac{1}{4a_1 b_1 l^2} + \frac{1}{4a_1 b_1 l^2},$$

czyli:

$$d < \frac{1}{2a_1 l}\left(x+\frac{1}{2b_1 l}\right) + \frac{1}{2b_1 l}\left(u+\frac{1}{2a_1 l}\right),$$

a ponieważ

$$x+\frac{1}{2b_1 l} < a_1;\quad u+\frac{1}{2a_1 l} < b_1,$$

przeto

$$d < \frac{1}{2a_1 l}\cdot a_1 + \frac{1}{2b_1 l}\cdot b_1 = \frac{1}{2l} + \frac{1}{2l}$$

i ostatecznie:

$$d < \frac{1}{l}.$$

Z tak określonym przekrojem wiążemy »iloczyn pierwiastków $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[m]{b}$« w ten sposób, że jeżeli p należy do jednej klasy, a $p + 1 : l$, lub $p - 1 : l$ do innej, wtedy p nazywamy »wartością przybliżoną iloczynu $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ z dokładnością do $1 : l$«.

51. W tych samych warunkach (1) i (2) § 48 zaliczmy do pierwszej klasy każdy iloraz $x : v$, zaś do drugiej każdy iloraz $y : u$. Oprócz tego zaliczmy do pierwszej klasy każdą liczbę mniejszą od wszystkich ilorazów $y : u$, zaś do drugiej każdą liczbę większą od wszystkich ilorazów $x : v$. *Z otrzymanym stąd przekrojem wiążemy »iloraz pierwiastków $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[m]{b}$ w ten sposób, że jeżeli q należy do jednej klasy, a $q + 1 : l$, lub $q - 1 : l$ do innej, wtedy q nazywamy »wartością przybliżoną ilorazu $\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b}$ z dokładnością do $1 : l$«.*

52. Metodę wyłożoną w tym rozdziale można zastosować do określonych w ostatnich paragrafach sum, różnic, iloczynów i ilorazów; można je więc dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić, otrzymując wyniki związane, jak poprzednio, z przekrojami; okazuje się przytem, że *tak określone działania podlegają tym samym prawom, co działania nad liczbami wymiernemi*, że więc *każda tożsamość, prawdziwa dla wszystkich liczb wymiernych, pozostaje prawdziwą, jeżeli zamiast liter podstawiać będziemy liczby niewymierne.*

Dowód tego twierdzenia jest zbyt skomplikowany, ażeby można go było przytoczyć na tem miejscu. Będziemy jednak stale to twierdzenie stosowali, zakładając, że litery, zawarte we wzorach, przedstawiają bądź wartości wymierne, bądź niewymierne; jedynie wykładnikom pozostawiamy narazie znaczenie liczb naturalnych, gdyż dla innych nie określiliśmy jeszcze ani potęgi ani pierwiastka.

Jako przykład zastosowania powyższego twierdzenia rozpatrzmy tożsamość

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

w której niech będzie $a = \sqrt{2}$, $b = 1$; dostaniemy:

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Tę tożsamość możemy sprawdzić z wszelką żądaną dokładnością [1]). Obliczając $\sqrt{2}$ z trzema cyframi dziesiętnemi, znajdziemy dla iloczynu z lewej strony liczbę $2{,}414 \cdot 0{,}414 = 0{,}999396$ należącą do pierwszej klasy i liczbę $2{,}415 \cdot 0{,}415 = 1{,}002225$ należącą do drugiej klasy.

53. Liczby niewymierne można porządkować podług ich »*wielkości*« na zasadzie następującej umowy:

Każdą liczbę niewymierną uważamy za większą od każdej liczby wymiernej, należącej do pierwszej klasy związanego z nią przekroju i za mniejszą od każdej liczby drugiej klasy tegoż przekroju; jedną liczbę niewymierną uważamy za większą od drugiej, jeżeli istnieje liczba wymierna mniejsza od pierwszej i większa od drugiej. Dwie liczby niewymierne uważamy za równe, jeżeli są związane z tym samym przekrojem.

Możemy więc napisać:

$$1 < \sqrt{2} < 2;$$

$$\sqrt{1{,}05} < \sqrt[3]{1{,}12},$$

gdyż:

$$(1{,}03)^2 > 1{,}05.$$
$$(1{,}03)^3 < 1{,}12$$

ZADANIA V.

Obliczyć z dokładnością do $1:100$:

1. $2\sqrt{3} - \sqrt[3]{4} + 3\sqrt{5}$. 2. $\dfrac{\sqrt{5} + 15\sqrt{2}}{2}$.

Obliczając pierwiastki z trzema cyframi dziesiętnemi, znaleźć wartości przybliżone następujących wyrażeń i wskazać dokładność przybliżeń:

[1]) Ażeby obliczyć lewą stronę z dokładnością do $1:100$, zakładamy $l = 100$; $a_1 = 3$; $b_1 = 1$; trzeba więc obliczyć pierwszy czynnik z błędem nie przewyższającym $1:200$, drugi z błędem nie większym od $1:600$. Wystarczą więc w każdym razie 3 cyfry dziesiętne w rozwinięciu $\sqrt{2}$. (Por. przyp. na str. 39).

3. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$. 4. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$. 5. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$.

6. Uporządkować podług wielkości liczby następujące:

$$-1;\quad \frac{22}{7};\quad -2\sqrt[3]{0.4};\quad \sqrt[7]{23859033};\quad \sqrt{2}+\sqrt{3};$$

$$\frac{(\sqrt{30}+\sqrt{150})^2}{100};\ \pi$$

(π oznacza stosunek okręgu koła do średnicy $=3,14159$ z dokładnością do $0,00001$).

VI.

Wykładniki.

54. W paragrafie 37 cz. I określiliśmy znaczenie *wykładnika.* Stosownie do tego określenia, wykładnik dotychczas miał dla nas znaczenie zawsze liczby naturalnej, t. j. dodatniej i całkowitej. Rozszerzymy teraz określenie wykładnika, nadając znaczenie wykładnikowi ułamkowemu i wykładnikowi ujemnemu.

55. *Jeżeli m i n oznaczają jakiekolwiek liczby całkowite i dodatnie, wtedy:*

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Prawdziwość tego twierdzenia była już pokazana w paragrafie 77 cz. I, lecz nie będzie zbytecznem powtórzyć tutaj to dowodzenie:

$a^m = a\times a\times a\times \ldots\ldots m$ razy, na zasadzie § 37 cz. I;

$a^n = a\times a\times a\times \ldots\ldots n$ razy,

przeto:

$a^m\times a^n = a\times a\times a\times \ldots\ldots \times a\times a\times a\times \ldots\ldots m+n$ razy,

czyli:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Podobnież, jeżeli p jest także liczbą całkowitą i dodatnią:

$$a^m\times a^n\times a^p = a^{m+n+p};$$

i tak dalej.

56. Jeżeli m i n są liczbami całkowitemi i dodatniemi, a m jest większe od n, wtedy mamy, na zasadzie § 55:

$$a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m;$$

skąd:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

To również było już dowiedzione w paragrafie 90 cz. I.

57. Ponieważ wykładniki ułamkowe i wykładniki ujemne nie były dotychczas określone, przeto możemy je określić w taki sposób, w jaki tylko chcemy; i najdogodniejszą rzeczą będzie nadać tym wykładnikom takie znaczenie, ażeby podlegały zasadniczemu związkowi $a^m \times a^n = a^{m+n}$ *zawsze, jakiekolwiekby były m i n.*

Naprzykład: przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{1}{2}}$. Podług przypuszczenia powinno być:

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a.$$

Przeto $a^{\frac{1}{2}}$ musi być taką liczbą, która pomnożona przez siebie samą powinna dać na iloczyn a; ale *pierwiastek kwadratowy* z a jest podług określenia taką liczbą; — zatem $a^{\frac{1}{2}}$ musi mieć toż samo znaczenie, co i pierwiastek kwadratowy z a, to jest $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$

Dalej: przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{1}{3}}$. Podług przypuszczenia powinno być:

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a.$$

Stąd wynika, tak jak poprzednio, że $a^{\frac{1}{3}}$ musi mieć toż samo znaczenie, co i pierwiastek sześcienny z a, to jest: $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}.$

Dalej jeszcze przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{3}{4}}$. Podług przypuszczenia powinno być:

$$a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^3;$$

przeto:

$$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}.$$

Te przykłady dają uczącemu się pojęcie o tem, co należy rozumieć przez jakikolwiek wykładnik ułamkowy; podamy w dwóch następnych paragrafach ogólne określenie takiego wykładnika.

58. *Znaleźć, jakie ma znaczenie* $a^{\frac{1}{n}}$, *gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całkowitą i dodatnią.*

Na zasadzie przypuszczenia:

$$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots. n \text{ czynników} =$$

$$= a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots. n \text{ wyrazów}} = a^1 = a;$$

przeto $a^{\frac{1}{n}}$ musi mieć tożsamo znaczenie, co i pierwiastek potęgi *n-tej* z a, to jest:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

59. *Znaleźć, jakie ma znaczenie* $a^{\frac{m}{n}}$, *gdzie m i n są jakiemikolwiek liczbami całkowitemi i dodatniemi.*

Na zasadzie przypuszczenia:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times \ldots. n \text{ czynnków} =$$

$$= a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots n \text{ wyrazów}} = a^m;$$

przeto $a^{\frac{m}{n}}$ musi być pierwiastkiem potęgi n z a^m

czyli:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Stąd widzimy, że $a^{\frac{m}{n}}$ oznacza pierwiastek potęgi *n-tej* z a podniesionego do potęgi *m-tej*; to jest w wykładniku ułamkowym licznik oznacza wykładnik potęgi, a mianownik wykładnik pierwiastka.

60. Podług powyższego znamy znaczenie każdego wykładnika dodatniego czy to całkowitego, czy też ułamkowego; pozostaje nam teraz znaleźć znaczenie wykładnika ujemnego.

Naprzykład: chcemy poznać, jakie ma znaczenie a^{-2}.

Podług założenia:

$$a^3 \times a^{-2} = a^{3-2} = a^1 = a,$$

przeto:

$$a^{-2} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}.$$

Podamy teraz określenie w ogólności.

61. *Znaleźć znaczenie a^{-n}, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą dodatnią całkowitą lub ułamkową.*

Podług założenia, jakiekolwiekby było m, powinniśmy mieć:

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

Przypuśćmy, że m jest dodatnie i większe od n; wtedy:

$$a^{m-n} \times a^n = a^m,$$

skąd:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Aby wynik ten dogodnie wyrazić słowami, określimy najprzód znaczenie wyrazu *odwrotny*. Pewna ilość nazywa się *odwrotnością* drugiej, gdy iloczyn tych dwóch ilości jest równy jedności.

Tak np. x jest *odwrotnością* $\frac{1}{x}$, lub ilością *odwrotną* względem $\frac{1}{x}$.

Podług tego a^{-n} jest *odwrotnością* lub *ilością odwrotną* względem a^n. Wynik ten możemy przedstawić pod jedną z trzech następujących postaci:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^n \times a^{-n} = 1.$$

62. Z tego, jakie znaczenie nadaliśmy wykładnikowi ujemnemu, wynika, że $a^m : a^n = a^{m-n}$ i w tym przypadku, gdy m jest mniejsze od n, równie jak i w tym, gdy m jest większe od n. W rzeczy samej: przypuśćmy, że m jest mniejsze od n; wtedy:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Przypuśćmy teraz, że $m = n$, wówczas $a^m : a^n$ jest oczywiście $= 1$, a $a^{m-n} = a^0$. Ten ostatni symbol nie był jeszcze rozważany i nie otrzymał żadnego określenia; tym sposobem możemy mu nadać takie znaczenie, jakie najnaturalniej przedstawia się samo. Dlatego możemy powiedzieć, że $a^0 = 1$.

63. Aby ustanowić zupełną teorję wykładników, należałoby podać dowodzenia niektórych twierdzeń, wychodzących poza obręb niniejszego dziełka. Lecz te twierdzenia są tak prostemi wnioskami z określeń i własności ułamków, że czytelnik nie znajdzie żadnych trudności w zastosowaniu ich w tych przypadkach, które mogą mu się przytrafić. Z tego powodu pozostawiamy zupełny wykład obszerniejszym dziełom o algebrze, a tutaj podamy tylko niektóre przykłady.

64. Jeżeli m i n są liczbami całkowitemi dodatniemi, wtedy wiemy, że: $(a^m)^n = a^{mn}$ (patrz § 3).

Ten związek jest prawdziwy i wtedy, gdy m i n nie są liczbami całkowitemi dodatniemi. Naprzykład:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}}.$$

W rzeczy samej, niech $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x$. Wtedy podnosząc obie strony do potęgi 4 tej będziemy mieli: $a^{\frac{1}{3}} = x^4$; następnie zaś podnosząc obie strony do potęgi trzeciej, otrzymamy: $a = x^{12}$; przeto $x = a^{\frac{1}{12}}$, co właśnie było do pokazania.

65. Jeżeli n jest liczbą całkowitą i dodatnią, wiemy, że: $a^n \times b^n = (ab)^n$. Ten związek jest prawdziwy i wtedy, gdy n nie jest liczbą całkowitą i dodatnią.

Naprzykład: $a^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} = (ab)^{\frac{1}{3}}$. Gdyż jeżelibyśmy obie strony podnieśli do potęgi trzeciej, wtedy z jednej i drugiej otrzymalibyśmy ab; tym sposobem każda z nich jest pierwiastkiem sześciennym z ab.

W podobny sposób:

$$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \times c^{\frac{1}{n}} \times \ldots = (abc\ldots.)^{\frac{1}{n}}$$

Przypuśćmy teraz, że tych ilości a, b, c .... jest m i że wszystkie one są równe a; wtedy z powyższej równości będzie:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}},$$

czyli:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Stąd wypada, że aby pierwiastek potęgi n-tej z a podnieść do potęgi m, należy tylko ilość podpierwiastkową podnieść do potęgi m, pozostawiając resztę bez zmiany.

66. Ponieważ ułamek może przyjąć rozmaite postaci, nie zmieniając swojej wartości, przeto łatwo przedstawić pod rozmaitemi postaciami i ilość z wykładnikiem ułamkowym nie zmieniając jej wartości. Tak naprzykład: ponieważ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, przeto możemy wnieść że $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}}$ i tak jest w rzeczy samej. Gdyż podnosząc obie te ilości do potęgi szóstej, znajdziemy z jednej i z drugiej a^4, czyli każda z nich jest pierwiastkiem potęgi szóstej z a^4.

67. Dajemy teraz kilka przykładów działań algebraicznych, do których wchodzą wykładniki ułamkowe i ujemne.

Pomnożyć: $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{3}}$ przez $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6};\ \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12};\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

przeto:

$$a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} b^{\frac{13}{12}} c.$$

Podzielić: $x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{2}{3}}$ przez $x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}}$.

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4};\ \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

przeto:

$$x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}$$

Pomnożyć: $x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$, przez: $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-}$

$$
\begin{array}{l}
x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}} \\
\underline{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\quad -x^{-1}} \\
x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1 \\
\qquad +x^{\frac{2}{3}}+1+x^{-\frac{2}{3}} \\
\underline{\qquad\qquad -1-x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}} \\
x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}+1-x^{-\frac{4}{3}}.
\end{array}
$$

Tutaj mamy najprzód: $x^{\frac{1}{3}}\times x=x^{\frac{1}{3}+1}=x^{\frac{4}{3}}$; następnie: $x^{\frac{1}{3}}\times x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{3}}$; $x^{\frac{1}{3}}\times x^{-\frac{1}{3}}=x^{0}=1$ i tak dalej.

Podzielić:

$$x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+3x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{2}}\text{, przez: } x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}}+y^{-\frac{1}{3}}.$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+3x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{2}} & \underline{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}}+y^{-\frac{1}{3}}} \\
\underline{-x^{\frac{1}{2}}\mp 2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\pm x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}} & x^{\frac{1}{6}}-y^{-\frac{1}{6}}. \\
\quad -x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{2}} & \\
\underline{\quad \mp x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\pm 2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}\mp y^{-\frac{1}{2}}.} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

ZADANIA VI.

Znaleźć wartości następujących wyrażeń:

1. $9^{-\frac{1}{2}}$; 2. $(100)^{-\frac{1}{2}}$; 3. $(1000)^{\frac{2}{3}}$; 4. $(81)^{-\frac{3}{4}}$.

Uprościć:

5. $(a^{-2})^{-3}$, 6. $\sqrt[3]{a^{-3}}$; 7. $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{4}}$.

Pomnożyć:

8. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{4}}$ przez $x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{3}{4}}$ 9. $x+x^{\frac{1}{2}}+2$ przez $x+x^{\frac{1}{2}}-2$.

10. x^4+x^2+1 przez $x^{-4}-x^{-2}+1$.

11. $a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+1$ przez $a^{-\frac{1}{3}}-1$.

Podzielić:

12. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ przez $x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}$ 13. $a-b$ przez $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$.

14. $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$ przez $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

Znaleźć pierwiastki kwadratowe następujących wyrażeń:

15. $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}$.

16. $x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{1}{2}}$.

VII.

Przekształcanie wyrażeń pierwiastkowych.

68. Gdy pierwiastek pewnej liczby nie może być dokładnie oznaczony, wtedy nazywa się *wielkością pierwiastkową* i przedstawia szczególny wypadek tego, co w matematyce nazywamy w ogólności *wielkością niewymierną* (p. rozdz. III).

Tak np. następujące wielkości są pierwiastkowemi:

$$\sqrt{5},\quad \sqrt{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[3]{4},\quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}},\quad \sqrt[4]{7}.$$

Podobnież jeżeli pierwiastek wyrażenia algebraicznego nie może być oznaczony bez użycia wykładników ułamkowych, wtedy i taki pierwiastek nazywa się *wielkością pierwiastkową*.

Tak naprzykład następujące ilości są pierwiastkowemi:

$$\sqrt{a},\quad \sqrt{\frac{a}{b}},\quad \sqrt{a^2+ab+b^2},\quad \sqrt[3]{a^2},\quad \sqrt[3]{a^2+b^3}.$$

Prawidła na działania z ilościami pierwiastkowemi wypływają bezpośrednio z zasad, wyłożonych w poprzednim rozdziale, z uwzględnieniem twierdzenia § 52; rozdział niniejszy jest prawie całkowicie zastosowaniem tych zasad do przykładów liczebnych.

69. Liczby lub wyrażenia algebraiczne mogą się przedstawić pod formą pierwiastkową, nie będąc w *rzeczywistości* pierwiastkowemi. Tak naprzykład: $\sqrt{9}$ jest wyrażone pod postacią pierwiastkową, lecz nie jest w rzeczywistości ilością pierwiastkową, gdyż $\sqrt{9}=3$. Podobnież $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ jest tylko pod postacią pierwiastkową, nie będąc w rzeczywistości wielkością pierwiastkową, gdyż $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$.

70. Często wypada wielkość wymierną przedstawić pod postacią wielkości pierwiastkowej oznaczonego stopnia: w takim razie należy daną wielkość podnieść do potęgi takiej, jaki jest wykładnik pierwiastka, i nad tą potęgą napisać znak pierwiastka.

Naprzykład:

$$3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}; \qquad 4=\sqrt[3]{4^3}=\sqrt[3]{64}; \qquad a=\sqrt[4]{a^4};$$
$$a+b=\sqrt[3]{(a+b)^3}.$$

71. Iloczyn wielkości wymiernej przez wielkość pierwiastkową może być wyrażony pod postacią wielkości całkowicie pierwiastkowej w ten sposób: należy najprzód wielkość wymierną wyrazić pod postacią pierwiastkową, i następnie pomnożyć przez daną wielkość pierwiastkową (p. § 65). Naprzykład:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=\sqrt{18};$$
$$2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32};$$
$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}.$$

72. I odwrotnie: wielkość całkowicie pierwiastkowa może być wyrażona w postaci iloczynu z wielkości wymiernej przez pierwiastkową, jeżeli można wyciągnąć pierwiastek z jednego z czynników wielkości podpierwiastkowej.

Tak np.:

$$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2};$$
$$\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{8\times 6}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{6}=2\sqrt[3]{6};$$
$$\sqrt[3]{a^3b^2}=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b^2}=a\sqrt[3]{b^2}.$$

73. Wielkość pierwiastkowa ułamkowa może być zamieniona na równoważne jej wyrażenie, w którem mianownik jest wymierny. Tak naprzykład:

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times 2}{8\times 2}}=\sqrt{\frac{6}{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4};$$
$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times 9}{3\times 9}}=\sqrt[3]{\frac{18}{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}.$$

74. Wielkości pierwiastkowe, nie mające tego samego wykładnika pierwiastka, mogą być przekształcone na równoznaczne wielkości takie, w których wykładniki pierwiastków są jednakowe (patrz § 65). Naprzykład, weźmy pod uwagę $\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{11}$.

$$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}};\quad \sqrt[3]{11}=(11)^{\frac{1}{3}};$$
$$5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125};$$
$$(11)^{\frac{1}{3}}=(11)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(11)^2}=\sqrt[6]{121}.$$

75. Możemy tutaj wskazać jedno z zastosowań poprzedniego paragrafu. Przypuśćmy, że chcemy poznać, co jest większe $\sqrt{5}$ czy $\sqrt[3]{11}$? Jeżeli sprowadzimy obie te wielkości do jednakowego wykładnika pierwiastka, przekonamy się, że pierwsza jest większa, gdyż 125 jest większe od 121.

76. Wyrażenia pierwiastkowe nazywają się *podobnemi* wtedy, gdy mają też same czynniki pierwiastkowe, albo też gdy mogą być sprowadzone do takiej postaci, że do niej wchodzić będą też same czynniki pierwiastkowe.

Tak np. $4\sqrt{7}$ i $5\sqrt{7}$ są wyrażeniami pierwiastkowemi podobnemi; $5\sqrt[3]{2}$ i $4\sqrt[3]{16}$ są także wyrażeniami pierwiastkowemi podobnemi, gdyż: $4\sqrt[3]{16}=8\sqrt[3]{2}$.

77. Aby dodać lub odjąć wyrażenia pierwiastkowe podobne, należy dodać lub odjąć ich spółczynniki i przypisać do wyniku czynnik pierwiastkowy.

Naprzykład:

$$\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}=$$
$$(2+5-4)\sqrt{3}=3\sqrt{3};$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{256}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{12}{8}}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{64\times 12}{27}}=$$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{12}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4\sqrt[3]{12}}{3}=\frac{2\sqrt[3]{12}}{3}.$$

78. Aby pomnożyć jednomiany pierwiastkowe takie, które mają ten sam wykładnik pierwiastka, należy pomnożyć oddzielnie czynniki wymierne i czynniki pierwiastkowe.

Tak naprzykład:

$$3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6};\qquad 4\sqrt{5}\times 7\sqrt{6}=28\sqrt{30};$$
$$2\sqrt[3]{4}\times 3\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{8}=6\times 2=12.$$

79. Aby pomnożyć jednomiany pierwiastkowe, w których wykładniki pierwiastków nie są jednakowe, należy je najprzód sprowadzić do jednakowego wykładnika i potem postępować jak wyżej.

Naprzykład: pomnożyć $4\sqrt{5}$ przez $2\sqrt[3]{11}$. Na zasadzie § 74 mamy:

$$\sqrt{5}=\sqrt[6]{125};\qquad \sqrt[3]{11}=\sqrt[6]{121};$$

przeto żądany iloczyn będzie:

$$8\sqrt[6]{125\times 121}=8\sqrt[6]{15125}.$$

80. Mnożenie wielomianów pierwiastkowych wykonywa się w podobny spobób, jak każde mnożenie wielomianów algebraicznych.

Naprzykład:

$$(6\sqrt{3}-5\sqrt{2})\times(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})=36+18\sqrt{6}+$$
$$-10\sqrt{6}-30=6+8\sqrt{6}.$$

81. Dzielenie przez jednomian pierwiastkowy wykonywa się w podobny sposób jak mnożenie przez jednomian pierwiastkowy. Wynik z takiego dzielenia może być uproszczony na zasadzie § 73.

Naprzykład:

$$3\sqrt{2}:4\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$4\sqrt{5}:2\sqrt[3]{11}=\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{11}}=\frac{2\sqrt[6]{125}}{\sqrt[6]{121}}=2\sqrt[6]{\frac{125}{121}}=$$

$$=2\sqrt[6]{\frac{125\times(11)^4}{121\times(11)^4}}=\frac{\sqrt[6]{1830125}}{11}.$$

Zwracamy uwagę, że powyższe przekształcenia, dokonane na zasadzie § 73, dają nam ostateczne wyniki pod postacią najdogodniejszą do liczebnych zastosowań: tak naprzykład, jeżeli chcemy znaleźć przybliżoną wartość liczebną wyrażenia

$$3\sqrt{2}:4\sqrt{3},$$

wtedy najprościej dochodzimy do celu, wyciągając pierwiastek kwadratowy z 6 i dzieląc otrzymany wynik przez 4.

82. Dzielenie przez wielomian pierwiastkowy najczęściej wypada wykonywać w przypadku, gdy dzielnik jest sumą lub różnicą dwóch ilości pierwiastkowych *stopnia drugiego*, czyli zawierających pierwiastki kwadratowe. Takie dzielenie ostatecznie wykonywa się zapomocą ważnego działania, które polega na przekształcaniu ilorazu, mającego mianownik pierwiastkowy, na takie wyrażenie, w którem mianownik jest *wymiernym*. Weźmy jako przykład ułamek:

$$\frac{4}{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}};$$

jeżeli licznik i mianownik tego ułamka pomnożymy przez $5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, wtedy wartość ułamka nie zmieni się, a mianownik stanie się *wymiernym*. W rzeczy samej:

$$\frac{4}{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{4\,(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(5\sqrt{2}+2\sqrt{3})\,(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}=$$

$$\frac{4(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{50-12}=\frac{10\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{19}.$$

Podobnież:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\,(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$$

$$\frac{8+3\sqrt{6}}{12-2}=\frac{8+3\sqrt{6}}{10}.$$

83. W ogólności gdybyśmy mieli ułamek, którego licznik jest jakikolwiek m, a mianownik jest sumą dwóch wielkości pierwiastkowych stopnia drugiego:

$$\frac{m}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}},$$

wtedy w celu zamiany tego ułamka na taki, w którym mianownik byłby wymierny, należy jego licznik i mianownik pomnożyć przez różnicę tych samych ilości pierwiastkowych, których suma stanowi mianownik.

W rzeczy samej, postępując tak, otrzymamy:

$$\frac{m}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}=\frac{m\,(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})\,(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}=\frac{m\,(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}.$$

Nowy mianownik a^2b-c^2d znajdziemy albo wykonywając wprost mnożenie $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})\,(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})$, albo też możemy odrazu napisać wynik na tej zasadzie, że iloczyn z sumy dwóch ilości przez ich różnicę równa się różnicy kwadratów tych ilości.

Gdyby w mianowniku była różnica dwóch wielkości pierwiastkowych stopnia drugiego, wtedy należałoby pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez sumę tych wielkości, których różnica stanowi mianownik. Np.:

$$\frac{m}{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}=\frac{m\,(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})\,(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}=\frac{m\,(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}.$$

84. W przypadku gdyby w mianowniku był trójmian pierwiastkowy, możnaby również ułamek taki zamienić na ułamek z mianownikiem wymiernym, tylko działanie byłoby dłuższe. Następny przykład pokazuje, jak w podobnych przypadkach należy postępować, aby uwolnić mianownik od ilości pierwiastkowych.

Niech będzie dany ułamek:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}},$$

który chcemy przekształcić na ułamek z mianownikiem wymiernym. Oznaczmy na chwilę $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jedną głoską s; wtedy dany ułamek przedstawi się pod postacią:

$$\frac{1}{s+\sqrt{7}}.$$

Aby tutaj uwolnić sie od wyrażenia pierwiastkowego w mianowniku, należy licz ık i mianownik pomnożyć przez $s-\sqrt{7}$; czyniąc to będziemy mieli:

$$\frac{1}{s+\sqrt{7}}=\frac{s-\sqrt{7}}{(s+\sqrt{7})(s-\sqrt{7})}=\frac{s-\sqrt{7}}{s^2-7}.$$

Podstawmy teraz zamiast s jego wartość, to jest $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; wtedy ułamek ten zamieni się na następny:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-7};$$

a że

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=3+2\sqrt{15}+5=8+2\sqrt{15},$$

(podług wzoru na $(a+b)^2$), przeto powyższy ułamek będzie:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{8+2\sqrt{15}-7}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}}.$$

Zamiast więc ułamka danego, w którym mianownik był trójmianem pierwiastkowym, otrzymaliśmy ułamek, którego mianownik jest dwumianem; możemy przeto uwolnić się od mianownika pierwiastkowego sposobem podanym wyżej i ostatecznie otrzymać ułamek z mianownikiem wymiernym. Mnożąc mianowicie licznik i mianownik ostatniego ułamka przez $1-2\sqrt{15}$, będziemy mieli:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})\,(1-2\sqrt{15})}{(1+2\sqrt{15})\,(1-2\sqrt{15})}=$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-6\sqrt{5}-10\sqrt{3}+2\sqrt{105}}{1-60}=$$

$$\frac{-9\sqrt{3}-5\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{-59}=$$

$$\frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{59}.$$

Temu więc ostatniemu ułamkowi równa się ułamek dany:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

W podobny sposób, przez dwukrotne powtórzenie działania mnożenia licznika i mianownika przez jedną i tęż samą ilość, możemy każdy ułamek, którego mianownik jest trójmianem złożonym z wyrazów pierwiastkowych stopnia drugiego, zamienić na ułamek z mianownikiem wymiernym.

85. Wyrażenie postaci

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$$

można następującym sposobem przekształcić na sumę dwóch pierwiastków.

Jeżeli jakąkolwiek ilość podniesiemy do kwadratu i następnie z tego ostatniego wyciągniemy pierwiastek kwadratowy, wtedy otzymamy początkową ilość; — dwa te działania wzajemnie się zniosą. Na tej zasadzie mamy:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$$

czyli:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Podobnież:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$$

czyli:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dwie te równości są tożsamościowe, to znaczy, że są prawdziwe dla wszelkich wartości x i y; będą więc prawdziwe i wtedy, gdy uczynimy:

$$x=a+\sqrt{b}, \qquad y=a-\sqrt{b}.$$

Dodając odpowiedniemi stronami te ostatnie dwie równości dostaniemy:

$$x+y=2a;$$

mnożąc zaś je: $\quad xy=a^2-b.$

Podstawiając teraz te wartości na x, y, $x+y$ i xy w równości (1) i (2), otrzymamy:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Przez dodanie odpowiedniemi stronami tych dwóch równości znajdziemy:

$$2\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

przez odjęcie zaś drugiej równości od pierwszej:

$$2\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}-\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Dzieląc pierwszą i drugą równość przez 2, otrzymamy:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}}{2}+\frac{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}}{2},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}}{2}-\frac{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}}{2}.$$

Podprowadzając zaś mianowniki 2 pod znaki pierwiastka:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{2a+2\sqrt{a^2-b}}{4}}+\sqrt{\frac{2a-2\sqrt{a^2-b}}{4}}$$

i skracając następnie każdy z ułamków, znajdujących się na drugich stronach równości, otrzymamy ostatecznie dwa wzory:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Równości te są tożsamościami, są więc prawdziwe przy wszystkich wartościach a i b. Chcąc je zastosować, należy w każdym szczególnym przypadku podstawić zamiast a i b odpowiednie wartości. Tak np. jeżeli jest dane wyrażenie:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}},$$

wtedy należy najprzód 4 podciągnąć pod znak pierwiastka

$$\sqrt{7+\sqrt{48}},$$

i następnie w pierwszym z otrzymanych wzorów podstawić 7 zamiast a i 48 zamiast b. Znajdziemy:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}},$$

i nakoniec:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Wzory te zawsze dają się zastosować, jakiekolwiekby a i b miały znaczenia, ale niezawsze dogodną jest rzeczą używać ich, gdyż wyrażenia na drugich stronach tych równości są wogóle bardziej złożone, aniżeli na pierwszych stronach. W jednym tylko przypadku korzystnem jest ich użycie, wtedy mianowicie, gdy na drugich stronach zginą znaki pierwiastkowe pod pierwiastkiem. Gdy więc wielkości a i b są takie, że a^2-b jest *zupełnym kwadratem*. Wtedy bowiem $\sqrt{a^2-b}$ można znaleźć dokładnie i wielkości pierwiastkowej pod znakiem pierwiastka nie będzie.

Weźmy jeszcze jako przykład:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}.$$

Najprzód wprowadzamy spółczynnik 2 pod znak pierwiastkowy:

$$\sqrt{8-\sqrt{60}}.$$

Tutaj: $a^2-b=8^2-60=64-60=4$, jest zupełnym kwadratem; dogodną jest więc rzeczą użyć wzoru na $\sqrt{a-\sqrt{b}}$. Stosując ten wzór, otrzymamy:

$$\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+\sqrt{8^2-60}}{2}}-\sqrt{\frac{8-\sqrt{8^2-60}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{8+\sqrt{4}}{2}}-\sqrt{\frac{8-\sqrt{4}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10}{2}}-\sqrt{\frac{6}{2}},$$

i nakoniec:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

86. Jeżeli wyrażenie

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

podniesiemy do potęgi n, to dostaniemy $\sqrt[m]{a}$; podnosząc tę wielkość do potęgi m, otrzymamy a, a zatem:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm}=a,$$

skąd:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}.$$

Tak np:

$$\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{2}.$$

Zapomocą powyższego wzoru można stosować metodę rozdz. IV do wyciągania pierwiastków z liczb albo wielomianów, jeżeli wykładnik pierwiastka składa się tylko z czynników 2 i 3; tak np.:

$$\sqrt[12]{x} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}}}.$$

ZADANIA VII.

Uprościć:

1. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32}$; 2. $2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108}$;

3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$

Pomnożyć:

4. $\sqrt[3]{4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ przez $\sqrt[3]{4}$.

5. $1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ przez $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

6. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ przez: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Uczynić wymiernemi mianowniki następujących ułamków:

7. $\dfrac{3 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$. 8. $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$. 9 $\dfrac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}$.

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z następujących wyrażeń:

10. $14 + 6\sqrt{5}$. 11. $8 + 4\sqrt{3}$. 12. $4 - \sqrt{15}$.

Uprościć:

13. $\dfrac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{24}}}$. 14. $\dfrac{1}{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}$. 15. $\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

16. $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt[4]{b^4} + \left(\sqrt[n]{m}\right)^n + \dfrac{a}{\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2}$.

Wykonać działania:

17. $(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})$.

18. $(\sqrt{x+y-z}+\sqrt{x-y+z})(\sqrt{x+y-z}-\sqrt{x-y+z})$.

19. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

20. $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$. 21. $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

W następujących wyrażeniach wprowadzić spółczynnik pod znak pierwiastka:

22. $a\sqrt{\frac{b}{a}}$. 23. $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.

24. $5\sqrt[3]{4}$. 25. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

Uczynić wymiernemi mianowniki w następujących ułamkach:

26. $\frac{3+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$. 27. $\frac{1+2\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$. 28. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

29. $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. 30. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$.

Znaleźć, czemu się równa:

31. $\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[r]{a^s}$.

32. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5$ 33. $\sqrt[7]{a^2\sqrt[3]{a}}$.

Znaleźć pierwiastki stopnia czwartego z następujących wielomianów:

34. $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.

35. $1-4x+10x^2-16x^3+19x^4-16x^5+10x^6-4x^7+x^8$

Znaleźć pierwiastki stopnia szóstego z następujących wielomianów:

36. $1+12x+60x^2+160x^3+240x^4+192x^5+64x^6$

37. $729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1$.

VIII.

Równania stopnia drugiego.

87. Jeżeli chcemy znaleźć liczbę, której kwadrat równa się liczbie danej, np. 16, to zadanie to możemy przedstawić pod postacią równania warunkowego:

$$x^2 = 16. \qquad (1)$$

Zadanie to rozwiązują, jak wiemy, liczby 4 i —4; każda z nich, podstawiona w równaniu powyższem zamiast x, zamienia to równanie na tożsamość. Powiemy więc, że równaniu temu czyni zadość

$$x = 4 \text{ i } x = -4, \qquad (2)$$

albo, rozróżniając oba pierwiastki równania zapomocą wskaźników:

$$x_1 = 4 \text{ i } x_2 = -4, \qquad (3)$$

albo wreszcie:

$$x = \pm 4. \qquad (4)$$

Zauważmy, że równania (2) albo (4) można otrzymać, wyciągając pierwiastki kwadratowe z obu stron równania (1), przyczem z jednej strony piszemy w obu równaniach (2) ten sam znak, z drugiej znaki przeciwne. Zmiana znaków po obu stronach równania nie dałaby nic nowego, gdyż

$$-x = -4,$$

wyraża to samo, co

$$x = 4.$$

88. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć liczbę, która, podstawiona zamiast x, czyni zadość równaniu:

$$\frac{x^2 - 13}{3} + \frac{x^2 - 5}{10} = 6.$$

Znieśmy najprzód mianowniki przez pomnożenie obu stron równania przez 30; będzie:

$$10(x^2 - 13) + 3(x^2 - 5) = 180;$$

skąd:

$$13x^2 = 180 + 130 + 15 = 325;$$

i następnie: $$x^2 = \frac{325}{13} = 25.$$

Wyciagając z obu stron pierwiastki kwadratowe, otrzymamy:

$$x = \pm 5.$$

W tym przykładzie, postępując najprzód tak, jak przy rozwiązaniu równań stopnia pierwszego, znaleźliśmy, że x^2 jest równe 25. Stąd wypada, że samo x jest taką liczbą, która, podniesiona do kwadratu, daje w wyniku 25; czyli x jest pierwiastkiem kwadratowym z 25.

Pierwiastek ten ma dwa znaczenia $+5$ i -5 (patrz § 16). Zatem x może mieć wartość $+5$ lub -5; każda z tych ilości zadosyć czyni równaniu, i to wyrażamy pisząc:

$$x = \pm 5,$$

albo: $$x_1 = +5; \quad x_2 = -5.$$

Rozwiązania sprawdzamy, zakładając w równaniu danem $x^2 = 25$:

$$\frac{25-13}{3} + \frac{25-5}{10} = 4 + 2 = 6.$$

89. Rozpatrzymy kilka podobnych przykładów.

Z równania $$5x^2 - 45 = 0,$$ otrzymujemy,

$$5x^2 = 45,$$

$$x^2 = 9,$$

skąd: $x = \pm 3$; czyli pisząc oddzielnie oba pierwiastki:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -3.$$

Drugie równanie: $4x^2 - 25 = 0$. Wtedy:

$$4x^2 = 25,$$

skąd: $$x^2 = \frac{25}{4},$$

i nakoniec: $$x = \pm \frac{5}{2},$$

to jest: $$x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Gdyby było równanie: $7x^2 - 21 = 0$; wtedy pierwiastki jego byłyby niewymierne:

$$x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = -\sqrt{3}.$$

Przypuśćmy jeszcze, że mamy równanie:

$$3x^2 + 12 = 0.$$

Chcąc je rozwiązać, mamy najprzód:

$$3x^2 = -12,$$

następnie:

$$x^2 = -4.$$

A że niema takiej ilości dodatniej lub ujemnej, któraby podniesiona do kwadratu dała na wynik ilość ujemną -4, przeto w tym przypadku x nie może być oznaczone w liczbach dodatnich lub ujemnych. Powiemy więc, że w układzie liczb, jakim rozporządzamy, to równanie nie może być spełnione.

90. Niech będzie dane do rozwiązania równanie:

$$x^2 - 4x = 0.$$

Nie trudno zauważyć, że równanie to będzie spełnione, jeżeli obierzemy x równe współczynnikowi 4; ale ono będzie spełnione i wtedy, jeżeli każdy wyraz stanie się zerem, co można osiągnąć, czyniąc $x = 0$. A zatem znaleźliśmy dwa rozwiązania:

$$x = 4; \; x = 0.$$

Pierwsze rozwiązanie otrzymać można, opuszczając w obu wyrazach wspólny czynnik x, drugie — zakładając że ten czynnik wspólny jest zerem.

Podobnie rozwiążemy równanie:

$$2x^2 - x = \frac{5x^2 - 3x}{5}.$$

Znosimy mianownik:

$$10x^2 - 5x = 5x^2 - 3x;$$

przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę:

$$5x^2 - 2x = 0;$$

rozkładamy lewą stronę równania na czynniki:

$$(5x - 2)\,x = 0;$$

skąd: $\quad 5x - 2 = 0$, albo: $x = 0$.

Istotnie, iloczyn dwóch czynników staje się zerem, jeżeli jeden z tych czynników uczynimy zerem. Z otrzymanych tym sposobem dwóch równań stopnia pierwszego znajdujemy dwa pierwiastki:

$$x_2 = \frac{2}{5}; \quad x_2 = 0.$$

91. Równanie z jedną niewiadomą nazywa się *równaniem stopnia drugiego*, albo *kwadratowem*, jeżeli, po zniesieniu mianowników, przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę i uproszczeniu, otrzymuje postać:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

gdzie x jest niewiadomą, b, c jakiemikolwiek liczbami, a a jakąkolwiek liczbą różną od 0. Równanie kwadratowe nazywa się: *czystem*, jeżeli $b = 0$; *niezupełnem*, jeżeli $b \neq 0$, $c = 0$; *zupełnem*, jeżeli $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Znak: »$\neq$« należy czytać: »*nie równa się.*«

Równania, które dotychczas rozwiązywaliśmy w tym rozdziale, są kwadratowe, a mianowicie w §§ 87—89 czyste, w § 90 niezupełne.

92. Przy rozwiązywaniu równań stopnia drugiego, oprócz sposobów, używanych przy rozwiązywaniu równań stopnia pierwszego, stosuje się zawsze jeden z następujących sposobów:

1) *Sprowadziwszy obie strony równania do dogodnej postaci, wyciągamy z nich pierwiastki kwadratowe i przyrównywamy*, np.

$$(2x + 5)^2 = (x - 3)^2;$$
$$2x + 5 = \pm (x - 3).$$

2) *Po przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę, rozkładamy ją na dwa czynniki i każdy z nich przyrównywamy do zera;* np.

$$(x-1)(2x-7)=0;$$

$$x-1=0;\ 2x-7=0.$$

Każdy z tych sposobów prowadzi do rozwiązania dwóch równań stopnia pierwszego zamiast jednego równania stopnia drugiego. Równania czyste dogodniej jest rozwiązywać pierwszym sposobem, niezupełne drugim; ale w każdym przypadku można stosować zarówno jeden, jak i drugi sposób.

Np. równanie czyste

$$4x^2=9$$

możemy tak napisać:

$$4x^2-9=0,$$

albo: $$(2x-3)(2x+3)=0,$$

a więc: $$2x-3=0, \text{ lub } 2x+3=0,$$

skąd: $$x_1=\frac{3}{2};\ x_2=-\frac{3}{2}.$$

Jeżeli zaś do równania niezupełnego

$$25x^2+10x=0,$$

zechcemy zastosować pierwszy sposób, to przekształcimy je tak, ażeby z lewej strony otrzymać kwadrat dwumianu:

$$25x^2+2\cdot 5x+1=1,$$

skąd $$(5x+1)^2=1,$$

a więc: $$5x+1=1, \text{ albo } 5x+1=-1,$$

czyli: $$x_1=0;\ x_2=-\frac{2}{5}.$$

93. Przechodzimy teraz do rozwiązywania równań zupełnych stopnia drugiego.

Jeżeli $x+\frac{a}{2}$ pomnożymy przez tęż samą ilość, otrzymamy:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)=x^2+2\frac{ax}{2}+\frac{a^2}{4}=x^2+ax+\frac{a^2}{4}.$$

Widzimy więc, że $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$ jest zupełnym kwadratem, gdyż jest to kwadrat ilości $x+\frac{a}{2}\cdot$ Stąd wypada, że dwumian x^2+ax staje się kwadratem zupełnym przez dodanie do niego $\frac{a^2}{4}$, to jest przez *dodanie kwadratu połowy spółczynnika przy x*. Fakt ten stanowi główną podstawę rozwiązania równania zupełnego stopnia drugiego. Objaśnimy to kilkoma przykładami.

Weźmy np. x^2+6x; tutaj połową spółczynnika przy x jest 3; dodając do tego dwumianu 3^2, otrzymamy x^2+6x+3^2, a to jest $(x+3)^2$.

x^2-5x; tutaj połową spółczynnika przy x jest $-\frac{5}{2}$, dodając $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$, czyli $\left(\frac{5}{2}\right)^2$, otrzymamy $x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2$, a to jest $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$.

$x^2-\frac{4x}{5}$; tutaj połową spółczynnika przy x jest $-\frac{2}{5}$; dodając $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ otrzymamy $x^2-\frac{4x}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2$, a to jest $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2$.

$x^2-\frac{3x}{4}$; tutaj połową spółczynnika przy x jest $-\frac{3}{8}$; dodając $\left(-\frac{3}{8}\right)^2$, czyli $\left(\frac{3}{8}\right)^2$, otrzymamy $x^2-\frac{3x}{4}+\left(\frac{3}{8}\right)^2$, co znowuż jest równe $\left(x-\frac{3}{8}\right)^2$.

Działanie, objaśnione temi przykładami, nazywa się *dopełnieniem do kwadratu.*

94. Prawidło na rozwiązanie równania zupełnego stopnia drugiego jest następujące:

Należy najprzód równanie przyprowadzić do takiej postaci, aby na pierwszej stronie były tylko wyrazy zawierające niewiadomą, i aby spółczynnik przy x^2 był równy 1; następnie dodać do każdej strony równania kwadrat połowy spółczynnika przy x i wyciągnąć z obu stron pierwiastek kwadratowy. Przez porównanie pierwiastków dostaniemy dwa równania stopnia *pierwszego, których rozwiązania czynią zadość danemu równaniu kwadratowemu.*

95. Rozwiązać równanie:

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Przenosimy wyraz wiadomy 24 na drugą stronę:

$$x^2 - 10x = -24;$$

dodając do obu stron równania po $\left(\frac{10}{2}\right)^2$, otrzymamy:

$$x^2 - 10x + 5^2 = -24 + 25 = 1.$$

Wyciągnijmy teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron równania; znajdziemy:

$$x - 5 = \pm 1,$$

a następnie: $x = 5 \pm 1,$ czyli:

$$x = \text{albo } 5 + 1, \text{ albo } 5 - 1;$$

skąd: $x_1 = 6;\ x_2 = 4.$

Łatwo się przekonać, że każda z tych wartości zadosyć czyni danemu równaniu, i zalecamy uczącemu się sprawdzać zawsze otrzymane wartości przez podstawienie ich w danem równaniu.

96. Rozwiązać:

$$3x^2 - 4x - 55 = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$3x^2 - 4x = 55,$$

dzieląc przez 3 obie strony równania, otrzymamy;

$$x^2 - \frac{4x}{3} = \frac{55}{3};$$

dodając do obu stron po $\left(\frac{2}{3}\right)^2$:

$$x^2 - \frac{4x}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{55}{3} + \frac{4}{9} = \frac{169}{9};$$

wyciągając pierwiastki kwadratowe:

$$x - \frac{2}{3} = \pm \frac{13}{3};$$

skąd: $$x = \frac{2}{3} \pm \frac{13}{3};$$

czyli: $$x_1 = 5;\ x_2 = -\frac{11}{3}.$$

97. Rozwiązać:

$$2x^2 + 3x - 35 = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$2x^2 + 3x = 35,$$

dzieląc następnie przez 2:

$$x^2 + \frac{3x}{2} = \frac{35}{2};$$

i dodając $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, otrzymamy:

$$x^2 + \frac{3x}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{35}{2} + \frac{9}{16} = \frac{289}{16}.$$

Wyciągając teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron, dostaniemy:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{17}{4},$$

skąd: $$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{17}{4},$$

czyli: $$x_1 = \frac{7}{2};\ x_2 = -5.$$

98. Rozwiązać:

$$x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Po przeniesieniu wyrazu wiadomego będzie:

$$x^2 - 4x = 1;$$

dodajemy teraz do obu stron równania 2^2; otrzymamy:

$$x^2 - 4x + 2^2 = 1 + 4 = 5,$$

skąd, po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego, znajdziemy:

$$x - 2 = \pm \sqrt{5};$$

a następnie:

$$x = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Tutaj pierwiastek kwadratowy z 5 nie może być znaleziony dokładnie; — w każdym razie zapomocą sposobu podanego w § 38 możemy oznaczyć wartość przybliżoną tego pierwiastka do takiego stopnia dokładności, do jakiego chcemy, a tem samem i wartość na x może być oznaczona z takim stopniem przybliżenia, z jakim chcemy.

99. W przykładach dotychczas rozwiązanych znajdywaliśmy zawsze dwa różne pierwiastki równania stopnia drugiego; są jednak pewne przypadki, w których otrzymujemy w rzeczywistości jeden tylko pierwiastek. Weźmy jako przykład równanie:

$$x^2 - 14x + 49 = 0.$$

Rozkładając lewą stronę na czynniki, dostaniemy:

$$(x - 7)(x - 7) = 0.$$

Oba równania stopnia pierwszego do których sprowadza się rozwiązanie, mają ten sam pierwiastek 7.

Mówimy w tym przypadku, że równanie stopnia drugiego ma *dwa pierwiastki równe.*

100. Rozwiązać:

$$x^2 - 6x + 13 = 0.$$

Przenosimy wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$x^2 - 6x = -13;$$

dodając po 3^2 do obu stron:

$$x^2 - 6x + 3^2 = -13 + 9 = -4,$$

czyli:

$$(x - 3)^2 = -4.$$

Ponieważ jednak niema ani liczby dodatniej, ani ujemnej, której kwadrat równałby się -4, przeto równanie nie może być rozwiązane.

101. Rozwiązać równanie:

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{1}{4}.$$

Przenieśmy wszystkie wyrazy na pierwszą stronę i sprowadźmy do wspólnego mianownika $4(x^2-1)$, który jest najmniejszą wspólną wielokrotną względem danych mianowników. Otrzymamy:

$$\frac{-x^2+2x+15}{4(x^2-1)}=0,$$

a po pomnożeniu obu stron przez -4:

$$\frac{x^2-2x-15}{x^2-1}=0.$$

Ułamek z lewej strony jest zerem, jeżeli jego licznik jest zerem a mianownik od 0 różny. Zakładamy więc:

$$x^2-2x-15=0.$$

Przenosząc wyrazy, zawierające niewiadoma na pierwszą, a wyrazy wiadome na drugą stronę:

$$x^2-2x=15;$$

dodając po 1^2 do obu stron:

$$x^2-2x+1=15+1=16;$$

a wyciągając pierwiastek kwadratowy z obu stron, dostaniemy:

$$x-1=\pm 4,$$

skąd:

$$x=1\pm 4;$$

czyli:

$$x_1=5;\ x_2=-3.$$

Mianownik x^2-1 jest w pierwszym przypadku $25-1=24$, w drugim $9-1=8$, a więc w każdym razie różny od zera.

102. Rozwiązać równanie:

$$\frac{2x}{15}+\frac{3x-50}{3(10+x)}=\frac{12x+70}{190}.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez 570, to jest przez najmniejszą wspólną wielokrotną liczb 15 i 190; będzie:

$$76x+\frac{190(3x-50)}{10+x}=3(12x+70),$$

skąd:

$$\frac{190(3x-50)}{10+x}=210-40x,$$

a następnie:

$$\frac{190(3x-50)-(210-40x)(10+x)}{10+x}=0$$

czyli:

$$\frac{570x-9500-2100+190x+40x^2}{10+x}=0.$$

Czyniąc licznik zerem, znajdziemy:

$$40x^2+760x=11600;$$

dzieląc obie strony równania przez 40:

$$x^2+19x=290.$$

Dodajmy teraz do obu stron po $\left(\frac{19}{2}\right)^2$; otrzymamy:

$$x^2+19x+\left(\frac{19}{2}\right)^2=290+\frac{361}{4}=\frac{1521}{4},$$

a wyciągając z obu stron pierwiastki kwadratowe:

$$x+\frac{19}{2}=\pm\frac{39}{2},$$

skąd:

$$x=-\frac{19}{2}\pm\frac{39}{2},$$

i nakoniec: $x_1=10;\ x_2=-29.$

Żadna z tych dwóch wartości nie czyni mianownika $10+x$ zerem, obie są więc rozwiązaniami równania.

103. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}.$$

Przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę i sprowadzając do wspólnego mianownika

$$(x+2)(x-2)(x-1),$$

otrzymamy w liczniku:

$$(x+3)(x-2)(x-1)+(x-3)(x+2)(x-1)+$$
$$-(2x-3)(x+2)(x-2),$$

skąd przez wykonanie wskazanych mnożeń:

$$x^3-7x+6+x^3-2x^2-5x+6-2x^3+3x^2+8x-12,$$

czyli: $x^2-4x.$

Uczyńmy: $x^2-4x=0.$

Dodając do obu stron równania po 2^2, będziemy mieli:

$$x^2 - 4x + 2^2 = 4,$$

wyciągając zaś pierwiastki kwadratowe, znajdziemy:

$$x - 2 = \pm 2.$$

Stąd nakoniec:

$$x = 2 \pm 2,$$

czyli: $x_1 = 4;\ x_2 = 0.$

Żadna z tych wartości nie czyni mianownika zerem.

Działanie zawarte w ostatnich wierszach podaliśmy dlatego, aby przedstawić rozwiązanie równania w ten sam sposób, w jaki rozwiązywaliśmy poprzednie przykłady; — lecz rozwiązanie w tym przypadku może być znalezione prościej. W rzeczy samej: równanie $x^2 - 4x = 0$ może być tak napisane:

$$x(x - 4) = 0;$$

a ponieważ pierwsza strona jest iloczynem z dwóch czynników który ma być równym zeru, przeto widoczne jest, że musi być albo $x - 4 = 0$, lub $x = 0$; czyli albo $x = 4$, albo też $x = 0$.

104. *Każde równanie stopnia drugiego może być sprowadzone do postaci $x^2 + px + q = 0$, gdzie p i q są liczbami wiadomemi, całkowitemi lub ułamkowemi, dodatniemi lub ujemnemi.*

W tym celu należy tylko równanie dane sprowadzić do ogólnej postaci (§ 91) i, w razie potrzeby, podzielić obie strony przez spółczynnik kwadratu niewiadomej, włączając znak do spółczynnika.

Naprzykład: przypuśćmy, że mamy równanie:

$$7x - 4x^2 = 5.$$

Będzie najprzód:

$$7x - 4x^2 - 5 = 0,$$

następnie:

$$4x^2 - 7x + 5 = 0;$$

dzieląc obie strony równania przez 4:

$$x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{4} = 0.$$

W tym więc przykładzie $p = -\frac{7}{4}$, $q = \frac{5}{4}$.

105. Rozwiązać równanie:

$$x^2+px+q=0.$$

Przez przeniesienie wyrazu wiadomego mamy:

$$x^2+px=-q.$$

Dodajmy po $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ do obu stron; otrzymamy:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2-4q}{4}.$$

Wyciągnijmy z obu stron pierwiastki kwadratowe; będzie:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

skąd: $$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

co można też tak napisać:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad \text{I}$$

106. Tym sposobem otrzymaliśmy *wzór ogólny* na pierwiastki równania stopnia drugiego $x^2+px+q=0$, mianowicie x musi być równe:

$$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ lub } \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \qquad \text{II}$$

Z tych wzorów ogólnych wyprowadzimy teraz kilka bardzo ważnych wniosków, które na zasadzie § 104 dotyczą każdego równania stopnia drugiego.

107. *Równanie stopnia drugiego nie może mieć więcej niż dwa pierwiastki.*

O tem możemy się przekonać, jeżeli do rozwiązania równania

$$x^2+px+q=0$$

zastosujemy drugi sposób § 92, polegający na rozłożeniu lewej strony na czynniki pierwsze.

W tym celu uzupełnijmy dwumian x^2+px do kwadratu, dodając $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ i odejmując tę samą wielkość od q:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0,$$

co można tak napisać:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0,$$

albo:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=0,$$

gdyż działania wyciągania pierwiastka i podnoszenia do kwadratu znoszą się. Tym sposobem lewą stronę równania przed stawiliśmy pod postacią różnicy kwadratów dwóch wielkości, możemy więc rozłożyć ją na iloczyn sumy i różnicy pierwszych potęg tych wielkości:

$$\left[x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right]\cdot\left[x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right]=-0.$$

Iloczyn dwóch czynników może być zerem tylko wtedy, jeżeli przynajmniej jeden z tych czynników jest zerem, gdyż gdyby oba były od 0 różne, wtedy ten iloczyn byłby dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy te czynniki mają znaki jednakowe, czy różne; a więc lewa strona równania danego może się stać zerem tylko wtedy, jeżeli albo

$$x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0, \text{ albo: } x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0.$$

108. *W równaniu stopnia drugiego, w którem wszystkie wyrazy są przeniesione na jedną stronę, a spółczynnik przy niewiadomej w stopniu drugim jest równy jedności, suma pierwiastków jest równa spółczynnikowi przy pierwszej potędze niewiadomej ze znakiem przeciwnym, iloczyn zaś pierwiastków równa się wyrazowi wiadomemu.*

Gdyż niech będzie dane równanie:

$$x^2 + px + q = 0;$$

wtedy suma pierwiastków będzie:

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ to jest } -p.$$

Iloczyn zaś pierwiastków jest:

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \times \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

co się równa: $\frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4}$.

czyli: q.

109. Paragraf poprzedni zasługuje na szczególną uwagę; przedstawia bowiem bardzo dobry przykład i natury ogólnych wyników algebry i zarazem sposobów, jakiemi do tych ogólnych wyników dochodzimy. Uczący się powinien sprawdzić te twierdzenia na wszystkich przykładach równań stopnia drugiego dotychczas rozwiązanych.

Tak np. weźmy zadanie § 96; równanie tam podane może być przedstawione pod postacią:

$$x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{55}{3} = 0;$$

pierwiastki jego są: 5 i $-\frac{11}{3}$; suma ich wynosi $\frac{4}{3}$, iloczyn zaś $-\frac{55}{3}$.

110. Rozwiązać równanie:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę, mamy:

$$ax^2 + bx = -c;$$

dzieląc obie strony równania przez a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a};$$

dodając do obu stron równania po $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Wyciągnijmy teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron równania:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

przeto:
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

111. Wzory ogólne, podane w §§ 105 i 110, mogą być użyte do rozwiązania jakiegokolwiek równania stopnia drugiego. Weźmy jako przykład równanie: $3x^2-4x-55=0$; podzielmy obie jego strony przez 3:

$$x^2-\frac{4x}{3}-\frac{55}{3}=0.$$

Uczyńmy teraz we wzorze § 105, który daje wartości pierwiastków równania $x^2+px+q=0$, $p=-\frac{4}{3}$ i $q=-\frac{55}{3}$; otrzymamy po wykonaniu działań pierwiastki danego równania.

Lecz dogodniejszą jest rzeczą użyć wprost wzoru § 110, tym sposobem bowiem unikamy ułamków. Ponieważ dane równanie jest: $3x^2-4x-55=0$, przeto we wzorze, dającym wartości pierwiastków równania $ax^2+bx+c=0$, należy uczynić $a=3$, $b=-4$, i $c=-55$. Wykonywając te podstawienia w wyrażeniu:

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

mieć będziemy takie wartości na x:

$$\frac{4\pm\sqrt{16+660}}{6},\ \text{czyli:}\ \frac{4\pm\sqrt{676}}{6},$$

to jest
$$\frac{4\pm 26}{6},\ \text{albo: } 5 \text{ i } -\frac{11}{3}.$$

Jeszcze dogodniej, uwzględniając, że w naszym przykładzie spółczynnik b jest liczbą parzystą, podzielić we wzorze ogólnym licznik i mianownik przez 2:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

i podstawić:
$$\frac{b}{2} = 2.$$

112. Oznaczając przez x_1 i x_2 oba pierwiastki równania: $x^2 + px + q = 0$, możemy napisać:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

W obu tych wyrażeniach jest znak pierwiastka kwadratowego; wielkość podpierwiastkowa

$$p^2 - 4q$$

nazywa się *wyróżnikiem* danego równania.

Wyróżnik może być dodatni, ujemny, lub 0, zależnie od tego, czy p^2 jest większe, mniejsze, czy równe $4q$. Tak np. w równaniu § 95:

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

jest $p = -10$; $q = 24$, a więc $p^2 - 4q = 100 - 96 = 4 > 0$; w równaniu § 100:

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$p = -6;\ q = 13;\ p^2 - 4q = 36 - 52 = -16 < 0;$$

wreszcie w równaniu § 99:

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$

$$p = -14;\ q = 49;\ p^2 - 4q = 196 - 196 = 0.$$

W pierwszym przypadku otrzymujemy dwa rozwiązania, które muszą być różne, gdyż jedno jest sumą, drugie różnicą tych samych wielkości; w drugim rozwiązanie jest niemożliwe, w trzecim dostajemy dwa rozwiązania równe.

Jeżeli spółczynniki równania są wymierne, to rozwiązania są wymierne lub nie, zależnie od tego, czy wyróżnik jest czy nie jest kwadratem zupełnym.

113. Przy zachowaniu tych samych oznaczeń, własności pierwiastków równania stopnia drugiego dowiedzione w § 108, mogą być tak wyrażone:

$$x_1 + x_2 = -p; \; x_1 x_2 = q.$$

Własności te mają częste i ważne zastosowania.

Pokażemy dwa z nich:

Najprzód na zasadzie tych własności można ułożyć równanie stopnia drugiego, którego pierwiastki są dane. Tak np. przypuśćmy, że chcemy napisać takie równanie stopnia drugiego, którego pierwiastkami byłyby liczby 5 i 3. Równanie to będzie miało taką postać: $x^2 + px + q = 0$, gdzie zamiast p i q należy podstawić odpowiednie liczby. Ponieważ, podług własności przytoczonej wyżej, suma pierwiastków równania równa się spółczynnikowi przy x, wziętemu ze znakiem przeciwnym, przeto p powinno być takie, aby było:

$$5 + 3 = -p,$$

skąd:

$$p = -8.$$

I dalej: ponieważ trzeci wyraz q pierwszej strony powinien być równym iloczynowi pierwiastków, przeto będzie:

$$q = 5 . 3 = 15.$$

Jeżeli więc utworzymy równanie takie:

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

to jeden jego pierwiastek będzie 5, drugi zaś 3, o czem łatwo się przekonać przez podstawienie 5 i 3 zamiast x.

Gdybyśmy chcieli ułożyć równanie takie, którego pierwiastkami byłyby 3 i -3, wtedy mielibyśmy:

$$p = -(3 - 3) = 0; \; q = 3 . -3 = -9,$$

i żądane równanie byłoby:

$$x^2 + 0 . x - 9 = 0,$$

czyli:

$$x^2 - 9 = 0.$$

Gdyby pierwiastki równania miały być równe $\frac{1}{3}$ i 0, wtedy byłoby

$$p = -\left(\frac{1}{3} + 0\right) = -\frac{1}{3};$$

$$q = \frac{1}{3} \times 0 = 0,$$

i równanie szukane przedstawiłoby się tak:

$$x^2 - \frac{1}{3}x + 0 = 0,$$

czyli: $$3x^2 - x = 0.$$

W podobny sposób należałoby postępować w każdym innym przypadku.

Po wtóre: wymienione własności służą do prostego rozwiązania zadania następującego, które często przytrafia się w algebrze. *Mając daną sumę i iloczyn dwóch liczb, znaleźć te liczby.*

Przypuśćmy np., że chcemy znaleźć dwie liczby, których suma równałaby się 10, a iloczyn 21. Gdybyśmy ułożyli takie równanie kwadratowe, w którem spółczynnik przy x byłby równy -10, a ilość wiadoma q byłaby równą 21, to jest równanie takie:

$$x^2 - 10x + 21 = 0,$$

wtedy na zasadzie własności pierwiastków równania stopnia drugiego, suma pierwiastków tego równania równałaby się 10, iloczyn zaś byłby równym 21. Pierwiastki zatem jego byłyby szukanemi liczbami. Rozwiązując to równanie, znajdziemy:

$$x_1 = 7;\ x_2 = 3.$$

Szukane liczby są więc 7 i 3.

I w ogólności, ażeby rozwiązać takie zadanie: znaleźć dwie liczby, których suma byłaby równą m, a iloczyn n, należałoby ułożyć równanie:

$$x^2 - mx + n = 0,$$

i równanie to rozwiązać; wtedy jeden z jego pierwiastków byłby równym jednej z liczb szukanych, drugi zaś stanowiłby drugą liczbę. Pierwiastki tego równania są.

$$x_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2 - 4n}{4}},$$

$$x_2 = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2 - 4n}{4}},$$

czyli:

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2},$$

$$x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}.$$

Powyższe wzory nietylko dają nam rozwiązanie uważanego zadania we wszystkich przypadkach, ale nadto zawierają w sobie i rozwiązanie takiego zadania. *Daną liczbę m podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był równy n.* Widoczną jest rzeczą, że zadanie to sprowadza się bezpośrednio do poprzedniego, gdyż suma tych dwóch szukanych części jest równą danej liczbie m, i iloczyn ich jest wiadomy n. Części te zatem są dane jako wartości x_1 i x_2 wyżej znalezione.

Użycie powyższych wzorów objaśniają następne przykłady:

Liczbę 10 podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był równy 16.

Rozwiązując równanie: $x^2 - 10x + 16 = 0$, znajdziemy:

$$x_1 = 5 + \sqrt{25 - 16} = 8,$$
$$x_2 = 5 - 3 = 2.$$

Więc jedna z szukanych części jest 8, druga zaś 2.

Tęż samą liczbę 10 podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był 24.

Równanie do rozwiązania będzie:

$$x^2 - 10x + 24 = 0,$$

które rozwiązując, znajdziemy szukane części 6 i 4.

Gdybyśmy jeszcze tęż samą liczbę 10 chcieli podzielić na takie dwie części, których iloczyn byłby 25, wtedy rozwiązując równanie:

$$x^2 - 10x + 25 = 0,$$

znaleźlibyśmy, że szukane części są 5 i 5. Lecz gdybyśmy chcieli tęż samą liczbę 10 podzielić na takie dwie części, których iloczyn byłby większym od 25, np. 26, wtedy rozwiązując równanie: $x^2 - 10x + 26 = 0$, otrzymalibyśmy wyróżnik ujemny

$$100 - 104 = -4,$$

co pokazuje, że nie można liczby 10 podzielić na takie części, któreby zadosyć czyniły warunkowi, aby iloczyn ich był 26. Z tego widzimy, że liczby 10 nie można podzielić na takie dwie części, których iloczyn byłby większy od 25.

Do tego samego wyniku dochodzimy, rozważając ogólne równanie, rozwiązujące nam to zadanie we wszystkich przypadkach, mianowicie: $x^2 - mx + n = 0$. Pierwiastki tego równania są rzeczywiste, jeżeli ilość pod znakiem pierwiastka $\frac{m^2}{4} - n$ nie jest ujemną, czyli jeżeli n nie jest większe od $\frac{m^2}{4} = \left(\frac{m}{2}\right)^2$. Największą więc wartością na n może być $\left(\frac{m}{2}\right)^2$. Stąd wyprowadzamy taki wniosek: największy iloczyn z dwóch części, stanowiących daną liczbę, jest wtedy, gdy obie te części są równe, to jest gdy każda jest połową danej liczby.

114. Wyrażenie postaci $ax^2 + bx + c$ nazywamy *trójmianem stopnia drugiego względem x.* Wyprowadzając a za nawias, możemy mu nadać postać: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Oznaczywszy tutaj dla krótkości $\frac{b}{a}$ jedną głoską p, a $\frac{c}{a}$ jedną głoską q, będziemy mieli:

$$ax^2 + bx + c = a\ (x^2 + px + q).$$

Widzieliśmy w § 107, że trójmian $x^2 + px + q$ można rozłożyć na dwa czynniki:

$$\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\ \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right),$$

jeżeli więc przez x_1, x_2 oznaczymy pierwiastki równania $x^2 + px + q = 0$, w założeniu, że wyróżnik jego nie jest ujemny, to:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{2} - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

a więc:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Równość ta jest tożsamością, jest więc prawdziwa dla wszystkich wartości x. Wyrazić ją można słowami tak: *Trójmian stopnia drugiego $x^2 + px + q$, w którym $p^2 - 4q \geqslant 0$, jest równy iloczynowi dwóch czynników stopnia pierwszego: jednym z tych czynników jest x mniej jeden pierwiastek równania, otrzymanego przez przyrównanie danego trójmianu do zera; drugi zaś — jest toż samo x mniej drugi pierwiastek tego samego równania.* Podług tego trójmian $ax^2 + bx + c$ może być tak wyrażony:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$, gdyż równanie to ma te same pierwiastki, co i równanie poprzednio rozpatrywane, a które można otrzymać, dzieląc obie strony przez a.

1-szy przykład: trójmian $3x^2 - 15x + 18$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego:

$$3x^2 - 15x + 18 = 3(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania:

$$3x^2 - 15x + 18 = 0,$$

lub:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 2;$$

zatem: $$3x^2 - 15x + 18 = 3(x - 3)(x - 2),$$

o czem łatwo się można przekonać przez bezpośrednie mnożenie, co uczący się powinien wykonać.

2-gi przykład: Trójmian $6x^2 - 5x - 6$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego:

$$6x^2 - 5x - 6 = 6(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania:

$$6x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Rozwiązując je, znajdziemy:

$$x_1 = -\frac{2}{3};\quad x_2 = \frac{3}{2},$$

więc: $$6x^2 - 5x - 6 = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right),$$ czyli:

$$6x^2 - 5x - 6 = (3x + 2)\,(2x - 3).$$

3-ci przykład: Trójmian: $x^2 - 8x + 16$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego:

$$x^2 - 8x + 16 = (x - x_1)\,(x - x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania:

$$x^2 - 8x + 16 = 0.$$

Z rozwiązania tego równania mieć będziemy:

$$x_1 = 4 \text{ i } x_2 = 4;$$

zatem:

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)\,(x - 4) = (x - 4)^2,$$

co i bezpośrednio jest widoczne.

4-ty przykład: Trójmian: $x^2 + 10x + 34$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego:

$$x^2 + 10x + 34 = (x - x_1)\,(x - x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 znaleźlibyśmy rozwiązując równanie:

$$x^2 + 10x + 34 = 0.$$

Ponieważ jednak wyróżnik tego równania $100 - 136 = -36$ jest ujemny, przeto rozkładu żądanego wykonać nie możemy.

ZADANIA VIII.

1. $2(x^2 - 7) + 3(x^2 - 11) = 33.$
2. $(x - 15)\,(x + 15) = 400.$
3. $\frac{x^2 - 24}{5} + \frac{x^2 - 37}{4} = 8.$
4. $x^2 - 3x + 2 = 0.$
5. $2x^2 - 1 = 5x + 2.$
6. $3x^2 - 4x = 39.$
7. $4(x^2 - 1) = 4x - 1$
8. $x + \frac{1}{x - 3} = 5.$
9. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x + 5} = 6\frac{5}{7}.$

10. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{9}{5}$.

11. $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2$.

12. $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1$.

13. $\frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}$.

14. $(x+10)^2=144(100-x^2)$.

15. $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{14}{x+4}$.

16. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{5x-11}{x-1}$.

17. $x-\frac{14x-9}{8x-3}=\frac{x^2-3}{x+1}$.

18. $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0$.

19. $4a^2x=(a^2-b^2+x)^2$.

20. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$.

21. $(x+a+b)(x-a+b)+(x+a-b)(x-a-b)=0$.

22. $(a+bx)(b-ax)+(b+cx)(c-bx)+(c+ax)(a-cx)=0$.

23. $\frac{x-a}{x+1}+\frac{x+a}{x-1}=2c$.

24. $\frac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$.

25. $(3x-4)^2+5(3x-4)=14$.

26. $(0{,}2x-3)^2-4(0{,}2x-3)=-3$.

27. Wyrażenia: $x^2-1\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; x^3+10x^2+21x rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

IX.

Równania dające się sprowadzić do równań stopnia drugiego.

115. Są pewne równania, które nie będąc właściwie równaniami stopnia drugiego, dają się jednak rozwiązać sposobem *dopełnienia do kwadratu.*

Podamy tutaj dwa przykłady takich równań.

116. Rozwiązać równanie: $x^6-7x^3=8$.

Dodajmy do obu stron równania po $\left(\frac{7}{2}\right)^2$; będzie:

$$x^6 - 7x^3 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 8 + \frac{49}{4} = \frac{81}{4};$$

wyciągając z obu stron pierwiastki kwadratowe, otrzymamy:

$$x^3 - \frac{7}{2} = \pm\frac{9}{2},$$

skąd:

$$x^3 = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}, \text{ to jest: } x^3 = 8, \text{ lub: } x^3 = -1.$$

Nakoniec przez wyciągnięcie pierwiastka sześciennego znajdziemy: $x = 2$, lub $x = -1$.

117. Rozwiązać równanie:

$$x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 6.$$

Odejmijmy od obu stron równania po 2; będzie:

$$x^2 + 3x - 2 + 3\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 4.$$

Na pierwszej stronie równania otrzymaliśmy dwa wyrażenia: $\sqrt{x^2 + 3x - 2}$ i $x^2 + 3x - 2$, z których ostatnie jest kwadratem pierwszego.

Możemy teraz pierwszą stronę *dopełnić do kwadratu.* W tym celu dodajmy do obu stron po $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; mieć będziemy:

$$x^2 + 3x - 2 + 3\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}.$$

Wyciągając pierwiastki kwadratowe z obu stron, będziemy mieli:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2},$$

skąd:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2},$$ czyli:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 1 \text{ lub } = -4.$$

Przyjmijmy najprzód, że:

$$\sqrt{x^2+3x-2}=1.$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu; będzie:

$$x^2+3x-2=1.$$

Lecz to jest zwyczajne równanie stopnia drugiego, które rozwiązując, znajdziemy:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Przyjmijmy po wtóre, że:

$$\sqrt{x^2+3x-2}=-4.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, mieć będziemy:

$$x^2+3x-2=16.$$

To jest znowuż równanie stopnia drugiego, które rozwiązując znajdziemy:

$$x=3, \text{ lub } x=-6.$$

Tym sposobem otrzymaliśmy ostatecznie cztery wartości dla x, a mianowicie:

$$3, \quad -6, \quad \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Musimy tutaj zrobić ważną uwagę, odnoszącą się do tych wartości. Przypuśćmy, że chcemy rozwiązania sprawdzić. Jeżeli zamiast x podstawimy 3, wtedy znajdujemy, że $x^2+3x-2=16$, a więc: $\sqrt{x^2+3x-2}=\pm 4$. Jeżeli weźmiemy wartość $+4$, wtedy dane początkowo równanie nie będzie sprawdzone; — jeżeli zaś weźmiemy wartość -4, wtedy będzie ono sprawdzone. Podobnież jeżeli dalej podstawimy $x=-6$, wtedy przyjdziemy do tegoż samego wyniku. Można było przewidzieć oba te wyniki gdyż wartości $x=3$, lub $x=-6$ były znalezione z równania $\sqrt{x^2+3x-2}=-4$, które to równanie było znowuż otrzymane z równania początkowego. Gdybyśmy teraz uczynili $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$, wtedy mielibyśmy $x^2+3x-2=1$, początkowe równanie będzie sprawdzone, gdy weźmiemy $\sqrt{x^2+3x-2}=+1$. Znalezione wartości sprawdzają więc dwa następujące równania:

$$x^2+3x-3\left|\sqrt{x^2+3x-2}\right|=6,$$

i:

$$x^2+3x+3\left|\sqrt{x^2+3x-2}\right|=6,$$

przyczem wartości 3 i — 6 należą tylko do pierwszego równania, wartości zaś $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ należą tylko do drugiego równania.

118. Mogą się przytrafić takie równania, które należy, po odpowiedniem przeniesieniu wyrazów, raz lub kilka razy podnieść do kwadratu, zanim zostaną one sprowadzone do równania stopnia drugiego. Stosując tę metodę, należy jednak uwzględnić, że jak widzieliśmy w poprzednim §, *podnosząc obie strony równania do kwadratu, dostajemy nowe równanie, któremu wprawdzie czynią zadość wszystkie pierwiastki równania danego, ale które może mieć oprócz tego i inne pierwiastki*, sprawdzenie jest więc niezbędne [1]).

119. Rozwiązać równanie:

$$2x-\sqrt{x^2-3x-3}=9.$$

---

[1]) Można to wytłumaczyć w taki sposób: jeżeli równanie

$$A=B,$$

w którem A i B są jakiemikolwiek wyrażeniami algebraicznemi zawierającemi x, podnosimy do kwadratu:

$$A^2=B^2,$$

to znaczy, że zamiast równania

$$A-B=0$$

rozwiązujemy równanie:

$$A^2-B^2=0.$$

To ostatnie można jednak tak napisać:

$$(A+B)(A-B)=0.$$

Ażeby to równanie było spełnione, wystarcza, aby jeden z czynnników $A+B$ lub $A-B$ był równy 0, widoczną jest więc rzeczą, że wszystkie pierwiastki równania danego czynią ostatniemu zadość. Nie można jednak odwrotnie wnosić, że pierwiastki równania

$$A^2-B^2=0$$

czynią zadość danemu, gdyż można natrafić na takie wartości x, które jedynie pierwszy czynnik, $A+B$, czynią równym 0.

Przenieśmy wyraz zawierający pierwiastek na drugą, a 9 na pierwszą stronę równania:

$$2x - 9 = \sqrt{x^2 - 3x - 3};$$

podnieśmy obie strony do kwadratu; otrzymamy:

$$4x^2 - 36x + 81 = x^2 - 3x - 3;$$

przenieśmy wszystkie wyrazy na pierwszą stronę:

$$3x^2 - 33x + 84 = 0,$$

czyli, po podzieleniu wszystkich wyrazów przez 3:

$$x^2 - 11x + 28 = 0.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy: $x = 7$ lub $x = 4$. Wartość 7 zadosyć czyni danemu równaniu; wartość 4 należy do równania $2x + \sqrt{x^2 - 3x - 3} = 9$.

120. Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{8x+9}.$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu:

$$x + 4 + 2x + 6 + 2\sqrt{(x+4)(2x+6)} = 8x + 9;$$

przenieśmy następnie wyrazy równania tak, aby na jednej stronie została tylko ilość pierwiastkowa sama, na drugiej zaś reszta wyrazów; — po zrobieniu uproszczeń będzie:

$$2\sqrt{(x+4)(2x+6)} = 5x - 1.$$

Podnieśmy znowuż obie strony do kwadratu; otrzymamy:

$$4(x+4)(2x+6) = 25x^2 - 10x + 1,$$

to jest:
$$8x^2 + 56x + 96 = 25x^2 - 10x + 1.$$

Przenosząc zaś wszystkie wyrazy na pierwszą stronę, dostaniemy:

$$17x^2 - 66x - 95 = 0.$$

Rozwiązując to równanie znajdziemy, że $x = 5$ lub $x = -\frac{17}{19}$.

Wartość pierwsza, t. j. 5, zadosyć czyni danemu równaniu: — druga zaś $-\frac{19}{17}$ należy do równania:

$$\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4} = \sqrt{8x+9},$$

które, przez dwukrotne podniesienie do kwadratu, prowadzi do tegoż samego równania, co i równanie dane.

121. Z poprzednich przykładów widać, że w tych przypadkach, w których należy podnosić do kwadratu, aby równanie sprowadzić do zwykłej postaci, — nigdy nie jesteśmy bez próby pewni, czy znalezione wartości na niewiadome są w samej rzeczy pierwiastkami danego równania.

Gdybyśmy np. mieli rozwiązać równanie:

$$\sqrt{x^2+x+1}+1=x,$$

to, postępując w podobny sposób, jak poprzednio, otrzymalibyśmy:

$$\sqrt{x^2+x+1}=x-1;$$

$$x^2+x+1=(x-1)^2=x^2-2x+1;$$

skąd: $$3x=0, \text{ czyli } x=0.$$

Wartość ta jednak nie sprawdza danego równania, a ponieważ (§ 118) *wszystkie* pierwiastki danego równania są zarazem pierwiastkami równania, otrzymanego przez podniesienie obu stron do kwadratu, zaś to ostatnie ma tylko pierwiastek 0, przeto równanie dane nie może mieć rozwiązań.

122. Niekiedy się przytrafia, że rozwiązanie równania danego może być ułatwione przez wprowadzenie pewnego uproszczenia, dającego się dostrzec na pierwszy rzut oka.

Następne dwa przykłady objaśnią, jakiego rodzaju są te uproszczenia.

123. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{9+x}{9-x}-\frac{9-x}{9+x}.$$

Sprowadźmy ułamki na każdej stronie równania do jednakowego mianownika; otrzymamy:

$$\frac{(x+4)^2-(x-4)^2}{x^2-16}=\frac{(9+x)^2-(9-x)^2}{81-x^2}$$

czyli: $$\frac{16x}{x^2-16}=\frac{36x}{81-x^2},$$

albo: $$\frac{16x}{x^2-16}-\frac{9x}{81-x^2}=0.$$

Widoczną jest rzeczą teraz, że $x=0$ jest pierwiastkiem równania.

Aby wynaleźć inne pierwiastki, opuszczamy ten czynnik i sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{4(81-x^2)-9(x^2-16)}{(x^2-16)(81-x^2)}=0$$

skąd: $$4(81-x^2)=9(x^2-16).$$

i dalej: $$13x^2=324+144=468,$$

to jest: $$x^2=36,$$

i nakoniec: $$x=\pm 6.$$

Tym sposobem widzimy, że równanie dane ma trzy pierwiastki: 0; 6 i —6, gdyż żaden z nich nie czyni mianownika zerem.

124. Rozwiązać równanie:

$$x^3-7xa^2+6a^3=0.$$

Tutaj także jest widocznem, że $x=a$ jest pierwiastkiem równania. Równanie to możemy przedstawić w tej postaci:

$$x^3-a^3=7a^2(x-a).$$

Aby wynaleźć inne pierwiastki, podzielmy obie jego strony przez $x-a$. Znajdziemy:

$$x^2+ax+a^2=7a^2.$$

Rozwiązując to równanie, które jest stopnia drugiego, otrzymamy $x=2a$, lub $x=-3a$. Stąd widzimy, że równanie dane ma trzy pierwiastki, a mianowicie: a, $2a$, $-3a$.

125. Podamy tu jeszcze najgłówniejsze przypadki, w których równania innych stopni mogą być bezpośrednio sprowadzone do równań stopnia drugiego.

Do równań stopnia drugiego mogą być sprowadzone wszystkie równania tak zwane *trójwyrazowe*.

Tak nazywamy równania stopnia parzystego takie, w których po przeniesieniu wszystkich wyrazów na pierwszą stronę i uproszczeniu, znajdować się będą tylko trojakiego rodzaju wyrazy: wyraz zawierający niewiadomą w stopniu parzystym, wyraz zawierający niewiadomą w stopniu dwa razy mniejszym od poprzedniego i wyraz wiadomy. Przykład takiego równania mamy w § 116. Inne przykłady: $3x^4-2x^2+9=0$, jest równaniem trójwyrazowem stopnia 4-go; $x^8+5x^4-3=0$, jest równaniem trójwyrazowem stopnia 8-go, w § 116 jest przykład równania trójwyrazowego stopnia 6-go i t. d. Ogólna postać takiego równania jest:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

Rozwiązanie takich równań odrazu sprowadza się do rozwiązania równania stopnia 2-go przez uczynienie $x^n = y$. Wtedy: $x^{2n} = y^2$, i równanie dane zamieni się na następujące:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy wiadomym sposobem dwa pierwiastki y_1 i y_2. A że $x^n = y$, więc $x = \sqrt[n]{y}$. Stąd widzimy, że po rozwiązaniu równania $ay^2 + by + c = 0$, należy tylko z wartości znalezionej dla y wyciągnąć pierwiastek stopnia n. A ponieważ na y otrzymaliśmy dwie wartości, przeto: albo $x = \sqrt[n]{y_1}$, albo też $x = \sqrt[n]{y_2}$. Jeżeli więc możemy znaleźć pierwiastek potęgi n z y_1 i y_2, wtedy możemy otrzymać i wartości dla x.

Jako przykład tego rodzaju równań weźmiemy równanie trójwyrazowe stopnia 4-go.

Rozwiązać równanie:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Czyniąc: $x^2 = y$, skąd: $x^4 = y^2$, otrzymamy z powyższego równania:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy:

$$y_1 = 9;\ y_2 = 4.$$

Stąd: $x^2 = 9$, lub: $x^2 = 4$;

a zatem: $x = \pm\sqrt{9}$, lub: $x = \pm\sqrt{4}$.

Otrzymamy więc dla x następujące cztery wartości:

$$x_1 = 3;\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2.$$

Rozwiązać równanie:

$$x^4 - 12x^2 + 16 = 0.$$

Uczyńmy $x^2 = y$, wtedy: $x^4 = y^2$, i równanie powyższe zamieni się na:

$$y^2 - 12y + 16 = 0,$$

skąd:

$$y_1 = 6 + \sqrt{20},$$

$$y_2 = 6 - \sqrt{20}.$$

A zatem:

$$x^2 = 6 + \sqrt{20},$$

lub:

$$x^2 = 6 - \sqrt{20}.$$

Stąd znajdziemy następujące cztery wartości x:

$$x_1 = \sqrt{6 + \sqrt{20}},$$

$$x^2 = -\sqrt{6 + \sqrt{20}},$$

$$x_3 = \sqrt{6 - \sqrt{20}},$$

$$x_4 = -\sqrt{6 - \sqrt{20}}.$$

Wartości te przedstawiają się pod postacią wyrażeń rozważanych w § 85 i mogą być przekształcone zapomocą wzorów tam podanych. Stosując wzór:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

do przekształcenia wartości x_1, otrzymamy:

$$x_1 = \sqrt{5} + 1.$$

Podobnież znajdziemy:

$$x_2 = -\sqrt{5} - 1,$$

$$x_3 = \sqrt{5} - 1,$$

$$x_4 = -\sqrt{5} + 1.$$

126. Przez podobne podstawienie, jakiego użyliśmy do rozwiązania równania trójwyrazowego, można niejednokrotnie rozwiązywać i równania innego rodzaju, do których wchodzą wyrażenia pierwiastkowe, lub wykładniki ułamkowe. Tak np. przypuśćmy, że dane jest równanie:

$$\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} - 4 = 0.$$

Uczyńmy: $\sqrt[6]{x}=y$; wtedy: $\sqrt[3]{x}=y^2$; podstawiając te wartości w równaniu danem, dostaniemy:

$$y^2+3y-4=0,$$

skąd:

$$y_1=1;\ y_2=-4.$$

A że $\sqrt[6]{x}=y$, przeto dla x otrzymamy dwie następujące wartości:

$$x_1=y_1{}^6=1;\ x_2=y_2{}^6=4096,$$

z których pierwsza czyni zadość równaniu danemu.

127. Do równań stopnia drugiego mogą być sprowadzone równania *symetryczne* stopnia trzeciego, czwartego lub piątego.

Równaniem *symetrycznem* nazywamy równanie, w którem, po przeniesieniu wszystkich wyrazów na pierwszą stronę, uproszczeniu i uporządkowaniu wyrazów podług potęg malejących głoski x, otrzymamy na pierwszej stronie wielomian całkowity taki, że spółczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazów skrajnych są równe i ze znakami jednakowemi lub przeciwnemi, gdy wielomian jest stopnia nieparzystego; gdy zaś wielomian jest stopnia parzystego, wtedy spółczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazów skrajnych są równe i z jednakowemi znakami[1]).

Tak np. równanie:

$$3x^2+2x+3=0,$$

lub:

$$3x^2-2x+3=0,$$

jest symetryczne stopnia drugiego; równanie:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

jest równaniem symetrycznem stopnia czwartego i t. d.

128. Weźmy najprzód pod uwagę równanie symetryczne stopnia trzeciego:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0.$$

---

[1]) Wszakże gdy wielomian jest stopnia parzystego i brak w nim średniego wyrazu, będzie on symetrycznym i wtedy, gdy spółczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazów skrajnych są równe i ze znakami przeciwnemi, np.

$$ax^4+bx^3-bx-a=0.$$

Z pierwszego i ostatniego wyrazu możemy w niem wyłączyć za nawias a, z drugiego i trzeciego bx; będzie:

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0.$$

Ponieważ:

$$(x^3+1):(x+1)=x^2-x+1,$$

(patrz § 110, cz. I), przeto, wyłączając na pierwszej stronie $(x+1)$ za nawias, otrzymamy:

$$(x+1)[a(x^2-x+1)+bx]=0.$$

To ostatnie równanie pokazuje nam, że x powinno mieć taką wartość, aby iloczyn z dwóch czynników $x+1$ i $a(x^2-x+1)+bx$ był równym zeru. Lecz aby iloczyn z dwóch czynników stał się zerem, dostatecznem jest, aby jeden z czynników był zerem. Wartości więc na x, zadosyć czyniące powyższemu równaniu, będą takie, przy których albo:

$$x+1=0,$$

albo:

$$a(x^2-x+1)+bx=0.$$

Pierwsze równanie daje nam pierwszą wartość na x, mianowicie

$$x_1=-1;$$

z rozwiązania zaś drugiego równania, które można napisać tak:

$$ax^2-(a-b)x+a=0,$$

otrzymamy dwa inne pierwiastki:

$$x_2=\frac{a-b+\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a},$$

$$x_3=\frac{a-b-\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}.$$

W podobny sposób można rozwiązać równanie:

$$ax^3+bx^2-bx-a=0,$$

wyłączając $x-1$ za nawias ze strony pierwszej.

Mnożąc licznik i mianownik wyrażenia otrzymanego dla x_3 przez $a-b+\sqrt{b^2-2ab-3a^2}$, można się przekonać, że między x_2 i x_3 istnieje taki związek:

$$x_2=\frac{1}{x_3}.$$

129. Pokażemy teraz, jak można rozwiązywać równania symetryczne stopnia czwartego przez sprowadzanie ich do równań stopnia drugiego.

Ogólna postać takich równań jest:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Podzielmy obie strony tego równania przez x^2 [1]) i z wyrazów, mających jednakowe spółczynniki, wyłączmy te spółczynniki za nawias. Będzie:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Uczyńmy teraz:

$$x + \frac{1}{x} = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wtedy podnosząc obie strony równania (1) do kwadratu, otrzymamy:

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,$$

skąd:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

W równaniu więc danem możemy podstawić $y^2 - 2$ zamiast $x^2 + \frac{1}{x^2}$ i y zamiast $x + \frac{1}{x}$, przez co mieć będziemy:

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Równanie to jest stopnia drugiego; — rozwiązując je, znajdziemy dwie wartości dla y, mianowicie y_1 i y_2. Biorąc zamiast y w równaniu (1) kolejno y_1 i y_2, otrzymamy z tego równania dwa równania następujące:

$$x + \frac{1}{x} = y_1,$$

$$x + \frac{1}{x} = y_2.$$

---

[1]) Można to zrobić, ponieważ x w danem równaniu nie może być zerem.

Każde z nich jest równaniem stopnia drugiego, i da dwie wartości dla x. Tym sposobem otrzymamy cztery wartości x, zadosyć czyniące danemu równaniu.

Do tych pierwiastków, jakkolwiek ostatecznie nie oznaczyliśmy ich, możemy zastosować tęż samą uwagę, co do pierwiastków równania symetrycznego stopnia trzeciego. Mianowicie nie trudno się przekonać, że jeżeli m jest pierwiastkiem równania:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

wtedy i $\frac{1}{m}$ będzie także pierwiastkiem tego równania. W rzeczy samej: jeżeli m jest pierwiastkiem powyższego równania, to:

$$am^4 + bm^3 + cm^2 + bm + a = 0.$$

Lecz podstawiając $\frac{1}{m}$ zamiast x w wielomianie

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a,$$

znajdziemy, że wartość tego wielomianu będzie:

$$\frac{a + bm + cm^2 + bm^3 + am^4}{m^4},$$

co jest zerem z tej przyczyny, że licznik tego ułamka jest zerem podług założenia.

130. Nakoniec weźmy pod uwagę równanie symetryczne stopnia piątego:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

lub:
$$ax^5 - bx^4 + cx^3 - cx^2 + bx - a = 0.$$

Równania te można rozwiązać w ten sposób: Najprzód należy wyłączyć z wyrazu pierwszego i ostatniego a, z drugiego i piątego b, z trzeciego i czwartego c za nawias; będzie:

$$a(x^5 + 1) + b(x^4 + x) + c(x^3 + x^2) = 0,$$

lub:
$$a(x^5 - 1) - b(x^4 - x) + c(x^3 - x^2) = 0.$$

Następnie w równaniu pierwszej postaci można wyłączyć $(x + 1)$ za nawias, a w równaniu drugiej postaci $(x - 1)$ za nawias. Przyrównywając ten czynnik do zera, otrzymamy jeden pierwiastek równania. Pierwiastek ten będzie w pierwszym przypadku równy — 1, w drugim zaś 1. Pozostanie z każdego równania równanie symetryczne stopnia czwartego, które należy rozwiązać sposobem podanym wyżej.

131. Jeszcze jednej postaci równania stopnia czwartego dają się łatwo rozwiązać zapomocą równań stopnia drugiego.

Są to równania, które można sprowadzić do takiej postaci:

$$(x^2+ax)^2+p(x^2+ax)+q=0.$$

Czyniąc wtedy $y=x^2+ax$, otrzymamy równanie:

$$y^2+py+q=0,$$

z którego oznaczymy dwie wartości dla y: następnie zaś z równania $y=x^2+ax$ znajdziemy i wartości na x: wartości tych będzie cztery.

W praktyce aby poznać, czy równanie stopnia czwartego da się sprowadzić do powyższej postaci, należy dwa pierwsze jego wyrazy dopełnić do kwadratu (§ 93). Np. przypuśćmy, że mamy równanie:

$$x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0.$$

Dwa pierwsze wyrazy: x^4-12x^3 uważamy jako dwa pierwsze wyrazy kwadratu dwumianu i dopełniamy je do kwadratu zupełnego przez dodanie $(6x)^2$; — oczywiście tenże sam kwadrat należy od wielomianu odjąć. Czyniąc to, otrzymamy:

$$x^4-12x^3+(6x)^2-36x^2+49x^2-78x+40=0,$$

czyli:

$$(x^2-6x)^2+13(x^2-6x)+40=0.$$

Czyniąc teraz:

$$y=x^2-6x,$$

otrzymamy:

$$y^2+13y+40=0,$$

skąd:

$$y_1=-5,$$
$$y_2=-8.$$

Następnie, rozwiązując każde z dwóch równań:

$$x^2-6x=-5,$$

i:

$$x^2-6x=-8,$$

znajdziemy:

$$x_1=5;\ x_2=1;\ x_3=4;\ x_4=2.$$

ZADANIA IX.

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$ 2. $x - 5\sqrt{x} - 14 = 0.$

3. $x + \sqrt{x+5} = 7.$ 4. $x^4 - 2x^3 + x^2 = 36.$

5. $\sqrt{x^2 - 6x + 16} + (x-3)^2 = 13.$

6. $x^4 - 4x^2 - 2\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} = 31.$

7. $x = 7\sqrt{2 - x^2}.$

8. $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = \sqrt{x}.$

9. $2x\sqrt{a + x^2} + 2x^2 = a^2 - a.$

10. $\dfrac{x + \sqrt{12a^2 - x}}{x - \sqrt{12a^2 - x}} = \dfrac{a+1}{a-1}.$

11. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{3x}{1+x^2}.$

12. $\dfrac{1}{x+7} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-7} = 0.$

13. $x^3 + 3ax^2 = 4a^3.$

14. $\dfrac{\sqrt{x}}{21 - \sqrt{x}} + \dfrac{21 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\tfrac{1}{2}.$

15. $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 20.$ 16. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$

17. $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0.$

18. $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0.$

X.

Zagadnienia prowadzące do równań stopnia drugiego.

132. Znaleźć dwie liczby, których suma jest 15 i których iloczyn jest 54.

Niech x oznacza jedną liczbę; — wtedy $15 - x$ będzie drugą liczbą: — podług drugiego warunku ma być:

$$x(15 - x) = 54.$$

Stąd, po odpowiedniem przeniesieniu:

$$x^2 - 15x = -54;$$

dalej: $$x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = -54 + \frac{225}{4} = \frac{9}{4}.$$

Wyciągając pierwiastki kwadratowe:

$$x - \frac{15}{2} = \pm\frac{3}{2},$$

skąd: $$x = \frac{15}{2} \pm \frac{3}{2},$$

czyli: $$x = 9, \text{ lub } x = 6.$$

Biorąc $x = 9$, otrzymujemy $15 - x = 6$; jeżeli znowuż weźmiemy $x = 6$, otrzymamy $15 - x = 9$. Dwie te więc liczby szukane są 6 i 9. I jakkolwiek równanie stopnia drugiego daje dwie wartości dla x, tutaj jest w rzeczywistości jedno tylko rozwiązanie [1]).

133. Wydał ktoś pewną liczbę złotych na zakupienie towaru, który następnie sprzedał ze stratą za 24 złotych. Przy sprzedaży stracił tyle złotych *od sta*, ile go kosztował towar. Ileż kosztował ten towar?

Niech x oznacza liczbę złotych wydanych na towar: wtedy $x - 24$ oznaczać będzie liczbę złotych straconych. Podług warunków zadania strata od sta wynosi tyle złotych, ile kosztował towar, zatem x od sta; więc wyraża się ułamkiem $\frac{x}{100}$ ceny towaru. Równanie przeto będzie takie:

$$x \times \frac{x}{100} = x - 24,$$

skąd: $$x^2 - 100x = -2400.$$

Rozwiązując je znajdziemy, że $x = 40$ lub $x = 60$. Stąd wy-

---

[1]) Porównaj § 113.

pada, że wydana liczba złotych była albo 40, albo też 60; — i każda z tych liczb zadosyć czyni wszystkim warunkom zagadnienia.

134. Sumę 144 rb. rozdzielono między pewną liczbę osób tak, że każda z tych osób otrzymała tęż samą liczbę rubli. Gdyby było o dwie osoby mniej, wtedy przy takim podziale każda dostałaby o jednego rubla więcej. Znaleźć, ile było osób.

Oznaczmy przez x liczbę osób; wtedy to, co otrzymała każda z nich, wyrazi się przez $\frac{144}{x}$ rubli. Gdyby było $x - 2$ osób, wtedy każda z nich dostałaby $\frac{144}{x-2}$ rubli. Zatem, podług warunków zadania będzie:

$$\frac{144}{x-2} = \frac{144}{x} + 1,$$

czyli:
$$\frac{144x - 144(x-2) - x(x-2)}{x(x-2)} = 0,$$

a więc:
$$144x - 144(x-2) - x(x-2) = 0,$$

skąd:
$$x^2 - 2x - 288 = 0.$$

Rozwiązując to równanie stopnia drugiego, znajdziemy, że $x = 18$, lub $x = -16$. Stąd wypada, że osób było 18, gdyż to jest jedyna liczba, która zadosyć czyni warunkom zadania.

Czytelnik bez wątpienia zapyta się, czy można jakiekolwiek znaczenie nadać drugiemu pierwiastkowi, mianowicie — 16; aby na to pytanie odpowiedzieć, rozwiążemy inne zagadnienie, ściśle związane z tem, które dopiero co rozwiązaliśmy.

135. Suma 144 rb. była rozdzielona równo pomiędzy pewną liczbę osób; gdyby było o dwie osoby *więcej*, wtedy każda otrzymałaby o jednego rubla *mniej*. Ileż było osób?

Oznaczmy przez x liczbę osób. Wtedy, rozumując tak jak wyżej, otrzymamy równanie:

$$\frac{144}{x+2}=\frac{144}{x}-1;$$

czyli:
$$x^2+2x-288=0,$$

a rozwiązując je, znajdziemy:

$$x=16, \text{ lub } x=-18.$$

W poprzedniem zagadnieniu otrzymaliśmy jeden pierwiastek dający odpowiedź na pytanie, mianowicie 18, i jeden pierwiastek, nie należący do zagadnienia, mianowicie — 16; i w teraźniejszem zagadnieniu otrzymaliśmy także jeden pierwiastek należący do zadania, mianowicie 16, i drugi, nie należący do niego, mianowicie — 18.

136. Przy rozwiązywaniu zagadnień przytrafia się często, jak to miało miejsce w § 134, że otrzymujemy wyniki, które nie dadzą się zastosować do zagadnienia. Pochodzi to stąd, że algebraiczne wyrażenie ma znaczenie ogólniejsze, aniżeli język zwykły, i tym sposobem równanie, będące właściwie przedstawieniem warunków zagadnienia, może być zastosowanem i do innych warunków. Zresztą uczący się z doświadczenia przekona się, że zawsze można wybrać ten pierwiastek, który należy do zagadnienia rozwiązywanego. Nadto w wielu przypadkach możliwą jest rzeczą, przez stosowną zmianę warunków zagadnienia, ułożyć nowe zagadnienie, odpowiadające temu pierwiastkowi, który nie należał do zagadnienia początkowego.

Przykład tego mieliśmy w § 135; podamy tutaj jeszcze inne zadanie tego samego rodzaju.

137. Kupił ktoś za 24 marek pewną liczbę jajek. Gdyby za tęż sumę dostał o 4 jajka więcej, wtedy cena jednego jajka byłaby o 30 fen. niższą. Znaleźć cenę jednego jajka.

Niech x oznacza liczbę fenigów, wyrażającą cenę jednego jajka. Wtedy $\frac{2400}{x}$ będzie liczbą kupionych jajek. Gdyby cena jednego jajka była o 30 fenigów niższą, wtedy za tęż sumę pieniędzy 24 m. możnaby kupić $\frac{2400}{x-30}$ jajek. Lecz, podług warunków zagadnienia, liczba kupionych jajek w tym drugim razie byłaby o 4 większą od pierwszej, zatem otrzymamy równanie:

$$\frac{2400}{x-30}=\frac{2400}{x}+4.$$

stąd:

$$2400x-2400(x-30)-4x(x-30)=0$$

czyli:

$$2400x-2400x+72000-4x^2+120x=0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy:

$$x^2-30x=18000.$$

Z tego równania znajdujemy dla x dwie wartości: 150 i — 120. Zatem jedno jajko kosztuje 150 fen. Moglibyśmy dalej znaleźć, że 120 fen. jest odpowiedzią na następujące zagadnienie: kupiono za 24 m. pewną liczbę jajek; gdyby za tęż samą sumę otrzymano o 4 *mniej*, wtedy cena jednego jajka byłaby o 30 fen. *wyższą*. Znaleźć, ile kosztuje jajko.

ZADANIA X.

1. Liczbę 60 podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był 864.

2. Suma dwóch liczb jest 60, suma zaś ich kwadratów jest 1872 — znaleźć te dwie liczby.

3. Znaleźć dwie liczby, których różnica jest 6, i których iloczyn jest 720.

4. Znaleźć liczbę, która dodana do swojego pierwiastka kwadratowego, dałaby na sumę 210.

5. Zbiornik może być napełniony wodą, wpływającą dwiema rurami w ciągu 4 godzin: znaleźć, w ilu godzinach mógłby

być zbiornik napełniony przez każdą z tych rur oddzielnie, jeżeli jedna rura napełniłaby go o 6 godzin prędzej aniżeli druga.

6. Bok kwadratu ma 110 cali długości; znaleźć długość i szerokość prostokąta, którego obwód jest o 4 cale dłuższy od obwodu kwadratu, a którego pole jest o 4 cale kwadratowe mniejsze od pola kwadratu.

7. Dwóch posłańców A i B wysłano w tej samej chwili do miejsca odległego o 90 kilometrów; pierwszy przebywał o jeden kilometr więcej na godzinę aniżeli drugi i wskutek tego przejechał całą odległość o godzinę prędzej aniżeli drugi. Znaleźć, po ile kilometrów na godzinę przebywał każdy.

8. Dwaj podróżni wychodzą jednocześnie z tego samego punktu i jeden idzie ku północy z prędkością $4\frac{1}{2}$ kilometra na godzinę, a drugi ku wschodowi z prędkością 6 kilometrów na godzinę. Po ilu godzinach odległość pomiędzy nimi będzie 30 kilometrów?

9. Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym po ramionach kąta prostego: jedno z prędkością c metrów, drugie zaś z prędkością c_1 metrów na sekundę, przyczem oba wyszły jednocześnie z wierzchołka kąta prostego. Po ilu sekundach odległość pomiędzy nimi będzie d metrów?

10. Za domem znajduje się plac ogrodzony, mający długości 70 metrów i szerokości $52\frac{1}{2}$ metra. Właściciel domu chciałby plac ten zasadzić kwiatami, żona jego zaś wolałaby zamienić go na trawnik. Aby życzeniom obojga w równej mierze zadosyć uczynić, polecono ogrodnikowi założyć na środku placu trawnik prostokątny, którego obwód jest wszędzie jednakowo oddalony od ogrodzenia, i którego powierzchnia byłaby równą powierzchni pozostałej części ogrodu. Jakaż będzie długość i jaka szerokość trawnika?

XI.

Równania jednoczesne stopnia drugiego.

138. Przedstawimy tutaj kilka przykładów rozwiązania równań jednoczesnych stopnia drugiego. Rozpatrzymy szczególniej dwa przypadki, najczęściej przytrafiające się w praktyce, i podamy prawidła na ich rozwiązanie. W obu tych przypadkach są dane dwa równania z dwiema niewiadomemi. Ilości niewiadome zawsze oznaczone będą głoskami x i y.

139. *Przypadek pierwszy.* Przypuśćmy, że jedno z równań danych jest stopnia pierwszego, a drugie jest stopnia drugiego.

Z równania stopnia pierwszego należy wyrazić jedną z niewiadomych zapomocą drugiej niewiadomej i wyrażenie otrzymane podstawić w równaniu stopnia drugiego.

Naprzykład: Rozwiązać układ równań:

$$3x + 4y = 18;\ 5x^2 - 3xy = 2.$$

Z pierwszego równania będzie:

$$y = \frac{18 - 3x}{4};$$

podstawmy tę wartość w równaniu drugiem; otrzymamy:

$$5x^2 - \frac{3x(18 - 3x)}{4} = 2,$$

skąd:
$$20x^2 - 54x + 9x^2 = 8,$$
i następnie:
$$29x^2 - 54x = 8.$$

Z tego równania stopnia drugiego znajdujemy: $x = 2$, lub $-\frac{4}{29}$; a podstawiając te wartości w wyrażenie dla y, otrzymamy $y = 3$, lub $\frac{267}{58}$.

140. Rozwiązać układ równań:

$$3x^2 + 5x - 8y = 36;\ 2x^2 - 3x - 4y = 3.$$

Jakkolwiek tutaj żadne z danych równań nie jest stopnia pierwszego, z tem wszystkiem możemy z nich wyprowadzić równanie stopnia pierwszego.

Gdyż, pomnożywszy pierwsze równanie przez 2 a drugie przez 3, otrzymamy:

$$6x^2 + 10x - 16y = 72;$$
$$6x^2 - 9x - 12y = 9.$$

Odejmijmy równanie drugie od pierwszego:

$$10x - 16y + 9x + 12y = 72 - 9,$$

czyli:
$$19x - 4y = 63.$$

Z tego równania mamy:

$$y = \frac{19x - 63}{4},$$

co podstawiwszy w pierwszem z danych równań, otrzymamy:

$$3x^2 + 5x - 2(19x - 63) = 36.$$

Przekształcając to równanie, otrzymamy w dalszym ciągu:

$$3x^2 - 33x + 90 = 0,$$

skąd:
$$x^2 - 11x + 30 = 0.$$

Z tego równania znajdziemy, że $x = 5$ lub 6; a następnie przez podstawienie kolejne tych wartości w wyrażeniu na y znajdziemy, że $y = 8$, lub $y = 12\frac{3}{4}$.

141. *Przypadek drugi.* Gdy wyrazy zawierające ilości niewiadome w każdem równaniu stanowią wyrażenie jednorodne stopnia drugiego (patrz § 43, cz. I), ***należy uczynić $y = vx$ i następnie podstawić tę wartość w obu równaniach; wtedy, przez podzielenie ich odpowiedniemi stronami, otrzymamy równanie, z którego można wyznaczyć v.***

Naprzykład: Rozwiązać układ równań:

$$x^2 + xy + 2y^2 = 44; \quad 2x^2 - xy + y^2 = 16.$$

Uczyńmy $y = vx$ i podstawmy tę wartość zamiast y w obu równaniach; otrzymamy:

$$x^2(1 + v + 2v^2) = 44, \quad x^2(2 - v + v^2) = 16.$$

Dzielimy odpowiedniemi stronami te równania:

$$\frac{1 + v + 2v^2}{2 - v + v^2} = \frac{44}{16} = \frac{11}{4}.$$

Stąd: $4(1+v+2v^2)=11(2-v+v^2)$,

i następnie: $3v^2-15v+18=0$;

dzieląc obie strony równania przez 3, dostaniemy:

$$v^2-5v+6=0.$$

Z tego równania otrzymamy $v=2$, lub $v=3$. W równaniu $x^2(1+v+2v^2)=44$, podstawiwszy 2 zamiast v, znajdziemy $x=\pm 2$; a że $y=vx$, przeto otrzymamy: $y=\pm 4$. Podstawmy dalej w tem samem równaniu 3 zamiast v; mieć będziemy: $x=\pm\sqrt{2}$. A że: $y=vx$, zatem $y=\pm 3\sqrt{2}$.

Lub też moglibyśmy postępować i tak: Pomnóżmy pierwsze z danych równań przez 2:

$$2x^2+2xy+4y^2=88;$$

drugie zaś równanie jest:

$$2x^2-xy+y^2=16.$$

Przez odjęcie tych równań znajdziemy:

$$3xy+3y^2=72,$$

czyli: $y^2=24-xy$.

I dalej, pomnóżmy drugie równanie przez 2 i odejmijmy od niego równanie pierwsze; będzie:

$$3x^2-3xy=-12,$$

skąd: $x^2=xy-4$.

Stąd, przez mnożenie:

$$x^2y^2=(24-xy)(xy-4),$$

czyli: $2x^2y^2-28xy=-96$.

Rozwiązując to równanie, otrzymamy: $xy=8$, lub $xy=6$. Podstawiając pierwszą wartość w danych równaniach, otrzymamy:

$$x^2+2y^2=36,\ 2x^2+y^2=24.$$

Stąd znajdziemy x^2 i y^2. W podobny sposób można wziąć drugą wartość na xy i następnie wynaleźć x^2 i y^2.

142. Rozwiązać układ równań:

$$2x^2+3xy+y^2=70;\ 6x^2+xy-y^2=50.$$

Uczyńmy: $y=vx$, i podstawmy zamiast y tę wartość w obu równaniach; będzie:

$$x^2(2+3v+v^2)=70;\ x^2(6+v-v^2)=50.$$

Dzieląc odpowiedniemi stronami te dwa równania, otrzymamy:

$$\frac{2+3v+v^2}{6+v-v^2}=\frac{70}{50}=\frac{7}{5},$$

skąd: $$5(2+3v+v^2)=7(6+v-v^2),$$

i następnie: $$12v^2+8v-32=0,$$

czyli: $$3v^2+2v-8=0.$$

Z tego równania znajdziemy $v=\frac{4}{3}$ lub $v=-2$.

Podstawmy w równaniu $x^2(2+3v+v^2)=70$, $\frac{4}{3}$ zamiast v, wtedy otrzymamy $x=\pm 3$. A ponieważ $y=vx$, więc $y=\pm 4$. Wartość $v=-2$ nie może tutaj być zastosowaną, gdyż prowadzi do niemożliwego wyniku $x^2 \times 0=70$. W rzeczy samej: równania, z których wartość na v była wynalezioną, mogą być tak napisane:

$$x^2(2+v)(1+v)=70,\ x^2(2+v)(3-v)=50.$$

Z nich widzimy, że wartość v, znaleziona z równania $2+v=0$, nie daje się tutaj zastosować. Może być tylko:

$$\frac{1+v}{3-v}=\frac{70}{50}=\frac{7}{5},\ \text{skąd: } v=\frac{4}{3}.$$

Jednakże, stosując powyższą metodę, nie możemy być pewni, czy otrzymaliśmy wszystkie możliwe rozwiązania. Jeżeli mianowicie $x=0$ jest jednym z szukanych pierwiastków, wtedy nie można znaleźć takiego v, ażeby było $y=vx$, o ile y nie jest także zerem; powinniśmy więc jeszcze sprawdzić, czy zakładając $x=0$, nie dostaniemy z obu równań tej samej wartości dla y.

Gdyby w przykładzie tego paragrafu prawa strona drugiego równania była -70, wtedy para wartości:

$$x=0;\ y=\pm\sqrt{70}$$

czyniłaby zadość obu równaniom, byłaby więc rozwiązaniem zadania.

Podobnie, gdyby w pierwszem równaniu poprzedniego § prawa strona była 32, gdyby więc był dany układ równań:

$$x^2 + xy + 2y^2 = 32;$$
$$2x^2 - xy + y^2 = 16,$$

wtedy, czyniąc x zerem, otrzymalibyśmy z każdego z tych równań $y = \pm 4$, stosując zaś poprzednią metodę:

$$x = \pm 2\sqrt{2}\,;\; y = \pm 2\sqrt{2}.$$

Dostajemy więc ostatecznie cztery rozwiązania:

$$x_1 = 0,\; y_1 = 4;\; x_2 = 0,\; y_2 = -4;$$
$$x_3 = 2\sqrt{2},\; y_3 = 2\sqrt{2};\; x_4 = -2\sqrt{2},\; y_4 = -2\sqrt{2}.$$

143. Oprócz równań należących do tych przypadków, które dopiero co rozważaliśmy, mogą się przytrafić równania, które jakkolwiek nie dadzą się pod żaden z nich podciągnąć, wszakże mogą być rozwiązane sposobami szczególnemi. Jakiego użyć w tym celu sposobu w każdym przypadku, może nas nauczyć tylko wprawa i doświadczenie. Podamy tutaj kilka tego rodzaju przykładów.

144. Rozwiązać układ równań:

$$x + y = 5;\; x^3 + y^3 = 65.$$

Przez dzielenie otrzymamy:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = \frac{65}{5},$$

czyli:
$$x^2 - xy + y^2 = 13.$$

Z tego równania, połączonego z równaniem $x + y = 5$, możemy znaleźć x i y, jak w pierwszym przypadku (§ 139). Albo też możemy uzupełnić rozwiązanie w ten sposób:

$$x + y = 5,$$

podnieśmy obie strony do kwadratu:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

A że nadto:

$$x^2 - xy + y^2 = 13, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

przeto odejmując (2) od (1) znajdziemy:

$$3xy = 12,$$

a następnie: $xy = 4$,

skąd: $4xy = 16$ . . . . . (3)

Odejmijmy (3) od (1); otrzymamy:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 9;$$

wyciągnijmy z obu stron tego ostatniego równania pierwiastki kwadratowe:

$$x - y = \pm 3.$$

Należy teraz znaleźć x i y z układu równań stopnia pierwszego:

$$x + y = 5, \quad \text{i} \quad x - y = \pm 3.$$

Równania te dają takie wartości dla x i y.

$$x = 1, \quad \text{lub:} \quad x = 4,$$
$$y = 4, \qquad\qquad y = 1$$ [1]).

145. Rozwiązać układ równań:

$$x^2 + y^2 = 41; \quad xy = 20.$$

Układ ten może być rozwiązany tak, jak układ równań w drugim przypadku (§ 141), albo też można go rozwiązać w sposób dopiero co pokazany. Gdyż możemy z niego odrazu wyprowadzić:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 41 + 40 = 81,$$
$$x^2 + y^2 - 2xy = 41 - 40 = 1;$$

wyciągając więc pierwiastki kwadratowe, otrzymamy:

$$x + y = \pm 9, \quad \text{i} \quad x - y = \pm 1;$$

stąd ostatecznie znajdziemy:

$$x = \pm 5, \quad \text{lub:} \quad x = \pm 4,$$
i $$y = \pm 4, \qquad\qquad y = \pm 5.$$

---

[1]) Gdy już otrzymaliśmy wartość dla xy, można także dokończyć rozwiązania z dwóch równań:

$$x + y = 5, \quad \text{i} \quad xy = 4,$$

opierając się na zadaniu § 113. Mianowicie: równania te dają nam sumę i iloczyn ilości szukanych; pierwiastki więc równania:

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

będą szukanemi ilościami.

146. Rozwiązać układ równań:

$$x^2+xy+y^2=19, \quad x^4+x^2y^2+y^4=133.$$

Z podzielenia jednego równania przez drugie mamy:

$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2}=\frac{133}{19},$$

czyli: $$x^2-xy+y^2=7.$$

Tym sposobem mamy teraz do rozwiązania dwa równania:

$$x^2+xy+y^2=19, \quad x^2-xy+y^2=7.$$

Dodając i odejmując kolejno dwa te równania, otrzymamy:

$$x^2+y^2=13, \quad xy=6.$$

Postępując dalej tak, jak w § 145, znajdziemy że:

$$x=\pm 3, \text{ lub: } x=\pm 2,$$
$$y=\pm 2, \qquad y=\pm 3.$$

147. Rozwiązać układ równań:

$$x-y=2; \quad x^5-y^5=242.$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy:

$$\frac{x^5-y^5}{x-y}=\frac{242}{2},$$

czyli: $$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=121,$$

to jest:

$$x^4+y^4+xy(x^2+y^2)+x^2y^2=121 \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Lecz: $$x-y=2;$$

przeto, podnosząc obie strony do kwadratu, mieć będziemy

$$x^2-2xy+y^2=4,$$

skąd: $$x^2+y^2=2xy+4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Podnosząc obie strony tego ostatniego równania do kwadratu, otrzymamy:

$$x^4+2x^2y^2+y^4=4x^2y^2+16xy+16,$$

przeto: $$x^4+y^4=2x^2y^2+16xy+16 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Podstawiając wartości dla x^2+y^2 i x^4+y^4, otrzymane z równań (2) i (3), w równaniu (1), mieć będziemy:

$$2x^2y^2 + 16xy + 16 + xy(2xy + 4) + x^2y^2 = 121,$$

skąd: $$5x^2y^2 + 20xy = 105,$$

czyli: $$x^2y^2 + 4xy = 21.$$

Z tego równania otrzymamy:

$$xy = 3, \quad \text{lub:} \quad xy = -7.$$

Weźmy $xy = 3$; z tego równania połączonego z równaniem $x - y = 2$, znajdziemy $x = 3$, lub: $x = -1$, a następnie: $y = 1$, lub $y = -3$. Gdybyśmy wzięli: $xy = -7$, wtedy przekonalibyśmy się, że rozwiązanie byłoby niemożliwe.

ZADANIA XI.

1. $x - y = 1;\ x^2 - xy + y^2 = 21.$
2. $2x - 5y = 3;\ x^2 + xy = 20.$
3. $x + y = 7(x - y);\ x^2 + y^2 = 100.$
4. $5(x^2 - y^2) = 4(x^2 + y^2);\ x + y = 8.$
5. $4x - 5y = 1;\ 2x^2 - xy + 3y^2 + 3x - 4y = 47.$
6. $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 + 2xy = 60;\ 5y - 4x = 1.$
7. $\frac{x}{12} + \frac{x}{10} = x - y;\ \frac{7xy}{15} - \frac{2x}{3} - 2y = 0.$
8. $3x + 2y = 5xy;\ 15x - 4y = 4xy.$
9. $xy + 2 = 9y;\ xy + 2 = x.$ 10. $xy = x + y;\ ax = by.$
11. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2;\ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = a + b.$
12. $x^2 + xy = 28;\ xy - y^2 = 3.$
13. $x^2 - 2xy = 15;\ xy - 2y^2 = 7.$
14. $x^2 + xy - 6y^2 = 21;\ xy - 2y^2 = 4.$
15. $x^2 + 3xy = 54;\ xy + 4y^2 = 115.$
16. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2};\ x^2 + y^2 = 90.$
17. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{25}{7};\ xy = 48.$ 18. $x + y = 9;\ x^3 + y^3 = 189.$
19. $x^2 + xy + y^2 = 37;\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481.$

20. $\frac{x}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = 1$; $2 + 3xy = 3x$.

21. $x^2 + y^2 = 34$; $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 20$.

22. $x^2 + y^2 - 1 = 2xy$; $xy(xy + 1) = 6$.

23. $x^2 = ax + by$; $y^2 = ay + bx$.

24. $x^2yz = a$; $xy^2z = b$; $xyz^2 = c$.

25. $3yz + 2zx - 4xy = 16$; $2yz - 3zx + xy = 5$;
$4yz - zx - 3xy = 15$.

26. $x - y = a$; $x^3 - y^3 = b$.

XII.

Zagadnienia prowadzące do równań stopnia drugiego zawierających więcej niż jedną niewiadomą.

148. Znaleźć liczbę dwucyfrową, mającą następujące własności: 1-sze, suma kwadratów dwóch cyfr, z których składa się liczba, jest równa samej tej liczbie, powiększonej o iloczyn tychże cyfr; 2-re, jeżeli dodamy 36 do tej liczby, wtedy otrzymamy nową liczbę dwucyfrową, złożoną z tych samych cyfr, lecz napisanych w odwrotnym porządku.

Niech x oznacza cyfrę, stojącą na miejscu dziesiątków, a y cyfrę, stojącą na miejscu jedności. Wtedy sama liczba wyrazi się tak: $10x + y$; jeżeli zaś cyfry odwrócimy, będzie liczba $10y + x$. Więc podług warunków zagadnienia, mieć będziemy równania:

$$x^2 + y^2 = xy + 10x + y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$10x + y + 36 = 10y + x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Z równania (2) mamy:

$$9y = 9x + 36,$$

przeto:

$$y = x + 4.$$

Podstawiając tę wartość w (1), otrzymamy:

$$x^2 + (x + 4)^2 = x(x + 4) + 10x + x + 4,$$

skąd:

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Z tego równania znajdziemy:

$$x=3, \quad \text{lub:} \quad x=4;$$

a zatem:

$$y=7, \quad \text{lub:} \quad y=8.$$

Szukana liczba musi więc być albo 37, albo też 48. Każda z tych liczb zadosyć czyni wszystkim warunkom zagadnienia.

149. Pewna osoba wychodzi z miejsca położonego u stóp góry, z zamiarem dojścia do szczytu. Drugą połowę odległości do szczytu przechodzi z prędkością o pól wiorsty mniejszą na godzinę, aniżeli pierwszą połowę tejże odległości, i dosięga szczytu w $5\frac{1}{2}$ godzin. Ze szczytu schodzi na dół w ciągu $3\frac{3}{4}$ godziny, przyczem idzie z prędkością jednakową, i o jedną wiorstę na godzinę większą, aniżeli w pierwszej połowie wstępowania na górę. Znaleźć: odległość od stóp góry do jej szczytu — i różne prędkości, z jakiemi ta osoba szła.

Niech $2x$ oznacza liczbę wiorst od stóp do wierzchołka, y zaś liczbę wiorst, jaką ta osoba przechodzi na godzinę, podczas pierwszej połowy wchodzenia na górę. Przeto pierwszą połowę drogi przebyła w godzin $\frac{x}{y}$, drugą zaś w godzin $\frac{x}{y-\frac{1}{2}}$.

Z warunków zadania będzie:

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y-\frac{1}{2}}=5\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

i podobnież:

$$\frac{2x}{y+1}=3\frac{3}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Z równania (2) otrzymamy:

$$2x=\frac{15}{4}(y+1);$$

przeto:

$$x=\frac{15}{8}(y+1).$$

Z równania (1) będzie:

$$x\left(2y-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}y\left(y-\frac{1}{2}\right);$$

skąd: $$15(y+1)(4y-1)=44y(2y-1),$$
czyli: $$28y^2-89y+15=0.$$

Z tego równania otrzymujemy: $y=3$, lub $y=\frac{5}{28}\cdot$ Wartość $\frac{5}{28}$ nie ma tutaj zastosowania, gdyż y, podług warunków zadania, jest większe od $\frac{1}{2}\cdot$ Zatem: $y=3$, a następnie: $x=\frac{15}{2}\cdot$ Odległość przeto od stóp góry do szczytu jest 15 wiorst.

150. Zakończmy ten rozdział rozwiązaniem zagadnienia następującego:

Znaleźć dwie takie liczby, aby ich suma, iloczyn i różnica ich kwadratów były równe.

Oznaczmy większą z tych liczb głoską x, mniejszą zaś głoską y. Wtedy podług warunków zagadnienia powinno być:

$$x+y=xy=x^2-y^2.$$

Aby rozwiązać te równania, wyrażamy z równania $x+y=xy$ niewiadomą x zapomocą y:

$$x=\frac{y}{y-1},$$

skąd: $$x+y=\frac{y}{y-1}+y=\frac{y^2}{y-1},$$

i: $$xy=\frac{y^2}{y-1}:$$

Ponieważ różnica kwadratów tych liczb ma być równą temuż samemu, czemu się równa suma i iloczyn, przeto:

$$x^2-y^2=\frac{y^2}{y-1}.$$

A ponieważ $x=\frac{y}{y-1}$, przeto $x^2=\frac{y^2}{y^2-2y+1}$, skąd:

$$x^2-y^2=\frac{y^2}{y^2-2y+1}-y^2=\frac{-y^4+2y^3}{y^2-2y+1}.$$

Porównywając tę wartość na x^2-y^2 z napisaną powyżej, otrzymamy:

8*

$$\frac{y^2}{y-1} = \frac{-y^4+2y^3}{y^2-2y+1},$$

czyli:
$$\frac{(y^3-y^2)-(-y^4+2y^3)}{(y-1)^2} = 0,$$

albo:
$$\frac{y^4-y^3-y^2}{(y-1)^2} = 0.$$

$y=0$ czyni zadosyć temu równaniu i daje również $x=0$; ażeby znaleźć pierwiastki różne od zera, zakładamy:

$$y^2-y-1=0,$$

stąd otrzymamy dla y takie wartości:

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

a ograniczając się na wartości dodatniej:

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Wartość zaś x będzie na zasadzie równania:

$$x = \frac{y}{y-1},$$

taką:
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}.$$

Aby mianownik w tem ostatniem wyrażeniu uczynić wymiernym, pomnóżmy licznik i mianownik przez $\sqrt{5}+1$; otrzymamy ostatecznie:

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Większa zatem z szukanych liczb jest $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ mniejsza zaś $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Liczby te czynią zadosyć warunkom zagadnienia, gdyż:

$$x+y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5}.$$

$$xy = 2+\sqrt{5}.$$

$$x^2-y^2 = 2+\sqrt{5}.$$

Rozwiązanie tego zagadnienia można uczynić prostszem, wychodząc z równania: $x+y=x^2-y^2$, którego obie strony mogą być podzielone przez $x+y$. Wskazujemy tu tylko tę drogę, pozostawiając czytelnikowi rozwinięcie całego rozwiązania.

ZADANIA XII.

1. Suma kwadratów dwóch liczb jest 170, zaś różnica kwadratów tych liczb jest 72. Znaleźć te liczby.

2. Iloczyn dwóch liczb jest równy 6 razy wziętej ich sumie, suma zaś ich kwadratów jest 325; znaleźć te liczby.

3. Różnica dwóch liczb pomnożona przez różnicę ich kwadratów stanowi 32, suma zaś tychże liczb pomnożona przez sumę ich kwadratów wynosi 272; znaleźć te liczby.

4. Różnica dwóch liczb jest 3, a różnica ich sześcianów jest 279; — znaleźć te liczby.

5. Pole pewnego prostokąta wynosi 300 metrów kwadratowych; drugi prostokąt, którego pole jest także 300 metrów kwadratowych, jest o 8 metrów krótszy, a o 10 metrów szerszy aniżeli pierwszy. Znaleźć długość i szerokość każdego z tych prostokątów.

6. Dwa pociągi wyjeżdżają w jednej i tej samej chwili z dwóch miast i oba jadą ruchem jednostajnym naprzeciwko siebie. Gdy się spotkały, wtedy jeden z nich przejechał o 108 kilometrów więcej, aniżeli drugi. Jeżeli dalej jechać będą z temiż samemi prędkościami, wtedy pierwszy przebędzie pozostałą część drogi w 9 godzin, a drugi w 16 godzin. Znaleźć odległość między temi dwoma miastami i prędkości, z jakiemi pociągi jadą.

7. A i B są to dwa miasta odległe od siebie o 18 wiorst i leżące na tym samym brzegu rzeki. Podróżny udaje się z A do B i przebywa tę odległość w czterech godzinach, płynąc łódką pierwszą połowę drogi, a idąc pieszo drugą połowę. Z powrotem pierwszą połowę drogi idzie pieszo z taką samą prędkością jak przedtem, drugą zaś płynie łódką; lecz ponieważ

teraz płynie z wodą, przeto przepływa o $1\frac{1}{2}$ wiorsty na godzinę więcej, aniżeli w przeciwną stronę i odbywa całą drogę w $3\frac{1}{2}$ godzinach. Znaleźć, z jakiemi prędkościami szedł i płynął.

8. Dwa naczynia sześcienne mają razem objętości 407 centymetrów sześciennych. Wysokość jednego z nich dodana do wysokości drugiego, daje nam sumę 11 centymetrów. Znaleźć objętość każdego z tych naczyń.

9. Na drodze długości 1732,5 metrów przednie koło powozu robi o 165 obrotów więcej aniżeli tylne. Gdybyśmy powiększyli obwód każdego koła o 0,75 metra, wtedy na tej samej drodze przednie koło zrobiłoby o 112 obrotów więcej aniżeli tylne. Znaleźć długość obwodu każdego z kół.

10. Po obwodzie placu, mającego kształt trójkąta prostokątnego, biegną dwaj chłopcy. Wybiegli oni z wierzchołka kąta prostego *w przeciwnych kierunkach* wzdłuż boków trójkąta, i biegną z prędkościami, których stosunek równa się 13 : 11. Po raz pierwszy spotykają się w samym środku przeciwprostokątnej; po raz drugi zaś w odległości 20 metrów od wierzchołka kąta prostego, na jednej z przyprostokątnych. Znaleźć podług tych danych długości trzech boków, ograniczających plac.

11. Bachus znalazł Sylena śpiącego przy dzbanie wina; skorzystał z tej okoliczności i pił wino przez dwie trzecie części tego czasu, przez który Sylen wypróżniłby cały dzban. Gdy Sylen obudził się, wypił resztę, którą zostawił Bachus. Gdyby obaj razem pili od początku, wtedy wypiliby o 2 godziny prędzej, ale Bachus wypiłby tylko połowę tego wina, które zostawił Sylenowi. W jakim czasie każdy z nich sam wypróżniłby dzban?

XIII.

Stosunki i proporcje.

151. »Iloraz dwóch liczb« nazywa się inaczej »*stosunkiem*« tych liczb; jednakże w terminach podobnych, jak np. »stosunek złożony« (§ 157), wyrazu »stosunek« nie należy zastępować przez »iloraz«.

»Dzielna i dzielnik ilorazu« nazywają się »*poprzednikiem* i *następnikiem* stosunku«. Tak więc »poprzednik stosunku $a:b$« oznacza to samo, co »dzielna ilorazu $a:b$», mianowicie a; nie można jednak mówić ani o »poprzedniku ilorazu«, ani też o »dzielnej stosunku«.

152[1]). Ażeby podać ogólniejsze określenie stosunku dwóch wielkości, oznaczmy greckiemi literami α (alfa) i β (beta) dwie wielkości, co do których nie zakładamy, że zostały im w jakikolwiek sposób podporządkowane liczby jako miary algebraiczne (cz. I, § 11), ani też nie zakładamy możności dzielenia jednej z nich przez drugą; ale zakładamy możność wyznaczania ich sumy, różnicy, wielokrotności każdej z nich, a więc możność znalezienia wielkości $\alpha \pm \beta$; $n\alpha$; $m\beta$; gdzie n, m, są liczbami naturalnemi.

Przykłady takich wielkości znamy z geometrji: odcinki, pola, objętości.

1) *Jeżeli*

$$n\alpha = m\beta,$$

wtedy mówimy, że stosunkiem α do β jest m podzielone przez n i piszemy

$$\alpha : \beta = m : n.$$

2) *Jeżeli*

$$n\alpha > m\beta,$$

mówimy, że stosunek α do β jest większy aniżeli m podzielone przez n.

$$\alpha : \beta > m : n.$$

3) *Jeżeli*

$$n\alpha < m\beta,$$

mówimy, że stosunek α do β jest mniejszy, aniżeli m podzielone przez n:

$$\alpha : \beta < m : n.$$

O stosunku dwóch wielkości można więc mówić tylko wtedy, jeżeli ich jakiekolwiek wielokrotności są albo sobie równe, albo też jedna jest większa od drugiej. Nie może być mowy

---

[1]) Początkujący może ten paragraf opuścić.

przeto o stosunku liczby mianowanej do oderwanej, ani też o stosunku centymetra do sekundy; ale można mówić o stosunku dwóch godzin do dziesięciu minut, albo o stosunku miary algebraicznej drogi do miary algebraicznej czasu, zużytego na jej przebycie, gdyż w tym ostatnim przypadku obie wielkości są liczbami oderwanemi.

O ile wykonywamy działania tylko nad liczbami oderwanemi — możemy nie robić różnicy między stosunkiem i ilorazem.

Dwa stosunki: $\alpha : \beta$ i $\gamma : \delta$ (gamma do delta) *nazywają się równemi wtedy i tylko wtedy, jeżeli każda para liczb naturalnych n, m, spełniają warunek:*

$$n\alpha = m\beta,$$

spełnia warunek

$$n\gamma = m\delta;$$

jeżeli oprócz tego każda para liczb uaturalnych p, q, spełniająca warunek:

$$p\alpha > q\beta,$$

spełnia warunek:

$$p\gamma > q\delta;$$

i każda para liczb naturalnych r, s, spełniająca warunek:

$$r\alpha < s\beta,$$

spełnia warunek:

$$r\gamma < s\delta.$$

Jeżeli więc jednym z dwóch stosunków równych jest liczba (wymierna) $m : n$, podług okr. 1), to i drugim z tych stosunków jest ta sama liczba; każda liczba, mniejsza od jednego z nich, jest mniejsza i od drugiego; każda liczba, większa od jednego ze stosunków równych, jest większa i od drugiego (okr. 2 i 3).

Jeżeli wielkości α, β są tego rodzaju, że zawsze można znaleźć 4 liczby naturalne p, q, r, s spełniające warunki:

$$q : p < \alpha : \beta < s : r;$$

$$\frac{s}{r} - \frac{q}{p} \leqq \frac{1}{e},$$

gdzie e oznacza jakkolwiek obraną, dowolnie wielką liczbę naturalną, wtedy można ze stosunkiem $\alpha : \beta$ związać przekrój liczb wymiernych, zaliczając do pierwszej klasy wszystkie liczby mniejsze od tego stosunku — zaś do drugiej liczby od tegoż stosunku większe; jeżeli ponadto niema takich liczb naturalnych n, m, któreby spełniały warunek:

$$n\alpha = m\beta,$$

wtedy mówimy, że »stosunkiem α do β jest liczba niewymierna, której wartościami przybliżonemi są $s : r$ i $q : p$ z dokładnością do $1 : e$«.

Tak np. stosunek długości boku kwadratu do długości jego przekątnej (§§ 30 i 33) jest

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

W dalszym ciągu zakładamy, że poprzednikiem i następnikiem stosunku są jakiekolwiek liczby oderwane, wymierne lub niewymierne.

153. Wartość stosunku nie zmieni się, jeżeli oba jego wyrazy pomnożymy przez tę samą wielkość:

Gdyż: $$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} \text{ (§ 87, cz. I).}$$

154. Aby porównać dwa lub więcej stosunków, należy sprowadzić te ułamki, które je wyrażają, do jednakowego mianownika. Tak np. przypuśćmy, że jeden stosunek jest a do b, drugi c do d; wtedy pierwszy stosunek $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, drugi $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$.

Pierwszy stosunek jest większy od stosunku drugiego, lub równy stosunkowi drugiemu, lub mniejszy od niego, stosownie do tego, czy ad jest większe, równe, lub mniejsze od bc.

Stosunek jest większy od jedności, równy jedności, lub mniejszy od jedności, stosownie do tego, czy poprzednik jest większy od następnika, równy następnikowi, czy też od niego mniejszy.

155. *Jeżeli do każdego wyrazu stosunku dodamy tę samą liczbę, wtedy stosunek większy od jedności przez to zostanie zmniejszony, a stosunek mniejszy od jedności zostanie powiększony.*

Przypuśćmy, że dany stosunek jest $a:b$; utwórzmy nowy stosunek przez dodanie x do obu wyrazów tego stosunku; wtedy $(a+x):(b+x)$ będzie większe lub mniejsze od $a:b$ stosownie do tego, czy $b(a+x)$, jest większe czy mniejsze od $a(b+x)$, a więc stosownie do. tego, czy bx jest większe czy mniejsze od ax, czyli stosownie do tego, czy b jest większe czy mniejsze od a.

156. *Jeżeli od każdego wyrazu stosunku odejmiemy tę samą wielkość, mniejszą od każdego wyrazu, wtedy stosunek większy od jedności zostanie przez to powiększony, a stosunek mniejszy od jedności zostanie zmniejszony.*

Dowodzenie jak w § 155.

157. Jeżeli poprzednik jednego stosunku pomnożymy przez poprzednik drugiego, a następnik pierwszego przez następnik drugiego, wtedy otrzymamy nowy stosunek, który się nazywa *złożonym* ze stosunków danych. Tak np. stosunek $ac:bd$ nazywa się złożonym z dwóch stosunków $a:b$ i $c:d$.

Gdy. mając stosunek $a:b$, za drugi stosunek weźmiemy ten sam $a:b$ i utworzymy z tych dwóch stosunek złożony, wtedy otrzymamy stosunek $a^2:b^2$; stosunek ten niekiedy nazywa się *dwumnożnym* względem $a:b$. Podobnie stosunek $a^3:b^3$ nazywa się *trójmnożnym* względem $a:b$.

158. Przypuśćmy, że:

$$a:b=c:d=e:f,$$

wtedy każdy z tych stosunków równa się stosunkowi

$$\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

gdzie p, q, r są jakiemikolwiek liczbami, a n liczbą naturalną.

Aby tego dowieść, przypuśćmy, że

$$k=a:b=c:d=e:f;$$

wtedy: $$kb=a;\ kd=c;\ kf=e,$$

przeto:

$$p(kb)^n+q(kd)^n+r(kf)^n=pa^n+qc^n+re^n,$$

skąd:

$$k^n = \frac{pa^n + qc^n + re^n}{pb^n + qd^n + rf^n},$$

a następnie:

$$k = \left(\frac{pa^n + qc^n + re^n}{pb^n + qd^n + rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ten sam sposób rozumowania może być zastosowany i wtedy, gdy będzie danych więcej niż trzy stosunki równe.

Jako przypadek szczególny przypuśćmy, że $n = 1$; z powyższego widzimy, że jeżeli

$$a : b = c : d = e : f,$$

wtedy każdy z tych stosunków jest równy

$$\frac{pa + qc + re}{pb + qd + rf};$$

jeżeli zaś jeszcze przyjmiemy, że $p = q = r$, wtedy znajdziemy, że wartość każdego z tych stosunków jest:

$$\frac{a + c + e}{b + d + f}.$$

159. *Równość dwóch stosunków nazywa się proporcją.*

Proporcja:

$$a : b = c : d$$

czyta się zwykle w ten sposób: »*a* tak się ma do *b* jak *c* do *d*«.

Wyrazy *a* i *d* nazywają się *skrajnemi*, wyrazy *b* i *c* *średniemi* wyrazami proporcji.

160. *W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów średnich.*

Jeżeli bowiem obie strony równości

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

pomnożymy przez *bd*, wtedy otrzymamy:

$$ad = bc.$$

Jeżeli w proporcji trzy którekolwiek wyrazy są wiadome, wtedy czwarty możemy znaleźć ze związku $ad = bc$.

Jeżeli $b = c$, wtedy $ad = b^2$, to jest: jeżeli jedna liczba jest w takim stosunku do drugiej, w jakim druga jest do trzeciej, wtedy iloczyn liczb skrajnych równa się kwadratowi średniej.

Proporcja $a : b = b : d$ nazywa się *ciągłą*, a b »średnią proporcjonalną do a i d«, albo »między a i d«.

161. *Jeżeli iloczyn dwóch liczb równa się iloczynowi dwóch innych liczb, wtedy z tych czterech liczb można ułożyć proporcję, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki drugiego iloczynu za wyrazy średnie.*

Gdyż jeżeli

$$xy = ab,$$

wtedy, dzieląc te ilości równe przez $a\,y$, otrzymamy:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y}.$$

162. Jeżeli $a : b = c : d$ i $c : d = e : f$, wtedy $a : b = e : f$.

163. Jeżeli $a : b = c : d$, wtedy $b : a = d : c$.

Gdyż jeżeli podzielimy 1 przez każdą stronę równania

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

to otrzymamy:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

164. *Przestawiwszy w proporcji wyrazy średnie, otrzymamy nową proporcję*; jeżeli więc $a : b = c : d$, to $a : c = b : d$.

Gdyż mnożąc każdą stronę równości

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

przez $\frac{b}{c}$, otrzymamy:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

165. *W proporcji suma wyrazów pierwszego stosunku tak się ma do następnika pierwszego stosunku, jak suma wyrazów drugiego stosunku do następnika drugiego stosunku.* Jeżeli więc $a:b=c:d$, to $(a+b):b=(c+d):d$.

Gdyż dodając 1 do każdej strony równości

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

dostaniemy;

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{a}+1,$$

czyli:
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

166. *W proporcji różnica wyrazów pierwszego stosunku tak się ma do następnika pierwszego stosunku, jak różnica wyrazów drugiego stosunku do następnika drugiego stosunku.*

Gdyż odejmując 1 od każdej strony równości

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

otrzymamy:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

czyli:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

167. *W proporcji poprzednik stosunku pierwszego tak się ma do różnicy wyrazów stosunku pierwszego, jak poprzednik stosunku drugiego do różnicy uyrazów stosunku drugiego.*

Gdyż jeżeli

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

to na zasadzie § 166:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};$$

mnożąc stronami tę równość przez poprzednią, znajdziemy:

$$\frac{a-b}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c-d}{d} \cdot \frac{d}{c},$$

czyli:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c},$$

skąd:

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}.$$

168. *W proporcji suma wyrazów stosunku pierwszego tak się ma do różnicy wyrazów stosunku pierwszego, jak suma wyrazów stosunku drugiego do różnicy wyrazów stosunku drugiego.* Jeżeli więc $a : b = c : d$, to $(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d)$.

Gdyż na zasadzie §§ 165 i 166:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ i } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Dzieląc stronami te równości, dostaniemy:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

ZADANIA XIII.

1. Znaleźć stosunek 2 godzin i 15 minut do 8 minut i 45 sekund.

2. Znaleźć stosunek miary algebraicznej 29 kilometrów i 250 metrów do miary algebraicznej 1 godziny i 15 minut, przyjmując za jednostki centymetr i sekundę. Jaka jest średnia prędkość ciala, które we wskazanym czasie przebywa powyższą drogę?

3. Następujące stosunki uporządkować podług ich wielkości: $3:4$; $7:12$; $8:9$; $2:3$; $5:8$.

4. Znaleźć stosunek złożony z $4:15$ i $25:36$.

5. Dwie liczby są do siebie w stosunku $2:3$, jeżeli zaś do każdej z nich dodamy 7, wtedy stosunek ten zamieni się na $3:4$; znaleźć te dwie liczby.

6. Dwie liczby są do siebie w stosunku $4:5$, jeżeli zaś od każdej z nich odejmiemy 6, wtedy stosunek ten zamieni się na $3:4$; znaleźć te liczby.

7. Dwie liczby są do siebie w stosunku $5:8$; jeżeli do mniejszej liczby dodamy 8, a od większej odejmiemy 5, wtedy stosunek ten zamieni się na $28:27$; znaleźć te liczby.

8. Znaleźć dwie liczby, będące do siebie w stosunku $3:2$ takie, że stosunek ich różnicy do różnicy ich kwadratów jest $1:25$.

9. Znaleźć dwie liczby, będące do siebie w stosunku $3:4$ takie, że stosunek ich sumy do sumy ich kwadratów jest $7:50$.

10. Znaleźć dwie liczby, będące do siebie w stosunku $5:6$ takie, że stosunek ich sumy do różnicy ich kwadratów jest $1:7$.

11. Znaleźć x w ten sposób, aby stosunek $x:1$ był dwumnożnym względem stosunku $8:x$.

12. Znaleźć x w ten sposób, aby stosunek $(a-x):(b-x)$ był dwumnożnym względem stosunku $a:b$.

13. Znaleźć $a:b$, wiedząc, że $(b-a):(b+a)=(4a-b):(6a-b)$.

Znaleźć x z każdej z następujących proporcji:

14. $4:7=8:x$.

15. $3:7=x:42$.

16. $5:x=x:45$.

17. $x:9=16:x$.

18. $(x+4):(x+2)=(x+8):(x+5)$.

19. $(3x+2):(x+7)=(9x-2):(5x+8)$.

20. $(x^2+x+1):62(x+1)=(x^2-x+1):63(x-1)$.

21. $(ax+b):(bx+a)=(mx+n):(nx+m)$.

Dowieść prawdziwości następujących związków:

22. Jeżeli $a:b=c:d$ i $a':b'=c':d'$, wtedy $aa':bb'=cc'$ i: dd' i $ab':a'b=cd':c'd$.

23. Jeżeli $a:b=b:c$, wtedy $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$.

24. Znaleźć wyrazy skrajne w proporcji ciągłej, w której wyrazem średnim jest 60, jeżeli suma tych wyrazów skrajnych jest 125.

25. Znaleźć trzy liczby, stanowiące proporcję ciągłą, wiedząc, że ich suma jest 19, a suma ich kwadratów 133.

Jeżeli $a:b=c:d$, dowieść prawdziwości związków następujących:

26. $a(c+d)=c(a+b)$.

27. $a\sqrt{c^2+d^2}=c\sqrt{a^2+b^2}$.

28. $\dfrac{(a+c)(a^2+c^2)}{(a-c)(a^2-c^2)}=\dfrac{(b+d)(b^2+d^2)}{(b-d)(b^2-d^2)}$.

29. $\dfrac{pa^2+qab+rb^2}{la^2+mab+nb^2}=\dfrac{pc^2+qcd+rd^2}{lc^2+mcd+nd^2}$.

30. $a:b=\sqrt[p]{ma^p+nc^p}:\sqrt[p]{mb^p+nd^p}$.

31. Znaleźć średnią proporcjonalną między $\sqrt{2}+1$ i $\sqrt{2}-1$.

32. Znaleźć średnią proporcjonalną między $\sqrt{6}$ i $\sqrt{216}$.

33. Uporządkować podług wielkości następujące stosunki: $\sqrt{3}:2$; $1:\sqrt{2}$; $\sqrt{8}:\sqrt{5}$; $\sqrt{5}:\sqrt{8}$; $2\sqrt{3}:3\sqrt{2}$; $(\sqrt{2}+1):(\sqrt{2}-1)$.

XIV.

Proporcjonalność.

169. Obierzmy jakikolwiek zbiór liczb, między któremi niema dwóch równych: niech to będą np. liczby, wypisane w szeregu (1).

(1) $2;\ 5;\ 0;\ -\frac{1}{3};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{5}-1}{6}.$

(2) $6;\ 15;\ 0;\ -1;\ 3\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Pod każdą z tych liczb napiszmy jej iloczyn przez jedną i tę samą liczbę, np. 3. Otrzymamy tym sposobem drugi zbiór liczb (2), a między oboma zbiorami istnieje taki związek, że jeżeli x oznacza *którąkolwiek* liczbę zbioru (1), wtedy w zbiorze (2) jest *jedna i tylko jedna* liczba y, spełniająca warunek:

$$y = 3x,$$

który inaczej można tak wyrazić:

$$y : x = 3,$$

jeżeli x nie jes zerem, zaś $y = 0$, jeżeli $x = 0$.

Taki związek między dwoma zbiorami liczb nazywa się *»proporcjonalnością«*, a stały stosunek między odpowiadającemi sobie liczbami obu zbiorów nazywa się *»spółczynnikiem proporcjonalności«*. W rozpatrywanym przykładzie 3 jest spółczynnikiem *proporcjonalności zbioru (2) względem (1).*

170. Mówiąc ogólniej, *jeżeli za »odpowiadające« sobie, albo »podporządkowane« uważać będziemy dwie liczby x, y, spełniające warunek:*

$$y = cx,$$

gdzie c jest liczbą stałą, różną od zera, dla wszystkich par liczb x, y jednakową, wtedy zbiór jakkolwiek obranych liczb x i zbiór odpowiadających im liczb y nazywają się proporcjonalnemi, zależność między temi zbiorami proporcjonalnością, a stały spółczynnik c spółczynnikiem proporcjonalności drugiego zbioru (y) względem pierwszego (x).

Warunek powyższy można inaczej tak napisać: $y : x = c$, jeżeli x różne od 0; $y = 0$, jeżeli $x = 0$.

Zakładamy, że w pierwszym zbiorze wszystkie liczby x są od siebie różne, przez co osiągamy, że i w drugim zbiorze niema liczb równych.

171. *Przykłady.* 1) Zbiór wszystkich liczb naturalnych i zbiór wszystkich liczb parzystych dodatnich można uczynić proporcjonalnemi, obierając 2 za spółczynnik proporcjonalności. Rzeczywiście, iloczyn każdej liczby naturalnej przez 2 jest liczbą parzystą, iloraz każdej liczby parzystej przez 2 jest liczbą naturalną.

2) Zaliczając do pierwszego zbioru wszystkie liczby naturalne, do drugiego wszystkie liczby naturalne oraz wszystkie ułamki dodatnie, mające po skróceniu mianowniki 2, 5 i 10, można uczynić oba zbiory proporcjonalnemi, przyjmując $\frac{1}{10}$ za spółczynnik proporcjonalności. Rzeczywiście, iloczyn każdej liczby naturalnej przez $\frac{1}{10}$ jest albo ułamkiem o mianowniku 10, albo, po skróceniu, ułamkiem o mianowniku 2 lub 5, albo wreszcie liczbą całkowitą; odwrotnie: iloraz przez $\frac{1}{10}$, czyli iloczyn przez 10, każdej liczby całkowitej i każdego ułamka o mianowniku 2, 5 lub 10, jest liczbą całkowitą.

3) Zaliczając do pierwszego zbioru każdą liczbę x spełniającą warunek:

$$a \leqq x \leqq b, \tag{1}$$

do drugiego każdą liczbę y spełniającą warunek:

$$na \leqq y \leqq nb, \text{ jeżeli } n > 0, \tag{2}$$

lub:

$$na \geqq y \geqq nb, \text{ jeżeli } n < 0, \tag{3}$$

i obierając n za spółczynnik proporcjonalności, można oba zbiory uczynić proporcjonalnemi.

Rzeczywiście, każdemu x można podporządkować $y = nx$ w drugim zbiorze, gdyż mnożąc każdy wyraz nierówności (1) przez n, otrzymamy:

$$na \leqq nx \leqq nb,$$

lub:

$$na \geqq nx \geqq nb,$$

zależnie od tego, czy n jest dodatnie czy ujemne; nx jest więc w każdym razie jedną z liczb y. Odwrotnie, podporządkowując każdej liczbie y, spełniającej warunek (2) lub (3), liczbę $y:n$, otrzymamy liczbę należącą do pierwszego zbioru, gdyż z (2) lub (3) wynika:

$$a \leqq \frac{y}{n} \leqq b.$$

4) Zaliczając wszystkie liczby wymierne zarówno do pierwszego, jak do drugiego zbioru, możemy oba zbiory uczynić proporcjonalnemi, obierając za spółczynnik proporcjonalności jakąkolwiek liczbę wymierną różną od zera. Gdyż zarówno iloczyn, jak iloraz liczby wymiernej przez liczbę wymierną różną od zera jest liczbą wymierną.

172. Przypuśćmy, że A i B są dwoma proporcjonalnemi zbiorami liczb, że więc każdej różnej od 0 liczbie x zbioru A została podporządkowana liczba y zbioru B, spełniająca warunek:

$$y:x=c,$$

gdzie c jest spółczynnikiem proporcjonalności; zaś liczbie 0 zbioru A liczba 0 zbioru B.

Podobnie jak w rozdz. XIX i XX cz. I, możemy nazywać wielkość x »*zmienną niezależną*«, wielkość y »*zmienną zależną*« albo »*funkcją zmiennej* x«, określoną przez równanie:

$$y=cx$$

Obierzmy dwie dowolne, ale różne od zera, wartości zmiennej x i oznaczmy je przez x_1, x_2; odpowiadają im w zbiorze B dwie liczby y_1, y_2, spełniające warunki:

$$y_1:x_1=c; \quad y_2:x_2=c.$$

Porównywając oba stosunki, dostaniemy proporcję (§ 159):

$$y_1:x_1=y_2:x_2,$$

czyli (§ 164):

$$x_1:x_2=y_1:y_2.$$

A więc *w dwóch zbiorach proporcjonalnych stosunek dwóch którychkolwiek liczb jednego zbioru równa się stosunkowi odpowiadających im liczb drugiego zbioru.*

9*

173. Liczby dwóch rozpatrywanych zbiorów mogą być np. liczbami, odczytywanemi *jednocześnie* na dwóch różnych przyrządach podczas jakiegoś doświadczenia. Jeżeli zjawisko ma taki przebieg, że odczytując liczby równe na jednym przyrządzie, na drugim także odczytujemy liczby równe, wtedy przez jednoczesność odczytywania zostaje ustalona »*odpowiedniość jednojednoznaczna*«, to jest taka odpowiedniość, że każdej liczbie jednego zbioru odpowiada jedna i tylko jedna liczba drugiego.

Jeżeli np. obserwujemy ruch jakiegoś ciała i odczytujemy jednocześnie liczbę sekund i liczbę centymetrów, przebytych przez ciało w ciągu odczytanej liczby sekund, wtedy otrzymujemy dwa zbiory liczb, między któremi została ustalona odpowiedniość jednojednoznaczna; jeżeli ruch jest jednostajny, wtedy ta odpowiedniość jest proporcjonalnością (§§ 173—175 cz. I).

174. Jeżeli między dwoma układami liczb została ustalona odpowiedniość jednojednoznaczna i jeżeli stwierdzimy, że stosunek odpowiadających sobie liczb ma wielkość stałą, wtedy odpowiedniość ta jest proporcjonalnością; ale proporcjonalność możemy stwierdzić i innym sposobem, jeżeli mianowicie przekonamy się, że stosunek każdej pary liczb jednego zbioru równa się stosunkowi pary odpowiadających liczb w drugim zbiorze; gdyż proporcja

$$x_1 : y_1 = x_2 : y_2$$

na pewno jest prawdziwa, jeżeli wiemy, że

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2.$$

175 [1]. Na zasadzie tej ostatniej uwagi możemy zastosować pojęcie proporcjonalności do zbiorów wielkości, które nie są liczbami i którym nie zostały podporządkowane liczby jako miary algebraiczne, jeżeli tylko możemy nad temi wielkościami wykonywać działania, wskazane w § 152. Jeżeli stosunek każdej pary wielkości jednego zbioru równa się stosunkowi pary odpo-

---

[1]) Ten §, pozostający w związku z § 152, może być opuszczony.

wiadających wielkości drugiego zbioru, wtedy te dwa zbiory wielkości nazwiemy proporcjonalnemi.

W wielu podręcznikach geometrji wyraz »proporcjonalność« bywa używany w tem właśnie znaczeniu; tutaj jednak, dla zachowania jednolitości, mówić będziemy tylko o proporcjonalności *liczb*, oderwanych lub mianowanych.

176. Tak naprzykład, jeżeli wysokość trójkąta pozostaje bez zmiany, wtedy pole jego jest proporcjonalne do podstawy: gdyż jeżeli podstawa powiększa się lub zmniejsza, wtedy, jak to wiemy z geometrji, pole powiększa się lub zmniejsza w tym samym stosunku. Ten wynik możemy wyrazić znakami algebraicznemi w taki sposób: niech A i a oznaczają miary algebraiczne pól dwóch trójkątów, mających wysokość wspólną, a B i b niech oznaczają miary algebraiczne podstaw tych trójkątów; wtedy $A:a=B:b$. Stąd zaś wyprowadzamy (§ 164):

$$A:B=a:b.$$

Gdybyśmy jeszcze wzięli pod uwagę trójkąt, mający tę samą wysokość, co i dwa pierwsze, wtedy znowu stosunek miary algebraicznej jego pola do miary algebraicznej podstawy byłby $a:b$. Jeżeli uczynimy $a:b=m$, wtedy $A:B=m$ i $A=mB$. Tutaj A może przedstawiać pole któregokolwiek z szeregu trójkątów, mających wspólną wysokość, B odpowiednią podstawę, a m wielkość stałą. Stąd to wyrażenie, »że pole jest proporcjonalne do podstawy«, można zastąpić innym w ten sposób: »iloraz pola przez podstawę jest stały«, przez co rozumiemy, że iloraz miar algebraicznych tych wielkości jest stały.

177. *Jeżeli jeden zbiór liczb jest proporcjonalny do drugiego, drugi do trzeciego, wtedy pierwszy zbiór można uczynić proporcjonalnym do trzeciego przez podporządkowanie sobie tych liczb pierwszego i trzeciego zbioru, które odpowiadają tej samej liczbie drugiego zbioru.*

Jeżeli bowiem liczbie x pierwszego zbioru odpowiada w drugim $y=mx$, a tej liczbie odpowiada w trzecim $z=ny$, gdzie m, n są liczbami stałemi, wtedy

$$z=mn\cdot x,$$

gdzie mn jest wielkością stałą.

178. *Jeżeli zbiór liczb x jest proporcjonalny do zbioru liczb y i do zbioru liczb z, wtedy jest też proporcjonalny do zbioru liczb $y+z$, w założeniu, że suma spółczynników proporcjonalności jest różna od 0; proporcjonalny do zbioru liczb $y-z$, w założeniu, że oba spółczynniki proporcjonalności są od siebie różne; i proporcjonalny do zbioru liczb $\sqrt{yz}$.*

Jeżeli bowiem

$$y = mx; \quad z = nx,$$

gdzie m, n są liczbami stałemi, wtedy $y+z=(m+n)x$; $y-z=(m-n)x$; $\sqrt{yz}=\sqrt{mn}\cdot x$, gdzie $m+n$, $m-n$, $\sqrt{mn}$, są różne od zera podług warunków twierdzenia.

179. *Jeżeli zbiór liczb x jest proporcjonalny do zbioru liczb y, a zbiór liczb z do zbioru liczb u, wtedy zbiór iloczynów xz jest proporcjonalny do zbioru iloczynów yu.*

Jeżeli bowiem

$$y = mx; \quad u = nz,$$

wtedy:

$$yu = mn \cdot xz.$$

180. *Jeżeli zbiór liczb x jest proporcjonalny do zbioru liczb y, wtedy zbiór liczb x^n jest proporcjonalny do zbioru liczb y^n, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą stałą.*

Jeżeli bowiem

$$y = mx,$$

wtedy

$$y^n = m^n x^n.$$

181. *Jeżeli zbiór liczb x jest proporcjonalny do zbioru liczb y, wtedy zbiór liczb xv jest proporcjonalny do zbioru liczb yv, gdzie v jest jakąkolwiek wielkością stałą lub zmienną.*

Jeżeli bowiem

$$y = m$$

wtedy

$$yv = m \cdot xv.$$

182. *Jeżeli między trzema zbiorami liczb x, y, z ustalimy jaką zależność, że każdej parze y, z odpowiada jedna i tylko jedna liczba x, przyczem wszystkim parom, w których wartość* *jednej z dwóch liczb pozostaje bez zmiany, odpowiadają wartości x proporcjonalne do drugiej liczby każdej z tych par: wtedy zależność ta jest proporcjonalnością między zbiorem liczb x i zbiorem iloczynów liczb każdej pary.*

Przypuśćmy, że parze liczb y_1, z_1, odpowiada liczba x_1, a parze y_2, z_2 liczba x_2, wtedy, podług założenia, parze y_2, z_1, odpowiadać będzie taka liczba x', która spełnia warunek:

$$x' : x_1 = y_2 : y_1$$

i zarazem:

$$x_2 : x' = z_2 : z_1.$$

Mnożąc stronami te dwie równości, dostaniemy:

$$x_2 : x_1 = y_2 z_2 : y_1 z_1.$$

Przypadki szczególne tego twierdzenia są znane z geometrji. Dowodzi się np., że pole trójkąta lub prostokąta, objętość ostrosłupa lub graniastosłupa i t. d. jest proporcjonalna do podstawy, gdy wysokość jego pozostaje bez zmiany, oraz, że jest proporcjonalna do wysokości, gdy podstawa pozostaje bez zmiany. Stąd wnosimy, że jeżeli i podstawa i wysokość zmieniają się, wtedy pole lub objętość zmienia się proporcjonalnie do iloczynu miar algebraicznych podstawy i wysokości.

Inne przykłady zastosowania tego twierdzenia przedstawiają nam zadania, przytrafiające się w arytmetyce w rozdziale o regule trzech składanej. Przypuśćmy naprzykład, że wielkość roboty wykonanej jest proporcjonalna do liczby pracujących robotników, jeżeli czas pozostaje bez zmiany, i że jest proporcjonalna do czasu przy stałej liczbie robotników; wtedy wielkość roboty będzie proporcjonalna do iloczynu z liczby robotników przez miarę algebraiczną czasu, gdy obie te wielkości ulegają zmianie.

183. Jeżeli zmienna x jest proporcjonalna do iloczynu dwóch innych zmiennych y i z, wtedy mówi się czasami, że jest »proporcjonalna do y i do z«; jednakże jest to tylko skrócony sposób mówienia, który może być źródłem omyłek.

Mówiąc np., że *pole trójkąta* x jest proporcjonalne do jego obwodu y i do średnicy koła wpisanego z, mamy na myśli związek:

$$x = myz,$$

gdzie m jest wielkością stałą; jeżeli jednak mówimy, że *wysokość trójkąta foremnego* x jest proporcjonalna do jego obwodu y i do średnicy koła wpisanego z, to wyrażamy przez to związki:

$$x = my; \quad x = nz,$$

gdzie m, n są liczbami stałemi.

Dokładniej należałoby powiedzieć w pierwszym przypadku: »pole trójkąta jest proporcjonalne do jego obwodu, jeżeli długość średnicy koła wpisanego pozostaje bez zmiany; i jest proporcjonalne do średnicy koła wpisanego, jeżeli długość obwodu tego trójkąta pozostaje bez zmiany«.

184. Zależność

$$y = ax,$$

gdzie a jest liczbą stałą, można przedstawić zapomocą wykresu, jak to robiliśmy już w cz. I. (§ 183). W tym celu prowadzimy dwie proste do siebie prostopadłe OX i OY, zwykle OX w kierunku poziomym, OY w pionowym, obieramy jednostkę długości i na każdej z poprowadzonych prostych zwrot dodatni — zwykle od lewej strony ku prawej i od dołu ku górze.

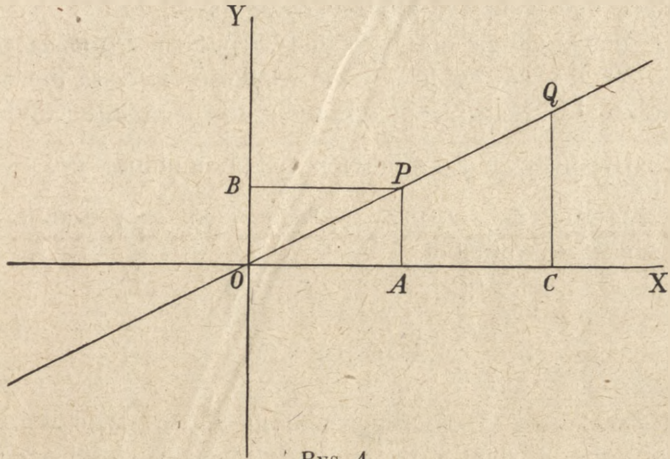
Dla łatwiejszego wyrażania się wprowadzamy nazwy następujące. Proste OX i OY nazwiemy *osiami spółrzędnych*; w szczególności OX *osią odciętych*, OY *osią rzędnych*. Miarę algebraiczną odległości $BP = OA$ nazwiemy *odciętą* punktu P, i oznaczymy przez x; podobnie miarę algebraiczną odległości $AP = OB$ oznaczymy przez y i nazwiemy *rzędną* tegoż punktu; odciętą i rzędną nazywamy także *spółrzędnemi* punktu P. Rzędna jest dodatnia, jeżeli punkt P leży nad osią odciętych; ujemna, jeżeli P leży pod osią. Odcięta jest dodatnia dla punktów leżących z prawej strony osi rzędnych, i ujemna dla punktów leżących z lewej strony.

Niech będą P i Q dwa punkty, dla których ilorazy $y : x$ mają jedną i tę samą wartość a $\left(\text{na rysunku przyjęto } a = \frac{1}{2}\right)$; będzie więc:

$$\frac{AP}{OA} = \frac{CQ}{OC} = a.$$

Połączywszy punkty P i Q z punktem O linjami prostemi, otrzymamy dwa trójkąty prostokątne OAP i OCQ, które, jak to widać z powyższej proporcji, są podobne; a więc:

$$\angle AOP = \angle COQ.$$



Rys. 4.

Jeżeli proste OP i OQ tworzą z OX równe kąty, to albo się pokrywają, albo OX jest dwusieczną kąta POQ; jednak w tym drugim przypadku jedna spółrzędna punktu Q miałaby ten sam znak co odpowiednia spółrzędna punktu P, druga znak przeciwny, przeto stosunek $y:x$ nie mógłby być dla obu punktów ten sam, z czego wypada, że prosta OQ padnie na OP. To znaczy, że *wszystkie punkty, dla których stosunek rzędnej do odciętej jest jeden i ten sam, leżą na tej samej linji prostej przechodzącej przez O.*

I odwrotnie, przez podobne rozumowanie znaleźlibyśmy, że *dla wszystkich punktów leżących na prostej, przechodzącej przez O, stosunek rzędnej do odciętej jest jeden i ten sam.*

Twierdzenie to możemy wyrazić jeszcze inaczej. Jeżeli $y:x = a$, to $y = ax$; a zatem *wszystkie punkty, których spółrzędne czynią zadość równaniu:*

$$y = ax,$$

leżą na prostej; i odwrotnie: *spółrzędne wszystkich punktów* *prostej OP czynią zadość temu równaniu.* Dlatego też równanie to nazwiemy *równaniem prostej OP.*

Jeżeli punkt P przesuwać będziemy wzdłuż prostej OP od strony lewej ku prawej, to obie spółrzędne będą się zwiększały nieustannie; przy przesuwaniu punktu P w stronę przeciwną obie spółrzędne będą się stawały coraz mniejsze.

Nie uciekając się do pośrednictwa punktu P można powiedzieć, że jeżeli w równaniu $y = ax$ wielkość *zmienna* x wzrasta, to i zmienna y wzrasta; jeżeli x maleje, to i y maleje. Gdybyśmy jednak za a przyjęli jakąkolwiek liczbę ujemną, np. $-\frac{1}{2}$, to przekonalibyśmy się, że przy wzrastającem x, y maleje, przy malejącem x, y wzrasta.

ZADANIA XIV.

1. Zmienna y jest proporcjonalna do x; wartości $x = 1$ odpowiada $y = 3$. Znaleźć y, odpowiadające wartości $x = 2$.

2. Dowieść, że jeżeli zbiory liczb x i y są sobie podporządkowane w ten sposób, że stosunek sum kwadratów odpowiadających sobie liczb do różnicy kwadratów tych liczb jest stały, wtedy stosunek sumy tych liczb do ich różnicy jest również stały. Obliczyć spółczynnik proporcjonalności.

3. Zbiory liczb x i y są sobie tak podporządkowane, że $3x + 5y$ jest proporcjonalne do $5x + 3y$ i że wartości $x = 5$ odpowiada $y = 2$. Dowieść, że podporządkowanie jest proporcjonalnością i znaleźć spółczynnik proporcjonalności.

4. Trzy zbiory liczb x, y, z są sobie podporządkowane w ten sposób, że x jest proporcjonalne do $ny + z$ i że odpowiadają sobie następujące wartości: $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$, a także: $x = 7$, $y = 2$, $z = 3$; znaleźć n.

5. Trzy zbiory liczb x, y, z są sobie podporządkowane w ten sposób, że x jest proporcjonalne do iloczynu yz (»x jest proporcjonalne jednocześnie do y i do z«, por. § 183). Wartości $x = a$ niech odpowiadają $y = b$ i $z = c$; znaleźć x, jeżeli $y = b^2$, $z = c^2$.

6. Jeżeli zbiór liczb x przedstawimy w zwykły sposób przez punkty osi odciętych, a zbiór liczb y podobnie przez punkty osi rzędnych (§ 184) i jeżeli te zbiory są proporcjonalne, wtedy proste, łączące każde dwa punkty, które przedstawiają odpowiadające sobie liczby, są do siebie wszystkie równoległe (dowód?). Przedstawić w ten sposób na papierze kratkowanym zależności proporcjonalne, rozpatrywane w §§ 169 i 171. Zastosować do następnych zadań.

7. Dowieść, że zbiór wszystkich liczb, spełniających warunek $0 \leqslant y \leqslant b$ można uczynić proporcjonalnym do zbioru wszystkich liczb spełniających warunek $0 \leqslant x \leqslant a$. Jaki będzie spółczynnik proporcjonalności?

8. Zbiór wszystkich liczb całkowitych można dwojakim sposobem uczynić proporcjonalnym do zbioru wszystkich liczb całkowitych. Jaki jest spółczynnik proporcjonalności w każdym z tych dwóch przypadków?

9. Zbiór wszystkich dodatnich ułamków nieskracalnych o mianownikach 2 i 3 można uczynić proporcjonalnym do zbioru liczb naturalnych. Jaki obierzemy spółczynnik proporcjonalności? Czy wszystkie liczby naturalne należeć będą do drugiego zbioru? Jeżeli nie, to jakie mianowicie?

10. Zbiór wszystkich liczb niewymiernych podobnych do $\sqrt{2}$ (§ 76) można uczynić proporcjonalnym do zbioru wszystkich liczb niewymiernych podobnych do $\sqrt{3}$. Jaki spółczynnik proporcjonalności trzeba zastosować?

XV.

Funkcja linjowa.

185. Równanie

$$y = ax + b,$$

w którem a, b oznaczają jakiekolwiek liczby stałe, podporządkowuje *każdej* wartości x pewną *oznaczoną* wartość y, gdyż działanie, wskazane przez prawą stronę równania — polegające na pomnożeniu x przez a i na dodaniu do iloczynu liczby b — zawsze jest możliwe do wykonania.

Wyrażenie postaci $ax + b$ nazywa się »*dwumianem stopnia pierwszego* względem x«, »*funkcją stopnia pierwszego*«, *albo* »*funkcją linjową*« zmiennej x.

186. *Funkcję nazywamy rosnącą, jeżeli większej z dwóch dowolnych wartości zmiennej niezależnej odpowiada większa wartość funkcji.*

Funkcję nazywamy malejącą, jeżeli większej z dwóch dowolnych wartości zmiennej niezależnej odpowiada mniejsza wartość funkcji.

187. *Funkcja $ax + b$ jest rosnąca lub malejąca, zależnie od tego, czy a jest dodatnie czy ujemne.*

Przypuśćmy bowiem, że $a > 0$ i że x_1, x_2 są jakiemikolwiek liczbami, spełniającemi warunek:

$$x_1 < x_2.$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez *dodatnią* wielkość a, dostaniemy

$$ax_1 < ax_2,$$

a dodając do obu stron b:

$$ax_1 + b < ax_2 + b.$$

Pierwsza strona tej nierówności przedstawia wartość funkcji y, odpowiadającą wartości x_1 zmiennej niezależnej, druga — wartość tej samej funkcji, odpowiadającą *większej* wartości zmiennej niezależnej: podług określenia § 186, funkcja jest przeto *rosnąca.*

Podobnie, jeżeli $a < 0$, to z nierówności

$$x_1 < x_2$$

wynika:
$$ax_1 > ax_2,$$

a następnie:

$$ax_1 + b > ax_2 + b,$$

funkcja jest więc *malejąca.*

188. *Funkcji $ax+b$ można nadać dowolną wielkość, obierając odpowiednią wartość dla x, w założeniu, że $a \neq 0$.*

»$\neq$« oznacza »nie równa się« (p. § 91).

Przypuśćmy, że dowolną wielkością, którą chcemy nadać funkcji, jest k; należy więc obrać dla x wartość spełniającą warunek

$$ax+b=k,$$

czyli:

$$x=\frac{k-b}{a}.$$

Dla każdego k otrzymamy jedną i tylko jedną wartość x, gdyż a jest podług założenia różne od 0.

189. *Przykłady.* 1) Funkcja

$$y=5x-1$$

jest rosnąca, gdyż $a=5>0$; nadając np. x różne wartości od -3 do $+3$, otrzymywać będziemy dla y wartości wzrastające od

$$y=5\cdot-3-1=-16$$

do:

$$y=5\cdot 3-1=14.$$

Chcąc, ażeby funkcja osiągnęła wartość $k=100$, musimy uczynić:

$$5x-1=100,$$

czyli

$$x=\frac{101}{5}=20\frac{1}{5}.$$

Dla każdego $x>20\frac{1}{5}$ jest $y>100$.

2) Funkcja

$$y=-0{,}1\cdot x+2,5$$

jest malejąca, gdyż $a=-0{,}1<0$; jeżeli, jak w poprzednim przykładzie, uczynimy $x=-3$, to $y=-0{,}1\cdot-3+2,5=2,8$; jeżeli $x=3$, to $y=-0{,}1\cdot 3+2,5=2,2$; jeżeli zaś:

$$-3<x<3;$$

wtedy:

$$2,8>y>2,2.$$

Ażeby uczynić $y=100$, czyli

$$-0{,}1\cdot x+2,5=100,$$

należy x nadać wartość:

$$x = \frac{100 - 2,5}{-0,1} = -975.$$

Dla każdego $x < -975$ jest $y > 100$.

Z tych dwóch przykładów widać, że możemy uczynić y tak wielkim, jak zechcemy, jeżeli tylko uczynimy x dostatecznie wielkim co do wartości bezwzględnej.

190. *Mówimy, że funkcja y zmiannej x rośnie wraz z x do nieskończoności, jeżeli do każdej dowolnie wielkiej liczby dodatniej p można znaleźć taką liczbę dodatnią q, ażeby każdej wartości x, spełniającej warunek*

$$|x| > q,$$

odpowiadała wartość funkcji y, spełniająca warunek

$$|y| > p.$$

191. *Funkcja $y = ax + b$ rośnie wraz z x do nieskończoności, jeżeli a nie jest zerem.*

Rzeczywiście, ponieważ

$$|ax + b| \geqq |ax| - |b|,$$

przeto na pewno będzie

$$|ax + b| > p,$$

jeżeli uczynimy

$$|ax| - |b| > p,$$

czyli:
$$|ax| > p + |b|,$$

a więc·

$$|x| > \frac{p + |b|}{|a|};$$

oznaczając prawą stronę tej nierówności przez q, znajdziemy, że dla każdego x, spełniającego warunek

$$|x| > q,$$

odpowiednia wartość funkcji y spełnia warunek:

$$|y| > p.$$

192. Stosując ten wzór do poprzednich przykładów (§ 189), znajdziemy dla $p = 100$ w pierwszym przypadku

$$q = \frac{100 + 1}{5} = 20\frac{1}{5},$$

w drugim:

$$q = \frac{100 + 2,5}{0,1} = 1025.$$

Czyniąc w pierwszym przykładzie

$$x > 20\frac{1}{5}, \text{ lub } x < -20\frac{1}{5},$$

w drugim $\qquad x > 1025$, lub $x < -1025$,

otrzymywać będziemy tylko takie y, których wartość bezwzględna przewyższa 100.

193. *Jeżeli zbiór liczb tak jest określony, że należą do niego liczby mające wartość bezwzględną większą od każdej dowolnie obranej liczby dodatniej, wtedy mówimy, że »nieskończoność należy do tego zbioru«.*

Tak np. nieskończoność należy do zbioru wszystkich liczb naturalnych, gdyż jakkolwiek wielką liczbę pomyślimy, zawsze istnieją takie liczby naturalne, które są od niej większe.

Zbiór wszystkich liczb ujemnych również »zawiera nieskończoność«, gdyż jakkolwiek wielką liczbę dodatnią pomyślimy, zawsze możemy wskazać liczbę ujemną, której wartość bezwzględna jest większa od tej liczby dodatniej.

Wyraz »nieskończoność« zastępuje się zwykle znakiem »∞«.

Jeżeli ∞ należy do zbioru liczb x i do zbioru liczb y i jeżeli te dwa zbiory zostały sobie tak podporządkowane, że y rośnie wraz z x do nieskończoności (§ 190), wtedy mówimy, że »nieskończenie wielkiemu x odpowiada nieskończenie wielkie y«, albo krócej, że »jeżeli $x \to \infty$, to $y \to \infty$«.

194. Z przykładów § 189 widać, że x i y mogą rosnąć do nieskończoności bądź »przez wartości dodatnie«, bądź »przez wartości ujemne«; w przykładzie 1), w którym $a > 0$, y rośnie do ∞ przez wartości dodatnie, jeżeli x rośnie do ∞ przez wartości dodatnie; y rośnie do nieskończoności przez wartości ujemne, jeżeli x rośnie do ∞ przez wartości ujemne.

Notujemy to krótko w ten sposób:

Jeżeli $\quad x \to +\infty$, to $y \to +\infty$

» $\quad x \to -\infty$, to $y \to -\infty$,

albo jeszcze krócej:

jeżeli $\quad x \to \pm\infty$, to $y \to \pm\infty$.

Podobnie zanotujemy dla drugiego przykładu, w którym $a < 0$:

Jeżeli $\quad x \to +\infty$, to $y \to -\infty$

» $\quad x \to -\infty$, to $y \to +\infty$

lub krócej:

jeżeli $\quad x \to \pm\infty$, to $y \to \mp\infty$,

gdyż jeżeli $|x| > q$, to dodatnim x odpowiadają ujemne y, ujemnym x dodatnie y.

195. W ogólności, czyniąc x dostatecznie wielkim co do wartości bezwzględnej, dostaniemy

$$|ax| > |b|;$$

a więc dla dostatecznie wielkich $|x|$ funkcja $ax + b$ ma ten sam znak, co ax; jeżeli więc

$a > 0$, to przy $x \to \pm\infty$ jest $y \to \pm\infty$

$a < 0$, $\quad x \to \pm\infty \quad y \to \mp\infty$

Zmienność funkcji $y = ax + b$ możemy więc przedstawić zapomocą następującej tabliczki:

$$y = ax + b$$

$a > 0$	$-\infty < x$	$< -\frac{b}{a} < x$	$< +\infty$
	$-\infty < y$	$< 0 < y$	$< +\infty$
$a < 0$	$-\infty < x$	$< -\frac{b}{a} < x$	$< +\infty$
	$+\infty > y$	$> 0 > y$	$> -\infty$
$a = 0$	$-\infty <$	x	$< +\infty$
		$y = b$	

196. Jeżeli obierzemy układ spółrzędnych i znajdziemy kilka punktów, których spółrzędne czynią zadość jednemu z dwóch równań, rozpatrywanych w § 189, to przekonamy się, że wszystkie otrzymane punkty leżą na jednej prostej. W ogólności dowiedziemy, że *wszystkie punkty, których spółrzędne względem dowolnie obranego układu spółrzędnych na płaszczyźnie czynią zadość równaniu stopnia pierwszego*

$$Ax + By + C = 0,$$

leżą na jednej prostej, a spółrzędne każdego punktu tej prostej czynią zadość powyższemu równaniu.

Spółczynniki A, B, C mogą być jakiekolwiek, zakładamy jedynie, że przynajmniej jedna z wielkości A, B jest różna od 0, gdyż w przeciwnym razie równanie nie zawierałoby spółrzędnych.

Rozróżniamy następujące przypadki:

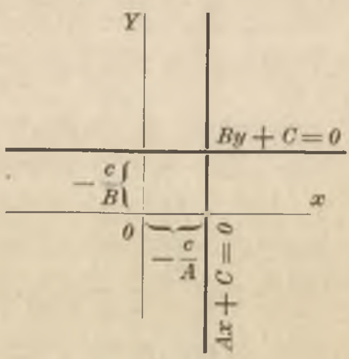
1) $B = 0$, równanie przyjmuje postać

$$Ax + C = 0,$$

skąd:

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Każdy punkt, którego spółrzędne czynią zadość temu równaniu, ma odciętą $-\frac{C}{A}$, jest więc położony na równoległej do osi rzędnych, poprowadzonej od niej w odległości $-\frac{C}{A}$; odwrotnie, każdy punkt tej równoległej ma odciętą $-\frac{C}{A}$ (rys. 5).



Rys. 5.

2) $A = 0$, równanie przyjmuje postać:

$$By + C = 0.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku znajdziemy, że każdy punkt, którego spółrzędne czynią zadość temu równaniu, leży na prostej równoległej do osi odciętych, przecinającej oś rzędnych w punkcie, którego odległość od *0* jest $-\frac{C}{B}$; i odwrotnie, spółrzędne każdego punktu tej prostej czynią zadość powyższemu równaniu.

3) $C=0$; A, B różne od 0; równanie przyjmuje postać:

$$Ax+By=0,$$

czyli

$$y=-\frac{A}{B}x,$$

albo, czyniąc

$$-\frac{A}{B}=a:$$

$$y=ax.$$

Przypadek ten rozpatrywaliśmy w § 184: wszystkie punkty, których spółrzędne czynią zadość temu równaniu, leżą na jednej prostej, przechodzącej przez początek spółrzędnych, a spółrzędne każdego punktu tej prostej, czynią zadość równaniu.

4) $B=0$; $C=0$; $A\neq 0$; równanie przyjmuje postać:

$$Ax=0,$$

czyli

$$x=0.$$

Temu równaniu czynią zadość spółrzędne każdego punktu osi rzędnych, i tylko takiego punktu.

5) $A=0$; $C=0$; $B\neq 0$; równanie przyjmuje postać:

$$By=0,$$

czyli:

$$y=0.$$

Każdy punkt, którego rzędna jest zerem, należy do osi dciętych i każdy punkt tej osi ma rzędną 0.

6) Wszystkie trzy spółczynniki A, B, C różne od 0. Równaniu

$$Ax+By+C=0$$

można nadać postać:

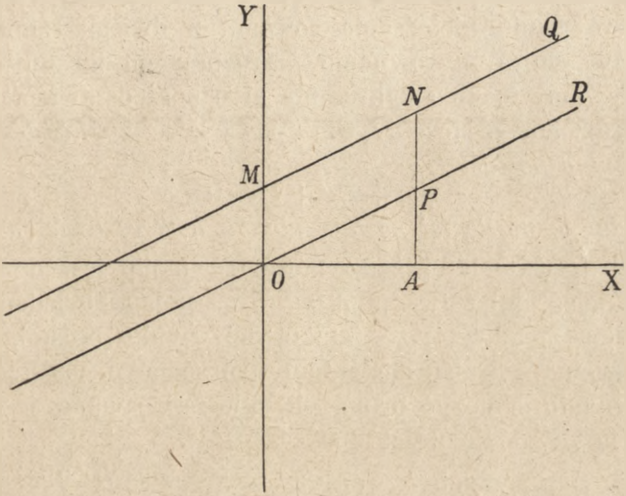
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

albo, czyniąc $\quad -\frac{A}{B}=a\,;\ -\frac{C}{B}=b$:

$$y=ax+b.$$

Znajdźmy na osi $0Y$ punkt M, mający rzędną b (rys. 6) i poprowadźmy prostą $0R$, której spółrzędne czynią zadość równaniu

$$y=ax.$$



Rys. 6.

Ażeby znaleźć punkt N, którego odciętą jest x, a rzędną $y=ax+b$, odmierzmy na osi odciętych $0A=x$ i poprowadźmy przez A równoległą do $0Y$. Przypuśćmy, że ta prosta przecina $0R$ w punkcie P, wtedy

$$AP=ax$$

(jeżeli na prostej AP obierzemy zwrot dodatni w tę samą stronę od osi odciętych, co na $0Y$); odmierzając na AP od P odcinek $PN=b$, a więc $=0M$, znajdziemy żądany punkt N, którego spółrzędne są x i $y=ax+b$. Z konstrukcji okazuje się, że $0MNP$ musi być równoległobokiem, gdyż odcinki $0M$ i PN są równe i mają ten sam zwrot; punkt N leży przeto na prostej MQ poprowadzonej przez M równolegle do $0R$.

Odwrotnie, spółrzędne x, y każdego punktu N prostej MQ czynią zadość równaniu

$$y = ax + b,$$

gdyż jeżeli równoległa do $0Y$, poprowadzona przez N, przecina prostą $0R$ w punkcie P, wtedy

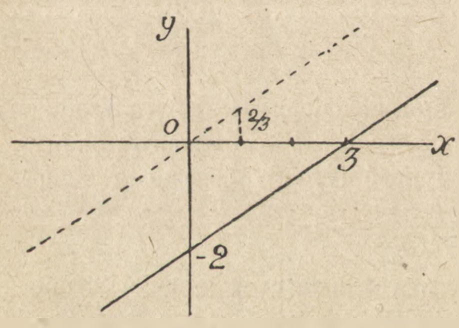
$$y = AN = AP + PN = ax + b.$$

197. Zbiór punktów, należących do jednej płaszczyzny i takich, że spółrzędne każdego z nich czynią zadość temu samemu równaniu nietożsamościowemu z dwiema zmiennemi, nazywamy »linją«, a równanie — »równaniem tej linji«; linję taką nazywamy także »wykresem« albo »przedstawieniem graficznem równania«. Możemy więc powiedzieć, że *każda prosta ma równanie postaci*

$$Ax + By + C = 0$$

i że każde równanie tej postaci ma za wykres linję prostą.

Ażeby wykreślić prostą, której równanie jest dane, wystarczy znaleźć albo dwa punkty tej prostej, albo jeden punkt i kierunek. Chcąc znaleźć jakikolwiek punkt prostej, można obrać dowolną wartość dla jednej spółrzędnej i, podstawiwszy ją w równaniu, obliczyć drugą; zwykle najdogodniej jest obrać 0 za jedną ze spółrzędnych.



Rys. 7.

Jeżeli np. chcemy znaleźć wykres równania

$$2x - 3y - 6 = 0,$$

znajdujemy dla $x = 0$, $-3y - 6 = 0$, czyli $y = -2$; czyniąc zaś $y = 0$, dostaniemy $2x - 6 = 0$, czyli $x = 3$. Szukana prosta łączy więc punkt 3 osi odciętych z punktem 2 osi rzędnych.

Inny sposób polega na tem, że nadajemy równaniu postać:

$$y = \frac{2}{3}x - 2,$$

wykreślamy prostą odpowiadającą równaniu

$$y = \frac{2}{3}x,$$

a następnie równoległą do niej przez punkt —2 osi rzędnych. Prosta mająca równanie

$$y = \frac{2}{3}x$$

przechodzi przez *0*; drugi jej punkt znajdziemy, zakładając $x = 1$, a więc $y = \frac{2}{3}$.

Jeżeli spółczynnik jednej ze spółrzędnych jest 0, wtedy żadna z tych metod nie da się zastosować, ale wtedy wiemy, że prosta jest równoległa do jednej z osi.

198. W § 187 widzieliśmy, że funkcja

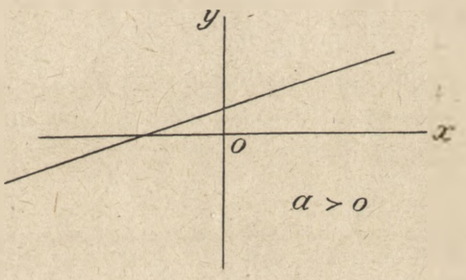
$$y = ax + b$$

rośnie wraz z x, jeżeli $a > 0$;

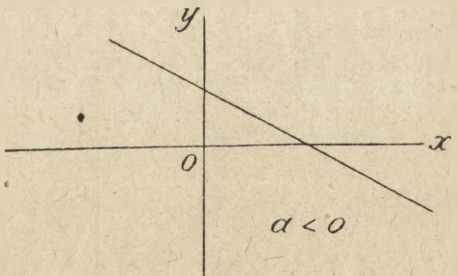
maleje przy rosnącym x, jeżeli $a < 0$;

ma wartość stałą, jeżeli $a = 0$.

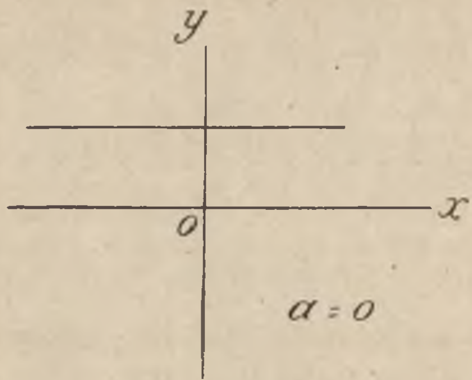
Wykres w pierwszym przypadku jest prostą, wznoszącą się od strony lewej ku prawej (rys. 8); w drugim obniżającą się (rys. 9); w trzecim równoległą do osi odciętych (rys. 10).



Rys. 8.



Rys. 9.



Rys. 10.

199. Niech będzie dane równanie:

$$2y - x = 2;$$

przenosząc x na drugą stronę i dzieląc przez 2, dostaniemy:

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

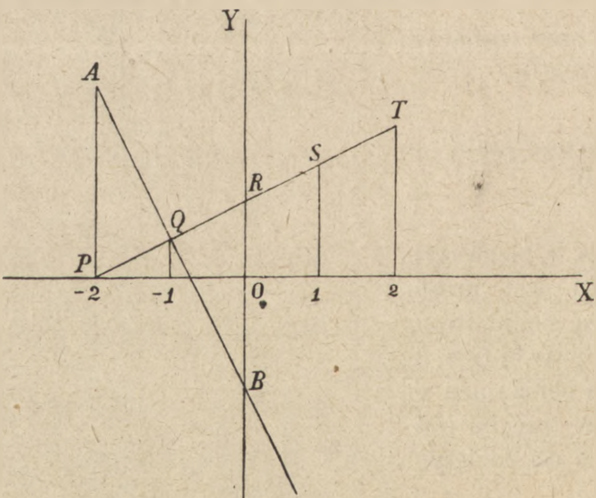
Podstawiając w tem równaniu zamiast x kolejno dowolnie obrane wielkości, otrzymamy odpowiednie wartości dla y:

$x =$ . . . $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$y =$ . . . $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

Punkty: . . . $P, Q, R, S, T, \ldots$

Obierając dowolnie jednostkę długości, np. 1 cm., i przyjmując tak znalezione x, y za spółrzędne, dostaniemy szereg punktów $PQRST$... leżących na linji prostej.



Rys. 11.

Przypuśćmy, że jest dane jeszcze drugie równanie:

$$y = -2x - \frac{3}{2}.$$

Znajdziemy podobnie jak poprzednio:

$$\begin{array}{llllll} x = & \ldots -2, & -1, & 0, & 1, & 2 \ldots \\ y = & \ldots \frac{5}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{3}{2}, & -\frac{7}{2}, & -\frac{11}{2} \ldots \end{array}$$

Punkty: . . . . . A, Q B, ...

Proste PT i AB przecinają się w punkcie Q, którego odciętą jest -1, a rzędną $\frac{1}{2}$. Wartości te czynią zadość równaniom obu prostych; a zatem, *ażeby znaleźć spółrzędne punktu przecięcia dwóch prostych, należy, uważając zmienne x, y za niewiadome, rozwiązać równania obu prostych względem tych niewiadomych.*

I rzeczywiście rozwiązując równania:

$$2y - x = 2$$

$$y = -2x - \frac{3}{2},$$

dostaniemy $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$.

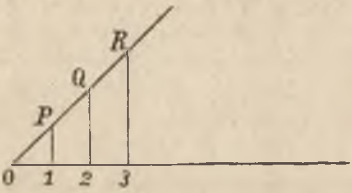
200. Na zasadzie tego, co było wyłożone w tym rozdziale, można układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi rozwiązać sposobem graficznym: należy wyrysować proste, odpowiadające tym równaniom, znaleźć ich punkt przecięcia i zmierzyć cyrklem spółrzędne tego punktu. Ale w wielu zadaniach można uniknąć układania równań i wogóle wszelkiego rachunku, a rozwiązywać je wyłącznie przy pomocy rysunku.

Rozwiążmy następujące zadanie:

Pociąg pospieszny wychodzi ze stacji A o godz. 6 m. 10 i przychodzi do stacji C, nie zatrzymując się w drodze, o g. 7 m. 00. Pociąg osobowy wychodzi z C o g. 6 m. 00 i przychodzi do A o g. 7 m. 25, zatrzymawszy się na stacji B od g. 6 m. 24 do

.g 6 m. 34. Kiedy i na jakiej odległości od *A* pociągi się spotkają, jeżeli odległość *B* od *A* wynosi 34 wiorst, a *C* od *A* 50 wiorst?

Ruch każdego pociągu uwidocznić trzeba w ten sposób, ażeby z figury można było odczytać, w jakiej odległości od stacji początkowej *A* pociąg znajduje się w każdym dowolnie obranym czasie. W tym celu wypiszmy liczby minut wzdłuż osi odciętych w równych odległościach, a za rzędną w każdej chwili przyjmiemy odcinek proporcjonalny do odległości pociągu od stacji *A*. Końce rzędnych utworzą pewną linję, która będzie prostą, jeżeli ruch będzie jednostajny, gdyż w tym wypadku stosunki rzędnych do odciętych będą równe, — a mianowicie: równe prędkości pociągu; — trójkąty *OP*1, *OQ*2, *OR*3,... będą podobne, z czego wypada, że punkty *PQR*... leżą na linji prostej. Dosyć jest więc wiedzieć, o której godzinie pociąg wyszedł z jednej stacji i o której przyszedł na następną, ażeby móc tę linję wykreślić.



Rys. 12.

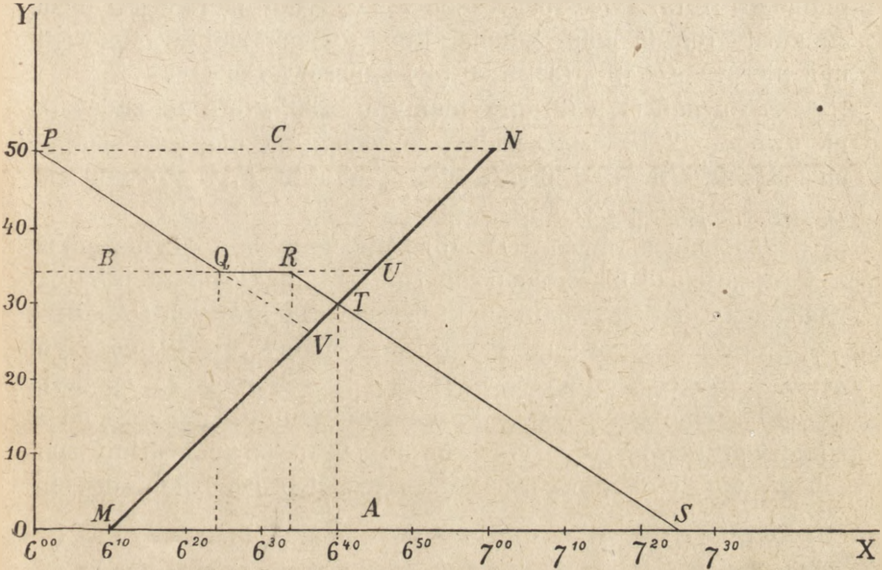
Na rysunku 13-ym, przedstawiającym bieg pociągów, o których mowa w zadaniu, jednej minucie odpowiada długość 1 mm. na osi *OX*, a jednej wiorście długość 1 mm. na *OY*. Bieg pociągu pospiesznego idącego z *A* do *C* jest przedstawiony zapomocą linji *MN*; pociąg osobowy, idący w przeciwnym kierunku, daje linję łamaną *PQRS*; odcinek *Q*R równoległy do *OX* odpowiada dzisięciominutowemu postojowi tego pociągu na stacji *B*. Punkt przecięcia *T* linji *MN* i *PQRS* odpowiada tej chwili, w której odległości obu pociągów od *A* są równe, t. j. kiedy one się spotkają. Wystarcza więc zmierzyć obie spółrzędne punktu *T*, ażeby znaleźć czas i miejsce spotkania. Czyniąc to, znajdziemy, że spotkanie nastąpiło o godz. 6 min. 40 na odległości 30 wiorst od stacji *A*.

201. Rozwiążemy to samo zadanie zapomocą rachunku. Pociąg pospieszny przebywa 50 wiorst w 50 minut, prędkość jego wynosi więc 1 wiorstę na minutę. A ponieważ wyrusza o 6^{10}, zatem w x minut po godz. 6-ej odległość jego y od A będzie:

$$y = x - 10 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Równanie to przedstawia bieg pociągu od 6^{10} do 7^{00}, a zatem jest prawdziwe, jeżeli:

$$10 < x < 60 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1^a)$$



Rys. 13.

Dla pociągu osobowego znajdziemy w podobny sposób, że prędkość jego na odstępie CB wynosi $\frac{2}{3}$ wiorsty na minutę, skąd:

$$50 - y = \frac{2}{3} x. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

a ponieważ ruch ten trwa od 6^{00} do 6^{24}, więc równanie to jest prawdziwe tylko wtedy, jeżeli:

$$0 < x < 24 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2^a)$$

W czasie postoju na stacji B będzie:

$$y = 34 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

i:

$$24 < x < 34 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3^a)$$

i wreszcie na odstępie BA:

$$y=\frac{2}{3}(85-x) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$34 < x < 85 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

Ponieważ nie wiemy zgóry, na którym odstępie nastąpi spotkanie, musimy więc kolejno kombinować równanie (1) z równaniami (2), (3) i (4), przyczem takie tylko pierwiastki będą stanowiły rozwiązanie zadania, które czynią zadość odpowiedniej nierówności (2^a), (3^a) albo (4^a) i nierówności (1^a).

Z równań (1) i (2) otrzymamy $x=36$, które nie zadowala nierówności (2^a), z czego widać, że pociągi nie mogą się spotkać na odstępie CB ($x=36$ jest odciętą punktu V, w którym spotykają się proste PQ i MN).

Podobnie z równań (1) i (3) znajdziemy $x=44$, niezgodne z nierównością (3^a); a zatem pociągi nie spotkają się na stacji B (rozwiązanie tych równań daje punkt przecięcia U prostych QR i MN).

Wreszcie z równań (1) i (4) otrzymamy $x=40$, co czyni zadość zarówno nierówności (4^a) jak (1^a); a zatem pociągi spotkają się na odstępie BA o godz. 6^{40}; odległość punktu spotkania od A znajdziemy z równania (1) równą 30, jak to już znaleźliśmy sposobem graficznym, który prościej i prędzej doprowadził nas do celu.

202. Równanie

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (1)$$

czyli:

$$y=-\frac{A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1}$$

(w założeniu, że B_1 nie jest zerem) przedstawia prostą, która przecina oś rzędnych w punkcie, mającym za rzędną $-\frac{C_1}{B_1}$ i która jest równoległa do prostej, łączącej 0 z punktem, mającym odciętą 1 i rzędną $-\frac{A_1}{B_1}$ (§ 197); podobnie równanie

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad (2)$$

w którym B_2 nie jest zerem, przedstawia prostą, przecinającą

OY w punkcie, mającym rzędną $-\frac{C_2}{B_2}$ i równoległą do prostej przechodzącej przez początek spółrzędnych i przez punkt o odciętej 1 i rzędnej $-\frac{A_2}{B_2}$; obie proste mają więc ten sam kierunek, jeżeli

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2},$$

w przeciwnym razie mają jeden i tylko jeden punkt wspólny; spółrzędne tego punktu znajdziemy, rozwiązując układ równań (1) i (2).

Jeżeli

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2};\ \frac{C_1}{B_1}\neq\frac{C_2}{B_2},$$

jeżeli więc obie proste są równoległe do tej samej prostej przechodzącej przez 0, ale przecinają oś OY w dwóch punktach różnych, wtedy te proste nie mają punktów wspólnych, niema więc takiej pary wielkości x, y, któraby czyniła zadość obu równaniom (1) i (2).

Jeżeli wreszcie

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2};\ \frac{C_1}{B_1}=\frac{C_2}{B_2},$$

czyli:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

wtedy obie proste są równoległe do jednej prostej i mają punkt wspólny, a więc równania (1) i (2) przedstawiają tę samą prostą; każda para x, y, czyniąca zadość jednemu równaniu, sprawdza i drugie równanie.

Możemy więc powiedzieć, że *dwa równania stopnia pierwszego z dwiema zmiennemi przedstawiają tę samą prostą, jeżeli spółczynniki odpowiednie w obu równaniach są proporcjonalne.*

W dowodzeniu założyliśmy wprawdzie, że B_1 i B_2 są różne od zera, ale ten przypadek nie stanowi wyjątku, gdyż zakładając np. $B_1=0$, otrzymamy równanie

$$A_1x + C_1 = 0,$$

czyli
$$x = -\frac{C_1}{A_1},$$

to jest równanie prostej równoległej do osi rzędnych i przecinającej oś odciętych w punkcie $-\frac{C_1}{A_1}$; jeżeli równanie

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

ma przedstawiać tę samą prostą, wtedy ta prosta musi być również równoległa do OY, i przechodzić przez ten sam punkt osi odciętych, a więc musi być $B_2 = 0$ i

$$-\frac{C_2}{A_2} = -\frac{C_1}{A_1}, \text{ czyli:}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

ZADANIA XV.

1. Przedstawić graficznie, przyjmując 1 cm. za jedność, przebieg zmiennej y, jeżeli

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x,$$

a x zmienia się od -2 do $+2$.

2. Znaleźć punkt przecięcia prostych, których równania są:

$$x - 3y = 7,$$
$$3x - y = 1.$$

3. Znaleźć graficznie, o jakich godzinach i minutach jedna skazówka zegarka zakrywa drugą. Na rysunku niech jednej godzinie odpowiada długość 18 mm. na osi OX, i jednej podziałce minutowej długość 1 mm. na osi OY.

4. O jakich godzinach i minutach jedna skazówka zegarka stanowi przedłużenie drugiej?

5. Gdzie leżą wszystkie punkty, dla których

$$1 < x < 3,$$
$$y < 0\,?$$

6. Gdzie leżą wszystkie punkty, dla których

$$-6 < x < 0$$

$$0 < y < 1 - \frac{1}{2}x?$$

7. Przedstawić graficznie bieg pociągów, podług załączonego rozkładu, oraz oznaczyć czas i miejsce ich spotkania.

Przych.	Odch.		Kilometry	Stacje		Przych.	Odch.
8^{40}	—		00	Warszawa		—	7^{45}
8^{17}	8^{19}	↑	16	Pruszków	↓	—	—
7^{57}	8^{00}	│	30	Grodzisk	│	—	—
7^{36}	7^{40}	│	43	Żyrardów	│	8^{33}	8^{34}
7^{20}	7^{21}	│	55	Radziwiłłów	│	—	—
	7^{06}	│	66	Skierniewice	↓	9^{00}	

8. Wielkości t nadać taką wartość, ażeby proste, przedstawione przez równania

$$y = tx + 2;$$

$$3y - 1 = x + 3$$

były równoległe.

9. To samo dla równań:

$$(t+1)x + ty = 2;$$

$$tx + (t+1)y = 1.$$

Rozwiązania zadań.

I.

1. $4x^4 y^6 z^8$. **2.** $-8x^6 y^6 z^9$. **3.** $81a^4 b^8 c^{12}$. **4.** $\frac{16x^4}{81y^4}$.

. $\frac{256x^4}{81y^8}$. **6.** $\frac{x^{12}}{y^8 z^8}$. **7.** $a^6 - 3a^4 b^2 + 3a^2 b^4 - b^6$.

8. $1 - 3x + 3x^2 - x^3$. **9.** $8 + 12x + 6x^2 + x^3$.

10. $27 - 54x + 36x^2 - 8x^3$. **11.** $1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

12. $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. **13.** $2a^3 x^3 + 6ab^2 xy^2$.

14. $1 - 4x^2 + 6x^4 - 4x^6 + x^8$. **15.** $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$.

16. $1 + 2x - x^2 - 2x^3 + x^4$. **17.** $1 + 6x + 5x^2 - 12x^3 + 4x^4$.

18. $1 - 6x + 15x^2 - 18x^3 + 9x^4$. **19.** $2(4 + 25x^2 + 16x^4)$.

20. $1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$.

21. $1 + 3x - 5x^3 + 3x^5 - x^6$. **22.** $1 - 2x + 3x^2 - x^4 + 2x^5 + x^6$.

23. $1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 25x^4 + 24x^5 + 16x^6$.

24. $4(ab + ad + bc + cd)$. **25.** *a*) 2304. *b*) 9801. *c*) 90601. *d*) 180625. *e*) 69789316. *f*) 69806025. *g*) 99980001.

26. *a*) $\frac{49}{144}$. *b*) $21\frac{4}{25}$. *c*) 0,021025. *d*) 79,3881. *e*) 7938,81.

27. *f*) 27488949 i 27593909.

II.

1. $3a^2 b^2$. **2.** $2ab$. **3.** $-4ab^2$. **4.** $2ab^2 c^3$. **5.** $-ab^2 c^3$.

6. $\frac{5ab}{7c^2}$. **7.** $-\frac{6ab^3}{5c^2}$. **8.** $\frac{3a}{bc}$. **9.** $\frac{26}{25}$. **10.** $\frac{34}{45}$. **11.** $\frac{28}{15}$.

12. $4a+5b$. **13.** $7a^2-6b^2$. **14.** $6x^3+1$. **15.** $\frac{3x^2-4}{2x-3}$.
16. $2x+3y$. **17.** $12x^2+4y^3$. **18.** $x-a-b$. **19.** 61.
20. 72. **21.** 87. **22.** 99. **23.** 27. **24.** 35. **25.** 54.
26. 88. **27.** 92. **28.** $1-2x+3x^2$. **29.** $2x^4-x^2-2$.
30. $\frac{2x}{3y}-\frac{4x}{5z}-\frac{3y}{4z}$. **31.** x^2+x+1. **32.** $2x^2+4cx-3c^2$.
33. $1-3x+4x^2$.

III.

1. *a*) 3. *b*) 5. *c*) 10.
2. *a*) 2. *b*) 4. *c*) 6. *d*) 9. *e*) 10.
3. *a*) 5; 3; 2; 1; 1... *b*) 10; 4; 3; 2; 2; 1; 1... *c*) 18; 7; 4; 3; 2; 2; 2; 1; 1...

IV.

1. 123. **2.** 321. **3.** 407. **4.** 55,5. **5.** 6,42. **6.** 0,914. **7.** 5420. **8.** 0,4937. **9.** 1,8042. **10.** 0,94868. **11.** 2,49198. **12.** 0,65574. **13.** 0,09230. **14.** 11,35781. **15.** 18,63488. **16.** 27. **17.** 54. **18.** 92. **19.** 138. **20.** 39,2. **21.** 5,76. **22.** 1,442. **23.** 4,642. **24.** 14,673. **25.** 0,838. **26.** 7,047. **57.** 10,277

V.

1. 8,585. **2.** 11,725. **3.** $0{,}1714<\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}<0{,}1719$.
4. $0{,}102<\frac{\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}<0{,}105$. **5.** $9{,}897<(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2<9{,}900$.
6. $-2\sqrt[3]{0{,}4}<-1<\pi<\frac{(\sqrt{30}+\sqrt{150})^2}{100}<\frac{22}{7}<\sqrt{2}+\sqrt{3}<$
$<\sqrt[7]{23859033}$.

$\frac{a+b}{b}$; 0, 0. **11.** a, b; $\frac{(3b-a)a}{a+b}$, $\frac{(3a-b)b}{a+b}$. **12.** ± 4, ± 3; $\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** ± 15, ± 7. **14.** ± 9, ± 4. **15.** ± 3, ± 5; ± 36, $\mp\frac{23}{2}$. **16.** ± 9, ± 3; **17.** ± 8, ± 6. **18.** 5, 4; 4, 5. **19.** ± 4, ± 3; ± 3, ± 4. **20.** 2, $\frac{2}{3}$; 1, $\frac{1}{3}$. **21.** ± 5, ± 3. **22.** ± 2, ± 1; ± 1, ± 2. **23.** 0, 0; $a+b$, $a+b$; $\frac{1}{2}(a-b)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(a-b)}$, $\frac{1}{2}(a-b)\mp\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(a-b)}$.

24. $x=a:\sqrt[4]{abc}$ i t. d. **25.** ± 1, ± 2, ± 3.

26. $\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{(4b-a^3)3a}}{6a}$; $-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{(4b-a^3)3a}}{6a}$.

XII.

1. 11; 7. **2.** 10; 15. **3.** 5; 3. **4.** 7; 4. **5.** 20; 15 dla pierwszego. **6.** 756; 36; 27. **7.** Szedł $4\frac{1}{2}$ w. na godz. **8.** 343; 64 cm³. **9.** 3 m.; 4,2m. **10.** 100; 80; 60 m. Oznaczając przez x przeciwprostokątną, przez y i z przyprostokątne otrzymamy równania:

$$x^2=y^2+z^2;\ \left(y+\frac{1}{2}x\right):\left(z+\frac{1}{2}x\right)=13:11;$$

$$\left(\frac{1}{2}x+z+20\right):\left(\frac{1}{2}x+y-20\right)=13:11.$$

11. Bachus w 6 godz., Sylen w 3 godz.

Równania:

$$\frac{2}{3}y+\left(1-\frac{2y}{3x}\right)y-2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2y}{3x}\right)x;$$

$$y:x=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2y}{3x}\right):\frac{1}{2}\left(1+\frac{2y}{3x}\right).$$

XIII.

1. $108:7$. **2.** 650 cm. na sek. **3.** $7:12$; $5:8$; $2:3$; $3:4$; $8:9$. **4.** $5:27$. **5.** 14; 21. **6.** 24; 30. **7.** 20; 32. **8.** 15; 10. **9.** 6; 8. **10.** 35; 42. **11.** 4. **12.** $\frac{ab}{a+b}\cdot$ **13.** 0; $2:5$. **14.** 14. **15.** 18. **16.** 15. **17.** 12. **18.** 4. **19.** 2; $2\frac{1}{2}\cdot$ **20.** 5. **21.** 1; -1. **24.** 45; 80. **25.** 4; 6; 9. **31.** ± 1. **32.** 6.

33. $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}<\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}<\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot$

XIV.

1. 6. **2.** Jeżeli $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=n$, to $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}}$; $\frac{x+y}{x-y}=n+\sqrt{n^2-1}$. **3.** $5:2$. **4.** 2. **5.** abc. **7.** $b:a$. **8.** ± 1.
9. $1:6n$, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą naturalną; do drugiego zbioru należą wszystkie liczby naturalne podzielne przez $2n$, ale nie podzielne przez $6n$ i wszystkie liczby podzielne przez $3n$, ale nie podzielne przez $6n$.
10. $n\sqrt{3}:\sqrt{2}$, gdzie n, jest jakąkolwiek liczbą wymierną.

XV.

8. $\frac{1}{3}\cdot$ **9.** $-\frac{1}{2}\cdot$