ARTYKUŁ PIERWSZY.

O metodach elementarnych rozwiązywania zadań gieometrycznych*)

napisał

Ettore Baroni z Rzymu.

§ 1. Uwagi przedwstępne. Wiadomo, że droga naturalna, której trzeba się trzymać przy poszukiwaniu rozwiązania zadania gieometrycznego, polega na sprowadzeniu tego zadania do innego, już rozwiązanego; przytym przechodzi się od zadania danego do zadania bądź równoważnego, bądź takiego, które między swemi rozwiązaniami ma rozwiązania zadania danego; od tego przechodzi się do innego i t. d., dopóki się nie otrzyma zadania, którego rozwiązanie jest znane (analiza).

Przy tej metodzie poszukiwania, która oczywiście nie wskazuje pewnej drogi do przebycia, ale kieruje tylko naszemi dążeniami, pomocna jest figura, czyli najogólniejsze przedstawienie elementów danych oraz (jeżeli znany jest ich rodzaj) tworów poszukiwanych, z uwzględnieniem, o ile to

---

*) Prace, zużytkowane przez autora artykułu:

Lamé, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie.* Paris, 1818.

P. Serret, *Des méthodes en Géométrie* (Paris, 1855).

Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (Paris, Gauthier et Villars, 1865—68—70).

Petersen Julius, *Metodi e Teorie* per la risoluzione dei problemi di costruzioni geometriche (Trad. di V. Mollame) Copenaghen, Andr. Fred. Host e figli, 1882. [Przekład polski tej książki: Metody i teorye rozwiązywania zadań geometrycznych konstrukcyjnych, tł. K. Hertz, Warszawa, Lesman 1881.]

R. Bettazzi, *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici* (Torino, 1893).

Alexandroff Ivan, *Problèmes de Géométrie élémentaire,* trad. par D. Aitoff (Paris, Gauthier et Villars, 1899).

Enriques e Amaldi, *Elementi di Geometria,* 5-a ediz. [Przekład polski: *Zasady gieometrji dla użytku szkół średnich,* tł. W. Wojtowicz, Warszawa 1916.

możliwe, związków zachodzących między elementami poszukiwanemi i danemi.

Przyjmujemy więc za wiadomy twór poszukiwany, albo jego część, rozpatrujemy figurę, prowadzimy w razie potrzeby linje pomocnicze i staramy się przekształcić zależności pomiędzy tworami danemi i poszukiwanemi, zastępując je, — o ile to się okaże pożądanym — innemi, któreby mogły służyć do wyznaczenia tworów danych, i za pomocą których dogodniej jest wykonać omówione wyżej przejście do innego zadania.

Jeżeli to doprowadzi do zupełnego rozwiązania zadania, wtedy należy opisać konstrukcję, prowadzącą od tworów danych do poszukiwanych (o ile zadanie nie jest niemożliwe), a następnie dowieść, że twory znalezione są wszystkie, lub częściowo, rozwiązaniami danego zadania; to dowodzenie jest zbyteczne, jeżeli jesteśmy pewni, że przy postępowaniu powyższym mieliśmy do czynienia zawsze z zadaniami równoważnemi.

Wreszcie, ponieważ twory dane mogą występować w rozmaitych przypadkach, dających rozwiązania różne co do ilości i jakości, przeto trzeba starać się rozróżnić te rozmaite przypadki. Jest to rzeczą dyskusji (roztrząsania), do której należy rozpoznanie, czy twory dane w zagadnieniu mogą być całkiem ogólne, czy też muszą czynić zadość pewnym warunkom (które trzeba w takim razie wyznaczyć), ażeby zadanie mogło mieć rozwiązania.

Przez to postępowanie okazuje się, że rozwiązanie zadania polega w gruncie rzeczy na sprowadzeniu go do innych zadań, które się uważa jako już rozwiązane. Musimy więc dojść w końcu do kilku zadań podstawowych, których rozwiązanie przyjmujemy jako dane za pomocą postulatu.

Postulaty, dotyczące konstrukcji (podstawowych), za pomocą których można rozwiązywać zadania, przyjęte za podstawowe, opierają się bezpośrednio na użytku przyrządów, stosowanych przy tych konstrukcjach.

W elementarnej gieometrji płaszczyzny przyjmuje się za podstawowe konstrukcje, otrzymywane za pomocą linjału i cyrkla, a mianowicie konstrukcje następujące:

1) wyznaczenie prostej, przechodzącej przez dwa punkty dane;

2) wyznaczenie punktu wspólnego dwuch prostych danych (nie równoległych);

3) wyznaczenie okręgu koła, mającego środek dany i przechodzącego przez punkt dany;

4) wyznaczenie punktów wspólnych koła danego i danej prostej, przecinającej to koło;

5) wyznaczenie punktów wspólnych dwuch danych kół, przecinających się.

Zadanie uważa się za rozwiązalne sposobem elementarnym, jeżeli rozwiązanie jego może być sprowadzone do konstrukcji elementarnych, powyżej wymienionych.

Trzeba rozróżniać dokładnie dwa pojęcia: możliwości i rozwiązalności zadania. Zadanie jest możliwe, jeżeli ma rozwiązania; ale może się zdarzyć, że te rozwiązania nie mogą być otrzymane za pomocą podanych wyżej konstrukcji podstawowych (a więc za pomocą linjału i cyrkla); wtedy zadanie jest nierozwiązalne elementarnie.

Zaznaczamy tu wyraźnie fakt, że pojęcie rozwiązalności zadania jest względne; w znaczeniu bezwzględnym każde zadanie możliwe musiałoby być uważane za rozwiązalne, o ile się tylko zastosuje do jego rozwiązania odpowiednie konstrukcje podstawowe, wykonalne za pomocą właściwych przyrządów, więcej złożonych niż linjał i cyrkiel.

Do zadań gieometrji przestrzeni należałoby przyjąć inne konstrukcje podstawowe, a mianowicie, w zakresie elementarnym, te konstrukcje, które dotyczą wyznaczania płaszczyzn i kul oraz ich przecięć.

Jednakże w dalszym ciągu ograniczymy swoje wywody do zadań Gieometrji płaszczyzny.

§ 2. Poszukiwanie miejsc gieometrycznych. Zadania, które mogą być przedmiotem rozważania gieometrycznego, trzeba przedewszystkim podzielić na dwie klasy:

1) należą do klasy I-ej i nazywają się nieoznaczonemi te zadania, w których warunki dane nie wyznaczają jednego tworu, albo liczby skończonej figur, czyniących im zadość, ale pozostawiają jeszcze możliwość dowolnego wybrania jakiegoś elementu figury żądanej, albo też pozwalają na poddanie tej figury jeszcze jakiemuś warunkowi dodatkowemu;

2) natomiast stanowią klasę drugą i nazywają się zadaniami oznaczonemi te zadania, w których warunki dane w ogólności wyodrębniają jedną figurę, lub liczbę skończoną figur.

Najczęstszy typ nieoznaczonych zadań gieometrji płaskiej, do którego wszystkie inne w ogólności mogą być sprowadzone, polega na skonstruowaniu linji, której wszystkie punkty czynią zadość warunkowi danemu; ta linja nazywa się miejscem gieometrycznym punktów, czyniących zadość owemu warunkowi, jeżeli jest przez ten warunek scharakteryzowana w ten sposób, że każdy czyniący mu zadość punkt leży na tej linji.

Wyznaczanie miejsc gieometrycznych za pomocą środków elementarnych jest bardzo ograniczone, gdyż jedynemi linjami, które dadzą się konstruować za pomocą tych środków, są proste i koła, albo odcinki i łuki prostych i kół.

To też poszukiwanie miejsca, stanowiące zadanie rozwiązalne elementarnie, może być z łatwością dokonane na podstawie nielicznych prób, jeżeli tylko zostało skonstruowanych kilka jego poszczególnych punktów.

Jeżeli np. zostały znalezione dwa punkty, należące do szukanego miejsca, wtedy można przedewszystkim sprawdzić, czy to miejsce jest utworzone przez prostą, łączącą dwa punkty znalezione, lub też przez jakiś odcinek tej prostej, albo też przez koło, lub przez łuk koła, będącego w jakiejś zależności szczególnej od tych dwuch punktów; i t. d.

Rzeczą istotną jest o d k r y c i e linji, którą należy wyznaczyć; poczym łatwiejsze będzie dokonanie analizy zadania przez dowiedzenie, że ta linja odpowiada warunkowi danemu.

Oto kilka przykładów miejsc gieometrycznych, zasługujących na uwagę.

1) Miejscem gieometrycznym punktów płaszczyzny, dla których kwadraty odległości od dwuch punktów danych A, B mają różnicę stałą q^2, jest prosta prostopadła do łączącej dwa punkty dane.

Przypuśćmy, że P jest jednym z punktów szukanego miejsca; wtedy będzie:

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = q^2.$$

Jeżeli C jest spodkiem prostopadłej, poprowadzonej z P do AB, to będziemy mieli:

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (\overline{AP}^2 - \overline{CP}^2) - (\overline{BP}^2 - \overline{CP}^2) = q^2.$$

Biorąc pod uwagę tę zależność, widzimy, że prostopadła PC, której spadek łatwo wyznaczyć, jest miejscem szukanym.

Stąd wynika:

2) Miejscem punktów, mających jednakową potęgę względem dwuch kół danych jest prosta, prostopadła do łączącej środki kół (oś pierwiastna).

3) Miejscem środków kół, przecinających prostopadle dwa koła dane, jest część zewnętrzna osi pierwiastnej obu kół, jeżeli się one przecinają, albo cała oś pierwiastna, jeżeli koła się nie przecinają.

4) Jeżeli są dane na płaszczyźnie dwa jakiekolwiek punkty A, B, wtedy miejscem gieometrycznym takich punktów P tej płaszczyzny, że suma m razy wziętego kwadratu odcinka PA i n razy wziętego kwadratu odcinka PB jest równoważna kwadratowi q^2, jest koło, mające środek w takim punkcie C odcinka AB, że $n.AC = m.CB$.

Niech będzie P jednym z punktów tego miejsca; wtedy:

$$q^2 = m.\overline{AP}^2 + n.\overline{PB}^2\,;$$

stąd otrzymamy z łatwością, oznaczając przez C jakikolwiek punkt odcinka AB:

$$q^2 = (m+n).\overline{CP}^2 + m.\overline{AC}^2 + n.\overline{BC}^2 - 2CP.\cos\sphericalangle BCP.(nBC - mAC).$$

Jeżeli C jest takim punktem odcinka AB, że $mAC = nCB$, wtedy:

$$q^2 = (m+n)\overline{PC}^2 + m\overline{AC}^2 + n\overline{BC}^2;$$

wskutek tego $\overline{PC}^2$ jest wielkością stałą dla wszystkich punktów szukanego miejsca, a więc PC jest wielkością stałą, przeto i t. d.

Jako przypadek szczególny mamy:

5) Miejscem gieometrycznym punktów płaszczyzny, których odległości od dwuch punktów danych A, B są w stosunku równym stosunkowi odcinków p i q, jest okrąg koła.

Dla każdego punktu P tego miejsca mamy

(1) $$PA : PB = p : q.$$

Ponieważ wiemy, że na prostej AB leżą dwa punkty C, D, jeden wewnątrz, drugi zewnątrz odcinka AB, takie, że:

$$AC : CB = p : q$$
$$AD : DB = p : q,$$

przeto przychodzi odrazu na myśl, że miejscem szukanym może być koło, mające CD za średnicę. Tak jest istotnie, gdyż, jak łatwo dowieść, każdy punkt P, czyniący zadość równaniu (1), leży na okręgu tego koła, i odwrotnie: każdy punkt okręgu koła czyni zadość równaniu (1).

6) Miejscem punktów, z których dwa koła dane są widziane pod tym samym kątem, jest okrąg koła.

O, O' niech będą środkami kół, P jednym z punktów szukanego miejsca. Kąty APO i $O'PB$ są sobie równe, a trójkąty AOP, $O'PB$ są do siebie podobne; a więc:

$$PO : PO' = OA : O'B.$$

Odwrotnie, jeżeli P jest punktem, dla którego:

$$PO : PO' = OA : O'B,$$

wtedy trójkąty prostokątne OAP, $O'BP$ są podobne, a przeto kąty APO i $O'PB$ są równe. A więc miejscem szukanym jest miejsce punktów płaszczyzny, których odległości od środków O, O' są do siebie w tym samym stosunku, co promienie OA, $O'B$ dwuch kół danych.

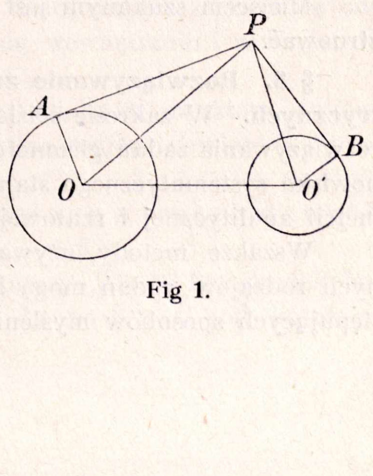

Fig 1.

7) Miejscem środków kół, widzianych z dwuch punktów danych A, B pod kątami danemi α, β, jest okrąg koła.

Można znaleźć jeden punkt tego miejsca, budując dwa trójkąty prostokątne, mające jedną przyprostokątną wspólną, większą od połowy odcinka AB, a kąty ostre, przyległe do tej przyprostokątnej, równe odpowiednio dopełnieniom kątów $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$. Wierzchołek P trójkąta, którego jednym z boków jest AB, a pozostałe AP i BP są odpowiednio równe przeciwprostokątnym dwuch trójkątów poprzednio zbudowanych, będzie punktem szukanym.

Dla każdego innego punktu X tego miejsca, wskutek podobieństwa trójkątów prostokątnych PCA, XEA ($\sphericalangle CAP = \sphericalangle XAE = \frac{1}{2}\alpha$), będzie:

$$PA : XA = PC : XE.$$

Tak samo z podobieństwa trójkątów PDB, XFB wynika:

$$PB : XB = PD : XF,$$

a zatym:

$$PA : PB = XA : XB.$$

Odwrotnie, jeżeli X jest punktem, dla którego

$$PA : PB = XA : XB,$$

wtedy X jest punktem miejsca żądanego.

W rzeczy samej, zbudujmy na XA jako przeciwprostokątnej trójkąt prostokątny AEX, w którym $\sphericalangle XAE = \frac{1}{2}\alpha$, a z B poprowadźmy styczną BF do koła o środku X i promieniu XE. Z podobieństwa trójkątów CAP, XAE wynika:

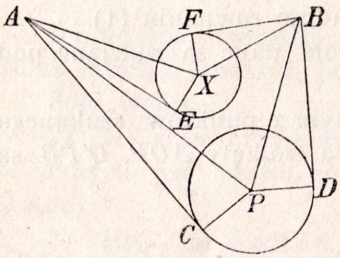

Fig. 2.

$$PA : XA = PC : XE,$$

a więc wskutek założenia:

$$PB : XB = PD : XF,$$

przeto dwa trójkąty prostokątne PDB, XBF są podobne, a $\sphericalangle FBX = \frac{1}{2}\beta$.

Miejscem szukanym jest więc okrąg koła (por. 5), który łatwo skonstruować.

§ 3. Rozwiązywanie zadań oznaczonych metodą miejsc gieometrycznych. W zakresie ściśle elementarnym nie istnieją metody ogólne rozwiązywania zadań gieometrycznych oznaczonych; rozwinięcie ich ze stanowiska systematycznego stanowi raczej cechę kierunków wyższych, gieometrji analitycznej i rzutowej.

Wszakże metody, używane z powodzeniem przy rozpatrywaniu różnych rodzajów zadań mogą być ostatecznie sprowadzone do dwuch następujących sposobów myślenia:

Sposób (analityczny) oddzielenia warunków, które wyznaczają figurę, będącą rozwiązaniem zadania, co prowadzi do otrzymania jej przez przecięcie miejsc gieometrycznych.

Sposób przekształcenia.

Chcąc mówić przedewszystkim o metodzie miejsc gieometrycznych, zauważmy, że można ją stosować bezpośrednio w tych przypadkach, w których żądana figura może być wyznaczona za pomocą pewnej liczby punktów, z których każdy podlega dwom warunkom niezależnym; opuszczając jeden z tych warunków, otrzymuje się linję, będącą miejscem punktów czyniących zadość drugiemu warunkowi; tak więc punkty, które mają być skonstruowane, przedstawiają się jako przecięcia dwuch linji. Zadanie zostaje więc odrazu rozwiązane elementarnie, jeżeli linje, stanowiące omówione miejsca, składają się z prostych, kół, odcinków i łuków kół.

Jeżeli tak nie jest, wtedy może się jednak przytrafić, że zadanie da się sprowadzić do poprzedniego przypadku przez odpowiednią zmianę wyboru punktów, wyznaczających figurę, odnoszącą się do tego zadania.

Oto kilka prostych zadań, dających się bezpośrednio rozwiązać powyższą metodą miejsc gieometrycznych.

Przykład I. Zbudować trójkąt BAC, znając jeden bok a, środkową m odpowiadającą temu bokowi, i wiedząc jeszcze, że $AB:AC=p:q$, gdzie p i q są odcinkami danemi.

Jeżeli obierzemy $BC=a$, wtedy do wyznaczenia trójkąta wystarczy oczywiście znalezienie wierzchołka A, który powinien czynić zadość dwom warunkom:

1° powinien leżeć na takich odległościach od C i B, ażeby:

$$AB:AC=p:q;$$

2° powinien być oddalony od punktu środkowego O boku BC o odcinek równy m.

Pomińmy warunek drugi; miejscem gieometrycznym punktów, czyniących zadość warunkowi pierwszemu, jest koło, mające za średnicę odcinek zawarty między punktami, które dzielą wewnętrznie i zewnętrznie odcinek AB w stosunku $p:q$ (§ 2 przykład 5).

Pomińmy natomiast warunek pierwszy; miejscem punktów, czyniących zadość warunkowi drugiemu, jest koło, mające środek O i promień m.

Przykład II. Zbudować koło, widziane z trzech danych punktów A, B, C pod danemi kątami α, β, γ.

Wyznaczmy najprzód środek koła szukanego. Ma to być środek koła, widzianego z A pod kątem α, z B pod kątem β, z C pod kątem γ.

Pominąwszy pierwszy z tych warunków, dostaniemy koło jako miejsce geometryczne punktów, czyniących zadość dwom pozostałym (§ 2 przykład 7). Pomijając warunek drugi, dostaniemy znowu koło jako miejsce geometryczne punktów, czyniących zadość dwom innym warunkom. Punkt szukany leży na przecięciu tych dwuch kół.

Wyznaczywszy środek P, otrzymamy promień odpowiedniego koła, prowadząc np. z A półprostą, która tworzy z półprostą AP kąt równy połowie kąta α, i prowadząc z P prostopadłą do tej półprostej.

W niektórych przypadkach nie są potrzebne dwa miejsca geometryczne, ale może mieć zastosowanie jedno tylko, jeżeli jest dana linja, na której punkt szukany musi leżeć.

Przykład III. Niech będą dane trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej prostej, oraz prosta AD, położona na płaszczyźnie tych trzech punktów i przechodząca przez jeden z nich A; mamy wykreślić koło, przechodzące przez A i B i spotykające AD w takim punkcie E, że prosta EC jest styczną do tego koła.

Przypuszczając, jak zwykle, że zadanie zostało rozwiązane, widzimy, że kąt BEC jest równy kątowi BAD, że więc E jest takim punktem prostej AD, z którego odcinek BC jest widziany pod znanym kątem BAD. Jeżeli nie brać pod uwagę, że E musi leżeć na AD, wtedy warunek pozostały wyznaczy miejsce geometryczne punktów, z których odcinek BC jest widziany pod kątem BAD. Punkt poszukiwany leży więc na przecięciu AD z tym miejscem.

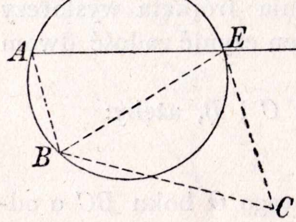

Fig. 3.

W przypadkach powyższych zastosowanie bezpośrednie naszej metody prowadzi do rozwiązania elementarnego zadań postawionych. Ale nie we wszystkich przypadkach tak bywa. W rzeczywistości może się zdarzyć, że oba warunki, za pomocą których chcielibyśmy wyznaczyć punkty płaszczyzny, prowadzą, każdy z osobna, do miejsc geometrycznych innego rodzaju, aniżeli prosta i koło. Punkty poszukiwane przedstawią się wtedy jako przecięcia takich linji, ale nieraz mogą być otrzymane innym sposobem za pomocą prostych i kół. Tak się dzieje np. w konstrukcjach, które zależą od wyznaczenia przecięć prostej ze stożkową (elipsą, hiperbolą albo parabolą).

Ażeby dać pojęcie o tym, w jaki sposób zagadnienie tego rodzaju może być poddane rozważaniu, weźmiemy pod uwagę następujące zadanie, które przedstawia powyższe zagadnienie w jednej z jego postaci ogólnych.

Na prostej danej wyznaczyć takie punkty, których odległości od punktu danego i od innej prostej danej mają stosunek dany.

Miejscem punktów, których odległości od punktu A i od prostej a mają dany stosunek λ, jest, jak wiadomo, stożkowa, która ma A za ognisko i a za kierownicę.

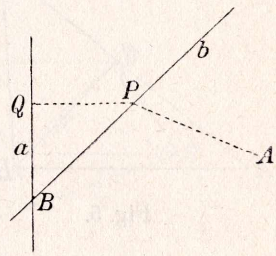

Fig. 4.

Ale można, nie wykreślając tej stożkowej, znaleźć jej przecięcia z prostą b.

W rzeczy samej, obierzmy na b punkt dowolny P, poprowadźmy z niego prostopadłą PQ do a, poprowadźmy PA i oznaczmy przez B przecięcie a z b (zakładając, że te dwie proste nie są równoległe).

Jeżeli P zmienia położenie na b, wtedy stosunek

$$\frac{PB}{PQ}=\mu$$

pozostaje bez zmiany; a więc te punkty P prostej b, dla których

$$\frac{PA}{PQ}=\lambda,$$

są zarazem takiemi, że:

$$\frac{PA}{PB}=\frac{\lambda}{\mu};$$

należą więc do koła, które wyznaczyliśmy w przykładzie 5 § 2.

Oprócz zagadnienia powyższego i innych przypadków równoważnych, w których chodzi zawsze, pod różnemi postaciami, o przecięcie stożkowej z prostą, istnieją jeszcze inne przypadki zadań rozwiązalnych elementarnie, w których bezpośrednie zastosowanie metody miejsc gieometrycznych doprowadziłoby do przecięcia stożkowej z kołem lub z drugą stożkową, pozostającą względem niej w pewnej zależności szczególnej.

Ograniczymy się podaniem bardzo prostego przykładu.

Niech będzie dane zadanie następujące.

Wyznaczyć trójkąt, znając jego podstawę AB, kąt przeciwległy γ i sumę $AC+BC=s$ dwuch boków pozostałych.

Wierzchołek nieznany C przedstawiłby się jako jedno z przecięć dwuch miejsc gieometrycznych: jednym z nich jest miejsce punktów, z których odcinek AB jest widziany pod kątem γ, które to miejsce stanowi łuk koła; drugim jest miejsce punktów, dla których suma odległości od A i B ma wartość stałą s. Ale to ostatnie miejsce jest elipsą, a więc nie da się skonstruować elementarnie.

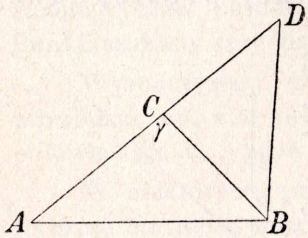

Fig. 5.

Można jednak to zadanie przekształcić w sposób następujący.

Przyjąwszy zadanie za rozwiązane, przedłużamy odcinek AC o odcinek $CD = CB$: konstrukcja trójkąta ACB sprowadza się łatwo do konstrukcji trójkąta ADB, w którym są znane dwa boki AB i $AD = s$ oraz kąt $\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\gamma$.

Ten ostatni trójkąt łatwo zbudować, wyznaczając dwa miejsca gieometryczne: miejsce punktów, z których odcinek AB jest widziany pod kątem $\frac{1}{2}\gamma$, oraz miejsce punktów oddalonych od A o s.

§ 4. Metody przekształceń. Trudność, którą nastręcza rozwiązanie danego zadania, może być w pewnych przypadkach usunięta przez zmianę położenia figury za pomocą ruchu płaszczyzny, lub ogólniej, przez zmianę niektórych własności figury lub jej części za pomocą odpowiedniego przekształcenia.

Najprostsze przekształcenia, należące do zakresu gieometrji elementarnej są: przesunięcie równoległe, symetrja względem prostej (kład płaszczyzny dokoła prostej lub odzwierciedlenie), obrót dokoła punktu, podobieństwo, a w szczególności jednokładność, i przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych.

Zobaczymy na kilku przykładach, w jaki sposób te przekształcenia dostarczają nieraz pożytecznych metod rozwiązywania zadań.

§ 5. Przesunięcie równoległe. Bardzo prosty przykład, w którym stosuje się przesunięcie równoległe, jest następujący.

Niech będą dane, co do wielkości i położenia, dwa odcinki AB, CD; należy zbudować trójkąt, którego dwa boki są równe odcinkom danym, a kąt między niemi zawarty jest równy kątowi prostych AB, CD (co do których zakładamy, że nie są równoległe).

Wystarczy wtedy przenieść odcinek CD równolegle do siebie samego w ten sposób, że B pokryje się z A.

Następujący przykład daje nam zastosowanie mniej oczywiste tej metody.

Przykład. Zbudować trapez, w którym dane są oba boki równoległe AB, CD, kąt α zawarty między bokami nie równoległemi i stosunek tych dwuch boków.

W przypuszczeniu, że $ABCD$ jest trapezem szukanym, przenieśmy bok AD równolegle do samego siebie, na EC. W tak utworzonym trójkącie *ECB* znany jest jeden bok, równy różnicy podstaw *AB*, *CD*, kąt α i stosunek dwuch boków pozostałych.

Zadanie zostało więc sprowadzone do innego, które łatwo rozwiązać metodą miejsc gieometrycznych.

Przesunięcia boków trójkąta i czworokąta dostarczają łatwych rozwiązań znacznej liczby zadań.

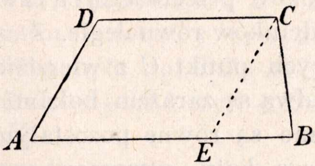

Fig. 6.

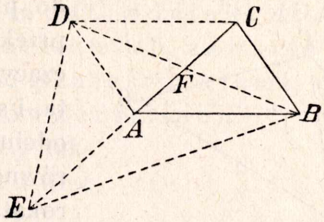

Fig. 7.

Jeżeli w jakimkolwiek trójkącie *ABC* przeniesiemy bok *AB* równolegle do samego siebie na *DC*, odetniemy na przedłużeniu boku *CA* odcinek *AE* równy *CA* i rozpatrzymy trójkąty *EBD*, *ADE*, *ABD*, *AEB*, wtedy rozpoznamy łatwo własności następujące.

Boki trójkąta *EBD* są dwa razy większe od środkowych trójkąta *ABC* i są do nich równoległe (*DB* i *FB* leżą właściwie na tej samej prostej).

Boki trójkąta *ABC* stanowią dwie trzecie środkowych trójkąta *EBD*, a *A* jest środkiem ciężkości trójkąta *EBD*.

Dwie wysokości każdego z trójkątów *ADE*, *AEB*, *ABD* są równe dwom wysokościom trójkąta danego, a pole trójkąta *EBD* jest trzy razy większe od pola trójkąta *ABC*.

Jeżeli więc są dane takie elementy trójkąta *ABC*, za pomocą których, biorąc pod uwagę powyższe własności, można wyznaczyć jeden z trójkątów *EBD*, *ADE*, *ABD*, *AEB*, wtedy trójkąt *ABC* da się zawsze zbudować.

Przykład. Zbudować trójkąt *ABC*, w którym dana jest środkowa m_a i kąt utworzony przez dwie pozostałe środkowe m_b i m_c, jeżeli ma być spełniona zależność:

$$m_b : m_c = p : q,$$

gdzie p i q są odcinkami danemi.

W trójkącie *EBD* jest wtedy znany bok $EB = 2m_a$, stosunek dwuch boków pozostałych i kąt między niemi zawarty *EDB*. Rozwiązanie zadania sprowadza się więc do wymienionego poprzednio, w którym należało zbudować trójkąt, jeżeli dany jest bok, kąt przeciwległy i stosunek dwuch boków pozostałych.

Jeżeli w czworokącie $ABCD$ przesuniemy boki AB i AD równolegle do ich położenia pierwotnego, aż zajmą one położenie CE i CF, wtedy otrzymamy równoległobok $DBEF$, którego boki są równe i równoległe do przekątnych czworokąta danego, a którego przekątne są dwa razy większe od odcinków, łączących środki boków przeciwległych czworokąta, i są do tych odcinków równoległe. Z czterech odcinków, łączących punkt C z wierzchołkami równoległoboku, dwa są zarazem bokami czworokąta, a dwa inne są równe pozostałym jego bokom; oprócz tego kąty, utworzone przez te odcinki, są równe kątom czworokąta.

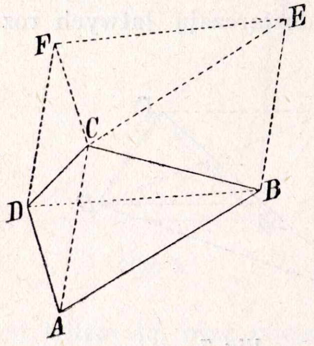

Fig. 8.

I w tym przypadku można zbudować czworokąt, jeżeli są dane takie jego elementy, że na podstawie powyższych własności można skonstruować równoległobok $DBEF$ oraz punkt C.

Przykład. Zbudować czworokąt $ABCD$, jeżeli są dane odcinki m i n, łączące środki boków przeciwległych, kąt μ zawarty między temi odcinkami i dwa przylegające do siebie boki $BC=b$ i $CD=c$.

Na zasadzie wymienionych własności można to zadanie sprowadzić do następującego.

Zbudować równoległobok $DBEF$, jeżeli znane są jego przekątne $2m$ i $2n$, oraz kąt μ zawarty między niemi; następnie znaleźć wewnątrz równoległoboku taki punkt C, który od wierzchołków B i D jest oddalony o odcinki b i c.

Można też w ogólności za pomocą przesunięcia rozwiązać zadanie następujące:

a i a' niech będą linjami, a m odcinkiem, mającym końce C i D; na a i a' znaleźć takie dwa punkty A i A', ażeby odcinek AA' był równy i równoległy do odcinka CD.

§ 6. Kład dokoła osi. Za pomocą kładu płaszczyzny dokoła prostej staramy się osiągnąć te same korzyści, dla których stosujemy przesunięcie równoległe: połączenie elementów danych, wprowadzenie elementów znanych, jak np. sumy albo różnicy odcinków lub kątów, pokrycie wzajemne nieznanych elementów równych w celu wyrugowania jednego z nich.

Tę metodę można też nazywać metodą symetrji, gdyż przekształcenie wytworzone przez kład jest właśnie symetrją płaszczyzny względem prostej. Rozumie się, że w celu otrzymania przekształcenia istotnie pożytecznego, trzeba tylko niektóre z elementów, poddawanych rozpatrywaniu, zastąpić przez twory do nich symetryczne.

Zanim wskażemy kilka zastosowań konkretnych tej metody do rozwiązywania zadań, zobaczymy, w jaki sposób Jakób Steiner uciekł się do rozpatrywania symetrji przy dowodzeniu twierdzenia następującego.

*Twierdzenie**). Jeżeli w trójkącie ABC odcinki AD i BE dwusiecznych dwuch kątów wewnętrznych, zawarte między wierzchołkami A i B i bokami przeciwległemi, są sobie równe, wtedy trójkąt jest równoramienny.

Gdyby było np. $BC > AC$, wtedy byłoby także $\sphericalangle \frac{1}{2} BAC > \sphericalangle \frac{1}{2} CBA$ czyli $\sphericalangle DAB > \sphericalangle EBA$, a więc $BD > AE$.

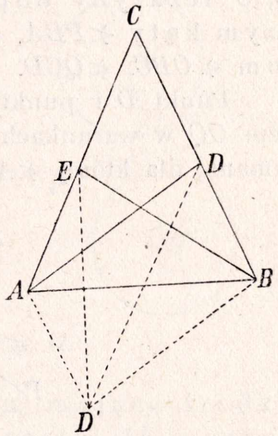

Fig. 9.

Ponadto, zawsze w tym samym założeniu, byłoby $\sphericalangle CAD > \sphericalangle CBE$, a więc, ze względu na dwa trójkąty BAD, BCE, mające kąt B wspólny:

$$\sphericalangle ADB > \sphericalangle AEB.$$

Jeżeli D' jest punktem symetrycznym do D względem punktu środkowego odcinka AB, wtedy będzie oczywiście odcinek AD' równy i równoległy do DB, a wskutek tego:

$$D'B = AD = EB$$

i kąt $\sphericalangle BED'$ równy kątowi $\sphericalangle ED'B$; ponieważ zaś $\sphericalangle AD'B > \sphericalangle AEB$, przeto $\sphericalangle AD'E > \sphericalangle AED'$, a więc $AE > D'A$, czyli $DB < AE$, a to się sprzeciwia temu, co było wyżej stwierdzone. A więc nie może być $BC > AC$.

W taki sam sposób dowodzi się, że nie może być $BC < AC$, a więc musi być $BC = AC$, c. b. d. d.

Przejdziemy teraz do zaznaczenia, jak rozwiązuje się metodą symetrji zadania, mające początek w teorji odbicia światła.

Przykład I. Niech będą dane zewnątrz prostej a dwa punkty B, C leżące po tej samej stronie prostej; wyznaczyć na a taki punkt X, ażeby dwa kąty (padania i odbicia), utworzone przez promienie XB, XC z oboma zwrotami prostej a były sobie równe.

Weźmy pod uwagę punkt B' symetryczny do B względem a; punkt X, w którym $B'C$ spotyka a, jest punktem szukanym.

*) Jacob Steiner. Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und das sphärische Dreieck.—*Gesammelte Werke* II, str. 323.

Uwaga. Ponieważ $BX+XC=B'C$, przeto wnosimy, że $BX+XC$, czyli suma odległości punktów B i C od znalezionego punktu X jest mniejsza od każdej analogicznie utworzonej sumy dla każdego innego punktu prostej a; przeto to samo rozwiązanie odpowiada zadaniu:

Dane są dwa punkty B, C zewnątrz prostej a po tej samej stronie prostej; mamy wyznaczyć taki punkt prostej a, ażeby suma jego odległości od B i C była jak najmniejsza.

Przykład II. Dane są wewnątrz kąta $\sphericalangle POQ$ dwa punkty A, D; wykreślić linję łamaną $ABCD$, której wierzchołki B, C leżałyby odpowiednio na ramionach OP, OQ, przyczym kąty $\sphericalangle PBA$, $\sphericalangle OCB$ mają być odpowiednio równe kątom $\sphericalangle OBC$, $\sphericalangle QCD$.

Punkt D i punkt A', symetryczny do A względem OP, są względem OQ w warunkach zadania poprzedniego; jeżeli więc $A'CD$ jest linją łamaną, dla której $\sphericalangle A'CO = \sphericalangle DCQ$, to łącząc A z B (punktem przecię-

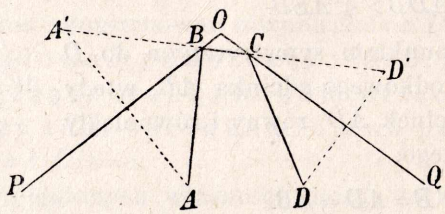

Fig. 10.

cia $A'C$ z OP), otrzymamy szukaną linję łamaną $ABCD$, w założeniu, że C i B leżą na ramionach OQ i OP, nie zaś na ich przedłużeniach.

To ograniczenie pozwala na rozpatrzenie warunków rozwiązalności zadania, co dla krótkości pomijamy.

Uwaga. Jak w przypadku poprzednim, tak samo i tu się dowodzi, że znaleziona linja łamana jest najkrótsza ze wszystkich linji łamanych, mających końce w A, D i wierzchołki na OP, OQ.

Przez postępowanie zwrotne podobnie, jak się przechodzi od przykładu I do II, można rozwiązać analogiczne zadanie względem trójkąta, czworokąta i t. d., co odpowiada następującemu zagadnieniu fizyki:

Dane są wewnątrz wielokąta dwa punkty; wyznaczyć promień (światła, głosu i t. d.), który wychodzi z jednego z tych punktów, odbija się kolejno od wszystkich boków wielokąta i przechodzi przez drugi punkt.

Damy jeszcze kilka innych przykładów, w których stosuje się meodę symetrji do rozwiązywania zadań.

Przykład III. Zbudować trójkąt ABC, jeżeli jest dana różnica $BD-AD\equiv d$ rzutów boków BC i AC na bok trzeci, wysokość h_c odpowiadająca temu bokowi i różnica δ kątów BAC i CBA.

Przypuśćmy, jak zwykle, że zadanie zostało rozwiązane; obróćmy AC dokoła wysokości CD do położenia A_1C; w ten sposób konstrukcja trójkąta ABC została sprowadzona do konstrukcji trójkąta A_1BC, w którym znamy $A_1B\equiv d$, kąt $A_1CB\equiv\delta$ i wysokość $CD=h_c$; tę konstrukcję łatwo wykonać, posiłkując się metodą miejsc gieometrycznych.

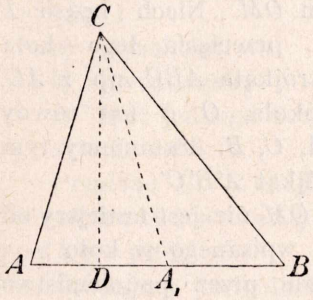

Fig. 11.

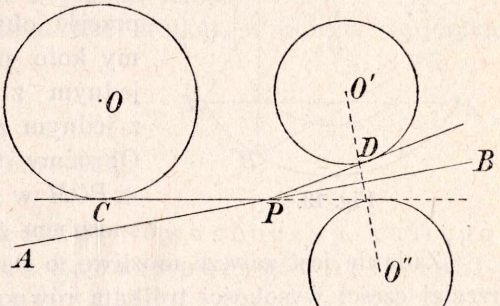

Fig. 12.

Przykład IV. Jeżeli są dane dwa koła, mające środki w O i O' i leżące po tej samej stronie prostej AB, wyznaczyć na tej prostej taki punkt P, ażeby styczne PC, PD, poprowadzone z tego punktu do kół danych, tworzyły z prostą AB równe kąty CPA, DPB.

Przyjmując zadanie za rozwiązane, weźmy pod uwagę koło symetryczne do koła O' względem AB; jedną z jego stycznych będzie styczna CP koła O. A zatym zadanie zostało sprowadzone do innego: dane są dwa koła o środkach O, O'' (koło o środku O'' jest symetryczne do koła o środku O'); wyznaczyć ich styczną wspólną.

Za pomocą tej metody można jeszcze rozwiązać zadanie:

Niech będą dane dwie linje a, a' i prosta; wyznaczyć dwa punkty A, A', leżące odpowiednio na a, a' w taki sposób, że prosta dana jest osią odcinka AA'.

§ 7. Obrót dokoła punktu. Obrót dokoła punktu bywa najczęściej używany jako środek rozwiązywania zadań łącznie z jednokładnością (§ 10).

Jednakże wymienimy grupę łatwych zadań, w których sam obrót prowadzi do celu.

M a m y w p i s a ć w k o ł o w i e l o k ą t f o r e m n y, k t ó r e g o o b w ó d z a w i e r a p u n k t d a n y w e w n ą t r z k o ł a.

To zadanie może być rozwiązane dla wielokąta mającego 3, 4, 5, 6, 8, 10,... boków, i wogóle wtedy, jeżeli umiemy wpisać w koło wielokąt foremny o tej samej liczbie boków.

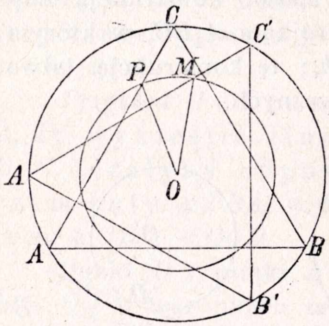

Fig. 13.

Dla uproszczenia weźmiemy pod uwagę przypadek trójkąta równobocznego.

W tym celu wpiszmy w koło dane o środku O trójkąt równoboczny ABC. Jeżeli M jest punktem danym, przez który ma przejść obwód szukanego trójkąta, to kreślimy koło promieniem OM. Niech będzie P jednym z punktów przecięcia tego koła z jednym z boków trójkąta ABC, np. z AC. Obróćmy trójkąt dokoła O o kąt równy $\sphericalangle POM$ w zwrocie A, C, B; dostaniemy tym sposobem żądany trójkąt $A'B'C'$.

Zadanie jest zawsze możliwe, o ile odcinek OM nie jest mniejszy od trzeciej części wysokości trójkąta równobocznego, wpisanego w koło.

§ 8. Metoda podobieństwa. Przekształcenie przez podobieństwo dostarcza dwojakich środków rozwiązywania zadań, gdyż pozwala zmieniać w i e l k o ś ć albo też p o ł o ż e n i e figury żądanej lub któregokolwiek z jej elementów danych.

Odpowiednio do pierwszego z tych celów metoda powyższa bywa stosowana wtedy, kiedy chodzi o zbudowanie figury, wyznaczonej przez pewną liczbę kątów i jeden odcinek danej wielkości, lub przez warunek równoważny; pomijając ten ostatni warunek otrzymamy szereg figur podobnych do figury szukanej, która przeto może być skonstruowana, jeżeli odcinek dany zużytkujemy do wyznaczenia stosunku podobieństwa.

Tak więc metoda podobieństwa prowadzi do rozłożenia zadania danego na dwa zadania prostsze; przedmiotem drugiego z nich jest konstrukcja figury podobnej do figury danej na podstawie warunku ilościowego.

Dalsze zastosowanie podobieństwa otrzymuje się przez połączenie sposobu, o którym była mowa, ze zmianą położenia na płaszczyźnie całej figury lub jej części; w takim przypadku dobrze jest zwrócić się do systematycznych konstrukcji podobieństwa jako przekształcenia płaskiego, za pomocą jednokładności, połączonej (w razie potrzeby) z obrotem dokoła punktu lub z symetrją względem osi.

Zaczniemy od wyszczególnienia kilku przypadków, w których stosuje się podobieństwo tylko pierwszym z tych dwuch sposobów, odkładając zastosowania drugiego rodzaju do §§ 9, 10.

Przykład I. Zbudować trójkąt ABC, znając kąt α, stosunek boków AC, AB, zawierających ten kąt ($AC:AB=m:n$), i długość w_a dwusiecznej kąta α.

Zbudujmy trójkąt APQ, czyniący zadość pierwszemu i drugiemu warunkowi. Ażeby wyznaczyć trójkąt podobny do APQ, czyniący zadość warunkowi trzeciemu, odetnijmy, począwszy od A, na dwusiecznej kąta $\sphericalangle PAQ$ odcinek $AD=w_a$ i poprowadźmy z D równoległą do PQ. Trójkąt, który tym sposobem powstanie, jest trójkątem szukanym.

W ten sam sposób można zbudować trójkąt, w którym są dane dwa kąty i

a) wysokość;

b) dwusieczna;

c) rzut jednego z boków na inny bok;

d) obwód.

Przykład II. Zbudować trójkąt równoboczny, którego wierzchołki należą do trzech danych okręgów kół współśrodkowych.

Zbudujmy jakikolwiek trójkąt równoboczny; znajdźmy punkt, którego odległości od wierzchołków tego trójkąta są proporcjonalne do promieni kół danych, który to punkt otrzymuje się przez przecięcie dwuch kół (§ 2 przykład 5); połączmy ten punkt z wierzchołkami trójkąta linjami prostemi i poprowadźmy przez środek trzech danych kół współśrodkowych promienie równoległe do tych trzech prostych. W ten sposób zostaną wyznaczone trzy wierzchołki trójkąta szukanego.

Zadanie zostało więc rozwiązane przez jednoczesne zastosowanie metody podobieństwa i metody miejsc gieometrycznych.

§ 9. Metoda zadania odwrotnego. Przy stosowaniu wyłożonej powyżej metody podobieństwa trzeba przedewszystkim umieć zbudować figurę podobną do tej, która stanowi przedmiot danego zadania.

Można to nieraz osiągnąć przez proste odwrócenie samego zadania, a więc przez rozpatrywanie zamiast niego zadania odwrotnego.

Oto dwa przykłady, należące tutaj.

Przykład I. Na danym kole opisać romb podobny do danego rombu $ABCD$.

Wpiszmy koło w dany romb $ABCD$; otrzymamy w ten sposób figurę podobną do tej, którą chcemy wyznaczyć. Jeżeli więc zbudujemy figurę podobną do niej, przyjmując promień koła danego za odpowiedni do promienia koła znalezionego, wtedy otrzymamy szukane rozwiązanie.

Przykład II. W czworokąt $MNPQ$ wpisać czworokąt podobny do innego danego czworokąta $ABCD$.

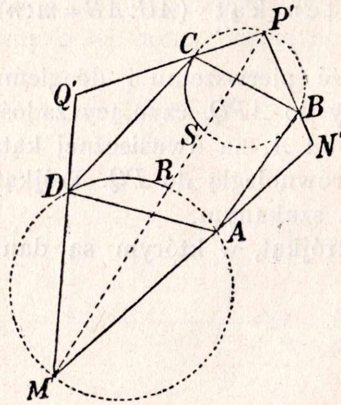

Fig. 14.

Zadanie sprowadza się do zadania odwrotnego: opiszmy na $ABCD$ czworokąt $M'N'P'Q'$ podobny do $MNPQ$, poczym przekształcimy figurę przez podobieństwo, przyjmując za stosunek podobieństwa stosunek boków MN, $M'N'$.

Opisanie czworokąta $M'NP'Q'$ na $ABCD$ może być wykonane na podstawie analizy następującej.

Przypuśćmy, że zadanie zostało rozwiązane i przypuśćmy jeszcze, że boki $M'N'$, $N'P'$, $P'Q'$, $Q'M'$ przechodzą odpowiednio przez A, B, C, D. Wiemy, że warunki podobieństwa dwuch czworokątów (wypukłych) $MNPQ$, $M'N'P'Q'$ (jeżeli poprowadzimy przekątne MP, $M'P'$) mogą być wyrażone za pomocą następujących równości kątów:

$$\sphericalangle NMP = \sphericalangle N'M'P'; \quad \sphericalangle NPM = \sphericalangle N'P'M';$$

$$\sphericalangle NMQ = \sphericalangle N'M'Q; \quad \sphericalangle NPQ = \sphericalangle N'P'Q';$$

które są warunkami podobieństwa trójkątów MNP, $M'N'P'$ i MPQ, $M'P'Q'$. Znajomość kątów $\sphericalangle N'M'Q'$, $\sphericalangle N'P'Q'$ pozwala nam wykreślić odpowiednio na bokach AD, BC, jako na cięciwach, dwa łuki, na których muszą leżeć wierzchołki M', P'. Oznaczmy przez R, S punkty, w których przekątna $M'P'$ spotyka po raz drugi koła, do których należą te łuki; łuki DR, CS są znane, gdyż znamy kąty $\sphericalangle Q'M'P'$, $\sphericalangle Q'P'M'$. Można więc znaleźć punkty R, S, a stąd M', P' i t. d.

§ 10. Jednokładność. Zobaczymy teraz jak się stosuje podobieństwo w tych przypadkach, w których należy zmieniać nietylko wielkość, ale i położenie danej figury.

Przekształcenie płaszczyzny przez podobieństwo może być w ogólności otrzymane za pomocą jednokładności połączonej z obrotem dokoła punktu lub kładem dokoła osi.

Jednakże metoda, o której chcemy mówić, ogranicza się do stosowania jednokładności w połączeniu z zastosowaniem metod, opisanych w §§ 3, 8.

Jeżeli jest dana na płaszczyźnie jakakolwiek figura i punkt O jako środek jednokładności, wtedy można zawsze zbudować figurę jednokładną z pierwszą i taką mianowicie, że stosunek dwuch odcinków, łączących

O z punktami odpowiedniemi jest równy stosunkowi odcinków m, n, opatrzonemu znakiem + lub – (jednokładność prosta lub odwrotna), a więc taką figurę, że jeżeli połączymy środek O z punktem A pierwszej figury, wtedy promień OA spotka drugą w punkcie A', dla którego:

$$\frac{OA}{OA'} = \pm \frac{m}{n},$$

przyczym A, A' leżą po tej samej stronie punktu O, jeżeli służy znak górny, zaś po stronach przeciwnych, jeżeli służy znak dolny.

Jeżeli figurę poddaje się takiemu działaniu, wtedy się mówi, że się figurę mnoży przez $\pm \frac{m}{n}$ względem punktu przyjętego za środek jednokładności. Jest rzeczą oczywistą, że mnożąc np. linję prostą, otrzymamy inną prostą, równoległą do danej, mnożąc koło, dostaniemy nowe koło.

Na tej zasadzie łatwo rozwiązać zadanie:

Jeżeli a, a' są dwiema linjami, a O punktem ich płaszczyzny, nie leżącym na żadnej z nich, to należy poprowadzić przez O taką prostą, ażeby było dla punktów przecięcia A, A' tej prostej z linjami a, a'

$$\frac{OA}{OA'} = \pm \frac{m}{n},$$

gdzie m, n są odcinkami danemi.

Prostą szukaną jest prosta, która łączy O z punktem przecięcia linji a z linją otrzymaną z a' przez pomnożenie przez $\pm \frac{m}{n}$ względem O.

Przykład. Zbudować trójkąt, jeżeli są dane dwa jego boki a, b i środkowa m_c, należąca do boku trzeciego.

Opiszmy dokoła jakiegokolwiek punktu C jako środka dwa koła współśrodkowe, mające za promienie a i b, uczyńmy $CD \equiv m_c$ i pomnóżmy przez -1 względem D jedno z kół, np. koło o promieniu b. Otrzymamy koło o promieniu b i środku C_1 symetrycznym do C względem D. Jeżeli B jest jednym z punktów przecięcia tego koła z kołem o promieniu a, a A punktem przecięcia prostej BD z pierwszym kołem o promieniu b, wtedy ABC będzie trójkątem szukanym.

Oto inny przykład, w którym stosuje się metodę jednokładności w połączeniu z metodą zadania odwrotnego (§ 9).

W dany trójkąt ABC wpisać inny trójkąt, którego boki byłyby równoległe do trzech danych prostych, nie równoległych.

Zbudujmy jakikolwiek trójkąt $M'N'P'$, mający boki równoległe do trzech prostych danych i opiszmy na nim trójkąt $A'B'C'$, mający boki równoległe do boków trójkąta danego. Na zasadzie znanej własności trzy proste AA', BB', CC' zejdą się w jednym punkcie O. Jeżeli połą-

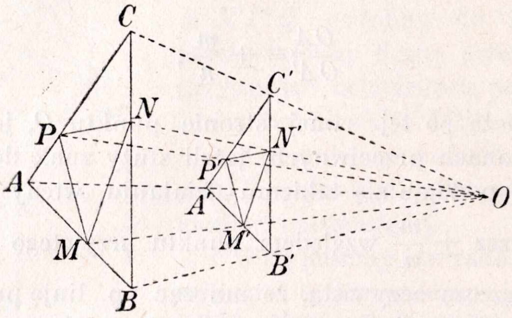

Fig. 15.

czymy O z M', N', P' linjami prostemi, wtedy ich punkty przecięcia M, N, P z bokami AB, BC, CA trójkąta ABC będą wierzchołkami trójkąta szukanego.

§ 11. Jednokładność w połączeniu z obrotem. Jakkolwiek chodzi tu o zastosowanie jednoczesne dwuch metod już poprzednio opisanych, jednakże pożytecznie będzie wskazać na kilku przykładach, jaką korzyść można osiągnąć przez połączenie na płaszczyźnie jednokładności z obrotem dokoła jej środka.

Jeżeli O jest środkiem jednokładności, m jej stosunkiem, a v kątem obrotu, wtedy działanie takie nazywa się w skróceniu mnożeniem przez m_v względem O.

Przykład. Zbudować czworokąt $ABCD$, jeżeli są dane $AB \equiv a$, $BC \equiv b$ i jeżeli wiadomo, że

$$CD:AD = p:q, \quad BD:AD = r:s, \quad \sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = \alpha,$$

gdzie p, q, r, s są odcinkami, a kąt α jest mniejszy od dwuch prostych.

Przypuśćmy, że zadanie zostało rozwiązane. Pomnóżmy odcinek BC przez m_v względem D jako środka, przyjmując, że $m = \dfrac{p}{q}$, $v = \sphericalangle ADC$. Otrzymawszy w ten sposób odcinek EA znajdziemy, że $\sphericalangle BAE = \alpha$; będziemy więc mieli wystarczające dane do zbudowania trójkąta ABE. Ponieważ dalej mamy:

$$BD:ED = p:q$$

$$BD:AD = r:s,$$

przeto punkt D może być wyznaczony (metodą miejsc gieometrycznych). Za pomocą BD, BC i kąta

$$\sphericalangle DCB = \alpha - \sphericalangle BAD$$

można też wyznaczyć punkt C.

Rozwiązanie naszego zadania zostało więc sprowadzone do rozwiązania innych zadań, prostszych.

Za pomocą obrotu dokoła punktu można rozwiązywać te zadania, które się dadzą sprowadzić do konstrukcji trójkąta podobnego do trójkąta danego, jeżeli jest znany jeden z wierzchołków (który się wtedy bierze za środek obrotu) i jeżeli dwa pozostałe wierzchołki mają leżeć na dwuch linjach danych (prostych, łukach kół).

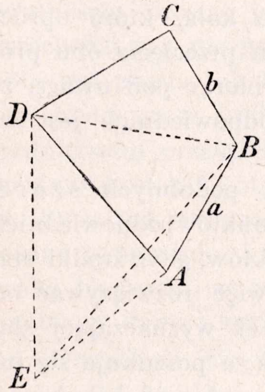

Fig. 16.

Przykład. W równoległobok $ABCD$ wpisać inny równoległobok, jeżeli znany jest w nim kąt α zawarty między przekątnemi i jeżeli wiadomo, że stosunek przekątnych jest równy stosunkowi danych odcinków p i q.

Niech będzie $EFGH$ żądanym równoległobokiem, którego wierzchołek E leży na AB, F na BC i t. d. Punkt przecięcia O jego przekątnych jest zarazem punktem przecięcia przekątnych równoległoboku danego. W trójkącie EOH niech będzie $\sphericalangle EOH \equiv \alpha$, a stosunek boków

$$EO:OH = p:q = m.$$

Jeżeli weźmiemy trójkąt PRQ z kątem $\sphericalangle PRQ \equiv \alpha$ i z bokami, zawierającemi ten kąt, równemi odcinkom p i q, wtedy zadanie dane zostanie sprowadzone do innego:

Zbudować trójkąt, któryby był podobny do trójkąta PQR i którego wierzchołek odpowiadający R leżałby w O, a wierzchołki, odpowiadające P i Q, na odcinkach AB, DA.

Trójkąt ten otrzymamy, mnożąc AB względem O przez m_α; punkt przecięcia odcinka zoalezionego z odcinkiem AD — o ile istnieje — jest punktem szukanym H; drugi punkt E łatwo otrzymać.

Gdyby zamiast stosunku boków trójkąta był dany ich iloczyn I, wtedy, jak łatwo zauważyć, trzebaby było wziąć odwrotność odcinka AB względem O z potęgą odwrotności I, a tak otrzymany odcinek obrócić o kąt α (§ 12).

Jeżeli są dane na płaszczyźnie dwie figury podobne F, F' nie jednokładne*), wtedy łatwo wyznaczyć elementy O, m, v obrotu, któryby doprowadził F do pokrycia z F'. Oczywiście kąt v obrotu będzie kątem między dwiema prostemi odpowiedniemi, a stosunek m stosunkiem dwuch odcinków odpowiednich figur F, F'.

Ażeby wyznaczyć O, wystarczy zauważyć, że środek obrotu, punkt wspólny dwuch prostych odpowiednich i para punktów odpowiednich tych prostych muszą leżeć na jednym kole; można więc otrzymać punkt O jednoznacznie, obierając dwie pary punktów odpowiednich na dwuch prostych przecinających się i prowadząc dwa takie koła, które oprócz O mają punkt wspólny, pokrywający się z punktem przecięcia obu prostych. Można też w ogólności wyznaczyć punkt O, biorąc pod uwagę, że stosunek odległości punktu O od dwuch punktów odpowiednich jest zarazem stosunkiem jednokładności.

Łatwo teraz wyznaczyć środek obrotu dwuch podobnych szeregów punktów, na których są dane dwie pary punktów odpowiednich i dwuch kół, na których jest dana jedna para punktów, gdyż środki stanowią drugą parę punktów odpowiednich; można więc rozwiązywać takie zadania, w których są dane dwie proste, warunek wyznaczający stosunek jednokładności i para punktów odpowiednich, a poszukuje się innej pary punktów odpowiednich, które należą do dwuch podobnych szeregów punktów i czynią zadość innemu warunkowi, jak np. ażeby leżały na prostej, równoległej do prostej danej, albo przechodzącej przez punkt dany, albo ażeby ich odległość była równa odcinkowi danemu; a także inne zadania, w których są dane dwa koła, a na nich dwa punkty odpowiednie, szukamy zaś dwuch innych punktów odpowiednich, czyniących zadość jakiemuś warunkowi danemu.

Przykład. Dane są dwie proste nierównoległe, a na nich dwa punkty A, A'; wyznaczyć na tych prostych odpowiednio takie dwa punkty X, X', ażeby było

$$AX:AX'=p:q; \quad XX' \equiv a,$$

gdzie p, q, a są odcinkami danemi.

Jeżeli sobie wyobrazimy, że zadanie zostało rozwiązane, to A, X; A', X' wyznaczą dwa podobne szeregi punktów; O niech będzie dla nich środkiem obrotu. Trójkąty AOA', XOX' są podobne, jeżeli więc znajdziemy O, wtedy zadanie sprowadzi się do konstrukcji trójkąta podobnego do AOA' z bokiem a odpowiednim do boku AA'.

*) Gdyby F, F' były jednokładne, wtedy wystarczyłoby samo tylko mnożenie, ażeby figurę F doprowadzić do pokrycia z F'.

Ażeby wyznaczyć O, trzeba obrać na prostych dwa punkty B, B' tak, ażeby było

$$AB:A'B' = p:q$$

i powtórzyć konstrukcję wyżej zaznaczoną.

§ 12. Przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych. Jeżeli weźmiemy pod uwagę zależności, zachodzące pomiędzy figurą daną i jej odwrotnością, czyli figurą przekształconą za pomocą promieni odwrotnych, a mianowicie: zachowanie wielkości kątów; zachowanie styczności; że odwrotnością prostej jest prosta lub koło stosownie do tego, czy prosta przechodzi czy nie przechodzi przez środek odwrotności; że odwrotnością koła jest prosta lub koło stosownie do tego, czy koło przechodzi czy nie przechodzi przez środek odwrotności i t. d.— to będziemy mogli za pośrednictwem przekształcenia przez promienie odwrotne, dobierając odpowiednio środek i potęgę odwrotności, sprowadzić zadanie dane do innego, które już jest znane, lub do którego umiemy zastosować metody wyłożone poprzednio, i wogóle do takiego, którego rozwiązanie przedstawia mniej trudności, ze względu na naturę tworów, na jakie przekształcają się twory dane i szukane.

Przykład. Wykreślić koło przechodzące przez punkt dany P i przecinające prostopadle dwa koła dane o środkach O, O'.

Jeżeli znajdziemy odwrotności dwuch kół danych względem P jako środka odwrotności i potęgi równej np. potędze punktu P względem koła o środku O (ażeby uprościć konstrukcję, gdyż wtedy to koło zamieni się na samo siebie), to odwrotność koła szukanego zamieni się na prostą, która, wobec tego, że musi przecinać prostopadle koło o środku O i odwrotność koła o środku O', będzie środkową OO'. Stąd łatwo się dochodzi do rozwiązania danego zadania.

Z określenia wiadomo, że jeżeli O oznacza środek odwrotności, a F' odwrotność figury F względem O, wtedy jakakolwiek prosta, wychodząca z O, spotyka F, F' w dwuch punktach A, A' takich, że iloczyn odcinków OA, OA' jest stały nietylko co do wielkości, ale i co do znaku (potęga odwrotności), przez co rozumiemy, że punkty A, A' leżą po stronach przeciwnych środka O, jeżeli znak jest ujemny, zaś po tej samej stronie w przypadku przeciwnym.

Pamiętając o tym, łatwo rozwiązać następujące zadanie ogólne.

Jeżeli są dane dwie linje a, a' i punkt O nie leżący na żadnej z nich, to należy poprowadzić przez O prostą, przecinającą linje a, a' w dwuch punktach A, A' takich, ażeby prostokąt z odcinków OA, OA' był równoważny prostokątowi danemu (z danym znakiem).

Metoda, która służy do rozwiązania tego zadania, jest analogiczna do metody mnożenia i występuje też jako postać szczególna rozpatrywanej na początku metody miejsc gieometrycznych.

Przykład. Zbudować trójkąt ABC, w którym znamy: prostokąt wpisany $EFGH$, mający dwa wierzchołki przyległe E, F na BC; kąt α na którego ramionach leżą dwa pozostałe wierzchołki prostokąta; prostokąt R odcinków, które wierzchołek H wyznacza na boku AB.

Analiza wykazuje, że wierzchołek A kąta α żądanego trójkąta leży na położonym zewnątrz prostokąta danego łuku, z którego odcinek HG jest widziany pod kątem α; oprócz tego punkt A musi leżeć na odwrotności prostej EF, jeżeli za środek odwrotności przyjmiemy H, a za potęgę R; a więc na kole przechodzącym przez H, czyli takim, które może mieć, oprócz H, jeden tylko punkt wspólny z łukiem, zawierającym kąt α.

Przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych ma zastosowanie systematyczne w zadaniach Gieometrji cyrkla (por. art. II).