ARTYKUŁ ÓSMY.

O zadaniach przestępnych, a w szczególności o kwadraturze koła.

napisał

Benedetto Calò z Neapolu.

§ 1. Zadania algiebraiczne i przestępne. — W artykułach 5-tym i 6-tym zostały zbadane ze stanowiska Gieometrji analitycznej i Algiebry pytania dotyczące rozwiązalności zadań sposobem elementarnym, to jest za pomocą linjału i cyrkla.

Jeżeli jest dane zadanie konstrukcyjne, wtedy należy je przedewszystkim przekształcić tak, ażeby d a n e m i były punkty (które przypuśćmy, że leżą na jednej płaszczyźnie), a elementy nieznane żeby były również punktami, mającemi z punktami danemi zależności znane.

Ażeby zadanie było rozwiązalne elementarnie, potrzeba i wystarcza, żeby

a) zależności dane mogły być wyrażone za pomocą równań algiebraicznych (czyli żeby zadanie było a l g i e b r a i c z n e);

b) powyższe równania były rozwiązalne za pomocą działań wymiernych i wyciągania pierwiastków stopnia drugiego (wychodząc ze spółrzędnych punktów danych).

Pytania dotyczące możliwości rozwiązywania w sposób rzeczony (za pomocą niewymierności stopnia drugiego) równania algiebraicznego były pomieszczone w artykułach 5, 6 i 7.

Tutaj zwracamy się do pierwszej grupy zagadnień, zmierzających do rozstrzygnięcia, czy zadanie dane jest a l g i e b r a i c z n e, czy też, w przeciwieństwie do tego, p r z e s t ę p n e. Zaznaczamy od razu, że zadania przestępne należy uważać jako wyższe od algiebraicznych w tym znaczeniu, że ich rozwiązanie nietylko nie da się wykonać za pomocą prostej i koła (linjału i cyrkla), ale nawet za pomocą krzywych algiebraicznych stopni wyższych (jakie były stosowane w artykule 7-ym), ani też za pomocą przyrządów, mogących zakreślać takie krzywe.

Zaczniemy rozważania od klasycznego zagadnienia kwadratury koła.

Przedewszystkim nadamy temu zagadnieniu postać analityczną.

Oznaczając przez r promień koła, przez d jego średnicę, przez c okrąg, a przez a pole, dostaniemy:

$$c = \pi d = 2\pi r \tag{1}$$

$$a = \pi r^2 = \tfrac{1}{4}\pi d^2 = \tfrac{1}{2} rc, \tag{2}$$

gdzie π jest stałym stosunkiem okręgu do średnicy.

Z wzoru (2) wynika znany fakt, że pole koła jest równoważne polu trójkąta, mającego za podstawę okrąg a za wysokość promień koła. Gdybyśmy więc mogli wykreślić linjałem i cyrklem odcinek równoważny okręgowi, przyjmując promień jako dany, t. j. gdybyśmy mogli wykonać elementarnie wyprostowanie okręgu, wtedy moglibyśmy wykreślić trójkąt rzeczony, a następnie przekształcić go z łatwością na kwadrat równoważny, czyniąc zawsze użytek tylko z linjału i cyrkla. I odwrotnie, gdyby za pomocą konstrukcji elementarnych można było przekształcić koło na kwadrat równoważny, to przekształcając go następnie na trójkąt równoważny mający za wysokość promień koła, otrzymalibyśmy za pomocą konstrukcji elementarnej wyprostowanie okręgu.

Zagadnienie kwadratury koła sprowadza się tym sposobem do zagadnienia wyprostowania okręgu. Jeżeli zaś dla uproszczenia przyjmiemy średnicę za jednostkę miary, wtedy to ostatnie zadanie sprowadzi się do wykreślenia odcinka długości π (albo krótko mówiąc do w y k r e ś l e n i a π), mając dany odcinek równy jedności.

Można oczywiście nadać temu odcinkowi położenie oznaczone, przez co zadanie może być doprowadzone do postaci, pod jaką rozpatrywaliśmy zadania konstrukcyjne; a mianowicie elementy dane będą punktami (środek 0, 0 i jeden punkt koła 0, 1) i elementy nieznane będą również punktami (np. punkt 0, π).

Ale z takiego postawienia zadania nie widać, czy to zadanie zależy czy nie zależy od rozwiązania równania algiebraicznego, gdyż istotnie nie występuje przytym żadne równanie, mające π za pierwiastek.

Postaramy się uogólnić zadanie, któreśmy sobie postawili, przez rozważanie zagadnienia w y p r o s t o w a n i a j a k i e g o k o l w i e k ł u k u k o ł a.

W łuku możemy przyjąć jako element d a n y (oprócz promienia, obranego za jednostkę) c i ę c i w ę, albo też w s t a w ę, co dla naszego celu jest równoważne.

Zadanie wyprostowania łuku staje się więc zależne od rozwiązania równania

$$y = \operatorname{arc}\sin x.$$

Ponieważ równanie to jest przestępne, przeto zadanie jest w ogólności przestępne, nie jest więc rzeczą możliwą wskazać ogólną konstrukcję algiebraiczną, a tym mniej elementarną (t. j. dającą się wykonać za pomocą linjału i cyrkla), za pomocą której mając cięciwę (albo wstawę) łuku otrzymywałoby się długość łuku.

Gdyby np. jakaś oznaczona konstrukcja elementarna była w ogóle możliwa, wtedy istniałoby oznaczone wyrażenie względem x, utworzone z działań wymiernych i pierwiastków stopnia drugiego, dające dla wszystkich wartości x wartość y. A więc y byłoby pierwiastkiem równania algiebraicznego, którego spółczynniki byłyby funkcjami wymiernemi względem x (por. art. 5), czyli y byłoby funkcją algiebraiczną zmiennej x. Otóż funkcja przestępna, jak $y = \operatorname{arc}\sin x$ (która jako funkcja zmiennej zespolonej ma nieskończenie wiele gałęzi) na pewno nie może być równoważna funkcji algiebraicznej.

Jeżeli jednak nie można dać algiebraicznego, a tym mniej elementarnego, rozwiązania ogólnego zadania wyprostowania łuku, to z tego nie wynika a priori, ażeby takie rozwiązanie nie było możliwe bądź przez znalezienie dla każdej cięciwy (lub wstawy) danej szczególnej konstrukcji algiebraicznej lub elementarnej, którąby dała długość łuku, bądź przez znalezienie takiej konstrukcji dla niektórych łuków szczególnych, jeżeli np. cięciwa (lub wstawa) łuku, który mamy wyprostować, wyraża się przez promień za pomocą działań wymiernych i pierwiastków stopnia drugiego, jeżeli więc sama może być wykreślona elementarnie, w szczególności w przypadku, odpowiadającym wyprostowaniu całego okręgu. W rzeczy samej, jakkolwiek krzywa $y = \operatorname{arc}\sin x$ jest przestępna, nie może więc pokrywać się całkowicie z krzywą algiebraiczną, to jednak nie mówi nam to, ażeby spółrzędne każdego jej punktu nie mogły czynić zadość szczególnemu równaniu algiebraicznemu o spółczynnikach wymiernych (zmieniających się od punktu do punktu), albo też, ażeby ta krzywa nie zawierała punktów szczególnych, których spółrzędne czyniłyby zadość takiemu równaniu, a w szczególności punktów, któreby miały za spółrzędne wyrażenia niewymierne stopnia drugiego, a którym odpowiadałyby właśnie łuki, dające się wyprostować.

Co nam daje pewność, że punkt $(0, \pi)$ tej krzywej nie należy do powyższych punktów szczególnych?

To zagadnienie, jak widać, występuje z zakresu teorji funkcji i wkracza w dziedzinę arytmetyki.

Nadając postać ogólniejszą rezultatom wynikającym z tego rozważania, możemy powiedzieć:

Pytanie, czy zadanie dane jest algiebraiczne czy przestępne, przedstawia się różnie, zależnie od tego, czy rozważamy zadanie, w którym dane są zmienne, czy stałe. W pierwszym przypadku jeżeli równania, wyrażające zależności między elementami szukanemi i danemi, są przestępne, wtedy zadanie jest przestępne i niemożliwe jest ogólne rozwiązanie algiebraiczne, ważne niezależnie od wartości danych.

Jeżeli chodzi o zadanie, w którym elementy dane są stałe, albo (co na jedno wyjdzie), jeżeli elementy dane mogą się wprawdzie zmieniać, ale są uważane jako ustalone w pewien sposób szczególny, wtedy trzeba rozważyć, czy równania przestępne, wiążące elementy nieznane z danemi, o ile służą do wyznaczenia niewiadomych, nie mogą być zastąpione przez równania algiebraiczne.

Zapatrując się na przedmiot z tego ostatniego stanowiska, można podać w wątpliwość samo istnienie zadań przestępnych (arytmetycznie). Ta wątpliwość sprowadza się do pytania:

Czy istnieją liczby (przestępne), nie czyniące zadość żadnemu równaniu algiebraicznemu o spółczynnikach wymiernych?

Dopiero po rozstrzygnięciu tego pytania w sposób twierdzący (w § 3) zwrócimy się do innego, od którego zależy kwadratura koła:

Czy liczbę π należy umieścić między liczbami przestępnemi?

Powiedzmy odrazu, że i na to drugie pytanie odpowiedź jest twierdząca (§§ 4, 5, 6); ta odpowiedź zamyka erę bezowocnych usiłowań znalezienia drogą elementarną kwadratury koła, wykazując, że to zadanie nie da się rozwiązać ani elementarnie, to znaczy za pomocą prostych i kół, ani też przez wykreślanie wyższych krzywych algiebraicznych.

W § 6 znajdzie się jeszcze rozszerzenie tych rezultatów na zadanie ogólne wyprostowania łuku.

W § 7 pomieściliśmy krótki opis integrafu Abdanka Abakanowicza i osiągniętego za jego pomocą rozwiązania graficznego zadania wyprostowania okręgu i kwadratury koła, a w § 8 są podane niektóre pospolitsze konstrukcje elementarne, służące do rozwiązania przybliżonego tego zadania. § 9 jest poświęcony rozpatrywaniu niektórych pól, ograniczonych łukami koła i dających się elementarnie przekształcić na kwadraty równoważne. W § 10 przedstawiliśmy w krótkości obraz historyczny głównych poszukiwań nad zagadnieniem kwadratury koła, a § 11 zamyka tę pracę wyłożeniem dowodu przestępności liczb e i π w postaci najprostszej i najelementarniejszej, do jakiej go najnowsze badania sprowadziły.

§ 2. Własności podstawowe liczb algiebraicznych. — Nazywamy podług Kroneckera liczbą algiebraiczną każdą liczbę x, która jest pierwiastkiem równania algiebraicznego postaci

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_n = 0$$

o spółczynnikach wymiernych; równanie takie, pomnożone przez odpowiednią liczbę całkowitą, może być zawsze sprowadzone do równania o spółczynnikach całkowitych.

Zauważmy przedewszystkim, że z określenia tego nie są wyłączone pierwiastki równań algiebraicznych, których spółczynniki są liczbami algiebraicznemi, czyli że powyższe określenie liczby algiebraicznej jest jak można najogólniejsze; wynika to z twierdzenia następującego:

Każdy pierwiastek równania algiebraicznego o spółczynnikach algiebraicznych jest zarazem pierwiastkiem równania algiebraicznego o spółczynnikach całkowitych.

W rzeczy samej, niech będzie ω pierwiastkiem równania

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \gamma = 0, \tag{1}$$

gdzie α, β, ... γ są liczbami algiebraicznemi, czyli odpowiednio pierwiastkami równań postaci następującej:

$$\left\{\begin{array}{l} x^a + A_1x^{a-1} + A_2x^{a-2} + \ldots + A_a = 0 \\ x^b + B_1x^{b-1} + B_2x^{b-2} + \ldots + B_b = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^c + C_1x^{c-1} + C_2x^{c-2} + \ldots + C_c = 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

gdzie wszystkie spółczynniki są liczbami wymiernemi.

Oznaczmy przez p iloczyn $n \,.\, a \,.\, b \ldots c$, a przez ω_1, ω_2, ... ω_p wszystkie iloczyny postaci

$$\omega^{n'} . \alpha^{a'} . \beta^{b'} . \ldots \gamma^{c'} \left\{\begin{array}{l} n' = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1 \\ a' = 0,\ 1,\ 2, \ldots a-1 \\ b' = 0,\ 1,\ 2, \ldots b-1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c' = 0,\ 1,\ 2, \ldots c-1, \end{array}\right.$$

których liczba jest właśnie p.

Łatwo się przekonać, że p iloczynów $\omega\omega_1$, $\omega\omega_2$, ... $\omega\omega_p$ można wyrazić w sposób następujący:

$$\omega\omega_i = k_{i1}\omega_1 + k_{i2}\omega_2 + \dots k_{ip}\omega_p$$

$$(i = 1,\ 2, \dots p),$$

gdzie wszystkie liczby k_{rs} są wymierne.

W rzeczy samej, mamy

$$\omega\omega_i = \omega^{n'+1} . \alpha^{a'} . \beta^{b'} \dots \gamma^{c'}.$$

Rozróżnijmy dwa przypadki:

1^0 niech będzie $n' < n - 1$; wtedy $n' + 1 < n$, a więc $\omega\omega_i$ równa się jednej z p wielkości $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_p$;

2^0 niech będzie $n' = n - 1$; wtedy $n' + 1 = n$, a zatym $\omega^{n'+1} = \omega^n$; ale ponieważ ω jest pierwiastkiem równania (1), przeto istnieje tożsamość

$$\omega^n = -\alpha\omega^{n-1} - \beta\omega^{n-2} - \dots - \gamma,$$

a zatym:

$$\omega\omega_i = -\omega^{n-1} . \alpha^{a'+1}\beta^{b'} \dots \gamma^{c'} - \omega^{n-2}\alpha^{a'}\beta^{b'+1} \dots \gamma^{c'} - \dots \alpha^{a'}\beta^{b'} \dots \gamma^{c'+1}. \tag{3}$$

Weźmy teraz pod uwagę pierwszy wyraz drugiej strony tej tożsamości, czyli

$$\omega^{n-1} . \alpha^{a'+1} . \beta^{b'} \dots \gamma^{c'}; \tag{4}$$

możemy znowu rozróżnić dwa przypadki:

albo $a' < a - 1$, czyli $a' + 1 < a$, a wtedy ten wyraz równa się jednej z p wielkości

$$\omega_1, \ \omega_2, \dots \omega_p;$$

albo też $a' = a - 1$, czyli $a' + 1 = a$, a wtedy $\alpha^{a'+1} = \alpha^a$; ale ponieważ α jest pierwiastkiem pierwszego z równań (2), przeto istnieje tożsamość

$$\alpha^a = -A_1\alpha^{a-1} - A_2\alpha^{a-2} - \dots - A_a.$$

Jeżeli więc w wyrazie (4) podstawimy to wyrażenie zamiast $\alpha^{a'+1}$, to ten wyraz przedstawi się jako funkcja linjowa jednorodna niektórych (a mianowicie a) z p wielkości $\omega_1 . \ \omega_2, \dots \omega_p$ o spółczynnikach wymiernych.

Ponieważ to samo dotyczy każdego wyrazu z prawej strony tożsamości (3), przeto i iloczyn $\omega\omega_i$ jest funkcją jednorodną linjową p wielkości $\omega_1, \ \omega_2, \dots \omega_p$ o spółczynnikach wymiernych (różnych od zera).

Istnieje przeto p równań postaci

$$\omega\omega_1 = k_{11}\omega_1 + k_{12}\omega_2 + \dots + k_{1p}\omega_p$$

$$\omega\omega_2 = k_{21}\omega_1 + k_{22}\omega_2 + \dots + k_{2p}\omega_p$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\omega\omega_p = k_{p1}\omega_1 + k_{p2}\omega_2 + \dots + k_{pp}\omega_p,$$

gdzie wszystkie spółczynniki k_{rs} są liczbami wymiernemi. Równania te można napisać w sposób następujący:

$$(k_{11}-\omega)\omega_1+k_{12}\omega_2+\ldots+k_{1p}\omega_p=0$$
$$k_{21}\omega_1+(k_{22}-\omega)\omega_2+\ldots+k_{2p}\omega_p=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k_{p1}\omega_1+k_{p2}\omega_2+\ldots+(k_{pp}-\omega)\omega_p=0.$$

Stąd wynika, ponieważ wielkości ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_p$ nie mogą być wszystkie zerami, że liczba ω musi być pierwiastkiem równania

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega & k_{12} & \ldots k_{1p} \\ k_{21} & k_{22}-\omega & \ldots k_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{p1} & k_{p2} & \ldots k_{pp}-\omega \end{vmatrix}=0.$$

Jestto równanie algiebraiczne stopnia p względem ω o spółczynnikach wymiernych; równanie to, pomnożone przez odpowiednią liczbę całkowitą, sprowadza się do równania o spółczynnikach całkowitych. Tym sposobem twierdzenie rzeczone zostało dowiedzione.

Inne twierdzenie, którym często się będziemy posługiwali, jest następujące.

Jeżeli α, $\beta, \ldots \gamma$ są liczbami algiebraicznemi, wtedy każda liczba, utworzona z nich za pomocą działań wymiernych, jest również algiebraiczna.

Wystarczy dowieść, że jeżeli α, β są liczbami algiebraicznemi, to i wyrażenia $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha.\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ są liczbami algiebraicznemi.

Zaczniemy od uwagi, że z określenia liczby algiebraicznej wynika bezpośrednio, że jeżeli α jest liczbą algiebraiczną, to i $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha+1$, $\alpha-1$ są liczbami algiebraicznemi.

Stosując teraz twierdzenie poprzednio dowiedzione do równania linjowego

$$\beta x+\alpha=0$$

o spółczynnikach algiebraicznych α, β znajdziemy, że $-\frac{\alpha}{\beta}$, a więc i $\frac{\alpha}{\beta}$ jest liczbą algiebraiczną, przeto i $\frac{1}{\beta}$, a więc także $\alpha:\frac{1}{\beta}=\alpha.\beta$ jest liczbą algiebraiczną. Podobnie liczby $\frac{\alpha}{\beta}+1$ i $\frac{\alpha}{\beta}-1$ są algiebraiczne, a więc również i liczby

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right).\beta=\alpha+\beta,\ \left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right).\beta=\alpha-\beta.$$

Twierdzenie zostało więc dowiedzione; możnaby zresztą dowieść go niezależnie od twierdzenia poprzedniego[1]).

§ 3. Dowód istnienia liczb przestępnych. — W paragrafie tym zajmiemy się pierwszym z pytań pomieszczonych w § 1, a mianowicie: czy istnieją liczby nie będące pierwiastkami żadnego równania algiebraicznego o spółczynnikach wymiernych. Pierwszym, który dowiódł istnienia takich liczb, zwanych przestępnemi, był Liouville. Dowodzenie Liouville'a, które teraz wyłożymy w nieco zmodyfikowanej postaci, ukazało się po raz pierwszy w skróceniu w *Comptes rendus* z r. 1844, tom 18, str. 883 i 910, a następnie, obszerniej, w *Journal de Liouville* tom 16 (1851), str. 133 pod tytułem: sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même reductible à des irrationelles algébriques.

Zacznijmy od pewnej właściwości liczebnej, którą wykazuje każda liczba algiebraiczna rzeczywista i dodatnia, jeżeli zostanie rozwinięta na ułamek ciągły. Niech będzie x_0 jakąkolwiek liczbą algiebraiczną, to znaczy pierwiastkiem równania postaci

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0 \tag{1}$$

o spółczynnikach całkowitych (§ 2). Nie zmniejszając ogólności dowodzenia możemy założyć, że pierwiastki tego równania są wszystkie różne od siebie; istotnie, gdyby równanie miało pierwiastki równe, wtedy dzieląc je przez największy dzielnik wspólny pierwszej strony równania i jej pierwszej pochodnej, moglibyśmy osiągnąć urzeczywistnienie naszego założenia.

Przypuśćmy, że liczba x_0 jest rzeczywista i dodatnia i że została rozwinięta na ułamek ciągły w sposób następujący:

$$x_0=p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\ddots+\cfrac{1}{p_{k-1}+\ddots}}}$$

---

[1]) Oba twierdzenia powyższe zawdzięczamy Dedekindowi; por. dodatek IX, P. G. Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4 wyd. Brunświk 1914.

gdzie $p_0, p_1, p_2, \dots p_{k-1}, \dots$ przedstawiają liczby całkowite i dodatnie; niech będzie r_k resztą rozwinięcia, jeżeli je przerwiemy na mianowniku p_{k-1}; wtedy r_k będzie również liczbą algiebraiczną (§ 2) rzeczywistą i dodatnią, a p_k będzie największą liczbą całkowitą zawartą w $\frac{1}{r_k}$.

Jeżeli w ogólności oznaczymy przez

$$\frac{c_s}{c'_s} \quad (s=1, 2, 3, \dots)$$

przybliżenie (redukt), które otrzymamy, przerywając ułamek ciągły na mianowniku p_{s-1}, to otrzymamy podług znanego prawa tworzenia przybliżeń

$$\frac{c_k}{c'_k}=\frac{c_{k-1}\,p_{k-1}+c_{k-2}}{c'_{k-1}\,p_{k-1}+c'_{k-2}},$$

jeżeli zaś w tym wyrażeniu zamiast p_{k-1} podstawimy $p_{k-1}+r_k$, to otrzymamy

$$x_0=\frac{c_k+r_k c_{k-1}}{c'_k+r_k c'_{k-1}}.$$

Mamy więc

$$\frac{c_k}{c'_k}-x_0=\frac{c_k}{c'_k}-\frac{c_k+r_k c_{k-1}}{c'_k+r_k c'_{k-1}}=\frac{r_k(c_k c'_{k-1}-c'_k c_{k-1})}{c'_k(c'_k+r_k c'_{k-1})},$$

czyli:

(2) $$\frac{c_k}{c'_k}-x_0=\frac{(-1)^k r_k}{c'_k(c'_k+r_k c'_{k-1})}.$$

Z drugiej strony, jeżeli $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ są pozostałemi $n-1$ pierwiastkami równania (1), które podług założenia wszystkie są różne od siebie i od x_0, to możemy napisać:

$$f(x)=a_0(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Jeżeli w tym wyrażeniu zamiast x napiszemy $\frac{c_k}{c'_k}$, to dostaniemy

$$f\left(\frac{c_k}{c'_k}\right)=a_0\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_0\right)\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_1\right)\dots\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_{n-1}\right)=$$

$$=\frac{a_0c_k^n+a_1c_k^{n-1}c'_k+\dots+a_{n-1}c_kc'^{\,n-1}_k+a_nc'^{\,n}_k}{c'^{\,n}_k}.$$

Ale wielkości a, c, c' są wszystkie liczbami całkowitemi, możemy więc napisać

$$a_0\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_0\right)\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_1\right)\dots\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_{n-1}\right)=\frac{C}{c'^{\,n}_k},$$

gdzie C jest liczbą całkowitą.

Jeżeli k rośnie do nieskończoności, to $\frac{c_k}{c'_k}$ dąży do granicy x_0; począwszy więc od pewnej oznaczonej wartości k wielkość $\frac{c_k}{c'_k}$ jest zawsze różna od x_0, $x_1, \ldots x_{n-1}$ i mniejsza, co do wartości bezwzględnej, od pewnej wielkości dodatniej skończonej; a więc począwszy od pewnej wielkości k liczba całkowita C jest różna od zera, a zatym, co do wartości bezwzględnej, większa lub równa jedności, a wyrażenie

$$a_0\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_1\right)\ldots\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_{n-1}\right)$$

jest, co do wartości bezwzględnej, mniejsze od pewnej skończonej wielkości dodatniej l; a więc, co do wartości bezwzględnej

$$\left(\frac{c_k}{c'_k}-x_0\right)l > \frac{1}{c'^n_k},$$

czyli

$$\frac{c_k}{c'_k}-x_0 > \frac{1}{lc'^n_k}.$$

Uwzględniając teraz równanie (2) dostajemy:

$$\frac{r_k}{c'_k(c'_k+r_k c'_{k-1})} > \frac{1}{lc'^n_k},$$

czyli

$$\frac{c'_k+r_k c'_{k-1}}{r_k} < lc'^{n-1}_k,$$

a ponieważ c'_k, c'_{k-1} są wielkościami dodatniemi, przeto

$$\frac{1}{r_k} < lc'^{n-2}_k;$$

ponieważ zaś p_k jest największą liczbą całkowitą zawartą w $\frac{1}{r_k}$, przeto dostajemy ostatecznie

(3) $$p_k < lc'^{n-2}_k.$$

Ta nierówność przedstawia właściwość arytmetyczną, którą mieliśmy ustalić dla liczby algiebraicznej x_0; możemy ją tak wypowiedzieć:

Jeżeli rozwiniemy na ułamek ciągły pierwiastek rzeczywisty i dodatni równania algiebraicznego stopnia n o spółczynnikach całkowitych i pierwiastkach nierównych, wtedy każdy mianownik cząstkowy tego ułamka ciągłego jest nie większy od iloczynu pewnej wielkości stałej l, dodatniej i skończonej, przez potęgę $(n-2)$-gą mianownika reduktu poprzedzającego.

Gdybyśmy więc mogli utworzyć taki ułamek ciągły postaci

$$p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\dots}}$$

o mianownikach cząstkowych całkowitych i dodatnich, dla którego, począwszy od pewnej wartości k, warunek (3) niebyłby spełniony, jakiekolwiekby były wartości stałej l i liczby całkowitej n, wtedy liczba przedstawiona przez ten ułamek ciągły nie mogłaby być pierwiastkiem żadnego równania o spółczynnikach całkowitych i pierwiastkach nierównych, a więc nie mogłaby też być pierwiastkiem żadnego równania algiebraicznego o spółczynnikach wymiernych (§ 2), byłaby przeto liczbą przestępną.

Otóż ułamek ciągły tego rodzaju można w rzeczy samej utworzyć; wystarczy np. utworzyć każdy mianownik cząstkowy p_k w taki sposób, ażeby była spełniona zależność

$$p_k=c'^{k}_{k} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\dots).$$

W rzeczy samej, jakąkolwiek wartość otrzymają n i l, liczba k, wzrastając, musi przewyższyć n; ale jeżeli k wzrasta, to i liczba c'_k wzrasta do nieskończoności; możemy więc być pewni, że począwszy od pewnej wartości k będzie

$$k>n,\quad c'^{2}_{k}>l.$$

Wskutek pierwszej z tych dwuch nierówności będzie

$$p_k>c'^{2}_{k}\,.\,c'^{n-2}_{k},$$

a wskutek drugiej a f o r t i o r i

$$p_k>l\,.\,c'^{n-2}_{k}.$$

Ponieważ więc, jakiekolwiek są wartości l i n, można znaleźć taką wartość k, że począwszy od tej wartości nierówność (3) nigdy się nie spełnia, przeto liczba przedstawiona przez tak utworzony ułamek ciągły jest liczbą przestępną.

Zauważmy, że doszlibyśmy do tego samego wyniku, gdybyśmy obrali

$$p_k>c'^{k}_{k} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\dots);$$

z tej dowolności okazuje się możliwość utworzenia nieskończenie wielu liczb przestępnych; tak więc twierdzenie L i o u v i l l e a zostało dowiedzione.

Z badań klasycznych G. C a n t o r a[1]) nad własnościami zbiorów

[1]) *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.* Journ. f. Math. 77 (1873).

liczb algiebraicznych wypływa nowy dowód istnienia liczb przestępnych o wiele prostszy i naturalniejszy od dowodu Liouvillea.

Przedstawimy tu dowód Cantora, trzymając się łatwego sposobu, w jaki ten dowód został wyłożony przez F. Kleina[1]).

Zbiór nieskończenie wielu elementów (np. liczb) nazywa się przeliczalnym, jeżeli jego elementy mogą być jedno-jednoznacznie podporządkowane liczbom szeregu naturalnego 1, 2, 3,...

A więc zbiór elementów nazywa się przeliczalnym, jeżeli jego elementy mogą być uporządkowane, podług jakiegokolwiek prawa, w jeden ciąg, w którym każdy element otrzymuje miejsce z oznaczoną liczbą porządkową.

Dowiedziemy teraz, że wszystkie liczby algiebraiczne rzeczywiste tworzą zbiór przeliczalny, czyli:

Zbiór liczb algiebraicznych rzeczywistych i zbiór liczb całkowitych dodatnich mogą być sobie podporządkowane jedno-jednoznacznie.

Wszystkie liczby algiebraiczne rzeczywiste otrzymuje się przez wyznaczenie wszystkich pierwiastków rzeczywistych wszystkich równań nieprzywiedlnych postaci

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

zakładając, że spółczynniki a_0, $a_1, \ldots a_n$ są liczbami całkowitemi wymiernemi pierwszemi względem siebie, a a_0 różne od zera i dodatnie.

Nazwijmy wysokością liczby algiebraicznej, będącej pierwiastkiem powyższego równania, sumę

$$N = (n-1) + a_0 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \tag{4}$$

gdzie $|a_\nu|$ oznacza wartość bezwzględną społczynnika a_ν.

Widoczną jest rzeczą, że każdej przepisanej wartości N odpowiada liczba skończona liczb algiebraicznych. W rzeczy samej, wskutek (4) n nie może przewyższać N i jeżeli obierzemy N, n, wtedy a_0, $|a_1|$, $|a_2|, \ldots,$ $|a_n|$, jako liczby całkowite dodatnie, mogą być wyznaczone tylko skończoną liczbą sposobów; tak więc do wartości danej N należy tylko skończona liczba równań, z których należy uwzględnić tylko równania nieprzywiedlne; przeto do wartości danej N należy tylko liczba skończona liczb algiebraicznych.

Liczby algiebraiczne rzeczywiste można więc uporządkować w gru-

---

[1]) *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie.* Ausgearbeitet von F. Tägert. Leipzig 1895.

py podług ich rosnącej wysokości, a liczby tej samej grupy, czyli tej samej wysokości (w liczbie skończonej) mogą być uporządkowane podług swojej wielkości. Tak więc wszystkie liczby rzeczywiste algiebraiczne mogą być uporządkowane w jeden ciąg, w którym każda z nich otrzymuje miejsce oznaczone, a zatym liczby algiebraiczne rzeczywiste stanowią zbiór przeliczalny, c. b. d. d.

Obrawszy jakikolwiek zbiór przeliczalny liczb rzeczywistych, weźmy pod uwagę wszystkie liczby rzeczywiste przedstawione przez punkty dowolnie małego odcinka osi rzeczywistej; dowiedziemy, że między niemi jest zawsze nieskończenie wiele takich liczb, które nie należą do danego zbioru przeliczalnego.

W tym celu wyobraźmy sobie, że liczby tego zbioru zostały napisane pod postacią ułamków dziesiętnych; jeżeli w którymkolwiek z tych ułamków, począwszy od którejkolwiek jego cyfry, wszystkie następne są dziewiątkami, wtedy liczba odpowiednia równa się liczbie dziesiętnej skończonej, ażeby więc uniknąć tego dwojakiego sposobu oznaczania umówimy się, że wyłączymy ciągi nieskończenie wielu dziewiątek.

Łatwo teraz utworzyć liczbę rzeczywistą nie należącą do rozpatrywanego zbioru, jakkolwiek zbliżone do siebie będą granice, między któremi ta liczba ma być zawarta.

W rzeczy samej, jeżeli te granice są oznaczone np. przez to, że dajemy pierwszych pięć cyfr dziesiętnych liczby, wtedy wystarczy obrać jako szóstą cyfrę różną od 9 i różną od szóstej cyfry dziesiętnej pierwszej liczby zbioru, jako siódmą cyfrę różną od 9 i różną od siódmej cyfry drugiej liczby zbioru i t. d. Tak utworzony ułamek dziesiętny przedstawia liczbę, która oczywiście nie należy do rozpatrywanego zbioru przeliczalnego, a ponieważ wyznaczając każdą cyfrę dziesiętną, oprócz danych, możemy wybierać z pośród 8 cyfr, przeto otrzymamy w każdym dowolnie małym przedziale osi rzeczywistej nieskończenie wiele liczb nie należących do omawianego zbioru.

Jeżeli więc za ten zbiór przeliczalny przyjmiemy zbiór liczb rzeczywistych algiebraicznych, to zostało dowiedzione, że w każdym przedziale rzeczywistym dowolnie małym istnieje nieskończenie wiele liczb przestępnych.

§ 4. Twierdzenie przybrane Weierstrassa. Musimy teraz rozpatrzeć drugie pytanie pomieszczone w § 1, pozostające w związku z zagadnieniem możliwości elementarnego rozwiązania zadania kwadratury koła; a mianowicie musimy rozstrzygnąć, czy liczbę π należy pomieścić między liczbami algiebraicznemi czy przestępnemi. To pytanie rozwiązał w roku 1882 Lindemann[1]); opierając się na badaniach, za pomocą których Hermite[2]) (1873) dowiódł, że liczba e (zasada logarytmów naturalnych) jest przestępna, Lindemann znalazł dowód, że liczba π jest również przestępna.

Dowód Lindemanna został następnie znacznie uproszczony przez Weierstrassa[3]) i zarazem uogólniony, tak że posłużył do dowiedzenia twierdzenia ogólniejszego, wypowiedzianego przedtym przez Lindemanna. Z twierdzenia tego wynika nietylko, że liczby e i π są przestępne, ale również, jak to zaznaczył Weierstrass, że jest przestępny każdy łuk koła, którego cięciwa wyraża się algiebraicznie za pomocą promienia; tym sposobem zostało rozstrzygnięte zagadnienie możliwości wykonania elementarnego wyprostowania okręgu albo jakiegokolwiek łuku koła.

Zaczniemy od twierdzenia przybranego, na którym opiera się Weierstrass, ażeby dowieść przestępności liczby π i ogólnego twierdzenia Lindemanna.

Niech będą $f(z)$ i $h(z)$ dwa wielomiany stopni $n+1$ i n względem zmiennej z:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_n z + a_{n+1} \\ h(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0\,; \end{cases}$$

wielomian $f(z)$ niech będzie tak wybrany, ażeby równanie $f(z)=0$ nie miało pierwiastków równych, natomiast spółczynniki wielomianu $h(z)$ są całkiem dowolne.

Z tych dwuch wielomianów tworzymy funkcję

$$(2)\qquad F(z) = \frac{h(z) \,.\, f(z)^m}{m!}, \text{ (}m\text{ całkowite dodatnie)}$$

której stopień jest $\mu = n + m(n+1)$, i rozpatrujemy funkcję

$$(3)\qquad \varphi(z) = F(z) + F'(z) + F''(z) + \ldots + F^{(\mu)}(z),$$

oznaczając za pomocą kresek u góry kolejne pochodne funkcji $F(z)$.

Funkcja $\varphi(z)$ jest tego samego stopnia, co $F(z)$, a więc stopnia $\mu = n + m(n+1)$; różniczkując obie strony równania (3) względem z i uwzględniając, że $F^{(\mu+1)}(z) = 0$, dostajemy

$$\varphi'(z) = F'(z) + F''(z) + F'''(z) + \ldots + F^{(\mu)}(z).$$

---

[1]) *Ueber die Ludolphsche Zahl.* Berichte der Berliner Ak. d. Wiss. 1882.

[2]) *Sur la fonction exponentielle.* Comptes rendus, vol. 77.

[3]) *Zu Lindemanns Abhandlung über die Ludolphsche Zahl.* Berliner Berichte 1885.

Odejmując równanie to od poprzedniego stronami odpowiedniemi, znajdziemy

$$\varphi(z) - \varphi'(z) = F(z),$$

albo wskutek (2):

$$(4) \qquad \varphi(z) - \varphi'(z) = \frac{h(z) f(z)^m}{m!}.$$

Przypuśćmy teraz, że spółczynniki c_i funkcji $h(z)$ nie są wszystkie zerami, że więc $h(z)$ nie jest tożsamościowo zerem; wynika stąd, że i $\varphi(z)$ nie może być tożsamościowo zerem; $\varphi(z)$ nie może też zawierać $f(z)$ jako czynnik, gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy założyć, że

$$\varphi(z) = \vartheta(z) \,.\, f(z)^\rho,$$

gdzie $\vartheta(z)$ jest wielomianem niepodzielnym przez $f(z)$, a $\rho < m+1$. Ale to nie jest możliwe, gdyż równanie (4) przyjęłoby wtedy postać

$$\{\vartheta(z) - \vartheta'(z)\} \,.\, f(z)^\rho - \rho \,.\, \vartheta(z) \,.\, f(z)^{\rho-1} \,.\, f'(z) = \frac{h(z) \,.\, f(z)^m}{m!},$$

czyli

$$\{\vartheta(z) - \vartheta'(z)\} \,.\, f(z) - \rho \,.\, \vartheta(z) \,.\, f'(z) = \frac{h(z) \,.\, f(z)^{m-\rho+1}}{m!};$$

wyraz $\rho \,.\, \vartheta(z) \,.\, f'(z)$ musiałby być podzielny przez $f(z)$; ale $\vartheta(z)$ podług założenia nie jest podzielne przez $f(z)$, a $f'(z)$ nie może mieć czynnika wspólnego z $f(z)$, gdyż równanie $f(z) = 0$ niema, podług założenia, pierwiastków równych. A więc iloczyn $\rho \,.\, \vartheta(z) \,.\, f'(z)$ nie może być podzielny przez $f(z)$, a więc i $\varphi(z)$ nie może być podzielne przez $f(z)$.

Zauważmy teraz, że różniczkując kolejno $F(z)$ względem z, dostaniemy jako pierwszą, która nie jest podzielna przez $f(z)$, pochodną m-tą; ta pochodna składa się z wyrazów podzielnych przez $f(z)$ i jednego tylko wyrazu $h(z) \,.\, f'(z)^m$ nie podzielnego przez $f(z)$. Ten wyraz jest funkcją całkowitą wymierną względem

$$z, \; a_0, \; a_1, \ldots a_{n+1}, \; c_0, \; c_1, \ldots c_n$$

o spółczynnikach całkowitych, linjową i jednorodną względem wielkości c i stopnia $(m+1)n$ względem z. Analogicznie we wszystkich kolejnych pochodnych funkcji $F(z)$, aż do pochodnej μ-tej, wyrazy niepodzielne przez $f(z)$ są funkcjami całkowitemi wymiernemi względem

$$z, \; a_0, \; a_1, \ldots a_{n+1}, \; c_0, \; c_1, \ldots c_n$$

o spółczynnikach całkowitych, linjowemi i jednorodnemi względem wielkości c, stopnia nie przewyższającego $(m+1)n$ względem z. Jeżeli więc w wyrażeniu $\varphi(z)$, danym przez wzór (3), połączymy wszystkie wyrazy zawierające czynnik $f(z)$, to możemy napisać:

$$\varphi(z) = K(z) \, . \, f(z) + H(z), \tag{5}$$

gdzie $K(z)$ jest wielomianem względem z, a $H(z)$ funkcją całkowitą wymierną względem

$$z, \; a_0, \; a_1, \ldots a_{n+1}, \; c_0, \; c_1, \ldots c_n$$

o spółczynnikach całkowitych, linjową i jednorodną względem wielkości c, stopnia $(m+1)n$ względem z; $H(z)$ nie może być tożsamościowo zerem, gdyż $\varphi(z)$ nie jest podzielne przez $f(z)$.

Pomnóżmy teraz $H(z)$ przez $a_0{}^{mn}$, a następnie podzielmy przez $f(z)$, prowadząc dzielenie algiebraiczne, dopóki to możliwe; dostaniemy jako iloraz wielomian wielkości z, a jako resztę funkcję $g(z)$ całkowitą wymierną względem

$$z, \; a_0, \; a_1, \ldots a_{n+1}, \; c_0, \; c_1, \ldots c_n$$

o spółczynnikach całkowitych, linjową i jednorodną względem wielkości c i stopnia nie wyższego od n względem z; tak więc zależność (5) można napisać pod postacią następującą:

$$a_0{}^{mn} \varphi(z) = G(z) \, . \, f(z) + g(z), \tag{6}$$

gdzie $G(z)$ jest wielomianem względem z, a $g(z)$ ma własności wyżej wyszczególnione i oprócz tego nie może być tożsamościowo zerem, podobnie jak $H(z)$.

Ponieważ wreszcie $g(z)$ jest funkcją linjową i jednorodną względem $c_0, \; c_1, \ldots c_n$, przeto możemy ją przedstawić jako sumę $n+1$ wyrazów w sposób następujący:

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z),$$

gdzie $n+1$ funkcji $g_i(z)$ są funkcjami całkowitemi wymiernemi względem $z, \; a_0, \; a_1, \ldots a_{n+1}$ o spółczynnikach całkowitych, stopnia nie wyższego od n względem z; dostaniemy więc wskutek (6):

$$a_0{}^{mn} \varphi(z) = G(z) \, . \, f(z) + \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z). \tag{7}$$

Weźmy teraz pod uwagę całkę nieoznaczoną

$$\int e^{-z} \, . \, F(z) dz$$

i zastosujmy kolejno $\mu+1$ razy całkowanie przez części, pamiętając, że

$F^{(\mu+1)}(z)=0$; znajdziemy

$$\int e^{-z}F(z)dz = -e^{-z}\{F(z)+F'(z)+\ldots+F^{(\mu)}(z)\},$$

a wskutek (3):

$$\int e^{-z}F(z)dz = -e^{-z}\varphi(z).$$

Mnożąc obie strony tej równości przez a_0^{mn} i uwzględniając (2) i (7), dostaniemy

$$\int \frac{[a_0^n f(z)]^m}{m!} h(z)e^{-z}dz = -e^{-z}G(z).f(z) - e^{-z}\sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z).$$

Niech teraz z', z'' będą dwoma pierwiastkami równania $f(z)=0$, które podług założenia ma wszystkie pierwiastki różne. Całkując w ostatnim wzorze wzdłuż jakiejkolwiek drogi na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z od z' do z'' i uwzględniając, że

$$f(z')=f(z'')=0,$$

dostaniemy

$$e^{-z''}\sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z'') - e^{-z'}\sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z') = -\int_{z'}^{z''} \frac{[a_0^n f(z)]^m}{m!} h(z)e^{-z}dz.$$

Ponieważ zaś

$$h(z)=\sum_{i=0}^{n} c_i z_i,$$

przeto zależność ta jest linjowa i jednorodna względem wielkości c_i, a ponieważ te wielkości są dowolne, przeto rozpada się na $n+1$ równań następujących:

$$(8) \qquad e^{-z''}.g_i(z'') - e^{-z'}g_i(z') = -\int_{z'}^{z''} \frac{[a_0^n f(z)]^m}{m!} z_i e^{-z}dz$$

$$(i=0,\ 1,\ 2, \ldots n).$$

Liczba m pozostawała dotychczas nieoznaczona, a funkcje $g_i(z)$ zależą tylko od tej liczby, jakkolwiek tego wyraźnie nie mówiliśmy.

Dowiedziemy teraz, że jeżeli m rośnie do nieskończoności, to wartości bezwzględne całek, występujących w powyższych równaniach (8) po prawej stronie, dążą do granicy zero. W rzeczy samej, wzdłuż drogi całkowania, której długość oznaczymy przez l, niech będzie M największą wartością bezwzględną iloczynu $z^i.e^{-z}$, a M' największą wartośicą bezwzględną iloczynu $a_0^n.f(z)$. Wartość bezwzględna całki pozostaje zawsze mniejsza od $\frac{MM'^m}{m!} . l$; ale jeżeli m rośnie do nieskończoności, wtedy wielkość $\frac{M'^m}{m!}$ dąży do granicy zero, podczas kiedy M i l pozostają stałemi; a więc i wartość bezwzględna całki dąży do granicy zero i tak samo będzie z pierwszemi stronami równań (8) jeszcze i wtedy, jeżeli zostaną pomnożone przez $e^{z'+z''}$.

Ostatecznie więc możemy powiedzieć, że jeżeli m rośnie do nieskończoności, to wyrażenia

$$e^{z'} . g_i(z'') - e^{z''} . g_i(z'), \quad (i=0,\ 1,\ 2, \dots n)$$

dążą do granicy zero.

Można przeto założyć, że liczba m została obrana tak wielką, że wartości bezwzględne wszystkich tych wyrażeń są mniejsze od dowolnie obranej, jakkolwiek małej liczby dodatniej σ.

Jeżeli teraz oznaczymy przez $z_0,\ z_1, \dots z_n$ wszystkie pierwiastki równania $f(z) = 0$, które to pierwiastki podług założenia są różne od siebie, i jeżeli założymy, że wszystkie spółczynniki tego równania są liczbami całkowitemi, to wypadnie stąd, że i $n+1$ funkcji $g_i(z)$ są funkcjami całkowitemi wymiernemi zmiennej z o spółczynnikach całkowitych, a stosownie do tego, co było mówione, można zawsze wybrać na m wartość dość wielką, ażeby wartości bezwzględne wyrażeń

$$e^{z_k} . g_i(z_0) - e^{z_0} . g_i(z_k) \begin{pmatrix} i=0,\ 1,\ 2, \dots n \\ k=0,\ 1,\ 2, \dots n \end{pmatrix}$$

były wszystkie mniejsze od liczby dodatniej σ dowolnie małej.

Dowiedziemy teraz, że $n+1$ funkcji $g_0(z),\ g_1(z), \dots g_n(z)$, oprócz własności już poznanych, mają jeszcze własność następującą: wyznacznik

$$\Gamma = \begin{vmatrix} g_0(z_0) & g_1(z_0) \dots g_n(z_0) \\ g_0(z_1) & g_1(z_1) \dots g_n(z_1) \\ \dots & \dots \\ g_0(z_n) & g_1(z_n) \dots g_n(z_n) \end{vmatrix}$$

jest różny od zera.

Istotnie, gdyby ten wyznacznik równał się zeru, wtedy istniałoby $n+1$ zależności

$$\sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z_k) = 0 \quad (k=0,\ 1,\ 2, \dots n)$$

dla takich wartości $c_0,\ c_1, \dots c_n$, które nie są wszystkie zerami; przeto funkcja

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(z),$$

której stopień względem z nie przewyższa n, musiałaby przyjąć wartość zero dla $n+1$ różnych wartości z, musiałaby więc być tożsamościowo zerem, w przeciwieństwie do tego, co było wyżej dowiedzione.

Reasumując to wszystko, czegośmy dowiedli w tym paragrafie, możemy wypowiedzieć twierdzenie przybrane Weierstrassa w sposób następujący.

Jeżeli $f(z)$ jest funkcją całkowitą wymierną stopnia $n+1$ zmiennej z o spółczynnikach całkowitych i pierwiastkach $z_0, z_1, z_2, \dots z_n$ wszystkich różnych od siebie, wtedy można utworzyć układ $n+1$ funkcji

$$g_0(z),\ g_1(z), \dots g_n(z)$$

całkowitych wymiernych zmiennej z stopnia nie przewyższającego n, których spółczynniki są całkowite i takich, ażeby wyznacznik wielkości $g_i(z_k)$ był różny od zera, a każda z różnic

$$e^{z_k} . g_i(z_0) - e^{z_0} . g_i(z_k) \qquad \begin{pmatrix} i=0,\ 1,\ 2, \dots n \\ k=0,\ 1,\ 2, \dots n \end{pmatrix}$$

żeby miała wartość bezwzględną mniejszą od dowolnie obranej jakkolwiek małej liczby dodatniej σ.

§ 5. Dowodzenie twierdzenia ogólnego Lindemanna. Opierając się na twierdzeniu przybranym paragrafu poprzedniego, Weierstrass dał dowód ogólnego twierdzenia Lindemanna; dowód ten wyłożymy teraz, trzymając się rozprawy oryginalnej, podanej wyżej.

Zaczniemy od następującego twierdzenia, od którego przez stopniowe rozszerzanie dojdziemy z łatwością do ogólnego twierdzenia Lindemanna.

A) Jeżeli x_1, x_2, x_r stanowią r pierwiastków równania algiebraicznego

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_r = 0 \tag{1}$$

stopnia r o spółczynnikach wymiernych i pierwiastkach nierównych, i jeżeli $N_1, N_2, \dots N_r$ stanowią r liczb całkowitych, z których jedna przynajmniej jest różna od zera, wtedy suma $\sum_{i=1}^{r} N_i . e^{x_i}$ jest różna od zera.

Wyobraźmy sobie, że liczby $x_1, x_2, \dots x_r$ zostały w taki sposób uporządkowane, że część rzeczywista którejkolwiek z nich nie przewyższa części rzeczywistej żadnej liczby poprzedzającej; może się wtedy zdarzyć, że w szeregu liczb $x_1, x_2, \dots x_r$ okaże się grupa następujących po sobie liczb, mających części rzeczywiste równe; założymy, że w takim przypadku liczby tej grupy zostały uporządkowane podług malejących spółczynników części urojonej.

W tym założeniu różnice $x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots x_{r-1} - x_r$, otrzymywane przez odjęcie od którejkolwiek z tych liczb którejkolwiek z liczb następnych, mają część rzeczywistą dodatnią, albo też część rzeczywistą równą zeru a dodatni spółczynnik części urojonej.

Wynika stąd, że jeżeli $a, b, \dots l$ są liczbami jakkolwiek wybranemi z pośród r liczb $1, 2, \dots r$ i jeżeli $\alpha, \beta, \dots \lambda$ są również liczbami wybranemi z pośród $1, 2, \dots r$, ale takiemi, że

$$a \geqq \alpha, \quad b \geqq \beta, \dots l \geqq \lambda,$$

wtedy wielkość

$$(x_a + x_b + \dots + x_l) - (x_\alpha + x_\beta + \dots + x_\lambda) =$$
$$= (x_a - x_\alpha) + (x_b - x_\beta) + \dots + (x_l - x_\lambda)$$

nie może być zerem, czyli że suma $x_a + x_b + \dots + x_l$ nie może się równać sumie $x_\alpha + x_\beta + \dots + x_\lambda$.

Oznaczmy teraz przez X' sumę

$$\sum_{i=1}^{r} = N_i e^{x_i},$$

a przez $X'', X''', \dots X^{(k)}$ wszystkie inne sumy, które powstają z tej sumy przez zastosowanie wszystkich możliwych przestawień liczb $N_1, N_2, \dots N_r$.

W takim razie $k = r!$, a każdej sumie $X^{(s)}$ można nadać postać taką:

$$X^{(s)} = \sum_{i=1}^{r} N_i^{(s)} e^{x_i}, \quad (s = 1, 2, \dots k)$$

gdzie $N_1^{(s)}, N_2^{(s)}, \dots N_r^{(s)}$ oznacza jedno z k przestawień r liczb $N_1, N_2, \dots N_r$.

Utwórzmy teraz iloczyn

$$P = X' \,.\, X'' \dots X^{(k)};$$

jeżeli dowiedziemy, że ten iloczyn jest różny od zera, wtedy i suma $X' = \sum_{i=1}^{r} N_i \,.\, e^{x_i}$, która jest jednym z jego czynników, będzie z konieczności różna od zera, a tym samym twierdzenie *A*) zostanie dowiedzione.

Można napisać

$$P=\sum_{a=1}^{r} N_a' e^{x_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} N_b'' e^{x_b} \ldots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} e^{x_l},$$

albo krócej:

$$P=\sum_{a,\, b, \ldots\, l=1}^{r} N_a' N_b'' \ldots N_l^{(k)} e^{x_a+x_b+\ldots x_l} \tag{2}$$

$$(a,\ b, \ldots\, l=1,\ 2, \ldots\, r).$$

Pomiędzy wszystkiemi wartościami, jakie może przybrać suma

$$x_a+x_b+\ldots x_l$$

dla wszelkich możliwych układów wartości wskaźników, liczba wartości różnych od siebie będzie $n+1$; oznaczając te wartości przez z_0, $z_1, \ldots z_n$ możemy prościej napisać:

$$P=\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu e^{z_\mu}, \tag{3}$$

gdzie dla każdej wartości μ mamy

$$C_\mu=\sum_{a,\, b, \ldots\, l} N_a' N_b'' \ldots N_l^{(k)}, \tag{4}$$

przyczym suma rozciąga się na te wszystkie układy wartości a, $b, \ldots l$, dla których $x_a+x_b+\ldots.+x_l=z_\mu$.

Łatwo teraz zauważyć, że z pośród $n+1$ wielkości C_μ jedna przynajmniej jest różna od zera; w rzeczy samej, ponieważ w grupie r liczb N_1, $N_2, \ldots N_r$ jedna przynajmniej jest różna od zera, przeto w każdym z k przestawień tej grupy

$$\begin{matrix} N_1',\ N_2',\ \ldots\ N_r' \\ \cdots\cdots\cdots \\ N_1^{(k)},\ N_2^{(k)}, \ldots\ N_r^{(k)} \end{matrix}$$

istnieje pierwsza liczba różna od zera; niech taką liczbą będzie N_α' dla pierwszego przestawienia, N_β'' dla drugiego, $\ldots N_\lambda^{(k)}$ dla k-tego; wtedy podług (2) będzie

$$N_\alpha' N_\beta'' \ldots N_\lambda^{(k)} e^{x_\alpha+x_\beta+\ldots+x_\lambda}$$

jednym z wyrazów, tworzących P.

Jeżeli

$$N_a' N_b'' \ldots N_l^{(k)} e^{x_a+x_b+\ldots+x_l}$$

jest jakimkolwiek innym wyrazem wyrażenia P, mającym spółczynnik różny od zera, to

$$a \geqq \alpha, \ b \geqq \beta, \dots l \geqq \lambda,$$

a więc, dzięki sposobowi, w jaki od początku założyliśmy, że liczby $x_1, x_2, \dots x_r$ zostały uporządkowane, nie może być suma $x_a + x_b + \dots + x_l$ równa $x_\alpha + x_\beta + \dots + x_\lambda$. Spółczynnik $N_\alpha' N_\beta'' \dots N_\lambda^{(k)}$ jest przeto jedną z wielkości C_μ, a więc między temi wielkościami jest jedna przynajmniej różna od zera.

Możemy teraz utworzyć funkcję $f(z)$ całkowitą wymierną zmiennej z, stopnia $n+1$, o spółczynnikach całkowitych, mającą za pierwiastki $n+1$ wielkości $z_0, z_1, \dots z_n$.

W rzeczy samej, weźmy pod uwagę iloczyn wielkości

$$z - (x_a + x_b + \dots + x_l), \ (a, b, \dots l = 1, 2, \dots r);$$

ten iloczyn jest funkcją całkowitą wymierną zmiennej z; spółczynniki tej funkcji są funkcjami całkowitemi symetrycznemi o spółczynnikach całkowitych r pierwiastków $x_1, x_2, \dots x_r$ równania (1); spółczynniki te są więc funkcjami wymiernemi spółczynników równania (1), są przeto liczbami wymiernemi. A więc iloczyn rozpatrywany jest funkcją całkowitą zmiennej z o spółczynnikach wymiernych; ten iloczyn staje się zerem tylko dla $z = z_0, z_1, \dots z_n$; jeżeli więc podzielimy tę funkcję przez największy dzielnik wspólny tej samej funkcji i jej pierwszej pochodnej, wtedy iloraz będzie funkcją całkowitą zmiennej z stopnia $n+1$, a mnożąc ten iloraz przez odpowiednią liczbę całkowitą, dostaniemy funkcję

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \dots + a_{n+1}$$

całkowitą wymierną, stopnia $n+1$ względem z, o spółczynnikach całkowitych, stającą się zerem tylko dla $z = z_0, z_1, \dots z_n$.

Wypada nam teraz zastosować twierdzenie przybrane, dowiedzione w paragrafie poprzedzającym. Wychodząc z równania

$$a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \dots + a_{n+1} = 0$$

o pierwiastkach różnych $z_0, z_1, \dots z_n$, można utworzyć układ $n+1$ funkcji $g_0(z), g_1(z), \dots g_n(z)$ całkowitych wymiernych względem z, stopnia nie przewyższającego n, o spółczynnikach całkowitych i takich, że wyznacznik wielkości $g_i(z_\mu)$ jest różny od zera, a każda różnica

$$e^{z_\mu} . g_i(z_0) - e^{z_0} . g_i(z_\mu) \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots n \\ \mu = 0, 1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

ma wartość bezwzględną mniejszą od dowolnie obranej, jakkolwiek małej, liczby dodatniej σ, czyli

(5) $$e^{z_\mu} . g_i(z_0) - e^{z_0} . g_i(z_\mu) = \varepsilon_{i\mu}\sigma, \quad \begin{pmatrix} i = 0, \ 1, \ 2, \dots n \\ \mu = 0, \ 1, \ 2, \dots n \end{pmatrix}$$

gdzie wszystkie wielkości $\varepsilon_{i\mu}$ mają wartość bezwzględną mniejszą od jedności.

Pomnóżmy teraz obie strony równania (3) przez $e^{-z_0} . g_i(z_0)$; dostaniemy $n+1$ równań

$$e^{-z_0} . g_i(z_0) . P = \sum_{\mu=0}^{n} C_\mu . e^{z_\mu - z_0} . g_i(z_0)$$

$$(i = 0, \ 1, \ 2, \dots n);$$

ale wskutek (5) mamy

$$e^{z_\mu - z_0} . g_i(z_0) = g_i(z_\mu) + e^{-z_0} . \varepsilon_{i\mu} . \sigma$$

$$(i, \ \mu = 0, \ 1, \ 2, \dots n);$$

a zatym:

(6) $$e^{-z_0} . g_i(z_0) . P = \sum_{\mu=0}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) + e^{-z_0} . \sigma . \sum_{\mu=0}^{n} \varepsilon_{i\mu} . C_\mu$$

$$(i = 0, \ 1, \ 2, \dots n).$$

Dowiedziemy teraz, że $n+1$ sum

$$\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu . g_i(z_\mu), \quad (i = 0, \ 1, \ 2, \dots n)$$

są liczbami wymiernemi, z których jedna przynajmniej nie jest zerem.

Wystarczy w tym celu dowieść, że sumy powyższe są funkcjami symetrycznemi całkowitemi pierwiastków $x_1, x_2, \dots x_r$ równania (1). Istotnie, jeżeli oznaczymy przez $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ zmienne niezależne od siebie, wtedy iloczyn

$$\sum_{a=1}^{r} N_a' e^{\xi_a} . \sum_{b=1}^{r} N_b'' e^{\xi_b} \dots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} e^{\xi_l},$$

a więc i suma

$$\sum_{a, b, \dots l} N_a' N_b'' \dots N_l^{(k)} e^{\xi_a + \xi_b + \dots \xi_l}$$

będzie funkcją symetryczną zmiennych $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$; tak samo będzie więc z sumą

$$\sum_{a, b, \ldots l} N_a' N_b'' \ldots N_l^{(k)} (\xi_a + \xi_b + \ldots + \xi_l)^m,$$
$$(a,\ b, \ldots l = 1,\ 2, \ldots r)$$

gdzie m jest jakąkolwiek liczbą całkowitą. Zakładając więc $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2, \ldots \xi_r = x_r$, znajdziemy, że wszystkie wielkości $\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu z_\mu{}^m$ są liczbami wymiernemi, a zatym i wszystkie wyrażenia

$$\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu \,.\, g_i(z_\mu), \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n)$$

są liczbami wymiernemi. Oprócz tego przynajmniej jedno z nich musi być różne od zera; w rzeczy samej, gdyby było

$$\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu \,.\, g_i(z_\mu) = 0, \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n)$$

to ponieważ nie wszystkie C_μ są zerami, przeto musiałby być zerem wyznacznik wielkości $g_i(z_\mu)$, co być nie może, ze względu na sposób, w jaki zostały utworzone funkcje $g_i(z)$. Możemy wreszcie pomnożyć wszystkie liczby wymierne

$$\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu \,.\, g_i(z_\mu), \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n)$$

przez odpowiednio wybraną liczbę całkowitą M tak, ażeby te liczby zamieniły się na $n+1$ liczb całkowitych

$$Q_0,\ Q_1, \ldots Q_n,$$

z których jedna przynajmniej jest różna od zera. Na zasadzie poprzedniego twierdzenia przybranego możemy jeszcze założyć, że obraliśmy dostatecznie małą wielkość σ tak, ażeby każda z wielkości

$$M \,.\, e^{-z_0} \,.\, \sigma \,.\, \sum_{\mu=0}^{n} \varepsilon_{i\mu} \,.\, C_\mu \,; \quad (i = 0,\ 1, \ldots n)$$

stała się równą pewnej wielkości η_i, której wartość bezwzględna jest mniejsza od jedności. Zależności (6) przyjmują teraz postać następującą:

$$M \,.\, e^{-z_0} \,.\, g_i(z_0) \,.\, P = Q_i + \eta_i \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n);$$

ponieważ zaś z liczb całkowitych Q_i jedna przynajmniej jest różna od zera, a wszystkie wielkości η_i mają wartość bezwzględną mniejszą od jedności, przeto jedna przynajmniej z wielkości

$$Me^{-z_0}.\, g_i(z_0)\,.\, P \quad (i=0,\ 1,\ 2, \dots n)$$

jest różna od zera. A zatym iloczyn P, a wskutek tego i suma $\sum_{i=1}^{n} N_i e^{x_i}$, która jest jego czynnikiem, różni się od zera; tym sposobem twierdzenie A) zostało dowiedzione.

Z tego twierdzenia wyprowadzimy ogólniejsze i dojdziemy stopniowo do twierdzenia Lindemanna.

B) Jeżeli $x_1, x_2, \dots x_r$ stanowią r pierwiastków (różnych od siebie) równania algiebraicznego

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_r = 0$$

stopnia r o spółczynnikach wymiernych i jeżeli N_1 $N_2, \dots N_r$ stanowią r liczb wymiernych, z których jedna przynajmniej jest różna od zera, wtedy suma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ jest różna od zera.

W rzeczy samej, wystarczy pomnożyć $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ przez odpowiednią liczbę całkowitą, ażeby powrócić do warunków twierdzenia A).

Z twierdzenia B) przez podstawienie

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1, \dots x_r = r-1$$

wypada w szczególności twierdzenie Hermite'a, a mianowicie: Liczba e nie może być pierwiastkiem żadnego równania algiebraicznego

$$N_r e^{r-1} + N_{r-1} e^{r-2} + \dots + N_1 = 0$$

o spółczynnikach wymiernych.

Przystępujemy teraz do dowiedzenia twierdzenia:

C) Jeżeli $x_1, x_2, \dots x_r$ stanowią r liczb algiebraicznych różnych i niezależnych od siebie, to znaczy takich, które nie są pierwiastkami tego samego równania algiebraicznego stopnia r o spółczynnikach wymiernych; i jeżeli $N_1, N_2, \dots N_r$ stanowią r liczb wymiernych, z których jedna przynajmniej jest różna od zera, wtedy suma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ jest różna od zera.

W rzeczy samej, możemy założyć, że $x_1, x_2, \dots x_r$ są pierwiastkami tego samego równania algiebraicznego stopnia $s > r$ o pierwiastkach nierównych i o spółczynnikach wymiernych; to równanie, oprócz pierwiastków $x_1, x_2, \dots x_r$, ma jeszcze inne pierwiastki $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_s$. Jeżeli teraz $N_1, N_2, \dots N_r, N_{r+1}, \dots N_s$ stanowią s liczb wymiernych takich, że przynajmniej jedna z r pierwszych z pośród nich jest różna od zera, a $N_{r+1} = N_{r+2} = \dots = N_s = 0$, to na zasadzie twierdzenia B) suma $\sum_{i=1}^{s} N_i e^{x_i}$, zawierająca s wyrazów, musi być różna od zera; ale ponieważ ostatnie $s-r$ wyrazów tej sumy są zerami, przeto i suma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$, zawierająca r wyrazów, musi być różna od zera, przez co twierdzenie C zostało dowiedzione.

Teraz łatwo już dowieść ogólnego twierdzenia Lindemanna, które oznaczymy literą D).

D) Jeżeli $x_1, x_2, x_3, \dots x_r$ stanowią r liczb algiebraicznych jakichkolwiek, różnych od siebie, a $N_1, N_2, \dots N_r$ stanowią r liczb algiebraicznych, z których jedna przynajmniej jest różna od zera, wtedy suma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ jest zawsze różna od zera.

W rzeczy samej, $N_1, N_2, \dots N_r$ można uważać jako pierwiastki równania algiebraicznego stopnia $s \geqq r$ o spółczynnikach wymiernych. Niech będą $N_1, N_2, \dots N_r, N_{r+1}, \dots N_s$ wszystkiemi pierwiastkami tego równania możemy założyć, że między niemi niema więcej niż $r-1$ równych zeru. Tworzymy wszystkie połączenia z s elementów $N_1, N_2, \dots N_s$ branych po r; ich liczba jest

$$k = s(s-1)(s-2) \dots (s-r+1).$$

Te połączenia możemy tak oznaczyć:

$$\begin{array}{l} N_1', \ N_2', \ \dots, \ N_r' \\ N_1'', \ N_2'', \ \dots, \ N_r'' \\ \dots\dots\dots\dots \\ N_1^{(k)}, \ N_2^{(k)}, \dots, \ N_r^{(k)}. \end{array}$$

Stosownie do założenia, w każdym z tych połączeń jest jedna przynajmniej liczba różna od zera. Utwórzmy teraz wszystkie sumy

$$\sum_{i=1}^{r} N_i^{(\mu)} e^{x_i} \quad (\mu = 1, \ 2, \dots k);$$

jedną z nich jest suma

$$\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i},$$

o której postaramy się dowieść, że nie może być zerem. Weźmy pod uwagę iloczyn

$$P = \sum_{a=1}^{r} N_a' e^{x_a} . \sum_{b=1}^{r} N_b'' e^{x_b} \dots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} e^{x_l},$$

który można krócej tak napisać:

$$P = \sum_{a,\, b, \dots\, l} N_a' N_b'' \dots N_l^{(k)} e^{x_a + x_b + \dots + x_l}$$

$$(a,\ b, \dots l = 1,\ 2, \dots r)$$

Oznaczając teraz przez z_0, $z_1, \dots z_n$ różne wartości, które przyjmuje suma $x_a + x_b + \dots + x_l$ dla wszelkich układów wartości, jakie można nadać liczbom a, $b, \dots l$, możemy napisać:

$$P = \sum_{\mu=0}^{n} C_\mu e^{z_\mu},$$

gdzie

$$C_\mu = \sum_{a,\, b, \dots\, l}{}' N_a' N_b'' \dots N_l^{(k)},$$

jeżeli suma Σ' obejmuje te wszystkie układy a, $b, \dots l$, dla których $x_a + x_b + \dots + x_l = z_\mu$.

Wielkości C_μ są oczywiście funkcjami całkowitemi symetrycznemi względem N_1, $N_2, \dots N_s$ o spółczynnikach całkowitych, są więc wszystkie liczbami wymiernemi. Oprócz tego jedna przynajmniej z wielkości C_μ jest różna od zera, o czym można się przekonać za pomocą rozumowania podobnego, jak w dowodzeniu twierdzenia A).

Otóż ponieważ z_0, $z_1, \dots z_n$ są liczbami algiebraicznemi różnemi od siebie, a c_0, $c_1, \dots c_n$ liczbami wymiernemi, z których jedna przynajmniej jest różna od zera, przeto na zasadzie twierdzenia C) suma $\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu e^{z_\mu}$ nie może być zerem. A więc iloczyn P, a tym samym i suma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$, która jest jednym z jego czynników, nie może być zerem. Twierdzenie ogólne L i n d e m a n n a zostało tym sposobem dowiedzione.

§ 6. Przestępność liczb e i π. Niemożliwość wyprostowania okręgu mającego promień dany i łuku mającego cięciwę daną. Z twierdzenia ogólnego D), dowiedzionego w poprzednim paragrafie, można wyprowadzić ważne twierdzenia, z których rozpatrzymy teraz najwięcej zasługujące na uwagę, a w szczególności twierdzenia o przestępności liczb e i π.

1. Załóżmy

$$r=2;\ N_1=1,\ N_2=-X;\ x_1=x,\ x_2=0$$

w wyrażeniu $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$; to wyrażenie zamieni się wtedy na $e^x - X$ i nie może się stać zerem, jeżeli x jest liczbą algiebraiczną różną od zera, a X liczbą algiebraiczną jakąkolwiek, a więc:

Wielkość wykładnicza e^x jest liczbą przestępną jeżeli x jest liczbą algiebraiczną różną od zera.

W przypadku szczególnym, czyniąc $x=1$, znajdujemy, że liczba e jest przestępna.

Logarytm naturalny liczby algiebraicznej X różnej od jedności jest zawsze liczbą przestępną.

W szczególności, ponieważ $e^{\pi i} = -1$, przeto liczba πi, a więc także liczba π, jest przestępna.

Z tego twierdzenia wynika (§ 1), że mając dany odcinek, obrany za jednostkę długości, nie można za pomocą konstrukcji, w której występowałyby tylko krzywe algiebraiczne, wykreślić odcinka, mającego za miarę π. A ponieważ wyprostowanie i kwadratura koła sprowadza się do konstrukcji odcinka długości π, mając daną średnicę, przyjętą za jednostkę długości (§ 1), przeto:

Nie można wykonać wyprostowania i kwadratury koła, którego średnica jest dana, za pomocą konstrukcji gieometrycznych, w których występowałyby tylko krzywe algiebraiczne.

Stąd wnosimy a fortiori:

Nie można wykonać wyprostowania i kwadratury koła, mającego średnicę daną, za pomocą konstrukcji gieometrycznych, w których nie byłyby stosowane inne przyrządy, jak tylko linjał i cyrkiel.

2. W wyrażeniu $\sum_{s=1}^{r} N_s e^{x_s}$ uczyńmy

$$r=3;\quad N_1=\frac{1}{i},\quad N_2=-\frac{1}{i},\quad N_3=-X;$$

$$x_1 = -x_2 = \frac{ix}{2}, \quad x_3 = 0.$$

Widzimy, że wyrażenie

$$\frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{i} - X = 2\sin\frac{x}{2} - X$$

nie może być zerem, jeżeli x i X są oba liczbami algiebraicznemi różnemi od zera; a ponieważ $2\sin\frac{x}{2}$, jeżeli za jednostkę miary przyjmiemy promień koła, przedstawia cięciwę, na której się opiera łuk długości x, przeto:

Łuk koła, którego cięciwa względem promienia, jako jednostki długości, ma za miarę liczbę algiebraiczną, wyraża się liczbą przestępną, jak również pole wycinka koła, odpowiadającego temu łukowi.

Z twierdzenia tego wnosimy (§ 1):

Jeżeli cięciwa łuku koła o promieniu równym jedności wyraża się liczbą algiebraiczną, wtedy za pomocą konstrukcji gieometrycznych, w których występowałyby tylko krzywe algiebraiczne, nie można wyprostować łuku, ani też zbudować kwadratu równoważnego wycinkowi koła, odpowiadającemu temu łukowi.

Tymbardziej możemy wnosić (§ 1), że

Nie można wyprostować łuku koła, ani znaleźć kwadratu równoważnego odpowiedniemu wycinkowi koła, za pomocą konstrukcji gieometrycznych, wykonywanych tylko linjałem i cyrklem, jeżeli cięciwa, na której łuk się opiera, wyraża się przez promień za pomocą działań wymiernych i pierwiastków stopnia drugiego, jeżeli więc ta cięciwa może być wykreślona elementarnie.

3. Odwrotnie, dla każdego łuku koła, którego stosunek x do promienia wyraża się algiebraicznie, z wyjątkiem $x=0$, musi być $X=\sin x$ liczbą przestępną.

To wynika z twierdzenia Lindemanna, gdyż

$$2iX = e^{ix} - e^{-ix}.$$

To samo można powiedzieć o wszystkich innych funkcjach trygonometrycznych $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i t. d.

§ 7. Rozwiązanie graficzne zadania wyprostowania i kwadratury koła za pomocą integrafu. — Pytanie, nad którego rozstrzygnięciem pracowali matematycy przez tak długi czas, a mianowicie, czy koło mające promień dany można wyprostować lub zamienić na kwadrat równo ważny za pomocą wykreślania samych prostych i kół, czyli przez zastosowanie tylko linjału i cyrkla, zostało więc przez rezultaty paragrafu poprzedniego rozstrzygnięte przecząco i to w znaczeniu o wiele obszerniejszym, aniżeli zostało postawione.

Wobec niemożności wyprostowania okręgu za pomocą samych prostych i kół można probować osiągnąć to wyprostowanie za pomocą krzywych o charakterze więcej złożonym, podobnie jak w celu rozwiązania zadań podziału kąta na trzy części równe i podwojenia sześcianu, — do czego proste i koła nie wystarczały — należało się zwrócić do przecięć stożkowych albo do wyższych krzywych algiebraicznych.

Ażeby zbudować π, mając dany odcinek, obrany za jednostkę długości, wystarczyłaby np. możność wykreślenia krzywej, która odniesiona do pewnego układu spółrzędnych kartezjańskich prostokątnych, miałaby jeden punkt, którego jedna ze spółrzędnych dałaby się wyrazić przez π za pomocą działań wymiernych i pierwiastków stopnia drugiego, druga zaś spółrzędna mogłaby być wykreślona elementarnie, albo dałaby się przedstawić przez wyrażenie, zawierające tylko liczby wymierne i niewymierności stopnia drugiego (§ 1).

Z powodu przestępności liczby π pierwsza spółrzędna tego punktu musiałaby być przestępna; a więc krzywa, mająca własność żądaną musiałaby być krzywą przestępną.

Krzywą, która mogłaby być zastosowana do naszego celu, jest krzywa

$$y = \arcsin x;$$

w rzeczy samej, punkty przecięcia tej krzywej z osią y dałyby nam, jako rzędne, wielkość π i wszystkie jej wielokrotności. Możnaby powiększyć liczbę przykładów krzywych przestępnych, które wykreślone jako linje ciągłe, dałyby rozwiązanie graficzne wyprostowania okręgu.

Okażemy teraz, jak niektóre z nich mogą być faktycznie wyrysowane w sposób ciągły za pomocą przyrządów zwanych integrafami.

Nazywając krzywą różniczkową jakąkolwiek krzywą

$$y = f(x),$$

nadamy nazwę krzywej całkowej linji, mającej równanie

$$Y = F(x),$$

jeżeli

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Jeżeli krzywa różniczkowa jest dana, to krzywa całkowa jest oznaczona, pominąwszy dowolność przesunięcia równoległego do osi y. Tak np. krzywa

$$y = \arc\sin x$$

jest krzywą całkową linji

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

która jest krzywą algiebraiczną czwartego rzędu. Analogicznie, jeżeli za krzywą różniczkową przyjmiemy okrąg o promieniu 1, mający środek w początku spółrzędnych,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

to jego krzywą całkową, będzie:

$$y = \int \sqrt{1-x^2}\,.\,dx = \tfrac{1}{2} \arc\sin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2};$$

spółrzędne punktów przecięcia tej krzywej z osią y dadzą nam π i jego wielokrotności.

A więc przyrząd, za pomocą którego można wykreślić krzywą całkową, jeżeli krzywa różniczkowa jest wyrysowana, może być użyty do konstrukcji graficznej liczby π.

Przyrząd taki, zwany integrafem, został istotnie niedawno wynaleziony przez polaka Abdanka-Abakanowicza, a następnie udoskonalony przez Coradi'ego w Zurychu. Zaznaczymy tu w krótkości główną zasadę, na której się opiera budowa tego przyrządu, i opiszemy jego najważniejsze części składowe; co się tyczy opisu szczegółowego przyrządu i jego rozmaitych zastosowań, to odsyłamy do dzieła wynalazcy: *Les Intégraphes*, Paryż 1886[1]).

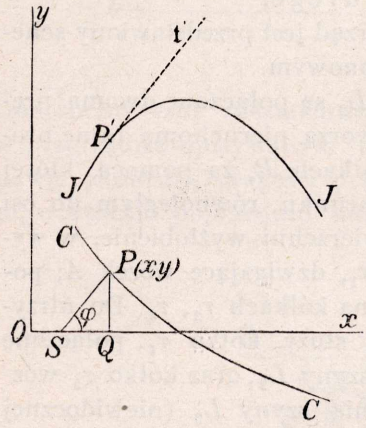

Fig. 130.

Niech będą wyrysowane (fig. 130) dwie osi prostokątne Ox, Oy i krzywa C, mająca równanie

$$y = f(x).$$

Biorąc pod uwagę jakikolwiek punkt P o spółrzędnych x, y, należący do krzywej C, zbudujmy trójkąt, mający za wierzchołki punkt P, spodek Q rzędnej punktu P i punkt S, leżący na osi Ox i oddalony od Q o jednostkę dłu-

[1]) Krótki opis tego przyrządu jest pomieszczony w *Repertorjum matematyki wyższej* E. Pascala, tł. S. Dickstein, tom I, Warszawa 1900.

gości. Styczna kąta φ, który przeciwprostokątna trójkąta tworzy z osią odciętych, jest

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{PQ}{QS}=y.$$

Z drugiej strony, ponieważ

$$Y=\int f(x)dx$$

jest równaniem krzywej całkowej I, przeto styczna trygonometryczna kąta, który styczna t' tej krzywej w punkcie P', odpowiadającym punktowi P (to znaczy, mającym tę samą odciętą x), tworzy z osią odciętych, jest

$$\frac{dY}{dx}=f(x)=y.$$

Widzimy więc, że dla każdego punktu krzywej różniczkowej przeciwprostokątna trójkąta rozpatrywanego jest zawsze równoległa do stycznej szukanej krzywej całkowej w punkcie odpowiadającym.

Tą uwagą kierował się właśnie Abdank-Abakanowicz w konstrukcji integrafu, który teraz opiszemy, uwzględniając zmiany, wprowawadzone przez konstruktora przyrządu Coradi'ego.

W załączonych figurach 131 i 132 przyrząd jest przedstawiony schematycznie widziany z góry i w przecięciu pionowym.

Trzy równoległe szyny poziome L, L_1, L_2 są połączone dwoma prętami poprzecznemi T, T' w ten sposób, że tworzą nieruchomą ramę prostokątną; ta rama opiera się na czterech kółkach R, za pomocą której może się poruszać na arkuszu rysunku w kierunku równoległym do osi odciętych. Szyny L, L_1 mają na górnej powierzchni wyżłobienie, w wyżłobieniu szyny L mogą się toczyć kółka r, r_1, dźwigające wózek A; podobnie wzdłuż L_1 może się poruszać wózek B na kółkach r_2, r_3. Do utrzymania obu wózków w położeniu poziomym służy kółko r_4, połączone z wózkiem A i ruchome wzdłuż wyżłobienia szyny L_2, oraz kółko r_5 wózka B, mogące się poruszać wzdłuż wyżłobienia szyny L_3 (niewidocznej na fig. 131), położonej pod szyną L_1 i równoległej do niej. Do wózka A jest przytwierdzona oś pionowa a (niewidoczna na fig. 131), dokoła której może się obracać wózek o dwuch kółkach r_6, r_7. Te dwa kółka r_6 i r_7 mogą się poruszać wzdłuż wyżłobienia w dolnej powierzchni ramienia F, które może się obracać dokoła osi pionowej, osadzonej w punkcie D.

Wyobraźmy sobie teraz, że na arkuszu rysunku zostały poprowadzone dwie osi prostokątne, Ox prostopadła a Oy równoległa do szyny L;

wtedy punktowi P, połączonemu niezmiennie z wózkiem A, można nadać ruch zarówno w kierunku Ox, jak w kierunku Oy; punkt ten może więc opisać jakąkolwiek linję $y=f(x)$. Punkt, w którym oś a spotkałaby płaszczyznę xy, jest połączony niezmiennie z punktem P, a poddany temu samemu ruchowi, opisują taką samą krzywą, co i punkt P, a odcinek, łączący ten punkt z rzutem punktu D na płaszczyznę xy ma przez cały

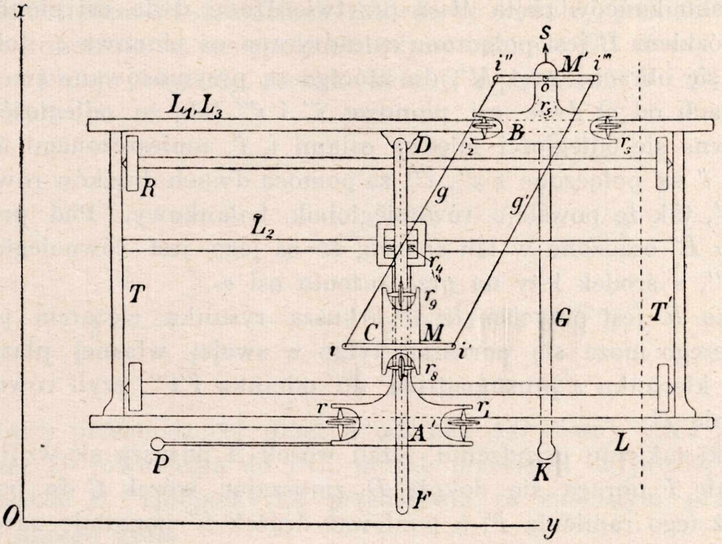

Fig. 131.

czas ruchu rzut niezmiennej długości na osi odciętych; ten rzut, który w przyrządzie opisywanym może mieć długość od 10 do 21 cm., przedstawia jednostkę długości przyrządu i jest podstawą trójkąta prostokątnego, o którym poprzednio mówiliśmy; tym sposobem kierunek zmienny

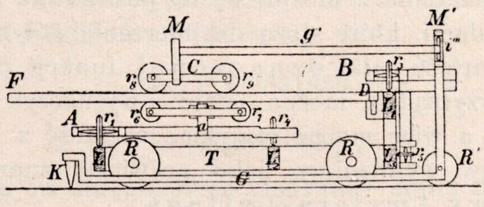

Fig. 132.

przeciwprostokątnej tego trójkąta przedstawia w każdej chwili ramię F, obracające się dokoła punktu D.

Części przyrządu, które teraz opiszemy, mają za zadanie prowadzenie na arkuszu rysunku ołówka K w taki sposób, ażeby kierunek jego ruchu był w każdej chwili równoległy do zmiennego kierunku ramienia F, tak że K opisze krzywą całkową krzywej $y=f(x)$. Ramię F ma również na powierzchni górnej wyżłobienie, w którym mogą się toczyć kółka r_8 i r_9 wózka poziomego C; do tego wózka jest przytwierdzony pręt poziomy M, prostopadły do płaszczyzny kółek, a więc prostopadły do ramienia F.

Do obu końców pręta M są przytwierdzone dwie osi pionowe i, i'.

Z wózkiem B jest połączona cylindryczna oś pionowa o, dokoła której może się obracać pręt M', do którego są przymocowane (w równych odległościach od o) dwie osi pionowe i'' i i''' tak, że odległość między niemi równa się odległości między osiami i, i', umieszczonemi na pręcie M. Osi i, i' są połączone z i'', i''' za pomocą dwuch drążków równej długości g, g', tak że powstaje równoległobok kolankowy. Pod prętem M' jest kółko R' osadzone w ten sposób, że oś jego jest równoległa do odcinka $i''i'''$, a środek leży na przedłużeniu osi o.

Kółko R' jest przyciśnięte do arkusza rysunku ciężarem pręta M', wskutek czego może się poruszać tylko w swojej własnej płaszczyźnie, a więc w kierunku s prostopadłym do odcinka $i''i'''$, czyli równoległym do ramienia F.

Dzięki takiemu urządzeniu, jeżeli wózek A porusza się wzdłuż szyny L, to ramię F obraca się dokoła D, zmuszając wózek C do posuwania się wzdłuż tego ramienia F; a ponieważ drążek ii' pozostaje zawsze prostopadły do ramienia F, przeto za pośrednictwem równoległoboku kolankowego drążek $i''i'''$, a więc i oś kółka R' pozostaje prostopadła do F. Do drążka M' jest przytwierdzone u spodu przyrządu ramię G, zakończone ołówkiem albo grafionem; podczas kiedy ostrze P opisuje krzywą różniczkową, jednocześnie ostrze K opisuje krzywą całkową. Punkty odpowiednie obu krzywych leżą na tej samej rzędnej.

W celu wyznaczenia π można się też posiłkować planimetrami, czyli temi przyrządami, które służą do mierzenia pól krzywych płaskich, t. j. które dają wartość całki oznaczonej funkcji przedstawionej graficznie. Takim przyrządem można istotnie wyznaczyć pole koła mającego promień dany, a więc można otrzymać wielkość π.

Z planimetrów wymienimy, jako najwięcej znany, t. zw. planimetr biegunowy Amslera-Laffona.

§ 8. Konstrukcje gieometryczne, służące do wyprostowania i kwadratury koła sposobem przybliżonym. Jeżeli chcemy robić użytek jedynie z linjału i cyrkla, nie uciekając się do przyrządów przestępnych, za jakie można uważać np. integrafy, to rozwiązanie zadania, którym się teraz zajmujemy, nie mogłoby być otrzymane w sposób ścisły; ale były ogłaszane i stosowane w praktyce konstrukcje, które za pomocą samych tylko prostych i kół pozwalają wykonywać wyprostowanie i kwadraturę koła sposobem przybliżonym, a więc popełniając błąd, na który w zastosowaniach praktycznych można nie zwracać uwagi.

Podajemy konstrukcję obmyśloną przez Spechta[1]); za pomocą tej konstrukcji można wyprostować okrąg ze znacznym przybliżeniem.

Na stycznej do koła o promieniu r (fig. 133) odetnijmy, począwszy od punktu styczności A, odcinek AB równy średnicy, powiększonej o piątą część promienia, a następnie odetnijmy odcinek BC równy dwom piątym promienia; połączmy środek koła O z punktami B i C, odetnijmy

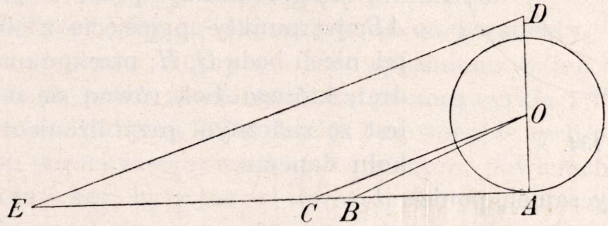

Fig. 133.

na średnicy przechodzącej przez A odcinek AD równy OB i poprowadźmy przez D równoległą do OC; punkt przecięcia tej prostej ze styczną niech będzie E. Odcinek AE przedstawia ze znacznym przybliżeniem długość okręgu koła.

W rzeczy samej, ponieważ

$$\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AO}=\frac{13}{5},$$

przeto

$$AE=\frac{13}{5}\,.\,OB=r\,.\,\frac{13}{5}\,.\sqrt{1+\left(\frac{11}{5}\right)^2}=r\,.\,\frac{13}{25}\sqrt{146}\,.$$

Po wykonaniu działań znajdziemy:

$$AE=r\,.\,6{,}2831839...,$$

a ponieważ

$$2\pi=6{,}2831853...,$$

więc AE różni się od okręgu przez niedomiar mniej niż o dwie miljonowe promienia.

Prostokąt, mający za boki AE i połowę promienia r, albo kwadrat równoważny temu prostokątowi, przedstawia z dużym przybliżeniem pole koła[2]).

[1]) *Journal f. Math.*, tom 3, str. 83.

[2]) Podajemy jeszcze inny sposób przybliżonego wyprostowania okręgu, wy-

Jeżeli mamy na celu jedynie kwadraturę koła, to możemy zastosować konstrukcję następującą [1]).

Na średnicy AB koła danego (fig. 134) wyznaczmy odcinek OD równy trzem piątym promienia, a po stronie przeciwnej odcinek OF równy trzem drugim promienia; podzielmy teraz promień OB w punkcie E na dwie części równe i wykreślmy na DE i AF jako na średnicach dwa półkola po stronach przeciwnych prostej AF.

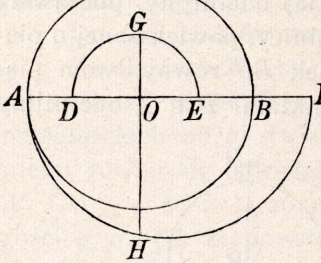

Fig. 134.

Poprowadźmy przez O prostopadłą do AB; jej punkty przecięcia z oboma półkolami niech będą G, H; przekonamy się, że kwadrat, którego bok równa się odcinkowi GH, jest ze znacznym przybliżeniem równoważny kołu danemu.

W rzeczy samej, ponieważ

$$OD=\tfrac{3}{5}r, \quad OE=\tfrac{1}{2}r,$$
$$OA=r, \quad OF=\tfrac{3}{2}r,$$

a OG jest średnią proporcjonalną między OD, OE i OH jest średnią proporcjonalną między OA, OF, przeto

---

naleziony przez polaka Adama Kochańskiego, a ogłoszony po raz pierwszy w *Acta Eruditorum*, Lipsk 1685.

Prowadzimy średnicę koła AB i styczną w punkcie A. Ze środka koła O poprowadźmy prostą OE, tworzącą z OA kąt równy trzeciej części kąta prostego; E niech będzie punktem przecięcia tej prostej ze styczną w punkcie A. Odetnijmy na EA odcinek EF równy 3 razy wziętemu promieniowi koła r i połączmy koniec tego odcinka F z punktem B; odcinek BF przedstawia ze znacznym przybliżeniem długość półkola, gdyż

$$EA=\frac{\sqrt{3}}{3}r, \quad AF=\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)r$$

$$BF^2=AB^2+AF^2=\frac{40-6\sqrt{3}}{3}r^2$$

$$BF=3{,}1415331\ldots r,$$

a ponieważ

$$\pi=3{,}1415926\ldots,$$

przeto BF różni się od półokręgu przez niedomiar mniej niż o sześć stutysięcznych promienia. *[Przyp. tłum.]*.

[1]) Por. Sannia i D'Ovidio, *Geometria elementare*, gdzie są podane inne jeszcze sposoby przybliżone wyprostowania i kwadratury koła.

$$OG = r.\sqrt{\frac{3}{10}},\quad OH = r.\sqrt{\frac{3}{2}},$$

a zatym

$$GH = r.\frac{\sqrt{30}+\sqrt{150}}{10} = r.1{,}77246\ldots,$$

a ponieważ

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ldots,$$

przeto GH różni się przez nadmiar od boku kwadratu, równoważnego kołu danemu, mniej niż o dwie stutysięczne promienia.

§ 9. „Księżyce", dające się zamienić na kwadraty. Dopóki nie dowiedziono przestępności liczby π i nie wyjaśniono w ten sposób, jak dalece bezowocne są próby zbudowania, za pomocą cyrkla i linjału, kwadratu równoważnego danemu kołu, dopóty bezowocność tych prób musiała się wydawać tym więcej zastanawiającą, że niektóre powierzchnie płaskie, ograniczone łukami kół, były już w starożytności przedmiotem owocnych badań: niektóre z nich, t. zw. „noże szewckie", mają dużo ciekawych i pięknych własności, które zostały dowiedzione przez proste zastosowanie najelementarniejszych teorji gieometrycznych [1]); inne — księżyce Hipokratesa—zamieniano łatwym sposobem za pomocą linjału i cyrkla na kwadrat równoważny.

Znane jest twierdzenie, że suma dwuch menisków (księżyców), wyznaczonych przez trzy półkola, mające za średnice boki trójkąta prostokątnego i leżące z trójkątem po tej samej stronie przeciwprostokątnej, jest równoważna samemu trójkątowi. Jeżeli w szczególności trójkąt jest równoramienny, wtedy każdy z dwuch księżyców jest równoważny trójkątowi prostokątnemu równoramiennemu, stanowiącemu połowę trójkąta danego, księżyc taki może więc być środkami elementarnemi zamieniony na kwadrat równoważny, jeżeli cięciwa jego jest znana.

Taki księżyc, rozpatrywany przez Hipokratesa, był pierwszym rozwiązaniem pytania: czy można linjałem i cyrklem zbudować menisk, dający się zamienić elementarnie na kwa-

---

[1]) Wiele takich własności, z których zasługują na uwagę własności ciągów kół wpisanych w „nóż szewcki" tak, że każde koło jest styczne do następnego, zostało wyłożonych i dowiedzionych w Pappi Alexandrini *Collectiones* (wyd. F. Hultscha, tom I, str. 219 i nast., pod. 15, 16, 17, 18). Steiner (*Journal f. Math.* tom I) znalazł nowe, prostsze i ładniejsze dowodzenia tych samych twierdzeń, a niektóre z nich znacznie rozszerzył.—Por. I. S. Mackay. *The shoemaker's knife* (Edinburg Math. Soc. Proc. 3 (1885), gdzie zostały zebrane i dowiedzione w sposób jednolity najważniejsze i najprostsze własności „noży szewckich".

drat równoważny. Cztery inne rozwiązania podał w r. 1840 Th. Clausen[1]) jako zupełnie nowe, wyrażając zarazem przekonanie, że oprócz pięciu znanych nie istnieją inne rodzaje menisków, które mogłyby być zamieniane elementarnie na kwadraty równoważne.

Niedawno E. Landau[2]), powracając do tego zagadnienia, ułożył w najogólniejszy sposób równania i warunki arytmetyczne zadania i dowiódł, że są one z sobą sprzeczne w pewnym szeregu nieskończenie wielu przypadków, ale ten szereg bynajmniej nie zawiera wszystkich przypadków możliwych, nic więc nas dotychczas nie upoważnia do mniemania, że powyższe pięć rozwiązań są jedynemi rozwiązaniami zadania.

Landau rozumuje w taki sposób.

Niech będą AEB, $AE'B$ (fig. 135) dwa łuki kołowe, mające cięciwę wspólną AB i położone po tej samej stronie cięciwy; C, C' niech będą ich środkami, a r, r' promieniami; oznaczmy jeszcze przez 2φ, $2\varphi'$ kąty środkowe obu wycinków $CAEB$, $C'AE'B$.

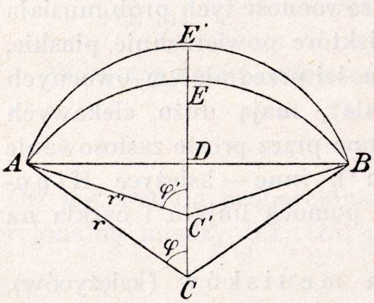

Fig. 135.

Jeżeli za jednostkę długości obierzemy cięciwę AB, to otrzymamy od razu zależność:

$$r \sin \varphi = r' \sin \varphi' = \tfrac{1}{2}\,; \tag{1}$$

tak więc, znając cięciwę AB, można zbudować linjałem i cyrklem menisk $AEBE'$, jeżeli funkcje trygonometryczne kątów φ, φ' (a więc wskutek (1) i r, r') wyrażają się za pomocą samych pierwiastków stopnia drugiego.

Z drugiej strony menisk $AEBE'$ może być zamieniony elementarnie na kwadrat równoważny, jeżeli różnica dwuch wycinków $CAEB$, $C'AE'B$ wyraża się przez liczbę algiebraiczną, zawierającą tylko niewymierności stopnia drugiego; jeżeli więc oznaczymy przez a, b, c liczby zawierające tylko niewymierności stopnia drugiego i jeżeli a, $b \leqq 1$, to równania zadania będą:

$$\sin \varphi = a, \quad \sin \varphi' = b$$

$$r^2 \varphi - r'^2 \varphi' = \frac{c}{4},$$

---

[1]) *Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrierbar ist.* Journ. f. Math. 21 (1840), str. 375.

[2]) *Sitzungsberichte der Berl. Math. Ges. 10 Sitzung am 29 Okt. 1902.* Archiv. Math. Phys. (3) 4 (1903).

albo wskutek (1)

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin\varphi = a, \quad \sin\varphi' = b \\ \dfrac{\varphi}{\sin^2\varphi} - \dfrac{\varphi'}{\sin^2\varphi'} = c. \end{cases}$$

Niech będzie $\frac{\varphi'}{\varphi} = p$; Landau zauważył, że jeżeli p jest liczbą algiebraiczną, to musi być $c = 0$. W rzeczy samej, z równań (2) wynika:

$$\frac{\varphi}{a^2} - \frac{p\varphi}{b^2} = c,$$

czyli

$$(3)\qquad \frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2} = \frac{c}{\varphi};$$

gdyby c nie było zerem, wtedy i różnica $\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2}$ byłaby różna od zera i otrzymalibyśmy

$$\varphi = \frac{c}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{p}{b^2}},$$

a więc φ byłoby liczbą algiebraiczną różną od zera, a wskutek twierdzenia Lindemanna (§ 6, 3) wstawa kąta φ byłaby liczbą przestępną, co sprzeciwia się pierwszemu z wzorów (2).

Ograniczając zakres zagadnienia, przypuśćmy, że p jest liczbą algiebraiczną, a więc $c = 0$. Wtedy z równania (3) znajdziemy $p = \frac{b^2}{a^2}$, z czego widać, że p zawiera tylko pierwiastki stopnia drugiego, a równaniom (2) można nadać postać:

$$\sin\varphi = a, \quad \sin\varphi' = b$$

$$\sqrt{p}\,.\sin\varphi = \sin p\varphi\,.$$

Tak więc zadanie zostało sprowadzone do zbadania, dla jakich wartości p, zawierających tylko pierwiastki stopnia drugiego, równaniu

$$(4)\qquad \sqrt{p}\,.\sin\varphi = \sin p\varphi$$

czynią zadość $\sin\varphi$ i $\sin p\varphi$, dające się wyrazić przez pierwiastki stopnia drugiego.

Przypadki znalezione przez Clausena, w których tak jest istotnie, są następujące:

1°. $p = 2$. Równanie (4) przyjmuje postać:

$$\sqrt{2}\,.\sin\varphi = \sin 2\varphi,$$

skąd:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = 45^0$$

2^0. $p=3$. Równanie (4) przyjmuje postać:

$$\sqrt{3}\,.\sin\varphi = \sin 3\varphi,$$

skąd

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}$$

3^0. $p=\frac{3}{2}$. Równanie (4) przyjmuje postać:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\,.\sin\varphi = \sin\frac{3}{2}\,.\,\varphi,$$

skąd dochodzimy do równania stopnia drugiego

$$4\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2 = 0,$$

a rozwiązując to równanie znajdziemy:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{33}-1}{8}.$$

4^0. $p=5$. Równanie (4) przyjmuje postać:

$$\sqrt{5}\,.\sin\varphi = \sin 5\varphi,$$

a po przekształceniu:

$$16\sin^4\varphi - 20\sin^2\varphi + 5 - \sqrt{5} = 0,$$

skąd znajdziemy:

$$\sin^2\varphi = \frac{5-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{\sqrt{5+4\sqrt{5}}-1}{4}, \quad \left(2\varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

5^0. $p=\frac{5}{3}$. Równanie (4) przyjmuje postać:

$$\sqrt{\frac{5}{3}}\,.\sin\varphi = \sin\frac{5}{3}\varphi,$$

skąd:

$$16\cos^4\frac{\varphi}{3} - \left(12 + 4\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\cos^2\frac{\varphi}{3} + 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0.$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy

$$\cos^2\frac{\varphi}{3} = \frac{3+\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{20}{3}+\sqrt{\frac{20}{3}}}}{8},$$

a zatym

$$\cos\frac{2\varphi}{3} = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}-1+\sqrt{\frac{20}{3}+\sqrt{\frac{20}{3}}}}{4}, \quad \left(\frac{2\varphi}{3}<\frac{\pi}{2}\right).$$

Pierwszy z tych pięciu przypadków odpowiada rozpatrywanemu poprzednio księżycowi Hipokratesa; pozostałe uważał Clausen jako zupełnie nowe, ale Landau zauważył, że przypadki odpowiadające $p=3$ i $p=\frac{3}{2}$ były Hipokratesowi znane.

Co się tyczy poszukiwań innych rozwiązań tego zagadnienia, Landau, opierając się na jednym twierdzeniu Eisensteina o nieprzywiedlności pewnych równań algiebraicznych, dowodzi następującego twierdzenia, które przytoczymy bez dowodzenia:

Jeżeli stosunek p dwuch kątów środkowych 2φ, $2\varphi'$ jest liczbą pierwszą nie należącą do liczb pierwszych Gaussa $2^m+1=2^{2^k}+1$, wtedy menisk nie da się elementarnie zamienić na kwadrat równoważny.

§ 10. Wzmianka historyczna o badaniach nad zagadnieniem kwadratury koła. — Badania nad zagadnieniem kwadratury koła można co do czasu, podzielić na trzy okresy[1]).

Okres pierwszy rozciąga się od początków badań matematycznych aż do odkrycia rachunku różniczkowego i całkowego, t. j. do połowy wieku XVIII; celem prac tego okresu jest przybliżone wyznaczenie liczebne stosunku okręgu do średnicy, otrzymywane za pomocą konstrukcji gieometrycznych.

W okresie drugim, sięgającym od wynalezienia rachunku różniczkowego i całkowego do połowy wieku XVIII, zamiast metod gieometrycznych starożytnych występują nowe metody analityczne; badania z tego okresu mają cechę wybitnie teoretyczną, a celem ich jest przedstawienie liczby π za pomocą wyrażeń analitycznych, zawierających liczbę nieskończoną działań, a więc za pomocą rozwinięcia na szereg, na iloczyn nieskończony, na ułamek ciągły.

Wreszcie okres trzeci, od połowy wieku XVIII aż do naszych czasów zawiera prace o charakterze krytycznym; w pracach tych nie chodzi już o znalezienie wielkości lub wyrażenia analitycznego liczby π, a tylko

[1]) Kreśląc ten krótki obraz historyczny, kierowaliśmy się bardzo staranną pracą: Rudio, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre.* Lipsk 1892.

o zbadanie istoty tej liczby, czy jest wymierna czy niewymierna, algiebraiczna czy przestępna.

Okres pierwszy. Zadanie zbudowania kwadratu równoważnego kołu danemu spotyka się po raz pierwszy w najdawniejszym, jaki znamy, dokumencie matematycznym, zwanym *Papyrus Rhind*; dokument ten był napisany około r. 2.000 przed Chr. przez autora egipskiego Ahmesa, a teraz przechowuje się w Muzeum brytańskim. Znajdujemy tam następującą regułę do rozwiązania zadania, podaną bez dowodzenia: pole koła jest równoważne polu kwadratu, którego bokiem jest średnica koła zmniejszona o $\frac{1}{9}$ swej długości. Podług tej reguły dostajemy wielkość pola koła:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 = \frac{64}{81} d^2,$$

co przez porównanie z $\frac{1}{4}\pi d^2$, daje dla π wartość

$$\frac{256}{81} = 3,1604...,$$

a więc wartość już dość przybliżoną.

Pierwszą wzmiankę, mającą styczność z zadaniem wyprostowania okręgu, znajdujemy w Bibljі; okręgowi jest tam przypisana długość trzy razy większa niż średnicy, skąd wypadałaby dla π wartość 3, a więc o wiele mniej dokładna od znalezionej przez egipcjan.

Dopiero u Greków zaczynają się badania naukowe nad tym przedmiotem i osiągają wysoki stopień rozwoju w pracach Archimedesa z Syrakuzy (287—212 prz. Chr.). Pomiędzy matematykami greckimi, którzy przed Archimedesem zajmowali się kwadraturą koła, zasługują na szczególną uwagę Hipokrates z Chios (około 450 prz. Chr.) i Dinostratos (około 350 prz. Chr.). Zawdzięczamy Hipokratesowi pierwszy dowód twierdzenia, że pola kół są proporcjonalne do kwadratów średnic, oraz pierwszy przykład istotnej kwadratury pola ograniczonego linjami krzywemi, tak zwanego księżyca (menisku) Hipokratesa, o czym już była mowa w § 9.

Korzystając z tych rezultatów, Hipokrates spodziewał się osiągnąć za pomocą konstrukcji elementarnych kwadraturę koła, ale jego usiłowania musiały z konieczności pozostać bezowocnemi.

Dinostratos okazał, jak można zastosować do wyprostowania i kwadratury koła krzywą znalezioną przedtym przez Hipjasza z Elidy (około 450 prz. Chr.) i używaną przez niego do podziału kąta na trzy części równe. Jest to krzywa przestępna, znana pod nazwą τετραγωνίζουσα albo kwadratrycy (art. VII § 11); z określenia gieometrycznego tej krzywej otrzymuje się jej równanie w spółrzędnych kartezjańskich prostokątnych:

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right)}.$$

Punkt, w którym ta krzywa spotyka oś x, ma odciętą $\frac{2}{\pi}$. Jeżeli więc, wyrysowawszy krzywą, znajdziemy ten punkt, to będziemy mogli wyprostować okrąg, prowadząc już tylko proste i koła, ale można wyznaczać tylko oddzielne punkty kwadratrycy, a więc tą drogą otrzymuje się jedynie przybliżone rozwiązanie zadania.

Rezultaty o wiele ważniejsze zawdzięczamy Archimedesowi, który w pracy zatytułowanej κύκλου μέτρησις dowiódł równoważności zagadnień kwadratury i wyprostowania koła oraz wyłożył ze ścisłością naukową znaną metodę wielokątów wpisanych i opisanych. Archimedes zastosował tę metodę do przybliżonego wyprostowania okręgu: zaczynając od sześciokąta foremnego wpisanego i opisanego, obliczył obwody wielokątów, otrzymywanych przez kolejne podwajanie liczby boków, a posuwając się aż do wielokąta o liczbie boków $6 \cdot 2^4 = 96$, znalazł dla stosunku okręgu do średnicy granice $3\frac{10}{71}$, $3\frac{1}{7}$, z których druga, przewyższająca wartość istotną mniej niż o $\frac{2}{1000}$, dziś jeszcze bywa często używana w praktyce, jako bardzo dogodna.

Zagadnienie kwadratury przybliżonej koła z dowolnym stopniem przybliżenia mogło być uważane za rozwiązane w zupełności metodą Archimedesa i pomimo długich rachunków, jakich ta metoda wymaga, ażeby otrzymać wartość dostatecznie przybliżoną, pozostała w użyciu, prawie bez żadnej zmiany, przez długi przeciąg czasu, a mianowicie aż do prac Sneljusza i Huygensa, którzy doprowadzili ją do tego stopnia doskonałości i prostoty, jaki mógł jeszcze być osiągnięty środkami elementarnemi. Z licznych matematyków, którzy w tym okresie czasu zajmowali się obliczeniem przybliżonym stosunku okręgu do średnicy, pierwszym, który znalazł wartość o wiele bliższą prawdziwej, aniżeli znaleziona w starożytności, był Adrjan Mecjusz (druga połowa w. XVI); znaleziona przez niego wartość π jest $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$; różniąca się od prawdziwej dopiero począwszy od siódmej cyfry dziesiętnej, jest szczególnie ciekawa z tego względu, że przedstawia jeden z reduktów rozwinięcia π na ułamek ciągły. Następnie matematyk francuski Franciszek Vieta (1540—1603), zawsze jeszcze metodą Archimedesa, doprowadziwszy rachunek aż do wielokąta o liczbie boków $6 \cdot 2^{16}$, znalazł wartość π z dziewięcioma dokładnemi cyframi dziesiętnemi; ten stopień przybliżenia został następnie prześcignięty przez holendra Adrjana Romana († 1616), który za pomocą wielokąta o liczbie boków 2^{30}, obliczył π z 15 znakami dziesiętnemi; wreszcie przez Ludolpha van Ceulena (1539—1610), który z godną podziwu pracowitością i wytrwałością doprowadził rachunek do 35 znaków dziesiętnych.

Ponad temi wszystkiemi poszukiwaniami górują zarówno oryginalnością jak i wartością naukową klasyczne prace dwuch wielkich matematyków i fizyków holenderskich Sneljusza (1580—1626) i Huygensa (1629—1695). Zwłaszcza z pracy Huygensa *De circuli magnitudine inventa* okazuje się, że przez porównanie pól i obwodów dwuch wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego na kole, można znaleźć dla π dwie granice znacznie bliższe, aniżeli przez zastosowanie zwykłego sposobu Archimedesa, tak że obliczenie liczby π znacznie się upraszcza. Tak np. przez zastosowanie wielokąta o 60 bokach Huygens otrzymuje liczbę π z 9 dokładnemi znakami dziesiętnemi, natomiast stosując metodę Archimedesa potrzeba wielokąta o 96 bokach, ażeby dostać zaledwie 2 cyfry dziesiętne.

Okres drugi. W drugiej połowie wieku XVII powstają pierwsze początki nowożytnej analizy, głównie przez prace Newtona, Leibniza i dwuch braci Bernoulli. Nowe pomysły i nowe metody zastępują dawne, a wielkie odkrycia, które stąd obficie powstają, zmieniają aż do podstaw budowę nauk matematycznych. W szczególności w teorji mierzenia koła zostają porzucone metody gieometryczne Archimedesa i Huygensa, ażeby ustąpić miejsca poszukiwaniom o charakterze zasadniczo innym, a mianowicie poszukiwaniom zmierzającym do znalezienia dla stosunku okręgu do średnicy wyrażeń analitycznych, zawierających szereg nieskończony działań.

Odpowiednio do tego nowego kierunku badań Wallis (1616—1703) podał następujące rozwinięcie liczby π na szereg nieskończony:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

i dowiódł ściśle prawdziwości rozwinięcia na ułamek ciągły

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\ldots}}}}},$$

które to rozwinięcie ogłosił Brouncker (1620—1684) bez dowodzenia.

Dla znalezionych w tym okresie czasu rozwinięć liczby π na szeregi nieskończone punkt wyjścia stanowiło rozwinięcie $\operatorname{arc\,tg} x$, które naprzód znalazł Gregory (1670), a następnie, niezależnie od niego, Leibniz (1673):

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots ;$$

rozwinięcie to otrzymuje się łatwo przez zastosowanie znanego wzoru Mac-Laurina. Czyniąc $x=1$, otrzymuje się tak zwany szereg Leibniza

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Ale szereg ten, jak i poprzednie rozwinięcia na iloczyn nieskończony i na ułamek ciągły, ma powolną zbieżność.

Wiele innych rozwinięć, odpowiedniejszych do obliczenia π, zostało wyprowadzonych z szeregu $\operatorname{arc\,tg} x$, przez uwzględnienie zależności

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$$

i innych, które z niej wypływają. Przytoczymy tylko, jako najlepszy do obliczenia π, szereg następujący, ogłoszony przez matematyka angielskiego Machina (1680—1752):

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \dots\right) +$$

$$-\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} + \dots\right)$$

Stosując ten szereg i inne podobne obliczano dalej liczbę π i doprowadzono rachunek w naszych czasach aż do 707-ej cyfry dziesiętnej.

Jakkolwiek te wszystkie badania mają duże znaczenie naukowe, ale nie odsłaniają nic, coby dotyczyło samej istoty liczby π, a w czasie, o którym tu mowa, nie wiedziano jeszcze, czy ta liczba jest wymierna czy niewymierna; tak więc zagadnienie możliwości kwadratury koła za pomocą kół i prostych pozostawało nierozwiązane, a nawet nie było jeszcze wypowiedziane w sposób dość ścisły (por. § 1), ażeby odpowiedź ostateczna była możliwa.

Klucza do rozwiązania tego zagadnienia mogły dostarczyć tylko poszukiwania, mające kierunek zasadniczo odmienny; główne podstawy takich poszukiwań stanowią badania Eulera nad funkcjami trygonometrycznemi i nad funkcją wykładniczą e^x.

Anglik Napier (1614) pierwszy rozpatrywał liczbę e i funkcję wykładniczą e^x, obierając e za zasadę układu logarytmów, zwanych logarytmami naturalnemi albo neperowskiemi.

Euler (1707—1783), stosując metody analizy nieskończonostkowej do badania funkcji i rozszerzając zmienność wielkości na wartości zespolone, odkrył blizki związek, zachodzący między funkcją wykładniczą e^x i funkcjami trygonometrycznemi $\sin x$, $\cos x$,... Wychodząc z rozwinięcia wyrażeń e^x, $\sin x$, $\cos x$ na szeregi potęgowe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

które podług wzoru Mac-Laurina służą dla wartości rzeczywistych x, Euler, upewniwszy się, że te szeregi są zbieżne na całej płaszczyźnie, to znaczy dla każdej wartości rzeczywistej lub zespolonej zmiennej x, przyjmuje te szeregi za określenia odpowiednich funkcji i wyprowadza z nich tożsamość

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

która właśnie wyraża zależność między funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznemi. Jeżeli w tej tożsamości założymy $x = \pi$, to dostaniemy

$$e^{i\pi} = -1;$$

na tej zależności zostało później oparte dowodzenie przestępności liczby π (por. § 6), a więc i odpowiedź na pytanie o kwadraturze koła. Oprócz tego zawdzięczamy Eulerowi niezliczone rozwinięcia liczb e i π na szeregi i na ułamki ciągłe, z których wyróżnimy:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \dots}}}}};$$

to rozwinięcie posłużyło później Lambertowi do dowodu, że liczby e i π są niewymierne.

Okres trzeci. Od czasu odkrycia przez Eulera blizkiego związku, zachodzącego między funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznemi, między liczbą e i liczbą π, otworzyły się nowe drogi, prowadzące do zdania sobie sprawy o charakterze tych liczb, który pomimo wszystkich badań, jakim do tego czasu te liczby były poddawane, pozostał zupełnie nieznany, a w którym należało poszukiwać klucza do rozwiązania zagadnienia kwadratury koła. Pierwsze rezultaty istotnej doniosłości w badaniach tego rodzaju zawdzięczamy L a m b e r t o wi (1728 — 1777), który w pracy *Vorläufige Kenntnise für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen* (1766) dowiódł, że liczby e i π są niewymierne. Wychodząc z cytowanego wyżej eulerowskiego rozwinięcia $\frac{e-1}{2}$ na ułamek ciągły, L a m b e r t otrzymuje dwa inne:

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\dots}}}}$$

$$\operatorname{tg} x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{9}{x}-\dots}}}}},$$

a opierając się na nich dowodzi dwuch twierdzeń następujących:

1^0. J e ż e l i x j e s t l i c z b ą w y m i e r n ą r ó ż n ą o d z e r a, t o e^x n i e m o ż e b y ć l i c z b ą w y m i e r n ą.

Dla $x=1$ otrzymujemy jako przypadek szczególny niewymierność liczby e.

2^0. J e ż e l i x j e s t l i c z b ą w y m i e r n ą r ó ż n ą o d z e r a, w t e d y $\operatorname{tg} x$ n i e m o ż e b y ć l i c z b ą w y m i e r n ą.

Dla $x=\frac{\pi}{4}$ jest $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, otrzymujemy więc jako przypadek szczególny niewymierność liczby π.

L e g e n d r e (1752—1833) podał później dowodzenie ścisłe i zupełne tych twierdzeń oraz dowiódł tą samą metodą, że również i k w a d r a t l i c z b y π j e s t l i c z b ą n i e w y m i e r n ą.

Następnie (1840) L i o u v i l l e (1809—1882) dowiódł, że liczba e nie może być pierwiastkiem równania stopnia drugiego o spółczynnikach wymiernych.

Powyższe rezultaty wywołują pytania następujące:

Jakie równania algiebraiczne o spółczynnikach wymiernych mogłyby mieć za pierwiastki liczby e i π?

Czy nie mamy tu przypadkiem do czynienia z liczbami, które nie są pierwiastkami żadnego równania algiebraicznego tego rodzaju?

Wątpliwość, zawarta w tym ostatnim pytaniu, po raz pierwszy wyraźnie wypowiedziana przez Legendre'a, została następnie wzmocniona przez badania Liouville'a, które po raz pierwszy (1844) ustaliły istnienie liczb niealgiebraicznych i uzasadniły podział liczb na algiebraiczne i przestępne (por. §§ 1, 2, 3).

Po szczegółowym zbadaniu własności funkcji wykładniczej, jak to już mówiliśmy w § 4, Hermite'owi udało się dowieść w r. 1873 przestępności liczby e, a Lindemann, opierając się na badaniach Hermite'a i czyniąc użytek z zależności $e^{i\pi} = -1$, odkrytej przez Eulera, dowiódł w r. 1882, że i π jest liczbą przestępną, a tym samym dowiódł niemożliwości wyprostowania i kwadratury koła za pośrednictwem konstrukcji elementarnych (por. § 1). O uproszczeniach, wprowadzonych przez Weierstrassa do dowodu Lindemanna, mówiliśmy już w § 4, a w §§ 4, 5, 6 wyłożyliśmy podany przez Weierstrassa dowód ogólnego twierdzenia Lindemanna; to twierdzenie rozwiązuje zarazem ogólniejsze zadanie wyprostowania jakiegokolwiek łuku kołowego.

Wskutek najnowszych badań dowodzenie przestępności liczb e i π zostało jeszcze znacznie uproszczone, a mianowicie dzięki dowodom ogłoszonym kolejno przez Hilberta, Hurwitza i Gordana, zebranym w tomie 43 *Mathematische Annalen* (1893).

W założeniu, że liczba e sprawdza równanie algiebraiczne o spółczynnikach całkowitych wymiernych

$$(1) \qquad a + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0,$$

Hilbert mnoży obie strony tego równania przez całkę oznaczoną

$$\int_0^\infty z^\rho \{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\}^{\rho+1} e^{-z} dz \quad (\rho \text{ całkowite dodatnie})$$

a następnie rozkłada pierwszą stronę równania na dwie części:

$$P_1 = a\int_0^\infty + a_1 e\int_1^\infty + a_2 e^2 \int_1^\infty + \ldots + a_n e^n \int_1^\infty$$

$$P_2 = a_1 e \int_0^1 + a_2 e^2 \int_0^1 + \ldots + a_n e^n \int_0^1$$

tak że przez podzielenie obu stron równania otrzymanego przez $\rho!$, powstałoby równanie

$$\frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!} = 0. \tag{2}$$

Biorąc teraz pod uwagę tożsamość

$$\int_0^\infty z^\rho e^{-z} dz = \rho!\,,$$

Hilbert dowodzi, że jakiekolwiek będzie ρ, zawsze liczba $\frac{P_1}{\rho!}$ jest całkowita i różna od zera; natomiast można wybrać ρ w ten sposób, ażeby liczba $\frac{P_2}{\rho!}$ stała się, co do wartości bezwzględnej, mniejsza od jedności; tym sposobem równanie (2), a więc i równanie (1), jest niemożliwe; tak więc przestępność liczby e została dowiedziona.

Ażeby przejść od e do π stosuje się wzór Eulera $e^{i\pi} = -1$. Jeżeli przypuścimy, że $\alpha_1 = i\pi$ jest pierwiastkiem równania algiebraicznego o spółczynnikach całkowitych, mającego jeszcze pierwiastki $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, to iloczyn

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\ldots(1+e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_n}$$

musiałby być zerem; Hilbert dowodzi, że to jest niemożliwe, postępując podobnie, jak w dowodzeniu przestępności liczby e.

Hurwitz okazał, jak można w dowodzeniu przestępności liczby e uniknąć rozpatrywania całki

$$\int_0^\infty z^\rho e^{-z} dz.$$

Wychodząc z wzoru przyrostów skończonych

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\,.\,\varphi'(\vartheta x), \quad (0 < \vartheta < 1),$$

Hurwitz stosuje ten wzór do funkcji

$$e^{-x}F(x) = \{f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(\nu)}(x)\}e^{-x},$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją całkowitą wymierną stopnia ν postaci

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}\{(1-x)(2-x)\ldots(n-x)\}^p,$$

gdzie p jest liczbą pierwszą; tym sposobem:

$$F(x) - e^x F(0) = -x\,.\,e^{(1-\vartheta)x}.\,f(\vartheta x).$$

Zakładając w tym wzorze kolejno

$$x = 1,\ 2, \ldots n$$

otrzymuje zależności

$$\begin{cases} F(1) - eF(0) = \varepsilon_1 \\ F(2) - e^2F(0) = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ F(n) - e^nF(0) = \varepsilon_n, \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ są wielkościami, które z wzrastającym p dążą do granicy zero, $F(1), F(2), \dots F(n)$ są zawsze liczbami całkowitemi podzielnemi przez p, a $F(0)$ jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p.

Gdybyśmy teraz przypuścili, że e czyni zadość równaniu algiebraicznemu o spółczynnikach całkowitych

$$C_0 + C_1e + \dots + C_ne^n = 0,$$

to z poprzednich zależności wynikłoby, że wyrażenie

$$C_1F(1) + C_2F(2) + \dots C_nF(n) + C_0F(0)$$

stałoby się tożsamościowo zerem, jeżeli p przyjmie odpowiednią wartość, co jest niemożliwe, gdyż wyrażenie to przedstawia liczbę całkowitą niepodzielną przez p.

Wreszcie Gordan dowiódł przestępności liczb e i π, zapożyczając z teorji funkcji jedynie rozwinięcie e^x na szereg i znajomość pochodnej funkcji całkowitej wymiernej.

Dowodzenie Gordana zostało następnie wyłożone w sposób prostszy i jaśniejszy przez H. Webera w dziele *Lehrbuch der Algebra*[1]) a następnie jeszcze elementarniej, w tomie pierwszym „*Encyklopädie der Elementar-Mathematik*"[2]).

Na zakończenie przytoczymy to dowodzenie, które teraz już tak zostało uproszczone, że stało się dostępne dla wszystkich.

§ 11. Dowodzenie przestępności liczb e i π podług najnowszego wykładu H. Webera. Weźmy pod uwagę rozwinięcie e^x na szereg:

$$(1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

które służy dla każdego x, rzeczywistego lub zespolonego. Oznaczając przez n jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią, pomnóżmy to równanie przez $n!$; dostaniemy

$$(2) \qquad n!e^x = n! + \frac{n!}{1!}x + \frac{n!}{2!}x^2 + \dots + \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} + U_n,$$

---

[1]) 2 wyd. Braunschweig 1899, Bd. II, Abschn. 25.

[2]) H. Weber und I. Wellstein, *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*, Bd. I. Leipzig 1903, str. 418—432.

gdzie

$$U_n = x^n + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \tag{3}$$

Zauważmy teraz, że jeżeli s jest liczbą całkowitą dodatnią nie większą od n, to pochodna rzędu s funkcji x^n, którą możemy oznaczyć przez $D_s x^n$, równa się $\frac{n!}{(n-s)!} x^{n-s}$, jeżeli zaś s jest większe od n, wtedy $D_s x^n = 0$.

Jeżeli więc w równaniu (2) podstawimy zamiast n kolejno $n-1$, $n-2, \dots 2, 1$, to otrzymamy równania następujące:

$$\left\{\begin{aligned} n!\,e^x &= U_n + \sum_{s=1}^{n} D_s x^n \\ (n-1)!\,e^x &= U_{n-1} + \sum_{s=1}^{n} D_s x^{n-1} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2!\,e^x &= U_2 + \sum_{s=1}^{n} D_s x^2 \\ 1!\,e^x &= U_1 + \sum_{s=1}^{n} D_s x. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Niech będzie $f(x)$ funkcją całkowitą wymierną stopnia n obraną dowolnie, ale taką, ażeby $f(0)=0$; możemy ją tak przedstawić

$$f(x) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1} x^{n-1} + \dots + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x; \tag{5}$$

oznaczmy przez $f'(x), f''(x), \dots f^{(n)}(x)$ n pierwszych pochodnych tej funkcji i załóżmy

$$F(x) = f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(n)}(x). \tag{6}$$

Oczywiście będzie

$$F(0) = \gamma_n n! + \gamma_{n-1}(n-1)! + \dots + \gamma_1 . 1! \tag{7}$$

Pomnóżmy równania (4) odpowiednio przez $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots \gamma_2, \gamma_1$ i dodajmy; oznaczając

$$U(x) = \gamma_n U_n + \gamma_{n-1} U_{n-1} + \dots + \gamma_1 U_1 \tag{8}$$

i uwzględniając (4), (5), (6), (7), znajdziemy

$$F(0) . e^x = F(x) + U(x). \tag{9}$$

Tę zależność obierzemy za punkt wyjścia, dowodząc przestępności liczb e i π.

Co do funkcji $U(x)$ trzeba tylko ustalić granicę górną dla jej wartości bezwzględnej. Oznaczmy w tym celu przez r wartość bezwzględną wielkości x; z równania (3) otrzymamy wtedy dla wartości bezwzględnej funkcji U_n nierówność następującą:

$$|U_n| < r^n\left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \dots\right),$$

czyli

$$|U_n| < r^n e^r.$$

Uwzględniając wyrażenie (8) funkcji $U(x)$ i oznaczając przez c_n, $c_{n-1}, \dots c_2$, c_1 wartości bezwzględne wielkości γ_n, $\gamma_{n-1}, \dots \gamma_2$, γ_1, dostaniemy

$$|U(x)| < (c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r) \,.\, e^r,$$

czyli

(10) $$|U(x)| < \Phi(r) \,.\, e^r,$$

gdzie $\Phi(r)$ oznacza wyrażenie $c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r$, które powstaje z $f(x)$ przez podstawienie zamiast x, γ_n, $\gamma_{n-1}, \dots \gamma_1$ ich wartości bezwzględnych r, c_n, $c_{n-1}, \dots c_1$.

Przestępność liczby e. Przypuśćmy, że liczba e jest algiebraiczna, czyli że jest pierwiastkiem równania algiebraicznego stopnia m o spółczynnikach całkowitych wymiernych

(11) $$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \dots + C_m e^m = 0,$$

gdzie spółczynniki C_0 i C_m można zawsze przyjąć różne od zera.

Podstawiajmy w (9) zamiast x kolejno 0, 1, 2,... m, pomnóżmy otrzymane równania odpowiednio przez C_0, $C_1, \dots C_m$ i dodajmy; dostaniemy wskutek (11):

(12) $$\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu F(\nu) + \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu U(\nu) = 0.$$

Dowiedziemy teraz, że jeżeli obierzemy odpowiednio funkcję całkowitą $f(x)$, która, pominąwszy warunek $f(0) = 0$, jest zupełnie dowolna, to równanie (12) stanie się niemożliwym; następstwem tego będzie, że nie może istnieć równanie (11), że więc liczba e jest przestępna.

Obierzmy liczbę pierwszą p większą od m i przyjmijmy za $f(x)$ funkcję całkowitą

(13) $$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \dots (x-m)^p}{(p-1)!},$$

która staje się zerem dla $x = 0$ i której stopień jest

$$n = (m+1)p - 1.$$

Niemożliwość równania (12) stanie się widoczna, jeżeli dowiedziemy, że dla odpowiednio wybranej liczby pierwszej p

1⁰ suma $\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu F(\nu)$ jest liczbą całkowitą różną od zera, a więc, co do wartości bezwzględnej, nie mniejszą od 1;

2⁰ suma $\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu U(\nu)$ jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od 1.

Jeżeli uporządkujemy $f(x)$ podług potęg rosnących zmiennej x, to dostaniemy

$$(14) \qquad f(x) = \frac{A_{p-1} x^{p-1} + A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \dots + A_n x^n}{(p-1)!},$$

gdzie spółczynniki A_{p-1}, $A_p, \dots A_n$ są liczbami całkowitemi; a ponieważ $A_{p-1} = \pm (m!)^p$, a p jest liczbą pierwszą większą od m, przeto A_{p-1} nie jest podzielne przez p.

Tworząc na zasadzie wzoru (14) n pierwszych pochodnych funkcji $f(x)$ i czyniąc $x=0$, dostaniemy

$$f(0)=0,\ f'(0)=0, \dots f^{(p-2)}(0)=0,$$

$$f^{(p-1)}(0) = A_{p-1},\ f^{(p)}(0) = p\,.\,A_p,\ f^{(p+1)}(0) = p(p+1)A_{p+1},$$

$$\dots\dots f^{(n)}(0) = p(p+1)\dots n\,.\,A_n,$$

a więc, uwzględniając (6), będziemy mieli

$$F(0) = A_{p-1} + pA_p + p(p+1)A_{p+1} + \dots,$$

przeto $F(0)$ jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p i jeżeli obierzemy za p liczbę pierwszą dość wielką, ażeby liczba C_0 (różna od zera) nie była podzielna przez p, wtedy i $C_0 \,.\, F(0)$ będzie liczbą całkowitą niepodzielną przez p.

Porządkując teraz $f(x)$ podług potęg rosnących wielkości $(x-\nu)$, dostaniemy

$$f(x) = \frac{B_p (x-\nu)^p + B_{p+1}(x-\nu)^{p+1} + \dots + B_n (x-\nu)^n}{(p-1)!},$$

gdzie spółczynniki B_p, $B_{p+1}, \dots B_n$ są liczbami całkowitemi. Różniczkując kolejno i zakładając $x=\nu$, znajdziemy

$$f(\nu)=0,\ f'(\nu)=0, \dots f^{(p-1)}(\nu)=0,$$

$$f^{(p)}(\nu) = p\,.\,B_p,\ f^{(p+1)}(\nu) = p(p+1)B_{p+1}\,.\,\dots$$

$$f^{(n)}(\nu) = p(p+1)\dots n\,.\,B_n,$$

skąd, uwzględniając (6), dostaniemy

$$F(\nu)=p\,.\,B_p+p(p+1)\,.\,B_{p+1}+\ldots$$

A więc $F(1)$, $F(2)$, ... $F(m)$ są liczbami całkowitemi podzielnemi przez p.

Suma $\sum\limits_{\nu=0}^{m} C_\nu F(\nu)$ jest przeto liczbą całkowitą niepodzielną przez p, jest więc, co do wartości bezwzględnej, nie mniejsza od 1.

W ten sposób dokonaliśmy pierwszej części dowodzenia.

Przechodzimy do części drugiej. W tym celu zużytkujemy nierówność (10). Oznaczając, jak przedtym, przez r wartość bezwzględną zmiennej x, zaczniemy od uwagi, że wyrażenie, które otrzymujemy zamiast $f(x)$, podstawiając zamiast x i zamiast spółczynników odpowiednie wartości bezwzględne, jest

$$\Phi(r)=\frac{r^{p-1}(r+1)^p(r+2)^p\ldots(r+m)^p}{(p-1)!};$$

ale mamy wskutek (10):

$$U(x)<\Phi(r)\,.\,e^r;$$

jeżeli więc dla krótkości założymy

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+m)=\rho_\nu\,,$$

to będzie

$$U(\nu)<\frac{\rho_\nu{}^p}{\nu(p-1)!}\,e^\nu,$$

czyli

$$U(\nu)<\frac{\rho_\nu e^\nu}{\nu}\cdot\frac{\rho_\nu{}^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Ale ponieważ szereg (1) jest zbieżny dla każdej wartości x, przeto jego wyraz ogólny $\frac{x^n}{n!}$ dąży do granicy zero, jeżeli n rośnie do nieskończoności. Można więc wybrać liczbę pierwszą p dostatecznie wielką, ażeby $\frac{\rho_\nu{}^{p-1}}{(p-1)!}$, a zatym i $|U(\nu)|$ stało się dowolnie małym; wskutek tego sumę $\sum\limits_{\nu=0}^{m} C_\nu U(\nu)$ możemy uczynić, co do wartości bezwzględnej, tak małą, jak tylko zechcemy, a w szczególności <1, c. b. d. d.

A więc liczba e jest przestępna.

Przestępność liczby π. — Dowodzenie przestępności liczby π opiera się również na zależnościach (9) i (10) oraz na tożsamości

$$1+e^{i\pi}=0, \tag{15}$$

wyrażającej związek pomiędzy e i π.

Jeżeli przypuścimy, że π jest liczbą algiebraiczną, to $i\pi$ byłoby również liczbą algiebraiczną, byłoby więc pierwiastkiem równania algiebraicznego

$$\psi(x)=0$$

o spółczynnikach całkowitych wymiernych.

Niech będzie ν stopniem funkcji ψ, a $y_1, y_2, \dots y_\nu$ niech będą wszystkiemi pierwiastkami równania, między któremi znajdzie się również $i\pi$; dostaniemy wtedy wskutek (15):

$$(1+e^{y_1})(1+e^{y_2})\dots(1+e^{y_\nu})=0,$$

a po wykonaniu mnożenia

$$1+\sum e^{y_i}+\sum e^{y_i+y_k}+\sum e^{y_i+y_k+y_l}+\dots=0 \tag{16}$$

Sumy y_i+y_k, występujące w liczbie $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$, są pierwiastkami innego równania algiebraicznego

$$\psi_1(x)=0,$$

gdyż każda funkcja symetryczna tych sum jest zarazem funkcją symetryczną wielkości y_i, jest więc liczbą wymierną. Podobnie się dowodzi, że sumy $y_i+y_k+y_l$, których liczba jest $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2.3}$, są pierwiastkami trzeciego równania algiebraicznego $\psi_2(x)=0$ i t. d.

Tak więc iloczyn

$$\psi(x)\,.\,\psi_1(x)\,.\,\psi_2(x)\dots \tag{17}$$

jest funkcją całkowitą, która się staje zerem dla x równego jednej z liczb

$$y_i,\ y_i+y_k,\ y_i+y_k+y_l,\dots, \tag{18}$$

między któremi mogą być wartości równe zeru; jeżeli oznaczymy przez $C-1$ liczbę tych, które są zerami, wtedy C będzie liczbą całkowitą dodatnią $\geqq 1$. Przyrównywając iloczyn (17) do zera i opuszczając czynnik x^{C-1}, dostaniemy równanie $\chi(x)=0$, o którym można zawsze przypuścić, że zostało sprowadzone do postaci o spółczynnikach całkowitych. Pierwiastki tego równania

$$x_1,\ x_2,\dots x_m$$

są to te liczby szeregu (18), które są różne od zera i czynią zadość, wskutek (16), równaniu

$$C + e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_m} = 0\,; \tag{19}$$

widoczną jest rzeczą, że $\chi(0)$ jest różne od zera i że $\chi(x)$ można tak napisać:

$$\chi(x) = ax^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m\,,$$

gdzie a, $a_1, \dots a_m$ są liczbami całkowitemi wymiernemi, a, a_m można zawsze przyjąć, że są różne od zera, a a dodatnie.

Jeżeli teraz $\chi(x)$ pomnożymy przez a^{m-1} i założymy

$$ax = z,\quad a^{m-1}\chi(x) = \vartheta(z),\quad ax_1 = z_1,\quad ax_2 = z_2, \dots,\ ax_m = z_m$$

$$a_1 = b_1,\quad aa_2 = b_2,\quad a^2 a_3 = b_3, \dots\ a^{m-1} a_m = b_m\,,$$

to znajdziemy, że z_1, $z_2, \dots z_m$ są pierwiastkami równania o spółczynnikach całkowitych

$$\vartheta(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m = 0. \tag{20}$$

Zastosujmy teraz równanie podstawowe (9).

Podstawiając kolejno w tym równaniu zamiast x liczby x_1, $x_2, \dots x_m$, sumując i dodając do obu stron $C\,.\,F(0)$, dostaniemy wskutek (19)

$$C\,.\,F(0) + \sum_{\nu=1}^{m} F(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu) = 0. \tag{21}$$

Dowiedziemy teraz, że przez odpowiedni wybór funkcji $f(x)$, która, pominąwszy warunek $f(0) = 0$, jest zupełnie dowolna, można uczynić równanie (21) niemożliwym; tym sposobem zostanie dowiedzione, że π nie może być liczbą algiebraiczną.

Oznaczmy przez p jakąkolwiek liczbę pierwszą i przyjmijmy za $f(x)$ funkcję całkowitą

$$f(x) = \frac{z^{p-1}[\vartheta(z)]^p}{(p-1)!} = \frac{a^{mp-1} x^{p-1} [\chi(x)]^p}{(p-1)!}\,, \tag{22}$$

która staje się zerem dla $x = 0$ i której stopień jest

$$n = (m+1)p - 1.$$

Niemożliwość równania (21) stanie się oczywistą, jeżeli dowiedziemy, że dla odpowiednio wybranej liczby pierwszej p

1⁰. suma $C\,.\,F(0) + \sum\limits_{\nu=1}^{m} F(x_\nu)$ jest liczbą całkowitą różną od zera;

2⁰. suma $\sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu)$ jest, co do wartości bezwzględnej, mniejsza od jedności.

Porządkując podług potęg rosnących wielkości z, mieć będziemy

$$[\vartheta(z)]^p = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$$
$$= A_0 + A_1 ax + A_2 a^2 x^2 + \dots,$$

gdzie spółczynniki A_0, A_1, A_2, ... są liczbami całkowitemi; $A_0 = b_m^p$ jest liczbą różną od zera.

Oprócz tego mamy

$$f(x) = \frac{A_0 a^{p-1} x^{p-1} + A_1 a^p x^p + A_2 a^{p+1} x^{p+1} + \dots}{(p-1)!}.$$

Różniczkując kolejno tę funkcję i zakładając $x=0$, otrzymamy

$$f(0)=0,\ f'(0)=0, \dots\ f^{(p-2)}(0)=0,$$
$$f^{(p-1)}(0) = A_0 a^{p-1} = b_m^p a^{p-1},\ f^{(p)}(0) = p\,.\,A_1 a^p,$$
$$f^{(p+1)}(0) = p(p+1)\,.\,A_2 a^{p+1}, \dots$$

Obierzmy liczbę p większą od największej z liczb a, b_m, C; wtedy $f^{(p-1)}(0)$ będzie niepodzielne przez p, zaś wszystkie pozostałe $f^{(\mu)}(0)$ są albo zerami, albo liczbami podzielnemi przez p; a więc $F(0) = \sum_{\nu=1}^{n} f^{(\nu)}(0)$ jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p, wskutek czego i $C\,.\,F(0)$ jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p.

Porządkując teraz $f(x)$ podług potęg rosnących wielkości $z - z_\nu$, dostaniemy

$$f(x) = \frac{(z-z_\nu)^p\,.\,B_1(z_\nu) + (z-z_\nu)^{p+1}\,.\,B_2(z_\nu) + \dots}{(p-1)!}$$
$$= \frac{a^p(x-x_\nu)^p\,.\,B_1(z_\nu) + a^{p+1}(x-x_\nu)^{p+1}\,.\,B_2(z_\nu) + \dots}{(p-1)!}$$

gdzie $B_1(z_\nu)$, $B_2(z_\nu)$, ... są funkcjami całkowitemi wielkości z_ν o spółczynnikach całkowitych.

Znajdziemy stąd jak poprzednio:

$$f'(x_\nu)=0,\ f''(x_\nu)=0, \dots f^{(p-1)}(x_\nu)=0;$$
$$f^{(p)}(x_\nu) = pa_p\,.\,B_1(z_\nu),\quad f^{(p+1)}(x_\nu) = p(p+1)a^{p+1}\,.\,B_2(z_\nu), \dots,$$

a czyniąc

$$Q(z_\nu)=a^pB_1(z_\nu)+(p+1)a^{p+1}B_2(z_\nu)+\ldots,$$

dostaniemy wskutek (6)

$$F(x_\nu)=p\,.\,Q(z_\nu),$$

a zatym

$$\sum_{\nu=1}^{m}F(x_\nu)=p\sum_{\nu=1}^{m}Q(z_\nu).$$

Ale $\sum\limits_{\nu=1}^{m}Q(z_\nu)$ jest funkcją całkowitą symetryczną m pierwiastków równania (20), jest więc liczbą całkowitą, a wskutek tego suma $\sum\limits_{\nu=1}^{m}F(x_\nu)$ jest liczbą całkowitą podzielną przez p.

Stąd wreszcie wypada, że $C.F(0)+\sum\limits_{\nu=1}^{m}F(x_\nu)$ jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p, a więc różną od zera.

Tym sposobem część pierwsza dowodzenia została wykonana.

Przechodzimy do części drugiej. W tym celu zrobimy użytek z nierówności (10).

Możemy napisać

$$\chi(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m),$$

a wskutek (22):

$$f(x)=\frac{a^{(m+1)p-1}x^{p-1}(x-x_1)^p(x-x_2)^p\ldots(x-x_m)^p}{(p-1)!}.$$

Oznaczmy przez r, r_1, $r_2,\ldots r_m$ wartości bezwzględne wielkości x, x_1, $x_2,\ldots x_m$ i pamiętajmy, że a jest dodatnie; wtedy staje się widocznym, że spółczynniki funkcji $f(x)$ nie są większe od spółczynników funkcji

$$\frac{a^{(m+1)p-1}x^{p-1}(x+r_1)^p(x+r_2)^p\ldots(x+r_m)^p}{(p-1)!}.$$

Jeżeli więc uczynimy

$$\rho(r)=a^{m+1}r(r+r_1)(r+r_2)\ldots(r+r_m),$$

to dla każdej liczby dodatniej r

$$\varphi(r)<\frac{[\rho(r)]^p}{ar\,(p-1)!},$$

czyli

$$\varphi(r)<\frac{\rho(r)}{ar}\cdot\frac{[\rho(r)]^{p-1}}{(p-1)!};$$

obierając więc p dostatecznie wielkie, można uczynić $\varphi(r)$, a więc wskutek (10) i $|U(x_\nu)|$, tak małym, jak tylko zechcemy; można więc też uczynić sumę $\sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu)$, co do wartości bezwzględnej, tak małą, jak zechcemy, a w szczególności < 1, c. b. d. d.

A zatym liczba π jest przestępna.