ARTYKUŁ DRUGI.

O rozwiązywaniu zadań gieometrycznych za pomocą cyrkla

napisał

Ermenegildo Daniele z Pawji.

Dokonane przez matematyków starożytnych ugrupowanie w całość organiczną konstrukcji, które się dadzą wykonać przez wyłączne zastosowanie linjału i cyrkla, czyli, jak to się zazwyczaj mówi, metodą euklidesowską, odpowiada bez wątpienia odczuwanej przez nich potrzebie oddzielenia od pozostałej znanej im wiedzy gieometrycznej jednej części, którą można uważać za najprostszy dział gieometrji, dział, który z konieczności musiał wystąpić w charakterze wstępu. Niema potrzeby rozprawiać o doskonałości pracy, doprowadzonej do końca przez tych matematyków: wykazana przez dzieło Euklidesa (które należy uważać za syntezę tych wszystkich prac) odporność wobec czasu i wobec nieprzerwanych postępów wiedzy jest najoczywistszym dowodem tej doskonałości.

Metoda, stosowana przez Euklidesa do wykonywania konstrukcji elementarnych, opiera się na używaniu dwuch przyrządów pierwotnych, linjału i cyrkla, których możność stosowania Euklides zakłada bez żadnego ograniczenia: zakłada więc w każdej części płaszczyzny rysunku możność wykreślenia prostej oraz możność opisania koła, mającego środek w punkcie jakimkolwiek i promień dowolny. Te warunki graficzne zajmują wybitne stanowisko w metodzie Euklidesa; i jakkolwiek charakter używanych w tej metodzie linji nadaje jej jak największą prostotę, to jednakże każdy widzi, że stosując tę metodę rozporządza się jeszcze dość rozległą swobodą graficzną; nie jest więc zbyteczne pytanie, czy tych samych zadań nie możnaby również rozwiązać za pomocą środków graficznych więcej ograniczonych. Odpowiedź na to pytanie wypada twierdząca: wystarczy wspomnieć między innemi próby, które wykonali z zupełnym powodzeniem matematycy włoscy XVI wieku: Ferrari, Tartaglia, Benedetti, rozwiązując wszystkie zadania, zawarte w księgach Euklidesa, za pomocą linjału i cyrkla o otworze stałym; rozwiązanie wielu zadań, otrzymane przez Brianchona bez pomocy cyrkla; dokonane przez Ponceleta i Steinera ograniczenie używania kół do jednego tylko koła stałego, leżącego na płaszczyźnie rysunku i mającego środek dany (por. art. III); w innym kierunku ograniczenie przyrządów rysunkowych do samego tylko cyrkla, z zupełnym usunięciem linjału (Mascheroni).

Nie jest moim zadaniem mówić o poszukiwaniach, mających na celu ograniczenie kreślenia kół do minimum, gdyż ten temat będzie stanowił treść następnego artykułu; natomiast zatrzymam się na przedmiocie, który może być nazwany „Gieometrją cyrkla“ i dowiodę, że każde zadanie, rozwiązalne za pomocą linjału i cyrkla, może być rozwiązane za pomocą samego tylko cyrkla, bez linjału. Wszystko, co dotyczy tego dowodzenia, jest zawarte w książce L. Mascheroni'ego, zatytułowanej Geometria del compasso, a będącej pierwszym chronologicznie i najważniejszym studjum o konstrukcjach za pomocą samych kół. Wydane w Pawji w r. 1797, dzieło Mascheroni'ego spotkało się odrazu z dużym uznaniem, tak że w r. 1798 ukazał się przekład francuski, dokonany przez Carette'a; to tłumaczenie zostało przedrukowane w roku 1828, a prawie jednocześnie (1825) Grüson ogłosił tłumaczenie niemieckie Gieometrji cyrkla. Z pośród różnych wyciągów i przeróbek książki Mascheroni'ego zaznaczę tylko publikacje Frischaufa (Graz 1869) i Hutta (Halle 1880); wspomnę jeszcze o dwuch rozprawach, z których jedną napisał Eugenjusz Dubouis (Journal de Math., 22, 1897), drugą G. Cesàro (Mémoire de la societé royale des sciences de Liège, 1899); obaj autorowie, nie wiedząc o istnieniu poprzednich prac nad tym przedmiotem, odkryli na nowo, za pomocą konstrukcji tego samego typu, co i konstrukcje Mascheroni'ego, możność zastąpienia cyrklem linjału we wszystkich konstrukcjach elementarnych. Godnym zaznaczenia, jako zastosowanie metody Mascheroni'ego, jest jeszcze podział koła na 17 części równych, dokonany za pomocą samego tylko cyrkla najprzód przez Gérarda (Math. Ann., 48, 1897), a następnie przez różnych innych autorów. O konstrukcjach tych będzie mowa w art. VI.

Postępowanie gieometryczne, stosowane w pracach Mascheroni'ego i innych autorów, po nim wymienionych, ma charakter czysto elementarny. Przeciwstawić mu można krótkie studjum Adlera (Zur Theorie der Mascheronischen Constructionen, Wiener Berichte 99, 1890), który, wychodząc poza zakres czysto elementarny i badając zagadnienie Gieometrji cyrkla ze stanowiska wyższego, osiągnął dowód rozwiązalności zadań euklidesowskich za pomocą samego tylko cyrkla, przyczym posługiwał się jedną tylko zasadą, a mianowicie przekształceniem przez promienie odwrotne.

§ 1. Uwagi przedwstępne. W zadaniu gieometrycznym elementy, które trzeba wyznaczyć na podstawie ich zależności od elementów danych, sprowadzają się ostatecznie do punktów, gdyż choćby zadanie wymagało wykreślania prostych lub okręgów, to można je wykreślić za pomocą linjału i cyrkla, jeżeli są znane ich dwa punkty, czy też środek i długość promienia (ta długość ze swej strony jest wyznaczona przez dwa punkty). Co do punktów poszukiwanych, to wyznacza się je zawsze przez przecięcie wzajemne prostych i kół; zakładając więc możność używania z zupełną swobodą zarówno linjału jak cyrkla, można od razu otrzymać rozwiązania zadań następujących:

A) Znaleźć punkt wspólny dwuch prostych.

B) Znaleźć punkty wspólne prostej i okręgu.

C) Znaleźć punkty wspólne dwuch okręgów.

Jeżeli sobie natomiast narzucimy warunek nieużywania linjału (w którym to przypadku możemy jeszcze mieć na rysunku okręgi całkowicie opisane, ale prosta będzie przedstawiona tylko przez dwa punkty), wtedy tylko trzecie z powyższych zadań może być bezpośrednio rozwiązane, zaś dla dwuch pierwszych trzeba będzie podać odpowiednie konstrukcje, których niema w księgach Euklidesa. Jeżeli więc chcemy dowieść, że zadania rozwiązalne metodą Euklidesa dadzą się też rozwiązać przez wyłączne używanie cyrkla, wystarczy właściwie rozwiązać bez pomocy linjału zadania *A*) i *B*), w których, jak to już było powiedziane, należy rozumieć każdą prostą jako przedstawioną przez dwa jej punkty. Na tej zasadzie, którą możemy obrać za punkt wyjścia naszego dowodzenia, opiera się metoda Mascheroni'ego.

W § 2 tego artykułu rozwinę te konstrukcje, które trzeba podać przed rozwiązaniem powyższych dwuch zadań podstawowych, idąc prosto do celu, a więc omijając te wszystkie zadania, które, aczkolwiek dość ciekawe i pokrewne z tamtemi, nie miałyby jednak zastosowania w następnym § 3, poświęconym rozwiązaniu zadań *A*) i *B*). Przez te dwa paragrafy pierwszy cel mojego artykułu byłby osiągnięty. Przypuśćmy istotnie, że mamy rozwiązać jakiekolwiek zadanie gieometrji elementarnej; weźmy pod uwagę jakiekolwiek znane rozwiązanie, wykonywane za pomocą linjału i cyrkla, i zastosujmy je; ponieważ linjału używa się tylko przy rozwiązywaniu zadań *A*) i *B*), przeto ile razy zdarzyłaby się sposobność użycia go, można będzie zamiast tego zastosować konstrukcje paragrafu 3, a więc dane zadanie zostanie rozwiązane zapomocą samego cyrkla.

Że metoda wskazana komplikuje działania i figury, rozumie się samo przez się; oczywiste jest, że konstrukcja, w której trzebaby było wielokrotnie stosować zadania *A*) i *B*), nie byłaby bynajmniej dogodną. To wyjaśnia, dlaczego Mascheroni, chcąc uczynić swoją metodę o ile możności praktyczną, nie poprzestał na rozwiązaniu tych dwuch zadań podstawowych, ale jeszcze wynalazł dla wielu innych zadań nowe rozwiązania za pomocą samego cyrkla; rozwiązania te mogą nawet, jako bardzo proste, zastąpić powszechnie znane, w których robi się użytek z linjału. Nie czyniąc wzmianki o niektórych z tych przykładów, przedstawiłbym dzieło Mascheroni'ego z pominięciem jednej z najbardziej interesujących jego części. Dlatego też poświęcam dwa następne paragrafy wyłożeniu podanych przez Mascheroni'ego rozwiązań kilku elementarnych zadań najpospolitszych i najcharakterystyczniejszych. Zwracam uwagę, że wybrałem tylko niewiele z przykładów, w które obfituje Geometria del compasso, pomijając te, których rozwiązanie jest bądź zbyt pospolite, bądź zbyt złożone.

Mascheroni poświęca ostatni rozdział swojej książki rozwiązaniu przybliżonemu niektórych zadań stopni wyższych od drugiego oraz zadań przestępnych, jak mnożenie i dzielenie sześcianu, wyprostowanie okręgu, kwadratura koła, kubatura kuli i t. d. Nie chciałem wchodzić w szczegóły tego ostatniego przedmiotu, ażeby nie wtargnąć w dziedzinę, zarezerwowaną dla innych współpracowników; jednakże uważałem za właściwe okazać w § 6, w jaki sposób Mascheroni osiągnął podwojenie sześcianu i wyprostowanie okręgu, posiłkując się metodami, które z jednej strony zalecają się swoją poręcznością, z drugiej zaś dają przybliżenie więcej niż wystarczające w praktyce.

Mascheroni daje po kilka rozwiązań niektórych zadań; starałem się za każdym razem wybrać to, które przedstawiało więcej prostoty i symetrji.

Po wyłożeniu w pierwszych sześciu paragrafach, jak Mascheroni dowodzi twierdzenia podstawowego Gieometrji cyrkla i jak dochodzi nową drogą do rozwiązania różnych zadań, nie robiąc użytku z linjału, wydaje się rzeczą naturalną okazać, w jaki sposób otrzymuje się to samo twierdzenie, stosując zasadę odwrotności podług pomysłów Adlera. §§ 7 i 8 są właśnie przeznaczone na skrócony wykład dowodzenia Adlera, które, jakkolwiek nie tak elementarne jak Mascheroni'ego, jednakże ma tę zaletę, że jest krótsze, a oprócz tego służy do rzucenia nowego światła na konstrukcje, dokonywane samym cyrklem, gdyż wykazuje ich związek z metodami Gieometrji rzutowej.

Adler nie podaje w swojej rozprawie żadnych zastosowań do zadań elementarnych; ażeby jednak uwidocznić, że ta metoda może prowadzić do konstrukcji pięknych i pouczających, wskazałem w § 9, zamykającym artykuł, kilka dobrze znanych zadań, które przez zastosowanie metody promieni odwrotnych otrzymują rozwiązania nowe i przeprowadzone w sposób jednostajny. Można zresztą bez żadnych trudności zwiększyć podług własnego upodobania liczbę zastosowań tej metody.

§ 2. Pierwsze konstrukcje. 1) Z punktu A poprowadzić równoległą do prostej BC.

Wystarczy utworzyć równoległobok $ABCD$, wyznaczając punkt D jako przecięcie dwuch okręgów $A(BC)$ i $C(AB)$*): prosta AD jest równoległa do BC.

Ta konstrukcja nie jest niczym więcej, jak jedną z konstrukcji używanych powszechnie.

2) Podwoić, potroić i t. d. dany odcinek OA.

Opiszmy okrąg, mający środek w jednym z końców odcinka, np. O, a promień równy OA (fig. 17); następnie wyznaczmy na tym okręgu punkty B, C, D w taki sposób, że

$$AB = BC = CD = OA;$$

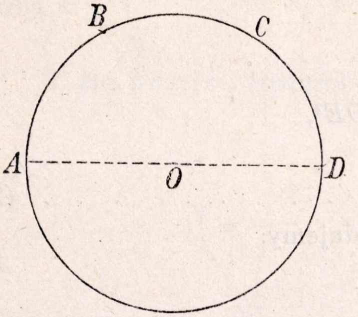

Fig. 17.

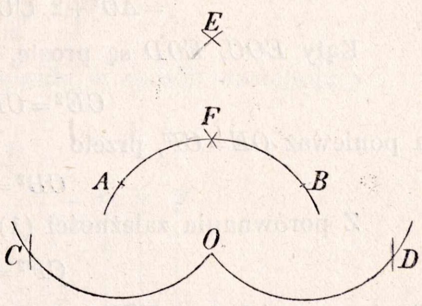

Fig. 18.

punkt D jest średnicowo przeciwległy punktowi A, a więc odcinek AD będzie podwojeniem odcinka OA.

Przez powtórzenie tej samej konstrukcji można potroić odcinek OA, powtórzyć go cztery razy,... i w ogóle pomnożyć przez jakąkolwiek liczbę całkowitą n.

3) Wyznaczyć punkt symetryczny do C względem prostej AB.

Dwa okręgi $A(AC)$ i $B(BC)$

przecinają się, oprócz C, w punkcie szukanym.

4) Podzielić łuk okręgu na dwie części równe.

*) Piszę „okrąg $A(BC)$" zamiast „okrąg o środku A i promieniu równym BC"; tym sposobem skróconym będę się posługiwał i w dalszym ciągu.

Niech będzie AB łukiem danym, należącym do okręgu o środku O (fig. 18). Za pomocą kół $A(OA)$, $B(OA)$ i $O(AB)$ wyznaczam punkty C i D tak, ażeby otrzymać dwa równoległoboki $ABOC$ i $ABDO$ równe sobie i mające wspólną podstawę AB. Następnie, przyjmując C i D za środki, a $CB=DA$ za promień, opisuję dwa okręgi i biorę pod uwagę którykolwiek z dwuch punktów przecięcia tych okręgów; E niech będzie tym punktem. Jeżeli teraz przez F oznaczymy którykolwiek z dwuch punktów przecięcia okręgów $C(OE)$ i $D(OE)$, wtedy punkt F będzie leżał na okręgu danym i podzieli na dwie części równe jeden z dwuch łuków AB.

W rzeczy samej, z konstrukcji wykonanych wynika, że punkty C, O, D leżą na tej samej prostej, równoległej do AB. Ponieważ dalej w równoległoboku $ABOC$ przekątna AO jest równa bokom AC i BO przeto:

$$BC^2 = CO^2 + BO^2 + 2.CO.\text{rzut } OB \text{ na } OC \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$= CO^2 + AO^2 + CO.2.\text{rzut } OB \text{ na } AB$$

$$= AO^2 + 2.CO^2.$$

Kąty EOC, EOD są proste, a więc

$$CE^2 = CB^2 = OC^2 + OE^2,$$

a ponieważ $OE = CF$, przeto

$$CB^2 = CO^2 + CF^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Z porównania zależności (1) i (2) znajdujemy:

$$CF^2 = AO^2 + CO^2.$$

Ponieważ zaś kąt $\sphericalangle FOC$ jest oczywiście prosty, przeto $CF^2 = CO^2 + OF^2$; z tego równania oraz z poprzedniego wynika, że $OA = OF$, to znaczy, że punkt F leży na okręgu $O(OA)$. Jeżeli wreszcie od kątów równych FOC, FOD odejmiemy odpowiednio kąty także równe AOC, BOD, to pozostanie

$$\sphericalangle FOA = \sphericalangle FOB.$$

To dowodzi, że punkt F dzieli łuk AFB na dwie części równe.

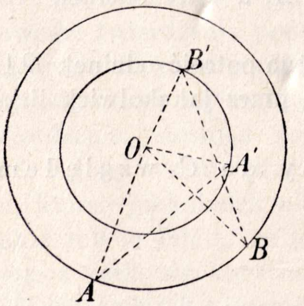

Fig. 19.

5) Wykreślić odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych odcinków m, n, p.

Opiszmy okręgi $O(m)$ i $O(n)$ (fig. 19) obierając punkt O gdziekolwiek na płaszczyźnie; A, B niech będą takiemi dwoma punktami okręgu pierwszego, ażeby cięciwa AB była równa p;

obrawszy środek kolejno w A i B przetnijmy łukami o dowolnym ale tym samym promieniu okrąg $O(n)$ w dwuch punktach A', B'; $A'B'$ jest odcinkiem szukanym.

Istotnie, trójkąty OAA', OBB' są równe, gdyż mają boki odpowiednio równe; a więc $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB'$. Jeżeli od tych kątów odejmiemy (lub do nich dodamy, zależnie od przypadku) kąt wspólny $\sphericalangle BOA'$, to dostaniemy: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$, Stąd wynika, że trójkąty AOB, $A'OB'$ są podobne, a boki ich są związane proporcją

$$OA : OA' = AB : A'B';$$

uwzględniając, że

$$OA = m,\ OA' = n,\ AB = p,$$

wnosimy, że $A'B'$ jest odcinkiem czwartym proporcjonalnym do m, n, p.

Gdyby było $p > 2m$, wtedy nie możnaby było w pierwszym kole wykreślić cięciwy $AB = p$; ale można i w tym przypadku zastosować wskazaną konstrukcję, podstawiając zamiast m i n odcinki podwójne, a jeżeli to nie wystarcza—potrójne i t. d., gdyż jest zawsze, jakąkolwiek będzie liczba k:

$$km : kn = m : n.$$

E. Dubouis rozwiązał to samo zadanie w sposób następujący.

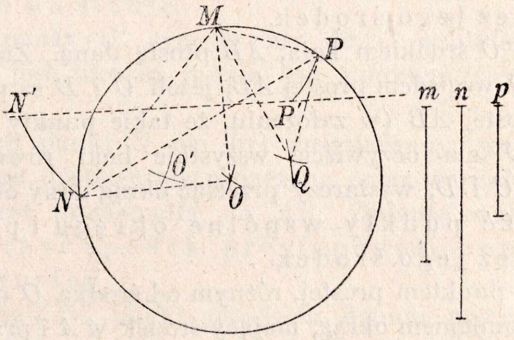

Fig. 20.

Dokoła dowolnego punktu O jako środka opiszmy okrąg o promieniu m (fig. 20) i obierzmy na nim punkty M, N, P tak, że $MN = n$, $MP = p$; jeżeli przez Q oznaczymy punkt symetryczny do M względem NP, wtedy $\sphericalangle MON = 2\sphericalangle MPN = \sphericalangle MPQ$, a więc trójkąty równoramienne NOM i QPM są podobne. Wskutek tego

$$OM : MN = PM : MQ,$$

czyli

$$m : n = p : MQ;$$

a więc MQ jest szukanym odcinkiem czwartym proporcjonalnym.

Ażeby można było zastosować tę konstrukcję, powinno być jednocześnie $n < 2m$ i $p < 2m$; jeżeli te warunki nie są oba spełnione, wtedy należy koło $O(m)$ zastąpić przez inne koło $O(km)$, gdzie k jest odpowiednio dobraną liczbą całkowitą. Odcinek, który się wtedy otrzyma jako czwarty proporcjonalny, należy pomnożyć przez k, ażeby otrzymać odcinek szukany.

Rozbiór tego zadania prowadzi do twierdzenia następującego: Jeżeli MNP jest trójkątem wpisanym w okrąg, a Q jest punktem symetrycznym do M względem boku NP, wtedy MQ jest odcinkiem czwartym proporcjonalnym do promienia i dwuch boków pozostałych MN, MP.

Zadanie o czwartej proporcjonalnej jest jednym z najwięcej charakterystycznych przykładów zadań elementarnych, które za pomocą samego cyrkla dadzą się rozwiązać prościej, aniżeli znanemi metodami, z zastosowaniem linjału; co prawda jednak ta większa prostota zatraca się w rzeczywistości, jeżeli nie są spełnione pewne nierówności warunkowe między m, n, p, ponieważ wtedy trzeba stosować (czasami nawet kilkakrotnie) zadanie drugie tego paragrafu.

§ 3. Zadania podstawowe w metodzie Mascheroni'ego.

1a) Znaleźć punkty wspólne okręgu i prostej, nie przechodzącej przez jego środek.

Niech będzie O środkiem koła, AB prostą daną. Znajduję punkt P symetryczny do O względem prostej AB; jeżeli C i D są punktami wspólnemi okręgu i prostej AB (w założeniu, że takie punkty istnieją), wtedy czworobok $OCPD$ ma oczywiście wszystkie boki równe. Ażeby więc otrzymać punkty C i D, wystarczy przeciąć okrąg dany okręgiem $P(OC)$.

1b) Znaleźć punkty wspólne okręgu i prostej, przechodzącej przez jego środek.

Jeżeli A jest punktem prostej, różnym od środka O okręgu, to opiszmy dowolnym promieniem okrąg, mający środek w A i przecinający okrąg dany w dwuch punktach B, C; podzielmy na dwie części równe każdy z dwuch łuków, które punkty B i C wyznaczają na okręgu danym: punkty podziału są punktami żądanemi.

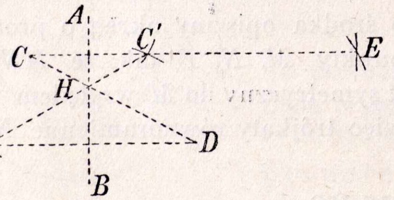

Fig. 21.

2a) Wyznaczyć punkt wspólny dwuch prostych nie prostopadłych.

Niech będą AB, CD (fig. 21) dwiema prostemi danemi. Wyznaczmy punkty C' i D' symetryczne do C i D względem prostej AB, poczym wyznaczmy na CC' punkt E w taki sposób, ażeby czworokąt $C'D'DE$

był równoległobokiem. Przez punkt przecięcia H prostych AB i CD przechodzi oczywiście i $C'D'$. Mamy teraz proporcję następującą:

$$CE:CC' = CD:CH,$$

w której trzy pierwsze wyrazy są odcinkami znanej długości; możemy więc za pomocą zad. 5 § 2 wyznaczyć długość odcinka CH, a więc i położenie punktu H, który jest jednym z punktów wspólnych dwuch okręgów $C(CH)$ i $C'(CH)$.

Ta konstrukcja nie da się zastosować, jeżeli proste AB i CD są prostopadłe, jak to łatwo sprawdzić. Ażeby rozwiązać zadanie i w tym przypadku szczególnym, podamy przedtym rozwiązanie innego zadania, opierając się na konstrukcjach poprzednich.

3) Znaleźć punkt środkowy odcinka AB.

Wyznaczywszy punkt C symetryczny do A względem B, znajdźmy odcinek m trzeci proporcjonalny do AC i AB (t. j. odcinek, czyniący zadość proporcji $AC:AB = AB:m$), opiszmy okrąg $A(m)$ i wyznaczmy jego punkt, leżący na prostej AB między A i B; będzie to punkt środkowy odcinka AB.

Możemy teraz

2b) znaleźć punkt wspólny dwuch prostych AB i CD prostopadłych do siebie.

Wykreślmy punkt C' symetryczny do C względem prostej AB; punkt żądany nie jest niczym innym jak punktem środkowym odcinka CC'.

W konstrukcji punkt D nie był zużytkowany: jest to naturalne, gdyż prosta CD jest dostatecznie oznaczona przez warunki, że przechodzi przez punkt C i jest prostopadła do AB. Zadanie możnaby było tak wyrazić: Wyznaczyć spodek prostopadłej, poprowadzonej z punktu do prostej.

Dubouis znajduje punkt przecięcia dwuch prostych innym sposobem, opierając się na zadaniu następującym:

4) Wyznaczyć środek okręgu koła, przechodzącego przez trzy punkty M, N', P', nie leżące na jednej prostej.

Oznaczmy przez O punkt symetryczny do M względem prostej $N'P'$ (fig. 20 na str. 31), a przez r promień koła, przechodzącego przez M, N', P'; wtedy będzie na zasadzie twierdzenia, wypowiedzianego w końcu poprzedniego paragrafu:

$$r:MN' = MP':MO,$$

czyli:

$$MO:MN' = MP':r \qquad \qquad (1)$$

Otrzymamy więc za pomocą konstrukcji Dubouisa odcinek r jako czwarty proporcjonalny, opisując okrąg $O(OM)$, przecinając go w N i P okręgami $M(MN')$ i $M(MP')$ i wyznaczając następnie punkt Q symetryczny do M względem prostej NP: będzie wtedy $MQ=r$. W rzeczy samej, mamy

$$MO:MN=MP:MQ,$$

a ponieważ $MN=MN'$, a $MP=MP'$, przeto, porównywając z równaniem (1), znajdziemy:

$$MQ=r.$$

Środkiem okręgu koła, przechodzącego przez M, N', P' jest więc jeden z punktów wspólnych okręgów $M(MQ)$ i $N'(MQ)$.

Powracając do poprzedniego zadania, mamy

2) znaleźć punkt przecięcia dwuch prostych AB i CD. Obierzmy na płaszczyźnie tych prostych dowolny punkt M i wyznaczmy punkty M' i M'' symetryczne do M względem prostych AB i CD; przecięciem obu prostych będzie środek okręgu, przechodzącego przez punkty M, M', M''.

Sposób, którym Dubouis znajduje punkt wspólny dwuch prostych, ma tę wyższość teoretyczną nad sposobem Mascheroni'ego, że daje się zastosować zarówno w przypadku prostych ukośnych, jak i prostopadłych. Pomimo to konstrukcje Mascheroni'ego są praktycznie dogodniejsze jako mniej sztuczne.

§ 4. Rozwiązanie kilku zadań o odcinkach i kątach. Podaliśmy już wprawdzie konstrukcję punktu środkowego odcinka, na podstawie zadań rozwiązanych poprzednio, ale ta konstrukcja nie jest najkrótsza; a jeżeli pomimo to oddaliśmy jej pierwszeństwo, to zrobiliśmy tak tylko dlatego, ażeby liczbę konstrukcji przygotowawczych sprowadzić do minimum. W praktyce jednak dogodniej jest posługiwać się następującą odrębną metodą.

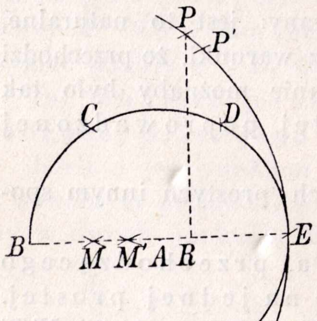

Fig. 22.

1) Nowa konstrukcja środkowego punktu odcinka.

Niech będzie AB odcinkiem danym (fig. 22). Opiszmy, przyjmując A za środek, półkole $BCDE$, a następnie okrąg $B(BE)$; na tym okręgu wyznaczmy punkty P, Q tak, żeby było $EP=EQ=EC$ (jeżeli $BC=BA$), poczym opiszmy okręgi $P(EC)$ i $Q(EC)$. Te dwa okręgi przecinają się w dwuch punktach prostej BE; jeden z nich, M, twierdzę, że jest punktem środkowym między A i B.

W rzeczy samej, w trójkącie BPE (który jest równoramienny, a więc ma kąt $\sphericalangle BEP$ ostry) jest:

$$BP^2 = BE^2 + PE^2 - 2 . BE . \text{rzut } PE \text{ na } BE,$$

czyli, ponieważ $BP = BE$:

$$PE^2 = BE . 2 . \text{rzut } PE \text{ na } BE.$$

Uwzględniając teraz, że na zasadzie konstrukcji $PE = PM$, mamy:

$$2 . \text{rzut } PE \text{ na } BE = EM,$$

przeto

$$PE^2 = BE . EM = 2 . AB . EM;$$

ale $PE = EC = AB . \sqrt{3}$, a więc ostatnia równość przyjmie postać:

$$3 . AB^2 = 2 . AB . EM,$$

skąd znajdziemy:

$$3 . AB = 2 . EM,$$

a odejmując od każdej strony $2 . AB$:

$$AB = 2 . AM,$$

co znaczy, że M jest punktem środkowym między A i B.

Posługując się konstrukcją powyższą, możemy przystąpić do znalezienia punktu środkowego M' odcinka AM, a następnie punktu środkowego M'' odcinka AM' i t. d. Ażeby otrzymać punkt M', wystarczy wyznaczyć na okręgu $B(BE)$ punkty P' i Q' tak, ażeby było $EP' = EQ' = AP$, poczym, przyjmując środek kolejno w P' i Q', opisać dwa okręgi tym samym promieniem AP; te okręgi wyznaczają szukany punkt M'. W rzeczy samej, widzimy przedewszystkim, że punkt M' leży na prostej BE; oprócz tego, oznaczając przez R spodek prostopadłej, poprowadzonej z punktu P do BE, mamy zależności następujące:

$$BP^2 = AB^2 + AP^2 + 2 . AB . AR$$

$$PE^2 = AE^2 + AP^2 - 2 . AE . AR;$$

sumując je i uwzględniając, że $AB = AE$, znajdziemy:

$$BP^2 + PE^2 = 2 . AB^2 + 2 . AP^2.$$

A ponieważ

$$BP = BE = 2 . AB; \quad PE = CE = AB . \sqrt{3},$$

przeto, podstawiając te wartości w równaniu poprzednim, dostaniemy:

$$7 . AB^2 = 2 . AB^2 + 2 . AP^2,$$

czyli:

$$\frac{5}{2} AB^2 = AP^2 = EP'^2.$$

Z trójkątów równoramiennych i podobnych $BP'E$, $P'M'E$ mamy:

$$EP^{2'} = BE . M'E,$$

przeto

$$\frac{5}{2} AB^2 = 2 . AB . M'E,$$

skąd:

$$\frac{5}{4} AB = M'E,$$

a odejmując AB od obu stron:

$$\frac{1}{4} AB = AM'.$$

M' jest więc punktem środkowym między A i M.

Punkt M'' środkowy między A i M' otrzymalibyśmy, wyznaczając na okręgu $B(BE)$ takie punkty P'' i Q'', że $EP'' = EQ'' = AP'$ i opisując okręgi $P''(AP')$ i $Q''(AP')$; dowód można przeprowadzić podobnie jak poprzednio.

2) Odcinek trzeci proporcjonalny do dwuch odcinków m i n znajduje się podług metody ogólnej, która służy do znalezienia czwartego proporcjonalnego do trzech odcinków; jeżeli jednak $n < 2m$, wtedy można z pożytkiem zastąpić tamto rozwiązanie przez inne, zasługujące również na uwagę. Niech będą (fig. 23) A i B końcami odcinka długości m; opiszmy okręgi $A(AB)$ i $B(n)$, które się przetną w dwuch punktach C, D; jeżeli punkt C' jest symetryczny do C względem B, wtedy $C'D$ jest odcinkiem trzecim proporcjonalnym do m i n.

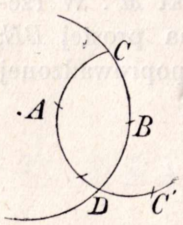

Fig. 23.

W rzeczy samej, ponieważ kąt $\sphericalangle CDC'$ jest prosty, przeto proste AB i DC' są równoległe, a więc kąty $\sphericalangle ABD$, BDC' są równe. Stąd wypada, że dwa trójkąty równoramienne ADB, BDC' są podobne, a ich boki czynią zadość proporcji:

$$AB : BD = BD : DC' ;$$

to znaczy, że DC' jest odcinkiem trzecim proporcjonalnym do m i n.

3) Konstrukcja odcinka równego n-tej części odcinka danego wykonywa się w ogólności przez utworzenie odcinka, równego danemu wziętemu n razy, i przez znalezienie trzeciego proporcjonalnego do tego nowego odcinka i pierwszego. W praktyce nadaje się do

tego bardzo dobrze wyłożona tylko co konstrukcja odcinka trzeciego proporcjonalnego.

Przypuśćmy np., że chcemy wykreślić trzecią część odcinka AB. Zacznijmy (fig. 24) od wyznaczenia odcinka AD trzy razy dłuższego od AB, następnie znajdźmy odcinek $L'M$ trzeci proporcjonalny do AD i AB; wtedy $L'M$ będzie trzecią częścią odcinka AB. Jeżeli jeszcze znajdziemy punkt N, w którym przecinają się okręgi $M(AB)$ i $A(L'M)$, wtedy N będzie jednym z punktów podziału odcinka AB na trzy części równe.

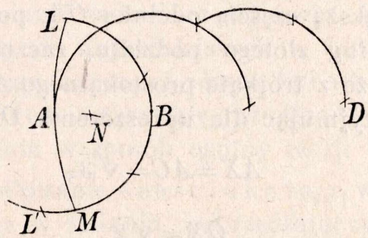

Fig. 24.

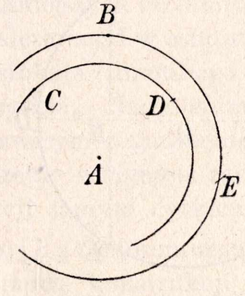

Fig. 25.

Kąt możemy przedstawić za pomocą wierzchołka i dwuch punktów, z których każdy wraz z wierzchołkiem wyznacza jedno ramię kąta. Łatwe są więc rozwiązania samym cyrklem zadań podstawowych o kątach.

4) P o d w o i ć, p o t r o i ć i t. d. k ą t BAC.

Opiszmy (fig. 25) okrąg $A(AC)$; ten okrąg przecina się z okręgiem $B(CB)$ w punkcie D, a kąt $\sphericalangle CAD$ jest dwa razy większy od danego. Opisując następnie okrąg $A(AB)$ i przecinając go w E z $D(DB)$, mamy kąt $\sphericalangle CAE$ trzy razy większy od $\sphericalangle BAC$ i t. d.

5) W y k r e ś l i ć d w u s i e c z n ą k ą t a $\sphericalangle BAC$.

Opiszmy okrąg $A(AB)$ i wyznaczmy jego przecięcie D z ramieniem AC; przyjmując D i B za środki, opiszmy dwa okręgi tym samym dowolnym promieniem i znajdźmy punkt przecięcia M tych dwuch okręgów. Prosta AM jest żądaną dwusieczną.

6) P r z y j m u j ą c p r o s t ą $A'B'$ z a j e d n o z r a m i o n, a A' z a w i e r z c h o ł e k, z b u d o w a ć k ą t r ó w n y d a n e m u k ą t o w i $\sphericalangle BAC$.

Wykreślmy odcinek czwarty proporcjonalny do AB, $A'B'$, AC i odcinkiem tym jako promieniem opiszmy okrąg dokoła środka A'; podobnie wykreślmy drugi okrąg o środku B' promieniem równym odcinkowi czwartemu proporcjonalnemu do AB, $A'B'$, BC. Te dwa okręgi przetną się w dwuch punktach położonych po przeciwnych stronach prostej $A'B'$; oznaczając jeden z nich przez C', dostaniemy kąt $\sphericalangle B'A'C'$ równy danemu kątowi $\sphericalangle BAC$.

7) Podzielić odcinek w stosunku średnim i skrajnym.

Niech będzie OA (fig. 26) odcinkiem danym; chcemy wyznaczyć na prostej OA punkt Y taki, że $OY^2 = OA \,.\, AY$. Opiszmy okrąg $O(OA)$ i wyznaczmy na nim punkty B, C, D, E tak, że $AB = BC = CD = DE = OA$; wyznaczmy następnie punkt przecięcia X okręgów $A(AC)$ i $D(AC)$, a potym punkt przecięcia Y okręgów $C(OX)$ i $E(OX)$. Punkt Y leży oczywiście na prostej OA. Chcąc dowieść, że OY jest większą częścią odcinka OA, podzielonego podług złotego podziału, zaczniemy od uwagi, że z trójkąta prostokątnego AOX mamy, przyjmując dla uproszczenia $OA = 1$:

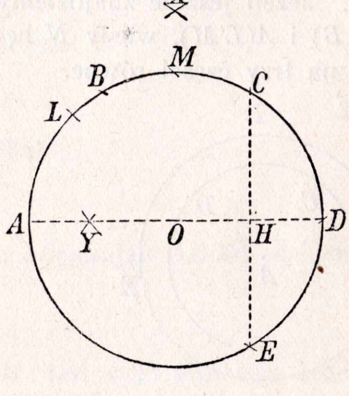

Fig. 26.

$$AX = AC = \sqrt{3},$$

a więc

$$OX = \sqrt{2}.$$

Wyobraźmy sobie teraz proste AOD, CY, CE i oznaczmy przez H punkt wspólny prostych CE i AD; znajdziemy:

$$CY = OX = \sqrt{2}; \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

a z trójkąta prostokątnego CHY:

$$HY = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

będzie więc

$$OY = HY - OH = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

czyli odcinek OY równa się części większej promienia, przyjętego za 1, podzielonego podług złotego podziału.

Uwaga. Z tej samej figury dostajemy jeszcze:

$$DY = DO + OY = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$DY.\,OY = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

skąd

$$DY.\,OY = OD^2,$$

a więc OD jest większą częścią odcinka DY, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym. Dzięki temu ta sama konstrukcja służy także do rozwiązania zadania:

8) Wykreślić odcinek, znając część większą tego odcinka, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

§ 5. Podział okręgu na 3, 4, 5, 6, 8, 10 części równych. Przez analizę zadania poprzedzającego osiągnęliśmy zasady, które pozwalają za pomocą samego cyrkla wpisać w okrąg wszystkie wielokąty foremne, które już były wpisywane przez matematyków starożytnych z zastosowaniem cyrkla i linjału. Jest to jeden z najpiękniejszych rezultatów, osiągniętych przez Mascheroni'ego; wraz ze znalezionemi w ostatnich latach rozwiązaniami zadania o wpisaniu siedemnastokąta foremnego, rozdział ten należy do najładniejszych w Geometrji cyrkla. Nadmienimy, że podział okręgu na części równe był właśnie pierwszym zagadnieniem, które Mascheroni starał się rozwiązać, a powodzenie osiągnięte zachęciło go do ustalenia w sposób ogólny teorji konstrukcji samym cyrklem.

a) Wpisanie sześciokąta, a więc i trójkąta foremnego, było już otrzymane w zadaniu poprzedzającym za pomocą konstrukcji punktów A, B, C, D, E (fig. 26).

b) Jeżeli okręgi $O(OA)$ i $A(OX)$ przecinają się w punkcie M, wtedy AM jest bokiem kwadratu wpisanego w $O(OA)$, ponieważ $AM = OX$, a znaleźliśmy, że $OX = \sqrt{2}$.

c) Bok ośmiokąta znajduje się, dzieląc łuk AM na dwie części równe; w tym celu jednak niema potrzeby robienia użytku z konstrukcji podanej w § 2, jeżeli bowiem przetniemy $O(OA)$ z $X(OA)$ w punkcie L, wtedy będzie w trójkącie OLX:

$$OL = LX = 1; \quad OX = \sqrt{2}.$$

A więc kąt $\sphericalangle OLX$ jest prosty, a $\sphericalangle LOX$ stanowi połowę prostego, skąd wynika, że L jest punktem środkowym łuku AM, a odcinek AL jest bokiem ośmiokąta foremnego.

d) Bok dziesięciokąta foremnego wpisanego równa się OY, gdyż OY jest większą częścią promienia, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym. Tym sposobem otrzymuje się także podział okręgu na pięć części równych; bok pięciokąta foremnego jest MY, gdyż odcinek ten jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego MOY, którego jedną przyprostokątną jest promień, a drugą większa część promienia, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

Można zauważyć, jeśli chodzi o piękno konstrukcji, że w zadaniach, rozwiązanych w tym paragrafie, robi się użytek z trzech tylko otworów cyrkla, równych odpowiednio $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

§ 6. Zadania rozwiązywane w przybliżeniu: wyprostowanie okręgu, podwojenie sześcianu. Niech będzie O środkiem okręgu (fig. 27), na którym mierzy się łuki począwszy od jednego z jego punktów A, przyjmując zwrot, oznaczony strzałką, za dodatni. Niech będzie P jakimkolwiek punktem okręgu, a łuk AP niech np. należy do jednej z dwuch pierwszych ćwiartek okręgu; oznaczmy jeszcze przez Q punkt symetryczny do P względem średnicy OA. Wyznaczywszy punkt X jak w zadaniu 7 § 4, mamy z trójkąta OPX:

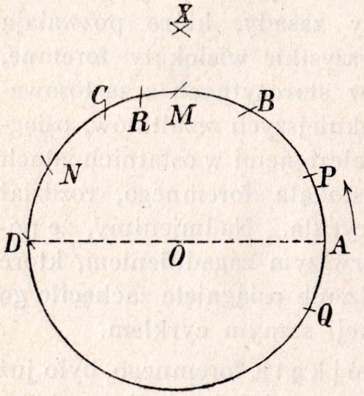

Fig. 27.

$$PX^2 = OP^2 + OX^2 - OX \,.\, 2 \,.\, \text{rzut } OP \text{ na } OX$$

$$= OA^2 + OX^2 - OX \,.\, PQ$$

$$= AX^2 - OX \,.\, PQ.$$

Zakładając teraz $OA = 1$, łuk $AP = \alpha$ (w stopniach), mamy

$$AX = \sqrt{3}, \quad OX = \sqrt{2}, \quad PQ = 2 \sin \alpha,$$

a jeżeli oznaczymy przez b długość odcinka PX, wtedy poprzedni wzór przyjmie postać:

$$b^2 = 3 - 2\sqrt{2} \,.\, \sin \alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Ten wzór zastosujemy do rozwiązania obu zadań.

1) Przybliżone wyprostowanie okręgu.

Niech będzie $O(OA)$ okręgiem, który mamy wyprostować. Wyznaczmy punkt X jak poprzednio, opiszmy okrąg $B(BX)$ i oznaczmy przez R jego punkt przecięcia z okręgiem $O(OA)$, należący do łuku BCD. Błąd jaki popełniamy, przyjmując odcinek AR za miarę czwartej części okręgu, wynosi około 0,0004 przez nadmiar.

W rzeczy samej, jeżeli w równaniu (1) założymy $\alpha = AB = 60^0$, to otrzymamy

$$b = BX = \sqrt{3 - \sqrt{6}}\,.$$

Do odcinka $BX = BR$, uważanego za cięciwę koła $O(OA)$, należy łuk BR, który można obliczyć podług znanego wzoru:

$$\frac{\text{cięciwa}}{2} = \sin\left(\frac{\text{łuk}}{2}\right); \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

znajdziemy stąd, że łuk $BR = 43^0 33 \frac{286'}{2005}$, a więc łuk $AR = 103^0 33 \frac{286'}{2005}$.

Jeżeli teraz podług tego samego wzoru (2) obliczymy cięciwę AR, to dostaniemy:

$$AR = 1{,}57\ 11996.$$

Z drugiej strony miara czwartej części okręgu wynosi 1,5707963, a liczba ta jest w przybliżeniu mniejsza o 0,0004 od liczby znalezionej dla cięciwy AR.

2) Przybliżone podwojenie sześcianu.

Niech będzie $OA = 1$ krawędzią sześcianu (fig. 27); mamy znaleźć krawędź sześcianu, którego objętość jest dwa razy większa od objętości pierwszego sześcianu. Opiszmy koło $O(OA)$, znajdźmy punkt X jak w poprzednich zadaniach, a punkt M jako wierzchołek kwadratu wpisanego, którego innym wierzchołkiem jest A (§ 5, b); wykreślmy teraz koło $M(MO)$ i znajdźmy jego punkt przecięcia N z łukiem CD. Odległość tego punktu N od X przedstawia krawędź sześcianu dwa razy większego od sześcianu danego, z błędem mniejszym od 0,0007 przez niedomiar.

W rzeczy samej, łuk $AN = 150^0$. Podstawiając tę wartość zamiast α we wzorze (1), będziemy mieli:

$$b = NX = \sqrt{3 - \sqrt{2}} = 1{,}2592800.$$

Z drugiej strony $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209$, a liczba ta przewyższa wartość znalezioną dla NX w przybliżeniu o 0,00064.

§ 7. Przekształcenia przez promienie odwrotne i konstrukcje samym cyrklem: zadania podstawowe. Podane przez Adlera dowodzenie twierdzenia podstawowego Gieometrji cyrkla wymaga możności rozwiązania, za pomocą samych okręgów, kilku zadań, które teraz wymienimy. Z zadań rozwiązanych przez Mascheroni'ego potrzebne są tu tylko 2) i 3) § 2. Możemy teraz przystąpić do zadań następujących.

1) Dane jest na płaszczyźnie koło k o środku O i promieniu r; mamy wykreślić samym cyrklem odwrotność punktu M względem k; czyli, mamy wyznaczyć na prostej OM punkt M', czyniący zadość warunkowi $OM \, . \, OM' = r^2$.

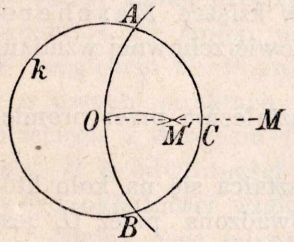

Fig. 28.

a) Przypuśćmy naprzód, że $OM > \frac{r}{2}$. Okrąg $M(MO)$ przecina k w dwuch punktach A, B (fig. 28); okręgi $A(r)$ i $B(r)$ przecinają się na prostej OM w punkcie żądanym M'. Istotnie, jeżeli oznaczymy przez X punkt wspólny tych dwuch ostatnich okręgów, położony względem O po tej samej stronie, co M, wtedy otrzymamy z podobieństwa dwuch trójkątów MOA, AOX:

$$OM . OX = OA^2 = r^2.$$

To równanie wyraża, że punkt X pokrywa się z M'.

b) Niech teraz będzie $OM < \frac{r}{2}$. Ponieważ w tym przypadku okrąg $M(MO)$ nie przecina, jak w *a*), okręgu k, przeto wykreślmy odcinek $ON = n . OM$, przyjmując za n liczbę całkowitą dość wielką, ażeby było $ON > \frac{r}{2}$; będziemy wtedy mogli, za pomocą konstrukcji poprzedniej, znaleźć punkt N' odwrotny do N; wreszcie punkt M' zostanie wyznaczony podług zależności $OM' = n . ON'$.

A więc możemy za pomocą samego cyrkla wyznaczyć odwrotność każdego punktu względem k.

Uwaga. Jeżeli punkt M jest taki, że $OM = \mu r$ (μ oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą), to $OM' = \frac{r}{\mu}$. Tym sposobem dostajemy następującą konstrukcję μ-tej części odcinka: jeżeli OC jest odcinkiem danym (fig. 28), to wyznaczmy na prostej OC punkt M tak, ażeby było $OM = \mu . OC$; oznaczając przez M' odwrotność punktu M względem okręgu $O(OC)$, będziemy mieli

$$OM' = \frac{1}{\mu} . OC.$$

Jeżeli tę konstrukcję porównamy z poprzednim rozwiązaniem tego samego zadania (§ 4 zad. 3), to zauważymy, że jest to ta sama konstrukcja uczyniona tylko nieco prostszą i więcej symetryczną, jest więc w praktyce dogodniejsza. Ogólniej, konstrukcja tutaj podana, rozwiązuje zadanie: „Wykreślić odcinek trzeci proporcjonalny do dwuch odcinków danych“ i przypomina od razu odpowiednią konstrukcję z § 4 (zad. 2), od której jest trochę prostsza. Co się tyczy zresztą podziału odcinka na części równe, to ta konstrukcja była już wyłożona w książce Mascheroni'ego w przypadku $\mu = 2$; ale niema tam nawet powierzchownej wzmianki o zasadzie promieni odwrotnych.

Przypominamy następujące własności przekształcenia przez promienie odwrotne.

Prosta nie przechodząca przez O przekształca się na koło które przechodzi przez O i którego średnica, poprowadzona przez O, jest prostopadła do prostej. I odwrotnie.

Koło nie przechodzące przez O przekształca się na koło, odpowiadające pierwszemu w jednokładności, której środkiem jest O.

Prosta przechodząca przez O przekształca się na siebie samą.

Chcemy teraz

2) w przekształceniu odwrotnym względem k wyznaczyć środek okręgu, odpowiadającego danej prostej RS, nie przechodzącej przez O.

Niech będzie M (fig. 29) punktem symetrycznym do O względem prostej RS, a M' niech będzie punktem odwrotnym do M względem okręgu k; jeżeli teraz oznaczymy przez H punkt wspólny prostych OM i RS,

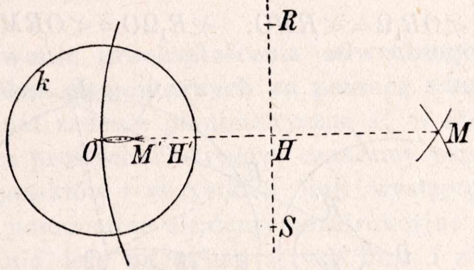

Fig. 29.

a przez H' punkt odwrotny do H, wtedy OH' będzie średnicą koła, odpowiadającego prostej RS, a więc środkiem tego koła będzie punkt środkowy między O i H'; a ponieważ

$$OM = 2 \,.\, OH,$$

przeto $OH' = 2 \,.\, OM'$, skąd wynika, że M' jest punktem środkowym odcinka OH', jest więc szukanym środkiem koła.

3) W przekształceniu odwrotnym względem k wyznaczyć środek okręgu γ', odpowiadającego danemu okręgowi γ, nie przechodzącemu przez O.

Jeżeli M jest punktem odwrotnym do O względem γ, a M' jest punktem odwrotnym do M względem k, wtedy M' będzie środkiem szukanym. W rzeczy samej przypuśćmy, że okręgi γ i γ' zostały wykreślone (fig. 30), oznaczmy ich środki przez Ω i M' i wyznaczmy punkt M, odwrotny do M' względem k. Poprowadźmy z punktu O prostą, która spotyka okrąg γ w dwuch punktach R, R_1 i oznaczmy przez R' jeden z jej punktów przecięcia z okręgiem γ', a mianowicie ten punkt, który odpowiada punktowi R w odwrotności względem k; a więc R' odpowiada punktowi R_1 w jednokładności względem środka O, w której γ' odpowiada okręgowi γ.

Mamy więc zależności następujące:

$$(1) \qquad \frac{OR_1}{OR'} = \frac{O\Omega}{OM'} \text{ (wskutek rzeczonej jednokładności)}$$

$$OR \,.\, OR' = OM \,.\, OM' \text{ (wskutek odwrotności względem } k\text{),}$$

a więc:

(2) $$\frac{OR}{OM} = \frac{OM'}{OR'}.$$

Z (1) i (2) wynika:

$$\frac{OR}{OM} = \frac{O\Omega}{OR_1},$$

co wskazuje, że trójkąty ORM i $O\Omega R_1$, mające kąt O wspólny, są podobne; przeto

$$\sphericalangle OR_1\Omega = \sphericalangle RMO; \quad \sphericalangle R_1\Omega O = \sphericalangle ORM.$$

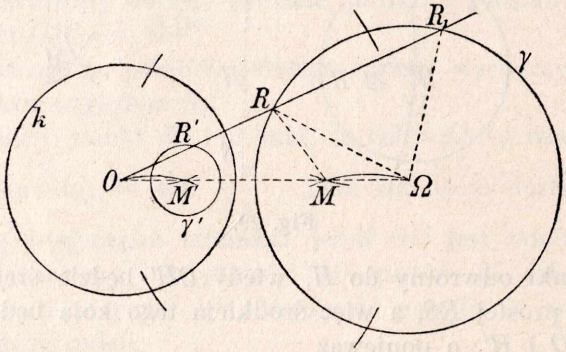

Fig. 30.

Z tych dwuch równości oraz z równości

$$\sphericalangle \Omega RR_1 = \sphericalangle RR_1\Omega$$

wynikają jeszcze następujące:

$$\sphericalangle OR\Omega = \sphericalangle \Omega MR, \quad \sphericalangle \Omega OR = MR\Omega;$$

wskutek tego trójkąty $OR\Omega$ i $RM\Omega$ mają kąty odpowiednio równe; są więc podobne, a między ich bokami istnieje zależność

$$\frac{\Omega O}{\Omega R} = \frac{\Omega R}{\Omega M},$$

czyli:

$$\Omega O \,.\, \Omega M = \Omega R^2,$$

co stwierdza, że punkty O i M są odwrotne względem koła γ. To dowodzi słuszności wskazanej konstrukcji środka koła γ' *).

*) Podane przez Adlera uzasadnienie tej konstrukcji różni się od tego, które tu wyłożyliśmy; tamto jest krótsze, ale zawodzi w tych wszystkich przypadkach, w których nie można poprowadzić stycznych z O do γ i γ'; nasze dowodzenie jest wprawdzie więcej złożone, ale ma tę zaletę, że służy we wszystkich przypadkach.

Uwaga. Okrąg, który w przekształceniu przez promienie odwrotne odpowiada prostej, może być od razu wykreślony, jeżeli został już znaleziony jego środek, gdyż wiemy, że ten okrąg musi przejść przez O. Natomiast znajomość środka w ogólności nie wystarcza, ażeby można było opisać okrąg γ' pochodzący z przekształcenia innego okręgu γ, ale trzeba jeszcze wyznaczyć odwrotność któregokolwiek punktu okręgu γ; to ostatnie działanie staje się zbytecznym w tym tylko przypadku, kiedy γ przecina koło podstawowe przekształcenia, gdyż punkty tego koła odpowiadają samym sobie.

§ 8. Zastosowanie przekształcenia odwrotnego do dowiedzenia rozwiązalności zadań elementarnych za pomocą samego cyrkla. Niech będzie do rozwiązania zadanie planimetryczne P, w którym nie występują inne linje oprócz prostych i okręgów; oznaczmy przez F figurę, złożoną ze wszystkich punktów i wszystkich linji występujących w zadaniu, choćby tylko jako pomocnicze elementy konstrukcyjne. Opiszmy koło k, którego środek O nie leży na żadnej z tych linji, i zbudujmy figurę F' odwrotną do F względem k; stosownie do wymienionych poprzednio własności przekształcenia przez promienie odwrotne figura F składa się wyłącznie z kół, które mogą być za pomocą samego cyrkla otrzymane z linji figury F przez zastosowanie dogodnych konstrukcji podanych w § 7. A więc zadanie P, polegające na wykreślaniu pewnej liczby prostych i okręgów, zostało przekształcone na inne zadanie P', którego rozwiązanie wymaga tylko kreślenia okręgów. Punkty, stanowiące rozwiązanie zadania P', nie są niczym innym jak odwrotnościami względem k punktów, będących rozwiązaniem zadania P; można więc przejść od jednych do drugich za pomocą tego samego przekształcenia przez promienie odwrotne. A ponieważ te wszystkie przekształcenia nie wymagają innych przyrządów oprócz cyrkla, przeto każde zadanie, dające się rozwiązać za pomocą linjału i cyrkla, może być rozwiązane za pomocą samego cyrkla.

§ 9. Wzmianka o zastosowaniu przekształcenia przez promienie odwrotne do rozwiązania niektórych zadań elementarnych. Ta sama uwaga, która była zrobiona na początku o metodzie Mascheroni'ego, dotyczy również systematycznego stosowania zasady przekształcenia przez promienie odwrotne, a mianowicie zarówno jedna jak i druga metoda, o ile nie brać nic więcej pod uwagę, komplikuje w ogólności rozwiązanie graficzne. Ale wobec tego, że dokładniejsze zbadanie metody Mascheroni'ego (§§ 4, 5, 6) przekonało nas, że w wielu zagadnieniach ta metoda posiłkuje się szczególnemi pomysłami, dzięki którym zasługuje na pierwszeństwo przed innemi metodami więcej znanemi, to łatwo przypuścić, że fakt analogiczny sprawdzi się i w stosunku do metody

Adlera. Chociaż nie ulega wątpliwości, że byłoby pożyteczne kompletne rozpatrzenie różnych kategorji zadań, do których odwrotność może być z korzyścią stosowana, to jednak nie zamierzam tutaj przedsięwziąć takiego badania; powiem tylko, że trzeba się kierować dwojakiemi względami przy stosowaniu tej metody: przedewszystkim robić użytek, o ile to tylko możliwe, z własności odwrotności, a powtóre w każdym przypadku wybierać starannie koło podstawowe przekształcenia.

Ażeby dać odpowiedni przykład, przypuśćmy, że mamy rozwiązać zadanie następujące.

1) Wyznaczyć środek koła, przechodzącego przez trzy punkty A, B, C nie leżące na jednej prostej.

Można postępować w taki sposób. Opisuję okrąg $k \equiv A(AB)$ i w przekształceniu odwrotnym względem tego koła znajduję punkt C' odpowiadający punktowi C; prosta BC' jest oczywiście odwrotnością koła, przechodzącego przez A, B, C, względem k. Jeżeli więc znajdę punkt M' symetryczny do A względem prostej BC', a następnie punkt M odwrotny do M' względem k, wtedy M będzie środkiem szukanym.

Ta konstrukcja, wobec tego, że się wykonywa samym cyrklem, jest dość prosta i nie pozbawiona elegancji, a dochodzi się do niej przez właściwy wybór koła k.

Istnieje jeszcze cała klasa zadań, w których metoda przekształcenia przez promienie odwrotne wydaje się szczególnie wskazaną: są to konstrukcje, w których trzeba wykonywać działania nad elementami, nie mieszczącemi się w granicach arkusza. Widoczne jest w rzeczy samej, że stosując odpowiednie przekształcenie przez promienie odwrotne do figury takiej, jaka była dana, zawsze można w praktyce zastąpić elementy, które wypadają po za arkuszem, przez inne elementy, zawarte w granicach rysunku; wtedy rozwiązanie zadania staje się oczywistym, o ile nie zostało już osiągnięte.

Wykażemy na zadaniu, rozwiązywanym już niezliczonemi sposobami, jak się stosuje powyższy pomysł. Chcemy

2) wyznaczyć prostą łączącą punkt P z niedostępnym punktem przecięcia Q dwuch danych prostych AB, CD.

Opisawszy okrąg k o środku P, wykreślamy okręgi odpowiadające obu prostym w przekształceniu przez promienie odwrotne względem k; te dwa okręgi przechodzą oba przez P, a więc przecinają się jeszcze i w drugim punkcie, który nie może być innym, jak punktem Q' odwrotnym do Q. A ponieważ punkty P, Q, Q' leżą na jednej prostej, przeto prosta szukana jest PQ'. W praktyce można zawsze otrzymać Q' w granicach rysunku. W rzeczy samej, jeżeli choć jedna z prostych AB, CD leży zewnątrz koła k, wtedy przynajmniej jedno z kół, odpowiadających tym prostym, leży z konieczności całkowicie wewnątrz k, a więc i punkt Q' wypadnie wewnątrz k. Trzeba więc tylko do naszego celu wybrać promień koła k dostatecznie mały.

Gdyby w tym zadaniu dwie proste, wyznaczające punkt Q, zastąpić przez dwa okręgi, wtedy możnaby było wykonać analogiczną konstrukcję; trzebaby tylko, ze względu na możliwe uproszczenie, zauważyć, że dogodnie jest opisać w tym przypadku koło k w taki sposób, ażeby przecinało oba okręgi dane; a to na zasadzie uwagi końcowej § 7.

Przytoczę jeszcze jeden przykład. Mamy

3) opisać okrąg, którego środkiem jest punkt dany O i który przechodzi przez niedostępny punkt P, będący punktem wspólnym dwuch okręgów α i β o środkach A i B.

Weźmy naprzód pod uwagę przypadek, w którym zadanie może być bezpośrednio rozwiązane, bez uciekania się do przekształcenia przez promienie odwrotne. Jest to ten przypadek, w którym wypadają w granicach rysunku punkty A i B, punkt P_1, w którym spotykają się okręgi α i β oprócz w P, i punkt O_1 symetryczny do O względem prostej AB. Istotnie, mamy wtedy $OP = O_1P_1$, a więc okrąg żądany jest $O(O_1P_1)$. Zauważymy nawet, że można pominąć jeden z punktów A i B; gdyż jeżeli mamy na rysunku np. tylko punkt B, wtedy jakikolwiek okrąg o środku B przecina α w dwuch punktach R, S symetrycznych względem prostej AB, a więc dwa jakiekolwiek okręgi o środkach R i S przecinają się w dwuch punktach prostej AB; możemy przeto w braku punktu A wyznaczyć inne punkty prostej AB.

Jeżeli natomiast przypuścimy, że rysunek zawiera punkty A i B, ale nie zawiera O_1 (obecność punktu P_1 jest teraz obojętna), wtedy zadanie rozwiązuje się dogodnie za pośrednictwem przekształcenia przez promienie odwrotne. W rzeczy samej, okręgi α' i β' odwrotne do α i β względem dowolnego koła k o środku O przecinają się w dwuch punktach P' i P_1' odwrotnych do P i P_1; okrąg $O(OP')$ jest odwrotnością okręgu szukanego, jeżeli więc obierzemy na $O(OP')$ jakikolwiek punkt M' i znajdziemy jego odwrotność M (starając się przy wyborze punktu M' o to, ażeby punkt M nie wypadł poza granicami rysunku), wtedy okrąg żądany będzie $O(OM)$.

I tutaj również osiągniemy pewne uproszczenie konstrukcji, jeżeli okrąg k opiszemy w taki sposób, ażeby przeciął zarówno α jak β.

Zastępując w tym zadaniu okręgi α i β przez dwie proste, dostaniemy zadanie, które również łatwo rozwiązać za pomocą przekształcenia przez promienie odwrotne.