SCHÜLER — FUNKTIONENRECHNUNG

DIE

ALLGEMEINE DERIVATION

EIN

NEUER GRUNDBEGRIFF DER FUNKTIONENRECHNUNG

HIER INSBESONDERE DER

DIFFERENTIALRECHNUNG.

EINE FESTSCHRIFT

ZUM

500JÄHRIGEN JUBILÄUM DER RUPERTO-CAROLA

VON

WILHELM FRIEDRICH SCHÜLER.

S. Dickstein
Warszawa
20/IX 86

ANSBACH
DRUCK & VERLAG VON C. BRÜGEL & SOHN
1886.

Zur

Feier des 500jährigen Jubiläums

der

Universität Heidelberg

seinem

väterlichen Freunde und Wohlthäter

Herrn

Apotheker Johann Wandesleben

dankbar gewidmet.

Inhalt.

Druckfehlerverzeichnis.

Seite 5 Formel (9) mufs $\pm$ stehen statt $+$.

„ 9 Zeile 9 v. u. mufs λ_t stehen statt λt.

„ 12 „ 14 v. o. mufs Θ_r stehen statt Θr.

„ 18 Mitte mufs $f_1{}^r\, f_2{}^r$ stehen statt $f_1 r\, f_2{}^s$.

„ 19 Zeile 6 und 8 v. o. mufs λ_s stehen statt λs.

„ 26 „ 12 v. o. mufs (45), (46), (47) stehen statt (49), (50), (51).

„ 27 „ 4 v. o. mufs (46) und (47) stehen statt (50) u. (51).

„ 38 „ 16 v. u. nach „Auch die" einzuschalten „andern".

„ 40 „ 8 v. o. $x_{ij}\, y_{ij}$ statt $x_{ij}\, x_{ij}$.

„ 41 „ 2 v. o. $h f'(x)$ statt $f'(x)$.

„ 44 „ 3 v. u. $\dfrac{k^2}{1\,.\,2}$ statt k^2.

„ 45 „ 3 v. o. ist beizufügen: $f_{12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, f_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

„ 46 „ 1 v. o. „den" statt „im", dann Komma nach π^2 und nach Determinante.

„ 51 „ 14 v. u. „näherer" statt unserer.

„ 52 „ 4 v. o. das dritte Glied mufs w^2 heifsen.

„ 56 „ 12 v. o. α_k statt a_k.

„ 56 „ 3 v. u. „Abstand" statt Anstand.

„ 60 „ 1 v. o. $\int\limits_{a\,h}^{k\,b}$ statt $\int\limits_{k\,b}^{a,\,h}$

„ 60 „ 3 v. o. $\pm$ statt $+$ unter $\int\limits_{a\,\pm\,h}^{b\,\pm\,k}$

„ 65 „ 3 v. o. nach führt „und" statt ist.

„ 74 „ 9 v. u. mufs das Vorzeichen „—" erhalten.

„ 77 „ 10 v. o. mufs „h'_n" stehen statt h'^n.

„ 80 „ 13 v. u. ist das Wort „veränderlich" zu streichen.

„ 79 u. 80 mufs in den Formeln (7) und (8) statt y überall ξ stehen.

„ 82 Zeile 19 „den" statt der.

Vorrede.

Es sind gegenwärtig gerade acht Jahre verflossen, seitdem ich in der Programmabhandlung »Neue Theorie des Imaginären in der Funktionenrechnung und der Analytischen Geometrie« * zum ersten Male mit einer eigenartigen Imaginärtheorie und mit dem Begriffe der allgemeinen abgeleiteten Funktion vor das gröſsere mathematische Publikum trat.

Die Imaginärtheorie liegt nun vollständig ausgebildet vor und wird in meinem Werke »Analytische Geometrie des Raumes« ** Aufnahme finden. Der Begriff der allgemeinen Ableitung in seiner Anwendung auf die sämtlichen Probleme der Differentialrechnung findet in gegenwärtiger Schrift eine so weit gehende Behandlung, als es in der kurzen Zeit, welche mir zu ihrer Redaktion zur Verfügung stand, möglich war.

Es möge mir gestattet sein, kurz auf einige Punkte die besondere Aufmerksamkeit des Lesers zu lenken. Der erste betrifft die neue Interpretation einer Gröſsengleichung $f(xy) = 0$ mittelst binomisch zweiwertiger Coordinaten. Soweit es sich um sogenannte complexe Variabele handelt, kann mir das Zeugnis, ein neues geometrisches Bild einer Gleichung zwischen x und y geschaffen zu haben, nicht vorenthalten werden, und es bleibt mir daher nur übrig die Priorität zu wahren bezüglich der Interpretation der ausschlieſslich reellen binomisch zweiwertigen Variabeln, da hievon in meiner oben citierten Schrift nirgends die Rede ist; denn damals schwebte mir nur der eine Gedanke vor, die Gauſs-Riemann'sche Darstellung complexer Elemente und Funktionen,

---

* München bei *Theodor Ackermann.*

** Ansbach bei *C. Brügel & Sohn.*

durch eine solche zu ersetzen, welche mit dem Cartesischen Anschauungsbilde des Funktionsverhältnisses zwischen y und x im Einklange steht. War ein in dieser Richtung befriedigendes geometrisches Substrat gefunden, so verstand sich eigentlich die Interpretation binomisch zweiwertiger reeller Variabeln von selbst. Daſs ich im weiteren Verlaufe die letztere nicht auſser Acht lieſs, dafür liefert einen Belag meine Schrift vom Jahre 1882 »Das Imaginäre in der analytischen Geometrie«.* Obgleich ich der Tendenz dieser Schrift gemäſs auch hier beinahe ausschlieſslich nur complexe Variabele im Auge haben konnte, so findet sich doch in der Vorrede sowohl als auch an manchen andern Orten zerstreut Bemerkungen, welche darauf hinweisen, daſs bei mir zu jener Zeit die Notwendigkeit der Herbeiziehung bivariabler reeller Elemente bei Schaffung eines nach allen Richtungen hin entsprechenden Anschauungsbildes des Verhältnisses zwischen Argument und Funktion vollständig fest stand. Die wichtigsten Belege hiefür sind der Satz auf Seite 8 der genannten Arbeit: »Dieser Übergang (nämlich zwischen den Anschauungsbildern, welche sich einerseits bei ausschlieſslicher Inbetrachtnahme reeller Variabeln, andererseits bei complexen Variabeln ergeben) ist nun durch obige Theorie von selbst gegeben, nach welcher die Veränderlichen x und y als Involutionen auf der x beziehungsweise y Achse aufzufassen sind, **einerlei ob reelle oder complexe Werte** derselben betrachtet werden u. s. w. In der Forderung, daſs x und y Involutionen vorstellen sollen, lag aber immerhin eine Beschränkung, die aufgehoben werden muſste. So entstand die Auffassung der Curvengleichung, wie ich sie im ersten Abschnitte dieser Schrift wiedergebe. Auf diesem Standpunkte angelangt bot die Behandlung sämtlicher Probleme mittelst bivariabler Coordinaten keine Schwierigkeiten mehr. Der vierte Abschnitt ist zum Zeugnis hiefür beigefügt worden. Eine gründlichere und umfassendere Durchführung dieser Anschauungsformen wird aber erst in meiner Analytischen Geometrie des Raumes geschehen.

Was den Begriff der allgemeinen Ableitung anbelangt, so habe

* Ansbach bei *C. Brügel & Sohn.*

ich nicht nötig, mir hier die Priorität zu wahren; denn eine ähnliche Begriffsbestimmung habe ich in der Litteratur vergeblich gesucht. Seine Eigenartigkeit erklärt sich eben dadurch, daſs geschichtliche Überlieferungen für ihn nicht existieren, die betreffende Problemstellung zusammen mit jener über die Bedeutung des Imaginären vielmehr ganz und gar einer freien Initiative entsprungen sind. Hiefür legt jedes Kapitel dieser Schrift Zeugnis ab. Welche Bedeutung dieser Begriff für die Wissenschaft hat, will ich nicht ermessen; eines aber steht fest, daſs die sogenannte Differentialrechnung von nun an zu den Elementen gehört, nachdem es gelungen ist, die trigonometrischen Funktionen algebraisch zu definieren ohne den Integralbegriff zu Hilfe zu nehmen, und die transcendentale Grundgleichung von Euler, durch welche die letztgenannten Funktionen mit der Exponentialfunktion verbunden werden, zu beweisen unter Ausschluſs der unendlichen Reihen. Denn nun kann der Differentialquotient für die algebraischen Funktionen sowohl wie für die mit diesen zusammenhängenden Transcendenten völlig exakt ohne Anstellung von Grenzbetrachtungen gewonnen werden. Es ist in dieser Beziehung insbesondere der Nachtrag auf Seite 93 ff. zu beachten.

Die Taylor'sche Reihe ist übrigens jetzt mittelst solch elementarer Grundprinzipien bewiesen, daſs dieselbe unbedenklich an die Spitze der Differentialrechnung gestellt werden kann.

Die Ableitung des Bogenelementes und die Bestimmung des Krümmungskreises einer Curve mit Hilfe des Begriffs der allgemeinen Ableitung, dann die ganze Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung sind ein Belag dafür, daſs für jedes geometrische Problem, in welchem Verhältnisse sogenannter unendlich kleiner Gröſsen auftreten, ein Problem existiert, dem nur endliche Gröſsen zur Grundlage dienen.

Die beiden letzten Abschnitte sind noch in letzter Stunde geschrieben worden, um zu zeigen, daſs die Cauchy-Riemann'schen Fundamentalsätze der Theorie der Funktionen einer complexen Veränderlichen für binomisch zweiwertige Variabele überhaupt bestehen und mit dem Imaginären, also insbesondere mit der Gaufs'schen geometrischen Repräsentation der complexen Gröſsen, gar nichts zu thun haben, dann aber auch um überhaupt den Eingang in diese moderne Lehre elementar zu gestalten und sie dem Anfänger zugänglicher zu machen. Diese beiden Abschnitte bilden denn auch nur die Einleitung zu einer gröfseren Arbeit über eine Funktionentheorie, von welcher die Riemann'sche nur ein spezieller Fall ist. Bis heute ist nur von Herrn Harnack * der Versuch gemacht worden, bei Begründung der Riemann'schen Funktionentheorie den Green'schen Satz über Doppelintegrale entbehrlich zu machen. Ich kann jedem Anfänger nur dringend empfehlen, diese Abhandlung und jene von Kirchhoff** zu lesen, bevor er sich an das Studium der Riemann'schen Dissertation und der verschiedenen über sie erschienenen Commentare macht.

Sollte mein Beweis für die Umkehrbarkeit einer Funktion in seinen Grundlagen nicht angefochten werden können, so wäre allerdings der von mir eingeschlagene Weg der Begründung der Funktionentheorie der denkbar einfachste und natürlichste, da er direkt zu einem eleganten Beweis für die Darstellbarkeit der eindeutigen durch die Differentialgleichung $\triangle w = 0$ definierten complexen Funktionen mittelst Potenzreihen führt.

Ansbach, 15. Juli 1886.

W. Fr. Schüler.

---

* Mathematische Annalen Bd. XXI pag. 306 ff.

** Poggendorff Annalen Bd. 64 pag. 497.

I. Begriff der allgemeinen Ableitung einer Funktion und der Derivation des Lagrange.

1.

Vorbemerkung. Es sei

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eine beliebige Funktion des Argumentes x. Das Symbol $f(x)$ bedeutet eine Gröfse, deren Eigenschaften man zwar kennt, deren Wert aber für einen bestimmten Argumentwert erst dann angegeben werden kann, wenn eine Vorschrift existiert, nach welcher der Funktionswert zu berechnen ist. Dabei mufs diese Vorschrift von solch allgemeinem Charakter sein, dafs sie unabhängig von dem speziellen Werte des Argumentes x brauchbar ist. *

Sind y_0 und y_1 zwei zu den Argumentwerten x_0 und x_1 gehörige Werte der Funktion, so soll vorausgesetzt werden, dafs die Differenz der Funktionswerte $y_1 - y_0 = 2\,k$ beliebig klein gemacht werden kann dadurch, dafs man, von besonderen Fällen abgesehen, die Differenz der zugehörigen Argumentwerte $x_1 - x_0 = 2\,h$ beliebig klein macht.

Bezeichnet man das arithmetische Mittel der beiden Argumentwerte mit x und jenes der zugehörigen Funktionswerte mit y, so ist

$$x_0 = x - h \qquad x_1 = x + h$$
$$y_0 = y - k \qquad y_1 = y + k.$$

Da diese Werte der Gleichung (1) genügen, so ist

$$y + k = f(x + h) \qquad y - k = f(x - h) \quad . \quad . \quad (2)$$

Es mufs hier besonders hervorgehoben werden, dafs für endliche Werte von h und k die Gröfsen x und y von einander unabhängig sind,

---

* Wir werden in einem späteren Abschnitt nachweisen, dafs mit der über $f(x)$ getroffenen Festsetzung der Funktionsbegriff von *Lejeune-Dirichlet* nicht in Widerspruch steht.

ja auch dann ist dies noch der Fall, wenn h und k unbeschränkt klein angenommen werden. Nur für $h = k = 0$ stehen x und y in dem durch die (1) definierten direkten Abhängigkeitsverhältnis.

2.

Die geometrische Darstellung einer Funktion nach Cartesius und Barrow. Nach Cartesischer Auffassung ist das geometrische Gegenstück der Funktionsgleichung (1) eine Curve und die bekannte Barrow'sche Figur kann also das so eben Gesagte veranschaulichen. Der Punkt xy ist der Mittelpunkt der Sehne, welche durch die beiden Punkte $(x_0\, y_0)$ und $(x_1\, y_1)$ der Curve begrenzt ist. Betrachtet man x als constant und läfst die Differenz $x_1 - x_0 = 2\,h$ immer kleiner und kleiner werden, so rückt der Punkt xy auf der zu dem constanten x gehörigen Ordinate immer näher an die Curve und schliefslich auf die Curve, wenn $h = 0$ geworden ist. Dann ist aber auch $k = 0$.

Die Genauigkeit, mit welcher die einzelnen Punkte der Curve, die den Funktionsverlauf veranschaulicht, verzeichnet werden können, hängt in erster Reihe ab von der Beschaffenheit der Funktion und von der Genauigkeit, mit welcher in jedem einzelnen Falle die für sie giltige Rechnungsvorschrift vollzogen worden ist, dann aber auch von der Gröfsengattung, welcher die Wertreihe des Argumentes x angehört, also insbesondere davon, ob man ausschliesslich rationale Werte des Argumentes der Rechnung zugrunde legt, oder ob man auch irrationale Werte des Argumentes zuläfst.

Bei Zugrundelegung von nur rationalen Werten des Argumentes liefert die Rechnungsvorschrift den Funktionswert y so genau als man nur will; denn wenn derselbe auch nicht immer mit absoluter Genauigkeit bestimmt werden kann, wie im Falle algebraisch rationaler Funktionen, so kann er doch zwischen zwei Zahlen y' und y'' eingeschlossen werden, welche nach der zur Ermittelung des Wertes von y gegebenen Vorschrift zu bemessen sind. Um z. B. den Wert der Funktion $y = \sqrt{x}$ für $x = 2$ zu ermitteln, betrachte man $\sqrt{2}$ als Diagonale eines Quadrates von der Seite 1. Der n^{te} Teil dieser Seite sei jener aliquote Teil des Maasses, welcher bei der Messung der Diagonale noch in Betracht gezogen wird; dann wird sein

$$y' = \frac{m}{n} + \varepsilon \qquad y'' = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} - \varepsilon' \qquad \varepsilon + \varepsilon' = \frac{1}{n}$$

wenn m eine positive ganze Zahl ist und ε die Länge bezeichnet, welche bei der ersten Messung durch $\frac{1}{n}$ als Rest bleibt. Man wird also setzen dürfen $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{2n}$ bei sehr großem n, und

$$y' = \frac{m}{n} + \frac{1}{2n} \qquad y'' = \frac{m+1}{n} - \frac{1}{2n}$$

so daſs die Ungleichung besteht

$$y'' > \sqrt{2} > y'.$$

Die Vorschrift, nach welcher hier $\sqrt{2}$ bestimmt wurde, ist eine geometrische. Die Ausführung der rechnerischen Vorschrift besteht in dem Ausziehen der Quadratwurzel aus 2 bis zu einem solchen Grade von Genauigkeit, der durch eine obere und untere Grenze, welche beliebig zusammengezogen werden können, angegeben wird; sie führt also ganz zu demselben Resultate.

Die Endpunkte der den Funktionswerten y entsprechenden Ordinaten liegen allemal zwischen den rationalen Grenzwerten y'' und y', in welche die Funktionswerte gemäſs der Vorschrift eingeschlossen worden sind, und wenn nur die Differenz $y'' - y'$ klein genug gewählt worden ist, so kann für y jeder der Werte $y' + \vartheta\,(y'' - y')$, wo ϑ einen positiven ächten Bruch bedeutet, genommen werden. Der Fehler, der hiebei gemacht wird, läſst sich durch Zusammenziehung der Grenzen y' und y'' so klein machen, als man nur will.

Durch Häufung der Argumentwerte innerhalb eines Intervalles läſst sich die Zahl der zwischen zwei Grenzen y' und y'' liegenden Funktionswerte beliebig vermehren. Allein wie weit man auch die Einschaltung rationaler Argumentwerte innerhalb eines Intervalles treiben mag, es werden die Endpunkte der Ordinaten doch niemals einen Curvenzug bilden, sondern das, was man eine diskrete Punktmenge nennt. Erst durch Herbeiziehung der irrationalen Zahlen zu den bisher gebrauchten Argumentwerten bilden die Endpunkte der Ordinaten einen Curvenzug oder eine lineare Mannigfaltigkeit. Die durch die Gleichung $y = f\,(x)$ veranschaulichte Curve verläuft dann zunächst unbestimmt zwischen den punktierten Curven, deren Punkte mittelst der rationalen Werte y' und y'' construiert worden sind. Ihr Verlauf wird aber ganz bestimmt, wenn man vorschreibt, daſs bei sämtlichen Funktionswerten $y' + \vartheta\,(y'' - y')$, die den verschiedenen innerhalb eines Intervalles gelegenen Argumentwerten zugehören, ϑ immer denselben positiven ächten Bruch bedeuten soll, und daſs für die Einschaltung irrationaler Argumentwerte ebenfalls bestimmte Vorschriften gemacht werden.

3.

Andere geometrische Darstellung des Zusammenhangs einer Funktion mit ihrem Argumente. Angenommen die Curve $y = f(x)$ liege gezeichnet vor. Der Punkt xy, welcher in den Gleichungen (2) auftritt, liegt dann, wie schon oben erwähnt wurde, nicht auf der Curve, sondern auf der einen oder andern Seite derselben in ihrer Ebene. Er bestimmt zusammen mit h und k, wenn diese Gröfsen den Gleichungen (2) gemäfs gewählt werden, eine Sehne der Curve, welche in ihm halbiert wird. Die Richtung der Sehne, d. i. der Winkel α, den dieselbe mit der x Achse macht, ist bestimmt durch das Verhältnis

$$\frac{k}{h} = \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

welches in der Folge immer mit λ bezeichnet werden soll. Die halbe Länge der Sehne, welche den Namen Potenz des Punktes xy führt, ist gegeben durch den Ausdruck

$$p = \sqrt{h^2 + k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Als Coordinaten der Sehne* betrachten wir die binomisch zweiwertigen Ausdrücke

$$x \pm h \qquad\qquad y \pm k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

durch welche ihre beiden Endpunkte bestimmt sind.

Um die einzelnen Sehnen einer Curve zu construieren, kann man auf zwei wesentlich von einander verschiedene Arten verfahren. Die erste Art entspricht vollkommen der oben beschriebenen Methode des Cartesius, das Abhängigkeitsverhältnis einer Funktion zu ihrem Argumentwert durch die Coordinaten der Punkte einer Curve darzustellen. Nach ihr hat man auf der x Achse eine Sehne $x \pm h$, also ein Segment von der Länge $2h$ und dem Mittelpunktsabstand x vom Ursprunge anzunehmen und ebenso auf der y Achse das Segment $y \pm k$ von der Länge $2k$ und dem Mittelpunktsabstand y. Es geschieht dies, indem man auf der x Achse den Punkt mit der Abscisse x bestimmt und von ihm aus nach beiden Seiten h abträgt. Das Verfahren auf der y Achse ist diesem analog. Diese beiden Segmente sind zu betrachten als Projectionen eines Segmentes in der Ebene, woraus die Construction desselben sich einfach ergibt. Nimmt man also in der Gleichung $y \pm k = f(x \pm h)$ das Segment $x \pm h$ auf der x Achse als erste Projection einer Sehne in der Ebene willkürlich an, so liefert die Ausführung der durch das Funktionszeichen f vorgeschriebenen Operationen an dem Argumente

* Siehe meine „Analytische Geometrie des Raumes etc. etc." Ansbach, Brügel & Sohn. I. Bdes 2. Hälfte.

$x \pm h$ die zweite Projection $y \pm k$ dieser Sehne und damit diese selbst. — Um zu sämtlichen Argumenten $x \pm h$ die zugehörigen Funktionswerte auf diese Art zu construieren, verfährt man etwa so, daſs man zunächst x in $x \pm h$ constant annimmt und h die ganze Wertreihe des Zahlencontinuums durchlaufen läſst. So erhält man alle Segmente, deren Mittelpunkte auf der zu der Abscisse x_1 gehörigen Ordinate liegen. Hierauf verfährt man ebenso mit $x_2 \pm h$, wo x_2 ein neuer constanter Wert von x ist, während h wieder als willkürlich variabeln betrachtet wird u. s. f.

Die Ordinate des Mittelpunktes einer Sehne wird aus den Formeln (2) durch Addition erhalten; mittelst Subtraktion findet sich der zweiwertige Bestandteil k der Sehnenordinate seinem absoluten Werte nach. Es ist

$$2y = f(x+h) + f(x-h); \quad 2k = f(x+h) - f(x-h) \quad (6)$$

Daher hat man für die Richtung einer Sehne der Curve $y = f(x)$ die Formel:

$$\lambda = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Die Ermittelung des Quotienten auf der rechten Seite geschieht mittelst der für die Ausmittelung der Funktionswerte $f(x+h)$ und $f(x-h)$ gegebenen Vorschrift. Setzt man

$$f(x+h) + f(x-h) = 2\varphi(xh)$$
$$f(x+h) - f(x-h) = 2\psi(xh)$$

so kann man auch schreiben:

$$\lambda = \frac{\psi(xh)}{h} \quad \ldots$$ [illegible] $$= h\sqrt{1 + \left(\frac{\psi(xh)}{h}\right)^2} \quad \ldots \quad (8)$$

und

$$f(x \pm h) = \varphi(xh) \pm \psi(xh) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Wenn also die Funktion $f(x)$ für ein binomisch zweiwertiges Argument in zwei Teile, wie vorstehende Formel veranschaulicht, sich spalten läſst, dann kann man die Coordinate der zweiten Projection der Sehne, deren erste Projection $x \pm h$ gegeben ist, aus den Formeln

$$y = \varphi(xh) \qquad k = \psi(xh) \quad \ldots \quad (10)$$

berechnen, und sie den erhaltenen Rechnungswerten gemäſs construieren.

Da jetzt zu den zwei Bestimmungsstücken einer Sehne: Länge und Richtung, noch das dritte, die Lage, bestimmt durch die Coordinaten ihres Mittelpunktes, hinzutritt, so ist klar, daſs das Argument $x_2 \pm h_2$, dessen zugehöriger Funktionswert $y_2 \pm k_2$ sein möge, niemals dieselbe Sehne liefern kann, wie das Argument $x_1 \pm h_1$, für welches der Funktionswert ebenfalls $y_2 \pm k_2$ sein soll, so lange x_1 und x_2 von einander verschieden sind; denn gleiche und gleichgerichtete Sehnen haben gleiche Projectionen. Es müsste also $x_1 \pm h_1 = x_2 + h_2$ sein. Dies kann aber nur stattfinden für $x_1 = x_2$ und $h_1 = h_2$, d. h. die Sehnen müssen auch gleiche Lage haben.

4.

Erläuterung des Vorstehenden an einem Beispiele. Um das oben Gesagte an einem Beispiele zu erläutern, sei

$$y = \sqrt{x}$$

die vorgelegte Funktion. Die Rechnungsvorschrift besteht hier in der Operation des Quadratwurzelausziehens, wie diese in den Elementen gezeigt wird. Sei h zunächst eine rationale Zahl, dann ist:

$$y \pm k = \sqrt{x \pm h} = \sqrt{x} \pm \frac{h}{2\sqrt{x}} - \frac{h^2}{8\,x\sqrt{x}} \pm \frac{h^3}{32\,x^2\sqrt{x}} \;\cdots\cdot$$

also

$$y = \sqrt{x} - \frac{h^2}{8\,x\sqrt{x}} + \cdots\cdot \qquad k = \frac{h}{2\sqrt{x}} + \frac{h^3}{32\,x^2\sqrt{x}} + \cdots\cdot$$

Ist also $\sqrt{x}$ bestimmt, so kann man hiernach y und k mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnen für $\frac{h}{2} : x > 1$, da dann die beiden Reihen convergieren. Die Richtung einer Sehne ist gegeben durch

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{h^2}{32\,x^2\sqrt{x}} + \cdots\cdot\cdot$$

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daſs die Formel (7), wenn an ihr die vorgeschriebenen Rechnungsoperationen zur Ermittelung von $f(x+h)$ und $f(x-h)$ nicht vorgenommen worden sind, für $h = 0$ die nichtssagende Form $\frac{0}{0}$ annimmt, während in unserem Beispiel $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ wird für $h = 0$, wenn man den ausgerechneten Wert von k benützt, wogegen die symbolische Form

$$\lambda = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x-h}}{2\,h}$$

ebenfalls $\frac{0}{0}$ liefert für $h = 0$.

Um die Spaltung der Funktion zu zeigen, möge h irrational angenommen werden. Nach einer bekannten Formel ist dann

$$\sqrt{x \pm \sqrt{h}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - h}}{2}} \pm \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - h}}{2}}$$

und man erkennt, daſs jetzt ist:

$$y = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - h}}{2}} \qquad k = \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - h}}{2}}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - h}}{2}}}{\sqrt{h}}$$

Man sieht, daſs für $h = 0$ auch hier $\lambda = \frac{0}{0}$ wird. Es genügt demnach nicht, daſs die Funktion sich spalten lasse, um den speziellen Wert von λ zu ermitteln, welcher $h = 0$ entspricht, vielmehr muſs zuerst die Operation $\sqrt{x^2 - h}$ ausgeführt werden, gerade so wie vorhin. Thut man dies, so kommt

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{h}{4x} + \frac{h^2}{8x^3} + \ldots}}{\sqrt{h}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{h^{\frac{1}{2}}}{2x^3} + \ldots}$$

Für $h = 0$ kommt, wie vorhin, $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5.

Erweiterung und einheitliche Zusammenfassung der vorigen Interpretation einer Curvengleichung für binomisch zweiwertige Argumente. Während bei der gewöhnlichen geometrischen Darstellung des Funktionsverlaufs das Argument durch eine vom Coordinatenanfang aus auf der xAchse abzutragenden Strecke repräsentiert wird, stellt bei der so eben entwickelten neueren Construction der Funktionsgleichung jede beliebige auf der xAchse angenommene Strecke einen Argumentwert dar. Dabei ist die Lage der Strecke ein wesentlich neues Moment, so daſs Argumentstrecken von gleicher Länge aber ungleicher Lage immer verschiedene Funktionswerte liefern. Die letzteren sind Strecken auf der yAchse, welche entsprechend den Änderungen des Argumentes auf derselben hin und hergeschoben werden, während sie sich gleichzeitig vergröſsern oder verkleinern. Die den verschiedenen Argumentwerten entsprechenden Funktionswerte unterscheiden sich also nicht bloſs der Gröſse sondern auch der Lage nach. Das Verhältnis, in welchem der Funktionswert zum Argumentwert steht, wird veranschaulicht durch das Segment, dessen erste und zweite orthogonale Projectionen sie sind, gerade so wie bei der älteren Darstellung jenes Verhältnis durch den Curvenpunkt fixiert wird, dessen erste und zweite Projection zusammen mit dem Coordinatenanfang Argument und Funktionswert bestimmen. Hiebei ist es von untergeordnetem Interesse, daſs die Endpunkte des Segmentes auf einer Curve liegen; es könnte dies auch nicht der Fall sein, was im Falle imaginärer Sehnen thatsächlich zutrifft. Für ein complexes Argument $x \pm ih$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, hat man nämlich

$$y \pm ik = f(x \pm ih) = \varphi_1(xh) + i\psi_1(xh) \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

wenn man den reellen Teil von dem imaginären trennt. Die Funktionen φ_1 und ψ_1 sind jedoch nicht identisch mit den Funktionen φ und ψ wegen $i^2 = -1$. Es wird aber $\varphi_1 \pm i\psi_1$ aus $\varphi + \psi$ erhalten dadurch, daſs hi statt h gesetzt wird. Es können sich daher φ_1 und φ beziehungsweise ψ_1 und ψ nur durch die Vorzeichen gewisser Glieder unterscheiden. Man hat also jetzt:

$$\begin{array}{ll} y = \varphi_1(xh) & ik = i\psi_1(xh) \\ \lambda = \dfrac{ki}{hi} = \dfrac{\psi_1(xh)}{h} & \wp = ih\sqrt{1 + \left(\dfrac{\psi_1(xh)}{h}\right)^2} \end{array} \qquad (12)$$

Das Argument $x + ih$ stellt eine Strecke auf der x Achse dar mit der Mittelpunktsabscisse x und der Länge $2\,hi$. Sämtliche Punkte dieser Strecke mit Ausnahme des Mittelpunktes, der reell ist, sind imaginär. Man hat deshalb die von letzterem aus abgetragenen Strecken $+h$ und $-h$ mit dem Zeichen i zu behaften, um dadurch das Segment mit der Coordinate $x \pm hi$ von jenem mit der Coordinate $x \pm h$ zu unterscheiden. Beide Segmente haben dieselbe absolute Länge; während aber die Endpunkte der reellen Segmente auf der Curve $y = f(x)$ liegen, ist dies bei den Endpunkten der imaginären Segmente nicht der Fall. Denn angenommen das Segment mit den Coordinaten $x \pm hi$, $y \pm ki$ werde von zwei Punkten der Curve $y = f(x)$ begrenzt, dann müſste es notwendig mit dem Segmente $x \pm h$, $y \pm k$, das mit ihm Lage, Richtung und absolute Länge gemein hat, zusammenfallen. Dies trifft aber nur zu für $h = 0$ also für die Segmente von der Länge Null, d. i. für die Punkte der Curve $y = f(x)$. Denn für diese ist sicher:

$$\frac{\psi(xh)}{h} = \frac{\psi_1(xh)}{h}$$

Das Reelle und Imaginäre, wie es hier auftritt, läſst sich unter einem einheitlichen Gesichtspunkte behandeln, wenn gleich von vornherein statt des rationalen h das irrationale, wie es in der Algebra sich zuerst ergibt, nämlich in Form einer Quadratwurzel, eingeführt wird, wie dies in obigem Beispiel geschah. Läſst man dann in dem Argument $x \pm \sqrt{h}$

das x constant, während h das Zahlencontinuum von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so ergeben sich alle reellen und imaginären Segmente, deren Coordinaten von der angegebenen Beschaffenheit der vorgelegten Funktionsgleichung genügen. Es wird dann auch deutlich, warum durch Übergang in das Imaginäre die Funktionen φ und ψ in φ_1 und ψ_1 übergehen. Man hat nämlich jetzt statt der (10) $\varphi\left(x, \sqrt{h}\right)$ und $\psi\left(x, \sqrt{h}\right)$, und wenn h negativ wird, so sind diese Funktionen eben nichts anderes als die Funktionen φ_1 und ψ_1. Der Übergang des h vom Positiven zum Negativen geschieht durch Null; für den Null-Fall von h geht aber φ in f über und ψ verschwindet. Betrachtet man also in $x \pm \sqrt{h}$ das x als constant, während h von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, so beschreibt der Mittelpunkt der Sehnen die Ordinate, welche zur Abscisse x gehört. Beim Überschreiten der Curve $y = f(x)$ werden die Sehnen imaginär oder umgekehrt, je nachdem sie vorher reell oder imaginär waren. Gehen wir einen Augenblick zurück zur Barrow'schen Figur, so hat dieselbe jetzt die Bedeutung, dafs in Folge der Aufwärtsbewegung des Punktes xy die zugehörige Sehne sich stets dreht (wir nehmen an, dafs $\pm\sqrt{h}$ von den vorher fixierten Werten x_1 und x_0 ausgehe und nach x hin abnehme) und in die durch $\lambda = \frac{\psi(x \sqrt{h})}{\sqrt{h}}$ gegebene Richtung sich einstellt. Beim Überschreiten der Curve geht sie über in die Tangente derselben im Schnittpunkte der Ordinate mit ihr, um nachher, wenn $y > f(x)$ geworden ist, als imaginäre Strecke auf den Plan zu treten. Es kann demnach der Wert, den λ auf der Curve hat, immer in zwei Grenzen eingeschlossen werden, auch wenn für die Funktion f eine Rechnungsvorschrift noch nicht bekannt ist. Bezeichnet man diesen Wert mit λ^t, so hat man nämlich immer eine oder die andere der Ungleichungen:

$$\frac{\psi\left(x, \sqrt{h}\right)}{\sqrt{h}} \gtrless \lambda^t \gtrless \frac{\psi\left(x, \sqrt{-h}\right)}{\sqrt{-h}} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die allerdings nur eine symbolische Bedeutung haben, da φ und ψ nur Funktionszeichen sind. Berechnen kann man λ^t allgemein erst dann, wenn die Rechnungsoperationen bekannt sind, nach welchen die Funktionswerte ψ bestimmt werden müssen. So ist z. B. in dem obigen Beispiel

$$\sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - h}}{2}} : \sqrt{h} > \lambda^t > \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 + h}}{2}} : \sqrt{-h}$$

was zur Illustration dienen mag. Für $x = 1$ $h = 0{,}0009$ lautet die Ungleichung

$$\sqrt{\frac{3}{2}} > \lambda_t > \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Es läfst sich demnach für jeden einzelnen Curvenpunkt der spezielle Wert von λ_t mit Hilfe der Ungleichung (13) so genau bestimmen als man nur will.

Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, dafs auch bei der gewöhnlichen Bestimmungsweise von λ_t für einen Punkt der Curve, diese Funktion in zwei Grenzen eingeschlossen werden kann. Bekanntlich besteht diese Bestimmungsweise darin, dafs man die Sehne in der Barrow'schen Figur sich um den einen ihrer Endpunkte drehen läfst bis sie die Richtung der Tangente in diesem Punkte annimmt. Arithmetisch heifst dies den Wert von

$$\frac{f(x + 2\sqrt{h}) - f(x)}{2\sqrt{h}}$$

suchen für $h = o$. Man bemerke, dafs bei dieser Drehung h im Positiven abnimmt und bei x in das negative Wertgebiet eintritt. Das Vorzeichen von $+\sqrt{h}$ ändert sich aber dadurch nicht; dagegen sind sämtliche Wurzelwerte imaginär geworden und demgemäfs auf der Abscissenachse von x aus im positiven Sinne aufzutragen und mit i zu kennzeichnen. Die Sekante, welche nun imaginär geworden ist, liegt auf der andern Seite der Tangente und ihre Richtung ist bestimmt durch

$$\frac{f(x_0 + 2\sqrt{-h}) - f(x_0)}{2\sqrt{-h}}$$

Da man ebensowohl die Sekante von der negativen Seite her sich hätte drehen lassen können, so geben vorstehende zwei Quotienten auch dann den Differentialquotienten, wenn man das andere Vorzeichen der Quadratwurzel nimmt. Es ist demnach immer

$$\frac{f(x_0 + 2\sqrt{-h}) - f(x_0)}{2\sqrt{-h}} > \lambda_t > \frac{f(x_0 + 2\sqrt{h}) - f(x_0)}{2\sqrt{h}}$$

Dafs dies Verfahren aber weit umständlicher ist als das von uns angegebene neue Verfahren der Einschliefsung des Differentialquotienten in zwei Grenzen, lehrt schon das mehrfach vorgeführte einfache Beispiel.

6.

Neues geometrisches Bild einer Gleichung zwischen y und x. Es wird sich weiter unten Gelegenheit geben auf die oben auseinandergesetzte erste Art der Interpretation einer Funktionsgleichung mittelst zweiteiliger zweiwertiger Argumente zurückzukommen. Deshalb verlassen wir hier den Gegenstand, um zu der zweiten Art der Interpretation einer Funktionsgleichung überzugehen. Dieselbe besteht darin, dafs man den Punkt xy, dessen Coordinaten die ersten Teile der binomisch zweiwertigen Coordinaten $x \pm h$, $y \pm k$ sind, construiert, dann von ihm aus parallel den Coordinatenachsen nach beiden Seiten die Stücke $\pm h$ und $\pm k$ abträgt und die Sehne construiert. Hiebei denkt man sich immer noch das Argument $x \pm h$ als willkürlich gewählt und den Funktionswert $y \pm k$ aus der Funktionsgleichung bestimmt. Man kann aber diese Anlehnung an die gewohnte Vorstellung der Construction einer Curvengleichung ganz aufgeben und den Punkt xy in der Ebene ganz beliebig annehmen und zu ihm aus den (10) h und k berechnen, sowie λ und p. Zieht man dann durch den Punkt xy eine durch die Funktion λ bestimmte Richtungsgerade und trägt auf ihr nach beiden Seiten die Potenz p ab, so ist das Segment, dessen Coordinaten $x \pm h$, $y \pm k$ in den ersten Teilen von einander unabhängig, und deren zweite Teile Funktionen der ersten sind, vollständig bestimmt. Man erkennt, dafs bei dieser Construction der letzte Rest der Curvenvorstellung, welche sich bei den vorigen Constructionsweisen dann und wann noch eingestellt hat, vollständig verschwunden ist. Wir ersetzen also jetzt die Cartes'sche Auffassung einer Gleichung $y = f(x)$ durch folgende allgemeinere:

> Eine jede Gleichung zwischen x und y stellt die Verteilung der reellen oder imaginären Segmente in der xyEbene dar, deren Coordinaten der Gleichung genügen. Die Cartes'sche Curve ist der Ort der Nullsegmente.

7.

Aufstellung der Gleichung zur Bestimmung von λ und λ_t. Es sei also jetzt xy ein fester Punkt der Ebene der Curve (1); dann hat man, um die Anzahl und die Richtungen der durch ihn gehenden Sehnen zu bestimmen, aus den drei Gleichungen

$$y = \varphi(x, h) \qquad k = \psi(x, h) \qquad \lambda = \frac{k}{h} \quad . \quad (14)$$

h und k zu eliminieren. Es sei

$$\Omega(x, y, \lambda) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

das Eliminationsresultat und

$$\lambda = \Theta_r(xy) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

eine reelle Wurzel dieser Gleichung und zwar jene, welche die in der Barrow'schen Figur gezeichnete Sehne der Richtung nach bestimmt. Daſs diese reelle Wurzel existiert für alle Punkte, deren Coordinaten x und y gleich sind dem arithmetischen Mittel irgend zweier reeller Argumente und der zugehörigen Funktionswerte ist klar. Geometrisch gesprochen sind dies die Mittelpunkte aller jener zweifach unendlich vielen Sehnen, die durch die Verbindung eines jeden Curvenpunktes mit jedem andern Curvenpunkte erhalten werden.

Der reellen Wurzel (16), welche eine dieser Sehnen darstellt, entspricht daher notwendig eine reelle Wurzel h der ersten der Gleichungen (14); durch Substitution dieses Wertes von h in die zweite jener Gleichungen oder in die dritte ergibt sich dann ein reeller Wert von k. Verfährt man also umgekehrt, so wird ersichtlich, daſs die Funktion $\Theta^r(xy)$ notwendig eine gebrochene Funktion sein muſs, und also im Allgemeinen von der Form sein wird.

$$\lambda = F(xy) \cdot \frac{\Omega(xy)}{\Omega_1(xy)} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

wo $F(xy)$ auch der Einheit gleich sein kann; es ist also hier

$$h = \Omega_1(xy) \qquad k = F(xy) \cdot \Omega(xy) \quad \ldots \quad (18)$$

angenommen.

Da die Funktionen h und k für $y = f(x)$ identisch verschwinden, so nimmt die reelle Wurzel (17) in diesem Falle die Form $\frac{0}{0}$ an. Es müssen also die Funktionen Ω und Ω_1 den Faktor $y - f(x)$ oder $\frac{y}{f(x)} - 1$ gemeinsam haben, nach dessen Ausscheidung der Quotient

$$\Omega(xy) : \Omega_1(xy) \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

entwickelt werden kann.

8.

Nähere Bestimmung von λ und λ_t. Hiebei sind nun ganz besonders zwei Fälle zu unterscheiden. Der erste ist der, daſs in den Funktionen Ω und Ω_1 die Variabeln x und y in keiner andern Verbindung als in der des Quotienten $y : f(x)$ auftreten, der zweite, daſs neben dieser Verbindung x und y auch noch in anderer Weise vorkommen. Im ersten Fall ist klar, daſs der Quotient (19) für alle Punkte der Curve $y = f(x)$ denselben Wert hat, wenn er überhaupt existiert, so daſs man nur notwendig hat seinen Wert c für einen einzigen Curvenpunkt zu ermitteln, was auf empirischem Wege immer geschehen kann. Denn der Wert der Funktion

$$\lambda_t = c \,.\, F(xy) = c \,.\, F(x, f(x)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

in welchen die Funktion (17) übergeht, stellt die Richtung der Tangente in einem Curvenpunkt dar. Hat man also die Richtung der Tangente $tg\,\alpha = \lambda_t^0$ in dem Curvenpunkte $x = x_0$, $y = y_0$ ermittelt, so findet sich $c = \lambda_t^0 : F(x_0\, y_0)$, so dafs man jetst hat:

$$\lambda_t = \frac{\lambda_t^0}{F(x_0\, y_0)} \,.\, F(x\,y).$$

Im zweiten Falle hat der Quotient (19) für jeden Curvenpunkt einen andern Wert und es ist deshalb seine Reduction erforderlich. Ist dies nicht möglich, so kann man doch immer in solchen Fällen seinen Wert approximativ berechnen.

Bei einer grofsen Klasse von Funktionen sind die Funktionen Ω und Ω_1 einander gleich oder die Gleichung (15) zerfällt in zwei Faktoren, wovon der eine in λ linear ist und durch Gleichsetzung mit Null die Funktion λ_t liefert.

Die Funktion λ_t ist identisch mit der abgeleiteten Funktion oder Derivation von $f(x)$, wie sie von Lagrange eingeführt worden ist. Letzterer postuliert aber dabei die Entwickelbarkeit der Funktion $f(x)$ in eine Reihe, während nach der obigen Methode lediglich vorausgesetzt wird, dafs die Funktion für binomisch zweiwertige Argumente in einen einwertigen und einen zweiwertigen Bestandteil zerfällt, wie die Formel (9) zeigt. Aber nicht in diesen verschiedenen Voraussetzungen liegt der wesentliche Unterschied der Lagrange'schen Ableitungsart von der unsrigen, sondern in der allgemeineren Begriffsbestimmung der abgeleiteten Funktion. Es ist in den meisten Fällen gar nicht nötig die Lagrange'sche Derivation besonders zu ermitteln, um jene Probleme zu lösen, die mit ihrer Hilfe gewöhnlich in Angriff genommen werden. Es genügt die Funktion (17) zu diesem Zwecke zu kennen. Die Lagrange'sche Funktion ist eben nur ein **spezieller Fall** unserer Funktion λ.

Da die Funktion λ_t eine Wurzel der Gleichung (15) ist, wenn man in ihr $y = f(x)$ setzt, so nennen wir die Wurzeln der Gleichung (15), auch wenn in ihr die Substitution $y = f(x)$ nicht gemacht worden ist, ebenfalls abgeleitete Funktionen oder allgemeine Derivationen. Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung (15) gibt die Anzahl der Sehnen an, die durch einen Punkt xy der Ebene gelegt werden können. Da die Länge der Sehne bestimmt ist durch $p^2 = h^2 + k^2 = h^2 \left(1 + \left(\frac{k}{h}\right)^2\right)$ $= h^2 (1 + \lambda^2)$, so geben die Gleichungen

$$h = \Omega_1 (x y) = 0 \qquad 1 + \lambda^2 = 1 + \left[F(xy) \cdot \frac{\Omega (x y)}{\Omega_1 (x y)} \right]^2 = 0$$

den Ort der Nullsehnen an. Diese beiden Gleichungen werden aber befriedigt, wenn $y = f(x)$ gesetzt wird. Die Gleichung (15) hat aber aufser der so eben benutzten Wurzel (15) noch andere Wurzeln, welche für $y = f(x)$ nicht in den Lagrange'schen Differentialcoëfficienten übergehen. Der Ort der Nullsehnen, oder was gleichbedeutend damit ist, die Curve $y = f(x)$ ist also zugleich der Träger einer endlichen Anzahl von Sehnen, deren Längen nur in speziellen Punkten Null werden können, nämlich in den singulären Punkten der Curve.

Es ist oben gezeigt worden, dafs auf empirischem Wege der Lagrange'sche Differentialcoëfficient approximativ immer für jeden einzelnen Curvenpunkt berechnet werden kann, wenn die dort besonders hervorgehobene allgemeine Derivation gegeben ist. Diese Bestimmungsweise leistet für die Anwendung dieselben Dienste wie die exacte Lagrange'sche Derivation. Denn angenommen man habe mit Hilfe der letzteren den Neigungswinkel der Tangente in einem Curvenpunkte bestimmt und dieselbe soll nun verzeichnet werden, so kann dies mit keinem gröfseren Grade von Genauigkeit geschehen als umgekehrt jener ist, mit welchem der Winkel bestimmt werden kann, den eine beliebig gezogene Tangente mit der x Achse bildet, vorausgesetzt natürlich, dafs man ein Verfahren bereits kennt für die Tangentenconstruktion, was ja bei vielen Curven in der That der Fall ist. Allein wenn dem nicht so wäre, so könnte man doch die Bestimmung der Constanten c durch Construktion mit einem grofsen Grade von Genauigkeit ermitteln. Man wählt nämlich den Winkel α ganz beliebig und zieht eine Sehne AB von der durch λ vorgeschriebenen Richtung. Hierauf zieht man eine Schaar paralleler Sehnen und sucht den Ort ihrer Mittelpunkte. Da wo dieser die Curve $y = f(x)$ schneidet, ist der Ort des Punktes, dessen Coordinaten x_0, y_0 zusammen mit $tg\, \alpha = \lambda_t$ in die Gleichung $\lambda_t = c\, F(xy)$ einzusetzen sind, um daraus c zu bestimmen.

9.

Einschliessen der Lagrange'schen Derivation in zwei Grenzen. Es soll aber nun weiter gezeigt werden, dafs der Wert der Constanten c immer zwischen zwei Grenzen eingeschlossen werden kann, durch deren Zusammenziehung der Genauigkeitsgrad dieser Wertbestimmung beliebig vergröfsert und auf dieselbe Höhe gebracht werden kann, welche durch die Genauigkeit, mit der die Funktionswerte selbst bestimmt worden sind, angezeigt ist.

Überschreitet nämlich der Punkt xy die Curve $y = f(x)$, so wird die zu (17) gehörige Sehne imaginär, worauf schon Seite 8 und 9 hingewiesen wurde. Die Funktionen Ω und Ω_1 werden daher ebenfalls imaginär. Man kann aber an ihrer Stelle reelle Funktionen herstellen, wenn man in die Gleichung $y = f(x)$ statt x und y die complexen Werte $x + ih$ und $y + ik$ substituiert. Es findet sich dann

$$y + ik = f(x + ih) = \varphi_1(xh) + i\psi_1(xh).$$

Löst man also die Gleichung $y = \varphi_1(xh)$ nach h auf und substituiert den Wert von h in die Gleichung $k = \psi_1(xh)$, so findet sich

$$h = \Omega'(xy) \qquad k = F(xy) \, . \, \Omega_1'(xy) \quad . \; . \; . \quad (24)$$

und daher wird die allgemeine Derivation folgende:

$$\lambda' = F(xy) \, . \, \frac{\Omega_1'(xy)}{\Omega'(xy)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Die Funktionen Ω' und Ω_1' sind nun für alle Punkte der Ebene, deren Coordinaten der Ungleichung $y > f(x)$ genügen, reell. Rückt der Punkt auf die Curve, so verschwinden sie und wenn derselbe die Curve überschritten hat, und also in ein Gebiet tritt, wo $y < f(x)$ ist, so werden dieselben imaginär. Es ist also der Wert des Bruches $\Omega_1' : \Omega'$ auf der Curve notwendig ebenfalls c, und daher besteht für den oberen Rand des auf Seite 3 beschriebenen Streifens die Ungleichung

$$c \gtrless \frac{\Omega_1'(xy'')}{\Omega'(xy'')}$$

wenn wie dort y'' die Ordinate eines Punktes dieses oberen Randes bezeichnet. Da aber in den Funktionen Ω' und Ω_1' das Funktionssymbol $f(x)$ vorkommt, so mufs ganz besonders bemerkt werden, dafs für $f(x)$ allemal ein Wert zwischen y' und y'' gesetzt werden mufs, wo y' die Ordinate eines Punktes des unteren Randes des Funktionsstreifens ist. Man hat also zu setzen:

$$f(x) = y' + \vartheta(y'' - y') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Nach den Auseinandersetzungen auf Seite 13 mufs aber für c auch eine oder die andere der beiden Ungleichungen bestehen:

$$c \lessgtr \frac{\Omega_1(xy')}{\Omega(xy')}$$

wenn wieder in den Funktionen Ω und Ω_1 für $f(x)$ der exacte Funktionswert, für y' aber der dem untern Rande des Funktionsstreifens entsprechende approximative Funktionswert gesetzt wird. Der Wert der Constanten c ist daher zufolge der Ungleichung

$$\frac{\Omega_1(x\,y')}{\Omega(x\,y')} \gtrless c \gtrless \frac{\Omega_1'(x\,y'')}{\Omega'(x\,y'')} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

denselben Schwankungen ausgesetzt, wie der Funktionswert $f(x)$ selbst. Wenn also die Vorschrift gegeben ist, nach welcher die Funktionswerte für die verschiedenen Argumentwerte zu berechnen sind, so kann die Ermittelung des Wertes der Constanten c mit demselben Grade von Genauigkeit geschehen, als es möglich ist, den Funktionswert y aus der Gleichung $y = f(x)$ zu berechnen, vorausgesetzt, dafs man auch noch die Vorschriften zur Berechnung der Funktionen Ω und Ω_1, beziehungsweise Ω' und Ω_1' kennt. Zur Aufstellung derartiger Vorschriften in arithmetischer Form bedarf man aber der Kenntnis des Lagrange'schen Differentialcoëfficienten, also jener Funktion, die erst ermittelt werden soll. Aus diesem Widerstreit führt kein anderer Ausweg, als der, dafs man die Funktionen, wie dies beispielsweise bei den trigonometrischen Funktionen zu geschehen pflegt, durch geometrische Eigenschaften definiert und demgemäfs ihre einzelnen Werte mittelst geometrischer Constructionen bestimmt, oder dafs man die Funktion durch andere Funktionen, deren Derivationen man kennt, auszudrücken sucht. Auch ist es in manchen Fällen möglich, für die Umkehrung der Funktion ohne Kenntnis von der Lagrange'schen Derivation der primitiven Funktion zu haben, den Differentialquotienten zu bestimmen. Der reciproke Wert desselben in einem Intervall, wo er endlich und von Null verschieden ist, liefert dann den Differentialquotienten der primitiven Funktion. Das Rationellste ist jedoch, die Funktion durch eine Differentialgleichung zu definieren.

Bevor wir hievon ausführlicher handeln, kehren wir noch einmal zurück zur Betrachtung des Verlaufs der allgemeinen abgeleiteten Funktion von $y = f(x)$ für ein constantes Argument x_0, also zu dem Fall, wo der Punkt (x, y) die zu dem Argumente x_0 gehörige Ordinate durchläuft. Es ist dann y in dem Quotienten $y : f(x_0)$ sachlich von $f(x_0)$ etwas sehr Verschiedenes, denn y ist unmittelbar gegeben oder willkürlich auf der Ordinate gewählt, während $f(x_0)$ ein Symbol oder die Rechnungsregel ist, nach welcher man den Funktionswert zu bestimmen hat. Als Funktionswert kann man aber jede Zahl nehmen, die in dem Wertevorrat $f(x_0) = y'_0 + \vartheta(y''_0 - y'_0)$ enthalten ist. Rückt nun der Endpunkt der durch y dargestellten Strecke auf der Ordinate weiter bis in die Nähe des gewählten Funktionswertes, wobei natürlich y immer noch ganz willkürlich bleibt, und etwas von $f(x_0)$ durchaus sich Unterscheidendes darstellt innerhalb der Unbestimmtheitsgrenzen y'_0 und y''_0, die die

Schwankung der Funktion markieren, so ergibt sich für die allgemeine Derivation immer ein ganz bestimmter Wert. Erst wenn y im weiteren Verlauf die Stelle $f(x_0)$ erreicht, wird die allgemeine Derivation unbestimmt. Dieser Unbestimmtheit kann auf zweierlei Art vorgebeugt werden, nämlich dadurch, daſs man die genannte Stelle einfach aushebt oder dadurch, daſs man entweder mit dem Werte $f(x_0)$ seitlich zurückweicht in dem Augenblicke, wo y diese Stelle überschreitet oder umgekehrt den Punkt $(x_0\, y)$ eine Umgehung des Punktes $[x_0, f(x_0)]$ ausführen läſst. Das zweite wäre gestattet, da man ja innerhalb des Intervalles $y'' - y'$ jeden Wert für $f(x_0)$ wählen kann. Um jedoch nicht in Widerspruch mit einer früheren Festsetzung zu geraten, ist es zweckmäſsiger, jene Stelle einfach auszuheben oder zu umgehen. Dies setzt aber voraus, daſs für $f(x_0)$ ein etwas gröſserer oder kleinerer Wert aus $y_0' + \vartheta\,(y_0'' - y_0')$ gewählt worden ist, als bei der Curvenconstruction, weil ja sonst die Curve als solche aufgehoben werden würde. Die soeben geschilderte Schwierigkeit ergibt sich aber nur dann, wenn man die Rechnungsvorschrift $f(x)$ nicht kennt, $f(x)$ vielmehr nur ein Symbol ist. Es soll dies nun an den bekanntesten Funktionsarten gesondert nachgewiesen werden.

10.

Abgeleitete der algebraischen Funktionen. Wir betrachten zunächst jene Funktionen y von x, welche durch eine algebraische Gleichung mit reellen Coëfficienten und ganzzahligem Grade:

$$f(x\,y) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (28)$$

definiert sind. Dabei setzen wir voraus, daſs das Argument x nicht bloſs reelle einteilige Werte durchläuft, sondern auch eine zweiteilige Gröſse vorstellen kann, deren zweiwertiger Bestandteil reell oder imaginär ist, und daſs dem entsprechend die Funktion y ebensowohl einwertig als binomisch zweiwertig reell oder imaginär sein kann. Dann läſst nämlich die Gleichung immer eine Umkehrung zu, so daſs man für jeden Wert $x\, n$ Werte von y erhält; sie definiert also eine n deutige Funktion y von x, die im Allgemeinen transcendent ist.

Substituiert man zunächst an Stelle von x und y die binomisch zweiwertigen Coordinaten $x \pm h$ und $y \pm k$, und entwickelt jedes einzelne Glied der Gleichung $f(x \pm h, y \pm k) = 0$ mittelst des binomischen Lehrsatzes* und nachheriger Multiplication der für $(x \pm h)^p$ und $(y \pm k)^q$ erhaltenen Aggregate, so ergibt sich durch Vereinigung der

* Der *Taylor*'sche Satz soll hier noch nicht vorausgesetzt werden.

Glieder mit gleichen Potenzen von h und k, wenn nach dieser Vereinigung noch $k = \lambda h$ gesetzt und die Gleichungsspaltung vorgenommen wird:

$$h\psi_1 + \frac{h^3}{1.2.3}\psi_3 + \frac{h^5}{1.2\ldots5}\psi_5 + \ldots + \frac{h^{2\mu-1}}{1.2\ldots(2\mu-1)}\psi_{2\mu-1} = 0$$

$$f + \frac{h^2}{1.2}\varphi_2 + \frac{h^4}{1\ldots4}\varphi_4 + \ldots\ldots \frac{h^{2\mu}}{1.2\ldots2\mu}\varphi_{2\mu} = 0 \tag{29}$$

wenn φ_k und ψ_k Funktionen k^{ten} Grades in Bezug auf λ, dagegen Funktionen $n-k^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf x und y sind, und der Grad der Gleichung $n = 2\mu$ also eine gerade Zahl ist. In dem Falle, dafs n ungerade, also $n = 2\mu - 1$ ist, hat das Endglied der zweiten Gleichung (29) die Form $\frac{h^{2\mu-2}}{1\ldots(2\mu-2)}\varphi_{2\mu-2}$

Die Funktionen φ und ψ können bekanntlich in symbolischer Gestalt dargestellt werden durch

$$\psi_{2k-1} = (f_1 + \lambda f_2)^{2k-1}; \quad \varphi_{2k} = (f_1 + \lambda f_2)^{2k}$$

wo nach der Entwickelung der Binomien zu setzen ist:

$$f_{s_1} f_{r_2} = \frac{\partial^{r+s} f}{\partial x^s \partial y^r}; \quad f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Aufgabe, zu jedem Argument $x \pm h$ den zugehörigen Funktionswert zu bestimmen, erfordert zu ihrer Erledigung die Auflösung einer Gleichung n^{ten} Grades, was aber bekanntlich allgemein nicht möglich ist. Nur wenn die Coëfficienten der Gleichung numerische Werte haben, kann dies mit unbeschränkter Approximation geschehen. Ganz dasselbe gilt nun auch hinsichtlich der Bestimmung der allgemeinen Derivation λ, denn auch diese stellt sich als Wurzel einer algebraischen Gleichung dar. Bildet man nämlich die Resultante von (29) durch Elimination von h, so wird dieselbe in λ vom Grade $\frac{n(n-1)}{2}$. Nach Sylvesters Methode gebildet erhält sie die Gestalt:

$$R(\lambda) = \begin{vmatrix} f, & \varphi_2, & \varphi_4, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{2\mu-1} & & & \\ 0, & f, & \varphi_2, & \varphi_4, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{2\mu-1} & & \\ 0, & 0, & f, & \varphi_2, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{2\mu-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \psi_1, & \psi_3, & \psi_5, & \psi_7, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \psi_1, & \psi_3, & \psi_5, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \psi_1, & \psi_3, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \psi_1, & \psi_3, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{30}$$

Die linke Seite dieser Gleichung soll mit $R(\lambda)$ und die Wurzeln der Gleichung $R(\lambda) = 0$ sollen mit λ_s bezeichnet werden; es existiert dann bekanntlich eine Funktion $u(\lambda)$, aus welcher durch Substitution der Wurzeln λ_s an Stelle von λ die gemeinsamen Lösungen $h^2 = u$ der Gleichungen (29) hervorgehen, so daſs man schlieſslich hat

$$h_s = \sqrt{u(\lambda^s)} \text{ und } k_s = \lambda_s \sqrt{u(\lambda_s)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

und folglich die Potenz eines Punktes xy gleich wird:

$$p = u(\lambda^s)\sqrt{1 + \lambda_s^2}$$

Unter den Wurzeln λ ist diejenige, welche für $h = k = 0$ in den Lagrange'schen Differentialcoëfficienten übergeht, von besonderer Wichtigkeit. Da in diesem Falle der Punkt x, y auf die Curve rückt, so findet man diese Wurzel, welche wie oben mit λ_t bezeichnet werden soll, wenn in der Resultante $R(\lambda)$ $f(xy) = 0$ gesetzt wird. Dadurch ergibt sich aber augenscheinlich:

$$\psi_1 \equiv f_1 + \lambda f_2 = 0$$

und es ist demnach

$$\lambda_t = -f_1 : f_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Dies ist aber der Lagrange'sche Differentialcoëfficient. Es kann derselbe also wirklich für algebraische Funktionen und solche transcendente Funktionen y, welche durch Umkehrung der Gleichung (28) entstehen, vollkommen exact bestimmt werden. Neben der Wurzel (32) liefert die Gleichung (30) für $f(xy) = 0$ noch $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ Wurzeln, die aber den Charakter allgemeiner Derivationen für die Curvenpunkte haben.

Der Wurzel λ_t muſs eine Wurzel λ_T der Gleichung $R(\lambda) = 0$ im allgemeinen Falle entsprechen, so daſs man schreiben kann

$$\lambda_t = \lim \lambda_T \text{ für } f(xy) = 0$$

Diese Wurzel λ_T gibt die Richtung der kleinsten Sehne an, welche man durch den Punkt xy an die algebraische Curve so ziehen kann, daſs sie in ihm halbiert wird. Durch jeden Punkt der Ebene der Curve gehen $\frac{n(n-1)}{2}$ Sehnen, und zwar auch dann noch, wenn der Punkt der Curve selbst angehört; nur ist in letzterem Falle die Tangente als Nullsehne mitgerechnet.

Für complexe Werte von x und y erhalten die Gleichungen (29) dieselben Glieder, nur wechseln jetzt ihre Vorzeichen ab. Die Elemente der Horizontalreihen der nach der Sylvester'schen Methode gebildeten Resultante erhalten also ebenfalls abwechselnde Vorzeichen.

Die besonderen Fälle der Wurzeln der Gleichungen:

$$R(\lambda) = 0 \qquad\qquad u(\lambda) = 0$$

entsprechen den besondern Punkten der Curve (28), den singulären Punkten, oder bei der auf Seite 11 gegebenen allgemeineren geometrischen Auffassung der Gleichung (28), den Fällen, in welchen in einem Punkte zwei oder mehrere Sehnen zusammenfallen oder besondere Lagenverhältnisse gegen einander haben. Das Problem der Bestimmung der singulären Punkte einer Curve ist also identisch mit dem Probleme der Ermittelung der singulären Wurzeln der Gleichung $R(\lambda) = 0$. Das letztere algebraische Problem liegt aber vollständig gelöst vor. Mit der Aufstellung der Gleichung (30) ist also eine von Reihenentwickelungen und linearen Transformationen unabhängige Methode von rein algebraischem Charakter zur Untersuchung und Definition jener Punkte gewonnen.

Es soll nun an dem Beispiele der ebenen Curven dritter Ordnung das Gesagte näher erläutert werden.

Die Gleichung $\overset{(3)(3)}{f(x\,y)} = 0$ einer solchen Curve zerfällt für binomisch zweiwertige Coordinaten in

$$\psi_1 + u\,\psi_3 = 0 \qquad\qquad f + u\,\varphi_2 = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

wo ist

$$\psi_1 = f_1 + \lambda f_2 \qquad\qquad \varphi_2 = f_{11} + 2\lambda f_{12} + \lambda^2 f_{22}$$

$$\psi_3 = a_{111} + 3a_{112}\lambda + 3a_{122}\lambda^2 + a_{222}\lambda^3$$

und $\lambda = k : h;\;\; h^2 = u;\;\; f_1 = \frac{\partial f}{\partial x};\;\; f_2 = \frac{\partial f}{\partial y};\;\; f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};$

$$f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}; \qquad f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Die Resultante von (33) ist:

$$\psi_1\,\varphi_2 - \psi_3\,f = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

und somit in λ vom dritten Grade. Ist dieselbe erfüllt, dann bestimmen sich h und k aus den Gleichungen:

$$h = \pm\sqrt{-\frac{f}{\varphi_2}} \qquad\qquad k = \pm\lambda\sqrt{-\frac{f}{\varphi_2}} \quad . \; . \quad (35)$$

oder aus

$$h = \pm\sqrt{-\frac{\psi_1}{\psi_3}} \qquad\qquad k = \pm\lambda\sqrt{-\frac{\psi_1}{\psi_3}} \quad . \; . \quad (36)$$

Die Gleichung (34) hat drei Wurzeln, welche die drei allgemeinen abgeleiteten Funktionen von $f(xy)$ sind. Es gehen also durch jeden Punkt der Ebene der Curve drei Sehnen, von welchen im Allgemeinen zwei imaginär sind. Für die Punkte der Curve $f(xy) = 0$ selbst zerfällt die (34) wie ersichtlich in

$$f_1 + \lambda f_2 = 0 \quad \text{und} \quad f_{11} + 2\lambda f_{12} + \lambda^2 f_{22} = 0 \quad . \quad . \quad (37)$$

die (35) werden dann zur Bestimmung von h und k unbrauchbar, und man hat sich daher zu diesem Zwecke ausschliefslich der (36) zu bedienen.

Die Wurzel λ der ersten der Gleichungen (37) liefert in jedem Punkte der Curve die Richtung der Nullsehne oder der Tangente. Die Wurzeln der beiden andern Gleichungen, λ_2 und λ_3, geben die Richtungen der beiden andern Sehnen, die im Curvenpunkt halbiert werden. Diese beiden Sehnen sind es, durch welche wir die singulären Punkte der Curve definieren können, wenn wir die Besonderheiten der Lagen- und Gröfsenverhältnisse derselben ins Auge fassen. In dem Falle nämlich, wo gleichzeitig die Beziehungen statt haben:

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = 0 \qquad f = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

verschwindet ψ_1 identisch, und h und k werden zu Null nach (36), welches auch die Werte der Wurzeln von (37) sein mögen. Es geben also die Wurzeln der Gleichung

$$f_{11} + 2\lambda f_{12} + \lambda^2 f_{22} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

die Richtungen zweier Nullsehnen an. Die Curve durchsetzt sich also in einem solchen Punkte; dieser ist ein Doppelpunkt, wenn die Wurzeln reell sind, ein isolierter Punkt dagegen im imaginären Falle. Sind beide Wurzeln einander gleich, so fallen die Richtungen der Nullsehnen oder Tangenten zusammen; man hat den Rückkehrpunkt.

Haben die Gleichungen (37) gemeinsame Wurzeln, ohne dafs die beiden ersten Bedingungen (38) erfüllt sind, genügt also der Wert von λ aus der ersten Gleichung auch der zweiten, besteht also die Bedingung

$$f_{11} f_2^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_{22} f_1^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

so hat man ebenfalls zwei zusammenfallende Nullsehnen und eine dritte reelle Sehne, deren Richtung durch die Wurzel

$$\lambda_3 = - f_2 f_{11} : f_1 f_{22}$$

bestimmt ist. Ein solcher Punkt heifst bekanntlich Wendepunkt, weil die Curve sich in demselben wendet und zu beiden Seiten der Sehne und Tangente verläuft.

Ist endlich

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

ohne dafs $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ ist, so hat man einen Curvenpunkt mit zwei zusammenfallenden Sehnen von gleicher Länge, er heifst ein Doppelsehnenpunkt.

Bestehen die (40) und (41) gleichzeitig, so fällt ein Doppelsehnenpunkt mit einem Wendepunkt zusammen; man hat einen Rückkehrpunkt, wenn die Sehnen die Länge Null haben.

Von der Diskussion der cubischen Gleichung in λ (34) soll hier Umgang genommen und nur hervorgehoben werden, dafs gleichen Wurzeln auch gleiche Sehnen entsprechen, wie die (35) und (36) lehren. Den besonderen Punkten $x y$ der Ebene der Curve dritter Ordnung, d. i. jenen Punkten, für welche zwei oder auch alle drei Sehnen zusammenfallen, entsprechen dann im speciellen Falle, wo der Punkt $x y$ auf die Curve rückt, die singulären Punkte dieser letzteren.

1. Beispiel. Die Curve mit Rückkehrpunkt

$$y^2 = x^3.$$

Für complexe Werte wird hier

$$y^2 + k^2 = x^3 + 3 x h^2 \qquad\qquad 2 y k = 3 x^2 h + h^3$$

die Gleichung zur Bestimmung von λ ist

$$(\lambda^2 - 3 x)(2 y \lambda - 3 x^2) + y^2 - x^3 = 0.$$

Für $y^2 = x^3$ zerfällt dieselbe in

$$\lambda^2 - 3 x = 0 \qquad\qquad 2 y \lambda - 3 x^2 = 0.$$

Die letztere Gleichung liefert den Lagrange'schen Differentialcoëfficienten und damit die Richtung der Tangente, die beiden andern Wurzeln geben die Richtungen der Sehnen, welche sich noch durch den Curvenpunkt ziehen lassen. Für $x = 0$ $y = 0$ werden zwei Wurzeln gleich Null, die dritte aber unendlich, entsprechendes gilt also auch für die zugehörigen Sehnen.

2. Beispiel. Die Curve mit Doppelpunkt

$$y^2 = x (x - 1)^2$$

liefert die Resultante

$$[y^2 - x (x - 1)^2] + (\lambda^2 - 3 x + 2)(2 y \lambda - 3 x^2 + 4 x - 1) = 0.$$

Für die Punkte der Curve hat man daher die Wurzeln

$$\lambda^2 = 3 x - 2 \qquad\qquad \lambda = \frac{3 x^2 - 4 x + 1}{2 y}$$

Im Punkte $x = 1$, $y = 0$ werden dieselben

$$\lambda = \pm 1 \qquad\qquad \lambda = 1.$$

Da aber ist

$$h^2 = \frac{y^2 - x(x-1)^2}{\lambda^2 - 3x + 2} = -2y\lambda + 3x^2 - 4x + 1$$

so kommt für diesen Punkt $h = 0$. Man hat den Doppelpunkt.

Es ist ferner

$$f_{11} f_2^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_{22} f_1^2 = 6x - 4.$$

Also liefert $x = \frac{2}{3}$ einen Wendepunkt. Für diesen verschwinden in der That die beiden Wurzeln

$$\lambda_1 = -\sqrt{3x-2} \qquad \lambda_2 = +\sqrt{3x-2}.$$

Auch für Funktionen $f(xy) = 0$ vom vierten Grade kann man bekanntlich die Gleichung zur Bestimmung von y noch algebraisch auflösen. Im Falle der Gleichungen fünften Grades bedarf es aber schon der Kenntnis der elliptischen Funktionen. Hervorgehoben verdient zu werden, dafs für die Curven zweiten Grades die allgemeine Derivation mit der Lagrange'schen identisch ist.

11.

Die Abgeleitete der Exponential-Funktion. Die Exponentialfunktion

$$y = e^x$$

liefert für binomisch zweiwertige Coordinaten

$$y \pm k = e^{x \pm h}$$

oder

$$y + k = e^{x+h} \qquad y - k = e^{x-h}$$

Durch Addition beider Gleichungen ergibt sich

$$2y = e^{x+h} + e^{x-h}$$

woraus durch Auflösung für h der Wert folgt:

$$h = \log\left\{\frac{y}{e^x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{e^x}\right)^2 - 1}\right\}$$

Durch Subtraction der (43) findet sich:

$$2k = e^{x+h} - e^{x-h}$$

oder mit Benützung des vorstehenden Wertes von h

$$k = e^x \sqrt{\left(\frac{y}{e^x}\right)^2 - 1}$$

Es ist also die allgemeine Derivation der Exponentialfunktion

$$\lambda = e^x : \frac{\log\left\{\frac{y}{e^x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{e^x}\right)^2 - 1}\right\}}{\sqrt{\left(\frac{y}{e^x}\right)^2 - 1}} \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

In dem Ausdrucke rechts sind x und y stets als unabhängige Gröſsen anzusehen, doch ist immer $y > e^x$ zu wählen. Man hat demnach bei Berechnung der allgemeinen Derivation für einen bestimmten Punkt xy zunächst e^x zu berechnen nach der hiefür gegebenen Vorschrift, welche auf einem Standpunkte, wo man die Definition dieser Funktion durch eine unendliche Reihe noch nicht kennt, in der Ausziehung von Wurzeln besteht. Da y vorgegeben ist, so kann man durch passende Wahl des Genauigkeitsgrades von e^x es immer so einrichten, daſs letzterer Wert kleiner als y ist.

Für complexe Werte des Argumentes und der Funktion hat man nach der Formel von Euler, welche nachher bewiesen werden soll:

$$y + ik = e^{x + ih} = e^x (\cos h + i \sin h).$$

Also ist

$$y = e^x \cos h \qquad k = e^x \sin h.$$

Man findet hieraus:

$$h = \operatorname{arc\,cos} \frac{y}{e^x} \qquad k = e^x \,.\, \sqrt{1 - \left(\frac{y}{e^x}\right)^2}$$

und als Ausdruck für die allgemeine Derivation:

$$\lambda = e^x \,.\, \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{e^x}\right)^2}}{\operatorname{arc\,cos} \frac{y}{e^x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Auch hier ist y vorgegeben und zwar eingeschränkt durch die Bedingung $y < e^x$.

Nimmt man also für e^x einen Wert aus dem Wertevorrat $y_1 + \vartheta (y_2 - y_1)$, wo y_1 und y_2 die zwei Grenzen sind, in welche e^x eingeschlossen wurde, so hat man offenbar

$$e^x \,.\, \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{y_1}{e^x}\right)^2}}{\operatorname{arc\,cos} \frac{y_1}{e^x}} < \lambda_t < e^x \,.\, \frac{\sqrt{\left(\frac{y_2}{e^x}\right)^2 - 1}}{\log \left\{ \left(\frac{y_2}{e^x}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{y_2}{e^x}\right)^2 - 1} \right\}} \quad (44)$$

Der Wert von λ_t schwankt also zwischen zwei Grenzen, die abhängig sind von den Grenzen, in welche der Funktionswert e^x eingeschlossen worden ist und von dem Schwankungswert der Funktion selbst. Bei thatsächlicher Auswertung der in dieser Ungleichung auf beiden Seiten auftretenden Faktoren von e^x findet sich der approximative Wert 1 für dieselben. Es genügt die Auswertung für einen einzigen Punkt auszuführen; denn jene Faktoren haben für alle Curvenpunkte dieselben Werte. Man kann aber auch rein empirisch durch eine genau angefertigte Zeichnung $\operatorname{tg} \alpha = \lambda_0$ für diesen Punkt bestimmen und hat dann:

$$\frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{e^x}\right)^2}}{\arccos\frac{y}{e^x}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{y}{e^x}\right)^2-1}}{\log\left\{\left(\frac{y}{e^x}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{y}{e^x}\right)^2-1}\right\}} = \lambda_0$$

In dem einen wie in dem andern Falle ergibt sich:

$$\lambda_t = e^x \cdot \lambda_0$$

für alle Punkte der Curve.

12.

Die Abgeleiteten der trigonometrischen Funktionen. Die trigonometrische Funktion

$$y = \sin x$$

zerfällt für binomisch zweiwertige Argumente in die beiden Bestandteile:

$$y = \sin x \cos h \qquad k = \cos x \sin h.$$

Demnach ist

$$h = \arccos\frac{y}{\sin x} \qquad k = \cos x \sqrt{1-\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2}$$

und folglich die allgemeine Derivation:

$$\lambda = \cos x \cdot \frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2}}{\arccos\frac{y}{\sin x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Für complexe Werte des Argumentes hat man:

$$y + ik = \sin(x+ih) = \sin x \frac{e^h + e^{-h}}{2} + i \cos x \frac{e^h - e^{-h}}{2}.$$

Somit ist:

$$y = \frac{e^h + e^{-h}}{2}\sin x; \qquad k = \frac{e^h - e^{-h}}{2}\cos x$$

und folglich auch

$$\lambda = \cos x \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2-1}}{\log\left\{\frac{y}{\sin x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2-1}\right\}} \quad . \quad . \quad (46)$$

Der Lagrange'sche Differentialcoëfficient ist

$$\lambda_t = \cos x$$

wie man auf dieselbe Weise findet wie bei der Funktion e^x.

Die trigonometrische Funktion

$$y = \cos x$$

liefert die beiden Formen der allgemeinen Derivation:

$$\lambda = -\sin x \frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\cos x}\right)^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{y}{\cos x}}; \; \lambda = -\sin x \,.\, \frac{\sqrt{\left(\frac{y}{\cos x}\right)^2 - 1}}{\log\left\{\frac{y}{\cos x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{\cos x}\right)^2 - 1}\right\}} \qquad (47)$$

Daher ist die Lagrange'sche Derivation:

$$\lambda_t = -\sin x.$$

Will man von den archimedischen Sätzen Anwendung machen, so hat man die Werte von:

$$\lambda_t = \lim \cos x \frac{\sin h}{h} = \cos x \lim \frac{\sin h}{h} \quad \text{und}$$

$$\lambda_t = -\lim \sin x \frac{\sin h}{h} = -\sin x \lim \frac{\sin h}{h}$$

für $h = 0$ zu ermitteln. Bekanntlich ist aber $\lim \frac{\sin h}{h} = 1$ und es findet sich also auf diesem Wege das gleiche Resultat wie vorhin.

13.

Die transcendente Grundgleichung von Euler. Eine Vergleichung der Formeln (49) und (50), dann der beiden Formeln (51) untereinander zwingt zu den Festsetzungen:

$$\frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{y}{\sin x}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2 - 1}}{\log\left\{\frac{y}{\sin x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2 - 1}\right\}}$$

und

$$\frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\cos x}\right)^2}}{\operatorname{arc\,cos}\frac{y}{\cos x}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{y}{\cos x}\right)^2 - 1}}{\log\left\{\frac{y}{\cos x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{\cos x}\right)^2 - 1}\right\}}$$

oder mit Weglassung der gleichen Faktoren auf beiden Seiten:

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{y}{\sin x} = i \log\left\{\frac{y}{\sin x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2 - 1}\right\}$$

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{y}{\cos x} = i \log\left\{\frac{y}{\cos x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{\cos x}\right)^2 - 1}\right\}$$

Diese beiden Formeln lassen sich in die einzige zusammenfassen:

$$\operatorname{arc\,cos} \xi = i \log\left\{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right\} \qquad \ldots \quad (48)$$

oder wenn man setzt:

$$\operatorname{arc\,cos} \xi = \eta \qquad \text{also} \qquad \xi = \cos \eta$$

in die folgende:

$$\eta i = -\log\left\{\cos\eta \pm i \sin\eta\right\}$$

Dies ist aber nichts anderes als die Euler'sche Formel in anderer Gestalt. Somit ist die Probe für die Richtigkeit der getroffenen Festsetzungen gemacht.

Die Formeln (50) und die zweite der Formeln (51) wurden mit Zuhilfenahme der Euler'schen Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen gefunden. Die Richtigkeit dieser Grundgleichung kann auf folgendem Wege nachgewiesen werden.

Zunächst folgt aus den beiden Formen für die allgemeinen Ableitungen der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$, wie sie für den Reell-Fall des Argumentes oben gefunden wurden, mit Notwendigkeit die Beziehung:

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2}}{\arccos\frac{y}{\sin x}} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\cos x}\right)^2}}{\arccos\frac{y}{\cos x}}$$

Es ist demnach die allgemeine Ableitung der Funktion

$$y = \cos x + i\sin x$$

gegeben durch:

$$\lambda = i\,(\cos x + i\sin x)\frac{\sin h}{h} = i\,(\cos x + i\sin x)\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sin x}\right)^2}}{\arccos\left(\frac{y}{\sin x}\right)}$$

wie sich durch Addition der mit i multiplicierten Formel (49) zur ersten Formel (51) ergibt. Der Differentialquotient ist daher

$$\lambda_t = i\,(\cos x + i\sin x).$$

Es genügt also die Funktion

$$\cos x + i\sin x$$

der Differentialgleichung

$$\frac{df}{dx} = if.$$

Derselben Differentialgleichung genügt aber auch die Funktion e^{ix}. Es kann sich daher letztere von der Funktion $\cos x + i\sin x$ nicht unterscheiden, wenn beide Funktionen auch nur für einen einzigen Wert des Argumentes gleichwertig sind. Nun haben aber beide Funktionen für $x = 0$ den Wert 1; man darf daher setzen:

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x.$$

Es läſst sich hierauf die Probe machen; denn wenn die Funktionen gleich sind, so muſs die Gleichheit ihrer allgemeinen Ableitungen eine Folge davon sein. Man muſs daher setzen dürfen:

$$(\cos x + i\sin x)\frac{\sin h}{h} = e^{xi}\,.\,\frac{e^{hi} - e^{-hi}}{2ik}$$

Da h von x unabhängig ist, so zieht diese Gleichung die beiden Folgenden nach sich:

$$\cos x + i \sin x = e^{xi} \quad \text{und} \quad \sin h = \frac{e^{hi} - e^{-hi}}{2i}$$

welche sich nicht widersprechen dürfen. Die eine dieser Formeln ist in der That die Auflösung der andern für $x = h$.

Die correctere Darstellung würde demnach die sein, dafs zuerst der Reell-Fall für die allgemeine Exponentialfunktion a^x und für die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ behandelt, im Anschlufs daran der Beweis der Euler'sche Formel geführt, und dann erst der Imaginärfall der genannten Funktionen in Betracht gezogen wird. Der Gang der Entwickelung wäre somit folgender.

Die allgemeine Ableitung der Exponentialfunktion a^x, wo a vorerst eine beliebige Zahl bedeutet, ist:

$$\lambda = a^x \log a \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{y}{a^x}\right)^2 - 1}}{\log\left\{\frac{y}{a^x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{a^x}\right)^2 - 1}\right\}}$$

oder

$$\lambda = a^x \cdot \frac{a^h - a^{-h}}{2h}$$

Für die Exponentialfunktion mit rein imaginärem Exponenten a^{ix} hat man daher die allgemeine Abgeleitete

$$\lambda = a^{ix} \frac{a^{hi} - a^{-hi}}{2h}$$

Die Funktion $\cos x + i \sin x$ dagegen hat die allgemeine Ableitung:

$$\lambda = i (\cos x + i \sin x) \frac{\sin h}{h}$$

Beide Funktionen haben demnach allgemeine Ableitungen, die aus der Funktion selbst und einem zweiten Faktor bestehen, der vom Argumente x unabhängig ist, dessen Form aber durch die Form der Funktion bedingt ist. Man darf also beide Funktionen einander gleichsetzen und schreiben:

$$a^{ix} = \cos x + i \sin x$$

wenn diese Gleichung die andere:

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{a^{hi} - a^{-hi}}{2hi}$$

nach sich zieht; denn dann sind die allgemeinen Ableitungen beider Funktionen für jeden Wert von x und h einander gleich. Dies trifft aber in der That zu.

Da a der Wert von a^x für $x = 1$ ist, so kann dasselbe erst dann bestimmt werden, wenn eine allgemeine Vorschrift zur Berechnung der Funktionswerte a^x existiert. So viel ist aber schon jetzt klar, dafs dieser Wert ein ganz bestimmter ist. Man hat nämlich auch:

$$a^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

und folglich für $x = i$

$$a = \cos i - i \sin i$$

oder da — nach Seite 32 — $\cos i = \cos hyp\,(-1) = \cos hyp\, 1$ und $i \sin i = \sin hyp\,(-1) = -\sin hyp\, 1$, so kommt

$$a = \cos hyp\, 1 + \sin hyp\, 1.$$

Diese Zahl wird mit e bezeichnet.

Das plötzliche Auftreten der Funktion $\cos x + i \sin x$ kann befremdlich erscheinen, und man wird daher mit Fug und Recht die Frage stellen können, was zu dieser Verbindung von $\cos x$ und $\sin x$ geführt hat. Allein man hätte auch ganz allgemein die Funktion $\cos x + \mu \sin x$ behandeln und darnach fragen können, ob μ so bestimmt werden kann, dafs die Ableitung der Funktion mit y bis auf einen Faktor identisch ist. Da die Abgeleitete dieser Funktion $-\sin x + \mu \cos x$ ist, so wird jene mit der Funktion selbst identisch bis auf einen Faktor ϱ, wenn $\cos x + \mu \sin x = \varrho\,(-\sin x + \mu \cos x)$ ist. Man wird also zur Bestimmung von ϱ und μ auf die beiden Gleichungen $\mu = -\varrho$ und $\varrho\mu = 1$ geführt, aus welchen folgt $\mu = i$ und $\varrho = -i$, wodurch das Befremdliche der gemachten Combination von $\sin x$ und $\cos x$ beseitigt ist. Denn die Frage nach allen jenen Funktionen, deren Abgeleitete bis auf einen constanten Faktor mit der Funktion selbst identisch werden, lag sehr nahe, nachdem der Augenschein gelehrt hatte, dafs die Exponentialfunktion diese Eigenschaft hat und die Abgeleiteten von $\sin x$ und $\cos x$ diese Funktionen selbst in umgekehrter Ordnung sind, woraus dann die Vermuthung geschöpft werden konnte, dafs möglicherweise eine lineare Combination derselben existiert, die durch den Ableitungsprocefs unverändert bleibt.

14.

Algebraische Definition von Sinus und Cosinus. Die trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind bekanntlich auf geometrischem Boden entstanden. Es wird gewöhnlich $\cos x$ als Abscisse, $\sin x$ aber als Ordinate eines Punktes der Kreisperipherie vom Radius 1 definiert, oder $\cos x$ und $\sin x$ sind die Wurzeln der Kreisgleichung

$$u^2 + v^2 = 1$$

Der Messung der Winkel durch sinus und cosinus ging voraus ihre Bestimmung durch die zugehörigen Sehnen. Auf diese älteste Winkelberechnung kommt man zurück, wenn unsere neue Interpretation einer Curvengleichung auf den Kreis angewendet wird. Für binomisch zweiwertige reelle Coordinaten $u \pm \xi$, $v \pm \eta$ zerfällt dieselbe nämlich in die Partialgleichungen:

$$u^2 + v^2 + \xi^2 + \eta^2 - 1 = o$$
$$u\,\xi + v\,\eta \qquad\qquad = o$$

Die Auflösung derselben nach ξ und η liefert:

$$\xi = v \sqrt{\frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}} \qquad \eta = - u \sqrt{\frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}}$$

mit der Bedingung $u^2 + v^2 < 1$, da ξ und η der Voraussetzung zufolge reell sein sollen. Die Punkte $(u\,v)$ liegen also innerhalb des Kreises. Die halbe Länge und die Richtung der durch einen jeden bestimmten Sehne ist gegeben durch

$$p = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \qquad \lambda = - \frac{u}{v}$$

Die Entfernung des Punktes $(u\,v)$ vom Mittelpunkt des Kreises ist $\sqrt{u^2 + v^2}$, und wenn daher der Winkel, den dieser radius vector mit der u Axe bildet, durch x bezeichnet wird, so ist

$$\sin x = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad \cos x = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Verbindet man aber den einen Endpunkt der durch den Punkt $(u\,v)$ bestimmten Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises und nennt φ den Winkel, den dieser Radius mit dem radius vector des Punktes $u\,v$ bildet, so ist

$$\sin\varphi = p; \qquad \cos\varphi = \sqrt{u^2 + v^2} \quad . \; . \; . \quad (49)$$

Damit haben wir die allgemeineren Definitionen von Sinus und Cosinus gewonnen: Der Sinus des halben Winkels ist gleich der Potenz des Mittelpunktes der zu dem ganzen Winkel gehörigen Sehne, und der Cosinus ist gleich der Centraldistanz dieses Punktes. Damit sind aber diese Begriffe auf eine algebraisch-geometrische Grundlage gestellt, wodurch sie eine umfassendere Bedeutung gewinnen.

Substituiert man nämlich in die Kreisgleichung die Ausdrücke $u + \xi\,i$, $v + \eta\,i$, so ergeben sich die Teilgleichungen:

$$u^2 + v^2 - \xi^2 - \eta^2 - 1 = 0$$
$$u\,\xi + v\,\eta \qquad = 0$$

aus welchen folgt:

$$\xi = v \sqrt{\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2}}; \quad \eta = -u \sqrt{\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2}}$$

welche Ausdrücke, da ξ und η reell vorausgesetzt sind, die Bedingung $u^2 + v^2 > 1$ neben sich haben. Potenz und Richtung eines Punktes $(u\,v)$ sind jetzt:

$$p' = i\sqrt{u^2 + v^2 - 1} \qquad \lambda = -\frac{u}{v}$$

Zu jedem Punkte aufserhalb des Kreises gehört also ein und zwar nur ein Segment, welches jedoch imaginär zu signieren ist, dessen Richtung aber durch dieselbe Funktion der Coordinaten des Punktes bestimmt wird, wie im Falle, wo letzterer innerhalb des Kreises gelegen ist.

Zieht man die zu dem Punkte $(u v)$ gehörige Centrale und construiert zu einem beliebigen äufseren Punkte $(u' v')$ derselben das zugehörige Segment, so hat dasselbe die gleiche Richtung wie das ursprüngliche; es ist folglich senkrecht zur Centrale, und die Endpunkte desselben liegen, wenn sie als reelle Punkte aufgefafst werden, auf einer gleichseitigen Hyperbel. Man hat nämlich $u' = \varrho u$; $v' = \varrho v$ und folglich $\lambda' = -\dfrac{u}{v} = \lambda$. Wählt man also die Centrale als Abscissenachse und eine im Mittelpunkt des Kreises auf ihr errichtete Senkrechte als Ordinatenachse eines neuen Coordinatensystems u'', v''; dann sind die reellen Coordinaten des Endpunktes eines imaginären Segmentes:

$$u'' = \sqrt{u'^2 + v'^2} \qquad v'' = \sqrt{u'^2 + v'^2 - 1}.$$

Es ist also immer

$$u''^2 - v''^2 = 1.$$

Dies ist aber in der That die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel. Damit ist bewiesen, dafs zu einem beliebigen Centriwinkel nur ein einziges imaginäres Segment existiert, dessen reell aufgefafste Endpunkte auf seinen Schenkeln liegen, da jeder dieser Schenkel die gleichseitige Hyperbel nach der Öffnung des Winkels hin nur in einem einzigen Punkte schneidet. Es existiert also zu jedem Centriwinkel je ein reelles und ein imaginäres Segment, und es scheint folglich einerlei zu sein, ob man als trigonometrisches Mass des halben Centriwinkels das eine oder andere halbe Segment und die zugehörige Centraldistanz nimmt. Denn die Ausdrücke (49), durch welche Sinus und Cosinus dieses Winkels definiert sind, genügen der Kreisgleichung auch dann, wenn in denselben

$u^2 + v^2 > 1$ genommen wird. Man kann also den Winkel φ konstruieren, einerlei ob das reelle oder imaginäre zugehörige Segment gegeben ist; umgekehrt kann man, wenn der Winkel φ gegeben ist, immer das reelle oder imaginäre Segment finden und die Ausdrücke für den reellen oder imaginären Sinus und Cosinus herstellen. Verfolgt man jedoch die Bewegungen des Punktes (uv) auf seiner Centrale und des Endpunktes des zugehörigen halben Segmentes genauer und hält daran fest, daſs der Winkel immer durch den Bogen gemessen werde, den dieser Endpunkt beschreibt, so ist noch eine andere Auffassung der Sachlage zulässig; denn es springt hell in die Augen, daſs wenn der Punkt (uv) am Endpunkt des Durchmessers angelangt ist, und sich dann auf der Centrale weiter bewegt, der Endpunkt des zugehörigen Segmentes einen Hyperbelbogen beschreibt, der imaginär zu signieren ist, um anzudeuten, daſs er zu einer imaginären Kreissehne gehört, deren absolute Länge gleich ist der entsprechenden reellen Hyperbelsehne. Die Ausdrücke

$$p = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \qquad q = \sqrt{u^2 + v^2}$$

behalten also unter allen Umständen die Eigenschaften des Sinus und Cosinus; für $u^2 + v^2 < 1$ ist der zugehörige Winkel gemessen durch den doppelten Kreissektor φ vom Radius 1, und für $u^2 + v^2 > 1$ ist derselbe gemessen durch den zugehörigen doppelten Hyperbelsektor $hyp\ i\varphi$. Es muſs dabei ganz besonders betont werden, daſs φ und $i\varphi$, wenn zugleich auf dem Kreise oder auf der Hyperbel gemessen, dem absoluten Werte nach gleich sind, daſs aber, wenn φ auf dem Kreise, $i\varphi$ dagegen auf der Hyperbel gemessen wird oder umgekehrt, beide dem absoluten Werte nach verschieden sind.

Bestimmt man den Winkel φ durch das imaginäre Segment, so hat man

$$\sin\varphi = \sqrt{u^2 + v^2 - 1} \qquad \cos\varphi = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Dasselbe Segment, aber reell genommen, legt auch den Winkel $hyp\ i\varphi$ fest; also ist

$$\sin hyp\ i\varphi = \sqrt{u^2 + v^2 - 1}; \quad \cos hyp\ i\varphi = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Man hat folglich die Relationen:

$$-i\sin\varphi = \sin hyp\ i\varphi; \qquad \cos\varphi = \cos hyp\ i\varphi$$

und wenn man hier $-\varphi i$ statt φ schreibt:

$$i\sin\varphi i = \sin hyp\ \varphi \qquad \cos\varphi i = \cos hyp\ \varphi$$

woraus für $\varphi = 1$ die oben auf Seite 29 angewandte Formel sich ergibt.

Zwischen den Coordinaten der Mittelpunkte $(u\,v)$, $(u_1\,v_1)$ der beiden zu einem Centriwinkel gehörigen Sehnen bestehen die Relationen:

$$u_1 = \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}} \qquad v_1 = \frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

Man hat daher auch

$$\sin\varphi = i\,\frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{u^2 - v^2}} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}}$$

In der That genügen diese Funktionen ebenfalls der Kreisgleichung.

Noch bleibt beizufügen, daſs die Funktionen $\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 1}$ und $\sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ identisch sind mit $\operatorname{tg}\tau$ und $\sec\tau$, wenn τ das Complement des Winkels ist, welchen die von dem Punkte $u_1\, v_1$ an den Kreis gezogene Tangente mit dessen Radius bildet. Man hat dann

$$\operatorname{tg}\tau = \sin hyp\,\varphi.$$

Das Wichtigste an der ganzen Untersuchung ist jedoch die allgemeinere Auffassung des Sinusbegriffes auf rein algebraischer Grundlage. Diese gestattet denselben auf jede beliebige Curve zu übertragen, indem der Sinus des Bogens mit der Potenz des Mittelpunktes der zugehörigen Sehne identisch ist, und folglich aus der Curvengleichung immer hergeleitet werden kann. Ist der Sinus des Bogens einer Curve gegeben, so kann man immer die Länge des Bogens durch Integration finden; denn wir werden später zeigen, daſs der Ausdruck für die Potenz übergeht in das Bogenelement, wenn der Punkt, für den die Potenz genommen wurde, auf die Curve selbst rückt.

II. Die Taylor'sche Reihe.

15.

Der Mittelwertsatz. Es sei

$$y = f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

eine eindeutige Funktion der reellen Variabelen x und zwar so beschaffen, daſs dieselbe für binomisch zweiwertige Argumente in einen einwertigen und einen zweiwertigen Bestandteil zerfällt. Dann hat dieselbe allgemeine abgeleitete Funktionen, welche sich als Wurzeln der Gleichung ergeben, die das Resultat der Elimination von ξ und η aus:

$$y \pm \eta = f(x \pm \xi) = \varphi(x\xi) \pm \psi(x\xi)$$

beziehungsweise aus

$$y = \varphi(x\xi) \qquad \eta = \psi(x\xi) \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{\eta}{\xi} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist. Es sei

$$\Theta(x, y, \lambda) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

diese Gleichung, und λ_c jene Wurzel derselben, welche die Richtung der Cardinalsehne angibt. Ferner seien (a, b) die Coordinaten des einen Endpunktes dieser Sehne; dann ist $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, und die Coordinaten des anderen Endpunktes der Sehne sind $a_1 = a + 2\,\xi$ und $b_1 = b + 2\,\eta$. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} 2\,\eta &= f(a + 2\,\xi) - f(a) \\ \lambda_c &= \vartheta(a + \xi, b + \eta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wenn $\vartheta(xy)$ der Ausdruck für die genannte Wurzel von (3) ist.

Nimmt man ξ, η als vorgegeben an, setzt also $\xi = h$, $\eta = k$, so ist $\vartheta(a + h, b + k)$ eine Constante. Die Gleichung

$$\vartheta(xy) = \vartheta(a + h, b + k) = \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

bestimmt dann den geometrischen Ort aller Punkte, deren Cardinalsehnen mit der zum Punkte $(a + h, b + k)$ gehörigen Cardinalsehne parallel sind. Es liefert also diese Gleichung zusammen mit der Gleichung der Curve $y = f(x)$ insbesondere auch die Coordinaten jener Punkte, deren Tangenten der Cardinalsehne des Punktes $(a + h, b + k)$ parallel sind. Wenn man aber in der Funktion $\vartheta(xy)$ $y = f(x)$ setzt, so geht dieselbe in den Lagrange'schen Differentialquotienten $f'(x)$ über. Die Gleichung zur Bestimmung der genannten besonderen Curvenpunkte bekommt daher die einfachere Gestalt:

$$f'(x) = \vartheta(a + h, b + k) = \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Sie liefert die Abscissen derselben. Nun folgt aber aus (4):

$$f(a_1) - f(a) = (a_1 - a)\,\vartheta(a + h, b + k) \quad . \quad . \quad . \quad (7\text{a})$$

da $2\,\xi = a_1 - a$ und $\lambda_c = 2\,\eta : 2\,\xi$ ist.

Ist also x_i eine der Wurzeln der Gleichung (6), so kommt

$$f(a_1) - f(a) = (a_1 - a)\,f'(x_i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wenn x_i die Form $a + \mu\,(a_1 - a)$ hat, wo μ einen positiven ächten Bruch bedeutet; dann drückt diese Formel den bekannten Mittelwertsatz aus, wie er in den Lehrbüchern unter der Voraussetzung, dafs die Funktion $y = f(x)$ und ihre vor- und rückwärts genommene Differentialquotienten innerhalb des Intervalles a bis a_1 keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden, bewiesen wird.

Diese Voraussetzungen sind bei unserer Beweisführung ersetzt durch die Voraussetzung der Existenz der allgemeinen Ableitung im Punkte

$(a+h, b+k)$, und insbesondere der Existenz jener Wurzel der Gleichung (3), welche die Richtung der Sehne bestimmt, die in die Tangente übergeht, wenn der Mittelpunkt der Sehne auf die Curve rückt, und die wir Cardinalsehne genannt haben.

16.

Die Taylor'sche Reihe für reelle Variabele. Der Mittelwertsatz (7) und der weitere Satz, dafs wenn eine eindeutige Funktion an den Endpunkten des Intervalles $a \ldots a_1$ gleiche Werte besitzt, und ihre vor- und rückwärts genommene Differentialquotienten an jeder Stelle des Intervalles übereinstimmen, dann mindestens eine Stelle existiert, wo die Funktion den Wert Null hat, bilden gewöhnlich die Grundlagen des wichtigsten Theorems der Differentialrechnung, des Taylor'schen Lehrsatzes.

Wir werden uns zur Begründung dieses Theorems lediglich des Begriffs der allgemeinen Ableitung einer Funktion bedienen und dasselbe folgendermafsen formulieren:

> Es sei $(x_0\, y_0)$ ein fester Punkt der Curve, (xy) ein variabeler Punkt, und es existieren für **alle** von dem festen Punkte ausgehenden Sehnen die allgemeinen Ableitungen von der ersten bis zur $n$ten, so dafs dieselben für $y = y_0$ $x = x_0$ endliche Werte haben, dann läfst sich die Funktion $y = f(x)$ in eine nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe entwickeln.

Um das Theorem zu beweisen, bezeichnen wir die allgemeinen Derivationen von λ mit λ', λ'', λ''', $\ldots$ $\lambda^{(k)}$, und ebenso jene von y mit y', y'', $\ldots$ $y^{(k)}$. Die Werte, welche λ, y und ihre Derivationen für $x = x_0$ $y = y_0$ annehmen, mögen mit λ_0, y_0, $\lambda_0^{(k)}$, $y_0^{(k)}$ bezeichnet werden.

Nach der Definition der allgemeinen Ableitung hat man dann:

$$y = y_0 + \lambda(x - x_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

wo ist

$$\lambda = \varphi\left(\frac{x + x_0}{2}, \frac{y + y_0}{2}\right) \quad y = f(x)$$

Da die Funktion λ eine solche von x allein ist, so kann man auch für sie die allgemeine Derivation bilden, und man hat daher:

$$\lambda = \lambda_0 + (x - x_0)\lambda' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wenn λ' für den Punkt $\frac{x + x_0}{2}$, $\frac{y + y_0}{2}$ genommen wird, und $\lambda_0 =$

$\varphi\,(x_0\,y_0)$ ist. Verfährt man auf gleiche Weise mit den übrigen Derivationen von λ, so ergibt sich allgemein die Formel

$$\lambda^{(k)} = \lambda_0^{(k)} + (x - x_0)^{k+1}\,\lambda^{(k+1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

wo $k = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die durch Specialisierung des Wertes von k hieraus sich ergebenden Formeln liefern nebst den Formeln (8) und (9) durch die bekannte Art der Elimination von $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots \lambda^{(k)}$ folgende Entwickelung von y:

$$\begin{aligned} y = y_0 &+ (x - x_0)\,\lambda_0 + (x - x_0)^2\,\lambda_0' + (x - x_0)^3\,\lambda_0'' + \ldots \\ &+ (x - x_0)^{k-1}\,\lambda_0^{(k-2)} + (x - x_0)^k\,\lambda_0^{(k-1)} + (x - x_0)^{k+1}\,\lambda^k \quad . \quad (11) \end{aligned}$$

Dies ist das Taylor'sche Theorem in neuer Gestalt.

Um dasselbe in der gebräuchlichen Form zu erhalten, führen wir den Nachweis, daſs die Coëfficienten $\lambda_0, \lambda_0', \lambda_0'' \ldots$ in der Entwickelung (11) nichts anderes sind als die Lagrange'schen Derivationen von y.

Zu diesem Zwecke differenzieren wir die Gleichung (11) nach x; dies gibt

$$y' = \lambda_0 + 2\,(x - x_0)\,\lambda_0' + \ldots$$

und setzen $x = x_0$; dann kommt $\lambda_0 = y_0'$. Differenziert man zweimal die (11), so findet sich für $x = x_0$ aus

$$y'' = 1\,.\,2\,\lambda_0' + 2\,.\,3\,(x - x_0)\,\lambda_0'' + \ldots$$

$\lambda_0' = \frac{y_0''}{1\,.\,2}$. Differenziert man k mal nacheinander, so gibt dies:

$$\begin{aligned} y^{(k)} = 1\,.\,2\,.\,3 \ldots k\,\lambda_0^{(k-1)} &+ 1\,.\,2\,.\,3 \ldots (k+1)\,(x - x_0)^k\,\lambda^k \\ &+ (x - x_0)^{k+1}\,\frac{d\,\lambda^k}{d\,x} \end{aligned}$$

woraus für $x = x_0$ flieſst:

$$\lambda_0^{(k-1)} = \frac{y_0^{(k)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Durch Substitution der hieraus für $k = 1, 2, 3 \ldots$ sich ergebenden Werte in die linke Seite von (11) kommt die gewöhnliche Form der Taylor'schen Reihe zum Vorschein. Nur das Restglied

$$R = (x - x_0)^{k+1}\,\lambda^k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

erhält eine von der gewöhnlichen Form abweichende Gestalt. Die Funktion λ^k ist die k^{te} allgemeine Ableitung der Funktion λ. Dieselbe ist also eine bekannte Funktion von $\frac{x + x_0}{2}$, $\frac{y + y_0}{2}$ wo $y = f(x)$ ist, und somit setzt uns das Restglied in der neuen Form (13) in den Stand, den Fehler vollkommen genau anzugeben, der durch das Abbrechen der Reihe an einer beliebigen Stelle gemacht wird.

Zugleich ist damit ein neues Criterium für die Convergenz der Taylor'schen Reihe gewonnen, indem

$$\lim (x - x_0)^{k+1} \lambda^k = 0$$

sein mufs für $k = \infty$.

17.

Spaltung einer Funktion mittelst der Taylor'schen Reihe. Mittelst der Taylor'schen Reihe ist man nun im Stande jede Funktion, welche die oben angegebenen Eigenschaften hat, für binomisch zweiwertige Argumente in einen einwertigen und einen zweiwertigen Bestandteil zu zerlegen. Dieselbe ist nämlich, wenn $x - x_0 = h$ gesetzt wird

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x_0) + \\ + \frac{h^4}{1.2.3.4} f^{(IV)}(x_0) + \ldots\ldots + h^n \lambda^{(n-1)}$$

woraus für ein negatives h sich ergibt:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) - \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x_0) + \\ + \frac{h^4}{1.2.3.4} f^{(IV)}(x_0) + \ldots\ldots \pm h^n \lambda^{(n-1)}$$

Die Zusammenfassung beider Formeln liefert das gesuchte Resultat:

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm h f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) \pm \\ \pm \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x_0) + \ldots (+ \text{ oder } \pm) h^n \lambda^{(n-1)} \quad . \quad . \quad (14)$$

In dieser Formel bedeutet, ihrer Herleitung gemäs, $f(x_0)$ den zu y_0 gehörigen Funktionswert und $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ . . . sind die Differentialquotienten in dem Punkte $[x_0, f(x_0)]$, so dafs $x_0 \pm h$ in erster Reihe nicht die Projection eines Segmentes, sondern die Projection des Polygonzuges der drei auf der Curve liegenden Punkte: $[x_0 - h, f(x_0 - h)]$; $[x_0, f(x_0)]$; $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ ist; aber diese Projection ist gleich der Projection der Schlufslinie des Polygonzuges, also eines Segmentes, dessen Mittelpunkt die Abscisse x_0 hat. Die Ordinate des Mittelpunktes ist daher

$$y = f(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) + \frac{h^4}{1.2.3.4} f^{(IV)}(x_0) + \quad . \quad (15)$$

Ferner ist

$$k = h f'(x_0) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x_0) + \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wenn $f(x \pm h) = y \pm k$ gesetzt wird.

18.

Maxima und Minima der Funktionen. Das zwischen dem Mittelpunkte der Sehne und der Curve auf der Ordinate gelegene Stück ist

$$y - f(x_0) = \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x_0) + \frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} f^{(IV)}(x_0) + \ldots$$

Dasselbe ist positiv, wenn die Curve in dem Intervall $x - h$ bis $x + h$ concav gegen die x Achse ist, negativ dagegen wenn die Curve die convexe Seite der x Achse zukehrt. Es entscheidet also über dieses Verhalten der Curve der zweite Differentialquotient bei sehr kleinem h.

In der Nachbarschaft solcher Werte von x_0, in welcher ein Maximum oder Minimum der Funktion eintritt, ist für sehr kleine Werte von h das k entweder nahezu gleich Null oder wirklich Null, je nachdem der Punkt auf einem Wege in der N a c h b a r s c h a f t der Curve $\lambda = 0$ der Curve $y = f(x)$ sich nähert oder auf jener Curve selbst. Die Formeln (15) und (16) sind demnach die Ausgangspunkte der Theorie der Maxima und Minima einer Funktion einer reellen Variabeln. Erinnert man sich daran, daſs für algebraische Curven λ die Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, so ist die Bedingung dafür, daſs diese Gleichung eine Wurzel $\lambda = 0$ habe, identisch mit der Bedingung für die Existenz eines Maximums oder Minimums. Die Gleichung $\lambda = 0$ liefert alle Punkte der Ebene der Curve, für welche $k = 0$ wird, ohne daſs dies mit h der Fall ist.

Auch die extremen Werte der Funktion lassen sich auf diese Art bestimmen. Die Bedingung dafür nämlich, daſs die Gleichung zur Bestimmung von λ eine unendlich groſse Wurzel habe, liefert die Argumentwerte für jene.

Die Entwickelung einer Funktion zweier unabhängig Variabeln

$$z = f(xy)$$

nach dem Taylor'schen Satze geschieht, nachdem der Beweis dieses Satzes für Funktionen einer Variabeln geführt ist, auf bekannte Weise. Man kann also auch mit Hilfe desselben die Funktion z für zweiteilige zweiwertige unabhängige Variabeln in einen einwertigen und einen zweiwertigen Bestandteil zerlegen, wovon weiter unten gehandelt werden soll. An dieser Stelle sei nur bemerkt, daſs die Theorie der Maxima und Minima einer Funktion zweier Variabeln, welche, wie sie in den Lehrbüchern vorgetragen wird, mangelhaft ist, durch unseren Begriff der allgemeinen Ableitung auf sichererer Basis als dies bisher möglich war aufgebaut werden kann.

III. Das Bogenelement und der Krümmungskreis einer Curve.

19.

Einleitende Betrachtungen. Der Ausdruck $p = h\sqrt{1 + \lambda^2}$ für die halbe Länge der zu einem Punkte xy der Ebene der Curve $y = f(x)$ gehörigen Sehne liefert, wenn für λ jene Wurzel der Resultante (3) gesetzt wird, welche bei unbegrenzter Annäherung des Punktes (xy) an die Curve in den Lagrange'schen Differentialcoëfficienten übergeht, immer eine reelle Sehne, wenn nur h klein genug genommen wird. Die Funktion p von x und y wollen wir in diesem Falle mit $\pi(xy)$ bezeichnen, und demgemäſs schreiben:

$$p = \pi(xy) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es soll nun gezeigt werden, daſs wenn der Punkt (xy) der Curve sich immer mehr nähert und also die Endpunkte der Cardinalsehne $(x_1\, y_1)$ und $(x_2\, y_2)$ immer näher aneinander zu liegen kommen bei unbeschränkter Annäherung (beziehungsweise vollendeter Annäherung, welche dann stattfindet, wenn zwischen den Punkten $(x_1\, y_1)$ und $(x_2\, y_2)$ kein anderer Punkt mehr liegt als der Endpunkt der zu der Abscisse x gehörige Ordinate) der Ausdruck (1) vollkommen exact die halbe Länge des zwischen den Curvenpunkten $(x_1\, y_1)$ und $(x_2\, y_2)$ liegenden Bogenelementes liefert. Bezeichnet man letzteres mit δ, so ist also nach der Behauptung:

$$\delta = \lim \pi(xy) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo für y die untere oder obere Grenze zu setzen ist, zwischen welche der Funktionswert bei der Berechnung aus $y = f(x)$ eingeschlossen wurde, oder, im Falle letzterer vollkommen exact bestimmt werden kann, wenn gesetzt wird $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, wo y_1 und y_2 die Funktionswerte sind, welche zu zwei aufeinanderfolgenden und nur durch das Argument x getrennten Argumentwerten x_1 und x_2 gehören.

Nehmen wir zunächst an $y = f(x)$ sei eine ganze rationale Funktion von x. Werden vorläufig nur rationale Werte des Argumentes zugelassen, so ist, wie bereits früher ausgeführt wurde, das geometrische Gegenstück der Gleichung eine Reihe discreter Punkte, die durch Einschaltung neuer Punkte, deren Coordinaten rationale Zahlen sind, beliebig verdichtet werden kann. Die Verbindung der Endpunkte der aufeinanderfolgenden Ordinaten liefert immer ein Polygon, dessen Seiten auf die angegebene Weise beliebig klein gemacht werden können. Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ n aufeinanderfolgende rationale Werte des Argumentes, und $y_1, y_2, y_3, \ldots \ldots y_n$ die zugehörigen Funktionswerte; dann sind, wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned} x_j - x_i &= 2h_{ji} & y_j - y_i &= 2k_{ji} \\ x_j + x_i &= 2x_{ji} & y_j + y_i &= 2y_{ji} \end{aligned} \quad \ldots \quad (3)$$

die Coordinaten der genannten Polygonseiten dargestellt durch

$$x_{ji} \pm h_{ji} \qquad y_{ji} \pm k_{ji} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Länge des Polygons ist folglich

$$L = \Sigma\Sigma\pi\,(x_{ij}\ x_{ij}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wo statt ij der Reihe nach die Zahlencombinationen 1 2; 2 3; 3 4; ... $(n-1)$, n zu setzen sind, worauf man die sich ergebenden Werte der Funktion π zu addieren hat.

Wenn man also in die Gleichung der Curve an Stelle des Arguments x setzt das binomisch zweiwertige Argument $x_{ij} \pm h_{ij}$ und die Teile dieses Arguments immer den Bedingungen (3) gemäfs wählt, so ergeben sich die zugehörigen Funktionswerte in der Form $y_{ij} \pm k_{ij}$, deren Teile ebenfalls den Bedingungen (3) genügen; kurz, die so berechneten Funktionswerte bestimmen zusammen mit den zugehörigen Argumentwerten n Sehnen, welche sich so aneinanderreihen, dafs ein Endpunkt einer Sehne immer der Anfangspunkt der folgenden Sehne wird. Es entsteht dadurch ein Polygonzug, dessen Seiten um so kleiner sind, je kleiner die rein zweiwertigen Gröfsen h_{ij} angenommen werden.

Dieser Polygonzug geht in eine Curve über, wenn die Reihe der Argumentwerte $x_{ij} \pm h_{ij}$ ein Zahlencontinuum bildet, was der Fall ist, wenn x_{ij} zwar immer noch rational vorausgesetzt wird, h_{ij} dagegen neben rationalen auch irrationale Werte annimmt. Es seien also jetzt h'_{ij} und h''_{ij} zwei rationale Zahlen, h_{ij} dagegen eine irrationale Zahl, und zwar sei letztere so gewählt, dafs immer ist

$$h''_{ij} > h_{ij} > h'_{ij} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und

$$h_{ij} = \lim h'_{ij} = \lim h''_{ij}$$

Die beiden Argumentwerte

$$x_{ij} \pm h'_{ij} \quad \text{und} \quad x_{ij} \pm h''_{ij}$$

liefern dann, wenn sie in $y = f(x)$ eingesetzt werden, zwei Funktionswerte

$$y'_{ij} \pm k'_{ij} \qquad y''_{ij} \pm k''_{ij}$$

so dafs man hat, wenn $y_{ij} \pm k_{ij}$ den idealistisch genauen Funktionswert, der zu dem Argumente $x_{ij} \pm h_{ij}$ gehört, bezeichnet

$$\begin{aligned} y''_{ij} &> y_{ij} > y'_{ij} \\ k''_{ij} &> k_{ij} > k'_{ij} \end{aligned} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

denn es ist allgemein für jedes reelle h:

$$y = f(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^4}{1.2.3.4} f^{(IV)}(x) + \ldots.$$

$$k = f'(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \frac{h^5}{1.2.3.4.5} f^{(V)}(x) + \ldots.$$

Da nun h immer so klein gewählt werden kann, daſs die zweiten Glieder der auf den rechten Seiten stehenden Reihen gröſser sind als die Summen aller nachfolgenden Glieder, so ziehen die Ungleichungen (6) die Ungleichungen (7) nach sich. Errichtet man daher im Endpunkte der Abscisse x'_{ij} die Ordinate, trägt auf ihr y'_{ij} und y''_{ij} auf bis nach den Punkten m' und m'', und wählt zwischen diesen beiden Punkten einen Punkt m der einem Werte von $y'_{ij} + \vartheta\,(y''_{ij} - y'_{ij})$ entspricht, so erhält man durch Construction der diesen Punkten zugehörigen Sehnen eine Figur, welche ein genaues Bild der bezüglichen Gröſsenbeziehungen gibt.

20.

Das Bogenelement. Wir werden daher an die so eben beschriebene Figur unsere weiteren Betrachtungen knüpfen, um zu dem Ausdrucke für das Bogenelement zu gelangen. Die Punkte m' und m'' sind die Mittelpunkte $(x_{ij},\ y'_{ij})$ und $(x_{ij},\ y''_{ij})$ der Sehnen mit den Endpunkten a und a', beziehungsweise b und b' und den Coordinaten $x_{ij} \pm h'_{ij}$, $y'_{ij} \pm k'_{ij}$ bezw. $x_{ij} \pm h''_{ij}$, $y''_{ij} \pm k''_{ij}$. Der Punkt m bezeichnet den Mittelpunkt e i n e r der unendlich vielen Sehnen, welche zwischen den beiden genannten Sehnen liegen. Seine Coordinaten sind $(x_{ij},\ y_{ij})$ und die Coordinaten der Sehne sind $x_{ij} + h_{ij}$, $y_{ij} + k_{ij}$. Es sind demnach a, c, b und a', c', b' zwei Tripel aufeinanderfolgender Curvenpunkte, wenn h'_{ij} und h''_{ij} zwei unmittelbar aufeinanderfolgende rationale Werte des Zahlencontinuums sind. Läſst man nun h'_{ij} und h''_{ij} immer kleiner und kleiner werden, während x_{ij} constant bleibt, bis endlich $h'_{ij} = 0$ wird, so rücken die Punkte m', m, m'' immer näher aneinander, doch so, daſs m immer zwischen m' und m'' zu liegen kommt. Das gleiche ist der Fall bei den Curvenpunkten a, c, b und a', c', b'. Im Grenzfalle $h'_{ij} = 0$ fallen die Punkte a und a' mit m' zusammen, und der Punkt m kommt dem Punkte m' auf der Ordinate so nahe zu liegen, als man nur will, nämlich um so näher, je näher h''_{ij} an h_{ij} und dieses letztere an Null rückt. Man hat also die Ungleichung $bb' > cc' > 0$ oder auch $m''b' > mc' > 0$. Es hängt also die Genauigkeit, mit welcher die Länge des Bogenelementes $m'c'$ bestimmt werden kann, lediglich ab von der Genauigkeit, mit welcher der Wert y_{ij} bestimmt worden ist, d. i. von der Wahl der beiden Grenzen y'_{ij} und

y''_{ij}. Denn das Bogenelement $m'c'$ ist aus einem Dreiecke zu berechnen, von dem man die Seite mc' und die Winkel $c'mm' = \alpha$ und $c'm'm = \beta$ kennt. Der erstere dieser Winkel ist bestimmt durch die allgemeine Ableitung λ, welche die Richtung von mc' angibt, der letztere durch die Richtung von $m'c'$, welche durch die allgemeine Ableitung völlig exact oder durch den Lagrange'schen Differentialcoëfficienten so genau bestimmt werden kann, als man nur will. Daher hat man völlig genau:

$$\overline{m'c'} = \overline{mc'} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Nun ist aber

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}; \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}; \quad \overline{mc'} = h_{ij}\sqrt{1+\lambda^2}$$

Folglich

$$m'c' = h_{ij}\sqrt{1+\mu^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Errichtet man im Punkte x_{ij} die Ordinate, zieht zu einem beliebigen Punkte der letzteren die Sehne und verbindet den einen Endpunkt c_i dieser Sehne mit dem Endpunkt m' der Ordinate auf der Curve, so läſst sich die Richtigkeit vorstehender Formel an dieser Figur leicht bestätigen. Man hätte also von vornherein dieselbe zum Ausgangspunkt der Untersuchung nehmen können. Die aus ihr abgeleitete Formel (8) bleibt dann bestehen, so lange das Dreieck $m\,m'\,c'$ existiert, also auch dann, wenn mc' die l e t z t e der reellen Sehnen ist, welche zu den auf der Ordinatenachse gelegenen Punkten gehören, μ wird aber dann der Lagrange'sche Differentialquotient; denn auf die l e t z t e Sehne folgt immer die Tangente, wenn eine solche überhaupt existiert. Da h_{ij} die Projection der halben letzten Sehne auf die x Achse ist, so bleibt diese Gröſse trotz ihrer unbeschränkten Kleinheit doch immer angebbar. Nach Leibnitz setzt man $h_{ij} = dx$ und das Bogenelement $\lim m'c' = ds$, so daſs man für letzteres hat:

$$ds = dx\sqrt{1+\lambda_t^2} = dx\sqrt{1+[f'(x)]^2} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Für das Stück mm', welches der P f e i l, und wenn m der Mittelpunkt der letzten Sehne ist, die B r e i t e der Curve genannt werden soll, findet sich

$$\overline{mm'} = \overline{mc'} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} h_{ij}(\mu+\lambda)$$

also wenn $d\sigma$ die Breite der Curve bezeichnet

$$d\sigma = 2\lambda_t\,dx = 2f'(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10$$

Das Produkt $d s\, d \sigma$ soll Curvenelement von der zweiten Dimension genannt und mit $d \tau$ bezeichnet werden; es ist dann:

$$d \tau = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \,.\, 2 f'(x)\, d x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Ist die Curve, deren Bogenelement bestimmt werden soll, eine beliebige algebraische oder transcendente, so nimmt man einen Punkt m mit den rationalen Coordinaten x, y in der Nähe der Curve an und berechnet die zugehörigen h und k. Es wird dann h zwischen zwei rationalen Grenzen h' und h'' eingeschlossen sein, und ebenso k zwischen den rationalen Zahlen k' und k'' liegen. Es können somit jetzt durch den Punkt m drei Sehnen gezogen werden, nämlich zunächst die Sehnen $a a'$ und $b b'$, deren Coordinaten beziehungsweise sind $x \pm h'$, $y \pm k'$ und $x \pm h''$, $y \pm k''$, deren Endpunkte a, a' und b, b' aber keine Curvenpunkte sind. Dies trifft nur zu für die Endpunkte c und c' der dritten Sehne $c c'$ mit den Coordinaten $x \pm h$, $y \pm k$. Man hat aber immer die Ungleichung:

$$m b' > m c' > m a'$$

Nähert sich nun der Sehnenmittelpunkt m der Curve, so werden die Sehnen $a a'$, $b b'$ und $c c'$ immer kleiner. Der Punkt m kann aber im allgemeinen nie ganz auf die Curve zu liegen kommen, wenn die Rationalität von y nicht aufgegeben wird. Geschieht dies aber, so hat man wieder dieselben Überlegungen wie oben anzustellen.

21.

Der Krümmungskreis einer Curve. Wir befassen uns zunächst mit der Lösung der algebraisch-geometrischen Aufgabe, den Krümmungskreis an einen beliebigen Punkt eines Kegelschnittes zu legen, d. i. auf rechnerischem Wege den Mittelpunkt und Radius des Krümmungskreises zu bestimmen. Unter dem Krümmungskreis ist bekanntlich der Kreis zu verstehen, welcher durch drei consecutive Punkte der Curve geht. Demselben entspricht, wenn die drei Punkte endliche Abstände von einander haben, ein gewisser Kreis, dessen Beziehung zum Kegelschnitte nun näher festgestellt und hierauf dann die rechnerische Behandlung des Problems in Angriff genommen werden soll.

Es seien A, B, C drei Punkte eines Kegelschnittes. Durch dieselben läfst sich immer ein Kreis legen, welcher den Kegelschnitt notwendig noch in einem vierten reellen Punkte D trifft. Dieser Kreis gehört offenbar dem Systeme von Kreisen an, welches durch die Endpunkte der Sehne $A C$ gelegt werden kann. Aber nicht alle diese Kreise schneiden den Kegelschnitt so, dafs die beiden anderen Schnittpunkte B und D zu verschiedenen Seiten der Sehne AC liegen und unter jenen, welche die letztere Lage haben, gibt es nur einen einzigen, für welchen die Verbindungsgerade der variabeln Punkte B und D durch den Punkt M, den Mittelpunkt der Sehne AC geht. (Die Verbindungsgerade dieser Punkte hat bekanntlich für alle Kreise des Systems eine constante Richtung.) Es ist dies jener Kreis, für welchen die Polaren des Punktes M in Bezug auf Kreis und Kegelschnitt zusammenfallen. Denn da M der Mittelpunkt der Sehne AC ist, so sind fürs erste die beiden Polaren parallel der Sehne AC. Bezeichnet man nun die Schnittpunkte der Sekante MB mit den beiden Polaren mit P und Q, und jene mit Kegelschnitt und Kreis mit P' und Q', dann sind $P'B$; MP vier harmonische Punkte und ebenso $Q'B$; MQ. Soll nun P' mit Q' zusammenfallen (in den Punkt D), so mufs dies auch der Fall sein mit P und Q d. h. die Polaren von M fallen zusammen. Jener Kreis des durch die zwei Punkte A und C bestimmten Kreissystems, dessen Polare mit der Polare des Kegelschnittes, genommen für den Punkt M, zusammenfällt, schneidet den Kegelschnitt in zwei solchen Punkten, dafs ihre Verbindungsgerade durch den Punkt M geht. Es sind die Ordnungselemente der auf dieser Geraden von dem Kreissystem ausgeschnittenen Involution. Deshalb soll der genannte Kreis Ordnungskreis genannt werden.

Der Ordnungskreis geht in den Krümmungskreis über, wenn der Mittelpunkt M der Sehne AC auf den Kegelschnitt rückt. Denn für ihn bleiben die beiden Schnittpunkte B und D immer zu verschiedenen Seiten der Sehne AC. Es liegt also B auf dem Bogen ABC immer zwischen A und C, und wenn M auf den Kegelschnitt rückt, so fallen die drei Punkte A, B, C zusammen, der Kreis hat also drei aufeinanderfolgende Punkte mit dem Kegelschnitt gemein und ist somit Krümmungskreis für denselben in jenen Punkten.

Es ist nun leicht den Radius und die Coordinaten des Mittelpunktes des Ordnungskreises zu berechnen. Ist nämlich

$$f(xy) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

die Gleichung des Kegelschnittes, so ergibt sich aus

$$f(x \pm h,\ y \pm k) = f(xy) \pm h f'(x) \pm k f'(y) + \\ + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + h k f''(xy) + k^2 f''(y) = 0$$

zunächst die Richtung λ und die halbe Länge π einer Sehne aus den Formeln:

$$\lambda = \frac{k}{h} = -\frac{f_1}{f_2};\quad \pi^2 = \frac{f}{f_{11} + 2\lambda f_{12} + \lambda^2 f_{22}}\left(1 + \frac{f_1^2}{f_2^2}\right) \quad . \quad . \quad (13)$$

wenn der Kürze wegen gesetzt wird:

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x};\quad f_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y};\quad f_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Eliminiert man λ aus den Formeln (13) so ergibt sich für das Quadrat der halben Länge der Sehne AC des Kegelschnittes der Ausdruck

$$\pi^2 = \frac{f(f_1^2 + f_2^2)}{f_{11} f_2^2 + 2 f_1 f_{12} f_2 + f_1^2 f_{22}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Der Abstand $\triangle$ des Sehnen-Mittelpunkts M von der Polare ist, wenn x, y die Coordinaten des Mittelpunktes sind,

$$\triangle = \frac{x f_1 + y f_2 + f_3}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} = \frac{f}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Ist M' der Fufspunkt des Lotes $\triangle$ auf der Polaren, so sind seine Verbindungsgeraden mit den Endpunkten der Sehne 2π Tangenten an den Ordnungskreis, wornach letzterer leicht gezeichnet werden kann. Ist nun R der Abstand des Mittelpunktes des Ordnungskreises von der Sehne 2π, so hat man nach einem Satze der Elementargeometrie:

$$\triangle\, R = \pi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Durch Substitution der Werte für $\triangle$ und π^2 folgt hieraus für den Abstand R die Formel:

$$R = \frac{(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}}{f_{11} f_2^2 + 2 f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Um die Coordinaten α, β des Mittelpunktes des Ordnungskreises und seinen Radius R_1 zu finden, sei

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R_1^2$$

seine Gleichung. Dieselbe zerfällt für binomisch zweiwertige Coordinaten $x \pm h$, $y \pm k$ in die beiden folgenden:

$$\lambda = \frac{k}{\lambda} = -\frac{x - \alpha}{y - \beta};\quad \pi^2 = R_1^2 - (x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2 \quad (18)$$

wodurch Richtung und Gröfse der Potenz des Punktes $x\,y$ bestimmt sind, in Bezug auf den Kreis als Grundcurve. Betrachtet man aber den Kegelschnitt als Grundcurve, so hat man hiefür die Ausdrücke (13). Da nun beide Ausdrücke für λ und π^2 dasselbe Resultat liefern sollen, so hat man zur Bestimmung von α, β die beiden Gleichungen:

$$\frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{f_1}{f_2};\quad R_1^2 - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2 = \frac{f}{H}(f_1^2 + f_2^2) \quad (19)$$

wenn H im Nenner des Bruches (14) für π^2 die Hesse'sche Determinante bedeutet. Nun ist aber offenbar:

$$R_1^2 = R^2 + \pi^2$$

also sind α und β aus den Gleichungen:

$$(x - \alpha) f_2 - (y - \beta) f_1 = 0 \qquad R^2 - (x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2 = 0 \quad (20)$$

zu bestimmen.

Es gehört demnach zu jedem Punkte xy der Ebene eines Kegelschnittes ein Ordnungskreis, dessen Mittelpunkt gefunden wird, wenn man zu der Sehne des Punktes in diesem die Normale construiert, dann zu der halben Sehne und dem Abstand derselben von der Polare des Punktes die dritte Proportionale sucht, und diese auf der Normale nach der entgegengesetzten Seite der Polare vom Punkte xy aus abträgt.

Die Gleichungen (17) und (20) liefern Radius und Mittelpunkt des Krümmungskreises, wenn der Punkt xy auf den Kegelschnitt rückt. Vorstehende Construction ist aber dann nicht mehr ausführbar. Es kann aber auch in diesem Falle eine einfache geometrische Construction angegeben werden, wie bekannt.

Das gleiche Verfahren wie das so eben für Kegelschnitte entwickelte läſst sich bei einer beliebigen algebraischen Curve anwenden, wenn es sich um rein algebraische Bestimmung des Krümmungskreises handelt. Es tritt dann nur an Stelle der Polare des Punktes xy in Bezug auf den Kegelschnitt die geradlinige Polare desselben in Bezug auf die algebraische Curve. Da nämlich das Quadrat der halben Sehne des Punktes (xy) gegeben ist durch

$$\pi^2 = h^2 + k^2$$

wenn h und k die aus den Teil-Gleichungen von

$$f(x \pm h, y \pm k) = 0$$

genommenen Werte sind, oder durch

$$\pi^2 = (1 + \lambda^2)\, u\,(\lambda)$$

wenn λ die der Sehne zugehörige Wurzel der bekannten Resultante ist und $u\,(\lambda)$ die auf Seite 2) angegebene Bedeutung hat; da ferner

$$\frac{f}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$$

der Abstand des Punktes (xy) von der geradlinigen Polare ist, so muſs die Beziehung erfüllt werden:

$$\frac{f R}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} = (1 + \lambda^2)\, u(\lambda)$$

woraus der Abstand R des Mittelpunktes des Ordnungskreises von der Sehne des Punktes xy:

$$R = \frac{(1 + \lambda^2)\, u(\lambda) \cdot \sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

bestimmt werden kann als Funktion der Coordinaten dieses Punktes. Die Gleichungen (20) liefern dann die Coordinaten des Mittelpunktes des Ordnungskreises.

In den Ausdruck (21) können der Reihe nach sämtliche Werte von λ, die die Resultante ergibt, substituiert werden. Es gibt also für jeden Punkt ebensoviele Ordnungskreise als Sehnen durch ihn an die Curve gelegt werden können, und dies ist auch dann noch der Fall, wenn der Punkt auf die Curve rückt. Einer dieser Kreise ist aber dann der Krümmungskreis. Für ihn ist

$$\lim u(\lambda) = \frac{f}{\varphi_2} \qquad \lim \lambda = -\frac{f_1}{f_2}$$

wenn φ_2 die mit f_2^2 dividierte Hesse'sche Determinante bezeichnet. Wie sich aus den bekannten $f(xy) = 0$ entspringenden Partialgleichungen ergibt, wenn die höheren Potenzen von h vernachlässigt werden. Dadurch geht aber die Formel (21) in die Formel (17) über. Dieselbe ist für algebraische Curven also allgemein giltig und nichts hindert daran, dieselbe auch für transcendente Curven zuzulassen.

IV. Grundzüge einer Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung.

22.

Geometrische Deutung binomisch zweiwertiger Coordinaten im Raume. Die binomisch zweiwertigen Coordinaten:

$$X = x \pm \xi \qquad Y = y \pm \eta \qquad Z = z \pm \zeta \quad . \quad . \quad (1)$$

stellen ein Segment im Raume dar, dessen Mittelpunkt bestimmt ist, durch die einwertigen Bestandteile x, y, z dieser Coordinaten, und dessen Richtung festgelegt wird durch die zweiwertigen Bestandteile ξ, η, ζ derart, dafs wenn α, β, γ die Neigungswinkel des Segmentes gegen die Achsen sind, die Proportion statt findet

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \xi : \eta : \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Der Quadratwurzelausdruck

$$\pi = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

endlich gibt die halbe Länge des Segmentes an. Das letztere ist reell oder imaginär zu signieren, je nachdem der Quadratwurzelausdruck, die Potenz, reell oder imaginär ist. Letzteres ist der Fall, wenn die zweiwertigen Bestandteile der Coordinaten des Segmentes imaginär sind.

23.

Partielle abgeleitete Funktionen. Bezeichnet man die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projectionen des Segmentes auf die Coordinatenebenen der xz und yz mit der x, beziehungsweise y Achse machen mit λ und μ, dann ist

$$\lambda = \frac{\zeta}{\xi} \qquad \mu = \frac{\zeta}{\eta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Diese Formeln zur Bestimmung der Richtung eines durch binomisch zweiwertige Coordinaten gegebenen Segmentes sind von ganz besonderer Wichtigkeit. Verschwinden nämlich die zweiwertigen Bestandteile der Coordinaten (1), stellen letztere also einen gewöhnlichen reellen Punkt dar, dann werden die Ausdrücke (4) unbestimmt. In dem Falle jedoch, daſs zwischen den Variabeln X, Y, Z eine Gleichung

$$F(X, Y, Z) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

besteht, deren Coëfficienten wir uns vorläufig als reell denken wollen, gehen die (4) über in die partiellen Ableitungen von z nach x und y genommen, wenn der Punkt x, y, z auf die Fläche (5) rückt, vorausgesetzt daſs ξ, η, ζ unter andern Werten regelmäſsig, besondere Punkte ausgenommen, zu Null werden für einen Punkt der Fläche. Man hat also

$$\lambda = \lim \left[\frac{\zeta}{\xi}\right]_{\xi=\zeta=0} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \mu = \lim \left[\frac{\eta}{\xi}\right]_{\xi=\eta=0} = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (6)$$

Für $y = \text{const}$ zerfällt nämlich die Gleichung (5), wenn man in ihr $X = x \pm \xi$, $Z = z \pm \zeta$ setzt, in die beiden folgenden:

$$F_1(x\, z\, \xi\, \zeta) = 0 \qquad F_2(x\, z\, \xi\, \zeta) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

aus welchen λ bestimmt werden kann dadurch, daſs man $\zeta = \lambda\,\xi$ setzt und dann aus beiden Gleichungen ξ eliminiert. Die Endgleichung $R(\lambda) = 0$ ist bezüglich λ vom Grade $\dfrac{n(n-1)}{2}$, wenn n der Grad der Gleichung (5) in x, y, z ist. Unter ihren Wurzeln ist dann eine, welche, wenn der Punkt xyz auf die Schnittcurve der Oberfläche (5) mit der xz Ebene oder mit einer dazu parallelen Ebene rückt, die trigonometrische Tangente des Winkels angibt, den die geometrische Tangente in diesem Punkte der Schnittcurve mit der x Achse macht.

Setzt man in (5) $Y = y \pm \eta$ $Z = z \pm \zeta$ und $x = \text{const}$, so ergeben sich zwei Gleichungen

$$f_1 (y z \zeta \eta) = 0 \qquad f_2 (y z \zeta \eta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

aus welchen durch Elimination von η, nachdem man vorher $\zeta = \mu \eta$ gesetzt hat, eine Endgleichung $\frac{n(n-1)}{2}$ ten Grades in $\mu : R_1 (\mu) = 0$ resultiert, deren $\frac{n(n-1)}{2}$ Wurzeln die Richtungen der Segmente angeben, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt auf der Schnittcurve $x = \text{const}$ mit $F(x, y, z) = 0$ haben. Unter diesen ist notwendig eine Wurzel, welche die Richtung des Segmentes von der Länge Null oder der Tangente bestimmt.

Legt man durch den Punkt (x, y, z) eine beliebige Ebene

$$AX + BY + CZ + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so erhält man für binomisch zweiwertige Variabele hieraus und aus (5) unter Berücksichtigung von (4) die drei Gleichungen

$$F_1 (x y z \lambda \mu \zeta) = 0 \qquad F_2 (x, y, z, \lambda, \mu, \zeta) = 0$$
$$A\mu + B\lambda + C\lambda\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Eliminiert man aus den beiden ersten Gleichungen ζ, so erhält man die Resultante

$$\Omega (\lambda, \mu) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

welche zusammen mit (10) die Richtungen der Segmente mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte (x, y, z) liefern, und die in der Ebene (9) sich erstrecken. Die Endpunkte der Segmente liegen paarweise gleich weit von x, y, z entfernt auf der Oberfläche (5) und können ebensowohl, je nach der Lage des Punktes (x, y, z), reell als imaginär sein. Rückt nun der Punkt (x, y, z) auf die Oberfläche (5), so liefern die (10) und (11) sämtliche zu ihm gehörige Segmente, darunter auch die Tangente an die Schnittcurve der Oberfläche (5) mit der Ebene (9).

Die Gleichung (11) liefert für sich allein die Richtungen von einfach unendlich vielen Segmenten. Die diese Richtungen anzeigenden Geraden gehen alle durch den Punkt (x, y, z). Dieselben bilden also eine Kegelfläche, deren Erzeugende durch die Wurzeln der Gleichungen (11), welche Funktionen von x, y, z sind, sich bestimmen. Wir nennen diese Wurzeln die partiellen allgemeinen abgeleiteten Funktionen von $F(x, y, z) = 0$ für diesen Punkt.

Die beiden ersten Gleichungen (10), in welchen x, y, z als constant, ξ, η, ζ als variabel anzusehen sind, stellen für einen beliebigen Punkt x, y, z des Raumes zwei Oberflächen dar, wenn man die Variabeln ξ, η, ζ auf ein Coordinatensystem bezieht, dessen Anfangspunkt der Punkt (x, y, z) und dessen Achsen parallel sind den Achsen des alten Systems, auf welches die Gleichung (1) bezogen wurde. Beide Oberflächen durchdringen sich in einer Curve, welche im Allgemeinen doppelt gekrümmt ist, und symmetrisch zum Punkte (x, y, z) liegt. Man nennt sie die Indicatrix des Punktes x, y, z. Die Indicatrix eines Raumpunktes in Bezug auf die Oberfläche (1) ist also die Leitlinie des Kegels, welcher so eben erwähnt wurde. Eine beliebige durch den Punkt (x, y, z) gelegte Ebene schneidet den Kegel in jenen Erzeugenden, deren Längen 2π durch den doppelten Abstand der Spitze des Kegels von der Indicatrix gemessen werden, und welche durch Elimination von ξ, η, ζ aus

$$F_1 = 0 \qquad F_2 = 0 \qquad A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$
$$\pi^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

erhalten werden. Diese Erzeugenden sind zugleich die Sekanten der Oberfläche (1) im Punkte (x, y, z). Die Indicatrix ist es, welche bei der Untersuchung der besonderen Punkte einer Oberfläche eine hervorragende Rolle spielt, insbesondere auch bei Aufstellung der Criterien für die Maxima und Minima einer Funktion zweier Variabeln.

24.

Mittelpunkt und Indicatrix einer Oberfläche zweiter Ordnung. Die Anwendung der in den vorigen Nummern niedergelegten Anschauungen führt zu einer außerordentlich einfachen Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, welche in dieser und den nachfolgenden Nummern dieses Abschnittes skizziert werden soll.

Es sei

$$f \equiv x f_1 + y f_2 + z f_3 + f_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

die Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung, f_1, f_2, f_3, f_4 also gewisse lineare Funktionen von x, y, z. Für binomisch zweiwertige Veränderliche $x \pm \xi$, $y \pm \eta$, $z \pm \zeta$ zerfällt dieselbe in die zwei Gleichungen:

$$f + (a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta) = 0 \quad (13)$$
$$\xi f_1 + \eta f_2 + \zeta f_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Da der **Mittelpunkt** der Oberfläche zweiter Ordnung **sämtliche** durch ihn gehende Sehnen halbiert und dieselben jede mögliche Richtung haben, so mufs die Endgleichung, welche durch Elimination von ζ mittelst $\xi = \lambda\zeta$ $\eta = \mu\zeta$ aus (13) und (14) erhalten wird, für jeden Wert von λ und μ verschwinden, also **identisch** Null sein. Diese Endgleichung ist aber

$$\frac{f(\lambda f_1 + \mu f_2 + f_3)^2}{a_{11}\lambda^2 + a_{22}\mu^2 + 2a_{12}\lambda\mu + 2a_{13}\lambda + 2a_{23}\mu + a_{33}} = 0$$

und somit kann jener Forderung nur durch die Gleichungen

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = 0 \qquad f_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

genügt werden, wenn der Mittelpunkt nicht auf der Oberfläche $f = 0$ selbst liegt. Ist letzteres der Fall, dann fehlt in der Gleichung (13) das erste Glied f, und es braucht also blos die (14) identisch erfüllt zu sein, was wieder die (15) zur Folge hat.

Die Gleichungen (13) und (14) stellen die **Indicatrix** des Punktes $(x\,y\,z)$ dar. Dieselbe ist ein **Centralschnitt** der Oberfläche (13), wenn $(x\,y\,z)$ als constant, ξ, η, ζ aber als variabel angesehen werden, wie auf der vorigen Seite angegeben worden ist. **Sämtliche Segmente eines Raumpunktes (x, y, z) in Bezug auf die Oberfläche (12) bilden somit in ihren Verlängerungen ein ebenes Strahlbüschel, und die Endpunkte derselben liegen auf einem Kegelschnitt, der Indicatrix des Punktes.**

Um die Länge eines Segmentes des Punktes (x, y, z) oder was jetzt dasselbe ist, eines beliebigen Durchmessers der Indicatrix zu bestimmen, legen wir durch letzteren eine beliebige Ebene

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

welche normal zur Ebene der Indicatrix ist und deren Constanten also die Bedingung erfüllen:

$$A f_1 + B f_2 + C f_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Durch Auflösung der Gleichungen (14) und (16) ergibt sich, wenn u, v, w die aus den Coëfficienten derselben gebildeten zweigliedrigen Determinanten bedeuten, und ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist

$$\xi = \varrho u \qquad \eta = \varrho v \qquad \zeta = \varrho w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Durch Substitution dieser Werte in (13) erfolgt dann:

$$\varrho^2 = \frac{f}{a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw} \quad (19)$$

Somit ist die Potenz $\pi = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ gegeben durch die Formel

$$\pi = \varrho\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Nun sind bekanntlich u, v, w proportional den Cosinusen der Neigungswinkel, welche die Durchschnittsgerade der Ebenen (14) und (16) mit den Coordinatenachsen bilden. Also ist für

$$\mu^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$u = \mu \cos \alpha \qquad v = \mu \cos \beta \qquad w = \mu \cos \gamma \quad . \quad . \quad (21)$$

und daher wird

$$\pi^2 = \frac{f}{a_{11} \cos^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \beta + a_{33} \cos^2 \gamma + 2 a_{12} \cos \alpha \cos \beta + \ldots} \quad (22)$$

aus welchem Ausdrucke die Länge π des Durchmessers der Indicatrix für jede Richtung α, β, γ desselben berechnet werden kann.

25.

Hauptachsen einer Oberfläche II. Ordnung und der Indicatrix. Aus der Form der Gleichung (14) der Ebene der Indicatrix ergibt sich, dafs für alle Punkte der Verbindungslinie eines Raumpunktes (x, y, z) mit dem Mittelpunkte der Oberfläche (12) die Ebene ihrer Indicatricen parallel untereinander sind. Für die Punkte einer Hauptachse der Oberfläche zweiter Ordnung sind diese Ebenen aufserdem senkrecht zu derselben. Umgekehrt findet man also die Hauptachsen einer Oberfläche zweiter Ordnung, wenn man alle jene Punkte $(x\, y\, z)$ aufsucht, für welche die Indicatrixebenen senkrecht auf ihrer Verbindungsgeraden mit dem Mittelpunkte sind. Bezeichnet also ϱ einen Proportionalitätsfaktor, und ist $(x_0\, y_0\, z_0)$ der Mittelpunkt der Oberfläche (12), so ist die Bedingung dafür, dafs die Ebene des Punktes (x, y, z) senkrecht stehe auf der genannten Verbindungsgeraden ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\varrho\,(x - x_0) = f_1; \quad \varrho\,(y - y_0) = f_2; \quad \varrho\,(z - z_0) = f_3 \quad . \quad (23)$$

oder unter Benützung der Werte für f_1, f_2, f_3:

$$\begin{aligned} x\,(a_{00} - \varrho) + y\, a_{01} + z\, a_{02} &= -\varrho\, x_0 \\ x\, a_{01} + y\,(a_{11} - \varrho) + z\, a_{12} &= -\varrho\, y_0 \\ x\, a_{02} + y\, a_{21} + (a_{22} - \varrho)\, z &= -\varrho\, z_0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Sollen diese Gleichungen unendlich viele Lösungen zulassen für x, y, z, so mufs ihre Determinante verschwinden; es mufs also sein

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} - \varrho, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11} - \varrho, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so geben die Gleichungen

$$x : y : z = \Delta' : \Delta'' : \Delta''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

wo Δ', Δ'', Δ''' die Unterdeterminanten nach einer Zeile genommen sind, die Richtungen der Geraden an, für welche die Ebene der Indicatrix senkrecht steht auf dem zugehörigen Durchmesser der Oberfläche. Da die (25) drei Wurzeln ϱ hat, so gibt es drei solche Gerade. Es sind dies die Hauptachsen der Oberfläche zweiter Ordnung. Für ihre Längen

$$p_i = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

findet man aus (23):

$$p_i = \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}{\varrho_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

wenn die ϱ_i die Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ bedeuten, und wenn die Coordinaten der Schnittpunkte der drei Geraden (26) mit der Oberfläche in f_1, f_2, f_3 eingesetzt werden.

Die Gleichungen (13) und 14) der Indicatrix haben für sich eine selbständige Existenz, sobald x, y, z als fest und ξ, η, ζ als variabele Coordinaten angesehen werden. Man ist also berechtigt sie ebenfalls einer Interpretation mittelst binomisch zweiwertiger Coordinaten zu unterziehen. Substituiert man in denselben an die Stelle von ξ, η, ζ die binomisch zweiwertigen Variabelen $\xi \pm \xi'$, $\eta \pm \eta'$, $\zeta \pm \zeta'$, so ergeben sich neben der (14) noch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi'^2 + a_{22}\eta'^2 + a_{33}\zeta'^2 + 2a_{12}\xi'\eta' + 2a_{13}\xi'\zeta' + 2a_{23}\eta'\zeta' &= F \\ \xi' F_1 + \eta' F_2 + \zeta' F_3 &= 0 \quad (28) \\ \xi' f_1 + \eta' f_2 + \zeta' f_3 &= 0 \end{aligned}$$

wenn man die linke Seite der Gleichung (13) mit F bezeichnet und F_1, F_2, F_3 die partiellen Derivierten dieser Funktion sind.

Durch Auflösung der Gleichungen (28) nach ξ', η', ζ' ergibt sich

$$\xi' = \varrho\,(f_3 F_2 - f_2 F_3) \quad \eta' = \varrho\,(f_1 F_3 - f_3 F_1) \quad \zeta' = \varrho\,(f_2 F_1 - f_1 F_2)$$

wenn ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist und den Wert hat:

$$\varrho^2 = \frac{F}{a_{11} u_1^2 + a_{22} v_1^2 + a_{33} w_1^2 + 2a_{12} u_1 v_1 + 2a_{13} u_1 w_1 + 2a_{23} u_1 w_1}$$

Es ist also die Potenz P irgend eines Punktes (ξ, η, ζ) in der Ebene der Indicatrix:

$$P^2 = \frac{F}{M}\,(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$u_1 = f_3 F_2 - f_2 F_3 \quad v_1 = f_3 F_2 - f_2 F_3 \quad w_1 = f_2 F_1 - f_1 F_2$$

$$M = a_{11} u_1^2 + a_{22} v_1^2 + a_{33} w_1^2 + 2a_{12} u_1 v_1 + 2a_{13} u_1 w_1 + 2a_{23} v_1 w_1 \quad (30)$$

Die Richtung der Potenz ist bestimmt durch

$$\cos\alpha_1 = \mu_1 u_1 \qquad \cos\beta_1 = \mu_1 v_1 \qquad \cos\gamma_1 = \mu_1 w_1 \quad . \quad (31)$$

wo ist:
$$\mu_1 = 1 : \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}$$

Die Richtung eines Durchmessers der Indicatrix ist aber durch die Formeln (21) gegeben. Damit nun der Punkt ξ, η, ζ in der Ebene der Indicatrix eine Hauptachse derselben bestimme, d. i. also ein Segment, das auf dem zugehörigen Durchmesser senkrecht steht, ist erforderlich, dafs

$$\mu\mu_1 (u u_1 + v v_1 + w w_1) = 0$$

sei; denn dies ist die bekannte Bedingung dafür, dafs die Richtung des Segmentes, dessen Mittelpunkt (ξ, η, ζ) ist, mit jener des Durchmessers, der zu (ξ, η, ζ) gehört, einen rechten Winkel einschliefst. Man hat also zur Bestimmung der Coordinaten ξ, η, ζ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi u_1 + \eta v_1 + \zeta w_1 &= 0 \\ \xi f_1 + \eta f_2 + \zeta f_3 &= 0 \end{aligned} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (32)$$

deren Lösungen

$$\sigma' \xi = (v_1 f_3 - w_1 f_2) \quad \sigma' \eta = (u_1 f_3 - w_1 f_1) \quad \sigma' \zeta = (u_1 f_2 - v_1 f_1) \quad (33)$$

in (30) gesetzt, für σ' eine cubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{00} - \sigma', & \alpha_{01}, & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} - \sigma', & \alpha_{12} \\ \alpha_{20}, & \alpha_{21}, & \alpha_{22} - \sigma' \end{vmatrix} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (33)$$

ergeben, wenn man u_1, v_1, w_1 eliminiert. Diese cubische Gleichung reduciert sich aber bei unserer Betrachtung auf eine quadratische Gleichung. Sind die Wurzeln derselben bestimmt, so liefern die (33) die Richtungen der Hauptachsen der Indicatrix. Die Längen der letzteren werden dann durch Substitution der Verhältnisse $\xi : \eta : \zeta$, wie sie sich aus (33) ergeben, in die Gleichung (13) erhalten.

Der Ausdruck im Nenner von (22) stellt bekanntlich das reciproke Quadrat des Durchmessers der Oberfläche zweiter Ordnung dar, welcher mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet. Bezeichnet man seine Länge mit p, so ist $f = \pi^2 : p^2$. Sind nun m und n die Längen der Hauptachsen der Indicatrix eines Punktes (x, y, z) und M, N die Hauptachsen des mit ihr parallelen Centralschnittes, so ist

$$f = \frac{m^2}{M^2} \qquad f = \frac{n^2}{N^2}$$

und folglich

$$f^2 = \frac{m^2 n^2}{M^2 N^2}$$

Durch Ausziehen der Quadratwurzel und durch Multiplikation mit π im Zähler und Nenner des Bruches rechter Hand, ergibt sich endlich

$$f = \frac{m\,n\,\pi}{M\,N\,\pi} = \frac{i}{I} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

wenn i den Inhalt der Indicatrix und I den Inhalt des mit ihr parallelen Centralschnitts bezeichnet.

26.

Rechteck aus dem Krümmungsradius und dem Abstand des Centrums von der Tangentialebene. Bezeichnet man den Abstand des Raumpunktes (x, y, z) von seiner Polarebene mit $\triangle$ und mit δ den Abstand des Centrums der Oberfläche, dann hat man, da

$$\frac{xf_1 + yf_2 + zf_3 + f_4}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}} = 0$$

die Gleichung der Polarebene ist

$$\triangle = \frac{f}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}} \qquad \delta = \frac{-1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}$$

und folglich: $f = \triangle : \delta$. Durch Gleichsetzung mit $f = \pi^2 : p^2$ folgt $\pi^2 = \triangle \frac{p^2}{\delta}$.

Wir werden aber sogleich zeigen, daſs auch $\pi^2 = \triangle r$ ist, wenn r den Krümmungsradius eines Normalschnittes bedeutet. Man hat daher, wie bekannt,

$$r = \frac{p^2}{\delta} \quad \text{oder} \quad r\delta = p^2 \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

27.

Kreispunkte einer Oberfläche II. Ordnung. Die Ebenen der Indicatricen aller Raumpunkte, für welche ist

$$f_1 : f_3 = \lambda \qquad f_2 : f_3 = \mu \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

wo λ und μ Constante bedeuten, sind zueinander parallel. Aus den Gleichungen (13) und (14) einer Indicatrix ergibt sich daher, daſs, wenn dieselbe für einen Punkt der Geraden (36) ein Kreis ist, dies für alle andern Punkte derselben auch der Fall sein muſs. Ist R der Radius des Kreises, so hat man neben den Gleichungen (13) und (14) noch die Gleichung der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

welche von ξ, η, ζ erfüllt wird. Für die Punkte, in welchen die Gerade (36) die Oberfläche $f = 0$ trifft, ist $R = 0$, und somit liefert das Eliminationsresultat von ξ, η, ζ aus:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 0 \qquad (38) \\ \xi f_1 + \eta f_2 + \zeta f_3 &= 0 \end{aligned}$$

den Ort der Punkte auf der Oberfläche $f = 0$, für welche die Indicatricen Kreise sind.

Bezeichnet man die Wurzeln der beiden ersten Gleichungen mit

$$\frac{\eta}{\xi} = \alpha_k \pm \beta_k i \qquad \frac{\zeta}{\xi} = a_k \pm b_k i \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

so ist

$$f_1 + (\alpha_k \pm \beta_k i) f_2 + (a_k \pm b_k i) f_3 = 0 \quad . \; . \; . \quad (39)$$

das Eliminationsresultat. Die reellen Schnittlinien je zweier conjugierter imaginärer Ebenen schneiden auf der Oberfläche die Kreispunkte aus. Für die Punkte dieser Schnittlinien sind also alle Indicatricen Kreise, ebenso für die Schnittlinien der Ebenen:

$$\begin{aligned} f_1 + \alpha_k f_2 + a_k f_3 &= 0 \\ \pm \beta_k f_2 \pm b_k f_3 &= 0 \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise lassen sich die Kreispunkte einer beliebigen Oberfläche bestimmen.

28.

Die Kugel und eine beliebige Oberfläche II. Ordnung. Ist neben der Oberfläche zweiter Ordnung mit der Gleichung (12) noch eine Kugel mit der Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

gegeben, so hat man für jeden Raumpunkt zwei Indicatricen, nämlich eine für die Oberfläche und eine für die Kugel. Der Durchmesser der einen, zur Oberfläche zweiter Ordnung gehörigen Indicatrix, ist bestimmt durch

$$\pi^2 = \triangle \cdot \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

wenn (α, β, γ) die Richtung des Durchmessers ist und φ die quadratischen Glieder der Funktion f vorstellt, nachdem x, y, z ersetzt sind durch $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, wie in (22). $\triangle$ ist der Anstand des Punktes $(x\, y\, z)$ von seiner Polarebene, wie er in Nummer 26 gegeben ist. Die Indicatrix desselben Punktes für die Kugel ist ein Kreis mit dem Radius

$$\pi'^2 = \triangle' . R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

wenn π' den Radius, R den Abstand des Mittelpunktes der Kugel vom Punkte (x, y, z), und $\triangle'$ den Abstand des letzteren von der Polarebene in Bezug auf die Kugel bedeutet. Die Ebenen der beiden Indicatricen sind

$$\xi f_1 + \eta f_2 + \zeta f_3 = 0$$

$$\xi (x - a) + \eta (y - b) + \zeta (z - c) = 0^* \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Damit dieselben zusammenfallen, mufs sein

$$\mu (x - a) = f_1 \qquad \mu (y - b) = f_2 \qquad \mu (z - c) = f_3 \,. \quad (44)$$

Es befinden sich also alle Punkte, deren Indicatricen für Kugel und Oberfläche in derselben Ebene liegen, auf einer Raumcurve vierter Ordnung. Ändert man die Fragestellung dahin, die Lage der Kugel zu bestimmen, so dafs die Ebene der Indicatrix eines Raumpunktes in Bezug auf die feste Oberfläche (1) zusammenfällt mit der Indicatrix-Ebene desselben Punktes in Bezug auf die Kugel, so beantworten die (44) die Frage damit, dafs der Mittelpunkt (a, b, c) der Kugel auf der Normalen zur Indicatrix-Ebene der Oberfläche im Punkte (x, y, z) liegen müsse. Aus (44) folgt:

$$\mu^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{R^2} \qquad R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \quad (45)$$

Wählt man also R beliebig, so ist μ bestimmt und die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel können berechnet werden. Der Radius der Kugel kann aber durch die weitere Festsetzung, dafs $\triangle = \triangle'$ sein soll, dafs also die Polarebenen des Punktes $(x\ y\ z)$ in Bezug auf Kugel und Oberfläche zusammenfallen sollen, aus der Gleichung

$$\frac{f}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

bestimmt werden. Die Ausdrücke für die Potenzen des Raumpunktes werden dann durch Division die Gleichung liefern:

$$\pi^2 : \pi'^2 = \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}{\varphi\ (\alpha, \beta, \gamma)} : R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Für die Punkte, in welchen sich die beiden Indicatricen schneiden, ist $\pi = \pi'$ und demgemäfs wird

$$R = \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}{\varphi\ (\alpha, \beta, \gamma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

und nach (46):

$$r^2 = R^2 - R^2 \frac{f^2}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} = \frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{[\varphi\ (\alpha\ \beta\ \gamma)]^2} \left(1 - \frac{f^2}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}\right)$$

Es wird also für alle Punkte auf der Oberfläche (12) $R = r$ d. h. die Kugel berührt die Ebene der Indicatricen und also auch die Oberfläche. Die Formel

$$r^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{[\varphi(\alpha \beta \gamma)]^2} \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

liefert dann für alle Normalschnitte (α, β, γ) der Oberfläche (12) den Krümmungsradius.

V. Das bestimmte Integral.

29.

Begriffsbestimmung. Das bestimmte Integral ist definiert durch:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \left\{ (x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \right\} \quad (1)$$

wo $f(x)$ eine integrierbare Funktion bedeutet und zwar soll von ihr besonders vorausgesetzt werden, daſs sie überall in dem Intervalle von a bis b endlich und stetig sei. Ist $f(x)$ der Differentialquotient einer Funktion $F(x)$, so kann der Wert des Integrals stets ermittelt werden nach der Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Es soll nun der Nachweis erbracht werden, daſs vorstehende Formel auch dann zur Auswertung des Integrals benutzt werden darf, wenn das Argument binomisch zweiwertig, also von der Form $x \pm \xi$ ist, und zwar soll ξ vorerst als reell vorausgesetzt werden. Da die Funktion $f(x)$ der Differentialquotient einer durch einen mathematischen Ausdruck gegebenen Funktion $F(x)$ ist, so ist es immer möglich durch Substitution von $x \pm \xi$ an Stelle von x jene Funktion in einen einwertigen und einen zweiwertigen Bestandteil zu zerlegen. In diesem Falle wird man also haben:

$$f(x \pm \xi) = \varphi(x \xi) \pm \psi(x \xi) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Bezeichnen demnach:

$$x_1 \pm \xi_1,\ x_2 \pm \xi_2,\ x_3 \pm \xi_3,\ \ldots\ x_{n-1} \pm \xi_{n-1}$$

die in dem Integrations-Intervalle von $a \pm h$ bis $b \pm k$ eingeschalteten Zwischenwerte, so liefert die Definitionsformel des bestimmten Integrals zunächst:

$$\int_{a \pm h}^{b \pm k} f(x \pm \xi)\, d(x \pm \xi) =$$

$$= \lim \Big\{ (x_1 \pm \xi_1 - (a \pm h))\, f(a \pm h) + ((x_2 \pm \xi_2) - (x_1 \pm \xi_1))\, f(x_1 \pm \xi_1) + \\ + \ldots + ((b \pm k) - (x_{n-1} \pm \xi_{n-1}))\, f(x_{n-1} \pm \xi_{n-1}) \Big\} \quad . \quad (4)$$

Die rechte Seite dieser Formel zerfällt unter Berücksichtigung von (3) in vier Bestandteile, zwei einwertige und zwei zweiwertige, so daſs ist:

$$\int_{a+h}^{b \pm k} f(x \pm \xi)\, d(x \pm \xi) =$$

$$\begin{aligned} &= \lim \Big\{ (x_1 - a)\, \varphi(ah) + (x_2 - x_1)\, \varphi(x_1 \xi_1) + \ldots \Big\} + \\ &+ \lim \Big\{ (\xi_1 - h)\, \psi(ah) + (\xi_2 - \xi_1)\, \psi(x_1 \xi_1) + \ldots \Big\} + \qquad (5) \\ &\pm \lim \Big\{ (x_1 - a)\, \psi(ah) + (x_2 - x_1)\, \psi(x_1 \xi_1) + \ldots \Big\} \pm \\ &\pm \lim \Big\{ (\xi_1 - h)\, \varphi(ah) + (\xi_2 - \xi_1)\, \varphi(x_1 \xi_1) + \ldots \Big\} \end{aligned}$$

Jede dieser vier unter einander stehenden Summen kann nun durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden, wenn zwischen x und ξ eine willkürliche funktionelle Beziehung $\Omega(x \xi) = 0$ aufgestellt wird, die die eine Variabele als s t e t i g e Funktion der andern definiert, mit andern Worten, wenn man die Art und Weise vorschreibt, nach welcher die Bestandteile der unabhängig Veränderlichen $x \pm \xi$ sich ändern sollen. Dabei wird vorausgesetzt, daſs die Wahl der Funktion Ω so geschieht, daſs die vier Summen (5) convergieren, wenn x und ξ alle Werte von a, h bis b, k annehmen, welche der Gleichung $\Omega = 0$ genügen.

Betrachtet man zunächst in der ersten und dritten Summe ξ als Funktion von x, so daſs also x die einzige in den Gliedern dieser Summen auftretende Variabele ist, so lassen sich ihre Werte durch:

$$\int_{a,h}^{b,k} \varphi(x \xi)\, dx; \qquad \pm \int_{a,h}^{b,k} \psi(x \xi)\, dx$$

darstellen. Sieht man dagegen in der Gleichung $\Omega(x \xi) = 0$ x als Funktion von ξ an und substituiert diese Funktion in die zweite und vierte der Summen (5), so wird jedes Glied derselben nur noch Funktion von ξ allein. Die Werte der Summen lassen sich also durch die bestimmten Integrale repräsentieren:

$$\pm \int\limits_{h,\,a}^{k,\,b} \varphi(x\xi)\, d\xi; \qquad + \int\limits_{k,\,b}^{h,\,a} \psi(x\xi)\, d\xi$$

Man hat also an Stelle der Formel (3) jetzt die folgende zu setzen:

$$\int\limits_{a \pm h}^{b \pm k} f(x \pm \xi)\, d(x \pm \xi) = \int\limits_{a,\,h}^{b,\,k} \varphi(x\xi)\, dx + \int\limits_{h,\,a}^{k,\,b} \psi(x\xi)\, d\xi$$

$$\pm \int\limits_{a,\,h}^{b,\,k} \psi(x\xi)\, dx \pm \int\limits_{h,\,a}^{k,\,b} \varphi(x\xi)\, d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

30.

Der Integrationsweg. Durch Aufstellung der Formel (6) ist aber erst der Nachweis geliefert, dafs dem Symbole

$$\int\limits_{a \pm h}^{b \pm k} f(x \pm \xi)\, d(x \pm \xi)$$

die Bedeutung zukommt, eine zweiwertige Gröfse darzustellen, deren Bestandteile sich durch bestimmte Integrale ausdrücken lassen. Die Ausmittelung dieser Integrale erfordert jedoch nach der gegebenen Darlegung eine Vorschrift, nach welcher die Teile des zweiwertigen Argumentes $x \pm \xi$ sich ändern sollen. Daher könnte es sehr wohl der Fall sein, dafs verschiedene Gesetze, welche die Abhängigkeit zwischen x und ξ feststellen, oder verschiedene Auswahlen stetig aufeinander folgender Wertepaare $x\xi$ auch verschiedene Integralwerte zur Folge haben. Es mufs daher noch der Beweis geführt werden, dafs der Wert des Aggregats der Integrale auf der rechten Seite von (6) unabhängig ist von dieser Vorschrift, dem Integrationswege, und einzig und allein abhängt von den beiden Endpunkten dieses Weges, so dafs also alle zwischen (a, h) und (b, k) möglichen stetigen Curven, wenn sie als Integrationswege dienen, denselben Integralwert liefern.

Die Voraussetzung, dafs die Funktion $f(x)$ für ein zweiwertiges Argument in einen einwertigen und zweiwertigen Bestandteil zerfalle, ist gleichbedeutend mit jener, nach welcher eine Vorschrift existieren soll, die gestattet, die Funktion $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalles für jeden Wert des Argumentes zu berechnen. Wir wollen also fürs erste von der Funktion $f(x)$ voraussetzen, dafs sie für das ganze Intervall von $a + h$ bis $b + k$ nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sei. Man hat dann:

$$\begin{aligned} \varphi(x\,\xi) &= f(x) + \frac{\xi^2}{1.2} f''(x) + \frac{\xi^4}{1..4} f^{(IV)}(x) + \ldots \\ \psi(x\,\xi) &= \xi f'(x) + \frac{\xi^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Ist also $\Omega(x\,\xi) = 0$ der Integrationsweg, so handelt es sich einmal um Integrale von der Form:

$$\int_{b,\,k}^{a,\,h} \lambda^{2k} f^{(2k)}(x)\,dx \text{ und } \pm \int_{b,\,k}^{a,\,h} \lambda^{2k+1} f^{(2k+1)}(x)\,dx \quad . \quad . \quad (8)$$

wenn die Auflösung der Gleichung $\Omega = 0$ $\xi = \lambda(x) = \lambda$ ist und $f^{(2k)}$, $f^{(2k+1)}$ die Differentialquotienten von f nach x von der Ordnung $2k$, beziehungsweise $2k + 1$ bedeuten; dann aber auch um Integrale von der Form

$$\int_{h,\,a}^{k,\,b} \xi^{2k} f^{(2k)}(\mu)\,d\xi \text{ und } \int_{h,\,a}^{k,\,b} \xi^{2k+1} f^{(2k+1)}(\mu)\,d\xi \quad . \quad . \quad (9)$$

wenn $x = \mu(\xi)$ die Auflösung von $\Omega = 0$ nach x bedeutet.

Kann aber fürs zweite die Zerlegung von $f(x + \xi)$ in $\varphi + \psi$ auf eine andere Art als mittelst der Reihe von Taylor bewerkstelligt werden, so werden die Glieder von φ und ψ doch immer von der Form $F(x)\ \Theta(\xi)$ sein, also dieselbe Gestalt besitzen, wie die Funktionen unter den Integralzeichen (8) und (9). In beiden Fällen kann man dann das Integrationsintervall immer so teilen, daſs die Funktion $\Theta(\xi)$ innerhalb eines solchen Teilintervalles entweder nur zu oder nur abnimmt. Es ist dann für $\xi = \lambda(x)$

$$\int_{a,\,h}^{b,\,k} F(x)\,\Theta(\lambda)\,dx = \Theta(h) \int_a^{a+\vartheta(b-a)} F(x)\,dx + \Theta(k) \int_{a+\vartheta(b-a)}^{b} F(x)\,dx\,^*$$

da $\lambda(a) = h$ und $\lambda(b) = k$ ist. Da nun für irgend einen andern Integrationsweg $\xi = \lambda_n(x)$ ebenfalls $h = \lambda_n(a)$; $k = \lambda_n(b)$ ist, so ist in der That der Wert des vorstehenden Integrals unabhängig von dem Integrationswege λ.

Es ist also jetzt dargethan, daſs das Aggregat von Integralen auf der rechten Seite von (6) immer dieselbe zweiwertige Gröſse bleibt,

* Du Bois-Reymond: Journal f. Mathematik Bd. 69.

wie auch der Integrationsweg beschaffen sein mag, unter der Annahme, dafs die Funktion $f(x)$ nach der Taylor'schen Reihe oder überhaupt nach steigenden und fallenden Potenzen des Argumentes in eine Reihe entwickelt werden kann und für keinen der Werte, welcher dem Systeme $x\xi$ angehört, unendlich wird. Ist nun $f(x)$ der Differentialquotient von $F(x)$, so kann dieser Wert kein anderer sein als

$$F(b \pm k) - F(a \pm h)$$

denn es ist unter dieser Voraussetzung:

$$\int_{a \pm h}^{b \pm k} f(x \pm \xi)\, d(x \pm \xi) = \int_{a \pm h}^{b \pm k} f(x)\, dx = F(b \pm k) - F(a \pm h) \quad (10^a)$$

Somit sind bis hierher zwei Wege gewonnen, um den Wert eines Integrals zwischen binomisch zweiwertigen Grenzen, innerhalb welcher die Funktion unter dem Integralzeichen den oben ausgesprochenen Bedingungen genügt, zu ermitteln, nämlich erstens der nach dem vorstehenden Satze einzuschlagende und zweitens jener, welcher in der Berechnung der Teilintegrale auf der rechten Seite von (6) besteht. Letzteres Verfahren ist jedoch nur dann anwendbar, wenn es sich um eine ziffermässige Ermittelung des Integralwertes handelt; denn das schliefsliche Resultat wird nur Funktion von x allein sein und demnach die Variabeln x und ξ nicht mehr sichtbar getrennt enthalten. Es mufs daher ein anderer Weg aufgefunden werden, um den zweiwertigen Ausdruck auf der rechten Seite von (6) ohne Spaltung der Funktion $F(x \pm \xi)$ wirklich herzustellen. Die Formel (6) läfst sich nämlich noch wie folgt schreiben:

$$\int_{a \pm h}^{b \pm k} f(x \pm \xi)\, d(x \pm \xi) = \int_{a,\, h}^{b,\, k} \left\{ \varphi(x\xi)\, dx + \psi(x\xi)\, d\xi \right\} \pm$$
$$\pm \int_{a,\, h}^{b,\, k} \left\{ \varphi(x\xi)\, d\xi + \psi(x\xi)\, dx \right\}$$

Was nun die Funktionen φ und ψ anbelangt, so ist auf Grund der Formeln (7) leicht nachzuweisen, dafs zwischen den partiellen Differentialquotienten derselben, nach x und ξ genommen, folgende Relationen bestehen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Zufolge dieser Beziehungen ist jeder der Ausdrücke unter den beiden

Integralzeichen auf der rechten Seite der vorstehenden Formel ein vollständiges Differential. Man hat also

$$\varphi\, d x+\psi\, d \xi=d F_1(x \xi)$$
$$\varphi\, d \xi+\psi\, d x=d F(x \xi)$$

und es ist daher:

$$\int_{a \pm h}^{b \pm k} f(x \pm \xi)\, d(x \pm \xi)=\left[F_1(x \xi) \pm F(x \xi)\right]_{a,\, h}^{b,\, k} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Es ist nicht schwer die Funktionen F_1 und F in geschlossener Form darzustellen. Setzt man nämlich

$$\int f(x \pm \xi)\, d(x \pm \xi)=F_1 \pm F$$

so ist offenbar:

$$\int f(x+\xi)\, d(x+\xi)=F_1+F$$
$$\int f(x-\xi)\, d(x-\xi)=F_1-F$$

woraus

$$\left.\begin{aligned}
2 F_1 &= \int\left\{(f(x+\xi)+f(x-\xi))\, d x+(f(x+\xi)-f(x-\xi))\, d \xi\right\} \\
2 F &= \int\left\{(f(x+\xi)-f(x-\xi))\, d x+(f(x+\xi)+f(x-\xi))\, d \xi\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

An den Differentialausdrücken, wie sie hier zuletzt aufgeführt sind, läſst sich nun ebenfalls leicht die Richtigkeit der Relationen (12) nachweisen. Mit der Aufstellung der Formel (13) ist zugleich die Giltigkeit des Satzes über die Unabhängigkeit des Integralwertes von dem Integrationswege ausſchlieſslich an die Existenz der Relationen (12) gebunden, daſs also sowohl die Funktionen φ und ψ als auch ihre partiellen Ableitungen endlich und stetig sind für sämtliche Elemente der getroffenen Auswahl $x \xi$.

31.

Einfluſs des Integrationsweges auf den Integralwert. Um den Einfluſs zu untersuchen, den der Integrationsweg auf den Wert des Integrals hat, wenn die Funktion unter dem Integralzeichen für einen speziellen Argumentwert unendlich wird, sei $f(x \pm \xi)$ eine Funktion, welche sich nach der Taylor'schen Reihe entwickeln läſst innerhalb des von $a \pm h$ bis $b \pm k$ sich erstreckenden Integrationsintervalles. Die Funktion

$$\frac{f(x \pm \xi)}{x \pm \xi-(\alpha \pm \beta)}$$

ist dann eine eindeutige und stetige Funktion innerhalb des Intervalles $a \pm h$, $b \pm k$, wenn α und β nicht zu den Zwischenwerten gehören, welche sich dem Gesetze $\xi = \lambda(x)$ gemäfs ergeben. Genügen aber α und β dieser Gleichung, dann wird vorstehende Funktion unendlich für $x \pm \xi = \alpha \pm \beta$, und es frägt sich daher ob dem Integrale

$$\int_{a\pm h}^{b\pm k} \frac{f(x \pm \xi)}{(x \pm \xi) - (\alpha \pm \beta)}\, d(x \pm \xi)$$

auch in diesem Falle noch ein bestimmter Sinn zukommt.

Um diese Frage zu beantworten, werde zur Abkürzung $x \pm \xi = z$ und $\alpha \pm \beta = t$ gesetzt, und $f(z)$ nach Potenzen von $(z - t)$ entwickelt. Man findet dann:

$$\frac{f(z)}{z-t} = \frac{1}{z-t}\left\{ f(t) + (z-t) f'(t) + \frac{(z-t)^2}{1.2} f''(t) + \ldots \right\} =$$
$$= \frac{f(t)}{z-t} + f'(t) + \frac{(z-t)}{1.2} f''(t) + \frac{(z-t)^2}{1.2.3} f'''(t) + \ldots$$

und folglich durch Integration zwischen den Grenzen $p = a \pm h$ und $q = b \pm k$

$$\int_p^q \frac{f(z)}{z-t}\, dz = \int_p^q \frac{f(t)}{z-t}\, dz + \int_p^q f'(t)\, dz + \int_p^q \frac{z-t}{1.2} f''(t)\, dz + \ldots$$

Die Integrale auf der rechten Seite sind mit Ausnahme des ersten von dem Integrationswege unabhängig, da die Funktionen $(z-t)^\mu$ überall endlich sind. Daher haben wir uns nur mit dem ersten jener Integrale, mit

$$\int_p^q \frac{f(t)}{z-t}\, dz = f(t) \int_p^q \frac{dz}{z-t}$$

näher zu befassen und sein Verhalten gegenüber den verschiedenen Integrationswegen zu untersuchen. Wir werden weiter unten zeigen, dafs das unbestimmte Integral, um welches es sich hier handelt, die Eigenschaft des **Logarithmus** hat, und dafs daher gesetzt werden darf:

$$\int \frac{dz}{z-t} = \log(z-t) + \text{const}$$

und dafs folglich für alle Integrationswege, welche nicht durch den Punkt $x = \alpha$, $\xi = \beta$ gehen und stetig ineinander übergeführt werden können, ohne dafs dabei dieser Punkt überschritten zu werden braucht, das Integral den Wert hat:

$$\left[f(t) \log (z - t) \right]_p^q.$$

Ist aber $\xi = \lambda_k(x)$ ein Integrationsweg, der durch den Punkt (α, β) führt, ist also $\beta = \lambda_k(\alpha)$ eine richtige Relation, so wird das Integral unendlich. Sind $\alpha - m$ und $\alpha + m'$ die Abscissen und demnach $\lambda_k(\alpha - m)$ und $\lambda_k(\alpha + m')$ die zugehörigen Ordinaten zweier Punkte auf der Integrationscurve zu verschiedenen Seiten des Punktes (α, β); dann läſst sich das zu ermittelnde Integral in drei Teile zerlegen, nämlich in die drei Integrale

$$J = \int_r^{a+h} \frac{dz}{z-t} \qquad J' = \int_s^r \frac{dz}{z-t} \qquad J'' = \int_{b \pm k}^s \frac{dz}{z-t}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$r = \alpha - m + \lambda_k(\alpha - m); \quad s = \alpha + m' \pm \lambda_k(\alpha + m')$$

Um diese Integrale und zwar zunächst das zweite J' auszuwerten, entwickeln wir $\lambda_k(\alpha - m)$ und $\lambda_k(\alpha + m')$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze, und setzen also

$$\lambda_k(\alpha - m) = \lambda_k - m\,\lambda'_k + \frac{m^2}{1 \cdot 2}\lambda''_k \;\ldots\ldots$$

$$\lambda_k(\alpha + m') = \lambda_k + m'\,\lambda'_k + \frac{m'^2}{1 \cdot 2}\lambda''_k + \ldots$$

Es ist dann

$$r = \alpha - m \pm \left\{ \lambda_k + \Sigma \frac{(-m)^p}{p!} \frac{d_p \lambda_k}{d\alpha^p} \right\}$$

$$s = \alpha + m' \pm \left\{ \lambda_k + \Sigma \frac{m'^p}{p!} \frac{d^p \lambda_k}{d\alpha^p} \right\}$$

Also wird, da $\lambda_k = \beta$ ist:

$$r - \alpha \mp \beta = \pm\, \Sigma \frac{(-m)^p}{p!} \frac{d^p \lambda_k}{d\alpha^p} - m$$

$$s - \alpha \mp \beta = \pm\, \Sigma \frac{m'^p}{p!} \frac{d^p \lambda_k}{d\alpha^p} + m'$$

Das Integral J' hat folglich den Wert:

$$J' = \log \frac{\Sigma \frac{(-m)^p}{p!} \frac{d^p \lambda_k}{d\alpha^p} - m}{\Sigma \frac{m'^p}{p!} \frac{d^p \lambda_k}{dx^p} + m'}$$

oder, da für sehr kleine m und m' die höheren Potenzen derselben vernachlässigt werden können:

$$J' = \log \frac{-m\lambda'_k + \frac{m^2}{1.2}\lambda''_k - m}{m'\lambda'_k + \frac{m'^2}{1.2}\lambda''_k + m'} =$$

$$= \log \frac{m}{m'} \cdot \frac{m\lambda''_k - 2(\lambda'_k + 1)}{m'\lambda''_k + 2(\lambda'_k + 1)}$$

Da m und m' willkürliche positive und negative Zuwachse der Abscisse α sind, so können dieselben dem absoluten Werte nach einander gleichgesetzt werden, ohne daſs damit der Allgemeinheit vorstehender Formel Eintrag geschieht. Es ist dann

$$J' = \log \frac{m\lambda''_k - 2(\lambda'_k + 1)}{m\lambda''_k + 2(\lambda'_k + 1)}$$

Da nun λ'_k und λ''_k die Werte des ersten und zweiten Differentialquotienten von $\xi = \lambda_k(x)$ für $x = \alpha$, $\xi = \beta$ sind, so ergibt sich also das Resultat, daſs, wenn der Integrationsweg durch einen Punkt hindurch geht, in welchem die Funktion unter dem Integralzeichen unendlich wird wie $\log(z - t)$ für $z = t$, der Wert des Integrals von diesem Wege abhängig ist. Nur dann, wenn sämtliche die verschiedenen Integrationswege darstellenden Curven im Unstetigkeitspunkte dieselbe Krümmung haben, sind die Integralwerte J' einander gleich, wenn das sehr kleine m bei allen den gleichen Wert hat. Die beiden andern Teilintegrale sind:

$$J = \int_{a \pm h}^{r} \frac{dz}{z - t} = \log \frac{m \{ m\lambda''_k - 2(\lambda'_k + 1) \}}{(a - \alpha) \pm (h - \beta)}$$

und

$$J'' = \int_{s}^{b \pm k} \frac{dz}{z - t} = \log \frac{(b - \alpha) \pm (k - \beta)}{m' \{ m'\lambda''_k + 2(\lambda'_k + 1) \}}$$

Für $m = m'$ ergibt sich durch Addition:

$$J + J'' = \log \frac{(b - \alpha) \pm (k - \beta)}{(a - \alpha) \pm (h - \beta)} \cdot \frac{m\lambda''_k - 2(\lambda'_k + 1)}{m\lambda''_k + 2(\lambda'_k + 1)}$$

und es ist also nicht nur jedes einzelne, sondern auch die Summe dieser Teilintegrale vom Integrationswege abhängig, so lange m von Null verschieden ist. Sowie man aber $m = 0$ setzt, findet sich, daſs die genannte Summe vom Integrationswege unabhängig wird und die Periode πi annimmt, während jedes einzelne der Integrale unendlich wird. Sie hat nämlich dann den Wert:

$$J + J'' = \log(-1) \cdot \frac{(b-\alpha) \pm (k-\beta)}{(a-\alpha) \pm (h-\beta)} =$$

$$\log(-1) + \log \frac{(b-\alpha) \pm (k-\beta)}{(a-\alpha) \pm (h-\beta)} = \log \frac{(b-\alpha) \pm (k-\beta)}{(a-\alpha) \pm (h-\beta)} + \pi i$$

Da aber für $m = 0$ auch

$$J' = \log(-1) = \pi i$$

wird, so ist endlich $J + J' + J'' =$

$$\int\limits_{a \pm h}^{b \pm k} \frac{dz}{z-t} = \log \frac{(b-\alpha) \pm (k-\beta)}{(a-\alpha) \pm (h-\beta)} + 2\pi i \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wenn der Integrationsweg durch den Punkt $x = \alpha$, $\xi = \beta$ hindurchführt. Während also das zwischen den Punkten (a, h) und (b, k) auf irgend einem Wege, der nicht durch den Unstetigkeitspunkt (α, β) geht, hinerstreckte Integral immer denselben Wert hat, ändert sich der letztere um $2\pi i$, wenn die Integrationscurve dem Unstetigkeitspunkt näher gerückt und durch ihn hindurchgeführt wird, während die Endpunkte derselben fest bleiben.

32.

Integrationsweg um einen Unstetigkeitspunkt. Und nun soll noch gezeigt werden, daſs auf zwei verschiedenen Integrationswegen, die von demselben Punkte (a, h) ausgehen und in demselben Punkte (b, k) endigen, die aber einen logarithmischen Unstetigkeitspunkt einschlieſsen, der Wert des Integrals ein verschiedener ist.

Zu diesem Zwecke werde der Unstetigkeitspunkt $x = \alpha$, $\xi = \beta$ als Mittelpunkt einer Hyperbel angesehen, und letztere als Integrationsweg gewählt. Es bestehe also zwischen x und ξ die Gleichung:

$$(x-\alpha)^2 - (\xi - \beta)^2 = \varrho^2$$

welche auch durch die beiden folgenden ersetzt werden kann:

$$x - \alpha = \varrho \cos hyp\, \varphi \quad ; \quad \xi - \beta = \varrho \sin hyp\, \varphi$$

Es ist also

$$(x \pm \xi) - (\alpha \pm \beta) = \varrho\,(\cos hyp\, \varphi \pm \sin hyp\, \varphi)$$

Nun sind aber die Lagrange'sche Derivation von $\cos hyp\, \varphi$ und $\sin hyp\, \varphi$ beziehungsweise $\sin hyp\, \varphi$ und $\cos hyp\, \varphi$, wie man leicht findet, wenn die der Eulerschen Grundgleichung korrespondierende transcendentale Relation zwischen der Exponentialfunktion $e^{\pm\varphi}$ und den hyperbolischen Funktionen

$$e^{\pm\varphi} = \cos hyp\, \varphi \pm \sin hyp\, \varphi$$

welche aus den auf Seite 29 und 32 gegebenen Daten unschwer hergeleitet werden kann, in den beiden Formen benützt wird:

$$\cos hyp\, \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}; \quad \sin hyp\, \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

Man hat demnach

$$d\,(x \pm \xi) = \pm\, \varrho\, (\cos hyp\, \varphi \pm \sin hyp\, \varphi)\, d\varphi$$

Das unbestimmte Integral ist daher

$$\int \frac{d\,(x \pm \xi)}{x \pm \xi - (\alpha \pm \beta)} = \pm \int d\varphi$$

Da die Hyperbel als eine im Unendlichen geschlossene Linie anzusehen ist, so wächst φ von o bis $2\,\pi i$, wenn der Punkt (ξ, x) die beiden Hyperbelzweige durchläuft. Man hat daher

$$\int\limits_{h} \frac{d\,(x \pm \xi)}{x \pm \xi - (\alpha \pm \beta)} = \pm \int\limits_{0}^{2\,\pi i} d\varphi = \pm\, 2\,\pi i \quad . \quad . \quad (16)$$

wo das dem Integralzeichen auf der linken Seite angehängte h die Integration über die ganze Hyperbel bedeutet.

Läfst man die Hyperbel in den ihr conjugierten imaginären Kreis übergehen, nimmt man also $\xi - \beta$ imaginär an, so ist nach Seite 32 zu setzen:

$$x - \alpha = \varrho \cos hyp\, \varphi = \varrho \cos i\, \varphi$$
$$\xi - \beta = \varrho \sin hyp\, \varphi = i \varrho \sin i\, \varphi$$

und es wird

$$x \pm \xi - (\alpha \pm \beta) = \varrho\, (\cos i\, \varphi \pm i \sin i\, \varphi)$$
$$d\,(x \pm \xi) = \varrho\, (- i \sin i\, \varphi \pm i^2 \cos i\, \varphi)\, d\varphi = \mp\, \varrho\, (\cos i\, \varphi \pm i \sin i \varphi)\, d\varphi$$

Die Integration erstreckt sich jetzt über die imaginär zu signierende Kreisperipherie von 0 bis $2\,\pi i$; es ist

$$\int\limits_{k} \frac{d\,(x \pm \xi)}{x \pm \xi - (\alpha \pm \beta)} = \mp \int\limits_{0}^{2\,\pi} d\,(\varphi i) = \mp \int\limits_{0}^{2\,\pi i} d\varphi = \mp\, 2\,\pi i$$

wie vorhin.

Sind in der Formel (4) die zweiwertigen Bestandteile der Argumentwerte imaginär, so definiert dieselbe das Integral einer Funktion complexer Variabeln. Die gesamten auf Grund dieser Definitionsformel gefundenen Untersuchungsresultate bleiben auch für diesen Fall bestehen; nur sind jetzt die Funktionen $\varphi\,(x\,\xi)$ und $\psi\,(x\,\xi)$ andere geworden, wie schon mehrfach erläutert wurde. Es bleibt namentlich der über die Unabhängigkeit des Integralwertes vom Integrationswege aufgestellte Satz und insbesondere der so eben nachgewiesene Satz von dem Werte des Integrals, wenn der Integrationsweg eine einen logarithmischen Unstetigkeitspunkt umgebende geschlossene Curve ist, auch jetzt in Giltigkeit.

Letzteres kann noch besonders nachgewiesen werden, indem man setzt:

$$x \pm i\xi - (\alpha \pm i\beta) = \varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

Es wird dann:

$$d(x \pm i\xi) = \varrho(-\sin\varphi \pm i\cos\varphi)\,d\varphi = \pm\, i\varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)\,d\varphi$$

Man findet demnach, wenn über den Kreis integriert wird, dessen Gleichung $(x-\alpha)^2 + (\xi-\beta)^2 = \varrho^2$ ist:

$$\int\limits_{k} \frac{dz}{z-t} = \pm\, i \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = \pm\, 2\pi i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wie oben.

Wir sind nun in der Lage den am Schlusse der Nummer (31) ausgesprochenen Satz dahin zu vervollständigen, daſs der Zuwachs $2\pi i$, den der Integrallogarithmus erfährt dadurch, daſs der Integrationsweg, welcher zwischen zwei festen Punkten p und q auf der einen Seite des Unstetigkeitspunktes sich hinerstreckt stetig in einen solchen übergeführt wird, der durch den letzteren hindurchgeht, ein Bestandteil des Integrals bleibt, wenn derselbe über den Unstetigkeitspunkt hinaus in einen andern übergeführt wird, der mit dem primitiven eine geschlossene, den Unstetigkeitspunkt einschlieſsende Curve bildet, wenn nur die Endpunkte fest bleiben. Bezeichnet C eine beliebige den Unstetigkeitspunkt einschlieſsende Curve, so wird also behauptet, daſs sei:

$$\int\limits_{C} \frac{dz}{z-t} = 2\pi i$$

Um den Beweis zu führen, seien (prq) und (psq) die zwei den Unstetigkeitspunkt $x=\alpha$ $\xi=\beta$ einschlieſsenden Integrationswege; dann wird der Radius eines um (α,β) als Mittelpunkt beschriebenen Kreises immer so groſs gewählt werden können, daſs er den einen dieser Wege in reellen Punkten trifft, also etwa den Weg (psq) in den Punkten a und b. Ist nun c ein Punkt auf dem Kreisbogen ab, so hat man offenbar

$$\int\limits_{(psq)} = \int\limits_{(pa)} + \int\limits_{(acb)} + \int\limits_{(bq)}$$

indem das Integral genommen über den Curvenbogen $(a s b)$ gleich ist dem Integrale genommen über den Kreisbogen $(a c b)$. Ist $(a d b)$ der andere Bogen des Kreises, also $(a d b) + (a c b) = 2 r \pi$, so hat man

$$\int_{(prq)} = \int_{(pa)} + \int_{(adb)} + \int_{(bq)}$$

Durch Subtraction beider Formeln ergibt sich:

$$\int_{(psq)} - \int_{(prq)} = \int_{(acb)} - \int_{(adb)}$$

oder nach einem bekannten Satze:

$$\int_{(psq)} + \int_{(qrp)} = \int_{(acb)} + \int_{(bda)}$$

Also hat man in der That

$$\int_C \frac{dz}{z-t} = \int_k \frac{dz}{z-t} = 2\pi i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Beachtet man jetzt die auf Seite 64 gegebene Entwickelung der Funktion $\frac{f(z)}{z-t}$, so ist

$$\int_C \frac{f(z)}{z-t} dz = 2\pi i f(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17^a)$$

Denn jedes der übrigen Integrale hat nach dem in Nummer (30) bewiesenen Satze den Wert Null, wenn über die geschlossene Curve C integriert wird. Die Formel (17^a) heiſst der Integralsatz von Cauchy. Nach ihr kann man die Funktion $f(t)$ im Innern von C durch ein bestimmtes Integral darstellen, wenn $f(z)$ auf C gegeben ist.

Die Formel (15) gilt also auch dann, wenn $b \pm k = a \pm h$, die Integrationscurve also eine in sich zurücklaufende ist, und einen Unstetigkeitspunkt einschlieſst; denn dann ist

$$\log \frac{(b-\alpha) \pm (k-\beta)}{(a-\alpha) \pm (h-\beta)} = 0.$$

33.

Der Integrallogarithmus. Es sei $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ eine gebrochene algebraische Funktion, deren Zähler und Nenner ganze Funktionen ohne gemeinsamen Teiler sein sollen. Ferner möge vorausgesetzt werden, daſs der Grad von φ um zwei Einheiten kleiner sein soll als der Grad von ψ; dann ist das Differential $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx$ für jeden Wert von x, die Wurzeln der Gleichung $\psi(x) = 0$ ausgenommen, endlich. Denn ist die Funktion φ vom Grade k, die Funktion ψ vom Grade n und $n > k$, so wird für $x = \frac{1}{x_1}$ zunächst $dx = -\frac{dx_1}{x_1^2}$ ferner $\varphi\left(\frac{1}{x_1}\right) = \frac{\varphi_1(x_1)}{x_1^k}$; $\psi\left(\frac{1}{x_1}\right) = \frac{\psi_1(x_1)}{x_1^n}$ und somit wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = -\frac{x_1^{n-2}}{x_1^k} \quad \frac{\varphi_1(x_1)}{\psi_1(x_1)}\,dx_1$$

Soll nun für $x_1 = 0$ dieser Ausdruck einen endlichen Wert haben, so mufs $n - 2 - k = 0$ also $k = n - 2$ sein, wie behauptet wurde.

Das Integral

$$w = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx$$

erfordert zu seiner Auswertung in erster Reihe die Zerlegung der Funktion unter dem Integralzeichen in Partialbrüche. Ist dies geschehen, so hat man sich mit Integralen von der Form

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-\alpha)^m} \qquad \int_a^b \frac{dx}{x-\alpha}$$

zu befassen. Das erstere geht durch die Substitution $1 : (x - \alpha) = z$ in

$$-\int_a^b z^{m-2}\,dz$$

über und dieses Integral kann direkt mittelst der Definitionsformel für das bestimmte Integral ausgewertet werden. Es ist aber nicht möglich, das zweite Integral

$$f(z) = \int_a^z \frac{dz}{z}$$

welches in der vorigen Nummer eine so wichtige Rolle spielte, auf diese Art zu ermitteln. Dagegen lassen sich leicht die allgemeinen Eigenschaften der Funktion $f(z)$ nachweisen. Es ist nämlich:

$$\int_a^z \frac{dz}{z} + \int_b^y \frac{dy}{y} = \int_{ab}^{yz} \frac{du}{u}$$

Um die Richtigkeit dieser Funktionalgleichung darzuthun, sei vor allem hervorgehoben, daſs der Differentialausdruck unter dem Integralzeichen unverändert bleibt, wenn statt der Integrationsvariabeln irgend ein Vielfaches derselben gesetzt wird. Es ist also

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{d\,(mz)}{mz}$$

bis auf eine arbiträre Constante, oder

$$f\,(z) = f\,(mz) + \text{const}$$

Über den Wert der Constanten verfügen wir so, daſs für $z = 1$ $f\,(z) = 0$ wird. Es ist dann $-f\,(m) = \text{const}$ und vorstehende Gleichung wird

$$f\,(z) + f\,(m) = f\,(mz)$$

Für $z = a$ lautet dieselbe:

$$f\,(a) + f\,(m) = f\,(ma)$$

Also besteht die Beziehung:

$$f\,(z) - f\,(a) = f\,(mz) - f\,(ma)$$

oder in Integralform, wenn b statt m gesetzt wird:

$$\int_a^z \frac{dz}{z} = \int_{ab}^{bz} \frac{du}{u} = \int_{ab}^{yz} \frac{du}{u} - \int_{bz}^{yz} \frac{du}{u}$$

ferner ist:

$$\int_b^y \frac{dy}{y} = \int_{bz}^{yz} \frac{du}{u}$$

Durch Addition findet sich:

$$\int_a^z \frac{dz}{z} + \int_b^y \frac{dy}{y} = \int_{ab}^{yz} \frac{du}{u}$$

was zu beweisen war. Auf gleiche Weise läſst sich zeigen, daſs

$$\int_a^z \frac{dz}{z} - \int_b^y \frac{dy}{y} = \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{z}{y}} \frac{du}{u}$$

oder

$$f\,(z) - f\,(y) = f\left(\frac{z}{y}\right)$$

ist. Die Funktion $f\,(z)$ hat demnach die Eigenschaft des Logarithmus, und man darf daher setzen:

$$\int_a^z \frac{dz}{z} = \log z - \log a$$

wenn a und z positive Zahlen sind.

Fragen wir nun noch nach der Bedeutung des vorstehenden Integrals, wenn z eine binomisch zweiwertige Gröfse der allgemeinsten Art ist, die für $\alpha \pm \beta$ als speziellen Wert von z verschwindet, wenn also dasselbe die Gestalt hat:

$$w \pm k = \int_{a \pm h}^{z \pm k} \frac{d\,(z \pm \xi)}{(z \pm \xi) - (\alpha \pm \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

so ist dieselbe bereits oben festgestellt.

Zur Illustration des dort Angeführten wollen wir uns nun mit den verschiedenen Auswertungen dieses Integrals mit Hilfe der Formeln (6), (10a) und (13) befassen. Es ist

$$\frac{1}{z \pm \xi - (\alpha \pm \beta} = \frac{1}{(z - \alpha)\left\{1 \pm \dfrac{\xi - \beta}{z - \alpha}\right\}}\,.$$

Setzt man voraus, dafs $\xi - \beta < z - \alpha$ sei, dafs also der Integrationsweg stets auf der dem Coordinatenanfangspunkte abgewandten Seite einer Geraden verläuft, die durch den Punkt (α, β) geht, und auf den Achsen die Stücke $\alpha - \beta$, beziehungsweise $\beta - \alpha$ abschneidet, oder besser, dafs der Integrationsweg für reelle $\xi - \beta$ immer innerhalb der Asymptotenwinkel liegt, in welchen sich die gleichseitige Hyperbel $(z - \alpha)^2 - (\xi - \beta)^2 = \varrho^2$ erstreckt, so darf man die Division ausführen, und es ergibt sich:

$$\frac{1}{1 \pm \dfrac{\xi - \beta}{z - \alpha}} = 1 \mp \frac{\xi - \beta}{z - \alpha} + \left(\frac{\xi - \beta}{z - \alpha}\right)^2 \mp \left(\frac{\xi - \beta}{z - \alpha}\right)^3 + \quad . \quad . \quad .$$

Diese Reihe convergiert also für das ganze genannte Gebiet, so lange $\xi - \beta$ reell ist. Wird $\xi - \beta$ rein imaginär, so convergiert die Reihe innerhalb des Kreises, der der gleichseitigen Hyperbel conjugiert ist.

Die Trennung des einwertigen Bestandteils von dem zweiwertigen liefert:

$$\varphi\,(z\,\xi) = \left\{1 + \left(\frac{\xi - \beta}{z - \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\xi - \beta}{z - \alpha}\right)^4 + \quad . \quad . \quad . \quad \right\} \frac{1}{z - \alpha}$$

$$\psi\,(z\,\xi) = -\left\{\frac{\xi - \beta}{z - \alpha} + \left(\frac{\xi - \beta}{z - \alpha}\right)^3 + \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \right\} \frac{1}{z - \alpha}$$

Bildet man nun $\varphi\, dz + \psi\, d\xi$, so ist dies ein vollständiges Differential nach dem auf Seite 62 angeführten Satze, und man hat folglich:

$$w = \int_{a,h}^{z,k} \left\{ \varphi(z\xi)\, dz + \psi(z\xi)\, d\xi \right\} =$$

$$= \int_{a,h}^{z,k} d \left\{ \log(z-\alpha) - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^4 - \frac{1}{6}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^6 - \ldots \right\} =$$

$$= \log\frac{z-\alpha}{a-\alpha} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^4 + \;\ldots\right]_{a,h}^{z,k} \tag{19}$$

und nach demselben Satze:

$$k = \int_{a,h}^{z,k} \left\{ \psi(z\xi)\, dz + \varphi(z\xi)\, d\xi \right\} = \quad \ldots \tag{20}$$

$$= \int_{a,h}^{z,k} d \left[\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^5 + \;\ldots\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^5 + \;\ldots\right]_{h,a}^{k,z}$$

Das Integral (18) hat sonach den Wert:

$$\begin{aligned} w \pm k = \log\frac{z-\alpha}{a-\alpha} &+ \left\{ \pm\frac{k-\beta}{z-\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{k-\beta}{z-\alpha}\right)^2 \pm \frac{1}{3}\left(\frac{k-\beta}{z-\alpha}\right)^3 - \right\} \\ (21) \qquad & \left\{ \pm\frac{h-\beta}{a-\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{h-\beta}{a-\alpha}\right)^2 \pm \frac{1}{4}\left(\frac{h-\beta}{a-\alpha}\right)^4 - \right\} \end{aligned}$$

Bei direkter Auswertung nach (10a) findet sich aber:

$$w \pm k = \log\frac{(z-\alpha) \pm (k-\beta)}{(a-\alpha) \pm (h-\beta)}$$

Somit wird:

$$\begin{aligned} \log\frac{(z-\alpha) \pm (k-\beta)}{(a-\alpha) \pm (h-\beta)} = \log\frac{z-\alpha}{a-\alpha} &+ \left\{ \pm\frac{k-\beta}{z-\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{k-\beta}{z-\alpha}\right)^2 \pm \;\ldots \right\} \\ (22) \qquad & - \left\{ \pm\frac{h-\beta}{a-\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{h-\beta}{a-\alpha}\right)^2 \pm \;\ldots \right\} \end{aligned}$$

Die Zerlegung des Integrals in einen einwertigen und einen zweiwertigen Bestandteil kann auch nach der Formel (13 ff.) geschehen. Man hat nach dieser:

$$\int \frac{d(z+\xi)}{(z-\alpha)+(\xi-\beta)} = w + k$$
$$\int \frac{d(z-\xi)}{(z-\alpha)-(\xi-\beta)} = w - k$$

Durch Addition und Vereinigung der Integrale folgt

$$2w = \int \frac{2(z-\alpha)\,dz - 2(\xi-\beta)\,d\xi}{(z-\alpha)^2-(\xi-\beta)^2} = \log\left\{(z-\alpha)^2-(\xi-\beta)^2\right\} + \text{Const}$$

und durch Subtraktion:

$$2k = \int \frac{2(z-\alpha)\,d\xi - 2(\xi-\beta)\,dz}{(z-\alpha)^2-(\xi-\beta)^2} = \int \frac{2\,d\,\dfrac{\xi-\beta}{z-\alpha}}{1-\left(\dfrac{\xi-\beta}{z-\alpha}\right)^2} =$$
$$= 2 \operatorname{arc\,tg} hyp \frac{\xi-\beta}{z-\alpha} = 2\,i \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi-\beta}{z-\alpha} = \log \frac{(z-\alpha)+(\xi-\beta)}{(z-\alpha)-(\xi-\beta)}$$

Die bestimmten Integrale zwischen den Grenzen a, h und b, k genommen sind also:

$$w = \frac{1}{2} \log \frac{(z-\alpha)^2-(k-\beta)^2}{(a-\alpha)^2-(h-\beta)^2}$$
$$k = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{(z-\alpha)+(k-\beta)}{(z-\alpha)-(k-\beta)} \cdot \frac{(a-\alpha)-(h-\beta)}{(a-\alpha)+(h-\beta)} \right\}$$

vorausgesetzt, dafs die Integrationscurve die Geraden $(z-\alpha)^2-(\xi-\beta)^2 = 0$ nicht überschreitet. So oft eine dieser Geraden überschritten wird, wächst das Integral k um $\frac{\pi}{2} i$, so dafs bei einem vollen Umlauf der Zuwachs $4 \cdot \frac{\pi}{2} i = 2\pi i$ wird, wie oben gezeigt wurde. Zu dieser Anschauung gelangt man unter Beiziehung der conjugierten Hyperbel.

34.

Umkehrung des Integrallogarithmus. Handelt es sich nun darum die allgemeine Derivation von $\log z$ zu finden, so erinnere man sich, dafs

$$w = \log z = \int_1^z \frac{dz}{z}$$

ist. Somit wird

$$w \pm k = \log(z \pm h) = \int_1^{z \pm h} \frac{d(z \pm h)}{z \pm h}$$

Das Integral rechter Hand ergibt sich aus (21), wenn man $a \pm h$

$= 1$, also $a = 1$, $h = 0$ und $k = h$, $\alpha = \beta = 0$ setzt, in nachstehender Gestalt:

$$w \pm k = \log(z \pm h) = \log z + \left\{\pm \frac{h}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{z}\right)^2 \pm \frac{1}{3}\left(\frac{h}{z}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{z}\right)^4 \pm \ldots\right\}$$

Die allgemeine Ableitung von log z ist daher gegeben durch die Reihe:

$$\lambda = \frac{k}{h} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{z^3} + \frac{1}{5}\frac{h^4}{z^5} + \ldots$$

Die Lagrange'sche Derivation wird folglich:

$$\lambda_t = \frac{1}{z}$$

Die Umkehrung der Funktion $w = \log z$ ist

$$z = a^w$$

wenn a die Basis des Logarithmensystems bedeutet. Um diese Basis zu finden, haben wir a^w für $w = 1$ zu berechnen, und zu diesem Zwecke eine allgemeine Vorschrift aufzustellen, nach welcher überhaupt a^w für ein- und zweiwertige w zu berechnen ist. Dies kann geschehen mittelst der Reihe von Taylor, wenn zuvor nachgewiesen wird, daſs der reciproke Wert von λ^t, also z, die Lagrange'sche Derivation der Funktion a^w ist.

Zu diesem Zwecke hätte man nun aus $z \pm h = a^{w \pm k}$ vorerst die allgemeine Derivation $h : k$ zu entwickeln. Da aber eine Trennung des einwertigen von dem zweiwertigen Bestandteil auf der rechten Seite direkt nicht zu bewerkstelligen ist, so benützt man den Wert $k : h$ wie er oben gefunden wurde; es ist dann offenbar:

$$\frac{h}{k} = 1 : \frac{k}{h} = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{z^3} + \frac{1}{5}\frac{h^4}{z^5} + \ldots}$$

und folglich, da k mit h zugleich zu Null wird, die Lagrange'sche Derivation μ_t von z nach w genommen:

$$\mu_t = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z = a^w$$

In der Lagrange'schen Bezeichnung hat man also die Derivierten der verschiedenen Ordnungen der Funktion $f(z) = a^w$:

$$f'(z) = a^w;\ f''(z) = a^w;\ f'''(z) = a^w \ldots$$

Der Maclaurin'sche Satz liefert demnach folgende Reihe für $z = a^w$:

$$a^w = 1 + w + \frac{w^2}{1.2} + \frac{w^3}{1.2.3} + \frac{w^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

oder

$$z = 1 + w + \frac{w^2}{1.2} + \frac{w^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Wir fügen diesem Abschnitte noch die Bestimmung der allgemeinen Ableitung einer durch eine unendliche Reihe definierten Funktion an.

Die Weyerstraſs'sche Funktion

$$f(x) = \Sigma\, b^n \cos(a^n x)\, \pi$$

convergiert für jeden Wert von a, wenn $b < 1$ ist. Hier ist

$$y + k = \Sigma\, b^n \cos(a^n (x \pm h))\, \pi =$$

$$= \Sigma \left\{ b^n \cos a^n x \pi \, . \cos a^n \pi h \mp \sin a^n x \pi \, . \sin a^n \pi h \right\}$$

und folglich

$$\lambda = \frac{k}{h} = \pm\, \Sigma\, b^n \sin a^n x \pi \, . \frac{\sin a^n \pi h}{h}$$

oder wenn man setzt $a^n \pi h = h^{n'}$

$$\lambda = -\, \pi\, \Sigma\, a^n b^n \sin a^n x \pi \, . \frac{\sin h_n'}{h_n'}$$

wo h aus

$$y = \Sigma\, b^n \cos a^n x \pi \, . \cos a^n \pi h$$

zu berechnen ist.

Die Reihe für λ convergiert nur dann, wenn $a^n b^n < 1$ also, da schon $b < 1$ vorausgesetzt ist, wenn $a < 1$ ist. Der Lagrange'sche Differentialcoëfficient existiert also nur dann, wenn $a < 1$ ist, für alle andern Werte von a nicht. Er ist

$$\lambda_t = -\, \pi\, \Sigma\, a^n b^n \sin(a^n x)\, \pi$$

Diese Ableitung der Bedingung, unter welcher die Weyerstraſs'sche Funktion einen Differentialcoëfficienten hat, ist vorwurfsfrei, da sie die Differenzierbarkeit der Reihe $f(x)$ nicht voraussetzt.

VI. Allgemeine Eigenschaften der Funktionen bivariabeler Argumente.

36.

Definition einer Funktion eines bivariabeln Argumentes. Um die Eigenschaften einer Funktion $f(x)$, welche für binomisch zweiwertige Argumente in einen einwertigen und einen zweiwertigen Bestandteil zerfällt, aufzufinden, differenzieren wir

$$f(x \pm \xi) = \varphi(x \xi) \pm \psi(x \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

nach x und ξ. Es kommt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \pm \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d(x \pm \xi)}; \quad \pm \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{df}{d(x \pm \xi)}$$

also hat man auch:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm \frac{\partial \psi}{\partial x} = \pm \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \pm \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)$$

Durch Gleichsetzung der auf beiden Seiten auftretenden einwertigen und zweiwertigen Bestandteile, ergeben sich die Identitäten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Somit sind φ und ψ Integrale der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Jede willkürliche Funktion von $x \pm \xi$ genügt dieser Differentialgleichung, einerlei ob die Bestandteile des Argumentes willkürlich gewählt oder durch irgend welche Operationen gebildet sind. Im Falle daſs ξ rein imaginär ist, bleibt die Differentialgleichung zwar in ihren beiden symbolischen Gliedern erhalten, das zweite Glied ändert aber wegen $i^2 = -1$ das Vorzeichen. Die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} = 0 \quad . \; . \quad (4)$$

gehen also ineinander über, wenn ξ rein imaginär wird. Die Integrale der einen Differentialgleichung gehen also aus den Integralen der andern Differentialgleichung hervor, wenn man ξ durch ξi ersetzt oder umgekehrt. Aus diesem Verhalten läſst sich mit Sicherheit der Schluſs ziehen, daſs beide Differentialgleichungen nur spezielle Formen einer allgemeinen Differentialgleichung und also auch ihre Integrale nur spezielle Fälle gewisser allgemeiner Integralfunktionen sind.

Sind

$$f(x \pm \xi) = \varphi(x \xi) \pm \psi(x \xi); \quad f(x \pm i \xi) = \varphi_1(x \xi) \pm i \psi_1(x \xi)$$

diese Integralfunktionen, so bestehen die Beziehungen

$$\varphi_1(x, \xi) = \varphi(x, i \xi) \qquad i \psi_1(x \xi) = \psi(x, \xi i) \quad . \; . \quad (5)$$

so daſs also in der That das eine Integral aus dem andern gebildet werden kann. Es lassen sich ferner aus vorstehenden Identitäten die folgenden ableiten:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad \ldots \quad (6)$$

welche an Stelle der Grundgleichungen (2) treten, wenn ξ in dem Argument der Funktion (1) rein imaginär wird. Es ist nämlich

$$\frac{\partial \varphi_1 (x \xi)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi (x, i \xi)}{\partial x}; \quad i \frac{\partial \psi_1 (x \xi)}{\partial x} = \frac{\partial \psi (x, i \xi)}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial \varphi_1 (x \xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi (x, i \xi)}{\partial (i \xi)} i; \quad \frac{\partial \psi_1 (x \xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi (x, i \xi)}{\partial (i \xi)}$$

Nun lauten aber die (2) für imaginäre ξ:

$$\frac{\partial \varphi (x, i \xi)}{\partial x} = \frac{\partial \psi (x, i \xi)}{\partial (i \xi)}; \quad \frac{\partial \varphi (x, i \xi)}{\partial (\xi i)} = \frac{\partial \psi (x, i \xi)}{\partial x}$$

Durch Elimination von φ und ψ aus diesen sechs Identitäten ergeben sich die beiden Identitäten (6).

37.

Der Riemann'sche Funktionsbegriff. Die Gleichungen (6) sind bekanntlich von Riemann zur Grundlage einer Theorie der Funktionen einer complexen Veränderlichen gemacht worden. Riemann definiert: „Eine veränderliche complexe Gröſse w heiſst eine Funktion einer andern veränderlichen complexen Gröſse z, wenn sie mit ihr sich so ändert, daſs der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werte des Differentials dz ist.“ *

Ist nämlich $z = x + i\xi$ $w = u + iv$ so wird

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) i + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) i\right) \frac{dz - i\,dy}{dx + i\,dy} \quad . \quad . \quad (7)$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist aber Null, wenn die Bedingungen (6) statt haben $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi}$ und folglich wird in der That $\frac{dw}{dz}$ von $dz = dx + i\,dy$ unabhängig.

Obgleich es also richtig ist, daſs jede Funktion w einer complexen Veränderlichen z sich immer so ändert, daſs der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ von dem Werte des Differentials dz unabhängig ist, so ist dies doch keine den Funktionen einer complexen Veränderlichen ausschlieſslich zukommende Eigenschaft; dieselbe kommt vielmehr allen

* Gesammelte Werke pag. 5.

Funktionen eines binomisch zweiwertigen Argumentes zu. Ist nämlich $w = u \pm v$ eine Funktion von $z = x \pm \xi$, so kommt

$$dw = du \pm dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) \pm \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) \pm \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right](dx \pm dy) + \quad . \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) \pm \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right](dx \mp dy)$$

Da aber wegen der Bedingungen (2) zwischen u und v das zweite Glied Null ist, so kommt:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) \pm \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

Der Differentialquotient ist also unabhängig von $dz = dx \pm dy$. Der Grund dieses Verhaltens liegt neben der Binomität des Argumentes hauptsächlich in der Zweiwertigkeit seines zweiten Teils, wie man sich leicht überzeugt; denn vorstehendes Resultat ergibt sich, einerlei ob man nur das obere oder nur das untere oder beide Vorzeichen zugleich nimmt, wenn nur die Bedingungsgleichungen (2) angewendet werden. Diese letzteren haben aber ihren Grund in der Zweiwertigkeit der Funktion und des Argumentes, aber sie haben nichts zu schaffen mit der Imaginarität oder Reellität des zweiten Teils des Argumentes $x \pm \xi$. Riemann setzt aber ausdrücklich die Reellität von x und ξ in $x \pm i\xi$ voraus.

Die Riemann'sche Definition wird daher durch folgende allgemeinere zu ersetzen sein:

> Eine veränderliche bivariabele Gröfse $w = u \pm v$ ist eine Funktion des binomisch zweiwertigen Argumentes $z = x \pm \xi$, wenn sie mit ihm sich so ändert, dafs der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Wert des Differentials dz ist.

Die Anwendung des in dieser Definition enthaltenen Criteriums besteht darin, dafs man untersucht, ob die Bestandteile u und v der Funktion den Bedingungen (2) genügen oder den Bedingungen (6), je nachdem der zweiwertige Teil v der Funktion reell oder imaginär ist. Im ersten Fall hat man dann eine Funktion des reellen Binomiums $x \pm \xi$, im zweiten eine solche des complexen Argumentes $x \pm i\xi$.

Die Zweiwertigkeit des zweiten Teils ξ des Argumentes $x \pm \xi$ kann dadurch entstanden gedacht werden, dafs ξ die Quadratwurzel aus einer

Zahl α ist. In diesem Falle läfst sich aber gar nichts darüber aussagen, ob $x \pm \sqrt{\alpha}$ reell oder zum Teil imaginär ist. Schon aus diesem Grunde mufs bei der Definition von der Gröfsenqualität des zweiten Teils des Argumentes abgesehen werden. Man kann es aus dem gleichen Grunde einer Funktion $w = u \pm v$ gar nicht ansehen, ob v reell oder imaginär ist, wenn u und v beide Funktionen von ξ und $\sqrt{\alpha}$ sind. Es ist also lediglich die Zweiwertigkeit, welche hier entscheidend in das Gewicht fällt, und folglich sind es die Bedingungen (2), die mafsgebend zu entscheiden haben, ob die Funktion w eine solche des Argumentes $x \pm \sqrt{\alpha}$ ist. Denn selbst wenn in den Ausdrücken für u und v die Wurzel $\sqrt{-\alpha}$ vorkommt, kann man nichts darüber wissen, ob v reell oder imaginär ist. Erst wenn man willkürlich festgesetzt hat, dafs α nur positiv sein soll, besteht die Gewifsheit, dafs $\sqrt{-\alpha}$ immer imaginär ist. Eine solche Festsetzung ist aber eine Einschränkung jener Allgemeinheit, die für den Argumentverlauf notwendig gefordert werden mufs und die darin besteht, dafs das Argument alle einwertigen, alle rein zweiwertigen, dieselben mögen reell oder imaginär sein, und alle binomisch-zweiwertigen Gröfsen zu durchlaufen fähig ist. Dies ist aber nur möglich, wenn der erste Teil stets reell, der zweite dagegen alle reellen und imaginären Werte anzunehmen vermag. Es mufs demnach das Criterium, welches darüber entscheidet, ob ein zweiwertiger Ausdruck, dessen Teile Funktionen von ξ und $\sqrt{\alpha}$ sind, eine Funktion von $x \pm \sqrt{\alpha}$ ist, ganz unabhängig von dem Vorzeichen von α anwendbar sein. Dieser Anforderung entsprechen aber nur die Bedingungen (2). Mit unserer obigen Definition wird also das Reelle so zu sagen nur wieder in seine natürlichen Rechte eingesetzt; denn der Reell-Fall ist immer der primäre, das Imaginäre, weil es ohne Beziehung auf das Reelle keinen Sinn hat, immer der secundäre Fall, so lange wir uns im Gebiete der reinen Mathematik bewegen.

38.

Bivariable Funktion einer bivariablen Funktion. Problemstellung. Auf Grund der obigen Definition einer Funktion eines binomisch zweiwertigen Argumentes läfst sich nun leicht der Hauptsatz der Funktionenrechnung beweisen, dafs von zwei binomisch zweiwertigen Gröfsen, welche der in der Definition ausgesprochenen Bedingung genügen, jede eine Funktion der andern ist. Es seien

$$W = u\,(x\,\xi) \pm v\,(x\,\xi)\,; \quad w = \lambda\,(x\,\xi) \pm \mu\,(x\,\xi) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

die beiden gegebenen Gröfsen; dann ist der Annahme nach bekannt, dafs zwischen den partiellen Differentialquotienten ihrer Bestandteile die Relationen bestehen

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x}=\frac{\partial \mu}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \xi}=\frac{\partial \mu}{\partial x} \quad . \quad (10)$$

Auf Grund dieser Voraussetzungen soll gezeigt werden, dafs $\frac{dW}{dw}$ von dw unabhängig ist, dafs also die Beziehungen statt haben:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}=\frac{\partial v}{\partial \mu} \qquad \frac{\partial u}{\partial \mu}=\frac{\partial v}{\partial \lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \lambda}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}; \quad \frac{\partial u}{\partial \mu}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mu}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \mu}\\ \frac{\partial v}{\partial \lambda}&=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}; \quad \frac{\partial v}{\partial \mu}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mu}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \mu}\end{aligned} \quad (12)$$

unter der Voraussetzung, dafs x und ξ nach λ und μ differenziert werden können, dafs also die Gleichungen:

$$\lambda=\lambda(\xi x) \qquad \mu=\mu(\xi x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

nach λ, beziehungsweise μ differenzierbar sind. Dies setzt aber wiederum voraus, dafs auf der rechten Seiten ξ und x durch λ und μ ausgedrückt gedacht, und dafs also die Gleichungen zu Identitäten gemacht worden sind. Allein dies ist nur dann möglich, wenn die Gleichungen umkehrbar sind.

39.

Umkehrung einer Funktion. Es ist also zunächst der Begriff der Umkehrbarkeit einer Funktion, dessen Bedeutung wir weiter zu erläutern haben. Und da ist es dann der Funktionsbegriff selbst, durch dessen Zergliederung wir Aufklärung über das, was man unter der Umkehrbarkeit einer Funktion zu verstehen hat, erhalten.

Eine Gröfse y heifst eindeutige Funktion einer Gröfse x, wenn jedem Werte des x ein bestimmter Wert des y zugehört. Sind also x_1, x_2, x_3, . . . beliebige aufeinanderfolgende Werte des x und y_1, y_2, y_3, . . . die ihnen nach Willkür zugeordneten Gröfsenwerte des y, so hat es offenbar keinen Sinn y eine Funktion von x zu nennen: denn das Wort Funktion drückt eine Beziehung aus, in welcher die beiden Gröfsen y und x zueinander stehen sollen. Nun hat aber das Wort Willkür nur Bezug auf den Wert des y, insoferne dieser gewählt wird ohne dabei an den Wert des x nur zu denken, mit andern

Worten, man ist durch den Wert von x nicht gezwungen dem y ebenfalls einen vorgeschriebenen Wert beizulegen, wenn gleich man genötigt ist, ihm einen bestimmten Wert zu geben, wenn es sich um eine eindeutige Funktion handelt. Erst nachdem der Wert des y festgesetzt ist, wird er dem Werte des x zugeordnet d. h. in Beziehung zu ihm gesetzt. Diese Beziehung besteht in der **wechselseitigen** Zusammengehörigkeit derselben; denn es hat offenbar keinen Sinn zu sagen, das y sei dem x zugeordnet, wenn man dabei die Reciprocität ausschliefst. Das Wort Zuordnung bedeutet eben, dafs y und x nach der Qualität ihrer Begriffe von gleichem Range sind, dafs also das x dem y und umgekehrt, dafs das y dem x zugeordnet ist, und dafs also beide Gröfsen sich nur dem Namen nach von einander unterscheiden.

Recht klar wird dies, wenn man unsere neue Art der geometrischen Versinnbildlichung einer Funktion ins Auge fafst und also mit binomisch zweiwertigen Argumenten und Funktionen operiert. Bei diesen sind die Reihen der Argument- und Funktionswerte durch die orthogonalen Projectionen gewisser in der Ebene willkürlich angenommener Segmente dargestellt; durch ein solches Segment sind seine beiden Projectionen bestimmt, und es bleibt offenbar gleichgiltig, welches von beiden man als Argument, und welches man als Funktion wählt, wenn man das Segment durch seinen Mittelpunkt, seine Potenz und seine Richtung gegeben denkt; denn die Potenz desselben wird immer durch $\sqrt{h^2 + k^2}$ dargestellt und für den Wert dieses Ausdruckes bleibt es einerlei, ob h als zweiwertiger Teil des Argumentes und k als solcher der Funktion angesehen wird oder umgekehrt. Die Richtung des Segmentes ist im ersten Falle durch $k : h$, im zweiten Falle durch $h : k$ angegeben. Da der Bruch $k : h$ aber die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels des Segmentes gegen die x Achse, der Bruch $h : k$ dagegen die trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels des Segmentes gegen die y Achse bedeutet, so geben beide Brüche dieselbe Richtung an. In dieser gegenseitigen Beziehung haben wir die Bedeutung des Wortes Funktion zu suchen, wenn die Zuordnung der Funktionswerte zu den Argumentwerten ausschließlich nach besonderer, der Willkür unterliegenden Bestimmungen geschieht.

Man sieht, dafs auf diesem Standpunkte das Problem der Umkehrung der Funktion gar nicht existiert, da die Vertauschung von Argument- und Funktionswert in dem Funktionsbegriff als etwas Selbstverständliches schon enthalten ist. Allein durch eine nach Willkür getroffene Zuordnung von Gröfsenwerten y zu den Gröfsenwerten x ist der Funktionsbegriff noch nicht vollständig festgelegt; denn die Anzahl dieser Zuordnungen kann immer nur eine endliche sein, da jede solche Zuordnung, weil sie eben willkürlich geschieht, ein Willensakt ist, ein solcher aber nicht eine unendliche Anzahl mal wiederholt werden kann. Der vollständige Funktionsbegriff verlangt aber, daſs nicht blos zu einer endlichen Anzahl von Werten des Argumentes, sondern daſs zu jedem Werte des x ein Wert des y gehören soll. Diese Forderung wird nur erfüllt, wenn entweder durch jene endliche Zahl willkürlicher Zuordnungen zugleich ein Gesetz gegeben ist, welchem nicht nur die bereits willkürlich festgesetzten Zuordnungen, sondern auch alle noch möglichen, der Zahl nach unendlichen Zuordnungen gehorchen, oder wenn neben jener endlichen Zahl von willkürlichen Zuordnungen noch eine allgemeine Vorschrift gegeben ist, der gemäſs zu der übrigbleibenden unendlichen Anzahl von Argumentwerten die Funktionswerte zu bestimmen sind. Einerlei nun, ob für diese unendliche Anzahl übrigbleibender Argumentwerte die Zuordnung durch das erwähnte Gesetz oder durch eine Vorschrift geschieht: das Problem der Umkehrung besteht für diese Art der Zuordnung, und es muſs also bewiesen werden, daſs zu jedem Werte der Funktion ein Wert des Argumentes gehört. Dieser Beweis kann geführt werden, wenn die Zahl der nach Willkür getroffenen Zuordnungen von Argument- und Funktionswerten mindestens eins ist, sobald man noch festsetzt, daſs die Funktion stetig sein soll.

Ist nämlich $y = f(x)$ das Gesetz oder die erwähnte Vorschrift, x_0 und y_0 zwei einander nach Willkür oder durch dieses Gesetz zugeordnete Werte von Argument und Funktion, ferner y ein anderer Wert der Funktion, der aber nicht willkürlich, sondern nach der gegebenen Vorschrift als dem Argumente x zugehörig berechnet worden ist; dann hat man

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \left(\frac{x + x_0}{2}, \frac{y + y_0}{2}\right)$$

oder wenn $\xi = \frac{x + x_0}{2}$ $\quad \eta = \frac{y + y_0}{2}$ gesetzt wird:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda (\xi\, \eta)$$

wo λ die allgemeine Ableitung für den Punkt $(\xi\, \eta)$ ist, welcher eine beliebige durch den Punkt $x_0\, y_0$ gehende Sehne halbiert. Daſs dieselbe existiert, ist klar, da nach der gegebenen Vorschrift zu jedem Werte des x das zugehörige y berechnet werden kann, insbesondere auch für ein Argument, das binomisch zweiwertig ist. Diese Vorschrift kann aber ersetzt werden durch die so eben aufgestellte Formel; denn aus ihr wurde unter Nummer 16 die Entwickelung der Funktion in eine Potenzreihe abgeleitet.

Die Auflösung vorstehender linearer Gleichung nach x liefert dieses als Funktion von y, wenn in der Gleichung:

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{1}{\lambda\left(\frac{x + x_0}{2}, \frac{y + y_0}{2}\right)} = \frac{1}{\lambda(\xi\eta)}$$

der Bruch rechts die allgemeine Ableitung von x nach y für den Punkt $(\xi\eta)$ ist, denn man kann dann $x - x_0$ in eine nach Potenzen von $y - y_0$ fortschreitende Reihe entwickeln. Nun ist aber nach der Definition

$$\frac{k}{h} = \lambda\left(\frac{x + x_0}{2}, \frac{y + y_0}{2}\right) = \lambda(\xi\eta)$$

die allgemeine Ableitung der Funktion y nach x im Punkte $(\xi\eta)$. Wäre aber x Funktion von y, so würde $\frac{h}{k} = \mu(\xi\eta)$ die allgemeine Ableitung für denselben Punkt $(\xi\eta)$ sein. Es mufs also bewiesen werden, dafs

$$\mu(\xi\eta) = \frac{1}{\lambda(\xi\eta)}$$

ist. Vergifst man nun nicht, dafs die Punkte $(x_0\ y_0)$ und $(y\,x)$ ein Segment festlegen, dessen Neigung gegen die x Achse durch den Bruch $\frac{k}{h}$, dessen Neigung gegen die y Achse aber durch den Bruch $\frac{h}{k}$ bestimmt wird, so sieht man die Richtigkeit der obigen Relation ohne weiteres ein. Will man jedoch den strengen Beweis hierüber führen, so bilde man aus den zwei Gleichungen (15) und (16) auf Seite 37, in welche die Gröfsengleichung $y = f(x)$ für binomisch zweiwertige Argumente sich spaltet, einmal die Resultante (30) auf Seite 18 dadurch, dafs man $k = \lambda h$ setzt und aus ihnen h eliminiert, ein anderesmal aber dadurch, dafs man $h = k\mu$ setzt und k eliminiert. Sind

$$R(\lambda) = 0 \qquad\qquad R_1(\mu) = 0$$

die beiden Resultanten, so ist zu beweisen, dafs die eine in die andere übergeht, wenn man $\lambda = 1 : \mu$ setzt, was keine Schwierigkeit macht.

Es besteht also die Gleichung

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \mu(\xi\eta)$$

zu Recht, und man kann mit ihrer Hilfe $x - x_0$ in eine Potenzreihe des Argumentes $y - y_0$ entwickeln, mit andern Worten die Funktion

$y = f(x)$ ist umkehrbar. Will man von der Entwickelbarkeit der Funktion x von y absehen, so gelangt man noch auf folgendem Wege zur Überzeugung, daſs zu jedem Werte des y ein Wert von x existiert.

Rufen wir uns nämlich ins Gedächtnis zurück, daſs x_0, y_0 nach Willkür, x, y aber nach gesetzlicher Vorschrift einander zugeordnete Werte von Argument und Funktion sind, und daſs der Voraussetzung zufolge y stetige Funktion von x ist, so kann man die Differenz $y - y_0$ mit $x - x_0$ so klein machen als man nur will. Die Gleichung (20) geht dann über in

$$\frac{d\,x_0}{d\,y_0} = \frac{1}{f'(x)}$$

Wenn man also für einen einzigen Wert x_0 des Argumentes den zugehörigen Funktionswert y_0 kennt und weiſs, daſs umgekehrt zu y_0 als Argument der Funktionswert x_0 gehört, so kann man für den unmittelbar auf y_0 folgenden um $d\,y_0$ gröſseren Argumentwert den zugehörigen Funktionswert berechnen; er ist

$$x_0 + \frac{d\,y_0}{f'(x_0)}$$

es sind folglich $x_1 = x_0 + d\,x_0$, $y_1 = y_0 + d\,y_0$ zwei Werte von Argument und Funktion, die sich wechselseitig zugeordnet sind. Man hat also jedenfalls

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \mu(\xi_1\,\eta_1)$$

wenn y aus der Vorschrift $y = f(x)$ als Funktion von x bestimmt worden ist. Es ist also wiederum $d\,x_1 = d\,y_1 : f'(x_1)$ der Zuwachs von x_1 wenn y_1 als Argument angesehen wird u. s. w. Der Gesamtzuwachs, den die Funktion x von y erfährt, ist also angegeben durch das Integral

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\,y}{f'(x)}$$

Wenn $y = f(x)$ eine algebraische Funktion ist, so kann man das Integral bekanntlich auswerten, ohne die Umkehrungsfunktion zu kennen.

Damit haben wir den Punkt erreicht, wo unsere eigentliche Untersuchung wieder einzusetzen hat.

Betrachten wir zunächst die Funktion $\mu = \mu(x\,\xi)$. Von ihr ist bekannt, daſs sie samt ihren ersten partiellen Differentialquotienten eindeutig und stetig ist, ferner daſs sie für $\xi = 0$ verschwindet und daſs umgekehrt dem Werte $\mu = 0$ neben andern der Wert $\xi = 0$ entspricht und zwar für jeden Wert von x; denn es wurde oben angenommen, daſs

$\lambda \pm \mu$ für rein imaginäre ξ in $\lambda' \pm i\,\mu'$ übergeht, was nur möglich ist, wenn μ den Faktor ξ enthält. Betrachtet man also x als constant, so wird μ eine Funktion von ξ allein, und der partielle Differentialquotient von μ nach ξ ist für $\xi = 0$ bekannt, da ja seine Existenz in dem Wertegebiett $x\xi$, zu welchem auch $x, 0$ gehört, vorausgesetzt wird. Es sind daher alle Bedingungen des so eben bewiesenen Satzes für die Funktion $\mu = \mu\,(\xi x)$ erfüllt d. h. diese Funktion ist nach ξ umkehrbar, was auch x für einen Wert haben mag. Seien ξ_0 und μ_0 die einander wechselseitig entsprechenden Werte, wenn x den Wert x_0 hat und v das Funktionszeichen für die Umkehrungsfunktion; dann ist gleichzeitig

$$\mu_0 = \mu\,(x_0\,\xi_0) \text{ und } \xi_0 = v\,(\mu_0\,x_0)$$

Diese Gleichungen gelten unabhängig von dem Werte des x. Läfst man also x_0 variieren, während ξ_0 constant bleibt, so lehren sie, dafs die Gleichung $\mu = \mu\,(x\,\xi)$ auch nach x umkehrbar ist. Denn die erste Gleichung lehrt, dafs zu dem Wert x_0 der Wert μ_0 gehört, wenn $\xi = \xi_0$ ist, und die zweite sagt aus, dafs ξ den Wert ξ_0 hat, wenn $\mu = \mu$ und $x = x_0$ gesetzt wird. Setzt man also $x = x_0$, so mufs ξ den Wert ξ_0 annehmen und folglich nach der ersten Gleichung $\mu = \mu_0$ werden.

Da zufolge der Gleichungen (10) die Funktion $\lambda\,(x\,\xi)$ dieselben Eigenschaften hat, wie die Funktion $\mu\,(x\,\xi)$, so ist dieselbe ebenfalls umkehrbar.

Wir sind demnach zu dem Resultate gelangt, dafs ebensowohl x und ξ als Funktionen von μ wie als Funktionen von λ angesehen werden können. Folglich bestehen die Gleichungen (12) zu Recht.

40.

Lösung des Problems unter Nr. 38. Berücksichtigt man jetzt die Grundgleichungen (10), so ergeben sich aus den Formeln (12) die gesuchten Relationen (11), wenn der Nachweis gelingt, dafs folgende Identitäten bestehen:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \qquad \frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dieser Nachweis mufs besonders geliefert werden; denn wenn auch oben der Beweis geführt wurde, dafs x und ξ Funktionen von λ und μ sind, so ist damit doch nicht gesagt, dafs $x \pm \xi$ eine Funktion von $\lambda \pm \mu$ sei. Vorstehende Formeln sind aber der analytische Ausdruck für diese Behauptung.

Man differenziere zu diesem Zwecke die Gleichungen (13) nach λ und μ; dann kommt

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}=1$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\mu}=0$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\mu}=1$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}=0$$

Diese Gleichungen lösen wir nach $\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \frac{\partial x}{\partial\mu}, \frac{\partial y}{\partial\lambda}, \frac{\partial y}{\partial\mu}$ auf. Die Determinante des Gleichungssystems ist wegen (10):

$$\Delta=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial\xi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2=\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right)^2\right]^2$$

Die Auflösungen der Gleichungen sind daher immer möglich, wenn $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ und $\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}$ oder was dasselbe ist, wenn $\frac{\partial\mu}{\partial\xi}$ und $\frac{\partial\mu}{\partial x}$ von einander verschieden sind, was nichts anderes sagen will, als dafs die Funktionen λ und μ nicht identisch sein dürfen. Es ist unter dieser Voraussetzung:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\qquad\frac{\partial x}{\partial\mu}=-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}=-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial\mu}{\partial x}\qquad\frac{\partial\xi}{\partial\mu}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\quad . \; . \; (15)$$

Aus der ersten und vierten Relation ergibt sich aber mit Zuhilfenahme von $\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial\xi}$ zunächst $\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\frac{\partial\xi}{\partial\mu}$ und aus der zweiten und dritten Gleichung folgt mit Benützung von $\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}=\frac{\partial\mu}{\partial x}$ die andere der gesuchten Identitäten $\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}=\frac{\partial x}{\partial\mu}$; es bestehen demnach die (14) zu Recht und somit auch die Grundgleichungen (11). Die letzteren drücken aber aus, dafs $u\pm v$ eine Funktion von $\lambda\pm\mu$ ist. Der bewiesene Satz lautet daher:

> Sind von zwei Funktionen W und w jede eine Funktion desselben binomisch zweiwertigen Argumentes, so ist auch jede eine Funktion der anderen.

Die Formeln (14), auf Grund deren dieser Satz bewiesen wurde, lehren, dafs $x\pm\xi$ eine Funktion von $\lambda\pm\mu$ ist. Damit ist also der Fundamentalsatz der Funktionenrechnung allgemein auch für binomisch zweiwertige Variabeln bewiesen:

Ist w eine Funktion des binomisch zweiwertigen Argumentes $x \pm \xi$, so läfst sich die Funktion stets **umkehren.**

Als Corollar hiezu ergibt sich der Fundamentalsatz der Algebra, dafs jede Gleichung eine Wurzel hat.

Das Gleichungssystem (14) bleibt unverändert, wenn in den Funktionen u, v, λ, μ die Variabele ξ imaginär angenommen wird. Es ändert sich in diesem Falle nur die Discriminante $\triangle$, welche jetzt dem Quadrat von $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)^2$ gleich ist. Die Schlüsse, die aus den (15) gezogen wurden, bleiben daher auch im Imaginärfall des ξ in Giltigkeit.

Bei der ganzen übrigen Beweisführung ist stillschweigend angenommen worden, dafs die Grundgleichungen (10) für alle Wertepaare x, ξ endliche von Null verschiedene Werte haben. Macht man nun die weitere Annahme, dafs eine Funktion $\lambda\,(\xi\, x) \pm \mu\,(\xi\, x)$ existiere, von der man weifs, dafs nicht nur ihre ersten partiellen Differentialquotienten endliche Werte haben, sondern dafs das auch für die sämtlichen übrigen Ableitungen gelte, so findet das gleiche für jede Funktion statt, deren erste partielle Ableitungen endlich sind. Denn es ist wegen des oben bewiesenen Satzes

$$u\,(\xi\, x) \pm v\,(\xi\, x) = \lambda\,(\xi\, x) \pm \mu\,(\xi\, x)$$

da die Gleichheit die einfachste funktionelle Beziehung zwischen zwei Gröfsen ist. Diese Gleichheit ist nach der hypothetischen Grundlage dieses Satzes eine Folge der Gleichheit und Endlichkeit der partiellen Differentialquotienten beider Funktionen. Es bestehen also auch die Gleichheiten

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \pm \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \pm \frac{\partial \mu}{\partial \xi}; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \pm \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Da aber die Stetigkeit und Endlichkeit der Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2}$$

vorausgesetzt ist, so folgt durch Differentiation vorstehender Gleichungen das gleiche für die zweiten partiellen Ableitungen der Funktionen u und v. In Fortsetzung dieser Schlufsweise ergibt sich die Endlichkeit und Stetigkeit sämtlicher partieller Ableitungen der Funktion $u \pm v$ und überhaupt aller Funktionen, deren erste partielle Ableitungen für alle Wertepaare $x\xi$ endlich und stetig sind. Daraus folgt aber das eigentliche Fundamentaltheorem der Funktionentheorie, wie sie von Cauchy und Riemann für complexe Argumente begründet wurde:

Ist $u+v$ eine Funktion von $x+\xi$ und innerhalb eines gewissen bestimmt abgegrenzten Gebietes für jedes Wertepaar ξx endlich und stetig, und findet das gleiche für ihre partiellen Ableitungen statt, und zwar so, dafs immer die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}$; $\frac{\partial u}{\partial \xi}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ stattfinden, so läfst sich die Funktion $u+v$ durch eine convergente Potenzreihe darstellen.

41.

Darstellbarkeit einer Funktion eines bivariabeln Argumentes. Um etwas Abwechselung in die Darstellung zu bringen, soll nun die Entwickelung einer complexen Funktion eines complexen Argumentes nach der Taylor'schen Reihe thatsächlich ausgeführt werden. Es soll also gezeigt werden, dafs wenn die Funktionen u und v der reellen Veränderlichen x und ξ die Eigenschaft haben, dafs sie nebst ihren ersten partiellen Ableitungen für eine bestimmt abgegrenzte Auswahl dieser Variabeln eindeutig und stetig sind und dafs, wenn aufserdem die ersten Ableitungen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

genügen, sich diese Funktionen als der reelle und imaginäre Bestandteil einer nach Potenzen von $z=x+i\xi$ fortschreitenden Reihe entwickeln lassen.

Es sei x_0, ξ_0 eines jener Wertepaare x, ξ, für welche die so eben angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind, dann kann man die Funktionen

$$u(x-x_0, \xi-\xi_0) \qquad v(x-x_0, \xi-\xi_0)$$

nach der Taylor'schen Reihe entwickeln. Man hat

$$u(x-x_0, \xi-\xi_0)=u(x_0\,\xi_0)+\frac{1}{k!}\Sigma\left\{(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x_0}+(\xi-\xi_0)\frac{\partial u}{\partial \xi_0}\right\}^k$$

in bekannter symbolischer Darstellungsweise, und ebenso

$$v(x-x_0, \xi-\xi_0)=v(x_0\,\xi_0)+\frac{1}{k!}\Sigma\left\{(x-x_0)\frac{\partial v}{\partial x_0}+(\xi-\xi_0)\frac{\partial v}{\partial \xi_0}\right\}^k$$

wenn man nach geschehener Potenzierung und Summation setzt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^m\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_0}\right)^n=\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x_0{}^m\,\partial \xi_0{}^n}; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x_0}\right)^m\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_0}\right)^n=\frac{\partial^{m+n}v}{\partial x_0{}^m\,\partial \xi_{0n}}$$

und beachtet, dafs immer $m+n=k$ sein mufs.

Addiert man die letzte mit i multiplizierte Gleichung zur vorangehenden, so kommt:

$$u + iv = u_0 + iv_0 + \frac{1}{k!}\Sigma\left\{(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x_0} + (\xi-\xi_0)\frac{\partial u}{\partial \xi_0}\right\}^k$$
$$+ \frac{i}{k!}\Sigma\left\{(x-x_0)\frac{\partial v}{\partial x_0} + (\xi-\xi_0)\frac{\partial v}{\partial \xi_0}\right\}^k$$

Nun bestehen aber die Relationen:

$$\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\,\partial \xi^s} = -\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^{r-2}\,\partial \xi^{s+2}}; \qquad \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^s\,\partial \xi^r} = -\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^{s+2}\,\partial \xi^{r-2}}$$

Für die höheren Ableitungen der Funktion v bestehen analoge Relationen. Dieselben werden erhalten, wenn man die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$$

zuerst $(r-2)$ mal nach x und hierauf s mal nach ξ differenziert, beziehungsweise $r-2$ mal nach ξ und s mal nach x. Unter Benützung dieser Formel ergibt sich:

$$\left\{(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x_0} + (\xi-\xi_0)\frac{\partial u}{\partial \xi_0}\right\}^k =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^k u}{\partial \xi^k_0}\left\{\left[(\xi-\xi_0) + i(x-x_0)\right]^k + \left[(\xi-\xi_0) - i(x-x_0)\right]^k\right\} -$$
$$- \frac{i}{2}\frac{\partial^k v}{\partial \xi^k_0}\left\{\left[(\xi-\xi_0) + i(x-x_0)\right]^k - \left[(\xi-\xi_0) - i(x-x_0)\right]^k\right\}$$

wenn man $\frac{\partial v}{\partial \xi_0}$ statt $\frac{\partial u}{\partial x_0}$ schreibt, bevor auspotenziert wird. Ebenso ergibt sich:

$$i\left\{(x-x_0)\frac{\partial v}{\partial x_0} + (\xi-\xi_0)\frac{\partial v}{\partial \xi_0}\right\}^k =$$
$$= \frac{i}{2}\frac{\partial^k v}{\partial \xi^k_0}\left\{\left[(\xi-\xi_0) + i(x-x_0)\right]^k + \left[(\xi-\xi_0) - i(x-x_0)\right]^k\right\}\frac{1}{2} -$$
$$- \frac{\partial^k u}{\partial \xi^k_0}\left\{\left[(\xi-\xi_0) + i(x-x_0)\right]^k - \left[(\xi-\xi_0) - i(x-x_0)\right]^k\right\}\frac{1}{2}$$

Durch Addition beider Formeln gelangt man zu dem höchst einfachen Resultate:

$$\left\{(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x_0} + (\xi-\xi_0)\frac{\partial u}{\partial \xi_0}\right\}^k + i\left\{(x-x_0)\frac{\partial v}{\partial x_0} + (\xi-\xi_0)\frac{\partial v}{\partial \xi_0}\right\}^k =$$
$$= \left[(\xi-\xi_0) - i(x-x_0)\right]^k\frac{\partial^k u}{\partial \xi^k_0} + i\left[(\xi-\xi_0) - i(x-x_0)\right]^k\frac{\partial^k v}{\partial \xi_{k_0}} =$$
$$= \frac{1}{i^k}\left[(x-x_0) + i(\xi-\xi_0)\right]^k\cdot\left[\frac{\partial^k u}{\partial \xi^k_0} + i\frac{\partial^k v}{\partial \xi^k_0}\right]$$

Es ist also

$$u + iv = u_0 + iv + \frac{1}{k!} \Sigma \frac{1}{i^k} \Big[(x - x_0) + i(\xi - \xi_0)\Big]^k \cdot \Big[\frac{\partial^k u}{\partial \xi^k_0} + i \frac{\partial^k v}{\partial \xi^k_0}\Big]$$

Setzt man also jetzt $x + i\xi = z$, $x_0 + i\xi_0 = z_0$ so wird $(x - x_0) + i(x - x_0) = z - z_0$ und

$$\frac{\partial^k u}{\partial \xi^k_0} + i \frac{\partial^k v}{\partial \xi^k_0} = i^k \frac{d^k w}{dz^k}$$

Also hat man:

$$u + iv = u_0 + iv_0 + \frac{1}{k!} \Sigma (z - z_0)^k \frac{d^k w}{dz^k}$$

Bei Entwickelung der Funktionen $u(\xi x)$ und $v(\xi x)$ nach der Taylor'schen Reihe wurden die Restglieder nicht berücksichtigt; es erscheint deshalb auch in vorstehender Darstellungsformel kein Restglied. Dasselbe ergibt sich in ganz neuer Gestalt ganz wie bei der Taylor'schen Reihe für eine einwertige Variabele, nur daſs jetzt x und ξ in $x \pm \xi i$ selbst wieder als bivariabele Gröſsen anzusehen sind.

Daſs eine Funktion $u_1 \pm v_1$ dieselbe Entwickelung zuläſst wie die Funktion $u \pm iv$, ist à priori klar aus dem schon mehrfach angeführten Grunde, daſs $u + iv$ in $u_1 \pm v_1$ übergeht, wenn ξi statt ξ gesetzt wird. Übrigens kann man auch die Entwickelung selbständig vornehmen. Es werden dann nur einige leicht zu erratende Modifikationen vorzunehmen sein.

Nachtrag.

Der in Nummer 20 gegebene allgemeine Ausdruck für das Bogenelement einer Curve liefert für den Kreis vom Radius 1:

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Man hat also, da $ds = d\varphi$ ist, wenn $d\varphi$ den zu dem Bogenelemente gehörigen Centriwinkel bezeichnet, und dx in demselben Sinne gemessen wird wie $d\varphi$:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes ist es jetzt leicht auf Grund unserer algebraischen Definition des Sinus und Cosinus die Langrange'schen Derivationen der letzteren zu bestimmen.

Man hat nämlich

$$\cos\varphi = x \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 - x^2}$$

Es ist aber

$$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \frac{d\sin\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot -\sqrt{1 - x^2} = x = \cos\varphi$$

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = \frac{d\cos\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} = 1 . -\sqrt{1 - x^2} = -\sin\varphi$$

Legt man aber die allgemeinen algebraischen Begriffe von Sinus und Cosinus zugrunde, dann ist

$$u = \frac{x_0 + x}{2} \qquad v = \frac{y_0 + y}{2}$$

zu setzen und es wird

$$u^2 + v^2 = \frac{1 + x_0 x + y_0 y}{2}$$

also

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1 - x_0\, x - y_0\, y}{2}} \qquad \cos\varphi = \sqrt{\frac{1 + x_0\, x + y_0\, y}{2}}$$

und

$$2\, d\varphi = \sqrt{d x^2 + d y^2} \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

Durch Differentiation nach φ ergibt sich jetzt:

$$\frac{d \sin\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{4} \frac{x_0 \dfrac{dx}{d\varphi} - y_0 \dfrac{dy}{d\varphi}}{\sqrt{\dfrac{1 - x_0 x - y_0 y}{2}}}$$

Nun ist aber aus ( ):

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\, 2\, y \qquad \frac{dy}{d\varphi} = +\, 2\, x$$

Also

$$\frac{d \sin\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{x_0\, y - y_0\, x}{\sqrt{\dfrac{1 - x_0\, x - y_0\, y}{2}}}$$

Da aber die Identität besteht

$$(x_0\, y - y_0\, x)^2 = (1 - x_0\, x - y_0\, y)\,(1 + x_0\, x + y_0\, y)$$

wie man leicht sich überzeugt, wenn man noch beachtet, daſs ist

$$(x_0^2 + y_0^2)\,(x^2 + y^2) = 1$$

so wird

$$\frac{x_0\, y - y_0\, x}{2} = \sqrt{\frac{(1 - x_0\, x - y_0\, y)}{2} \cdot \frac{(1 + x_0\, x + y_0\, y)}{2}}$$

und es kommt daher:

$$\frac{d \sin\varphi}{d\varphi} = \sqrt{\frac{1 + x_0\, x + y_0\, y}{2}} = \cos\varphi$$

Ebenso läſst sich mit dem Ausdruck von $\cos\varphi$ operieren und nachweisen, daſs

$$\frac{d \cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi$$

ist.