

EXNER: DYNAMISCHE METEOROLOGIE



10-12  
12-13  
13-14

1592

1944

Wickety

1944



*Inw* *Kat.*

# DYNAMISCHE METEOROLOGIE

VON

FELIX M. EXNER

O. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK DER ERDE AN DER  
UNIVERSITÄT WIEN UND DIREKTOR DER K. K. ZENTRAL-  
ANSTALT FÜR METEOROLOGIE UND GEODYNAMIK

MIT 68 FIGUREN IM TEXT



~~GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego  
L.inw. 536~~



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1917

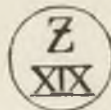
opus nr : 46844

28. Februar 1917.



4536

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA  
COPYRIGHT 1917 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.



ALLE RECHTE,  
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

**JULIUS VON HANN**

**IN VEREHRUNG UND DANKBARKEIT**

**GEWIDMET VOM VERFASSEN**

WYDZIAŁ FIZYKI  
KATEDRA FIZYKI  
UL. ŚW. ANNY 1  
50-137 WROCLAW



## Vorwort.

Seit dem ausgezeichneten Lehrbuche der Meteorologie von Sprung (1885) ist in deutscher Sprache kein Werk mehr erschienen, das unsere theoretischen Kenntnisse auf dem Gebiet der Meteorologie zusammengefaßt hätte; und auch in anderen Sprachen sind nur Ferrels Bücher vorhanden.

Seit diesen drei Jahrzehnten haben sich die Versuche, auf theoretisch-physikalischer Grundlage dem Verständnis meteorologischer Erscheinungen näher zu kommen, sehr vermehrt, so daß ich es schon im eigensten Interesse — für meine Vorlesungen an der Universität Innsbruck — unternahm, wenigstens die Theorie der Luftströmungen, die Dynamik der Atmosphäre, zusammenzufassen. Hieran schlossen sich naturgemäß einige Versuche, bestehende Lücken auszufüllen und Möglichkeiten weiterer Entwicklung aufzuzeigen.

Diese Arbeit fiel in eine Zeit (1913—1914), in welcher eben Bjerknes groß angelegte „Dynamische Meteorologie und Hydrographie“ in den zwei ersten Bänden herausgekommen war. Eine nähere Betrachtung derselben ließ den Versuch, der nun hier beendet vorliegt, nicht überflüssig, ja im Gegenteil geradezu wünschenswert erscheinen, da im besagten Werke die ältere und zeitgenössische Literatur fast unberücksichtigt geblieben ist.

Während in den Arbeiten von Bjerknes und seiner Schule das Hauptgewicht auf die Bewegungskräfte in der Horizontalebene gelegt ist, wird man in dieser dynamischen Meteorologie die Rolle der Temperatur und ihrer Verteilung in der Atmosphäre besonders hervorgekehrt finden. Diese Auffassung geht hauptsächlich auf die Arbeiten von Margules zurück, die sich überhaupt wie ein roter Faden durch das vorliegende Buch hinziehen. Sie scheinen von so grundlegender Bedeutung, daß ihr Bekanntwerden in weiteren Kreisen allein schon ein befriedigender Lohn meiner Arbeit wäre.

Das Manuskript des Buches wurde Mitte Juli 1915 komplett dem Herrn Verleger eingesendet. Doch hat sich die Drucklegung infolge des Krieges erheblich verzögert, so daß das Buch bei seinem Erscheinen leider nicht mehr ganz am laufenden sein wird; auch ließ es meine eigene militärische Tätigkeit nicht zu, die Literatur von Mitte 1915 ab bis heute zu verfolgen.

Durch seine Verwendung im Felde hat der Wetterdienst große Fortschritte gemacht; namentlich ist unsere Kenntnis der Luftströmungen in der Höhe und ihres Einflusses auf Luftdruckveränderungen vermehrt worden. Eine Darstellung dieser jüngsten Ergebnisse war aus begreiflichen Gründen nicht möglich.

Herrn Privatdozenten Dr. A. Defant bin ich für seine Hilfe bei Durchsicht der Korrekturen zu herzlichem Dank verpflichtet.

Wien, Weihnachten 1916.

**Felix M. Exner.**

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>Einleitung.</b>	
1. Dynamische Meteorologie. . . . .	1
2. Die Atmosphäre als Schauplatz der meteorologischen Erscheinungen . . . . .	2
3. Verteilung der Schwere auf der Erde . . . . .	3
4. Niveauflächen der Schwerkraft . . . . .	5
<b>Erstes Kapitel. Die Gasgesetze.</b>	
5. Maße und Einheiten . . . . .	7
6. Gasgesetz für trockene atmosphärische Luft . . . . .	8
7. Gasgesetz für ungesättigt-feuchte Luft und Ausdrücke für die Feuchtigkeit . . . . .	9
8. Gleichung für die zugeführte Wärme bei trockener Luft . . . . .	11
9. Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft . . . . .	13
10. Pseudoadiabatische Zustandsänderungen . . . . .	15
11. Die relative Feuchtigkeit bei adiabatischen Zustandsänderungen . . . . .	17
<b>Zweites Kapitel. Allgemeine dynamische und hydrodynamische Gleichungen.</b>	
12. Bewegungsgleichungen eines Punktes im rotierenden Koordinatensystem der Erde. . . . .	19
13. Die Erhaltung des Rotationsmomentes. . . . .	22
14. Bewegung eines Massenpunktes auf der Erdoberfläche . . . . .	25
15. Ablenkende Kraft der Erdrotation bei horizontaler Bewegung . . . . .	28
16. Die vertikale Beschleunigung des bewegten Massenpunktes . . . . .	30
17. Hydrodynamische Bewegungsgleichungen im festen und im rotierenden Koordinatensystem. . . . .	31
18. Die Kontinuitätsgleichung . . . . .	33
<b>Drittes Kapitel. Statik der Atmosphäre.</b>	
19. Ruhende Luft, Differenzialgleichung der Statik . . . . .	35
20. Mitteltemperatur einer Luftsäule . . . . .	37
21. Barometrische Höhenformel. . . . .	40
22. Flächen gleichen Druckes . . . . .	41
23. Beziehung des Luftdrucks in der Höhe und am Boden zur Mitteltemperatur einer Luftsäule . . . . .	42
<b>Viertes Kapitel. Vertikale Temperaturverteilung im Ruhezustand.</b>	
24. Einfluß der Wärmeleitung, Wärmestrahlung und Ausdehnung (Kompression) . . . . .	44
25. Statisches Gleichgewicht, Auftrieb. . . . .	45
26. Einfluß der vertikalen Bewegung auf die vertikale Temperaturverteilung . . . . .	48
27. Wärmeleitungsgleichgewicht . . . . .	55
28. Strahlungsgleichgewicht . . . . .	57
<b>Fünftes Kapitel. Kinematik.</b>	
29. Stromlinien und Stromröhren; stationärer Zustand . . . . .	66
30. Stromlinien in der Vertikalebene . . . . .	69

	Seite
31. Bestimmung zeitlicher Druckänderung und vertikaler Bewegung aus der Kontinuitätsgleichung . . . . .	71
32. Niederschlagsbildung bei vertikaler Bewegung . . . . .	74
33. Absteigende Luftströme. Föhn . . . . .	78
34. Temperatur in vertikalen Stromröhren mit veränderlichem Querschnitt . . . . .	80
<b>Sechstes Kapitel. Allgemeine Dynamik der Luftströmungen.</b>	
35. Prinzip der geometrisch ähnlichen Bewegungen von Helmholtz . . . . .	82
36. Horizontale Strömung im stationären Zustand ohne Reibung . . . . .	85
37. Integrale der Bewegungsgleichungen für horizontale Luftströmungen ohne Reibung . . . . .	91
38. Reibung der Luft an der Erdoberfläche . . . . .	98
39. Innere Reibung der Luft . . . . .	105
40. Ausfüllende, stationäre und gegen den Gradienten gerichtete Bewegungen . . . . .	111
41. Turbulenz der Bewegung . . . . .	114
42. Vertikaler Druckgradient und vertikale Bewegung . . . . .	115
43. Wärmeaustausch zwischen Erde und bewegter Luft. . . . .	121
<b>Siebentes Kapitel. Energie der Luftbewegungen.</b>	
44. Richtung der Vorgänge . . . . .	124
45. Gleichung der lebendigen Kraft. . . . .	125
46. Potentielle Energie der horizontalen Druckverteilung . . . . .	130
47. Energiegleichung der abgeschlossenen Luftmasse . . . . .	134
48. Beispiele für vertikale Umlagerungen der Luftmassen nach Margules . . . . .	137
49. Bedeutung der Kondensationswärme für die lebendige Kraft. . . . .	142
50. Wärmezufuhr als Energiequelle stationärer Bewegungen. . . . .	145
51. Vertikale Temperaturverteilung als Effekt des Umsturzes der Strahlungsschichten. . . . .	147
<b>Achstes Kapitel. Stationäre Strömungen in der Atmosphäre.</b>	
52. Ungleiche Temperaturen und stationäre Bewegungen . . . . .	150
53. Horizontales Temperaturgefälle bei stationärer Bewegung . . . . .	151
54. Grenzfläche zwischen verschiedenen temperierten Schichten . . . . .	154
55. Stationäre Kälte- und Wärmegebiete . . . . .	159
56. Stationäre Zirkulationen der Luft um die Erde. . . . .	163
<b>Neuntes Kapitel. Allgemeiner Kreislauf der Atmosphäre.</b>	
57. Übersicht über die vorhandenen Bewegungen . . . . .	171
58. Die Erhaltung der großen Konvektionsströmung der Atmosphäre. . . . .	173
59. Qualitative Erklärung des großen Kreislaufes . . . . .	175
60. Verteilung von Temperatur, Druck und Windstärke nach den Beobachtungen . . . . .	184
61. Verteilung von potentieller Temperatur und Rotationsmoment . . . . .	189
62. Einfluß von Land und Meer auf den allgemeinen Kreislauf . . . . .	193
63. Ältere Theorien über den Kreislauf der Atmosphäre . . . . .	196
<b>Zehntes Kapitel. Zyklonale Bewegungen über kleineren Gebieten der Erdoberfläche.</b>	
64. Rotationsbewegung bei symmetrischer Temperaturverteilung . . . . .	200
65. Lösungen von Oberbeck und Ferrel . . . . .	205
66. Windbahnen und Druckverteilung bei bewegten Zyklonen. . . . .	207
<b>Elftes Kapitel. Unperiodische Veränderungen an einem Orte der Atmosphäre.</b>	
67. Die Massenverteilung in einer Luftsäule . . . . .	213
68. Das Zustandekommen von Luftdruckgradienten; Luftversetzung . . . . .	220

	Seite
69. Unmittelbare Ursachen von Temperatur- und Druckveränderungen .	224
70. Differenzialgleichung des Druckes bei adiabatischer Horizontalbewegung . . . . .	228
71. Ergebnisse der Statistik über die Beziehungen der Veränderlichen in der Atmosphäre zueinander . . . . .	233
<b>Zwölftes Kapitel. Unperiodische Veränderungen in synoptischer Darstellung.</b>	
72. Kälteeinbrüche und Gewitterböen . . . . .	239
73. Wärmewellen . . . . .	243
74. Die Auslösung von Kälteeinbrüchen . . . . .	246
75. Niedrige Depressionen und Antizyklonen . . . . .	252
76. Die Entstehung hoher Depressionen und Antizyklonen . . . . .	259
77. Steig- und Fallgebiete des Druckes . . . . .	263
78. Schema der Konstitution hoher Depressionen und Antizyklonen . .	265
79. Veränderungen der synoptischen Wetterkarten . . . . .	272
<b>Dreizehntes Kapitel. Periodische Veränderungen in der Atmosphäre.</b>	
80. Periodische Veränderungen, hervorgerufen durch die Verteilung von Land und Meer . . . . .	275
81. Gravitationswellen an der Grenze ungleich dichter Medien . . . .	278
82. Tägliche Periode von Wind und Luftdruck . . . . .	285
83. Tägliche Periode von Luftdruck und Temperatur . . . . .	289
84. Freie elastische Schwingungen der Atmosphäre. . . . .	298
Register . . . . .	304



## Einleitung.

**1. Dynamische Meteorologie.** Die Meteorologie, die Lehre von den Witterungserscheinungen, gilt vielfach als Prototyp jener Wissenschaften, die es trotz ernstlicher Bemühungen noch zu keinen oder fast keinen Gesetzen gebracht haben. Sie ist in dieser Beziehung ein Übergangsgebiet von den exakten Naturwissenschaften (Physik) zu jenen beschreibenden Naturwissenschaften (z. B. Geologie), die nach ihrem ganzen Inhalt die Aufstellung von allgemeinen Gesetzen gar nicht als ihr Ziel anstreben, sondern vielmehr die Darstellung von Einzelercheinungen.

Diese Eigenschaft der Meteorologie ist in der Natur ihres Gegenstandes begründet. Die Erscheinungen der Witterung sind so verwickelt, sie entstehen aus dem Zusammenwirken so vieler Einzelheiten, daß für den Beobachter, welcher nur wenige derselben kennt, der Eindruck der Regellosigkeit, mitunter der der Regelmäßigkeit, sehr selten aber der der Gesetzmäßigkeit zustande kommt. An diesen Verhältnissen kann natürlich auch die mathematisch-physikalische Theorie nichts ändern. Hingegen kann diese Theorie dazu beitragen, jene physikalischen Vorgänge, die wir kennen und die auf die Witterung von Einfluß sind, in allen ihren Konsequenzen streng zu verfolgen und so einen Teil der Erscheinungen auf vorausgegangene Ereignisse zurückzuführen.

Das vorliegende Buch kann daher auch nicht Anspruch darauf machen, die Vorgänge der Witterung zu erklären; es stellt sich nur die Aufgabe festzulegen, was an den beobachteten Erscheinungen auf bekannte vorausgegangene Ereignisse zurückgeführt werden kann.

Die wenigen Gesetze, welche wir in der Meteorologie kennen, sind im folgenden ausdrücklich als solche Ausnahmen bezeichnet. An Regeln fehlt es nicht; die Einzelercheinung kann aber durch sie nur sehr unsicher vorausbestimmt werden; denn Regeln haben nur Sinn, wenn wir sie auf viele Fälle anwenden. Es muß unser Bestreben sein, die wenigen physikalischen Gesetze, welche für die Meteorologie von Bedeutung sind, immer genauer und zusammenwirkend auf die Einzelercheinungen anzuwenden, um allmählich von der Regel zum Gesetz fortzuschreiten.

Den Hauptinhalt des vorliegenden Buches bildet die Lehre von den Luftbewegungen; um sie zu verstehen, ist es dann allerdings nötig, auf andere Teile der Meteorologie, wie die Lehre von der Strahlung, die

Wärmelehre, näher einzugehen. Die Grundlagen aller unserer Kenntnisse, die Beobachtungstatsachen, können dabei nur zum geringsten Teil Darstellung finden. Wir verweisen in bezug auf sie auf das grundlegende Lehrbuch der Meteorologie von J. v. Hann und betrachten diese dynamische Meteorologie als Ergänzung desselben.

**2. Die Atmosphäre als Schauplatz der meteorologischen Erscheinungen.** Auf der Erdoberfläche liegt die atmosphärische Luft auf und wird durch die Schwerkraft auf ihr festgehalten. Denn diese Kraft wirkt auf gasförmige Massen in gleicher Weise wie auf feste. Durch sie üben die Körper auf ihre Unterlage einen Druck aus, den man als das Gewicht derselben bezeichnet. Die Luft hat also ebenso ein Gewicht wie jeder andere Körper.

Die Erde ist annähernd eine Kugel mit einem Radius von rund 6000 km; darüber liegt die Atmosphäre ausgebreitet. Von der Masse der letzteren sind mehr als 9 Zehntel zwischen der Erdoberfläche und einer konzentrisch zu ihr in 20 km Höhe geschlagenen Kugelfläche enthalten. Es ergibt sich daraus, daß die Atmosphäre wie eine ganz dünne Hülle den großen Erdball überzieht, eine Vorstellung, die der naiven Anschauung zuwiderläuft und um so mehr dann festzuhalten ist, wenn es sich um das Studium von Luftströmungen über großen Gebieten der Erde handelt. Die vertikalen Erstreckungen der Luftmassen, mit denen wir uns zu befassen haben, sind also im allgemeinen gering gegen ihre horizontalen.

Die große Veränderlichkeit, die wir in den Zuständen der Atmosphäre beobachten, stammt wesentlich von zwei Eigenschaften der Luft her: von ihrer leichten Beweglichkeit, die sie mit anderen Flüssigkeiten, wie dem Wasser des Ozeans, teilt, und von ihrer Kompressibilität verbunden mit dem starken Wärmeausdehnungsvermögen der Gase. Druck- und Temperaturveränderungen haben im Gase viel größere Massenverschiebungen zur Folge als in der tropfbaren Flüssigkeit.

Tatsächlich sind auch die Temperaturänderungen der mittelbare Anlaß zu den meisten Luftbewegungen. Die Sonne, die Energiequelle aller wesentlichen Veränderungen über der Erdoberfläche, bestrahlt die Erde in ungleicher Stärke in ihren verschiedenen Teilen; hierdurch entwickeln sich Massenverschiebungen in der Atmosphäre. Ungefähr die gleiche Wärme, welche die Erde empfängt, gibt sie auch wieder an den Weltraum ab (was daraus hervorgeht, daß sie tatsächlich ihre Temperatur annähernd beibehält). Die Lufthülle der Erde wird so von einem dauernden Wärmestrom Sonne-Erde-Weltraum durchsetzt und hierbei in dauernder Bewegung erhalten, welche durch den Umstand noch schwieriger zu übersehen ist, daß sich die Erde um ihre Achse dreht und dabei die Lufthülle als leichtbewegliche Flüssigkeit nicht vollständig mitnimmt. Dem Menschen kommt nur der Unterschied zwischen Luft- und Erdbewegung als „Wind“ zum Bewußtsein, die Erdbewegung selbst

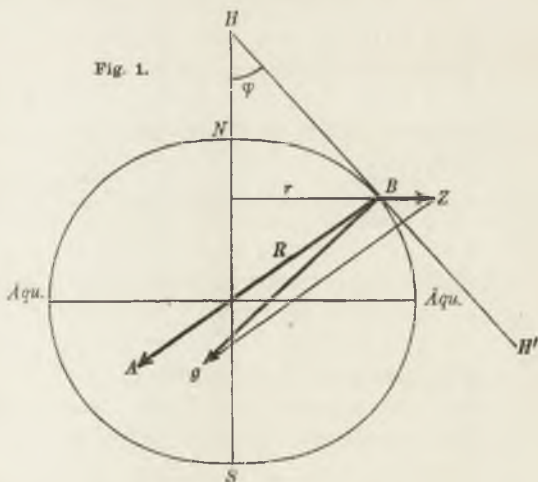


bemerkt er nicht, da er mit der Erde verbunden ist; der beobachtete Wind ist so ein verwickeltes Ergebnis dieser verschiedenen Einflüsse.

**3. Verteilung der Schwere auf der Erde.** Die Schwerkraft ist die wichtigste äußere Kraft, die auf die Luftmassen wirkt. Es ist daher wichtig, sie der Größe und Richtung nach überall dort zu kennen, wo Luft vorhanden ist. Die Schwere, welche auf eine relativ zur Erde ruhende Masse  $m$  wirkt, setzt sich aus zwei Kräften zusammen, erstens aus der Newtonschen Anziehungskraft der Erdmasse auf jene Masse  $m$ , zweitens aus der infolge der Erdrotation wirkenden Zentrifugalkraft. Wäre die Erde eine Kugel, so würden die Massen durch die Rotation eine Tendenz bekommen, gegen den Äquator zu wandern; eine flüssige Kugel würde sich abplatteln und die Form eines Ellipsoides annehmen, wie sie die Erde wirklich hat. Die Wanderung der oberflächlichen Massen gegen den Äquator unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft ginge dabei nur eine gewisse Zeit lang vor sich. Sobald die Abplattung begonnen hat, ist es nämlich nicht mehr eine Kugelfläche, auf welcher die Massen gegen den Äquator strömen; sie entfernen sich jetzt vielmehr vom Erdmittelpunkt und wandern schief aufwärts. Das Gleichgewicht ist erreicht, sobald die Zentrifugalkraft der entgegenwirkenden Komponente der Attraktionskraft das Gleichgewicht hält. Unter diesen Umständen steht die Resultierende beider Kräfte auf der abgeplatteten Erdoberfläche senkrecht, diese ist eine Niveaufläche der Schwerkraft.

In Fig. 1 ist dieser Gleichgewichtszustand dargestellt. Die Attraktionskraft  $A$  wirkt nach dem Massenmittelpunkt, die Zentrifugalkraft  $Z$  senkrecht zur Erdachse  $N-S$ . Beide vereinigen sich zur Schwerkraft  $g$ ; senkrecht auf ihr steht der Horizont  $H-H'$  im Punkte  $B$  von der Polhöhe  $\varphi$ . In der Figur ist die Abplattung übertrieben, die Zentrifugalkraft  $Z$  ist verhältnismäßig viel zu groß gezeichnet.

Die Schwerkraft hat dabei im Meeresniveau (Erdoberfläche) verschiedene Werte; denn einerseits ist am Pole die Masse, auf welche sie wirkt, dem Erdmittelpunkt näher als am Äquator, andererseits wirkt auf die Masse  $m$  am Pole, also in der Erdachse, keine Zentrifugalkraft, am Äquator hingegen kommt sie als Ganzes von der Attraktionskraft in Abzug. Beide Umstände führen dazu, daß die Schwerkraft am Äquator den kleinsten, am Pol den größten Wert



hat. Die empirische Formel für ihre Verteilung nach der geographischen Breite lautet:

$$g_{\varphi} = 9,80616 (1 - 0,002644 \cos 2\varphi + 0,000007 \cos^2 2\varphi).^{1)}$$

Die Schwere ist hier in Metern pro Sekunde ausgedrückt. Wie man sieht beträgt der Unterschied zwischen Pol und Äquator rund 5 cm oder 5 Promille.

Die beobachtete Verteilung der Schwerkraft im Meeresniveau steht in engem Zusammenhange mit der Abplattung der Erde (Clairautsches Theorem); letztere wird derzeit im Mittel zu  $\frac{1}{288}$  angegeben. Die halbe große Achse der Erde beträgt 6378 km, die halbe kleine 6356 km. Wir werden, wenn es sich um die Bewegung der Luft über der Erdoberfläche handelt, die Abweichung derselben von der Kugelfläche demnach vernachlässigen können. Nur werden wir zu berücksichtigen haben, daß die auf die Erdmassen wirkende Zentrifugalkraft durch die Abplattung der Erde schon kompensiert ist, daß also, wenn wir die Erde als rotierende Kugel betrachten, die gewöhnliche Zentrifugalkraft  $Z$  nicht mehr in Betracht zu ziehen ist. Diese hat für den Abstand  $r$  von der Erdachse den Wert  $r\omega^2$  pro Masseneinheit (Fig. 1), wo  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation bedeutet ( $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ ). Diese Kraft  $Z$  ist also unter jenen Kräften, welche senkrecht zur Erdachse wirken, stets wegzulassen; wir dürfen dann mit genügender Annäherung die Erde als Kugel betrachten, und zwar als Kugel vom mittleren Radius  $R = 6371$  km mit einer Schwere im Meeresniveau, die der oben angegebenen Gleichung entspricht.

Für die Abnahme der Schwerkraft mit der Erhebung vom Meeresniveau (Entfernung von der Erde) wird von Helmert der Ausdruck angegeben:

$$g_z = g_0 - 0,000003086 \cdot z,$$

wo  $g_z$  die Schwere in der Seehöhe  $z$ ,  $g_0$  die am Meeresniveau in Metern und  $z$  die Seehöhe in Metern ist. Durch die beiden Gleichungen für  $g_{\varphi}$  und  $g_z$  ist die Schwere für jeden Ort in der Atmosphäre bestimmbar. Da für  $z = 30000 = 30$  km die Schwere nur um 9 cm, also um etwa 1%, geringer ist als am Boden, und da diese Höhe die äußerste Grenze der bisher erforschten Zone der Atmosphäre darstellt, so werden wir für angenäherte Rechnungen — und es wird sich wesentlich um solche handeln — die Abnahme der Schwere mit der Höhe ebenso vernachlässigen können wie deren Unterschiede in der geographischen Breite. Bei genaueren Aufgaben werden diese Unterschiede allerdings in Rechnung zu ziehen sein; auch kommen wir später noch auf die Frage zu

1) Helmert, Enzyklop. d. math. Wiss. VI 1. B, Heft 2, 1910; nach der von Bjerknes gegebenen Umrechnung in: Dynamische Meteorologie und Hydrographie I, Statik; Braunschweig 1912.

rück, welchen Einfluß die Schwerkraftsverteilung auf die normale Lagerung der Luftmassen ausüben muß.<sup>1)</sup>

Nachdem die Schwerkraft nach außen abnimmt, ist das Gewicht gleich großer Luftmassen in verschiedenen Höhen nicht dasselbe; es ist daher nicht möglich, aus dem Luftdruck am Boden auf die Gesamtmasse der Atmosphäre zu schließen. Wir müßten, um dies genau tun zu können, die Verteilung der Massen nach der Höhe, also ihre Dichte oder Temperatur in allen Lagen kennen. Die Gesamtmasse der Atmosphäre ist mithin nicht genau bekannt; daß sie nicht unendlich ist, folgt aus dem allmählichen Übergang der Attraktionskraft der Erde in die des Mondes oder der Sonne. Mascart<sup>2)</sup> und Ekholm<sup>3)</sup> haben sich u. a. mit der Frage nach der wahrscheinlichen Masse der Atmosphäre beschäftigt. Letzterer kommt zum Resultat, daß die wirkliche Masse nur um etwa 0,6% größer ist als jene, die man berechnet, wenn man die Schwereabnahme mit der Höhe vernachlässigt ( $517 \cdot 10^{13}$  Tonnen).

**4. Niveauflächen der Schwerkraft.** Das Meeresniveau (Geoid) ist eine Fläche, auf welcher die Schwerkraft überall senkrecht steht; man bezeichnet solche Flächen als Niveauflächen der Schwere. Außerhalb des Meeresniveaus lassen sich weitere Niveauflächen konstruieren, die einen ähnlichen Verlauf wie jene haben. Die Potentialtheorie lehrt, daß die Arbeit, welche gebraucht wird, um die Masseneinheit vom Meeresniveau in eine bestimmte Niveaufläche zu heben, stets dieselbe ist, wo immer diese Hebung auch vorgenommen wird, also z. B. am Pol oder am Äquator. Diese Arbeit ist  $A = \int_0^z g dz$  bei der Hebung um die Höhe  $z$ .

Hier ist  $g$  nach obiger Formel als Funktion von  $z$  auszudrücken. Man erhält  $A = g_0 z - \frac{\beta z^2}{2}$ , wo  $\beta$  den sehr kleinen Zahlenkoeffizienten auf S. 4 bezeichnet. Da  $A$  für eine Niveaufläche konstant ist, so folgt angenähert  $z = \frac{A}{g_0}$  als Gleichung einer Niveaufläche der Schwere. Ihr Abstand vom Meeresniveau ist um so kleiner, je größer  $g_0$ . Die oberen Niveauflächen haben also am Pol einen kleineren Abstand vom Meeresniveau als in der Nähe des Äquators, sie senken sich gegen die Pole; wir können auch sagen: der Horizont in der Höhe  $z$  ist nicht parallel zum Horizont im Meeresniveau, sondern er ist gegen den Pol hin geneigt. Es wird später gezeigt werden, welchen Effekt diese Verhältnisse für die Flächen gleichen Luftdrucks haben.

Bjerknes hat (a. a. O.) die Lage der Niveauflächen der Schwere genau angegeben und in Tabellenform festgelegt. Aus obiger Formel

1) Die Verteilung der Schwerkraft ist von Bjerknes in seinem neuen Werke ausführlich berücksichtigt worden (a. a. O.).

2) Met. Zeitsch. 1892, S. 111.

3) Met. Zeitsch. 1902, S. 249.

ergibt sich z. B. folgendes zahlenmäßige Verhältnis, wenn wir das Glied mit  $z^2$  vernachlässigen. Sei am Pole der Abstand einer Niveaufläche  $z_p$ , die Schwere daselbst im Meeresniveau  $g_p$ , analog am Äquator  $z_a$  und  $g_a$ . Es ist dann  $A = g_p z_p = g_a z_a$ ; daraus ergibt sich der Höhenunterschied am Äquator und Pol zu  $z_a - z_p = z_a \cdot \frac{g_p - g_a}{g_p}$ , oder nach der Formel für die Breitenverteilung der Schwerkraft auch  $z_a - z_p = 0,0053 z_a$ . Jene Niveaufläche, die über dem Äquator in 10 km Höhe verläuft, liegt daher über dem Pol in einer um 53 m niedrigeren Meereshöhe. Die Neigung der Niveauflächen nimmt nach oben immer mehr zu, erreicht aber keine wirklich nennenswerten Beträge, da sich das Gefälle  $z_a - z_p$  ja auf die Distanz eines Erdquadranten bezieht.

Da die Schwere stets senkrecht zur Niveaufläche (Horizontale) wirkt, ist diese Fläche für die Ruhelage einer Masse von viel größerer Bedeutung als eine solche gleichen Abstandes vom Meeresniveau. Es hat darum Bjerknæs zur Bestimmung der Lage eines Massenelementes nicht dessen geometrischen Abstand vom Meeresniveau benützt, sondern dessen Schwerepotential  $A$ . Zwischen Orten mit gleichem Werte  $A$  wirkt keine Komponente der Schwerkraft. Die Einheit, in welcher  $A$  gemessen wird, ist bei Benützung des Meters etwa 9,8mal so groß als die Einheit der Höhe  $z$ , das Meter. Bjerknæs führt daher den 10. Teil derselben als „dynamisches Meter“ ein und benützt als Vertikalkoordinate eines Punktes seine Höhe  $H$  in dynamischen Metern über dem Meeresniveau.

Der Seehöhe  $z$  in Metern entspricht daher die Höhe  $H = \frac{\int_0^z g dz}{10}$  in dynamischen Metern. Ein dynamisches Meter ist also:  $\frac{z}{H} = \frac{10z}{\int_0^z g dz}$  Meter. Ein

wirkliches Längenmaß ist diese neue Einheit nicht, sondern ein Arbeitsmaß; die Länge des dynamischen Meters ist für verschiedene Breiten der Erde verschieden, am kleinsten am Pol, am größten am Äquator. Dieser Umstand macht seine Benützung unbequem, der Ausdruck „Meter“ erinnert überdies zu sehr an ein Längenmaß, dessen Größe unveränderlich sein muß. In der Praxis kann man (siehe Bjerknæs)  $g = 9,8$  setzen, also von der Veränderlichkeit der Schwere absehen, und erhält dann:  $1 \text{ dyn. m} = 1,02 \text{ m}$ . Benützt man diese Vereinfachung, so hat man alle Meterangaben durch den konstanten Faktor 1,02 zu dividieren, um sie in dynamischen Metern auszudrücken, eine Umrechnung, die Bjerknæs tatsächlich durchführt, auf die wir aber in diesem Buche verzichten.

## Erstes Kapitel.

## Die Gasgesetze.

**5. Maße und Einheiten.** Wir unterscheiden an trockener atmosphärischer Luft ihren Druck  $p$ , ihre absolute Temperatur  $T$  ( $T = 273^\circ + t$ , wo  $t$  die Temperatur in Celsiusgraden ist) und ihre Dichte  $\rho$ ; diese ist definiert als die Masse der Volumeinheit. Wir wollen in diesem Buche durchweg als Längeneinheit das Meter, als Masseneinheit<sup>1)</sup> das Kilogramm und als Zeiteinheit die Sekunde verwenden. Es ist also die Dichte der atmosphärischen Luft in Kilogramm pro Kubikmeter auszudrücken. Erfahrungsgemäß beträgt sie, gemessen beim normalen Atmosphärendruck von 760 mm Quecksilber und der Temperatur von  $0^\circ \text{C}$ , 1,293 kg.

Die Celsiusskala der Temperatur ist bekanntlich durch den Gefrierpunkt des reinen Wassers ( $0^\circ$ ) und dessen Siedepunkt beim Atmosphärendruck von 760 mm Hg ( $100^\circ$ ) definiert. Dieses Temperaturintervall in 100 Teile geteilt liefert den Wert eines Celsiusgrades.

Der Druck der Luft  $p$  ist definiert als Kraft pro Flächeneinheit, d. i.  $1 \text{ m}^2$ . Wir messen ihn, indem wir gegen eine Fläche, auf welche derselbe wirkt, eine Kraft von gleicher Größe entgegen wirken lassen, und bedienen uns hierzu des Gewichtes einer anderen Masse, z. B. der von Quecksilber im Barometer. Man hat als Normaldruck jenen Barometerdruck bezeichnet, welcher durchschnittlich dem Drucke der Luft im Meeresniveau das Gleichgewicht hält. Er entspricht der Masse einer Quecksilbersäule von der Temperatur  $0^\circ \text{C}$ , von 760 mm Höhe und  $1 \text{ m}^2$  Querschnitt, auf welche die Schwere in der Breite von  $45^\circ$  und im Meeresniveau wirkt.<sup>2)</sup>

Als Kraft pro Flächeneinheit ist der Druck der Luft in unseren Einheiten auszudrücken, indem wir die Kraft in  $\text{kg}^1 \cdot \text{m}^1 \cdot \text{sec}^{-2}$ , die Fläche in  $\text{m}^2$  angeben. Die Schwerebeschleunigung ist  $g_{45} = 9,806 \text{ m}^1 \cdot \text{sec}^{-2}$ . Die Masse der Quecksilbersäule von 760 mm Höhe und  $1 \text{ m}^2$  Quer-

---

1) Wir verwenden das Wort Kilogramm zur Bezeichnung der Massen-, nicht der Gewichtseinheit. Die Masse von  $1 \text{ dm}^3$  Wasser bei  $4^\circ \text{C}$  ist 1 kg. Ihr Gewicht beträgt im Meeresniveau bei  $45^\circ$  Breite 9,8 kg; dem Gewicht von 1 kg entspräche an diesem Ort eine Masse von  $\frac{1}{g_{45}} = \frac{1}{9,8}$  kg.

2) Die Dichte des Quecksilbers bei  $0^\circ$  beträgt (gegen Wasser) 13,596.

schnitt beträgt bei  $0^{\circ}\text{C}$   $0,76 \times 10^3 \times 13,596 = 10333 \text{ kg}$ . Multipliziert man diese mit  $g_{45}$ , so erhält man den Normaldruck in m-kg-sec-Einheiten. Er ist also  $10333 \cdot g_{45} = 101325 \text{ kg}^1 \text{ m}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ . Ein mm Hg entspricht folglich  $133,3 \text{ kg}^1 \text{ m}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ .

In der Physik bedient man sich meist des cm-g-sec-Systems. Hier ist die Druckeinheit das Dyn pro  $\text{cm}^2$ . Der Normaldruck von 760 mm Hg wird in diesem System durch eine gegen die obige zehnmal größere Zahl dargestellt, er entspricht  $1013250 \text{ Dyn pro cm}^2$ , also etwas mehr als einer Million Dyn; 1 mm Hg ist 1333 Dyn.

Beide Systeme, sowohl das von uns gebrauchte m-kg-sec-System, wie auch das cm-g-sec-Systems, eignen sich nicht für einen bequemen Ausdruck der in der Atmosphäre vorkommenden Drucke, ihre Einheiten sind zu klein. Man hat sich in der Meteorologie gewöhnt, als praktische Einheit des Druckes 1 mm Hg zu benützen, was also 133,3 absoluten Einheiten unseres Systems entspricht. Daraus ergibt sich der Übelstand, daß man häufig diesen Faktor in Zahlenrechnungen einführen muß, was bei Wahl rationellerer Einheiten zu vermeiden wäre.

Aus diesem Grunde hat nunmehr Bjerknes in seiner „dynamischen Meteorologie“ eine andere derartige Einheit aufgestellt, nachdem auch schon vor ihm ähnliche Vorschläge von Köppen gemacht worden waren. Die neue Einheit ist das Millibar, der tausendste Teil des Bar. Das Bar ist eine Million Dyn, ist also nur um etwa 1% kleiner als der Normaldruck von 760 mm Hg. Statt daß dieser Normaldruck nun aber in 760 Teile, in Millimeter, geteilt wird, teilt ihn Bjerknes in 1000 Teile, in Millibar, so daß ein Millibar nun fast  $\frac{3}{4}$  mm gleich wird. Genau ist 1 Bar 750,08 mm Hg, 1 mm Hg ist 1,333 Millibar (mb); das Millibar entspricht nun 100 Einheiten unseres m-kg-sec-Systems, so daß sich damit bequemer rechnen läßt als mit dem Millimeter.

Da man aber bisher noch gewohnt ist, sich die Luftdrucke selbst wie auch ihre Differenzen in Millimetern vorzustellen, und da auch alle Barometer noch in Millimeter geteilt sind, so werden wir in diesem Buche die alte Einheit beibehalten. Durch Multiplikation der Millimeterangaben mit 1,333 lassen sie sich leicht in Millibar verwandeln.

Neben der Dichte der Luft spricht man bisweilen von ihrem spezifischen Volumen  $v$ ; es ist das Volumen der Masseneinheit, der reziproke Wert der Dichte, gemessen in Kubikmetern pro Kilogramm.

Die vier Variablen: Druck, Temperatur, Dichte und spezifisches Volumen werden benützt, um den Zustand einer trockenen Luftnasse anzugeben.

**6. Gasgesetz für trockene atmosphärische Luft.** Trockene atmosphärische Luft im Meeresniveau besteht aus etwa 78 Volumprozenten Stickstoff, 21 Prozenten Sauerstoff und 1 Prozent Argon. Der Wasserdampf kommt in ganz verschiedenem Prozentverhältnis vor, seine Mischung mit trockener Luft bezeichnen wir als „feuchte Luft“; ist

nebenbei noch Wasser in fester oder flüssiger Form vorhanden, so sprechen wir von Wolkenluft.

Infolge ihrer Zusammensetzung gilt für trockene atmosphärische Luft das „Gasgesetz für ideale Gase“ mit genügender Genauigkeit. Auf feuchte Luft darf dasselbe nur angewendet werden, solange der Wasserdampf einigermaßen demselben folgt, also in ungesättigtem Zustande ist. Für Wolkenluft hat dieses Gasgesetz keine Geltung.

Ist  $\alpha$  der Ausdehnungskoeffizient der Gase ( $\alpha = \frac{1}{273} = 0,003663$ ), so lautet das Gasgesetz in der ursprünglichen Fassung:  $p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$ , wo  $p_0, v_0$  Werte des Druckes und des spezifischen Volumens sind, die einander bei der Temperatur  $0^\circ$ ,  $p, v$  solche, die einander bei der Temperatur  $t$  entsprechen. Setzt man  $v = \frac{1}{\rho}$ ,  $v_0 = \frac{1}{\rho_0}$ , so wird daraus, wenn

$T = 273 + t$ , die bequemere Form:  $p = \frac{p_0}{\rho_0} \rho \frac{T}{273}$  oder  $p = \rho R T$ , wo

$R = \frac{p_0}{273 \cdot \rho_0}$  die sogenannte Gaskonstante ist. Durch Einsetzung des Normaldruckes  $p_0$  und der bei diesem Druck herrschenden Dichte  $\rho_0$  (s. S. 7 u. 8) findet man die Gaskonstante trockener Luft hieraus zu  $R = 287 = 29,27 \cdot g_{45} \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2}$ .

Von den oben (S. 8) erwähnten 4 Variablen  $p, \rho, v$  und  $T$  können mit Rücksicht auf das Gasgesetz nach Bedarf die folgenden 5 Kombinationen von je 2 Größen zur Charakterisierung des Zustandes einer trockenen Luftmasse verwendet werden:  $p, v; p, \rho; p, T; v, T; \rho, T$ .

**7. Gasgesetz für ungesättigt-feuchte Luft und Ausdrücke für die Feuchtigkeit.** Durch Beobachtungen wurde festgestellt, daß der Druck des Wasserdampfes bei jeder Temperatur nur einen gewissen maximalen Wert erlangen kann, d. h. daß die Verdunstung nach Eintritt dieser Dampfspannung ihr Ende erreicht, auch wenn noch Wasser in flüssiger oder fester Form vorhanden ist. Diese maximale Dampfspannung, der Sättigungsdruck, ist mit genügender Genauigkeit nach der folgenden Formel von Magnus bestimmt:

$$e_m = 4,525 \cdot 10^{\frac{7,4475 t}{234,67 + t}} \text{ mm Hg.}$$

Der Dampfdruck wird ebenso wie der Druck eines andern Gases in Millimetern Quecksilber angegeben. Bei einer Mischung von trockener Luft mit Wasserdampf, also der normalen feuchten Luft, ist der Druck zusammengesetzt aus dem der trockenen Luft und dem des Wasserdampfes ( $e$ ). Solange der letztere kleiner als die maximale Spannung bei der herrschenden Temperatur ist ( $e < e_m$ ), kann man für den Wasserdampf annäherungsweise das Gasgesetz als gültig annehmen, also schreiben:

$e = e_0 \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{T}{273}$ , wo unter  $\gamma$  die Dichte des Wasserdampfes beim Druck  $e$ , unter  $\gamma_0$  dieselbe beim Druck  $e_0$  verstanden ist.

Erfahrungsgemäß ist nun:  $\gamma_0 = 0,623 \rho_0$  (fast genau  $\gamma_0 = \frac{5}{8} \rho_0$ ), wo  $\rho_0$  die Dichte der trockenen Luft beim gleichen Druck bezeichnet. Nennt man  $R_w = \frac{e_0}{\gamma_0 \cdot 273}$  die Gaskonstante des Wasserdampfes, so folgt hieraus bei Benützung des Normaldruckes und der Normaldichte  $R_w = 1,605 R_i = 460,7 = 47,0 g_{45}$ . Hier ist die Gaskonstante trockener Luft mit  $R_i$  bezeichnet. Wir erhalten also die Gasgleichung für ungesättigten Wasserdampf:  $e = \gamma R_w T = 1,605 \gamma R_i T$ .

Die Wasserdampfmenge in der Volumeinheit ist sonach:  $\gamma = \frac{e}{R_w T}$ ; hier ist  $e$  in absoluten Druckeinheiten gemessen. Wollen wir  $e$  in dieser Formel in Millimetern Hg angeben ( $e'$ ), so ist der oben dargelegte Umrechnungsfaktor 133,3 zu verwenden. Durch Einsetzung von  $R_w$  im obigen Betrag und Einführung der Celsiusstemperatur an Stelle der absoluten ergibt sich daraus die bekannte Formel:  $\gamma = \frac{1,06 e'}{1 + \alpha t}$  Gramm im Kubikmeter (absolute Feuchtigkeit).

Die normale atmosphärische Luft ist eine Mischung von trockener Luft und Wasserdampf. Ist  $p_i$  der Partialdruck der trockenen Luft, so ist der gesamte Luftdruck  $p = p_i + e$ . Sei ferner  $\rho_i$  die Dichte der trockenen Luft, so ist  $p_i = \rho_i R_i T$ . In der Volumeinheit ist nun die Masse enthalten:  $\rho = \rho_i + \gamma$ . Das Verhältnis, in welchem die Masse des Wasserdampfes zur Masse der feuchten Luft im gleichen Volumen steht, bezeichnet man als das Mischungsverhältnis  $q = \frac{\gamma}{\rho}$ ; es folgt daraus:  $\gamma = q \rho$  und  $\rho_i = (1 - q) \rho$ . Der Gesamtdruck der feuchten Luft ergibt sich aus den Partialdrucken  $p_i$  und  $e$  mittels des Gasgesetzes zu:  $p = \rho_i R_i T + \gamma R_w T = [(1 - q) R_i + q R_w] \rho T$ . Wir erhalten also für feuchte Luft ein neues dem früheren ähnlich gebautes Gasgesetz, in welchem  $R = (1 - q) R_i + q R_w$  zu setzen ist. Da  $R_w = 1,605 R_i$ , kann man auch schreiben:  $p = \rho R_i (1 + 0,605 q) T$ .

Die neue Größe  $R$  ist nur konstant, solange das Mischungsverhältnis  $q$  das gleiche bleibt, solange also keine Entziehung oder Zufuhr von Wasser in irgend einer Form eintritt.

Berechnen wir aus dem Gasgesetz für feuchte Luft die Dichte derselben  $\rho = \frac{p}{R_i T (1 + 0,605 q)}$  und stellen wir daneben die Dichte trockener Luft bei gleichem Druck und gleicher Temperatur  $\rho_i = \frac{p}{R_i T}$ , so ergibt sich, daß feuchte Luft  $(1 + 0,605 q)$  mal leichter als trockene ist. Wir können ferner auch sagen: Damit feuchte Luft bei gegebenem Druck die gleiche Dichte habe wie trockene, muß letztere eine Temperatur  $T' = T(1 + 0,605 q)$  haben; sie muß also wärmer sein als die feuchte. Man hat  $T'$  auch „virtuelle Temperatur“ genannt. Mit ihrer Benützung kann man feuchte Luft nach der Gasgleichung der trockenen behandeln, solange keine Kondensation eintritt, für sie also schreiben:  $p = \rho R_i T'$ .



Bei manchen Aufgaben läßt sich ungesättigt feuchte Luft durch wärmere trockene ersetzt denken, ohne daß das Gleichgewicht der Massen gestört wird.

Das Mischungsverhältnis  $q$  ist ein bequemer Ausdruck, um eine bestimmte Luftmasse zu identifizieren. Die Luft kann, solange keine Kondensation eintritt, beliebige Zustandsänderungen durchmachen, ohne daß sich  $q$  ändert. Aus den obigen Formeln findet man leicht für dieses Verhältnis:

$$q = \frac{e}{1,605 p - 0,605 e} \text{ oder nahezu } q = \frac{5e}{8p - 3e}. \text{ Zur Annäherung kann } e \text{ im Nenner vernachlässigt werden, so daß } q = 0,623 \frac{e}{p} \text{ oder } q = \frac{5}{8} \frac{e}{p}.$$

Unter relativer Feuchtigkeit versteht man das Verhältnis  $f = \frac{e}{e_m}$ , wo  $e_m$  die maximale Dampfspannung bei der herrschenden Temperatur nach der Magnusschen Formel ist (s. S. 9). Multipliziert man  $\frac{e}{e_m}$  mit 100, so gibt 100  $f$  die relative Feuchtigkeit in Prozenten der maximalen.

### 8. Gleichung für die zugeführte Wärme bei trockener Luft.

Wird einer trockenen Luftmasse Wärme zugeführt, so wird diese teilweise zur Erhöhung der Temperatur, teilweise zur Ausdehnung verwendet. Bei der letzteren wird Arbeit durch Überwindung des äußeren Druckes, unter dem die Masse steht, geleistet.

Diese Vorgänge sind im ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie dargestellt. Die an 1 kg Luft zugeführte Wärme  $dQ$  besteht aus folgenden 2 Teilen:  $dQ = c_v dT + A p dv$ .

Hier ist  $c_v$  die spezifische Wärme der Luft bei konstanten Volumen,  $A$  das Wärmeäquivalent der Arbeit. In den absoluten Einheiten des m-kg-sec-Systems ist  $A = \frac{1}{427 \cdot 945}$ ; d. h. 1 kg Masse, welches 427 Meter herabfällt, erzeugt, hier aufgehalten, eine Wärmemenge von 1 kg-Kalorie, welche genügt, um 1 kg Wasser von  $15^\circ$  auf  $16^\circ$  C zu erwärmen.

Die Gasgleichung für trockene Luft  $p v = R T$  gibt differenziert  $p dv + v dp = R dT$ ; damit erhält man den folgenden Ausdruck für die zugeführte Wärme:  $dQ = (c_v + A R) dT - \frac{A R T}{p} dp$ .

Ist  $dp = 0$ , so folgt  $c_v + A R = c_p$ , die spezifische Wärme bei konstantem Druck. Nach Division durch  $T$  erhält die Wärmegleichung die Gestalt:

$$\frac{dQ}{T} = c_p \frac{dT}{T} - A R \frac{dp}{p}.$$

Der Ausdruck rechts ist das vollständige Differenzial der Größe  $S = c_p \lg T - A R \lg p^1$ , welche man „Entropie“ nennt. Es folgt daraus

$$\int \frac{dQ}{T} = S + \text{konst.}$$

1) Wir bezeichnen mit  $\lg$  den natürlichen Logarithmus (Basis  $e = 2,71828$ ), während unter  $\log$  der Briggsche Logarithmus verstanden werden wird.

Wird einer Luftmasse keine Wärme zugeführt noch entzogen ( $dQ = 0$ ), so ist  $S = \text{konst.}$ , die Vorgänge sind „isentropisch“; man nennt sie auch „adiabatisch“, da durch die das Gas begrenzenden Wände keine Wärme hindurchtritt. Die letzte Bezeichnung ist in der Meteorologie gebräuchlicher.

Ist nun  $dQ = 0$ , so wird  $c_p \lg T - AR \lg p = \text{konst.}$  Es sei zu Anfang das Gas unter dem Druck  $p_0$  und der absoluten Temperatur  $T_0$ ; dann nimmt es, adiabatisch auf den Druck  $p$  gebracht, die Temperatur

$T$  an nach der Gleichung  $c_p \lg \frac{T}{T_0} = AR \lg \frac{p}{p_0}$  oder  $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{AR}{c_p}}$  (Poissonsche Gleichung). Diese Formel ist von besonderer Wichtigkeit, weil viele Vorgänge in der Atmosphäre so geschehen, daß wir annehmen können, sie seien adiabatisch. Es ist dann bei einer bestimmten Druckänderung nur eine ganz bestimmte Temperaturänderung des Gases möglich, jene, welche von der Poissonschen Gleichung vorgeschrieben wird.

Natürlich läßt sich aus der Gasgleichung auch eine der Veränderlichen  $p$  oder  $T$  durch die dritte  $\rho$  ersetzen. Wir erhalten dann zwei mit der obigen äquivalente Beziehungen, von denen nach Bedarf Gebrauch

gemacht werden kann:  $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{AR}{c_p}}$ ,  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{c_p}{AR}}$ .

Für trockene atmosphärische Luft sind die spezifischen Wärmen  $c_p = 0,2375$ ,  $c_v = 0,1690$ ; ferner ist nach obigem  $AR = 0,0685$ . Das Verhältnis  $\frac{AR}{c_p} = \kappa$ , welches wir häufig benutzen werden, ist folglich für trockene Luft  $\kappa = 0,2884$ , so daß die Poissonsche Gleichung die Form annimmt:  $T = T_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,2884}$ .

Will man die Wärmezustände mehrerer Luftmassen, die unter verschiedenen Drucken und Temperaturen stehen, miteinander vergleichen, so kann man sie adiabatisch auf den gleichen Druck bringen und dann die so erzeugten Temperaturen gegeneinander halten. Man ist übereingekommen, diese Reduktion derart vorzunehmen, daß man alle Massen rechnerisch auf den Normaldruck  $P = 760$  mm Hg bringt; die dabei erzeugten Temperaturen nennt man ihre potentiellen Temperaturen  $\vartheta$ . Es ist also für eine Masse  $\vartheta = T \left(\frac{P}{p}\right)^\kappa = T \left(\frac{760}{p}\right)^{0,2884}$ , wo  $T$  die Temperatur beim Drucke  $p$  war. In der letzten Form ist  $p$  in mm Hg auszudrücken.

Differenziert man obige Gleichung, so wird  $\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dT}{T} - \kappa \frac{dp}{p}$ . Ein Vergleich mit der Wärmegleichung liefert:  $\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{c_p} dS$  und  $S = c_p \lg \vartheta + \text{konst.}$

Die potentielle Temperatur bleibt demnach bei adiabatischen Vorgängen konstant wie die Entropie. Sie ist, wenn verschieden temperierte trockene Luftmassen vorhanden sind, für eine individuelle Luftmasse, solange keine Wärmezufuhr stattfindet, ebenso charakteristisch, wie es das Mischungsverhältnis für feuchte Luft ist, solange hier keine Kondensation vorgeht.

**9. Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft.** In der Meteorologie spielen jene Vorgänge eine große Rolle, bei welchen sich feuchte Luft ausdehnt oder zusammenzieht, also ihren Druck verändert. H. Hertz unterscheidet hierbei vier Stadien, die durch die Kondensations- und Schmelzwärme des Wassers bedingt sind.

Zunächst haben wir das Trockenstadium, bei dem die trockene Luft mit Wasserdampf von geringerem als dem Sättigungsdruck vermischt ist. Bei adiabatischer Ausdehnung des Gemisches unter Temperaturen oberhalb  $0^\circ$  folgt das Regenstadium, welches beginnt, sobald die Temperatur des Gemisches soweit gesunken ist, daß der vorhandene Dampfdruck dem Sättigungsdruck gleich wird. Bei weiterer Abkühlung tritt Kondensation ein; hierbei wird die Kondensationswärme des Wassers frei und verzögert die Abkühlung. Schließlich erreicht die Temperatur  $0^\circ\text{C}$ , es beginnt die Bildung des Eises, wobei wiederum Wärme, die Schmelzwärme, frei wird; dies ist das Hagelstadium. Sobald sich endlich alles vorhandene Wasser in Eis verwandelt hat, beginnt das Schneestadium, in welchem bei weiterer Abkühlung aus Wasserdampf unmittelbar Eis entsteht. Dabei wird wieder Wärme frei, die Sublimationswärme, die Summe von Kondensations- und Schmelzwärme. Dieses Stadium hält bis zu beliebig tiefen Temperaturen an.

Es empfiehlt sich, eine mit ungesättigtem Wasserdampf in gegebenem Verhältnis vermischte Luftmasse, welche sich ohne Wärmezufuhr oder -entziehung ausdehnt, näher zu betrachten. In der Atmosphäre ist dieser Vorgang sehr häufig. Wir teilen im folgenden nur die Gleichungen für die adiabatischen Zustandsänderungen in diesen vier Stadien mit, und zwar gekürzt und ohne Ableitung.<sup>1)</sup>

a) Trockenstadium: Die Dampfspannung bleibe während der Zustandsänderung kleiner als  $e_m$ . Wir können dann die feuchte Luft sehr angenähert wie ein ideales Gas behandeln, für welches die im Abschnitt 7 abgeleitete Gasgleichung gilt. Sind  $c_p$  und  $c_p'$  die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck für trockene Luft und Wasserdampf, ist ferner  $q$  das Mischungsverhältnis, so wird die spezifische Wärme der Mischung  $(1 - q)c_p + qc_p'$ . Für Wasserdampf ist  $c_p' = 0,379$ ; also größer als für Luft. Nachdem aber  $q$  bei ungesättigt feuchter Luft stets recht klein ist (für Sättigung beträgt  $q$  unter 760 mm Druck bei  $0^\circ: 0,0038$ , bei  $15^\circ: 0,0105$ , bei  $30^\circ: 0,0262$ , ist also bei ungesättigter Luft stets noch

1) Vgl. z. B. H. Hertz, Deutsche Met. Zeitschr., 1. Jahrgang, 1884, S. 421.

geringer als diese Werte), so ändert sich die spezifische Wärme der Mischung nur wenig gegenüber der von trockener Luft; auch die Gaskonstante der Mischung  $(1 - q)R_i + qR_w$  ist aus diesem Grunde nur wenig größer als die der trockenen Luft, so daß in erster Annäherung die ungesättigt feuchte Luft nach der Poissonschen Gleichung für trockene Luft behandelt werden kann, die unter Abschnitt 8 angegeben ist.

Wir können also schreiben:  $c_p \lg T - AR_i \lg p = \text{konst.}$ , und nur bei sehr genauen Rechnungen wären  $c_p$  und  $R_i$  durch die eben angegebenen Ausdrücke für die Mischungsluft zu ersetzen.

Die Gleichung des Trockenstadiums gilt bis zum Eintritt der Kondensation, d. h. bis zu jener Temperatur, wo  $e = e_m$  wird. Wir fanden im Abschnitt 7:  $p = p_i + e = [(1 - q)R_i + qR_w] \rho T$ . Darin ist  $e = q \rho R_w T$ , folglich  $p = \frac{(1 - q)R_i + qR_w}{qR_w} e$ . Setzen wir hier  $e = e_m$  nach der Magnuschen Formel als Funktion der Temperatur ein, so erhalten wir eine Beziehung zwischen  $p$  und  $T$ , die erfüllt sein muß, wenn die Grenze des Trockenstadiums erreicht ist (Sättigungsgleichung).

b) Regenstadium: Die Wärmezufuhr  $dQ$  wird teils zur Erwärmung und Ausdehnung der gesättigt feuchten Luft verwendet, teils zur Verdampfung und Erwärmung des Wassers; die letztere kann vernachlässigt werden.

Bei adiabatischer Ausdehnung sinkt die Temperatur und folglich tritt Kondensation ein, wodurch Wärme frei wird; diese Kondensationswärme wirkt wie eine Wärmezufuhr, sie verzögert die Abkühlung. Die gekürzte Formel, welche unter diesen Umständen der Poissonschen Gleichung entspricht, lautet:

$$c_p \lg T - AR_i \lg p + 0,623 \frac{r e_m}{p T} = \text{konst.}$$

Hier ist  $e_m$  die maximale Dampfspannung, welche der Temperatur  $T$  entspricht,  $p$  ist der Druck des Gasgemisches und  $r$  die Verdampfungswärme ( $r = 607 - 0,7 t$  kg Kal.). Im Trockenstadium hatten wir  $c_p \lg T - AR_i \lg p = \text{konst.}$  Einer bestimmten Änderung des Druckes entspricht nun eine kleinere Änderung der Temperatur als früher. Und zwar ist der Unterschied um so größer, je größer  $e_m$ , die Spannkraft des gesättigten Dampfes, je höher also die Temperatur ist. Mit abnehmender Temperatur wird das Verhalten im Regenstadium dem Verhalten im Trockenstadium ähnlicher, weil  $e_m$  und mithin auch die kondensierte Wassermenge geringer wird. Das Regenstadium reicht von der Kondensationstemperatur, dem Taupunkt, bis zu  $0^\circ\text{C}$ .

c) Hagelstadium: Expandiert die Mischung von Luft, Wasserdampf und Wasser bei  $0^\circ\text{C}$  adiabatisch noch weiter, so leistet sie Ausdehnungsarbeit auf Kosten der beim Gefrieren des Wassers frei werdenen Schmelzwärme. Der Vorgang ist ziemlich verwickelt, weil während der Ausdehnung zugleich neuer Wasserdampf gebildet werden muß, da-

mit das größere Volumen von ihm mit Sättigungsspannung erfüllt bleibt. Die Temperatur verharrt auf  $0^\circ$ , bis alles Wasser in Eis verwandelt ist; aus diesem Grund bleibt auch die Dampfspannung  $e_m$  konstant. Eine der obigen analoge Zustandsgleichung besteht hier nicht, da nur  $p$  sich ändert und mit ihm der Gehalt der Luft an Eis. Ist  $p_0$  der Druck, bei welchem die Eisbildung beginnt, so wird  $p_1$ , der Druck, bei welchem sie beendigt ist, durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$AR_i \lg \frac{p_0}{p_1} + \left( \frac{r+k}{p_1} - \frac{r}{p_0} \right) \cdot \frac{0,623 e_m}{T} - \frac{kq}{T} = 0.$$

Hier ist  $k$  die Schmelzwärme des Eises ( $k = 80$  kg Kal.), so daß  $r+k$  die Sublimationswärme bedeutet (etwa 680 kg Kal.). Beim Mischungsverhältnis  $q$  ist die ganze Masse Wasser (Dampf, Wasser und Eis) in Rechnung zu stellen.

d) Schneestadium: Nach Verwandlung allen flüssigen Wassers in Eis wird nun bei weiterer Druckabnahme die Temperatur wieder sinken; hierbei tritt wieder Kondensation des Wasserdampfes, u. z. nun direkt zu Eis, ein. Die Vorgänge folgen nun derselben Gleichung wie im Regenstadium, nur tritt an Stelle der Kondensationswärme die größere Sublimationswärme. Die Zustandsgleichung lautet in abgekürzter Form:

$$e_p \lg T - AR_i \lg p + \frac{0,623(r+k)e_m}{pT} = \text{konst.}$$

Je tiefer die Temperatur, desto kleiner wird die Dampfspannung  $e_m$ , so daß das letzte Glied links immer mehr an Bedeutung verliert und sich die Vorgänge jenen des Trockenstadiums nähern.<sup>1)</sup>

**10, Pseudoadiabatische Zustandsänderungen.** Wir sind im vorigen Abschnitt von der willkürlichen Vorstellung ausgegangen, daß die adiabatische Zustandsänderung in einer Ausdehnung besteht. Denken wir uns das Eis und die mit Wasserdampf vermischte Luft aus dem Schneestadium oben nunmehr einer adiabatischen Kompression unterworfen, so wird dieses Gemisch genau die gleichen Veränderungen wie früher in umgekehrter Richtung durchmachen, das Eis wird durch Kompression und Erwärmung verdampfen, dann wird bei der Temperatur  $0^\circ$  das Eis schmelzen und nachher das Wasser verdampfen, bis schließlich das Trockenstadium erreicht ist und die Temperatur nach der Poissonschen Gleichung zunimmt bis zum ursprünglichen Wert. Derartige umkehrbare Prozesse können z. B. mit Wolkenluft vor sich gehen: durch Expansion bilden sich zuerst Wolken, die sich dann durch Kompression wieder auflösen, ohne daß Niederschlag ausfällt. Das weit-aus häufigere aber ist, daß aus der Wolke Niederschlag in Form von

1) Die Gleichungen der vier Stadien sind für den praktischen Gebrauch von Hertz (a. a. O.) und später von Neuhoff (Abh. d. preuß. met. Inst., 1, Nr. 6, 1901) graphisch durch Kurven dargestellt worden (Vgl. Hanns Lehrbuch der Meteorologie.)

Regen oder Schnee zu Boden fällt. Hierdurch wird das Mischungsverhältnis der feuchten Luft verringert. In diesem Fall kann der Prozeß nicht mehr als rein adiabatisch angesehen werden, auch wenn die Mischung von außen weder erwärmt noch abgekühlt wird. Denn wenn kein Niederschlag zu Boden gefallen wäre, so müßte bei der Kompression die kondensierte Wasser- oder Eismasse verdampft bzw. geschmolzen werden, wodurch die Temperaturzunahme verlangsamt würde.

Ist diese Wassermenge aus dem Gemisch aber herausgefallen, so wird die entsprechende Kondensationswärme erspart, die Zustandsänderung geht so vor sich, als wäre eine Wärmemenge im Betrag dieser Kondensationswärme zugeführt worden. W. v. Bezold nannte solche Vorgänge „pseudoadiabatische“<sup>1)</sup> Sie sind in der Meteorologie von großer Bedeutung, da sie die potentielle Temperatur der Luftmassen erhöhen; dies geht aus der folgenden graphischen Darstellung hervor (Fig. 2):

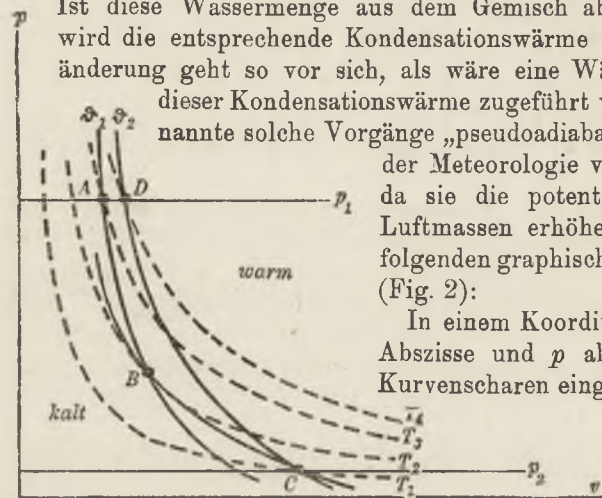


Fig. 2.

In einem Koordinatensystem mit  $v$  als Abszisse und  $p$  als Ordinate werden 3 Kurvenscharen eingetragen, entsprechend der folgenden Überlegung: 1. Im Trockenstadium kann die Zustandsgleichung geschrieben

werden:  $pv = RT$ . Für jede Temperatur ist  $pv = \text{konst.}$ ; die Isothermen des Trockenstadiums sind also Hyperbeln, ihr Verlauf ist in Fig. 2 durch die gestrichelten Kurven  $T_1, T_2, T_3, T_4$  angegeben ( $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ ). 2. Für adiabatische Zustandsänderungen im Trockenstadium folgt aus

der Poissonschen Gleichung  $pv^{c_p/c_v} = \text{konst.}$  ( $\frac{c_p}{c_v} = 1,41$ ). Wird diese Beziehung für bestimmte Werte der Konstanten dargestellt, so erhält man „Adiabaten“ des Trockenstadiums, die so verlaufen, daß mit abnehmendem  $p$  und zunehmendem  $v$  nun  $T$  nicht konstant ist, sondern gleichfalls abnimmt (Abkühlung durch Ausdehnung). Da für jede Adiabate die potentielle Temperatur konstant bleibt (vgl. S. 13), so kann eine Adiabate direkt durch ihre potentielle Temperatur bezeichnet werden. In Fig. 2 sind 2 Adiabaten  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  eingezeichnet ( $\vartheta_1 < \vartheta_2$ ). 3. Im Regenstadium tritt bei adiabatischer Ausdehnung gleichfalls Abkühlung ein, sie ist aber geringer als im Trockenstadium (vgl. S. 14). Die Zu-

1) Zur Thermodynamik der Atmosphäre; zweite Mitteilung; Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1888, S. 1189.

standsänderung folgt hier einer Kurve, die durch die dünnere Linie zwischen den Punkten  $B$  und  $C$  der Figur dargestellt ist.

Angenommen nun, ungesättigt feuchte Luft vom Drucke  $p_1$  und der Temperatur  $T_3$  (Punkt  $A$ ) beginne ohne Wärmezufuhr von außen zu expandieren: es erfolgt Abkühlung nach der Trockenadiabate bis zur Temperatur  $T_2$  (Punkt  $B$ ). Hier sei der Taupunkt erreicht, von hier aus erfolgt also Kondensation. Die Temperaturabnahme geht nun nach der Adiabate des Regenstadiums weiter, bis der Druck  $p_2$  bei der Temperatur  $T_1$  erreicht ist (Punkt  $C$ ). Wäre nun kein Niederschlag ausgefallen, so würde bei nunmehriger Kompression auf den Druck  $p_1$  das Gemisch von Luft und Wasser genau der Kurve, die es bis hierher beschrieb, zurück folgen ( $CBA$ ) und schließlich wieder seine frühere Temperatur  $T_3$  erlangen.

Ist hingegen die ganze bis zum Stadium  $C$  kondensierte Wassermenge ausgeregnet und tritt nunmehr Kompression ein, so folgt das Gemisch von Luft und Wasserdampf der Trockenadiabate, die durch den Punkt  $C$  läuft, wobei es die potentielle Temperatur  $\vartheta_2$  hat und beibehält. Drücken wir die Masse wieder auf den Ausgangsdruck  $p_1$  zusammen, so nimmt sie hier die Temperatur  $T_4 > T_3$  an. Durch das Ausfallen des Niederschlags ist also die potentielle Temperatur gestiegen und bei Zurückführung auf den Anfangsdruck ist die Masse auch tatsächlich wärmer geworden, als sie zu Anfang war. Wenn nur ein Teil des Wassers ausgefallen ist, dann tritt die Scheidung von Hin- und Rückgang erst an einer Stelle zwischen  $C$  und  $B$  ein, die Erwärmung im Endstadium ist dann geringer.

Diese Erscheinungen sind für die Temperatur auf- und absteigender Luftströme von der größten Bedeutung und werden später weiter ausgeführt (Abschnitt 33).

**11. Die relative Feuchtigkeit bei adiabatischen Zustandsänderungen.** Wir werfen noch einen Blick auf die verschiedenen Ausdrücke für die Feuchtigkeit in den vier Stadien des Abschnitts 9. Die relative Feuchtigkeit zunächst hat im Regen-, Hagel- und Schneestadium überall den Sättigungswert 100%. Das Mischungsverhältnis behält bei adiabatischen Änderungen seinen Anfangswert in allen 4 Stadien bei, solange kein Niederschlag ausfällt. Die Dampfspannung ist vom Regenstadium angefangen die der Magnusschen Formel entsprechende maximale für die jeweilige Temperatur, im Trockenstadium ist sie proportional dem Luftdruck nach der Formel auf S. 11:  $e = \frac{8}{5} qp$ . Die Menge des Wasserdampfs in der Volumeinheit feuchter Luft (absolute Feuchtigkeit) folgt stets der Gleichung für  $\gamma$  auf S. 10.

Eine nähere Bestimmung verlangt allein noch die relative Feuchtigkeit im Trockenstadium bei adiabatischer Ausdehnung oder Kompression. Sie ist gegeben durch  $f = \frac{e}{e_m}$ , wo  $e_m = 4,525 \cdot 10^{\frac{7,45t}{235+t}}$  mm Hg

und angenähert  $e = \frac{8}{5} qp$ . Aus der letzten Gleichung folgt  $\frac{de}{e} = \frac{dp}{p}$ . Bei adiabatischen Zustandsänderungen im Trockenstadium ist (S. 12)  $\frac{dT}{T} = \kappa \frac{dp}{p}$ , mithin  $\frac{de}{e} = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{T}$ . Differenziert man  $f$ , so folgt  $\frac{df}{f} = \frac{de}{e} - \frac{de_m}{e_m}$ . Aus der Gleichung von Magnus läßt sich  $de_m$  als Funktion von  $dt = dT$  ausdrücken; man erhält die Formel  $\frac{de_m}{e_m} = 17,15 \cdot \frac{235}{(T-38)^2} \cdot dT$ . Setzt man näherungsweise  $\frac{235}{T-38} = 1$  und vernachlässigt noch 38 gegen  $T$ , so ergibt sich mit  $\frac{1}{\kappa} = 3,462$  (S. 12) eine besonders bequeme Form:  $\frac{df}{f} = -13,69 \cdot \frac{dT}{T}$ , oder integriert  $f = f_0 \left(\frac{T_0}{T}\right)^{13,69}$ . Diese Gleichung gibt also eine Beziehung zwischen Temperatur und relativer Feuchtigkeit bei adiabatischen Zustandsänderungen ungesättigter Luft. Mit zunehmender Temperatur nimmt die Feuchtigkeit ab. Man kann natürlich ebenso gut statt der Temperatur den Druck aus der Poissonschen Gleichung einführen; dies gibt:  $f = f_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{3,95}$ .



## Zweites Kapitel.

### Allgemeine dynamische und hydrodynamische Gleichungen.

**12. Bewegungsgleichungen eines Punktes im rotierenden Koordinatensystem der Erde.** Die Grundlage für die Behandlung der Bewegungserscheinungen fester oder flüssiger (gasförmiger) Körper bilden die Bewegungsgleichungen der Mechanik. Sie sprechen bekanntlich in ihrer einfachsten Form aus, daß die in einer Richtung  $x$  wirkende Kraft  $X$  der Masse  $m$  die Beschleunigung  $\frac{d^2x}{dt^2}$  erteilt<sup>1)</sup>, oder daß  $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$ .

Diese und zwei analoge Gleichungen für die zwei zu  $x$  senkrechten Richtungen  $y$  und  $z$  reichen aus, um die Bewegung der Masse  $m$  darzustellen, wenn die Kräfte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  bekannt sind.

Auf eine relativ zur Erde ruhende Masse  $m$  eines festen Körpers wirkt von äußeren Kräften nur die Schwerkraft  $g$  (vgl. Abschnitt 3); bei Flüssigkeiten bestehen neben ihr noch die Druckkräfte, auf die wir später zurückkommen. Handelt es sich hingegen um Körper, welche sich auf der Erde bewegen, dann kommen zur Schwere noch andere Kräfte hinzu, die sich dadurch ergeben, daß wir die Bewegung der Körper nicht relativ zu einem im Raume feststehenden Koordinatensystem sondern relativ zur Erde betrachten, die ja um ihre Achse rotiert. Diese Kräfte sind also keine wirklichen sondern scheinbare, hervorgehend aus dem Standpunkt des mit der rotierenden Erde verbundenen Beobachters.

Die oben angeführten Bewegungsgleichungen  $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$  usw. gelten unter der Bedingung, daß  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die Koordinaten eines Punktes in einem ruhenden Systeme sind. Wirken keine äußeren Kräfte ( $X = Y = Z = 0$ ), so bleibt die Geschwindigkeit des Punktes konstant ( $\frac{dx}{dt} = \text{konst. usw.}$ ), er bewegt sich dem Trägheitsgesetz entsprechend. Als ruhendes Koordinatensystem können wir also umgekehrt eines auffassen, in welchem das Trägheitsgesetz gilt.

Die Koordinaten des ruhenden Systems sind jedoch hier nicht direkt verwendbar, da es sich ja darum handelt, die Bewegung der Luftmassen

---

1)  $t$  bedeutet die Zeit,  $x$  die  $X$ -Koordinate eines Punktes, folglich  $\frac{dx}{dt}$  die  $X$ -Komponente der Geschwindigkeit.

relativ zur rotierenden Erde<sup>1)</sup> kennen zu lernen; als praktische Koordinaten eines Massenpunktes benützen wir jetzt vielmehr seinen Abstand vom Erdmittelpunkt  $r$ , seine geographische Breite  $\varphi$  und seine geographische Länge  $\lambda$ . Um die Bewegungsgleichungen anwenden zu können, muß nun eine Koordinatentransformation durchgeführt, d. h. es müssen die Koordinaten  $x, y, z$  durch die neuen ersetzt werden.

Der Ausgangspunkt der Zählung der geographischen Länge  $\lambda$  ist der Meridian von Greenwich; derselbe ruht nicht im Raum, sondern dreht sich in 24 Stunden (genauer in 23 h, 56 min und 4,08 sec, d. i. in 1 Stern-tag) einmal um  $360^\circ$ , also mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ . Wir wollen zur Bequemlichkeit den Mittelpunkt des Koordinatensystems, das im Raume ruht, mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfallen lassen.

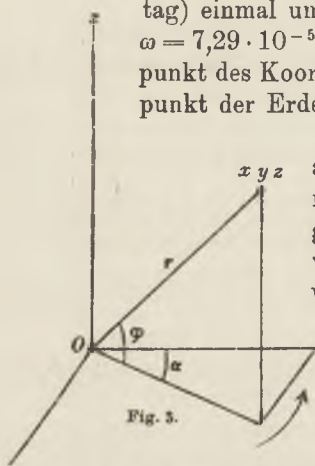


Fig. 3.

Es ist dann (Fig. 3)  $OZ$  die Richtung der Erdachse zum Nordpol. Die Erde dreht sich von Westen nach Osten, also in der Richtung des Pfeiles, entgegen der Richtung Ost-West, in welcher der Azimutwinkel  $\alpha$  hier positiv zu rechnen ist und in welcher wir die geographische Länge wachsend zu zählen haben. Infolge der Rotation ist daher  $\alpha = \lambda - \omega t$ .

Transformieren wir nun die Koordinaten  $x, y, z$  zunächst in  $r, \varphi, \alpha$ , so ergibt sich:

$$x = r \cos \varphi \cos \alpha, \quad y = r \cos \varphi \sin \alpha, \quad z = r \sin \varphi.$$

Wir bilden hieraus die Beschleunigungen  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  und setzen sie in die Bewegungsgleichungen  $\ddot{x} = \frac{X}{m}, \ddot{y} = \frac{Y}{m}, \ddot{z} = \frac{Z}{m}$  ein.

Durch Multiplikation der umgeformten Ausdrücke mit geeigneten Faktoren und Addition derselben lassen sich die Gleichungen in folgende Form bringen, die nun für die neuen Koordinatenrichtungen gilt:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\cos^2\varphi\dot{\alpha}^2 &= \frac{X}{m} \cos\varphi \cos\alpha + \frac{Y}{m} \cos\varphi \sin\alpha + \frac{Z}{m} \sin\varphi, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\alpha}^2 &= -\frac{X}{m} \sin\varphi \cos\alpha - \frac{Y}{m} \sin\varphi \sin\alpha + \frac{Z}{m} \cos\varphi, \\ r\cos^2\varphi\ddot{\alpha} + 2\dot{r}\cos^2\varphi\dot{\alpha} - 2r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\alpha} &= -\frac{X}{m} \cos\varphi \sin\alpha + \frac{Y}{m} \cos\varphi \cos\alpha. \end{aligned}$$

Wie eine einfache Überlegung zeigt, sind die Glieder auf der rechten Seite die Beschleunigungen (äußeren Kräfte pro Masseneinheit), welche

1) Von der fortschreitenden Bewegung der Erde um die Sonne sehen wir ab, da sie wegen der annähernden Konstanz der Geschwindigkeit hier ohne Einfluß ist.

2) Für  $\frac{d^2x}{dt^2}$  ist die Schreibart  $\ddot{x}$ , für  $\frac{dx}{dt}$  ist  $\dot{x}$  gebraucht usw.

in den Richtungen der Koordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $\alpha$  wirken. Sie sind leicht bestimmt; denn auf einen Massenpunkt  $m$  wirkt an äußeren Kräften nur die Attraktionskraft der Erdmasse  $m \cdot G$ , wo  $G$  diese Kraft im Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt bedeutet. Von etwaigen Reibungskräften sehen wir hier ab. Es ist dann nur in der ersten Gleichung auf der rechten Seite  $-G$  zu setzen, da die Attraktion zum Erdmittelpunkt wirkt (in der Richtung des abnehmenden  $r$ ), die rechten Seiten der 2. und 3. Gleichung sind null.

Ersetzen wir schließlich noch  $\dot{\alpha}$  durch  $\dot{\lambda} - \omega$ ,  $\ddot{\alpha}$  durch  $\ddot{\lambda}$ , da die Rotationsgeschwindigkeit der Erde konstant ist, so erhalten wir die folgenden Gleichungen, welche die reibungslose Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß der anziehenden Kraft der Erdmasse in einem mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  von West nach Ost rotierenden Koordinatensystem beschreiben:

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} - \omega)^2 = -G,$$

$$r \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r \sin \varphi \cos \varphi (\dot{\lambda} - \omega)^2 = 0,$$

$$r \cos \varphi \ddot{\lambda} + 2\dot{r} \cos \varphi (\dot{\lambda} - \omega) - 2r \sin \varphi \dot{\varphi} (\dot{\lambda} - \omega) = 0.$$

Diese Beziehungen gelten natürlich auch für einen Punkt, der augenblicklich relativ zur Erde in Ruhe ist, so daß  $\dot{r} = \dot{\varphi} = \dot{\lambda} = 0$ ; für ihn wird:

$$\ddot{r} - r \cos^2 \varphi \omega^2 = -G, \quad r \ddot{\varphi} + r \sin \varphi \cos \varphi \omega^2 = 0, \quad \ddot{\lambda} = 0.$$

Der Massenpunkt unterliegt also Beschleunigungen und kann seine anfängliche Ruhe nicht bewahren; er wird zunächst durch die große Attraktionskraft  $G$  seinen Abstand vom Erdmittelpunkt zu verkleinern suchen. Betrachten wir nun nicht einen isolierten Massenpunkt, sondern einen Punkt der Erde, so müssen wir, um darzustellen, daß derselbe von der Erdmasse getragen wird und tatsächlich nicht bis zum Erdmittelpunkt fällt, eine Widerstandskraft der Erdmassen einführen. Es ist dies eine Kraft, welche der ersten Gleichung beigelegt und gerade so groß gewählt wird, daß die vertikale Beschleunigung  $\ddot{r}$  verschwindet. Auch dann noch erleidet unser anfänglich ruhender Punkt eine Beschleunigung, nämlich  $\ddot{\varphi}$ , die zum Äquator gerichtet ist. Dadurch, daß alle Massen der Erde dieser Beschleunigung folgen, entsteht die Abplattung der Erde an den Polen. Sie hat infolge der Massenverlagerung eine Veränderung von Richtung und Größe der Attraktionskraft zur Folge, so daß nun eine kleine Komponente der letzteren in den Meridian fällt und polwärts gerichtet ist. Die Wanderung der Massen gegen den Äquator dauert so lange, bis diese Komponente der Attraktion in allen Breiten der äquatorwärts gerichteten Komponente der Zentrifugalkraft ( $r \sin \varphi \cos \varphi \omega^2$ ) in der zweiten Gleichung das Gleichgewicht hält (vgl. Abschnitt 3). Die andere Komponente der Zen-

trifugalkraft,  $r \cos^2 \varphi \omega^2$  in der ersten Gleichung, verringert die Attraktionskraft  $G$  ein wenig. Wir betrachten nun die neue Richtung der Resultierenden aus Attraktionskraft und Zentrifugalkraft als die Richtung  $r$ ; die Widerstandskraft der Erdmassen auf einen ruhenden Massenpunkt fällt jetzt auch in diese Richtung.

Ziehen wir die Glieder  $G$  und  $r \cos^2 \varphi \omega^2$  zusammen und bezeichnen sie mit  $g$  (Schwere), so können wir für die anfangs relativ zur Erde ruhende Masse nun schreiben:  $\ddot{r} = -g$ ,  $\ddot{\varphi} = 0$ ,  $\dot{\lambda} = 0$ ; die Widerstandskraft ist hier nicht eingeführt, weil wir nicht Massenteile der Erde untersuchen wollen, sondern allgemein Massen, welche der Schwere unterliegen.

Ein Massenpunkt, der in einem mit der Erde fest verbundenen Koordinatensystem anfänglich ruht, ist also nur der Schwere  $g$  unterworfen, welche bestrebt ist, seine Koordinate  $r$  zu verkleinern. Diese Koordinate ist nicht mehr genau der Radiusvektor zum Erdmittelpunkt, sondern liegt in der Vertikalen zum jeweiligen Horizont (über dessen Lage vgl. Abschnitt 4). Wir haben unter  $r$  in Zukunft die Summe aus dem mittleren Erdradius  $R$  und der Seehöhe  $z$  eines Punktes in der Atmosphäre zu verstehen.

Auch die geographische Breite ist nicht mehr genau der Winkel  $\varphi$  in Fig. 3, denn die Richtung der Schwerkraft  $g$  geht nicht genau zum Erdmittelpunkt  $O$ ; wir verstehen vielmehr unter der Koordinate  $\varphi$  nunmehr den Winkel, welchen die Vertikale an einem Orte mit dem Erdäquator bildet. Diese etwas ungenaue Darstellung genügt für das Studium der Luftbewegungen vollständig.

Nach Einführung des so modifizierten praktischen Koordinatensystems haben wir nun auch die Bewegungsgleichungen auf S. 21 umzuformen. Wir brauchen hierzu nur in der ersten und zweiten Gleichung die Glieder, welche  $\omega^2$  enthalten, wegzulassen; denn die Zentrifugalkraft, welche durch die Erdrotation hervorgerufen wird, ist ja durch die Abänderung des Koordinatensystems und die neue Festsetzung der Größe  $G$  unwirksam geworden.

Als Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in einem System, das mit der Erde rotiert und in welchem  $r$  die Richtung der Schwere  $g$  hat, ergeben sich also:

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi \dot{\lambda} (\dot{\lambda} - 2\omega) = -g,$$

$$r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi} + r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda} (\dot{\lambda} - 2\omega) = 0,$$

$$r \cos \varphi \ddot{\lambda} + 2(\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}) (\dot{\lambda} - \omega) = 0.$$

**13. Die Erhaltung des Rotationsmomentes.** Die letzte dieser 3 Gleichungen wollen wir sogleich näher ins Auge fassen. Setzt man  $\Omega = r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} - \omega)$ , so findet man, daß nach jener Gleichung  $\frac{d\Omega}{dt} = 0$ ,

mithin  $\Omega = \text{konst.}$  Es heißt dies, daß für einen Massenpunkt, auf den an äußeren Kräften nur die Schwere wirkt, die Größe  $\Omega$  während seiner Bewegung erhalten bleibt. Diese ausgezeichnete Größe heißt „Rotationsmoment“.  $\frac{\Omega}{2}$  kann auch als „Flächengeschwindigkeit“  $F$  bezeichnet werden, wonach die Gleichung  $F = \text{konst.}$  als der „Flächensatz“ bekannt ist. Denn  $r \cos \varphi$  ist der Abstand des Massenpunktes von der Erdachse; die Fläche, welche dieser frei im Weltraum mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\lambda} - \omega$  pro Sekunde bestreicht, ist  $F = \frac{r \cos \varphi}{2} \cdot r \cos \varphi (\dot{\lambda} - \omega)$ .

Der Flächensatz entspricht dem bekannten Keplerschen Gesetz und findet stets dort Anwendung, wo eine Masse sich ohne Beeinflussung durch andere frei bewegen kann, unter Umständen also auch bei Luftmassen. Mit seiner Hilfe läßt sich die Veränderung des  $\dot{\lambda}$ , der Ostwestgeschwindigkeit im rotierenden System, bei Verlagerung von Norden nach Süden ( $\varphi$  veränderlich) oder in vertikaler Richtung ( $r$  veränderlich) bestimmen. Da  $r \cos \varphi$  der Abstand des Massenpunktes von der Erdachse ist, so rührt jede Zunahme von  $\dot{\lambda} - \omega$  von einer Verminderung jenes Abstandes her, und umgekehrt. Hier ist nun zu berücksichtigen, daß bei den tatsächlich vorkommenden Bewegungen der Luftmassen fast stets dem absoluten Betrage nach  $\dot{\lambda} < \omega$ , folglich die Konstante in der Gleichung  $\Omega = \text{konst.}$  negativ ist. Bei Annäherung eines frei beweglichen Massenpunktes an die Pole nimmt folglich Ostwestgeschwindigkeit ( $\dot{\lambda} > 0$ ) ab, Westostgeschwindigkeit ( $\dot{\lambda} < 0$ ) zu. Das umgekehrte tritt bei Entfernung von den Polen ein.

Analog wird bei vertikaler Bewegung nach abwärts Ostwestgeschwindigkeit abnehmen, Westostgeschwindigkeit zunehmen. Ein Massenpunkt, der aus relativer Ruhe in der Höhe losgelassen wird, erlangt, zu Boden fallend, eine geringe Westostgeschwindigkeit und fällt daher östlich von dem Orte nieder, an dem er losgelassen wurde.

Da wir im folgenden den Satz von der Erhaltung des Rotationsmomentes öfters verwenden werden, sollen hier zwei kleine Tabellen Platz finden, welche diese Veränderungen der Bewegungen längs der Parallelkreise auf ihre Größe hin zu beurteilen ermöglichen.<sup>2)</sup>

Wir denken uns zunächst eine Masse anfangs in der Breite  $\varphi$  in Ruhe. Sie werde dann bei Erhaltung ihres Rotationsmomentes im gleichen Niveau ( $r$ ) in die Breite  $\varphi'$  gebracht. Dabei erlangt sie eine zonale Geschwindigkeit längs der Breitenkreise, welche sich folgendermaßen berechnen läßt. In der Breite  $\varphi$  ist:  $\Omega = -r^2 \cos^2 \varphi \omega$ , in

1)  $\dot{\lambda} - \omega$  ist die absolute Winkelgeschwindigkeit, bezogen auf ein im Raume festes Koordinatensystem,  $\dot{\lambda}$  die relative, bezogen auf die rotierende Erde.

2) Vgl. auch die Tabellen des Rotationsmomentes von Schneidemühl, Met. Zeitschrift 1890, S. 394.

der Breite  $\varphi'$ :  $\Omega = r^2 \cos^2 \varphi' (\dot{\lambda} - \omega)$ . Da diese Momente gleich sind, folgt  $\dot{\lambda} = \omega \left[ 1 - \frac{\cos^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi} \right]$ , die lineare Geschwindigkeit in der Breite  $\varphi'$  wird also:  $u = r \cos \varphi' \dot{\lambda} = r \omega \frac{\cos^2 \varphi' - \cos^2 \varphi}{\cos \varphi'}$ .

Wir nehmen zur Orientierung über die Größenordnung des Effektes an, die Verschiebung geschehe auf 10 Grade Breitenunterschied. Wir müssen sie äquator- und polwärts berechnen, da die Verschiebung von der Breite  $\varphi$  zur Breite  $\varphi'$  nicht den gleichen Effekt hat wie die umgekehrte. Die Rechnung liefert folgende Werte für die lineare Geschwindigkeit, welche aus anfänglichem Ruhezustand bei Verschiebung der Masse um 10° Breite entsteht:

Verschiebung von Breite	nach Breite	Geschw. $u$ in m/sec	nach Breite	Geschw. $u$ in m/sec
90°	80°	81,5	80°	81,5
80°	70°	117,3	90°	— ∞
70°	60°	123,2	80°	— 234,7
60°	50°	118,3	70°	— 175,8
50°	40°	105,3	60°	— 151,1
40°	30°	87,7	50°	— 125,9
30°	20°	65,9	40°	— 98,9
20°	10°	41,0	30°	— 71,5
10°	0°	14,0	20°	— 43,0
0°	10°	— 14,2	10°	— 14,2

Ostwestbewegung ist positiv, Westostbewegung negativ gezählt.

Viel geringere Geschwindigkeiten als bei meridionaler Verschiebung entstehen bei vertikaler. Aus der Erhaltung des Rotationsmomentes ergibt sich, wenn in der Distanz  $r$  vom Erdmittelpunkt die Masse relativ zur Erde in Ruhe war, in der Distanz  $r'$  eine Geschwindigkeit  $u = r' \cos \varphi \dot{\lambda} = \omega \cos \varphi \frac{r'^2 - r^2}{r}$ . Ist nun die Niveauänderung  $h$  klein gegen den Erdradius und ist  $r' = r \pm h$ , so wird daraus  $u = \pm 2h \omega \cos \varphi$ . Hebung und Senkung der Masse erzeugt also, absolut genommen, die gleiche Geschwindigkeit; bei Hebung ( $h > 0$ ) entsteht Ostwestbewegung, bei Senkung ( $h < 0$ ) Westostbewegung. Die Rechnung liefert für  $h = 10$  km in verschiedenen Breiten folgende lineare Geschwindigkeiten:

$$\varphi = 90^\circ \quad 80^\circ \quad 70^\circ \quad 60^\circ \quad 50^\circ \quad 40^\circ \quad 30^\circ \quad 20^\circ \quad 10^\circ \quad 0^\circ$$

$$u = 0,00 \quad 0,26 \quad 0,50 \quad 0,73 \quad 0,94 \quad 1,12 \quad 1,26 \quad 1,37 \quad 1,44 \quad 1,46 \text{ m,sec.}$$

Wie man sieht, spielt die meridionale Verschiebung der Massen eine ungleich bedeutendere Rolle als die vertikale. In hohen Breiten namentlich liefert die Verschiebung einer Masse um 10 Breitengrade bei Erhaltung des Rotationsmomentes zonale Geschwindigkeiten von einer Größe, wie sie in der Atmosphäre kaum vorkommen.

Der Satz von der Erhaltung des Rotationsmomentes ist nur ein anderer allgemeinerer Ausdruck für die im folgenden vielfach benützte ablenkende Kraft der Erdrotation bei meridionaler Bewegung (vgl. Abschnitt 15).

#### 14. Bewegung eines Massenpunktes auf der Erdoberfläche.

Damit ein Massenteilchen auf der Erdoberfläche bleibe, ist es, wie oben gesagt, nötig, daß diese einen Widerstand gegen dessen Gewicht ausübe, so stark, daß die Beschleunigung  $\ddot{r}$  in der ersten Gleichung auf S. 22 gerade aufgehoben werde. Bei einer starren Fläche ist eine solche Widerstandskraft jederzeit vorhanden, die erste Gleichung braucht uns also hier, wo es sich um die Bewegung auf der rotierenden Erdoberfläche selbst handelt, nicht weiter zu beschäftigen.

Für eine derartige Bewegung ist  $\dot{r} = 0$ ,  $r = R$  (Erdradius), und daher wird aus der zweiten und dritten Gleichung von S. 22:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - 2\omega) &= 0 \\ \cos \varphi \dot{\lambda} - 2 \sin \varphi \dot{\varphi}(\dot{\lambda} - \omega) &= 0.\end{aligned}$$

Man erhält natürlich für  $\dot{\varphi} = \dot{\lambda} = 0$ , also für einen Punkt der Erdoberfläche selbst, die Beschleunigung  $\ddot{\varphi} = \ddot{\lambda} = 0$ ; die Gestalt der Erde ist mit ihrer Rotation im Gleichgewicht. Es sei aber bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen, daß die relative Ruhe nicht der einzige Fall ist, in dem ein Massenpunkt keine Beschleunigung auf der rotierenden Erdoberfläche erfährt. Ist nämlich  $\lambda = 2\omega$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , so wird wieder  $\ddot{\varphi} = \ddot{\lambda} = 0$ , dann also, wenn ein Punkt sich mit der doppelten Rotationsgeschwindigkeit der Erde von Osten nach Westen bewegt. Hierauf hat Sprung<sup>1)</sup> aufmerksam gemacht. Der Körper unterliegt dann der gleichen Zentrifugalkraft, wie ein Punkt der Erdoberfläche unter ihm, ihr entspricht also auch die vorhandene Abplattung; der Körper wird somit trotz dieser großen Geschwindigkeit relativ zur Erde auf seinem Breitenkreise verharren.

In der ersten der obigen Gleichungen ist das Glied mit  $\dot{\lambda}^2$  die Zentrifugalkraft der Bewegung relativ zur Erde, das Glied mit  $\dot{\lambda}\omega$  die sog. ablenkende Kraft der Erdrotation. Der eben besprochene Fall stellt also einen Gleichgewichtszustand zwischen diesen beiden Kräften dar. Bei gegebenen Geschwindigkeiten ist  $\dot{\lambda}$  um so größer, in je höheren Breiten die Bewegung erfolgt. In  $87\frac{1}{2}^\circ$  Breite z. B. brauchte der gegen Westen bewegte Massenpunkt nur eine Geschwindigkeit von 40,6 m/sec zu haben, um im Gleichgewichte zu sein. Ein Ostwind von dieser Stärke ist nicht unmöglich; er könnte bestehen, ohne daß irgend eine äußere Kraft zu seinem Gleichgewicht erforderlich wäre, also auch kein Druckgefälle (s. 6. Kapitel).

1) Met. Zeitschr. 1894, S. 197.

Sehen wir von den Bewegungsverhältnissen in so hohen Breiten ab, aus denen uns ohnedies keine Beobachtungen vorliegen, so können wir die obigen Gleichungen auf eine meist ausreichende bequemere Form bringen. Die lineare Geschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche infolge der Erdrotation ist gegeben durch  $R \cos \varphi \omega$ ; man findet hierfür in der geogr. Breite

$\varphi = 0^\circ$	$R \cos \varphi \omega = 463 \text{ m/sec}$
20	435
40	355
60	232
70	158
80	80
85	41

Die zonale Geschwindigkeit eines Massenteilchens relativ zur Erde erreicht in nicht zu hohen Breiten nur ausnahmsweise Werte, welche sich mit diesen vergleichen lassen, so z. B. bei Geschossen aus Feuerwaffen. Bei den in der Natur vorkommenden Massenbewegungen, namentlich bei den im folgenden zu behandelnden Winden, sind die Geschwindigkeiten erheblich geringer als die Werte  $R \cos \varphi \omega$  oben. Da nun die lineare Ostwestgeschwindigkeit relativ zur Erde durch  $u = R \cos \varphi \dot{\lambda}$  ausgedrückt ist, so folgt, daß wir bei den uns interessierenden Bewegungen  $\dot{\lambda}$  in erster Annäherung gegen  $\omega$  vernachlässigen können (mit Ausnahme, wie gesagt, von sehr hohen Breiten). Tun wir dies, so gilt angenähert für einen Punkt auf der Erdoberfläche:

$$\ddot{\varphi} - 2\omega \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda} = 0,$$

$$\cos \varphi \ddot{\lambda} + 2\omega \sin \varphi \dot{\varphi} = 0.$$

Setzen wir noch die lineare Geschwindigkeit im Meridian gegen den Pol  $R\dot{\varphi} = v$ , so lassen sich diese Gleichungen auch schreiben:

$$\frac{dv}{dt} - 2\omega \sin \varphi \cdot u = 0, \quad \frac{du}{dt} + 2\omega \sin \varphi \cdot v = 0.$$

Es bewege sich der betrachtete Massenpunkt schließlich nur auf einem so kleinen Teil der Erdoberfläche, daß wir von Änderungen der geogr. Breite infolge dieser Bewegungen absehen dürfen; dann kann  $\varphi$  in obigen Gleichungen als konstant behandelt und  $2\omega \sin \varphi = l$  gesetzt werden.

Die Gleichungen  $\frac{dv}{dt} = lv, \frac{du}{dt} = -lv$  lassen sich unschwer integrieren. Man erhält zunächst  $u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} = 0$  und folglich  $u^2 + v^2 = c^2 = \text{konst.}$  Setzen wir  $u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}$ , so ist  $x$  die Ostwestkoordinate (nach Westen wachsend),  $y$  die im Meridian gegen den Pol gerichtete



Koordinate eines Massepunktes an der Erdoberfläche, der Koordinatenursprung liegt in dieser selbst.

Die obigen Gleichungen liefern unter diesen Umständen durch einmalige Integration nach der Zeit:

$$\frac{dx}{dt} + ly = a, \quad \frac{dy}{dt} - lx = b.$$

$a$  und  $b$  sind die Geschwindigkeitskomponenten nach der  $x$ - und  $y$ -Richtung im Koordinatenursprung.

Es folgt daraus:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = u^2 + v^2 = c^2 = (ly - a)^2 + (lx + b)^2$$

oder

$$\left(x + \frac{b}{l}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{l}\right)^2 = \frac{c^2}{l^2}.$$

Der Punkt, dessen Koordinaten  $x, y$  sind, beschreibt demnach, wenn er auf der Erdoberfläche frei beweglich ist und sich selbst überlassen wird, einen Kreis. Man nennt ihn den Trägheitskreis. Sein Radius ist  $\frac{c}{l}$ , wo  $c$  die konstante Geschwindigkeit bedeutet, mit der der Punkt sich bewegt. Die Koordinaten des Kreismittelpunktes sind  $\xi = -\frac{b}{l}$ ,

$\eta = \frac{a}{l}$ . Haben also  $a$  und  $b$  z. B. positive Werte, d. h. ist im Anfangspunkt die Geschwindigkeit auf der nördlichen Halbkugel gegen den nordwestlichen Quadranten gerichtet, so liegt das Zentrum des Trägheitskreises im Nordosten des Koordinatenursprungs.

Die Lage dieser Trägheitsbahn ist in Fig. 4 für die nördliche Halbkugel dargestellt. Auf der südlichen ist die Breite  $\varphi$  und mithin auch  $l$  negativ zu zählen. Der Mittelpunkt des Kreises liegt dort auf der anderen Seite der Bahn.

Der Radius des Kreises

$$r = \frac{c}{l} = \frac{c}{2\omega \sin \varphi}$$

ist um so kleiner, je näher am Pol die Bewegung vor sich geht und je langsamer sie ist. Für Geschwindigkeiten, welche der Größenordnung nach der der Winde entsprechen, findet man z. B.:

	bei $\varphi =$	$10^\circ$	$30^\circ$	$50^\circ$	$70^\circ$	$90^\circ$
und	$c = 20$ m/sec :	$r = 792$	$275$	$180$	$146$	$138$ km
„	$c = 5$ m/sec :	$r = 198$	$69$	$45$	$36$	$34$

Diese Zahlen dienen zur Orientierung.

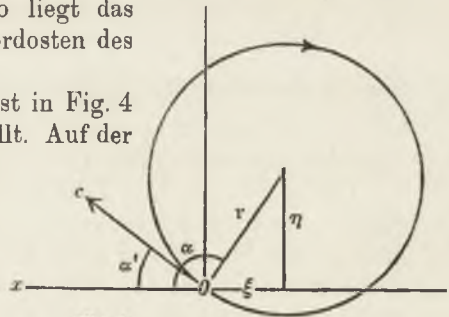


Fig. 4.

Während ein Körper, der mit der Geschwindigkeit  $c$  in horizontaler Richtung in Bewegung gesetzt wird, auf der ruhenden Erde dem Trägheitsgesetz entsprechend eine gerade Bahn beschreiben würde, legt er auf der rotierenden Erde eine nahezu kreisförmige zurück, mit einer Krümmung nach rechts auf der nördlichen Halbkugel, mit einer nach links auf der südlichen. Freilich ist die Bahn nicht wirklich genau ein Kreis, da wir ja Vereinfachungen vorgenommen haben, ehe wir zu diesem Ergebnis gelangt sind. Aber die angenäherte Kreisform bleibt jedenfalls bestehen und ist beachtenswert.

**15. Ablenkende Kraft der Erdrotation bei horizontaler Bewegung.** Unter den Voraussetzungen des vorigen Abschnittes benützen wir nochmals für horizontale Bewegung eines Massenpunktes ( $\dot{r} = 0$ ) die vereinfachten Gleichungen:  $\frac{du}{dt} + lv = 0$ ,  $\frac{dv}{dt} - lu = 0$ .

Die totale Beschleunigung, welche die Masseneinheit erfährt, ist  $\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = l\sqrt{u^2 + v^2} = lc = 2\omega \sin \varphi c$ . Dies ist die Kraft, welche die Kreisbewegung verursacht. Sie ist um so größer, je größer die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist und je näher dem Pole die Bewegung erfolgt.

Die Richtung der Kraft ist folgendermaßen zu finden: es sei  $\alpha$  der Winkel, welchen dieselbe mit der positiven X-Achse einschließt,  $\alpha'$  sei der Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor  $c$  mit dieser Achse bildet; dann ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} \text{ und } \operatorname{tg} \alpha' = \frac{v}{u}. \text{ Nach den Bewegungsgleichungen oben ergibt}$$

sich  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{cotg} \alpha'$ . Es folgt daraus  $\alpha = \alpha' + \frac{\pi}{2}$ , die beiden Vektoren stehen aufeinander senkrecht; der Vektor der Beschleunigung fällt in die Richtung von  $r$  (Fig. 4).

Die ablenkende Kraft der Erdrotation — so hat man die Größe  $2\omega \sin \varphi c$  genannt — steht also stets senkrecht zur Bewegungsrichtung  $c$  und zwar um  $90^\circ$  nach rechts von dieser gedreht auf der nördlichen, um ebensoviel nach links von ihr gedreht auf der südlichen Halbkugel. Ihre Größe ist vom Azimut der Bewegung unabhängig.

Es handelt sich bei der ablenkenden Kraft der Erdrotation um eine „scheinbare Kraft“, wie schon oben bemerkt, die erst aus der Bewegung heraus entsteht (für  $c = 0$  ist sie null), ähnlich wie die Zentrifugalkraft. Da sie stets senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist, kann sie bei der Bewegung nie Arbeit leisten, sie kann also auch nicht die Größe der Geschwindigkeit verändern ( $c$  ist bei der Bewegung im Trägheitskreis konstant), nur deren Richtung.

Die Größe dieser Kraft pro Masseneinheit ist für dieselben Breiten,

welche oben bei Berechnung des Radius des Trägheitskreises angenommen wurden, und für eine Geschwindigkeit von 20 m/sec folgende:

$$\varphi = 10^{\circ} \quad 30^{\circ} \quad 50^{\circ} \quad 70^{\circ} \quad 90^{\circ}$$

$$0,05 \quad 0,15 \quad 0,22 \quad 0,27 \quad 0,29 \text{ cm/sec}^2.$$

Die Kraft ist also, wenn wir sie z. B. mit der Schwere (rund 1000 cm/sec<sup>2</sup>) vergleichen, sehr klein. Wenn sie trotzdem eine Rolle spielt, so kommt dies daher, daß keine stärkeren horizontalen Kräfte auf das Massenteilchen wirken und daß der Bewegung horizontal zur Erdoberfläche keine Schranken gesetzt sind. Die ablenkende Kraft kann durch lange Zeiträume wirken, wobei der Effekt der Ablenkung fortwährend wächst.

Es ist nicht schwer, sich von der Entstehungsweise der ablenkenden Kraft der Erdrotation auch ohne Rechnung ein beiläufiges Bild zu machen. Bewegt sich ein Körper auf der nördlichen Halbkugel in der Erdoberfläche von Süden nach Norden, so kommt er über Gebiete der Erde, welche eine geringere Westostbewegung besitzen als er selbst. Denn diese Bewegung nimmt ja vom Äquator zum Pol kontinuierlich ab (vgl. S. 26). Der Massenpunkt eilt daher auf seinem Wege gegen den Pol der darunterliegenden Erde in der Richtung gegen Osten voraus. Einem auf der Erde stehenden Beobachter erscheint seine Bewegung aus der Anfangsrichtung nach rechts abgelenkt. Das umgekehrte gilt bei der Bewegung gegen Süden, wo der Punkt zurückbleibt, die Erde sich unter ihm wegdreht. Dies folgte ja auch aus dem Flächensatz (Abschnitt 13).

Bewegt sich ein Massenpunkt auf der Erdoberfläche von Westen nach Osten, so besitzt er eine stärkere Rotationsbewegung im Raume als die Erde. Er wird sich also so benehmen, wie ein Massenteilchen auf einer Erde, die plötzlich anfangt, sich rascher zu drehen. Da die jetzige Abplattung der Erde mit ihrer Rotationsgeschwindigkeit im Gleichgewicht steht, so würde in diesem Falle die Abplattung der Erde sich verstärken, die Massen würden gegen den Äquator wandern. So wird auch ein westöstlich bewegter Massenpunkt gegen den Äquator getrieben, also infolge seiner durch die vermehrte Rotationsgeschwindigkeit erhöhten Zentrifugalkraft auf der nördlichen Halbkugel nach rechts, auf der südlichen nach links abgelenkt. Umgekehrt entspricht eine Ostwestbewegung relativ zur Erde einer verminderten Zentrifugalkraft und Abplattung. Der ostwestlich bewegte Körper wird auf der gegen den Äquator sich hebenden Erdoberfläche herabgleiten und polwärts wandern, also wieder nach rechts auf der nördlichen, nach links auf der südlichen Halbkugel.

Daß die Kräfte, welche bei zonaler (ostwestlicher) und bei meridionaler Bewegung die Ablenkung hervorrufen, tatsächlich numerisch

gleich groß sind, läßt sich durch diese einfache Überlegung allerdings nicht erkennen, hierzu ist die Rechnung erforderlich.

**16. Die vertikale Beschleunigung des bewegten Massenpunktes.** Auf S. 22 ergab sich für die vertikale Beschleunigung eines Massenpunktes der Wert:

$$\ddot{r} = -g + r\dot{\varphi}^2 + r\cos^2\varphi\dot{\lambda}(\dot{\lambda} - 2\omega).$$

Das Glied  $r\dot{\varphi}^2$  ist die Zentrifugalkraft, welche durch meridionale Bewegung entsteht, das Glied  $r\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2$  die vertikale Komponente der Zentrifugalkraft infolge zonaler Bewegung relativ zur Erde. Diese ganze Kraft ist ja  $r\cos\varphi\dot{\lambda}^2$ , da  $r\cos\varphi$  der Abstand von der Rotationsachse. Beide Glieder sind stets positiv, bei Bewegungen von Nord nach Süd und Ost nach West wie umgekehrt. Das dritte Glied rechts in obiger Gleichung  $-r\cos^2\varphi\dot{\lambda} \cdot 2\omega$  kann als vertikale Komponente der ablenkenden Kraft bezeichnet werden.<sup>1)</sup> In der Tat läßt sich  $r\cos\varphi\dot{\lambda} = u$  setzen, wo  $u$  wie früher die lineare Ostwestgeschwindigkeit bedeutet; das Glied wird dann  $-2\omega u\cos\varphi$ , ist also ähnlich der horizontal gerichteten ablenkenden Kraft bei Ostwestbewegung gebaut. Wie diese hat auch die vertikale Kraft verschiedene Vorzeichen je nach der Bewegungsrichtung. Bei Ostwind ( $u > 0$ ) wirkt auf beiden Halbkugeln das Glied im Sinne einer Vermehrung der Schwerkraft, bei Westwind im Sinne einer Verminderung. Da die beiden Zentrifugalkraftsglieder stets vermindernd auf  $g$  einwirken, so haben wir bei Ostwind die größte, bei Westwind die geringste abwärts gerichtete Beschleunigung zu erwarten. Den Gliedern kommt aber, solange es sich nur um Geschwindigkeiten handelt, wie sie bei Luftbewegungen die Regel sind, nur die Bedeutung von Korrekturen zu, die bei sehr genauen Rechnungen an die Schwere  $g$  anzubringen sind. Die Korrekturen sind am Äquator am größten; so findet man für  $v = r\dot{\varphi} = 20$  m/sec an der Erdoberfläche  $r\dot{\varphi}^2 = 0,0003$  cm/sec<sup>2</sup>;  $r\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi$  ist für die gleiche Ostwestgeschwindigkeit am Äquator ebenso groß, während  $2r\dot{\lambda}\omega\cos^2\varphi$  dort den Wert 0,28 cm/sec<sup>2</sup> annimmt. Die Komponente der ablenkenden Kraft überwiegt also mit Ausnahme von sehr hohen Breiten (am Pole wird sie ja null) bei weitem die Zentrifugalkräfte, aber auch sie spielt neben der Schwere nur eine ganz untergeordnete Rolle.

Diese Zentrifugalkräfte sind von der Erdrotation unabhängig. Auch auf einer ruhenden Erde ( $\omega = 0$ ) wären sie vorhanden; denn wäre der Massenpunkt gezwungen, sich auf einer ruhenden Kugelfläche zu bewegen, so würde er auch auf dieser gekrümmte Bahnen zurücklegen, und folglich würden Zentrifugalkräfte auftreten. In demselben Sinne sind auch die Glieder in der zweiten und dritten der Gleichungen auf S. 22 zu deuten, welche  $\dot{\lambda}^2$ , bzw.  $\dot{r}\dot{\lambda}$  und  $\dot{\varphi}\dot{\lambda}$  enthalten. Auch sie bleiben

1) Vgl. A. Sprung, Lehrbuch der Meteorologie, S. 28.

auf einer ruhenden Erde bestehen und sind die Folgen der gekrümmten Bahn des Massenteilchens.

Von der Bedeutung der vertikalen Komponente der ablenkenden Kraft kann man sich leicht ein Bild machen. Die Schwerkraft, welche in irgendeiner Breite im Meeresniveau besteht, ist in ihrer Größe von der Rotationsgeschwindigkeit der Erde abhängig. Ein Massenpunkt mit ostwestlicher Relativbewegung rotiert langsamer als die Erde, er steht unter der Wirkung einer größeren Schwere als der relativ zur Erde ruhende Massenpunkt. Der Unterschied ist am Äquator am größten, weil dort die Zentrifugalkraft am stärksten ist.

Sprung hat (a. a. O.) die vertikale Beschleunigung, die ein relativ zur Erde bewegter Massenpunkt erfährt, als dessen Schwere  $g'$  aufgefaßt. Diese Schwere ist nach S. 30 gegeben als

$$g' = g - r\dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi \lambda (\lambda - 2\omega).$$

Sie hängt also von der Intensität und dem Azimut der Bewegung ab.

Diese Auffassung ist bequem, wenn es sich um die Berechnung des Gewichtes bewegter Massen handelt. Eine am Äquator mit der Geschwindigkeit von 20 m/sec westwärts bewegte Masse ist um etwa 0,03% schwerer als eine ruhende, eine ostwärts bewegte um ebensoviel leichter.

**17. Hydrodynamische Bewegungsgleichungen im festen und im rotierenden Koordinatensystem.** Bei der Bewegung flüssiger oder gasförmiger Massen ist vor allem zu beachten, daß hier nicht wie bei der Bewegung eines Massenpunktes ein Massenelement als unabhängig von den übrigen betrachtet werden kann. Ein solches, etwa die Masse eines Volumelementes, ist eingebettet in die Massen der Umgebung und wird durch deren leichte Beweglichkeit fortwährend beeinflußt.

Dies spricht sich zunächst im Druck aus, den die umgebenden Massen auf das Massenelement ausüben, weiter in der inneren Reibung und Wärmeleitung.

Es ist viel schwieriger, ein einzelnes Massenelement in einer Flüssigkeit, z. B. in der Atmosphäre, zu betrachten, als ein isoliertes festes Massenteilchen. In der Hydrodynamik wird darum von einem Kunstgriff Gebrauch gemacht, der es ermöglicht, statt der Bewegung eines Massenelementes die Bewegung an einem bestimmten Punkt des Raumes zu untersuchen, an welchem sich hintereinander ganz verschiedene Massen befinden.

Dieser Kunstgriff besteht im folgenden: Von vielen Größen, welche den Zustand eines Flüssigkeitsteilchens bestimmen, darf man annehmen, daß sie sich in der Umgebung des Teilchens kontinuierlich verändern. Betrachten wir z. B. ein Luftteilchen mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  und den Geschwindigkeitskomponenten  $u, v, w$ . Nun soll sich z. B.  $u$  kontinuierlich bei dem Übergang von dem einen Ele-

ment zu den umgebenden ändern. Analoges gelte vom Druck, der Temperatur, der Feuchtigkeit usw., wiewohl unter Umständen auch Unstetigkeiten vorkommen können. Wird die kontinuierlich Veränderliche allgemein mit  $V$  bezeichnet, so ist  $\frac{dV}{dt}$  die zeitliche Änderung jener Größe  $V$ , welche sich auf ein bestimmtes Teilchen bezieht, das sich im Laufe der Zeit im Raume fortbewegt. Wir können sie setzen:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z},$$

weil  $u = \frac{dx}{dt}$ ,  $v = \frac{dy}{dt}$ ,  $w = \frac{dz}{dt}$  im Punkte  $x, y, z$ .

Hier bedeutet nun  $\frac{\partial V}{\partial t}$  die zeitliche Änderung von  $V$  bei konstanten Koordinaten  $x, y, z$ , also an einem bestimmten Orte,  $\frac{\partial V}{\partial x}$  die Änderung von  $V$  beim Übergang von  $x$  zu  $x + dx$  im Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt usw. Werden statt der rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  die geographischen Koordinaten  $r, \varphi, \lambda$  benützt, so kann in analoger Weise geschrieben werden:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \dot{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \dot{\lambda} \frac{\partial V}{\partial \lambda}.$$

Man bezeichnet  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}$  auch häufig als die negativen Gradienten der Größe  $V$ ; denn wenn  $V$  in  $x + dx$  größer ist als in  $x$ , so ist  $\frac{\partial V}{\partial x}$  das Gefälle, der Gradient von  $V$ , gerichtet nach der negativen X-Achse. Die zeitliche Änderung  $\frac{\partial V}{\partial t}$  an einem Orte sowie die Gradienten treten also an die Stelle der schwer zu bestimmenden Größe  $\frac{dV}{dt}$  eines Teilchens.

Im ruhenden rechtwinkligen Koordinatensystem gelten auch für Flüssigkeiten und Gase die oben benützten allgemeinsten Bewegungsgleichungen  $m \frac{d^2x}{dt^2} = X'$  usw. Unter den Kräften  $X'$  sind aber hier nicht mehr bloß die äußeren Kräfte  $X$  usw. verstanden, sondern es kommt noch die Druckkraft und die innere Reibung hinzu, deren Ausdrücke z. B. in Christiansen, Theoretische Physik, 2. Aufl. 1903 zu finden sind. Die Bewegungsgleichungen erhalten nun die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u + X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v + Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w + Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

1) Das Symbol  $\nabla^2$  ist zu lesen:  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ .

Für  $\frac{du}{dt}$  ist nach obigem zu setzen:  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$  usw.  $\mu$  ist der Koeffizient der inneren Reibung, den wir im allgemeinen bei Luft vernachlässigen können. Ferner sind  $X, Y, Z$  die äußeren Kräfte;  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z}$  sind die negativen Druckgradienten nach den Koordinatenrichtungen. Sie spielen in der Meteorologie eine große Rolle.

Wenn sich obige Gleichungen wie früher auf ein im Raume ruhendes Koordinatensystem beziehen, so ist als einzige äußere Kraft wieder die Attraktionskraft der Erde einzuführen. Die Gleichungen für die Bewegung von Flüssigkeiten unterscheiden sich dann bei Vernachlässigung der inneren Reibung nur durch den Zusatz der Druckglieder von den Gleichungen für ein festes Massenelement.

Transformieren wir wieder auf ein Koordinatensystem, das mit der Erde rotiert, so haben wir die Gleichungen auf S. 22 nur durch die Druckglieder zu ergänzen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - 2\omega) &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - 2\omega) &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ r \cos \varphi \ddot{\lambda} + 2(\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi})(\dot{\lambda} - \omega) &= -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Hier ist  $dz = dr$ ,  $dy = r d\varphi$ ,  $dx = r \cos \varphi d\lambda$  gesetzt worden.

Diese allgemeinen Bewegungsgleichungen gelten also für schwere Flüssigkeiten oder Gase, die sich relativ zu einem mit der Erde fest verbundenen Koordinatensystem bewegen.<sup>1)</sup> Sie bilden für die Betrachtung der Luftbewegungen in diesem Buche die wichtigste Grundlage.

**18. Die Kontinuitätsgleichung.** Infolge der Beweglichkeit der Flüssigkeiten und Gase ist stets der ganze verfügbare Raum von Masse ausgefüllt; diese ist kontinuierlich auf den Raum verteilt. Betrachten wir nun in einer bewegten Masse ein ruhendes Volumelement, durch welches Flüssigkeit strömt. In gegebener Zeit muß bei inkompressiblen Flüssigkeiten ebensoviel in dasselbe ein-, wie aus demselben ausströmen, damit die Kontinuität der Massen erhalten bleibe und kein Abreißen eintrete. Bei kompressiblen Flüssigkeiten (Gasen) ist das nicht nötig, hier muß sich dagegen der Überschuß der einströmenden über die ausströmende Masse in einer Steigerung der Dichte äußern.

1) Wir werden in diesem Buche stets auf die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen zurückgreifen und von der V. Bjerknesschen Darstellungsweise der Bewegungen, die sich wesentlich an den hydrodynamischen Begriff der „Zirkulation“ anschließt, keinen Gebrauch machen. Man findet die Grundsätze dieser Darstellungsweise in Met. Zeitschr. 1900, S. 97 u. 145, und 1902, S. 481.

Die Hydrodynamik liefert für diese Bedingung die folgende „Kontinuitätsgleichung“<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0.$$

Hier ist die Bewegung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen. Benützen wir an dessen Stelle ein Polarkoordinatensystem, indem wir wie oben  $r, \varphi, \lambda$  einführen, so wird:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \dot{r})}{\partial r} + \frac{\partial(\varrho \dot{\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\varrho \dot{\lambda})}{\partial \lambda} + \left(\frac{2\dot{r}}{r} - \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi\right) \varrho = 0.$$

Ob die Luft sich samt der Erde dreht oder nicht, ist für die Kontinuität gleichgültig; es kommt daher die Rotation des Systems in dieser Gleichung nicht zum Ausdruck.

Wir bemerken noch, daß die letztere Gleichung um 2 Glieder mehr als die erste enthält. Dies rührt daher, daß auch bei Konstanz der Dichte und Geschwindigkeit im Raum die Dichte an einem Orte zeitlich nicht konstant bleiben kann, wenn die Luft über der Erde in der Richtung der Vertikalen ( $\dot{r}$ ) oder in der des Meridians ( $\dot{\varphi}$ ) strömt. Denn in beiden Fällen tritt eine Veränderung des Querschnitts der Luftströmung ein, die eine Dichteänderung zur Folge hat. Bei meridionaler Bewegung vom Äquator gegen die Pole stehen der Luft stets kleinere Querschnitte zur Verfügung, da die Meridiane sich einander gegen die Pole nähern, bei Abwärtsbewegung gilt das Gleiche, da die Erdradien zusammenlaufen.

Betrachtet man die Luftbewegungen auf mäßig großen Gebieten der Erde, so kann man von der ersten Form der Kontinuitätsgleichung, die ja im rechtwinkligen System strenge gilt, in der Weise Gebrauch machen, daß man die Erdoberfläche als eben ansieht und statt der geographischen Koordinaten die Größen  $x, y, z$  benützt. Bei Bewegungen auf der ganzen Erde ist die zweite Form der Gleichungen zu verwenden.

1) Vgl. z. B. Christiansen a. a. O. S. 148.



## Drittes Kapitel.

## Statik der Atmosphäre.

**19. Ruhende Luft, Differentialgleichung der Statik.** Die Statik der Atmosphäre beschäftigt sich mit der relativ zur Erde ruhenden Luft. Da die Erde rotiert, so bewegen sich Teile, die weiter von der Achse entfernt sind, rascher als solche, die näher liegen. Unter Ruhe der Luft in beliebiger Höhe verstehen wir dementsprechend eine Bewegung derselben um die Erdachse mit der Geschwindigkeit  $r\omega$ .

Auf relativ zur Erde ruhende Massen wirkt nun keine andere äußere Kraft als die Schwere (vgl. Abschnitt 3). Ihre Wirkung ist im Falle der Ruhe bei festen wie flüssigen Massen durch den Widerstand der darunterliegenden Massen aufgehoben. Nur ist die Widerstandskraft in zusammendrückbaren Massen (Gasen) nicht beliebig groß, wie bei festen Körpern, so daß sie jedem Druck von oben das Gleichgewicht bieten kann, sondern sie ist variabel und stellt sich durch entsprechende Massenverschiebung in vertikaler Richtung stets so ein, daß das von oben wirkende Gewicht der Luftmassen gerade durch die elastische Kraft der Unterlage aufgehoben wird. Diese Kraft ist der Druck, welchen die Luft vermöge der ungeordneten Bewegung ihrer Moleküle auf ihre Begrenzungsflächen ausübt, eine Kraft, die dem Gase innewohnt und daher im Gegensatz zu der „äußeren“ Schwerkraft als „innere“ Kraft bezeichnet wird.

Es ist somit das Bestehen einer Atmosphäre, die nicht unter der Wirkung der Schwere in sich zusammensinkt, daran gebunden, daß die Moleküle eine ungeordnete Bewegung haben. Diese verhindert durch fortwährende Zusammenstöße, daß die Moleküle der Schwerkraft folgend zu Boden fallen und dort ein ganz unvergleichlich geringeres Volumen einnehmen, als ihrer Bewegung tatsächlich zur Verfügung steht. Da die absolute Temperatur ein Maß für diese ungeordnete Bewegung ist, so läßt sich leicht denken, welche Rolle dieser Größe bei der Beurteilung fast aller Vorgänge in der Atmosphäre zufallen muß.

Im Falle der Ruhe ist, wie oben gesagt, das Gewicht der Luftmassen, die über einer Fläche liegen, stets durch einen diesem Gewicht entgegenwirkenden Druck von gleicher Größe aufgehoben. Denken wir uns eine von vertikalen Wänden eingeschlossene Luftsäule (Fig. 5), so drückt auf eine horizontale Schnittfläche in einer gewissen Höhe  $z$  ein größeres

Luftgewicht als auf eine andere, die höher liegt; somit nimmt der Druck gegen aufwärts ab. Zwischen zwei sehr nahe übereinander gelegenen Schnittflächen  $S_1$  und  $S_2$  ist pro Flächeneinheit der letzteren die Masse  $\rho dz$  enthalten, wo  $\rho$  die Dichte der Luft und  $dz$  der Abstand jener Flächen ist ( $z$  nach aufwärts positiv gerechnet). Sei das Gewicht der oberhalb  $S_2$  gelegenen Massen  $G$ , so ist das Gewicht der Massen oberhalb  $S_1$ :  $G + g\rho dz$ .

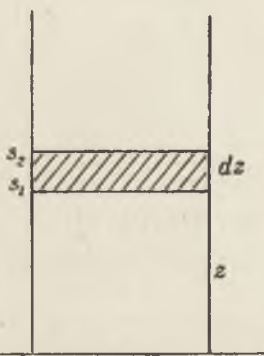


Fig. 5.

Ist der Druck in der Fläche  $S_1$   $p_1$ , in der Fläche  $S_2$   $p_2$ , so muß im Falle der Ruhe sein:

$$p_2 = G, \quad p_1 = G + g\rho dz, \quad \text{oder da } p_2 = p_1 + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho,$$

was die Differentialgleichung der Statik der Atmosphäre darstellt. Je größer die Dichte  $\rho$ , desto stärker ist auch die Druckänderung mit der Höhe;

sie ist negativ, da der Druck mit wachsendem  $z$  abnimmt. Infolge der Abnahme der Schwere mit der Höhe darf in dieser Gleichung  $g$  nur angenähert als Konstante angesehen werden.

Wir können die statische Grundgleichung ebenso gut aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen auf S. 33 ableiten, indem wir Geschwindigkeit und Beschleunigung für den ruhenden Massenpunkt null setzen. Dies gibt:

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Die Integration der Differentialgleichung setzt voraus, daß die Abhängigkeit der Dichte  $\rho$  von der Höhe  $z$  bekannt ist. Nehmen wir für einen Augenblick an — was ja der Wirklichkeit nicht entspricht —, daß die Dichte in allen Höhen die gleiche wie am Erdboden wäre; dann hätten wir  $\rho = \rho_0$  zu setzen und erhielten (statt des partiellen Differentialquotienten kann hier auch der totale geschrieben werden):  $p = p_0 - g\rho_0 z$ , wo  $p_0$  der Druck für  $z = 0$ . In diesem Falle würde der Druck linear nach oben abnehmen und in der Höhe  $H = \frac{p_0}{g\rho_0}$  auf Null herabsinken. Da nach der Gasgleichung  $p = \rho RT$ , so ergibt sich  $H = \frac{RT}{g}$ . Würden wir unserer Atmosphäre von konstanter Dichte noch überall die Temperatur  $T = 273^\circ$  ( $0^\circ C$ ) erteilen, so wäre deren Höhe schließlich  $H = \frac{273 R}{g} = 7991$  m für trockene Luft (vgl. Abschnitt 6, S. 9). Man nennt diese Größe die Höhe der homogenen Atmosphäre. Es ist eine Zahl, die häufig in barometrischen Rechnungen auftritt.

Nachdem die Dichte in Wirklichkeit mit der Höhe abnimmt, so hat man  $\rho$  in der Grundgleichung als Variable aufzufassen. Man erhält

jetzt:  $\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT}$ . Um diese Gleichung zu integrieren, ist es nötig, die Temperatur als Funktion der Höhe  $z$  auszudrücken.

Ist am Erdboden ( $z = 0$ ) der Druck  $p_0$ , so wird  $\lg p = \lg p_0 - \frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T}$ .

Dies ist die allgemeine Formel für die Druckabnahme mit der Höhe. Um sie auszuwerten, müssen spezielle Annahmen über die Abhängigkeit der Temperatur von der Höhe gemacht werden. Am einfachsten wäre es, die Temperatur als konstant anzusehen; dann wäre  $\lg p = \lg p_0 - \frac{gz}{RT}$ .

Für  $T = 273^\circ$  erhielte man auch  $\lg p = \lg p_0 - \frac{z}{H}$ , wo  $H$  die Höhe der homogenen Atmosphäre wäre. Es gälte dann  $p = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$ , und in der Höhe  $z = H$  wäre der Druck  $1/e$  vom Druck am Boden.

Tatsächlich ist nun aber die Temperatur mit der Höhe veränderlich. Die Beobachtungen zeigen, daß sie im allgemeinen mit der Höhe abnimmt und zwar angenähert nach einer linearen Gleichung, wenigstens bis zur Höhe von 8 bis 15 km. Man kann, wenn dies zutrifft, bis zu jener Höhe  $T = T_0 - \alpha z$  setzen, wo  $T_0$  die Temperatur am Boden und  $\alpha$  der Temperaturgradient nach der Höhe ist. Erfahrungsgemäß liegt  $\alpha$  in der Regel zwischen  $0,005^\circ$  und  $0,01^\circ$ , so daß die Temperaturabnahme mit der Höhe annähernd  $\frac{1}{2}^\circ$  bis  $1^\circ$  pro 100 m beträgt.

Setzt man diese Formel für die Temperatur in die allgemeine Gleichung ein, so wird:

$$\lg p = \lg p_0 - \frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - \alpha z} = \lg p_0 + \frac{g}{R\alpha} \lg \frac{T_0 - \alpha z}{T_0},$$

oder  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$ . Man kann auch schreiben:  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$ , eine Formel, die der Poissonschen Gleichung ähnlich gebaut ist.

**20. Mitteltemperatur einer Luftsäule.** Im allgemeinen ist es nicht vorteilhaft, die obige Gleichung zu benutzen, da die Temperatur doch nur selten genau linear abnimmt, wie dort vorausgesetzt wurde. Man bedient sich meist besser einer allgemeineren Formel, bei welcher man nicht von vornherein an eine bestimmte Temperaturfunktion gebunden ist.

In der Gleichung  $\lg p = \lg p_0 - \frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T}$  setzen wir  $\int_0^z \frac{dz}{T} = \frac{z}{T_m}$  und nennen die so definierte Größe  $T_m$  die Mitteltemperatur der Luftsäule von der Höhe  $z$ . Dann ist offenbar

$$p = p_0 e^{-\frac{gz}{RT_m}}.$$

Diese allgemeine Formel ist sehr bequem und wird im folgenden fast ausschließlich benützt werden, um den Luftdruck in der Höhe  $z$  auf jenen an der Basis einer Luftsäule zu beziehen (statische Grundgleichung).

Freilich fragt es sich nun noch, wie jene Mitteltemperatur im einzelnen Fall auszudrücken ist. Da  $T_m = \frac{z}{\int_0^z \frac{dz}{T}}$ , so müßten wir,

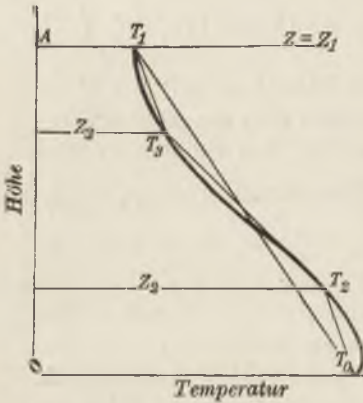


Fig. 6.

um  $T_m$  genau zu finden, neuerlich  $T$  als Funktion von  $z$  einführen.

Nun ist die Temperatur entweder nur an der oberen und unteren Station, also in der Höhe 0 und  $z$ , oder auch noch in einer oder mehreren Zwischenlagen bekannt. Trägt man sich die Beobachtungen von Temperatur und Höhe in ein Koordinatensystem ein (Fig. 6), so kann

man im ersten Fall nichts besseres annehmen, als daß die Temperatur zwischen der unteren und oberen Station ( $T_0$  und  $T_1$ ) nach einer geraden Linie verläuft. In diesem Falle ist die Temperatur in beliebiger Höhe  $z$  zu setzen  $T = T_0 - \alpha z$ , wo  $\alpha$  durch  $\frac{T_0 - T_1}{z_1}$  bestimmt ist ( $\alpha$  kann auch negativ sein).

Die Mitteltemperatur wird dann:

$$T_m = \frac{z_1}{\int_0^{z_1} \frac{dz}{T_0 - \alpha z}}$$

Da  $\alpha z$  stets klein ist gegen  $T_0$ , so läßt sich hierfür angenähert schreiben:

$$T_m = \frac{z_1}{\int_0^{z_1} \frac{dz}{T_0} \left(1 + \frac{\alpha z}{T_0} + \frac{\alpha^2 z^2}{T_0^2}\right)}$$

Nur bei sehr großen  $z_1$  wird man hier das quadratische Glied zu berücksichtigen haben.<sup>1)</sup> Im allgemeinen kann man es vernachlässigen und erhält dann nach Integration  $T_m = \frac{T_0}{1 + \frac{\alpha z_1}{T_0}}$  oder weiter vereinfacht

$$T_m = T_0 \left(1 - \frac{\alpha z_1}{T_0}\right)$$

1) Für  $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$  pro m und  $z = 10$  km führt die Vernachlässigung desselben schon zu merklichen Fehlern.

Diese abgekürzte Formel, welche auf der Annahme linearer Temperaturverteilung beruht, hätten wir auch erhalten, wenn wir die folgende

einfachere Größe als Mitteltemperatur eingeführt hätten:  $T'_m = \frac{1}{z} \int_0^z T dz$ .

Setzen wir hier  $T = T_0 - \alpha z$  ein, so ergibt die Integration von 0 bis  $z_1$ :

$T'_m = T_0 \left(1 - \frac{\alpha z_1}{T_0} \frac{z_1}{2}\right)$ , also den gleichen Wert wie oben. Es folgt daraus,

daß wir statt der korrekten Mitteltemperatur  $T_m$  immer, wenn die Temperaturverteilung angenähert linear ist und es sich nicht um gar zu große Höhen handelt, den bequemeren Wert  $T'_m$  verwenden können. Auch wenn die Temperatur nicht genau linear verläuft, wird meist  $T'_m$  brauchbar sein. Ist jene durch eine Kurve gegeben (in Fig. 6 dick ausgezogen), so ist das Integral  $\int_0^z T dz$  in  $T'_m$  gleich der Fläche, welche die

Kurve mit der  $z$ -Achse einschließt, also planimetrisch bestimmbar.

Die früher gefundene Mitteltemperatur bei linearer Verteilung

$T_m = T'_m = T_0 \left(1 - \frac{\alpha z_1}{T_0} \frac{z_1}{2}\right)$  läßt sich, da  $T_1 = T_0 - \alpha z_1$ , auch schreiben:

$T_m = T'_m = \frac{T_0 + T_1}{2}$ , was im Falle von bloß zwei beobachteten Werten

sehr bequem ist. Sind auch noch Zwischenstationen, z. B. in den Höhen  $z_2$  und  $z_3$  eingeschaltet, welche die Temperaturen  $T_2$  und  $T_3$  beobachten, so verläuft die Temperatur annähernd längs der gebrochenen Linie  $T_0, T_2, T_3, T_1$  in Fig. 6. In diesem Falle führen wir als Mitteltemperatur eine der Größe  $T'_m$  nachgebildete Form  $T''_m$  ein, indem wir für jede Schicht, in welcher geradliniger Temperaturverlauf anzunehmen ist, die Mitteltemperatur bilden und alle diese im Verhältnis ihrer Schichtdicken zusammensetzen; in unserem Falle ist:

$$T''_m = \frac{T_0 + T_2}{2} \cdot \frac{z_2}{z_1} + \frac{T_2 + T_3}{2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_1} + \frac{T_3 + T_1}{2} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1}.$$

Wird die statische Grundgleichung auf eine Luftsäule angewendet, die aus Schichten mit verschiedenen Temperaturfunktionen besteht (Knicke in der Kurve wie in Fig. 6, sprunghafte Übergänge der Temperatur usw.), so geht man am sichersten, wenn man sich der folgenden Form bedient: Herrsche vom Boden bis zur Höhe  $h_1$  die Mitteltemperatur  $T_1$ , von hier bis  $h_1 + h_2$  die Mitteltemperatur  $T_2$  usw., sei in der Höhe  $h_1$  der Druck  $p_1$ , in  $h_1 + h_2$  der Druck  $p_2$  usw., so kann man setzen:

$$p_0 = p_1 e^{\frac{g h_1}{R T_1}}, p_1 = p_2 e^{\frac{g h_2}{R T_2}}, p_2 = p_3 e^{\frac{g h_3}{R T_3}} \dots p_n = p_{n-1} e^{\frac{g h_n}{R T_n}}.$$

Indem man aus diesen Gleichungen  $p_1, p_2, p_3, \dots p_{n-1}$  eliminiert, erhält man:

$$p_0 = p_n e^{\frac{g}{R} \left[ \frac{h_1}{T_1} + \frac{h_2}{T_2} + \frac{h_3}{T_3} + \dots + \frac{h_n}{T_n} \right]},$$

eine Form, die zugleich die Bedeutung jeder Schichte für den Druck am Boden beurteilen läßt.

Es kommt übrigens ganz auf den einzelnen Fall an, wie man die Mitteltemperatur einer Luftsäule zu definieren hat. Hier handelte es sich um jene Mitteltemperatur, die in der barometrischen Grundgleichung erscheint. Doch kann man auch andere Definitionen derselben vornehmen, indem man z. B. nicht die Verteilung der Temperatur auf die Höhengstufen zugrunde legt, sondern die auf die Masse der Luft. So kommt bei Margules<sup>1)</sup> als Mitteltemperatur einer Luftsäule einmal der Wert

vor:  $\frac{1}{M} \int_0^z T \rho dz$ , wo  $M$  die Masse der Luft in der Säule bis zur Höhe  $z$

und  $\rho$  die Dichte ist. Nimmt die Temperatur nach oben ab, so wird diese Mitteltemperatur höher sein als  $T'_m$ ; denn die unteren Schichten mit größerer Dichte kommen dort stärker zur Geltung als in  $T'_m$ , wo alle Höhenstufen den gleichen Einfluß haben.

**21. Barometrische Höhenformel.** Aus der statischen Grundgleichung auf S. 37 findet man die Höhe einer Luftsäule  $z$ , in welcher am Boden der Druck  $p_0$ , am oberen Ende der Druck  $p$  herrscht, zu:

$$z = \frac{RT_m}{g \log e} (\log p_0 - \log p)^2.$$

Ist wie gewöhnlich nur die Temperatur unten ( $t_0$ ) und oben ( $t$ ) gegeben, so wird  $z =$

$$\frac{R \cdot 273 \left[ 1 + 0,00366 \frac{t_0 + t}{2} \right]}{g \log e} (\log p_0 - \log p).$$

Nach Einsetzung der Konstanten (für trockene Luft, 45° Breite und Meeresniveau) wird daraus:

$$z = 18400 \left[ 1 + 0,00366 \frac{t_0 + t}{2} \right] (\log p_0 - \log p).$$

Bei feuchter Luft ist für  $R$  der Ausdruck zu benutzen, der auf S. 10 abgeleitet wurde. Da das Mischungsverhältnis  $q$  aber nicht in der ganzen Säule konstant ist, so kann man näherungsweise das Mittel aus dem Werte oben und unten einsetzen.  $q$  wird dabei als Funktion des Dampfdrucks  $e$  und des Luftdrucks  $p$  eingeführt (S. 11). Die Schwere  $g$  ist für genauere Rechnungen gleichfalls zu korrigieren, indem die geographische Breite und die mittlere Seehöhe der fraglichen Luftsäule berücksichtigt werden (vgl. S. 4).

Für nicht allzu genaue Rechnungen genügt der oben angeschriebene Ausdruck. Wenn dies nicht der Fall ist, so sind die Korrektionsglieder

1) Energie der Stürme, Jahrb. d. k. k. Zentralanstalt für Meteor. u. Geod., Wien 1903, Anhang.

2)  $\log$  bedeutet den Briggschen Logarithmus.

den Tafeln zur barometrischen Höhenmessung zu entnehmen, wodurch die Zahlenrechnungen wesentlich erleichtert werden.<sup>1)</sup>

Die barometrische Höhenformel ist jene Gleichung der Meteorologie, die am besten mit den Beobachtungstatsachen in Einklang steht. Wir können hier von einem Gesetz sprechen, die Abweichungen, die hie und da vorkommen, sind äußerst gering. In der Tat gibt die barometrische Höhenbestimmung mittelst mehrjähriger Mittelwerte von Temperatur und Luftdruck der trigonometrischen Höhenbestimmung nur wenig nach. Bei einer einzelnen Beobachtungsreihe von  $p_0, T_0$  und  $p, T$  freilich ist die Genauigkeit eine weitaus geringere, was vor allem von der mangelhaften Kenntnis der Temperaturverteilung herrührt.

**22. Flächen gleichen Druckes.** Der Luftdruck nimmt in der Atmosphäre mit der Höhe nicht gleichmäßig ab. Die allgemeine Gleichung  $p = p_0 e^{-\frac{gz}{RT_m}}$  liefert durch Differentiation nach  $p$  und  $z$  die Formel:  $dp = -\frac{pg}{RT_m} dz$ . Der Abnahme des Druckes entspricht eine Zunahme der Höhe. Man nennt  $\frac{dz}{dp} = -\frac{RT_m}{pg}$  die „barometrische Höhenstufe“. Sie ist umso größer, je kleiner  $p$  ist, nimmt also nach oben zu. Denkt man sich eine Luftsäule von Flächen durchschnitten, welche die Lage bestimmter Druckwerte, z. B. von 10 zu 10 mm Hg, angeben, so wächst demnach der Abstand dieser Flächen nach aufwärts.

Man bedient sich häufig der Flächen gleichen Druckes (der isobaren Flächen) zur Darstellung der Verteilung der Luftmassen in der Atmosphäre. Der Abstand einer solchen Fläche  $p_1$  (in welcher der Druck  $p_1$  herrscht) vom Meeresniveau, ergibt sich aus der statischen Grundgleichung zu  $z_1 = \frac{RT_m}{g} \lg \frac{p_0}{p_1}$ . Sie liegt also umso höher, je wärmer die Luftschichte darunter ist, woraus folgt, daß sich bei konstantem Bodendruck  $p_0$  über warmen Gebieten die Flächen gleichen Druckes in die Höhe wölben. Die Koordinate  $z_1$  ist ferner umso größer, je größer der Bodendruck  $p_0$  ist. Also auch über Gebieten mit hohem Bodendruck tritt im allgemeinen eine solche Aufwölbung ein.

Schließlich ist zu bemerken, daß unter sonst gleichen Umständen  $z_1$  umso größer ist, je kleiner die Schwere  $g$ . Bei dieser Tatsache wollen wir ein wenig verweilen. Man kann die obige Formel für  $z_1$  als Gleichung der isobaren Fläche  $p_1$  auffassen, wenn  $p_0$  und  $T_m$  als Funktionen der Koordinaten gegeben sind. Es sei nun der allerdings niemals verwirklichte Fall angenommen, daß auf der Erde in allen Breiten derselbe Bodendruck  $p_0$  und dieselbe Mitteltemperatur  $T_m$  herrsche. Für eine isobare Fläche  $p_1$  ist dann  $z_1 = \frac{\text{konst.}}{g}$ . Dies ist aber (vgl. S. 5) die Gleichung

1) Z. B. Jelineks Anleitung zur Ausf. met. Beob., 2. Teil, Wien, k. k. Zentr.-Anst. für Met. u. Geod.

chung einer Niveaufläche der Schwerkraft. Die isobaren Flächen sind also unter den obigen Voraussetzungen mit den Niveauflächen der Schwere identisch, auf ihnen steht die Schwere überall senkrecht; infolgedessen wirkt im Ruhezustand keine äußere Kraft tangential zu ihnen. Wir haben damit die einzige Möglichkeit einer relativ zur Erde ruhenden und in Ruhe verbleibenden Atmosphäre angegeben. Wie die Niveauflächen der Schwere senken sich auch die isobaren Flächen vom Äquator gegen die Pole (S.5).

Trotzdem ist  $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ , da ja  $\varphi$  in unserem praktischen Koordinatensystem den Winkel bedeutet, welchen die Vertikale an einem Orte mit der Vertikalen am Äquator einschließt. Die Bedingungen der Ruhe, die auf S. 36 gestellt wurden, sind also erfüllt.

Infolge der Neigung der isobaren Flächen gegen die Pole ist im Ruhezustand der Druck in einer bestimmten Höhe  $z$  nicht mehr konstant, sondern von der geographischen Breite abhängig. Um ihn zu berechnen, behalten wir die obigen Annahmen von der Konstanz des  $p_0$  und  $T_m$  für alle Breiten bei und nehmen zur Bequemlichkeit an, daß  $T_m = 273^\circ$  (also  $0^\circ\text{C}$ ) und  $p_0 = 760$  mm Hg sei. Die Schwere ändert sich sowohl mit der Breite als mit der Höhe; die letztere Abhängigkeit vernachlässigen wir und führen  $g$  nur als Funktion der Breite nach S. 4

in die Gleichung  $p = p_0 e^{-\frac{gz}{RT_m}}$  ein.

Wir erhalten dann für den Druck  $p$  über dem Äquator und dem Pol in gleicher Seehöhe die folgenden Werte:

Höhe $z$ :	0	5	10	15	20 km
Äquator:	760,0	407,2	218,1	116,9	62,6 mm
Pol:	760,0	405,9	216,7	115,7	61,8 mm
Differenz:	0,0	1,3	1,4	1,2	0,8 mm

Der Tabelle sind unten die Differenzen der zwei Werte beigelegt; sie übersteigen nirgends 2 mm Hg; bezogen auf den Erdquadranten ist dies nicht viel. Die Vorstellung, daß im Ruhezustand in einer Höhe überall der gleiche Druck sein muß, kann daher im großen und ganzen beibehalten werden.

Man bezeichnet die Druckdifferenz zweier Orte in gleicher Meereshöhe, dividiert durch ihren Abstand meist als „Druckgefälle“, das dann für Beschleunigungen maßgebend ist. Hier trifft die Bezeichnung aus dem Grunde nicht zu, weil die Fläche gleichen Abstandes vom Meeresniveau keine Niveaufläche der Schwere ist. Sie wäre es, wenn wir nach dem Vorgange von Bjerknes (a.a.O.) die Seehöhe nicht in Metern, sondern in Einheiten des Schwerepotentials (dynamischen Metern) ausdrücken würden.

**23. Beziehung des Luftdrucks in der Höhe und am Boden zur Mitteltemperatur einer Luftsäule.** Wir betrachten eine Luftsäule, die auf der Erdoberfläche aufrucht und bis zur konstanten Höhe  $z$



reicht; also ein abgegrenztes Volumen Luft, dessen Masse variabel ist. Aus der statischen Grundgleichung läßt sich ersehen, in welcher Beziehung die Veränderungen zueinander stehen, die im Druck am oberen ( $p$ ) und unteren Ende ( $p_0$ ) sowie in der Mitteltemperatur ( $T_m$ ) derselben vorkommen. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Luftsäule anfangs in Ruhe sei, daß sich dann durch Zugabe oder Entnahme von Luftmassen Veränderungen vollziehen und darauf neuerdings Ruhe eintrete, so daß die statische Grundgleichung im Anfangs- wie im Endstadium angewendet werden kann. Differenziert man dieselbe nach  $p, p_0, T_m$ , so ergibt sich:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} - \frac{gz}{RT_m} \frac{dT_m}{T_m}.$$

Diese Formel ist z. B. anwendbar, wenn aus der Druckänderung am Boden und der an einer Höhenstation die Änderung der Mitteltemperatur der dazwischenliegenden Luftmasse berechnet werden soll.

Ist  $\frac{gz}{RT_m} = 1$  und folglich, wenn  $T = 273^\circ$ ,  $z = 7991 \text{ m} = H$ , die Höhe der homogenen Atmosphäre (vgl. S. 36), so kommen nur die prozentuellen Änderungen der 3 Variablen in Betracht; im Falle, daß  $z < H$ , spielt die Temperaturänderung eine kleinere, sonst eine größere Rolle.

Eine Temperaturänderung von 1% bedeutet rund  $3^\circ \text{C}$ ; sie würde in eine Säule von der Höhe  $z = H$  bei konstantem Druck am oberen Ende ( $dp = 0$ ) eine Änderung des Druckes im Meeresniveau ( $p_0 = 760 \text{ mm}$ ) von 7,6 mm bewirken; oder:  $1^\circ$  Temperaturabnahme hätte etwa 2—3 mm Druckzunahme zur Folge.

Ähnlich viel geben Druckänderungen in der Höhe aus; ist z. B.  $p = 100 \text{ mm}$ , so bewirkt eine einprozentige Änderung dieses Wertes ( $dp = 1 \text{ mm}$ ) am Boden 7,6 mm. Die Bestimmung des Bodendruckes aus dem Druck in der Höhe und der Mitteltemperatur erfordert also bei größeren Höhen eine sehr genaue Kenntnis dieser Werte.

Umgekehrt ist es natürlich günstiger, aus  $p_0$  und  $T_m$  auf  $p$ , den Druck in der Höhe, oder aus  $p_0$  und  $p$  auf  $T_m$ , die Mitteltemperatur zu schließen.

Bei konstanter Mitteltemperatur ergibt sich eine Beziehung zwischen der Druckveränderung von oben und unten:  $dp_0 = \frac{p_0}{p} dp$ . Damit der Luftdruck in der Höhe  $z$  um  $dp$  steigt, müssen die Luftmassen darüber vermehrt worden sein. Diese Vermehrung prägt sich auch in  $dp_0$  aus, aber (bei konstanter Temperatur) im Verhältnis von  $\frac{p_0}{p}$  verstärkt gegen oben. Im neuen Zustand muß nämlich unterhalb der Höhe  $z$  gleichfalls eine Vermehrung der Massen stattgefunden haben; denn sonst könnte die Zugabe oberhalb  $z$  nicht in Ruhe bleiben, sie müßte sich senken. Die Druckvermehrung in der Höhe entspricht dem Zuwachs über dieser, die Druckvermehrung am Boden dem gesamten Zuwachs an Masse in der Luftsäule vom Boden bis zur Grenze der Atmosphäre. Wir kommen später hierauf zurück.

## Viertes Kapitel.

### Vertikale Temperaturverteilung im Ruhezustand.

**24. Einfluß der Wärmeleitung, Wärmestrahlung und Ausdehnung (Kompression).** Aus dem Verlaufe der Flächen gleichen Druckes ergab sich oben, daß die Temperatur in horizontaler Richtung konstant sein muß, wenn allgemeine Ruhe in der Atmosphäre herrschen soll; diese Forderung ist festzuhalten. Bezüglich der Verteilung der Lufttemperatur in der Vertikalen enthält die Formel für den Gleichgewichtszustand einer Luftsäule, die statische Grundgleichung, keine Forderung. Sie liefert nur bei gegebener Temperatur die Massen- und Druckverteilung nach der Höhe.

Auf die Verteilung der Lufttemperatur in der Vertikalen wirken nun verschiedene Einflüsse. Sie haben zur Folge, daß die Temperatur in den unteren Kilometern der Atmosphäre im allgemeinen annähernd linear nach aufwärts abnimmt, in höheren Schichten hingegen konstant wird oder langsam zunimmt. Doch kommt auch in den untersten Luftschichten, nicht selten namentlich im Winter, eine Zunahme nach aufwärts vor, die „Inversion“ oder Umkehr des normalen Temperaturgefälles. Der untere Teil der Atmosphäre, in welcher die Temperatur in der Regel nach oben abnimmt, wird als „Troposphäre“, der obere Teil als „Stratosphäre“ oder auch „isotherme Zone“, gegebenen Falles als „Inversion“ bezeichnet. Die Grenze der beiden liegt unter verschiedenen Umständen und in verschiedenen Breiten der Erde verschieden hoch; sie schwankt etwa zwischen 7 und 15 km. In höheren Breiten ist sie niedriger als nahe dem Äquator. Die näheren Beobachtungsergebnisse über die Temperaturverteilung in vertikaler Richtung werden später benützt werden, um verschiedene Erscheinungen darzustellen.

Die Temperatur einer Luftmasse wird einerseits durch Strahlung und Wärmeleitung, andererseits durch Ausdehnung und Kompression beeinflußt. Die beiden ersten Vorgänge geschehen unter Wärmezufuhr oder Wärmeentziehung, die letzten bei konstantem Wärmehalt (adiabatisch).

Bei der Wärmeleitung handelt es sich um eine direkte Übertragung der Molekularbewegung aneinandergrenzender Massen. Sie kann zwischen Erdoberfläche und Luft oder auch zwischen aneinandergrenzenden Luftmassen auftreten. Die Erscheinungen der Strahlung sind von zweierlei Art. Erstens nimmt eine Luftmasse von der sie treffenden Strahlung

einen Teil auf und verwandelt ihn in Wärme (Absorption), zweitens sendet sie nach allen Seiten Strahlen entsprechend ihrer Temperatur aus (Ausstrahlung). Die adiabatische Ausdehnung oder Kompression schließlich, die gleichfalls die Lufttemperatur beeinflusst, tritt hauptsächlich bei vertikaler Bewegung auf, wo die Luft von einem Druck unter einen anderen kommt und sich dabei der Poissonschen Gleichung gemäß verhält.

Wir wollen hier die 3 Vorgänge gesondert betrachten und fragen, welche vertikale Temperaturverteilung jeder einzelne verlangen würde, damit der vorhandene Zustand dauernd erhalten bleibe, also ein Zustand des Gleichgewichts sei. Es wird demnach ein Strahlungs-, ein Wärmeleitungs- und ein statisches Gleichgewicht in einer vertikalen Luftsäule aufgesucht.

**25. Statisches Gleichgewicht, Auftrieb.** Damit eine bestimmte Luftmasse in vertikaler Richtung in Ruhe bleibe, ist es nötig, daß sie in anderen Luftmassen eingebettet sei, welche ihr Gewicht nach dem Prinzip von Archimedes gerade aufheben, so daß sie schwebt. Ist sie leichter als die umgebende Luft, so hat sie ein scheinbares negatives Gewicht, sie erleidet einen „Auftrieb“, der sie steigen macht; ist sie schwerer als die umgebende Luft, so sinkt sie. Wir drücken dies am einfachsten durch die erste Gleichung auf S. 33 aus, wenn wir die hervorgehobene Luftmasse zu Anfang ruhend voraussetzen und nach einer etwaigen vertikalen Beschleunigung  $\ddot{r}$  fragen; im Ruhezustand ist:

$\ddot{r} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ . Die hervorgehobene Luftmasse habe die Masse 1, die Dichte  $\rho$ , die absolute Temperatur  $T$  und stehe unter dem Druck  $p$ . Die umgebenden Luftmassen im selben Niveau haben den gleichen Druck  $p$ ; denn anderen Falles träte ja sogleich ein Ausgleich des Druckes der hervorgehobenen Masse ein; ihre Temperatur sei  $T'$ , ihre Dichte  $\rho'$ . Für sie, die in Ruhe sein sollen, gilt die statische Grundgleichung (S. 36)  $g = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p}{\partial r}$ . Folglich kann man schreiben:  $\ddot{r} = -g + \frac{\rho'}{\rho} g$  oder  $\ddot{r} = g \frac{T - T'}{T}$ .

Der Auftrieb (eine Beschleunigung, die vertikal nach aufwärts gerichtet ist) ist also proportional der Temperaturdifferenz zwischen betrachtetem Luftteilchen und Umgebung. Wir erhalten den allgemeinen Satz: relativ warme Luft erfährt einen Auftrieb, relativ kalte einen Abtrieb im obigen Ausmaß. Bei einem Temperaturunterschied von  $1^\circ$  und unter Temperaturen, die nahe an Null liegen, beträgt die vertikale Beschleunigung ungefähr  $3 \text{ cm/sec}^2$ .

Als Bedingung dafür, daß das hervorgehobene Luftteilchen in Ruhe bleibe, ergibt sich also Temperaturgleichheit mit der Umgebung. Es kann nun sein, daß nach einer geringen vertikalen Verschiebung des Teilchens aus seiner Anfangslage nach abwärts (aufwärts) dasselbe entweder 1. in seiner neuen Lage in Ruhe bleibt, indem es auch hier die Temperatur

der Umgebung besitzt, oder 2. nun infolge eines gewonnenen Auftriebs (Abtriebs) in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, oder 3. infolge eines gewonnenen Abtriebs (Auftriebs) sich stets weiter von der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt. Welcher von diesen 3 Fällen eintritt, hängt, wie obige Gleichung zeigt, nur von der Temperaturdifferenz zwischen Teilchen und Umgebung ab. Beide diese Temperaturen sind veränderlich.

Betrachten wir das herausgehobene Luftteilchen, das in vertikaler Richtung verschoben wird, als unbeeinflusst von Wärmeleitung und Wärmestrahlung, so müssen wir die Bewegung als adiabatisch ansehen; die Temperaturveränderung des Teilchens bestimmt sich dann aus der Veränderung des Druckes nach der Poissonschen Gleichung. Wird das Teilchen gehoben, so sinkt der Druck, es kühlt sich ab; wird es gesenkt, so steigt der Druck und es erwärmt sich. Für trockene Luft lautet die Gleichung in ihrer Differenzialform (vgl. S. 11):  $c_p \frac{dT}{T} = AR \frac{dp}{p}$ .

Wird das Teilchen aus seinem Ruhezustand vom Drucke  $p$  auf den Druck  $p + dp$  gebracht, so bedeutet dies nach der statischen Grundgleichung für die umgebende Luft eine Senkung um die Höhe  $dr = dz = -\frac{dp}{p} \cdot \frac{RT'}{g}$ .

Eliminiert man aus den letzten Gleichungen  $dp$ , so ergibt sich eine Beziehung zwischen der Temperaturänderung  $dT$  und der Höhenänderung  $dz$ :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Ag}{c_p} \cdot \frac{T}{T'}$$

Die Temperaturänderung des Teilchens wird also von seiner eigenen Temperatur und der der Umgebung beeinflusst.

Nehmen wir nun an, die Temperatur der Umgebung  $T'$  nehme nach aufwärts so ab, daß sie in allen Höhen der Temperatur  $T$  des adiabatisch aufwärts bewegten Teilchen gleich sei: dann ist  $T = T'$  und folglich  $\frac{dT}{dz} = -\frac{Ag}{c_p}$ . Dieser konstante Wert für die Temperaturveränderung des bewegten Teilchens ist nun zugleich die Temperaturabnahme in der umgebenden Luft  $\frac{dT'}{dz}$ , und wir können sagen: beträgt in einer Luftsäule die vertikale Temperaturabnahme  $\frac{Ag}{c_p}$ , so wird ein Teilchen der Masse, das wir von irgend einer Stelle aus adiabatisch nach auf- oder abwärts bewegen, an allen Orten, die es passiert, die Temperatur seiner Umgebung haben, also nirgends einen Auf- oder Abtrieb erfahren, mithin überall im Gleichgewicht sein. Man nennt dies den indifferenten Gleichgewichtszustand einer Luftmasse. Diese Temperaturabnahme nach aufwärts ist mit Benützung der Konstanten auf S. 11 und 12:

$\frac{Ag}{c_p} = 0,00986 \frac{g}{g_{45}}$ . Die Zahl ist, wie man sieht, von der örtlichen Schwere abhängig<sup>1)</sup>; da aber diese sehr geringen Schwankungen unterliegt, so setzt man meist hierfür den abgerundeten Wert  $0,01^\circ \text{C}$  pro Meter oder  $1^\circ \text{C}$  auf 100 m Erhebung.

Die obige allgemeine Beziehung zwischen der Temperaturänderung  $dT$  und der Höhenänderung  $dz$  eines adiabatisch in vertikaler Richtung bewegten Luftteilchens kann man integrieren, wenn die vertikale Temperaturverteilung  $T'$  für die Luftsäule bekannt ist, in welcher die Verschiebung stattfindet. Wir wollen annehmen, diese Temperatur der Umgebung nehme nach oben linear ab, so daß  $T' = T'_0 - \alpha z$ ;  $\alpha$  kann auch negativ oder null sein (Zunahme nach oben oder Isothermie). Man erhält dann  $\frac{dT}{T} = -\frac{Ag}{c_p} \cdot \frac{dz}{T'_0 - \alpha z}$  und, wenn noch der für das indiffe-

rente Gleichgewicht charakteristische Ausdruck  $\frac{Ag}{c_p} = \gamma$  gesetzt wird:  $\lg T = \frac{\gamma}{\alpha} \lg T' + \text{konst.}$  Es sei am Boden ( $z = 0$ ):  $T = T_0$  und  $T' = T'_0$ ; dann wird schließlich:  $T = T_0 \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}$ .

Setzen wir noch voraus, daß das betrachtete Luftteilchen in seiner Ausgangslage  $z = 0$  die Temperatur der Umgebung hatte, daß also

$T_0 = T'_0$ , so wird  $T = T' \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha} - 1}$ , und wir ersehen aus dieser Gleichung zunächst wieder, wie für  $\alpha = \gamma$ , also für den Fall des indifferenten Gleichgewichts, stets  $T = T'$ , wie schon oben bemerkt.

Ist nun weiter  $\alpha < \gamma$ , nimmt also die Temperatur auf 100 m Erhebung um weniger als  $1^\circ$  ab, so ist der Exponent in obiger Gleichung positiv und folglich muß bei Aufwärtsbewegung (wo  $T' < T'_0$ )  $T$  kleiner als  $T'$  sein. Bei Abwärtsbewegung, wo  $T' > T'_0$ , wird umgekehrt  $T > T'$ . In beiden Fällen entsteht aus der Temperaturdifferenz des vertikal verschobenen Teilchens mit seiner Umgebung eine Beschleunigung, welche das Teilchen in seine Anfangslage zurückzuführen strebt; und zwar beim Aufsteigen infolge der relativen Abkühlung ein Abtrieb, beim Absteigen infolge der relativen Erwärmung ein Auftrieb, nach der Gleichung

$$\ddot{r} = g \frac{T - T'}{T} \quad (\text{S. 45}).$$

Man bezeichnet eine derartige Schichtung, bei der die Temperatur der Luftmassen nach oben langsamer als um  $1^\circ$  pro 100 m abnimmt, als einen stabilen Gleichgewichtszustand, weil eine aus ihrer Ruhelage vertikal verschobene Luftmasse wieder in dieselbe zurückstrebt.

1) Vgl. A. Sprung, Met. Zeitsch. 1888, S. 460. Berechnet man nach Bjerknes (a. a. O.) die Temperaturabnahme bei Erhebung um 1 dyn. Meter, so verschwindet die variable Schwere aus der Formel.



Je kleiner die Temperaturabnahme mit der Höhe in der Atmosphäre ist, desto größer wird bei vertikaler Verschiebung des Teilchens die zurückführende Beschleunigung  $\bar{\gamma}$ , desto stabiler ist also der Zustand; am stabilsten sind Schichtungen mit konstanter Temperatur (Isothermien) oder gar mit Temperaturzunahme nach aufwärts (Inversionen).

Für  $\alpha > \gamma$ , d. i. wenn die Temperatur in der Luftsäule rascher abnimmt als um  $1^\circ$  auf 100 m Erhebung, wird der Exponent  $\frac{\gamma}{\alpha} - 1$  negativ, somit bei Verschiebung des Luftteilchens nach aufwärts  $T$  größer als  $T'$ ; es entsteht Auftrieb, der das Teilchen noch mehr von seiner Ruhelage entfernt. Bei Abwärtsbewegung wird  $T < T'$ , das Teilchen sinkt infolge seiner Abkühlung relativ zur Umgebung immer weiter. Den Ruhezustand, in dem das Teilchen gerade die Temperatur der Umgebung hat, bezeichnet man unter diesen Umständen als labiles Gleichgewicht, da jede geringste Verrückung den Anlaß gibt, diese Lage für immer zu verlassen. Es ist also charakterisiert durch eine Temperaturabnahme in der Luftsäule, die  $1^\circ \text{C}$  auf 100 m übersteigt.

Man kann die Bedingungen des indifferenten, stabilen und labilen Gleichgewichtes auch durch Angabe der Verteilung der potentiellen Temperatur (vgl. S. 12) definieren, was mitunter sehr bequem ist. Da bei adiabatischer Bewegung die potentielle Temperatur konstant bleibt, so entspricht dem indifferenten Gleichgewichtszustand einer Luftsäule  $(-\frac{dT}{dz} = \gamma)$  konstante potentielle Temperatur  $(\frac{d\Phi}{dz} = 0)$ , dem stabilen Gleichgewicht  $(-\frac{dT}{dz} < \gamma)$  eine Zunahme derselben  $(\frac{d\Phi}{dz} > 0)$ , dem labilen  $(-\frac{dT}{dz} > \gamma)$  eine Abnahme der potentiellen Temperatur mit der Höhe  $(\frac{d\Phi}{dz} < 0)$ .

Diese Gleichgewichtsbedingungen gelten streng genommen nur für reine Luft. Wir können sie aber auch auf eine Mischung von Luft und Wasserdampf anwenden, solange der letztere nicht gesättigt ist. Luft gemischt mit gesättigtem Wasserdampf läßt keine derartige einfache Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen mehr zu, weil beim Absteigen einer solchen Mischung der Dampf in den ungesättigten Zustand übergeht, somit unsere obige Betrachtung gilt, beim Aufsteigen hingegen Kondensation eintritt, worauf die Poissonsche Gleichung nicht anwendbar ist. Wir kommen hierauf noch zurück.

**26. Einfluß der vertikalen Bewegung auf die vertikale Temperaturverteilung.** Schon aus den Ausführungen des vorigen Abschnittes läßt sich ersehen, daß die vertikale Bewegung die vertikale Temperaturverteilung erheblich beeinflussen muß. Da der Luftdruck stets nach oben abnimmt, so wird in der Atmosphäre jede vertikale Bewegung eines Luftteilchens nach aufwärts mit Abnahme, nach abwärts

mit Zunahme des Druckes verbunden sein, es sei denn, daß die Atmosphäre als Ganzes sich ausdehnt oder zusammenzieht, in welchem Fall die Massen unter konstantem Druck bleiben. Da die Bewegung eines Luftteilchens annähernd adiabatisch erfolgt, so muß trockene wie feuchte Luft bei Aufwärtsbewegung Abkühlung, bei Abwärtsbewegung Erwärmung erleiden. Jede vertikale Bewegung wirkt also dahin, daß die Luft näher dem Erdboden wärmer ist als entfernter von ihm, daß die Temperatur nach aufwärts abnimmt. Vertikale Bewegungen sind etwas ganz gewöhnliches; wir müssen daher erwarten, eine Abnahme der Temperatur nach aufwärts von solcher Größe zu finden, wie sie dem stabilen Gleichgewichtszustand entspricht, also eine Abnahme, die in trockener Luft kleiner ist als  $1^\circ$  pro 100 m. Jede größere Abnahme würde ja bei der geringsten Luftverschiebung in vertikaler Richtung zu einem vollständigen Situationswechsel der Luftmassen führen, könnte also auf die Dauer nicht bestehen.

Da die Luftmassen sich angenähert adiabatisch, also mit konstantem Wärmehalt bewegen, so sind sie Träger der Wärme und transportieren z. B. die an der Erdoberfläche durch Berührung mit der warmen Unterlage empfangene Wärme beim Aufsteigen in die Höhe. Man nennt diesen Vorgang „Konvektion“ der Wärme. Die Wärme, welche an einem Orte auftritt, kann also außer durch Strahlung und Leitung, Vorgängen, von denen später die Rede ist und die bei ruhender Masse vor sich gehen, auch durch Massenverschiebung (Konvektion) ihren Ort wechseln. Daß die Wärme während der Bewegung nicht auf der gleichen Temperatur bleibt, ändert nichts daran; die Konstanz der potentiellen Temperatur beim adiabatischen Transport gibt das Bild für die Wärmekonvektion ab.

Die Temperaturveränderung, welche eine adiabatisch in der Vertikalen verschobene Luftmasse zeitlich durchmacht, ist nun wohl zu unterscheiden von der vertikalen Temperaturverteilung, nachdem die verschobene Luftmasse zur Ruhe gekommen ist. Die letztere wird von der ersteren verursacht. Wir behandeln hier dementsprechend zuerst die Ursache und dann die Wirkung.

a) Temperaturänderung bei vertikaler Bewegung. Für die Temperaturänderung einer adiabatisch in der Vertikalen verschobenen Luftmasse fanden wir früher  $dT = -\gamma \frac{T dz}{T_0 - \alpha z}$  unter der Bedingung, daß  $\alpha$  die lineare Temperaturabnahme in der Säule bedeutet. Sie ist also von der Temperaturverteilung in der Säule abhängig und beträgt nicht einfach  $1^\circ$  pro 100 m, wie man gewöhnlich annimmt. Dies rührt daher, daß die Temperaturänderung  $dT$  im Grunde bloß von der Druckänderung  $dp$  nach der Poissonschen Gleichung und erst mittelbar durch sie von der Höhenänderung  $dz$  abhängt. In Luftsäulen mit konstanter oder nach oben schwach abnehmender Temperatur ändert sich der Druck

mit der Höhe langsamer als in solchen mit stark abnehmender Temperatur. Die Hebung des Luftteilchens um eine bestimmte Höhe bringt daher in ersteren eine geringere Abkühlung des Teilchens hervor als in letzteren; die Abkühlung ist allgemein von der Temperaturverteilung in der Atmosphäre abhängig.<sup>1)</sup>

Wir bleiben bei der Voraussetzung einer linearen Temperaturabnahme. Im Falle, daß die Atmosphäre im indifferenten Gleichgewicht ist ( $\alpha = \gamma$ ), ist nach der Formel auf S. 47  $T = T' \frac{T_0}{T'_0}$ . Eine anfängliche Verschiedenheit der Temperatur des Teilchens ( $T$ ) gegenüber der Umgebung ( $T'$ ) bleibt also bestehen, wie hoch dasselbe auch steigt oder wie tief es sinkt.

Auch die Temperaturänderung des Teilchens bei vertikaler Verschiebung wird hierdurch beeinflußt; denn es ist  $\frac{dT}{dz} = -\frac{T_0}{T'_0} \gamma$ . Sind z. B. die Ausgangstemperaturen  $T_0$  und  $T'_0$  um  $5^\circ \text{C}$  verschieden, so ergeben sich Abweichungen in  $\frac{dT}{dz}$  vom Wert der „adiabatischen“ Änderung  $\gamma$  im Betrag von etwa 2%.  $\frac{dT}{dz}$  ist um diesen Betrag größer als  $\gamma$ , wenn das Luftteilchen wärmer ist, also steigt, und umgekehrt.

<sup>2)</sup> Gewöhnlich ist in der Atmosphäre die Abnahme der Temperatur  $\alpha$  nach oben etwa die Hälfte von  $\gamma$ , also  $1/2^\circ \text{C}$  auf 100 m. Wird in einer solchen Luftsäule ein Teilchen um z. B. 10 km gehoben, so kühlt es sich nicht um  $100^\circ$  ab, wie man gewöhnlich annimmt, sondern um weniger. In diesem Falle gibt nämlich die Rechnung für die Temperatur des verschobenen Teilchens  $T = T_0 \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^2$ . Es sei z. B. am Boden ( $z = 0$ )

$T'_0 = 273^\circ$ ; in der Höhe  $z_1 = 10 \text{ km}$  ist  $T' = T'_0 - \frac{\gamma z_1}{2} = 223^\circ$ . Man findet dann  $T = T_0 \cdot 0,667$ . Ist die Temperatur des verschobenen Teilchens zu Anfang der der Umgebung gleich gewesen ( $T_0 = T'_0$ ), so wird  $T = 182^\circ$ . Die Abkühlung auf 10 km Erhebung beträgt also nur  $91^\circ$ .<sup>2)</sup>

Noch größer werden diese Abweichungen, wenn Luft gezwungen wird, in einer isothermen Atmosphäre auf- oder abzusteigen. Die Formel

von oben muß umgeformt werden. Zunächst ist  $T = T_0 \left[1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right]^\alpha$ . Für

$\alpha = 0$  wird daraus:  $T = T_0 e^{-\frac{z\gamma}{T'_0}}$ . Die Temperaturänderung des vertikal

verschobenen Teilchens wird nun:  $\frac{dT}{dz} = -\gamma \frac{T_0}{T'_0} e^{-\frac{z\gamma}{T'_0}}$ ; d. h. sie wird mit

1) Vgl. A. Sprung, Met. Zeitsch. 1888, S. 460, auch Schreiber, Met. Zeitsch. 1894, S. 464 und R. Emden, Gaskugeln, S. 460 (1907).

2) Vgl. Dines und Hann, Met. Zeitsch. 1913, S. 99.



zunehmender Höhe immer kleiner. Lassen wir ein Teilchen, das relativ zur Umgebung warm ist ( $T_0 > T'_0$ ), in einer isothermen Schichte aufsteigen, so wird dessen Temperaturabnahme zuerst größer sein als die adiabatische  $\gamma$ , dann aber kleiner werden und mit zunehmender Entfernung von der Ausgangslage stets weiter abnehmen.<sup>1)</sup>

Wir schließen hieran noch eine kurze Betrachtung über die Höhenlage, in welcher ein relativ zur Umgebung warmes oder kaltes Luftteilchen nach entsprechendem Aufstieg, bzw. Absinken zur Ruhe kommt. Diese Höhe ist durch Temperaturgleichheit des Teilchens mit der Umgebung bestimmt, also durch die Gleichung  $T = T'$ , wobei, wie auf

S. 47, in einer Atmosphäre mit linearer Temperaturabnahme  $T = T_0 \left(\frac{T'}{T_0}\right)^\alpha$  und  $T' = T'_0 - \alpha z$  zu setzen ist. Daraus folgt für die Ruhelage:

$$z = \frac{1}{\alpha} \left[ T'_0 - \left( \frac{T'_0 \gamma}{T_0^\alpha} \right)^{\frac{1}{\gamma - \alpha}} \right].$$

Für  $\alpha = \gamma$ , adiabatische Temperaturabnahme, gibt es natürlich keinen Ruhezustand, er existiert nur bei stabiler Temperaturschichtung, wo  $\alpha < \gamma$ . So wird z. B. für  $\alpha = \frac{\gamma}{2} = 0,5^\circ$  pro 100 m:  $z = \frac{2 T'_0}{\gamma} \left( 1 - \frac{T'_0}{T_0} \right)$ . Bei einer Temperaturdifferenz  $T_0 - T'_0 = 10^\circ$  und der Ausgangstemperatur  $T'_0 = 273^\circ$  folgt  $z = 1930$  m. Die Ruhe tritt also in kleinerer Höhe ein, als nach der gewöhnlichen Annahme der adiabatischen Abkühlung zu erwarten wäre (2000 m). Für isotherme Schichtung ( $\alpha = 0$ )

bedienen wir uns wieder der Gleichung  $T = T_0 e^{-\frac{\alpha z}{T_0}}$  und setzen  $T = T'_0$ ; dadurch wird die Höhe, in welcher Ruhe eintritt,  $z = \frac{T'_0}{\gamma \log e} \log \frac{T_0}{T'_0}$ . Unter den gleichen Bedingungen wie früher wird hier  $z = 983$  m; die Annahme der Abkühlung um  $1^\circ$  pro 100 m hätte 1000 m ergeben.

Bei vertikaler Bewegung gesättigt feuchter Luft ist zwischen adiabatischer und pseudoadiabatischer Verschiebung derselben zu unterscheiden (Abschnitt 9 und 10). Bei ersterer wird die kondensierte Wassermenge in der Luft mitgeführt, bei letzterer fällt sie als Niederschlag heraus. Im ersten Fall sind die Vorgänge bei Bewegung der Luft nach aufwärts jenen bei Abwärtsbewegung gerade entgegengesetzt; auf sie sind die Formeln des Regen-, Schnee- oder Hagelstadiums anzuwenden. Im zweiten Falle folgt diesen Formeln nur die Bewegung nach aufwärts; die Abwärtsbewegung geschieht sehr angenähert wie bei trockener Luft.

Wir begnügen uns hier mit einer kurzen Darstellung der Erscheinung und verweisen im übrigen auf Hanns Lehrbuch der Meteor-

1) F. M. Exner, Annalen d. Hydrogr. u. marit. Met., 1914, S. 150.

logie. Wie früher bei trockener Luft hängt auch jetzt bei feuchter die adiabatische Temperaturänderung infolge vertikaler Verschiebung von der Temperaturverteilung in der umgebenden Atmosphäre ab. Wir vernachlässigen hier aber diesen, immerhin geringen Einfluß und nehmen an, in der Atmosphäre, in welcher feuchte Luft aufsteigt (der Abstieg braucht nach obiger Bemerkung nicht näher behandelt zu werden), herrsche die gleiche Temperaturabnahme mit der Höhe, wie sie die feuchte Luft erfährt. Wir betrachten zunächst den Fall des Regenstadiums; die Gleichung für adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft bei Temperaturen über Null lautet (S. 14):

$$c_p \lg T - AR \lg p + 0,623 \frac{rc}{pT} = \text{konst.}$$

$e$  ist die maximale Dampfspannung, gegeben als Funktion der Temperatur ( $t$  in  $^{\circ}\text{C}$ ) nach der Formel von Magnus (S. 9).

Die Druckabnahme mit der Höhe ist:  $dp = -\frac{pg dz}{RT}$ . Stünde nun in der ersten Gleichung nur der Druck  $p$  oder nur dessen Logarithmus, so könnte aus ihr und der zweiten der Druck vollständig eliminiert werden und man erhielte eine Beziehung zwischen Temperatur und Höhe allein, nachdem auch  $e$  nur Funktion der Temperatur ist. Sie würde die Temperaturverteilung mit der Höhe als Integral liefern.

Tatsächlich kann  $p$  nicht vollständig eliminiert werden; wir differenzieren die erste Gleichung nach  $p, T$  und  $e$  und eliminieren  $dp$ ; daraus erhalten wir die Temperaturabnahme mit der Höhe in feuchter aufsteigender Luft zu:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\left(A + \frac{qr}{RT}\right)g}{c_p - \frac{qr}{T} + \frac{qr}{e} \frac{de}{dT}}$$

Hier ist das Mischungsverhältnis  $q = 0,623 \frac{c}{p}$  (S. 11) eingeführt. Es ändert sich infolge des Herausfallens von Niederschlag aus der Luft.

Für  $q = 0$ , trockene Luft, geht  $\frac{dT}{dz}$  in  $-\frac{Ag}{c_p}$  über (vgl. S. 46). Ist  $q > 0$ , so überwiegt von den  $q$  enthaltenden Gliedern der obigen Formel das letzte Glied im Nenner weitaus die übrigen. Infolgedessen ist  $\frac{dT}{dz}$  stets kleiner als der Wert  $-\frac{Ag}{c_p}$ , die adiabatische Abkühlung bei Ausdehnung wird durch die frei werdende Kondensationswärme verringert.

Setzt man für  $q$  seinen Wert ein, so zeigt sich, daß mit zunehmender Temperatur  $T$ , wobei die maximale Spannkraft  $e$  stark vergrößert wird,  $\frac{dT}{dz}$  kleiner, mit zunehmendem Druck  $p$  aber  $\frac{dT}{dz}$  größer wird. Spielt sich das Aufsteigen bei Temperaturen unter Null ab, so tritt zur Verdampfungswärme  $r$  noch die Schmelzwärme  $k$  hinzu (S. 15). Zur Orien-

tierung mögen einige Zahlen für  $\frac{dT}{dz}$  dienen, die der Hannschen Tabelle in dessen Lehrbuch entnommen sind.

Temperaturabnahme von gesättigt feuchter Luft beim Aufsteigen um 100 m.

Luftdruck	Temperatur					
	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°
760 mm Hg	0,93°	0,86°	0,76°	0,63°	0,54°	0,45°
600 „	0,92°	0,83°	0,71°	0,58°	0,49°	0,40°
400 „	0,89°	0,77°	0,63°	0,50°	0,42°	
200 „	0,84°	0,64°	0,49°	0,38°		

Zur allgemeinen Lösung der Frage nach der Temperatur aufsteigender feuchter Luftmassen haben Hertz<sup>1)</sup> und Neuhoff<sup>2)</sup> die Gleichungen für die adiabatischen Zustandsänderungen graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt, dessen Abszisse der Druck  $p$ , dessen Ordinate die Temperatur  $T$  war (Adiabaten feuchter Luft, vgl. Abschnitt 9). Darin konnte unter vereinfachenden Voraussetzungen auch eine Höhenskala aufgenommen werden, die es gestattet, die Temperatur als Funktion der Höhe zu verfolgen. Wir verweisen diesbezüglich auf die zitierten Arbeiten und das Hannsche Lehrbuch.

b) Temperaturverteilung nach vollendeter vertikaler Bewegung. Nachdem die Temperaturveränderung eines vertikal verschobenen Luftteilchens berechnet wurde, bleibt nun noch die Frage zu beantworten, welche Temperaturverteilung nach vollendeter vertikaler Verlagerung zur Beobachtung gelangen wird. Hier handelt es sich also um jene Temperaturen, die an festen Stationen in verschiedenen Höhen der Atmosphäre gefunden werden.

Wir wollen diese Frage nur für trockene Luft in exakter Weise beantworten.<sup>3)</sup> Es werde angenommen, daß eine dünne Luftschicht von der Höhe  $\delta z$  und der Dichte  $\rho$  sich bei konstantem Querschnitt in vertikaler Richtung, z. B. nach abwärts, verlagere, so daß die gleiche Masse nun die Höhe  $\delta z'$  einnehme und die Dichte  $\rho'$  habe (Fig. 7). Die Masse, die ursprünglich in der Höhe  $A$  lag, ist nach  $C$ , die Masse aus der Höhe  $B$  nach  $D$  gesunken.

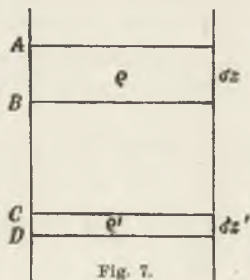


Fig. 7.

1) Met. Zeitsch. 1884, S. 421.

2) Abhandl. d. preuß. Met. Inst., Bd. I, Nr. 6, 1900.

3) Max Margules, Met. Zeitsch. 1906, S. 241.

Sei  $p, T$  Druck und Temperatur der anfangs in  $B, p + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z, T + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z$  Druck und Temperatur der anfangs in  $A$  liegenden Luft; seien ferner  $p', T'$  Druck und Temperatur der Luft in  $D$ , die aus  $B$  gekommen ist,  $p' + \frac{\partial p'}{\partial z} \delta z'$  und  $T' + \frac{\partial T'}{\partial z} \delta z'$  aber die Werte jener Luft in  $C$ , die aus  $A$  stammt. Bei adiabatischer Bewegung muß sein (vgl. Abschnitt 8):

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{AR}{c_p}} \quad \text{und} \quad \frac{T' + \frac{\partial T'}{\partial z} \delta z'}{T + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z} = \left[ \frac{p' + \frac{\partial p'}{\partial z} \delta z'}{p + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z} \right]^{\frac{AR}{c_p}}.$$

Die letzte Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$T' + \frac{\partial T'}{\partial z} \delta z' = T \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{AR}{c_p}} \left[ 1 + \frac{AR}{c_p} \frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial z} \delta z' \right] \left[ 1 - \frac{AR}{c_p} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \delta z \right].$$

Setzt man hier  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ ,  $\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g$ , so wird mit Rücksicht auf die erste Gleichung oben und die Bedingung der Konstanz der Massen ( $\frac{\delta z}{\delta z'} = \frac{\rho'}{\rho}$ ):

$$\frac{dT'}{dz} = \frac{p'}{p} \left( \frac{dT}{dz} + \frac{Ag}{c_p} \right) - \frac{Ag}{c_p}.$$

Die letzte Gleichung gibt den vertikalen Temperaturgradienten  $\frac{dT'}{dz}$ , welcher in einer dünnen Luftschicht entsteht, die adiabatisch vom Druck  $p$  auf den Druck  $p'$  gebracht wird und in welcher ursprünglich der Temperaturgradient  $\frac{dT}{dz}$  herrschte. Wir erhalten hier also den Effekt der vertikalen Bewegung auf die Temperaturverteilung in vertikaler Richtung.

Der spätere Gradient  $\frac{dT'}{dz}$  ist vom anfänglichen  $\frac{dT}{dz}$  verschieden, sobald  $p' \leq p$  ist. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß in der Luftmasse zu Anfang adiabatischer Gradient geherrscht hat ( $\frac{dT}{dz} = -\frac{Ag}{c_p} = -\gamma$ ); dann bleibt derselbe auch später in allen Lagen erhalten. Ist, wie gewöhnlich,  $-\frac{dT}{dz} < \gamma$ , z. B.  $= \alpha$ , so wird  $\frac{dT'}{dz} = \frac{p'}{p} (\gamma - \alpha) - \gamma$ . Wie man sieht, kann bei Abwärtsbewegung ( $p' > p$ ) nun  $\frac{dT'}{dz}$  zu null, ja sogar positiv werden. Setzt man z. B.  $\alpha = 0,5^\circ$  pro 100 m,  $\gamma = 1^\circ$  pro 100 m, so wird  $\frac{dT'}{dz} = 0$  für  $\frac{p'}{p} = 2$ . Wird also z. B. eine Luftschichte, in wel-

1) Statt der partiellen Differenzialzeichen kann man hier die totalen verwenden.

cher der Temperaturgradient  $\alpha = 0,5^\circ$  herrscht, aus der Höhe von etwa 5500 m aufs Meeresniveau herabgedrückt, so ist die Folge, daß in ihr nunmehr Isothermie herrscht. War die Luftmasse ursprünglich in etwa 9000 m Höhe ( $\frac{p'}{p} = 3$ ), so wird, wenn sie bis zum Meeresniveau gesunken ist, sogar Temperaturinversion in ihr herrschen, indem  $\frac{dT'}{dz} = + 0,5^\circ$  pro 100 m wird.

Hierbei ist zu bedenken, daß die Rechnung nur gilt, wenn die Anordnung der Schichten trotz der vertikalen Bewegung erhalten bleibt.

Eine Bewegung vertikal nach aufwärts wird, wenn  $\alpha < \gamma$ , den Temperaturgradienten immer mehr dem adiabatischen nähern. Für  $\frac{p'}{p} = 0$  geht er in diesen über. Wir dürfen also bei anfangs stabiler Schichtung erwarten, daß aufsteigende Bewegung den Temperaturgradienten vergrößert, absteigende aber ihn verkleinert oder sogar umkehrt. Eine anfangs isotherme Schichte ( $\alpha = 0$ ) wird bei Abwärtsbewegung stets in eine Inversion übergehen (ausgenommen den Fall, sie bleibe dabei unter konstantem Druck), bei Aufwärtsbewegung wird aus der Isothermie allmählich der normal gerichtete Temperaturgradient, der bis zum Werte  $\gamma$  anwachsen kann.

Die wirklichen Verhältnisse bei aufsteigender Luftbewegung können wohl, wenn Kondensation des Wasserdampfs eintritt, von den hier für trockene Luft berechneten abweichen, doch liefern die Beobachtungen in Gebieten mit aufsteigenden Luftströmen tatsächlich recht große Temperaturgradienten in einiger Höhe. Umgekehrt findet man in Gebieten mit vorwiegend absteigender Bewegung in den unteren Schichten der Atmosphäre sehr häufig nur ganz kleine Temperaturgradienten, oft auch Isothermien oder Inversionen der Temperatur, worauf wir später noch zurückkommen.<sup>1)</sup>

**27. Wärmeleitungsgleichgewicht.** Die Luft überträgt vermöge der Molekularbewegungen Wärme in der Richtung von der höheren zur niedrigeren Temperatur, wobei die Luftmasse als ganzes in Ruhe bleibt. Die bei der Einheit des Temperaturgefälles durch die Querschnittseinheit tretende Wärmemenge, die Wärmeleitfähigkeit, ist gering. Sie hängt bei Gasen von der Dichte (dem Druck) nicht ab, ist also in allen Höhen die gleiche. In Hanns Lehrbuch wird für sie (3. Aufl. S. 10) der Wert  $k = 0,000053$  (im cm-g-sec-System) angegeben; die Luft ist ein schlechter Wärmeleiter. Da aber auch die Dichte der Luft gegenüber der von festen Körpern klein ist, so kann die geringe durch Lei-

1) Die Berechnung der Temperaturverteilung ist hier nur für unendlich dünne Schichten durchgeführt; für solche endlicher Dicke, für Luftsäulen, die sich heben oder senken, steht sie noch aus.

tung transportierte Wärme doch erhebliche Temperaturveränderungen bewirken, d. h. das Temperaturleitvermögen der Luft  $m = \frac{k}{\rho c_p}$  ist verhältnismäßig groß, nahe dem Boden etwa 0,173, ähnlich dem Werte des Eisens (0,183 nach Hann), in größeren Höhen, wo die Dichte kleiner ist, bedeutend größer. In einer Höhe von 11 km z. B., wo die Dichte nur mehr  $\frac{1}{4}$  der Dichte im Meeresniveau beträgt, ist  $m = 0,692$ . Zum Vergleich diene der betreffende Wert für Kupfer, 1,077 (nach Hann).

Die Wärmeleitung wirkt stets im Sinne eines Ausgleiches der Temperaturen, ist also bestrebt, in vertikaler Richtung Isothermie herzustellen. L. Boltzmann hat bewiesen (Vorlesungen über kinetische Gastheorie), daß dies auch dann geschieht, wenn die Schwerkraft auf die Massen wirkt. A. Schmidt<sup>1)</sup> hatte nämlich die Ansicht geäußert, daß sich durch die Wirkung der Schwerkraft ein Temperaturgefälle nach aufwärts einstellen müsse, da jedes Molekül beim Aufsteigen potentielle Energie gewinne und daher an Temperatur (lebendiger Kraft) verliere. Der Irrtum in dieser Schlußweise rührt von der Betrachtung eines Moleküles als eines einzelnen Körpers her; durch die fortwährenden Zusammenstöße der Moleküle untereinander wird ein stetiger Austausch der lebendigen Kräfte bewirkt, der die Anwendung des Prinzips von der Erhaltung der Energie auf ein einzelnes Teilchen verbietet.<sup>2)</sup>

In ähnlicher Weise ist auch seinerzeit die Temperaturabnahme aufsteigender Luftmassen (nicht einzelner Moleküle) aus der Hebearbeit bei Konstanz der Energie erklärt worden. W. v. Bezold<sup>3)</sup> hat gezeigt, daß dies ebenso verfehlt ist wie die oben erwähnte Ansicht, weil die aufsteigende Luftmasse nie losgelöst von der umgebenden Luft betrachtet werden darf, da sie stets durch diese gehoben oder gesenkt wird. Denn sie kann nur einen Auftrieb erleiden, wenn sie leichter als die umgebende Luft ist; im leeren Raum würde sie stets fallen, und nur auf diesen Vorgang wäre jene Betrachtung anwendbar. Auch die Glieder einer in sich geschlossenen Kette, die in vertikaler Ebene in sich selbst bewegt wird, wie bei einem Paternosterwerk, werden nicht bei Aufwärtsbewegung kälter, bei Abwärtsbewegung wärmer (Bezold).

Man muß also eine Luftmasse stets in Verbindung mit der Luft denken, in welche sie eingebettet ist, und darf sie nie als einen freien Körper behandeln, der für sich allein besteht, wie wir dies bei festen Massen zu tun gewöhnt sind.

Die Wärmeleitung strebt somit einem Zustand konstanter Temperatur in vertikaler Richtung zu, der erfahrungsgemäß nur in der Stratosphäre, nicht aber in der Troposphäre erreicht ist. In dieser besteht

1) Beiträge zur Geophysik, IV, 1, (1899).

2) Vgl. Emden a. a. O.

3) Met. Zeitschr. 1898, S. 441.

andauernd Wärmeleitung von der Erdoberfläche nach außen. Da diese Leitung aber sehr langsam vor sich geht, so kann sich bei den fortwährenden Verlagerungen der Luft in der Troposphäre das Wärmeleitungsgleichgewicht nie einstellen. Berechnet man z. B., wie sich eine tägliche Temperaturschwankung in der untersten Luftschichte durch Wärmeleitung nach aufwärts fortpflanzt, so ergibt sich, daß die Amplitude in 1 m Höhe nur mehr ein Viertel ihres Wertes von unten ausmacht, in 10 m schon 2 Millionen mal kleiner ist als am Boden. In der Höhe von 11 km, wo das Temperaturleitungsvermögen etwa 4 mal größer ist als am Boden, wird die tägliche Amplitude in 1 m Entfernung von einem angenommenen Ausgangspunkte auf  $\frac{1}{2}$ , in 10 m auf  $\frac{1}{1400}$  dieses Wertes verkleinert.<sup>1)</sup> Für die Temperaturverteilung auf größere Entfernung spielt demnach die Wärmeleitung gar keine Rolle.

Hingegen ist die Wärmeleitung zwischen Erdboden und unterster Luftschichte von großer meteorologischer Bedeutung; diese Wärmeleitung geht zweifellos viel rascher vor sich als die innerhalb der Luft, weil an der Grenzfläche Erde-Luft Temperatursprünge bestehen. Die am Boden durch Berührung rasch erwärmte Luft bleibt nicht liegen, sondern steigt nun auf und transportiert die Wärme durch Konvektion in höhere Lagen. Hierdurch wird unten Platz für neue, noch nicht erwärmte Schichten, so daß die Temperatursprünge am Boden stets wieder erneuert werden. Auf diese Weise verbreitet sich die Erwärmung der Luft rasch vom Boden nach aufwärts.

Bei der Abkühlung der Luft durch relativ kalten Boden ist nicht das gleiche der Fall, da ein negativer Temperatursprung Boden-Luft wohl die unterste Schichte abkühlt, sie aber dadurch nur um so stabiler in ihrer Lage macht, so daß die erkaltete Luft nun keiner wärmeren weicht, sondern liegen bleibt. Die Abkühlung pflanzt sich demnach von der Erdoberfläche nach aufwärts nicht durch Konvektion und darum viel langsamer fort als die Erwärmung. Über die näheren Vorgänge bei der Wärmeleitung Boden-Luft ist man noch sehr wenig unterrichtet (vgl. Hanns Lehrbuch 3. Aufl. S. 63).

**28. Strahlungsgleichgewicht.** Die Luft empfängt aus der näheren und fernerer Umgebung Licht- und Wärmestrahlen und hält sie, ihrem Absorptionsvermögen entsprechend, zum Teil fest, wobei sich die absorbierte Energie der Strahlung in Wärme umsetzt. Gleichzeitig sendet sie Strahlen aus, gibt Energie ab, wodurch Abkühlung entsteht. Die Strahlungsvorgänge sind daher für die Temperaturverhältnisse der Atmosphäre von Bedeutung, und neuere Untersuchungen von Hum-

1) Die Differenzialgleichung der Wärmeleitung in vertikaler Richtung lautet:

$\frac{\partial T}{\partial t} = m \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ ; bei Benützung der obigen Werte von  $m$  ist  $z$  in cm auszudrücken.

phreys<sup>1)</sup>, Gold<sup>2)</sup> und Emden<sup>3)</sup> haben gezeigt, daß die Temperatur der Stratosphäre wesentlich von diesen Vorgängen beherrscht wird.

Wir betrachten die Strahlungsverhältnisse im engen Anschluß an die Arbeit von Emden unter der Voraussetzung, daß die Temperaturen von Luft und Erde sich in der Zeit nicht ändern, also stationär sind. In diesem Falle muß durch jeden Querschnitt der Atmosphäre von oben nach unten soviel Strahlungsenergie gehen, als in entgegengesetzter Richtung durch ihn hindurchtritt. Diesen Zustand bezeichnen wir als Strahlungsgleichgewicht.

Die Sonne schießt bekanntlich Strahlen sehr verschiedener Wellenlänge aus, von welchen die sichtbaren Strahlen die größte Intensität haben; dies rührt von der hohen Temperatur der Sonne her. Die Erde und auch die Atmosphäre senden wegen ihrer niedrigeren Temperaturen dunkle Wärmestralen aus. Die Quantität der ausgesandten Strahlung wird durch das Stefansche Gesetz angegeben. Nach ihm strahlt ein Quadratcentimeter einer vollständig schwarzen Fläche pro Minute die Menge  $\sigma T^4$  Gramm-Kalorien aus, wo  $T$  die absolute Temperatur,  $\sigma = 7,6 \cdot 10^{-11}$  aber eine Konstante ist.

Absorbiert ein Körper einen Teil der auf ihn fallenden Strahlung einer ganz bestimmten Wellenlänge, z. B. das  $a$ -fache, wo  $a$  kleiner als 1 (ein „schwarzer“ Körper absorbiert die ganze Strahlung, die ihn trifft, für ihn ist  $a = 1$ ), so strahlt er von der gleichen Strahlenart nicht so viel wie ein schwarzer Körper aus, sondern nur das  $a$ -fache davon (Kirchhoffs Gesetz). Strenge genommen hat daher ein Körper wie Erde oder Luft für jede Strahlenart ein anderes Ausstrahlungsvermögen, entsprechend dem „Absorptionsvermögen“  $a$ . Wir wollen hier (nach Emden) eine Vereinfachung machen und voraussetzen, daß die Strahlen, die bei der Atmosphäre in Betracht kommen, wesentlich in 2 Arten zerfallen, in die kurzwelligen sichtbaren Sonnenstrahlen und die langwelligen dunklen Strahlen, die von der Erde oder Luft ausgesandt werden. Für erstere nehmen wir einen Absorptionskoeffizienten in Luft  $a$ , für letztere einen solchen  $b$  an, und denken uns demnach statt unendlich abgestufter Übergänge die Strahlen auf diese beiden Wellenarten reduziert.

Die Sonne sendet Strahlen aus, welche nach dem Quadrat der Entfernung schwächer werden und in der Nähe der Erde die Energie  $I_0$  haben. Man bezieht  $I_0$  auf den Quadratcentimeter, mißt die Energie in Gramm-Kalorien, welche pro Minute zugestrahlt werden, und bezeichnet  $I_0$  als Solarkonstante, obwohl durch neuere Beobachtungen erwiesen ist, daß  $I_0$  kleineren Schwankungen unterliegt. Abbot und

1) *Astrophys. Journal*, Vol. XXIX, 1909; *Bull. Mt. Weath. Obs.*, Vol. II, 1, 1909, auch *Met. Zeitschr.* 1909, S. 172.

2) *Proc. Roy. Soc. London*, Serie A, Vol. 82, 1909, auch *Met. Zeitschr.* 1911, S. 275.

3) *Sitz. Ber. d. bayr. Akad. Wiss.* 1913, auch *Met. Zeitschr.* 1913, S. 452.



Fowle<sup>1)</sup> fanden  $I_0 = 1,93$ , also rund 2 g.-Kal. pro Min. und  $\text{cm}^2$ . Dies ist die Energie der Strahlung außerhalb der Erdatmosphäre. Die Menge  $I_0$  fällt fortwährend auf die Flächeneinheit eines größten Querschnitts der Erde; es ist also die gesamte der Erde zukommende Wärme in der Minute  $R^2 \pi I_0$  ( $R$  Erdradius). Auf die Einheit der Erdoberfläche kommt daher im Mittel aus Tag und Nacht die Menge  $\bar{I} = \frac{I_0}{4} = 0,5$  g.-Kal. pro Minute.

Bei Abwesenheit der Atmosphäre würde diese ganze Sonnenstrahlung auf die Erdoberfläche auftreffen. Es würde hiervon die Menge  $aI$  absorbiert und im Gleichgewicht die gleiche Energie von der Erdoberfläche in dunkler Strahlung abgegeben werden; diese Ausstrahlung betrüge  $b\sigma T^4$ ;  $a$  und  $b$  wären dabei die Absorptionskoeffizienten der Erdoberfläche für die sichtbare und dunkle Strahlung. Man hätte somit:  $aI = b\sigma T^4$ . Wäre die Erde ein „grauer“ Körper, d. h. würde sie alle Strahlen im selben Verhältnis absorbieren, so wäre  $a = b$  und folglich  $I = \sigma T^4$ . Daraus ergäbe sich  $T = 285^\circ$  abs. oder  $12^\circ\text{C}$ . Dieser Wert stimmt mit der Oberflächentemperatur der Erde sehr nahe überein; letztere ist nach Hanns Lehrbuch (3. Aufl. S. 143) im Mittel  $14^\circ\text{C}$ . Die gleiche Temperatur hätte die Erde als schwarzer Körper, wo  $a = b = 1$ .

Ziehen wir die Erdatmosphäre samt ihren Wolken mit in Rechnung, so haben wir nach Abbot und Fowle<sup>2)</sup> anzunehmen, daß 37% der auffallenden Strahlung in den Weltraum reflektiert werden (0,37 ist also die „Albedo“ der Erde). Es wird somit  $a = 0,63$ . Wahrscheinlich ist  $b$ , das Absorptionsvermögen der Erde samt Atmosphäre für dunkle Strahlen, größer als  $a$ , und zwar nahezu  $b = 1$  (schwarz für diese Strahlenarten). Dann hätten wir  $0,63I = \sigma T^4$  als Bedingung des Gleichgewichts und es wäre  $T = 254^\circ$  abs. =  $-19^\circ\text{C}$ . Diese Temperatur ist wesentlich niedriger als die Oberflächentemperatur der Erde.

Bei diesen Schätzungen wurde von der Lufthülle der Erde abgesehen; betrachten wir nunmehr auch sie neben der Erdoberfläche als absorbierende und strahlende Masse, so haben wir in erster Linie den Wasserdampf zu berücksichtigen. Denn erfahrungsgemäß ist es dieser Bestandteil der atmosphärischen Luft, welcher am meisten absorbiert und ausstrahlt. Die Absorption des Wasserdampfes ist für Strahlen verschiedener Wellenlänge verschieden, „selektiv“; am größten im ultraroten Teil des Spektrums, gering im sichtbaren Teil. Infolgedessen wird von der Sonnenstrahlung weniger absorbiert als von der dunkeln Strahlung. Abbot und Fowle (a. a. O.) schätzen die Absorption der Sonnenstrahlung durch die ganze Atmosphäre zu 0,1, der dunkeln Wärmestrahlung zu 0,9. 90 Prozent der Sonnenstrahlung passieren also die Atmosphäre und gelangen zur Erdoberfläche, hingegen gelangen nur

1) Vgl. Met. Zeitschr. 1908, S. 549, 1911 S. 114 und 1913, S. 257.

2) Vgl. z. B. Met. Zeitschr. 1909, S. 127.

10 Prozent der Erdstrahlung durch dieselbe in den Weltraum, ein Vorgang, nach welchem die Wirkung der Lufthülle auf die Wärmeverhältnisse der Erde oft mit jener des Glastaches auf einem Treibhause verglichen wurde.

In der Atmosphäre strahlt nun jede einzelne horizontale Schichte dunkle Wärmestrahlen aus, während sie zugleich Sonnenstrahlung und dunkle Wärmestrahlung absorbiert. Im Strahlungsgleichgewicht und bei konstanter Wärme der Erde müssen die vertikal herabkommenden Strahlungsmengen  $A$  den Mengen  $B$  gleich sein, welche vertikal nach aufwärts gehen.

Wie früher ist mit Rücksicht auf das Reflexionsvermögen der Erde die Sonnenstrahlung  $I_1 = 0,63 I = 0,315$  g Kal. pro Minute und  $\text{cm}^2$  zu setzen.

Es sei  $A_1$  die abwärts gehende Sonnenstrahlung,  
 $A_2$  „ „ „ Atmosphärenstrahlung,  
 $B_1$  „ aufwärts „ Erdstrahlung,  
 $B_2$  „ „ „ Atmosphärenstrahlung;

dann ist:  $A = A_1 + A_2$ ,  $B = B_1 + B_2$ . Im Strahlungsgleichgewicht soll  $A = B$  sein.

Wir nehmen an, jede unendlich dünne Atmosphärenschichte absorbiere Strahlung proportional der in ihr vorhandenen Wasserdampfmenge  $dm$ , und zwar an Sonnenstrahlung  $adm$ , an dunkler Strahlung  $b dm$ . Die Flächeneinheit der Atmosphärenschichte sendet dann pro Minute die dunkle Strahlung  $b dm \sigma T^4$  nach oben wie nach unten aus. Zählen wir die Dampfmenge von der Grenze der Atmosphäre ( $m = 0$ ) bis zur Erdoberfläche herab ( $m = 1$ ), dann ist  $m$  eine abwärts wachsende Verhältniszahl.

Beim Durchgang der Strahlen durch die Schichte  $dm$  ändert sich  $A$  um  $dA$ ,  $B$  um  $dB$ ; dabei ist die Absorption negativ, die Emission positiv zu zählen, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} dA &= -A_1 a dm - A_2 b dm + b \sigma T^4 dm \\ -dB &= -B_1 b dm - B_2 b dm + b \sigma T^4 dm \end{aligned}$$

somit:  $dA + dB = (-A_1 a - A_2 b + B_1 b + B_2 b) dm$ .

Da  $A = B$ , ist auch  $dA = dB$ . Die Schwächung der Sonnenstrahlung ist nun der eintreffenden Strahlung und der Wasserdampfmenge proportional, also  $dA_1 = -A_1 a dm$ , ähnlich dem Gesetz von Bouguer; folglich wird  $A_1 = I_1 e^{-am}$ , wo  $I_1$  die oben angegebene effektive mittlere Sonnenstrahlung (0,315) ist. Aus obiger Gleichung wird weiter, da auch  $A_1 + A_2 = B_1 + B_2$  ist,  $2dA = I_1 e^{-am}(b - a) dm$ . Die Integration gibt schließlich, da für  $m = 0$  die Atmosphärenstrahlung nach abwärts  $A_2$  null ist:

$$A = \frac{I_1}{2a} [a + b - (b - a) e^{-am}] = B.$$

Aus einer der zwei obigen Gleichungen läßt sich nun die Temperatur der Atmosphärenschi­chte  $dm$  finden; es ist nämlich:

$$\sigma T^4 = \frac{I_1}{2} \left[ 1 + \frac{b}{a} - e^{-am} \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \right].$$

Nach Abbot und Fowle soll die Schwächung der Sonnenstrahlung für  $m = 1$  durchschnittlich 0,1, die der dunklen Strahlung 0,9 betragen. Es ist somit  $e^{-a} = 0,9$  und  $e^{-b} = 0,1$  die von  $m = 1$  durchgelassene Strahlung. Daraus ergeben sich die beiden wichtigen Konstanten  $a = 0,105$ ,  $b = 2,30$ . Da  $am \ll 0,105$ , kann man  $e^{-am} = 1 - am$  setzen; dann wird:

$$\sigma T^4 = \frac{I_1}{2} \left[ 1 + mb + \frac{a}{b} (1 - am) \right].$$

Für  $m = 0$  wird  $T_0 = 216^\circ$  abs. =  $-57^\circ$  C; dies ist die Strahlungstemperatur an der Grenze der Atmosphäre. Für  $m = 1$  wird  $T_1 = 288^\circ$  abs. =  $15^\circ$  C, die Strahlungstemperatur an der Erdoberfläche. Diese Werte stimmen recht gut mit den Beobachtungen in mittleren Breiten der Erde überein; die mittlere Temperatur der Erdoberfläche ist etwa  $14^\circ$  C, als Mitteltemperatur der Grenze der Stratosphäre nimmt man für Europa rund  $-55^\circ$  C an.

Um die Strahlungstemperatur für zwischenliegende Schichten der Atmosphäre zu finden, drücken wir die Wasserdampfmenge  $m$  als Funktion der Höhe  $h$  über dem Meeresniveau aus. Hierzu kann die empirische Formel von Hann für die Abnahme der Dampfspannung mit der Höhe  $e = e_0 \cdot 10^{-\frac{h}{6000}}$  dienen. Man findet  $m = 10^{-\frac{h}{6000}}$ ; für  $h = \infty$  ist  $m = 0$ , für  $h = 0$  ist  $m = 1$ .

Wir berechnen die Temperatur  $t$  ( $^\circ$  C) für verschiedene Werte des  $m$  und suchen für letztere die Höhen  $h$ . Es ergibt sich:

$m = 0,0$	$t = -57^\circ$ C	$h = \infty$	$m$	$\frac{dt}{dh}$ in $^\circ$ C pro 100 m
				0,00
0,0215	- 55	10000		0,23
0,1	- 46	6000		0,45
0,2	- 37	4190		0,76
0,3	- 28	3140		1,07
0,4	- 20	2390		1,21
0,5	- 13	1810		1,25
0,6	- 7	1330		1,47
0,8	+ 5	580		1,90
1,0	+ 15	0		

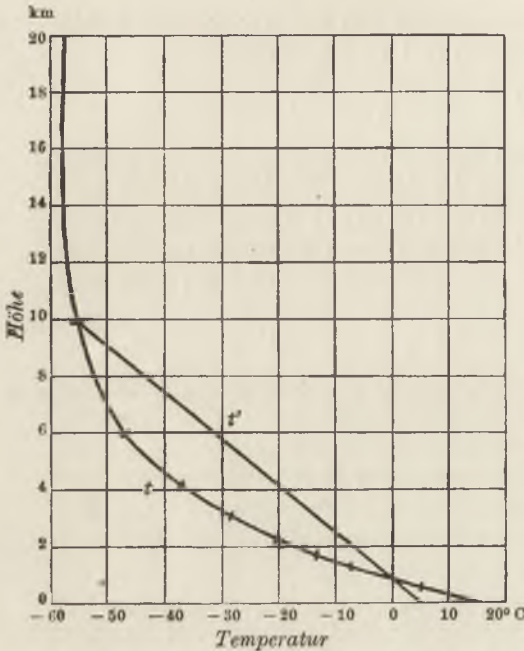


Fig. 8.

beobachteten Temperatur ( $t'$ ) und der berechneten Strahlungstemperatur ( $t$ ) hervor. Die letztere ist zwischen 1 und 10 km stets niedriger als die wirkliche, und zwar zwischen 2 und 6 km Seehöhe um sehr beträchtliches (etwa  $15^{\circ}\text{C}$ ).

Die Berechnung der Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes hat gezeigt, daß über etwa 10 km Höhe die Atmosphäre durch Strahlung allein fast isotherm sein muß. Die Ballonbeobachtungen haben tatsächlich diese Isothermie ergeben; somit ist die Temperatur der Stratosphäre als Strahlungseffekt aufzufassen. Die Berechnung hat ferner für tiefere Schichten ein Temperaturgefälle ergeben, das, wie aus obiger Tabelle ersichtlich ist, nahe dem Boden fast  $2^{\circ}$  pro 100 m beträgt, nach aufwärts langsam abnimmt und erst in etwa 3 km Höhe den Wert des adiabatischen Gefälles von  $1^{\circ}$  auf 100m erreicht. Die Strahlung allein erzeugt folglich eine statisch instabile Temperaturverteilung, die Schichten der unteren Kilometer sind im labilen Gleichgewicht. Sie werden bei geringster vertikaler Verschiebung ihre Lage wechseln, die oberen zu kalten Massen müssen sinken, die unteren zu warmen steigen.

Es handelt sich hier um einen Gegensatz zwischen statischem und Strahlungsgleichgewicht, der in den Witterungsvorgängen eine große Rolle spielen mag. Durch die Strahlung werden in der Troposphäre Luftmassen in einer Weise abgekühlt, daß sie, zu Boden gesunken, auch

In der Tabelle ist zum Schluß der Temperaturgradient für 100 m angegeben. Die berechnete Temperaturverteilung ist in Fig. 8 (unten) dargestellt. Zum Vergleiche ist daneben die Temperatur  $t'$  eingetragen, die als angenähertes, sehr vereinfachtes Beobachtungsergebnis gelten kann; dabei ist als Ausgangstemperatur an der Erdoberfläche  $5^{\circ}\text{C}$  und als Temperatur der Stratosphäre  $-55^{\circ}$ , als untere Grenze derselben aber die Höhe von 10 km angenommen worden. Die Temperatur nehme nach oben linear ab; der Gradient beträgt dann zwischen 0 und 10 km  $0,6^{\circ}$  pro 100 m. Aus der Figur gehen die Unterschiede der

hier noch als kalt auftreten. Denn obwohl sich z. B. die Massen, die im Strahlungsgleichgewicht in 3 km Höhe — 27° C haben, beim Sinken bis zum Erdboden um 30° erwärmen, kommen sie doch noch sehr kalt (mit + 3° C) unten an, verglichen mit der Temperatur von 15° C, die früher dort herrschte.

Die Produktion derartiger Strahlungskälte in der Höhe einiger Kilometer kann, wie Emden betont, mehrere bisher rätselhafte Erscheinungen erklären, wie z. B. die Kälte bei Hagelfällen und die nächtlichen Gewitter über den Meeren. Welche weiteren sehr wichtigen Folgen die Umlagerung von Schichten ungleicher Temperatur hat, wird im 7. Kapitel besprochen werden.

Die Menge des Wasserdampfes in der Atmosphäre ist unter verschiedenen Breiten und Klimaten der Erde verschieden, wie auch die mittlere tägliche Sonnenstrahlung  $I_1$ . Aus diesem Grunde kann der obigen Ableitung nur eine durchschnittliche Bedeutung zukommen. Wir wissen heutzutage noch zu wenig, um die Emdensche Theorie des Strahlungsgleichgewichtes auf verschiedene Gegenden der Erde anzuwenden und etwa zu versuchen, die Temperatur und Höhe der Stratosphäre in ihrer geographischen Verteilung auszurechnen. Emden ist der Ansicht, daß infolge der horizontalen Verschiebungen der Luft die Einstellung der Temperatur nicht genau nach den Verhältnissen eines Ortes erfolgt, sondern eher nach einem gewissen Durchschnitt für die ganze Erde.

Hingegen läßt sich aus der Bedingung des Strahlungsgleichgewichtes immerhin schließen, daß eine Vergrößerung der Dampfmenge in der ganzen vertikalen Luftsäule eine Erniedrigung der Temperatur in der Höhe, eine Erhöhung derselben am Boden zur Folge haben muß, was auch durch Beobachtungen in verschiedenen Breiten bestätigt wird. Da nämlich  $e^{-b}$  die von der ganzen Luftsäule durchgelassene dunkle Strahlung ist, somit  $1 - e^{-b}$  die absorbierte Menge, und da bei größerem Dampfgehalt die letztere Zahl größer sein muß, so folgt zunächst, daß in Gegenden mit größerem Dampfgehalt auch die Konstante  $b$  größer ist. Man findet nun, wenn man  $a$  konstant läßt,  $b$  aber variabel macht:

$$\sigma \frac{\partial T^4}{\partial b} = \frac{I_1}{2} \left[ \frac{1}{a} - e^{-am} \left( \frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} \right) \right].$$

Für die Grenze der Atmosphäre ( $m = 0$ ) ist also:  $\sigma \frac{\partial T_0^4}{\partial b} = - \frac{I_1}{2} \frac{a}{b^2}$ .

Der Quotient ist negativ, die Temperatur der Atmosphären­grenze muß über dem Äquator niedriger sein wie am Pol, falls nicht die Änderung der Sonnenstrahlung, die wir hier für die ganze Erde zu  $I_1$  angenommen haben, etwa diesen Effekt aufhebt. Mit der Veränderung der Temperatur an der Grenze der Atmosphäre ist natürlich auch eine Veränderung derselben in der Stratosphäre im gleichen Sinne verbunden.

Am Boden ( $m = 1$ ) ist hingegen:  $\sigma \frac{\partial T_1}{\partial b} = \frac{I_1}{2} \left[ 1 - \frac{(1-a)a}{b^2} \right]$ . Der Wert ist positiv, die Temperatur am Boden ist höher, je größer der Wasserdampfgehalt. Diese Theorie liefert also mindestens qualitative Übereinstimmung mit den Beobachtungen.<sup>1)</sup>

Wir behandeln hier noch kurz die Frage, ob die Strahlungstemperatur eines Berges oder Plateaus sich von der der Atmosphäre in gleicher Höhe unterscheidet. Die ganze Wasserdampfmenge zwischen Meeresniveau und Grenze der Atmosphäre war  $m = 1$ . Die durch sie durchgelassene Sonnenstrahlung war  $e^{-a \cdot 1} = 0,9$ , die durchgelassene dunkle Strahlung  $e^{-b \cdot 1} = 0,1$ . Erhebt sich in einer Gegend die Erdoberfläche bis zur Höhe  $h$  über das Meeresniveau, so ist für diesen Ort  $m < 1$ . Die durch diese geringeren Dampfmassen durchgelassenen Strahlungen wollen wir  $e^{-a'}$  und  $e^{-b'}$  nennen. Hier ist  $a' = am$ ,  $b' = bm$  und folglich  $a' = a \cdot 10^{-\frac{h}{6000}}$ ,  $b' = b \cdot 10^{-\frac{h}{6000}}$  zu setzen.  $a'$  und  $b'$  sind die Konstanten, welche als Absorptionskoeffizienten nun in die Formel für die Temperatur (S. 61) einzusetzen sind, wenn wir die Temperatur  $T'$  über dem Berge finden wollen. Das Verhältnis  $a'/b'$  ist das gleiche wie früher  $a/b$ . In jener Formel ist nun wieder die Erdoberfläche (Berghöhe) durch  $m = 1$  gekennzeichnet. Man erhält die Temperatur auf dem Berge  $T'_1$  aus

$$\sigma T'_1{}^4 = \frac{I_1}{2} \left[ 1 + b' + \frac{a'}{b'} - \frac{a'^2}{b'^2} \right] = \frac{I_1}{2} \left[ 1 + b \cdot 10^{-\frac{h}{6000}} + \frac{a}{b} \left( 1 - a \cdot 10^{-\frac{h}{6000}} \right) \right].$$

Dies ist aber genau dieselbe Gleichung, die wir aus der früheren (S. 61) für die freie Atmosphäre in der Höhe  $h$  erhalten hätten, für welche  $m = e^{-\frac{h}{6000}}$  zu setzen gewesen wäre. Die Strahlungstemperatur

1) Emden hat (a. a. O.) in seiner Arbeit, der wir sonst gefolgt sind, statt der Masse des Wasserdampfes die Masse der Luft eingeführt, welcher der Wasserdampf beigemischt ist. Er ist der Meinung, daß in großer Höhe die Temperatur wieder zunehmen dürfte (bis  $-19^\circ \text{C}$ ), da das Verhältnis  $a/b$  dort nicht konstant bleiben, sondern sich allmählich der eins nähern soll. Dieser Schluß liegt nahe, sobald neben dem Wasserdampf noch andere Bestandteile der Atmosphäre einen wesentlichen Einfluß auf die Absorption besitzen. Bei Emden ist in 11 km  $m = \frac{1}{4}$ ; bei diesem Wert ist es denkbar, daß über der Höhe von 11 km die Masse von ein Viertel der Atmosphäre andere Absorptionsverhältnisse sichtbarer und dunkler Strahlen besitze als die übrigen  $\frac{3}{4}$  der Masse, und dadurch die Temperatur in den größten Höhen um etwa  $30^\circ$  zunehme. Wir haben hier mit der Masse des Wasserdampfes gerechnet, die in 10 km nur mehr 0,0215 beträgt. Nun müßten wir für diese zwei Hundertstel der Gesamtsumme andere Absorptionsverhältnisse annehmen als für die Masse darunter. Wir lassen daher die Frage dahingestellt, umso mehr, als bis in große Höhen, weit über 10 km hinaus, die Temperatur des Strahlungsgleichgewichts so auffallend gut mit der wirklich beobachteten übereinstimmt. Vgl. auch K. Schwarzschild, Met. Zeitsch. 1913, S. 454, wo allgemeinere Annahmen über die Absorptionskoeffizienten gemacht werden.

des Berges ist also mit der Strahlungstemperatur der freien Atmosphäre in gleicher Höhe identisch; die Temperaturkurve (Fig. 8) wird durch das Hinaufrücken des Erdbodens nicht beeinflusst.

Trotzdem übt der Berg seinen Einfluß auf die Temperatur aus. Denn während in den unteren Schichten der Luftsäule durch die niedrigen Strahlungstemperaturen Umlagerungen der kalten und warmen Massen entstehen müssen, sind am Berge, über dem durch Strahlung die gleiche Kälte erzeugt wird, solche Umlagerungen nur beschränkt möglich. Plateaus oder Kontinentalsockel verhindern die kalte Luft, die auf ihnen lagert, am Abfließen nach der Niederung, so daß hier ein Anlaß für die Ausbildung horizontaler Temperaturunterschiede zwischen Gebirge und freier Atmosphäre gegeben ist. Bei steilen Gipfeln ist der vertikale Austausch eher möglich.

Wir kommen auf die Bedeutung der Erdoberfläche als Hemmnis vertikaler Luftbewegungen auch später noch zurück.

GABINET MATEMATYCZNY  
Jawnarskiego Medycznego Warszawskiego

## Fünftes Kapitel.

### Kinematik.

#### 29. Stromlinien und Stromröhren; stationärer Zustand.

Jede Luftbewegung folgt der Kontinuitätsgleichung (vgl. S. 33), welche eine für alle gasförmigen Körper gültige Beziehung zwischen der Geschwindigkeits- und Dichteverteilung ausspricht. Wir können mit ihrer Hilfe gewisse Vorstellungen von der Art der Bewegungen in der Atmosphäre gewinnen, auch wenn von den Kräften, welche sie verursachen, nichts bekannt ist.<sup>1)</sup>

Im stationären Zustand ist die Dichte  $\rho$  der Luft an jedem Orte konstant, d. h. unabhängig von der Zeit. Es wird daher dann nach der Gleichung von S. 34:  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$ .

$u, v$  seien die horizontalen,  $w$  die vertikale Komponente der Geschwindigkeit; ist letztere null, so handelt es sich um horizontale Bewegung; ist auch noch  $v = 0$ , so wird  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$ . Es ist also die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 transportierte Menge Luft für alle Punkte einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden unveränderlich. Jedem Massenteilchen folgt in seiner Bewegung ein anderes, das an einem Orte die gleiche Dichte und Geschwindigkeit hat, wie das erste dortselbst besaß. Das zweite bewegt sich also genau hinter dem ersten her; jenem folgt ein drittes usw. Alle aufeinander folgenden Teilchen bilden eine Kette; ihre Verbindungslinie heißt „Stromlinie“, sie liegt überall parallel zur Richtung der Bewegung.

In dem einfachen Falle von oben, wo  $v = w = 0$ , ist die Stromlinie eine Gerade. Sobald  $v \geq 0$ , können die Stromlinien gekrümmt sein. Denken wir uns senkrecht zu ihnen einen Querschnitt geführt und aus ihm eine geschlossene Fläche genommen, so bilden die jene Fläche begrenzenden Stromlinien zusammen eine „Stromröhre“ von der Eigenschaft, daß im stationären Zustand durch jeden Querschnitt  $q$  derselben die gleiche Masse in der Zeiteinheit hindurchfließt: es ist also  $q \rho V = \text{konst.}$ , wenn

1) Bjerknes hat diesem Gebiete der Meteorologie den zweiten Band seines neuen Werkes (a. a. O.) gewidmet. Wir berücksichtigen hier einige ältere Arbeiten, fassen uns viel kürzer und verweisen im übrigen auf jenes Buch, in welchem namentlich der graphischen Darstellung der Luftbewegungen ein breiter Raum zugewiesen ist.



$V$  die totale Geschwindigkeit. Wo die Röhre weiter, da ist entweder die Geschwindigkeit oder die Dichte (oder beide) kleiner. Dies ist der Sinn der Gleichung auf S. 66 (vgl. Abschnitt 31).

Der Massentransport durch zwei benachbarte Stromröhren ist im allgemeinen verschieden; er kann auch diskontinuierlich verteilt sein, es können sprunghafte Übergänge der Geschwindigkeiten vorkommen, wie man dies z. B. häufig in windigem Wetter beim Umbiegen um eine Hausecke empfindet.

Ein System von Stromlinien stellt uns somit durch ihre Lage die Richtung, durch ihre Zahl oder Dichte die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung für jeden Ort dar. Dabei muß das System gewisse allgemeine, aus der Kontinuität folgende Bedingungen erfüllen, namentlich an den Grenzen der Flüssigkeit und beim Zusammenlaufen oder Divergieren der Stromlinien im Innern derselben.

Zunächst können Stromröhren des konstanten Massentransportes wegen nicht am Erdboden endigen, sondern müssen in der Atmosphäre geschlossen verlaufen; man spricht demgemäß von „Zirkulationen“ oder, wie Emden, von „Zykeln“. <sup>1)</sup> Aus diesem Grunde müssen die Stromlinien sich weiter der Oberflächengestaltung der Erde, den Gebirgen, Tälern usw. anschließen; es sei denn, daß nahe der Erdoberfläche überhaupt keine Stromlinien bestehen, also Luftruhe herrscht. Über die Form derselben bei gegebener Oberflächengestaltung ist noch sehr wenig bekannt. Bjerknæs hat (a. a. O.) jene Tatsache verwendet, um auf die vertikale Bewegung zu schließen, welche durch die Oberflächengestaltung der Erde bei bestimmten Luftströmungen erzwungen wird; vor ihm wurden schon von anderen Autoren ähnliche Fragen behandelt, auf die wir noch zurückkommen. Insbesondere die Niederschlagsbildung an Gebirgen ist hier von Wichtigkeit.

Die Feststellung der Strömungsverhältnisse der Luft ist nicht leicht; sie verlangt die Beobachtung von Richtung und Stärke der Luftbewegungen an möglichst nahe von einander gelegenen Orten. Da an der Erdoberfläche vertikale Bewegung fehlt (mit der Einschränkung solcher parallel zur Erdoberfläche), so ist eigentlich nur der Verlauf der Stromlinien in der horizontalen Ebene näher bekannt. Für die sehr wichtigen vertikalen Stromlinien in höheren Schichten liegen bis jetzt nur wenige Beobachtungen vor, die im Ballon oder an Wolken gewonnen sind. (Vgl. Abschnitt 30.)

Um die horizontalen Stromlinien an der Erdoberfläche aus den beobachteten Winden zu erhalten, hat I. W. Sandström <sup>2)</sup> eine sinnreiche Methode angegeben: Die Orte gleicher Windrichtung werden durch Linien,

1) Gaskugeln, S. 364. Emden unterscheidet kurze und lange Zykeln, je nachdem die Stromlinien in kleinen Gebieten der Atmosphäre geschlossen sind, oder in sehr ausgedehnten.

2) Annalen der Hydrogr und mar. Meteor.; 1909, S. 242.

Isogonen des Windes, miteinander verbunden. Solche Linien zeichnet man am einfachsten, indem man die beobachteten Richtungen durch Zahlen, z. B. die Kompaßstriche (0—64) oder die bei den Wetterdepeschen verwendeten Doppelstriche (0—32) benennt. Infolge der Kontinuität der Bewegungen findet ein stetiger Übergang der Windrichtungen in einer Stromlinie statt. Zwei Isogonen können sich zwar schneiden, doch muß dann daselbst die Geschwindigkeit null sein. Indem man auf jeder Isogone kleine Striche nebeneinander in der Richtung anbringt, welche die Isogone angibt, kann man durch Verbindung dieser Striche von einer Isogone zur nächsten eine Linie ziehen, die stets die Richtung

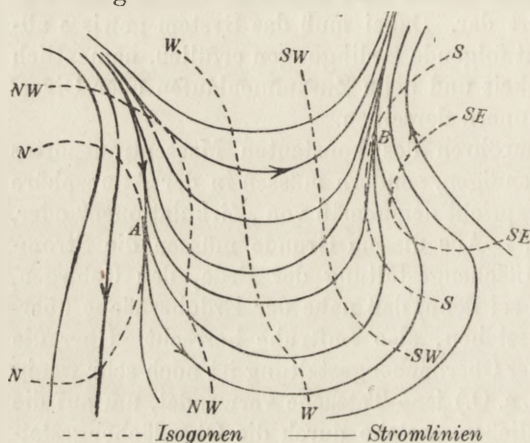


Fig. 9.

hat, welche der eben geschnittenen Isogone entspricht. Sie ist eine Stromlinie. Fig. 9 gibt ein Beispiel der Konstruktion solcher Stromlinien aus Isogonen.

In der Gegend von A, wo Nordwind angenommen wurde, treten die Stromlinien auseinander. Damit dies bei stationärer Luftbewegung möglich sei, muß aus der vertikalen Richtung Luftersatz herbeigeschafft

werden, also, wenn es sich um Stromlinien an der Erdoberfläche handelt, von oben. Umgekehrt ergeben die Isogonen in der Gegend von B Südwind mit Konvergenz; die zusammenströmenden Luftmassen entweichen offenbar nach oben. Auf diese Weise kann uns die Beobachtung horizontaler Winde nach Konstruktion der Stromlinien jene Gebiete finden lassen, in welchen Luft aufsteigt oder herabsinkt, was für das Verständnis der Witterungserscheinungen von großer Wichtigkeit ist. (Vgl. auch Abschnitt 31.) Nachdem die Winde nahe dem Boden aber meist durch lokale Verhältnisse recht gestört sind, ist die Bestimmung der Divergenzen und Konvergenzen, die für die vertikalen Ströme so wichtig wären, bisher im praktischen Wetterdienst noch wenig verwendet worden. Von den oben genannten Vertikalbewegungen, welche durch die Gestaltung der Erdoberfläche zustande kommen, sind diese hier streng zu unterscheiden. Sie können über einer vollkommen ebenen Erdoberfläche entstehen.

Die hier besprochenen Stromlinien sind eine Abbildung des Bewegungszustandes der Luft in einem bestimmten Augenblick. Von ihnen ist eine andere Form von Bewegungslinien zu unterscheiden, die sogenannten „Trajektorien“. Sie stellen die Bahn eines Luftteilchens in der

Zeit dar, sind also nicht an die flüssigen Eigenschaften der Luft gebunden, sondern können in gleicher Weise auch zur Darstellung der Bewegung eines festen Körpers verwendet werden.

Von ihnen haben Shaw und Lempfert<sup>1)</sup> Gebrauch gemacht, um die Bewegung der Luft zu studieren. Die Konstruktion dieser Trajektorien erfordert Windmessungen in kurzen Zeitintervallen an möglichst nahe beieinander gelegenen Orten. Man versucht, mit ihrer Hilfe eine Luftmasse auf ihrer Bahn zwischen verschiedenen Stationen hindurch zu verfolgen und gibt an zahlreichen Punkten der Linien die Zeiten an, zu welchen die Luftmasse dort gewesen ist.

Auch bei diesen Trajektorien kommen Divergenzen und Konvergenzen vor, welche unter Umständen auf- und absteigende Bewegung an der Erdoberfläche bedeuten. Sie unterscheiden sich von den früheren Strömungslinien z. B. dadurch, daß sie sich selbst schneiden, also Schlingen bilden können. Solche Eigentümlichkeiten treten nach Shaw nicht selten auf, wenn eine Luftmasse sich nahe einem Gebiete tiefen Druckes bewegt. Wir kommen später hierauf zurück.

**30. Stromlinien in der Vertikalebene.** Was den Verlauf der Stromlinien in der Vertikalebene anlangt, so ist der einfachste Fall beim Überwehen einer Bergkette und eines Tales gegeben, deren Streichrichtung senkrecht zum Winde steht. Diesen Fall hat zuerst Pockels<sup>2)</sup> unter der Voraussetzung von wirbelfreier Bewegung theoretisch behandelt. Kürzlich hat v. Ficker<sup>3)</sup> gelegentlich von Ballonfahrten über die Alpen bei Luftströmungen aus Süden Beobachtungen gemacht, welche den Verlauf der Stromlinien in diesem einfachsten Falle erkennen lassen. Danach schmiegen sich dieselben dem wellenartigen Bodenprofil zu unterst ziemlich nahe an, wenn auch die bodennächste Schicht der Luft im Tale in Ruhe bleiben kann.



Fig. 10.

In größerer Höhe flachen sich die Wellen mehr und mehr ab, doch ist mitunter noch in 1000 m Höhe über dem Gebirgskamm ein Einfluß desselben zu bemerken. Fig. 10 gibt nach Ficker eine schematische Darstellung der Strömungslinien bei Südwind über dem Innthal, den nördlichen Kalkalpen und der bayrischen Ebene.

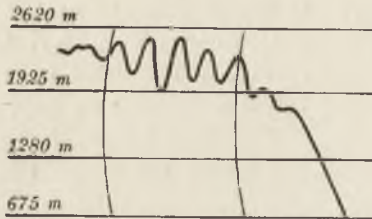
Ist ein Luftballon, von welchem aus solche Beobachtungen am ehesten gemacht werden können, im aerostatischen Gleichgewicht, also frei von Auf- oder Abtrieb, so folgt er den Stromlinien. Die Beobachtung des

1) Met. Zeitschr. 1907, S. 520.

2) Met. Zeitschr. 1901, S. 300.

3) Sitz. Ber. d. Wien. Akad. d. Wiss., Bd. 121 Abt. II a., 1912.

Luftdrucks auf einer solchen Fahrt kann dann vertikale Verlagerungen der Stromlinien anzeigen. Ficker<sup>1)</sup> führt eine Fahrt von A. Wagner an, bei welcher die Stromlinie, welche der Ballon folgte, sich nicht weniger als sechsmal rasch hintereinander in Täler senkte und bei jedem Kamm wieder hob. Die Barographenkurve (Fig. 11) hatte deutliche Wellenform.



Barographenkurve der Fahrt vom  
7. Nov. 1912.

Fig. 11.

Neben diesen einfachen Stromlinien, die sich an eine wellenförmige Bodenkurve anschmiegen, gibt es auch viel kompliziertere Strombilder. Zunächst kann die normale Senkung der Stromlinien über den Tälern ganz oder fast ganz fehlen, vermutlich nur solange, bis die Strömung stationär geworden ist. Das Hinabgreifen derselben in die Täler beansprucht nach Fickers Beobachtungen über den Föhn stets eine gewisse Zeit. Des weiteren kommen bei weniger einfachen Bodenkonfigurationen nicht selten Wirbel um horizontale Achsen vor, die sich vorwiegend in Lee, vielleicht mitunter auch in Luv vom Gebirge

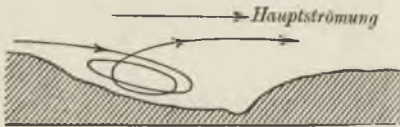


Fig. 12.

bilden. Die ersteren sind als Effekt einer Saugwirkung der oben vom Kamm abströmenden Luft auf die darunterliegende aufzufassen, die letzteren als Stauwirkung der an den Kamm anprallenden Winde. Die Saugwirbel scheinen nach Ficker<sup>2)</sup> eine größere Rolle zu spielen als die Stauwirbel. Ein solcher Saugwirbel im Windschatten eines Talhanges wurde von Ficker auf einer Ballonfahrt in den Alpen beobachtet; die Bahn des Ballons, seine Trajektorie, ist in Fig. 12 abgebildet; sie führte zweimal in einem vertikalen Kreise herum.

Ein Stauwirbel auf der Luvseite eines Kammes müßte den gleichen Rotationssinn haben, wie der Saugwirbel in Lee, so nämlich, daß die Luft in der Höhe in der allgemeinen Bewegungsrichtung strömt, am Berghang aber entgegen. M. Davis<sup>3)</sup> glaubt einmal auch den umgekehrten Stauwirbel, einen „Helmwind“, beobachtet zu haben; hier soll kalte Luft über einen Kamm geflossen sein und sich hierbei nach rückwärts überstürzt haben.

Wir besitzen bisher so wenige Beobachtungen über die Strömungslinien der Luft in einer Vertikalebene, daß wir bei diesen einzelnen Fällen länger verweilt sind. Im letzten derselben konnte die Bewegung der Luft nicht direkt beobachtet werden; Davis schloß auf sie nur aus

1) Met. Zeitschr. 1913, S. 609.

2) Met. Zeitschr. 1913, S. 243.

3) Met. Zeitschr. 1899, S. 124.

dem Vorhandensein einer Wolkenbank, die trotz heftigen Windes einige Stunden lang an derselben Stelle blieb. Diese Wolke ist eine Folge der aufsteigenden Luftbewegung; wir kennen sie auch als „Föhnmauer“, gebildet auf der Luvseite einer Gebirgskette und herübertagend auf die Leeseite, wo sie mitunter durch den aufsteigenden Strom des Saugwirbels unterstützt werden mag. Solche aufsteigende Ströme erzeugen unter günstigen Umständen auch Wolkenfahnen an Bergspitzen, die sich durch große Ruhe im ärgsten Sturm auszeichnen; doch ist die Ruhe nur scheinbar, denn die Wolke bildet sich ununterbrochen neu im aufsteigenden und verdampft wieder im absteigenden Ast der Stromlinie.

**31. Bestimmung zeitlicher Druckänderung und vertikaler Bewegung aus der Kontinuitätsgleichung.** Bei nicht stationärem Zustand bietet die Kontinuitätsgleichung ein Mittel, die zeitliche Veränderung der Dichte aus der Verteilung von Dichte und Geschwindigkeit im Raum zu berechnen. Man könnte daher daran denken, diese Gleichung zur Voraussage der kommenden Zustände zu verwenden. Margules<sup>1)</sup> hat gezeigt, daß dies praktisch nicht leicht möglich ist, da man dazu die räumliche Verteilung der meteorologischen Elemente viel genauer kennen müßte, als sie die Beobachtungen liefern. Die Kontinuitätsgleichung lautet (S. 34):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit  $gdz$  und integrieren über eine Luftsäule von der Höhe  $h$ ; dabei ist  $p_0 - p_h = \int_0^h \rho g dz = p$  das Gewicht der Luftmasse in dieser Säule. Die Integration liefert:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + g \int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dz + g \int_0^h \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dz + g(\rho_h w_h - \rho_0 w_0) = 0.$$

Die Vertikalgeschwindigkeit  $w_0$  am Erdboden ist null. Wir führen folgende Mittelwerte der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $u$

und  $v$  für die Luftsäule  $h$  ein:  $u = \frac{\int_0^h \rho u dz}{\int_0^h \rho dz}$ ,  $v = \frac{\int_0^h \rho v dz}{\int_0^h \rho dz}$ .

Dann wird  $\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + g\rho_h w_h = 0$ .

Erstrecken wir das Integral bis zur Höhe  $h = \infty$ , wo  $p_h = \rho_h = 0$ , so wird auch:  $\frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{\partial(p_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(p_0 v)}{\partial y} = 0$ .

Die Summe der beiden letzten Glieder links bedeutet, wenn  $c$  die totale horizontale Windgeschwindigkeit im Mittel der Säule, also

1) Boltzmann-Festschrift 1904.

$\sqrt{u^2 + v^2}$  ist, die Änderung der Größe  $p_0 c$  von einem Querschnitt einer Stromröhre bis zum nächsten (vgl. S. 66). Ist  $ds$  ein Längenelement derselben und ist die Breite der Stromröhre oder die Distanz zweier horizontaler Stromlinien voneinander  $\delta n$  (variabel mit  $s$ ), so kann gesetzt werden:

$$\frac{\partial(p_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(p_0 v)}{\partial y} = \frac{1}{\delta n} \frac{\partial(p_0 c \delta n)}{\partial s}$$

Man erhält folglich für die zeitliche Druckänderung am Boden:

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = - \frac{1}{\delta n} \frac{\partial(p_0 c \delta n)}{\partial s}$$

Aus dem Strömungsbild der mittleren Geschwindigkeit  $c$  und der Druckverteilung am Boden könnte folglich die zeitliche Veränderung von  $p_0$  entnommen und somit aus einer vorhandenen Zustandsverteilung die kommende erschlossen werden; streng genommen allerdings nur jene, welche sich nach einem unendlich kleinen Zeitintervall  $dt$  einstellt. Bei gleichförmiger Veränderung durch längere Zeit könnte immerhin in der Praxis die Voraussage auch auf ein endliches Zeitintervall ausgedehnt werden.

Margules fragt nach der Genauigkeit, mit der die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung zu jenem Zweck gegeben sein müßte:

a) es sei  $p_0$  und  $\delta n$  längs einer Stromlinie  $s$  konstant; dann sind die Stromlinien einander parallel und sie fallen zugleich mit den Isobaren zusammen. Hier ist  $\frac{\partial p_0}{\partial t} = - p_0 \frac{\partial c}{\partial s}$ . Es soll das Barometer in einer Stunde um 1 mm Hg steigen,  $p_0$  sei 760 mm; wie genau muß, um diese Änderung vorherzubestimmen, die Geschwindigkeitsverteilung längs  $s$  bekannt sein, wenn zwei Beobachtungsstationen um die Strecke  $ds = 10$  km voneinander entfernt sind? Man findet als Differenz der Geschwindigkeit an den beiden Stationen, welche die verlangte Drucksteigerung zu bewirken vermag,  $dc = -0,004$  m/sec =  $-0,013$  km/St. Diese Genauigkeit wird bei Beobachtungen der Windgeschwindigkeit nie erreicht.

b) Es sei  $p_0$  und  $c$  längs  $s$  konstant; die Stromlinien sind Isobaren, aber sie konvergieren oder divergieren. Nun ist  $\frac{\partial p_0}{\partial t} = - \frac{1}{\delta n} p_0 c \frac{\partial(\delta n)}{\partial s}$ . Wie genau muß die Richtung der Stromlinien, also des Windes, gegeben sein, damit daraus eine Druckänderung von 1 mm Hg pro Stunde bestimmt werden kann?

In Fig. 13 ist eine Stromröhre begrenzt von zwei Stromlinien dargestellt, in welcher in der Bewegungsrichtung  $\delta n$  zunimmt, also Divergenz

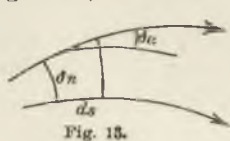


Fig. 13.

herrscht. Es ist  $\frac{\partial(\delta n)}{\partial s} ds = \delta \alpha \cdot ds$ , wo  $\delta \alpha$  der Winkel ist, welchen zwei unmittelbar benachbarte Stromlinien miteinander bilden. Folglich wird  $\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} = - c \frac{\delta \alpha}{\delta n}$ .

Die Richtung des Windes müßte sich auf die Distanz  $\delta n = 1$  km um  $\delta \alpha = -\frac{1}{760} \cdot \frac{10^3}{3600}$  Winkleinheiten oder rund 1 Bogenminute verändern, wenn die Geschwindigkeit  $c = 1$  m/sec angenommen wird. Dies entspricht einem günstigen Fall; bei größerer Geschwindigkeit genügt eine noch geringere Divergenz, um die Druckänderung von 1 mm/St hervorzubringen.

Margules kommt zum Schlusse, daß alle Versuche, die Kontinuitätsgleichung zur Vorausberechnung kommender Massenverteilungen in der Atmosphäre zu verwenden, an der ungenügenden Präzision der Beobachtungen scheitern.

Man kann in ähnlicher Weise die Verwendbarkeit unserer Gleichung für die Aufgabe prüfen, bei stationären Verhältnissen aus dem horizontalen Massentransport den vertikalen zu berechnen (vgl. S. 68).

Aus dem Integrale von S. 71 läßt sich, wenn dieses nur vom Erdboden bis zur Höhe  $h$  erstreckt wird, die in dieser Höhe herrschende vertikale Bewegung  $w_h$  bei stationärem Zustand finden ( $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ ); sie ist:

$$w_h = -\frac{1}{g e_h} \left[ \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} \right] = -\frac{1}{g e_h} \frac{1}{\delta n} \frac{\partial(p c \delta n)}{\partial s}.$$

c) Sind wie früher bei a) die Strömungslinien einander parallel und außerdem zugleich Isobaren, so wird

$$w_h = -\frac{p}{g e_h} \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{p R T_h}{g p_h} \frac{\partial c}{\partial s}.$$

Wie genau muß die Geschwindigkeit längs der Stromröhre bekannt sein, damit man eine vertikale Bewegung von 0,1 m/sec bestimmen kann? Es ist  $p = p_0 - p_h$ . Wählen wir  $p_0 = 760$  mm,  $p_h = 9/10 \cdot p_0 = 684$  mm; dort sei  $T_h = 270^\circ$  ( $h$  ist etwa 860 m). Ist die Distanz  $ds$  zweier Stationen auf einer Stromlinie wie früher 10 km, so wird mit dem bekannten Wert von  $R$  aus obiger Gleichung  $dc = -1,1$  m/sec. Die Aufwärtsbewegung ( $w > 0$ ) äußert sich in einer Abnahme der horizontalen Windgeschwindigkeit. Deren Größe ist jetzt vollständig im Bereich der Meßbarkeit. Auf 100 km Distanz betrage  $dc$  schon  $-11$  m/sec.

d) Ist wie früher bei b) auf den Stromlinien  $p$  und  $c$  konstant, ändert sich aber  $\delta n$ , die Breite der Stromröhren, so wird:

$$w_h = -\frac{p c}{g e_h} \frac{1}{\delta n} \frac{\partial(\delta n)}{\partial s} = -\frac{p R T_h c}{g p_h} \frac{\delta \alpha}{\delta n}.$$

Sei wieder  $c = 1$  m/sec bei im übrigen gleichen Voraussetzungen wie unter c), so wird für  $\delta n = 1$  km nun  $\delta \alpha = -6$  Bogengrade, damit eine vertikale Bewegung von 0,1 m/sec entstehe. Diese Konvergenz der Stromlinien ist wieder groß genug, um beobachtet werden zu können.

Die Kontinuitätsgleichung eignet sich daher sehr wohl zur Berechnung vertikaler Bewegungen aus den horizontalen, nicht aber zur Berechnung zeitlicher Veränderungen aus denselben.<sup>1)</sup>

**32. Niederschlagsbildung bei vertikaler Bewegung.** Pockels<sup>2)</sup> hat versucht, aus den aufsteigenden Bahnen, welche die Luftmassen einschlagen, wenn sie ein Gebirge überströmen, die Menge des ausfallenden Niederschlags zu berechnen. Da derartiges Aufsteigen der Luft in Gebirgsländern die größte Rolle für das Wetter spielt, soll die Rechnung hier in kurzen Zügen angedeutet werden.

Wir nehmen in einer Ebene wirbelfreie Bewegung an, bei der ein Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  existiert<sup>3)</sup>; bei stationärem Zustand wird dann aus der Kontinuitätsgleichung (vgl. S. 66):

$$\rho \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Hier sind  $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  die Komponenten der Geschwindigkeit in horizontaler und vertikaler Richtung. Der Bergrücken streiche in der  $Y$ -Richtung, der Wind wehe senkrecht darauf; dann kann die dritte Koordinate  $y$  aus den Gleichungen wegbleiben. Ferner sei die Dichte in jeder horizontalen Ebene konstant ( $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ ), die Temperatur sei überall dieselbe; man kann jetzt  $\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{RT} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{1}{RT} \rho g = - \rho k$  setzen, wo  $k = \frac{g}{RT}$ . Es wird folglich:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Die hier gemachten Vereinfachungen schränken wohl die Gültigkeit der Rechnung ein, verändern aber doch die Ergebnisse kaum wesentlich.

Pockels wählt als Lösung dieser Differenzialgleichung einen Ausdruck für  $\varphi$ , welcher Strömungslinien von wellenartigem Verlauf liefert. Die unterste Linie stellt zugleich das Bodenprofil der Erde dar. Diese Lösung lautet:

$$\varphi = a(x - be^{-nz} \cos mx),$$

$$u = a(1 + bme^{-nz} \sin mx),$$

$$w = abne^{-nz} \cos mx.$$

1) Vgl. auch I. Craig, Bull. Mount Weather Obs., II, S. 203, wo die aus der Konvergenz der Stromlinien berechnete Vertikalbewegung mit den Niederschlägen verglichen wird.

2) a. a. O. und Annal. d. Phys., 4. Folge, Bd. 4, 1901, S. 459.

3) Vgl. z. B. Jäger, Theor. Physik, Bd. I; Sammlg. Göschen.



Die Gleichung einer Stromlinie ist  $\frac{dz}{dx} = \frac{v}{u}$ ; in erster Annäherung wird das Integral hiervon:  $z = z_0 + \frac{bn}{m} \sin mxe^{-r(z-z_0)} e^{-nz_0}$ , die Kurve des Bodenprofils wird:  $\xi = \frac{bn}{m} \sin mxe^{-r\xi}$ , somit angenähert eine Sinuslinie mit beliebig vielen Tälern und Bergrücken. Hier ist  $m = \frac{2\pi}{L}$  eine Größe, die den periodischen Verlauf des Bodenprofils regelt;  $L$  ist die Wellenlänge, d. i. die Distanz von einer Talmitte zur nächsten. Weiter ist  $n = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + m^2}$ ,  $r = n + \frac{\alpha}{2}$ ,  $\alpha$  eine Konstante. Schließlich bedeutet  $a$  die von der Höhe  $z$  unabhängige Geschwindigkeit des Windes in der Richtung  $x$ , welche ohne Störung durch den Bergrücken oder in der Abszisse  $x = 0$  herrscht; diese Abszisse bezeichnet die Mitte des Hanges zwischen Tal und Bergrücken auf der Luvseite; daselbst ist  $\xi = 0$ .

Die Strömungslinien, welche durch diese Gleichungen angegeben werden, haben große Ähnlichkeit mit den in Fig. 10 (nach Ficker) dargestellten. Insbesondere ist das Anschmiegen der untersten an das Bodenprofil, ferner die Abnahme der Wellenamplitude mit der Höhe hervorzuheben. Infolge dieser Abnahme treten die Stromlinien über dem Bergrücken näher zusammen und entfernen sich über dem Tale voneinander. Dementsprechend hat die horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  ihr Maximum für  $x = \frac{L}{4}$ , also über dem Kamme, ihr Minimum über der Talmitte<sup>1)</sup>. Die vertikale Geschwindigkeit  $w$  hat ihren größten positiven Wert für  $x = 0$ , also in der Mitte des Bergrückens auf der Luvseite, ihren größten negativen daselbst auf der Leeseite.

Diese vertikale Bewegung ist für die Bildung des Niederschlags an Gebirgen maßgebend. Das Maximum desselben haben wir danach etwa in der Mitte des Berghanges zu erwarten.

Pockels hat die Rechnung auch noch allgemeiner für möglichst beliebige Bodenprofile durchgeführt, indem er in dem Ausdruck für  $\varphi$  (S. 74) der Größe  $m$  verschiedene Werte gab und das Geschwindigkeitspotential als Summe einer Reihe von solchen Ausdrücken ansetzte. Er befaßte sich besonders mit einer Lösung, welche für das Bodenprofil die Gestalt eines breiten Talbodens neben einem plateauartigen Rücken liefert. Die Gleichung dieser Profilkurve war:

$$\xi = C \left[ \frac{1}{2} \sin m_1 x + \frac{1}{3} \sin 3 m_1 x + \frac{1}{50} \sin 5 m_1 x \right].$$

Als numerische Werte wurden gewählt:  $L = 60$  km,  $C = 1100$  m. Um nun den Niederschlag zu berechnen, welcher bei stationärem Zu-

1) Die Rechnung liefert eine nach aufwärts abnehmende Amplitude, die strenge erst für  $z = \infty$  null wird; Ficker findet, daß noch in 1000 m Höhe die Wellenform in den Stromlinien bemerklich ist. Die Zeichnung in Fig. 10 ist insofern schematisch (vgl. Pockels, Met. Zeitschr. 1913, S. 216).

stand aus der Luftsäule über einem Quadratmeter in der Zeiteinheit ausfällt ( $W$ ), ist es nötig, die vertikale Bewegung als Funktion der Höhe  $z$  einzuführen. Denken wir uns, es trete infolge des Aufsteigens am Gebirgshang in der Höhe  $z_0$  Sättigung ein. Dann beginnt hier die Kondensation und sie erstreckt sich bis zu einer Höhe  $z'$ , welche durch die obere Wolkengrenze bezeichnet wird.

Ist  $q$  das Mischungsverhältnis (vgl. S. 10), welches durch Ausfallen von Niederschlag bei der Aufwärtsbewegung abnimmt, so ist  $-\frac{\partial q}{\partial z} dz$  die bei der Hebung um  $dz$  aus der Masseneinheit feuchter Luft ausgeschiedene Niederschlagsmenge. Aus der Volumeinheit fällt daher in der Zeiteinheit  $-\rho \frac{\partial q}{\partial z} \frac{dz}{dt} = -\rho \frac{\partial q}{\partial z} w$  aus. Integrieren wir über die Höhe der Luftsäule, in welcher Kondensation vorgeht, so ergibt sich die gesamte in ihr in der Zeiteinheit ausgeschiedene Niederschlagsmenge zu

$W = -\int_{z_0}^{z'} \rho w \frac{\partial q}{\partial z} dz$ . Diese Masse würde ohne horizontale Fortführung als ganzes über dem betrachteten Quadratmeter zu Boden fallen. In Wirklichkeit wird der Niederschlag mehr oder weniger vom Winde getragen werden, was sich in der Rechnung nicht berücksichtigen läßt.

Da  $\frac{\partial q}{\partial z}$  nicht einfach auszudrücken ist, integriert Pockels zunächst

nach Teilen. Es wird:  $W = [\rho w q]_{z_0}^{z'} + \int_{z_0}^{z'} q \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz$ .

Pockels wertet nun das verbleibende Integral aus, indem er die Höhendifferenz  $z' - z_0$  in einige Stufen teilt und für sie Mittelwerte von  $q$  annimmt. Wir verweisen diesbezüglich auf das Original und geben nur die Resultate an, welche aus der Annahme eines breiten Tales neben einem plateauartigen Bergrücken gewonnen wurden. Ist  $x = 0$  in der Mitte des Berghanges auf der Luvseite,  $x = \frac{L}{4}$  am höchsten Punkt des Kammes, so ergibt sich die Niederschlagsmenge  $W$  in mm Regenhöhe pro Stunde in

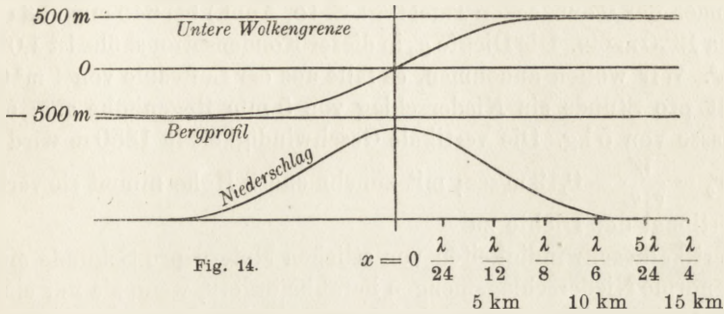
$$x = 0 \pm \frac{L}{24} \pm \frac{L}{12} \pm \frac{L}{8} \pm \frac{L}{6} \pm \frac{L}{4}$$

$$\text{zu: } W = 1,71 \quad 1,47 \quad 0,867 \quad 0,355 \quad 0,029 \quad 0.$$

Hier ist vorausgesetzt, daß die mittlere horizontale Windgeschwindigkeit bloß 1 m/sec beträgt, daß die untere Wolkengrenze in 950 m (Temperatur 11°), die obere in rund 5000 m über der Talsohle liegt, und daß der Bergrücken sich 900 m über die Talebene erhebt. Die Werte  $W$  wachsen proportional der horizontalen Geschwindigkeit, erreichen also z. B. bei 7 m/sec schon 12 mm/St in  $x = 0$ .

Fig. 14 veranschaulicht die angenommene Profilkurve und die gefundene Niederschlagsverteilung.

Liegt die untere Wolkengrenze tiefer als der Kamm des Gebirges, ist dieser also in Wolken gehüllt, so wird ein Teil des Raumes, in welchem



schon Kondensation eintreten könnte, durch die Bergmasse eingenommen. Die kondensierte Niederschlagsmenge ist dann bezüglich der Abszisse  $x$  unsymmetrisch verteilt, auf der Bergseite fällt weniger Niederschlag als auf der Talseite.

In jedem Fall ergibt die Theorie für den Luvabhäng eines Gebirges eine Zone maximalen Niederschlages, was mit den Beobachtungen übereinstimmt<sup>1)</sup>, wenn auch die tatsächliche Verteilung noch von anderen als den hier berücksichtigten Umständen abhängt.

Die Berechnung des Niederschlages, der sich in schräg aufsteigender Luft bildet, war verhältnismäßig verwickelt, da die Abhängigkeit der Vertikalgeschwindigkeit von der Höhe in Betracht kam. Bedeutend einfacher gestaltet sie sich, wenn bloß vertikale Bewegung vorhanden ist. Auch dann kann die obige Gleichung für  $W$  angewendet werden. Im stationären Zustand muß nun in allen Höhen die gleiche Menge Luft den Querschnitt der Säule passieren, es muß also  $\rho w = \rho_0 w_0 = \text{konst.}$  sein.

Der Ausdruck für  $W$  wird dann:

$$W = \rho_0 w_0 (q_0 - q'),$$

wo  $q_0$  das Mischungsverhältnis zu Beginn der Kondensation,  $q'$  dasselbe in der Höhe  $z'$  bedeutet, bis zu welcher wir die Luftsäule betrachten.  $\rho_0, w_0$  sind Dichte und vertikale Geschwindigkeit in der Höhe  $z_0$ .<sup>2)</sup> Die in der Sekunde ausgefallene Niederschlagsmenge  $W$  wird in roher Weise noch einfacher berechnet, wenn man die Höhe  $z'$ , bis zu welcher Kondensation vor sich geht, nicht genau berücksichtigt, sondern  $q'$  gegen  $q_0$  vernachlässigt, also annimmt, daß die ganze ursprünglich in der Luft enthaltene Wassermenge ausfällt; dies ist umso eher gerechtfertigt, je wärmer und feuchter die Luft unten war und je höher sie sich erhebt. Man kann

1) Vgl. Hann, Handbuch der Klimatologie, 3. Aufl., Bd. I, S. 257.

2) Vgl. F. M. Exner, Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss., Abt. IIa, Bd. 112, 1903, S. 345.

dann leicht aus der ausgefallenen Niederschlagsmenge einen ungefähren Schluß auf die Größe der vertikalen Bewegung im unteren Kondensationsniveau ziehen. Ist z. B. eine Luftmasse im Meeresniveau bei 760 mm Druck und 20° C zur Hälfte gesättigt, so ist  $q = 0,007$ . Die Kondensation tritt dann nach der Hertzschens Tafel (vgl. S. 15, Anm.) bei 645 mm und 6,5° C in etwa 1350 m ein. Die Dichte  $\rho_0$  in dieser Kondensationshöhe ist 1,072 kg pro m<sup>3</sup>. Wir wollen annehmen, es falle aus der Luftsäule von 1 m<sup>2</sup> Querschnitt pro Stunde ein Niederschlag von 5 mm Regenhöhe aus; er hat die Masse von 5 kg. Die vertikale Geschwindigkeit in 1350 m wird folglich  $w_0 = \frac{W}{\rho_0 q_0} = 0,19$  m/sec; mit zunehmender Höhe nimmt sie verkehrt proportional der Dichte zu.

Vertikalgeschwindigkeiten von etlichen Metern pro Sekunde müssen ganz enorme Niederschlagsmengen herabbefördern, wenn sie nur einigermaßen hoch reichen. Sie werden demnach selten sein.

**33. Absteigende Luftströme. Föhn.** Wenn die Luft auf der Luvseite der Gebirge aufsteigt und Wasserdampf kondensiert, so kühlt sie sich um Beträge, die meist zwischen 0,4° und 0,8° pro 100 m Erhebung liegen, ab (vgl. S. 53). Auf der Leeseite sinkt die Luft herab und erwärmt sich dabei. Falls die kondensierte Wassermenge als Niederschlag ausgefallen ist, so wird die potentielle Temperatur der Luftmassen gegen früher gewachsen sein (pseudoadiabatischer Prozeß, Abschnitt 10) und die Luft wird nun beim Absteigen um rund 1° pro 100 m erwärmt. Infolgedessen wird die Luftsäule auf der Leeseite wärmer sein als auf der Luvseite, wodurch auch der Luftdruck dort niedriger wird wie hier. Diese zwei Umstände erscheinen regelmäßig bei den sogenannten „Föhnwinden“. Zu ihnen kommt ein dritter, die geringe relative Feuchtigkeit auf der Leeseite.

Alle drei Erscheinungen lassen sich leicht auch rechnerisch verfolgen. Wir betrachten eine Luftströmung über einem Gebirge, bei der die Stromlinien ähnlich verlaufen wie in Fig. 10 (S. 69). Eine Stromlinie erhebe sich zum Gebirgskamme um die Höhe  $h$ , dann senke sie sich auf der anderen Seite um dieselbe Höhe herab. Wir fragen zunächst nach dem Unterschied der Temperaturen in Luv und Lee im gleichen Niveau.

Ist im Tale auf der Luvseite der Druck  $p_0$ , die Temperatur  $T_0$ , ist ferner  $\alpha$  die mittlere Temperaturabnahme auf 1 m Erhebung, welche die feuchte Luft bei Kondensation erfährt, so langt dieselbe in der Höhe  $h$ , am Gebirgskamm, mit der Temperatur  $T_1 = T_0 - \alpha h$ , und

unter dem Druck  $p_1 = p_0 e^{-\frac{g h}{R(T_0 - \frac{\alpha h}{2})}}$  an. Fließt sie nun nach Niederschlag der kondensierten Wassermenge auf der Leeseite wieder um die Höhe  $h$  herab, so kommt sie im anfänglichen Niveau mit der Temperatur  $T_2 = T_0 + \left(\frac{A g}{c_p} - \alpha\right) h$  an, da sie nun adiabatisch erwärmt wurde. Die

Luft ist also nach Übersteigen des Gebirgskammes um  $\left(\frac{\Delta g}{c_p} - \alpha\right) h$  Grade wärmer geworden. Für  $\alpha = 0,005^\circ$ , einen häufigen Mittelwert, macht dies pro Kilometer Kammhöhe  $5^\circ \text{C}$  aus.

Der Luftdruck  $p_2$  wird nach Übersteigen des Berges im unteren

Niveau:  $p_2 = p_1 e^{\frac{R}{c_p} \left( T_0 - \alpha h + \frac{\Delta g}{2c_p} h \right)}$ , also kleiner als  $p_0$ . Angenähert ist:

$p_2 = p_0 e^{-\frac{g h^2}{2 R T_0} \left( \frac{\Delta g}{c_p} - \alpha \right)}$ ; bei einer Kammhöhe von 2,5 km (z. B. in den Alpen), einer Temperatur in der Niederung von etwa  $12^\circ \text{C}$  ( $285^\circ \text{abs.}$ ) und einem Druck auf der Luvseite  $p_0 = 760 \text{ mm Hg}$  wird der Druck im gleichen Niveau auf der Leeseite  $p_2 = 755 \text{ mm}$ , wenn  $\alpha$  denselben Wert hat wie früher.

Auf diese Weise ergibt sich also die hohe Temperatur und der niedrige Druck der Föhnwinde, die in den verschiedensten Gegenden der Erde<sup>1)</sup> an der Leeseite von Gebirgen beobachtet werden.

Ähnlich wie die potentielle Temperatur bleibt in einer abwärts führenden Stromlinie auch das Mischungsverhältnis  $q$  konstant, nachdem es im aufsteigenden Ast derselben bei Niederschlag abgenommen hat. Durch die Erwärmung beim Absteigen wird die Luft bei konstantem  $q$  immer ungesättigter, relativ trockener, wie dies im Abschnitt 11, S. 17 abgeleitet wurde. Es war dort  $f = f_0 \left( \frac{T_0}{T} \right)^{13,69}$ . Am Kamm ist nun  $f_1 = 100\%$ ,  $T_1$  ist nach dem letzten Beispiel  $272,5^\circ$ ; beim Absteigen um 2,5 km nimmt die Temperatur um  $25^\circ \text{C}$  zu, also wird  $T_2 = 297,5^\circ$ ; daraus folgt  $f_2 = 30\%$ .

Die Konstanz der potentiellen Temperatur (und des Mischungsverhältnisses) bei adiabatischen Vorgängen bietet ein Mittel, um den Verlauf der Stromlinien auf der Leeseite eines Gebirgshanges zu verfolgen, indem die Linien gleicher potentieller Temperatur direkt den Stromlinien entsprechen.

Da im stabilen Gleichgewicht die potentielle Temperatur nach aufwärts zunimmt (S. 48), so werden auch die Luftströmungen (s. Fig. 10)

1) Eine der schönsten Föhnstationen scheint Denver in Colorado zu sein; die Stadt liegt in 1570 m Seehöhe am Westrand der großen Steppe, etwa 60 km von dem dort über 4000 m hohen Gebirgskamm der Rocky Mountains entfernt. Hildebrandsson und Teisserenc de Bort haben in den „Bases de la Météorologie dynamique“ (Bd. 2, 1900, S. 79) ein von Loomis gebrachtes Beispiel von gleichzeitigem Druckabfall und Temperaturanstieg in Denver gegeben, — allerdings ohne auf den Föhn hinzuweisen. Die Temperatur stieg bei Nacht von  $-19^\circ \text{C}$  auf  $+6^\circ$ , der Druck fiel dabei um 11 mm. Aus dem Druckabfall ergibt sich eine Zunahme der Mitteltemperatur der etwa 2500 m hohen Luftmasse zwischen Denver und dem Kamm von  $13^\circ$ . Die große Temperatursteigerung in der Stadt ( $25^\circ$ ) ist wohl auf die vorhergegangene winterliche Temperaturinversion zurückzuführen.

im allgemeinen so geschichtet sein, daß dies der Fall ist. Über dem Gebirgskamm wölben sich die Stromlinien und liegen näher übereinander als über dem Tale, ebenso die Linien gleicher potentieller Temperatur. Ficker<sup>1)</sup> hat hiermit die Tatsache erklärt, daß man bei Föhnauftiegen im Ballon fast niemals den Föhngradienten der Temperatur, d. h. die adiabatische Abnahme von  $1^{\circ}$  auf 100 m, findet, sondern geringere Werte. Nur in einer und derselben Stromlinie, z. B. längs eines Berghanges kann dieser Gradient gefunden werden.

Aus dem Verlauf der Strömungslinien in Lee eines Gebirges folgt auch, daß in einer horizontalen, vom Gebirge weg gerichteten Ebene die potentielle Temperatur solange zunehmen muß, bis die Stromlinien wieder horizontal laufen oder ansteigen.

Die „Bora“, der kalte Fallwind an manchen Steilküsten namentlich an der Adria und am schwarzen Meer, erfährt bei ihrem Absteigen von dem dem Meere benachbarten Plateau herab zwar auch die gleiche adiabatische Erwärmung wie der Föhn, sie wirkt aber unten abkühlend, weil die normale Temperatur an der Küste noch höher ist, als die Föhn-temperatur der Fallluft. Ein boramäßiger Wind, der unten kalt erscheint, setzt also voraus, daß normalerweise in einem Niveau über Gebirge und Niederung große Temperaturunterschiede vorhanden sind, welche trotz der föhnartigen Erwärmung der Fallluft noch am Boden zum Ausdruck gelangen.

**34. Temperatur in vertikalen Stromröhren mit veränderlichem Querschnitt.** Wenn ein trockener Luftstrom auf- oder absteigt und dabei seinen Querschnitt ändert, so kann die vertikale Temperaturabnahme sich weit von dem oben besprochenen Föhngradienten entfernen, wie Margules<sup>2)</sup> zeigte. Dies rührt daher, daß in einer vertikalen Luftsäule die unteren Schichten in anderer Weise zusammengedrückt oder ausgedehnt werden als die oberen. Der Vorgang ist dem auf S. 53 ff.

geschilderten ganz analog, wo eine Luftsäule in vertikaler Richtung verschoben wurde. Was dort nur die Abwärts- bzw. Aufwärtsbewegung bei konstantem Querschnitt ausmachte, wird hier günstigen Falles noch durch seitliche Ausbreitung, bzw. Zusammendrückung verstärkt.

Wir denken uns eine vertikale Stromröhre von z. B. nach unten zunehmendem Querschnitt  $Q$  (Fig. 15). Ganz ähnlich wie in Fig. 7 werde die Masse  $\rho Q \delta z$  nach abwärts befördert und dabei auf einen anderen Querschnitt  $Q'$  gebracht. Ebenso wie früher auf S. 53 kommt die Masse aus  $A$  unter den Druck in  $C$ , die Masse aus  $B$  unter den Druck in  $D$ . Die dort benützten Formen

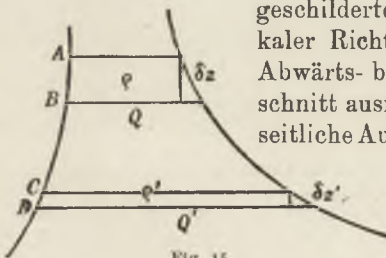


Fig. 15.

1) Sitz. Ber. Wiener Akad., Bd. 121, Abt. IIa, 1912, S. 1225.

2) Met. Zeitsch. 1906, S. 241.

der Poissonschen Gleichung gelten auch hier, nur die Bedingung der Gleichheit der Massen ist nun verändert; es wird  $\frac{\delta z}{\delta z} = \frac{e' Q'}{e Q}$ . Man erhält den Temperaturgradienten in der Luftmasse nach der Verschiebung vom Druck  $p$  und Querschnitt  $Q$  zum Druck  $p'$  und Querschnitt  $Q'$ :

$$\frac{dT'}{dz} = \frac{Q' p'}{Q p} \left( \frac{dT}{dz} + \frac{Ag}{c_p} \right) - \frac{Ag}{c_p}.$$

Wieder bedeutet  $\frac{dT}{dz}$  den Temperaturgradienten in der Luftmasse vor der Verschiebung.

Nun wirken also Abwärtsbewegung und Ausbreitung im gleichen Sinne; sie verändern stets den Gradienten der Temperatur, es sei denn, daß dieser gerade  $-\frac{Ag}{c_p}$  gewesen sei. Normalerweise ist  $\frac{dT}{dz}$  kleiner als dieser Wert, somit wird bei Abwärtsbewegung ( $\frac{p'}{p} > 1$ ) und Ausbreitung ( $\frac{Q'}{Q} > 1$ ) der Temperaturgradient der Luftsäule verringert, er kann verschwinden und sich sogar umkehren; bei Aufwärtsbewegung nähert er sich dem adiabatischen Gradienten  $-\frac{Ag}{c_p}$  und erreicht ihn in sehr großen Höhen ( $p'$  nahe null).

Bleibt eine Luftsäule auf dem Erdboden liegen, so daß sich der Druck an ihrer Basis nicht wesentlich ändert ( $p' = p$ ), und breitet sie sich zugleich z. B. auf den doppelten Querschnitt aus, so wird der Temperaturgradient, der zu Anfang  $-0,5^\circ$  pro 100 m betragen hatte, vollständig verschwinden. Bei Ausbreitung auf den vierfachen Querschnitt wird  $\frac{dT'}{dz} = +1,0^\circ$  pro 100 m, es tritt erhebliche Inversion ein.

Solche Ausbreitungen der Luftmassen an der Erdoberfläche bei Erhaltung ihrer Schichtenfolge scheinen in Gebieten hohen Luftdrucks nicht selten zu sein. Man findet tatsächlich in ihnen sehr häufig die Isothermien und Inversionen, welche die Rechnung lieferte.<sup>1)</sup>

Eine Verbreiterung einer Stromröhre kann natürlich auch bei Aufwärtsbewegung vorkommen; hier wirkt die eine der anderen entgegen. Ebenso heben sich Verengung und Abwärtsbewegung in ihrer Wirkung auf die Temperaturverteilung teilweise auf.

1) A. Wegener hat (Beitr. z. Phys. d. fr. Atm., Bd. 4, S. 55, 1910) eine kürzere Ableitung dieser Temperaturgradienten gegeben, die aber weniger allgemein ist als die von Margules, da die Änderung des Bodendrucks nicht berücksichtigt wird.

## Sechstes Kapitel.

### Allgemeine Dynamik der Luftströmungen.

**35. Prinzip der geometrisch ähnlichen Bewegungen von Helmholtz.** Ehe wir die meteorologischen Einzelercheinungen näher behandeln, sollen zuerst an der Hand der Bewegungsgleichungen aus dem zweiten Kapitel gewisse Eigentümlichkeiten der Luftbewegungen besprochen werden, die unter dem Einfluß der wirksamen Kräfte zustande kommen. Die eigentlichen Bewegungsformen ergeben sich erst durch Integration der Differenzialgleichungen, welche nur selten durchführbar ist. Doch lassen sich, wie von Helmholtz<sup>1)</sup> gezeigt wurde, einige merkwürdige Schlüsse auch aus den Differenzialgleichungen allgemeinsten Art ziehen, und zwar mit Hilfe des Prinzips der geometrisch ähnlichen Bewegungen.

Es seien zwei Flüssigkeiten (worunter auch Gase verstanden werden können) gegeben; für sie gelten die allgemeinen Bewegungsgleichungen von S. 32, welche auch die innere Reibung berücksichtigen, und die Kontinuitätsgleichung von S. 34. Wir fragen nach den Bedingungen, unter denen diese zwei Flüssigkeiten geometrisch ähnliche Bewegungen ausführen können. Es sind das Bewegungen, für welche identische Differenzialgleichungen mit identischen Konstanten gelten.

Wir bezeichnen die Größen der Flüssigkeit I mit kleinen, die der Flüssigkeit II mit großen Buchstaben. Es seien:

	in I	in II
Geschwindigkeitskomponenten	$u, v, w$	$U, V, W$
Druck	$p$	$P$
Dichte	$\rho$	$\rho$
Koordinaten	$x, y, z$	$X, Y, Z$
Zeit	$t$	$T$
Reibungskonstante <sup>2)</sup>	$\mu$	$M$

1) Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. d. Wiss., 1873, S. 501.

2) Konstante der inneren Reibung, wie sie in den Gleichungen S. 106 auftritt.



Ferner werden folgende Verhältniszahlen eingeführt, die teilweise durch die physische Beschaffenheit der Flüssigkeiten, teilweise durch die herrschenden Bewegungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} M &= q \cdot \mu & T &= \tau \cdot t & U &= n \cdot u & X &= \xi \cdot x \\ P &= r \cdot \rho & P &= \pi \cdot p & V &= n \cdot v & Y &= \xi \cdot y \\ & & & & W &= n \cdot w & Z &= \xi \cdot z. \end{aligned}$$

Die Verhältniszahl  $n$  ist natürlich gemeinsam für alle Geschwindigkeitskomponenten, wie die Zahl  $\xi$  für alle Koordinaten.

Von den Bewegungsgleichungen für die drei Koordinaten (S. 32) wollen wir hier nur eine anschreiben; außerdem setzen wir die Kontinuitätsgleichung hierher:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_x \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

$A_x$  ist die  $X$ -Komponente der äußeren Kräfte; wir lassen sie hier zunächst weg. Damit zwei Flüssigkeiten geometrisch ähnliche Bewegungen ausführen, muß das System dieser Gleichungen auch für die Flüssigkeit II gelten. Es muß also auch sein:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dT} &= \frac{M}{P} \nabla^2 U - \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial X}, \\ \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\partial(PU)}{\partial X} + \frac{\partial(PV)}{\partial Y} + \frac{\partial(PW)}{\partial Z} &= 0. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der obigen Verhältniszahlen folgen aus den vier Gleichungen die Bedingungen der geometrischen Ähnlichkeit:

$$\tau = \frac{q}{rn^2}, \quad \xi = \frac{q}{rn}, \quad \pi = rn^2.$$

Sind  $q$  und  $r$  durch die Eigenschaften der Flüssigkeiten gegeben, so folgt  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\pi$ , sobald wir  $n$  festgelegt haben. Diese Größe ist aber, wenn es sich um kompressible Flüssigkeiten handelt, nicht willkürlich. Als allgemeine Zustandsgleichung solcher benützt Helmholtz annäherungsweise und bei konstanter Temperatur den Ausdruck:  $p + c = a^2 \rho$ . Hier ist  $c$  der innere Druck, der eine endliche Dichte der Substanz auch beim äußeren Druck  $p = 0$  bestehen läßt,  $a$  die Schallgeschwindigkeit bei konstanter Temperatur.<sup>1)</sup> Je größer  $c$ , desto weniger kompressibel ist die Flüssigkeit, je kleiner, desto ähnlicher ist sie dem idealen Gas ( $c = 0$ ). Für die Flüssigkeit II ist zu setzen:  $P + C = A^2 P$ .

Wir wollen unsere zwei Gleichungen auf eine und dieselbe Flüssigkeit anwenden, und zwar auf Luft, und wollen demnach fragen: Gibt es

1) Siehe z. B. Christiansen, Theoretische Physik.

in der Luft einander geometrisch ähnliche Bewegungen? In diesem Falle ist  $q = 1$   $r = 1$  zu setzen (bei gleicher Temperatur), und es wird:  $\tau = \frac{1}{n^2}$ ,

$\xi = \frac{1}{n}$ ,  $\pi = n^2$ . Aus den zwei Zustandsgleichungen aber ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pi p + C &= A^2 r \rho, & p + c &= a^2 \rho; \text{ folglich:} \\ C &= n^2 c, & A^2 &= n^2 a^2. \end{aligned}$$

Sind die Flüssigkeiten I und II identisch, so müssen auch die Konstanten der Zustandsgleichungen einander gleich sein, also  $C = c$ ,  $A = a$ . Dies ist nur dann möglich, wenn  $n = 1$ .

In Luft können demnach bei gleicher Temperatur niemals zwei verschiedene jedoch geometrisch ähnliche Bewegungen vorkommen. Sind sie ähnlich, so folgt mit Notwendigkeit auch ihre Identität ( $n = 1$ ).

Ist für zwei verschiedene Flüssigkeiten mit gleichem  $q$  und  $r$   $n > 1$ , so ist  $C > c$  und  $A > a$ . Es gibt also geometrisch ähnliche Bewegungen, wenn die Flüssigkeit I, die sich mit kleinerer Geschwindigkeit ( $u = \frac{U}{n}$ ) in größeren Räumen ( $x = Xn$ ) bewegt, eine größere Kompressibilität hat, als die Flüssigkeit II ( $c = \frac{C}{n^2}$ ).

Daraus folgt, daß Luft sich in größeren Räumen bei verminderter Geschwindigkeit ähnlicher wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält, als in kleineren Räumen. In je größeren Dimensionen sich daher Luftbewegungen abspielen, desto mehr werden sie sich den Bewegungen inkompressibler Flüssigkeiten nähern. Dies ist für die Vorstellung von den Luftströmungen auf der Erdoberfläche von der größten Bedeutung. Verschieden temperierte Luftmassen werden sich ähnlich wie tropfbare Flüssigkeiten von verschiedener Dichte benehmen, kalte neben warmen Luftmassen nicht unähnlich wie Wasser neben Öl. Das Fließen der Luft über die Erdoberfläche wird in größeren Räumen viel mehr nach der Art von Wasser erfolgen, als wir dies in kleineren Dimensionen, z. B. bei der Verbreitung von Rauch, zu sehen gewohnt sind.

Diese Betrachtung betrifft hauptsächlich solche Luftströmungen, bei welchen keine äußeren Kräfte wirken, also horizontale. Wenn wir in der dritten Bewegungsgleichung die Schwerkraft berücksichtigen, die auf alle Flüssigkeiten auf der Erde in gleicher Stärke wirkt, so müssen wir in Analogie zum früheren für die beiden Flüssigkeiten schreiben:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dT} = \frac{M}{P} \nabla^2 W - \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial Z} - g.$$

Damit diese Gleichungen zugleich mit der Kontinuitätsgleichung bestehen, muß sein:  $\tau = n$ ,  $\xi = n^2$ ,  $q = rn^3$ ,  $\pi = rn^2$ .

Die Größe  $n$  ist hier durch das Verhältnis der Reibungskonstanten  $q$  und der Dichten  $r$  schon festgelegt. Es sind daher wieder in einer einzigen Flüssigkeit ( $q = 1$ ) bei gleicher Dichte ( $r = 1$ ) nicht zwei ver-

schiedene und geometrisch ähnliche Bewegungen möglich. Hingegen läßt sich folgendes sagen: Die Flüssigkeit II habe gleiche Dichte ( $r = 1$ ) wie die Flüssigkeit I, aber größere Reibungskonstante ( $q > 1$ ). Bei ähnlichen Bewegungen wird dann  $n = \sqrt[3]{q} > 1$  und  $\xi = \sqrt[3]{q^2} > 1$ . Die zweite Flüssigkeit muß also, um in größeren Räumen und bei größeren Geschwindigkeiten mit der ersten ähnliche Bewegungen auszuführen, größere Reibung haben.

Somit verhält sich Luft in größeren Räumen ähnlich wie ein Gas mit geringerer Reibungskonstante. Das heißt also: Die Bedeutung der inneren Reibung für die Bewegung der Luft nimmt umso mehr ab, in je größeren Dimensionen und je rascher die Bewegungen geschehen. Diese Tatsache ist für die theoretische Behandlung der Luftbewegungen auf der Erde sehr günstig, da sie erlaubt, die innere Reibung der Luft um so eher zu vernachlässigen, je größere Luftgebiete betrachtet werden.

**36. Horizontale Strömung im stationären Zustand ohne Reibung.** Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Luft, welche keine Reibungsglieder enthalten (Abschnitt 17, S. 33), sollen hier zunächst für horizontale Bewegungen verwertet werden. Ist die vertikale Geschwindigkeit  $\dot{r} = 0$ , so wird:

$$\begin{aligned} r\ddot{\varphi} + r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - 2\omega) &= -\frac{1}{qr} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ r \cos \varphi \ddot{\lambda} - 2r \sin \varphi \dot{\varphi}(\dot{\lambda} - \omega) &= -\frac{1}{qr \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Auf kleinen Gebieten der Erdoberfläche können wir  $\sin \varphi$  als konstant betrachten und die meridionale Geschwindigkeit  $r\dot{\varphi}$  durch  $\frac{dy}{dt} = v$ , die Beschleunigung  $r\ddot{\varphi}$  durch  $\frac{dv}{dt}$ , ferner die ostwestliche Geschwindigkeit  $r \cos \varphi \dot{\lambda}$  durch  $\frac{dx}{dt} = u$ , die Beschleunigung  $r \cos \varphi \ddot{\lambda}$  durch  $\frac{du}{dt}$  ersetzt denken. Da  $\dot{\lambda}$  bei Luftbewegungen gegen  $\omega$  fast immer klein ist, so darf es in erster Näherung gegen letzteren Wert, bzw. gegen  $2\omega$  vernachlässigt werden. Es wird folglich:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\omega \sin \varphi v &= -\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} - 2\omega \sin \varphi u &= -\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Das hier verwendete rechtwinklige Koordinatensystem liegt im Horizont eines Punktes der Erdoberfläche. Wir wollen in Zukunft bei Benützung desselben die Abszisse  $x$  nach einer beliebigen Richtung des Kompasses, die Ordinate  $y$  um  $90^\circ$  von ihr im Sinne des Uhrzeigers gedreht als positiv zählen. Es ist dann beim Übergang von Polar- zu rechtwinkligen Koordinaten keine Vorzeichenänderung in den Gleichungen nötig.

Im einfachsten Falle strömt die Luft in geraden Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit  $c = \sqrt{u^2 + v^2}$ . Dann ist  $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ , und es gilt für geradlinige stationäre Bewegung:

$$2\omega \sin \varphi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 2\omega \sin \varphi u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Der totale Druckgradient sei  $\frac{\partial p}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}$ , wo  $n$  senkrecht zu den Isobaren steht; es ist mithin auch  $2\omega \sin \varphi c = \pm \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$ .

Der stationäre Zustand verlangt also Gleichheit der ablenkenden Kraft der Erdrotation mit dem Druckgradienten pro Masseneinheit. Die beiden Kräfte müssen numerisch gleich, aber entgegengesetzt gerichtet

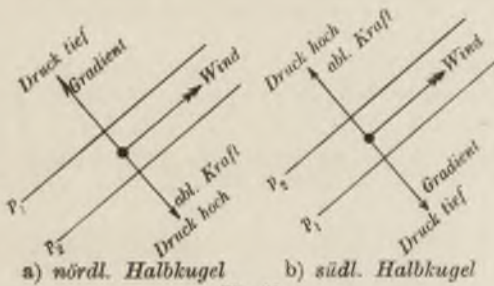


Fig. 16.

sein. Hiernach ergibt sich auf der nördlichen ( $\varphi > 0$ ) und südlichen Halbkugel ( $\varphi < 0$ ) das folgende Schema (Fig. 16) für die Lage der geradlinigen Isobaren, des Gradienten, der Luftbewegung und der ablenkenden Kraft der Erdrotation im stationären Zustand.

Die Figuren können dabei nach beliebigen Himmelsrichtungen orientiert sein.

Die Geraden  $p_1, p_2$  sind Linien, welche Orte mit gleichem Luftdruck verbinden, „Isobaren“. Der Wind weht senkrecht zum Gradienten, parallel zu denselben, u. zw. auf der nördlichen Halbkugel um  $90^\circ$  nach rechts, auf der südlichen um  $90^\circ$  nach links vom Gradienten. Dies ergibt sich unmittelbar, wenn man in einer der beiden obigen Gleichungen, z. B. in der ersten, die Komponente  $v$  als totale Geschwindigkeit, den Gradienten  $\frac{\partial p}{\partial x}$  als totalen Gradienten betrachtet und die obige Festsetzung über die Koordinatenachsen berücksichtigt.

Als Gradientenrichtung wird dabei stets die Richtung zum niedrigen Druck, die Richtung von  $-\frac{\partial p}{\partial n}$ , bezeichnet.

Die Tatsache, daß ein Beobachter, dem der Wind in den Rücken bläst, auf der nördlichen Halbkugel den tiefen Luftdruck links, auf der südlichen rechts hat, wird auch als „barisches Windgesetz“ oder Gesetz von Buys-Ballot bezeichnet. Es ist freilich nur die ungefähre Richtung des tiefen Druckes regelmäßig vorhanden, der Winkel zwischen Wind und Gradient unterliegt Schwankungen.

Ist die Bewegung einer Luftmasse nicht mehr geradlinig, so verändern sich ihre Geschwindigkeitskomponenten  $u, v$  mit der Zeit. Man kann aber aus den möglichen Bewegungen den Fall herauslösen, wo

die totale Geschwindigkeit  $c$  konstant bleibt und nur die Richtung derselben sich ändert. Dieser einfache Fall liefert

$$u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} = 0 = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v \right).$$

Für die Gleichung rechts kann man auch  $\frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{dn}{dt} = 0$  schreiben, wo  $\frac{\partial p}{\partial n}$  der totale Gradient,  $\frac{dn}{dt}$  die Geschwindigkeit in der Richtung des Gradienten ist. Da nun stets  $\frac{dn}{dt} = 0$ , so liegt bei gekrümmten Isobaren die konstante Geschwindigkeit  $c$  parallel zu denselben.

Bei gekrümmten Isobaren empfiehlt es sich, Polarkoordinaten einzuführen. Es bezeichne  $r$  den Abstand eines Punktes  $x, y$  vom Koordinatenanfangspunkt,  $\vartheta$  den Winkel, welchen  $r$  mit der positiven  $x$ -Achse einschließt. Dann kann man setzen:  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ ,

$$u = \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta}, \quad v = \dot{r} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \dot{\vartheta}.$$

Da noch

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\cos \vartheta}{r},$$

so werden die Bewegungsgleichungen von S. 85 nun:

$$\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 + 2\omega \sin \varphi r \dot{\vartheta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$r \ddot{\vartheta} + 2\dot{r} \dot{\vartheta} - 2\omega \sin \varphi \dot{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta}.$$

Die Kontinuitätsgleichung aber von S. 34 läßt sich schreiben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{r}{r} + \frac{\partial(\rho \dot{r})}{\partial r} + \frac{\partial(\rho \dot{\vartheta})}{\partial \vartheta} + \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial z} = 0.$$

Um die Verteilung der Kräfte und Geschwindigkeiten bei gekrümmten Isobaren an einem Beispiele zu zeigen, machen wir die Annahme, die Druckverteilung sei unabhängig von  $\vartheta$ ; dann sind die Isobaren Kreise, welche um den Mittelpunkt des Koordinatensystems liegen,  $\frac{\partial p}{\partial r}$  ist der totale Gradient. Ist die Größe der Geschwindigkeit  $c = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2}$  konstant, so ist nach dem obigen die Geschwindigkeit stets den Isobaren parallel, es ist also  $\dot{r} = 0$ , es besteht nur eine Rotationsbewegung der Luft um den Koordinatenanfangspunkt. In diesem Falle liefern die Gleichungen:

$$\ddot{\vartheta} = 0, \quad r \dot{\vartheta}^2 - 2\omega \sin \varphi r \dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Die Bewegung verläuft ohne Beschleunigung, stationär. Dem Gradienten wird nun von zwei Kräften das Gleichgewicht gehalten, von der Zentrifugalkraft und der ablenkenden Kraft der Erdrotation. Erstere wirkt stets vom Krümmungsmittelpunkt weg, also senkrecht auf die

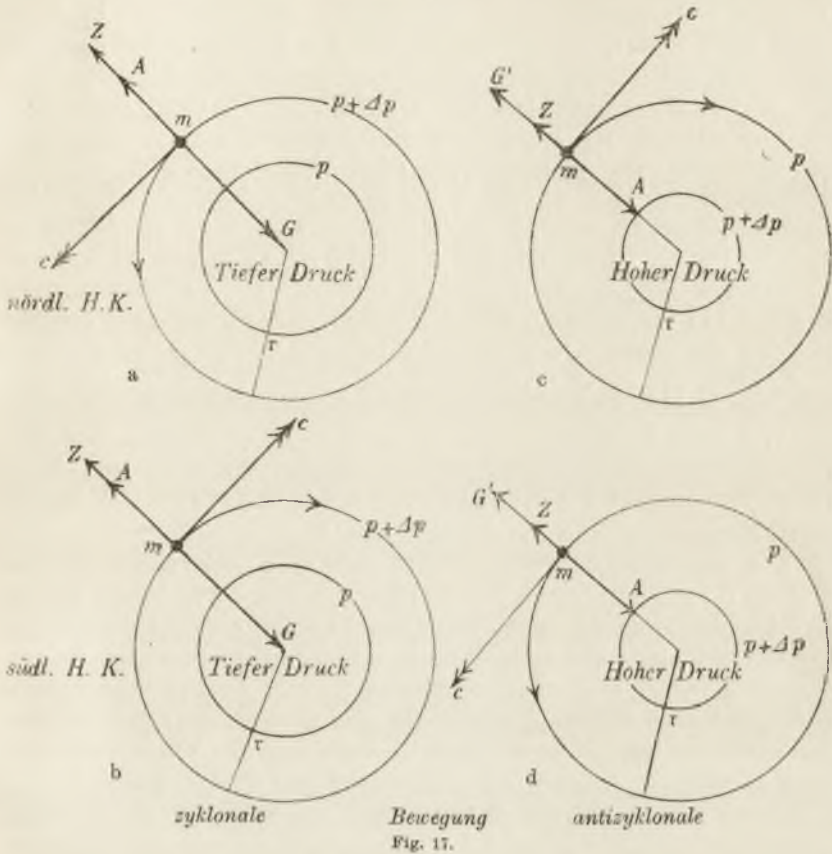
Isobaren nach außen; die Richtung der letzteren hängt vom Rotationsinn des  $\vartheta$  ab. Bei positivem  $\varphi$  (nördl. Halbkugel) und positivem Drehungssinn der Luft (Kreisen in der Richtung des Uhrzeigers) kommt die ablenkende Kraft der Erdrotation  $2\omega \sin \varphi r \vartheta$  von der Zentrifugalkraft  $r\vartheta^2$  in Abzug, bei negativem Drehungssinn (gegen den Uhrzeiger) summieren sich beide. Da im allgemeinen die Ablenkungskraft größer ist als die Zentrifugalkraft, so muß ihre Richtung der Gradientkraft entgegengesetzt sein, damit Gleichgewicht herrsche. Man hat daher ebenso wie bei geradliniger Bewegung den tiefen Druck auf der nördlichen Erdhälfte links, auf der südlichen rechts von der Bewegung zu suchen.

Jene Bewegung  $r\vartheta$ , welche bei Vorhandensein eines gewissen Gradienten  $\frac{\partial p}{\partial r}$  stationär bleibt, muß mithin beim Kreisen gegen den Uhrzeiger schwächer sein, als beim Kreisen mit demselben; oder auch: die gleiche Geschwindigkeit  $r\vartheta$  in einer kreisförmigen Bahn verlangt, um sich zeitlich nicht zu verändern (stationär zu sein) bei einer Richtung gegen den Uhrzeiger den größeren Druckgradienten als bei einer mit dem Uhrzeiger. Dies gilt für die nördliche Halbkugel; auf der südlichen ist die Regel umgekehrt.

Die folgenden Figuren geben ein Schema für das Gleichgewicht des Gradienten mit der Zentrifugalkraft und der ablenkenden Kraft bei kreisförmigen Isobaren, wobei auch die Geschwindigkeit gezeichnet ist, durch welche diese Kräfte ausgelöst werden. Da für kreisförmige Isobaren 2 Annahmen möglich sind, die nämlich, daß der Druck im Mittelpunkt tief, und die, daß er daselbst hoch ist, so ergeben sich für beide Halbkugeln im ganzen 4 mögliche Bewegungen. Man bezeichnet solche mit tiefem Druck im Innern als zyklonale, solche mit hohem Druck im Innern als antizyklonale, weil erstere den Erscheinungen der Zyklonen, letztere jenen der Antizyklonen entsprechen.

In Fig. 17 sind die 4 Verteilungen gezeichnet, wobei die Geschwindigkeit  $c$  des Luftteilchens überall gleich groß angenommen wurde. Infolgedessen ist bei gegebener geographischer Breite auch die ablenkende Kraft  $A$  überall dieselbe. Bei gleicher Distanz vom Krümmungsmittelpunkt ist aber auch die Zentrifugalkraft  $Z$  in allen 4 Fällen von gleicher Größe. Hiernach ist der Gradient bei zyklonaler und antizyklonaler Verteilung leicht zu konstruieren, wie dies in Fig. 17 geschah. Er fällt bei zyklonaler Rotation (Fig. 17, a, b) nach einwärts und ist größer ( $G$ ), als bei antizyklonaler (Fig. 17, c, d), wo er auswärts zeigt ( $G'$ ). Dies ist auch durch die Distanz der beiden kreisförmigen Isobaren angedeutet, deren Druckwerte sich in beiden Fällen um den gleichen Betrag  $\Delta p$  unterscheiden. Im ersten Fall, bei negativer Rotationsbewegung auf der nördlichen Halbkugel, haben wir ein sogenanntes „Tiefdruckgebiet“ im zweiten, bei positiver daselbst, ein „Hochdruckgebiet“.

Die ablenkende Kraft der Erdrotation (Pfeil *A*) ist in der Figur größer gezeichnet als die Zentrifugalkraft (Pfeil *Z*), weil erstere tat-



sächlich meist größer ist. Mittelist der Ausdrücke für diese Kräfte ( $A = 2\omega \sin \varphi r \dot{\theta}$ ,  $Z = r \dot{\theta}^2$  oder, nach Einführung der Geschwindigkeit  $c$ ,  $A = 2\omega \sin \varphi c$ ,  $Z = \frac{c^2}{r}$ ) erhält man beispielsweise folgende Werte von *A* und *Z* bei der Geschwindigkeit *c*, dem Krümmungsradius *r* und der Breite  $\varphi$ :

<i>c</i> in m/sec	<i>A</i> in cm/sec <sup>2</sup>					<i>Z</i> in cm/sec <sup>2</sup>			
	$\varphi = 10^\circ$	20°	40°	60°	80°	<i>r</i> = 100 km	500	1000	2000
5	0,013	0,025	0,047	0,063	0,071	0,025	0,005	0,003	0,001
10	0,025	0,050	0,093	0,126	0,143	0,100	0,020	0,010	0,005
20	0,051	0,100	0,187	0,252	0,286	0,400	0,080	0,040	0,020
30	0,076	0,149	0,280	0,378	0,430	0,900	0,180	0,090	0,045
40	0,101	0,199	0,374	0,504	0,573	1,600	0,320	0,160	0,080

Aus der Bedingungsgleichung für stationären Zustand ist es auch leicht, sich ein Urteil über die Größe des Druckgradienten  $G$  zu bilden, welcher bei gegebener Windstärke vorkommt; so ist z. B. bei Bewegung der Luft mit der Geschwindigkeit  $c = 10$  m/sec längs einer Isobare, deren Krümmungsradius 500 km beträgt, die Zentrifugalkraft  $Z = 0,020$ , die ablenkende Kraft in  $40^\circ$  Breite  $A = 0,093$  cm/sec<sup>2</sup>.

Für zyklonale Bewegung gibt dies im stationären Zustand einen Gradienten pro Masseneinheit  $G = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0,113$  cm/sec<sup>2</sup>, für antizyklonale Bewegung  $G' = 0,073$  cm/sec<sup>2</sup>. Nehmen wir für  $\rho$  die Dichte der Luft bei 760 mm Hg und  $0^\circ$  C an, also  $1,293$  kg/m<sup>3</sup>, so wird im kg-m-sec-System das Druckgefälle  $\Delta p$  auf die Distanz  $\Delta r$  eines Meridiangrades, d. i. von 111 km, (jene Distanz, auf welche der Druckgradient gewöhnlich bei meteorologischen Aufgaben bezogen wird):  $\Delta p = G \rho \Delta r = \frac{G \cdot 1,293}{100} \cdot 111 \cdot 10^3$ ; hier sind für  $G$  die obigen Zahlen einzusetzen.

Will man den Druck in mm Hg ausdrücken, so hat man diese Zahl durch 133 zu dividieren (vgl. S. 8) und erhält somit als Druckgradient für 1 Meridiangrad bei zyklonaler Bewegung  $\Delta p = 1,22$  mm Hg, bei antizyklonaler Bewegung  $\Delta p = 0,79$  mm.<sup>1)</sup>

Die meteorologischen Beobachtungen haben die Ergebnisse der Theorie im allgemeinen bestätigt. Einerseits zeigten dieselben, daß der Druckgradient von 1 mm pro Meridiangrad schon ein relativ großer ist, der mit nicht unbedeutenden Winden einhergeht; andererseits, daß auf den synoptischen Wetterkarten ganz regelmäßig die zyklonalen Bewegungen mit stärkeren Gradienten verbunden sind, als die antizyklonalen. Ein genauerer Vergleich zwischen Beobachtung und Theorie erfordert noch die Berücksichtigung der Luftreibung und erfolgt später.

Durch den Umstand, daß bei antizyklonaler Bewegung die ablenkende Kraft der Erdrotation und die Zentrifugalkraft einander entgegenwirken, wird es möglich, daß antizyklonale Winde ohne oder mit ver-

1) Die praktische Bestimmung des Gradienten erfolgt am besten graphisch. Man braucht dazu nur die Druckangaben von 3 Orten, die nicht in einer Geraden liegen. Unter der Annahme, daß innerhalb des von ihnen gebildeten Dreiecks der Gradient konstant ist, verfährt man dann folgendermaßen (vgl. H. Wolff, Met. Zeitsch. 1910, S. 79): Sei  $A$  der Ort mit dem höchsten Druck  $a$ ;  $B, C$  die zwei anderen mit den Drucken  $b, c$ . Man trägt in beliebigem Maß die Komponente des Gradienten in der Richtung  $AB$  auf dieser Strecke von  $A$  aus gegen  $B$  hin auf; sie ist  $\frac{a-b}{AB}$ ; ebenso trägt man von  $A$  aus die zweite Komponente  $\frac{a-c}{AC}$  in der Richtung gegen  $C$  auf. Hierdurch gelangt man zu den Punkten  $B'$  und  $C'$ . In  $B'$ , bzw.  $C'$  errichtet man Senkrechte zu  $AB$ , bzw.  $AC$ , die sich in  $D$  schneiden. Die Strecke  $AD$  gibt dann Größe und Richtung des totalen Gradienten an; denn  $AB'$  ist seine Komponente in der Richtung  $AB$ ,  $AC'$  in der Richtung  $AC$ .



kehrtem Druckgradienten stationär vorkommen. Ein Blick auf die Gleichung auf S. 87 lehrt, daß der Gradient verschwindet, wenn ablenkende Kraft und Zentrifugalkraft einander gleich werden. Überwiegt die letztere, so kehrt sich das Gefälle um, die Luft bewegt sich auf der nördlichen Halbkugel um den tiefen Druck in der Richtung des Uhrzeigers herum. Beides geschieht am leichtesten in niedrigen Breiten und bei kleinem  $r$  (s. Tabelle S. 89). Ob die Erscheinungen wirklich vorkommen, ist bisher nicht bekannt; da man meist erst aus Barometerbeobachtungen auf den Zusammenhang der Luftströmungen verschiedener Stationen aufmerksam wird, so wäre es nicht zu verwundern, wenn man die besprochenen Erscheinungen übersehen hätte.

Am Äquator, wo die ablenkende Kraft fehlt, ist im stationären Zustand der Druck stets auf der konkaven Seite der Isobaren niedrig, ob die Bewegung mit oder gegen den Uhrzeiger erfolgt. Dort gibt es demnach keine stationären Hochdruckgebiete über kleineren Teilen der Erdoberfläche, weil keine Kraft da ist, die dem auswärts gerichteten Druckgradienten entgegenwirken und das Gleichgewicht halten könnte. Das abgeschlossene Hochdruckgebiet muß als eine Eigentümlichkeit der höheren Breiten aufgefaßt werden, was die Erfahrung ja auch bestätigt.

Die einfachen Verhältnisse, die in diesem Abschnitt geschildert sind, werden durch Reibung verwickelter; deren Einfluß wird später behandelt.

**37. Integrale der Bewegungsgleichungen für horizontale Luftströmungen ohne Reibung.** Die Gleichungen auf S. 85 stellen sehr bequeme und einfache Formeln vor, mit welchen die Luftbewegung in horizontalen Ebenen auf beschränkten Gebieten der Erdoberfläche ( $\varphi$  konstant) unter Vernachlässigung der Luftreibung behandelt werden kann. Sie sind hier nochmals angeschrieben:

$$\frac{du}{dt} + 2\omega \sin \varphi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} - 2\omega \sin \varphi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Nach Bedarf können sie mit den in Polarkoordinaten ausgedrückten Formeln von S. 87 vertauscht werden. Wir haben schon früher (S. 26) ähnliche Gleichungen gefunden; sie bezogen sich auf die Bewegung eines festen Massenpunktes an der Erdoberfläche. Die neuen unterscheiden sich von jenen nur durch die Komponenten des Luftdruckgradienten auf der rechten Seite. Um auch diese Formeln, wie die früheren, integrieren zu können, wollen wir zunächst annehmen, daß durch die Luftbewegung die Druckverteilung nicht geändert wird, die Gradienten also zeitlich konstant sind.

Einmalige Integration liefert die Geschwindigkeit, welche das Luftteilchen unter der Wirkung der Gradientenkraft annimmt. Wird die erste der beiden Gleichungen mit  $u$ , die zweite mit  $v$  multipliziert und die

totale horizontale Geschwindigkeit  $\sqrt{u^2 + v^2} = c$  genannt, so ergibt sich durch Summation der beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{2} \frac{dc^2}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right).$$

Ist  $dp$  die Änderung des Druckes auf der horizontalen Strecke, auf welcher das Luftteilchen sich mit der Geschwindigkeit  $c$  bewegt, so wird  $\frac{1}{2} dc^2 = -\frac{dp}{\rho}$ . Die Dichte  $\rho$  der bewegten Masse ist bei der Bewegung variabel. Man kann über diese Variabilität nach Margules<sup>1)</sup> zwei einfache Annahmen machen: a) die, daß sich das Teilchen adiabatisch, b) die, daß es sich isotherm bewege. Die erste wird bei raschen Bewegungen, die zweite eher bei langsamen zutreffen. Demgemäß hat

man im ersten Fall  $T = T_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{AR}{c_p}}$ , im zweiten  $T = T_0$  zu setzen, wenn  $T_0, p_0$  die Anfangswerte von Temperatur und Druck sind. Demnach ist die Dichte im Falle a):  $\rho = \frac{p^{1 - \frac{AR}{c_p}}}{R T_0} p_0^{\frac{AR}{c_p}}$ , im Falle b):  $\rho = \frac{p}{R T_0}$ . Integrieren wir hiermit die Differenzialgleichung  $\frac{1}{2} dc^2 = -\frac{dp}{\rho}$ , so ergibt sich

a) bei adiabatischer Bewegung:

$$\frac{c^2 - c_0^2}{2} = \frac{c_p}{A} T_0 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{AR}{c_p}} \right] = \frac{c_p}{A} (T_0 - T),$$

b) bei isothermer Bewegung:  $\frac{c^2 - c_0^2}{2} = R T_0 \lg \frac{p_0}{p}$ .

Wenn die Druckänderung  $p_0 - p$ , welche das Luftteilchen durchmacht, nicht zu groß ist, so lassen sich beide Gleichungen vereinfachen. Setzt man  $\frac{p_0 - p}{p_0} = \varepsilon$ , so wird in beiden Fällen in erster Annäherung:

$$c^2 = c_0^2 + 2 R T_0 \varepsilon = c_0^2 + 2 \frac{p_0 - p}{\rho_0}$$

Wir wollen annehmen, das Luftteilchen sei anfangs in Ruhe gewesen ( $c_0 = 0$ ); dann ist  $c$  die Geschwindigkeit, welche dasselbe erlangt, wenn es sich unter der Wirkung des Druckgradienten von der Isobare  $p_0$  bis zur Isobare  $p$  bewegt ( $p_0 > p$ ). Ist  $T_0 = 273^\circ$  und  $p_0 = 760$  mm Hg, so ergeben sich nach Margules die folgenden Geschwindigkeiten  $c$  bei gewissen Druckänderungen  $p_0 - p$ :

für $p_0 - p =$	1	2	5	10	20	30	mm Hg
$c =$	14,4	20,3	32,1	45,4	64,2	78,6	m/sec.

Diese Größen sind wichtig; denn sie lassen beurteilen, wie stark die Luftbewegungen sind, welche aus Druckgradienten entspringen. Sie

1) Denkschr. d. Wiener Akad. d. Wiss., Bd. 73, 1901, S. 338.

zeigen, wie Margules betont, zugleich auch an, wie weit sich eine Luftmasse kraft der Geschwindigkeit, die sie besitzt, gegen den Gradienten bewegen kann, um schließlich dieselbe einzubüßen. Ist ihre Geschwindigkeit z. B. 20 m/sec, so kann sie mit dieser von der Isobare 760 mm auf die Isobare 762 gelangen, ehe die Geschwindigkeit aufgezehrt ist. Wie weit diese Isobaren voneinander entfernt sind, ist, so lange wir von der Reibung absehen, gleichgültig.

Hann hat in seinem Lehrbuch diese durch Gradienten erzeugten Geschwindigkeiten in anderer Weise berechnet<sup>1)</sup>. Nimmt man nämlich die dritte Dimension zu Hilfe, so kann man die Neigung der Flächen gleichen Druckes gegen den Horizont als Ausdruck des Gradienten verwenden. Ist  $x$  der Abstand der Punkte mit den Drucken  $p_0$  und  $p$  voneinander,  $h$  die Höhe, in welcher die Fläche  $p$  über der Fläche  $p_0$  verläuft, so ist angenähert  $p_0 - p = h g \rho_0$ . Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so wird für  $c_0 = 0$   $c = \sqrt{2gh}$ ; d. h. die Geschwindigkeit welche das Luftteilchen durch den Gradienten erlangt, ist dieselbe, als wäre es ohne Hindernis auf der isobaren Fläche  $p$  wie auf einer schiefen Ebene um die vertikale Strecke  $h$ , den Abstand von  $p_0$  und  $p$ , herabgeglitten. Diese Ausdrucksform ist bequem, wenn man mit Flächen gleichen Druckes arbeitet; sie ist aber etwas irreführend. Denn die Bewegung in der dritten Dimension ist ebenso wie die Schwere für das Zustandekommen der Erscheinung ganz unnötig, und so wird in diese Sache eine Vorstellung hineingetragen, die nicht notwendig in sie hineingehört.

Wenn die in den Gleichungen von S. 91 enthaltenen Glieder der ablenkenden Kraft bei der Bildung der Geschwindigkeit keine Rolle spielen, so rührt dies daher, daß jene Kraft stets senkrecht auf der Bewegung steht, somit niemals die Bewegung beschleunigen oder verzögern kann.

Wir wollen nun unsere Bewegungsgleichungen in anderer Weise integrieren, um die Richtung der Bewegung und dann auch die Bahn des Luftteilchens zu erhalten, und zwar für die zwei schematischen Beispiele, bei welchen a) der Druck in der Horizontalen ein konstantes Gefälle hat, b) derselbe von einem Punkte aus symmetrisch nach allen Richtungen gleich verteilt ist. Der erste Fall entspricht geradlinigen, der zweite kreisförmigen Isobaren.

a) Geradlinige Isobaren: es sei  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , so daß nur  $\frac{\partial p}{\partial y}$  besteht. Die Allgemeinheit der Rechnung wird hierdurch nicht eingeschränkt, da wir stets das Koordinatensystem so drehen können, daß  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  wird. Die Dichte  $\rho$  werde als konstant angenommen, so daß  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = G$  ein Aus-

1) Lehrbuch der Meteorologie, 3. Aufl., 1915, S. 427.

druck des konstanten Druckgefälles ist. Auf kleinen Gebieten der Erde ist  $\varphi$  konstant, weshalb  $2\omega \sin \varphi = l$  gesetzt werden kann (wie S. 26).

Die Integration der Gleichungen

$$\frac{du}{dt} + lv = 0, \quad \frac{dv}{dt} - lu = -G$$

liefert zunächst:

$$u = \frac{G}{l} + \left(u_0 - \frac{G}{l}\right) \cos lt - v_0 \sin lt,$$

$$v = \left(u_0 - \frac{G}{l}\right) \sin lt + v_0 \cos lt,^1)$$

wo  $u_0, v_0$  die Geschwindigkeitskomponenten für  $t = 0$  sind. Setzt man  $u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}$  und integriert nochmals, so erhält man:

$$x = x_0 + \frac{Gt}{l} + \frac{l u_0 - G}{l^2} \sin lt - \frac{v_0}{l} (1 - \cos lt),$$

$$y = y_0 + \frac{l u_0 - G}{l^2} (1 - \cos lt) + \frac{v_0}{l} \sin lt.$$

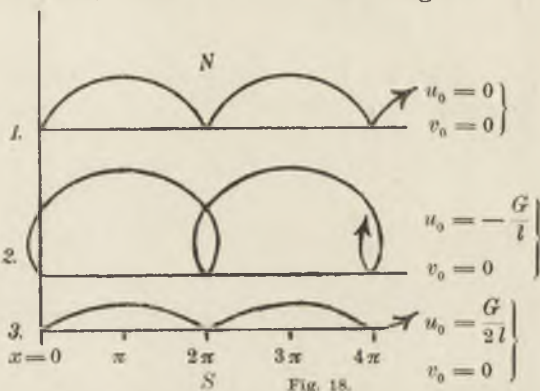
Hier gilt für  $t = 0: x = x_0, y = y_0$ . Der Weg  $x, y$ , den diese zwei Gleichungen beschreiben, wird von einem Luftteilchen zurückgelegt, auf welches das konstante Druckgefälle  $G$  und die ablenkende Kraft der Erdrotation wirkt. Das Teilchen führt also im allgemeinen eine periodische Bewegung aus, deren Schwingungsdauer  $\tau = \frac{2\pi}{l} = \frac{\pi}{\omega \sin \varphi}$  ist. Für  $\varphi = 45^\circ$  wird diese 17 Stunden. Nur unter der Anfangsbedingung, daß  $l u_0 - G = 0$  und  $v_0 = 0$ , entsteht keine periodische Bewegung; dann ist  $x = x_0 + \frac{Gt}{l}, y = y_0$ , die Luft bewegt sich geradlinig längs der positiven  $x$ -Achse, also parallel den Isobaren. Auch die Komponenten der Geschwindigkeit  $u = \frac{G}{l}, v = 0$  sind dann konstant und jenen der Anfangsgeschwindigkeit gleich. Wir wollen die Größe  $\frac{G}{l}$  besonders bezeichnen und  $U$  nennen. Der Bewegungszustand ist nun geradlinig und stationär ( $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ ). Ist  $G$  positiv, nimmt also z. B. der Druck nach Süden zu, so ist  $U$  positiv, nach Osten gerichtet.

Entspricht die Anfangsgeschwindigkeit der Forderung  $u_0 = U, v_0 = 0$  nicht, so beschreibt die Luft Bahnen, wie sie für verschiedene Anfangsbedingungen in Fig. 18 gezeichnet sind. Im Falle 1 (Fig. 18) war die Luft zu Anfang in Ruhe und hat sich dann unter Einwirkung des nordwärts gerichteten Druckgefälles gegen Norden in Bewegung gesetzt. Durch die ablenkende Kraft der Erdrotation wird daraus allmählich eine

1) E. Gold, Barometric Gradient & Wind Force; Rep. to the Dir. Met. Off. London 1908, und F. M. Exner, Ann. d. Hydr. & mar. Met., März 1913.

Ostbewegung, die für  $x = \pi$ , also nach der Zeit  $\frac{\tau}{2}$  doppelt so groß wie die stationäre Ostgeschwindigkeit, nämlich  $\frac{2G}{l}$ , wird. Durch weitere Wirkung der ablenkenden Kraft wird das Luftteilchen nun gegen den Gradienten nach Süden getrieben, wobei sich die Geschwindigkeit verringert, um in  $x=2\pi$  wieder null zu werden, usw.

Der Fall 2 setzt zu Anfang eine der stationären gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit voraus. Ob derartiges in der Natur vorkommt, ist fraglich; die Luftmasse beschreibt unter diesen Umständen Schlingen. Der Fall 3 endlich ist ein



Mittel zwischen stationärer Strömung und Fall 1 und wird vermutlich häufiger vorkommen. Die Geschwindigkeit hat hier in  $x = \pi$  den extremen Wert  $\frac{3G}{2l}$ ; die Bewegung besteht neben der Strömung nach Osten in einer Schwingung, doch ist letztere nicht symmetrisch; rechts von der Mitte sind die Geschwindigkeiten geringer als links davon.

Die oszillierende Bewegung einer unter dem Einflusse eines konstanten Druckgradienten stehenden Luftmasse scheint vor kurzem I. W. Sandström<sup>1)</sup> tatsächlich nachgewiesen zu haben, indem er auf europäischen Wetterkarten nach der oben (Abschnitt 29) beschriebenen Methode Stromlinien konstruierte. Diese Linien sind nun freilich nicht mit den Bahnen identisch, welche einzelne Luftteilchen zurücklegen, zumindest müssen sie nicht mit diesen zusammenfallen. Es wird dies vielmehr nur dann geschehen, wenn die Flüssigkeitsteilchen einander vollkommen auf der gleichen Bahn folgen, die Strömung also stationär ist. Trotzdem können wir wohl die Oszillationen, welche Sandström fand, in unserem Sinne auffassen, da die Bewegungen der Luft doch nur recht langsame zeitliche Veränderungen erleiden und der momentane Zustand nur selten gar weit vom stationären entfernt zu sein scheint.

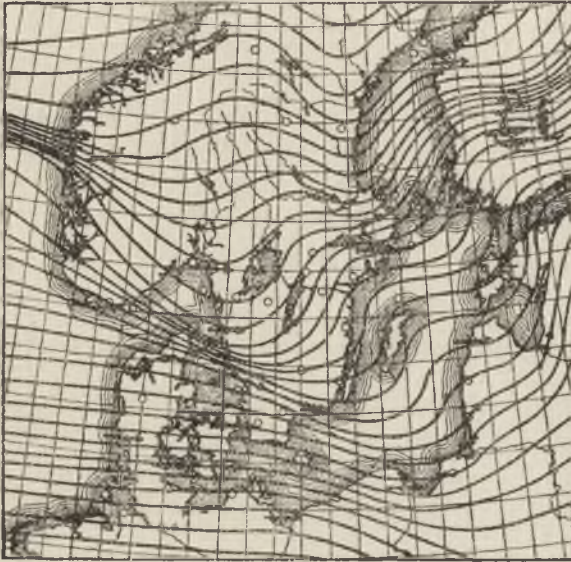
Ein einzelnes Luftteilchen auf seiner Bahn zu verfolgen ist sehr schwierig. Shaw<sup>2)</sup> hat bei seinen derartigen Versuchen keine Oszillation

1) Kungl. Svens. Vet. Akad. Handl., Bd. 45, Nr. 10, 1910 oder Bull. Mt. Weath. Obs. Vol. III, part 5.

2) The Life History of Surface Air Currents; London, 1906.

in den Bahnen gefunden, was aber nach der Art der Feststellung derselben noch kein Beweis gegen ihr Vorhandensein ist.

Ein Beispiel der oszillierenden Stromlinien der ersten Art gibt Fig. 19, welche der genannten Abhandlung Sandströms entnommen ist. Die



Stromlinien vom 7./I. 1902, 9<sup>h</sup> p.

Fig. 19.

Isobaren über Nord-europa verliefen an jenem Tage fast genau geradlinig von Nordwest nach Südost; nur an der russischen Ostseeküste bogen sie gegen Osten ab.

Aus den Bahngleichungen auf Seite 94 ergibt sich die Dauer einer Oszillation zu  $\tau = \frac{2\pi}{l}$ , die Wellenlänge von einer Ausbuchtung  $y$  bis zur nächsten zu  $L = x' - x = \frac{G}{l} \tau = \frac{2\pi U}{l}$ , wenn die stationäre

Geschwindigkeit  $U$  an Stelle des Gradienten eingeführt wird. Mit dieser Formel kann man aus der Länge der Wellen in einer Stromlinie die mittlere Geschwindigkeit des Windes  $U$  berechnen. Auf der Karte Fig. 19 bemerkt man recht deutliche Wellen in der Mitte des baltischen Meeres und östlich und westlich davon. Die Wellenlänge beträgt dort etwa 500 km; damit findet man  $U = \frac{L \omega \sin \varphi}{\pi}$  für 60° Breite zu 10 m/sec, ein Wert der

Geschwindigkeit, der durchaus wahrscheinlich ist, da die Wetterkarte in der Mitte des schwedischen Landesteiles Winde von der Stärke 6, in Finnland allerdings geringere zeigt<sup>1)</sup>. Diese Berechnung ist von der Annahme über die Anfangsgeschwindigkeit unabhängig, die Form der Stromlinien entspricht am ehesten der Kurve 3 in Fig. 18.

Die stationäre Strömung von der Geschwindigkeit  $U = \frac{G}{l}$  stellt dem früheren nach nur einen singulären Fall dar, welcher einer ganz bestimmten Anfangsgeschwindigkeit entspricht. Dies ist nun gewiß aus mehrfachen Gründen nicht ganz richtig. Die Luftströmung geht nämlich nie nach den einfachen Gleichungen vor sich. Denn einerseits wirken

1) Vgl. F. M. Exner, a. a. O.

auf die bewegten Massen Kräfte, welche ihre Bewegung zu vermindern bestrebt sind, also Reibung und vielleicht auch Dämpfung; letztere würde nach Gold<sup>1)</sup> die Amplitude der Schwingung rasch verkleinern und so zur geradlinigen Bewegung führen, erstere verändert, wie später noch zu zeigen ist, die Richtung und Stärke der Bewegung. Andererseits haben Versuche an strömendem Wasser gelehrt, daß, von Reibung abgesehen, eine fortwährende Verschlingung der Stromlinien umeinander, zumindest von gewissen Geschwindigkeiten ab, stattfindet, für welche die theoretische Hydrodynamik keine Aufklärung gibt, eine sogenannte „Turbulenz“ der Bewegung. A. Wegener<sup>2)</sup> hat gefunden, daß solche turbulente Bewegungen auch bei den Luftströmungen viel häufiger sind als die einfacheren, welche den Bewegungsgleichungen entsprechen. Aber es ist festzuhalten, daß die hierdurch bedingten Abweichungen der Stromlinien von der theoretischen Bahn relativ gering sind (vgl. Abschnitt 41).

Wir können somit sagen, daß die Tendenz zu einer oszillierenden Bewegung der Luft stets vorhanden ist. Nur unter gewissen seltenen Voraussetzungen stellt die geradlinige Bewegung den bei geradlinigen Isobaren zu erwartenden Bewegungszustand dar. Es scheint hier wie auch in anderen Fällen das Pendeln um eine mittlere Bewegungsrichtung der wahrscheinlichere und stabilere Zustand zu sein, als diese Bewegung selbst.

b) Kreisförmige Isobaren. Die Formeln von S. 87 lauten, wenn wir kreisförmige Isobaren annehmen und deren Mittelpunkt zugleich als Anfangspunkt des Koordinatensystems verwenden:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 + 2\omega \sin \varphi r\dot{\vartheta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - 2\omega \sin \varphi \dot{r} &= 0. \end{aligned}$$

Wie früher sei  $2\omega \sin \varphi = l$  konstant gesetzt. Die zweite Gleichung liefert nach einmaliger Integration:  $\dot{\vartheta} = \frac{l}{2} + \frac{c}{2r}$ . Setzen wir den Gradienten in der Richtung des Radiusvektors konstant ( $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = G$ ), so führt die Integration der ersten Gleichung im allgemeinen auf elliptische Integrale. Nur wenn  $c = 0$ , läßt sich das Integral direkt auswerten, dann ist  $\dot{\vartheta} = \frac{l}{2}$ , die Rotationsbewegung ist konstant und positiv; wir erhalten als Lösung bloß eine antizyklonale Rotation von bestimmter Größe.

Das vollständige Integral der ersten Gleichung lautet in diesem Fall:

$$r = -\frac{4G}{l^2} + \left(r_0 + \frac{4G}{l^2}\right) \cos \frac{lt}{2} + \frac{2\dot{r}_0}{l} \sin \frac{lt}{2}, \text{ wo für } t = 0: r = r_0, \dot{r} = \dot{r}_0.$$

1) Proc. Roy. Soc., A. Vol. 80, 1908, S. 436.

2) Met. Zeitsch. 1912, S. 49; vgl. auch Rudzki, Met. Zeitsch. 1912, S. 343.

Man erhält also eine oszillierende Bewegung, wie bei geradlinigen Isobaren; die Oszillationsdauer ist hier gleich der Zeit, die zu einer einmaligen Umkreisung des Hochdruckgebietes erforderlich ist.

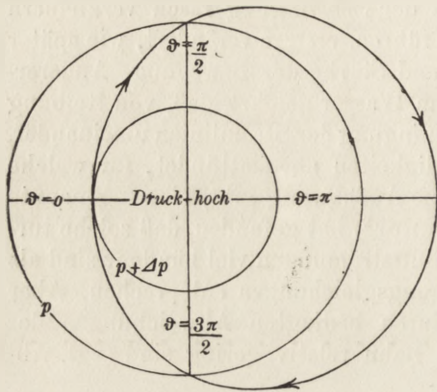


Fig. 20.

In Fig. 20 ist eine derartige Luftbahn für die nördliche Halbkugel dargestellt, welcher die Anfangsbedingung  $r_0 = -\frac{2G}{r^2}$ ,  $\dot{r}_0 = 0$  zugrunde liegt. Die Kreise bezeichnen zwei Isobaren mit hohem Druck im Mittelpunkt, die asymmetrische Kurve zeigt die Bahn des Luftteilchens.

Man hat hier wieder ein Beispiel von den Luftbewegungen, welche bei einfachen Druckverteilungen möglich sind. Eine weitere Bedeutung kommt natürlich der Integration<sup>1)</sup> für kreisförmige Bahnen unter so beschränkenden Verhältnissen nicht zu.

**38. Reibung der Luft an der Erdoberfläche.** Von Guldberg und Mohn<sup>2)</sup> rührt die Annahme her, daß die Luft beim Strömen über die Erdoberfläche von dieser einen, der Geschwindigkeit proportionalen, Widerstand erleide, dessen Richtung der der Bewegung entgegengesetzt ist. Bedeutet  $c$  die Geschwindigkeit, so kann die Reibungskraft demnach  $-kc$  gesetzt werden. Man nennt  $k$  den Reibungskoeffizienten. Schon Guldberg und Mohn hielten ihn nicht für eine eigentliche Konstante; insbesondere war es von vornherein klar, daß die Reibungskraft, welche der Boden ausübt, unmittelbar nur auf die allerunterste Luftschicht wirken kann; die höheren Schichten werden wohl auch verzögert, aber weniger, so daß  $k$  mit der Höhe abnehmen muß.

Die folgende Betrachtung der Guldberg-Mohnschen Reibungskraft kann mit einer gewissen Berechtigung demnach nur die unterste Luftschicht betreffen. Wenn wir die Ergebnisse der Rechnung durch Wind- und Luftdruckbeobachtungen an der Erdoberfläche kontrollieren wollen, so haben wir bei Bestimmung von  $k$  als unterste Luftschicht jene aufzufassen, auf welche sich die Windmessungen beziehen, also eine Schicht, deren Dicke von der Größenordnung 10m ist. Wir kommen später hierauf zurück und wenden zunächst die neu definierte Kraft auf diese unterste Luftschicht an.

Bei Luftbewegungen über kleinen Gebieten der Erde dürfen wir wie oben die geographische Breite als konstant ansehen. Die Gleichungen für horizontale Bewegungen, welche hier gelten, werden nach S. 85

1) Siehe E. Gold, a. a. O.

2) Zeitsch. d. öst. Ges. f. Met., 1877, S. 51.



nunmehr, wenn die Reibungskraft in eine X- und eine Y-Komponente zerlegt wird:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\omega \sin \varphi v + ku &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} - 2\omega \sin \varphi u + kv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

a) Geradlinige Isobaren. Wir behandeln zunächst wieder die geradlinige stationäre Bewegung, bei der  $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ , und setzen  $2\omega \sin \varphi = l$ .

Es wird:  $lv + ku = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $-lu + kv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ . Wie früher ist der totale Gradient  $\frac{\partial p}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}$ . Man erhält, da  $c = \sqrt{u^2 + v^2}$ , nun  $c\sqrt{l^2 + k^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$ , eine Beziehung zwischen Gradient und Windgeschwindigkeit. Der Reibungskoeffizient  $k$  läßt sich hiernach aus gleichzeitigen Beobachtungen von Windstärke und Gradient ausrechnen.

Die einem gegebenen Gradienten entsprechende Geschwindigkeit  $c$  ist nun kleiner als früher ohne Reibung. Wichtiger ist aber ein anderer Unterschied gegen früher, daß nämlich die Geschwindigkeit  $c$  jetzt nicht mehr senkrecht auf dem Gradienten steht. Der Winkel  $\psi$  zwischen diesen beiden Richtungen kann folgendermaßen gefunden werden: Ist  $\alpha$  der Winkel, welchen die Geschwindigkeit,  $\beta$  der Winkel, welchen der Gradient mit der X-Achse einschließt, so ist  $\psi = \alpha - \beta$  und ferner:

$$\begin{aligned} u &= c \cos \alpha, & v &= c \sin \alpha, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial n} \cos \beta, & \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial n} \sin \beta. \end{aligned}$$

Setzt man diese vier Größen in die obigen Gleichungen ein, so erhält man die zwei neuen:  $lc = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \sin \psi$ ,  $kc = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \cos \psi$ .

Hieraus wird  $\operatorname{tg} \psi = \frac{l}{k}$ . Der so gegebene Winkel  $\psi$  zwischen Gradient und Windrichtung wurde von Guldberg und Mohn (a. a. O.) der „normale Ablenkungswinkel“ genannt.

Die Einführung des Ausdrucks für die Reibung hat den großen Vorteil, daß die Bewegungen, welche die Theorie ergibt, nun direkt mit den beobachteten verglichen werden können. Die Ausmessungen auf den synoptischen Wetterkarten haben gezeigt, daß der Wind zwar, wie im Abschnitt 36 berechnet, von der Richtung des Gradienten auf der nördlichen Halbkugel nach rechts, auf der südlichen nach links abgelenkt ist, daß aber der Winkel  $\psi$  nicht  $90^\circ$ , sondern weniger beträgt. Da die Größe  $l$  bekannt ist, so läßt sich nun  $k$ , der Reibungskoeffizient, aus den Beobachtungen von  $\psi$  ableiten.

Wie oben bemerkt wurde, kann derselbe aber auch aus Gradient und Windstärke berechnet werden. Es ist somit die Möglichkeit gegeben, nicht nur  $k$  zu finden, sondern auch die Richtigkeit unserer Theorie zu kontrollieren.

Die Bestimmung von  $k$  aus den beobachteten Ablenkungswinkeln ergab durchschnittlich folgende Resultate<sup>1)</sup>:

	Breite	$\psi$	$k$
Nordamerika . . . . .	37°	42°	8,03 · 10 <sup>-5</sup> sec <sup>-1</sup>
Norwegen . . . . .	61°	56°	8,45 „
Westeuropa, Kontinent .	51°	61°	6,37 „
„ , Küste . . . . .	51°	77°	2,58 „
Atlant. Ozean . . . . .	15—50°		3,51 „
„ . . . . . nahe Äquator			2,00 „

Der Ablenkungswinkel ist in mittleren Breiten meist größer als 45°, in flachen Gebieten, namentlich am Meer, größer als in unebenem oder gebirgigem Terrain. Dies rührt daher, daß in unebenen Gegenden die Reibung der Luft stärker ist als in flachen, wie die Zahlen unter  $k$  zeigen. Guldberg und Mohn nahmen als Grenzwerte von  $k$  für sehr unebene Binnenländer den Wert  $12 \cdot 10^{-5}$ , für nicht stark bewegte Meeresflächen den Wert  $2 \cdot 10^{-5}$  sec<sup>-1</sup> an.

Versucht man, die Beziehung zwischen Druckgradient und Windstärke aus der Gleichung  $c\sqrt{l^2 + k^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$  zu verifizieren, so gelangt man mit dem oben berechneten Reibungskoeffizienten nur zu recht unbefriedigenden Ergebnissen. Beobachtungen in Kew ergaben das Verhältnis zwischen Windstärke und Gradient etwa halb so groß, als es die Theorie verlangt. Die beobachtete Windstärke war viel kleiner, als man erwartet hatte.

Margules<sup>2)</sup> verglich die Windregistrierungen von Wien mit den Isobaren, welche ihm mehrere rund um Wien in geringer Entfernung aufgestellte Barographen lieferten, und kam zu dem Ergebnis, daß die Windgeschwindigkeit sich auch nicht annähernd proportional dem Gradienten ändert. Insbesondere hing das Verhältnis der beiden sehr stark von der Windrichtung ab. Diese Resultate stehen zweifellos mit der Störung der Winde durch die Erdoberfläche und dem mangelhaften Ausdruck für die Reibung, vielleicht auch mit der „Turbulenz“ der Luftbewegungen (Abschnitt 41) im Zusammenhang. Die Aufstellung eines Anemometers unterliegt so großen lokalen Einflüssen, daß man kaum erwarten kann, die aufgezeichnete Windstärke entspreche gerade jenem Reibungskoeffizienten, der aus der Windrichtung daselbst abgeleitet wird. Hätte man z. B. das Anemometer 5 m höher oder auf einem an-

1) Nach Sprungs Lehrbuch der Meteorologie S. 121.

2) Met. Zeitsch. 1897, S. 241.

deren Sockel aufgestellt, so wäre die aufgezeichnete Windstärke eine andere gewesen, die Richtung aber kaum so sehr verändert worden.

Die Guldberg-Mohnschen Gleichungen scheinen somit nur zu einer qualitativen Erklärung der Erscheinungen wirklich brauchbar zu sein; durch sie findet die auf den täglichen Wetterkarten stets auftretende Beziehung zwischen Isobaren und Winden ihre Begründung.

Will man die Dynamik der Luftströmungen möglichst genau behandeln, so muß man entweder statt des Guldberg-Mohnschen Reibungsausdrucks für die unteren Schichten einen anderen einführen, oder die untersten Schichten ganz außer Betracht lassen und die Bewegungen in Höhen studieren, in welche der verzögernde Einfluß der Erdoberfläche nicht mehr hinaufreicht. Hierauf kommen wir später zurück.

Der hier benützte Reibungsausdruck ist hingegen äußerst bequem, um ein angenähertes schematisches Bild der Luftströmungen und der sie bedingenden Kräfte zu erhalten. Bei geradlinigen Isobaren ist die Kräfteverteilung im stationären Zustand für die nördliche Halb-

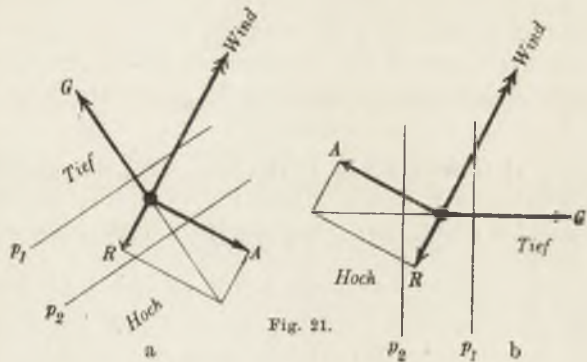


Fig. 21.

kugel in Fig. 21a, für die südliche in Fig. 21b dargestellt. Die Resultierende aus ablenkender Kraft  $A$  und Reibung  $R$  hält dem Druckgradienten  $G$  das Gleichgewicht (vgl. Fig. 16 für reibungslose Bewegung).

Handelt es sich nicht mehr um stationäre geradlinige Bewegung, so gelten die Gleichungen von S. 99. Nehmen wir, wie oben S. 93, an, daß die Isobaren der  $X$ -Achse parallele Gerade sind und daß die Dichte  $\rho$  konstant ist, so können wir die Gleichungen integrieren; sie liefern dann die Geschwindigkeitskomponenten eines jenen Kräften unterworfenen Luftteilchens als Funktionen der Zeit und bei weiterer Integration den Weg, welchen dasselbe beschreibt. Man erhält analog zum früheren (S. 94), wenn noch  $l^2 + k^2 = \sigma^2$  gesetzt wird<sup>1)</sup>:

$$u = \frac{Gl}{\sigma^2} + e^{-kt} \left[ \left( u_0 - \frac{Gl}{\sigma^2} \right) \cos lt - \left( v_0 + \frac{Gk}{\sigma^2} \right) \sin lt \right]$$

$$v = -\frac{Gk}{\sigma^2} + e^{-kt} \left[ \left( u_0 - \frac{Gl}{\sigma^2} \right) \sin lt + \left( v_0 + \frac{Gk}{\sigma^2} \right) \cos lt \right].$$

Auch jetzt vollführt also das Teilchen eine oszillierende Bewegung, aber mit zunehmender Zeit wird die Oszillation geringer und die Ge-

1) F. M. Exner, Annal. d. Hydr. u. mar. Met., 1913, S. 149.

schwindigkeit nähert sich dem Wert, den wir oben S. 94 für stationäre Bewegung erhielten ( $c = -\frac{G}{\sigma} = -\frac{1}{\rho \sigma} \frac{\partial p}{\partial n}$ ).

Hier ergibt sich die Frage, wie lange es braucht, bis ein Luftteilchen unter dem Einfluß der Reibung den stationären Bewegungszustand erreicht. Der Ausdruck für  $u$  und  $v$  liefert dafür allerdings die Zeit unendlich; fragen wir aber z. B., in welcher Zeit  $\tau$  die Oszillationen auf ein Zehntel ihres Betrages abgenommen haben, so findet sich aus  $e^{-k\tau} = 0,1$  für  $k = 2 \cdot 10^{-5}$  die Größe  $\tau = 32,0$  Stunden, für  $k = 12 \cdot 10^{-5}$ :  $\tau = 5,3$  Stunden. Über dem Meere oder in einiger Höhe, wo  $k$  klein ist, wird also die Oszillation nicht gar rasch verschwinden, über unebenen Binnenländern hingegen muß durch Reibung, wenn das Druckgefälle konstant bleibt, recht bald eine stationäre Strömung entstehen. Freilich kann es sein, daß die höheren Schichten ihre oszillierende Bewegung immer neuerlich auf die untersten übertragen. Die Frage ist nicht genau zu beantworten, so lange wir bei dem Guldberg-Mohnschen Reibungsausdruck stehen bleiben.

b) Gekrümmte Isobaren. Sind die Isobaren gekrümmt, so verwenden wir besser wieder Polarkoordinaten. Die Formeln von S. 87 werden durch Beifügung der Reibungskomponenten:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 + 2\omega \sin \varphi r\dot{\vartheta} + k\dot{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - 2\omega \sin \varphi \dot{r} + kr\dot{\vartheta} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

α) Nehmen wir hier zunächst eine Bewegung der Luft in Kreisbahnen an, so ist  $\dot{r} = 0$  zu setzen; die ganze Geschwindigkeit  $c$  wird  $r\dot{\vartheta}$ . Weiter sei  $\ddot{\vartheta} = 0$ , also die Rotationsbewegung gleichförmig. Bezeichnet nun wie früher  $\psi$  den Winkel zwischen Gradient  $-\frac{\partial p}{\partial n}$  und Windrichtung, so können die beiden Gleichungen  $lr\dot{\vartheta} - r\dot{\vartheta}^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ ,  $kr\dot{\vartheta} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta}$  auch geschrieben werden:

$$lc - \frac{c^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \sin \psi,$$

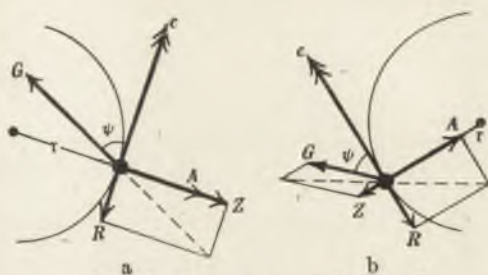
$$kc = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \cos \psi.$$

Das sind die beiden Formeln von Guldberg und Mohn<sup>1)</sup>. Sie sagen aus, in welcher Weise die Kräfte einander im stationären Zustande das Gleichgewicht halten müssen.

1) Österr. Zeitschr. f. Meteor. 1877, S. 177.

Auf der nördlichen Halbkugel ist  $c$  ebenso wie  $\dot{\theta}$  bei zyklonaler Bewegung negativ, bei antizyklonaler positiv zu rechnen. Hiernach wird die Kräfteverteilung für die beiden Drehungsrichtungen auf der nördlichen Halbkugel durch folgende Figuren dargestellt (Fig. 22):

Man vergleiche hiermit Fig. 17 für reibungslose Bewegung; wie dort ist der Gradient  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$  mit  $G$ , die ablenkende Kraft der Erdrotation  $lc$  mit  $A$ , die Zentrifugalkraft  $\frac{c^2}{r}$  mit  $Z$ , der Krümmungsradius der Bewegung mit  $r$  bezeichnet, während nun  $R$  die Reibungskraft  $kc$  bedeutet. Der tiefe Druck liegt jetzt in der Richtung des Pfeiles  $G$ , die Isobaren sind nicht gezeichnet, die Kreisbögen geben die Luftbahnen an.



zyklonale Bewegung antizyklonale

Fig. 22.

Aus den beiden Gleichungen oben ergibt sich dasselbe wie aus der

Konstruktion (Fig. 22); es ist  $\operatorname{tg} \psi = \frac{l - \frac{c}{r}}{k}$  und

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = c \sqrt{\left(l - \frac{c}{r}\right)^2 + k^2} = \frac{c}{\sin \psi} \left(l - \frac{c}{r}\right).$$

Folgt der Wind der Bahn in Fig. 22a, wie in einer Zyklone der nördlichen Halbkugel, so ist  $c$  negativ, folglich  $\psi$  größer als der „normale Ablenkungswinkel“  $\psi_1$  bei geradliniger Bewegung ( $\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{l}{k}$ ); der Gradient ist dann gleichfalls größer als bei jener Bewegung ( $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = c \sqrt{l^2 + k^2}$ , S. 86). Bei antizyklonaler Bewegung ist umgekehrt (Fig. 22b) Ablenkungswinkel wie Gradient kleiner, weil die Zentrifugalkraft nun von der ablenkenden Kraft in Abzug kommt. Wir haben also bei Winden aus Hochdruckgebieten kleinere Ablenkungswinkel zu erwarten, als bei Winden, welche in Tiefdruckgebiete hineinwehen, was mit den Beobachtungen auch im Einklang steht.

β) Selbstverständlich gelten diese Beziehungen für jede gekrümmte Luftbahn, nicht etwa nur für einen Kreis; dabei ist aber unter  $r$  stets der Krümmungsradius der Bahn an der betreffenden Stelle zu verstehen. Diese Größe ist nun selten bekannt; viel leichter ist es, die Krümmung der Isobaren auf einer Wetterkarte festzustellen. Daher wird es meist bequemer sein, ein Stück einer Isobare als Kreisbogen aufzufassen, in dessen Krümmungsmittelpunkt den Anfang des Polarkoordinaten-

systems zu verlegen und  $\frac{\partial p}{\partial \phi}$  in den Gleichungen auf S. 102 null zu setzen. Nehmen wir dann noch an, daß die Beschleunigung  $\ddot{r}$  und  $\ddot{\phi}$  null sei, so wird:

$$-r\dot{\phi}^2 + l r \dot{\phi} + k \dot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$2 \dot{r} \dot{\phi} - l \dot{r} + k r \dot{\phi} = 0.$$

Daraus folgt  $\dot{r} = \frac{k r \dot{\phi}}{l - 2 \dot{\phi}}$ . Die zu den Isobaren radiale Bewegung ist also eine einströmende ( $\dot{r} < 0$ ) bei zyklonaler ( $\dot{\phi} < 0$ ), eine ausströmende bei antizyklonaler Bewegung; letzteres allerdings nur, so lange  $l > 2 \dot{\phi}$ ; dies wird in höheren Breiten stets erfüllt sein. Nahe dem Äquator ist die antizyklonale Bewegung, wie wir schon oben sahen, unmöglich.

Wenn  $\ddot{\phi} = 0$ , so ist  $\dot{\phi}$  auf der ganzen Bahn konstant. Der Ablenkungswinkel, d. i. der Winkel zwischen Gradient und Windrichtung, ist nun leicht zu finden, da der Gradient die Richtung von  $\dot{r}$  hat. Es wird daher bei dieser Art der Bewegung  $\text{tg } \psi = \frac{r \dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{l - 2 \dot{\phi}}{k}$ . Dieser Winkel ist auf der ganzen Bahn derselbe, das Luftteilchen beschreibt demnach eine logarithmische Spirale, indem es sich bei zyklonaler Bewegung dem Mittelpunkt der kreisförmigen Isobaren nähert, bei antizyklonaler aber sich von ihm entfernt. Natürlich ergibt sich auch hier wieder, daß  $\psi$  bei der ersten Bewegung größer ist als bei der zweiten.

Aus den Gleichungen oben läßt sich der Gradient als Funktion der Windstärke ausdrücken. Man erhält:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{l c}{\sin \psi} - \frac{c^2}{r} (1 + \cos^2 \psi).^1)$$

Diese Gleichung eignet sich wieder zur Prüfung der Theorie an den Beobachtungen. Loomis hat für verschiedene Antizyklonen und Zyklonen in Europa und auf dem atlantischen Ozean die mittleren Gradienten, die Windstärken, die Ablenkungswinkel und Krümmungsradien zusammengestellt.<sup>2)</sup> Berechnet man den Gradienten nach obiger Formel und vergleicht ihn mit dem beobachteten, so erhält man wieder 2- bis 3mal zu kleine Werte, also eine Abweichung wie bei geradliniger Bewegung (S. 100), während die Veränderung des Gradienten beim Übergang von der Antizyklone zur Zyklone nicht schlecht mit den Tatsachen übereinstimmt (Zunahme auf etwa den doppelten Wert).

1) Hier ist, wie gesagt, unter  $r$  der Krümmungsradius der Isobare verstanden, während in der analogen Gleichung auf S. 103  $r$  den Krümmungsradius der Luftbahn bedeutet.

2) Siehe Hann, Lehrbuch der Met. 3. Aufl. S. 543.

Zum Schlusse dieses Abschnittes sei nochmals bemerkt, daß der Guldberg-Mohnsche Reibungsansatz zwar quantitativ viel zu wünschen übrig läßt, daß er aber doch einen sehr brauchbaren Überblick über die wirksamen Kräfte vermittelt, wie er durch kompliziertere Annahmen nicht erreicht wird.<sup>1)</sup>

**39. Innere Reibung der Luft.** Neben anderen hat in letzter Zeit auch I. W. Sandström<sup>2)</sup> die Guldberg-Mohnschen Gleichungen für geradlinige Bewegungen mit Hilfe der Daten auf den synoptischen Wetterkarten zu prüfen gesucht. Er hat hierzu die drei Kräfte: Gradient, ablenkende Kraft der Erdrotation und Reibung, letztere aus dem Ablenkungswinkel berechnet, den Beobachtungen entnommen und sie zusammengesetzt. Bei Wettersituationen, die sich von einem Tag zum nächsten kaum verändern, muß die Luft angenähert in stationärer Bewegung sein, die drei Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten, d. h. zu null ergänzen. Das war bei Sandströms Untersuchungen nicht der Fall; er erhielt Restkräfte, welche große Veränderungen hervorgebracht hätten, wenn sie wirklich vorhanden gewesen wären. In der Vermutung, daß die Ursache dieses Fehlers in der Annahme über die Reibung liege, kehrte er daher die Frage um und konstruierte für den stationären Zustand jene neue Reibungskraft, welche den anderen beiden gegebenen Kräften das Gleichgewicht hielt. Sie war nicht nur numerisch größer als die Guldberg-Mohnsche, sondern hatte vor allem auch eine andere Richtung als jene. Die neue Reibungskraft war nämlich nicht der Bewegung gerade entgegengesetzt, sondern wich von dieser Richtung etwa  $38^\circ$  nach links ab, lag also rechts rückwärts vom Winde.

Sandströms Untersuchung ist nun allerdings nur auf wenige Beobachtungen gegründet; sie wird aber auch durch theoretische Überlegungen unterstützt.

Will man die Frage der Luftreibung vom physikalischen Standpunkt aus angreifen, so muß man jene Reibung in Betracht ziehen, welche eine Luftschicht von der über und von der unter ihr liegenden erfährt. Der Einfluß der Erdoberfläche kommt dadurch zum Ausdruck, daß die allerunterste Schichte, die direkt dem Boden aufliegt, durch ihn in Ruhe gehalten wird (hierbei ist angenommen, daß keine „Gleitung“ stattfindet, was wohl meist erlaubt ist; bei einer solchen wäre ein Sprung, eine Diskontinuität der Geschwindigkeit in vertikaler Richtung vorhanden). Man gelangt auf diese Weise zur Benützung der Gleichungen für die innere Reibung der Luft (S. 32).<sup>3)</sup>

1) Vgl. auch M. Gorodensky, Met. Zeitschr. 1907. S. 25.

2) Kungl. Svensk. Vet. Akad. Handl., Bd. 45, Nr. 10, 1910 oder Bull. Mt. Weath. Obs., Vol. 3, part 5, 1911.

3) F. Ackerblom, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsal., Serie IV, Vol. 2, Nr. 2, 1908 und F. M. Exner, Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteor., 1912, S. 226.

Wir betrachten die horizontale Bewegung auf der rotierenden Erdoberfläche und haben zu setzen:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + lv - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} - lu - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Hier ist wie früher  $l = 2\omega \sin \varphi$  und als Reibungskonstante  $\mu$  verwendet. Wir wollen, um diese Gleichungen integrieren zu können, annehmen, daß die Bewegung geradlinig und stationär sei und nur in der Vertikalen variere, also von  $z$  abhängige; auch sollen Gradient und Dichte konstant sein. Die letztere Annahme ist nur erlaubt, wenn wir die Rechnung auf die alleruntersten Atmosphärensichten beschränken. Dann läßt sich setzen:

$$lv - \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{dz^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -lu - \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 v}{dz^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

und durch Integration erhält man:

$$\begin{aligned} u &= - C_1 e^{az} \cos(az + c_1) + C_2 e^{-az} \cos(az + c_2) + \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ v &= C_1 e^{az} \sin(az + c_1) + C_2 e^{-az} \sin(az + c_2) - \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Hier ist  $a = \sqrt{\frac{gl}{2\mu}} = \sqrt{\frac{\rho \omega \sin \varphi}{\mu}}$  gesetzt. Damit die Windgeschwindigkeit nicht nach aufwärts ins unbegrenzte wachse, muß  $C_1 = 0$  sein. Ferner soll an der Erdoberfläche  $u = v = 0$  sein, woraus  $C_2$  und  $c_2$  folgen. Orientiert man das Koordinatensystem so, daß  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  wird, so folgt weiter:

$$u = - \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x} e^{-az} \sin az, \quad v = - \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - e^{-az} \cos az).$$

Daraus wird die totale Windgeschwindigkeit

$$w = w_0 \sqrt{1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az}},$$

wenn  $w_0$  dieselbe in sehr großer Höhe bedeutet. Der Winkel  $\alpha$ , welchen der Wind mit dem Gradienten einschließt, wird bestimmt aus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u} = \frac{1 - e^{-az} \cos az}{e^{-az} \sin az}.$$

Wir erhalten nunmehr eine eigentümliche Abhängigkeit des Windes, seiner Größe und Richtung nach, von der Höhe  $z$ . Um sie kennen zu lernen, ist die empirische Bestimmung der Größe  $a$  erforderlich. Hierzu eignen sich die Beobachtungen vom Eiffelturm, die schon Akerblom (a. a. O.) verwendet hat. Durch seine geringe Masse beeinflusst dieser



Turm die freie Entwicklung der Luftströmungen fast gar nicht; er lieferte bisher die einzigen genauen Daten über die Luftbewegungen in den untersten 300 m. Nach Angot<sup>1)</sup> ist im Durchschnitt die Windstärke auf der obersten Station des Eiffelturmes in 305 m Höhe 4,05 mal so groß, wie in 21 m über Paris. Der obere Wind ist dabei gegenüber dem unteren um 25° nach rechts gedreht.

Berechnet man aus der ersten Beobachtungstatsache nach der Formel für die Änderung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe die Größe  $a$ , so erhält man durch graphische Interpolation  $a = 0,01082 \text{ m}^{-1}$ . Für Breiten von nahe 45° und eine Luftdichte von  $10^{-3} \text{ g pro cm}^3$  folgt daraus die Reibungsgröße  $\mu = 4,5 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-1,2}$ )

Die physikalisch bestimmte innere Reibung (Zähigkeit) der Luft beträgt hingegen etwa  $18 \cdot 10^{-5}$  in diesen Einheiten. Nennen wir zum Unterschied von dieser wahren den obigen Wert die „virtuelle“ innere Reibung, so ist diese also etwa 25,000 mal so groß wie jene. Der Ausdruck „virtuell“ rührt von W. Ekman<sup>3)</sup> her, welcher für die innere Reibung der Meeresströmungen eine dieser ganz analoge Rechnung durchgeführt hat.

Wir hatten für die Feststellung des  $\mu$  zwei Möglichkeiten: die Berechnung aus der Änderung der Windstärke und die aus der Änderung der Windrichtung. Der hier nach der ersten Art gefundene Wert von  $\mu$  liefert nun allerdings zwischen Boden und 305 m Höhe eine Rechtsdrehung des Windes von 39°, während sie nach der Beobachtung nur 25° betragen sollte. Akerblom hat, um ein doppeltes Ergebnis zu vermeiden und sowohl die Beobachtung der Windstärke als auch die der Windrichtung wiederzugeben, einen mit der Höhe variablen Druckgradienten angenommen und ist damit zu einem noch 20 mal größeren Wert für die virtuelle Reibung gelangt als wir hier. Da es uns nicht so sehr auf die Größe der virtuellen Reibung ankommt, als auf die Bewegungsformen der Luft nahe der Erde, so behalten wir die einfachere Annahme von dem konstanten Gradienten bei, und lassen die endgültige Größe von  $\mu$  dahingestellt.<sup>4)</sup>

1) Hann, Lehrbuch der Met., 3. Aufl., S. 393.

2) Köppen gibt (Met. Zeitsch. 1911, S. 162) die Windstärke in 500 m Höhe als etwa doppelt so groß an, wie die in 20 m. Nach den aerologischen Ergebnissen nimmt danach die Windstärke viel langsamer mit der Höhe zu, als für den Eiffelturm gefunden wurde. Rechnet man mit dieser Zunahme, so erhält man einen um mehr als das vierfache kleineren Wert von  $\mu$ . Vermutlich hat  $\mu$  in verschiedenen Höhen verschiedene Werte.

3) Arkiv för Math., Astr. och Fysik, Stockholm 1905, Bd. 2, Heft 1—2; merkwürdigerweise ist das Verhältnis der wahren und virtuellen inneren Reibung des Meerwassers ungefähr das gleiche, wie das in Luft (bei F. M. Exner, a. a. O.).

4) Neuerdings erschien eine die innere Reibung betreffende Arbeit von Th. Hesselberg (Met. Zeitsch. 1914, S. 220), in welcher aus Pilotballonbeobachtungen ein ähnlich großer Wert wie bei Akerblom abgeleitet wird.

Die Bedeutung der virtuellen inneren Reibung ist jedenfalls recht verwickelt. Sie drückt die von einer Luftschicht auf die andere übertragene Bewegung aus. Da wohl fast immer Vermischungen der Schichten durch kleine Wirbel (Turbulenz) und durch vertikale Luftströme stattfinden, so ist durch solche ein Ausgleich der Bewegung (der Geschwindigkeit) viel rascher möglich als durch bloßen Austausch der einzelnen Moleküle, wie bei der wahren inneren Reibung<sup>1)</sup>. Infolgedessen ist die „virtuelle“ innere Reibung ganz ungleich viel größer als die wahre (vgl. Abschnitt 41); sie ist ferner auch offenbar nicht wirklich eine Konstante, sondern ein mittlerer Ausdruck der gerade herrschenden Bewegungsverhältnisse (wie dies übrigens auch die wahre innere Reibung für sehr kleine Zeitintervalle sein muß). Bei starkem vertikalen Luftaustausch, wie bei Tag, wo die untersten Luftschichten an der Erdoberfläche erwärmt werden und aufsteigen, wird  $\mu$  vermutlich größer sein als bei Nacht, wo die kalten unteren Schichten getrennt von den oberen verharren.

Wir müssen darum auch erwarten, daß die Zunahme der Windstärke nach aufwärts bei Tag viel geringer ist als bei Nacht. Und dies haben ja auch die Beobachtungen bestätigt<sup>2)</sup>. Espy und Köppen erklärten den Gegensatz im täglichen Gang der Windstärke nahe und fern vom Boden in dieser Weise<sup>3)</sup>. Da das Verhältnis der Windstärken auf dem Eiffelturm und in 21 m Höhe zwischen 2,8 um  $2^h p$  und 4,8 um  $4-6^h a$  schwankt, so kann man nicht erwarten, mit dem hier benützten Mittelwerte 4,05 eine Größe  $\mu$  zu finden, die dem mittleren Winkel zwischen den Windrichtungen dieser beiden Orte genau entspricht.

Wir wollen nun noch die Ergebnisse der Theorie über die Art der Luftbewegungen kurz besprochen. Die Formeln auf S. 106 für Windstärke und Ablenkungswinkel enthalten eine periodische Funktion der Höhe,  $\cos az$ , die stets mit dem Faktor  $e^{-az}$  vorkommt. Es ist also eine periodische Veränderung mit der Höhe vorhanden, die nach aufwärts immer kleiner wird. Da  $a = 0,01082 \text{ m}^{-1}$ , so ist die Höhe  $H$ , innerhalb welcher die ganze Periode liegt, ungefähr 600 m. Dort ist  $e^{-az} = 0,002$ , also schon sehr gering, so daß über jene Höhe hinaus die periodischen Glieder keine Rolle mehr spielen und nur die erste, unterste Periode, bzw. ein Teil derselben, in Betracht kommt.

Die Auswertung liefert, wenn für sehr große Höhen  $w_0 = 20 \text{ m/sec}$

1) M. Margules ist (Denkschr. d. Wien. Akad., Bd. 73, 1901) durch eine Überschlagsrechnung zu dem Resultat gelangt, daß die wahre innere Reibung nur sehr langsam zum Verbrauch der lebendigen Kräfte von Luftströmungen führen kann. Er bedient sich hierzu der von Stokes abgeleiteten Gleichung für den Energieverlust durch innere Reibung. Vgl. auch Abschnitt 35, S. 86.

2) Hann, Lehrbuch der Met., 3. Aufl., S. 406.

3) Annal. d. Hydrogr., 1883, S. 625; ferner bei Hann, a. a. O. S. 407.

angenommen wird, folgende Verteilung der Windstärke  $w$  und des Ablenkungswinkels  $\alpha$  vom Gradienten:

$z =$	5 m	$w =$ 1,49 m/sec	$\alpha =$ 46° 33'
	10	2,90	48 2
	20	5,72	50 58
	50	11,68	59 6
	100	17,86	70 25
	200	21,37	84 53
	400	20,10	90 42
	600	19,97	89 59
	1000	20,00	90 0

Hieraus ersehen wir zunächst eine rasche Zunahme der Windstärke mit Entfernung vom Boden und gleichzeitig eine Zunahme des Ablenkungswinkels; über erstere wurde schon oben gesprochen, die letztere wird gewöhnlich als „Rechtsdrehen des Windes mit der Höhe“ bezeichnet und ist eine normale Erscheinung auf der nördlichen Halbkugel. Die modernen aerologischen Untersuchungen haben gezeigt, daß diese Rechtsdrehung meist in etwa 1 km Höhe ihren vollen Wert erreicht hat; dabei ist ihr Betrag über verschiedenen Gebieten (Kontinent, Insel) recht ungleich.

Für England und Lindenberg hat Gold<sup>1)</sup> folgende Mittelwerte des Winkels gebildet, welchen der obere Wind mit dem unteren nahe der Erde einschließt:

	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0 km
England:	10°	17°	18°	20°	21°	20°
Lindenberg:	23	29	31	32	34	33

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den oben berechneten Winkeln  $\alpha$ , so erkennt man, daß es sehr darauf ankommt, in welchen Höhen man die untere Windrichtung mißt.

Eine Eigentümlichkeit der Gleichungen ist es, daß sie größere Windstärke (21,37 m/sec) in 200 m angeben, als in 1000 m, und daß der Ablenkungswinkel über den Wert von 90° hinauswächst. Praktisch spielen diese Differenzen wegen ihrer Kleinheit keine Rolle, sie sind aber von Interesse wegen der Kraftverteilung, die ihnen zugrunde liegt (vgl. Fig. 23).

Wie man sieht, läßt sich im allgemeinen annehmen, daß der Wind in etwa 200 m Höhe schon seine normale Stärke erreicht hat und daß seine Richtung von hier ab auf dem Gradienten senkrecht steht. Man kann also in dieser Höhe schon die Luftströmungen behandeln, als würde

1) Geophysical Memoirs des Met. Office, London 1913, Nr. 5.

keine Reibung (Abschnitt 36) vorhanden sein, was für viele meteorologische Aufgaben von Bedeutung ist.

Eine kurze Betrachtung sei noch der virtuellen Reibungskraft gewidmet. Ihre Komponenten in der  $x$ - und  $y$ -Richtung waren:  $R_x = \mu \frac{d^2 u}{dz^2}$ ,

$R_y = \mu \frac{d^2 v}{dz^2}$ ; sie lassen sich aus den Integralen berechnen und geben für

die totale Reibungskraft den Wert  $R = \frac{2\mu v_0 a^2}{\rho} e^{-az}$ . Der Winkel  $\beta$ , welchen letztere mit der positiven  $x$ -Achse einschließt, ist bestimmt

durch  $\text{tg } \beta = \frac{\frac{d^2 v}{dz^2}}{\frac{d^2 u}{dz^2}} = \text{tg } az$ . Die Lösung ist  $\beta = \pi + az$ .  $R$  nimmt also

nach aufwärts ab und rotiert außerdem mit zunehmender Höhe in der Richtung des Uhrzeigers. Die Reibung, von welcher Guldberg und Mohn annahmen, sie wirke stets der Windrichtung entgegen, schließt nun mit der Windrichtung den Winkel  $\delta = \beta - \alpha$  ein. Die Berechnung liefert für

$z = 5 \text{ m}$	$10 \text{ m}$	$20 \text{ m}$	$50 \text{ m}$	$100 \text{ m}$	$150 \text{ m}$	$200 \text{ m}$
$\delta = 136,5^\circ$	$138^\circ$	$141,5^\circ$	$152^\circ$	$171,5^\circ$	$194^\circ$	$219^\circ$

In kleinen Höhen über dem Boden, wo gewöhnlich die Windstärke beobachtet wird, also in 10 bis 20 m, liegt die Reibungskraft demnach rechts rückwärts von der Geschwindigkeit, ganz in Übereinstimmung mit dem oben erwähnten Ergebnis von Sandström; dieser fand den Winkel zwischen Reibungskraft und dem Wind entgegengesetzter Richtung zu  $38^\circ$ . Fast genau den gleichen Wert ( $180 - 141,5 = 38,5^\circ$ ) erhalten wir aus der Theorie für 20 m Höhe, während dieser Winkel näher dem Boden größer ist, in einiger Höhe aber durch Null hindurchgeht und nun mit anderem Vorzeichen wieder zunimmt. Doch wird zugleich die Reibungskraft so klein, daß sie keine Rolle mehr spielt.

Die folgenden zwei Figuren (23) versinnlichen im Gegensatz zu Fig. 21 die Kräfteverteilung bei geradliniger Bewegung (keine Zentrifugalkraft)

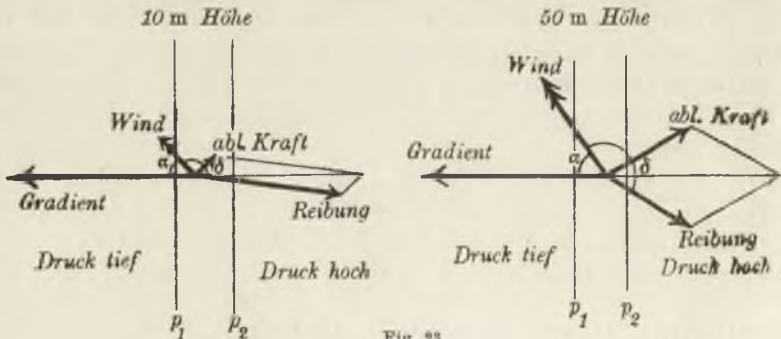


Fig. 23.

auf der nördlichen Halbkugel, und zwar für 10 m und 50 m Höhe. Der Gradient ist für beide Höhen gleich angenommen worden.

In 10 m Höhe ist die Reibungskraft groß, der Wind und mit ihm auch die ablenkende Kraft klein. In 50 m ist der Wind stärker, die Reibung geringer. Die gezeichneten Winkel  $\alpha$  und  $\delta$  sind den Gleichungen entnommen.

Man kann noch fragen, wie sich nun, bei innerer Reibung, das Verhältnis zwischen Windstärke und Gradient stellt; ob man dasselbe noch immer, wie beim Guldberg-Mohnschen Reibungsansatz, zu groß findet. Dieses Verhältnis war nach Guldberg-Mohn (S. 99)  $\frac{1}{\sqrt{l^2 + k^2}}$ ; nun ist es  $\frac{1}{l} \sqrt{1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az}}$ . Mit unserem Wert für  $a$  wird der Wurzelausdruck für  $z = 10$  m: 0,145, für  $z = 20$  m: 0,286. Nehmen wir die Reibung von flachem Festland (Paris) zu  $k = 6 \cdot 10^{-5}$  an (S. 100), so erhalten wir für  $\varphi$  nahe  $50^\circ$ , also  $l = 10^{-4}$ , die Größe  $\frac{1}{\sqrt{l^2 + k^2}} = 0,859 \cdot 10^4$ , die Größe  $\frac{1}{l} \sqrt{1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az}}$  für 10 m Höhe zu  $0,145 \cdot 10^4$ , für 20 m Höhe zu  $0,286 \cdot 10^4$ . Das besagte Verhältnis ist also jetzt wirklich kleiner und dürfte durchschnittlich für den Wind in 20 m Höhe dem wirklich beobachteten entsprechen.

Aus den letzten Zahlen sieht man, daß es keinen Sinn hat, die Windstärke schlechtweg in ihrem Verhältnis zum Gradienten zu untersuchen; man muß bei solchen Fragen genau angeben, in welcher Höhe die Windstärke gemessen ist, da sie mit der Entfernung von der Erdoberfläche in den untersten 50 m sehr rasch zunimmt.

**40. Ausfüllende, stationäre und gegen den Gradienten gerichtete Bewegungen.** Die Verwendung des Ausdrucks für die innere Reibung in den Bewegungsgleichungen ist nur bei den einfachsten Strömungsverhältnissen durchführbar; der viel bequemere Ausdruck von Guldberg und Mohn ist, wie wir sahen, nicht genau genug. Es empfiehlt sich daher, wo immer es möglich ist, von den Luftströmungen in den untersten Schichten ganz abzusehen und die Bewegungen in Höhen zu betrachten, in welchen die Reibung keine Rolle mehr spielt; dies ist schon in 500 m annähernd der Fall. Hier ist nach Abschnitt 36 im stationären Zustand der Wind parallel den Isobaren oder senkrecht zum Gradienten anzunehmen.

Gold<sup>1)</sup> hat untersucht, ob die für geradlinige oder krummlinige stationäre Bewegungen ohne Rücksicht auf die Reibung abgeleiteten Gleichungen (S. 86 u. 87) mit den Beobachtungen stimmen; er benützte hierzu die Windmessungen in 1000 m Höhe, welche durch Ballon- und Drachenaufstiege über Lindenberg gewonnen wurden. Das Ergebnis war,

1) Barom. Grad. & Wind Force; Rep. to Dir. Met. Off., London, 1908.

daß die mittels der ausgemessenen Druckgradienten berechneten Windstärken mit den beobachteten durchschnittlich auf 7,5% stimmten; doch waren die berechneten auch hier noch immer größer als die beobachteten.

Wir können daher obige Behauptung über die Richtung der Winde in der Höhe als bestätigt betrachten, solange der Zustand stationär ist.

Diese Windverteilung hat zur Folge, daß Luftdruckunterschiede zwischen verschiedenen Orten durch Luftbewegungen verhältnismäßig langsam ausgeglichen werden können. Würde die ablenkende Kraft der Erdrotation fehlen, so würde jede Luftbewegung bald zur Ausfüllung des Gradienten führen. Tatsächlich wird eine solche Ausfüllung in einiger Höhe nur durch eine Komponente der Bewegung möglich, die bei nicht stationären Bewegungen auftritt und fast stets recht klein ist. Denn bei den Vergleichen zwischen Windstärke und Gradienten, z. B. jenen Golds, zeigte sich, daß man im allgemeinen nicht weit fehlt, wenn man die Strömungen als stationär betrachtet. Die Abweichungen vom stationären Zustand sind immer recht klein, was Shaw<sup>1)</sup> geradezu als ein meteorologisches Gesetz angesehen wissen will.

Wir fanden oben (S. 85):  $\frac{du}{dt} + 2\omega \sin \varphi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  und eine analoge Gleichung für die  $y$ -Achse. Danach kann im nichtstationären Zustand die Beschleunigung in der  $x$ -Achse zum tiefen oder zum hohen Druck gerichtet sein, je nachdem die Geschwindigkeit in der  $y$ -Achse,  $v$ , zu klein oder zu groß ist, um den Gradienten zu kompensieren. Ist  $\frac{du}{dt}$  zum tiefen Druck gerichtet, so wird im allgemeinen der Gradient geschwächt, da Luft in die Gebiete befördert wird, in denen der tiefe Druck herrscht („ausfüllende Bewegung“). Ist  $\frac{du}{dt}$  zum hohen Druck gerichtet, so wird im allgemeinen der Gradient stärker; wir haben eine Bewegung, welche Druckunterschiede hervorruft, eine „Bewegung gegen den Gradienten.“<sup>2)</sup>

Eine solche Bewegung ist nicht die einzige, welche Gradienten erzeugen kann; sie darf somit auch nicht als notwendige Bedingung für die stets wieder neu auftretenden Druckunterschiede angesehen werden. Es scheint im Gegenteil, daß die Druckgradienten in einem Niveau meist durch „ausfüllende“, also zum tiefen Druck gerichtete Bewegungen in höheren Niveaus entstehen; man kommt mit der Betrachtung einer horizontalen Luftschicht hier nicht aus. Ist in der Höhe z. B. ein Gradient von Süd

1) Im Vorwort zu der oben zitierten Arbeit Golds.

2) N. Ekholm hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Windstärke bei Veränderungen des Gradienten größer ist, wenn der Gradient eben wächst, kleiner, wenn er eben abnimmt, wenn also Steig- bzw. Fallgebiete des Luftdrucks über einen Ort hinwegziehen; denn im ersten Fall tritt zur einwärts gerichteten Komponente der Geschwindigkeit die Beschleunigung hinzu, im zweiten Fall kommt sie in Abzug (Met. Zeitsch. 1907, S. 148; auch zitiert bei Sandström, Bull. Mt. Weath. Obs. Vol. III, S. 301).

nach Nord, so wird die Luft dort eine ausfüllende Bewegung gegen Norden ausführen können; hierdurch wird die Erdoberfläche im Süden entlastet, im Norden belastet, es kann also ein Gradient an der Erdoberfläche von Norden nach Süden die Folge sein.

Bewegungen gegen den Gradienten im obigen Sinn sahen wir (Abschnitt 37) bei den Oszillationen der Luft unter dem Einfluß eines konstanten Druckgefälles. Sie sind Erscheinungen der Trägheit der Luftmassen und müssen bei sämtlichen Wellenbewegungen in der Luft vorkommen, ferner auch bei unperiodischen Veränderungen der Kräfte, namentlich der Gradientkraft. Verändert sich die Verteilung des Luftdrucks, so kann sich die Luftbewegung nicht plötzlich der neuen Kraftverteilung anpassen, sondern nur allmählich. Hierbei wird es vorkommen, daß die Trägheit der Luftmassen Gradienten verstärkt, wie auch, daß sie solche abschwächt. Mit dem Ausdruck des „Anpassens der Luftströmungen an die vorhandenen Kräfte“ ist hier die Annäherung an den stationären Bewegungszustand gemeint, die unter dem Einfluß einer Reibungskraft recht rasch vor sich geht (S. 102).

Beständige Luftströmungen, welche den Gradienten nicht ausfüllen, sind nur in den höheren Luftschichten möglich; nahe der Erdoberfläche, wo der Wind der Reibung wegen nicht senkrecht zum Gradienten, sondern unter einem kleineren Winkel gegen ihn weht, werden die Bewegungen fast immer ausfüllende sein. Die Erdoberfläche ist hierdurch als ein Niveau gekennzeichnet, welches die Erhaltung eines bestehenden Bewegungszustandes verhindert. Sie ist tatsächlich das wichtigste Störungsniveau der Luftströmungen und spielt eine ganz hervorragende Rolle für dieselben. Dies äußert sich in Erscheinungen, auf die wir bei Besprechung der unperiodischen Luftdruckänderungen zurückkommen.

Während in einem höheren Niveau recht große horizontale Druckunterschiede bei geeigneten Windstärken stationär sein können, ist dies an der Erdoberfläche nicht möglich, da die Windstärken hier fortwährend durch Reibung verringert werden und gewisse Grenzen nicht überschreiten. Infolgedessen nimmt auch die Veränderlichkeit des Luftdrucks von einem Tag zum anderen mit zunehmender Höhe zu, um erst in der Stratosphäre geringer zu werden (vgl. Abschnitt 68).

Aus einem ähnlichen Grund ist die Jahresschwankung des Luftdrucks (Differenz der extremen Monatswerte) an der Erdoberfläche viel geringer als in der Höhe (z. B. Genf 3,3 mm, Sonnenblickgipfel 10,6 mm).<sup>1)</sup> Der Druck an der Erdoberfläche ist immer nahezu durch die Gesamtmasse der Atmosphäre bestimmt, während der Druck in bestimmter Höhe bei gleicher Masse der Atmosphäre je nach den herrschenden Temperaturverhältnissen der Luftsäule darunter ganz verschieden ausfällt.

Die Erdoberfläche stellt sich somit nicht als das Niveau dar, in

1) Nach Hann, Lebrb. d. Met., 3. Aufl., S. 199.

welchem, als dem untersten, die Luftbewegungen und die damit verbundenen Druck- und Temperaturgradienten am intensivsten und ausgesprochensten auftreten, wie man wohl erwarten könnte, sondern als ein Niveau, in welchem diese Erscheinungen nur verflachte und abgeschwächte Abbilder jener in höheren Schichten sind. Für den an die Erdoberfläche gebundenen Beobachter ist diese Tatsache nicht günstig.

**41. Turbulenz der Bewegung.** Schon auf S. 97 wurde darauf hingewiesen, daß die Luftteilchen sich nur bei geringen Geschwindigkeiten den hydrodynamischen Gleichungen entsprechend bewegen. A. Wegener<sup>1)</sup> hat hierauf neuerdings aufmerksam gemacht, nachdem M. P. Rudzki<sup>2)</sup> schon im Jahre 1892 ähnliche Ansichten geäußert hatte. Unsere bisherigen Kenntnisse dieser Verhältnisse sind noch sehr mangelhaft. Man weiß, namentlich aus Aufzeichnungen von Winddruckmessern, daß der Winddruck und mit ihm die Windgeschwindigkeit fortwährenden starken Intensitätsschwankungen unterliegt. Was wir im vorigen stets als Windgeschwindigkeit bezeichneten und in die Rechnung einführten, ist nur ein Mittelwert über eine mehr oder weniger lange Zeitspanne genommen, wie ihn etwa das Schalenkreuzanemometer vermöge seiner Trägheit liefert. In Wirklichkeit ist die Bewegung nahe der Erdoberfläche fast immer eine stoßweise, „pulsatorische“. Nur bei sehr schwacher Luftbewegung scheint eine den hydrodynamischen Gleichungen entsprechende ungestörte Bewegung möglich zu sein. Bei Zunahme der Geschwindigkeit tritt plötzlich die Turbulenz ein, bei welcher die Strombahnen durcheinander laufen, kleine Wirbel sich bilden, die Geschwindigkeiten von Teilchen zu Teilchen stark wechseln und infolgedessen auch der Druck auf eine der Strömung entgegengesetzte Fläche sehr variabel wird.<sup>3)</sup>

Gelegentlich von Drachenaufsteigen hat Dines<sup>4)</sup> aus dem wechselnden Zug, welchen die Drachenleine erleidet, schließen können, daß der Wind mit zunehmendem Abstand von der Erdoberfläche gleichmäßiger wird. Als Maß der Zugschwankungen definierte er die Differenz zwischen maximalem und minimalem Zug in einer Minute, dividiert durch den Mittelwert des Zuges in dieser Zeit (Gustines- oder Windstoß-Faktor). Dieser Faktor beträgt in 30 m Höhe nur mehr 75%, in 1000 m Höhe gar nur mehr 27% vom Werte in 10 m Höhe über dem Erdboden. Man sieht daraus, daß der größte Teil der Turbulenz des Windes durch die Nähe der Erdoberfläche und ihre großen Unebenheiten zustande kommt. Doch ist auch in höheren Schichten bei starken Winden die „turbulente“ Strömung die Regel, nicht aber die ideale Strömung der Bewegungsgleichungen.

1) Met. Zeitschr. 1912, S. 49.

2) Ann. d. Hydr. u. mar. Met., 1892 und Met. Zeitschr. 1912, S. 343.

3) Vgl. Hann, Lehrb. d. Met. 3. Aufl. S. 389.

4) Met. Zeitsch. 1912, S. 37 und 1913, S. 313.



Rudzki hat (a. a. O.) betont, daß in den unregelmäßigen Strömungslinien durch die Vermischung der Luftpartikel und die Bildung von kleinen Wirbeln große Energiemengen verloren gehen. Die den Bewegungsgleichungen entsprechende Geschwindigkeit wird nicht als mittlere, meßbare Geschwindigkeit des Luftstroms erscheinen, da die einzelnen Teilchen sich zum Teil auch quer zu der allgemeinen Strömungsrichtung bewegen; infolgedessen muß die mittlere Geschwindigkeit kleiner werden als jene. Zudem kann bei der Bildung von kleinen Wirbeln ein Teil der lebendigen Kraft in Wärme übergehen. Die Theorie hierfür ist nicht gegeben, doch ist wenigstens dargetan, warum die Vergleiche von Gradient und Windstärke nahe der Erdoberfläche so unbefriedigend ausfielen. Wir sahen oben (Abschnitt 40), daß erst in größerer Entfernung von der Erde die berechnete Windstärke mit der gemessenen nahe übereinstimmt (Gold); aber auch hier ist die erstere noch immer größer als die letztere.

Natürlich sind die Wirkungen der Turbulenz in den empirischen Reibungskoeffizienten enthalten; d. h. es wird sowohl der Guldberg-Mohnsche Reibungskoeffizient wie auch der Koeffizient der virtuellen Reibung so groß gefunden, weil nicht nur die physikalisch definierte Reibung der Luft, sondern hauptsächlich die Turbulenz mit Luftmischung und Wirbelbildung den Widerstand gegen die Bewegungen verursacht. Somit ist auch bei Vorhandensein turbulenter Bewegungen die Anwendung unserer Bewegungsgleichungen erlaubt, bzw. das einzig mögliche; nur ist nicht zu vergessen, daß wir nur eine mittlere Geschwindigkeit beobachten, die stets kleiner als die theoretische sein wird.

#### 42. Vertikaler Druckgradient und vertikale Bewegung.

Die erste der allgemeinen Bewegungsgleichungen von S. 33 lautete für die Richtung des Erdradius  $r$ :

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\cos^2\varphi\dot{\lambda}(\dot{\lambda} - 2\omega) = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Von der Bedeutung des zweiten und dritten Gliedes auf der linken Seite, den vertikalen Komponenten der ablenkenden Kraft und der Zentrifugalkraft, ist schon oben (Abschnitt 16) die Rede gewesen, wo sich zeigte, daß diese Glieder gegenüber der Schwerkraft  $g$  stets sehr klein sind und in erster Näherung vernachlässigt werden können.

Es bleibt dann links nur die vertikale Beschleunigung  $\ddot{r}$  übrig, welche in Analogie zur horizontalen Beschleunigung (Abschnitt 40) dann auftritt, wenn dem vertikalen Druckgradienten durch die Vertikalkraft, die Schwere, nicht das Gleichgewicht gehalten wird. Ein hierher gehöriger Fall, der Auftrieb warmer Luft in kälterer Umgebung, ist schon früher (Abschnitt 25) besprochen worden.

Die vertikale Beschleunigung ist im Verhältnis zur Schwere stets sehr gering. Trotzdem spielt sie eine Rolle; denn für die Witterung ist

auch eine geringe vertikale Bewegung schon von Bedeutung. Nahe der Erdoberfläche beeinflußt die vertikale Beschleunigung die Druckverteilung stets so, als würde eine vermehrte Schwerkraft wirken<sup>1)</sup>. Da nämlich an der Erdoberfläche die vertikale Bewegung null ist, so muß in geringer Höhe über derselben Aufwärtsbewegung eine Beschleunigung, Abwärtsbewegung eine Verzögerung erfahren; beide sind positiv zu zählen, so daß  $\ddot{r}$  stets additiv zu  $g$  hinzutritt. Die Druckdifferenz zwischen zwei Orten in einer Vertikalen, welche den Abstand  $z$  voneinander haben, ist im Ruhezustande  $p_0 - p = p \left( e^{\frac{gz}{RT}} - 1 \right)$ . Bei vermehrter Schwerkraft wächst sie; es entsteht somit durch vertikale Beschleunigung nahe der Erde eine Vergrößerung der vertikalen Druckdifferenz. Dort, wo man die Temperatur einer Luftsäule sehr genau bestimmen konnte, ist es auch gelungen, diese kleine Veränderung der Druckdifferenz nachzuweisen. Teisserenc de Bort<sup>2)</sup> hat dies mit den Beobachtungen auf dem Eiffelturm in Paris ausgeführt. Er berechnete den Druck am Fuß des Turmes aus dem Druck in der Höhe und den Temperaturen der Zwischenstationen und erhielt so einen der statischen Gleichung entsprechenden Wert  $p_0$ ; andererseits wurde der Druck am Boden direkt gemessen ( $p_0'$ ). Dabei ergab sich im Jahresmittel ein Unterschied zwischen beobachtetem und berechnetem Druck am Boden  $p_0' - p_0 = 0,13$  mm, also ein dem statischen überlagerter negativer Druckgradient nach aufwärts ( $-0,13$  mm); der Druck ist in der Höhe zu niedrig, auf die Luftmasse wirkt eine Beschleunigung nach aufwärts.

Teisserenc de Bort hat auch eine tägliche Periode dieses Gradienten nachgewiesen, die im Mittel der Monate Januar und Juli durch die folgenden Zahlen dargestellt wird:

$3^h$ a	$6^h$ a	$9^h$ a	$12^h$ m	$3^h$ p	$6^h$ p	$9^h$ p	$12^h$ p
-0,01	-0,07	-0,13	-0,19	-0,19	-0,11	-0,04	-0,04 mm

Die negativen Werte sind bei Tage größer als bei Nacht, was auf stärkere vertikale Bewegung bei Tage schließen läßt.<sup>3)</sup>

Man kann die Gleichung für die vertikale Bewegung, in welcher die Komponenten der Zentrifugalkraft und ablenkenden Kraft weggelassen sind, unter gewissen Voraussetzungen integrieren. Ist  $w$  die vertikale Geschwindigkeit, so ist  $\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ , wo  $z$  statt  $r$  gesetzt

1) F. M. Exner, Sitz. Ber. Wien. Akad. Bd. 112 Abt. IIa, 1903, S. 345.

2) Ann. Bur. Centr. Mét. de France, 1890 I, S. B 209 und Compt. Rend. Bd. 120, 1895, S. 846.

3) Fehler von  $1^\circ\text{C}$  in der Temperatur der Luftsäule von Eiffelturmhöhe würden den Druckgradient um 0,1 mm verändern; so große Temperaturfehler kann man aber bei Mittelwerten nicht annehmen, so daß die Deutung dieser Beobachtungen wohl einwandfrei ist.

ist. Nun ist zunächst (vgl. S. 32):  $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$ . Im stationären Zustand ist  $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ ; nehmen wir ferner an, die Luftbewegung sei wirbelfrei<sup>1)</sup>, so muß sein:  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}$ . Hiernach wird:  $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2 + v^2 + w^2)}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial z}$ , wo  $c$  die totale Geschwindigkeit ist.

Man hat somit  $\frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial z} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ . Ist noch die Temperatur  $T$  nach der Höhe  $z$  konstant, so folgt durch Integration:

$$\frac{c^2}{2} + gz + RT \lg p = f(xy),$$

also eine Gleichung, welche die Druckverteilung nach der Höhe angibt.<sup>2)</sup> Es hängt nun der Druck von der Bewegung der Luft ab (hydrodynamischer Druck) und die statische Gleichung (Abschnitt 19) gilt nur bei ruhender Luft, wo  $c = 0$ .

Wird der Druck am Erdboden ( $z = 0$ )  $p_0$ , die Geschwindigkeit da selbst  $c_0$  genannt, so folgt  $RT \lg \frac{p_0}{p} = gz + \frac{c^2 - c_0^2}{2}$ . Wir haben diese Ableitung gewählt, weil man nun unmittelbar sieht, daß der Effekt der Geschwindigkeitsunterschiede auf die Druckdifferenz eine direkte Folge der vertikalen Beschleunigung ist.<sup>3)</sup> Unter  $c$  ist die totale Geschwindigkeit verstanden. Bei wirbelfreier Bewegung kann zwar die vertikale Komponente derselben nicht überall null sein; trotzdem ist sie meist so gering, daß  $c$  und  $c_0$  hauptsächlich durch die horizontale Komponente, die Windgeschwindigkeit schlechthin, bestimmt sind.

Wir erhalten also eine Veränderung des vertikalen Druckgefälles durch einen Unterschied der Windstärken oben und unten. Die Druckdifferenz zwischen Basis und oberer Begrenzung der Luftsäule  $z$  wird vergrößert, wenn die Windgeschwindigkeit oben größer ist als unten. Nachdem dies das Normale ist, so folgt auch aus der Integralgleichung dieselbe Verstärkung des Gradienten gegenüber dem Ruhezustande, wie sie oben bewiesen wurde. Anderkó<sup>4)</sup> hat den letzteren Weg gewählt, um den vertikalen Gradienten zu bestimmen.

Die obige Gleichung läßt rasch beurteilen, wieviel ein Unterschied in der Windstärke ausgibt. Ist z. B., wie auf dem Eiffelturm im Jahres-

1) Vgl. z. B. Christiansen, Theor. Physik, 1903, S. 149.

2) Vgl. die auf S. 92 abgeleitete Beziehung zwischen der Druckveränderung, die eine Luftmasse durchmacht, und der hierdurch erzeugten Windstärke.

3) Die gewöhnliche Ableitung dieser Formel aus allen drei Bewegungsgleichungen (vgl. S. 127) setzt die Vernachlässigung der scheinbaren Kräfte nicht voraus, sondern gilt ganz allgemein, wenn die Bewegung wirbelfrei ist.

4) Met. Zeitsch. 1905, S. 547.

mittel<sup>1)</sup>,  $c = 8,7$  m/sec,  $c_0 = 2,2$  m/sec, so findet sich  $\frac{c^2 - c_0^2}{2} = 35,5$ . Dieser Unterschied gibt für den Luftdruck soviel aus, als würde die Höhe der Säule um  $\frac{1}{g} \frac{c^2 - c_0^2}{2}$ , also um 3,5 m gewachsen sein. Der Druck soll also auf dem Eiffelturm durch diese Strömungsverhältnisse um etwa 0,3 mm Hg erniedrigt werden, einen Wert, der allerdings dreimal so groß ist, als der von Teisserenc de Bort empirisch gefundene<sup>2)</sup>. Der Grund für den Unterschied kann zum Teil darin liegen, daß durch die Mittelbildung die Ergebnisse stets abgeschwächt werden, zum Teil darin, daß die Voraussetzung wirbelfreier Bewegung gewiß nicht erfüllt ist. Sobald die vertikale Bewegung, welche dieser entspricht, zum Teil fehlt, muß auch der fragliche Effekt auf den Luftdruck vermindert werden.

Im allgemeinen können wir trotzdem die statische Grundgleichung, aus der sich die Höhenformel ergibt, als sehr genau gültig ansehen; die vertikale Beschleunigung beeinflusst die Druckverteilung so wenig, daß sich dieser Effekt meist der Beobachtung entzieht.

Demzufolge ist dann allerdings auch die für das Wetter wichtige vertikale Bewegung aus der Bewegungsgleichung kaum bestimmbar. Besser ist hierfür die Kontinuitätsgleichung zu brauchen, womit wir nochmals in das Gebiet der Kinematik (5. Kapitel) kommen. Schon im Abschnitt 31 wurde bemerkt, daß eine Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit in einer horizontalen Stromröhre in einer Luftsäule absteigende Bewegung verlangt, und umgekehrt. Da die Druckverteilung meist leichter und übersichtlicher dargestellt werden kann, als die Geschwindigkeitsverteilung, so empfiehlt es sich, die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten in der Kontinuitätsgleichung durch die Druckgradienten auszudrücken.

Wir benützen dazu die Guldberg-Mohnschen Gleichungen für stationäre Strömung (S. 99) und erhalten aus ihnen, wenn  $l^2 + k^2 = \sigma^2$  gesetzt wird:

$$\rho u = -\frac{k \frac{\partial p}{\partial x} - l \frac{\partial p}{\partial y}}{\sigma^2}, \quad \rho v = -\frac{-l \frac{\partial p}{\partial x} + k \frac{\partial p}{\partial y}}{\sigma^2}.$$

1) Hann, Lehrbuch d. Met. 3. Aufl. S. 393.

2) Unterschiede zwischen berechnetem und beobachtetem Druck von den angegebenen Größen und Vorzeichen haben Teisserenc de Bort (a. a. O.) zwischen Puy de Dôme und Clermont, Anderkö (a. a. O.) in Ungarn und neuerdings G. v. Elsner (Abh. preuß. Met. Inst. Bd. IV, Nr. 8, 1913) zwischen Schneekoppe und deren Fußstation gefunden. Wenn es auch günstig aussieht, daß sich hier überall das nach der Theorie zu erwartende Vorzeichen der Abweichungen ergeben hat, so sind doch diese Beobachtungen viel weniger beweisend als die vom Eiffelturm, da für höhere Luftsäulen Temperaturfehler viel mehr ausgeben als für niedrige und die Temperatur vom Eiffelturm mit Hilfe von zwei Zwischenstationen viel besser bekannt war, als die der anderen Luftsäulen.

Verbinden wir dies mit der Kontinuitätsgleichung für stationären Zustand (S. 66), so wird:  $\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ . Da die vertikale Geschwindigkeit an der Erdoberfläche selbst stets null ist, während aufsteigender Strom positiv gerechnet wird, so ist in der Nähe der Erdoberfläche auch  $\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$  bei aufsteigendem Strom positiv, bei absteigendem negativ.

Ist daher die Verteilung der Isobaren derartig, daß der Klammerausdruck rechts positiv wird, so haben wir daselbst aufsteigende Bewegung zu erwarten. Zur Vereinfachung sei  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , die Isobaren verlaufen parallel zur  $x$ -Achse. Dann läßt sich die Bedingung auch so formulieren: Nimmt der Gradient gegen den tiefen Druck hin ab, ist also  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} > 0$ , so ist die Vertikalbewegung aufsteigend, anderen Falles absteigend. Die folgenden Figuren 24 versinnbildlichen diese Druckverteilung. Der Druck ist als Ordinate aufgetragen, die Abschnitte auf der

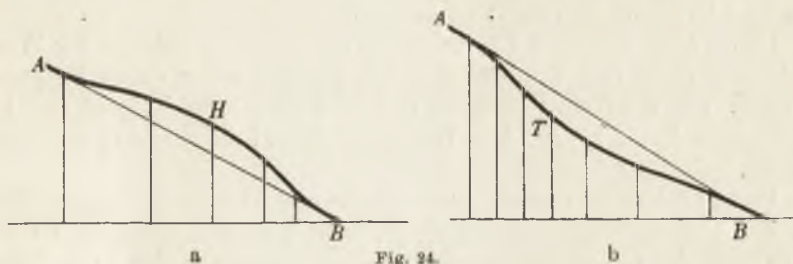


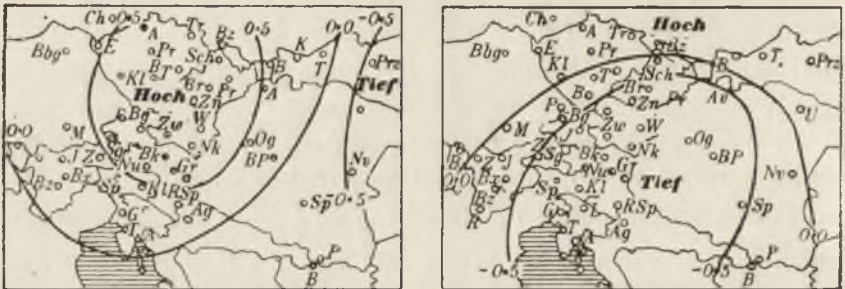
Fig. 24.

Abszissenachse deuten die Abstände der Isobaren voneinander an, wie sie auf den Wetterkarten erscheinen. In Fig. 24a ist Anlaß zu absteigender, in b zu aufsteigender Bewegung gegeben. Man kann diese Druckverteilungen auch so denken, daß dem konstanten Druckgradienten, welcher durch die schiefe Gerade  $AB$  angegeben wird, im ersten Fall ein relatives Hochdruckgebiet  $AHB$ , im zweiten ein Tiefdruckgebiet  $ATB$  überlagert ist. Ersteres ist nahe dem Boden mit absteigender, letzteres mit aufsteigender Bewegung verbunden.

Die Erfahrung hat das Vorhandensein vertikaler Bewegungen unter solchen Umständen bestätigt. Betrachtet man viele Wettersituationen, bei welchen allen der gleiche Gradient und Wind herrscht, so kann man nachsehen, unter welchen Umständen diese Situationen schönes oder schlechtes Wetter haben. Bei Westwind in Wien z. B.<sup>1)</sup> verlaufen die Isobaren an dieser Station von NW nach SE. Stellt man nun jene Fälle zusammen, bei denen in Wien bei Westwind von gewisser Stärke schönes Wetter, und jene, bei denen Niederschlag beobachtet wurde, so erhält

1) F. M. Exner, Sitz.-Ber. Wien. Akad., Bd. 112, Abt. IIa, 1903.

man zwei mittlere Isobarenkarten, die nur ganz wenig voneinander verschieden sind. Die Unterschiede ergeben sich am besten, wenn man die Abweichungen von ihrem gemeinsamen Mittel bildet und durch Kärtchen



a) W 5 od. W 6 u. Bew. 0—3 Fig. 25. b) W 5 od. W 6 u. Niedersch.

darstellt (Fig. 25). Der Fall von schönem Wetter in Wien gibt ein relatives Hochdruckgebiet (Fig. 25a), der Fall von Niederschlag ein Tiefdruckgebiet (Fig. 25b); denselben ist der allgemeine, mit Westwind verbundene Gradient überlagert zu denken.

Es ist klar, daß diese Überlegungen nur zutreffen, solange der Wind nicht senkrecht zum Gradienten weht, sondern unter einem kleineren Winkel. Die vertikale Bewegung nahe der Erdoberfläche geht also bei stationären Bewegungen ohne Wärmezufuhr auf die Reibung an dieser zurück.

Das gleiche gilt von absoluten Hoch- und Tiefdruckgebieten. Hier ist das Vorhandensein von Abwärts-, bzw. Aufwärtsbewegung an der Erdoberfläche wegen der Divergenz und Konvergenz der Stromlinien eine selbstverständliche Forderung des stationären Zustands (S. 68). Der Luftersatz beim Hochdruckgebiet, die Fortschaffung der Luft beim Tiefdruckgebiet kann nahe der Oberfläche nur in der Richtung von oben, bzw. nach oben erfolgen. In höheren Schichten trifft dies nicht mehr zu, hier steht dem Lufttransport die Richtung nach auf- und nach abwärts zur Verfügung.

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, das Hoch- bzw. Tiefdruckgebiet sei durch konzentrische kreisförmige Isobaren dargestellt; dann können wir auf dasselbe die Bewegungsgleichungen von S. 104 und die Kontinuitätsgleichung von S. 87 anwenden. Ist rings um den Mittelpunkt alles symmetrisch (unabhängig von  $\vartheta$ ) und zudem die Bewegung stationär, so läßt sich die Kontinuitätsgleichung schreiben:

$$\frac{\partial(\rho \dot{r})}{\partial r} + \rho \frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z},$$

die zweite Bewegungsgleichung aber:  $\dot{t} = \frac{kr\dot{\vartheta}}{l - 2\dot{\vartheta}}$ , wobei  $\dot{\vartheta}$  konstant ist.

Man erhält:  $\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\dot{r} \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{2\rho}{r} \right)$ .

Im Zentrum überwiegt stets das Glied  $\frac{2\varrho}{x}$ , dort bewegt sich demnach die Luft von der Erdoberfläche nach aufwärts, wenn  $\dot{r} < 0$ , also in Zyklonen, nach abwärts, wenn  $\dot{r} > 0$ , also in Antizyklonen. Diese vertikalen Ströme sind zugleich die Ursache des überwiegenden Schlechtwetters in Tiefdruck-, des Schönwetters in Hochdruckgebieten. In höheren Schichten der Atmosphäre folgt aus dem Vorzeichen von  $\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}$  nicht mehr eindeutig das von  $w$ , wie dies an der Erdoberfläche der Fall ist, folglich gelten diese Überlegungen dort nicht mehr.<sup>1)</sup>

#### 43. Wärmeaustausch zwischen Erde und bewegter Luft.

Eine Luftmasse, die sich bewegt, kann von der umgebenden Luft isoliert bleiben oder sich mit ihr vermischen. Im ersten Fall wird sie in nicht zu langen Zeiten einigermaßen ihren Wärmegehalt bewahren, wenn nicht Strahlungsvorgänge hinzutreten oder Niederschlag ausfällt. Sehen wir hiervon ab, so können wir die Bewegung der Luft ohne Mischung als adiabatisch ansehen. In der Nähe der Erdoberfläche ist dies nicht mehr der Fall, die Luft wird durch unmittelbare Berührung in einen Wärmeaustausch mit dem Boden oder der Meeresfläche treten, der ihre potentielle Temperatur wesentlich verändern kann.

Um diese Vorgänge zu untersuchen, läßt sich zunächst die einfache Annahme machen, daß die Temperatur einer über die Erde fließenden Luftmasse sich proportional der Temperaturdifferenz Erde—Luft ändere.<sup>2)</sup> Die Unterlage wirkt je nach dem Vorzeichen dieser Differenz erwärmend oder abkühlend. Ist  $T$  die Temperatur der Luft,  $U$  die der Unterlage und  $k$  ein konstanter Koeffizient, so wird also:  $\frac{dT}{dt} = k(U - T)$ .

Da die Wärmekapazität der Erde, noch mehr aber die des Wassers größer ist als die der Luft, so wird die Unterlage in ihrer Temperatur durch die Luft viel weniger beeinflußt als die Luft durch die Unterlage. Infolgedessen läßt sich angenähert  $U$  als konstante Funktion des Ortes auffassen, während  $T$  von Ort und Zeit abhängt.

Wir betrachten z. B. Luft, die sich an der Erdoberfläche in einer geraden Linie von N nach S bewegt. In dieser Richtung möge die Bodentemperatur linear zunehmen, so daß  $U = G + Hx$ . Ursprünglich war die Luft in Ruhe und hatte die Temperatur der Unterlage. Nun bewegt sie sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  und kommt dadurch über immer wärmere Gebiete. Es entsteht die Frage, welche Temperatur die Luft nach der Zeit  $t$  am Orte  $x$  haben wird.

1) Trabert hat (Met. Zeitsch. 1903, S. 232) die Vermutung ausgesprochen, daß die antizyklonale Krümmung der Isobaren allein schon absteigende, die zyklonale aufsteigende Bewegung bedinge, auch wenn nur kleine Isobarenstücke solche Krümmung haben. Dies läuft im wesentlichen wieder auf die Divergenz und Konvergenz der Stromlinien hinaus, von denen schon oben (S. 68) die Rede war.

2) F. M. Exner, Sitz. Ber. Wien. Akad., Bd. 120, Abt. IIa, 1911, S. 181.

Die Integration liefert  $T = G + Hx - \frac{Hv}{k}(1 - e^{-kx})$ . Die Temperaturdifferenz zwischen Erdoberfläche und Luft ist somit

$$U - T = \frac{Hv}{k}(1 - e^{-kx}).$$

Sie nähert sich mit zunehmender Zeit dem konstanten Wert  $\frac{Hv}{k}$ ; je größer der Erwärmungskoeffizient  $k$  ist, desto eher wird dieser Zustand erreicht.

Wir haben hier das schematische Beispiel eines Kälteeinbruches, wo Luft aus kälteren Gegenden in wärmere fließt und diesen Abkühlung bringt. Statt der unbekanntes Bodentemperatur  $U$  können wir die vor dem Kälteeinbruch gemessene Lufttemperatur benutzen; dann soll, so verlangt es die Rechnung, die Abkühlung an allen Orten ungefähr den gleichen Betrag erreichen. Die Untersuchung einiger nordamerikanischer Kältewellen ergab nun wirklich an verschiedenen Orten ihrer Bahn eine Abkühlung von nahezu gleicher Größe, ob diese nun in der Gegend der großen Seen oder des Golfs von Mexiko gemessen wurde. Aus dem Betrag der Abkühlung läßt sich der Erwärmungskoeffizient berechnen; er wurde für jene Kälteeinbrüche zu  $k = 2 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$  gefunden.

Die Temperatur einer bestimmten Luftmasse erhalten wir als Funktion der Zeit, wenn wir die eben gefundene Temperaturdifferenz  $U - T = \frac{Hv}{k}$  in die ursprüngliche Differenzialgleichung einsetzen und integrieren. Sie wird  $T = T_0 + Hvt$ . Eine bestimmte Luftmasse wird also auf dem Weg nach Süden proportional der Zeit wärmer. Bestimmt man die Temperatur der vordersten kalten Luftmassen bei jenen Kälteeinbrüchen, so erhält man tatsächlich sehr angenähert ein mit der Zeit lineares Ansteigen derselben, das um so größer ist, je schneller sich die Luft bewegt.

Strömt an einer Stelle der Erdoberfläche Luft dauernd aus nördlichen in südliche Gegenden, wie dies z. B. in der nördlichen Passatregion der Fall ist (NE nach SW), so erwärmt sie sich offenbar auf einer gewissen Strecke um so viel, als der mittlere Temperaturunterschied auf dieser Strecke beträgt. Denn nur in diesem Fall ist der Bewegungszustand stationär. Die tatsächliche Temperaturverteilung in der Passatregion ist also durch die Größe des Erwärmungskoeffizienten bedingt. Man kann denselben daher auch aus dieser Erscheinung berechnen und findet einen Wert von der gleichen Größenordnung wie oben.

In ähnlicher Weise wird auch bei anderen stationären Strömungen durch die Wärmeübertragung vom Boden an die Luft oder umgekehrt die Temperaturverteilung an der Erdoberfläche bestimmt; doch sind diese Verhältnisse noch sehr wenig untersucht. Als Beispiel sei nur der Temperaturgegensatz der Ost- und Westküsten der Kontinente erwähnt, welcher in höheren Breiten durch die allgemeinen Westwinde



unterhalten wird. Die Fähigkeit der Luft, Wärme von der Erdoberfläche aufzunehmen und wo anders wieder an sie abzugeben, ist auch die Ursache des ausgleichenden und mäßigenden Einflusses, welchen Luftbewegungen im allgemeinen auf das Klima haben.

Shaw und Lempfert<sup>1)</sup> verfolgten eine Luftmasse, die sich über die Erde bewegt, auf ihrer Bahn und bemerkten, daß der Wärmeaustausch zwischen Erdoberfläche und Luft besonders rasch über dem Meere erfolgt. Die Luft nimmt, sobald sie auf den Ozean kommt, sehr rasch die Temperatur des Seewassers an. Über dem Kontinent glaubten die genannten Autoren eher eine Anpassung der Bodentemperatur an die Lufttemperatur zu finden. Unsere obige Annahme von der Konstanz der Temperatur der Unterlage wird also am Meere genauer erfüllt sein als am Kontinent. Die spezifische Wärme des Erdbodens beträgt rund 0,6 kg-Kal., ist also nur etwa dreimal größer als die der Luft; seine Dichte ist allerdings ungefähr 2000mal größer. Doch nehmen am Wärmeaustausch viel ausgedehntere Volumina von der beweglichen Luft teil als vom festen Boden, der nur mit seiner obersten Schicht in Betracht kommt. Infolgedessen können die Temperaturänderungen von Luft und Boden trotz der großen Dichte des letzteren vielleicht weniger verschieden ausfallen, wie man erwarten möchte.

---

1) Met. Off. London, Nr. 174, 1906 oder Zitat S. 69.

## Siebentes Kapitel.

### Energie der Luftbewegungen.

**44. Richtung der Vorgänge.** Ist irgendein Zustand der Massenverteilung und der Bewegung in der Atmosphäre gegeben, so können wir fragen, ob und in welcher Richtung sich dieser Zustand in der nächsten Zeit aus sich selbst heraus verändern wird. Die Physik kennt zwei Prinzipie, welche beurteilen lassen, in welcher Richtung eine Veränderung von selbst vor sich geht; das weitaus allgemeinere derselben ist das Entropieprinzip. Die molekularen Vorgänge, auf welche sich dasselbe bezieht, bewirken aber nur so langsame Veränderungen, daß wir von diesem Prinzip in der Meteorologie keinen Gebrauch machen können. So wird z. B. die Diffusion einen Ausgleich der Temperaturen in der Atmosphäre anstreben, doch braucht der Vorgang so lange Zeit, daß unterdessen Massenverlagerungen im Großen diese kleinen Vorgänge ganz überdecken.

Das zweite Prinzip sagt aus: von selbst eintretende oder natürliche Bewegungen geschehen so, daß hierdurch Arbeit geleistet oder die potentielle Energie verringert wird. Der freigelassene Körper, welcher unter der Wirkung der Schwere fällt, oder das komprimierte Gas, das seinen Druck mit der Außenluft auszugleichen strebt, sind Beispiele dafür.

Dieses der Mechanik entnommene Prinzip findet auch auf die mechanischen Vorgänge der Luftbewegungen Anwendung. Eine ruhende Luftmasse setzt sich gegebenen Falls in dem Sinne in Bewegung, daß dadurch die potentielle Energie, also jene Energie, die Arbeit leisten kann, geringer wird. Sich selbst überlassen sucht die Luftmasse jenen Zustand auf, bei welchem die potentielle Energie ein Minimum wird. Sie bleibt demnach in Ruhe, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Da auf die Luftmassen, von Reibung abgesehen, nur zwei selbständige Kräfte wirken, die Schwere und der Druckgradient, so ist das Minimum der potentiellen Energie gegeben durch möglichst tiefe Lage des Schwerpunktes dieser Massen bei dem vorhandenen Wärmezustand derselben und durch Verschwinden der horizontalen Druckdifferenzen. Dies ist aber identisch mit den Bedingungen des stabilen Gleichgewichts (vgl. Abschnitt 25).

Um die Richtung zu beurteilen, nach welcher ein atmosphärischer Zustand sich verändern wird, hat man also die potentielle Energie heran-

zuziehen. Doch gilt dies, wie gesagt, nur für die von selbst eintretenden Veränderungen. Bei schon vorhandenen Bewegungen kann natürlich vorübergehend die potentielle Energie eben durch diese Bewegungen selbst vermehrt werden, wie z. B. bei Trägheitsbewegungen gegen den Druckgradienten. Außerdem kann durch äußere Einflüsse jede beliebige Änderung der potentiellen Energie bewirkt werden.

Von solchen Einflüssen ist namentlich die Wärmezufuhr und Wärmeentziehung durch Sonnenstrahlung und Ausstrahlung der Luft gegen den Weltraum wichtig. Die Wärmezufuhr in den äquatorialen Gegenden bewirkt eine Ausdehnung der Luftmassen daselbst, also eine Hebung des Schwerpunktes, eine Vermehrung der potentiellen Energie, außerdem auch eine Erzeugung von horizontalen Druckgradienten in der Höhe vom Äquator polwärts und eine Verdampfung von großen Mengen Wasser. Werden die Massen nach erfolgter Erwärmung sich selbst überlassen, so verändern sie ihre Lage dann in dem Sinn, daß die potentielle Energie abnimmt.

Dieses Prinzip läßt sich demnach nur auf abgegrenzte Massen nicht zu großer Ausdehnung und nur dort anwenden, wo äußere Einflüsse fehlen oder vernachlässigt werden dürfen; demnach nicht auf die ganze Atmosphäre und ihre allgemeine Zirkulation, wohl aber auf die in kleineren Dimensionen vor sich gehenden Störungen höherer Breiten, auf Depressionen, Kälteeinbrüche, Böen usw.

**45. Gleichung der lebendigen Kraft.** Eine wichtige Frage in der Meteorologie ist die nach der Herkunft der Winde und ihrer lebendigen Kraft. Wie oben bemerkt lassen sich die atmosphärischen Erscheinungen ganz allgemein in zwei Gruppen einteilen: Bei der ersten wird Wärme zugeführt (oder entzogen; nicht adiabatische Vorgänge, vgl. Abschnitt 9), die sich günstigen Falles direkt in Bewegung umsetzen kann wie beim Aufsteigen der Luft über erwärmtem Boden, oder aber in irgendeiner Form aufgespeichert wird (potentielle Energie). Bei der zweiten Gruppe ist der Energieinhalt konstant (adiabatische Vorgänge), hier können Umwandlungen der potentiellen und kinetischen Energie von selbst vor sich gehen, wodurch die erstere im Sinne des vorigen Abschnittes auf Kosten der zweiten kleiner wird und einem Minimum zustrebt.

Das häufige, plötzliche Auftreten stürmischer Winde deutet schon darauf hin, daß große lebendige Kräfte nicht direkt aus der zugeführten Wärme stammen, sondern aus einem aufgespeicherten Energievorrat schöpfen. Für die unmittelbare Entstehung der Luftströmungen ist in der Tat die zweite Gruppe von Erscheinungen wichtiger, wenngleich die Aufspeicherung von potentieller Energie ihre notwendige Vorbedingung ist.

Neben diesen beiden läßt sich analog zu den pseudoadiabatischen Prozessen (Abschnitt 10) noch eine dritte Gruppe unterscheiden, bei wel-

cher in einer abgeschlossenen Luftmasse durch Niederschlag Kondensationswärme frei wird.

Zur Erklärung der großen kinetischen Energie der Luftströmungen hat man wesentlich drei Energiequellen herangezogen: die potentielle Energie der horizontalen Massenverteilung, die potentielle Energie der vertikalen Massenverteilung und die Kondensationswärme. Während früher Ferrel die Bedeutung der letzteren stark hervorhob, wurde in letzter Zeit namentlich durch Bigelow und Margules die potentielle Energie der Massenverteilung in vertikaler Richtung in den Vordergrund gestellt. Bigelow<sup>1)</sup> sieht den Ursprung der Zyklonen im Gegen- und Übereinanderfließen verschieden temperierter Luftmassen; die ungleichen Temperaturen stammen aus verschiedenen Breiten der Erde und suchen sich auszugleichen. Margules<sup>2)</sup> untersucht die Herkunft der kinetischen Energie, die in den Zyklonen, Böen, Gewittern usw. zu Tage tritt, mittelst des Energieprinzips und bestätigt die Ansichten von Bigelow durch strikte mathematische Ableitungen.

Wir betrachten zuerst die Erscheinungen in trockener Luft und behandeln die dritte oben genannte Energiequelle, die Kondensationswärme, später.

Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft entsteht aus der vorhandenen potentiellen Energie die lebendige Kraft der Bewegung. Dieses Gesetz läßt sich auf feste Körper sehr einfach anwenden, da hier als potentielle Energie nur die der Lage in Betracht kommt. Bei Gasen wird die Anwendung verwickelter, weil zu jener noch die potentielle Energie der Druckverteilung hinzutritt, die gleichfalls lebendige Kraft liefern kann. An Kräften ist ja neben der Schwere auch noch der Druck vorhanden. Die Arbeit, welche die Druckkräfte leisten, stammt aus dem Wärmegehalt des Gases; ihr Umsatz wird durch den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie dargestellt.

Wir haben demnach zur Berechnung der Energieverhältnisse einer Luftmasse die Gesetze der Mechanik und Thermodynamik zu verbinden, behandeln aber an erster Stelle im folgenden den rein mechanischen Vorgang.

Wir multiplizieren zunächst die drei allgemeinen Bewegungsgleichungen von S. 33 der Reihe nach mit den Komponenten der linearen Geschwindigkeit nach der  $r$ -,  $\varphi$ - und  $\lambda$ -Richtung, d. i. mit  $\dot{r}$ ,  $r\dot{\varphi}$  und  $r \cos \varphi \dot{\lambda}$ , und addieren sie daraufhin. Auf der linken Seite fallen dann alle Glieder weg, welche von der Zentrifugalkraft und der ablenkenden Kraft der Erdrotation herrühren, und es bleiben dort nur die Glieder

1) Monthly Weath. Rev. 1902, S. 251 und namentlich 1903, S. 72; ferner 1906, S. 9 und 16.

2) Über den Arbeitswert einer Luftdruckverteilung; Denksch. Wien. Akad. B. 73. 1901. Über die Energie der Stürme, Jahrb. k. k. Zentralanst. f. Met. und Geodyn., Wien, 1903, Anhang. Zur Sturmtheorie, Met. Zeitsch. 1906, S. 481.

stehen, welche Beschleunigungen enthalten. Die letzteren kann man vereinigen und hiernach die Summe der drei Gleichungen schreiben:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2] = -g\dot{r} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \right).$$

Der Wert in der eckigen Klammer ist das Quadrat der totalen Geschwindigkeit  $c$  einer Luftmasse 1,  $\frac{c^2}{2}$  die lebendige Kraft derselben.

$$\text{Somit wird: } \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{2} + gr \right) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \right) = 0.$$

Dies ist der Ausdruck für das Energieprinzip. Danach kann eine lebendige Kraft einerseits aus einer Abnahme der potentiellen Energie der Lage entstehen, als welche für die Masseneinheit  $gr$  erscheint, andererseits aus einem negativen Wert von  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \right)$ , wenn  $ds$  die von der Luftmasse in der Zeit  $dt$  zurückgelegte Wegstrecke ist. Dieser von der Druckverteilung abhängige Ausdruck ist nichts anderes als die Arbeit der Druckkräfte in der Masse 1, geleistet bei der Verschiebung der Luft in der Zeiteinheit; denn  $\frac{\partial p}{\partial s}$  ist die in die Richtung derselben fallende Kraft,  $\frac{ds}{dt}$  der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg. Es zeigt sich somit in der Arbeit der Druckkräfte eine zweite Quelle lebendiger Kraft.

Wir wollen zunächst die Arbeitsleistung der Druckkräfte umformen. Nach der Bemerkung auf S. 32 ist

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right).$$

Wie man ohne weiteres sieht, ist dieser Ausdruck kein vollständiges Differenzial. Ein einzelnes Massenteilchen Luft leistet also bei seiner Bewegung Druckarbeit, die nicht allein vom Anfangs- und Endzustand abhängt, sondern auch von dem Weg, auf dem die Verschiebung vor sich ging. Es läßt sich somit aus Anfangs- und Endzustand nicht unmittelbar die durch Druckarbeit gewonnene lebendige Kraft angeben. Bei der potentiellen Energie der Lage ist dies hingegen der Fall, weil  $gdr$  ein vollständiges Differenzial ist.

Margules hat gezeigt, daß die Arbeit der Druckkräfte sich unter Umständen in übersichtlicherer Weise darstellen läßt. In einem geschlossenen System, das von festen Wänden begrenzt wird, ist sie nämlich identisch mit der Ausdehnungsarbeit. Unter gewissen Voraussetzungen wird diese Arbeit von dem Weg, auf dem die Verschiebung vor sich geht, unabhängig, sie erhält den Charakter eines Potentials, aus dessen Anfangs- und Endwert sich die gewonnene lebendige Kraft berechnen läßt.

Um diesen Beweis zu führen, ist es bequemer, statt des Polarkoordinatensystems ein rechtwinkliges einzuführen. Die in der Zeiteinheit von den Druckkräften in der Masse 1 geleistete Arbeit kann man dann schreiben:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w \right).$$

In der Masse vom Volumen  $k$  wird in der Zeiteinheit die Druckarbeit geleistet:

$$\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{dt} \rho dk = \int \left( \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w \right) dk.$$

Dabei ist das Volumelement  $dk = dx dy dz$ .

Im letzten Ausdruck läßt sich durch partielle Integration jedes Glied nach Art des folgenden umformen:

$$\int \int \int \frac{\partial p}{\partial x} u dx dy dz = \int \int p u dy dz - \int \int \int p \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz.$$

Ist  $c = \frac{ds}{dt}$  die totale Geschwindigkeit und  $(cx)$  deren Winkel mit der  $x$ -Achse, ferner  $n$  die Normale auf ein Oberflächenelement  $dO$  der Begrenzung der geschlossenen Luftmasse und somit  $(nx)$  der Winkel dieser Normalen mit der  $x$ -Achse, so wird, weil  $dy dz = dO \cos(nx)$  und  $u = c \cos(cx)$ , auch:

$$\int \int \int \frac{\partial p}{\partial x} u dx dy dz = \int p c \cos(cx) \cos(nx) dO - \int \int \int p \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz.$$

Summiert man nun die 3 Glieder dieser Art aus der obigen Gleichung, so wird:

$$\int \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{dt} dk = \int p c \cos(nc) dO - \int p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dk;$$

denn es ist

$$\cos(nc) = \cos(cx) \cos(nx) + \cos(cy) \cos(ny) + \cos(cz) \cos(nz).$$

Da aber die Bewegung der geschlossenen Luftmasse an ihrer Oberfläche stets parallel zu ihrer Begrenzung sein muß, so ist an der Oberfläche  $\cos(nc) = 0$  und das Oberflächenintegral verschwindet.

Der Ausdruck  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  im zweiten Integral kann nun mit Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung auf S. 34 durch  $-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$  ersetzt werden. Es wird somit:  $\int \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{dt} dk = \int \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dk = \int \frac{p}{\rho^2} d\rho dm$ , wo  $dm = \rho dk$  ein Massendifferenzial bedeutet. Dies ist die von den Druckkräften in

der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Integriert man über die Zeit, so wird

die gesamte Arbeitsleistung  $\mathfrak{A} = \int dm \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{p}{\varrho^2} d\varrho$ . Dabei beziehen sich  $\varrho_0$

und  $\varrho$  auf den Anfangs- und Endzustand der Luftmasse.

Das spezifische Volumen der Luft ist  $v = \frac{1}{\varrho}$ ; somit wird auch

$\mathfrak{A} = - \int dm \int_{v_0}^v p dv$ . Dies ist die negativ genommene Ausdehnungsarbeit

der Luftmasse, die nötig ist, um das Volumen von  $v_0$  auf  $v$  zu bringen. Sie kann auch als potentielle Energie der Druckverteilung aufgefaßt werden, welche verschwindet, sobald das Gas, sich selbst überlassen, seine Dichteunterschiede ausgleicht. Hier liegt also die zweite oben erwähnte Quelle kinetischer Energie; sie entsteht aus der potentiellen Energie der Druckverteilung.

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Größe  $\mathfrak{A}$  ein vollständiges Differenzial wird, sobald zwischen den Variablen Druck und Dichte eine eindeutige Beziehung besteht, so daß die eine als vollständige Funktion der anderen erscheint. Hiefür lassen sich zwei einfache Annahmen machen:

a) Die Bewegungen der Luft seien isotherm; da nach der Gasgleichung  $p = \varrho RT$ , so ist in diesem Fall  $p$  proportional  $\varrho$  und es wird

$$\mathfrak{A} = \int p \lg \left( \frac{p}{p_0} \right) dk.$$

b) Die Bewegungen der Luft gehen adiabatisch vor sich; dann ist

(vgl. S. 12):  $p = C \varrho^{c_p} = C \varrho^{\nu}$  und es wird

$$\mathfrak{A} = C \int \varrho dk \frac{\varrho^{\nu-1} - \varrho_0^{\nu-1}}{\nu-1} = \frac{1}{\nu-1} \int (p - p_0 \frac{\varrho}{\varrho_0}) dk.$$

Die lebendige Kraft, welche in einer größeren Luftmasse, etwa dem Luftkörper einer Depression, entsteht, stammt, wie oben gesagt, entweder aus der potentiellen Energie der Lage oder aus der potentiellen Energie der Druckverteilung. Im ersten Falle entsteht sie aus der Arbeitsleistung der Schwerkraft, dem Sinken des Schwerpunktes der Massen, im zweiten Fall aus der Arbeitsleistung der Druckkräfte, dem Ausgleich der Druckgradienten.

Die Gleichung auf S. 127 ermöglicht es, diese Herkunft der lebendigen Kraft für eine geschlossene Luftmasse zu formulieren.<sup>1)</sup> Sie lautet:

$$\frac{1}{2} \frac{dc^2}{dt} + \frac{d}{dt}(gr) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} c = 0.$$

1) Margules, Über die Energie der Stürme, a. a. O.

Der Ausdruck bezieht sich auf die Veränderungen der Masseneinheit in der Zeiteinheit. Multiplizieren wir mit dem Massenelement  $\rho dk$  und integrieren über die Masse, so wird:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho c^2}{2} dk + \frac{\partial}{\partial t} \int g r \rho dk + \int \frac{\partial p}{\partial s} c dk = 0.$$

Da sich die Differentiation nach der Zeit hier auf die ganze geschlossene Masse bezieht, so sind die partiellen Differenzialzeichen gewählt worden. Das letzte Glied ersetzen wir durch das oben gefundene und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho c^2}{2} dk + \frac{\partial}{\partial t} \int g r \rho dk + \int \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dk = 0.$$

Nun bedeutet  $\int \frac{\rho c^2}{2} dk = K$  die lebendige Kraft,  $\int g r \rho dk = \mathfrak{P}$  die potentielle Energie der Lage ( $r$  Abstand vom Erdmittelpunkt);  $\int \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dk$  ist die in der Zeiteinheit geleistete Ausdehnungsarbeit oder Arbeit der Druckkräfte. In der Zeit  $t$ , während welcher die betrachteten Veränderungen vor sich gehen, ist dieselbe  $\int dt \int \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dk = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' = \delta \mathfrak{A}$ , d. i. nach der früheren Bemerkung ein vollständiges Differenzial, sobald die Art der Zustandsänderung (isotherm oder adiabatisch) bestimmt ist. In dieser Zeit verändere sich die lebendige Kraft um  $\delta K$ , die potentielle Energie der Lage um  $\delta \mathfrak{P}$ ; dann gilt nach der obigen Gleichung

$$\delta(K + \mathfrak{P} + \mathfrak{A}) = 0.$$

Diese Beziehung nennt Margules die Gleichung der lebendigen Kraft im geschlossenen System.<sup>1)</sup>

#### 46. Potentielle Energie der horizontalen Druckverteilung.

Man hat lange Zeit die in den synoptischen Wetterkarten erscheinenden horizontalen Druckunterschiede als die eigentliche Quelle der Winde (d. h. der lebendigen Kräfte) angesehen. Die Beschleunigung der Luft zum tiefen Druck sollte die Bewegung verursachen. Margules hat (a. a. O.) bewiesen, daß die potentielle Energie der horizontalen Druckgradienten nur sehr geringe Windgeschwindigkeiten zu erzeugen im Stande ist und daß daher weitaus die meiste lebendige Kraft aus der übrigen potentiellen Energie stammen muß.

Mit Hilfe der auf S. 129 abgeleiteten Gleichungen kann die potentielle Energie der horizontalen Druckverteilung berechnet und mit der

1) Margules hat hier noch die Energieverluste durch Reibung berücksichtigt; sie vermindern natürlich die lebendige Kraft, welche aus der Änderung der potentiellen Energie  $\mathfrak{P}$  und der Arbeit  $\mathfrak{A}$  entsteht.



lebendigen Kraft der Winde verglichen werden. Wir führen die Rechnung hier nur für die Bedingung isothermer Luftbewegung durch, der Fall adiabatischer Bewegung kann mit Rücksicht auf das frühere in ähnlicher Weise behandelt werden (vgl. Margules a. a. O.).

Es sei eine abgeschlossene Luftmasse gegeben, in welcher durch bloß horizontale Verschiebung der Massen aus ihrer Gleichgewichtslage eine Störung in Druck und Dichte entstanden sei; diese Störung betreffe nur einen kleinen Teil der Masse wesentlich, der übrige, weitaus größere Teil sei nur insofern ein wenig verändert, als die in dem kleinen Teil z. B. fehlende Masse (wie bei einer Depression) dort als Überschuß erscheint. Sei  $\rho$  die Dichte im gestörten Teil,  $\rho'$  die in dem fast ungestörten, so muß die ganze abgeschlossene Luftmasse  $\int \rho dk + \int \rho' dk' = \text{konst.}$  sein, wobei die Integrale über die stark und schwach gestörten Volumina ( $k$  und  $k'$ ) zu erstrecken sind.

Die Störung des Druckes im Volumen  $k$  sei  $p_0 \varepsilon$ , so daß  $p = p_0(1 + \varepsilon)$ , die Störung der Dichte  $\rho_0 \sigma$ , so daß  $\rho = \rho_0(1 + \sigma)$ ; die Größen  $\varepsilon$  und  $\sigma$  sind echte Brüche. Aus der Gasgleichung  $p = \rho RT$  folgt für isotherme Störungen  $\varepsilon = \sigma$ . Im Volumen  $k'$  werden die analogen aber kleineren Störungen mit  $\varepsilon'$  und  $\sigma'$  bezeichnet. Die Bedingung für Konstanz der Masse wird nun  $\int \sigma dk + \int \sigma' dk' = 0$ .

Die potentielle Energie der gestörten Druckverteilung können wir aus jener im stark und jener im schwach gestörten Volumen zusammensetzen. Erstere ist  $\mathfrak{A}_1 = \int p \lg \left( \frac{p}{p_0} \right) dk$ , (vgl. S. 129), letztere  $\mathfrak{A}_2 = \int p \lg \left( \frac{p}{p_0} \right) dk' = \int p_0(1 + \varepsilon') \lg(1 + \varepsilon') dk'$ . Da  $\varepsilon'$  klein ist, kann man setzen  $\lg(1 + \varepsilon') = \varepsilon' - \frac{\varepsilon'^2}{2} + \dots$ . Behalten wir nur die erste Potenz von  $\varepsilon'$  bei, so wird

$$\mathfrak{A}_2 = \int p_0 \varepsilon' dk' = \int p_0 \sigma' dk' = - \int p_0 \sigma dk = - \int (p - p_0) dk.$$

Die gesamte potentielle Energie der Druckverteilung in der abgeschlossenen Luftmasse ist also:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = \int [p \lg \left( \frac{p}{p_0} \right) + p_0 - p] dk;$$

dieser Ausdruck ist über das stark gestörte Volumen zu integrieren oder auch über das gesamte Volumen  $k + k'$ ; denn  $k'$  liefert keinen Beitrag zu demselben.

Wir wenden dieses Resultat nun auf einen Teil der Atmosphäre an, in welchem überall die gleiche Mitteltemperatur  $T$  herrschen soll. Dann ist  $p = Pe^{-\frac{gz}{RT}}$ , wo  $P$  der Druck am Boden ist; analog ist  $p_0 = P_0 e^{-\frac{gz}{RT}}$ . Auch ist  $P = P_0(1 + \varepsilon)$ .

Das Volumen  $dk$  kann in  $dz dS$  zerlegt werden, wo  $dS$  ein Element der Erdoberfläche ist. Die potentielle Energie wird sonach:

$$\mathfrak{A} = \int_0^{\infty} dz e^{-\frac{gz}{RT}} \int [P \lg \left( \frac{P}{P_0} \right) + P_0 - P] dS = \frac{P_0 RT}{g} \int \frac{\varepsilon^2}{2} dS;$$

hier wurde in der Entwicklung von  $\lg(1 + \varepsilon)$  auch das zweite Glied beibehalten. Ist  $S$  die Basisfläche des betrachteten Zylinders der Atmosphäre und  $[\varepsilon^2]$  der Mittelwert für diese Fläche, so läßt sich auch schreiben:  $\mathfrak{A} = MRT \frac{[\varepsilon^2]}{2}$ . Hier ist  $M = \frac{P_0 S}{g}$  die über  $S$  lagernde Luftmasse.

Zum Vergleich mit dieser potentiellen Energie der horizontalen Druckverteilung, welche später zahlenmäßig ausgewertet wird, berechnen wir schätzungsweise die kinetische Energie, die erfahrungsgemäß mit solchen Druckstörungen verbunden auftritt.

Als Beispiel sei eine kreisförmige Zyklone vom Radius  $r_1$  gewählt; die Geschwindigkeit  $c$  des Windes stehe senkrecht zum Gradienten und sei durch die auf S. 87 abgeleitete Formel dargestellt, nämlich:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c^2}{r} - l c^2$$

Wie früher ist  $p = p_0(1 + \varepsilon)$ , also  $\frac{\partial p}{\partial r} = p_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}$ . Man erhält:

$$r RT \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = c^2 - l c r, \quad c = \frac{r l}{2} - \sqrt{\frac{r^2 l^2}{4} + r RT \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}}$$

Die lebendige Kraft der Zyklone ist:

$$K = \int \frac{c^2}{2} dm = \int_0^{\infty} dz \int_0^{r_1} \rho \frac{c^2}{2} 2\pi r dr;$$

daraus wird, weil  $\rho = \frac{P e^{-\frac{gz}{RT}}}{RT}$  ist,  $K = \frac{\pi}{g} \int_0^{r_1} P c^2 r dr$ .

Wir machen nun eine Annahme über die Verteilung der Druckstörung  $\varepsilon$  längs des Radius: es sei  $\varepsilon = -C \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right)$ , so daß die Störung im Zentrum der Zyklone ein Maximum, für  $r = r_1$  aber null ist; dann wird

$$c^2 = RT r^2 \left[ \frac{2C}{r_1^2} + \frac{l^2}{2RT} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8CRT}{r_1^2 l^2}}\right) \right].$$

1)  $l = 2 \omega \sin \varphi$ .

Setzt man diesen Ausdruck, sowie  $P = P_0(1 + \varepsilon)$  in die Formel für  $K$  ein, so wird schließlich:

$$K = MRTC \left[ 1 + \frac{P^2 r_1^2}{4CRT} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{8CRT}{P^2 r_1^2}} \right) \right] \frac{3 - C}{3(2 - C)} \cdot 1)$$

Die Masse der Luft ist

$$M = \int_0^\infty dz \int_0^{r_1} 2\varrho \pi r dr = \frac{2\pi}{g} \int_0^{r_1} P r dr = \frac{r_1^2 \pi P_0}{g} \left( 1 - \frac{C}{2} \right).$$

Margules berechnet nun ein Zahlenbeispiel. Es sei eine Zyklone von 1080 km Radius mit dem Barometerstande 730 mm im Zentrum bei  $45^\circ$  Breite gegeben. Der ungestörte Druck war am Boden  $P_0 = 760$  mm, so daß  $C = \frac{30}{760}$ . Dann wird  $K = 0,134 \cdot MRTC$ .

Zum Vergleich berechnen wir für dieselbe Störung die potentielle Energie der Druckverteilung  $\mathfrak{A} = \frac{MRT}{2r_1^2 \pi} \int_0^{r_1} \varepsilon^2 2r \pi dr$ . Man erhält  $\mathfrak{A} = MRT \frac{C^2}{6}$ .

Das Verhältnis dieser potentiellen Energie  $\mathfrak{A}$  zur kinetischen Energie  $K$  ist also  $\frac{\mathfrak{A}}{K} = 0,05$ .  $K$  ist in diesem Beispiel 20mal größer als  $\mathfrak{A}$ , so daß es nicht angeht, die Windgeschwindigkeit als Effekt der horizontalen Druckverteilung zu betrachten. Die beiden Erscheinungen gehen parallel, stehen aber nicht in ursächlicher Beziehung zueinander. Dieses Resultat fällt bei anderen Beispielen ähnlich aus, weswegen der Schluß berechtigt ist, daß die wirklich vorkommenden horizontalen Verschiebungen der Luftmassen aus ihrer Ruhelage eine potentielle Energie besitzen, die sehr gering ist im Verhältnis zu der gleichzeitig auftretenden kinetischen Energie. Margules bezeichnet die horizontale Druckverteilung daher nur als „Übersetzung im Getriebe des Sturmes.“<sup>2)</sup>

Für die hier angenommenen Störungen der Druckverteilung war deren Unabhängigkeit von der Höhenlage charakteristisch. Wir setzten in allen Höhen die gleiche Druckverteilung voraus, die Verschiebung der Luft aus ihrer Gleichgewichtslage sollte nur durch Ausdehnung (oder Kompression) in der Horizontalen erfolgt sein. Nur für diesen Fall ist die Ausdehnungsarbeit, d. i. die potentielle Energie der horizontalen Druckverteilung, so klein gegenüber der kinetischen Energie. Wenn die Luft sich nach der Vertikalen hin gleichfalls ausdehnt, wie

1) Bei Margules ist statt des letzten Faktors  $\frac{3 - C}{3(2 - C)}$  einfach  $\frac{1}{2}$  gesetzt, da  $C$  ein kleiner echter Bruch ist.

2) Energie der Stürme, a. a. O. S. 26.

etwa infolge von Wärmezufuhr, so haben wir es wohl auch mit Ausdehnungsarbeit zu tun, doch ist darauf unser Schluß aus dem früheren Beispiel nicht anwendbar.

**47. Energiegleichung der abgeschlossenen Luftmasse.** Die Ausdehnungsarbeit, welche in der Gleichung der lebendigen Kraft vorkommt (S. 130), ist auch schon früher (Abschnitt 8, S. 11) in der Gleichung für die zugeführte Wärme aufgetreten. Durch die Vereinigung der mechanischen mit der thermischen Gleichung bietet sich die Möglichkeit, eine Beziehung zwischen Wärmezufuhr, Temperatur und lebendiger Kraft aufzustellen, in welcher die Ausdehnungsarbeit nicht mehr vorkommt.

Für die Massen- und Zeiteinheit lautet die Gleichung der zugeführten Wärme:  $\frac{dQ}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + Ap \frac{dv}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} - \frac{Ap}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{dt}$ , wo  $v = \frac{1}{\varrho}$ .

Bezogen auf die im Volumen  $k$  vorhandene Luftmasse wird daraus:

$$\int \frac{dQ}{dt} \varrho dk = c_v \frac{\partial}{\partial t} \int T \varrho dk - A \int \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} dk,$$

und für die Zeit  $t$ :

$$\int dt \int \frac{dQ}{dt} \varrho dk = c_v \delta \int T \varrho dk - A \int dt \int \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} dk.$$

$J = c_v \int T \varrho dk$  ist die innere Energie, welche das Gas vermöge seiner Molekularbewegung besitzt. Das Glied auf der linken Seite obiger Gleichung ist die dem Gase in der Zeit  $t$  zugeführte Wärme ( $Q$ ). Mit Rücksicht auf S. 130 läßt sich also schreiben:  $(Q) = \delta J - A \delta \mathfrak{A}$ .

Die Änderung der inneren Energie ist wie die der lebendigen Kraft und die der potentiellen Energie der Lage durch Anfangs- und Endzustand vollständig bestimmt. Wenn  $(Q) = 0$ , das Gas also in eine adiabatische Hülle eingeschlossen ist, dann ist auch  $\delta \mathfrak{A}$  durch Anfangs- und Endzustand gegeben, weil dann  $\delta J = A \delta \mathfrak{A}$ .

In diesem einfachen Falle, der uns näher beschäftigen soll, läßt sich also die Ausdehnungsarbeit durch die innere Energie ersetzen.

In der Gleichung der lebendigen Kraft (S. 130) ist  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{P}$ , der potentiellen Energie der Lage, verbunden. Durch Elimination von  $\mathfrak{A}$  aus dieser und der Gleichung für die zugeführte Wärme ergibt sich die folgende Energiegleichung der Luft im geschlossenen System (Margules):

$$(Q) = \delta(J + AK + A\mathfrak{P}).$$

Bei adiabatischen Vorgängen ist nun

$$\delta K = - \delta \left( \frac{1}{A} J + \mathfrak{P} \right) = - \delta (J' + \mathfrak{P}),$$

wo  $J'$  in Arbeitseinheiten auszudrücken ist.  $J' + \mathfrak{B}$  ist die ganze potentielle Energie. Wird sie geringer, so wächst die lebendige Kraft um den gleichen Betrag.

Befindet sich eine abgeschlossene Luftmasse in Ruhe, aber nicht im stabilen Gleichgewicht, so strebt sie, durch einen geringfügigen Anlaß in Bewegung versetzt (vgl. Abschnitt 44), einem Zustand zu, bei welchem die potentielle Energie ein Minimum wird; dies ist der stabile Gleichgewichtszustand. Der Verlust an potentieller Energie erscheint als lebendige Kraft. Margules stellte sich die Aufgabe, Zustände von so großer potentieller Energie zu suchen, daß sich aus ihrem Übergang in den stabilen Zustand die lebendigen Kräfte erklären lassen, welche in den Depressionen und Böen tatsächlich vorkommen.

Daß bloß horizontale Verschiebungen der Luft aus ihrem Gleichgewicht hierfür nicht ausreichen, wurde schon oben (Abschnitt 46) gezeigt. Es müssen also vertikale Verlagerungen hinzutreten. Und tatsächlich liefern solche auch die gesuchte potentielle Energie in ausreichendem Maße. Hierbei kommen namentlich zwei Arten von anfänglichen, unstabilen Massenverteilungen in Betracht: Erstens kann die Massenverteilung in einer auf dem Erdboden auflagernden Luftmasse über jedem Element ihrer Grundfläche gleich, also von den Koordinaten in der Horizontalen ( $x, y$ ) unabhängig sein; dann muß die Verteilung in der Vertikalen unstabil sein und ein Platzwechsel der Schichten eintreten, so daß die unteren wärmeren nach oben, die oberen kälteren nach unten kommen, wodurch das Gleichgewicht stabil wird. Zweitens kann in jeder einzelnen vertikalen Säule die Verteilung stabil sein, dafür aber eine Asymmetrie in jeder Horizontalebene bestehen, so daß kalte neben warmen Massen liegen; auch dann tritt eine Umlagerung ein, bei der die kältesten Massen zu unterst, die wärmsten zu oberst kommen. In der Natur werden beide Arten zugleich auftreten, wodurch die Sache äußerst verwickelt wird. Die Rechnung wird schon bei verhältnismäßig einfachen Voraussetzungen über die anfängliche Massenverteilung sehr mühsam, weswegen wir uns hier auf zwei einfache Beispiele beschränken wollen.<sup>1)</sup>

Die Energiegleichung  $\delta K = -\delta(J' + \mathfrak{B})$  kann geschrieben werden

$$\frac{Mc^2}{2} = (J' + \mathfrak{B})_a - (J' + \mathfrak{B})_e.$$

Hier ist  $M$  die gesamte Luftmasse und  $c^2$  das mittlere Geschwindigkeitsquadrat, das sich für sie durch die Umlagerung ergibt. Über die Verteilung der Geschwindigkeit auf die einzelnen Teile der Masse kann unsere Energiebetrachtung nichts aussagen, wir müssen uns auf die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit  $c$  beschränken.  $(J' + \mathfrak{B})_a$  ist

1) Margules, Energie der Stürme, a. a. O.; dort sind auch verwickeltere Fälle berechnet.

die gesamte potentielle Energie im Anfangszustand,  $(J' + \mathfrak{P})_e$  im (stabilen) Endzustand.

Nun ist  $J' + \mathfrak{P} = \frac{c_s}{A} \int T \rho dk + \int g r \rho dk$  (vgl. S. 130). Da uns nur die Differenz zweier Größen beschäftigt, können wir eine Konstante weglassen und statt des Abstandes der Masse vom Erdmittelpunkt  $r$  ihre Seehöhe  $z$  setzen.

Nach der statischen Grundgleichung ist  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ , folglich

$$\mathfrak{P} = - \int z \frac{\partial p}{\partial z} dk.$$

Die hier betrachtete Luftmasse erfülle eine vertikale Säule von der Grundfläche 1 und der Höhe unendlich. Es ist dann:

$$\mathfrak{P} = - \int_0^{\infty} z \frac{\partial p}{\partial z} dz = - [z p]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} p dz = \int_0^{\infty} p dz.$$

Setzen wir  $p = \rho R T$ , so wird auch weiter  $\mathfrak{P} = \int R T dm$ , wo  $dm = \rho dz$  ein Massendifferenzial. Erstreckt sich die Verschiebung der Massen, wie dies wohl stets der Fall sein wird, nur auf einen bestimmten unteren Teil der unendlich hohen Luftsäule, so genügt es, das  $\mathfrak{P}$  für diesen Teil zu berechnen, d. h. das letzte Massenintegral nur über ihn auszudehnen, weil die Masse darüber wie ein fester Stempel über der unteren hin- und hergehen wird, ohne ihre Temperatur zu verändern, so daß auch bei der Umlegung das Integral für sie den gleichen Wert behält.

Wir erhalten also nun

$$J' + \mathfrak{P} = \frac{c_s}{A} \int T dm + R \int T dm = \frac{c_p}{A} \int T dm,$$

einen sehr einfachen Ausdruck für die gesamte potentielle Energie; das Integral ist nur über die Masse zu erstrecken, welche sich umlagert.

Man sieht aus obiger Nebeneinanderstellung, daß die potentielle Energie der Lage weitaus kleiner ist als die innere Energie; sie verhalten sich zueinander wie  $AR$  zu  $c_s$ , also für Luft wie 0,069 zu 0,169 oder wie 2 zu 5, worauf auch Emden hingewiesen hat.<sup>1)</sup>

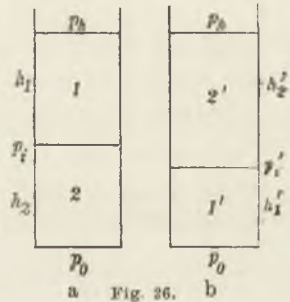
Bezeichnet man mit  $T$  die Temperatur der Luftmasse in ihrem Anfangszustand, mit  $T'$  in ihrem Endzustand, so ist die durch Umlagerung erzeugte lebendige Kraft:  $\frac{M c^s}{2} = \frac{c_p}{A} \int (T - T') dm$ .

Es wird also kinetische Energie erzeugt, wenn durch Umlegung der Massen die mittlere Temperatur derselben sinkt.

1) Gaskugeln, S. 376.

**48. Beispiele für vertikale Umlagerungen der Luftmassen nach Margules.** In den folgenden Beispielen werden Luftsäulen betrachtet, welche unten von der Erdoberfläche, seitlich von fixen vertikalen Wänden begrenzt werden und nach oben offen sind. Die Verlagerung erfolgt in dem unteren Teil dieser Säulen bis zur Höhe  $h$ , der obere Teil derselben bewegt sich dabei bloß auf oder ab wie ein fester Stempel vom Gewicht  $Bp_h$ , wo  $p_h$  der Druck am oberen Ende der verlagerten Masse,  $B$  die Basis der Säule ist. Es genügt dann, wie gesagt, das letzte Integral im vorigen Abschnitt über die verlagerte Masse allein zu erstrecken.

1. Beispiel: In der Luftsäule Fig. 26a, wo  $p_0$  der Druck am Boden, liegen die mit 2 und 1 bezeichneten Massen übereinander. An der oberen Grenze von 1 herrscht der Druck  $p_h$ . Die Masse 2 ist potentiell wärmer als die Masse 1; infolgedessen tritt eine Umlagerung ein und im Endzustand (Fig. 26b) liegt die Masse 1 unter der Masse 2 (1' und 2'). Hierbei ändert sich die Höhe der beiden Schichten von  $h_1$  in  $h'_1$ , von  $h_2$  in  $h'_2$ , der Druck an ihrer Grenzfläche von  $p_i$  in  $p'_i$  und auch die Höhenlage des Druckes  $p_h$  wird eine andere.



Wir nehmen an, daß jede einzelne Masse zu Anfang im indifferenten Gleichgewicht sei; d. h. 1 und 2 haben für sich überall die gleiche potentielle Temperatur und behalten diese, weil die Umlagerung adiabatisch erfolgt, auch bei. An der Grenze  $i$  besteht zu Anfang ein Sprung der Temperatur von  $T_{i2}$  auf  $T_{i1}$ ; gegeben ist  $p_0, T_{02}, h_2, h_1, T_{i1}^{-1}$ )

Für eine Luftsäule von der Höhe  $h$ , in welcher indifferentes Gleichgewicht herrscht, können wir das Temperaturmassenintegral, das die potentielle Energie ausdrückt, ein für allemal berechnen; es war (vgl. S. 136):

$$\int_0^h T dm = \frac{1}{R_0} \int_0^h p dz. \quad \text{Indifferentes Gleichgewicht setzt lineare Abnahme}$$

der Temperatur im Betrag von  $\frac{Ag}{c_p}$  voraus (vgl. S. 46). Auf S. 37 wurde die Druckverteilung für lineare Temperaturabnahme berechnet. Setzen

wir für  $\alpha$  in die dortige Formel  $\frac{Ag}{c_p} = \gamma$  ein, so wird  $p = p_0 \left( \frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \right)^{\frac{c_p}{AR}}$ . Somit wird das gesuchte Integral:

$$\frac{1}{R_0} \int_0^h p dz = \frac{1}{g} \frac{1}{1 + \alpha} (p_0 T_0 - p_h T_h)^{\frac{2}{\alpha}}$$

1)  $p_0$  Druck am Boden,  $T_{02}$  Temperatur am Boden, d. i. an der unteren Grenze der Masse 2 im Anfangszustand.

2)  $\alpha = \frac{AR}{c_p}$ ; vgl. Abschnitt 8.

Hier ist  $T_h = T_0 - \gamma h$ . Unsere Aufgabe beschränkt sich also darauf, jenen Ausdruck für den Anfangs- und Endzustand zu bilden, wozu die Kenntnis der Drucke und Temperaturen an den Grenzen erforderlich ist.

Für den Anfangszustand folgt zunächst aus den gegebenen Werten:  $T_{i2} = T_{02} - \gamma h_2$ ,  $T_{h1} = T_{i1} - \gamma h_1$ ; weiter mit Benützung der eben gebrauchten Formel für den Druck:  $p_i = p_0 \left(\frac{T_{i2}}{T_{02}}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$ ,  $p_h = p_i \left(\frac{T_{h1}}{T_{i1}}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$ .

Die potentielle Energie des Anfangsstadiums wird bis auf eine Konstante:  $(J' + \mathfrak{B})_a = \frac{c_p}{Ag} \frac{1}{1 + \kappa} (p_0 T_{02} - p_i T_{i2} + p_i T_{i1} - p_h T_{h1})$ . Die oben gefundenen Werte sind hier einzusetzen.

Im Endzustand, nach dem Platzwechsel der Schichten 1 und 2, wird der Druck an der Grenzfläche  $p'_i = p_h + p_0 - p_i$ . Die Drucke an der oberen und unteren Begrenzung der Säule sind gleich geblieben. Aus ihnen erhält man mit Benützung der Poissonschen Formel die folgenden Grenzwerte der Temperaturen:  $T'_{01} = T_{h1} \left(\frac{p_0}{p_h}\right)^{\kappa}$  (würde die Luft der Masse 1 aus der Höhe  $h$  adiabatisch herabsteigen, so würde sie die Temperatur  $T'_{01}$  annehmen); ferner

$$T'_{i1} = T_{h1} \left(\frac{p'_i}{p_h}\right)^{\kappa}, T'_{i2} = T_{02} \left(\frac{p'_i}{p_0}\right)^{\kappa}, T'_{h2} = T_{02} \left(\frac{p_h}{p_0}\right)^{\kappa}.$$

Die potentielle Energie des Endzustandes ist:

$$(J' + \mathfrak{B})_e = \frac{c_p}{Ag} \frac{1}{1 + \kappa} (p_0 T'_{01} - p'_i T'_{i1} + p'_i T'_{i2} - p_h T'_{h2}).$$

Da die lineare Temperaturabnahme in jeder Masse erhalten blieb, so ist auch  $T'_{i1} = T'_{01} - \gamma h'_1$  und  $T'_{h2} = T'_{i2} - \gamma h'_2$ , woraus die neuen Höhen der Schichten und ihre Grenzlage zu finden sind.

Die Masse  $M$  beider Schichten ist im Ganzen  $\frac{p_0 - p_h}{g}$  pro Flächeneinheit der Basis. Infolgedessen wird das mittlere Geschwindigkeitsquadrat

$$c^2 = \frac{2g}{p_0 - p_h} [(J' + \mathfrak{B})_a - (J' + \mathfrak{B})_e].$$

Margules berechnet das folgende Zahlenbeispiel: zu Anfang sei  $h_1 = h_2 = 2000$  m,  $p_0 = 760$  mm,  $T_{02} = 283^\circ$ ; an der Grenze  $i$  soll die Temperatur plötzlich nach oben um  $3^\circ$  abnehmen (unstabiler Zustand).

Man erhält:

$$T_{i2} = 263,13^\circ, p_i = 591,69 \text{ mm}, T_{h1} = 240,26^\circ, p_h = 450,22 \text{ mm}$$

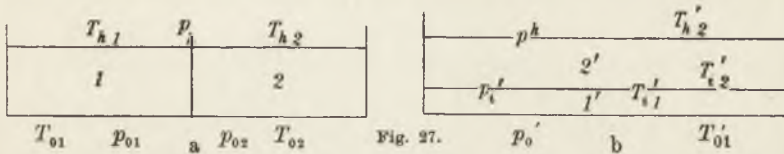
Im Endzustand ist  $p'_i = 618,53$  mm, die Grenzfläche der beiden Schichten liegt niedriger als früher, es ist  $h'_1 = 1637,17$  m,  $h'_2 = 2366,97$  m. Die ganze am Umsturz beteiligte Säule  $h_1 + h_2$  ist also um 4,14 m



höher geworden. An der Grenzfläche nimmt die Temperatur plötzlich um  $3,04^\circ$  nach oben zu.

Die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit aus obiger Formel liefert den sehr bedeutenden Wert  $c = 14,85$  m/sec. Wenn die ganze Masse bis 4000 m Höhe eine derartige mittlere Geschwindigkeit erlangt, so werden Teile derselben eine noch größere, andere eine kleinere Geschwindigkeit haben; in einzelnen Partien können intensive Stürme auftreten. Die beobachtete kinetische Energie von Stürmen kann demnach gewiß aus dem Umsturz solcher Luftschichten herrühren.

2. Beispiel: Auf der Erde ruhen zwei Luftmassen nebeneinander (Fig. 27 a), die Massen 1 und 2; sie haben gleiche Basis  $\frac{B}{2}$  und gleiche Höhe  $h$  und seien seitlich von vertikalen Wänden, oben von einer im stabilen Gleichgewicht befindlichen Luftsäule (Druck  $p_h$ ) begrenzt, die



sich wie ein fester Stempel auf- und abbewegen kann. 1 sei potentiell kälter als 2. Im Anfangszustand herrsche Ruhe, man denkt sich eine feste Wand zwischen 1 und 2 eben weggezogen. Es tritt nun Umlagerung ein, die kältere Schicht 1 breitet sich unter die wärmere 2 aus (Fig. 27 b).

Wieder seien die Schichten zu Anfang im indifferenten Gleichgewicht; sie sind es jede für sich dann auch nach der adiabatischen Umlagerung. Außer  $p_h$  und  $h$  sind die Anfangstemperaturen  $T_{h1}$  und  $T_{h2}$  gegeben. Im Anfangszustand ist zunächst (vgl. das frühere Beispiel):

$$T_{01} = T_{h1} + \gamma h, \quad T_{02} = T_{h2} + \gamma h,$$

$$p_{01} = p_h \left( \frac{T_{01}}{T_{h1}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad p_{02} = p_h \left( \frac{T_{02}}{T_{h2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Die potentielle Energie in der Anfangslage ist demnach (vgl. S. 138):

$$(J' + \mathfrak{P})_a = \frac{c_p}{Ag} \frac{1}{1 + \alpha} \frac{B}{2} [T_{01} p_{01} - T_{h1} p_h + T_{02} p_{02} - T_{h2} p_h].$$

Im Endzustand geht an der Trennungsfäche  $i$  der beiden Massen die Temperatur sprunghaft vom niedrigeren  $T'_{i1}$  zum höheren  $T'_{i2}$  über. Die oberste Schichte von 2 bleibt unter dem gleichen Druck  $p_h$ , es ist also  $T'_{h2} = T_{h2}$ . Die Trennungsfäche ist dadurch bestimmt, daß in ihr der Druck  $p'_i = p_h + \frac{1}{2}(p_{02} - p_h)$  herrschen muß, da die Masse 2 sich auf den doppelten Querschnitt ausgebreitet hat. Daraus folgt  $T'_{i2} = T_{h2} \left( \frac{p'_i}{p_h} \right)^{\alpha}$

als unterste Temperatur der Masse 2 und  $T'_{i_1} = T_{h_1} \left(\frac{p'_i}{p_h}\right)^x$  als oberste Temperatur der Masse 1. Der Druck am Boden ist nun  $p'_0 = p + \frac{p_{01} - p_h}{2}$ , die Temperatur am Boden aber  $T'_{01} = T_{h_1} \left(\frac{p'_0}{p_h}\right)^x$ .

Die potentielle Energie wird im Endzustand:

$$(J' + \mathfrak{B})_e = \frac{c_p}{Ag} \frac{1}{1+x} B [T'_{01} p'_0 - T'_{i_1} p'_i + T'_{i_2} p'_i - T_{h_2} p_h].$$

Die Masse abgegrenzter Luft ist  $M = \frac{B}{g} (p'_0 - p_h)$ . Margules berechnet das folgende Zahlenbeispiel: Gegeben sei  $h = 3000$  m,  $p_h = 510$  mm,  $T_{h_1} = 243^\circ$ ,  $T_{h_2} = 248^\circ$ . Der Temperaturunterschied der Massen 1 und 2 betrage also  $5^\circ$  C.

Man erhält für den Anfangszustand:

$$T_{01} = 272,80^\circ, p_{01} = 759,20 \text{ mm}, T_{02} = 277,80^\circ, p_{02} = 753,46 \text{ mm}.$$

Es besteht also am Boden ein Druckunterschied von 5,74 mm, um welchen die kalte Masse schwerer ist als die leichte. Beim Wegziehen der Trennungswand ist es dieser Druckgradient, der die Umstürzbewegung einleitet.

Im Endzustand ist:  $p'_i = 631,73$  mm,  $p'_0 = 756,33$  mm,  $T'_{i_2} = 263,93^\circ$ ,  $T'_{i_1} = 258,61^\circ$ ,  $T'_{01} = 272,5(0)^\circ$ ; ferner  $h'_1 = 1398,9$  m,  $h'_2 = 1603,2$  m.

Die Summe  $h'_1 + h'_2 = 3002,1$  m ist etwas größer als das frühere  $h$ , nach dem Umsturz nimmt die hervorgehobene Masse also ein etwas größeres Volumen ein als früher; der Stempel der oberen Luftschichten ist gehoben worden wie im ersten Beispiel. Die mittlere Geschwindigkeit der Massen berechnet Margules zu  $c = 12,2$  m/sec; also wieder eine recht bedeutende Windstärke. Betrüge die Temperaturdifferenz zwischen 1 und 2 nicht  $5^\circ$ , sondern  $10^\circ$ , so erhielte man  $c = 17,3$  m/sec; wäre zugleich die ursprüngliche Höhe der Kammern die doppelte, also  $h = 6000$  m, so erhielte man  $c = 25,8$  m/sec.

Bei diesen Rechnungen ist es nötig, die Anfangs- und Endwerte der potentiellen Energie sehr genau zu bestimmen, da die lebendige Kraft am Schlusse als kleine Differenz zweier großer Zahlen erscheint. Margules hat in seiner Arbeit auch ein Näherungsverfahren zur Berechnung von  $c$  angegeben, welches diesen Übelstand umgeht.

Auch hat er noch verschiedene ähnliche Beispiele berechnet, die zum Teil recht verwickelt sind; so den Fall, daß zwei Massen verschiedener Temperatur ähnlich wie im letzten Beispiel anfangs nebeneinanderliegen, daß aber jede von ihnen im stabilen Gleichgewicht ist. Die Schichten ordnen sich nach dem Umsturz stets so an, daß ihre potentielle Temperatur nach oben zunimmt.

Ein weiterer Fall besteht darin, daß die Temperatur sich in der Horizontalen nicht sprungweise, sondern stetig ändert, z. B. nach einer Seite hin

zunimmt. Wir haben dann nicht zwei Massen verschiedener Temperatur, sondern deren unendlich viele. Jede mag sich im indifferenten Gleichgewicht befinden. Es besteht anfänglich ein Druckgefälle von der kälteren zur wärmeren Seite. Die Säulen fallen jede für sich um und liegen im Endzustand nicht neben-, sondern übereinander, die potentiell kälteste zu unterst.

Bei diesen und anderen Beispielen ergeben sich aus der vertikalen Umlagerung stets lebendige Kräfte, welche groß genug sind, um die vorkommenden Stürme zu erklären. Man kann es daher als sehr wahrscheinlich ansehen, daß die kinetische Energie der Stürme aus vertikalen Verlagerungen der Luftmassen stammt, bei welchen die potentiell kälteren Massen sinken, die wärmeren steigen; gewiß rührt sie, wie oben gezeigt wurde, nicht von der potentiellen Energie horizontaler Druckverteilungen her, die sich durch rein horizontale Bewegungen ausgleichen können.

Jene Umlagerungen geschehen in der Natur wohl meist eher nach dem Schema des zweiten als nach dem des ersten Beispiels; denn Unterschiede der Temperatur in horizontaler Richtung sind sehr gewöhnlich, überadiabatische Temperaturgradienten in der Vertikalen selten. Bigelow hat (a. a. O.) das Neben- und Gegeneinanderfließen kalter und warmer Luft in den unteren Schichten der Atmosphäre über Nordamerika als die Bedingung für das Entstehen der dortigen Zyklonen angegeben. Sandström<sup>1)</sup> schildert eine ähnliche Entstehung intensiver Stürme an der Westküste der skandinavischen Halbinsel, die er direkt beobachten konnte. Auf der westlichen Abdachung zum Meere hin herrscht dort im Winter ein horizontaler Temperaturgradient von etwa  $1^{\circ}$  auf 10 km. Die im Osten befindliche kalte Luft bleibt dort nicht liegen, sondern strömt am Gebirgshang herab zum Meere, die warme Luft des Golfstroms erhebt sich über sie und fließt ostwärts. Man kann diese entgegengesetzten Windrichtungen am Meere beobachten, wo ein boraartiger kalter Wind nur wenig über die Küste hinausweht, während draußen der warme Wind landwärts bläst. Auf dem Gebirge ist unten kalter Ostwind, darüber warmer Westwind. Sandström vergleicht die kalte Fallluft mit einem Wasserfall und berechnet deren Energie. Eine Steigerung ihres spezifischen Gewichtes erfährt sie nach seiner Angabe noch durch das Gewicht des emporgewirbelten Schnees.

Noch eine interessante Beobachtung Sandströms verdient hier Erwähnung. Aus der Struktur der Schneeoberfläche konnte derselbe nämlich die Richtung der starken Stürme im norwegischen Gebirge erkennen und fand, daß dieselben immer talabwärts wehen. Etwas ähnliches bemerkte Trabert<sup>2)</sup> beim Studium der niederösterreichischen Gewitter.

1) Kungl. Svens. Vet. Akad. Handl. Bd. 47, Nr. 9, 1912 und Arkiv f. Mat. Astr. och Fys. Bd. 7 Nr. 30, 1912.

2) Jahrb. d. Wien. Met. Zentralanstalt, Jahrgang 1901, Anhang.

Sie pflanzen sich wesentlich talabwärts fort. Es ist die schwere kalte Luft, welche den Sturm erzeugt, indem sie abwärts fließt und dabei den Bodensenkungen folgt wie ein Wasserlauf.

Das Nebeneinander kalter und warmer Luft, aus dem eine Ausbreitung der kalten Luft unten, der warmen oben hervorgeht, ist, seitdem Margules und Bigelow darauf aufmerksam machten, vielfach in die Augen gefallen, sowohl bei der allgemeinen Bewegung der Atmosphäre als auch namentlich bei Depressionen, Gewittern, Böen usw. Während man früher hauptsächlich die Luftdruckverteilung an der Erdoberfläche betrachtete und die bezüglich des Luftdrucks am Boden symmetrischen Gebilde, wie z. B. kreisförmige Zyklonen, auch überhaupt als symmetrisch ansah, haben diese Arbeiten dazu geführt, auf die durch Temperaturunterschiede bedingte Asymmetrie ein erhöhtes Augenmerk zu lenken. Es hat sich hierdurch ein wesentlicher Umschwung in der dynamischen Meteorologie vollzogen, worauf wir noch später zurückkommen.

**49. Bedeutung der Kondensationswärme für die lebendige Kraft.** In der allgemeinen Gleichung auf S. 134 erscheint die Summe der Änderungen von innerer Energie, potentieller Energie und lebendiger Kraft der Wärmezufuhr gleichgesetzt. Wir wollen nun unter der zugeführten Wärme nur jene verstehen, welche bei aufsteigender feuchter Luft durch Kondensation frei wird, betrachten also pseudoadiabatische Vorgänge und fragen nach der lebendigen Kraft, welche diese Wärme hervorzubringen vermag.

Ihre Bedeutung für die Energie der Luftbewegungen ist oft behauptet und bestritten worden. Margules hat sich (a. a. O.) eingehender mit ihr beschäftigt und ist zu dem Resultat gekommen, daß die Kondensationswärme nur unter gewissen Umständen zur lebendigen Kraft der Luftmassen beizutragen vermag. Es würde zu weit führen, dieser diesbezügliche Untersuchungen hier ausführlich zu besprechen; auch ist ja die Kondensationswärme in den gemäßigten Zonen der Erde, welche uns hier hauptsächlich beschäftigen, wegen des hier viel kleineren Wasserdampfgehaltes der Luft von geringerer Bedeutung, als etwa in den Tropen; wir verweisen darum auf die Abhandlung über die Energie der Stürme von Margules und geben hier nur eine Übersicht über die Resultate.

Die „Kondensationstheorie der Zyklonen“ (Ferrel) nahm an, daß die beim Aufsteigen feuchter Luft frei werdende Kondensationswärme die adiabatische Abkühlung der Luft vermindere und dadurch den fortgesetzten Auftrieb dieser Luft bewirke. Wenn nämlich trockene Luft in einer stabil geschichteten Atmosphäre aufsteigt, weil sie anfangs wärmer war als die Umgebung, so wird dieser Auftrieb bald verbraucht, weil sie sich adiabatisch um  $1^{\circ}$  pro 100 m abkühlt (vgl. S. 51). Beim Aufsteigen feuchter Luft drückt die Kondensation die adiabatische Temperaturabnahme auf einen kleineren Betrag herab (vgl. S. 52). Infolge-

dessen hält der Auftrieb feuchter Luft nun tatsächlich länger an. Jene Theorie sagte weiter, daß durch den Aufwärtstransport feuchter Luft unten Platz für immer neue Massen werde, welche seitlich dem Ort des Aufsteigens zuströmen müssen, um die Kontinuität zu erhalten. Hierdurch entstehen Winde, welche mithin ihre Energie der beim Aufsteigen frei werdenden Kondensationswärme verdanken sollen.

Der Gedankengang ist zweifellos richtig; es fragt sich nur, ob solche warme aufsteigende Luftmassen tatsächlich vorkommen. Seitdem man weiß, daß die Depressionen unserer Breiten in den unteren 10 km kälter sind als ihre Umgebung, entfällt zunächst die Möglichkeit, diese Gebilde auf die angedeutete Art zu erklären. Dies schließt aber nicht aus, daß die Kondensationstheorie anderswo, vielleicht bei den tropischen Zyklonen, anwendbar ist, wie Helmholtz annimmt.

Um die Bedingungen festzustellen, unter denen die Kondensationswärme sich tatsächlich in Bewegungsenergie umsetzen kann, hat Margules wieder eine abgeschlossene Luftmasse betrachtet und auf sie die Gleichung von S. 134 angewendet.

Die erste Rechnung geht von der folgenden Vorstellung aus: Eine trockene und eine feuchte Luftmasse liegen in zwei ursprünglich durch eine Wand getrennten Kammern nebeneinander, so wie im zweiten Beispiel auf S. 139 eine kalte und eine warme Masse. Beide sind im indifferenten Gleichgewicht, d. h. die Temperatur nimmt in der feuchten Luft nach oben langsamer ab als in der trockenen. Oben herrsche beiderseits der gleiche Druck, hervorgerufen durch die oberen Schichten, welche an der Umlagerung wie früher unbeteiligt bleiben. Der Druck ist unter der trockenen Luftmasse höher, nach Wegziehung der Wand breitet sie sich unter die feuchte aus, die feuchte lagert sich über die trockene. Dabei steigt die letztere auf, kühlt sich ab, Wasser wird kondensiert und die Kondensationswärme wird frei. Doch ist die Abkühlung jetzt geringer als in trockener Luft.

Die kinetische Energie, welche bei dieser Umlagerung gewonnen wird, ist nun nach der Rechnung fast genau jener gleich, die im Beispiel 2 (S. 139), d. i. mit trockener Luft in beiden Kammern, berechnet wird, sobald hier und dort die gleichen Mitteltemperaturen angenommen werden. Die Kondensationswärme trägt also zur kinetischen Energie nichts bei. Es erklärt sich dies daraus, daß der Wärmezufuhr durch Kondensation hier eine geringere Abnahme der potentiellen Energie gegenübersteht, als bei trockener Luft. Diese Abnahme ist nämlich durch  $\int (T - T') dm$  gegeben, wo sich  $T$  auf den Anfangs-,  $T'$  auf den Endzustand bezieht; da nun infolge der Kondensation die Temperaturerniedrigung beim Aufsteigen geringer ist, so wird auch obiges Integral kleiner als früher und zwar, wie eben die Rechnung ergibt, um so viel, als die Kondensationswärme beträgt.

Eine wesentliche Bedingung dieser Rechnung ist, daß die oberen Luftschichten an der Umlagerung nicht beteiligt sind und von der aufsteigenden feuchten Luft nicht durchbrochen werden. Sobald dies geschieht, ändern sich die Verhältnisse, die Kondensationswärme kann dann, wie Margules zeigte, einen Beitrag zur kinetischen Energie liefern.

Wenn nämlich die Annahme fallen gelassen wird, daß die oberen Schichten das System der zwei Kammern wie ein fester Stempel abschließen, dann kommt es nach dem Umsturz zunächst darauf an, ob die oberen Schichten dick genug sind, um das weitere Emporsteigen der wenig abgekühlten feuchten Massen zu verhindern. Sind sie dies imstande, dann gilt das früher gesagte; wenn nicht, so erfolgt ein Platzwechsel der unteren feuchten Luft mit der darüber liegenden trockenen, analog wie im Beispiel 1 oben.

Diesen wesentlich anderen Fall, den Durchbruch feuchter Luft durch darüber liegende trockene, behandelt Margules, indem er wieder ein geschlossenes Quantum Luft betrachtet. Hier ist es nun nicht nötig wie im Beispiel 1 (S. 137), daß die gesamte feuchte Luft nach oben kommt. Wie viel von ihr die trockene Schicht durchbricht und wie viel liegen bleibt, hängt von dem Sättigungsgrad und den Anfangstemperaturen ab. Im allgemeinen wird ein Teil der feuchten Luft in die Höhe steigen und hierfür ein Teil der trockenen herabsinken. Es kann dann Ruhe eintreten, auch wenn zu unterst noch ein Teil der feuchten, in der Mitte die trockene, darüber der andere Teil der feuchten Luft liegt.<sup>1)</sup>

Nach der Rechnung setzt sich nun diese Kondensationswärme tatsächlich zum Teil in kinetische Energie um, zum Teil kommt sie in der relativ hohen Temperatur der aufgestiegenen Luft zum Ausdruck. Die mittlere Geschwindigkeit, welche so entsteht, berechnet Margules in einem Falle zu 10 m/sec.

Trotzdem schreibt er der Kondensationswärme eine weitaus geringere Bedeutung für die Entstehung der Winde zu als der potentiellen Energie. Unter den in der Natur tatsächlich vorkommenden Anfangsbedingungen findet man leicht solche, die aus der potentiellen Energie bedeutend größere Windstärken liefern als jene obige, die aus der Kondensationswärme stammt.

Die Rolle dieser Wärme für die Bewegung der Luftmassen hat Helmholtz<sup>2)</sup> bei der Darlegung seiner Theorie der tropischen Wirbelstürme behandelt; hier wird eine ausgedehnte Masse mit Feuchtigkeit

1) Margules bedient sich bei der Rechnung eines fiktiven Gases, welches mit Wärmezufuhr expandiert und die Stelle der feuchten Luft vertritt. Statt der Poissonschen Gleichung kann man für ein solches eine analog gebaute mit einem kleineren Zahlenkoeffizienten schreiben. Vgl. auch Emden, Gaskugeln.

2) Vorträge und Reden, 5. Aufl., Bd. II, S. 155.

gesättigter Luft angenommen, über welcher trockene liegt; es herrscht stabiles Gleichgewicht, bis durch einen kleinen Impuls die feuchte Luft an einer Stelle aufsteigt; hierdurch erhält sie einen Auftrieb in der trockenen Luft, von unten strömen neue Massen feuchter Luft nach, bis schließlich die feuchten Massen entweder in die Höhe geschafft sind, oder ihren Auftrieb allmählich verlieren. Das Endstadium ist ähnlich dem oben angeführten von Margules.

**50. Wärmezufuhr als Energiequelle stationärer Bewegungen.** Wir haben bisher adiabatische und pseudoadiabatische Vorgänge betrachtet. Bei beiden entwickelte sich auf Kosten potentieller Energie eine lebendige Kraft der Luft, die allmählich durch Reibung aufgezehrt und in Wärme verwandelt werden muß. Von diesen Vorgängen unterscheiden sich wesentlich solche, bei welchen Luftbewegungen durch Wärmezufuhr dauernd erhalten werden. Hier können stationäre Bewegungen herrschen, während früher alle Bewegungen dem Endziel des minimalen Wertes der potentiellen Energie zustrebten.

Zur Erhaltung jeder stationären Bewegung ist ein Arbeitsaufwand nötig, da die Reibung die Bewegung stets zu schwächen strebt. Diese Arbeit kann durch Wärmezufuhr gewonnen werden. Da aber die Luft nicht dauernd wärmer werden kann, muß außerdem an einer anderen Stelle Wärmeentziehung stattfinden. Man benützt schon lange ein Schema solcher stationärer Bewegungen mit Wärmeentziehung und Wärmezufuhr, das in der Natur in dieser Einfachheit gewiß nie auftritt, aber doch einen Begriff von den prinzipiellen Verhältnissen gibt.

Am Äquator wird ohne Zweifel der in den Passatwinden herbeiströmenden Luft durch Leitung und Strahlung Wärme zugeführt; diese erwärmte Luft steigt über den äquatorialen Gebieten auf und breitet sich oben gegen die höheren Breiten aus, um in den Hochdruckgürteln, offenbar unter Wärmeausstrahlung, wieder zu sinken und die Passatströmung zu nähren.

Ein ähnliches Schema einer stationären Zirkulationsbewegung müssen wir in den Monsunwinden, also zwischen Kontinent und Ozean annehmen, und die täglichen Land- und Seewinde unterliegen dem gleichen.

Man kann den Vorgang in Wasser leicht nachahmen, wenn man in einem länglichen Trog auf der einen Seite das Wasser erwärmt, auf der anderen Seite, z. B. durch ein Stück Eis, abkühlt. Die Strömung geht dann in der Höhe von warm zu kalt, unten von kalt zu warm.

Margules<sup>1)</sup> hat berechnet, welche Wärmezufuhr nötig ist, um gewisse Druckunterschiede stationär zu erhalten. Wir nehmen hierzu an, die Luft beschreibe in der Vertikalebene einen rechteckigen Weg  $ABCD$  (Fig. 28). In  $A$  sei der Druck ( $P_1$ ) höher als in  $B$  ( $P_2$ ), die Luft strömt

1) a. a. O. Denkschr. Wien. Akad. Nils Ekholm hat eine ähnliche Auffassung geäußert, ohne sie aber näher auszuführen; Met. Zeitsch. 1891, S. 366.

daher in einem Niveau von  $A$  nach  $B$  und zwar, wie wir annehmen, adiabatisch. In  $B$  werde sie durch Wärmezufuhr von der Temperatur  $T'_1$  auf  $T_2$  gebracht. Dadurch erhält sie einen Auftrieb und steigt adiabatisch

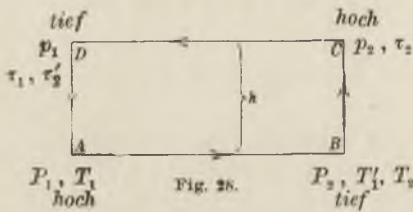


Fig. 26.

bis  $C$ . Nun sei sie gezwungen, von hier adiabatisch nach  $D$  zu strömen, wo der Druck  $p_1$  tiefer ist als  $p_2$  in  $C$ . Mit der Temperatur  $\tau'_2$  in  $D$  angekommen, wird ihr dort Wärme entzogen, sie kühlt auf die Temperatur  $\tau_1$  ab und sinkt adiabatisch vermöge ihrer Kälte nach  $A$ . Der Vorgang kann stationär sein. Die Druckgradienten

$P_1 - P_2$  und  $p_2 - p_1$  erhalten die Massen in Bewegung, sie leisten Arbeit<sup>1)</sup>, die sich in Reibungswärme umsetzt; von der letzteren nehmen wir an, daß sie fortwährend nach außen abgegeben wird. Der Unterschied der in  $B$  zugeführten und in  $D$  entzogenen Wärme muß der geleisteten Arbeit äquivalent sein. Rechnet man dies aus, so kann man auch beurteilen, wieviel von der in  $B$  zugeführten Wärme ( $Q$ ) in Arbeit umgesetzt, wieviel wieder abgegeben wird ( $Q'$ ).

In der Thermodynamik heißt der prozentuelle Teil der Wärme, welcher in Arbeit umgewandelt wird, der Nutzeffekt  $\left(\frac{Q-Q'}{Q}\right)$ . In der Tat haben wir hier jenen Vorgang vor uns; dessentwegen man mitunter die von der Sonne bestrahlte Atmosphäre als Wärmemaschine bezeichnet hat. Es handelt sich hier wie dort um die teilweise Umsetzung von Wärme in Arbeit. Daß man die in der Atmosphäre geleistete Arbeit fast gar nicht verwendet, sondern sich in Reibungswärme umsetzen läßt, tut natürlich nichts zur Sache. Die Entziehung der Wärme im Punkte  $D$  entspricht der Rolle des Kondensators bei der Dampfmaschine, die Zufuhr in  $B$  der Rolle des Dampfkessels.

Wir betrachten nun 1 kg Luft, welches den Kreisprozeß durchmacht. Um es in  $B$  von der Temperatur  $T'_1$  auf  $T_2$  zu erwärmen, ist die Wärmezufuhr  $Q = c_p(T_2 - T'_1)$  nötig; hier ist  $c_p$  zu setzen, da der Druck in  $B$  konstant bleibt. Zur Abkühlung von  $\tau'_2$  auf  $\tau_1$  in  $D$  wird umgekehrt die Wärmeentziehung  $Q' = c_p(\tau'_2 - \tau_1)$  gebraucht.

Um alle diese Temperaturen zu finden, benützen wir die Gleichungen, welche die adiabatische Bewegung trockener Luft betreffen; es muß sein:

$$\tau_1 = T_1 - \frac{Ag}{c_p}h, \quad \tau_2 = T_2 - \frac{Ag}{c_p}h, \quad \text{wenn } h \text{ die vertikale Wegstrecke;}$$

$$\text{ferner nach der Gleichung von Poisson: } T'_1 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^\kappa, \quad \tau'_2 = \tau_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\kappa.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke berechnet man die in Arbeit umgesetzte Wärme  $Q - Q' = c_p(T_2 - T'_1 + \tau'_2 - \tau_1)$ .

1) Die Arbeit der Druckkräfte auf den vertikalen Wegstrecken wird von Margules vernachlässigt.



Das folgende Zahlenbeispiel hat Margules angegeben; es ist:

$$h = 6000 \text{ m}, \quad P_1 = 770 \text{ mm}, \quad P_2 = 740 \text{ mm}, \quad T_1 = 273^\circ, \quad T_2 = 288^\circ.$$

Man erhält  $\tau_1 = 213,4^\circ$ ,  $\tau_2 = 228,4^\circ$ ,  $p_1 = 330,07 \text{ mm}$ ,  $p_2 = 333,38 \text{ mm}$ ,  $T_1' = 269,87^\circ$ ,  $\tau_2' = 227,74^\circ$ . Daraus folgt:  $Q = 4,31$ ,  $Q' = 3,41 \text{ kg-Kal}$ . Es werden also 0,90 kg-Kal. in Arbeit verwandelt, der Nutzeffekt ist 0,21.

Die vorgeschriebene Art der Zirkulation erfolgt natürlich nur dann, wenn die Luftsäulen so hoch gewählt werden, daß das Druckgefälle seine Richtung infolge der ungleichen Temperaturen in der Höhe umkehrt. Zwischen  $AB$  und  $CD$  muß in gewisser Höhe eine Fläche gleichen Druckes horizontal verlaufen. Oberhalb ist eine Strömung von rechts nach links, unterhalb von links nach rechts. In unserem Beispiel liegt diese Grenzfläche in 4900 m Höhe, wie sich aus der barometrischen Höhenformel berechnen läßt.

Bei der Strömung von kalter Luft gegen das warme Gebiet an der Erdoberfläche, von warmer gegen das kalte in der Höhe tritt im warmen Gebiet unten Abkühlung, im kalten oben Erwärmung ein. Hierdurch wird beiderseits das Temperaturgefälle unter den adiabatischen Wert herabgedrückt. In unserem Beispiel wurde durch Zufuhr, bzw. Entziehung von Wärme jener Wert wiederhergestellt. Fehlen diese, wie z. B. in der Mitte, so bleiben die geringeren Temperaturgradienten erhalten. Bigelow<sup>1)</sup> vermutet hierin zum Teil die Ursache für das Vorwiegen der unteradiabatischen Gradienten in der Atmosphäre.

Margules behandelt auch noch ein Beispiel mit feuchter Luft, die beim Aufsteigen in der Säule  $BC$  Kondensation liefert. Diese Säule wird hier wärmer als bei trockener Luft, infolgedessen wird die Druckdifferenz im oberen Niveau größer, wenn unten derselbe Druck angenommen wird wie früher. Es wird dann mehr Wärme in Arbeit verwandelt, entsprechend der größeren Arbeitsleistung oben. Der Nutzeffekt ist trotzdem geringer, weil ein Teil der zuzuführenden Wärmemenge von der Kondensationswärme bestritten wird.

**51. Vertikale Temperaturverteilung als Effekt des Umsturzes der Strahlungsschichten.** Wir schließen diesem Kapitel noch eine Betrachtung<sup>2)</sup> über die normale Temperaturverteilung in der Atmosphäre als Effekt der Umlagerung von Luftschichten an, die ihre Temperatur den Strahlungsvorgängen verdanken. Es handelt sich hier um ähnliche Verlagerungen wie im Abschnitt 48, Beispiel 1, wobei uns allerdings die frei werdende kinetische Energie gleichgültig ist.

Im Abschnitt 28, S. 57 wurde die Temperaturverteilung berechnet, welche sich (nach Emden) in der Atmosphäre allein als Folge der Strahlung einstellen würde. Dort wurde gezeigt, daß das Strahlungs-

1) Monthly, Weath. Rev., 1906, S. 563.

2) F. M. Exner, Met. Zeitsch., 1915, S. 318.

gleichgewicht nicht zugleich ein statisches ist, sondern daß vielmehr durch die Strahlung in den untersten 3 km vertikale Temperaturgradienten entstehen, die größer als  $1^{\circ}$  pro 100 m sind. Diese Verteilung führt zum Umsturz und zu einer Neuordnung der Luftmassen. Man kann sich nach deren Beschaffenheit fragen, da es wahrscheinlich ist, daß sie mit den tatsächlich bestehenden Verhältnissen einige Ähnlichkeit haben wird.

Wie früher sollen sich die einzelnen Luftschichten adiabatisch bewegen und von selbst derart verlagern, daß ihre potentielle Energie ein Minimum wird. Das Problem kommt dann darauf hinaus, die Massen des Strahlungsgleichgewichtes nach steigender potentieller Temperatur in vertikaler Richtung umzuordnen und für diese Neuordnung die nunmehrige vertikale Temperaturverteilung anzugeben.

In dieser Allgemeinheit ist die Frage noch nicht beantwortet. Es ist aber nicht schwer, ein bestimmtes Zahlenbeispiel zu behandeln, wenn man die Atmosphäre in Schichten von endlicher Dicke teilt, jeder eine konstante potentielle Temperatur beilegt und diese Schichten neu anordnet. Wir benützen zu diesem Zwecke die Temperaturverteilung des Strahlungsgleichgewichtes, welche in der Fig. 8 (S. 62) enthalten ist.

Ist der Druck am Boden 760 mm, so wird zunächst, trockene Luft vorausgesetzt, aus der Strahlungstemperatur der Druck, die Dichte und die potentielle Temperatur im Anfangszustand für jede Höhenlage von  $\frac{1}{3}$  zu  $\frac{1}{3}$  km bestimmt. Damit läßt sich die Masse jeder Schichte von  $\frac{1}{3}$  km Dicke über 1 m<sup>2</sup> Fläche berechnen und deren mittlere potentielle Temperatur daneben setzen.

Wir ordnen jetzt die Schichten nach dieser letzten Größe um. Alle Massen von gleicher potentieller Temperatur werden in eine zusammengeworfen. Dann läßt sich der Druck am oberen Ende dieser Massen berechnen, daraus die Schichtendicke, welche jede Masse ausfüllt, und damit ihre Höhenlage. Eine graphische Darstellung ermöglicht es, die Drucke in den mittleren Schichtenhöhen und aus ihnen die potentiellen und dann auch die absoluten Temperaturen daselbst zu finden.

Die folgende Fig. 29 gibt eine Darstellung der anfänglichen Strahlungstemperatur, der potentiellen Strahlungstemperatur (ausgezogene Kurven) und der schließlichen absoluten und potentiellen Temperatur nach der Umlagerung (gestrichelte Kurven). Diese reicht nicht höher als bis zu 6,5 km; darüber wird eine geringe Verschiebung eintreten, durch die die Temperaturverteilung in der oberen Säule nicht wesentlich geändert wird. Tatsächlich findet die neue Temperatur in jenen Höhen einen einwandfreien Anschluß an die unverändert gebliebene Strahlungstemperatur darüber. Da die Rechnung nur eine beiläufige ist, sind die Kurven der Figur gegenüber den berechneten Zahlen etwas ausgeglichen worden.

Die Kurve für die anfängliche potentielle Temperatur zeigt deutlich das Ergebnis der Emdenschen Rechnung über die Unstabilität der Schichten. Die Störung durch den Umsturz reicht bis in jene Höhen hinauf, in welchen noch die potentielle Temperatur des Bodens angetroffen wird. Die untersten Massen und jene aus diesen Höhen (6 km) vereinigen sich zu einer Schichte. Die Massen aus 3 km nehmen nach dem Umsturz die tiefste Lage ein.

Die neue so gefundene Temperaturverteilung entspricht nur annähernd den Beobachtungstatsachen. Sie zeigt unten fast lineare Ab-

nahme der Temperatur, oben einen allmählichen Übergang zur Isothermie. Die lineare Abnahme beträgt etwa  $50^{\circ}$  auf 6 km, also im Durchschnitt  $0,83^{\circ}$  pro 100 m. Freilich liegt der Knick schon in 6 km Höhe. Das Resultat würde sich naturgemäß verbessern, wenn die Kondensation des Wasserdampfes berücksichtigt würde; dann würde die steigende Luftmasse sich langsamer abkühlen, die lineare Temperaturabnahme wäre geringer, der Knick würde höher liegen. Wegen des ungleichen Verhaltens der feuchten Luft beim Auf- und Abstieg läßt sich die Verteilung schwer berechnen.

Es hat demnach den Anschein, als könnte man die allgemeine Charakteristik der vertikalen Temperaturverteilung — lineare Abnahme in den untersten Schichten, Konstanz in den oberen — nunmehr aus den Vorgängen der Strahlung und der Umlagerung ins stabile Gleichgewicht erklären. Wenn man, wie dies häufig geschieht, die Temperaturverteilung in der Strato- und Troposphäre auf das Fehlen, bzw. Vorkommen vertikaler Bewegung zurückführt, so dürfte dies nach den obigen Darlegungen nicht ganz zutreffen. Die vertikale Bewegung in der Troposphäre scheint zum Teil ein Effekt der Strahlungstemperaturen zu sein; nicht die vertikalen Bewegungen sind das primäre, sondern die Temperaturen. In der Stratosphäre können andererseits vertikale Bewegungen fehlen, weil dieselbe infolge der Strahlung in einem sehr stabilen Zustand ist.

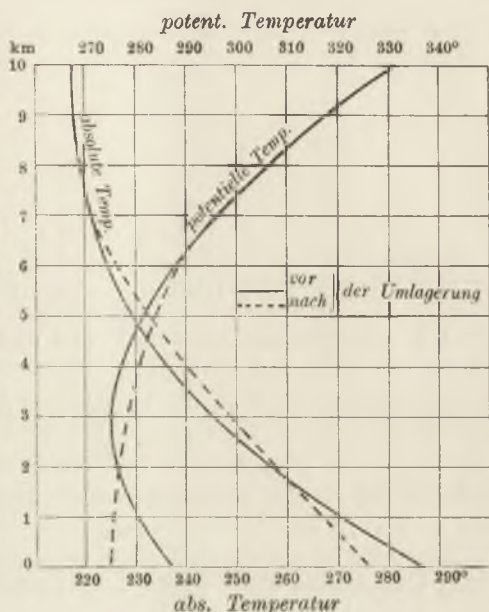


Fig. 29.

## Achtes Kapitel.

### Stationäre Strömungen in der Atmosphäre.

#### **52. Ungleiche Temperaturen und stationäre Bewegungen.**

Die Ergebnisse des vorigen Kapitels führen zu dem Schlusse, daß Temperaturunterschiede die allergrößte Rolle für die Bewegungen in der Atmosphäre spielen müssen. Durch sie kommen, wie wir sahen, Druckunterschiede zustande und die Bewegung wird eingeleitet. Freilich ist der Druck in einem Niveau nicht nur durch die Temperatur der Luft über demselben, sondern auch durch die Höhe der Atmosphäre bedingt. Es ist aber bisher nicht bekannt, ob die Atmosphäre auf der Erde verschieden hoch reicht oder nicht. Wir kommen hierauf später zurück und betrachten vorläufig jene Druckunterschiede, welche durch Temperaturunterschiede verursacht werden.

Wenn in einer Niveaufläche Druckunterschiede bestehen, so wirken diese auf die Luftmassen zwar wie beschleunigende Kräfte, sie sind stets mit Bewegungen verbunden. Doch müssen diese Bewegungen keine beschleunigten sein, sie können, wie im Abschnitt 36 gezeigt wurde, stationär bleiben, d. h. sie ändern sich mit der Zeit nicht.

Diese stationären Bewegungen sind von großer Wichtigkeit für das Verständnis der Winde. Bekanntlich besteht in den Tropen eine recht große Konstanz der Witterung; aber auch in höheren Breiten herrschen, trotzdem die Veränderlichkeit des Wetters hier sprichwörtlich geworden ist, gewisse allgemeine Windverhältnisse durch lange Zeiten vor, wie z. B. in den „Aktionszentren der Atmosphäre“. Die häufigen Schwankungen hier erscheinen zum Teil nur als verhältnismäßig geringe Abweichungen von den stationären Verhältnissen, welche durch diese Aktionszentren bedingt werden.

Es empfiehlt sich aus diesem Grunde, die Untersuchungen stationärer atmosphärischer Bewegungen so weit als möglich zu treiben und die tatsächlich beobachteten Schwankungen als Abweichungen vom stationären Bewegungszustand aufzufassen, nicht aber, wie es ursprünglich näher liegen würde, als Abweichungen vom Ruhezustand.

In den Abschnitten 22 und 25 haben wir die Bedingung für den Ruhezustand der Luft festgestellt; sie besteht darin, daß die Flächen gleichen Druckes mit den Niveauflächen der Schwere zusammenfallen, oder, wenn der Druck als Temperatureffekt aufgefaßt wird, daß in ver-

tikaler Richtung die potentielle Temperatur zunimmt, in allen horizontalen Lagen aber die Temperatur konstant ist. Diese zweite Bedingung für den bleibenden Ruhezustand ist bekanntlich auf der Erde niemals erfüllt; es muß daher stets Luftbewegungen geben.

Die Störung des Ruhezustandes entsteht nach Abschnitt 25, wenn warme Luft neben kalter liegt, aus dem ungleichen spezifischen Gewicht der Luftmassen. Da letzteres nicht allein von der Temperatur sondern auch vom Dampfgehalt abhängt, so wäre genau genommen hier stets an die Stelle der Temperatur selbst die „virtuelle“ Temperatur zu setzen gewesen (vgl. S. 10).

Für den stationären Bewegungszustand gelten nicht mehr dieselben einfachen Bedingungen wie oben für den Zustand der Ruhe. Jetzt sind ungleiche Temperaturen in einer Horizontalen möglich, ohne daß dabei Beschleunigungen entstehen und jener Umsturz der Massen eintritt, der im vorigen Kapitel behandelt wurde. Die potentielle Energie, die für die Entstehung eines Sturmes erforderlich ist, ist nun im stationären Bewegungszustand zwar vorhanden, doch kommt es zu keinem Sturm.

Die Bedingung für stationäre Bewegung von kalten und warmen Massen in einem Niveau besteht wesentlich darin, daß den aus Temperaturdifferenzen entstandenen horizontalen Druckgradienten durch die zwei Bewegungskräfte, die ablenkende Kraft der Erdrotation und die Zentrifugalkraft, das Gleichgewicht gehalten wird. Dann können kalte und warme Massen aneinander grenzen, ohne daß es zu einem Umsturz kommt.

In den folgenden Abschnitten werden Beispiele dieser einfachen Bedingung behandelt, welche für verschiedene Bewegungsformen der Atmosphäre von Bedeutung sind.

**53. Horizontales Temperaturgefälle bei stationärer Bewegung.** Wir wollen zunächst annehmen, es sei ein horizontales Temperaturgefälle in der Atmosphäre gegeben; wir fragen nach der Bedingung, unter welcher mit demselben eine geradlinige horizontale Luftbewegung im stationären Zustand verbunden ist. In der Vertikalen herrscht das statische Gleichgewicht.

Die Frage hat Margules<sup>1)</sup> beantwortet und wir folgen hier seiner Ableitung. Die Gleichung für stationäre geradlinige Bewegung war (S. 86):

$$2 \omega \sin \varphi v = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Da wir das Koordinatensystem beliebig drehen können, ist sie auf jede geradlinige Bewegung anwendbar. Zu ihr kommt die statische Grundgleichung:  $g = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ .

1) Über Temperaturschichtung in stationär bewegter und in ruhender Luft; Hann-Band der Met. Zeitschr., 1906, S. 243.

Damit beide Beziehungen zu gleicher Zeit bestehen, ist nötig, daß:

$$\frac{\partial (2 \omega \sin \varphi v \rho)}{\partial z} = \frac{\partial (g \rho)}{\partial x} = - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z}.$$

Hieraus folgt für konstante Breite, wenn  $2 \omega \sin \varphi = l$ :  $l \frac{\partial (v \rho)}{\partial z} = g \frac{\partial \rho}{\partial x}$

und, da  $\rho = \frac{p}{RT}$ , nach einigen Umformungen auch:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = v \frac{\partial (\lg T)}{\partial z} - \frac{g}{l} \frac{\partial (\lg T)}{\partial x}.$$

Diese eigentümliche Gleichung stellt eine Bedingung für die stationäre Luftbewegung auf: Damit die Geschwindigkeit  $v$  bestehen bleibe, muß sie mit der Höhe zu- oder abnehmen in einem Ausmaße, das durch die horizontale und vertikale Temperaturverteilung bestimmt wird.

Um die Bedeutung der beiden Glieder rechts besser zu übersehen, führen wir an Stelle der absoluten die potentielle Temperatur  $\vartheta$  ein (S. 12). Es ist  $d(\lg \vartheta) = d(\lg T) - \kappa d(\lg p)$ .

Damit erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = v \frac{\partial (\lg \vartheta)}{\partial z} - \frac{g}{l} \frac{\partial (\lg \vartheta)}{\partial x}.$$

Es gilt also genau die gleiche Bedingung wie für die absolute auch für die potentielle Temperatur.

Nun können wir, um uns über den Sinn der Gleichung zu orientieren, indifferentes Gleichgewicht der Luftmassen annehmen und also  $\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$

setzen; dann bleibt nur:  $\frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{g}{l} \frac{\partial (\lg \vartheta)}{\partial x}$ .

In einer Horizontalebene ändert sich die potentielle Temperatur ganz ähnlich wie die absolute. Wir erhalten also die Bedingung: Nimmt bei indifferentem Gleichgewicht die Temperatur nach der positiven  $x$ -Achse zu, so nimmt die Geschwindigkeit  $v$  mit der Höhe ab. Hier kommt es nun noch auf das Vorzeichen von  $v$  an. Wir haben stets ein rechtsdrehendes Koordinatensystem vorausgesetzt. Ist z. B.  $x$  nach Süden positiv, so ist es  $y$  nach Westen. Demnach nimmt bei Zunahme der Temperatur gegen Süden Ostwind ( $v$  positiv) mit der Höhe ab, Westwind ( $v$  negativ) mit der Höhe zu. Welcher Wind weht, hängt von der Druckverteilung ab; die Temperatur kann in beiden Fällen gleich verteilt sein. Dies gilt für die nördliche Halbkugel, wo  $l$  und  $\sin \varphi$  positiv sind.

Unter diesen einfachen Verhältnissen haben wir also zwei Fälle zu unterscheiden; im ersten hat das Temperaturgefälle die gleiche, im zweiten die entgegengesetzte Richtung wie das Druckgefälle. Auf der südlichen Halbkugel gibt es zwei gleiche Möglichkeiten mit der umgekehrten Windverteilung. Auf diese vier möglichen Gradienten von Temperatur und Druck bei stationärer geradliniger Bewegung beziehen

sich die folgenden Figuren 30a, b, c, d. Die Verteilung der Windgeschwindigkeit in verschiedenen Höhen ist durch zwei Pfeile ungleicher Länge dargestellt, von denen der ausgezogene die Windstärke in der

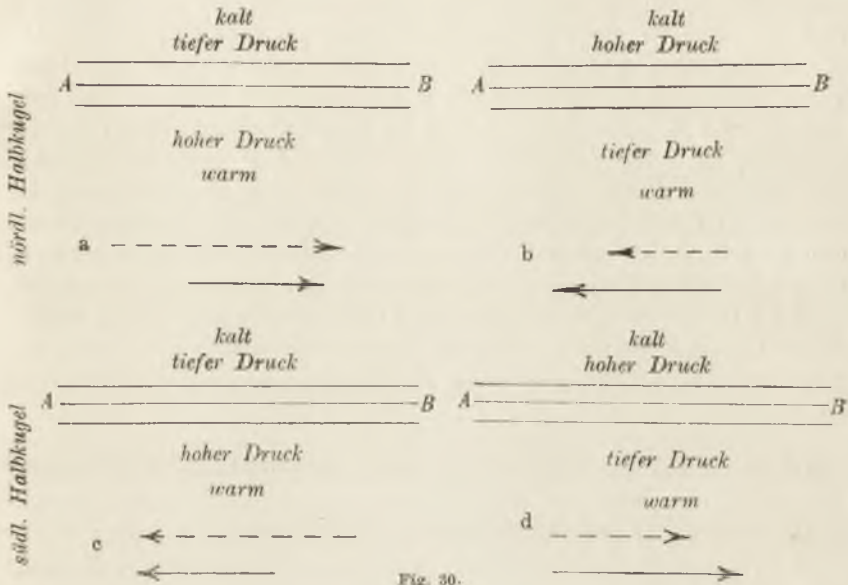


Fig. 30.

unteren, der gestrichelte die in der oberen Schicht bedeutet. Die Linien *AB* stellen einander parallele Isobaren und Isothermen vor. Jede Figur kann beliebig im Horizont orientiert werden.

Die Darstellung gilt in dieser einfachen Weise nur für adiabatische Temperaturabnahme; normalerweise ist  $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$ , so daß auch das erste Glied rechts in der obigen Gleichung noch in Betracht kommt. Durch dieses wird der Geschwindigkeitsunterschied in Fig. 30a und c größer, in Fig. 30b und d kleiner.

Es ist nicht schwer, den Sinn unserer Rechnung auch unmittelbar einzusehen. Hat Druck- und Temperaturgefälle dieselbe Richtung (Fig 30a und c), so wird bei gegebenem Druckgefälle unten das Gefälle oben immer größer, weil die Flächen gleichen Druckes auf der warmen Seite weiter voneinander abstehen, als auf der kalten. Es muß dann auch die dem Druckgefälle entsprechende Windstärke mit der Höhe zunehmen. Das umgekehrte ist der Fall, wenn die Seite mit höherem Druck die kältere ist.

Bei stationärer Bewegung sind die beschleunigenden Kräfte Null. Wenn daher z. B. längs eines warmen Gebietes mit hohem Druck die Winde nach oben hin an Stärke zunehmen, so wird der Auftrieb dieser warmen Masse fehlen, sie kann neben der kälteren liegen bleiben. Noch

auffallender wird dies, wenn die Temperaturen zweier Massen sich um einen endlichen Betrag unterscheiden (vgl. Abschnitt 54).

Sind die Isobaren nicht geradlinig, sondern gekrümmt, so läßt sich die Rechnung in ganz ähnlicher Weise durchführen, indem die Gleichung für stationäre Bewegung in einer Kreisbahn (S. 87) benützt wird. Die Bedingung für die Wind- und Temperaturverteilung wird hier etwas verwickelter, da zur ablenkenden Kraft die Zentrifugalkraft hinzutritt, welche nun je nach der Rotation in zyklonaler oder antizyklonaler Richtung die erstere verstärkt oder abschwächt. Nahe dem Äquator, wo  $\sin\varphi$  und damit  $l$  verschwindet, ändert sich die Bedingung der stationären Bewegung dann allerdings wesentlich. Die Rotationsbewegung um kalte Gebiete muß hier bei zyklonaler wie antizyklonaler Richtung nach oben zunehmen, um warme Gebiete nach oben abnehmen, weil der Druck im Zentrum nun stets tiefer ist als außen, d. h. weil es keine Antizyklonen gibt. Hier am Äquator gilt nämlich:

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial z} = \frac{g}{r} \frac{\partial (\lg T)}{\partial r} + \psi^2 \frac{\partial (\lg T)}{\partial z},$$

wo  $\psi$  die Rotationsgeschwindigkeit und  $r$  der (konstante) Radiusvektor ist. Auch hier kann statt der absoluten die potentielle Temperatur gesetzt werden, wodurch das Resultat leichter verständlich wird.

**54. Grenzfläche zwischen verschieden temperierten Schichten.** Helmholtz und später Margules haben untersucht, ob Luftmassen, deren Temperatur sich um einen endlichen Wert unterscheidet, nebeneinander in einem stationären Bewegungszustand sein können. Sie haben die Frage bejaht und einen Bewegungszustand aufgefunden, der sowohl für das Verständnis der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre wie der lokalen Windsysteme von großer Bedeutung ist. Wir folgen zunächst der Rechnung von Margules (a. a. O.), die sich auf geradlinige Bewegungen, wie oben, bezieht und mit der einfachsten Form der Bewegungsgleichungen durchgeführt wird.

An einer Grenzfläche stoßen kalte und warme Massen zusammen; es wird Form und Lage dieser Grenzfläche untersucht. Liegen die Massen übereinander, so muß, damit stabiles Gleichgewicht bestehe, die wärmere Luft oben sein. Im Falle der Ruhe verläuft die Trennungsfläche horizontal. Würde sie vertikal stehen, also warme und kalte Luft nicht übereinander liegen, so könnte jede Masse für sich stabil sein, die beiden zusammen aber wären es niemals, auch dann nicht, wenn jede eine Bewegung für sich besäße. Denn wenn in einem Niveau durch die Bewegungskraft (ablenkende Kraft der Erdrotation) der Druckgradient kompensiert wird, so kann dies in einem anderen nicht zugleich der Fall sein, da die Größe des Gradienten infolge des Temperaturunterschiedes von der Höhe abhängig wird. Wenn daher dank den Bewegungskräften ein stationärer Zustand überhaupt möglich ist, so muß die Grenz-



fläche gegen den Horizont eine schiefe Lage einnehmen, bei der die kältere Luft unten liegt. Die nähere Untersuchung zeigt, daß die Bewegung unter diesen Umständen tatsächlich stationär sein kann. Die ablenkende Kraft der Erdrotation hält dabei in jedem Niveau dem horizontalen Druckgradienten das Gleichgewicht.

In Fig. 31 ist eine solche schiefe Grenzfläche gezeichnet. Sie stehe senkrecht zur  $xz$ -Ebene. Die untere Masse 1 ist die kältere; sie bewege sich in allen ihren Teilen mit derselben Geschwindigkeit  $v_1$ , die Masse 2 mit  $v_2$ , beide senkrecht zu jener Ebene. Die Dichte der ersten sei  $\rho_1$ , ihre Temperatur  $T_1$ ;  $\rho_2$ ,  $T_2$  seien die entsprechenden Werte der Masse 2. An der Grenzfläche  $GG'$  muß der Druck derselbe

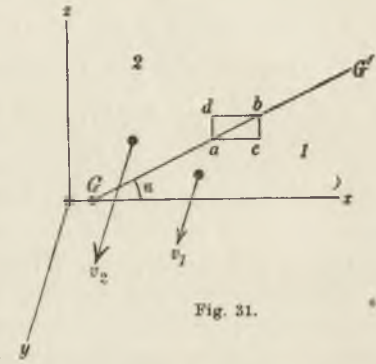


Fig. 31.

sein, ob man von der Masse 1 oder von der Masse 2 an sie herankommt. Das Druckgefälle aber ist rechts und links von ihr im allgemeinen verschieden. Nimmt man den Druck in  $a$  zu  $p_a$  an, so kann man den Druck in  $b$ ,  $p_b$ , ausdrücken, indem man einmal den Rechteckseiten entlang von  $a$  über  $c$ , das andere Mal über  $d$  nach  $b$  geht. Dabei ist  $ac = dx$ ,  $bc = dz$ .

Wie auf S. 151 haben wir nun zu gleicher Zeit:

$$lv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

infolgedessen wird:

$$p_c = p_a + \frac{\partial p_a}{\partial x} dx = p_a - lv_1 \rho_1 dx,$$

$$p_b = p_a + \frac{\partial p_a}{\partial x} dx = p_a - lv_2 \rho_2 dx,$$

$$p_b = p_c + \frac{\partial p_c}{\partial z} dz = p_c - g \rho_1 dz,$$

$$p_a = p_a + \frac{\partial p_a}{\partial z} dz = p_a - g \rho_2 dz.$$

Daraus folgt:

$$p_b = p_a - lv_1 \rho_1 dx - g \rho_1 dz = p_a - lv_2 \rho_2 dx - g \rho_2 dz,$$

$$\text{mithin } \frac{dz}{dx} = \frac{l}{g} \frac{v_1 \rho_1 - v_2 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Der Winkel  $\alpha$ , welchen die Grenzfläche kalter und warmer Luft mit dem Horizont einschließt, ist somit gegeben durch:

$$\text{tg } \alpha = \frac{l}{g} \frac{v_1 \rho_1 - v_2 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} = -\frac{l}{g} \frac{v_1 T_1 - v_2 T_2}{T_2 - T_1}.$$

Der Winkel ist um so größer, je verschiedener die Geschwindigkeiten und je ähnlicher die Temperaturen der beiden Massen sind. Herrscht Ruhe ( $v_1 = v_2 = 0$ ), so ist  $\alpha = 0$ , also horizontale Schichtung. Ist  $v_1 = v_2 = v$ , d. h. sind die Massen verschieden temperiert, bewegen sich aber gleich rasch, so wird  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{l}{g} v$ . In diesem Fall ist die Trennungsfläche der Temperaturen zugleich eine isobare Fläche, wie sich leicht zeigen läßt; denn es war oben  $lv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ ,

folglich  $-\frac{l}{g} v = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial z}}$ . Da  $\frac{\partial p}{\partial z}$  die Tangente des Winkels  $90^\circ - \alpha$

ist, so folgt das gesagte unmittelbar. In diesem einfachen Falle, wo die isothermen und isobaren Flächen zusammenfallen, besteht also bei beliebiger, aber beiderseits gleicher Bewegung stationärer Zustand. Um die Größenordnung des Winkels  $\alpha$  in diesem Fall zu erfahren, setzen wir  $v = 10$  m/sec,  $\varphi = 45^\circ$ ; es ist dann  $l = 1,03 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha = 0^\circ 0' 21''$ .

Liegt die kalte Masse wie in Fig. 31 ostwärts keilförmig unter der warmen, so muß in diesem Fall ( $v$  negativ) Südwind wehen, der Druckgradient also gegen Westen gerichtet sein. Wie groß der Temperaturunterschied ist, ist gleichgültig.

Diese einfache Bedingung der stationären Bewegung, nämlich Zusammenfallen der isothermen und isobaren Flächen, gilt natürlich auch bei stetigem Temperaturgefälle, und spielt bei der Beurteilung der zeitlichen Veränderung von asymmetrischen Windsystemen eine Rolle.

Im allgemeinen Falle, wo die Geschwindigkeiten der kalten (1) und warmen (2) Masse ungleich sind, nehmen wir  $v_1 < v_2$  an, wodurch die Grenzfläche steiler wird. Bei dieser Ungleichung sind die Vorzeichen der Geschwindigkeiten zu berücksichtigen; wir können positive Werte von  $\operatorname{tg} \alpha$  erhalten sowohl wenn positive, wie wenn negative Geschwindigkeiten herrschen. Liegt also z. B. die kalte Luft ostwärts, so muß sich dieselbe weniger rasch gegen Süden oder rascher gegen Norden bewegen als die warme, damit die Grenzfläche im Gleichgewicht sei. Auf der südlichen Halbkugel gilt das umgekehrte. Das Koordinatensystem der Fig. 31 kann um die  $z$ -Achse gedreht werden.

Beispielshalber sei  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 10$  m/sec, die warme Luft streiche an der nordwärts liegenden kalten mit 10 m/sec Westostgeschwindigkeit hin; es sei ferner  $T_1 = 273^\circ$ ,  $T_2 = 283^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$ . Man erhält  $\alpha = 0^\circ 9' 45''$ . Die Trennungsfläche liegt also noch immer sehr nahe dem Horizont, doch ist der Winkel  $\alpha$  bedeutend größer als früher. Sie erhebt sich auf 1 km Distanz um 2,86 m. Die kalte Luft liegt als ein sehr spitzer Keil unter der warmen.



Der tiefste Druck liegt also in jedem Niveau in der Grenzfläche. Dort besteht eine förmliche Rinne tiefen Druckes, die von Norden nach Süden streicht. Sie verschiebt sich, wenn man in die Höhe geht, sehr

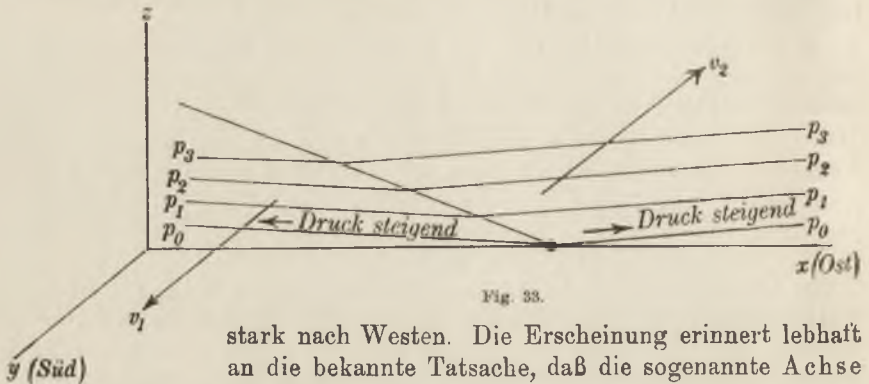


Fig. 33.

stark nach Westen. Die Erscheinung erinnert lebhaft an die bekannte Tatsache, daß die sogenannte Achse der Zyklonen nach Westen oder Nordwesten geneigt ist. Es ist kein Zweifel, daß es sich hier um innere Zusammenhänge handelt. Denn in der Depression der nördlichen Halbkugel haben wir in der Regel kalten Nordwind im Westen, warmen Südwind im Osten. Auch die Böenlinie bei Frontgewittern und Kälteeinbrüchen, die „ligne des grains“ von Durand-Gréville, stimmt mit unserem Schema überein. Wir kommen später hierauf zurück, doch sei schon hier bemerkt, wie diese Ähnlichkeit darauf hindeutet, daß die wirklichen Zyklonen meist nicht weit vom stationären Zustand entfernt sind.

Aus den bloßen Zeichnungen der Fig. 32 und 33 ergibt sich schon, daß der Abstand der isobaren Flächen voneinander rechts von der Trennungsfläche größer ist, als links von ihr. Die Ursache ist die geringere Dichte der warmen Luftmasse.

In Wirklichkeit liegt die Grenzfläche viel weniger steil, als die Figuren sie anzeigen. Die vertikale Dimension mußte im Interesse der Deutlichkeit gegenüber der horizontalen übertrieben werden.

Die hier abgeleiteten Verhältnisse entsprechen vollständig jenen, die sich im vorigen Abschnitt bei stetigem horizontalen Temperaturgefälle ergeben haben. Man kann die Lage der Grenzfläche, wie sie oben gefunden wurde, auch aus der Gleichgewichtsbedingung von S. 152 ableiten, welche lautete: 
$$\frac{\partial v}{\partial z} = v \frac{\partial (\lg T)}{\partial z} - \frac{g}{l} \frac{\partial (\lg T)}{\partial x}.$$

Hierzu denkt man sich eine unendliche Anzahl von Schichten, deren jede eine bestimmte Temperatur und Geschwindigkeit hat. Ist  $n$  die Normale auf diese Schichten,  $\alpha$  der Winkel, welchen sie mit der  $x$ -Achse bilden (vgl. Fig. 31), so ist:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial n} \cos \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial T}{\partial n} \sin \alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial n} \cos \alpha.$$

Damit wird  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{g} \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial v}{\partial n}$ . Sind nun die Übergänge nicht

stetig, sondern sprunghaft, so kann man setzen  $\frac{\partial T}{\partial n} = T_2 - T_1$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n} = v_2 - v_1$  und, da  $T$  und  $v$  Mittelwerte sind,  $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$ ,  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ . Durch Einsetzen in die obige Gleichung findet sich dann  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{l}{g} \frac{v_1 T_2 - v_2 T_1}{T_2 - T_1}$ , genau wie oben.

Die im vorigen Abschnitt bei stetigem Temperaturgefälle gefundene vertikale Geschwindigkeitsverteilung ist auch hier, bei unstetigem Temperaturübergang, vorhanden; die Masse 2 hat (Fig. 31) als ganzes eine von der Masse 1 verschiedene Geschwindigkeit. Diese sprunghafte Änderung der Windstärke kann als ein deutliches Symptom für das Vorhandensein unserer Temperaturgrenzfläche aufgefaßt werden. Sie ist neben der plötzlichen Temperaturänderung leicht zu beobachten, während sich die Neigung der Grenzfläche wegen der Kleinheit des Winkels  $\alpha$  natürlich der Beobachtung entzieht.

Fassen wir die für den stationären Bewegungszustand gefundenen Regeln der Abschnitte 53 und 54 zusammen, so können wir sagen: Aneinandergrenzende Luftmassen verschiedener Temperaturen bewegen sich im stationären Zustand so, daß die kältere Luft dabei keilförmig unter der wärmeren liegt. Blickt man von der kälteren zur wärmeren, so bewegt sich auf der nördlichen Halbkugel die erste relativ zur zweiten nach rechts, auf der südlichen nach links; diese relative Geschwindigkeit nimmt in einer Vertikalen nach aufwärts ab.

**55. Stationäre Kälte- und Wärmegebiete.** Im Anschluß an das vorige können wir nun leicht feststellen, welche Form und Windverteilung Luftmassen, die in solche von anderer Temperatur eingelagert sind, besitzen müssen, damit sie keinen Auf- oder Abtrieb erleiden. Wir denken uns hierzu zunächst streifenförmige Gebiete kalter oder warmer Luft, die in Ruhe sein sollen. Es läßt sich dann angeben, welche Windrichtungen rechts und links vom hervorgehobenen Streifen bestehen müssen und welche Neigung die Grenzflächen haben. Wir brauchen zur qualitativen Lösung dieser Frage nur auf die Verhältnisse in Fig. 31 (S. 155) zurückzugreifen.

a) Ruhende kalte Luft, eingebettet in bewegte warme Luft. Fig. 34 gibt einen schematischen Querschnitt senkrecht zur Bewegung der warmen

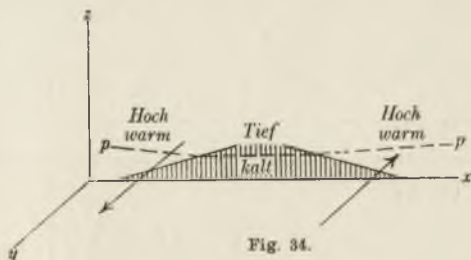


Fig. 34.

Luft. Die Verteilung ist unabhängig vom Azimut und gilt für die nördliche Halbkugel. Die kalte Masse ist schraffiert gezeichnet.

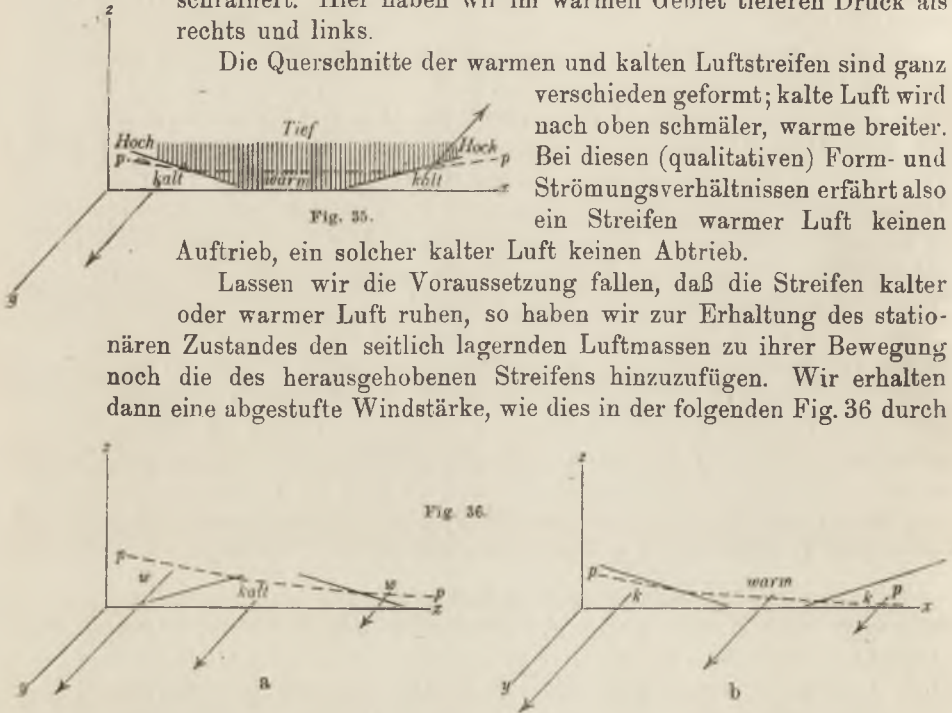
Aus der zur Erhaltung des stationären Zustandes nötigen Windverteilung folgt sogleich, daß im kalten Gebiet der Druck niedriger sein muß, als rechts und links davon. Dies ist durch eine isobare Fläche  $p$  (gestrichelt) angedeutet.

b) Ruhende warme Luft, eingebettet in bewegte kalte Luft. Das zu dem vorigen analoge Schema zeigt Fig. 35, die warme Luft ist schraffiert. Hier haben wir im warmen Gebiet tieferen Druck als rechts und links.

Die Querschnitte der warmen und kalten Luftstreifen sind ganz verschieden geformt; kalte Luft wird nach oben schmaler, warme breiter. Bei diesen (qualitativen) Form- und Strömungsverhältnissen erfährt also ein Streifen warmer Luft keinen

Auftrieb, ein solcher kalter Luft keinen Abtrieb.

Lassen wir die Voraussetzung fallen, daß die Streifen kalter oder warmer Luft ruhen, so haben wir zur Erhaltung des stationären Zustandes den seitlich lagernden Luftmassen zu ihrer Bewegung noch die des herausgehobenen Streifens hinzuzufügen. Wir erhalten dann eine abgestufte Windstärke, wie dies in der folgenden Fig. 36 durch



die verschiedene Länge der Pfeile angedeutet ist. Die Figuren können wieder beliebig um die z-Achse gedreht werden (nördliche Halbkugel) Die Druckverteilung, welche mit dieser Art der Bewegung verbunden ist, wird durch die gestrichelte Linie  $pp$  angegeben.

Wir können noch fragen, welche Form und Bewegungsverteilung nötig ist, damit eine abgeschlossene warme oder kalte Luftmasse mit kreisförmiger Basis, die rotiert, in der umgebenden ruhenden Luft stationär sei.

Die Gleichungen für die Bewegung in horizontalen Kreisen sind (S. 87):

$$r\dot{\theta}^2 - lr\ddot{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

In einer zu der früheren ganz analogen Weise findet man, wenn  $r$  den Abstand von der Drehungsachse bedeutet, um welche die Rotation  $\vartheta$  stattfindet und dieser letztere Wert für den ganzen Körper der Luftmasse 1, bzw. 2 der gleiche ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} = - \frac{r}{g} \frac{T_2 \dot{\vartheta}_1 (l - \dot{\vartheta}_1) - T_1 \dot{\vartheta}_2 (l - \dot{\vartheta}_2)}{T_2 - T_1}$$

In höheren Breiten ist  $l$  im allgemeinen bedeutend größer als  $\vartheta$ . Nun nehmen wir an, die Masse 1 sei in Ruhe und die Masse 2 rotiere um die  $z$ -Achse. Dann wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{r}{g} \frac{T_1 \dot{\vartheta}_2 (l - \dot{\vartheta}_2)}{T_2 - T_1}$$

Ist  $\dot{\vartheta}_2 > 0$ , die Rotation also antizyklonal, so wird  $\operatorname{tg} \alpha$  für  $T_2 > T_1$  positiv, für  $T_2 < T_1$  negativ. Im ersten Fall liegt die warme Masse innen, die Grenzfläche steigt bei Entfernung vom Zentrum aufwärts, im zweiten Fall liegt die kalte innen, die Grenzfläche fällt bei Entfernung vom Zentrum nach abwärts. Ihre Lagen sind ähnlich den früheren, nur wächst  $\operatorname{tg} \alpha$  jetzt proportional  $r$ , die Grenzfläche erhält eine doppelte Krümmung.

Ein Querschnitt durch dieselbe ist für die beiden Fälle der antizyklonalen Rotation in Fig. 37 gegeben. Aus welchem Grunde eine warme Luftmasse, die, wie in Fig. 37a, von der Rotationsfläche  $G_1 G_2$  begrenzt ist, nun in der umgebenden kalten Luft keinen Auftrieb erfährt, erkennt

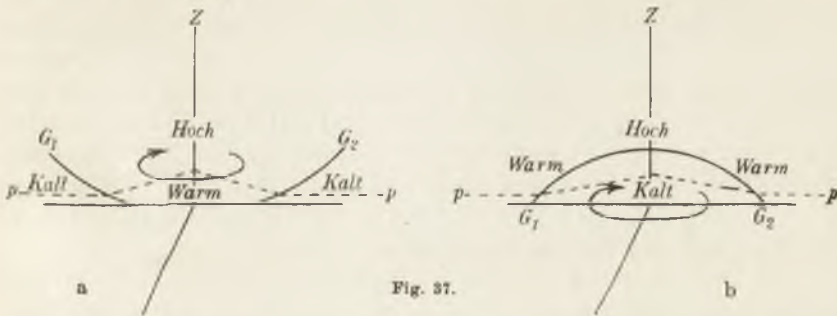


Fig. 37.

man unmittelbar aus dem Verlauf der schematisch gezeichneten Isobarenfläche  $pp$ . Der Auftrieb der warmen Luft wird durch den Überdruck in der Höhe ausgeglichen. Damit dieser Überdruck aber auch in der Höhe keine Bewegung von Warm zu Kalt zur Folge habe, muß die warme Masse sich derart bewegen, daß die entstehende ablenkende Kraft der Erdrotation dieses obere Gefälle kompensiert.

Ähnlich ist es bei der kalten Masse in Fig. 37b; würde sie nicht rotieren, so würde sie sich unter die warme Masse ausbreiten, weil die kalte Säule schwerer ist als die warme daneben. Diesem Druckgradienten

wird aber von der bei der Bewegung entstehenden ablenkenden Kraft der Erdrotation das Gleichgewicht gehalten.

Die kalte Masse reicht nur in geringe Höhen, weil die Neigung der Grenzfläche sehr klein ist. Die warme Masse kann sich viel höher erstrecken, weil sie sich nach oben verbreitert.

Die im antizyklonalen Sinne stationär rotierende warme Masse erinnert an die von Hann<sup>1)</sup> beschriebenen stationären Luftdruckmaxima, deren Eigentümlichkeit namentlich darin besteht, daß die Luft im Hochdruckgebiet bis in große Höhen hinauf relativ zur Umgebung warm ist. Zwar ist bisher bei diesen warmen Antizyklonen durch Beobachtung nicht gezeigt worden, daß eine Grenzfläche zwischen kalter und warmer Luft besteht, wie in Fig. 37a, doch ist es bekannt, daß Temperaturinversionen in der Vertikalen bei solchen Antizyklonen häufig auftreten. Ein näheres Studium derselben wäre gewiß von Interesse.

Die kalte Antizyklone von Fig. 37b ist nichts seltenes; wir finden sie bei winterlichem Strahlungswetter. Auch hier ist die Grenzfläche noch nicht näher bekannt. Eine andere kalte Antizyklone von viel größerer Bedeutung ist die auf den Polarkalotten lagernde; wir kommen auf sie später zurück.

Hier hat es sich bisher um antizyklonale Rotation der hervorgehobenen Massen gehandelt. Machen wir in unserer Formel oben die zweite mögliche Annahme, daß  $\vartheta_2 < 0$ , die Rotation also zyklonal sei, so wird  $\operatorname{tg} \alpha$  für  $T_2 > T_1$  negativ, für  $T_2 < T_1$  positiv. In beiden Fällen würde die warme Luft in den spitzen, die kalte in den stumpfen Winkel zu liegen kommen, was unserer Forderung widerspricht, daß die potentielle Temperatur in jeder Säule nach oben zunehmen muß, damit der Zustand stabil sei. Wir müssen also diese beiden Fälle weglassen, und erhalten das Resultat, daß sowohl warme wie kalte isolierte Luft von der Form eines Rotationskörpers nur bei antizyklonaler Rotation im stationären Zustand und eingebettet in ruhende Luft verharren kann. Vermutlich haben wir hierin den Grund für die Tatsache zu suchen, daß als halbwegs stationäre Windsysteme in der Atmosphäre stets Antizyklonen, nicht aber Zyklonen auftreten.

Bei Luftmassen, in denen die Temperaturübergänge nicht sprunghaft sondern allmählich erfolgen, kommt es auf die Richtung des Temperaturgefälles an; aus ihr läßt sich beurteilen, wie im stationären Zustand bei gegebenem Unterwind der Wind in den oberen Schichten beschaffen sein muß. Hierfür ist die im Abschnitt 53 abgeleitete Gleichung oder auch die Betrachtung des vorigen Abschnittes maßgebend. Bei einer europäischen Depression z. B. finden wir in der Regel gewisse Richtungen des Temperaturgefälles in den verschiedenen Quadranten, u. a. Zunahme

1) Namentlich in der Abhandlung: Das Luftdruckmaximum vom November 1889; Wien. Akad. Sitz.-Ber. 1890, Ref. Met. Zeitsch. 1890, S. 226.



der Temperatur vom Zentrum gegen die Ostseite. Ist nun daselbst am Boden Südwind gegeben, so folgt, damit diese Temperaturverteilung erhalten bleibe, daß in der Höhe darüber stärkerer Südwind wehen muß. Auf diese Weise läßt sich aus der normalen Verteilung von Temperatur und Wind am Boden jener Oberwind im Gebiete von Zyklonen und Antizyklonen ableiten, der zur Erhaltung des stationären Zustandes (qualitativ) erforderlich ist. Derselbe ist in den Figuren 38 durch gestrichelte Pfeile angedeutet, die entweder größer oder kleiner sind als die den Unterwind bezeichnenden ausgezogenen Pfeile. Die Temperaturgradienten sind durch die beiden Buchstaben w (warm) und k (kalt) gekennzeichnet.

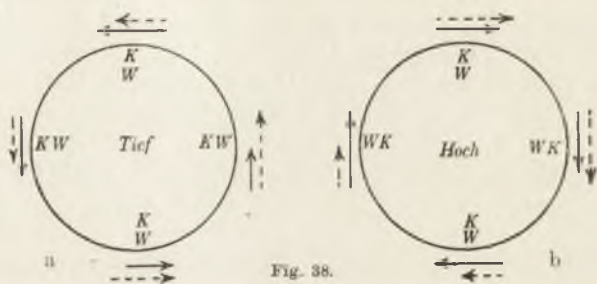


Fig. 38.

Diese für die stationäre Bewegung charakteristische Verteilung wird man in vielen Fällen antreffen. Namentlich ist das Zunehmen des Westwindes, das Abnehmen des Ostwindes mit der Höhe eine bekannte Erscheinung. Auch der schwache Oberwind aus Norden, der starke aus Süden sind für die West- und Ostseite der Depression recht charakteristisch.

In der stationären Antizyklone soll der Nordwind auf der Ostseite mit der Höhe zunehmen. Auch dies, sowie das umgekehrte Verhalten des Südwindes auf der Westseite dürfte mit den Beobachtungen stimmen. Da das Zentrum des hohen Druckes sich ähnlich mit der Höhe nach Westen verschiebt, wie das des tiefen Druckes, so haben wir auf der Vorderseite beider Windsysteme in den höheren Schichten stärkere Winde als auf deren Rückseite. Natürlich treten zu diesen Rotationsbewegungen noch die radialen Komponenten dazu, die in dieses Schema nicht aufgenommen sind.

**56. Stationäre Zirkulationen der Luft um die Erde.** Während wir bisher ungleich temperierte Luftmassen in kleineren Dimensionen betrachteten, soll nun untersucht werden, welche stationären Bewegungen die Atmosphäre als ganzes auszuführen vermag. Die diesbezüglichen Betrachtungen stammen von Helmholtz<sup>1)</sup> und sind älter als die oben angeführten von Margules. Das Verständnis der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre wird durch sie wesentlich erleichtert. Es ergeben sich die Bedingungen für Luftbewegungen längs der Breitenkreise, die trotz der Temperaturunterschiede zwischen Äquator und Pol stationär bleiben können.

1) Sitz.-Ber. preuß. Akad. Wiss., 1888; auch Met. Zeitschr. 1888.

Daß es solche Bewegungen überhaupt geben kann, erkennt man leicht aus der Fig. 35 (S. 160), wo warme Luft in kalter eingebettet ist. Die erstere liegt in den Tropen zu beiden Seiten des Äquators. Die an sie grenzende kalte Luft muß eine mit der Höhe an Stärke abnehmende Ostwestbewegung besitzen, damit die Forderung von S. 159 erfüllt werde, und zwar sowohl auf der nördlichen wie auf der südlichen Halbkugel. Wenn also am Äquator Ruhe, nördlich und südlich aber Ostwind herrscht, so ist qualitativ die Möglichkeit für den stationären Zustand gegeben. Die Passatwinde auf beiden Halbkugeln erfüllen diese Forderung mit ihrer Ostkomponente. Um der Sache aber näher zu kommen, folgen wir nun der Betrachtung von Helmholtz.

Wir machen die Annahme, daß die Luftbewegungen auf einem Breitenkreise überall die gleichen, also alle Größen unabhängig von der geographischen Länge sind (zonale Verteilung). Hierdurch werden natürlich die Einflüsse von Land und Meer aus der Betrachtung ausgeschaltet und auf der gleichmäßig glatten Erdoberfläche zunächst auch die Reibungseinflüsse vernachlässigt. Diese Vereinfachung erlaubt es, an die Stelle eines einzelnen Massenelementes einen längs eines Parallelkreises um die Erde herum liegenden Luftring zu setzen und die Bewegungsgleichungen auf solche einzelne Luftringe zu beziehen. Wir verwenden hierzu die allgemeinen Gleichungen auf S. 33. Die letzte derselben geht durch Annahme der zonalen Bewegung ( $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$ ) in die Gleichung von S. 22 über, welche die Erhaltung des Rotationsmomentes  $\Omega$  ausspricht. Eine Masse, die sich der Rotationsachse nähert, wird nach diesem Prinzip die Westostgeschwindigkeit vergrößern und umgekehrt. Ein Luftring, der auf der Erdoberfläche gegen den Pol gleitet, erleidet demnach auf seinem Wege eine Ablenkung nach Osten. Das Prinzip von der Erhaltung des Rotationsmomentes stellt die Wirkung der ablenkenden Kraft der Erdrotation bei nordsüdlichen Bewegungen also in anderer Weise dar; gegenüber den früher benützten Gleichungen ist hier nun auch die Zentrifugalkraft nicht mehr vernachlässigt.

Die zweite Gleichung von S. 33 vereinfacht sich stark, wenn nur Bewegung längs der Breitenkreise besteht, die erste können wir gleichfalls kürzen, indem wir die vertikalen Beschleunigungen gegen die Schwere vernachlässigen, also die statische Massenverteilung in der Vertikalen annehmen; dann erhalten die drei Gleichungen die Form, in der wir sie zunächst verwenden wollen:

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda} (\dot{\lambda} - 2\omega) = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi},$$

$$\Omega = r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} - \omega) = \text{konst.}^1)$$

1)  $r$  Abstand vom Erdmittelpunkt,  $\varphi$  geographische Breite,  $\lambda$  geographische Länge, letztere nach Westen wachsend.

Die zweite Gleichung gibt die Abhängigkeit der Druckverteilung von der geographischen Breite bei stationärer Bewegung. Wir haben nach ihr an der Erdoberfläche Extreme des Druckes ( $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ ) für  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\dot{\lambda} = 0$  und  $\dot{\lambda} = 2\omega$  zu erwarten; also am Äquator, wo tatsächlich ein Minimum des Druckes vorhanden ist, dann an den Polen, ferner an der Stelle, wo Windstille herrscht (dort ist in der Tat ein Maximum des Druckes zu finden, Kalmzone), und dort, wo die Geschwindigkeit  $\dot{\lambda} = 2\omega$  ist; dieser Fall kann nur in höheren Breiten auftreten, wo die lineare Geschwindigkeit der Erdoberfläche klein ist.

Das Rotationsmoment wird natürlich nur solange konstant bleiben, als auf die Masse keine hier nicht in Betracht gezogenen Kräfte wirken. Durch Reibung, ferner durch Mischung der hervorgehobenen Masse mit anderen wird das Rotationsmoment tatsächlich verändert, doch sehen wir von solchen Einflüssen hier ab und betrachten die Masse als frei beweglich und isoliert.

Wir nehmen ferner noch an, daß die Masse sich adiabatisch bewege, so daß ihre potentielle Temperatur  $\vartheta$  konstant bleibe. Dies kann nur gelten, solange sie sich mit anderen Massen nicht mischt und keine Wärme durch Leitung oder Strahlung aufnimmt oder abgibt. Auch die letzte Annahme betrifft nur einen Idealfall. Unter diesen Umständen ist die Masse eines Luftringes durch zwei konstante Größen,  $\vartheta$  und  $\Omega$ , charakterisiert.

Bei adiabatischen Bewegungen gilt  $\frac{e}{e_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{c_p}{c_p}}$  (vgl. S. 12); wenn  $p_0 = P$  (760 mm Hg), kann man auch setzen:

$$e = \frac{p_0}{RT_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{c_p}{c_p}} = \frac{p^{\frac{c_p}{c_p}}}{R\vartheta} P^{\frac{c_p}{c_p}}; \quad \alpha = \frac{AR}{c_p}.$$

Die Größe  $\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$  in der zweiten Bewegungsgleichung wird somit  $\frac{R\vartheta}{\alpha P^{\frac{c_p}{c_p}}} \frac{\partial p^{\frac{c_p}{c_p}}}{\partial \varphi}$ , und ein analoger Ausdruck ergibt sich für  $\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial r}$ . Ist  $\vartheta$  konstant, so ist dieser Ausdruck nur mehr von  $p^{\frac{c_p}{c_p}} = \varphi$  abhängig, einer Größe, die in der dynamischen Meteorologie öfters erscheint;  $\frac{R}{\alpha P^{\frac{c_p}{c_p}}} = q$  ist konstant.

In der zweiten Gleichung kann man für  $\dot{\lambda}$  die Größe  $\Omega$  einführen und erhält demnach aus den ersten zwei Gleichungen die folgenden:

$$g = -q\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$\sin \varphi \frac{\Omega^2}{r^2 \cos^2 \varphi} - r^2 \sin \varphi \cos \varphi \omega^2 = -q\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}.$$

Behandelt man hier  $\Omega$  und  $\vartheta$  als Konstante, so ergibt sich durch Integration über  $\varphi$  und  $r$ :

$$q \vartheta p = -gr - \frac{\Omega^2}{2r^2 \cos^2 \varphi} - \frac{r^2 \omega^2 \cos^2 \varphi}{2} + C.$$

Die Konstante  $C$  ist für Massen mit verschiedenem  $\vartheta$  und  $\Omega$  natürlich verschieden.

Diese eigentümliche Gleichung liefert den Druck, unter welchem bei verschiedenen Breiten ( $\varphi$ ) und Abständen von der Erdmitte ( $r$ ) jener Luftring steht, der durch  $\vartheta$  und  $\Omega$  charakterisiert ist. Bei konstantem  $\varphi$  ist die Gleichung nichts anderes als die barometrische Höhenformel gültig für eine gewisse Westostbewegung ( $\dot{\lambda}$ ) und konstante potentielle Temperatur  $\vartheta$  in der Vertikalen. Bei variablem  $\varphi$  und konstantem  $r$  erhalten wir den Druck, unter welchem unser Luftring steht, wenn wir ihn an der Erdoberfläche verschieben. So betrachtet gibt die Gleichung dieselben Extreme des Druckes, wie sie oben bestimmt wurden. Sie gelten hier für einen Luftring (1), der bei seiner Verschiebung unter verschiedenen Druck kommt.

Wir wollen nun annehmen, es sei ein zweiter ähnlicher Luftring (2) mit anderer potentieller Temperatur und anderem Rotationsmoment gegeben. Die beiden Ringe sollen nebeneinander liegen. Wie ist ihre Grenzfläche beschaffen, damit die Bewegung stationär sei?

Die Frage ist sehr ähnlich der oben im Abschnitt 54 behandelten. Wir schreiben dem einen Ring die Werte  $\vartheta_1, \Omega_1$ , dem zweiten die Werte  $\vartheta_2, \Omega_2$  zu. An der Grenzfläche muß wie früher der Druck des einen Ringes in den des anderen übergehen, so daß dort  $p_1 = p_2$  und hier-nach auch  $\dot{p}_1 = \dot{p}_2$ . Versieht man in der Gleichung für  $p$  oben die Größen mit den Indizes 1 und 2, so hat man 2 Gleichungen, für  $p_1$  und  $p_2$ , und daraus an der Grenzfläche:

$$q(p_1 - p_2) = gr \left( \frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) + \left( \frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2} \right) \frac{1}{2r^2} + \frac{r^2 \omega^2}{2} \left( \frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) - \frac{C_1}{\vartheta_1} + \frac{C_2}{\vartheta_2} = 0.$$

Indem wir hier  $r = r \cos \varphi$  einführten, wurde die Koordinate  $\varphi$  durch die neue  $r$  ersetzt, die den Abstand eines Punktes von der Erdachse bedeutet.

Diese Formel ist die Gleichung der Grenzfläche der beiden Luftringe. Ihre Neigung gegen den Horizont (Winkel  $\alpha$ ) findet man, indem man  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{r d\varphi}$  bildet. Durch Differentiation nach  $r$  und  $r$  ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \varphi r [\vartheta_2 \dot{\lambda}_1 (\dot{\lambda}_1 - 2\omega) - \vartheta_1 \dot{\lambda}_2 (\dot{\lambda}_2 - 2\omega)]}{g(\vartheta_2 - \vartheta_1) - \cos \varphi r [\vartheta_2 \dot{\lambda}_1 (\dot{\lambda}_1 - 2\omega) - \vartheta_1 \dot{\lambda}_2 (\dot{\lambda}_2 - 2\omega)]}.$$

Läßt man hier die Glieder weg, welche das Quadrat der Geschwindigkeit enthalten (was in großer Annäherung erlaubt ist, da die Zentri-

fugalkraft gegen die ablenkende Kraft fast immer klein ist), so erhält man eine Gleichung, die mit der auf S. 155 fast identisch ist; nur im Nenner tritt hier ein kleines Glied zur Schwere hinzu. Angenähert behalten die Grenzflächen also die im Abschnitt 54 angegebene Lage. Je mehr sie sich dem Äquator nähern, desto flacher liegen sie, um schließlich über dem Äquator horizontal zu werden.

Helmholtz hat die Bedingung aufgesucht, unter welcher solche Grenzflächen stabil sind. Die Stabilität verlangt, daß bei einer kleinen Ausbuchtung der Fläche nach einer Seite hin ein Überdruck entsteht, welcher sie in ihre frühere Lage zurückdrängt. Bei einer derartigen Ausbuchtung der Fläche vom Ring 1 gegen den Ring 2 soll also  $\frac{d(p_2 - p_1)}{dn} > 0$  sein, wo  $n$  die Normale zur Fläche in der Richtung von 1 zu 2. Damit diese Bedingung erfüllt ist, genügt es auch, wenn  $p_2 - p_1$  in zwei beliebigen Richtungen, die von 1 zu 2 weisen, wächst; also z. B. in der Richtung der beiden Koordinaten  $r$  und  $r$ . Damit die Grenzfläche stabil sei, müssen also die beiden folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{\partial(p_2 - p_1)}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial(p_2 - p_1)}{\partial r} > 0.$$

Man findet aus der Gleichung für die Grenzfläche:

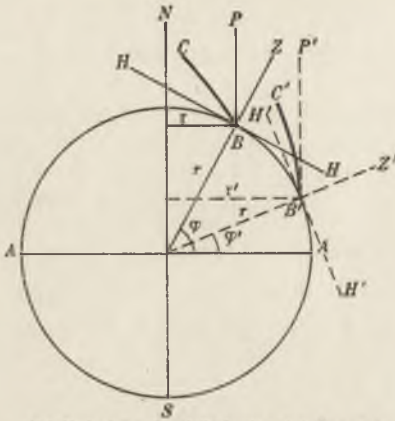
$$g \frac{\partial(p_2 - p_1)}{\partial r} = g \left( \frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) > 0 \quad \text{und}$$

$$q \frac{\partial(p_2 - p_1)}{\partial r} = - \frac{1}{r^3} \left( \frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2} \right) + r \omega^2 \left( \frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) > 0.$$

Hierbei ist zu bedenken, daß wir voraussetzten, wir kämen mit wachsendem  $r$  und wachsendem  $r$  aus der Schichte 1 in die Schichte 2.

Es ergeben sich also die zwei folgenden Stabilitätsbedingungen: a): mit wachsender Entfernung vom Erdmittelpunkt ( $dr$  positiv) und bei konstanter Entfernung von der Erdachse ( $r$  konstant), d. h. also bei Bewegung gegen den Himmelspol (vgl. Fig. 39) müssen wir aus der potentiell kälteren in die potentiell wärmere Masse kommen (damit  $\frac{1}{\vartheta_1} > \frac{1}{\vartheta_2}$ ), die kältere Schicht liegt also in dieser Richtung näher der Erde als die wärmere. b): bei konstanter Entfernung vom Erdmittelpunkt, d. h. in einem Meridian, muß mit zunehmender Entfernung von der Erdachse, d. h. gegen den Äquator hin, die Größe auf der rechten Seite der zweiten Gleichung wachsen. Da gegen den Äquator hin in der Troposphäre normalerweise die potentielle Temperatur wächst, also das zweite Glied positiv ist, so wird die Bedingung erfüllt, wenn noch  $\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} > \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}$ , wenn also der Ausdruck  $\frac{\Omega^2}{\vartheta}$  längs eines Meridians gegen den Äquator hin zunimmt. Die abweichenden Verhältnisse, die in der Stratosphäre vorkommen, sind in Abschnitt 61 behandelt.

Damit die potentielle Temperatur nun sowohl gegen den Himmelpol als gegen den Äquator zunehme, ist es notwendig, daß die Grenzfläche einen Winkel mit dem Horizont bilde, der kleiner ist als die Polhöhe; nahe dem Äquator muß dieser Winkel sehr klein werden. Die kältere Schicht liegt in einem gegen den Äquator spitz zulaufenden Keil unter der wärmeren, wie dies in Fig. 39 angedeutet ist.



NS Erdachse (Nord-Südpol), AA Äquator, HH Horizont in B, BZ Vertikale in B, BP Richtung zum Himmelpol in B,  $\varphi$  HBP = Polhöhe.

Fig. 39.

Die gestrichelten Geraden beziehen sich auf den dem Äquator näher gelegenen Punkt B mit gleichem Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt. Die Grenzflächen  $BC$  und  $B'C'$  erfüllen die Bedingungen bezüglich der Verteilung der Temperatur. Im Raum  $HBC$  (bzw.  $H'B'C'$ ) ist die Luft potentiell kälter zu denken als im Raum  $CBZ$  (bzw.  $C'B'Z'$ ). Wir haben also eine ähnliche Grenzfläche wie im Abschnitt 54.

Sind mehrere Luftringe ungleicher Temperatur vorhanden, so müssen sie durch Grenzflächen voneinander getrennt sein, welche den Flächen  $BC$ ,  $B'C'$  ähnlich sind; diese Flächen sind dann zugleich Orte gleicher potentieller Temperatur, sie stellen die Verteilung derselben im stationären Zustand vor. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, daß in der Atmosphäre die potentielle Temperatur tatsächlich in der für den stationären Zustand geforderten Weise verteilt ist.

Die zweite Bedingung der Stabilität verlangte, daß  $\frac{\Omega^2}{\vartheta}$  gegen den Äquator hin zunehme. Da  $\vartheta$  gegen den Äquator hin zunimmt, so muß  $\Omega^2$  in einem noch stärkeren Verhältnis wachsen als jenes. Demnach muß im stationären Zustand ein näher dem Äquator gelegener Luftring ein größeres Rotationsmoment haben als ein entfernter liegender. Daß dies der Fall ist, lehrt die Erfahrung; denn am Pol ist das Rotationsmoment nahezu null, in den Kalmengürteln ungefähr das eines Erdteilchens bei  $30^\circ$  und am Äquator wieder angenähert das eines solchen in  $0^\circ$  Breite, da auch hier die Luft nahezu in Ruhe ist. Das Rotationsmoment der Erde ist in verschiedenen Breiten sehr ungleich, wie ein Blick auf die kleine Tabelle S. 24 lehrt. Es beträgt an der Erdoberfläche in

90°	Br. :	0
30°	„ :	$0,76 \cdot R^2 \omega = R \cdot 350 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-1}$ ,
0°	„ :	$R^2 \omega = R \cdot 463 \text{ „ „}$ ,

wo  $R$  der Erdradius in Metern.

Ein Luftring, welcher z. B. in  $30^\circ$  Breite relativ zur Erde in Ruhe war, müßte bei Erhaltung seines Rotationsmomentes am Äquator als Ostwind von der Geschwindigkeit  $463 - 350 = 113$  m/sec erscheinen. Solche Ostwinde treten an der Erde nie auf, die Rotationsmomente wachsen also tatsächlich gegen den Äquator.

Daß diese Zunahme von  $\Omega$  gegen den Äquator eine Bedingung des stabilen Bewegungszustandes ist, kann man leicht durch folgende Überlegung einsehen: Es herrsche stabiler Bewegungszustand. Wir betrachten einen Luftring, der relativ zur Erde in Ruhe ist, und denken uns ihn ein Stückchen gegen den Äquator verschoben; er erscheint dann vermöge der Konstanz seines Rotationsmomentes dort als Ostwind von bestimmter Stärke. Im stationären Zustand müßte mit diesem Ostwind ein Druckgefälle gegen den Äquator von bestimmter Größe verbunden sein. Tatsächlich ist das vorhandene Druckgefälle kleiner als jenes; es ist von einer Größe, wie sie der dort bestehenden schwächeren Ostwestbewegung, dem größeren Rotationsmoment dieser Breite entspricht. Infolge dieses geringeren Gradienten, der nicht imstande ist, die Bewegungskräfte zu kompensieren, kehrt der Luftring, den wir aus seiner Anfangslage verschoben hatten, wenn frei gelassen, wieder in dieselbe zurück. Dieses automatische Zurückkehren ist für das stabile Gleichgewicht charakteristisch; die Bedingung für dasselbe besteht also darin, daß das Rotationsmoment gegen den Äquator wächst.

Wäre das wirkliche Druckgefälle größer, als es dem durch Verschiebung des Luftringes entstehenden Ostwinde entspricht, so würde der Luftring weiter zum Äquator gezogen werden und sich immer mehr von seiner Anfangslage entfernen. Damit ein derartig großes Druckgefälle erhalten werde, wäre eine stärkere Zunahme des Ostwindes gegen den Äquator nötig, als sie der Konstanz des Rotationsmomentes entspricht; dieses Moment müßte also gegen den Äquator abnehmen, wie es die Rechnung für den Fall des labilen Zustandes annehmen ließ.

Es ist von großer Wichtigkeit, sich diese Rotationsbewegung der Luftringe, verbunden mit der Druckverteilung<sup>1)</sup> längs der Meridiane als ein stabiles Bewegungssystem vorzustellen. Sehen wir einen Augenblick von den Temperaturunterschieden ab und denken wir uns einen Luft-ring (oder auch ein „einfach zusammenhängendes“ Luftteilchen) mit beliebigem Rotationsmoment in dieses System irgendwo hineingebracht; dann muß sich derselbe vermöge der dargelegten Kräfteverteilung in jene Breite bewegen, in der sich ein Ring mit dem gleichen Rotationsmoment befindet. Dort wird er bleiben und mit diesem Ring in einen verschmelzen.

Das Rotationsmoment ähnelt in dieser Beziehung ganz jener anderen

---

1) Mit der Bedingung der Stabilität ist schon ein gewisser Anhaltspunkt für die meridionale Druckverteilung gegeben, was zu beachten ist.

Größe, die ein Luftteilchen charakterisiert, der potentiellen Temperatur. Bringen wir in eine Luftsäule von stabiler Schichtung eine Masse von bestimmter potentieller Temperatur, so bewegt sich dieselbe dorthin, wo Masse von der gleichen potentiellen Temperatur liegt, und vereinigt sich dort mit dieser. Das liegt in der Definition des stabilen Gleichgewichtes.

Würde bei überall gleicher Temperatur das Rotationsmoment gegen den Äquator hin konstant sein, so hätten wir indifferentes Gleichgewicht, analog wie bei konstanter potentieller Temperatur in der Vertikalen. Ein Luftring, der verschoben wird, könnte in jeder Breite liegen bleiben. Daß bei ungleicher potentieller Temperatur nicht die Zunahme von  $\Omega$  gegen den Äquator für den stabilen Zustand genügt, sondern  $\frac{\Omega^2}{g}$  dahin wachsen muß, kommt daher, daß die kalte Luft bei gleicher Geschwindigkeit wie die warme unter diese darunterfließen und dabei sich immer mehr aus ihrer Anfangslage entfernen würde (vgl. Abschnitt 54).

Sind Rotationsmoment und potentielle Temperatur verschieden, dabei die Bewegung stabil, und bringen wir in unser System einen Luftring mit bestimmtem  $\vartheta$  und  $\Omega$ , so sucht derselbe jenen Ort auf, wo er das gleiche  $\vartheta$  und  $\Omega$  vorfindet. Wir können uns vorstellen, daß er zunächst jener Fläche gleicher potentieller Temperatur zustrebt, die der seinigen entspricht (Fläche  $BC$ , Fig. 39) und sodann in dieser jene Höhenlage aufsucht, in welcher die Luft sein Rotationsmoment besitzt. Denn dieses hat natürlich in der Fläche  $BC$  nicht überall den gleichen Wert.

Wir werden der Verteilung von potentieller Temperatur und Rotationsmoment bei Besprechung der allgemeinen Bewegungen auf der Erdoberfläche noch begegnen. Hier sei wiederholt, daß ungleiche Temperaturen auf der Erde dann dauernd bestehen können, ohne zu Umstürzen der Luft im Sinne des 7. Kapitels, Abschnitt 48, Veranlassung zu geben, wenn 1. die kalten Schichten von den Polen her keilförmig unter den warmen liegen, wie dies in Fig. 39 angedeutet ist, 2. die Rotationsmomente, genauer die Größen  $\frac{\Omega^2}{g}$ , gegen den Äquator zunehmen. Da Ostwinde ein geringeres Moment haben als die ruhende Erde darunter, diese wieder ein geringeres als Westwinde, so erkennt man, daß die Einbettung der warmen Tropenluft zwischen die kälteren Ostwinde der Passate und ebenso die der kalten Ostwinde an den Polen in die wärmeren Westwinde der höheren Breiten den obigen Bedingungen wenigstens qualitativ entspricht.



## Neuntes Kapitel.

### Allgemeiner Kreislauf der Atmosphäre.

**57. Übersicht über die vorhandenen Bewegungen.** Die Atmosphäre ist als Ganzes jahraus jahrein in einem gewissen mittleren Bewegungszustand, der trotz vielfacher Abweichungen zeitlicher und örtlicher Art durch einige Worte charakterisiert werden kann. An der Erdoberfläche zunächst wehen nördlich und südlich des Äquators Ostwinde mit einer Komponente gegen den Äquator, die Passate; nahe dem Äquator, ferner in Breiten von etwa  $30^{\circ}$  herrschen Windstillen, polwärts von hier wesentlich westliche Winde, meist mit einer Komponente zum Pol. Jenseits der Polarkreise scheinen wieder östliche Winde vorzuwiegen. In mittleren Höhen finden wir über den Passatwinden eine Schichte unregelmäßiger Winde, darauf aber eine Schichte mit Winden, die vom Äquator polwärts wehen (Antipassate); diese drehen sich polwärts immer mehr gegen Osten und treten unter etwa  $30^{\circ}$  Breite schon als Westwinde auf. In höheren Breiten herrschen auch in der Höhe westliche Winde, deren Intensität polwärts abnimmt. Über dem Äquator selbst wird starker Ostwind bis in große Höhe beobachtet. In sehr hohen Niveaus scheint sich über dem Antipassat ein neuer Passat auszubreiten. Welche Windverhältnisse jenseits der Polarkreise in der Höhe herrschen, ist noch nicht recht bekannt.<sup>1)</sup>

Es mag sein, daß in dieser Übersicht noch irrtümliche Verallgemeinerungen enthalten sind, da die Expeditionen zur Durchforschung der höheren Luftschichten bisher gewisse Gebiete der Erde begünstigten, andere ganz bei Seite lassen mußten. Dies könnte namentlich die Bewegungen in der Zone der Roßbreiten betreffen, in welchen hauptsächlich das Gebiet über dem nordatlantischen Ozean untersucht wurde.

Durch die Verteilung von Land und Meer (Gebirge) wird die Bewegung der Luft besonders in den unteren Schichten sehr stark beeinflusst. Sie hängt infolgedessen nicht nur von der geographischen Breite,

1) An neueren Übersichten über den allgemeinen Kreislauf der Atmosphäre seien erwähnt: H. H. Hildebrandsson im Hann-Bd. d. Met. Zeitsch. 1906, S. 117; Teisserenc de Bort & L. A. Rotch in Comptes Rend. 144, auch in Met. Zeitsch. 1907, S. 162; außerdem R. Süring in Zeitsch. d. Ges. f. Erdkunde, Berlin 1913, Nr. 8.

sondern auch von der geographischen Länge ab, was in der obigen Übersicht nicht zum Ausdruck kam.

Bei der rein theoretischen Behandlung der atmosphärischen Zirkulation mußte man notgedrungen stets zur Voraussetzung einer idealen Erdoberfläche greifen. Die Erfolge dieser Behandlung, welche später kurz besprochen werden, waren bald erschöpft. Die aerologischen Forschungen der letzten Zeit haben jene Theorien nur zum Teil bestätigt. Wenn wir im folgenden die atmosphärischen Bewegungen an der Hand der Beobachtungen und mit Benützung von nur wenigen der theoretischen Hilfsmittel darzustellen versuchen, werden wir gleichfalls zunächst die ideale Erdoberfläche voraussetzen. Sobald wir die schematische Zirkulation auf einer solchen einmal kennen, ist es möglich, die Störungen, welche durch ungleiche Land- und Meerverteilung bedingt werden, über jene darüber zu legen und auf diese Weise den tatsächlichen Verhältnissen näher zu kommen.

Die vorhandenen Luftbewegungen werden fortwährend durch Reibung im weitesten Sinne des Wortes geschwächt. Es ist also zu ihrer Erhaltung dauernd Arbeitsleistung nötig, die von der Sonnenwärme geliefert wird. In den Tropen erfolgt im Jahresdurchschnitt die stärkste Wärmezufuhr; da die Erde nicht dauernd wärmer wird, so muß auch wieder Wärme in ungefähr dem gleichen Maß abgegeben werden. Diese Abgabe erfolgt auf der ganzen Erdoberfläche, am stärksten vermutlich dort, wo der geringste Wasserdampfgehalt der Luft und die geringste Himmelsbedeckung zu finden ist (vgl. Abschnitt 28). Dies dürfte in den Polargegenden und den Roßbreiten der Fall sein. Infolge von Wärmezufuhr und Wärmeabgabe an verschiedenen Orten entstehen Konvektionsströmungen, welche die Luft in der Tiefe von der Kälte zur Wärmequelle, in der Höhe in umgekehrter Richtung befördern, wie dies im Abschnitt 50 ausgeführt ist.

Das erste, was wir daher auf der Erde zu erwarten haben, ist eine Strömung in den Meridianen, und zwar äquatorwärts am Boden, polwärts in der Höhe. Diese meridionale Konvektionsströmung erhält sich durch Wärmezufuhr und Wärmeabgabe. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß auf der idealen Erde durch jeden senkrecht zum Meridian gelegten und die ganze Höhe der Atmosphäre einnehmenden Querschnitt gleich viel Luft polwärts wie äquatorwärts fließen muß.

Die auf der ruhenden Erde zu erwartende Konvektionsströmung wird nun infolge der Erdrotation auf dem Wege zum Äquator, also in der Nähe der Erdoberfläche, gegen Westen, auf dem Wege zum Pol, in der Höhe, aber gegen Osten abgelenkt und der einfache Kreislauf zwischen niedrigen und hohen Breiten dadurch gestört. Die dabei auftretenden Bewegungskomponenten längs der Parallelkreise (zonale Bewegungen) sind, wie die Erfahrung lehrt, nicht gering, sondern im allgemeinen größer als die meridionale Konvektionsströmung. Auch ihre

Bewegungsenergie muß durch die Wärmezufuhr erhalten werden; aber wir haben es bei ihnen mit einer ganz anderen Art von Strömung zu tun. Sie finden nämlich keine Grenze, sondern sind prinzipiell fähig, die Erde parallel den Breitenkreisen zu umziehen, indem sie in sich selbst zurücklaufen. Zur Erhaltung der Kontinuität ist es bei ihnen nicht nötig, daß durch einen senkrecht zum Parallelkreis geführten Querschnitt der Atmosphäre gleich viel Luft gegen Westen wie Osten ströme, es kann der Wind in der ganzen Höhe nach einer Richtung wehen.

Die Trägheit dieser zonalen Strömungen ist zweifellos größer als die der meridionalen Konvektionsbewegungen. Denn sie sind intensiver und verlaufen ohne starke Krümmungen, wie sie die letzteren an den Umkehrpunkten besitzen. Es ist daher wahrscheinlich, daß jene Strömungen längs der Parallelkreise auch lange Zeit ohne Nahrung durch Wärmezufuhr bestehen könnten und darum vom stationären Gleichgewichtszustand nicht weit entfernt sind. Wie Helmholtz<sup>1)</sup> gezeigt hat, ist es sehr vorteilhaft, die Bewegungen längs der Parallelkreise für sich zu betrachten; die meridionalen Bewegungen erhalten dann fast den Charakter von Störungen, hervorgebracht durch Wärmezufuhr und durch Bewegungshindernisse an der Erdoberfläche.

In der Tat wäre es, wenn diese beiden Faktoren fehlten, durchaus denkbar, daß die gegebenen Luftmassen ungleicher Temperatur sich mit gewissen Geschwindigkeiten in der Richtung der Breitenkreise stationär bewegten, wenn sie einmal in Bewegung gesetzt sind (vgl. Abschnitt 56).

**58. Die Erhaltung der großen Konvektionsströmung der Atmosphäre.** Im Abschnitt 50 ist das Schema einer Konvektionsströmung nach Margules dargestellt und der Nutzeffekt berechnet, welcher sich bei dem Kreislauf mit Wärmezufuhr und Wärmeentziehung ergibt. Dieser Nutzeffekt wird auf der Erde zur Arbeitsleistung gegen die Hindernisse verwendet, die sich den Winden entgegenstellen; er geht also in Reibungswiderständen auf und setzt sich in Wärme um, die zum größten Teil durch Ausstrahlung die Erde wieder verläßt.

Wir können fragen, wie sich auf einer ideal glatten Erdoberfläche, die Bewegung eines reibungslosen Gases gestalten würde, wenn Wärmezufuhr und Wärmeabgabe so wirkten, wie dies tatsächlich geschieht. Diese Annahmen wären für die theoretische Behandlung des atmosphärischen Kreislaufes die nächstliegenden. Wenn keine Reibungsverluste die Bewegung hemmen, so müßte der Kreislauf mit dem Nutzeffekt Null arbeiten, damit die aus der Wärmezufuhr entstehende lebendige Kraft nicht stetig wachse. Nun läßt sich leicht zeigen, daß eine derartige Konvektionsströmung mit dem Nutzeffekt Null nicht möglich ist, es sei denn, daß die Wärmezufuhr auf Null herabsinkt.

1) a. a. O.

Der Nutzeffekt des Kreisprozesses ist  $\frac{Q-Q'}{Q}$ ; dieser Wert wird Null für  $Q=Q'$ , also nach S. 146 für  $T_2 - T'_1 = \tau'_2 - \tau_1$ .

Ersetzen wir  $T'_1$  und  $\tau'_2$  durch die dort gegebenen Ausdrücke, so wird:

$$T_2 - T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^\kappa = \tau_2 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^\kappa - \tau_1.$$

In den Säulen mit adiabatischer Temperaturabnahme ist  $\tau_1 = T_1 - \gamma h$ ,  $\tau_2 = T_2 - \gamma h$  zu setzen, wo  $\gamma = \frac{A g}{c_p}$ . Drücken wir noch  $h$  nach der barometrischen Höhenformel, die in solchen gilt, aus (vgl. S. 137), so ergibt sich  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^\kappa$ ; es ist also  $T_2 = T'_1$ , d. h. es hat keine Wärmezufuhr im Punkt  $B$ , Fig. 28, stattgefunden.

Das bedeutet also: damit der Nutzeffekt des Kreislaufes verschwindet, muß auch die Wärmezufuhr verschwinden. Dieses Resultat hätte auch durch eine Darstellung des Kreisprozesses im Clapeyronschen Koordinatensystem unmittelbar erzielt werden können.

Wir müssen daraus folgern, daß es nicht möglich ist, unter den oben genannten Verhältnissen eine Konvektionsströmung von endlicher Stärke zu erhalten; die Wärmezufuhr ist niemals gleich der Wärmeabgabe, außer, wenn beide auf null herabsinken. Jede noch so kleine Wärmezufuhr würde auf einer ideal glatten Erde bei reibungsloser Luft allmählich zur Entwicklung von unendlich großer Zirkulationsgeschwindigkeit führen.

Die tatsächlichen Bewegungen der Atmosphäre im stationären Zustand sind also offenbar gerade so stark, daß die Verluste, welche die lebendige Kraft durch Reibung im weitesten Sinne des Wortes erleidet, genau dem Nutzeffekt des Kreisprozesses gleichkommen. Für die Betrachtung der allgemeinen Zirkulation folgt daraus, daß wir zur Erklärung der jetzt wirklich bestehenden Bewegungen Wärmezufuhr wie Reibung als vorhanden ansehen müssen, d. h. sie nicht vernachlässigen dürfen. Bei Konstanz dieser beiden wird sich allmählich ein stationärer Bewegungszustand herausbilden, dessen Intensität von jenen beiden Faktoren wesentlich abhängt. Ist dieser Zustand einmal erreicht, so können wir für die weitere Betrachtung eine ideale Erdoberfläche und ein reibungsloses Gas annehmen, welches sich ohne Wärmezufuhr in sehr ähnlicher Weise bewegt. Wir kommen zu jenen stationären Strömungen, die Helmholtz näher untersucht hat. Nachdem wir diese idealen Verhältnisse kennen gelernt haben, können wir als relativ kleine Störungen die Wärmezufuhr und Reibung neuerdings einführen und überlegen, welche Änderungen sich hierdurch ergeben.

Der skizzierte Weg läßt sich bisher allerdings nur in beschreibender Weise zurücklegen.

**59. Qualitative Erklärung des großen Kreislaufes.**<sup>1)</sup> Wäre die Erde in Ruhe, so würde infolge der bestehenden Bestrahlungs- und Temperaturverhältnisse auf dem Erdboden der höchste Druck an den Polen, der niedrigste am Äquator herrschen, in der Höhe aber umgekehrt der niedrigste an den Polen und der höchste am Äquator. Wir hätten auf beiden Halbkugeln Konvektionsströmungen wie in Fig. 28, S. 146, mit Äquatorwind (d. h. Wind vom Äquator) in der Höhe und Polwind am Boden.

Sobald die Erde rotiert, wird der obere Äquatorwind zunächst nach Osten abgelenkt. Er könnte hier eine Geschwindigkeit erlangen, welche dem ursprünglichen polwärts gerichteten Gradienten im stationären Zustand entspricht, wie sie durch die Gleichung von S. 164 gegeben ist; diese lautete:  $r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda} (\dot{\lambda} - 2\omega) = - \frac{1}{qr} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$ .

Diese Geschwindigkeit wäre gewiß recht klein. Durch die Wärmezufuhr in niedrigen Breiten werden nun aber immer neue Massen in der Höhe vom Äquator weggedrängt und gezwungen, polwärts zu strömen; dabei kommen sie in Breiten, in denen sie vermöge der Erhaltung des Rotationsmomentes (vgl. Abschnitt 13) bald recht große Geschwindigkeiten in westöstlicher Richtung annehmen müssen, Geschwindigkeiten, die größer sind, als dem anfänglichen Gradienten gegen den Pol entspricht. Diese Geschwindigkeiten erzeugen Zentrifugalkräfte, welche die Luft solange verhindern, polwärts weiter zu fließen, als nicht durch Sinken der Luftmassen an den Polen, infolge des Lufttransportes gegen den Äquator im unteren Zweige, ein bedeutend stärkerer Gradient in der Höhe dahin entstanden ist. Dieser neue Gradient wird nun angenähert nach der obigen Gleichung den westöstlichen Bewegungen der Höhe entsprechen. Er muß nach dem vorigen umso größer sein, je stärker der Luftnachschub vom Äquator, je größer somit die Wärmezufuhr dort ist. Auch wird der Westwind oben solange durch Wärmezufuhr anwachsen, bis die Reibungsverluste der ganzen Strömung endlich einen stationären Zustand herbeiführen, der Gradient in der Höhe wird dabei um so größer ausfallen, je geringer die Hemmnisse für den Abtransport der Luft von den Polen sind, und nach ihm wird sich auch die Stärke des Westwindes in der Höhe richten. Es ist nicht möglich, die tatsächlichen Gradienten in der Höhe ihrer Größe nach zu erklären; wir müßten dazu die Reibungs- und Wärmezufuhrverhältnisse der Erde viel besser übersehen können, als dies bisher der Fall ist.<sup>2)</sup>

1) Die Ausführungen dieses und des nächsten Abschnittes beruhen zum Teil auf Ferrels Anschauungen, zum Teil auf jenen anderer Autoren, wie namentlich von Helmholtz. Aus dem Lehrbuch der Meteorologie von Sprung wurde vieles wieder aufgenommen. Ein Nachweis der geschichtlichen Entwicklung der Lehre vom allgemeinen Kreislauf war hier nicht beabsichtigt.

2) Die Zentrifugalkraft als die Ursache des starken oberen Druckgradienten gegen die Pole nachgewiesen zu haben, ist das Verdienst Ferrels.

Hat sich für die vom Äquator abfließende Luft einmal ein Gradient in der Höhe eingestellt, welcher es ihr ermöglicht, trotz Erhaltung ihres Rotationsmomentes ein größeres Stück polwärts zu fließen, so erlangt sie bei dieser Bewegung immer größere Geschwindigkeit nach Osten; namentlich in höheren Breiten gibt ein geringer Breitenzuwachs schon sehr viel aus, wie aus der Tabelle S. 24 zu ersehen ist. Die Luft brauchte nun in der Höhe immer größere polwärts gerichtete Gradienten, um bei Erhaltung ihres Rotationsmomentes noch in höhere Breiten hinauf zu rücken. Je weiter polwärts die Luft käme, desto stärkere Winde entstünden und die Gradienten müßten ganz unsinnige Werte annehmen, um die Luft trotzdem noch immer weiter polwärts ziehen zu können.

Würde z. B. Luft mit Erhaltung ihres Momentes von 10° bis 50° Breite fließen, so erhielte sie (vgl. Abschnitt 13) eine Geschwindigkeit von 402 m/sec gegen Osten. Um der obigen Gleichung zu entsprechen, müßte dabei der Druck im Niveau von 10 km von 200 mm in 10° Breite auf 20 mm in 50° Breite abnehmen.

Für die Entstehung derartig tiefen Druckes in der Höhe über den Polen ist kein Grund vorhanden. Es müßte dazu die Luft an der Erdoberfläche aus den Polargegenden durch ähnlich große Gradienten abgesaugt werden, und an der Erde können derartige Windstärken nicht bestehen.

Der Ersatz für die am Äquator aufsteigenden Massen kann daher nicht vom Pole aus stattfinden, sondern die Luft muß aus dem oberen Zweig schon früher herabsteigen, um den Konvektionsstrom zu speisen, u. z. in einer Breite, bis zu der sie trotz ihrer Westostbewegung unter dem Einfluß des in der Höhe polwärts wirkenden Gradienten gerade noch vorstoßen kann.

Wie die Beobachtungen des Wolkenzuges zeigten, biegen die Äquatorwinde schon in 20° oder höchstens 30° Breite vollständig in die Westostrichtung ein.

Es ist daher im allgemeinen kein Kreislauf zwischen Äquator und Pol vorhanden, wie ihn Ferrel und Oberbeck noch angenommen haben. Die Luft fließt vom Äquator polwärts, aber nicht gar weit. Schon Möller<sup>1)</sup> hat dies betont mit der Begründung, daß keine Kraft vorhanden ist, welche die Luftmasse weiter befördern kann, zum mindesten nicht, solange sie nicht durch Mischung mit anderen Massen ihr Rotationsmoment verkleinert.

Eine solche Mischung scheint nun allerdings teilweise in den Zyklonen und Antizyklonen der höheren Breiten stattzufinden<sup>2)</sup>; sie setzt eine

1) Met. Zeitsch. 1892, S. 220; hier ist schon ausgesprochen, daß der Kreislauf auf Breiten zwischen etwa 0° und 30° beschränkt sein muß.

2) Auf diese Rolle der atmosphärischen Störungen bei der allgemeinen Zirkulation hat Bigelow besonderes Gewicht gelegt (Month. Weath. Rev. 1902 S. 137 und 250).

enge Berührung der äquatorialen Strömung mit den Winden der höheren Breiten voraus, die nur nahe der Erdoberfläche und nur in beschränktem Maße stattzufinden scheint. Keinesfalls läßt sich, auf ihr fußend, ein wirklicher Kreislauf zwischen Äquator und Pol aufrechterhalten, die Hauptmasse der Äquatorialströmung muß mit ihrem großen Rotationsmoment in niedrigen Breiten verbleiben.

Hat sich nun in der Höhe entsprechend der Stärke des äquatorialen Luftnachscheses eine annähernd stationäre Westostbewegung mit bestimmten polwärts gerichteten Gradienten ausgebildet, so muß sich dieses obere Luftdruckgefälle auch auf dem Boden bemerkbar machen.

Die Druckverteilung am Boden läßt sich, wenn einmal die der Höhe gegeben ist, leicht aus dieser und der Temperaturverteilung längs eines Meridians konstruieren. Die Temperatur nimmt polwärts ab. Wir können den Druck am Boden  $p_0 = p e^{\frac{gh}{RT}}$  zusammensetzen aus dem Druck  $p$  in der Höhe  $h$  und dem Gewicht der darunter liegenden Säule  $p_0 - p = p (e^{\frac{gh}{RT}} - 1)$ . Der erste Summand, der Druck in der Höhe, nimmt infolge der Westostbewegung polwärts ab, der zweite, das Gewicht  $p_0 - p$ , wegen der allgemeinen Temperaturverteilung aber äquatorwärts. Das als Effekt dieser letzteren Verteilung an den Polen zu erwartende Druckmaximum verschiebt sich infolge der Westostbewegung gegen den Äquator. Wir werden demnach zwei Ringe hohen Druckes finden, welche die Erde umziehen, den einen auf der nördlichen, den anderen auf der südlichen Halbkugel. Ihre geographische Breite muß an der Erdoberfläche selbst am größten sein, mit zunehmender Höhe aber wegen der abnehmenden Bedeutung des Summanden  $p_0 - p$  kleiner werden, so daß in gewisser Höhe die beiden Ringe über dem Äquator in einen einzigen zusammenschmelzen.

Teisserenc de Bort<sup>1)</sup> hat zuerst die tatsächlich vorhandenen Hochdruckgürtel der Roßbreiten in dieser Weise begründet. Doch ist die Entwicklung des oberen Druckgefälles vom Äquator zum Pol und der damit verbundenen Westwinde nicht erklärlich, wenn man nicht den erzwungenen Nachschub der Luft am Äquator in Betracht zieht, wie oben geschehen. Die wirkliche Lage der Hochdruckgürtel erscheint dadurch von der Größe der Wärmezufuhr und der Reibung abhängig, in einer Weise allerdings, die sich derzeit nicht näher verfolgen läßt.

Die Art, wie die meridionale Verteilung des Luftdruckes an der Erdoberfläche durch die oben genannten zwei Einflüsse zustande kommt, läßt sich aus den allerdings noch recht spärlichen Ergebnissen der Aerologie ungefähr beurteilen. A. Peppeler<sup>2)</sup> gibt für den Sommer mittlere Druckwerte in verschiedenen Höhenlagen für drei verschiedene Breiten-

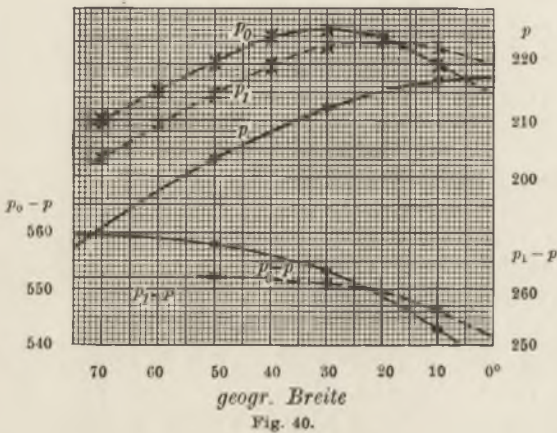
1) Met. Zeitsch. 1894, Litt. S. 20; Original: Rep. on pres. state of knowledge resp. general circulation, London, E. Stanford, 1893.

2) Beitr. z. Physik d. freien Atmosphäre, Bd. IV, S. 222.

zonen der Erde an. Wir benützen hier die Werte von der Erdoberfläche, von 4 und von 10 km Höhe:

Breite	Luftdruck (mm) in der Höhe von			Druckdifferenzen	
	0 km ( $p_0$ )	4 km ( $p_1$ )	10 km ( $p$ )	$p_0 - p$	$p_1 - p$
$21\frac{1}{2}^{\circ} s - 22\frac{1}{2}^{\circ} n.$	760	473	217	543	256
$22\frac{1}{2}^{\circ} n - 37\frac{1}{2}^{\circ} n.$	766	473	212	554	261
Europa	761	465	203	558	262

Mit diesen wenigen Daten konstruieren wir zunächst die meridionale Verteilung des Bodendrucks aus dem Druck in 10 km Höhe ( $p$ ) und dem Luftgewicht darunter ( $p_0 - p$ ), wobei wir für die erste Zone im Mittel die Breite  $10^{\circ}$ , für die zweite  $30^{\circ}$ , für die dritte  $50^{\circ}$  einsetzen. In Fig. 40



sind jene beiden Summanden aufgetragen und dann ist deren Summe gebildet (ausgezogene Kurven). Die unterste ausgezogene Kurve ( $p_0 - p$ ) läßt sich ebenso wie die mittlere ( $p$ ) ungezwungen trotz nur dreier Beobachtungen vom Äquator bis zu  $70^{\circ}$  Breite ziehen. Sie stellt den Einfluß der Lufttemperatur vor, der allerdings nicht rein auftritt, sondern mit dem Druck in der Höhe verquickt ist, da das Gewicht der Säule auch von  $p$

abhängt. Die mittlere Kurve stellt das Druckgefälle in 10 km Höhe vor, die oberste, als Summe der beiden, die Druckverteilung am Boden.

In 4 km Höhe kommt in den Werten  $p_1$  der Tabelle ein Hochdruckgürtel nicht mehr direkt zum Ausdruck. Wir finden ihn aber, wenn wir, ähnlich wie früher, das Gewicht der Säulen von 4 bis 10 km (Kurve  $p_1 - p$  gestrichelt) und den Druck in 10 km (Kurve  $p$ ) addieren. Das Resultat ist die gestrichelte Kurve  $p_1$ , welche nun das Maximum des Druckes im Niveau von 4 km bei  $20^{\circ}$  Breite zeigt, ähnlich wie oben erwartet wurde.

Wenn in der Höhe Luft unter  $10^{\circ}$  Breite relativ zur Erde ruht, so erhält sie, nach  $20^{\circ}$  Breite bewegt, schon hier eine Geschwindigkeit von 43 m/sec gegen Osten (vgl. die Tabelle S. 24). Viel größere Geschwindigkeiten scheinen tatsächlich nicht aufzutreten und es ist daher wahrscheinlich, daß die Luft schon in dieser Breite beginnen wird, abzu- steigen<sup>1)</sup>, um den Konvektionsstrom gegen den Äquator am Boden zu

1) Die Vertikalbewegung ist zur Erhaltung der Kontinuität nötig und wird durch ganz geringe Gradienten erzeugt; vgl. das Schema der Konvektionsbewegung Abschnitt 50 und die Bemerkungen auf S. 172.



speisen. Wenn teilweise Vermischung mit anderen Massen eintritt, so ist die Bewegung eines Teiles derselben bis in höhere Breiten noch möglich. Die absteigende Luft steht dabei in der Höhe unter dem Einfluß eines polwärts gerichteten Gradienten, dann kommt sie nahe der Erdoberfläche in das Gebiet des Druckmaximums und an dieser selbst in das umgekehrte Gefälle gegen den Äquator. Jene Hochdruckgürtel sind die notwendige Bedingung für die Unterhaltung eines stationären Luftzufflusses zum Äquator am Boden, ähnlich wie es bei der ruhenden Atmosphäre der hohe Druck der Polarzonen wäre.

Die Konvektionsströmung, welche in einer solchen zwischen Äquator und Pol vor sich ginge, sehen wir auf der rotierenden Erde auf das Gebiet beschränkt, welches zwischen Äquator und den Roßbreiten liegt. Polwärts von diesen überwiegen die Westwinde in allen Höhen mit Ausnahme der Polargegenden. Es scheint, daß in den Breiten von  $30^{\circ}$  bis zu den Polen keine eigentliche Konvektionsströmung durch Wärmezufuhr besteht, wiewohl auch hier die Gegenden in niedrigeren Breiten Wärmezufuhr, die in höheren relativ zu jenen Wärmeverluste haben werden. Ein durch solche Erscheinungen eingeleiteter Kreislauf müßte sehr rasch in westliche und östliche Winde aufgelöst werden, da die Erhaltung des Rotationsmomentes dortselbst ganz ungeheure Geschwindigkeiten bedingt, wie aus der Tabelle S. 24 ersichtlich ist. Strömt anfänglich ruhende Luft von  $60^{\circ}$  nach  $70^{\circ}$  Breite, so würde aus ihr schon ein Westwind von 180 m/sec Geschwindigkeit, wenn das Rotationsmoment erhalten bliebe. Wir können also dort namentlich in der Höhe keine einfachen meridionalen Luftverschiebungen annehmen.

Ist einmal die Druckverteilung längs eines Meridianschnittes gegeben, so läßt sich leicht mittels der oben angeführten Gleichung die ihr im stationären Zustand entsprechende zonale Bewegung berechnen. An der Erdoberfläche erhalten wir polwärts von den Hochdruckgürteln Westwinde, äquatorwärts Ostwinde, dazwischen muß ein windstilles Gebiet liegen.

Wir haben bisher die Erhaltung des Rotationsmomentes der Luftmassen vorausgesetzt. Dies ist erlaubt, so lange eine Luftmasse nicht mit Massen von anderem Moment vermischt wird<sup>1)</sup> und so lange auf unsere Masse keine äußeren Kräfte längs der Parallelkreise wirken. Als solche kommen nach den Gleichungen von S. 33 nur die Reibung und der Druckgradient in westöstlicher Richtung in Betracht. Die innere

1) Welche Geschwindigkeiten zwei Luftmassen durch Mischung annehmen, wenn sie getrennt verschiedene Geschwindigkeiten hatten, hängt von ihrer Relativbewegung ab, d. h. auch von der Richtung der Geschwindigkeit. Nach Möller (Met. Zeitsch. 1887, S. 322) geht die Endgeschwindigkeit nicht aus der Erhaltung der gesamten lebendigen Kraft, sondern aus der Erhaltung der Bewegungsgröße (Masse  $\times$  Geschwindigkeit) hervor, wie beim Stoß fester Körper. Ein Teil der lebendigen Kraft wird dabei in Wärme verwandelt.

Reibung der Luft zunächst hat namentlich dann starke Vermischungen zur Folge, wenn ungleiche Geschwindigkeiten und Temperaturensprünge aneinander grenzen (Helmholtz a. a. O.). Die äußere Reibung, welche durch die Bodenerhebungen auf die untersten Schichten der Atmosphäre ausgeübt wird, sucht stets das Rotationsmoment der Luft mit dem der Erde unter ihr auszugleichen. Zonale Druckunterschiede schließlich kommen bei einer idealen Erdgestaltung zunächst nicht in Betracht.

Auf der Erde können also die Luftmassen ihr Rotationsmoment wohl verändern, doch kann dasselbe, wenn wir von zonalen Druckunterschieden absehen, niemals größer werden als das größte Moment der Erdoberfläche; infolgedessen ist das Rotationsmoment des Äquators der Maximalwert der Momente, welche unter obiger Voraussetzung in der Luft angetroffen werden können.

Durch die Hindernisse, welche die untersten Schichten bei ihrer Bewegung an der Erde zu überwinden haben, wird das Rotationsmoment der Westwinde verkleinert, das der Ostwinde vergrößert; erstere passen ihre Bewegung der polwärts, letztere der äquatorwärts gelegenen Erdoberfläche an. Daher werden durch Reibung die unteren Westwinde befähigt, polwärts, die Ostwinde äquatorwärts zu wandern. Die Passatwinde treten somit als Ostwinde mit einer Komponente gegen den Äquator auf, die Westwinde auf der Polseite der Hochdruckgürtel mit einer Komponente gegen den Pol. In diesen Gebieten wird also unten Masse gegen höhere Breiten geschafft, die oben wieder zurückfließen muß. Die Beobachtungen scheinen bisher anzuzeigen, daß in den hohen Schichten tatsächlich im Durchschnitt Westwinde mit einer kleinen Komponente gegen den Äquator vorherrschen<sup>1)</sup>.

Diese Verhältnisse dürften zwischen etwa 30° und 70° Breite bestehen. Es ist zunächst nicht leicht, sich in höheren Breiten ein Zurückströmen der Luft gegen den Äquator vorzustellen, da doch der Gradient auch in der Höhe gegen den Pol gerichtet ist, wenn er auch polwärts bedeutend schwächer wird; und in der Tat haben diese gegen den Gradienten mit einer Komponente zum Äquator fließenden Westwinde Anlaß zu vielen Erörterungen gegeben.

Eine Bewegung gegen den Gradienten ist nur als Trägheitsbewegung denkbar: sobald Luft an einem Orte mit einer Westostgeschwindigkeit ankommt, die größer ist, als sie der vorhandene Gradient gegen den Pol im stationären Zustand verlangt, so wird sie vermöge dieser zu großen Geschwindigkeit durch die Bewegungskräfte äquatorwärts getrieben<sup>2)</sup> (vgl. die Gleichungen S. 33).

1) Hann, Lehrbuch der Meteorologie 3. Aufl. S. 480.

2) Davis und Köppen haben (Annal. d. Hydrographie und marit. Meteor. 1892 S. 375 und 1899 S. 563) diese Möglichkeit in dem folgenden Umstande zu finden geglaubt: Wenn in höheren Breiten Luft in der Höhe ihre Westostgeschwindigkeit dem dort bestehenden Gradienten angepaßt hat und sich nun

Doch kann sich eine derartige Trägheitsbewegung nur auf geringe horizontale Distanzen erstrecken. Denn sie wird rasch aufgezehrt, wie man aus der Erhaltung des Rotationsmomentes schließen kann. Wäre z. B. an einem Orte ein Westwind von der enormen Stärke von 100 m/sec ohne jedweden Gradienten gegeben, so würde sich derselbe bei Erhaltung seines Rotationsmomentes äquatorwärts bewegen. Von 50° Breite ausgehend würde er dann doch schon in 40° Breite Windstille machen (vgl. die Tabelle S. 24).

Wir können demnach einer solchen Trägheitsbewegung nur eine geringe Rolle bei der Zirkulation in höheren Breiten zuerkennen. Das Zurückströmen der Luft von den Polen in die Roßbreiten muß in anderer Weise vor sich gehen. Eine Erhaltung des Rotationsmomentes der Luft ist dabei ausgeschlossen. Man muß sich vorstellen, daß an Stelle einer einzigen Zirkulationsbewegung zwischen den Hochdruckgürteln und den Polen eine Reihe von kleineren Zirkulationen nebeneinander bestehen, welche eine fortwährende Vermischung der Luftmassen zur Folge haben; dabei werden die Rotationsmomente verändert, zonale Druckgradienten aber ermöglichen den Rücktransport aus höheren in niedrige Breiten.

Die Zirkulationsbewegung polwärts von den Roßbreiten ist also ohne Zweifel sehr verwickelt. Die zahlreichen einzelnen Kreisläufe werden viele Berührungsfächen ungleicher Winde zur Folge haben, an welchen Umlagerungen von Massen verschiedener Temperatur und Wirbelbildungen auftreten müssen. Tatsächlich gibt es in höheren Breiten viel häufiger atmosphärische Störungen als in niedrigen, wo eine einfache Zirkulation besteht. Die sogenannten „Störungen“ werden somit zu einem integrierenden Bestandteil der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre (vgl. S. 176, Bigelow).

Die zonalen Druckgradienten sind für die Zirkulation höherer Breiten gewiß sehr wichtig. Auf der Erde mit ihrer ungleichen Temperaturverteilung erfolgt der Rücktransport der polwärts beförderten Luft zum Teil auch an deren Oberfläche selbst. Wir haben genügend Beispiele von ostwestlichen Gradienten, welche eine meridionale Bewegung gegen den Äquator auch ohne Trägheit erlauben, d. h. also eine stationäre Strömung. Tatsächlich ist bei den mannigfachen Zyklonen und Anti-

senkt, so kommt sie meist in Gebiete mit kleinerem Gradienten; denn die Flächen gleichen Druckes fallen in der Höhe rascher gegen die Pole als nahe dem Boden. In dieser neuen Höhenlage hat sie daher eine zu große Geschwindigkeit, um sich stationär bewegen zu können, und strömt gegen den Gradienten äquatorwärts.

Diese eigentümliche Zirkulation könnte nur durch die Luft in mittleren und hohen Schichten zustande kommen. Von den letzteren glaubte man früher, sie hätten gleichfalls eine Komponente gegen den Pol. Die untersten wirken auf den Rücktransport in der mittleren Lage nur hemmend, da ihre Geschwindigkeit die geringste ist.

zyklonen deutlicher ein Nebeneinander der nördlichen und südlichen Bewegungen wahrnehmbar als ein Übereinander, das eigentlich nur in den Mittelwerten zum Ausdruck kommt (vgl. Abschnitt 75).

Die Beobachtungen an der Erdoberfläche zeigen von etwa 70° Breite an eine neuerliche Druckzunahme gegen den Pol, der mithin als Kältereservoir mit den niedrigeren Breiten an einer Art Konvektionsströmung teilnehmen dürfte, welche freilich nur bei einer fortwährenden Vermischung der kalten und warmen Massen untereinander bestehen kann, somit sehr unregelmäßig vor sich gehen muß. Denn wenn sich Luft von 70° nach 80° Breite bewegte, ohne sich mit anderer zu mischen, würde sie dort als Westwind von 235 m/sec auftreten. Die kalte Luft, die von den Polen abfließt, würde rasch zum Ostwind; wird sie aber von der Erdoberfläche durch Reibung mitgenommen, so kann sie verhältnismäßig sehr weit unvermischt gegen den Äquator strömen.

So entsteht wieder ein Nebeneinander ungleich temperierter und gerichteter Winde, ähnlich den äquatorialen und polaren Strömungen von Dove, welches die Störungen im Wetter der hohen Breiten verursacht.

Die Entfernung der Luft von der Erdachse ändert sich nicht nur infolge von meridionaler Verschiebung in einem Niveau, sondern auch infolge von Vertikalbewegungen. Auch durch solche entsteht somit bei Erhaltung des Rotationsmomentes zonale Bewegung. Diese ist jedoch nicht groß; selbst, wenn eine Luftmasse um 10 km auf- bzw. absteigt, erlangt sie am Äquator, wo der Effekt am größten ist, nur eine Geschwindigkeit von 1,46 m/sec. Aufsteigen macht östliche, Absteigen westliche Winde (vgl. Abschnitt 13, S. 24).

Wenn daher über dem Äquator starke Ostwinde von 30 bis 40 m/sec beobachtet werden, wie dies namentlich gelegentlich des Krakatoaausbruches geschah, so kann man dafür nicht das Aufsteigen der Luft von der Erdoberfläche verantwortlich machen. Jener Ostwind, der über dem Äquator bis zu etwa 16 km Höhe dauernd vorkommt, muß mit seinem Rotationsmoment aus anderen Breiten dahin geflossen sein. Zur Entstehung eines Ostwindes von der angegebenen Stärke braucht es nur eine meridionale Verschiebung der Luft aus etwa 15° Breite bis zum Äquator. Solche Bewegungen können in höheren Schichten namentlich dann leicht vorkommen, wenn im Wechsel der Jahreszeiten Luft von einer Halbkugel auf die andere übergeht<sup>1)</sup>. Bei jeder derartigen Luftübertragung müssen in der größten Entfernung von der Erdachse Ostwinde auftreten. Es kann überhaupt in den hohen Schichten über dem Äquator bei zonaler Druckverteilung keine andere Bewegung geben. Denn wie auf S. 180 ausgeführt wurde, besitzt keine Luftmasse ein größeres Rotationsmoment als der Äquator selbst, so daß jede dorthin

1) Ferrel und Möller; vgl. Hanns Lehrbuch, 3. Aufl. S. 494.

kommende Luftmasse als Ostwind auftreten muß, wenn auch dessen Stärke hierdurch nicht gegeben ist<sup>1)</sup>.

Wie Teisserenc de Bort bemerkt<sup>2)</sup>, ist dieser Ostwind ein Wind ohne Gradient. Über dem Äquator haben wir in der Höhe relativ hohen Druck (im Jahresmittel) anzunehmen, mit symmetrischem Abfall nach beiden Halbkugeln hin. Dieser Wind würde durch Reibung allmählich geschwächt werden, wenn nicht der Nachschub der Luft aus den Passatzonen stets neuerdings zur Bildung von östlichen Winden beitragen würde. Auf den beiden Seiten des äquatorialen Ostwindes erfolgt in der Höhe ein Abströmen gegen die Pole, das zunächst als Südostwind auf der nördlichen, als Nordostwind auf der südlichen Halbkugel erscheint, sich dann direkt polwärts dreht und schließlich in westlichen Wind übergeht, wie es die Erhaltung des Rotationsmomentes leicht voraussehen läßt; dies ist der Antipassat. Fließt die Luft z. B. mit 30 m/sec Ostgeschwindigkeit vom Äquator ab, so wird die Ostkomponente null in 14° 43' Breite, und polwärts von hier tritt bereits die Westkomponente auf. Die Beobachtungen widersprechen nicht dieser Schätzung. Verfolgen wir die Luft weiter, wie sie unter dem Einfluß des polwärts gerichteten Gradienten strömt, so können wir mit Hilfe der Bewegungsgleichung für die stationäre zonale Bewegung auch leicht berechnen, in welcher Breite der vorhandene Gradient von der vereinigten Zentrifugalkraft und Ablenkungskraft des Westwindes gerade kompensiert wird. Wir wollen hierfür beispielshalber die oben benützten Pepplerschen Zahlen für den Luftdruck in 10° und 30° Breite bei 10 km Höhe benutzen.

Aus der Konstanz des Rotationsmomentes findet sich die Winkelgeschwindigkeit der Westostbewegung zu  $\dot{\lambda} = \omega \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi}\right)$ , wo wir für  $\varphi_0$  die Breite einzusetzen haben, in welcher die westöstliche Komponente null ist. Aus der Gleichung für die stationäre Bewegung

$$r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda} (\dot{\lambda} - 2\omega) = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (\text{vgl. S. 175})$$

folgt:

$$r \sin \varphi \cos \varphi \omega^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi}\right) = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

Nach Einsetzen des beobachteten Gradienten und der Dichte der Luft kann man hieraus durch Interpolation die Breite  $\varphi$  finden, in welcher die

1) Die in letzter Zeit in Afrika und Batavia beobachteten Westwinde in 18—20 km Höhe können hiernach nur als Effekte von zonalen Druckgradienten erklärt werden, welche es ermöglichen, daß einzelne Massen der Atmosphäre ein Rotationsmoment erhalten, das größer ist, als das des Erdäquators (Beobachtungen vgl. bei R. Süring, Zeitsch. d. Ges. f. Erdkunde in Berlin, 1913, und Hanns Lehrbuch, 3. Aufl. S. 473, Anmerkg.).

2) Met. Zeitsch. 1894, Litt. S. 20, Referat von Sprung.

polwärts gerichtete Bewegung zu bestehen aufhört. Man erhält so kaum 20°; freilich ist im Sommer, für welchen Peppers Zahlen gelten, das Druckgefälle auch geringer als im Winter<sup>1)</sup>.

Eine Erklärung der allerhöchsten bisher beobachteten Strömungen wird später an der Hand der Temperaturbeobachtungen versucht.

**60. Verteilung von Temperatur, Druck und Windstärke nach den Beobachtungen.** Die tatsächliche Verteilung der Winde in der Atmosphäre wird ohne Zweifel durch die Asymmetrie der Erdoberfläche, d. h. durch die ungleiche Ausbreitung von Land und Meer, sehr stark beeinflusst. Die sogenannten Aktionszentren der Atmosphäre, z. B. der tiefe Druck über Island, der hohe über den Azoren sind hierfür genügende Anzeichen. Seitdem die Erforschung der höheren Luftschichten zeigte, daß die Stratosphäre über Land vermutlich tiefer liegt als über dem Ozean, wenigstens in höheren Breiten, müssen wir annehmen, daß sich der Einfluß von Land und Meer auf die Winde bis in sehr große Höhen erstreckt; denn die Temperaturunterschiede zeigen Unterschiede in der Massenverteilung an, die sich in den Luftströmungen äußern. Ohne genaue Kenntnis der Temperaturverteilung in der ganzen Atmosphäre können wir uns daher nur ein sehr schematisches Bild von den wirklichen Luftströmungen machen.

Nehmen wir wie früher an, daß die Erde ungegliedert sei, dann kommen hauptsächlich die zonalen Winde in Betracht, welche den meridionalen Druckgradienten entsprechen. Um wenigstens von diesen ein Schema zu erhalten, können wir die bisherigen Ergebnisse der Temperaturbeobachtungen aus verschiedenen Breiten mit den mittleren Druckwerten der Breitenkreise am Boden verbinden und so die Massenverteilung in einem idealen Meridianschnitt der Atmosphäre festzustellen suchen.

Dieser Weg ist schon öfters besprochen worden, so von Ferrel und Bigelow. Aber gerade die jüngsten aerologischen Forschungen haben ganz neues Licht in die Sache gebracht und die früheren Anschauungen zum großen Teil über den Haufen geworfen. Dies geschah durch die Entdeckung, daß die obere Grenze der Troposphäre von den Polen gegen den Äquator bedeutend ansteigt und zugleich die Stratosphäre in dieser Richtung wesentlich kälter wird. Die Folge hiervon ist, daß sich von gewissen Höhen an das am Boden polwärts gerichtete Temperaturgefälle umkehrt; die Luft über den Polen ist in der Höhe wärmer als über dem Äquator.

Aus dem Bodendruck in einem Meridiane und der Temperatur darüber fanden wir oben ein in der Höhe vom Äquator gegen die Pole ge-

<sup>1)</sup> Eine derartige Rechnung hat schon L. Steiner gegeben (Met. Zeitsch. 1902, S. 562). Es weist auch darauf hin, daß die Bewegung in verschiedenen Höhenlagen ungleich weit reichen kann.

richtetes Druckgefälle, welches mit den Westwinden der Höhe im Einklang steht. Gehen wir nun in größere Höhen, so muß nach der eben angegebenen Eigenschaft der Stratosphäre dieses Gefälle kleiner werden, der Westwind also abnehmen; ja es ist, wenn die Isothermie hoch genug reicht, denkbar, daß in gewissen Lagen das Gefälle sich sogar umkehrt und äquatorwärts gerichtet ist (vgl. S. 187). Auch das mehrfach beobachtete Abnehmen der Windstärke beim Übergang in die Stratosphäre läßt auf ein Abnehmen der polwärts gerichteten Gradienten dort oben schließen<sup>1)</sup>.

Unsere Kenntnis von der tatsächlichen Temperaturverteilung in der Atmosphäre ist gerade jetzt sehr in der Entwicklung begriffen; wir begnügen uns daher hier mit einigen wenigen Mittelwerten, die keinen Anspruch auf große Verlässlichkeit machen können.

Die Höhe der Stratosphären Grenze liegt im Sommerhalbjahr in Lappland bei etwa 9 km, in Mitteleuropa bei 11, in den Tropen bei 16 km<sup>2)</sup>. Die Temperaturen der Stratosphäre daselbst sind: Lappland etwa  $-45^{\circ}$  bis  $-50^{\circ}$  (?), Mitteleuropa  $-55^{\circ}$ , Tropen  $-75^{\circ}$  bis  $-80^{\circ}$  C.

Humphreys<sup>3)</sup> findet, daß die Temperaturdifferenz zwischen Erdoberfläche und Stratosphäre ungefähr folgende Werte hat:

Äquator	38°	49°	60°	68° n. B.
(96°)	74°	67°	60°	51° C.

Daraus ergibt sich, wenn die Stratosphären Grenze in diesen Breiten durchschnittlich zu 16, 13, 11, 10 und 9 km angenommen wird, fast überall ein mittlerer Temperaturgradient von  $6^{\circ}$  auf 1 km. Dieser Wert kann daher für rohe Schätzungen verwendet werden, wenn man auch weiß, daß der Gradient meist etwas mit der Höhe zunimmt.<sup>4)</sup>

A. Peppler<sup>5)</sup> hat aus den bisherigen Sommerbeobachtungen eine interessante Übersicht über die Verteilung der Temperatur in drei Zonen der nördlichen Hemisphäre zusammengestellt und für sie auch die Druckverteilung berechnet. Angesichts der Wichtigkeit dieser Daten geben wir im folgenden einen Auszug, indem wir die Werte, welche eigentlich aus breiteren Zonen stammen, auf die mittleren Breiten von  $10^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$  und  $50^{\circ}$  beziehen. Der Umstand, daß die Beobachtungen im Sommerhalbjahr gemacht wurden, läßt eine weitere Verallgemeinerung bisher nicht zu. Auch sei ausdrücklich bemerkt, daß die Daten nur als

1) A. Wegener denkt an ein Zurückbleiben der obersten Atmosphärenschichten hinter der rotierenden Erde (Met. Zeitsch 1911, S. 271).

2) R. Süring in Hanns Lehrbuch, 3. Aufl. S. 156.

3) Bull. Mount Weather, II, S. 292.

4) Genauere Werte der Gradienten in verschiedenen Höhen vgl. bei Hann-Süring a. a. O.

5) Beitr. zur Phys. d. freien Atmos., Bd. IV, S. 224.

vorläufige zu betrachten sind und hier nur zur Darstellung des ungefähren Verlaufes der Isothermen und Isobaren verwendet werden.<sup>1)</sup>

Mittlere Sommertemperatur in ° C.

unter	in 0	2	4	6	8	10	12	14	16 km Höhe
10° n. B.	26,0	15,3	6,0	-3,6	-15,7	-30,6	-45,4	-60,5	(-66)
30° „	22,3	11,6	0,9	-11,1	-24,6	-39,8	-55,5	-63,1	-64
50° „	15,4	4,8	-6,0	-18,8	-33,0	-46,0	-51,1	-51,2	-51

Die Art des Temperaturverlaufes mit der Höhe ist sehr charakteristisch und wird in Fig. 41 für die 3 Breitenkreise dargestellt.

Aus dem mittleren Druck am Boden und diesen Temperaturen läßt sich nun leicht die Druck- und damit die Massenverteilung berechnen. Peppler fand (a. a. O.) die folgenden Werte (wobei die letzte Kolonne für 20 km Höhe mit Benützung der Temperatur der obersten isothermen Schichte extrapoliert wurde):

Mittlerer Sommer-Luftdruck in mm

unter	in 0	2	4	6	8	10	12	14	20 km
10° n. Br.	760	601,8	473,3	369,0	285,0	217,2	163,1	120,5	46,5
30° „	766	605,5	473,4	367,0	281,3	212,3	157,7	115,6	44,7
50° „	761	597,8	465,3	358,1	272,0	203,4	151,8	111,7	45,0.

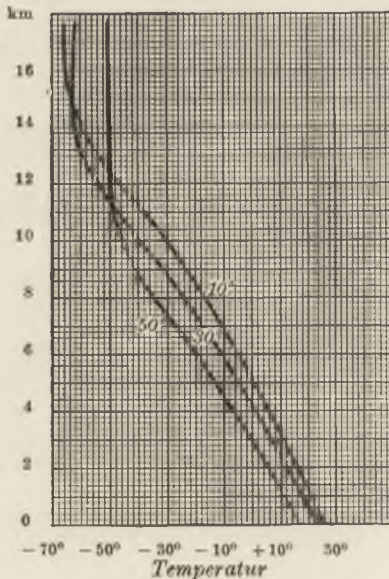


Fig. 41.

Mittels der angegebenen zwei Tabellen läßt sich die Temperatur- und Druckverteilung in einem Meridianschnitt darstellen. Statt des Druckes geben wir aber hier die Druckdifferenzen zwischen 10° und 30°, bzw. zwischen 30° und 50° Breite wieder, welche annähernd als meridionale Gradienten der Breiten von 20° und 40° aufzufassen sind. Diese Gradienten sind in Fig. 42 durch Pfeile verschiedener Größe angegeben. Die Isothermen sind von 5 zu 5 Grad gezogen.

Aus der Darstellung in Fig. 42 sieht man unmittelbar, daß die Westwinde bis zu 16 km Höhe vorherrschen. Die Windstille (Druckgradient null) verschiebt sich aus 30° Breite am Boden nach 20° Breite in 4 km. Das äquator-

1) Herr Prof. Süring war so freundlich, mir, allerdings erst nach Fertigstellung dieser und der folgenden Übersichten, eine von ihm berechnete Tabelle von Druck und Temperatur zur Verfügung zu stellen. Dieselbe unterscheidet sich von der Peppers hauptsächlich für die mittlere Breitenzone, wo sie höhere Temperaturen angibt. Mit Rücksicht darauf, daß die Rechnung doch nur als vorläufige gelten kann, wurde von einer Neuberechnung mit Sürings Werten abgesehen.



wärts von der gestrichelten Linie liegende Gebiet hat Ostwinde, das polwärts liegende Westwinde. Aus den wenigen Daten läßt sich freilich der Verlauf dieser Linie nicht näher festlegen.

Die Isothermen zeigen deutlich, wie das Temperaturgefälle sich mit zunehmender Höhe umkehrt. Der Umkehrpunkt liegt polwärts niedriger als in den

Tropen. In jedem Niveau von etwa 8 km aufwärts gibt es daher ein Temperaturminimum, das mit zunehmender Höhe gegen den Äquator rückt; hierauf wird später noch hingewiesen.

Infolge des Temperaturgefälles in der Stratosphäre gegen den Äquator werden die in der Höhe polwärts gerichteten Gradienten immer geringer; dies bemerkt man schon deutlich in 12 km Höhe. Bei weiter anhaltender Isothermie muß sich das Gefälle des Druckes dann umkehren, worauf Peppler<sup>1)</sup> hinweist. Es ist derzeit noch nicht möglich, diese Höhe genau zu bestimmen. Sobald sie erreicht ist, kann der obere Passatwind (Oberpassat) Platz greifen, der in neuester Zeit mehrfach beobachtet wurde.<sup>2)</sup> In den gemäßigten Breiten kann eine derartige Umkehr in 20 km Höhe beginnen (vgl. Peppers extrapolierte Werte in obiger Tabelle); doch ist darüber noch nichts genaues bekannt.

Im Gebiete der Stratosphäre nimmt die Temperatur vom Äquator gegen den Pol hin zu. Wäre die Stratosphäre genau isotherm, so würden dort vertikale Säulen ungleicher Temperatur (d. h. mit polwärts kontinuierlich zunehmender Temperatur) nebeneinander liegen. Soll ein Gleichgewicht bestehen, so müssen die kalten Massen keilförmig unter die warmen greifen, die Isothermen dürfen dann in der Stratosphäre nicht vertikal verlaufen, sondern müssen oben äquatorwärts umbiegen, wie dies in Fig. 42 auch angedeutet ist. Über einem Orte ist daher in der Stratosphäre nicht Isothermie, sondern Inversion der Temperatur als Regel zu erwarten. Das scheint von den Beobachtungen bestätigt zu werden.

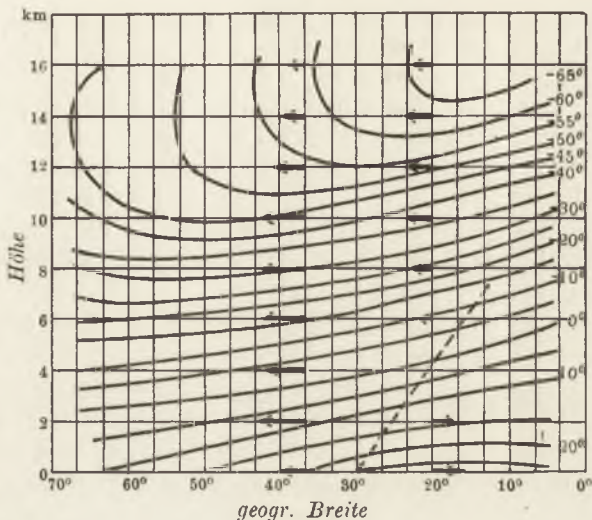


Fig. 42.

1) Beitr. zur Phys. d. freien Atm. Bd. IV, S. 13.

2) Van Bemmelen in Batavia, Ref. v. Hann in Met. Zeitsch. 1912, S. 145; Hann, Met. Zeitsch. 1911, S. 583 und Lehrbuch, 3. Aufl., S. 477.

Zu dieser Temperaturverteilung gehört dann noch eine gewisse zonale Geschwindigkeitsverteilung, um den Zustand stationär zu machen.

Trotzdem ist es kaum glaublich, daß die Stratosphäre sich in stationärer Bewegung befindet; die Inversion der Temperatur müßte dazu recht stark, die Keilwinkel der kalten Massen recht klein sein. Es ist eher zu erwarten, daß die auf der Äquatorseite der Stratosphäre durch Strahlung stets wieder neu erzeugten kalten Massen sich in einzelnen polwärts gerichteten Vorstößen unter die warmen Massen ausbreiten und so in der Stratosphäre ähnlichen Anlaß zu Störungen geben, wie in der Troposphäre (vgl. S. 182).

Es entsteht noch die Frage, ob die oben berechneten Luftdruckgradienten nun auch mit Winden verbunden sind, die der Stärke nach angenähert der Gleichung für stationäre Bewegung entsprechen. Wir können dies prüfen, indem wir die gleichfalls von Peppeler (a. a. O.) veröffentlichte vorläufige Übersicht über die Windbeobachtungen in zwei Breitenzonen zugrunde legen. Nach ihr ist:

unter	Mittlere Windgeschwindigkeit in m/sec						
	0	2	4	6	8	10	12 km
10°—15° n. Br.	6,7	8,4	10,0	8,2	6,7	8,2	8,5
25°—30°	5,4	6,0	7,3	9,9	13,7	15,9	15,9

Die Berechnung der Windstärke aus den Luftdruckgradienten erfolgt nach der Formel für stationäre Strömung von S. 175:

$$r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda} (\dot{\lambda} - 2\omega) = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

Da  $\dot{\lambda}$  hier klein gegen  $\omega$  ist, genügt es zur Schätzung, diese Größe in der Klammer zu vernachlässigen. Die lineare Geschwindigkeit längs der Parallelkreise wird dann:

$$v = r \cos \varphi \dot{\lambda} = \frac{1}{2\rho r \omega \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

Durch Einsetzen der Dichte  $\rho$  aus der Gasgleichung macht man sich von der Einheit, in welcher der Luftdruck gemessen wird, unabhängig. Man erhält:

$$v = \frac{RT}{2r\omega \sin \varphi} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{R}{2\omega \log e \sin \varphi} \frac{T}{r} \frac{\partial(\log p)}{\partial \varphi}$$

Für die Größe  $\frac{\partial(\log p)}{r \partial \varphi}$  schreiben wir die Differenz der Logarithmen des Druckes in 30° und 50° Breite, dividiert durch  $r \Delta \varphi = 20 \cdot 111\,000 \text{ km}$ . So wird für die Zahlenrechnung:  $v = \frac{R}{2\omega \log e \cdot 20 \cdot 111\,000} \frac{T}{\sin \varphi} \Delta(\log p)$ .

1) Unter log ist hier der Briggsche Logarithmus verstanden;  $\log e$  ist 0,43429.

Aus den gegebenen Druckwerten lassen sich die Geschwindigkeiten nur für zwei mittlere Breiten, für  $20^\circ$  und  $40^\circ$  berechnen; mit Hilfe der oben angegebenen Zahlenwerte findet sich:

	Berechneter Ostwestwind in m/sec							
Breite	0	2	4	6	8	10	12	14 km
$\varphi = 20^\circ$	6,1	4,6	0,1	-3,8	-8,6	-14,4	-19,6	-22,9
$= 40^\circ$	-2,7	-5,0	-6,5	-8,8	-11,4	-16,9	-11,6	-10,3

Negative Werte bedeuten Westwind, positive Ostwind. Die Übereinstimmung der berechneten Werte mit den mittleren beobachteten Windstärken ist der Größenordnung nach gut. Da die beobachteten Werte ohne Rücksicht auf die Richtung zusammengeworfen sind, erscheint der Übergang des Passates in den Antipassat in der Beobachtungstabelle überhaupt nicht.

Würde die Druck- und Temperaturverteilung in der Atmosphäre in genaueren Mittelwerten vorliegen, so ließe sich leicht die zugehörige zonale Bewegung in ähnlicher Weise wie hier berechnen, und damit wäre die wichtigste Übersicht über die Bewegungen gewonnen. Unter dessen müssen wir uns mit der Feststellung begnügen, daß die mittleren zonalen Bewegungen den Gradienten der stationären Strömung ungefähr zu entsprechen scheinen.

**61. Verteilung von potentieller Temperatur und Rotationsmoment.** Im Anschluß an die Helmholtzschen Betrachtungen im Abschnitt 56, welche die Bedingungen der stationären Bewegung ganzer Luftringe zum Gegenstande hatten, ist es vorteilhaft, nun auch aus den Beobachtungen die ungefähre Verteilung von potentieller Temperatur und Rotationsmoment zu bestimmen, jener beiden Größen, die dort eine Rolle spielten. Freilich stehen wie im vorigen Abschnitt auch hierfür nur dieselben spärlichen Beobachtungen zur Verfügung, so daß auch die folgenden Ergebnisse nur vorläufigen Wert haben können.

Aus Peppers oben angegebenen Mittelwerten für Temperatur und Druck läßt sich zunächst die potentielle Temperatur in den drei Breitenzonen von  $10^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $50^\circ$  bis zu 14 km Höhe für den Sommer bestimmen. Diese Werte enthält die folgende Tabelle:

	Potentielle Temperatur in absoluten Graden (Sommer)							
Breite	0	2	4	6	8	10	12	14 km
$10^\circ$	299	308	320	332	341	348	355	361
$30^\circ$	295	304	315	323	331	337	342	361
$50^\circ$	288	298	308	316	323	332	353	385

Diese Zahlen sind zur Zeichnung der Kurven gleicher potentieller Temperatur in Fig. 43 verwendet; dabei sind einige Temperaturwerte von der Erdoberfläche zu Hilfe genommen und die Kurven graphisch bis zum Pol extrapoliert worden.

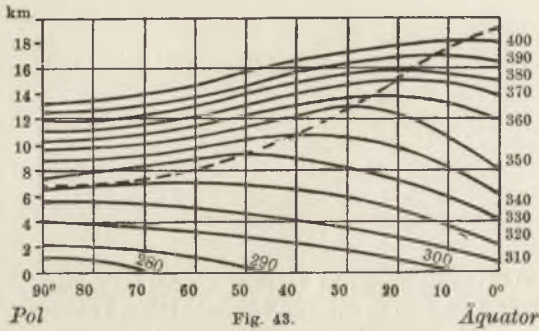


Fig. 43.

Die potentielle Temperatur nimmt nach aufwärts stets zu, in den unteren Schichten langsam, beim Eintritt in die Stratosphäre sehr rasch. Dieser Eintritt erfolgt polwärts früher als in niedrigen Breiten. Gegen den Äquator hin nimmt die potentielle Temperatur in einem Niveau unterhalb 6 km

stets zu. In größerer Höhe erfolgt vom Pol aus zuerst Abnahme, dann Zunahme; so kommt es, daß sich in jedem Niveau oberhalb 6 oder 7 km eine potentiell kälteste Schichte befindet, mit relativ warmen Massen sowohl auf der Polar- wie auf der Äquatorialseite. Die gestrichelte Kurve in Fig. 43 verbindet diese kältesten Orte. Im Niveau von 8 km dürfte die kälteste Masse ungefähr unter  $50^\circ$ , in 10 km unter  $35^\circ$ , in 12 km unter  $30^\circ$  Breite zu finden sein, usw. Nach den Ausführungen des Abschnittes 55 ist es zur Stabilität dieser Schichte nötig, daß sie sich relativ zur benachbarten wärmeren des gleichen Niveaus auf der nördlichen Halbkugel nach rechts bewegt. Diese Windverteilung kommt auch wirklich durch die Abnahme des polwärts gerichteten Gradienten bei Entfernung vom Äquator in der Höhe zustande. Auch sieht man, daß die relativ kalte Masse sich über jedes Niveau mit einem Querschnitt erhebt, welcher dem in Fig. 34, S. 159, dargestellten Querschnitt der kalten Masse entspricht: ein doppelter flacher Keil oder eine nach oben konvexe Wölbung.

Die Keilform der potentiell kälteren Luft, welche zur Erhaltung der Stabilität der isothermen Grenzflächen nötig ist, sieht man auch in der Form der Kurven nahe dem Erdboden (Fig. 43) deutlich ausgeprägt. Die kalten Polarkappen (Isotherme  $280^\circ$  in der Figur) werden uns noch später beschäftigen; die Kurve der potentiellen Temperatur  $300^\circ$  weist die obere Grenze nach, welche den relativ kalten Passatwindmassen zukommen muß, damit sie ungefähr stationär bleiben. Die Passate müssen dazu an Höhe gegen den Äquator hin abnehmen. Tatsächlich scheinen die Beobachtungen dies zu erweisen; denn der Passatwind hat in  $20^\circ$  bis  $35^\circ$  Breite angeblich eine mittlere Höhe von etwa 3000 m, in  $5^\circ$  bis  $20^\circ$  Breite von 1500 m.<sup>1)</sup>

Die Rechnung von Helmholtz hatte für die Stabilität der ungleich temperierten Luftschichten verlangt, daß die Flächen gleicher potentieller Temperatur über dem Horizont gegen den Pol hin ansteigen, aber

1) A. Peppeler, Beitr. zur Phys. d. freien Atm. Bd. IV, S. 35; vgl. auch R. Wenger, das. Bd. III, S. 173.

stets unter der Höhe des Himmels-pols bleiben (vgl. Fig. 39, S. 168). In Fig. 44 sind diese Isothermen über der gekrümmten Erde gezeichnet, freilich in einem sehr übertriebenen Maßstab. Der nicht schraffierte Teil stellt die Atmosphäre von 0 bis 16 km Höhe dar, die meridional verlaufenden Isothermen sind mit den gleichen Daten gezeichnet, wie in Fig. 43. Man sieht hier deutlich, daß vom Pol aus die Kurven äquatorwärts unten gegen die Erde hin sinken, oben aber ansteigen, also divergieren; dies ist für die Verteilung der potentiellen Temperatur der Atmosphäre charakteristisch.

Die zweite in Fig. 44 eingezeichnete Kurvenschar, welche die Isothermenschar schneidet, stellt in vorläufiger schematischer Weise die ungefähre Verteilung des Rotationsmomentes in mittleren und niedrigen Breiten vor.

Dieses Moment wurde (vgl. Abschnitt 56, S. 164) aus den berechneten mittleren Windstärken (Tabelle S. 189) ausgewertet. Für 20° und 40° Breite ergibt sich:

$$\text{Rotationsmoment } \Omega = -10^9 \cdot a$$

Breite	0	2	4	6	8	10	12	14 km
20°	$a = 2,58$	2,59	2,62	2,64	2,67	2,71	2,74	2,76
40°	„ 1,75	1,76	1,77	1,78	1,80	1,82	1,80	1,80

Außerdem ist für

30° Breite und Windstille am Boden  $a = 2,22$ ,

0° „ „ „ „ „  $a = 2,96$ ,

0° „ „ Ostwind 30 m/sec in 16 km Höhe  $a = 2,78$ .

Nehmen wir diese Werte hinzu, so lassen sich die mit 1,8 bis 3,0 bezeichneten Kurven in Fig. 44 angenähert konstruieren.

Die zweite Helmholtzsche Forderung für Stabilität lautete (vgl. Abschnitt 56), es solle  $\frac{\Omega^2}{\vartheta}$  gegen den Äquator überall dort zunehmen, wo  $\vartheta$  gegen denselben zunimmt. In der Troposphäre wird diese Forderung erfüllt. Ein Blick auf die Kurven des Rotationsmomentes (Fig. 44) zeigt die rasche Zunahme von  $\Omega$  gegen den Äquator in den unteren

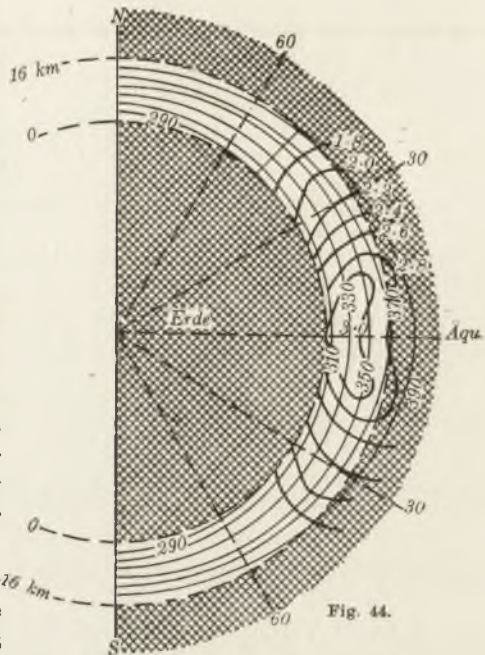


Fig. 44.

Schichten. Wo die potentielle Temperatur äquatorwärts abnimmt, wie in der Stratosphäre, muß die auf S. 167 formulierte Stabilitätsbedingung noch näher ins Auge gefaßt werden. Nach ihr soll allgemein sein:

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2} \right) + r \omega^2 \left( \frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) > 0.$$

Ersetzt man  $\Omega$  durch  $r^2(\lambda - \omega)$ , so wird daraus:

$$\frac{\lambda_1(2\omega - \lambda_1)}{\vartheta_1} > \frac{\lambda_2(2\omega - \lambda_2)}{\vartheta_2}.$$

Da wir äquatorwärts von der Schichte 1 zur Schichte 2 schreiten, so ist die Bedingung dafür, daß diese Ungleichung in der Stratosphäre erfüllt werde:  $\frac{\lambda_1}{\vartheta_1} > \frac{\lambda_2}{\vartheta_2}$ , d. h. es muß  $\lambda$  in jenem Gebiete gegen den Äquator hin abnehmen. Da Ostwind positiv, Westwind negativ gezählt wird, so muß demnach dort, wo die potentielle Temperatur in einem Niveau äquatorwärts abnimmt, der Ostwind in der gleichen Richtung abnehmen, der Westwind zunehmen. Es ergibt sich also die oben schon angeführte Bedingung der relativen Rechtsbewegung der kalten Schichten auf unserer Halbkugel.

Diese Verteilung der Windstärke muß sich auch im Luftdruck ausprechen. Die kalte Schichte, welche durch die gestrichelte Kurve in Fig. 43 bezeichnet ist, muß stets unter relativ niedrigem Druck stehen (wobei  $\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}$  positiv, vgl. Fig. 34).

Durch jene gestrichelte Kurve zerfällt die Atmosphäre in zwei Teile. Im unteren liegen die kalten Keile mit ihrer Kante gegen den Äquator, im oberen mit ihrer Kante gegen den Pol. Mit diesem Unterschied ist ein gleichzeitiger des Windregimes verbunden, dessen Bedeutung wohl erst die Beobachtungen der kommenden Jahre erkennen lassen werden.

Die Bedingungen der stabilen Schichtung der Atmosphäre sind zweifellos durch die zonalen Luftströmungen sehr nahe erfüllt. Es erübrigt noch, die meridionalen Komponenten der Bewegung an der Hand der Figur 44 einer kurzen Betrachtung (nach Helmholtz) zu unterziehen.

Hierzu ist das auf S. 170 besprochene Prinzip verwendbar, daß sich eine Luftmasse bei stabiler Schichtung stets dort in die anderen einzulagern strebt, wo sie gleiche potentielle Temperatur und gleiches Rotationsmoment findet.

Die Erdoberfläche übt auf die über sie hinstreichenden Winde stets die Wirkung aus, daß sie dieselben verzögert. Da Ostwinde ein kleineres, Westwinde ein größeres Rotationsmoment haben, als die rotierende Erdoberfläche unter ihnen, so wird das Rotationsmoment der Ostwinde durch die Hemmungen am Boden vergrößert, das der Westwinde verkleinert. Luftmassen, welche an der Erde als Westwinde auftreten, suchen daher in der Fläche ihrer potentiellen Temperatur einen Platz

auf, der ihrem verminderten Rotationsmoment entspricht (vgl. die beiden Kurvenscharen  $\vartheta$  und  $\Omega$  in Fig. 44) und bewegen sich also von der Erdoberfläche polwärts und zugleich aufwärts. Hierdurch wird die Reibungswirkung der Erde auf Westwinde allmählich in hohe Schichten der Atmosphäre hinaufgetragen, zum Unterschied von dieser Wirkung auf Ostwinde. Solche vergrößern ihr Rotationsmoment durch Berührung mit der Erdoberfläche und streben daher in der Schichte ihrer potentiellen Temperatur äquatorwärts. Da sie sich schon an der Erdoberfläche befinden, so können sie erst dann diesem Antrieb folgen, wenn auch ihre potentielle Temperatur durch Wärmeaufnahme gestiegen ist. Sie erscheinen nun auf der nördlichen Halbkugel als NE-Winde, und zwar in den polaren Breiten und in den Tropen (hier als Passate).

Allmählich wird durch Reibung das Rotationsmoment der Passate so groß, daß sie sich, wie Helmholtz sagt, in die äquatorialen Kalmen einschieben können. Nun kommt infolge des Aufhörens der Ostbewegung der Auftrieb zur Wirkung. Da die Ostwinde bei der Hemmung an der Erdoberfläche nicht aufsteigen, sondern an dieser verbleiben, so ist die Hemmung auf die untersten Schichten beschränkt.

Die von der Kalmenzone aus in der Höhe polwärts abfließende Luft kann nicht knapp an den unteren Passat angrenzen. Denn es würde, wenn ein solcher Zustand einmal vorhanden wäre, an der Grenze dieser ungleichen Bewegungen und Temperaturen bald zu Wellenbildungen, Wirbeln und Vermischungen der beiden Schichten kommen. Eine solche Mischungszone über den Passaten ist daher auch die Regel und wird in der Form von Temperaturinversionen und unregelmäßigen Winden tatsächlich beobachtet<sup>1)</sup>.

Da bei diesen Mischungen auch die Rotationsmomente der Luftströme ausgeglichen werden, so tragen solche Grenzflächen stets dazu bei, die Bildung sehr großer Geschwindigkeiten zu verhindern; Helmholtz sieht in denselben den Hauptgrund dafür, daß nicht viel stärkere Winde vorkommen, als dies tatsächlich der Fall ist. Eine andere solche Mischungszone muß auch über den polaren Ostwinden erwartet werden. Hier ist bekanntlich der Sitz der häufigen atmosphärischen Störungen höherer Breiten, welche wohl nichts anderes darstellen als die Ausgleichung von Temperatur- und Bewegungsunterschieden.

**62. Einfluß von Land und Meer auf den allgemeinen Kreislauf.** Die wirklich vorkommenden Winde und Gradienten an der Erdoberfläche stimmen nur zum Teil mit den in den früheren Abschnitten angenommenen überein. Durch die ungleiche Verteilung von Land und Meer entstehen Unterschiede des Luftdrucks auf einem Breitenkreise, welche die normalen Unterschiede auf einem Meridian übertreffen können.

1) Vgl. Hann, Lehrbuch, 3. Aufl. S. 477.

So bemerkt Teisserenc de Bort<sup>1)</sup>, daß auf einem Breitenkreise mittlere Druckunterschiede bis zu 34 mm vorkommen, während sie auf einem Meridian der nördlichen Halbkugel 20 mm nicht überschreiten.

Trotzdem war es vorteilhaft, die Einflüsse der ungleichen Oberflächenbedeckung der Erde als Störungen im schematischen Kreislaufe zu betrachten. Reduziert man nach Teisserenc de Bort<sup>2)</sup> die tatsächliche mittlere Luftdruckverteilung auf der nördlichen Halbkugel vom Meeresniveau auf ein höheres Niveau, etwa 4 km, so findet man in dieser Höhe schon eine gewisse Ausgeglichenheit der an der Oberfläche bestehenden zonalen Druckunterschiede. Allerdings wird erst eine genauere Kenntnis der Temperaturverteilung über den verschiedenen Meeren und Kontinenten ein Urteil darüber erlauben, wie rasch sich die Verhältnisse mit zunehmender Höhe vereinfachen. Wenn, wie es scheint, die Höhe der Stratosphäre über Meer und Land verschieden ist, dann wird die Oberflächengestaltung der Erde auch noch in großen Höhen ihren Einfluß haben.

Dieser besteht hauptsächlich im ungleichen Wärmeaustausch der Luft mit Land und mit Meer. Neben der Temperatur der Oberfläche wird auch der ungleiche Wasserdampfgehalt der Luft eine Rolle spielen (vgl. Abschnitt 28). Es ergeben sich so, abgesehen von der großen Konvektionsströmung der Atmosphäre noch viele kleinere zwischen Kontinent und Ozean (Monsune); unter höheren Breiten entspricht im Winter der Ozean der Wärmequelle, im Sommer der Kontinent, in niedrigen Breiten scheint das Land stets die Wärmequelle zu sein. Dementsprechend lagert sich über die allgemeine Druckverteilung des großen Kreislaufes in höheren Breiten im Winter der höhere Druck der Kontinente, der tiefere der Meere, im Sommer der umgekehrte; in niedrigen Breiten unterbrechen die Kontinente durch Erniedrigung des Druckes meist die beiden Hochdruckgürtel der Roßbreiten. Teisserenc de Bort hat (a. a. O.) schon vor langem bemerkt, daß die Isanomalien der Temperatur mit den Isobaren große Ähnlichkeit haben; relativ kalte Gebiete eines Breitenkreises zeigen hohen, relativ warme tiefen Druck an der Erdoberfläche. Wir erhalten so zonale Gradienten, welche sich mit den meridionalen kombinieren und hierdurch in der Erdoberfläche gekrümmte Isobaren liefern, u. a. in höheren Breiten eine Ausbuchtung der winterlichen Isobaren über den Meeren gegen den Äquator, über den Kontinenten gegen den Pol. Dabei tritt eine in der Erdoberfläche gelegene Zentrifugalkraft auf, worauf wir später zurückkommen. Es entstehen Gebilde hohen und tiefen Druckes, die sogenannten Aktionszentren der Atmosphäre<sup>3)</sup>, die vermöge der ungleichen Lage und Temperatur der Stratosphäre vermutlich noch in großen Höhen ihren Einfluß äußern.

1) Met. Zeitsch. 1894, Litt. S. 20, Ref. v. Sprung.

2) Hann-Band der Met. Zeitsch. 1906 S. 216.

3) Bigelow, Bull. Mount Weather Obs., Vol. III, S. 156.



Es ist eine Aufgabe der Zukunft, die lokale Massenverteilung über der Erdoberfläche zu untersuchen und daraus die wirklichen mittleren Bewegungen der Luft in der Höhe abzuleiten; derartige Kenntnisse wären für das Verständnis der atmosphärischen Störungen von großer Bedeutung. Denn es gibt, wie später gezeigt wird, keine stationäre Bewegung, wenn über einem Orte in verschiedenen Höhen verschiedenen gerichtete Gradienten herrschen. Solche sind aber infolge der ungleichen Temperaturverteilung über Land und Meer notwendig vorhanden und müssen also Anlaß zu fortwährenden Veränderungen der Zirkulationen geben; dies sind dann jene Störungen, welche das wechselnde Wetter höherer Breiten ausmachen.

Verschiedene Anzeichen sprechen dafür, daß die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre nebst den jahreszeitlichen auch noch unperiodischen Schwankungen ausgesetzt ist, so z. B. die von Jahr zu Jahr wechselnde Größe des Druckgradienten zwischen Mitteleuropa und dem Nordkap oder des gesamten von Westen gegen Osten zurückgelegten Windweges in Europa<sup>1)</sup>.

Diese Schwankungen geben ein Mittel, um die Aktionszentren, bzw. die Gebiete zonaler Druckunterschiede der Erde auf ihre Abhängigkeit von der allgemeinen Zirkulation zu untersuchen<sup>2)</sup>, u. z. auf statistischem Wege. Die Zunahme der Westostbewegung in höheren Breiten gleicht die Unterschiede aus, welche auf thermischem Wege zwischen Land und Meer entstehen, sie vergrößert aber die Unterschiede, die ihre Entstehung jener oben erwähnten Zentrifugalkraft bei gekrümmten Isobaren verdanken. Die Statistik scheint dafür zu sprechen, daß die Hochdruckgürtel der Roßbreiten wie auch das isländische Minimum durch Zunahme der Zirkulation verstärkt werden, also dynamisch verursacht sind im Gegensatz zu dem thermisch verursachten winterlichen Hochdruckgebiet in Asien.

Die Abweichungen der Luftströmungen von ihrer schematischen Bahn infolge der Land- und Meerverteilung müssen auf der ganzen Erde in einem gewissen Zusammenhang stehen, ähnlich wie die Strömungen des Wassers in den verschiedenen Teilen eines unregelmäßig geformten Gefäßes; die Kontinuität muß erhalten werden. Infolgedessen stehen Anomalien der Zirkulation an einem Orte mit solchen an anderen auch weit entfernten Orten der Erde in Verbindung. Solche Beziehungen sind in den letzten Jahren tatsächlich mehrfach nachgewiesen worden, doch sind die Ergebnisse noch zu spärlich, um eine Darstellung von ihnen zu geben. Die Kenntnis derartiger Beziehungen wird das Verständnis der allgemeinen Zirkulation wesentlich erhöhen.

1) F. M. Exner, Hann-Band d. Met. Zeitsch. 1906, S. 260.

2) F. M. Exner, Sitz.-Ber. Wiener Akad. Bd. 122, Abt. IIa, 1913, S. 1165.

### 63. Ältere Theorien über den Kreislauf der Atmosphäre.

Zur theoretischen Behandlung der allgemeinen Zirkulation stehen wesentlich fünf Gleichungen zur Verfügung, die drei Bewegungsgleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die Gleichung für die zugeführte Wärme (erster Hauptsatz). Aus ihnen lassen sich prinzipiell fünf Unbekannte ableiten, nämlich die drei Bewegungskomponenten, der Luftdruck und die Lufttemperatur, sämtlich als Funktionen von Ort und Zeit. Hierzu würde man die Kenntnis der tatsächlichen Wärmezufuhr oder Wärmeabgabe in jedem Punkte der Atmosphäre benötigen. Da diese vollständig fehlt, haben die älteren Theorien der atmosphärischen Zirkulation durchwegs die Gleichung für die Wärmezufuhr unbenutzt gelassen, die Lufttemperatur als gegeben angenommen und mit den ersten vier Gleichungen die ersten vier Unbekannten zu berechnen versucht.

In dieser Vernachlässigung liegt ein prinzipieller Irrtum, der alle diese Theorien mehr oder weniger wertlos macht. Denn die Festsetzung der Temperatur führt noch nicht zu einer eindeutigen Geschwindigkeitsverteilung. Wir haben oben (S. 175) darauf hingewiesen, daß die Frage, welche Druckverteilung in großen Höhen zwischen Äquator und Pol herrscht, von der Größe des Luftnachsches und daher mittelbar wieder von der Wärmezufuhr am Äquator abhängt. Ist die Temperaturverteilung gegeben, so muß neben ihr noch die Druckverteilung am Boden oder in einer beliebigen Höhe bekannt sein, damit der Druck überall bestimmbar ist (vgl. Fig. 40, S. 178).

Man muß daher neben der Temperatur auch noch den Druck in einem Niveau als gegeben ansehen, um das Problem zu lösen. Statt den Druck in einer großen Höhe anzunehmen und dadurch den Schein einer Deduktion zu erwecken, der nur irreführt, ist es dann am einfachsten, gleich von der Druckverteilung am Boden, wie sie beobachtet wird, auszugehen und aus ihr und der Temperaturverteilung die zonale Bewegung in allen Höhen zu berechnen.

Die meisten Theorien hatten im Gegensatz hiezu das Bestreben, die tatsächliche Verteilung des Bodendrucks theoretisch abzuleiten. Die Berechnung der Geschwindigkeiten, welche mit den Gradienten verbunden sind, erfolgte nach den Bewegungsgleichungen unter Rücksicht auf die Reibung an der Erdoberfläche. Jene Gleichungen hat Ferrel<sup>1)</sup> in die Meteorologie eingeführt und damit den Grund zu einer rationellen Beurteilung der Winde und der ihnen zugrunde liegenden Kräfte gelegt. Dieses große Verdienst bleibt bestehen, wenn auch den einzelnen Resultaten seiner Arbeiten jetzt keine sehr große Bedeutung mehr zukommt, nachdem seine Annahmen über die Verteilung der Temperatur in der Höhe von den Beobachtungen überholt sind und manche Vor-

1) Zusammenfassend in *Recent Advances in Meteorology*, Ann. Rep. Chief Sign. Officer, 1885, part 2; Washington, 1885.

stellungen, namentlich die von der ungestörten Bewegung einer Luftmasse vom Äquator bis in die Gegend des Poles, sich als unhaltbar erwiesen haben<sup>1)</sup>.

Die Erscheinung der Hochdruckgürtel in den Roßbreiten ist mehrfach der Gegenstand theoretischer Untersuchungen gewesen. Ferrel hat bei dieser Gelegenheit zum ersten Male das für die atmosphärische Zirkulation so wichtige Rotationsmoment und den Satz von dessen Konstanz aufgestellt. Seine Versuche, mit Hilfe desselben die Lage der Hochdruckgürtel zu berechnen, werden hierdurch wertvoller als durch das eigentliche Resultat seiner Rechnung.

Der Gedankengang der letzteren war kurz folgender: Ursprünglich sei die Atmosphäre relativ zur Erde in Ruhe; jedes Teilchen Luft hat dann ein gewisses leicht feststellbares Rotationsmoment. Nun gerate die Atmosphäre in Bewegung; durch Mischung sollen allmählich alle Massen das gleiche Moment erhalten. Dieses muß dann wegen der Konstanz der Rotationsmomente der Mittelwert  $\Omega_m$  aller früheren sein. Man findet leicht:  $\Omega_m = -\frac{R^2\omega}{3} = R^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} - \omega)$ . Daraus läßt sich die zonale Geschwindigkeit als Funktion der Breite berechnen:  $v = R\omega \left( \frac{2}{3 \cos \varphi} - \cos \varphi \right)$ . Sie verschwindet in den Hochdruckgürteln; für  $v = 0$  ergibt sich deren Breite demnach zu  $\varphi = 35^\circ 16'$  (aus  $\cos^2 \varphi = \frac{2}{3}$ ).

Die Rechnung ist nicht einwandfrei, da kein Grund vorhanden ist, daß die Atmosphäre jemals in Ruhe war. Auch ist tatsächlich das Rotationsmoment in unserer Atmosphäre nicht überall das gleiche, es nimmt im Gegenteil, wie wir sahen, gegen den Äquator sehr stark zu. Man erhielt sonst für den Pol eine unendliche Geschwindigkeit.

Später hat Ferrel die Lage der Hochdruckgürtel aus dem Prinzip<sup>2)</sup> erklärt, daß die Erde durch die Reibung der Winde an ihrer Oberfläche keine Veränderung ihrer Rotationsgeschwindigkeit erleiden kann; denn ohne Kraft, die von außen wirkt, sei eine solche Veränderung nicht möglich. Freilich ist die Erde von der Außenwelt nicht abgeschlossen, vielmehr ist die Sonnenstrahlung gerade die Ursache der Bewegungen; also ist Ferrels Voraussetzung nicht ganz streng. Der weitere Gedankengang ist der folgende: Das Reibungsmoment der Ostwinde in den Tropen muß jenem der Westwinde in den höheren Breiten gleich sein. Da der Hebelarm der Reibungskräfte, mit welchem die Westwinde angreifen, bedeutend kleiner ist als der der Ostwinde (die ersteren liegen der Erdachse näher), so sollte der größere Teil der Erdoberfläche von Westwinden, der kleinere von Ostwinden bedeckt sein. Die halbe Erdoberfläche liegt aber bekanntlich zwischen  $30^\circ$  nördlicher und südlicher Breite einge-

1) Ferrels Berechnung der Windgeschwindigkeit ist in Sprungs Lehrbuch der Meteorologie, S. 205 eingehend dargestellt.

2) A popular treatise on the winds, London 1889.

schlossen. Wenn die Ostwinde schwächer sind, als die Westwinde, so kann demnach die Kalmengürtel nahe bei  $30^\circ$  Breite liegen. Diese Folgerung ist gewiß richtig; man müßte aber die tatsächlichen Windstärken ganz genau kennen, um aus ihnen die wirkliche Lage der Kalmengürtel berechnen zu können.

Auch Siemens machte einen Versuch<sup>1)</sup> zur Berechnung der Lage der Hochdruckgürtel.<sup>2)</sup> Nach ihm sollte die ursprünglich relativ zur Erde ruhende Luft ihre lebendige Kraft konstant erhalten, wenn sie durchmischt wird. Außerdem sollte sie nach der Mischung überall die gleiche absolute Rotationsgeschwindigkeit im Raume haben. Aus diesen Annahmen ergab sich für die Kalmengürtel dieselbe Breite von  $35^\circ 16'$ , wie bei Ferrel. Die Deduktion von Siemens ist nicht berechtigt, weil für die Gleichheit der absoluten Rotationsgeschwindigkeit kein Grund vorhanden ist; sie widerspricht geradezu dem Satz von der Konstanz des Rotationsmomentes. Die Rechnung ist nur mehr von historischem Interesse.

Größere Bedeutung kommt den Rechnungen von A. Oberbeck<sup>3)</sup> zu, welcher zum ersten Male eine strikte Integration der Bewegungsgleichungen versuchte. Er war dabei freilich gezwungen, eine Annahme über die Temperaturverteilung in der Atmosphäre zu machen (vgl. S. 196); sie sollte dem Wärmeleitungsgleichgewicht entsprechen. Die Luft wurde von Oberbeck mit der Kontinuitätsgleichung wie eine inkompressible Flüssigkeit behandelt; dagegen wurden die Ausdrücke für die innere Reibung in die Gleichungen eingeführt. Hierdurch kommen meridionale Bewegungen zustande, welche sonst bei Weglassung der Wärmezufuhr ganz fehlen könnten.

Oberbeck gelangte zu drei Integralen der Bewegungsgleichungen, welche die drei Komponenten der Bewegung als Funktionen der Polhöhe darstellen, während unbestimmte Funktionen die Abhängigkeit von der Seehöhe enthalten. Sie liefern Stromlinien, die der Form nach zum Teil den tatsächlichen Bewegungen entsprechen, die aber auch ohne mathematische Theorie aus der Konvektionsströmung folgen (vgl. Abschnitt 59), namentlich die Passate und Antipassate, aber auch die NW-Winde in den unteren Schichten der höheren Breiten. Dabei sollte der Kreislauf vom Äquator bis zum Pol reichen, was ungeheure Geschwindigkeiten und Gradienten liefern würde. In der zweiten der oben genannten Arbeiten hat Oberbeck die tatsächliche Verteilung des Bodendrucks längs eines Meridians der südlichen Halbkugel als gegeben angenommen und hieraus

1) Sitz. Ber. Berl. Akad. 1886, S. 261.

2) Vgl. die klare Übersicht und Kritik von A. Sprung in Met. Zeitsch. 1890, S. 161; daselbst findet sich auch eine Berechnung der Veränderungen der lebendigen Kraft einer Luftmasse infolge der Erhaltung ihres Rotationsmomentes (S. 172, Anhang).

3) Sitz. Ber. Berl. Akad. 1888, S. 383 und Met. Zeitsch. 1888, S. 305; auch Naturw. Rundschau. 9. Juni 1888; ferner Sitz. Ber. Berl. Akad. 1888, S. 1129.

die Größe der zonalen Bewegung abgeleitet, indem er noch die Winkelgeschwindigkeit derselben in allen Höhen gleichsetzte.

Den rein analytischen Weg zur Darstellung des allgemeinen Kreislaufes der Atmosphäre hat nach Oberbeck noch Marchi<sup>1)</sup> beschritten, aber kaum mit besserem Erfolge. Marchi findet über dem Äquator Windstille, während bei Oberbeck der Ostwind mit den Beobachtungen übereinstimmte. Die Kalmzone mußte auch Marchi bei etwa 35° Breite annehmen, um eine gewisse Ähnlichkeit der theoretischen mit den tatsächlichen Winden zu erhalten, usw.

Wir verweisen bezüglich aller derartigen theoretischen Arbeiten auf die Originaluntersuchungen und auf das Lehrbuch von Sprung. Heute scheint keine Aussicht zu sein, auf dem Wege der Analysis allein im Verständnis der Frage wesentlich weiterzukommen. Wie oben bemerkt, bildet die Kenntnis des Wärmeumsatzes hierfür eine unumgängliche Vorbedingung, die heute noch fehlt.

---

1) Atti d. R. Accad. d. Lincei, Vol. XIII, S. 460 und 619, 1904.

## Zehntes Kapitel.

### Zyklonale Bewegungen über kleineren Gebieten der Erdoberfläche.

**64. Rotationsbewegung bei symmetrischer Temperaturverteilung.** Wir betrachten im folgenden Luftmassen, welche um eine vertikale Achse rotieren.<sup>1)</sup> Ihre Ausdehnung soll dabei so gering sein, daß wir für ihre Lage auf der Erde die gleiche mittlere Breite annehmen können. Auch wollen wir voraussetzen, daß die Temperatur von jener Achse aus nach allen Azimuten symmetrisch verteilt sei.

Ob es derartige Rotationsbewegungen wirklich gibt, ist sehr fraglich. Nicht nur ist es unwahrscheinlich, daß eine derartige Temperatursymmetrie zufällig einmal vorkommt, es ist auch fraglich, ob die wirklich vorkommenden Rotationen nicht geradezu an Temperatursymmetrien gebunden sind. Wie wir oben (Abschnitt 49) sahen, sind die tropischen Zyklonen vielleicht solche Rotationen mit symmetrischer Temperaturverteilung um die Achse; doch sprechen einige Beobachtungen auch für das Gegenteil. Es kann sein, daß die Asymmetrie bei ihnen ebenso vorkommt, wie bei den Depressionen und Antizyklonen der höheren Breiten, bei denen sie nach den Ausführungen des 7. Kapitels eine notwendige Bedingung zu sein scheint.

Wenn wir demnach symmetrische Temperaturverteilung annehmen, so können die Ergebnisse unserer Betrachtung besten Falles auf tropische Zyklonen direkte Anwendung finden; sie tragen jedoch jedenfalls dazu bei, die Bedeutung der Rotationsbewegungen auch bei den anderen atmosphärischen Störungen besser zu überblicken.

In der Meteorologie wird für rotierende Luftmassen meist der Ausdruck „Wirbel“ angewendet. Die theoretische Hydrodynamik versteht hierunter eine ganz bestimmte Art von Bewegung, bei welcher kein Geschwindigkeitspotential existiert; der Begriff ist also hier ein viel engerer. Es wird sich zeigen, daß die atmosphärischen Rotationsbewegungen wahrscheinlich zum größten Teil wirbellose sind, so daß es besser wäre, von „Zyklonen“ zu sprechen als von „Wirbelstürmen“.

---

1) Wir verstehen unter Rotation zunächst nur eine Bewegung in Kreisen um ein Zentrum.

Zur Darstellung der Rotationsbewegung um eine vertikale Achse benützen wir die beiden auf S. 102 gegebenen Gleichungen, welche lauteten:

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 + 2\omega \sin \varphi r\dot{\vartheta} + k\dot{r} &= -\frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - 2\omega \sin \varphi \dot{r} + kr\dot{\vartheta} &= -\frac{1}{er} \frac{\partial p}{\partial \vartheta}.\end{aligned}$$

Sie gelten wegen des Reibungsausdruckes ( $k$ ) nur für die Nähe der Erdoberfläche.

Wir beschränken uns hier auf Bewegungen bei kreisförmigen Isobaren ( $\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0$ ) und vernachlässigen zunächst auch die Reibung. Dann folgt aus der zweiten Bewegungsgleichung:

$$r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - 2\omega \sin \varphi \dot{r} = 0.$$

Betrachten wir stark rotierende Massen von nicht zu großer horizontaler Ausdehnung in niedrigen Breiten, wie sie etwa in den tropischen Zyklonen vorkommen, so können wir in erster Annäherung  $\omega \sin \varphi$  gegen  $\dot{\vartheta}$  vernachlässigen. Wir erhalten dann  $r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} = 0$  oder  $r^2\dot{\vartheta} = a$ .

Die Gleichung drückt die Konstanz der Flächengeschwindigkeit aus. Die lineare Rotationsgeschwindigkeit  $r\dot{\vartheta} = \frac{a}{r}$  nimmt gegen das Zentrum hin zu. Da sie dort unendlich groß würde, kann man die Gleichung nur in endlicher Distanz vom Zentrum verwenden. Setzt man unter diesen Umständen außerdem die radiale Geschwindigkeit  $\dot{r} = 0$ , so hat man eine mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vartheta} = \frac{a}{r^2}$  um die vertikale Achse rotierende Luftmasse.

Diese Gleichung stellt die einzige Verteilung der Rotationsgeschwindigkeit dar, die wirbelfrei im Sinne der Hydrodynamik ist, worauf R. Emden<sup>2)</sup> hinwies. Die Bedingung für wirbelfreie Bewegung lautet

ja bekanntlich:  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ . Wenn man nun  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$  setzt, so wird zunächst  $u = \frac{dx}{dt} = -y\dot{\vartheta}$ ,  $v = \frac{dy}{dt} = x\dot{\vartheta}$ , somit  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\dot{\vartheta} - y\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = \dot{\vartheta} + x\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial x}$ . Für die Bedingung der Wirbelfreiheit erhält man also

$$2\dot{\vartheta} + x\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial x} + y\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial y} = 0 \text{ oder } 2\dot{\vartheta} + r\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial r} = 0.$$

Durch Integration ergibt sich hieraus  $r^2\dot{\vartheta} = a$ ; das ist aber die oben angenommene Verteilung der Geschwindigkeit.

1) Hier ist  $r$  der Abstand von der Rotationsachse,  $\vartheta$  der Winkel des Radiusvektors mit der  $x$ -Achse; dieser wächst mit dem Uhrzeiger.

2) Gaskugeln, Leipzig 1907, S. 372.

Emden ist der Meinung, daß die wirbelfreie Bewegung für Zyklonen die wahrscheinlichste ist. Denn nach Helmholtzs (allerdings nur für inkompressible Flüssigkeiten abgeleiteten) Sätzen behalten Flüssigkeitsmassen eine Wirbelbewegung, die sie einmal besitzen, dauernd bei; ein wandernder hydrodynamischer Wirbel müßte sich daher „in kurzer Zeit ausgerechnet haben“. Die Luftmassen einer wirklichen Zyklone scheinen hingegen immer wieder durch neue ersetzt zu werden.

Emden hat gezeigt, daß die Annahme  $r^2 \dot{\vartheta} = a$  zu einer Geschwindigkeits- und Druckverteilung führt, welche mit Beobachtungen an Zyklonen in guter Übereinstimmung ist (vgl. S. 203). Nur der innerste Teil der Zyklone kann dieser Gleichung nicht entsprechen.

Die genannte Geschwindigkeitsverteilung dürfte zur Bildung einer Zyklone in Beziehung stehen. Das Zuströmen der Luft gegen ein Gebiet, in welchem aufsteigende Bewegung eingeleitet ist (vgl. Abschnitt 49, S. 145), geschieht ja unter Erhaltung der Flächengeschwindigkeit, und diese Konstanz wird eben durch die obige Formel ausgedrückt. Dabei ist es von Interesse, daß Zyklonen stets unter mindestens  $10^\circ$  Breite entstehen; in niedrigeren Breiten würde das Zuströmen der Luft gegen ein Zentrum noch ohne Bildung von Rotation erfolgen, da die ablenkende Kraft der Erdrotation dort keine Rolle spielt. Hier mag an das Experiment von Helmholtz<sup>1)</sup> erinnert sein, bei welchem Wasser in einem zylindrischen Gefäß rotiert; sobald in dessen Mitte ein Abfluß geöffnet wird, strömt das Wasser der Mitte zu und erlangt bei Erhaltung des Rotationsmomentes stets größere Rotationsgeschwindigkeit; zugleich bildet sich eine trichterförmige Vertiefung, der Druck im Innern wird erniedrigt, das Ausfließen aber durch die Zentrifugalkraft stark verzögert. Schließlich entsteht ein Luftschlauch, analog einer Wasserhose, der von der Oberfläche in die Ausflußöffnung hinabreicht.

Die Annahme  $r^2 \dot{\vartheta} = a$  haben schon Guldberg und Mohn für den äußeren Teil der Zyklone gemacht. Bei allmählicher Entfernung vom Zentrum wird die lineare Rotationsgeschwindigkeit  $v = r \dot{\vartheta} = \frac{a}{r}$  immer kleiner und kann allmählich in das ungestörte Feld übergehen. Auch Oberbeck<sup>2)</sup> hat diese Annahme übernommen, sie scheint derzeit die beste zu sein.

Der radiale Druckgradient ergibt sich, wenn wieder das Glied mit  $\omega \sin \varphi$  gegen jenes mit  $\dot{\vartheta}$  vernachlässigt wird, aus der ersten Bewegungsgleichung von S. 201 zu:  $\frac{a^2}{r^3} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ .

Der Gradient nimmt also einwärts (gegen das Zentrum) sehr rasch zu, der Druck ist im Innern tief, wir haben eine Zyklone.

1) Vorträge und Reden, 5. Aufl., Bd. II, S. 160.

2) Ann. d. Physik, Bd. 17 (1882) S. 128 und Sprungs Lehrbuch, 2. Kapitel.



Man kann die Druckerniedrigung im Innern der rotierenden Masse als Effekt der Geschwindigkeit auffassen, wenn man sich vorstellt, daß dieselbe so, wie bei dem Helmholtzschen Beispiel durch die Zentrifugalkraft, durch das Aussaugen zustande kommt. Es liegt am nächsten, dieses Aussaugen als einen adiabatischen Prozeß aufzufassen. Beim Zuströmen der Luft gegen ein zentrales Gebiet entsteht die große Rotationsgeschwindigkeit, durch sie wird Druck und Dichte erniedrigt und zugleich erfolgt eine Abkühlung. Zur Berechnung der Druckerniedrigung aus der Geschwindigkeit der Luftmasse steht uns die Gleichung der lebendigen Kraft von Abschnitt 45, S. 127 zur Verfügung. Dort war:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{2} + gr \right) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0.$$

Wir wollen annehmen, daß die Annäherung an das Zentrum in einem Niveau erfolge, so daß sich  $r$  nicht ändert; auch sei die Bewegung stationär, so daß an jedem Punkte  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Dann ist  $\frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$ .  $c$  ist die totale Geschwindigkeit. Dehnt sich die Luft adiabatisch aus,

so ist (vgl. S. 12):  $\rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{1+\kappa}}$ , wo  $\kappa = \frac{AR}{c_p}$ .

Die Integration ergibt:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{1+\kappa}{\kappa} \frac{p_0^{\frac{1}{1+\kappa}}}{\rho_0} p^{\frac{\kappa}{1+\kappa}} = \frac{c^2}{2} + \frac{1+\kappa}{\kappa} RT = \text{konst.}$$

Diese Gleichung hat Emden<sup>1)</sup> für trockene Luft ausgewertet, indem er als Druck der ruhenden Luft 760 mm, als Temperatur 0° C annahm. Wir teilen hier einige Zahlen mit, die zeigen, welche Geschwindigkeiten und welche Temperaturen bei bestimmten adiabatischen Druckveränderungen in der Zyklone entstehen.

$p$ in mm	$c$ in m/sec	$t$ in ° C
760	0	0
758	20,3	— 0,205
755	32,1	— 0,51
750	45,5	— 1,03
740	64,5	— 2,07
730	79,2	— 3,13
710	103	— 5,26.

Emden hat die Manila-Zyklone<sup>2)</sup> vom 20. Oktober 1882 näher untersucht und gefunden, daß die Beobachtungen mit diesen Windgeschwindigkeiten und Drucken gut übereinstimmen. Die Größe  $a = r^2 \vartheta$ , die „Zyklonenkonstante“, betrug dort etwa 1600, wo  $r\vartheta$  in m/sec,  $r$  in

km gemessen war. Man erhält in 20 km vom Zentrum bei der beobachteten Druckerniedrigung von 30 mm eine Windstärke von 80 m/sec. Die entsprechenden Temperaturbeobachtungen fehlen zum Vergleiche.

1) Gaskugeln, S. 367.

2) Vgl. auch die ausführliche Diskussion Bigelows über eine Wasserhose in Cottage City; Monthly Weath. Rev. 1907, S. 464.

Der zentrale Kern der Zyklone hat häufig Windstille, wie auch in diesem Fall. Emden hat sich nicht weiter mit demselben beschäftigt, während sowohl Guldberg und Mohn wie Oberbeck den Versuch machten, für ihn eine Formel der Geschwindigkeitsverteilung aufzustellen. Letzterer war bestrebt, einen Ausdruck für stetigen Übergang der Geschwindigkeit vom äußeren zum inneren Gebiet zu finden (vgl. S. 205).

W. Wien hat<sup>1)</sup> die reibungslose Rotationsbewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit studiert und hierbei den inneren Teil nahe der Achse als rotationslos angenommen. Dies würde auch am besten der Kalmzone im Innern einer Zyklone entsprechen. Für den äußeren Teil fand derselbe unter den einfachsten Bedingungen die gleiche Lösung wie Emden und Oberbeck.

So wie bei dem Helmholtzschen Wasserwirbel wird auch bei einer derartigen Zyklone die Rotationsbewegung durch Reibung an der Erdoberfläche verzögert. Hierdurch bleibt auch bei ausgebildeter Zyklone eine radiale Bewegung bestehen, zum mindesten am Boden; die dem Zentrum zugeführte Luft muß nach aufwärts entweichen und sich dann in der Höhe wieder auswärts ausbreiten.

Diese einströmende Bewegung am Boden, die ausströmende in der Höhe hat zu manchen Diskussionen Anlaß gegeben. Wenn die Zyklonen relativ kalt sind, dann müssen die an der Erdoberfläche einwärts gerichteten Gradienten in der Höhe umso mehr diese Richtung haben. Nur über warmen Zyklonen kann der Gradient in der Höhe allenfalls nach auswärts gerichtet sein. Über kalten Zyklonen müßte also das Ausfließen in der Höhe gegen den Gradienten erfolgen.<sup>2)</sup> Damit dies möglich werde, wären dort Geschwindigkeiten von solcher Größe notwendig, daß die Zentrifugalkräfte den Gradienten überwinden können. Dies könnte der Fall sein, da die oberen Massen, die durch Reibung nicht gebremst werden, stärker rotieren als die an der Erdoberfläche<sup>3)</sup>. Wenn in der Höhe der Gradient und die Zentrifugalkraft einmal miteinander im Gleichgewicht sind, und dann von unten Masse emporsteigt,

1) Met. Zeitsch. 1897, S. 416.

2) v. Bezold, Met. Zeitsch. 1891, S. 241.

3) Wien behandelt in der oben genannten Abhandlung die Rotation von inkompressiblen Flüssigkeiten auf der ruhenden Erde. Nimmt man an, daß die Rotationsgeschwindigkeit nach aufwärts zunimmt, wie dies ja infolge der Reibung zutrifft, so ergibt sich am Boden Einströmung, in der Mitte Aufwärtsbewegung und an der oberen Grenze dieser Zyklone Ausströmung. An beiden Grenzen ist die Rotation null, in der Mitte aber am stärksten. Die Auswärtsbewegung in der Höhe erfolgt hier mit dem Gradienten, nicht gegen denselben. Dabei ist diese Bewegung ein echter Wirbel mit konstanter Rotationsgeschwindigkeit in jedem Niveau. Daher ist diese Wiensche Lösung nicht verwendbar, auch hat die Annahme der Inkompressibilität zu große Abweichungen von den Verhältnissen in der Atmosphäre zur Folge; zur Integration der Gleichungen war aber diese Voraussetzung nötig gewesen.

welche den Druck in der Mitte nur wenig erhöht, so muß dies zu einer Auswärtsbewegung gegen den Gradienten führen.

Auch die Massen, welche die obere Grenze einer Zyklone bilden und langsamer rotieren als diese, müssen in den luftverdünnten Innenraum derselben hineingezogen werden. Sie bewegen sich also im Gegensatz zu den unteren Begrenzungsmassen nach abwärts, ganz so wie im Helmholtzschen Wasserwirbel, wo die Luft durch die Wasserbewegung hinabgerissen wird; dabei erzeugen sie vermutlich das sogenannte „Auge des Sturmes“, das Aufklaren im Zentrum, das auf eine Abwärtsbewegung im Kondensationsniveau zurückgeführt werden muß.

Eine direkte Beobachtung dieser Abwärtsbewegung liegt allerdings noch nicht vor, während die Aufwärtsbewegung der Luft im unteren Teil der Zyklone oft bemerkt wurde. Ebenso wie die von unten aufsteigende muß auch die von oben herabsinkende Luft im mittleren Teil der Zyklone seitlich herausgeworfen werden.

Bei Vernachlässigung der ablenkenden Kraft der Erdrotation könnte man erwarten, daß tropische Zyklonen mit zyklonaler und antizyklonaler Rotation vorkommen. Doch ist dies nicht der Fall, die Rotation erfolgt stets im Sinne der ablenkenden Kraft. Dies ist begreiflich, da die Weglassung dieser Kraft neben der Fliehkraft nur erlaubt ist, wenn schon starke Rotation sich gebildet hat. Der Beginn der Bewegung erfolgt unter dem Einfluß der Ablenkungskraft, die daher auch den Rotationsinn beherrscht.

**65. Lösungen von Oberbeck und Ferrel.** Oberbeck<sup>1)</sup> unterscheidet, wie oben bemerkt, den äußeren Teil der Zyklone und den inneren; im äußeren soll die Bewegung wirbelfrei sein, im inneren soll ein Wirbel bestehen. Echte Wirbel nimmt u. a. auch Wegener<sup>2)</sup> bei den Tromben (Wasserhosen) an. Sie könnten durch innere Reibung an Diskontinuitätsflächen der Bewegung zu Stande kommen. Die Vehemenz und Seltenheit dieser Art von Naturerscheinungen hat es bisher verhindert, durch direkte Messung der Windgeschwindigkeit in verschiedenen Distanzen von der Achse die Frage nach dem Vorhandensein oder Fehlen von Wirbelbewegung zu beantworten.

Oberbeck hat bei seiner analytischen Behandlung des Zyklonenproblems die Voraussetzung gemacht, daß der äußere Teil nur horizontale Bewegung habe; erst im inneren sollte auch vertikale Bewegung auftreten. Für die horizontale Bewegung an der Erdoberfläche gab er die folgende Lösung:

a) äußerer Teil:

$$r \dot{\varphi} = - \frac{l}{k} \cdot \frac{b}{2} \frac{r_1^2}{r},$$

$$\dot{r} = - \frac{b}{2} \cdot \frac{r_1^2}{r}.$$

1) Vgl. bei Sprung, Lehrbuch der Meteorologie.

2) Met. Zeitsch. 1911, S. 201.

b) innerer Teil:

$$r\dot{\vartheta} = -\frac{l}{k-b} \cdot \frac{b}{2} r f(r),$$

$$\dot{r} = -\frac{rb}{2}.$$

Hierbei ist

$$f(r) = 1 - \frac{b}{k} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{k-b}{b}.$$

Wie früher ist  $l = 2\omega \sin \varphi$ ;  $r_1$  ist der Grenzradius des inneren Gebietes,  $b$  eine Konstante.<sup>1)</sup> Für  $r = r_1$ , an der Grenze beider Gebiete, werden die Lösungen identisch. Man überzeugt sich leicht, daß die Ansätze a und b der zweiten Bewegungsgleichung von S. 201 für kreisförmige Isobaren entsprechen. In die erste dortige Gleichung eingesetzt, geben sie auch die radialen Druckgradienten.

Aus der Kontinuitätsgleichung von S. 87 erhält man bei stationärer Bewegung ( $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ ) Anhaltspunkte über die vertikale Bewegung<sup>2)</sup>; für die beiden Teile der Zyklone ergibt sich nämlich:

$$a) \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = \frac{b}{2} \frac{r_1^2}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial r}, \quad b) \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = \varrho b + \frac{rb}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial r}.$$

Die Größe  $\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}$  ist bei Zyklonen also stets positiv, es muß  $\varrho w$  mit der Höhe zunehmen, wenigstens nahe dem Boden, wo die Oberbeckschen Ansätze gelten. Da  $w$  hier positiv ist, so erhalten wir eine Zunahme der Aufwärtsbewegung mit der Höhe von gewisser Größe.

Der Ablenkungswinkel der Luftströmung vom Gradienten ist durch  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\dot{\vartheta}}{\dot{r}}$  bestimmt. Dies gibt im äußeren Teil der Zyklone  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{k}$ , die Luft beschreibt, indem sie sich dem Zentrum nähert, eine logarithmische Spirale; im inneren Gebiet ist  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{k-b} \cdot f(r)^3$ .

Eine ganz andere Lösung für die Zyklonenbewegung hat Ferrel<sup>4)</sup> gegeben. Wir halten uns bei ihr nicht lange auf, da sie nur mehr von historischem Interesse ist. Ferrel geht von der Bewegungsgleichung für  $\dot{\vartheta}$  aus und findet bei kreisförmigen Isobaren die Gleichung von S. 201:

$$r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - 2\omega \sin \varphi \dot{r} = 0.$$

1) Die Konstanten sind nicht sehr klar gewählt; in der Größe  $b$  ist  $k$  als Faktor enthalten, so daß man besser  $b = ck$  setzen würde. Dies folgt aus einem Übergang auf  $k = 0$ , wo  $r\dot{\vartheta}$  endlich bleiben,  $\dot{r}$  aber null werden muß.

2) Oberbeck benützte die korrekte Kontinuitätsgleichung nicht; vgl. Sprung, Lehrbuch, S. 146.

3) Guldberg und Mohn hatten eine der Oberbeckschen ähnliche Lösung gegeben; bei ihnen war aber  $f(r) = 1$ , so daß kein stetiger Übergang an der Grenze des inneren und äußeren Teiles stattfand (vgl. Sprung, Lehrbuch, S. 139).

4) Rec. Advances in Meteorology, Washington, 1885.

Daraus folgt durch Integration  $r^2(\dot{\vartheta} - \omega \sin \varphi) = a = \text{konst.}$ ; oben hatten wir  $\omega \sin \varphi$  gegen  $\dot{\vartheta}$  weggelassen.

Ähnlich nun, wie Ferrel bei dem allgemeinen Kreislauf der Atmosphäre die Erhaltung des Rotationsmomentes in die erste Linie gestellt und aus ihr die Lage der Hochdruckgürtel zu berechnen versucht hat, faßt er auch bei der Zyklone obige Gleichung als Ausdruck der Erhaltung eines Rotationsmomentes auf und schreibt nun allen Luftteilchen, welche eine Zyklone bilden, das gleiche mittlere Moment zu. Hieraus ergibt sich ein innerer Teil, in dem die Rotationsbewegung zyklonal, und ein äußerer Teil, in dem sie antizyklonal ist. An der Grenze ist die Rotation null. Demgemäß soll jede Zyklone mit Tiefdruck im Zentrum von einem Kalmengürtel und weiter von einer Antizyklone umlagert sein. Im inneren Gebiet besteht wieder spiralförmige Einströmung wie bei Oberbeck. Das Schema ist offenbar nach Analogie der allgemeinen Zirkulation konstruiert. Obwohl es den Tatsachen in keiner Weise entspricht, ist es doch wieder Ferrels Verdienst, die einzelnen Kräfte in ihrem Verhältnis zueinander als einer der ersten in klarer Weise dargestellt zu haben.

Einer ausführlichen analytischen Konstruktion der Zyklonenbewegung im Sinne von Oberbeck kann keine große Bedeutung beigelegt werden, solange man bezüglich der wichtigsten Ursachen für die Entstehung, Erhaltung und Fortpflanzung der Zyklonen nur auf Vermutungen angewiesen ist.

**66. Windbahnen und Druckverteilung bei bewegten Zyklonen.** Die kreisförmigen Isobaren, welche zur Berechnung der schematischen Zyklone angenommen wurden, kommen in Wirklichkeit kaum vor. Die synoptischen Beobachtungen ergeben zumeist ovale Formen mit Gradienten ungleicher Stärke in verschiedenen Richtungen. Erfahrungsgemäß sind auf der rechten Seite der Zyklonenbahn (nördl. Halbkugel) die Isobaren meist gedrängter als im übrigen Gebiet der Zyklone.

Daß die Windbahnen logarithmische Spiralen seien, wie oben die Rechnung lieferte, wird von den Beobachtungen auch nicht bestätigt. Solange eine Luftmasse an der Erdoberfläche bleibt, ist es möglich, ihre Bewegung zu verfolgen und hierdurch diese Windbahnen tatsächlich festzustellen. Mit deren Untersuchung haben sich namentlich Shaw und Lempfert<sup>1)</sup> beschäftigt. Sie gelangten zum Ergebnis, daß nur vereinzelt spiralförmige Windbahnen — Shaw nennt die Bahnen „Trajektorien“ (vgl. S. 68) — vorkommen; neben ihnen sind namentlich

1) Quart. Journ. Roy. Met. Soc. Vol. 29, 1903, S. 233, oder Monthly Weath. Rev. 1903, S. 318; besonders aber: Life history of surface air currents, London, 1906, referiert in Met. Zeitsch. 1907, S. 520; vgl. auch W. Köppen in Met. Zeitsch. 1911, S. 159.

schlingenbildende Trajektorien auffallend, die einmal vor und einmal hinter dem Zentrum den Weg der wandernden Zyklone kreuzen. Ferner kommen häufig sehr lange Bahnen vor, bei welchen die Luft die vorüberziehende Zyklone weite Strecken hindurch begleitet. Daß die Bahnen, die aus dem Süden (auf der nördl. Halbkugel) stammen, meist früher endigen als die übrigen, ist durch die Asymmetrie der Temperatur bedingt, welche die warmen Massen über die kalten aufsteigen läßt, wodurch ihre Verfolgung am Boden abgebrochen wird.

Ein guter Teil der merkwürdigen Formen dieser Windbahnen wird aber auch ohne die asymmetrische Temperaturverteilung bloß durch die Bewegung der Zyklone als Ganzes erklärlich. Mit der theoretischen Untersuchung dieses Einflusses haben sich u. a. Meinardus<sup>1)</sup> und Kiewel<sup>2)</sup> befaßt. Die Ergebnisse hängen allerdings sehr von den Annahmen ab.

Wir wollen hier eine schematische Zyklone betrachten, welche bei wirbelfreier Bewegung dem äußeren Teil der Oberbeckschen Zyklone entspricht. Wenn hier die Trajektorien nur bis zur Grenze des äußeren und inneren Gebietes verfolgt werden können, so schadet das nichts, da die Luft sich in der Nähe des Zentrums durch die Bewegung nach aufwärts ohnedies der Beobachtung entziehen würde.

Die Zyklone soll sich mit einer konstanten Geschwindigkeit in einer Richtung verschieben. Die Trajektorie entsteht dann durch die Zusammensetzung dieser translatorischen mit der zyklonalen Bewegung. Es ist einleuchtend, daß hierdurch eine Asymmetrie sowohl in die Bewegung als auch in die Druckverteilung kommen muß.

Denn die translatorische Bewegung ist mit einem einseitigen, linearen Druckgefälle verbunden. Dieses kommt zum zyklonalen Gradienten hinzu, die Isobaren werden keine Kreise mehr sein, sondern auf einer Seite der Bahn zusammenrücken (dort wo die beiden Gradienten gleiche Richtung haben), auf der anderen auseinandertreten.<sup>3)</sup> Auch ist der Winkel zwischen Gradient und Wind nun nicht mehr überall der gleiche.

Einen Überblick über diese Verhältnisse soll das folgende geben. Nach der Anmerkung auf S. 206 wird für die rein zyklonale Bewegung gesetzt  $r\dot{\vartheta} = -\frac{lc}{r}$ ,  $\dot{r} = -\frac{kc}{r}$ . Hier ist  $c$  eine konstante Größe. Kommt zu dieser Bewegung eine konstante Geschwindigkeit  $a$  längs der positiven  $x$ -Achse hinzu, so wird die kombinierte Bewegung ausgedrückt durch:

$$r\dot{\vartheta} = -a \sin \vartheta - \frac{lc}{r}, \quad \dot{r} = a \cos \vartheta - \frac{kc}{r}.$$

1) Met. Zeitschr. 1903, S. 529.

2) Veröff. d. preuß. Met. Inst.; Abh. Bd. IV, Nr. 2, 1911.

3) Köppen, Met. Zeitschr. 1895, S. 223.

Man kann die Gleichungen unschwer integrieren, doch sind die Ergebnisse recht umständlich.<sup>1)</sup> Um eine Vorstellung vom Verlauf der Trajektorien und Isobaren zu erhalten, ist es bequemer, eine graphische Konstruktion derselben zu machen. In Fig. 45 sind die Trajektorien dargestellt. Die gestrichelten Spiralen zunächst bedeuten die Windbahnen in der ruhenden Zyklone; dabei ist der Ablenkungswinkel derselben vom Gradienten zu  $60^\circ$  angenommen. Auf einer Trajektorie

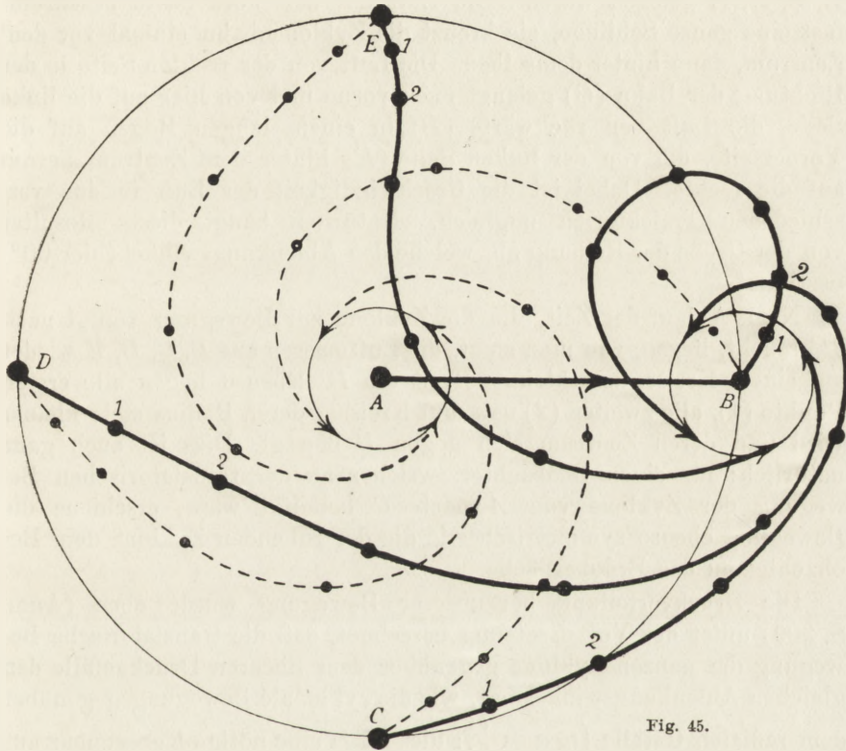


Fig. 45.

dieser Art sind die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wegstrecken durch Punkte abgegrenzt. Die Geschwindigkeit nimmt gegen das Zentrum rasch zu, weswegen die Abstände der Punkte immer größer werden. Die Trajektorien sind bis zu dem kleinen Kreise um das Zentrum A

1) Die Gleichung der Trajektorie findet sich durch Integration zu:

$$r^{\frac{lc}{2}} e^{r \sin \vartheta} = \text{konst.}$$

Der Druck wird gegeben durch

$$p = \rho a r \left( 1 - \frac{c}{r^2} \right) (l \sin \vartheta - k \cos \vartheta) + \rho c \sigma^2 \left( \lg r - \frac{c}{2r^2} \right) + \text{konst.}, \text{ wo } \sigma^2 = l^2 + k^2.$$

gezogen. Hier wird die Grenze zwischen äußerem und innerem Gebiet angenommen.

Es wird nun vorausgesetzt, daß sich das Zentrum mit der ganzen Zyklone in der gleichen Zeit von *A* nach *B* bewegt hat, in welcher ein Luftteilchen der ruhenden Zyklone vom äußeren zum inneren Kreis gelangt wäre. Unter diesen Umständen geben die dick ausgezogenen Kurven die Wege von 4 Luftteilchen, welche zu Anfang in den Orten *B*, *C*, *D*, *E* gelegen waren. Die Luft auf der Vorderseite beschreibt fast eine ganze Schlinge, sie kreuzt die Zyklonenbahn einmal vor dem Zentrum, dann hinter demselben. Die Luft von der rechten Seite in der Richtung der Bahn (*C*) gelangt nach vorne und von hier auf die linke Seite, die Luft von rückwärts (*D*) in einem langen Bogen auf die Vorderseite, die von der linken Seite (*E*) hinter dem Zentrum herum auf die rechte. Dabei ist die Geschwindigkeit der Luft in den verschiedenen Trajektorien ungleich. Natürlich hängt dieses Resultat von der Größe der Reibung ab, welche den Ablenkungswinkel (hier  $60^\circ$ ) bestimmt.

Nach Ablauf der Zeit, die die Zyklone zur Bewegung von *A* nach *B* braucht, liegen, wie man sieht, die Luftmassen aus *B*, *C*, *D*, *E* wieder auf einem Kreise, dem kleinen Kreis um *B*. Ebenso liegen alle ersten Punkte (1), alle zweiten (2) usw. auf Kreisen, deren Radius stets kleiner wird und deren Zentrum sich gegen *B* bewegt. Dies ist auch ganz natürlich: für einen Beobachter, welcher an der translatorischen Bewegung der Zyklone von *A* nach *B* beteiligt wäre, erschiene die Bewegung ebenso symmetrisch wie die der ruhenden Zyklone dem Beobachter an der Erdoberfläche.

Die Druckverteilung bei unserer Bewegung wurde oben (Anm. S. 209) unter der Voraussetzung berechnet, daß die translatorische Bewegung der ganzen Zyklone gegenüber dem linearen Druckgefälle den gleichen Ablenkungswinkel hat, wie die zyklonale Bewegung gegenüber dem radialen Gefälle ( $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{k}$ ); dies ist ja eine nötige Konsequenz aus der Reibungsannahme. Zur Zeichnung der Druckverteilung der bewegten Zyklone, welche hier nur qualitativ durchgeführt ist, muß man daher über die kreisförmigen Isobaren der Zyklone geradlinige legen, welche von der positiven *x*-Achse um  $30^\circ$  nach rechts abweichen. In Fig. 46 ist die Übereinanderlagerung der beiden Isobarensysteme dargestellt. Die kreisförmigen Isobaren zeigen das rasche Anwachsen des zyklonalen Gradienten gegen das Zentrum an. Die dicken Kurven sind die resultierenden Isobaren der bewegten Zyklone, der Pfeil stellt die Bewegungsrichtung vor.

Wie oben gesagt, würde die Zyklonalbewegung einem an der translatorischen Bewegung der Zyklone teilnehmenden Beobachter symmetrisch erscheinen, d. h. genau so, wie dies die gestrichelten Trajek-



torien in Fig. 45 anzeigen. Dann muß für einen solchen Beobachter aber offenbar auch die Druckverteilung symmetrisch sein, also so, wie dies die Kreise in Fig. 46 angeben. Die Verzerrung der Isobaren, die Asymmetrie der Zyklone, kann also nur für den an der Erde feststehenden Beobachter vorhanden sein.<sup>1)</sup> Diese Erscheinung erklärt sich aus der Gleichung für die lebendige Kraft (S. 127), welche zeigt, wie der Druck durch die Geschwindigkeit der Luft-

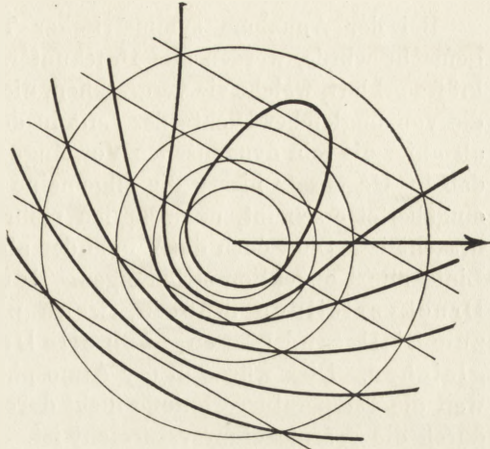


Fig. 46.

massen erniedrigt wird (hydrodynamischer Druck; vgl. auch S. 117, über die Vergrößerung des vertikalen Gradienten durch Luftströmungen).

Die asymmetrischen Trajektorien und Isobaren der bewegten Zyklone in Fig. 45 und 46 stimmen gut mit den Beobachtungen überein. Es läßt sich also zweifellos ein erheblicher Teil der Beobachtungen an asymmetrischen Zyklonen aus der Voraussetzung erklären, daß eine Zyklone von der allgemeinen Luftströmung mitgetragen wird, wie dies Ferrels Auffassung entspricht.

Damit ist freilich noch nichts über die Erhaltung der Zyklone trotz ihrer Bewegungsverluste gesagt. Hierzu sind, wie oben gezeigt, jene Vorgänge nötig, welche kinetische Energie liefern. Auch diese werden auf die Fortbewegung und Asymmetrie der Zyklone von Einfluß sein, namentlich dann, wenn die kinetische Energie durch Umlagerung verschieden temperierter Luftmassen zustande kommt; denn hier ist ja die Asymmetrie ganz unvermeidlich.

Ob bei den tropischen Zyklonen Asymmetrien in der Temperaturverteilung eine Rolle spielen, ist wohl noch nicht recht aufgeklärt. Ihre Bahnen erinnern häufig an die im 9. Kapitel besprochene allgemeine Strömung der Luft aus niedrigen in höhere Breiten in den hohen Schichten, welche anfangs eine westliche, dann eine östliche Richtung hat. Doch scheint hier auch die Verteilung von Land und Meer eine Rolle zu spielen.<sup>2)</sup>

1) F. M. Exner, Met. Zeitschr. 1906, S. 571.

2) Cordeiro hat (Met. Zeitsch. 1908, S. 201) angegeben, daß diese Biegung der Zyklonenbahn auch als Folge einer Kreiselbewegung aufgefaßt werden kann. Es ist aber doch mehr als fraglich, ob die Gleichungen der Kreiselbewegung auf eine zyklonale Luftbewegung unbedingt angewendet werden dürfen; wenn, wie dies den Anschein hat, die zyklonale Bewegung meist angenähert wirbelfrei ist, so ist der Unterschied gegen den Kreisel doch gar zu groß.

Bei der Annahme symmetrischer Temperaturverteilung, die hier gemacht wurde, werden alle Druckunterschiede nur durch Bewegungskräfte erklärt, welche sie verursachen, nicht durch Gewichtsunterschiede, die von ungleicher Dichte der Luft in der Höhe herrühren. Wir haben also hier die rein dynamischen Vorgänge behandelt. Es ist kein Zweifel, daß im Gegensatz hierzu die allgemeine Bewegung, in die eine Zyklone eingebettet erscheint, ursprünglich mehr thermisch als dynamisch verursacht ist. Sind doch die Winde der allgemeinen Zirkulation in erster Linie alle Konvektionsströmungen. Bei rein dynamisch erzeugter Druckverteilung müßten, wenn plötzlich alle Bewegungen zum Stillstand kämen, auch alle Druckunterschiede sich ausgleichen. Dies würde in der Atmosphäre zweifellos nicht geschehen, weil die Temperaturverteilung nicht durch die Druckverteilung, sondern durch die Wärmezufuhr verursacht ist.

Wir dürfen daher nicht erwarten, mittels der rein dynamischen Effekte die Bewegungen der Zyklonen usw. vollständig zu erklären. Im nächsten Kapitel wird der thermische Einfluß behandelt.

## Elftes Kapitel.

### Unperiodische Veränderungen an einem Orte der Atmosphäre.

**67. Die Massenverteilung in einer Luftsäule.** Die Größen, welche den Zustand der Luft an einem Ort charakterisieren, insbesondere Luftdruck, Temperatur und Wind, erfahren im Laufe der Zeit mannigfache Veränderungen, die für die Witterungserscheinungen maßgebend sind.

Um diese Veränderungen zu verstehen, ist es zunächst nötig, das Zustandekommen jener Größen selbst ins Auge zu fassen, namentlich das Zustandekommen des Luftdruckes. Dieser ist dem Gewicht einer Luftsäule gleich und hängt infolgedessen von der Massenverteilung in der Atmosphäre ab. Wir müssen somit nunmehr die Atmosphäre in ihrer vertikalen Erstreckung in Betracht ziehen, während wir im vorigen Kapitel Vorgänge besprochen haben, die sich ebenso gut zwischen zwei festen horizontalen Begrenzungsflächen hätten abspielen können. Die Druckunterschiede dort waren durch rein horizontale Verschiebungen der Luft entstanden und auch wieder ausgleichbar, während nun die Veränderungen des Druckes mit vertikalen Verschiebungen verbunden sind.

Es ist klar, daß der Luftdruck an einem Orte als Summe der Gewichte der darüberliegenden Schichten auf die verschiedenste Weise zustande kommen kann. Es gibt unendlich viele Massenverteilungen oberhalb eines Ortes, welche den gleichen Luftdruck an demselben hervorrufen.

Als Normaldruck im Meeresniveau wird meist 760 mm Hg angegeben. Der mittlere Luftdruck in diesem Niveau weicht allerdings von Ort zu Ort von jenem Werte ab; doch sind die Abweichungen gering und nur in hohen Breiten der südlichen Halbkugel erreichen sie bis zu vier Prozent.

Nun ist die Luft nahe dem Äquator erheblich wärmer als nahe den Polen, und doch ist der Druck am Boden überall angenähert der gleiche. Die Erklärung dieser eigentümlichen Tatsache hat lange gefehlt; man mußte bisher annehmen, daß die Atmosphäre in hohen Breiten niedriger sei als am Äquator. Nach der barometrischen Höhenformel ist

$p_0 = p_H e^{\frac{gH}{R T_m}}$ , wo  $p_H$  den Druck in der Höhe  $H$  bezeichnet. In niedrigen Breiten, wo die Mitteltemperatur höher ist, müßte man also einen höheren Wert  $p_H$  erwarten als in hohen, auch dann, wenn man sehr hohe Luftsäulen in Betracht zieht. Dann müßten also die meridionalen Druckgradienten mit der Höhe fortwährend zunehmen, die Atmosphäre würde am Äquator am höchsten hinaufreichen.

Diese Annahme ist durch die neueren Ergebnisse der aerologischen Forschung hinfällig geworden. Es hat sich nämlich gezeigt, daß bei genügend großer Höhe  $H$  die Mitteltemperatur  $T_m$  einer Säule in hohen und niedrigen Breiten ziemlich dieselbe ist; die relative Wärme der unteren Schichten nahe dem Äquator wird durch relative Kälte hoher Schichten kompensiert. Dies geschieht vermöge der eigentümlichen Temperaturbeziehungen von Troposphäre und Stratosphäre (vgl. Fig. 41, S. 186, nach Peppler). Die unteren Schichten sind in niedrigen Breiten wärmer als in hohen Breiten, die oberen aber umgekehrt kälter; die Stratosphäre liegt am Äquator höher und ist dabei kälter als am Pol.

Um den Effekt der Temperaturverteilung auf den Bodendruck besser beurteilen zu können, machen wir die schematische Annahme, die Temperatur nehme linear bis zu einer gewissen Höhe  $h$ , der Höhe der Troposphäre, ab; von hier an bleibe die Temperatur konstant, es erfolge also ein Knick in der Temperaturkurve beim Eintritt in die Stratosphäre. Die lineare Abnahme betrage  $6^\circ$  pro km ( $\alpha = 0,006^\circ$  pro m).

Der Luftdruck am Boden stellt sich dann nach der barometrischen Höhenformel dar als:

$$p_0 = p_H e^{\frac{g}{R} \left[ \frac{H-h}{T_0 - \alpha h} + \frac{2h}{2T_0 - \alpha h} \right]}, \text{ wo } H > h.$$

Wir nehmen an, der Druck  $p_H$  in der Höhe  $H = 20$  km sei gegeben;  $T_0$  sei die (absolute) Temperatur an der Erdoberfläche. Dann kann offenbar ein Druck  $p_0$  durch verschiedene Werte der Stratosphären­grenze  $h$  und der Bodentemperatur  $T_0$  zustande kommen. Nachdem der mittlere Luftdruck im Meeresniveau angenähert stets der gleiche ist, so fragen wir, auf welche Arten derselbe unter den obigen Voraussetzungen entstehen kann.

Statt  $h$  als Funktion von  $p_0$  und  $T_0$  aus obiger Gleichung zu berechnen, wurde die  $e$ -Potenz für verschiedene Werte von  $T_0$  und  $h$  bestimmt. Diese Zahlen der nächsten Tabelle geben zugleich an, wie vielmal größer der Bodendruck ist als der Druck in 20 km Höhe. (Siehe Tabelle auf S. 215.)

In Fig. 47 sind diese Größen zur Zeichnung von Kurven gleicher Quotienten  $\frac{p_0}{p_H}$  verwendet. Erteilt man  $p_H$  einen bestimmten Wert, setzt z. B.  $p_H = 40$  mm, so werden sie zugleich Kurven gleicher Werte  $p_0$ ,

Quotient  $\frac{p_0}{p_H} = e^{\frac{gH}{RT_m}}$  für  $H = 20$  km; hierbei  $T_s = T_0 - \alpha h^1$ .

Höhe der Troposphäre, $h$	Temperatur an der Erdoberfläche, $T_0$								
	-15°	-10°	-5°	0°	5°	10°	15°	20°	25°
6 km	20,4	19,0	17,8	16,9	15,9	—	—	—	—
7 "	21,5	20,1	18,9	17,7	16,8	15,8	—	—	—
8 "	22,7	21,1	19,7	18,6	17,5	16,4	15,6	—	—
9 "	23,8	22,2	20,8	19,4	18,2	17,1	16,1	—	—
10 "	25,1	23,3	21,7	20,4	19,0	18,0	16,9	16,0	—
11 "	26,4	24,4	22,7	21,2	19,8	18,6	17,5	16,5	—
12 "	—	25,5	23,6	21,9	20,6	19,3	18,1	17,0	16,0
13 "	—	—	24,6	22,8	21,3	19,9	18,6	17,5	16,5
14 "	—	—	—	—	21,9	20,4	19,1	18,0	16,9
15 "	—	—	—	—	—	21,0	19,6	18,4	17,3

bezeichnet durch 680 mm, 720 mm usw. Die mit (760) bezeichnete Kurve gibt somit an, welche Höhe der Troposphäre vorhanden sein muß, damit bei gegebener Bodentemperatur der Luftdruck am Boden 760 mm beträgt. Indem man dieser Kurve verschiedene zusammengehörige Werte  $h$  und  $T_0$  entnimmt, kann man verschiedene Temperaturverteilungen angeben, welche alle für  $p_H = 40$  mm den Bodendruck  $p_0 = 760$  mm liefern. Solche Temperaturverteilungen sind in Fig. 48 gezeichnet (für die Bodentemperaturen  $-10^\circ, -5^\circ, 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ ).

Sie erinnern so genau an die beobachteten Kurven der Fig. 41 (S. 186), daß der Schluß erlaubt ist, die Temperaturkompensation zwischen Strato- und Troposphäre in verschiedenen Breiten der Erde sei für das Zustandekommen annähernd gleichen Bodendruckes wichtiger als eine Kompensation der Tropo-

Linien der gleichen Quotienten  $\frac{p_0}{p_H}$   
 ( $H = 20$  km; wenn  $p_H = 40$  mm, dann geben die eingeklammerten Zahlen  $p_0$  an).

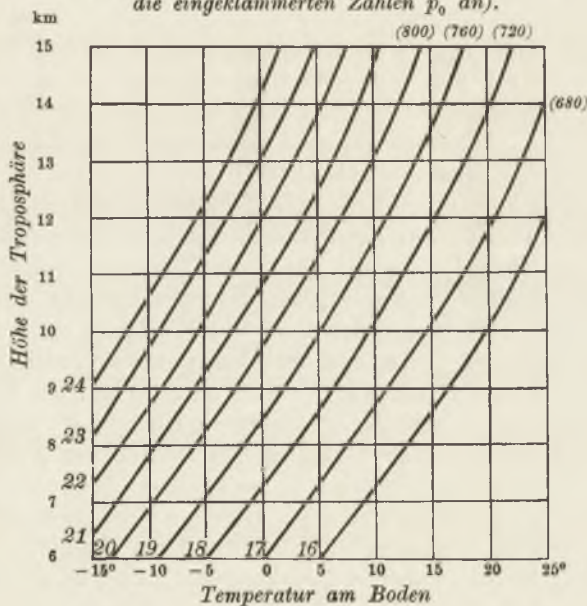


Fig. 47.

1)  $T_s$  ist die Temperatur der Stratosphäre.

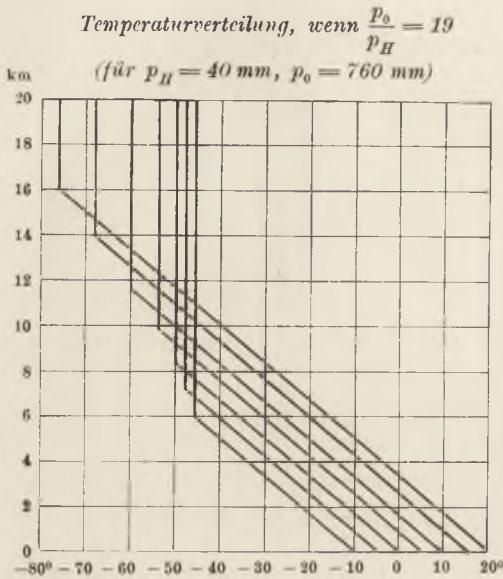


Fig. 48.

sphärentemperaturen durch ungleiche Höhen der Atmosphäre (wenn  $p_H$  verschieden). Freilich ist damit nicht gesagt, daß der Druckausgleich in 20 km Höhe tatsächlich stets schon erreicht wird; es sollte mit obigem nur ein Schema für die Temperaturkompensation aufgestellt werden.

Die Kurven mit kleinem  $h$  (6–10 km) entsprechen höheren Breiten, die Kurven mit großem  $h$  den Tropen. Die Temperatur der Stratosphäre nimmt äquatorwärts erst langsam, dann immer schneller ab, um die Kompensation zu bewirken. Die Grenzen dieser Temperatur (–46° bis +76°) bei den zu-

gehörigen Bodentemperaturen (–10° bis +20°) entsprechen in der Größenordnung den Beobachtungen, ebenso auch die Höhenlage der Stratosphärenengrenze (zwischen 6 und 16 km).

Während die oben skizzierten Temperaturverhältnisse zur Erklärung des annähernd gleichen Druckes in verschiedenen Breiten der Erde genügen, geht es doch nicht an, sie auf ein engeres Gebiet der Erdoberfläche anzuwenden. Auch in einem solchen kommen die gleichen Bodendrucke bei ganz verschiedener Bodentemperatur und ungefähr gleicher linearer Temperaturabnahme in den unteren Schichten vor, wie z. B. auf der Ost- und Westseite einer Barometerdepression, auf einer Isobare; und doch kann man sich nicht denken, daß in einem sehr hohen Niveau, z. B. in 20 oder 30 km, die Stratosphärentemperatur  $T$ , auf verhältnismäßig geringe Distanz so große Unterschiede aufweist, wie zwischen verschiedenen Breiten der Erde. Man möchte vielmehr annehmen, daß sie in größeren Höhen über zwei benachbarten Orten allmählich gleich wird. Ob ein derartiger Ausgleich mit zunehmendem  $H$  über kleineren Gebieten der Erde auch den Druck trifft, ist fraglich. Wenn derartige Druckunterschiede über kleineren Gebieten, die sich durch stellenweise Einsenkungen und Ausbuchtungen in sehr hohen isobaren Flächen äußern müßten, vorkommen, so können sie wohl nicht von Dauer sein; freilich handelt es sich bei Depressionen und ähnlichen Gebilden auch niemals um stationäre Zustände, wie wir sie bei der allgemeinen Druckverteilung auf der Erde annehmen durften.

Über Ausbuchtungen und Einsenkungen der Atmosphäre oberhalb von kleineren Arealen der Erde ist wenig verlässliches bekannt. Man fand bis zu der größten erreichten Höhe noch wechselnden Luftdruck über Europa; doch ist es schwer zu sagen, wie weit die Schwankungen reell, wie weit durch Registrierfehler entstanden sind. Es muß vorläufig unentschieden bleiben, ob bei den Veränderungen des Luftdrucks an der Erdoberfläche neben den Veränderungen der Temperatur bis zu sehr großen Höhen auch noch solche der Höherstreckung der Atmosphäre eine Rolle spielen.

Sehen wir einmal von den letzteren ab und betrachten wir nur die Wirkungen von Temperaturänderungen, so haben wir zunächst nach Temperaturverteilungen zu suchen, die bei gleichem Druck und gleicher Temperatur in der größten Höhe den gleichen Druck am Boden bedingen, obwohl die Bodentemperatur und auch die Höhe der Troposphäre eine ungleiche ist. Wie früher sei die lineare Temperaturabnahme in der Troposphäre stets dieselbe. Dann muß die Temperaturkompensation zwar wieder in der Stratosphäre zu Stande kommen, doch kann nun in diesem Gebiet die Temperatur nicht überall die gleiche sein, sondern muß von dem unteren Wert auf den konstanten Wert der Höhe  $H$  zulaufen. Wir gelangen so zu einer doppelt geknickten Temperaturkurve; das Gebiet zwischen den beiden Knicken ist die Substratosphäre.

Um das Schema berechnen zu können, wird angenommen, daß auch in der Substratosphäre eine lineare Temperaturänderung ( $\beta$ ) mit der Höhe bestehe<sup>1)</sup>, die positiv oder negativ sein kann. Unter diesen Umständen läßt sich die barometrische Höhengleichung in die Form bringen:

$$p_0 = p_H e^{\frac{g}{R} \left[ \frac{2h}{2T_0 - \alpha h} + \frac{2(H-h)}{T_0 - \alpha h + T_i} \right]}$$

$T_i$  ist die konstante Temperatur des oberen Teiles der Stratosphäre. Wird sie als gegeben angenommen, so ist  $\beta$  durch sie bestimmt:

$$\beta = \frac{T_0 - T_i - \alpha h}{H - h}$$

$h$  ist die Höhe der Troposphäre bis zum ersten Knick in der Temperaturkurve,  $H - h$  ist die Höhe der Substratosphäre, innerhalb welcher die Temperaturänderung  $\beta$  besteht.

Wie früher wurde in obiger Formel die  $e$ -Potenz für verschiedene Annahmen von  $T_0$  und  $h$  ausgewertet; die Quotienten  $\frac{p_0}{p_H}$  sind in folgender Tabelle enthalten.  $T_i$  wurde für Mitteleuropa zu  $218^\circ$  abs. ( $-55^\circ$  C) angenommen.

1) F. M. Exner, Wien. Sitz-Ber Bd. 119, Abt. IIa, 1910 (3. Mitteil.)

Quotient  $\frac{p_0}{p_H} = e^{\frac{gH}{RT_m}}$  für  $H = 20$  km; hierbei  $t_t = -55^\circ$ .

Höhe der Troposphäre	Temperatur an der Erdoberfläche								
	-15°	-10°	-5°	0°	5°	10°	15°	20°	25°
6 km	20,6	19,8	19,0	18,3	17,6	—	—	—	—
7 "	21,2	20,3	19,4	18,6	17,9	17,2	—	—	—
8 "	21,8	20,9	19,8	19,0	18,3	17,5	16,9	—	—
9 "	22,5	21,5	20,3	19,4	18,6	17,9	17,1	—	—
10 "	23,2	21,9	20,9	19,9	18,9	18,2	17,3	16,7	—
11 "	23,8	22,5	21,3	20,3	19,4	18,5	17,6	16,9	—
12 "	—	23,2	21,9	20,7	19,8	18,8	17,9	17,1	16,4
13 "	—	—	22,5	21,2	20,1	19,2	18,2	17,3	16,6
14 "	—	—	—	—	20,6	19,5	18,5	17,6	16,8
15 "	—	—	—	—	—	19,9	18,8	17,8	16,9

Mit diesen Zahlen wurden wieder Linien gleicher Quotienten  $\frac{p_0}{p_H}$  gezeichnet (Fig. 49). Für  $p_H = 40$  mm entstehen Kurven gleicher

Linien der gleichen Quotienten  $\frac{p_0}{p_H}$

( $H = 20$  km; wenn  $p_H = 40$  mm, dann geben die eingeklammerten Zahlen  $p_0$  an)

$p_0$ -Werte (680, 720 mm, usw.). Aus der Kurve (760) lassen sich wieder zusammengehörige Werte von  $T_0$  und  $h$  entnehmen. Einige dieser Temperaturverteilungen sind in Fig. 50 dargestellt, und zwar für die Bodentemperaturen  $-5^\circ, 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$  und  $15^\circ$ .

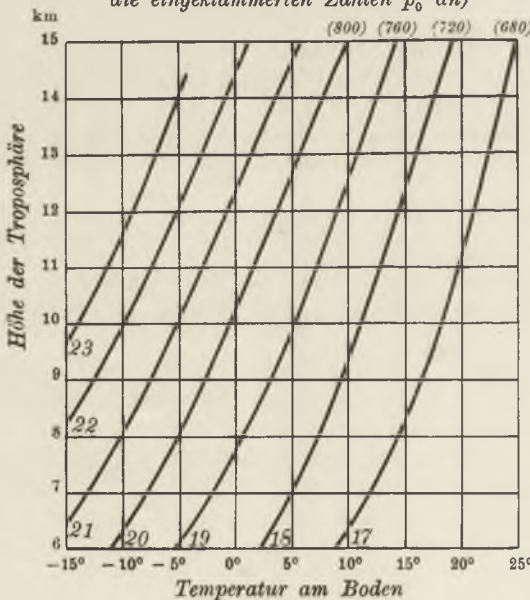


Fig. 49.

Je tiefer die Bodentemperatur, desto niedriger ist die Troposphäre. In der Substratosphäre nimmt die Temperatur bei tiefem  $T_0$  nach oben ab, bei hohem nach oben wieder zu (Inversion). In 20 km Höhe wird überall die Isothermie ( $-55^\circ$ ) erreicht.

Diese schematische Konstruktion hat den Zweck, zu zeigen, wie auch über einem Orte, wo in großer Höhe Druck und Temperatur konstant sind, der gleiche Bodendruck durch

die Temperaturkompensation der Substratosphäre in verschiedener Weise zustande kommen kann. Sie würde gekünstelt erscheinen, wenn nicht



die von Schmauß<sup>1)</sup> aufgestellten 4 Typen der Temperaturverteilung (Fig. 51) mit ihr ziemliche Ähnlichkeit hätten.

Die beiden hier besprochenen Schemata, jenes für die Temperaturverteilung in verschiedenen Breitenzonen der Erde und das letzte, geben einen Begriff davon, auf welche Arten der an der Erdoberfläche beobachtete Luftdruck entstehen kann, soweit er ein Temperatureffekt ist.

Es sei hier nochmals auf einen Umstand hingewiesen (vgl. auch Abschnitt 23), welcher bei Beurteilung der Veränderungen in der Massenverteilung einer Luftsäule in Betracht kommt, wenn die Mitteltemperatur die gleiche bleibt. Aus der

barometrischen Grundgleichung  $p_0 = p_h e^{\frac{g h}{R T_m}}$  folgt bei konstanter Mitteltemperatur:  $\frac{\Delta p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p}$ . Dies heißt: Erhöht sich bei konstantem  $T_m$  der Druck am oberen Ende einer Luftsäule um  $\Delta p$  (z. B. durch Anhäufung neuer Luftmassen über der Höhe  $h$ ), so wächst derselbe unten im Verhältnis  $\frac{p_0 \Delta}{p}$ .

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Luftsäule vor und nach der Veränderung im Gleichgewicht sei, so daß die Höhenformel Anwendung findet. Ist z. B. der Druck in 9 km Höhe um 1 mm gewachsen, so muß der Druck am Boden um etwa 3 mm gestiegen sein, damit wieder Gleichgewicht herrscht. Die Erklärung dieser Eigentümlichkeit ist einfach: Durch Zusatz einer neuen Luftmasse in der Höhe wird die ganze Säule zusammengedrückt, es sinkt also jene Masse, die ursprünglich in der Höhe  $h$  gelegen war, unter diese Höhe herab. Der zur Drucksteigerung  $\Delta p$  erforderliche Luftzu-

Temperaturverteilung, wenn  $\frac{p_0}{p_H} = 19$   
(für  $p_H = 40$  mm,  $p_0 = 760$  mm)

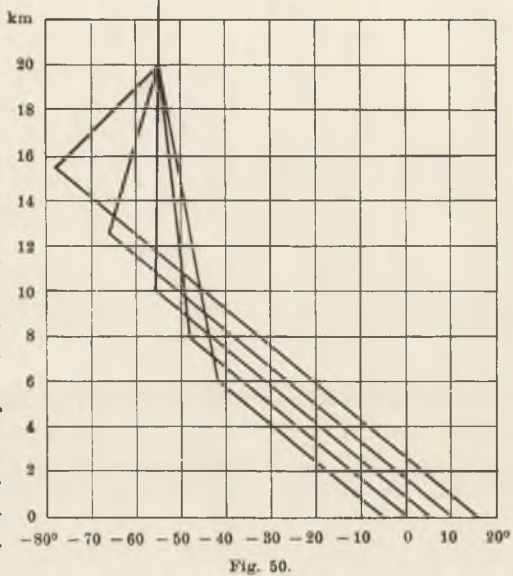


Fig. 50.

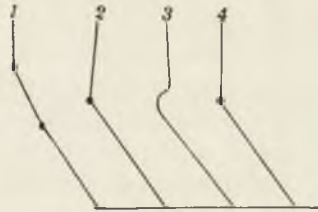


Fig. 51.

1) Münchener aerologische Studien, Nr. 1; aus den Beob. d. met. Stat. d. Königr. Bayern, Bd. 34, 1912.

2) F. M. Exner, Met. Zeitsch. 1913, S. 430.

satz ist bedeutend größer als jener, welcher auf einer in der Höhe  $h$  fest eingefügten Basis den Druck dort um den gleichen Betrag erhöhen würde. Dieser größere Zusatz sinkt zum einen Teil unter die Höhe  $h$  herab, und nur der andere bleibt über derselben liegen und vergrößert dort den Druck um  $\Delta p$ . Erst am Boden kommt das Gewicht der ganzen zugesetzten Luftmasse in der Steigerung des Bodendruckes um

$$\Delta p_0 = \Delta p \frac{p_0}{p}$$

zum Ausdruck. In einer inkompressiblen Flüssigkeit tritt eine einfache Übertragung der Drucksteigerung von oben auf den Boden ein; dort ist  $\Delta p_0 = \Delta p$ .

Diese Tatsache ist für die Anwendung der statischen Grundgleichung bei großen Höhenunterschieden von Nachteil. Ein Fehler bei der Druckbestimmung in 20 km von  $\Delta p = 1$  mm Hg gibt z. B. am Boden schon 19 mm aus.

**68. Das Zustandekommen von Luftdruckgradienten; Luftversetzung.** Da jeder Luftdruck an der Erdoberfläche bei sehr verschiedenen Temperaturen bestehen kann, möchte man zunächst glauben, daß über einem Orte mit besonders hohem oder tiefem Druck beliebige Temperaturen beobachtet werden. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Würde z. B. über tiefem Druck die Temperatur niedriger sein als in der Umgebung, so würde der horizontale Druckgradient nach oben immer mehr zunehmen. Die Beobachtungen zeigen, daß er im wesentlichen konstant bleibt. Man wurde hierauf zuerst durch das Studium der beim Winde transportierten Luftmassen, der sogenannten „Luftversetzung“, aufmerksam.

Beobachtungen des Wolkenzuges und der Windstärke in verschiedenen Höhen erlaubten, die in bestimmter Zeit durch die Querschnittseinheit strömende Luftmasse zu berechnen. Dabei haben H. H. Clayton und später A. Egnell<sup>1)</sup> gefunden, daß über vielen Gegenden der Erde diese Luftmasse in allen Höhenlagen zu gleicher Zeit annähernd gleich groß ist. Damit dies möglich sei, ist es, wie Gold und Harwood<sup>2)</sup> ausführten, nötig, daß die Windgeschwindigkeit in bestimmter Weise mit der Höhe zunehme. In unseren Breiten ist eine Zunahme der Windstärke nach aufwärts das gewöhnliche, in den Tropen, der Gegend der Ostwinde, hingegen nicht. Tatsächlich hat sich der Satz von Clayton und Egnell in Manila auch nicht bewahrheitet.

Eine kurze Rechnung läßt die Bedingung für das Eintreffen dieses Satzes erkennen. Es soll  $\varphi v$  unabhängig von der Höhe sein. Nun ist angenähert (vgl. z. B. S. 86):  $2\omega \sin \varphi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ , wobei wir unter  $v$

1) Clayton in Ann. Harvard Obs. Vol. XXX, P. III, 1892; Egnell in Compt. Rend. 1903; vgl. Hann, Met. Zeitsch. 1903, S. 135, wo über Egnell referiert wird.

2) Vgl. Ref. in Met. Zeitsch. 1910, S. 25; Brit. Associat., Winnipeg. 1909.

die totale Windstärke, unter  $\frac{\partial p}{\partial x}$  den totalen Gradienten in der Horizontalen verstehen wollen. Die Bedingung lautet also:  $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{konst.}$  für alle Höhen.

Der Gradient hat somit erfahrungsgemäß in höheren Breiten in allen Niveaus der Troposphäre ungefähr denselben Wert. Damit dies möglich sei, ist eine ganz bestimmte Temperaturverteilung nötig.

Es sei an zwei benachbarten Orten der Erde der Bodendruck  $P_1$ , bzw.  $P_2$ , der Gradient wirke in ihrer Verbindungslinie, so daß  $\delta P = P_2 - P_1$ . Ist  $T_1, T_2$  die Mitteltemperatur,  $p_1, p_2$  der Druck in der Höhe  $h$  über den beiden Orten, so folgt, da  $p_2 = P_2 e^{-\frac{gh}{RT_2}}$ ,  $p_1 = P_1 e^{-\frac{gh}{RT_1}}$  und in erster Annäherung  $e^{-\frac{gh}{RT}} = 1 - \frac{gh}{RT}$  gesetzt werden kann, aus dem Clayton-Egnellschen Satz:

$$p_2 - p_1 = P_2 \left(1 - \frac{gh}{RT_2}\right) - P_1 \left(1 - \frac{gh}{RT_1}\right) = \delta P;$$

also  $\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_1}{T_1}$  und, wenn  $T_2 - T_1 = \delta T$ , auch

$$\frac{\delta P}{P_1} = \frac{\delta T}{T_1}.$$

Es muß also über dem höheren Druck auch die höhere Temperatur herrschen und zwar nach Maßgabe der letzten Gleichungen. Ist z. B. die Druckdifferenz  $\delta P = 20$  mm, die Mitteltemperatur der Luftsäule bis etwa 10 km Höhe aber  $250^\circ$  abs., dagegen  $P_1 = 760$  mm, so folgt  $\delta T = 6,5^\circ$ .

Wenn die wärmere Luft über dem höheren Druck liegt und dabei die Windstärke mit der Höhe zunimmt (wie dies der Konstanz des Gradienten entspricht), so ist hiermit auch die Bedingung für einen stationären Bewegungszustand gegeben, wie im 8. Kapitel ausgeführt wurde (vgl. Fig. 30a und c, S. 153). Der Satz von Clayton-Egnell ist mithin nur ein anderer Ausdruck der Tatsache, daß die Luft sich angenähert stationär bewegt. Für Gebiete, wo die kältere Luft über dem höheren Druck liegt, sind die stationären Bewegungen durch Fig. 30b und d dargestellt. Dort nimmt die Windstärke mit der Höhe ab (z. B. bei den Passatwinden), der Clayton-Egnellsche Satz kann also nicht gelten.<sup>1)</sup> Würde dieser Satz irgendwo genau zutreffen und außerdem stationäre Bewegung gegeben sein, so ließe sich aus diesen Bedingungen eine Differenzialgleichung ableiten, welcher die Temperaturverteilung

1) Vgl. auch Archibald Douglas bei Hann, Lehrbuch, 3. Aufl., S. 393, oder Brit. Associat., Montreal 1884, der die Zunahme der Windstärke mit der Höhe durch die Formel  $\frac{v}{v_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{1/4}$  darstellte.

in allen Höhen entsprechen müßte. Diese könnte aus der beobachteten Temperatur am Boden gefolgert werden, so daß die ganze Massenverteilung bekannt wäre, wenn Druck und Temperatur am Boden gegeben ist.

Eine direkte Messung der Luftdruckgradienten in größeren Höhen ist meist nicht möglich. Man kann statt der Gradienten aber die Veränderlichkeit des Luftdrucks an einem Orte von einem Tage zum nächsten benützen, die ja auch ein Maß der Druckdifferenzen in einem Niveau abgibt. Aus den internationalen Serienaufstiegen konnte A. Schedler<sup>1)</sup> die interdiurne mittlere Veränderlichkeit von Luftdruck und Temperatur ableiten; er fand die Werte der folgenden Tabelle.

Höhe km	Mittlere interdiurne Veränderlichkeit in verschiedenen Höhen				
	Zahl der Fälle	Luftdruck mm	Temperatur °C	$\frac{\Delta p}{p} \cdot 10^2$	$\frac{\Delta T}{T} \cdot 10^2$
1	77	2,9	2,2	0,43	0,79
2	68	2,7	2,7	0,46	0,99
3	71	2,7	2,4	0,53	0,89
4	74	2,6	2,7	0,56	1,03
5	74	2,8	2,9	0,69	1,14
6	77	3,0	3,2	0,83	1,28
7	74	3,4	3,3	1,07	1,37
8	72	3,1	3,4	1,11	1,45
9	75	3,1	3,4	1,26	1,49
10	75	3,0	3,8	1,38	1,71
11	67	2,7	4,6	1,41	2,08
12	62	2,7	4,7	1,59	2,14
13	50	2,3	4,2	1,53	1,93
14	33	2,1	2,8	1,59	1,28
15	22	1,2	1,8	1,03	0,84
16	8	1,1	1,3	1,07	0,59

Die Luftdruckveränderlichkeit (dritte Kolonne) hat daher in den untersten 12 km der Atmosphäre nahezu den gleichen Wert und nimmt erst darüber allmählich ab. Auch diese Zahlen sprechen somit dafür, daß die Gradienten nach aufwärts bis zur Stratosphäre der Größenordnung nach in der Regel gleich bleiben. Wie oben ausgeführt, bedingt dies, daß in den unteren Schichten über abnorm hohem Luftdruck abnorm warme Luft liegt und umgekehrt.

Diese Tatsache ist von großer Wichtigkeit. Sie zeigt, daß die Bewegungen in der Atmosphäre nicht weit vom stationären Zustand entfernt sind. Um die Ursache der Erscheinung zu erkennen, gehen wir von den Verhältnissen in den höheren Schichten der Atmosphäre aus. Die Luftdruckgradienten daselbst schwanken innerhalb gewisser Grenzen.

1) Beitr. z. Physik d. freien Atmosphäre, Bd. VII, 1915, S. 88.

Allzugroße Abweichungen von den Mittelwerten kommen nicht vor. Nehmen wir nun an, wir hätten unter einem Punkte mit abnorm hohem Druck abnorm kalte Luftmassen liegen (und umgekehrt bei niedrigem Druck), so würden die Luftdruckgradienten am Erdboden bedeutend größer sein als in der Höhe; es würden dann auch die Windstärken nach abwärts zunehmen. Dies ist nicht der Fall, weil die Reibung der Luft an der Erdoberfläche die Winde stets verzögert, nie aber beschleunigt. Bei geringeren Windstärken können sich aber die großen Gradienten nicht halten, es entstehen unten ausfüllende Bewegungen. Dabei fließt an der Erdoberfläche die Luft vom hohem zum niedrigen Druck, es wird also nach unserer obigen Voraussetzung kalte Luft gegen den tiefen Druck hin befördert und der Druckgradient mehr oder weniger ausgeglichen.<sup>1)</sup> Auf diese Weise entsteht die Verteilung, welche tatsächlich meist beobachtet wird: kalt unter tiefem Druck, warm unter hohem.

Der Regel in dieser Form hat W. H. Dines den deutlichsten Ausdruck verliehen.<sup>2)</sup> Er leitete aus zahlreichen Ballonbeobachtungen einen Korrelationsfaktor von 0,90 bis 0,96 zwischen dem Druck in 9 km Höhe und der Mitteltemperatur der darunter liegenden Luftsäule ab. Ist der Luftdruck in der Höhe hoch, die Luft darunter warm, so folgt nun noch nicht, daß der Druck auch am Boden hoch ist; doch scheint dies in der Mehrzahl der Fälle so zu sein. Wir kommen auf diese Beziehungen später noch zurück.

Die Rolle, welche die Erdoberfläche nach obigen Ausführungen für die Luftbewegungen spielt, ist eine ganz besondere (vgl. S. 113). Nach dem auf S. 220 dargelegten Verhältnis, in welchem die Druckänderungen in der Höhe zu denen am Boden stehen, müßte man erwarten, daß auch die Druckgradienten von oben nach abwärts zunehmen. Dies geschieht nicht; während in der Höhe starke stationäre Winde wehen können, ist der Entwicklung solcher Windstärken an der Erdoberfläche durch die Reibung ein Ziel gesetzt. Die ausfüllenden Bewegungen, welche entstehen, verringern die Gradienten, die Erdoberfläche wird zum Ausgleichsniveau der Atmosphäre. (Vgl. Abschnitt 40.) Dies äußert sich auch in der Zunahme der interdiurnen Veränderlichkeit der Temperatur nach aufwärts (vgl. die Tabelle S. 222). Sie beträgt nahe der Erde rund 2°, in 11 und 12 km 4—5°. Wir können diese Veränderlichkeit zum Teil als Folge von horizontalen Temperaturgradienten auffassen, wie oben jene des Druckes; die größten Veränderungen und Gradienten finden sich in der Substratosphäre.

Die ausgleichende Wirkung der Erdoberfläche auf Druck- und Temperaturunterschiede hat zur Folge, daß die Beurteilung der zu erwar-

1) F. M. Exner, Met. Zeitsch. 1913, S. 429.

2) Geophysical Memoirs, Brit Met. Off., Heft 2, 1912.

tenden Veränderungen dem an die Erdoberfläche gebundenen Beobachter sehr erschwert wird. Die Vorgänge nehmen zum Teil ihren Ausgang in höheren Schichten; die durch sie am Boden hervorgerufenen Ereignisse streben einem Ausgleich zu, stören dabei aber auch fortwährend stationäre Bewegungen, indem die Reibung dieselben hemmt; auf diese Weise geben sie selbst wieder den Anlaß zu neuen Veränderungen.

Aus dem Gesagten folgt, daß man bei Beurteilung der Temperaturgradienten und der aus ihrer Verteilung hervorgehenden zeitlichen Veränderung von Druck und Temperatur die Verhältnisse in höheren Schichten nicht nur nicht vernachlässigen darf, sondern sie zum Teil gegenüber jenen am Boden sogar als die wichtigeren wird ansehen müssen. Namentlich wird dies von dem Gebiet der Substratosphäre gelten, wo die Veränderlichkeit von Druck und Temperatur am größten ist.

**69. Unmittelbare Ursachen von Temperatur- und Druckveränderungen.** Zeitliche Veränderungen von Druck und Temperatur spielen in der Wetterkunde eine große Rolle. Eine Voraussicht derselben ist heutzutage nur in sehr beschränktem Maße möglich. Doch kann man die physikalischen Bedingungen für solche Änderungen feststellen.

a) Wir fragen zunächst, aus welchen Ursachen sich die Temperatur einer bestimmten herausgehobenen Luftmasse verändern kann. Hier kommt die Wärme Gleichung (erster Hauptsatz) von S. 11 in Betracht. Bedeutet  $t$  die Zeit, so ergibt sich aus ihr die zeitliche Temperaturänderung zu:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt} + \frac{AR}{c_p} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt}$$

Die Temperatur einer bestimmten Luftmasse ändert sich somit entweder durch Wärmezufuhr (Wärmeentziehung) oder durch Kompression (Ausdehnung).

Der erste Vorgang verlangt keine weitere Erklärung. Wenn wir den zweiten betrachten, so empfiehlt es sich, von der Wärmezufuhr abzusehen, also adiabatische Veränderungen anzunehmen. Für solche gilt dann:

dann:  $\frac{dT}{dt} = \frac{AR}{c_p} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt}$  oder die Gleichung von Poisson (vgl. S. 12).

Bezeichnet  $\vartheta$  die potentielle Temperatur, so kann man auch schreiben:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Am häufigsten werden solche dynamische Temperaturänderungen bei vertikalen Bewegungen vorkommen, wie im 4. Kapitel ausgeführt ist. Doch sei hier angemerkt, daß vertikale Verschiebung einer Masse nur dann deren Temperatur verändert, wenn sich gleichzeitig der Druck ändert. Würde eine ganze Luftsäule eine Hebung oder Senkung erfahren, so könnte ihre Temperatur überall dieselbe bleiben. Voraus-

setzung der Druckänderung über einer Fläche ist ja, daß sich die über ihr lagernde Luftmasse durch seitlichen Massentransport verändert. Hierauf hat Trabert<sup>1)</sup> besonders hingewiesen. Fehlt ein solcher Massentransport, so erfolgt die Hebung oder Senkung unter konstantem Druck. Dies wäre eine Erklärung dafür, daß die Temperatur oberhalb der Substratosphäre auch bei verschiedener Höhenlage der letzteren in kürzeren Zeiträumen ziemlich unveränderlich zu sein scheint.

Temperaturänderungen einer hervorgehobenen Luftmasse durch adiabatische Kompression oder Dilatation werden selten direkt beobachtet, da bei Druckveränderungen die Luftmasse gewöhnlich nicht in Ruhe verharret, die Beobachtung aber meist an einem und demselben Orte erfolgt. Die Temperaturänderung an einem Orte läßt sich aber mittels der Transformation von S. 32 ausdrücken; wir wenden diese hier auf die potentielle Temperatur  $\vartheta$  an und schreiben für adiabatische Prozesse:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - w \frac{\partial \vartheta}{\partial z}.$$

Hiernach ist die Änderung der potentiellen Temperatur an einem Orte durch die Gradienten dieser Größe und die Geschwindigkeit der Luft daselbst gegeben, solange  $dQ = 0$ . Aus ihr kann auch die Änderung der Temperatur  $T$  an einem Orte bestimmt werden, wenn die Druckänderung gegeben ist.

Wie man sieht, treten Änderungen der potentiellen Temperatur an einem Orte einerseits bei horizontalem Gradienten von  $\vartheta$  und horizontaler Bewegung, andererseits bei vertikalem Gradienten und vertikaler Bewegung auf. Die potentielle Temperatur ändert sich einfach dann an einem Orte, wenn die Luft von der Seite oder aus vertikaler Richtung durch anders temperierte verdrängt wird. Dies ist zwar eine Selbstverständlichkeit, doch gibt die Gleichung jene Änderung der Größe nach.

Bei vertikaler adiabatischer Bewegung ohne Kondensation muß  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$  im allgemeinen das entgegengesetzte Vorzeichen der Vertikalgeschwindigkeit  $w$  haben, da  $\vartheta$  nach oben zunimmt; dies ist ja die Bedingung der Stabilität. Adiabatische Bewegung nach aufwärts erniedrigt also die potentielle Temperatur eines Ortes, Bewegung nach abwärts erhöht dieselbe (Föhn). Solange  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ , gilt das nämliche von der Temperatur selbst. Mit Hilfe der obigen Gleichung läßt sich z. B. die vertikale Geschwindigkeit aus der zeitlichen Änderung und dem vertikalen Gradienten der potentiellen Temperatur berechnen. Steigt die Temperatur beispielsweise an einem Orte bei Föhnwind um  $10^{\circ}$  in einer Stunde

1) Met. Zeitsch. 1910, S. 305.

und nahm die Temperatur vor Ausbruch des Föhns um  $0,5^{\circ}$  pro 100 m nach aufwärts ab, somit  $\vartheta$  um ebensoviel nach oben zu, so ist

$$w = - \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial t}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial z}} = - 0,56 \text{ m/sec.}$$

Wie später gezeigt wird, lassen sich in unserer Gleichung die Geschwindigkeiten in der Horizontalen durch die Gradienten des Druckes ersetzen, wodurch die Gleichung eine Berechnung der zeitlichen Änderung des  $\vartheta$  aus den Gradienten von  $p$  und  $\vartheta$  ermöglicht.

b) Von besonderem Interesse ist die zeitliche Veränderung des horizontalen Temperaturgradienten, namentlich im Gebiet der Stratosphäre. Sie kann zunächst durch horizontalen Massentransport zustande kommen. Da die Stratosphäre in niedrigen Breiten höher liegt, als in höheren, und dabei kälter ist, so werden Luftverschiebungen in der Höhe gegen die Pole eine Erhöhung der Stratosphärenengrenze zur Folge haben, es wird eine Temperaturverteilung entstehen, ähnlich dem 2. oder 3. Typus von Schmauß in Fig. 51; Luftverschiebungen gegen den Äquator werden umgekehrt eine Senkung der Stratosphärenengrenze bewirken, die Temperaturverteilung wird dem Typus 1 von Schmauß ähnlich (vgl. auch Fig. 50).<sup>1)</sup>

Eine zweite Ursache für Veränderungen des Temperaturgradienten liegt in der vertikalen Bewegung; auf sie hat namentlich A. Wegener Gewicht gelegt<sup>2)</sup>, um die Temperaturverteilungen an der Grenze der Stratosphäre zu erklären. Wie auf S. 54 gezeigt, ändert sich der Temperaturgradient in einer Luftsäule, die unter anderen Druck kommt, nach der Formel:

$$\frac{dT'}{dz} = \frac{p'}{p} \left( \frac{dT}{dz} + \frac{Ag}{c_p} \right) - \frac{Ag}{c_p}.$$

Wird z. B. eine isotherme Schicht von 8 auf 12 km gehoben, so sinkt der Druck dabei von etwa 280 auf 170 mm. Aus der Isothermie entsteht ein nach aufwärts gerichteter Temperaturgradient von  $0,4^{\circ}$  pro 100 m. Doch setzt dies natürlich voraus, daß die gehobene Schicht wirklich unter niedrigeren Druck kommt, daß also oberhalb von ihr während der Hebung seitlich Luft abströmt. Auf diese Weise kann eine Temperaturverteilung entstehen, welche dem Typus 3 von Schmauß (Fig. 51) entspricht; Wegener nennt sie Schrumpfungsinversion. Umgekehrt hätte eine Senkung der Luftschichten bei seitlichem Zuströmen der Luft in größerer Höhe eine Verteilung zur Folge, ähnlich dem Schmaußschen Typus 1. In diesem Falle wird jede Masse wärmer, entsprechend dem höheren Druck, unter den sie kommt.

1) F. M. Exner, Met. Zeitschrift 1913, S. 434.

2) Beitr. z. Physik der freien Atmos., Bd. IV, S. 55.



Die Bedeutung der vertikalen Bewegungen für die wirklichen Temperaturänderungen in der Substratosphäre ist zwar noch nicht geklärt, doch spricht gegen häufige vertikale Bewegungen dortselbst die Tatsache, daß die Isothermie ein sehr stabiler Zustand ist (vgl. Abschnitt 26). Man darf nicht vergessen, daß gerade die Häufigkeit scharf ausgeprägter Grenzen zwischen Strato- und Troposphäre für das Fehlen bedeutender vertikaler Bewegungen daselbst verantwortlich gemacht wurde. Daher dürften bei den Veränderungen der Temperatur in der Höhe die vertikalen Verschiebungen eine geringere Rolle spielen als die horizontalen.

c) Die Änderungen des Luftdruckes an einem bestimmten Orte sind fast genau durch die Änderungen der Luftmasse oberhalb desselben bestimmt. Der Bodendruck kann sich daher nur infolge von horizontalen Massenverschiebungen ändern. Betrachten wir eine Luftsäule von der Höhe  $h$ , so erscheint die Druckänderung am Boden als Funktion der Temperaturänderung und der Druckänderung in der Höhe, also

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = \frac{p_0}{p_h} \frac{\partial p_h}{\partial t} - \frac{gh}{RT_m^2} p_0 \frac{\partial T_m}{\partial t}, \text{ weil } p_0 = p_h e^{\frac{gh}{RT_m}}.$$

Ist der Druck in der Höhe  $h$  konstant, so ist  $\frac{\partial p_0}{\partial t}$  eine bloße Funktion der Änderung der Mitteltemperatur der Luftsäule; bei einem Kälteeinbruch, wo kalte Luft an der Erdoberfläche in wärmere Gebiete vordringt, kann man auch dem entsprechend einen Anstieg des Bodendruckes beobachten, ja sogar bei gegebenem Temperaturabfall die Höhe  $h$  der einbrechenden kalten Masse berechnen. Oft kommen auch Druckänderungen am Boden zustande, wenn die Temperatur daselbst konstant ist; dann muß man deren Ursache in höheren Schichten suchen. Im allgemeinen aber wird sich  $T_m$  und  $p_h$  gleichzeitig ändern.

Es ist eine offene Frage, ob die tatsächlichen Druckänderungen am Boden bloß durch Temperaturänderungen, also thermisch, erklärt werden können oder nicht (dynamisch); d. h. ob man in sehr großen Höhen (z. B. 30 km) den Druck  $p_h$  konstant fände. Möglicherweise hat die Atmosphäre, wie schon oben S. 216 erwähnt, Ausbuchtungen und Einsenkungen (die dann freilich kein Gleichgewichts- sondern ein wellenartiger Bewegungszustand wären); ein Defizit oder Überschuß an Masse würde über einem Orte durch eine niedrigere oder höhere Grenze der Atmosphäre erreicht. Dies wäre ein eigentlich dynamischer Effekt. Es ist aber auch möglich, daß in 30 km Höhe über einem Orte der Druck in einer Jahreszeit konstant ist und alle Schwankungen darunter, also auch die sehr bedeutenden in 10—15 km Höhe, durch Temperaturänderungen zustande kommen, also thermischer Natur sind.

In beiden Fällen müssen die Veränderungen in der Höhe, wenn sie Veränderungen des Bodendruckes zur Folge haben, von horizontalen

Massenverschiebungen begleitet sein; eine vertikale Bewegung allein kann den Bodendruck niemals beeinflussen.

Anders ist dies bei Veränderungen des Druckes in der Höhe. Dieser kann sich sowohl durch horizontale als auch durch vertikale Massenverschiebung verändern. Sehen wir von ersterer ab, so steigt der Druck in der Höhe  $h$ , wenn die Mitteltemperatur der darunter liegenden Säule steigt, weil dabei Masse über das Niveau  $h$  gehoben wird, und umgekehrt.

Der Effekt ist nach der Formel auf S. 227 leicht zu berechnen, wenn  $\frac{\partial p_0}{\partial t} = 0$ ; dann ist  $\frac{\partial p_h}{\partial t} = \frac{gh}{RT_m^2} p_h \frac{\partial T_m}{\partial t}$ . Für  $h = 12$  km ist ungefähr  $p_h = 150$  mm,  $T_m = 218^\circ$ , also  $\frac{\partial p_h}{\partial t} = 1,03 \frac{\partial T_m}{\partial t}$ , wo  $p_h$  in mm Hg ausgedrückt ist; für  $1^\circ$  Temperatursteigerung gibt dies 1 mm Druckerhöhung. Diese Druckänderungen in der Höhe äußern sich u. a. im täglichen und jährlichen Gang des Luftdrucks auf Berggipfeln.

Wagner<sup>1)</sup> hat untersucht, in welcher Höhe die Druckänderung infolge von Änderung der Mitteltemperatur darunter bei konstantem Bodendruck ein Maximum ist. Schreiben wir die obige Formel  $\Delta p = \frac{pgh}{RT_m^2} \Delta T_m$  und bilden  $\frac{\partial(\Delta p)}{\partial h} = \frac{g \Delta T_m}{RT_m^2} \left( p + h \frac{\partial p}{\partial h} \right)$ , so wird der Wert  $\Delta p$  ein Maximum, wenn  $p + h \frac{\partial p}{\partial h} = 0$ ; da  $\frac{\partial p}{\partial h} = -\frac{pg}{RT}$ , so folgt  $h = \frac{RT}{g}$ ; für  $T = 273^\circ$  ist diese Höhe maximaler Druckschwankung 7991 m, die Höhe der homogenen Atmosphäre. Bei annähernd gleichem Bodendruck im Laufe des Jahres findet Wagner tatsächlich die größten Jahresschwankungen des Luftdrucks in 8 und 9 km Höhe (16 mm Unterschied zwischen dem Maximum im August und dem Minimum im März), in 16 km sind sie nur etwa halb so groß.

**70. Differenzialgleichung des Druckes bei adiabatischer Horizontal-Bewegung.** Wir nehmen im folgenden an, daß sich die Luft adiabatisch und horizontal bewege, und fragen, welche Änderungen in einer Luftsäule durch solche Massenverschiebungen entstehen. Man bezeichnet dieselben jetzt häufig als „Advektion“. Sie spielen bei den atmosphärischen Veränderungen eine sehr große Rolle, so daß ihre gesonderte Betrachtung gerechtfertigt ist.

Bei adiabatischer Bewegung bleibt die potentielle Temperatur einer bestimmten Luftmasse konstant; es empfiehlt sich daher,  $\vartheta$  an Stelle der absoluten Temperatur einzuführen. Bei statischem Gleichgewicht ist  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{pg}{RT}$ . Nach Einsetzung von  $\vartheta = T \frac{P^\kappa}{p^\kappa}$  (wo  $P = 760$  mm) wird daraus durch Integration:

$$p^\kappa = -\frac{g^\kappa}{R} P^\kappa \int \frac{dz}{\vartheta} + \text{konst.}$$

1) Beitr. z. Physik d. freien Atmos. III, S. 98.

Dies ist eine Formel für die Druckabnahme mit der Höhe; sie vereinfacht sich, wenn in der Säule  $h$  die Größe  $\vartheta$  konstant ist, also indifferentes Gleichgewicht herrscht; dann ist  $p_0^x = p_h^x + \frac{\kappa g P^x}{R \vartheta} z$ . Die Größe  $p^x$  nimmt dann linear mit der Höhe ab.

Die adiabatische horizontale Bewegung wird (vgl. S. 225) ausgedrückt durch  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - v \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ . Die Windkomponenten  $u$  und  $v$  sind bei stationären Bewegungen und Abwesenheit von Reibung (Annahmen, die für höhere Schichten gelten) gegeben durch (S. 86):

$$2\omega \sin \varphi u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 2\omega \sin \varphi v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Wenn  $2\omega \sin \varphi = l$  gesetzt und in den Ausdruck für die Dichte  $\rho$  die potentielle Temperatur eingeführt wird, erhält man:

$$u = \frac{R}{l P^x} \vartheta P^{x-1} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = -\frac{R}{l P^x} \vartheta P^{x-1} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Es wird daher:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{R}{l P^x} \vartheta P^{x-1} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

Denkt man sich in einem Niveau Linien gleichen Druckes und gleicher potentieller Temperatur gezeichnet, so erhält man ein Bild der Gradienten dieser beiden Größen; aus ihnen läßt sich die kommende Änderung der potentiellen Temperatur nach der letzten Gleichung berechnen.

Eine kurze Überlegung zeigt, daß der obige Klammerausdruck verkehrt proportional der Fläche ist, welche von zwei benachbarten Isobaren und zwei Isothermen ( $\vartheta$ ) eingeschlossen wird. Stehen die beiden Kurvenscharen aufeinander senkrecht, so ist die Änderung der potentiellen Temperatur ein Maximum, verlaufen sie parallel zueinander, so ist sie null. Als Bedingung dafür, daß die potentielle Temperatur an einem Orte konstant bleibt, erhalten wir, daß die Isobaren ( $p$ ) und die Isothermen ( $\vartheta$ ) an der betrachteten Stelle einander parallel verlaufen.

Die zeitliche Druckänderung läßt sich finden, wenn man die Gleichung von S. 228 partiell nach der Zeit differenziert. Man kann diese Gleichung in der Form schreiben:

$$p^x - p_h^x = \frac{g^x}{R} P^x \int_z^h \frac{dz}{\vartheta},$$

wo  $p_h$  der Druck in der Höhe  $h$ ,  $p$  jener in der Höhe  $z$  ist. Es wird daher:

$$p^{x-1} \frac{\partial p}{\partial t} = p_h^{x-1} \frac{\partial p_h}{\partial t} - \frac{g P^x}{R} \int_z^h \frac{dz}{\vartheta^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Für  $h = \infty$  ist  $p_h = 0$  und auch  $\frac{\partial p_h}{\partial t} = 0$ .

Mit  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$  aus der früheren Gleichung kann nun auch  $\frac{\partial p}{\partial t}$  ausgedrückt werden; man erhält die Änderung des Druckes in der Höhe  $z$  als Summe der Beiträge der einzelnen Höhenschichten, welche durch die Gradienten von  $p$  und  $\vartheta$  gegeben sind.<sup>1)</sup>

Durch Elimination von  $\vartheta$  gelingt es ferner, eine Differentialgleichung aufzustellen, in welcher der Druck allein erscheint. Zu diesem Zwecke benützen wir die umgeformte statische Gleichung (S. 228) und setzen darin  $p^* = p$ . Sie ist:  $\vartheta = -\frac{g \kappa P^*}{R \frac{\partial p}{\partial z}}$ . Indem wir sie nach  $t$ ,  $x$  und  $y$  partiell differenzieren, erhalten wir  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ . Setzen wir alle diese

Werte sowie die oben angegebenen Größen  $u$  und  $v$  in die Gleichung der adiabatischen horizontalen Bewegung  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - v \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$  ein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} = g \left[ \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} \right]^2.$$

Dies ist eine Differentialgleichung des Druckes, bzw. der Größe  $p^* = p$ , welche unter der Bedingung adiabatischer Horizontalbewegung die zeitlichen Veränderungen aus den momentanen Gradienten zu berechnen gestattet. Die Integration der Gleichung würde einen guten Teil der synoptischen Druckveränderungen, die tagtäglich auftreten, erklären und voraussehen lassen; doch ist dieselbe nicht allgemein durchführbar.

Von Interesse ist die Bedingung für Unveränderlichkeit des Druckes, d. h. für stationären Zustand,  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ . Hierzu muß obiger Klammerausdruck verschwinden, was geschieht, wenn:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = 0.$$

Nun ist  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \tan \alpha$ . Dieser Quotient ist aber die Tangente des Winkels

$\alpha$ , welchen der Druckgradient mit der positiven  $y$ -Achse bildet. Die obige Bedingung für stationäre Druckverhältnisse bedeutet also einfach, daß die Gradienten und mithin auch die Isobaren oberhalb eines Ortes in jedem Niveau die gleiche Richtung haben müssen. Dies ist eine Massenverteilung, die voraussetzt, daß die Isothermen mit den Isobaren in jedem Niveau zusammenfallen. Die gleiche Bedingung für stationäre Bewegung wurde schon oben (S. 156) auf völlig anderem Wege gefunden.

1) Vgl. F. M. Exner, Wien. Akad. Sitz-Ber. Bd. 119, Abt. IIa, 1910.

2) F. M. Exner, a. a. O.

Sobald die Isobaren nicht mehr derartig „symmetrisch“ verlaufen, wird  $\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} \geq 0$ . Setzen wir auf der linken Seite unserer allgemeinen Differen-

$$\text{zialgleichung } \vartheta \text{ wieder ein, so ergibt sich: } \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = - \frac{g}{l} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial (\tan \alpha)}{\partial z}.$$

Das heißt also: Drehen sich die Isobaren mit zunehmender Höhe an einer Stelle der Atmosphäre gegen den Uhrzeiger (wobei  $\alpha$  zunimmt) oder nach links, so fällt daselbst die potentielle Temperatur, und umgekehrt (nördl. Halbkugel).

Würde in der ganzen Luftsäule eine derartige Drehung anhalten, so würde die potentielle Temperatur überall fallen und mithin jede Schichte zu einer Steigerung des Bodendruckes (nach der Gleichung auf S. 229) beitragen. Sind die Isobarendrehungen in verschiedenen Höhen verschieden gerichtet, so ist die Druckänderung das Resultat dieser sich zum Teil aufhebenden Schichteneinflüsse. Die Bodendruckänderung kann natürlich nur dann richtig hervorgehen, wenn die Druckänderung am oberen Ende der Säule gegeben ist.

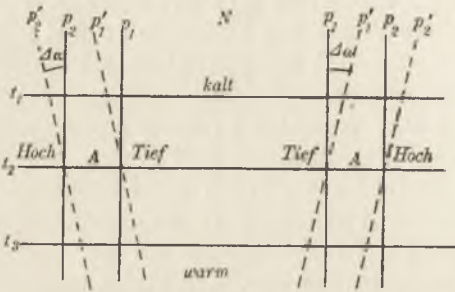
Wenn für ein Gebiet der Erdoberfläche die Verteilung des Bodendruckes und außerdem die Temperaturverteilung im Raume bis zur Höhe  $h$  gegeben ist, so ist die ganze Massenverteilung bestimmt und die Deformation der Isobaren mit der Höhe festgelegt. Damit ist dann auch, von beschleunigten Bewegungen abgesehen, der Zustand der adiabatischen Bewegung im ganzen Raume gegeben. Nehmen wir an, daß sich die Druckverteilung in der Höhe  $h$  nicht ändert, so folgt aus diesem Bewegungszustand eine ganz bestimmte Umbildung in der Verteilung von Druck, Temperatur und Bewegung darunter. Diese Veränderung auszudrücken ist der Sinn unserer Differenzialgleichung für  $p$ . Wir können aus ihr bisher freilich nur die momentane Veränderung eines Zustandes ableiten, da die Integration fehlt.

Es ist nicht zu vergessen, daß obige Drehungs-Regel mit der normalen Rechtsdrehung der Isobaren in den untersten Schichten, die durch die Bodenreibung veranlaßt ist (vgl. Abschnitt 39), nichts zu tun hat.

Jene Regel wird unmittelbar verständlich, wenn wir bedenken, daß bei reibungsloser stationärer Bewegung die Luft den Isobaren entlang fließt. Es sollen z. B. an der Erdoberfläche zwei Isobaren  $p_1, p_2$  geradlinig von Norden nach Süden verlaufen, der tiefe Druck liege im Westen (Fig. 52b). Im Norden sei die Luft kälter als im Süden; dann nimmt der Druck im Norden mit der Höhe rascher ab als im Süden. Wenn eine Isobare unten von S nach N verläuft, so muß eine andere in geringer Höhe darüber schon nach rechts gedreht sein, also einen Verlauf von S z. W gegen N z. E haben ( $p'_1, p'_2$ ). Da nun die angenommene Druckverteilung am Boden mit einer Luftbewegung von S nach N Hand in Hand geht, so muß diese Bewegung die wärmere Luft aus dem Süden

an die Stelle der kälteren nördlichen befördern, die potentielle Temperatur steigt. Trifft dies in der Mehrzahl der Schichten zu, so sinkt der Druck am Boden.

Man kann demnach auch sagen: Strömt die Luft oberhalb eines Niveaus aus dem Tiefdruckgebiet dieses Niveaus heraus, so steigt die potentielle Temperatur daselbst, und umgekehrt.



a Die potentielle Temperatur fällt.      b Die potentielle Temperatur steigt.

Fig. 52.

In Fig. 52 ist das Schema für diese Änderung dargestellt; die drei Geraden  $t_1, t_2, t_3$  sind Isothermen, die ausgezogenen Geraden Isobaren im unteren Niveau; die gestrichelten Isobaren  $p'_1$  und  $p'_2$  im oberen Niveau ergeben sich aus der Temperaturverteilung. Hält die Linksdrehung der Isobaren gegen oben in a), die Rechtsdrehung in b) in höheren Niveaus an, so bedeutet ein Fallen, bzw. Steigen der potentiellen

Temperatur ein Steigen, bzw. Fallen des Druckes am Boden.

Des weiteren werden dann die Isobaren  $p_1, p_2$  in beiden Fällen (a und b) nach rechts wandern, also senkrecht zur Richtung des Temperaturgradienten, wobei sie allerdings keine Geraden mehr zu bleiben brauchen. Eine derartige allgemeine Verschiebung der Isobaren senkrecht zum Temperaturgefälle, also im allgemeinen von Westen nach Osten, wird von den synoptischen Wetterkarten bestätigt<sup>1)</sup>. Je größer das Temperaturgefälle, desto größer wird die Drehung der Isobaren mit der Höhe (der Winkel  $\Delta\alpha$ ), desto rascher verschieben sich daher auch die Druckgebilde.

Die häufige Bewegung der Isobaren von Westen nach Osten hat demnach den gleichen Grund, wie der normale Westwind der höheren Breiten.

Dadurch, daß auf den Druck am Boden alle Höhenschichten von Einfluß sind und die Temperatur nicht zonal verteilt ist sondern auch in einem Breitenkreise bedeutende Unterschiede aufweist, wird die Veränderung der Bodenisobaren so verwickelt, wie man sie tatsächlich findet. Die allgemeine Westostbewegung bleibt zwar deutlich erkennbar, es treten aber Bewegungskomponenten in nördlicher oder südlicher Richtung hinzu, welche eine Voraussage der kommenden Druckveränderungen auf den synoptischen Wetterkarten sehr erschweren.

Die obigen Überlegungen gelten alle nur bei adiabatischer Bewegung. Sobald der Luft Wärme zugeführt oder entzogen wird, treten Modifikationen ein, auf die wir später zurückkommen.

1) Vgl. auch H. Rotzoll: Zur Verwertung von Pilotballonen im Wetterdienst, Inaug.-Diss., Berlin, 1912.

**71. Ergebnisse der Statistik über die Beziehungen der Veränderlichen in der Atmosphäre zueinander.** Hätte die Atmosphäre eine konstante ungemein geringe Schichtdicke, so würde vermöge des verschiedenen spezifischen Gewichtes kalter und warmer Luft jede an einem Orte auftretende Erwärmung mit Erniedrigung, jede Abkühlung mit Erhöhung des Bodendruckes verbunden sein<sup>1)</sup>. Tatsächlich beobachtet man auch nicht selten in der Niederung ein entgegengesetztes Verhalten von Luftdruck- und Temperaturänderungen, wenn auch nicht so regelmäßig, wie es unter der obigen Voraussetzung zu erwarten wäre. Doch ist namentlich bei Kälteeinbrüchen in Amerika und Asien das Steigen des Barometers eine normale Erscheinung<sup>2)</sup> und Ekholm<sup>3)</sup> hat die Ergebnisse seiner Untersuchungen dahin zusammengefaßt, daß das Barometer an der Erdoberfläche fällt, wenn die Temperatur in der Höhe steigt, und umgekehrt.

Der Grund dafür, daß die Änderung des Bodendruckes nicht genau der negativen Temperaturänderung an der Erdoberfläche proportional ist (vgl. S. 227), liegt offenbar darin, daß der Luftdruck an der Erdoberfläche der Effekt aller Luftschichten zusammen ist; dabei können die Temperaturänderungen in der Höhe anderes Vorzeichen haben als die am Boden.

Während, wie gesagt, am Boden die gleichzeitigen Druck- und Temperaturschwankungen häufig entgegengesetzte Vorzeichen haben, hat namentlich Hann<sup>4)</sup> nachgewiesen, daß auf Berggipfeln bei Druckerhöhung Erwärmung, bei Druckerniedrigung aber Abkühlung die Regel ist. In neuerer Zeit haben die zahlreichen Ballon- und Drachenaufstiege das Material zur Untersuchung dieser Verhältnisse auch in höheren Lagen geliefert aber keine einfachen Resultate gegeben. So hat Trabert<sup>5)</sup> statistisch die Sätze abgeleitet: Unter warmen Luftsäulen fällt der Druck, unter kalten steigt er. Weiter aber: Vom Tage der warmen Luftsäule zum Nachtage, also wenn die Temperatur bereits fällt, findet noch immer eine, allerdings schwächere, Luftdruckabnahme statt. Der erste Satz ist ein Beweis, daß am Tage der extremen Temperaturen die betrachteten Luftsäulen (sie reichten bis 5 km Höhe) für die Bodendruckänderung den Ausschlag gaben; der zweite, daß bis zum Nachtage die oberen Schichten die entgegengesetzte und stärkere Wirkung auf die Bodendruckschwankungen hatten als die unteren.

Der parallele Gang von Luftdruck und Temperatur, den Hann

1) Vgl. z. B. Dechevrens und Hanns Resultate bei Hann, Met. Zeitsch. 1888, S. 7.

2) H. v. Ficker, Met. Zeitsch. 1912, S. 360.

3) Met. Zeitsch. 1907, S. 1.

4) Met. Zeitsch. 1888, S. 7 und neuerdings 1914, S. 474.

5) Met. Zeitsch. 1910, S. 301, ausführlicher in Wien. Sitz.-Ber., Bd. 118, Ab. II a, 1909, S. 1609.

für Berggipfel nachgewiesen hat, scheint demnach auch an den Nachtagen der Temperaturextreme in höheren Schichten der freien Atmosphäre vorzukommen.

Der Widerspruch dieser Resultate, die aus verschiedenen Beobachtungen und auf sehr ungleiche Weise gewonnen wurden, kann zum größten Teil aufgeklärt werden (vgl. das nächste Kapitel). Doch sieht man aus ihnen schon so viel, daß die niedrigen und höheren Schichten für die Bodendruckänderungen von recht ungleicher und einander teilweise widersprechender Bedeutung sind.

Unter diesen Umständen war es sehr vorteilhaft, daß W. H. Dines<sup>1)</sup> die Atmosphäre in einen oberen und unteren Teil schied und diese beiden gesondert auf statistischem Wege untersuchte. Vermöge der Zweiteilung der Atmosphäre in Tropo- und Stratosphäre lag es nahe, als unteren Teil die erstere (bis zu 9 km Höhe), als oberen die letztere aufzufassen. Dines benützte hierbei die Ergebnisse einer großen Zahl von einzelnen europäischen Ballonaufstiegen. Aus ihnen leitete er nach der Korrelationsmethode Regeln über die Beziehungen der Veränderlichen zueinander ab. A. Schedler<sup>2)</sup> hat in ähnlicher Weise jene Aufstiege behandelt, welche an zwei aufeinanderfolgenden Tagen von demselben Ort aus stattfanden (Serienaufstiege). Aus diesen kann daher die wirkliche Variation der Größen von einem Tag zum andern entnommen werden.

Dines betrachtete die folgenden Größen:

1. Luftdruck am Boden,
2. Temperatur an der unteren Grenze der Stratosphäre,
3. Höhe der Troposphäre,
4. Luftdruck in 9 km Höhe,
5. Mitteltemperatur der untersten 9-km-Schichte.

Schedler hat die Änderungen dieser gleichen fünf Größen von einem Tag zum nächsten untersucht.

Versteht man unter  $r_{35}$  z. B. den Korrelationsfaktor zwischen der 3. und 5. Größe, so geben folgende Zahlen einige Resultate der beiden Autoren:

	Dines	Schedler		Dines	Schedler
$r_{12} =$	— 0,59	— 0,38	$r_{23} =$	— 0,65	— 0,47
$r_{13} =$	0,69	0,29	$r_{24} =$	— 0,49	— 0,33
$r_{14} =$	0,66	0,45	$r_{34} =$	0,83	0,73
$r_{15} =$	0,46	—	$r_{45} =$	0,92	0,87.

Die Sicherheit der durch diese Zahlen angegebenen Beziehungen wächst mit der Größe der Faktoren  $r$  und zugleich werden einfache Be-

1) Brit. Met. Off., Geophys. Mem. Nr. 2, The vertical Distribution of Temperature in the Atmosphere over England.

2) Beitr. z. Physik d. freien Atmosphäre, Bd. VII, S. 88.



ziehungen durch große  $r$  ausgedrückt. Wir betrachten daher die Faktoren der Größe nach. Der größte Faktor  $r_{45}$  gibt eine Tatsache wieder, die schon früher (S. 223) besprochen wurde und deren Entdeckung vielleicht die wichtigste Errungenschaft der neueren Meteorologie ist. Wie dort gesagt, ist es der ausgleichenden Wirkung der Erdoberfläche auf Druckdifferenzen zuzuschreiben, wenn über warmen Teilen der Troposphäre der Druck so regelmäßig hoch ist und umgekehrt. Diese ausgleichende Wirkung wird dann besonders stark, wenn der Temperaturgegensatz der Massen, die anfänglich nebeneinander unter hohem und tiefem Druck lagen, besonders groß war, da hierdurch der Auftrieb der warmen Massen und das Einströmen der kalten unter dieselben sehr erleichtert wird. Wir kommen hierauf noch zurück (S. 246).

Der zweitgrößte Faktor  $r_{34}$  besagt, daß in der Regel der Luftdruck in 9 km um so höher ist, je höher in der Säule die Stratosphären-grenze liegt. Eine sichere Erklärung dieser Regel steht noch aus, sie erinnert sehr an die durchschnittliche Verteilung von Luftdruck und Stratosphären-grenze längs eines Meridians. Während des Sommers ist nach Peppers Berechnungen (vgl. S. 186) der Luftdruck in 10 km Höhe in den Tropen um etwa 14 mm höher als in den gemäßigten Breiten; dabei liegt die Stratosphäre dort bedeutend höher als hier. Wenn nun über einem Orte zu verschiedenen Zeiten ähnliche Beziehungen gefunden werden, so ließe sich dies damit erklären, daß eine ganze Luftsäule, bestehend aus Tropo- und Stratosphäre zusammen, sich aus niedrigen Breiten in höhere und umgekehrt verlagert.

Andererseits ist es auch möglich, daß wir es hier mit einem Strahlungseffekt lokaler Art zu tun haben, daß z. B. die hohe Stratosphären-grenze sich unter günstigen Umständen in höheren Breiten ausbildet; in diesem Falle müßte die gleichzeitige Drucksteigerung in 9 km durch Erwärmung und Ausdehnung der Troposphäre darunter zustande kommen. Beides würde durch warmes klares Wetter begünstigt, wie es in unseren Hochdruckgebieten herrscht.

Eine Entscheidung darüber, ob das gleichzeitige Auftreten hohen Druckes in 9 km und hoher Lage der Stratosphäre auf lokalen Ursachen oder auf meridionaler Verlagerung der Luftsäulen beruht, scheint derzeit noch nicht möglich. Vielleicht kommt beides vor. Die gleichen zwei Ursachen können auch für die Beziehung zwischen Temperatur und Höhengrenze der Stratosphäre verantwortlich gemacht werden ( $r_{23}$ )<sup>1)</sup>. In 12 bis 15 km Höhe beträgt das Temperaturgefälle gegen den Äquator etwa  $\frac{1}{2}^{\circ}\text{C}$  auf den Meridiangrad.<sup>2)</sup> Bei meridionalen Verschiebungen der Luft kann die Temperatur also dort oben bedeutende Veränderungen

1) Vgl. auch Wagner a. a. O. und Wegener, Beitr. z. Physik d. freien Atmos. Bd. III, S. 206.

2) F. M. Exner, Met. Zeitsch. 1913, S. 429.

erleiden. Andererseits bewirkt die Strahlung, daß (vgl. S. 63) bei zunehmendem Gehalt der Atmosphäre an Wasserdampf die Höhe der Troposphäre wächst, die Temperatur der Stratosphäre aber abnimmt, so wie es die Beobachtungen zeigen.

Die Beziehung zwischen Temperatur der Stratosphäre und Luftdruck in 9 km Höhe ( $r_{24}$ ) erklärt sich ungezwungen aus den Korrelationen  $r_{23}$  und  $r_{34}$ . Der Faktor  $r_{34}$  ist kleiner als die beiden anderen, weil diese Beziehung durch die beiden anderen vermittelt wird. Der Umstand, daß über hohem Druck die Stratosphäre kalt ist und umgekehrt, führt dazu, daß mit weiter zunehmender Höhe sich die Druckanomalien wieder allmählich ausgleichen. Die relativ größten Druckanomalien sind daher an der Grenze von Strato- und Troposphäre zu erwarten.<sup>1)</sup>

Es bleiben noch die Korrelationen zwischen den Veränderlichen in der Höhe und dem Bodendruck zu besprechen. Sie sind insgesamt nicht besonders groß, so daß die Veränderung des Luftdrucks am Erdboden von keiner der betrachteten Variablen allein in hohem Maße beeinflußt wird. Dieser Umstand erschwert natürlich ungemein das Verständnis der Bodendruckschwankungen.

Differenziert man die barometrische Höhengleichung nach dem Luftdruck am oberen ( $p$ ) und unteren Ende ( $P$ ) der Säule und nach der Mitteltemperatur ( $T$ ), so wird

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{gh}{RT^2} \Delta T.$$

Man sollte hiernach erwarten, daß der Luftdruck am Boden durchschnittlich sowohl mit zunehmendem Druck  $p$ , als mit abnehmender Temperatur  $T$  zunimmt. Doch ist nach den statistischen Ergebnissen nur das erste der Fall, wenn man ohne Rücksicht auf die eine Veränderliche die Abhängigkeit des  $P$  von der anderen untersucht. Nach Dines ist die Abhängigkeit des  $P$  von  $p$ , das  $r_{14} = 0,66$ , die des  $P$  von  $T$  aber  $r_{15} = 0,46$  nicht etwa negativ, wie man erwarten sollte. Im Durchschnitt ist danach die Luft bis zu 9 km Höhe, welche über hohem Druck liegt, in Europa relativ warm, ganz wie dies Hann für die europäischen Antizyklen aus Gipfelbeobachtungen festgestellt hat. Der Druck am Boden ist relativ hoch, obwohl die Luft der untersten 9 km warm ist, der Druck in 9 km ist daher um so höher, wie ja oben schon mitgeteilt.

Wir müssen schließen: Es besteht zwar infolge der druckausgleichenden Wirkung der Erdoberfläche stets die Tendenz, daß unter hohem Druck in 9 km warme Luft liegt und umgekehrt. Da die Erdoberfläche aber nicht imstande ist, die Unterschiede des Bodendruckes völlig aus-

1) W. N. Shaw, Journ. Scot. Met. Soc., III Serie, Vol. 16, Nr. 30, 1913.

zugleichen, so bleibt durchschnittlich ein Rest des hohen Druckes von 9 km auch noch am Boden erhalten, trotz der hohen Temperatur darüber; daher das positive  $r_{15}$ .

Die Temperaturänderungen der untersten 9 km haben daher keine entscheidende Bedeutung für das Vorzeichen der Bodendruckänderungen. Die Druckschwankungen in der Höhe sind für dasselbe bestimmender, wie man übrigens auch aus der Zunahme des Wertes  $\frac{\Delta p}{p}$  mit der Höhe nach Schedlers Berechnungen erkennt (Tabelle S. 222).

Schreibt man nämlich die Druckänderung am Boden in der Form

$$\Delta P = \Delta p \frac{P}{p} - \frac{Pgh}{RT^2} \Delta T$$

und berücksichtigt, daß die wirklich vorkommenden  $\Delta p$  nach oben bis 10 km nicht abnehmen (vgl. jene Tabelle), so folgt, daß das erste Glied rechts in obiger Gleichung bedeutend größer ist als  $\Delta P$ ; damit dies möglich sei, muß  $\Delta T$  das Vorzeichen von  $\Delta p$  haben, das zweite Glied muß von dem ersten in Abzug kommen,  $\Delta P$  erscheint als kleine Differenz zweier großer Zahlen, was für die Voraussicht der Bodendruckänderungen sehr ungünstig ist. Denn die Änderungen von Druck in der Höhe und Temperatur darunter kompensieren sich der Hauptsache nach in ihrer Wirkung auf den Bodendruck; es scheint ziemlich zufällig zu sein, welche Wirkung im einzelnen Fall überwiegt, wenn auch die erstere häufiger ist.

Die Ursache der Druckschwankungen in 9 km Höhe liegt zweifellos zum Teil in Temperaturschwankungen darüber. Um zu erkennen, wie nun eigentlich ein hoher oder tiefer Druck am Boden zustande kommt,

welche Schichten hierfür ausschlaggebend sind, hat A. Schedler (a. a. O.) den mittleren Einfluß der Temperaturveränderungen der Kilometerschichten bis zu 14 km berechnet. Die folgenden Zahlen geben die Druckänderungen am Boden in mm Hg, hervorgebracht durch Schichten von je 1 km Dicke; ihre Summe gibt die Druckänderung am Boden, wie sie sich im Mittel aus einer größeren Zahl von Simultanaufstiegen herausstellte.

Schichte	Beiträge der Schichten, wenn am Boden der Druck steigt fällt	
Erde — 1 km	0,24 mm	— 0,34 mm
1 — 2	0,12	— 0,26
2 — 3	0,16	— 0,18
3 — 4	0,01	0,04
4 — 5	— 0,09	0,04
5 — 6	— 0,12	0,11
6 — 7	— 0,16	0,15
7 — 8	— 0,24	0,04
8 — 9	— 0,02	0,01
9 — 10	0,37	— 0,25
10 — 11	0,70	— 0,51
11 — 12	0,89	— 0,10
12 — 13	0,36	0,08
13 — 14	0,29	0,13
Restglied	2,77	— 2,17
Summe	5,28	— 3,21

Der recht regelmäßige Gegensatz im Vorzeichen der beiden Reihen läßt trotz der Kleinheit der Zahlen verläßlich erkennen, daß die Temperaturänderungen der untersten 3 km dem Vorzeichen nach die Änderungen des Bodendrucks unterstützen, daß die Schichten von hier bis zum Ende der Troposphäre (etwa 9 km) hingegen den Bodendruckänderungen direkt entgegenarbeiten, während im Gebiet der Stratosphäre der Sitz der eigentlich wichtigen Temperaturänderungen ist; und zwar liefert die Substratosphäre große Beiträge zu den Bodendruckschwankungen, die größten stammen aber aus der Höhe über 14 km; sie kommen durch die Restglieder zum Ausdruck, welche stets das Vorzeichen der Bodendruckänderungen besitzen. Ob diese Restglieder durch Temperaturschwankungen oberhalb 14 km entstehen oder durch lokale Luftaufhäufungen, ob sie also thermisch oder dynamisch verursacht sind, kann jetzt, wie schon oben bemerkt, nicht entschieden werden. Auch ist es noch immer möglich, daß sich diese Restglieder zum Teil als Fehler in der Reduktion der Ballonregistrierungen herausstellen werden. Doch läßt sich schließen, daß die europäischen Bodendruckschwankungen ihren Sitz zum größten Teil in der Stratosphäre haben und die Troposphäre im Durchschnitt einen ausgleichenden, mäßigenden Einfluß auf die Druckveränderungen dort oben besitzt. Allerdings werden wir im nächsten Kapitel in den böenartigen Erscheinungen Ausnahmen von dieser Regel begegnen.

Auch ist es wahrscheinlich, daß die obigen Ergebnisse, die für Europa gelten, nicht ohne weiteres verallgemeinert werden dürfen. In Nordamerika mögen die höheren Schichten keine so große Rolle bei den täglichen Druckschwankungen spielen wie hier. Die unperiodischen Veränderungen scheinen dort zum Teil in niedrigeren Schichten vor sich zu gehen, wie daraus erhellt, daß man häufiger als in Europa aus der gegenseitigen Lage von Isobaren und Isothermen an der Erdoberfläche einen richtigen Schluß auf die Druckveränderung ziehen kann (vgl. S. 229).<sup>1)</sup>

1) F. M. Exner, Sitzber. Wien. Akad. Bd. 115, Abt. IIa, 1906, S. 1171.

## Zwölftes Kapitel.

### Unperiodische Veränderungen in synoptischer Darstellung.

**72. Kälteeinbrüche und Gewitterböen.** Einer der wichtigsten meteorologischen Vorgänge ist das Eindringen kalter Luft in ein wärmeres Gebiet. Vermöge ihres größeren spezifischen Gewichtes hat die kalte Masse das Bestreben, sich unter die wärmere auszubreiten. Dabei kommt sie entweder von der Seite oder von oben. Das Ergebnis ist in beiden Fällen ein Sinken der kalten, ein Steigen der warmen Luft, mithin ein Sinken des Schwerpunktes der gesamten Masse, ein Verlust potentieller Energie, aus dem sich nach Abschnitt 48 die Entstehung beträchtlicher lebendiger Kraft erklären läßt. Der Kälteeinbruch ist in diesem Sinn die allgemeine Bedingung zur Entstehung von Stürmen überhaupt, und seine große Bedeutung ist damit schon gekennzeichnet.

Man bezeichnet den Vorgang auch häufig als „Böe“; der Wechsel der Windrichtung und die Zunahme der Windstärke bilden mit der Abkühlung zusammen die wichtigsten Merkmale der Erscheinung. Aus dem häufig gleichzeitig auftretenden Barometeranstieg (der Gewitternase) schloß man, daß die kalte Luft von der Seite her am Boden vordringt und die dort lagernde warme verdrängt.<sup>1)</sup> Die ersten Beobachtungen dieser Art wurden im Gebirge gemacht. Indem die kalte Masse gegen einen Berghang strömt, erscheint sie anfangs am Fuß desselben, später erst in der Höhe, scheint sich also keilförmig unter die vorliegende warme Masse zu schieben und dabei allmählich anzuschwellen. Die Drucksteigerung  $\Delta P$  am Boden entspricht einer Abnahme der Mitteltemperatur  $\Delta T$  der Luftsäule  $h$ ; aus  $\Delta P$  und  $\Delta T$  kann man mittels der statischen Grundgleichung die Höhe des Kälteeinbruches berechnen, wenn man annimmt, daß oberhalb der kalten Masse der Druck der gleiche geblieben ist. So erhält man leicht:

$$h = - \frac{RT^2}{Pg} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta T}.$$

M. Margules<sup>2)</sup> und H. v. Ficker<sup>3)</sup> haben diese „statische Theorie der Druckstufen“ näher studiert und u. a. gefunden, daß die kalte Luft

1) Die ersten Untersuchungen über die Dynamik der Böen verdanken wir W. Köppen (Annal. d. Hydrogr. 1882) und M. Möller (Deutsche Met. Zeitsch. 1884). Eine neue Übersicht gibt Köppen in Annal. d. Hydrogr. 1914, S. 303.

2) Met. Zeitsch. 1898, S. 2.

3) Denkschr. Wien Akad., Bd. 80, S. 132, 1906; nach Ficker ist die Stauung kalter Luft auch die Ursache der eigentümlichen Keile hohen Druckes an der Nordseite der Alpen.

bis über die Höhe der Alpen anschwellen kann, daß aber in der Höhe dabei der Druck häufig abnimmt; dies entspricht den statistischen Ergebnissen im vorigen Kapitel. Der seitliche Zufluß kalter Luft am Boden scheint häufig von einem Zufluß besonders warmer Luft in der Höhe begleitet zu sein, die Druckstufe am Boden wird hierdurch vermindert, ja sie kann auch ganz fehlen; in diesen Fällen erhält man natürlich  $h$  nach obiger Formel zu klein.

Später hat W. Schmidt<sup>1)</sup> durch Laboratoriumsversuche gezeigt, daß die kalte Luft nicht wirklich keilförmig unter die warme dringt, sondern an der Spitze eher höher ist, so daß ein „Kopf kalter Luft“ vorstößt,

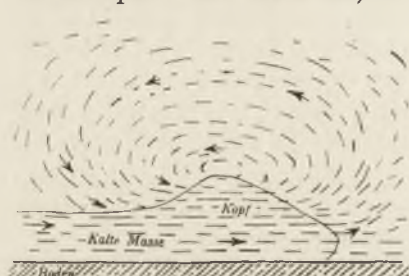


Fig. 53.

hinter dem dann eine Einschnürung folgt. Der Kopf verdrängt die warme Luft seiner Begrenzung entlang nach oben und rückwärts, wodurch die häufigen Kondensationsvorgänge bei Gewitterböen erklärlich werden. Die warme oben rückströmende Luft verursacht den Druckfall in der Höhe, von dem eben die Rede war. Ein Durchschnitt durch die Massen längs der Fortpflanzungsrichtung wird in Fig. 53 gegeben.<sup>2)</sup> Die ausgezogene Linie ist die Begrenzung der kalten Masse. Die kleinen Striche geben Richtung (Pfeile) und Größe der augenblicklichen Bewegung an. Die kalte Luft breitet sich von links nach rechts auf ebener Unterlage aus.

Die Grenzfläche zwischen den verschiedenen temperierten Luftmassen ist zunächst eine Diskontinuitätsfläche, da die tangentielle Geschwindigkeit beim Übergang von Kalt zu Warm einen Sprung macht. Helmholtz<sup>3)</sup> hat gezeigt, daß infolge der inneren Reibung an solchen Flächen Aufrollungen und Wirbel entstehen. Auch Sandström<sup>4)</sup> hat sich mit ihnen beschäftigt. Nach ihm nimmt die Intensität der Erscheinung ab

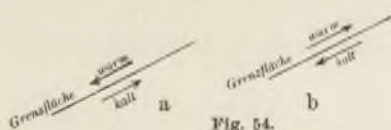


Fig. 54.

oder zu, je nachdem die kalte Masse sich der Grenzfläche entlang nach aufwärts oder abwärts bewegt (vgl. Fig. 54, wo nur die relativen Geschwindigkeiten im vertikalen Querschnitt gezeichnet sind). Nur im letzteren Falle sind Stürme zu erwarten, was in Übereinstimmung mit Traberts<sup>5)</sup> Ergebnissen steht, nach welchen lokale Gewitter sich vorwiegend talabwärts bewegen.

1) Wien. Sitz.-Ber., Bd. 119, Abt. IIa, 1910, S. 1101.

2) Aus W. Schmidt, Met. Zeitsch. 1911, S. 357.

3) Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen; Abhandl. Bd. I, S. 146, 1882.

4) Kungl. Svensk. Vet. Akad. Handl. Bd. 45, Nr. 10, 1910 und Arch. f. Mat., Astr. och Fysik, Bd. 7, Nr. 30, 1912.

5) Met. Zeitsch. 1903, S. 575.

Wenn sich dem Kälteeinbruch ein Gebirgszug in den Weg stellt, kann dieser nur überschritten werden, falls die nachdringende kalte Masse genügend Bewegungsenergie hat oder hoch genug ist, um die vordersten Teile bis zum Kamm des Gebirges zu heben. Strömt dagegen die kalte Masse von einem Gebirge oder Plateau in die Tiefe, dann ist die frei werdende Bewegungsenergie umso größer, wie dies z. B. an der Bora beobachtet wird. Ein schönes Beispiel für eine solche Erscheinung hat Sandström (a. a. O.) gegeben. Es betrifft das Abstürzen kalter Luft an der norwegischen NW-Küste vom Gebirge zum Meere; als Ersatz strömt die warme Ozeanluft in der Höhe vom Meere nach dem Inneren des Landes. Dieser Vorgang wird geradezu mit einem Wasserfall verglichen.<sup>1)</sup> Fig. 55 zeigt nach Sandström die schematische Verteilung der Geschwindigkeiten.

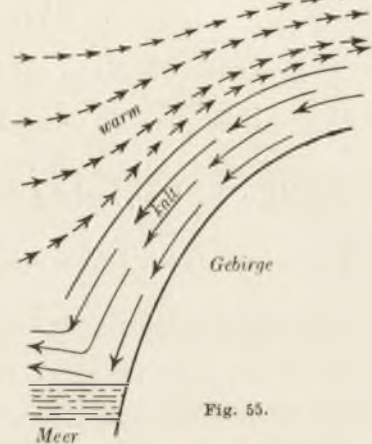


Fig. 55.

Bewegt sich die kalte Luft auf ebenem Boden, so schöpft sie ihre Bewegungsenergie aus dem Verlust an potentieller Energie beim Zusammensinken in sich selbst. Denn mit der Ausbreitung ist zugleich ein Niedrigerwerden der kalte Masse verbunden, was sich, wie Ficker<sup>2)</sup> zeigte, in einer allmählichen Abnahme der Druckstufe, welche meist den Kälteeinbruch begleitet, äußert. Dementsprechend ist auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kältewelle umso größer, je höher sie reicht. Sie beträgt bei Gewittern sowohl wie bei den von Ficker untersuchten großen Kälteeinbrüchen in Asien etwa 40 km/St.

Theoretisch läßt sie sich analog der Ausflußgeschwindigkeit von Flüssigkeiten berechnen.<sup>3)</sup> An der vorderen Grenzfläche zwischen kalter und warmer Luft wird die kalte einen Abtrieb, die warme einen Auftrieb erfahren, welcher sich aus der Gleichung S. 47 finden läßt. Die Fallgeschwindigkeit der kalten Luft setzt sich in eine horizontal nach vorn gerichtete Bewegung um, in die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Kälteeinbruches. Auf S. 47 war  $\frac{d^2z}{dt^2} = g \frac{T - T'}{T}$ ; hier ist unter  $T$  die absolute Temperatur der kalten, unter  $T'$  die der warmen Masse zu verstehen. Sei zur Vereinfachung  $T$  und  $T'$  von  $z$  unabhängig und  $T' - T = \tau$

1) Durch die Beladung der kalten Masse mit Schnee wird die Intensität des Sturmes noch gesteigert.

2) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 119, Abt. IIa, 1910, S. 1769.

3) F. M. Exner, Wien. Sitz. Ber. Bd. 120, Abt. IIa, 1911, S. 181 und W. Schmidt, Met. Zeitsch. 1912, p. 103; letzterer hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit auch experimentell bestimmt (s. oben).

die Abkühlung, welche der Einbruch der kalten Luft hervorbringt, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = - \frac{g\tau z}{T'} + \text{konst.}$$

In der Höhe  $h$ , bis zu welcher die kalte Masse reicht, ist die vertikale Geschwindigkeit null, folglich wird  $\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2g\tau}{T'}(h-z)}$ .

Die Ausbreitung nach vorne wird nun ungefähr mit jener Geschwindigkeit  $v$  erfolgen, welche die kalte Masse im Mittel an ihrer Vorder-

fläche besitzt; wir bilden somit  $v = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{dz}{dt} dz = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2g\tau h}{T'}}$ . Setzen wir

hier statt der unbekanntenen Höhe  $h$  der kalten Masse den Ausdruck von S. 239 ein, wobei  $\tau = -\Delta T$ , so wird  $v = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2RT^2}{PT'} \Delta P}$ . Somit läßt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kältewelle aus der Druckstufe  $\Delta P$  berechnen. Wir vernachlässigen den Unterschied von  $T$  und  $T'$ , setzen  $T = 273^\circ$ ,  $P = 760$  mm und erhalten, wenn die Druckstufe in mm Hg angegeben wird:  $v = 9,6 \sqrt{\Delta P}$  m/sec =  $34,5 \sqrt{\Delta P}$  km/St.

Dies stimmt mit den Beobachtungen gut überein, wie Schmidt (a. a. O.) darlegte.<sup>1)</sup>

Über die Richtung, nach welcher die kalten Massen sich ausbreiten, ist man namentlich durch Fickers Studien (a. a. O.) der Kälteeinbrüche in Rußland und Nordasien orientiert. Von vorneherein wäre zu erwarten, daß die kalte Masse fächerförmig unter die warme fließt. Verschiedene Einflüsse wirken dann dahin, daß gewisse Richtungen für die Bewegung bevorzugt werden.

Der Ausgangspunkt der Kältewellen ist auf der nördlichen Halbkugel vorwiegend das Polarbecken (Eismeer). Von hier aus bricht die kalte Luft zunächst mit einer südlichen Komponente gegen den Nordrand von Europa-Asien oder Amerika ein. Zugleich wird sie durch die Erdrotation nach Westen abgelenkt; tatsächlich kommen viele Kälteeinbrüche aus NE, wie insbesondere in Mitteleuropa.<sup>2)</sup> Von großem Einfluß auf die weitere Bewegung der kalten Massen ist nun einerseits die Bodengestaltung (Gebirge wirken abdämmend), andererseits die vorherrschende Luftbewegung in der Höhe, die ja zumeist von West nach Ost gerichtet ist. Durch diese allgemeine Zirkulation scheint auch die kalte Masse schließlich gegen Osten getrieben zu werden. Ficker entdeckte solche Bewegungen kalter Massen von W gegen E durch ganz Asien bis zum stillen Ozean. Die warme Luft, in welche die kalte eindringt, überträgt

1) Vgl. auch Hanns Lehrbuch, 3 Aufl., S. 705.

2) Vgl. neben Ficker auch Feßler, Met. Zeitsch. 1910, S. 1.



offenbar vermöge ihrer bedeutenderen Masse ihre Bewegung auf die unter und neben ihr lagernde viel niedrigere kalte. So kommt es, daß zahlreiche Kälteeinbrüche, die Ficker untersuchte, angenähert einen Bogen von NE gegen SW, dann S, SE und E beschreiben, ganz ähnlich wie die Trajektorien der Luftmassen, welche aus dem Norden einer ostwärts wandernden Zyklone deren Zentrum zustreben (Fig. 45, S. 209). Außerdem wird die Bewegung der kalten Masse wohl noch durch die Luftdruckverhältnisse in größeren Höhen beeinflußt, worauf wir später zurückkommen.

**73. Wärmewellen.** Ähnlich, wie an einem Orte kalte Luftmassen einbrechen, können dies auch warme Massen tun, so daß die Temperatur in kurzer Zeit um erhebliches steigt. Mit der Untersuchung derartiger Wärmeeinbrüche oder „Wärmewellen“ hat sich gleichfalls v. Ficker<sup>1)</sup> beschäftigt. Seine aus den Beobachtungen in Nordeuropa und Asien abgeleiteten Resultate sind von grundlegender Bedeutung.

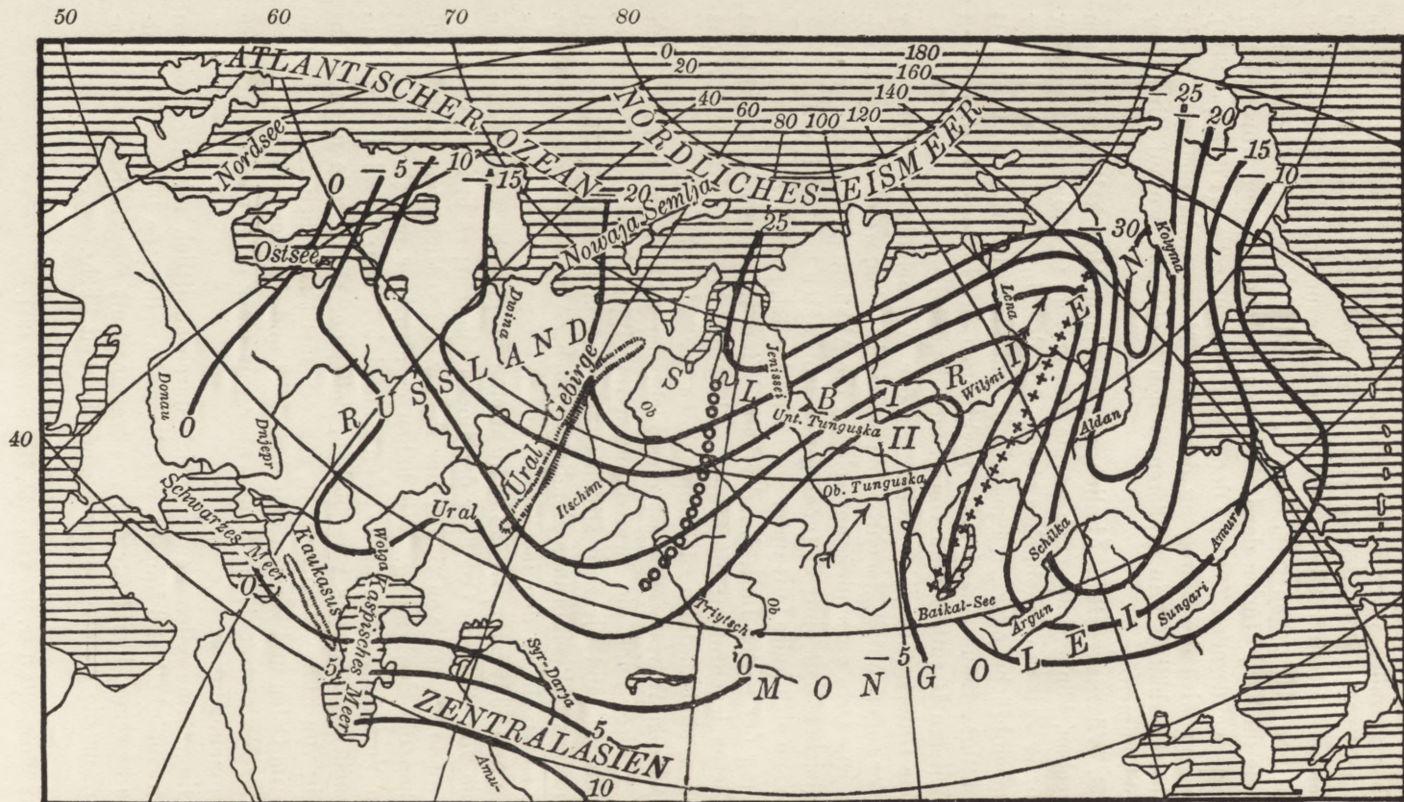
Zur Untersuchung der Kälte- wie der Wärmeeinbrüche bediente er sich der sogenannten „Isochronen“; das sind Linien, welche auf der Landkarte jene Orte verbinden, an welchen die Abkühlung, bzw. Erwärmung zur gleichen Zeit eintritt (analog den Isobronten bei Gewittern).

Wenn sich kalte Luft unter warme ausbreitet, so steht die Bewegungsrichtung der kalten Luft, d. i. der kalte Wind, im allgemeinen senkrecht auf diesen Isochronen; die Linien, welche den Weg des Kälteeinbruchs angeben, sind zugleich Strömungslinien der kalten Masse.

Bei den Wärmewellen ist dies nicht der Fall. Zwar pflanzen sich nach Ficker auch die Erwärmungen im allgemeinen von W nach E, oft von Rußland bis zum stillen Ozean fort und die Isochronen sehen jenen eines Kälteeinbruchs ziemlich ähnlich. Aber der Wind weht nicht mehr senkrecht zu den Isochronen aus Westen, sondern wesentlich aus Süden und Südwesten, so daß es nicht eine und dieselbe warme Luftmasse ist, die von West bis Ost über den Boden hinweht; es bringen vielmehr stets neue Massen von Süden her den weiter östlich gelegenen Landstrichen die Erwärmung. Wir haben es also hier mit einem ganz anderen Vorgang zu tun als bei den Kälteeinbrüchen; er wird durch die Beobachtung Fickers verständlich, daß eine Wärmewelle nicht unabhängig von Kältewellen auftritt, sondern meist zwischen zwei kalte Gebiete im Osten und Westen eingebettet ist und sich zungenförmig gegen N oder NE erstreckt, im Süden aber mit einer großen warmen Masse zusammenhängt.

Die Wärmewellen bewegen sich durchschnittlich mit der gleichen Geschwindigkeit (33 km/St.) wie die Kältewellen; da letztere sich ostwärts bewegen, bleibt für den von warmer Luft ausgefüllten Zwischenraum nur die gleiche Bewegungsmöglichkeit übrig.

1) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 120, Abt. IIa, S. 745, 1911.



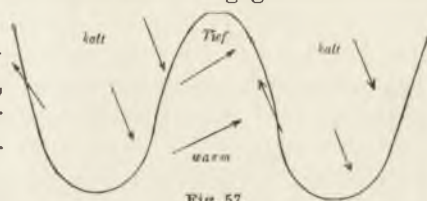
Isothermen des 3. December 1901. (Längs der ++++ Linie ist rasche Erwärmung, längs der ooooo Linie ist rasche Abkühlung im Gange.)

Fig. 56.

Die folgende Isothermenkarte (Fig. 56) gibt ein Beispiel für eine derartige Temperaturverteilung (aus Ficker, S. 791).

Von besonderem Interesse ist die Verteilung des Windes an der Erdoberfläche; sie wird schematisch durch Fig. 57 (nach Ficker) dargestellt. Die kalten Winde wehen aus dem kalten Gebiet an dessen Vorderseite (Ostseite) gegen SE, an der Rückseite gegen NNW, die warmen wehen gegen NE.

In der kalten Masse besteht somit ein antizyklonales Windsystem, während die warme Masse mit der westwärts liegenden kalten ein zyklonales System bildet.



Reicht eine Zunge kalter Luft von Norden nach Süden und breiten sich infolge des höheren spezifischen Gewichtes die kalten Massen am Boden aus, so folgt mittelst der ablenkenden Kraft der Erdrotation bei Reibung sowohl der NW- wie der SE-Wind. Die Herkunft des warmen SW-Windes hingegen läßt sich aus gleichzeitigen Beobachtungen anderer Art einigermaßen erschließen. Ficker fand nämlich, daß der warme Wind ziemlich feucht ist; seine hohe Temperatur kann daher nicht etwa auf eine Föhnwirkung zurückgeführt werden. Auch war ein Wärmeeinbruch meist mit Zunahme, ein Kälteeinbruch mit Abnahme der Bewölkung verbunden, so daß bei ersterem eher aufsteigende, bei letzterem absteigende Bewegung anzunehmen ist.

Infolgedessen stammen vermutlich die warmen SW-Winde vom Ozean; es sind die normalen Winde der allgemeinen Zirkulation in höheren Breiten, die zwar stets vorhanden sind, aber zeitweise durch die eindringenden kalten Massen vom Boden abgehoben werden und dann über letztere hinwegfließen. Ficker sieht im Ineinandergreifen dieser warmen und kalten Massen ein Glied der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre, das den Luftaustausch zwischen polaren und niedrigeren Breiten vermittelt (vgl. S. 181).

Die Wärmewellen treten in der Mehrzahl der Fälle mit fallendem Luftdruck auf, die Kältewellen mit steigendem; dann sind offenbar die Druckschwankungen durch die untersten Schichten bedingt und die Vorgänge besonders einfach (vgl. Abschnitt 70). Aus Beobachtungen im Gebirge fanden Margules und Ficker, wie oben erwähnt<sup>1)</sup>, daß bei Kälteeinbrüchen der Druck in der Höhe häufig fällt. Vermutlich trifft dies auch bei den großen derartigen Vorgängen in Asien und Amerika zu; es wird wieder eine teilweise Kompensation der Drucksteigerung unten durch Druckabnahme oben stattfinden.

Wenn man auch in solchen Kompensationen die ausgleichende Wir-

1) a. a. O. S. 291.

kung der Erdoberfläche auf Druckunterschiede sehen muß (vgl. Abschnitt 71), so bleibt doch immer das gleichzeitige Auftreten besonders kalter neben besonders warmen Luftmassen, wie es aus Fickers Beobachtungen hervorgeht, eine sehr bemerkenswerte Erscheinung. Der Einbruch kalter Luft aus dem Norden wird, wie schon oben angemerkt, offenbar begünstigt oder ermöglicht, wenn die in niedrigeren Breiten vorliegenden Luftmassen besonders warm sind; dann ist der Auftrieb der letzteren besonders groß, die kalten können sich am leichtesten unter die warmen ausbreiten, die Bewegung ist vom stationären Zustand am weitesten entfernt. Je größer die Temperaturdifferenzen, desto größer ist auch die bei der Umlagerung frei werdende kinetische Energie, desto mächtiger also die ganze Erscheinung. Dieser ursächliche Zusammenhang zwischen dem Auftreten besonders kalter und besonders warmer Massen zur gleichen Zeit nahe beieinander ist von größter Bedeutung und wird auch dort, wo es sich um bedeutend höhere Luftschichten handelt, seine Rolle spielen; er sprach sich u. a. in den Korrelationen der Veränderlichen in Abschnitt 71 aus.

Auf den Zusammenhang der Wärme- und Kältewellen mit der Luftdruckverteilung kommen wir später zurück.

**74. Die Auslösung von Kälteeinbrüchen.** Wie Margules (vgl. Kapitel 17) zeigte, entstehen Stürme vorwiegend aus einem Sinken der kalten, einem Steigen der warmen Luft. Dabei handelt es sich entweder um eine Umlagerung von Massen, die übereinander (Beispiel 1, S. 137) oder von Massen, die nebeneinander liegen (Beispiel 2, S. 139). Im ersten Fall ruht die Luft anfänglich, das Gleichgewicht der Massen in vertikaler Richtung ist labil; im zweiten Fall können die Massen in Bewegung sein, der Zustand an ihrer Grenzfläche ist aber nicht stationär (vgl. Abschnitt 54). Wir haben es also beim Eintreten der Kältewellen entweder mit einer Störung des Gleichgewichtes ruhender Luft oder mit einer des stationären Bewegungszustandes zu tun.

Bei labilem Gleichgewicht ruhender Luft genügt bekanntlich die geringste vertikale Bewegung, um einen Umsturz der Massen hervorzurufen. Der Übergang von stabilem zu labilem Gleichgewicht liegt bei dem Temperaturgradienten von  $1^{\circ}$  pro 100 m. Sobald dieser nur ein wenig wächst, wird der Zustand labil. Eine Zunahme des Temperaturgradienten kann entweder durch Erwärmung der unteren oder durch Abkühlung der oberen Schicht zustande kommen. Die erste wird durch die Sonnenstrahlung bewirkt, welche die bodennahen Luftschichten namentlich im Sommer erhitzt. Die Gewitterböen an heißen Sommertagen werden daher aus solchen labilen Zuständen hervorgehen. Wie Roschkott<sup>1)</sup> aus Beobachtungen in Tirol zeigte, werden durch die

1) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 121, Abt. IIa, 1912, S. 2635.

Sonnenstrahlung nicht nur die Luftmassen im Tal, sondern auch jene an den Berghängen erwärmt, so daß nicht nur die Temperatur in vertikaler Richtung überadiabatisch abnimmt, sondern auch horizontale Temperaturgradienten in der Höhe entstehen, welche den Umsturz der Massen begünstigen.

Die Abkühlung der oberen Schichten andererseits erfolgt nach den Ausführungen der Abschnitte 28 und 51 unter günstigen Umständen durch die Ausstrahlung der Atmosphäre gegen den Weltraum, so daß in den untersten 3 km überadiabatische Gradienten entstehen. Durch die so veranlaßten Umwälzungen glaubt Emden (a. a. O.) die nächtlichen Gewitterböen über den Meeren erklären zu können; doch fehlen noch nähere Kenntnisse hierüber.

Im allgemeinen scheinen die Störungen des vertikalen Gleichgewichts durch Strahlungsverhältnisse nur Anlaß zu kleineren lokalen Gewittern und Böen zu geben. Bei den Frontgewittern und Kälteeinbrüchen hingegen, wie letztere namentlich im Norden von Asien und Amerika auftreten, dürfte es sich um Störungen des stationären Bewegungszustandes von horizontal aneinander grenzenden Massen verschiedener Temperatur handeln. Hierfür spricht einerseits, daß labile Gleichgewichtsverhältnisse in der Atmosphäre schwer über großen Arealen der Erde zur Ausbildung gelangen können, da schon eine geringe Störung zum Umsturz führt, andererseits, daß die großen Kältewellen, wie namentlich Ficker zeigte, stets in Verbindung mit Wärmewellen auftreten, was von vornherein erwarten läßt, daß das gemeinsame Erscheinen kalter und warmer Massen kein Zufall ist.

Im 8. und 9. Kapitel wurden die stationären Zirkulationen der Luft um die Erde betrachtet. Grenzschichten zwischen kalter und warmer Luft fanden wir dort nahe den Polen und an der Äquatorialgrenze der Passatwinde. In beiden Fällen liegt die kalte Luft im stationären Zustand keilförmig unter der warmen und besitzt relativ zu dieser eine Geschwindigkeit von Osten nach Westen. Von der Rolle der dabei auftretenden Grenzfläche in den Tropen wissen wir fast nichts; das folgende bezieht sich hauptsächlich auf die Grenzfläche in den Polargegenden, die wohl auch die wichtigere ist.

Nun wurde gezeigt, daß eine ganz bestimmte Beziehung zwischen Windstärke und Temperatur erforderlich ist, um die Bewegung an der Grenzfläche der ungleich temperierten Massen stationär zu erhalten. Sowohl, wenn die relative Ostwestbewegung der kalten Luft nachläßt, als auch, wenn bei Erhaltung dieser Bewegung die Temperaturdifferenz der aneinander grenzenden Massen sich vergrößert, tritt eine Veränderung des Bewegungszustandes ein und die kalte Luft breitet sich weiter unter die warme aus. In diesen beiden Fällen ist also die Bedingung für den Kälteeinbruch gegeben.

Helmholtz<sup>1)</sup> hat schon im Jahr 1888 die erste derselben, die Verringerung der relativen Ostwestbewegung der kalten Luft, als die Ursache der Kälteeinbrüche, und, wie später näher ausgeführt wird, auch der Depressionen höherer Breiten hingestellt. Er schrieb damals: „Die kalten Schichten werden am Boden auseinanderzuströmen streben und Ostwinde (beziehlich Antizyklone) bilden. Über ihnen werden die wärmeren oberen die Lücke ausfüllen müssen und sich als Westwinde (oder Zyklone) halten. Dadurch würde es zu einem Gleichgewicht kommen können, ... wenn nicht die unteren kalten Schichten durch Reibung schnellere Rotationsbewegung gewinnen und dadurch zu weiterem Vorrücken befähigt würden ... Die Ausbreitung der polaren Ostwinde, wenn auch in den Hauptzügen erkennbar, geht verhältnismäßig sehr unregelmäßig vor sich, da die Kältepole nicht mit dem Rotationspol der Erde zusammenfallen und niedrige Gebirge großen Einfluß haben ... Durch solche Unregelmäßigkeiten wird es bedingt sein, daß die antizyklonische Bewegung der unteren und der große allmählich wachsende Zyklon der oberen Schichten, die am Pole zu erwarten wären, sich in eine große Zahl unregelmäßig fortwandernder Zyklone und Antizyklone mit Übergewicht der ersteren auflösen“.

Die Polarforschungen haben tatsächlich eine große Häufigkeit der E- und NE-Winde in jenen Gegenden ergeben. Regelmäßige östliche Winde sind nicht zu erwarten, da durch die häufigen sich gegen Osten fortbewegenden Kälteeinbrüche die Regelmäßigkeit stets gestört wird. Ebenso ist eine scharfe Grenzfläche zwischen Kalt und Warm nicht vorhanden, da an ihr eben stets Vermischungen eintreten; doch beweisen die großen Temperatursprünge, welche den Wechsel der Winde dort begleiten, daß sehr starke horizontale Temperaturgradienten bestehen. So steigt im Mittel in der Teplitzbai auf Franzjosefsland (81° 47,5' n. Br., 57° 56' ö. L.) die Temperatur um 6,2°, wenn der Wind aus NE in den

Südquadranten dreht, sie fällt um 8,3°, wenn der Wind aus S in den Nordquadranten umschlägt.

Obwohl wir demnach nie den stationären Zustand beobachten, sondern stets Störungen desselben, so prägt sich doch im Mittel jener Zustand in den Beobachtungen aus, allerdings recht verflacht. Fig. 58 stellt denselben schematisch im

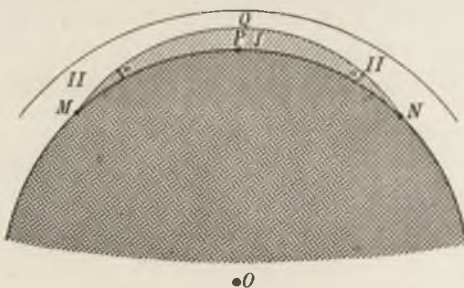


Fig. 58. O Erdmittelpunkt, P Nordpol,  
M O P N Erdkörper.

Gebiet der Polarkalotte dar; I bezeichnet die kalte, II die warme Masse,  $\alpha$  den Keilwinkel des stationären Bewegungszustandes.

1) Berliner Sitz.-Ber. 1888 oder Met. Zeitsch. 1888.

Wir betrachten nun jene Störungen desselben, welche durch Hemmung der Luftbewegungen an der Erdoberfläche, durch Reibung im allgemeinsten Sinne entstehen. Solche Effekte müssen überall und stets auftreten, wo eine Grenzfläche die Erde berührt, wenn auch in beschränktem Maße, da die Bewegung stets durch den Boden verzögert wird; sie werden in verstärktem Maße dort stattfinden, wo die Hemmung der Luftbewegung durch die Konfiguration der Erdoberfläche, namentlich durch Gebirgszüge, besonders groß ist.

Die Größe des Winkels  $\alpha$ , welcher dem stationären Zustand entspricht, ist S. 155 abgeleitet. Man kann nun untersuchen<sup>1)</sup>, um wie viel der Keilwinkel kleiner wird, wenn die Ostbewegung der kalten Masse I relativ zur Bewegung der Masse II infolge der Reibung abnimmt. Man findet durch Differentiation obiger Gleichung, da  $dv = -kvd t$ :

$$\Delta(\operatorname{tg} \alpha) = -\frac{2\omega \sin \varphi}{g} T \frac{\beta}{\gamma} k \Delta t,$$

wo  $T$  das Mittel aus der Temperatur beider Massen,  $\beta$  die Differenz ihrer Geschwindigkeiten und  $\gamma$  die ihrer Temperaturen ist;  $k$  ist der Reibungskoeffizient,  $t$  die Zeit. Die Trennungsfläche neigt sich also allmählich gegen die Horizontale, proportional der Größe der Reibung, die kalte Masse schiebt sich äquatorwärts vor.

Nun entsteht die Frage, um wie viel bei dieser Senkung die potentielle Energie der Massen abnimmt; ist die Abnahme groß genug, um die Entstehung jener Stürme zu erklären, welche Böen, Kälteeinbrüche und Depressionen begleiten? Die Frage ist an Hand der Untersuchungen von Margules zu beantworten (Abschnitt 47). Zur Orientierung darüber ziehen wir jene Masse in Betracht, welche längs der Breitenkreise bei etwa  $70^\circ$  in einer vertikalen Dicke von 500 m und einer nordsüdlichen Erstreckung von 100 km der Erde aufliegt. Sie sei durch eine Trennungsfläche in eine untere kalte und eine obere warme Masse geteilt, deren Temperatur um  $10^\circ$  differiert; bei einer Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Massen von 15 m/sec ergibt sich der Keilwinkel des stationären Zustandes zu  $\alpha = 18'$ .

Während der Veränderung der potentiellen Energie  $E$  durch Verkleinerung des Keilwinkels  $\alpha$  bleiben die beiden Massen I und II konstant; das ist bei der Variation jener Größe zu berücksichtigen. Nun bilden wir:  $\frac{dE}{d\alpha} \Delta \alpha = -\frac{M}{2} \Delta v^2$ , wo  $M$  die gesamte Masse,  $\Delta v$  die mittlere Geschwindigkeit bedeutet, welche aus der frei werdenden potentiellen Energie entsteht. Aus den beiden Gleichungen folgt dann diese Ge-

1) F. M. Exner, Wien, Sitz.-Ber., Bd. 120, Abt. IIa, 1911, S. 1411.

schwindigkeit  $\Delta v$  als Funktion von  $\beta k \Delta t$ , der auf die Bewegung wirkenden Reibung.<sup>1)</sup>

Wird die potentielle Energie nach dem Vorgang von Margules wirklich berechnet und deren Variation nach  $\alpha$  gebildet, so erhält man das gesuchte  $\Delta v$ . Wir übergehen die Rechnung und geben hier nur das Resultat an: Setzt man im obigen Beispiel  $k = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ , was (vgl. S. 100) der Reibung in recht unebenen Binnenländern entspricht, so erhält man eine mittlere freiwerdende Geschwindigkeit von 1 m/sec innerhalb einer Stunde. Die produzierte lebendige Kraft ist natürlich über die Masse nicht gleichmäßig verteilt, so daß stellenweise weit größere Geschwindigkeiten in einer Stunde erzeugt werden müssen.

Durch die Reibung der Luft am Boden ist also an dem unteren Ende von Grenzflächen stets Anlaß zur Entstehung von lebendiger Kraft gegeben. Die hemmende Wirkung eines Gebirgszuges oder eines aus dem Meere aufragenden Festlandes auf östliche kalte Winde fällt unter den gleichen Gesichtspunkt, nur wird dort die Reibung  $k$  bedeutend größer als  $10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  sein, wodurch auch die produzierte mittlere Geschwindigkeit dort größer wird, als sie oben gefunden wurde. Die Produktion der lebendigen Kraft der Stürme wird so eine Funktion der Oberflächengestaltung der Erde, die Entstehung der Kälteeinbrüche ist an lokale Verhältnisse gebunden. Beispielsweise wird die Ostküste Grönlands die kalten Ostwinde, welche sie treffen, stets nach Süden abtauen und unter die warme Golfstromluft treiben, wodurch die isländischen Stürme und Depressionen erzeugt werden. In ähnlicher Weise wirkt vermutlich die Gruppe der Inseln von Spitzbergen, Franzjosefsland und Novaja Semlja; denn Fickers Untersuchungen zeigen, daß südlich von diesen eine sehr häufig benützte Einbruchsstelle der kalten Massen nach Asien liegt. Nähere Kenntnisse dieser Verhältnisse fehlen.<sup>2)</sup>

Die Eigenschaft gewisser Gebiete der Erde, der Kälte den Einbruch aus dem Norden zu gestatten, muß zu einer mehr oder weniger periodischen Folge in den Kälteeinbrüchen führen. Sobald nämlich die an einer Einbruchsstelle nach Süden gedrungene Luft sich einigermaßen ausgebreitet hat, fehlt für die rückwärts gelegene Luft der Anlaß zum weiteren Nachfließen, die vorgeschobene kalte Masse aber beginnt, vermutlich unter der Einwirkung der darüber fließenden warmen Westwinde, eine Bewegung gegen Osten anzunehmen und entfernt sich so

1) Genauer ist  $\frac{M}{2} \Delta(v^2)$  die gewonnene lebendige Kraft, somit  $\sqrt{\Delta(v^2)}$  der mittlere Geschwindigkeitszuwachs.

2) Vgl. auch Margules, Energie der Stürme, a. a. O.; hier wird auf W. Blasius und W. M. Davis hingewiesen, welche die Bedeutung von Temperaturgegensätzen betonten.



von ihrer Einbruchsstelle, wodurch sie der warmen Masse nun wieder den Platz an der Erdoberfläche räumt. Durch Mischung mit der kalten wird die letztere anfangs an der Einbruchsstelle abgekühlt und erst später werden die aus SW nachströmenden Massen wieder starke Temperaturdifferenzen gegen die kalte Schichte aufweisen. Damit erhalten neue kalte Massen an jener Stelle die Möglichkeit, wieder gegen Süden vorzudringen, es entstehen periodische Kältewellen. Auch hier bleibt eine nähere Kenntniss der Zukunft vorbehalten.

Es ist recht wahrscheinlich, daß die Entstehung der tropischen Zyklonen ähnlich wie die der polaren Kälteeinbrüche mit Störungen an der Grenzfläche der kalten Passatwinde und der warmen Tropenluft zusammenhängt. Daß diese tropischen Zyklonen sich in ganz bestimmten Gebieten, meist nahe von Inseln oder Küsten, bilden, läßt vermuten, daß es sich hier um ganz ähnliche Vorgänge handelt wie dort. Näheres ist darüber noch nicht bekannt.

Wie schon oben bemerkt und wie aus der Gleichung für den Keilwinkel hervorgeht, kann eine Störung des stationären Bewegungszustandes auch durch Veränderung des Temperaturunterschiedes der beiden Luftmassen eintreten; und zwar bewirkt eine Vergrößerung desselben eine Verkleinerung des Keilwinkels. Wir können demnach auch dann Kälteeinbrüche erwarten, wenn an der Grenzfläche die obere Masse wärmer oder die untere kälter wird. Helmholtz schon hat (in den früher zitierten Sätzen) darauf aufmerksam gemacht, daß hier die asymmetrische Lage des Kältepoles der Erde eine Rolle spielen kann. Werden an einem Orte die von Osten wehenden kalten Winde durch noch kältere ersetzt, so können diese die Fähigkeit erlangen, in die südwärts liegenden warmen vorzudringen; doch fehlen hier alle näheren Kenntnisse.

Daß im Verlaufe einer Kältewelle, wie sie Ficker geschildert hat, die von SW vordringenden warmen Winde die Verbreitung der kalten Massen gegen E ermöglichen, ist kaum zweifelhaft. An der Ostseite einer Kältezung, über welche warme Westwinde hinwegwehen, wird ein Luftdefizit entstehen, weil die dort befindliche warme Luft noch ihre Westostbewegung besitzt; es wird umso größer sein, je größer die Temperaturdifferenzen sind. So tritt östlich der Kältewelle eine Depression des Druckes auf, durch welche nicht nur die kalten Massen eine Beschleunigung nach Osten erlangen, sondern auch die warmen weiter von Süden her nach Norden gezogen werden. Wie später noch auszuführen ist, liegt an der nördlichen Spitze der Wärmewelle eine Depression, worauf Ficker ausdrücklich hinwies (a. a. O.).

Aus dem Obigen scheint deutlich hervorzugehen, daß für die Bildung der unperiodischen Druck- und Temperaturschwankungen sowie der Winde in den unteren Schichten die Ausbreitung der kalten Luft am Boden die erste Rolle spielt. Sie hat die größte Ähnlichkeit mit der

Ausbreitung einer schweren tropfbaren Flüssigkeit unter eine leichtere; wie Hemholtz zeigte, gleicht die Bewegung der Gase umso mehr der von Flüssigkeiten, in je größeren Räumen sie vor sich geht (vgl. Abschnitt 35).

Einer späteren Entwicklung der Dynamik der Luftströmungen ist es vorbehalten, die Ausbreitung kalter Luft unter warme beim Einfluß aller in Betracht kommender Kräfte auch rechnerisch zu verfolgen. Hiervon ist ein wesentlicher Fortschritt in der Kenntnis der unperiodischen Veränderungen der Atmosphäre zu erwarten.

**75. Niedrige Depressionen und Antizyklonen.** Bei Untersuchung der Kälte- und Wärmewellen in Nordasien (vgl. die vorigen drei Abschnitte) hat Ficker auch den dabei auftretenden Luftdruckverhältnissen sein Augenmerk zugewendet. In der Arbeit über die Wärmewellen ist er dabei zu folgenden Schlüssen gekommen:

„Die Untersuchung der allgemeinen Luftdruckverteilung bei Wärmewellen ergibt, daß die Wärmewellen auf der Vorderseite von Depressionen auftreten, deren Zentrum im allgemeinen nahe der Eismeerküste an der Polargrenze des Erwärmungsgebietes zu finden ist. Die Kältewellen entwickeln sich auf der Rückseite der Depressionen. Die Depressionen bestehen demnach aus zwei nebeneinanderfließenden, verschieden temperierten Luftströmen, einer Wärmewelle auf der Vorderseite, einer Kältewelle auf der Rückseite.“

Der Satz, daß der Luftdruck im Gebiet der Wärmewelle tief ist oder zum mindesten fällt, sowie der analoge, daß er im Gebiet der Kältewelle hoch ist oder doch steigt, darf nicht umgekehrt werden; das heißt: nicht jede Depression und jede Antizyklone ist notwendig mit einer Wärme- bzw. Kältewelle an der Erdoberfläche verbunden. Es gilt dies vielmehr nur von einer Klasse dieser Luftdruckgebilde, welche sich, wie namentlich Hanzlik<sup>1)</sup> erwiesen hat, auf verhältnismäßig niedrige Luftschichten beschränkt; eine andere Klasse derselben erstreckt sich in viel größere Höhen und wird später behandelt.

Als erster hat wohl Bigelow<sup>2)</sup> die Rolle der warmen und kalten Strömungen für die Bildung der Gebiete mit abnorm hohem und tiefem Druck erkannt. Er schreibt im Jahre 1902: „Eine Schichte der Atmosphäre fließt stetig ostwärts über die Vereinigten Staaten (von Nordamerika) hinweg, in der Höhe von zwei Meilen aufwärts. Darunter fließen ganz unabhängig von der oberen Strömung eine Reihe von nord- und südwärts gerichteten Gegenströmungen, die warm, bzw. kalt sind. Das Zusammenwirken dieser beiden Ströme hat die antizyklonale und zyklonale Wirbelbewegung zur Folge, hauptsächlich auf dynamischem

1) Denkschr. d. Wien. Akad., Bd. 84, S. 163, 1908 und Bd. 88, S. 67, 1912.

2) Monthly Weath. Rev. 1902, S. 251.

Wege, wobei die erste eine abwärts-, die zweite eine aufwärtsgerichtete Bewegungskomponente erzeugt“.

Diese Ansicht, die große Ähnlichkeit mit der alten Doveschen Anschauung der Äquatorial- und Polarströmung besitzt, wurde lange Zeit durch die ihr widersprechenden Beobachtungen namentlich aus Europa in den Hintergrund gedrängt; tatsächlich ist sie in dieser einfachen Form auch nur auf die oben genannte erste Klasse der Zyklonen und Antizyklonen anwendbar.

Bigelow hat auch die Meinung ausgesprochen, daß das Nebeneinander der kalten und warmen Massen die Vorbedingung zur Entstehung der Sturmenergie sei; er bemerkt<sup>1)</sup>, daß die Energie der lokalen Windsysteme infolge dieser Gegenströme aus der Energie der Gesamtzirkulation der Atmosphäre (aus der Wärme verschiedener Breitenzonen der Erde) geschöpft wird, nicht aber unabhängig von dieser bestehe, wie Ferrel und Oberbeck annahmen. Durch die Untersuchungen von Margules (Abschnitt 46 u. ff.) ist diese Ansicht zu einer begründeten Theorie erhoben worden, bis schließlich ihre Bedeutung durch Hanzlik (a. a. O.) und durch die Übereinstimmung mit den Ergebnissen Fickers (a. a. O.) ins rechte Licht gerückt wurde.

Der Luftaustausch zwischen hohen und niedrigen Breiten erfolgt in der seichten Depression und Antizyklone demnach durch ein Nebeneinanderströmen kalter und warmer Luft, wobei freilich die warme nach oben, die kalte nach unten strebt, nicht aber durch ein direktes Übereinanderfließen wie Ferrel angenommen hatte (Kanaltheorie mit Strömung polwärts in der Höhe, äquatorwärts am Boden, vgl. S. 180).

Bigelow hat aus den Beobachtungen in Nordamerika die Verzweigung und das Ineinandergreifen der warmen und kalten Ströme abgeleitet und schematisch (Fig. 59) dargestellt. Die ausgezogenen Linien bedeuten die Strömung der warmen Massen aus dem

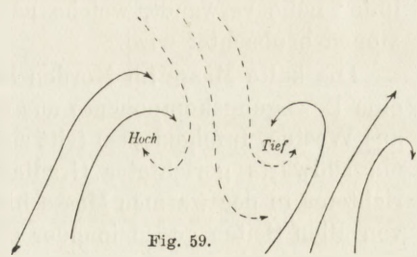


Fig. 59.

Süden, die gestrichelten die der kalten aus dem Norden. Westlich von der kalten liegt der hohe Druck, östlich der tiefe.<sup>2)</sup> Die Depression besteht somit aus einer warmen Strömung auf der Ostseite, einer kalten auf der Westseite, die Antizyklone umgekehrt aus einer kalten auf der Ostseite und einer warmen auf der Westseite. Zu ganz demselben Resultat ist Ficker gekommen. Vergleicht man Fig. 59 mit Fig. 57, so erkennt man, daß die Kälte- und Wärmewellen von Ficker mit den

1) a. a. O. S. 171.

2) Hanzlik kam (a. a. O.) zu fast dem gleichen Schema für die niedrigen Druckgebilde Europas.

niedrigen Zyklonen und Antizyklonen von Bigelow tatsächlich identisch sind. Bei den Tornados Nordamerikas fand Davis<sup>1)</sup> gleichfalls diese Doppelströmung; alle die rasch beweglichen Druckgebilde scheinen die gleiche Konstitution zu haben, die am einfachsten durch die Ausbreitung kalter Luft unter warme charakterisiert wird.

Von Interesse ist nun das Zustandekommen der kreisförmigen oder elliptischen Isobaren; sie sind eine Folgeerscheinung der kalten und warmen Gegenströmungen, fallen jedoch vielmehr ins Auge als diese und haben daher dem ganzen Phänomen den Namen gegeben.

Zunächst ist es kein Zweifel, daß das Fallen des Luftdrucks bei südlichen, das Steigen bei nördlichen Winden ein thermischer Effekt ist. Warme Luft aus dem Süden tritt an Stelle von kälterer und umgekehrt. Die Höhe dieser ungleich temperierten Schichten beträgt nach Hanzlik in den Antizyklonen  $1\frac{1}{2}$  bis 3 km. Wir sollten daher zunächst tiefen Druck über der Wärmezunge, hohen über der Kältezunge erwarten. Annäherungsweise trifft dies gewiß zu, doch wirken nun die geweckten Kräfte modifizierend auf die Druckverteilung.

Rein nördliche und südliche stationäre Strömungen sind nur mit Gradienten in der Richtung Ostwest verbunden. In Fig. 33 ist der stationäre Zustand dargestellt, der bei solchen Gegenströmungen möglich ist, wenn die kalte Luft westlich der warmen liegt (Depression). In jener Figur ist die Grenze der beiden Ströme eine nordsüdwärts verlaufende Linie tiefsten Druckes, die mit zunehmender Höhe immer mehr auf die kalte Seite rückt. Diese Linie ist offenbar der sogenannten „Troglinie“ nahe verwandt, welche namentlich bei den V-förmigen Depressionen beobachtet wird.

Die kalte Masse im Norden besitzt aber im allgemeinen zu Anfang eine Bewegungskomponente aus Osten, die warme südliche eine solche aus Westen. Infolgedessen tritt zu dem obigen Gefälle des Druckes noch ein südwärts gerichteter Gradient in der kalten, ein nordwärts gerichteter in der warmen Masse hinzu. Wir gelangen zu Gradienten, die von allen Seiten gegeneinander gerichtet sind.

Sobald am Boden Reibung stattfindet, muß, in Abweichung vom Schema des stationären Zustandes, an der Troglinie der kalte Nordstrom gegen Osten abgelenkt werden und unter den warmen Südstrom fließen; der warme Südstrom wird nun zum Teil über die kalten Massen westwärts gedreht, zum Teil von denselben ostwärts geschoben. Es tritt eine Verzweigung der Strömungen ein, wie sie in Bigelows Figur (59) bei „Tief“ erscheint. Die auf diese Weise gebogenen Stromlinien haben nun Bewegungskräfte (ablenkende Kraft und Zentrifugalkraft) zur Folge, welche die Masse derart verteilen, daß aus jenen gegeneinander ge-

1) Vgl. Hann, Lehrbuch, 3. Aufl. S. 732.

richteten Gradienten abgerundete ovale Isobarenformen hervorgehen, wie sie die Wetterkarten zeigen. Die Entwicklung einer solchen Druckverteilung auf analytischem Wege zu verfolgen ist bisher noch nicht gelungen.

Nach Ficker liegt das Zentrum der asiatischen Depression meist an der Polargrenze des Erwärmungsgebietes. Dies wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die SW-Winde vermöge ihrer Trägheit an der Grenzfläche der westlich liegenden kalten Massen eine Drucker-niedrigung erzeugen, die am größten dort sein muß, wo die kalten Massen noch ausgesprochene Ostwinde sind, also an der Polargrenze der Kältezungen, in der Achselhöhe derselben (vgl. Fig. 57, S. 245), wo die Kältezunge mit der kalten Masse der Polarkalotte zusammenhängt.

Indem die kalte Luft südwärts strömt und dabei auf der Ostseite in die Depressionslinie austreten kann, westwärts aber von der anwehenden warmen Luft gestaut bleibt, wird der Rücken des höchsten Druckes nicht symmetrisch auf der Kältezunge liegen, sondern auf ihrer Westseite. Der warme Südwind westlich davon ist ja auch mit einem Anwachsen des Druckes gegen Osten verbunden. Da der Zustand an der Grenze (Westgrenze der Kältezunge) nicht stationär ist, strömt die kalte Masse gegen SW unter die warme, die warme gegen NE über die kalte. Es entsteht die antizyklonale Krümmung auf der linken Seite der Figur 59. Wieder wird nun durch dynamische Vorgänge aus der Kammlinie höchsten Druckes im Westen der Kältewelle ein abgerundetes Gebiet hohen Druckes, die Antizyklone. Sie erscheint auch häufig nur als „Rückseite der Depression“, wenn sich im Westen einer solchen eine Zunge hohen Druckes südwärts erstreckt und dabei mit einem größeren Hochdruckgebiet im Norden zusammenhängt.

In den dynamisch abgerundeten Depressionen und Antizyklonen ist gleichwohl der Druck ein Temperatureffekt; die hier besprochenen niedrigen Zyklonen sind warm, die Antizyklonen kalt. In einer Höhe von einigen Kilometern über dem Boden ist von den unteren Druckgradienten nichts mehr zu bemerken; sie entstehen nur durch das ungleiche Gewicht der untersten Massen. Wenn auch die Abrundung durch die ablenkende Kraft der Erdrotation und die Zentrifugalkraft erfolgt, bleibt doch natürlich die barometrische Höhenformel gültig.

In den niedrigen Depressionen und Antizyklonen ist demnach die asymmetrische Temperaturverteilung das wichtigste. Die Ostseite der Depression ist warm, ihre Westseite kalt; letztere geht über in die kalte Ostseite der nachfolgenden Antizyklone; an deren Westseite ist die Temperatur wieder höher, ganz im Einklang mit den Richtungen, aus denen die Winde kommen. Der Effekt ist um so größer, je ausgesprochener die allgemeine Temperaturabnahme gegen die Pole ist (am größten im Winter über mittleren und höheren Breiten der Kontinente).

Gehen wir von einer Luftdruckverteilung am Boden mit elliptischen oder ähnlichen Isobaren aus, so müssen wir infolge der Temperaturasymmetrie schon in geringen Höhen wesentlich deformierte Isobaren finden. In kalten Luftsäulen nimmt ja der Druck rascher ab als in warmen. Demgemäß verschiebt sich das Gebiet tiefsten wie das höchsten Druckes mit zunehmender Höhe nach Westen, bzw. nach jener Seite, wo die Luft in der Depression am kältesten, in der Antizyklone am wärmsten ist.

Da die betrachteten Druckgebilde meist recht große horizontale Ausdehnung haben (z. B. 1000 bis 2000 km Durchmesser), so kommt in diesem Bereich außerdem schon das allgemeine Temperaturgefälle vom Äquator zum Pol sehr in Betracht. Es bewirkt, daß der Luftdruck auf der polaren Seite der Druckgebilde in der Höhe geringer ist, als auf der äquatorialen. Die Isobaren, welche am Boden um ein Tiefdruckgebiet geschlossen verlaufen, öffnen sich in der Höhe und ordnen sich dort mehr und mehr den Breitenkreisen an. In einiger Höhe ist dann das Vorhandensein einer niedrigen Depression nur mehr an einer Ausbuchtung der normal von W nach E verlaufenden Isobaren gegen Süden zu erkennen. Bei der Antizyklone tritt in der Höhe in ähnlicher Weise eine Ausbuchtung nach Norden auf. Infolge dessen laufen in einem höheren Niveau die Isobaren über der Äquatorseite der Depression und über der Polseite der Antizyklone gedrängter aneinander, als auf der gegenüberliegenden Seite dieser Druckgebilde. Tatsächlich findet man auch die stärksten Winde auf der rechten Seite der Depression und auf der linken der Antizyklone (nördl. Halbkugel), beurteilt nach der Richtung der Fortpflanzung.

Die Berechnung der Druckverteilung in höheren Niveaus mittels der statischen Grundgleichung bietet keine Schwierigkeit, wenn die Temperaturverteilung bekannt ist. Eine schematische Darstellung der Transformation der Isobaren mit der Höhe infolge der Temperaturasymmetrie bietet Fig. 60 für drei verschiedene Niveaus. Die Isobaren der Depression und der Antizyklone am Boden sind der Einfachheit halber kreisförmig gezeichnet. Die Isobaren der ersteren öffnen sich nach aufwärts allmählich gegen Norden, die der letzteren gegen Süden.

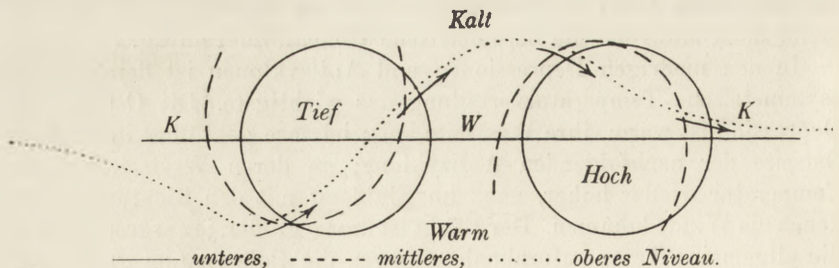


Fig. 60.

Im oberen Niveau deutet der wellenförmige Verlauf der punktierten Isobare an, daß Depression und Antizyklone dort nur mehr als Störungen des westöstlichen Verlaufes der Isobaren bemerkbar sind.

Die Verbindungslinie der Druckextreme in verschiedenen Höhen die sogenannte „Achse“, ist sehr stark nach Westen geneigt. Angenähert entspricht ihre Neigung jener der Grenzfläche kalter und warmer Massen im stationären Bewegungszustand (vgl. Fig. 33), beträgt also der Größenordnung nach Bruchteile eines Winkelgrades. Jene Bewegung, die man gewöhnlich „Wirbel“ nennt, ist daher nur auf äußerst niedrige Schichten beschränkt.

Aus der Veränderung der Isobaren mit der Höhe, also aus der Asymmetrie der Temperaturverteilung, ergibt sich die Ortsveränderung der Druckgebilde. Nach der auf S. 232 gegebenen Regel, wonach einem Ausströmen der Luft in der Höhe aus dem Gebiet tiefen Druckes ein Fallen, aus dem Gebiet hohen Druckes aber ein Steigen des Barometers entspricht, folgt sogleich, daß sich die beiden Druckgebilde in Fig. 60 nach Osten verlagern müssen. Denn die Luftströmungen gehen in der Höhe sehr angenähert den Isobaren parallel, so daß die Pfeile in Fig. 60 die Bewegung im obersten Niveau wiedergeben. Dies entspricht den zahlreichen Feststellungen, nach welchen die Depressionen sich meist in der Richtung der oberen (Cirrus) Strömungen bewegen.<sup>1)</sup>

Es ist auch klar, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so größer ist, je stärker die Asymmetrie der Temperaturverteilung und je kleiner damit die Neigung der „Achse“ gegen den Horizont ist; denn hierdurch werden die Ein- und Ausströmungswinkel vergrößert. Tatsächlich fand Hanzlik (a. a. O.), daß bei rasch beweglichen Druckgebilden der Winkel zwischen oberem Wind und unterer Isobare größer ist, als bei langsam beweglichen, die viel höher hinaufreichen.

Die Asymmetrie der Druckgebilde läßt sich direkt erkennen, wenn eine Höhenstation neben der Station in der Niederung zur Verfügung steht; die Eintrittszeit der Druckextreme verzögert sich mit der Höhe ganz merklich.<sup>2)</sup>

Hann hat in seinem Lehrbuche<sup>3)</sup> zahlreiche Beobachtungen über Temperaturverteilung, Windverhältnisse, Isobarenformen usw. angeführt, mit welchen die obigen kurzen Betrachtungen vollständig harmonieren. Trotzdem ist die Dynamik dieser niedrigen, rasch ziehenden Druckgebilde noch lange nicht vollständig ausgebaut; dazu fehlen Beobachtungen in kurzen Zeitintervallen aus verschiedenen Sektoren, mittels derer sich ihre Entstehung und Bewegung verfolgen ließe.

1) Vgl. Clement Ley, Quart. Journ. Met. Soc. 1877; R. Forstén, Met. Zeitsch. 1888, S. 105; Bigelow, Monthly Weath. Rev. 1903, S. 79; Th. Hesselberg, Veröff. d. geophysikal. Inst. Leipzig, Heft 2, 1913.

2) Vgl. z. B. Loomis bei Hann, Lehrbuch, 3. Aufl., S. 565.

3) 3. Aufl., 5. Buch, 2. Kap.

Die große Rolle der Temperaturasymmetrie für Bildung und Veränderung von Depressionen und Antizyklonen läßt sich auch aus dem Umstand erschließen, daß abnorme Temperaturverteilungen dieselben wesentlich beeinflussen. So hat Trabert<sup>1)</sup> gefunden, daß eine Depression rückläufig wurde, d. h. sich von E gegen W bewegte, als in Europa einmal ein verkehrtes Temperaturgefälle herrschte (im N warm, in S kalt). Diese niedrigen Druckgebilde bewegen sich stets so, daß in der Richtung der Bewegung gesehen die warme Luft auf der nördlichen Halbkugel rechts, auf der südlichen aber links liegt. Dort, wo starke Temperaturgegensätze fehlen, wie polwärts von 80° Br., ist die Entstehung von Depressionen sehr selten oder, wenn solche vorkommen, doch ihre Dauer sehr beschränkt.<sup>2)</sup> Dort fehlt eben die Energie in Form von Temperaturdifferenzen, die für das Zustandekommen der Depressionen nötig ist.

Es liegt in der Natur der Sache, daß die Fortbewegung von Depressionen und Antizyklonen mit vertikalen Bewegungen Hand in Hand geht, nachdem die kalten und warmen Massen eben nicht in stationärer Bewegung sind. Kalte Luft sinkt, warme steigt, die Umlagerung liefert die Energie der Winde. Auf diese vertikalen Bewegungen, den Auftrieb warmer, den Abtrieb kalter Luft hat namentlich Trabert<sup>3)</sup> Gewicht gelegt. Aus dem Gesagten folgt schon, daß auf der Vorderseite der Depression und in ihrer Mitte eine aufsteigende, auf der Rückseite aber und in der kalten Antizyklone eine absteigende Bewegung stattfinden wird. Der Kondensation des Wasserdampfes in der ersteren entspringt der geringe Temperaturgradient daselbst; in der kalten Antizyklone ist derselbe größer, da in absteigender Luft die Temperatur adiabatisch zunimmt. In den langsam beweglichen Hochdruckgebieten freilich gilt das nicht mehr, dort treten häufig Temperaturinversionen auf.<sup>4)</sup> Die aufsteigende Bewegung an der Vorderseite der Depression wird am deutlichsten durch die Bildung des Niederschlags bewiesen. Wie Defant<sup>5)</sup> gezeigt hat, gibt eine Untersuchung der kalten und warmen Luftgebiete ohne Rücksicht auf den Luftdruck ein Überwiegen des Niederschlags in den warmen Gebieten, ganz entsprechend den niedrigen Depressionen. Die vertikalen Verschiebungen sind zwar vermutlich gering, dabei aber von größter Wichtigkeit; es wäre wünschenswert, sie genauer beobachten zu können.

1) Met. Zeitsch. 1910, S. 508.

2) Wie Vincent (Met. Zeitsch. 1911, S. 284) aus den Beobachtungen des Polarjahres nachgewiesen hat.

3) Met. Zeitsch. 1910, S. 301.

4) Vgl. Bigelow, Month. Weath. Rev. 1903, S. 79, und Hann, Lehrbuch, 3. Aufl., S. 562.

5) Beitr. z. Physik d. freien Atmos., Bd. IV, S. 129.



## 76. Die Entstehung hoher Depressionen und Antizyklenen.

Zu den niedrigen Depressionen und Antizyklonen, welche als Störungen in der mittleren Luftdruckverteilung nur bis in wenige Kilometer Höhe nachweisbar sind, stehen jene Druckgebilde im Gegensatz, die sich bis in die Stratosphäre hinauf erstrecken. Über ihre Konstitution sind wir dank den internationalen Ballonaufstiegen einigermaßen unterrichtet, wenn auch viele auf sie bezügliche Fragen bisher noch unbeantwortet sind.

Vor der Einführung der Ballons war man auf die Beobachtungen der Bergstationen angewiesen. Diese ergaben zusammen mit denen der Niederung zwei Arten von Depressionen und Antizyklonen; einerseits Depressionen, welche abnorm warm, und Antizyklonen, welche abnorm kalt sind, andererseits Depressionen, die abnorm kalt, und Antizyklonen, die abnorm warm sind. Da das Gewicht warmer Säulen geringer ist als das kalter, so erschienen seinerzeit die warmen Depressionen und die kalten Antizyklonen als das normale. Man bezeichnete sie als thermische Effekte, die anderen aber als dynamische, indem man damit betonte, daß z. B. der hohe Druck in einer warmen Antizyklone durch Kräfte veranlaßt sei, die den Auftrieb der warmen Luft nicht nur aufheben, sondern ins Gegenteil verwandeln. Heute ist erwiesen, daß die „thermischen“ Druckgebilde den niedrigen Depressionen und Antizyklonen des Abschnitts 75 entsprechen, die „dynamischen“ aber den hochreichenden. Wie schon S. 227 bemerkt, ist es bisher nicht möglich, zu entscheiden, ob nicht auch die sogenannten dynamischen Druckgebilde rein thermisch zustande kommen, wo dann die Temperatur der hohen Schichten deren Ursache wäre. Daß dies zum Teil der Fall ist, ist kein Zweifel; die ungemein starken Temperaturschwankungen in der Substratosphäre sind ein Beweis dafür.

Im Hinblick auf diese Unklarheit ist der Ausdruck „dynamisch“, welcher auf die hohen Druckgebilde angewendet wird, eher verwirrend als aufklärend. Denkt man dabei an Bewegungskräfte, so ist es wohl richtig, daß stets solche im Spiel sind; sie ermöglichen den Bestand der „warmen“ Antizyklonen und der „kalten“ Depressionen, wirken aber horizontal und tragen nichts zur Druckerhöhung oder -Verminderung am Boden bei.

Hann<sup>1)</sup> ist schon im Jahre 1876 und ausführlicher 1890 der damals üblichen Meinung entgegengetreten, daß die Hochdruckgebiete (in den unteren Schichten) kalt, die Tiefdruckgebiete warm sein müssen. Er zeigte aus den Bergbeobachtungen, daß in Europa die Antizyklonen meist bis 3 km hinauf wärmer sind als ihre Umgebung. Aber erst die Ballonbeobachtungen brachten eine Erklärung für diese auffallende Tatsache, die dem statischen Grundgesetz zu widersprechen schien. Sie liegt in der weiteren Tatsache, daß die Stratosphäre über warmen

1) Met. Zeitsch. 1876; Wien. Sitzber. 1890.

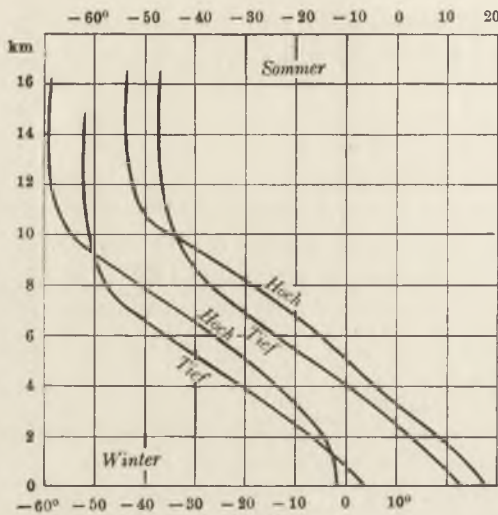


Fig. 61.

Hochdruckgebieten besonders hoch liegt und kalt ist, über kalten Depressionen aber tiefer liegt und warm ist. Zahlreiche Untersuchungen neueren Datums haben dies festgestellt. Wir geben als Beweis hier nur die Temperaturkurven für Winter und Sommer wieder, die Humphreys<sup>1)</sup> für die Antizyklone und Depression Europa gezeichnet hat (Fig. 61).

Danach ist eine teilweise aber deutliche Kompensation in der Druckwirkung der oberen und unteren Schichten vorhanden. Die Wirkung der Tropo-

sphäre besteht bei der Antizyklone in einer Abschwächung des relativen Hochdrucks, der an der unteren Grenze der Stratosphäre besteht, bei der Depression in einer Abschwächung des relativen Tiefdrucks daselbst. Der Sitz des hohen, bzw. tiefen Druckes, der an der Erdoberfläche zum Ausdruck kommt, ist also offenbar in der Stratosphäre gelegen. Diese Kompensation der oberen und unteren Schichten stimmt mit den Ergebnissen der Statistik (Abschnitt 71), die sich auf alle Schwankungen an einem Orte ohne Rücksicht auf die synoptische Druckverteilung beziehen, vollständig überein. Auch erinnert sie sehr an die Verteilung der Temperatur in verschiedenen Breiten der Erde (Fig. 41, S. 186).

Hanzlik hat (a. a. O.) gezeigt, daß die hohen Depressionen und Antizyklonen meist aus den niedrigen entstehen und ein späteres Entwicklungsstadium derselben sind. In Europa treten viele Hochdruckgebiete als „kalte“ auf und enden als „warme“. Schon Hann hat auf die Rolle der vertikalen Bewegung bei diesen Umbildungen aufmerksam gemacht. Im absteigenden Luftstrom der Antizyklone besteht, wenigstens solange keine seitliche Ausbreitung der Massen stattfindet (vgl. Abschnitt 34) adiabatische Temperatursteigerung, welche die allmähliche Erwärmung der antizyklonalen Massen bedingt. Für die Umbildung der warmen in kalte Depressionen kann die vertikale Bewegung nicht in der gleichen Weise verantwortlich gemacht werden, da die starke Abkühlung nur bis zum Kondensationsniveau reicht. Hier wird hauptsächlich die Bewölkung eine Rolle spielen. Sie hält im aufsteigenden

1) Bull. Mt. Weather Obs. Bd. II, S. 183.

Ast die Sonnenstrahlung ab, wodurch namentlich im Sommer die unteren Gebiete der Depression relativ kalt werden.

Neben diesen Temperaturänderungen, die die Umwandlung der niedrigen Druckgebilde in hohe begleiten, gehen die eigentümlichen Veränderungen der Temperatur der Stratosphäre einher, die wir in Fig. 61 sahen. Offenbar sind diese Veränderungen in der Höhe die Ursache dafür, daß die hochreichenden Druckgebilde nun lebensfähiger und dauerhafter sind als die niedrigen, daß der abwärts gerichtete Strom der Antizyklone überhaupt bestehen bleibt, nachdem die Ursache dieser Bewegung, das größere spezifische Gewicht der antizyklonalen Luft, nun aufgehört hat, zu bestehen, und ebenso dafür, daß nun relativ kalte Luft sich in der Depression nach aufwärts bewegt. Diese oberen Veränderungen scheinen also von der größten Bedeutung zu sein; trotzdem ist es heute noch nicht möglich, deren Ursache mit Sicherheit anzugeben.

Wir müssen für diese ungemein wichtige Frage dieselben zwei Gesichtspunkte geltend machen, die schon bei der Besprechung der Temperaturschwankungen in der Höhe (Abschnitt 69) ausgeführt wurden. Zunächst ist es die Frage, ob die Veränderungen in der Stratosphäre unabhängig von den niedrigen Druckgebilden sind oder nicht. Die Untersuchung der Steig- und Fallgebiete des Luftdrucks (vgl. den nächsten Abschnitt) scheint anzudeuten, daß Luftdruck- und Temperaturschwankungen in der Stratosphäre vorkommen, die mit dem Auftreten von Kälte- und Wärmewellen am Boden in gar keinem Zusammenhang stehen. Wenn dies der Fall ist, so ist doch noch die Möglichkeit vorhanden, daß ein zufälliges Zusammentreffen einer Drucksteigerung in der Substratosphäre mit einem niedrigen Kältegebiet den Anlaß zur Ausbildung einer hohen Antizyklone gibt und daß diese beiden Gebilde miteinander eine besondere Erhaltungstendenz besitzen. Diese Ansicht wird unterstützt durch das Vorkommen kalter, also niedriger Antizyklonen, die sich nicht in warme hohe umwandeln, aber auch durch die Ausbildung hoher warmer Antizyklonen, welche nicht aus niedrigen kalten entstehen. Was das letztere betrifft, so muß sich ja eine Drucksteigerung in der Substratosphäre auch am Boden im Luftdruck äußern; das Auftreten von Kälte in der Stratosphäre wird Abwärtsbewegung, nahezu adiabatische Temperaturzunahme und relative Wärme in den unteren Schichten zur Folge haben, wenn es lange genug über einem Gebiete der Erdoberfläche anhält. Die Entstehung warmer Antizyklonen aus Kälteeinbrüchen in der Substratosphäre ist also durchaus wahrscheinlich; auf sie hat E. Gold<sup>1)</sup> hingewiesen. Ebenso ist es möglich, daß Kältewellen in der Höhe keine Antizyklonen an der Erde erzeugen,

---

1) Geophys. Mem. Met. Office, London, 1913, S. 124; auch Hann, Lehrbuch, 3. Aufl., S. 626.

wenn sie rasch vorüberziehen und die Situation für ihre weitere Ausbildung in der Troposphäre nicht günstig ist, wenn also z. B. in den unteren Schichten gerade eine Wärmewelle aus dem Süden eindringt. In sinngemäßer Umkehrung gilt analoges für Tiefdruckgebiete.

Das Zusammentreffen einer Kältewelle in der Höhe mit einer solchen am Boden führt zu abnorm ausgeprägtem Hochdruck am Boden; die absteigende Bewegung wird besonders intensiv sein, mithin auch die Ausbreitung der Luft daselbst und die Entwicklung eines antizyklonalen Windregimes. Daß die adiabatisch durch Sinken erwärmte Luft bei dieser Windverteilung leicht nahezu stationär werden kann, folgt aus den Bedingungen des stationären Zustandes für warme Luft, die in kalte eingebettet ist (Fig. 37a); die Tatsache, daß hohe, unten warme Antizyklonen besonders stationär sind, ist also vollkommen erklärlich.

Die zweite Ansicht, die zu erwägen wäre, ist die, daß die Kälte- und Wärmewellen der unteren Schichten jenen Temperaturzustand in der Substratosphäre hervorbringen, welcher im späteren Stadium die nunmehr in die Höhe gewachsenen Druckgebilde regelmäßig begleitet. Eine solche Einwirkung der unteren auf die höheren Schichten könnte entweder durch Übertragung der vertikalen Bewegung stattfinden, oder durch Veränderung der Strahlungsverhältnisse. Es ist immerhin erwägenswert, ob die in den unteren Schichten auf- und abwärts gerichtete Bewegung auch die oberen Schichten in die analoge Bewegung versetzt.<sup>1)</sup> Eine niedrige Antizyklone würde alsdann eine Senkung der hohen Schichten, eine niedrige Depression eine Hebung derselben bewirken. Im ersten Falle wäre nicht einzusehen, wie die Bewegung nach abwärts eine besonders niedrige Temperatur der Stratosphäre bei hoher Lage ihrer Grenze hervorbringen sollte, die doch die Antizyklone begleitet; im zweiten könnte eine Aufwärtsbewegung bei der Depression die niedrige Lage und hohe Temperatur der Stratosphäre nicht erklären. Somit ist die Beeinflussung der Stratosphäre durch die vertikale Bewegung in den unteren Schichten nicht wahrscheinlich. Eher kann eine Einwirkung der unteren Schichten auf die oberen im Wege der Strahlung stattfinden, worauf Humphreys (a. a. O.) hinwies. Wie im Abschnitt 28 gezeigt wurde, führt eine Zunahme des Wasserdampfes der Atmosphäre zu höheren Temperaturen am Boden, zu tieferen in der Stratosphäre. Da nun bei niedrigen Depressionen durch Aufwärtsbewegung häufig Wolken entstehen, die die Strahlung auf die oberen Schichten beschränken, so wäre es denkbar, daß diese verminderte Strahlungsmöglichkeit die Stratosphäre wärmer bleiben läßt als dies bei der starken Strahlung unter dem klaren Himmel der Antizyklone der Fall ist. Humphreys drückt dies anders aus: er meint, daß die feuchtere Luft

1) Vgl. Shaw, Abh. d. Met. Office, London, Nr. 202, wo Änderungen der Stratosphärenlage diskutiert werden (1909).

der Depression sich durch Strahlung mehr abkühlt und die von ihr abgegebene Wärme der Stratosphäre zugute kommt. Es ist kaum zweifelhaft, daß im Wege der Strahlung ein Einfluß der unteren auf die oberen Schichten stattfindet, wenn sich auch heute noch nichts genaues darüber angeben läßt.<sup>1)</sup>

Wenn es auch derzeit noch nicht möglich ist, den Zusammenhang zwischen den Veränderungen unten und oben und damit die Entstehung hoher Depressionen und Antizyklonen vollständig zu erklären, so steht es doch fest, daß der Stratosphäre dabei eine ganz hervorragende Bedeutung zukommt. Für das weitere Verständnis der Erscheinungen wäre es von größtem Werte, zu wissen, ob die Temperaturveränderungen der Stratosphäre hauptsächlich durch horizontale Luftverschiebungen oder durch Strahlungsveränderungen bewirkt werden und wann diese zwei Fälle vorkommen.

**77. Steig- und Fallgebiete des Druckes.** Die Untersuchungen von Brounow, Sresnewsky und namentlich von Nils Ekholm<sup>2)</sup> sprechen für die oben S. 261 erwähnte Unabhängigkeit der Temperatur- und Druckschwankungen in der Stratosphäre von den gleichzeitigen Schwankungen in den unteren Luftschichten. Die genannten Forscher haben die Veränderungen des Bodendruckes im Laufe bestimmter, meist 12- oder 24-stündiger Zeitintervalle für größere Gebiete der Erde verfolgt. Die Linien gleicher Druckschwankungen, Isallobaren, umschließen, wie sich zeigte, sehr häufig in runder Form Gebiete mit maximalem Ansteigen oder Fallen des Druckes, ganz ähnlich wie die Isobaren Gebiete mit maximalem oder minimalem Druck selbst umgeben. Diese Steig- und Fallgebiete folgen einander meist in kurzen Zeitintervallen auf einer durchschnittlich westöstlichen Bahn und bewegen sich häufig schneller und regelmäßiger als die Depressionen und Antizyklonen. Naturgemäß wird bei einer von W nach E ziehenden Depression östlich von ihr stets ein Fallgebiet, westlich ein Steiggebiet gefunden, und umgekehrt bei einer Antizyklone. Aber abgesehen von diesen selbstverständlichen Begleiterscheinungen beweglicher Druckgebilde gibt es auch Fall- und Steiggebiete, die sich entweder von jenen absondern und dann für sich weiter wandern, oder die auch außer jedem Zusammenhang mit den Druckgebilden selbst stehen. Es scheint fast ein periodischer Wechsel von Fall- und Steiggebieten in den Druckveränderungen versteckt zu sein, wobei die Periode in Europa häufig zwei ganze Tage beträgt,<sup>3)</sup> so daß in einem Meridian ein Fallgebiet erscheint, wenn zwei Tage zuvor dort

1) A. Schmauß hat einen Kälteeinbruch in der Substratosphäre beschrieben, (Met. Zeitsch. 1914, S. 67), der nach seiner Meinung durch Strahlung entstanden ist; es kann sich hier aber auch um horizontalen Transport kalter Massen handeln.

2) Met. Zeitsch. 1904, S. 345; Hann-Bd. d. Met. Zeitsch. 1906, S. 228 und Met. Zeitsch. 1907, S. 1, 102 und 145.

3) Sresnewsky, Bull. de Moscou, 1895, S. 319.

eines gelegen war. Doch ist die Regelmäßigkeit nicht so groß, daß man aus der Bewegung seit gestern auf jene für morgen schließen könnte.

Bei der Konstruktion der Steig- und Fallgebiete ist die Wahl des Zeitintervalls nicht ganz gleichgültig. In kurzen Zeiten ändert sich der Druck weniger als in langen, das Bild der Isallobaren hängt also von der Wahl des Zeitintervalles ab. Die Geschwindigkeit der Steig- und Fallgebiete, die man aus mehreren aufeinander folgenden Isallobarenkarten ausmessen kann, ist ein Mittelwert für das Zeitintervall, also auch nicht unabhängig von dessen Wahl.

Trotz dieser Zufälligkeiten konnte sich Ekholm aus den Isallobarenkarten die Vorstellung bilden, daß es sich hier um Erscheinungen zyklonaler und antizyklonaler Art in den oberen Luftschichten handelt, die bisweilen, aber nicht immer, solche in den unteren Schichten erzeugen; sie bewegen sich schneller als die letzteren, da sie der Reibung des Bodens nicht unterliegen, und sind durchaus selbständige Gebilde. Für diese Ansicht sprechen auch die großen Temperatur- und Druckschwankungen in der Substratosphäre (vgl. S. 222), wenn auch synoptische Beobachtungen aus der Höhe von etwa 10 km noch nicht vorliegen.

Auch die statistischen Ergebnisse (Abschnitt 71) bezüglich der teilweisen Kompensation der oberen und unteren Temperaturanomalien zeigen an, daß das Niveau von 10 km verhältnismäßig viel bedeutendere Steig- und Fallgebiete besitzt als die Erdoberfläche. Von den Möglichkeiten ihrer Entstehung wurde schon oben gesprochen. Die Frage dürfte jetzt eine der wichtigsten in der Meteorologie sein. Die neben den Druckschwankungen so häufig auftretenden Temperaturschwankungen in der Stratosphäre deuten, wie gesagt, auf eine thermische Entstehung der Druckänderungen hin. Die Abkühlung bei Drucksteigerung kann dabei entweder durch eine Art Kältewelle vom Äquator her (die Stratosphäre ist ja äquatorwärts kälter als in höheren Breiten) oder durch Ausstrahlung erfolgen, wobei die abgekühlte Masse durch seitlichen Zufluß schwerer wird. Neben der thermischen Ursache der Druckschwankungen kann aber auch noch eine dynamische bestehen; die Atmosphäre kann Gravitationsschwingungen machen, wie eine Wassermasse, sie kann stellenweise höher hinauf reichen und dadurch an jener Stelle höheren Druck bewirken (vgl. S. 227). Obwohl über solche Aufbauschungen und Einbuchtungen der Atmosphäre nichts bekannt ist, müssen wir ihre Möglichkeit doch im Auge behalten; sie könnten nur als wellenförmig verlaufende Bewegungen bestehen, nicht als stationäre, was mit dem wellenartigen Gang der Steig- und Fallgebiete nicht im Widerspruch steht.

Eine Art Wellenform müßten allerdings auch die Kälteeinbrüche haben, welche vom Äquator her in der Stratosphäre auftreten (vgl. auch S. 188). Bei ihnen kann die Verteilung von Land und Meer, die auf die Strahlung von Einfluß ist, einen periodischen Verlauf erzeugen.

Es ist zum mindesten wahrscheinlich, daß die Aktionszentren der Atmosphäre zum Teil in der Stratosphäre ihren Sitz haben und daß sie einen periodischen Verlauf in die allgemeine Westostdrift höherer Breiten in der Höhe hineinbringen.

**78. Schema der Konstitution hoher Depressionen und Antizyklonen.** Wie schon früher bemerkt, ist die Konstitution der hochreichenden Druckgebilde noch lange nicht vollständig geklärt. Insbesondere die Verteilung der vertikalen Bewegung und ihr Zusammenhang mit den Bewegungen im weiteren Umkreise der Druckgebilde sowie die Erhaltung ihrer Energie ist noch wenig bekannt. Auch ist es, wie schon mehrfach betont, noch unklar, ob sich mit zunehmender Höhe allmählich die Druckunterschiede zwischen Depressionen und Antizyklonen thermisch völlig ausgleichen, oder ob in der Höhe Gravitationswellen übrig bleiben.

Die Ballonbeobachtungen haben aber doch schon sehr wertvolle Aufklärungen über diese Gebilde gegeben, namentlich über die Verteilung der Temperatur, des Druckes und der Winde. Sie sind in verschiedenen wichtigen Arbeiten niedergelegt und auch in Hanns Lehrbuch der Meteorologie besprochen.<sup>1)</sup>

In erster Linie ist es wichtig, daß die verschiedenen Sektoren einer Depression oder Antizyklone getrennt untersucht werden, um die Asymmetrie dieser Gebilde festzustellen. Da im allgemeinen der Unterschied in der Temperatur der Quadranten hier geringer ist als bei den niedrigen Druckgebilden (Abschnitt 75), so ist die Achse derselben weniger nach rückwärts geneigt, die Verschiebung der Druckextreme mit der Höhe also geringer (vgl. Hanzlik, a. a. O.); infolgedessen ist auch die Drehung des Windes (der Isobaren) mit der Höhe schwächer als bei den niedrigen Gebilden, und somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner. Der Umstand, daß die unteren Schichten der Depression kälter sind als die der Antizyklone, führt notgedrungen dazu, daß sich die Druckgradienten mit zunehmender Höhe zunächst nicht ausgleichen, sondern verstärken. Solche Gebilde müssen daher höher hinaufreichen, als die mit umgekehrter Temperaturverteilung.

Für die Frage nach dem Druckausgleich in der Höhe, nach der Erhaltung der Gebilde und ihrem Zusammenhang mit der Umgebung wäre die genaue Untersuchung einzelner Depressionen und Antizyklonen durch gemeinsame internationale Ballonaufstiege sehr nützlich. Solche

---

1) Vgl. Wagner, Beitr. z. Phys. d. freien Atmos. Bd. III, S. 57, 1909; W. H. Dines, Met. Off. London, Publ. Nr. 210, b, 1912; A. Peppler, Beitr. z. Phys. d. freien Atmos., Bd. IV, S. 91, Bd. V., S. 1, Bd. VI, S. 73; auch S. Grenander, Ark. f. Mat. Astr. och Fys., Bd. 2, Nr. 7, 1905; H. H. Clayton, Beitr. z. Phys. d. freien Atmos. Bd. I, S. 93, Bd. II, S. 35, E. Gold, Met. Off., Geophys. Mem. Nr. 5, 1913 und viele andere.

fehlen bisher, doch hat V. Bjerknes<sup>1)</sup> begonnen, die aerologischen Stationen in Europa zur systematischen Untersuchung von Druckgebilden, wie sie der Zufall bot, zu verwenden. Man darf sich von einer allmählichen Erweiterung dieser synoptischen Untersuchungen erst eine nähere Kenntnis der Einzelheiten ihrer Konstitution versprechen. Bis dahin muß man sich mit Durchschnittswerten begnügen, welche nur als Schema der Druckgebilde brauchbar sein werden.

Es soll daher im folgenden<sup>2)</sup> noch ein derartiges Schema einer Depression und Antizyklone betrachtet werden, aus welchem man das Zustandekommen der Luftdruckverteilung am Boden durch die Temperaturverteilung in der Höhe ersieht. Wir werden hier voraussetzen, daß die hohen Depressionen und Antizyklonen rein thermisch erklärt werden können; damit ergeben sich gewisse Notwendigkeiten über die anzunehmenden Unterschiede in der Verteilung von Tropo- und Stratosphäre über den einzelnen Quadranten. Sie lassen sich mit den mittleren Beobachtungsergebnissen vergleichen und zeigen gute Übereinstimmung, woraus dann folgt, daß die Annahme der rein thermischen Entstehung der Druckgebilde zumindest zu keinen quantitativ unwahrscheinlichen Resultaten führt. Auch kann man daraus unschwer Analogieschlüsse für einzelne wirkliche Druckgebilde ziehen, wodurch das Verständnis dieser erhöht wird. Doch soll nicht vergessen werden, daß das folgende eben nur ein Schema ist, welches noch dazu zur Erleichterung der Übersicht stärker vereinfacht wurde, als eigentlich nötig gewesen wäre.

Wir gehen von kreisförmigen Isobaren am Boden aus; und zwar sei eine kreisförmige Antizyklone von zwei ganz gleich beschaffenen Depressionen im Westen und Osten flankiert. Der Druck nehme von 780 mm im Zentrum der Antizyklone bis zu 740 mm in dem der Depression ab; die Distanz der Zentren betrage etwa 1500 km, der Durchmesser der 750 mm- und der 770 mm-Isobare sei etwa 1000 km.

Weiter machen wir die Annahme, daß unsere Druckgebilde genau 20 km hoch seien, daß also in dieser Höhe jede Störung durch sie verschwunden sei. Obwohl nun die nördlichsten und südlichsten Luftsäulen, die in den Bereich der Druckgebilde fallen, mindestens 1000 km von einander entfernt sind, dürfen wir doch nach Peppler (S. 186) den Druck in 20 km Höhe in beiden Breiten gleich annehmen. Wir stellen unser Schema für den Sommer auf und setzen den Druck in jener Höhe entsprechend den Pepperschen Zahlen zu 45 mm fest.

Schwieriger ist die Bestimmung der Temperaturen am Boden und in 20 km Höhe. Wir betrachten die Luftsäulen über 10 Punkten der Erde, nämlich über den Zentren von Depression und Antizyklone und über

1) Veröff. d. Geophys. Inst. Leipzig, I. Serie: Synopt. Darst. atmos. Zustände, beginnt 1913.

2) Vgl. F. M. Exner, Wien. Sitz.-Ber. Bd. 119, Abt. IIa, S. 697, 1910.



den 4 Quadranten der beiden, im N, W, S und E, auf den Isobaren 750, bzw. 770 mm. Die Bodentemperaturen werden hier nicht nur durch die relative Lage zum Druckgebiet, sondern auch durch die ungleiche geographische Breite bestimmt. Die mittlere Bodentemperatur jenes Breitenkreises, auf dem die Zentra liegen, sei  $16^{\circ}$  C. Der nördlichste Breitenkreis habe  $14^{\circ}$ , der südlichste  $18^{\circ}$ . Nun nimmt die Temperatur der Stratosphäre polwärts zu; nach Fig. 42 können wir für dieselbe unter  $50^{\circ}$  Breite etwa  $-49^{\circ}$  annehmen, unter dem nördlichen Breitenkreise etwa  $-47^{\circ}$ , unter dem südlichen  $-51^{\circ}$ . Diese Zahlen sind freilich nur unsichere Schätzungen.

Als Abweichungen der Bodentemperaturen in den verschiedenen Quadranten der Depression und Antizyklone von den betreffenden Normaltemperaturen benützen wir die von A. Pepppler<sup>1)</sup> festgestellten Werte für den Sommer. Um von den unwichtigen Besonderheiten der alleruntersten Schichten unabhängig zu werden, werden aber hier nicht die Temperaturen an der Erde, sondern die Mitteltemperaturen der drei untersten Kilometer verwendet. Auf diese Weise kommen die im folgenden mit  $t_0$  bezeichneten 10 Temperaturen an der Erdoberfläche zustande; sie sind auf ganze Grade abgerundet. Die Antizyklone erscheint am Boden im Mittel um  $2^{\circ}$  wärmer als die Depression, deren Zentrum um  $3^{\circ}$  wärmer als das Depressionszentrum.

Es entsteht nun die Frage: wie ist für jeden Quadranten und die Zentra der beiden Druckgebilde die Lage und Temperatur der Substratosphäre anzunehmen, damit unter der warmen Antizyklone der Druck dennoch hoch, unter der kalten Zyklone dennoch tief werde und gerade den vorgegebenen Wert habe? Diese Frage beantworten wir im Anschluß an Abschnitt 67; hier wurde die Massenverteilung in einer Luftsäule berechnet, in welcher die Temperatur nach Fig. 50 verteilt ist, also bis zur Substratosphäre lineare Abnahme ( $\alpha$ ), dann in dieser bis zu 20 km Höhe lineare Abnahme oder Zunahme ( $\beta$ ) besitzt (von hier an ist Isothermie). Aus der barometrischen Höhenformel für diese doppelt geknickte Temperaturkurve (S. 217) läßt sich  $h$ , die Höhe der Troposphäre, berechnen.<sup>2)</sup>

Es ist dazu noch nötig, eine Voraussetzung über die lineare Temperaturabnahme in der Troposphäre ( $\alpha$ ) zu machen. Von W. Pepppler

1) Beitr. z. Phys. d. freien Atmos., Bd. V, S. 1.

2) Man erhält den langen Ausdruck:  $h = \frac{3T_0 + T_i - \frac{2}{\alpha\pi}(T_0 + \alpha H - T_i)}{2\alpha}$

$$= \sqrt{\left[ \frac{3T_0 + T_i - \frac{2}{\alpha\pi}(T_0 + \alpha H - T_i)}{2\alpha} \right]^2 - \frac{2T_0}{\alpha^2} \left( T_0 + T_i - \frac{2H}{\pi} \right)}, \text{ wo}$$

$$\pi = \frac{R}{g} \frac{\log p_0 - \log p_H}{\log e}; \text{ dabei ist } H = 20 \text{ km}, T_0 = t_0 + 273^{\circ}, T_i = t_{20} + 273^{\circ}.$$

und S. Grenander<sup>1)</sup> sind zwar aus den Beobachtungen der drei untersten Kilometer Werte von  $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta h}$  für die vier Quadranten der Hoch- und Tiefdruckgebiete abgeleitet worden, doch stimmen dieselben schlecht miteinander überein. Es scheint daher am einfachsten, die Rechnung für den Sommer zu machen, wo die Mittelwerte von  $\alpha$  in Zyklonen und Antizyklonen sich (nach Peppeler) nur wenig unterscheiden, und allgemein  $\alpha = 0,6\%/100 \text{ m}$  anzunehmen. Hierdurch wird die Rechnung allerdings schematischer, aber auch bedeutend einfacher.

Sobald die Temperaturen einmal bekannt sind, ist es leicht, mit ihrer Hilfe den Luftdruck in verschiedenen Höhen zu berechnen; dies wurde hier nur für Niveaus in je 5 km Abstand voneinander ausgeführt. Die Ergebnisse der Rechnung sind in folgender Tabelle enthalten.

	Depression					Antizyklone				
	N-Seite	W-Seite	S-Seite	E-Seite	Zentr.	N-Seite	W-Seite	S-Seite	E-Seite	Zentr.
$h$ in m	7330	7310	8700	9160	6960	9650	12500	11500	9740	11540
$t_h$ in °C	-33,0	-31,9	-36,2	-39,0	-28,8	-44,9	-56,0	-51,0	-44,4	-53,2
$\beta$ in °C pro km	1,10	1,35	1,31	0,92	1,55	0,20	-0,93	0,00	0,45	-0,50
* $p_0$ in mm	750	750	750	750	740	770	770	770	770	780
$P_5$ " "	397,4	398,4	402,1	402,1	394,0	410,0	415,6	414,7	410,9	418,2
$P_{10}$ " "	196,5	197,5	200,1	199,8	196,3	201,8	208,1	207,1	202,9	207,6
$P_{15}$ " "	94,8	95,2	95,8	95,3	95,1	95,1	96,2	96,4	95,7	96,2
* $t_0$ in °C	11	12	16	16	13	13	19	18	14	16
$t_5$ " "	-19	-18	-14	-14	-17	-17	-11	-12	-16	-14
$t_{10}$ " "	-36,0	-35,5	-37,9	-39,8	-33,5	-45,0	-41,0	-42,0	-44,5	-44,0
$t_{15}$ " "	-41,5	-42,3	-44,4	-44,4	-41,3	-46,0	-53,7	-51,0	-46,8	-51,5
* $t_{20}$ " "	-47	-49	-51	-49	-49	-47	-49	-51	-49	-49

\* Daten der Aufgabe;  $\beta$  positiv, wo die Temperatur nach aufwärts abnimmt.

Von Interesse ist hier zunächst die Höhe  $h$  der Troposphäre (Höhenlage der unteren Stratosphären Grenze) in verschiedenen Quadranten.

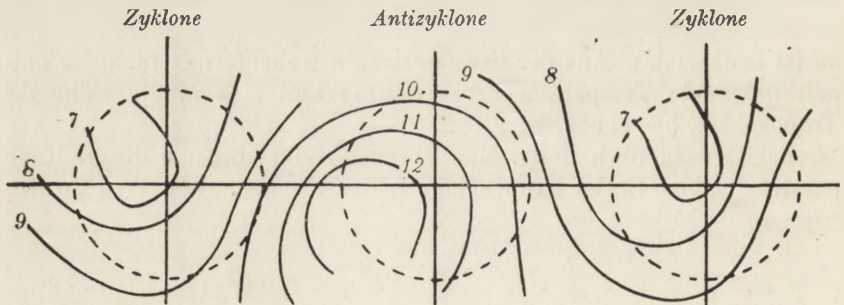


Fig. 62.

Sie ist am größten im Westen der Antizyklone, am kleinsten im Zentrum der Zyklone. Die Verteilung von  $h$  ist in Fig. 62 durch Isohypsen, die von km zu km gezeichnet sind, dargestellt.

1) Vgl. Hann, Lehrbuch, 3. Aufl., S. 562 ff.

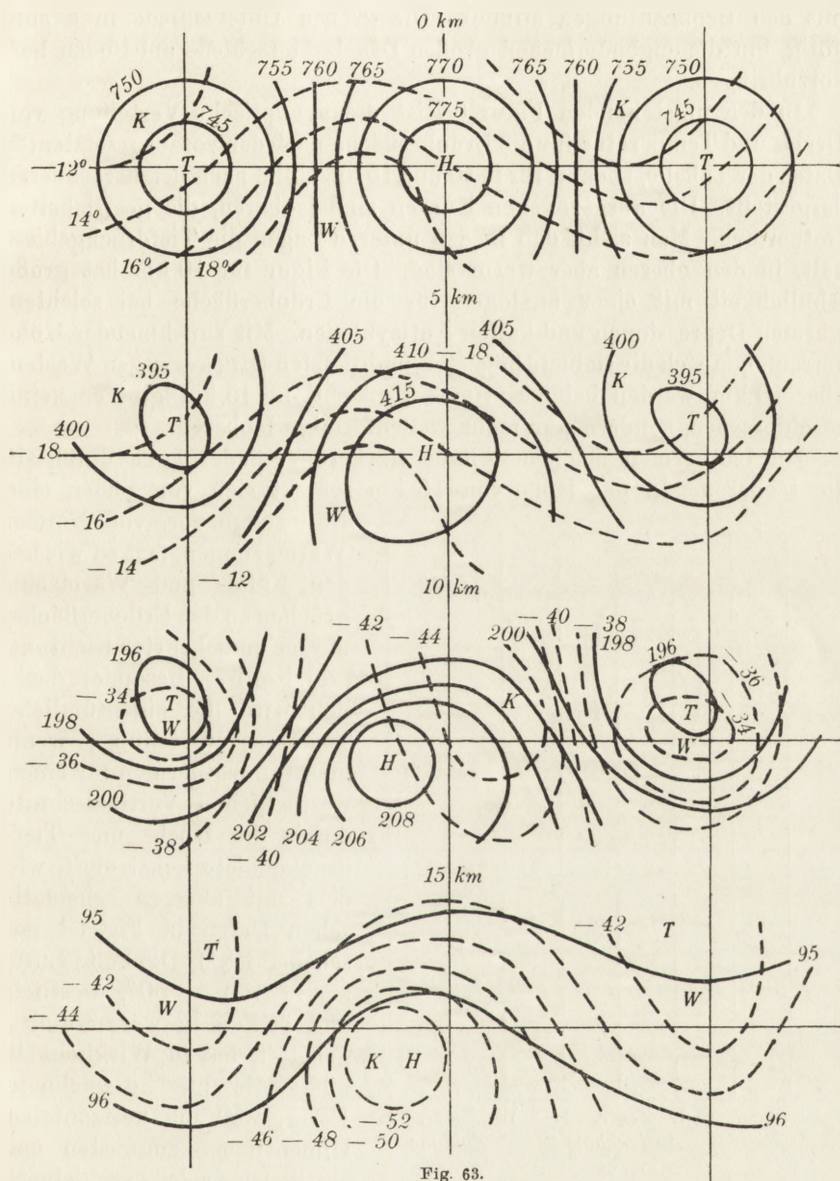


Fig. 63.

Die Antizyklone, namentlich ihre südwestliche Seite, ist durch sehr hohe Lage der Stratosphärenengrenze mit tiefer Temperatur daselbst ( $t_h$ ) ausgezeichnet. Der Unterschied der Troposphärenhöhe zwischen Zentrum der Depression und Westseite der Antizyklone beträgt 5540 m, der Unterschied der dortigen Temperaturen  $27,2^\circ$ . Es fällt also auf 100 m Erhebung der Stratosphäre die Temperatur um  $0,5^\circ$ , was annähernd

mit den Beobachtungen stimmt. Die großen Unterschiede in  $h$  sind nötig, um die angenommenen großen Druckunterschiede am Boden herzubringen.

In der umstehenden Figur 63 ist die synoptische Verteilung von Druck und Temperatur für die Erdoberfläche nach den vorausgesetzten (\*) Daten der Tabelle, sodann für 5, 10 und 15 km Höhe nach den berechneten dargestellt. Die ausgezogenen Kurven sind Isobaren, die gestrichelten Isothermen. Man sieht, daß in den unteren Lagen die Tiefdruckgebiete kalt, in den oberen aber warm sind. Die Figur für 10 km hat große Ähnlichkeit mit einer analogen für die Erdoberfläche bei seichten, warmen Depressionen und kalten Antizyklonen. Mit zunehmender Höhe verschieben sich die Gebiete höchsten und tiefsten Druckes gegen Westen, über 10 km werden beide Extreme verflacht, in 15 km gibt es keine geschlossenen, sondern nur mehr wellenförmige Isobaren.

Die Isothermen machen weitaus stärkere Veränderungen durch als die Isobaren. In der Höhe von 15 km schiebt sich von Süden

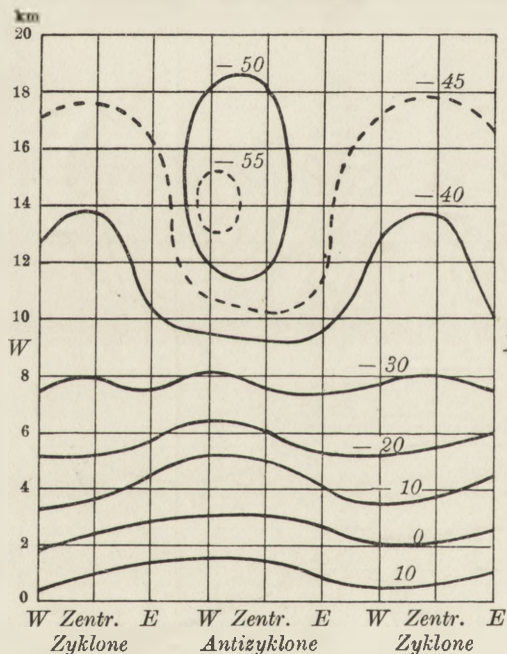


Fig. 64.

E Kältezunge vor, von Norden Wärmeeinbrüchen, fast so wie bei den Kälte- und Wärmeeinbrüchen an der Erdoberfläche, nur in umgekehrter Richtung (vgl. Fig. 57). Besonders deutlich wird die eigentümliche Temperaturverteilung, wenn man die Isothermen für einen westöstlichen Vertikalschnitt durch die Hoch- und Tiefdruckgebiete konstruiert, wie dies mit unseren schematischen Daten in Fig. 64 geschehen ist.<sup>1)</sup> Die kalte Luftmasse von  $-50^{\circ}$ , westlich und östlich in wärmere eingebettet, hat in Wirklichkeit nicht die hier gezeichnete Form, weil die horizontalen Dimensionen zugunsten der vertikalen sehr verkleinert

sind. Nach unseren Annahmen beträgt der Horizontalabstand der östlichen Seite der Isotherme  $-50^{\circ}$  von der westlichen etwa 1000 km, der Vertikalabstand des untersten und obersten Punktes ist höchstens

1) Sie hat große Ähnlichkeit mit einer Darstellung der Beobachtungen durch Dines (Met. Off. Nr. 210, b, 1912).

8 km, so daß die kalte Masse in Wirklichkeit nur eine sehr flache Zunge bildet, deren Begrenzung gegen Süden leider nicht näher bekannt ist.

Diese flachen Kälteschichten in der Höhe dürften die allerwichtigste Erscheinung bei den hohen Depressionen und Antizyklonen sein; denn in ihnen ist wohl die Energie aufgespeichert, aus welcher die Winde gespeist werden. Die kalten Massen werden vermutlich durch fortwährenden Nachfluß aus dem Süden und durch Ausstrahlung bei klarem Himmel immer erneut und drücken die Massen unter sich abwärts; so entsteht im Gebiet der Antizyklone die Abwärtsbewegung, mit welcher ein gleichzeitiger Aufwärtstransport von wärmeren Massen verbunden sein muß, eine Umlagerung im Sinne von Margules. Die nahe dem Boden vorhandenen Temperaturgegensätze können zu keinem Zuwachs an lebendiger Kraft führen, im Gegenteil; dort wird lebendige Kraft verbraucht, da die warme antizyklonale Luft sich abwärts ausbreitet, die kalte zyklonale aber gehoben wird. Nähere Kenntnisse dieser Verhältnisse fehlen noch.

Aus den Figuren 63 lassen sich auch die Winde in verschiedenen Höhen entnehmen. Sie verlaufen sehr nahe längs der Isobaren. Da die Druckgradienten von 10 km aufwärts rasch abnehmen, so gilt ähnliches von den Windstärken. Im Gegensatz zu den niedrigen Depressionen und Antizyklonen findet man bei den hohen auch noch im Zirkusniveau die Winde um ein Zentrum angeordnet. Bezogen auf die Isobaren des Bodens treten in 5 km Höhe Drehungen der Winde nach rechts und nach links auf, erstere auf der Ostseite der Depression und Westseite der Antizyklone, letztere auf den umgekehrten Seiten. Entsprechend den Ausführungen des Abschnitts 70 trägt die Rechtsdrehung zum Fallen, die Linksdrehung zum Steigen des Druckes bei. Wenn man die diesbezüglichen Wirkungen aller Schichten addiert, so erhält man die tatsächliche Änderung des Bodendruckes mit der Zeit. Unsere schematischen Druckgebilde würden sich danach gegen Osten bewegen.<sup>1)</sup> Durch unregelmäßige Temperaturverteilung einzelner Schichten kann über einem Orte der Erde die Rechtsdrehung stellenweise in Linksdrehung übergehen und umgekehrt. In diesem Falle wirken verschiedene Schichten einer Luftsäule einander entgegen. So kann es geschehen, daß bei den hohen Druckgebilden Ortsveränderungen auch aus dem Grunde geringer sind als bei den niedrigen, weil die Wirkungen der einzelnen Schichten sich teilweise aufheben. Der Hauptgrund für diese langsame Bewegung aber ist zweifellos der, daß die Asymmetrie der hohen Druckgebilde geringer ist. Nachdem (Fig. 63) die Isobaren der Depression mit den Isothermen in 10 km Höhe fast zusammenfallen, so folgt schon daraus,

1) Einen Versuch, die tatsächliche Veränderung aus der Wirkung der einzelnen Luftschichten zusammensetzen, vgl. bei F. M. Exner a. a. O.

daß die Veränderungen hier geringer sein müssen; und ähnliches gilt für das Gebiet der Antizyklone in 15 km.

**79. Veränderungen der synoptischen Wetterkarten.** Die Depressionen und Antizyklonen, welche man auf den täglichen Wetterkarten zu sehen gewohnt ist, scheinen die Wettersituationen im ganzen zu beherrschen; jedenfalls blickt der Wetterprognostiker gerne zuerst auf jene abgeschlossenen Druckgebilde. Trotzdem ist es kaum zweifelhaft, daß auch allen den Zwischengebieten große Bedeutung zukommt. Was zur Beurteilung der Veränderungen der Zyklonen und Antizyklonen gesagt wurde, gilt auch für jedes andere Luftgebiet: die Veränderung des Bodendrucks wird durch alle Schichten, aus denen eine Luftsäule besteht, zusammen hervorgerufen, wobei der horizontale Massentransport die Hauptrolle spielt. Dort, wo warme Luft durch kalte ersetzt wird, wird ein Beitrag zu einer Druckzunahme geliefert und umgekehrt. Hierfür ist die Differenzialgleichung des Abschnitts 70 maßgebend.

Man hat versucht<sup>1)</sup>, die Temperaturverteilung der untersten Schichten für die Voraussage der Druckänderungen zu benützen, indem man annahm, daß die Temperaturverteilung in den oberen Schichten wesentlich die gleiche sei oder daß die unteren Schichten über die oberen dominieren. Tatsächlich gelangt man mitunter auf diese Weise zu brauchbaren Resultaten, besonders bei Veränderungen, die durch niedrige Kälte- oder Wärmewellen erzeugt werden. In Nordamerika scheinen solche sehr häufig zu sein, so daß den Bodenbeobachtungen dort zweifellos großer Wert in der Wettervorhersage zukommt. In Europa hingegen sind (vgl. Abschnitt 71) die Veränderungen in den untersten Luftschichten für die Wettersituation meist nicht ausschlaggebend. Mitunter gelingt es allerdings, aus den Gradienten von Druck und Temperatur an der Erdoberfläche wenigstens das Vorzeichen der Druckänderung richtig vorauszubestimmen. Doch wird man im allgemeinen auf die Beobachtungen aus dem Gebiet der Stratosphäre nicht verzichten können.

Von großer Bedeutung für die Veränderung einer Wettersituation sind die relativ kleinen vertikalen Bewegungen; die Ausbreitung kalter Luft nach abwärts, die warmer Luft nach aufwärts wurde ja als die Bedingung der Entstehung und Erhaltung kräftiger Luftströmungen erkannt. Neben der Verfolgung des horizontalen Massentransportes im obigen Sinne wird man daher das Studium namentlich auf die Ausbreitung der kalten Massen zu lenken haben, und es ist nicht ausgeschlossen, daß zunehmende Erfahrung auf diesem Gebiet verhältnismäßig leicht die Richtung wird finden lassen, nach welcher hin Veränderungen eintreten. Dies gilt nicht nur von den kalten Massen nahe der Erd-

1) F. M. Exner, Wien. Sitzber. Bd. 115, Abt. IIa, S. 1173, 1906 und A. Defant, daselbst, Bd. 119, Abt. IIa, S. 739, 1910, wo die Methoden zur Benützung der Isothermen sowie der Isallothermen entwickelt sind.

oberfläche, sondern auch von jenen in der Stratosphäre; gerade auf letztere dürften die vielen Dunkelheiten, denen wir jetzt noch bei Beurteilung der Wetterveränderungen begegnen, ganz besonders zurückzuführen sein, wie z. B. das unvorhergesehene Erscheinen von Fall- und Steiggebieten.

Die allgemeine WE-Bewegung, welche die Druckgebilde auf den Wetterkarten der gemäßigten Breiten zeigen, ist durch die WE-Drift der allgemeinen Zirkulation gegeben. Infolge der Abnahme der Temperatur gegen die Pole herrscht stets diese Bewegung vor. Die Sache läßt sich aber auch so auffassen, daß in jedem Druckgebilde für sich infolge der besagten Temperaturabnahme bei Äquatorwind warme Luft an Stelle von kalter, bei Polwind kalte Luft an Stelle von warmer tritt. Hierdurch ist auf der nördlichen Halbkugel die Tendenz zum Fallen des Druckes gegeben, wenn eine Isobare mit dem tieferen Druck im W von N nach S verläuft und umgekehrt (vgl. Fig. 52). Wo die normalen Isothermen nahe aneinander liegen, ist die Geschwindigkeit des Westwindes und die Drift der Druckgebilde groß; dort ist aber auch die Gewichtsänderung bei nordsüdlicher Massenverlagerung bedeutender. Die beiden Auffassungen kommen also auf das gleiche hinaus. Nur zeigt die zweite deutlicher, daß die momentane Veränderung einzig und allein eine Funktion der Variablen und ihrer Gradienten an jenem Orte der Atmosphäre ist, wo sie eben zustande kommt (vgl. die Differenzialgleichung des Druckes, Abschnitt 70).

Die Richtung, in welcher sich die Druckgebilde fortpflanzen, ist nach der Untersuchung Hesselbergs<sup>1)</sup> wohl die des Zirruszuges; doch ist die Geschwindigkeit der Fortpflanzung geringer als die der oberen Strömung (0,3 bis 0,6 derselben); dies erklärt sich daraus, daß für dieselbe nicht allein die hohen Schichten, die sich viel rascher bewegen, maßgebend sind, sondern auch die niedrigen.

Wenn man hier von Fortpflanzung spricht, so handelt es sich eigentlich nur um die Fortpflanzung von Isobarenformen oder Bewegungszuständen; die Luftmassen, welche eine Luftsäule bilden, werden nicht beisammen bleiben, da in verschiedenen Höhen in der Regel verschiedene Winde wehen. An der Konstitution eines beliebigen Druckgebildes werden somit alle Augenblicke andere Luftmassen beteiligt sein, weswegen man die Depressionen auch nicht mit Unrecht eher mit Wellen als mit Wirbeln verglichen hat. Dies geht auch aus den Bahnen hervor, welche von einer einzelnen Luftmasse tatsächlich beschrieben werden (vgl. Abschnitt 66).

Die Versuche, die Änderungen der Wettersituationen im Interesse der Prognose vorauszusehen, haben in den letzten Jahren besonders Guilbert zu empirischen Regeln geführt, die für die Praxis von Wert

1) Beitr. z. Physik d. f. Atmos.; Bd. V, S. 198.

zu sein scheinen. Ihre vollständige Begründung steht noch aus; es scheint, daß die Trägheitsbewegungen der Luftmassen bei einem Teil dieser Regeln eine Rolle spielen. Wenn die Druckverteilung sich verändert, so ist der Zustand kein stationärer. Die Winde entsprechen daher nicht den momentanen Gradienten, sondern sind stärker oder schwächer und anders gerichtet, als nach den Gleichungen der stationären Bewegung zu erwarten wäre. Aus den momentanen Winden lassen sich dann Schlüsse auf die bevorstehenden Änderungen des Druckes und des Gradienten ziehen.<sup>1)</sup> Wenn den stationären Bewegungen in diesem Buche das größte Gewicht beigelegt wurde, so entsprang dies der Anschauung, daß deren Kenntnis die Grundlage für weitere Fortschritte zu bilden hat. Eine nähere Untersuchung dieser Verhältnisse ist sehr erwünscht, wenn es auch nicht wahrscheinlich ist, daß man mit diesen rein dynamischen Betrachtungen, die sich nur auf eine Horizontalebene erstrecken, allein wesentlich weiter kommen wird.

---

1) Vgl. Th. Hesselberg in Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, Heft 8, 1915.



## Dreizehntes Kapitel.

### Periodische Veränderungen in der Atmosphäre.

**30. Periodische Veränderungen, hervorgerufen durch die Verteilung von Land und Meer.** Im Anschluß an die vorigen Abschnitte sollen hier zunächst gewisse periodische Erscheinungen besprochen werden, welche mehrfach in den synoptischen Wetterkarten beobachtet wurden, obwohl es andere periodische Veränderungen in der Atmosphäre gibt, die viel deutlicher ausgeprägt und auch genauer erforscht sind. Es handelt sich um mehrtägige Perioden des Wetters in mittleren Breiten der Erde. H. H. Clayton<sup>1)</sup> z. B. hat gefunden, daß über Nordamerika periodenweise Tiefdruckgebiete auftreten (häufig alle 5 Tage), Defant<sup>2)</sup> hat in neuester Zeit mehrtägige Perioden des Niederschlages auf beiden Halbkugeln nachgewiesen, die in verschiedenen Ländern in ähnlicher Weise auftreten, Russel<sup>3)</sup> machte auf die regelmäßige Wiederkehr von Antizyklonen in Australien aufmerksam, usw.

Nun sind die Kurven, die derartige Erscheinungen darstellen, allerdings recht unregelmäßig. Allein, sobald mehrere sinusartige Einzelperioden verschiedener Länge übereinander liegen, muß der Erscheinung die Klarheit einer einfachen Welle fehlen, und man kann trotzdem, namentlich nach den Untersuchungen Defants, die Zerlegung solcher Kurven, wie sie z. B. die Niederschlagsmenge in einem Lande liefert als physikalisch berechtigt anerkennen.

Die Meteorologie hat viele Versuche aufzuweisen, den unregelmäßigen Verlauf irgend einer Erscheinung durch Zerlegung in Wellen verschiedener Perioden erklärlich zu machen; die meisten dieser Versuche legten kosmische Perioden zugrunde, wie die Mondperiode, die Sonnenfleckenperiode usw. Wenn auch einzelne derselben erfolgreich sein mögen, so soll auf sie hier nicht eingegangen werden.

Der Zweck dieses Abschnittes ist es bloß, darzulegen, wie durch die allgemeine Zirkulation der Luft über der unregelmäßigen Erde mit ihrer komplizierten Land- und Meerverteilung eine periodische Erscheinung in der Atmosphäre zustande kommen kann.

---

1) Met. Zeitsch. 1895, S. 22.

2) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 121, Abt. IIa, S. 379, 1912.

3) Zitiert bei Defant, S. 453; 3 Essays on Australian Weath., Sidney 1896.

Es handelt sich hier um Einflüsse, welche die Oberflächenbeschaffenheit der Erde an einem Ort auf die Luft daselbst ausübt. Diese Einflüsse können verschiedener Art sein; wir haben von ihnen schon früher gesprochen: zunächst die Strahlungsintensität, durch welche nicht nur die Temperatur der untersten Schichten, sondern auch die der Stratosphäre bestimmt werden kann (Abschnitt 28); dann die Übertragung von Wärme durch Leitung und Konvektion; in beiden Fällen kommt auch die verschiedene Menge des Wasserdampfes über Land und Meer in Betracht; schließlich die Reibung und Hemmung, welche die Oberfläche der Erde (ihre Gebirge und Küsten) auf die Luftströmungen ausübt (Abschnitt 74).

Alle diese Einflüsse sind in einer bestimmten Jahreszeit zeitlich ungefähr konstant, aber von Ort zu Ort verschieden. Durch sie alle wird die Temperatur der Luft verändert, im letzten Falle allerdings nur mittelbar, indem die Luftströmungen abgelenkt werden. Änderungen der Lufttemperatur aber sind wieder mit irgendwelchen Änderungen der Druckverteilung, der vertikalen Bewegung usw. verbunden, so daß wir ganz im allgemeinen eine Beeinflussung des Wetters durch die lokalen Verhältnisse der Erdoberfläche annehmen dürfen.

Die näheren Vorgänge hierbei sind noch sehr wenig bekannt; es ist nicht sicher, welcher von den drei obengenannten Einflüssen hier hauptsächlich einwirkt; wir lassen diese Frage offen und begnügen uns mit der Tatsache des lokalen Einflusses der Erdoberfläche auf die Temperatur der über sie fließenden Luftmassen.

Diese Massen denken wir uns in mittleren und höheren Breiten von  $W$  nach  $E$  um die Erde herum bewegt; dann wird sich ihre Temperatur  $T$  je nach dem Orte, über dem sie sich befinden, fortwährend verändern. Für einen gewissen Breitenkreis läßt sich der Einfluß der Erde auf die Lufttemperatur durch eine Reihe von Sinus- und Kosinusgliedern der geographischen Länge  $x$  ausdrücken. Deren Wellenlänge ist der Erdumfang in jener Breite, bzw. dessen Hälfte, Drittel usw. Denn die Funktion von  $x$ , die von Land- und Meerverteilung abhängt, ist ja in ihrer allgemeinsten Form nach dem Fourierschen Satz durch eine solche Reihe gegeben. Wir können also die zeitliche Temperaturänderung einer Luftmasse, die sich längs eines bestimmten Breitenkreises bewegt, setzen:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} [A_i \sin ix + B_i \cos ix],$$

wo  $A_i$  und  $B_i$  unbekannte Konstante sind,  $i$  aber die ganzen Zahlen von 1 bis  $n$  bedeutet.

Indem wir nun<sup>1)</sup> einführen:  $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x}$  (vgl. S. 32), können

1) F. M. Exner, Wien. Sitz.-Ber. Bd. 119, Abt. IIa, S. 995, 1907 und A. Defant, ebenda Bd. 121, Abt. IIa, S. 379, 1912.

wir statt der Temperatur einer bewegten Luftmasse die Temperatur an einem Orte finden; die Geschwindigkeit  $u$  der Luftbewegung längs eines Breitenkreises nehmen wir der Einfachheit wegen als konstant an.

Die partielle Differenzialgleichung läßt sich integrieren, wenn die anfängliche Verteilung der Temperatur längs des Breitenkreises ( $T_0$  zur Zeit  $t = 0$ ) gegeben ist; wir nehmen hierfür als einfache Voraussetzung konstante Temperatur auf dem ganzen Breitenkreise, also  $T_0 = a$ , an. Das Integral ist dann:

$$T = a - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} [A_i \cos ix - B_i \sin ix]}{iu} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} [A_i \cos i(x - ut) - B_i \sin i(x - ut)]}{iu}$$

Diese Lösung befriedigt sowohl die Differenzialgleichung wie die Anfangsbedingung und gibt somit die Temperatur eines Ortes  $x$  zur Zeit  $t$ . Demnach wird dieselbe für jeden Ort durch eine Summe von Perioden dargestellt, wir erhalten periodische Temperaturschwankungen. Die Zeit, nach welcher die Temperatur denselben Wert wiedererhält, also die ganze Schwingungsdauer, ist  $\tau = \frac{2\pi}{u}$ ; dies ist zugleich die Periodenlänge der einfachen Welle ( $i = 1$ ). Man erhält die folgenden Periodenlängen:

$$\begin{aligned} \text{für } i = 1 \dots \tau_1 &= \frac{2\pi}{u} = \tau_1, & \text{für } i = 3 \dots \tau_3 &= \frac{2\pi}{3u} = \frac{\tau_1}{3}, \\ \text{„ } 2 \dots \tau_2 &= \frac{\pi}{u} = \frac{\tau_1}{2}, & \text{„ } 4 \dots \tau_4 &= \frac{\pi}{2u} = \frac{\tau_1}{4} \text{ usw.} \end{aligned}$$

dieselben verhalten sich also umgekehrt wie die ganzen Zahlen. Um zu einer Vorstellung von der Schwingungsdauer zu gelangen, genügt es, für eine bestimmte geographische Breite, z. B.  $35^\circ$ , eine mittlere Geschwindigkeit der WE-Bewegung anzunehmen; setzen wir in Analogie zur Bewegung der Depressionen dieselbe z. B. 45 km/St., so ergibt sich, daß der Umfang der Erde unter  $35^\circ$  Breite in nahezu 30 Tagen einmal umflossen wird. Es ist also angenähert  $\tau_1 = 30$  Tage,  $\tau_2 = 15$  Tage,  $\tau_3 = 10$  Tage,  $\tau_4 = 7,5$  Tage. Diese Perioden wären in der Temperatur zu erwarten und des weiteren im Luftdruck und Niederschlag.

Die vorstehende Darlegung sollte zunächst nur zeigen, daß durch die Verteilung von Land und Meer periodische Schwankungen in der Atmosphäre zustande kommen müssen; sie kann schon deswegen keinen Anspruch auf Exaktheit machen, weil es ja nur eine rohe Annahme war, daß eine Luftmasse in einer Breite die ganze Erde umfließt. Doch ist es Defant (a. a. O.) gelungen, aus den Niederschlagsbeobachtungen sowohl der südlichen (Argentinien, Australien) als auch der nördlichen Halbkugel (Nordamerika, Europa, Japan) Perioden nachzuweisen, welche — und das

ist das wichtigste — in ihrer Dauer sich annähernd wie  $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$  verhalten. Defant fand nämlich die folgenden Perioden:

Südliche Halbkugel: 7, 12,  $16\frac{1}{2}$ , 31 Tage,  
 Nördliche „ :  $5\frac{1}{2}$ ,  $8\frac{1}{3}$ , 13, 24—25 Tage.

Geht man von 31, bzw. 25 Tagen als der Grundperiode  $\tau_1$  aus, so ergibt sich rechnerisch für die

südliche Halbkugel: 31,  $15\frac{1}{2}$ ,  $10\frac{1}{3}$ ,  $7\frac{3}{4}$  Tage,  
 nördliche „ : 25,  $12\frac{1}{2}$ ,  $8\frac{1}{3}$ ,  $6\frac{1}{4}$  Tage.

Mit der Breite und der WE-Geschwindigkeit müssen die Absolutwerte variieren.

Diese Wellen haben den Charakter von erzwungenen Schwingungen; je nach der Verteilung von Land und Meer in einer Breite und den sich hieraus ergebenden Amplituden und Phasendifferenzen der einzelnen Wellen kann die Gesamtelongation an einem Orte besonders groß oder auch sehr gering ausfallen; es können gewisse Breiten der Erde für die Entstehung periodischer Schwankungen besonders günstig oder ungünstig sein.

Im Jahre 1914 hat das Wetterbureau in Washington mit der Veröffentlichung täglicher Wetterkarten der nördlichen Halbkugel begonnen; eine oberflächliche Durchsicht läßt erkennen, daß um den Polarkreis herum täglich ein Kranz von miteinander abwechselnden Depressionen und Antizyklonen liegt, der freilich oft recht unregelmäßig aussieht. Im Winter sind meist vier Depressionen, durch vier Zwischengebiete mit höherem Druck von einander getrennt, auf einem Breitengürtel aneinander gereiht. Vielleicht wird ein näheres Studium dieser Karten in die hier berührten Fragen mehr Licht bringen. Schon Bigelow<sup>1)</sup> hat auf diese Anordnung der Druckgebilde hingewiesen; da durch die Neigung der isobaren Flächen gegen den Pol die Depressionen in der Höhe polwärts geöffnet<sup>2)</sup> werden, so entstehen wellenförmige Isobaren, eine bloße Modifikation der großen Zyklone der allgemeinen WE-Bewegung, was mit den hier vorgebrachten Anschauungen gut harmonisiert.

**81. Gravitationswellen an der Grenze ungleich dichter Medien.** Wie der Wind, der über das Meer hinweht, Wasserwellen erzeugt, so kann auch an der Grenze ungleich warmer Luftschichten Wellenbewegung eintreten, wenn jene mit verschiedenen Geschwindigkeiten übereinander hinfließen. Mit solchen Wellen hat sich zuerst

1) Monthly Weath. Rev. 1903, S. 79. Vgl. auch E. Herrmann, Ann. d. Hydrogr. u. marit. Met. 1907; ferner Will. Lockyer, Sol. Phys. Comm. London, wo diese Verteilung für die südliche Hemisphäre behandelt ist.

2) De Quervain hat im Mai und Juni diese Verteilung allerdings nicht vorgefunden (Beitr. z. Physik d. freien Atmos. Bd. V, S. 132).

Helmholtz<sup>1)</sup>, dann W. Wien<sup>2)</sup> und in letzter Zeit H. Lamb<sup>3)</sup> beschäftigt, nachdem schon der erste die Tatsache des Vorkommens derselben an den häufig sichtbaren, streifenförmigen, nebeneinander liegenden Wolken (Wogenwolken) erkannt hatte. Jeder Wolkenstreifen bedeutet den Kamm einer Woge, entstanden durch Kondensation des Wasserdampfes bei der Aufwärtsbewegung; zwischen ihnen liegen die Wellentäler mit Abwärtsbewegung und klarem Himmel.

Neben der Beobachtung der Wolken gibt auch die Messung der kleinen Luftdruckschwankungen mittelst des Variometers Anhaltspunkte für die Erscheinung. Dieselbe ist nicht nur von theoretischem sondern auch von praktischem Interesse, da sich aus Variometerbeobachtungen mitunter auf das Vorhandensein von starker Strömung und sprunghafter Temperaturverteilung in der Höhe schließen läßt.

In letzter Zeit sind diese Wellen an der Grenze von Schichten ungleicher Temperatur durch W. Schmidt<sup>4)</sup> studiert worden, wofür sich die Erscheinung des Föhnwindes in Innsbruck<sup>5)</sup> besonders eignete. Ehe der Föhn ins Tal herab gestiegen ist, weht schon dieser warme Südwind in der Höhe über die kalte Talluft hinweg; hiermit ist der Anlaß zu Wellen gegeben, die sich deutlich im Luftdruck äußern und meist eine Periode von etlichen Minuten haben. Ihre Amplitude ist von der Größenordnung 0,1 mm Hg, also so gering, daß das gewöhnliche Barometer zu ihrer Feststellung nicht ausreicht.

Die Wellen werden als Gravitationswellen bezeichnet, weil die Schwerkraft sie erhält; sie stehen somit im Gegensatz zu den später behandelten elastischen Schwingungen der Atmosphäre.

Die Wellen an der Grenzfläche ungleich dichter Medien sind entweder fortschreitende oder stehende. Im ersten Fall laufen sie in der Richtung des stärker bewegten Mediums, also des oberen Windes, wenn wir die untere kalte Schichte als ruhend ansehen wollen. Die Form ist angenähert die einer Sinuslinie, solange die Höhe der Welle klein gegen ihre Länge ist. Wenn die relative Bewegung der beiden Schichten gegeneinander immer mehr zunimmt, so wächst dabei die Wellenhöhe, wie Helmholtz zeigte; es kann ein Schäumen und Überstürzen des Wogenkammes eintreten, wie man dies von den Meereswellen kennt. In diesem Falle ist die Wellenlinie von der Sinusform natürlich schon weit entfernt.

Die Theorie der fortschreitenden Wellen ist sehr schwierig und bisher nur für Wellen einfachster Art behandelt worden, die sich hori-

1) Berl. Sitz.-Ber. 1889 und 1890.

2) Ebenda, 1894 S. 525 und 1895, S. 361.

3) Proc Roy. Soc. London, Bd. 84, S. 551, 1911.

4) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 122, Abt. IIa, S. 905, 1913.

5) Vgl. auch A. Defant, Met. Zeitsch. 1906, S. 281 oder Denkschr. d. Wien. Akad. Bd. 80, 1906.

zontal in einer Richtung bewegen. Aus mühsamen Rechnungen konnten Helmholtz und Wien eine Beziehung zwischen der Wellenlänge und den Strömungsgeschwindigkeiten der beiden Schichten ableiten, wobei sie inkompressible Flüssigkeiten ungleicher Dichte voraussetzten. Diese Beziehung lautet: Es sei  $s_1$  die Dichte der oberen (leichteren),  $s_2$  die der unteren Flüssigkeit,  $a_1$  die horizontale Geschwindigkeit der ersten gegenüber der Welle selbst,  $a_2$  die der zweiten, ferner  $\lambda$  die Wellenlänge; dann ist:

$$s_1 a_1^2 + s_2 a_2^2 = \frac{g\lambda(s_2 - s_1)}{2\pi},$$

wo  $g$  die Schwere bedeutet.

Die Beobachtungen geben stets nur die Summe  $a_1 + a_2$ , die gesamte Relativbewegung der einen Schichte gegen die andere. Nimmt man nach A. Wegener<sup>1)</sup> an, daß die Geschwindigkeit der Welle in erster Näherung in der Mitte der Schichtgeschwindigkeiten liege, so kann man

$a_1 = a_2 = \frac{w}{2}$  setzen und erhält die Formel:

$$w^2(s_2 + s_1) = \frac{2g\lambda}{\pi}(s_2 - s_1);$$

aus ihr läßt sich bei gegebenem Windsprung  $w$  die Wellenlänge  $\lambda$  an der Grenze von Medien mit gegebenem Dichteunterschied berechnen. Man erhält z. B. für  $w = 5$  m/sec bei Luftschichten von  $0^\circ$ , bzw.  $10^\circ$  Wärme  $\lambda = 441$  m. Sobald  $a_1$  und  $a_2$  ungleich sind, wird  $\lambda$  bedeutend größer.

H. Lamb hat die Wellenbewegung an der Grenze ungleich dichter Gase berechnet und eine Beziehung zwischen der Wellenlänge und der Schwingungsdauer der Wellen erhalten. Da in größeren Räumen sich Luftmassen (vgl. Abschnitt 35) in erster Annäherung wie inkompressible Flüssigkeiten verhalten, so verzichten wir hier auf die Wiedergabe von Lambs umfangreicher Rechnung und begnügen uns mit einer Behandlung der Wellen an der Grenzfläche von inkompressiblen Flüssigkeiten ungleicher Dichte, wobei wir uns an eine analoge Rechnung von W. Schmidt<sup>2)</sup> für stehende Wellen anlehnen.

Zwei inkompressible Flüssigkeiten von verschiedener Dichte seien übereinander geschichtet. An ihrer Grenzfläche sollen den Wasserwellen ähnliche Wellen in horizontaler Richtung verlaufen, wobei wir uns auf zwei Dimensionen beschränken, die horizontale  $x$  und die vertikale  $z$ . Die Bewegung sei wirbelfrei, so daß ein Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  existiert. Die Hydrodynamik liefert für eine solche Bewegung die Gleichungen:<sup>3)</sup>

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\text{wobei } u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g.$$

1) Beitr. z. Physik d. freien Atmos. Bd. II, S. 55.

2) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 117, Abt. IIa, S. 91, 1908.

3) Siehe z. B. von Lang, Theoret. Phys. 2. Aufl. S. 585, 1891.

Sind die Geschwindigkeiten  $u$ ,  $w$  klein, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Der Boden der schwereren Flüssigkeit ( $\rho$ ) liege in  $z = 0$ , die Grenzfläche zur leichteren ( $\rho'$ ) in  $z = h$ , diese habe ihre obere Begrenzung in  $z = H$ .

Die Periode der Wellenbewegung ist in der oberen und unteren Flüssigkeit die gleiche. Werden die Größen für die untere ohne Strich, die für die obere Flüssigkeit mit einem Strich bezeichnet, so können die Geschwindigkeitspotentiale unter den Formen gesucht werden:

$$\varphi = f(z) \cos(bx - abt), \quad \varphi' = F(z) \cos(bx - abt).$$

Die Wellen schreiten dann nach der positiven  $x$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $a = \frac{\lambda}{\tau}$  fort ( $\lambda$  Wellenlänge,  $\tau$  Schwingungsdauer, wobei  $b = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $ab = \frac{2\pi}{\tau}$ ). Aus der Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$  folgt:

$$f(z) = A e^{bz} + B e^{-bz}, \quad F(z) = A'' e^{bz} + B'' e^{-bz}.$$

Da an den Grenzen der Flüssigkeiten (in  $z = 0$  für die untere, in  $z = H$  für die obere) die vertikalen Bewegungskomponenten verschwinden müssen, diese aber gegeben sind durch:

$$w = b(A e^{bz} - B e^{-bz}) \cos(bx - abt),$$

$$w' = b(A'' e^{bz} - B'' e^{-bz}) \cos(bx - abt),$$

so folgt weiter:  $A = B$ ,  $A'' e^{bH} = B'' e^{-bH} = A'$ . Man kann somit setzen

$$f(z) = A(e^{bz} + e^{-bz})$$

$$F(z) = A'(e^{b(H-z)} + e^{-b(H-z)}).$$

An der Grenze der beiden Flüssigkeiten muß Gleichheit des Druckes und der vertikalen Geschwindigkeit beider Schichten bestehen; dort ist auch  $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t}$  zu setzen. Man erhält daher für  $z = H$ :

$$\rho \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \rho' \left( \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right), \quad w = w'.$$

Werden die obigen Ausdrücke in diese beiden Gleichungen eingesetzt, die erste dann durch die zweite dividiert, so fallen die Unbekannten  $A$  und  $A'$  weg und man erhält die Bedingungsgleichung:

$$\rho(g - a^2 b Q) = \rho'(g + a^2 b Q'),$$

wobei  $Q = \frac{e^{bh} + e^{-bh}}{e^{bh} - e^{-bh}}$ ,  $Q' = \frac{e^{bh'} + e^{-bh'}}{e^{bh'} - e^{-bh'}}$  und  $h' = H - h$ .

Nimmt man an, daß die Höhen  $h$  und  $h'$  der Schichten groß sind, so kann in erster Näherung  $Q = Q' = 1$  gesetzt werden und es folgt:

$$a^2 b = g \frac{e - e'}{e + e'} = \frac{2\pi\lambda}{\tau^2} \quad \text{oder} \quad \tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g} \frac{e + e'}{e - e'}}$$

Dies ist eine Beziehung zwischen Wellenlänge und Schwingungsdauer der Wellen, die an der Grenzfläche auftreten. Unter Beibehaltung der Geschwindigkeit  $a$  der Wellenbewegung kann man auch, da  $b = \frac{2\pi}{\lambda}$ , schreiben:

$$\lambda = \frac{2\pi a^2}{g} \frac{e + e'}{e - e'}$$

Diese Gleichung ist mit der oben (S. 280) erwähnten, aus der Helmholtz-Wienschens von Wegener abgeleiteten Form identisch, wenn man als Geschwindigkeit der Wellenbewegung die halbe Differenz der horizontalen Bewegung der beiden Schichten auffaßt. Hiernach nimmt die Wellenlänge mit dem Quadrat dieser Differenz zu. Betrachtet man die Gleichung auch für Luft als gültig, und ist z. B. die untere Luftschicht in Ruhe, die obere wärmere aber in Bewegung, wie dies vor oder nach Föhnwinden nicht selten vorkommt, so sind die entstehenden Wellen umso länger, je größer die Windstärke in der Höhe ist; auch nimmt  $\lambda$  mit der Abnahme des Dichteunterschiedes der beiden Schichten zu. Ist die obere um  $5^\circ$  wärmer als die untere, so kann man bei Luftmassen von etwa  $0^\circ$  setzen:  $\frac{e + e'}{e - e'} = \frac{T' + T}{T' - T} = 111$  oder rund 100; für  $a = 3$  m/sec wird folglich  $\lambda = 565$  m. Die Wellen sind also von ganz anderer Größenordnung als die Wasserwellen. Die Periode  $\tau$  beträgt etwas über drei Minuten.

Die Geschwindigkeitskomponenten der Wellenbewegung sind aus den obigen Gleichungen bestimmbar; sie sind:

$$\begin{aligned} u &= -Ab[e^{bz} + e^{-bz}] \sin(bx - abt), \\ u' &= -A'b[e^{b(H-z)} + e^{-b(H-z)}] \sin(bx - abt), \\ w &= Ab[e^{bz} - e^{-bz}] \cos(bx - abt), \\ w' &= -A'b[e^{b(H-z)} - e^{-b(H-z)}] \cos(bx - abt). \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, daß die Teilchen der Flüssigkeiten Ellipsen beschreiben.

Lamb hat (a. a. O.) diese Rechnung für Gase ausgeführt und eine Gleichung erhalten, welche wie die obige eine Beziehung zwischen Wellenlänge und Periode darstellt. Sie lautet:

$$\frac{g^2}{k^2 a^4} = \frac{x^2(x-2)^2}{4\frac{b^4}{a^4} + 4(\gamma-1)x - (2\gamma-1)x^2};$$



hier ist zu setzen<sup>1)</sup>  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\sigma = \frac{2\pi}{\tau}$ ,  $c^2 = \gamma R T_0$ ,  $c'^2 = \gamma R T'_0$ ,  $a^2 = \frac{1}{2}(c^2 + c'^2)$ ,  
 $b^2 = \frac{1}{2}(c'^2 - c^2)$ ,  $x = \frac{6^2}{k^2 a^2}$ .

Durch Wahl bestimmter Größen  $x$  lassen sich eine Reihe von Lösungen angeben. Wird der Temperaturunterschied der beiden Schichten ähnlich wie oben recht gering angenommen und  $\frac{a^2}{b^2} = 100$  gesetzt, so ergibt die Gleichung nach Lamb beispielsweise folgende zusammengehörige Werte von Wellenlänge und Schwingungsdauer; zum Vergleiche sind die entsprechenden Werte für inkompressible Flüssigkeiten daneben gesetzt:

Der Schwingungsdauer $\tau$	entspricht die Wellenlänge $\lambda$	
	bei Gasen	bei Flüssigkeiten
21,2 sec	7,0 m	7,0 m
65,9	69,2	67,8
180,0	597,0	505,9
301,0	3160,0	1414,6

Für kleinere Wellen kann somit unbedenklich die Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten auch auf die Atmosphäre angewendet werden, bei größeren Wellen aber werden die Unterschiede sehr bedeutend; die Luftwellen sind bei der Schwingungsdauer von 5 Minuten bereits mehr als doppelt so lang wie die Wellen in inkompressiblen Flüssigkeiten bei gleichen Dichteunterschieden.

In einem seitlich begrenzten Gefäße können sich an der Grenze ungleich dichter Medien auch stehende Wellen ausbilden; sie hat u. a. W. Schmidt (a. a. O.) für Flüssigkeiten behandelt. Wir gelangen zu brauchbaren Gleichungen, wenn wir in der früheren Rechnung für das Geschwindigkeitspotential die Form wählen:

$$\varphi = f(z)[\cos(bx - a\bar{b}t) + \cos(bx + a\bar{b}t)].$$

Damit ergibt sich dieselbe Beziehung zwischen  $a$  und  $b$ , welche oben (S. 281) abgeleitet wurde. Doch sind nun die Wellenlängen nicht mehr beliebig. Aus der Bedingung, daß für die Grenzen des Gefäßes, d. i. für  $x=0$  und  $x=L$ , dessen Länge, die horizontale Geschwindigkeit  $u$  verschwinden muß, folgt nämlich:  $bL = \pi, 2\pi \dots n\pi$ , somit  $\lambda = \frac{2L}{n}$ , wenn  $n$  eine ganze Zahl. Wir erhalten eine Grundschwingung mit einer Reihe von Oberschwingungen. Sind die Höhen der beiden Schichten  $h$  und  $h'$  gegenüber der Länge des Gefäßes als groß anzusehen, so hat man nach S. 281:  $\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g} \frac{Qe + Q'e'}{e - e'}} = 2 \sqrt{\frac{\pi L}{ng} \frac{Qe + Q'e'}{e - e'}}$ . Sind hingegen

1)  $\gamma = 1,4$  ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen,  $R$  die Gaskonstante; die gestrichelten Größen beziehen sich auf die obere Masse.

die Höhen  $h$  und  $h'$  geradezu klein, so kann man die Potenzen  $Q$  und  $Q'$  entwickeln und erhält in erster Näherung:

$$\tau = \lambda \sqrt{\frac{e + e'}{h + h'}} = \frac{2L}{n} \sqrt{\frac{e + e'}{g(e - e')}} \quad (1)$$

Die Perioden der Wellen verhalten sich in solchen niedrigen Schichten wie  $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$  usw.

Bemerkenswerterweise hat A. Defant<sup>2)</sup> im Inntale bei Innsbruck zur Zeit von Föhnpausen oder vor Beginn des Föhnes Temperaturschwankungen periodischer Art beobachtet, bei welchen ganz bestimmte Schwingungsdauern häufig wiederkehren. Und zwar zeigten sich am häufigsten Perioden von 41,5, 24,5 und 14,0 Minuten Dauer. Diese Zahlen verhalten sich wie  $1 : 0,59 : 0,34$ , also sehr annähernd so, wie dies die obige Formel für stehende Wellen an der Grenzfläche niedriger Schichten verlangt. Die Meinung Defants, daß es sich hier um stehende Wellen an der Grenzfläche der im Tale lagernden kalten Schichte handelt, über welche der warme Föhn hinwegströmt, hat daher viel Wahrscheinlichkeit für sich. Als Grenzen des Gefäßes kämen Einengungen des Inntales in Betracht, welche westlich und östlich vom Beobachtungsorte liegen. Die Länge des Gefäßes betrüge dann 78 km. Für Wellen von derartiger Länge kann freilich unsere Formel, die für inkompressible Flüssigkeiten abgeleitet ist, auch nicht mehr annähernd gelten, wie aus dem Vergleich für fortschreitende Wellen hervorgeht (S. 283). Die quantitative Prüfung der Frage kann daher nicht vorgenommen werden.<sup>3)</sup>

Wir weisen schließlich noch darauf hin, daß unter günstigen Umständen an der Grenze von Tropo- und Stratosphäre fortschreitende Wellen auftreten können, namentlich dann, wenn Temperaturinversionen bestehen. Ob solche Wellen für die Höhenlage der Stratosphäre und damit überhaupt für die Veränderungen in der Atmosphäre von wesentlicher Bedeutung sind, wie man mitunter meint, ist noch sehr fraglich. Auch sonst ist bei Inversionen der Temperatur die Gelegenheit für Grenzwellen stets gegeben, und jene Wellen im Luftdruck, die durch Variographenaufzeichnungen schon an verschiedenen Orten festgestellt wurden, lassen sich wohl alle auf Schwankungen der Grenzschichte ungleich dichter Medien zurückführen.

1) Die betreffende Gleichung bei Schmidt enthält einen Fehler, da  $n$  dort unter dem Wurzelzeichen steht.

2) Met. Zeitsch. 1906, S. 281, und Denksch. Wien. Akad., Bd. 80, S. 107.

3) W. Schmidt lehnt die Deutung dieser Wellen als stehender gänzlich ab (Wien. Sitzber. Bd. 122, Abt. IIa, S. 970), wobei er sich freilich auf die Formel für inkompressible Flüssigkeiten stützt. Das häufige Auftreten bestimmter Perioden führt er auf die Häufigkeit gleicher Bedingungen, die den Föhn begleiten sollen, zurück. Damit sind aber die obigen regelmäßigen Verhältniszahlen der häufigsten Periodenlängen nicht erklärt.

**82. Tägliche Periode von Wind und Luftdruck.** Vermöge ihrer Kompressibilität ist die Luft imstande, elastische Schwingungen auszuführen, die in Verdichtungen und Verdünnungen bestehen. Hierher gehören neben den hier nicht behandelten Schallwellen auch Schwingungen, welche die Atmosphäre in großer Ausdehnung erfüllen und dadurch meteorologisches Interesse erhalten, in erster Linie die tägliche Periode von Luftdruck und Wind.

Eine tägliche Periode des Luftdrucks wird in den Tropen durch den Barographen direkt zum Ausdruck gebracht. In höheren Breiten ist sie meist durch unperiodische Druckschwankungen überdeckt, man findet sie aber auch hier, wenn durch Mittelbildungen jene Schwankungen eliminiert werden. Die Kurve, welche vom Barographen im Laufe eines Tages geschrieben wird, hat bestimmte auf der ganzen Erde wiederkehrende Merkmale; da die Extremwerte zu gewissen Ortszeiten auftreten, so folgt, daß die tägliche Barometerschwankung die Erde einmal im Tage wie eine Welle in der Richtung der Sonne, also von E nach W, umkreist.

Die lineare Geschwindigkeit, mit welcher diese Welle fortschreitet, ist somit namentlich am Äquator sehr groß und die gleiche, welche oben S. 26 für einen Punkt der Erdoberfläche angegeben wurde.

Da die Verteilung des Luftdrucks sich so rasch ändert, kann man nicht erwarten, daß die mit ihr verbundenen Winde auch nur annähernd dem stationären Zustand entsprechen. Die tägliche periodische Windverteilung muß vielmehr so beschaffen sein, daß die raschen Druckveränderungen durch ebenso rasch wechselnde Massenverlagerungen zustande kommen. Damit dies geschieht, muß z. B. aus jenem Gebiet, in dem der Druck eben fällt, Luft ausströmen usw. Die Bewegungen erfolgen also gewiß zum Teil gegen den Gradienten.

Die täglichen Winde, welche einer rasch fortschreitenden täglichen Druckwelle entsprechen, können aus den Bewegungsgleichungen gefunden werden. Hierzu haben wir in dieselben nur die Gradienten einzusetzen, welche durch die tägliche Druckperiode zustande kommen.

Um die tägliche Periode des Luftdrucks darzustellen, hat man sich seit Lamont der Fourierschen Reihe bedient. Hierbei zeigte es sich, daß die beiden ersten Glieder, die eine 24- und eine 12-stündige Periode darstellen, im allgemeinen zur Wiedergabe der Beobachtungen genügen. Die tägliche Druckperiode kann also geschrieben werden:

$$p = p_0 [1 + E_1 \sin (nt + \lambda_1) + E_2 \sin 2 (nt + \lambda_2)].^1$$

1) Hier wird mit  $n$  die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation (früher  $\omega$ ), mit  $\lambda$  die östliche geographische Länge eines Ortes bezeichnet. Diese Bezeichnungen wurden gewählt, um mit jenen von Margules in diesem und den folgenden Abschnitten in Übereinstimmung zu bleiben.

Hier ist ausgedrückt, daß der Druck  $p$  als Welle mit der Zeit  $t$  in der Richtung abnehmender geographischer Länge, also gegen W fortschreitet. So aufgefaßt ist  $t$  eine absolute Zeit, z. B. die von Greenwich, und  $\lambda$  die geographische Länge. Der Gradient in der Richtung West-osten ergibt sich durch Differentiation von  $p$  nach  $\lambda$ . Für einen bestimmten Ort hingegen bedeutet die Formel die zeitliche Änderung von  $p$ ; dann ist  $\lambda$  ein Phasenwinkel und  $t$  die Ortszeit. Wie namentlich Hann<sup>1)</sup> gezeigt hat, ist unter diesen Umständen die Phase  $\lambda_2$  auf der ganzen Erde von ähnlichem Betrage, während  $\lambda_1$  von der klimatischen Lage des Ortes abhängt.  $E_1$  und  $E_2$  sind die Amplituden des täglichen Ganges, erfahrungsgemäß Funktionen der Polhöhe  $\omega$  (die hier statt der geographischen Breite  $\varphi$  verwendet ist;  $\omega = 90^\circ - \varphi$ ) und der Seehöhe  $z$ , wohl auch der geographischen Länge  $\lambda$ . Ähnlich wie  $\lambda_2$  ist auch  $E_2$  auf der ganzen Erde viel regelmäßiger verteilt als  $E_1$ .

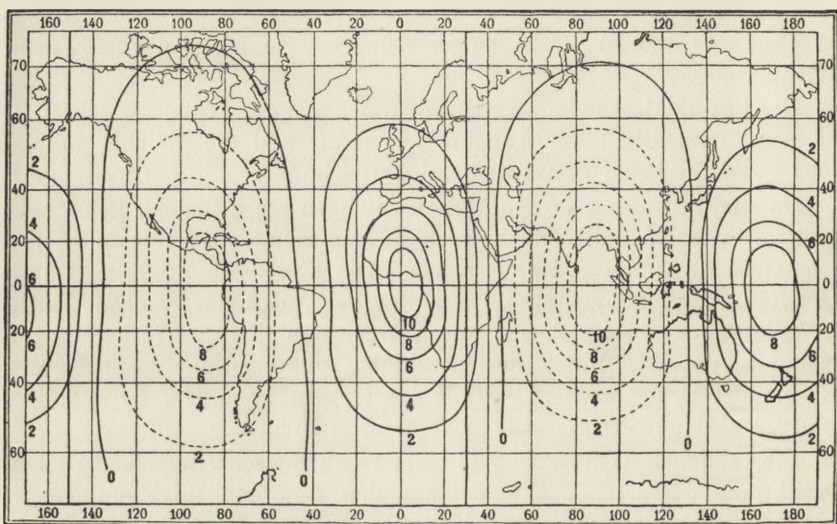


Fig. 65. Doppelwelle des Luftdruckes, 10 Uhr.

Eine gute Vorstellung von der doppelten täglichen Welle geben die synoptischen Zeichnungen derselben von E. Alt<sup>2)</sup>, z. B. die in Fig. 65 für 10<sup>h</sup>a oder 10<sup>h</sup>p Greenwicher Zeit. Um diese Zeit hat der Meridian von Greenwich das Maximum der doppelten Welle. Die ausgezogenen Isobaren versinnlichen hohen, die gestrichelten niedrigen Druck (unter dem Tagesmittel).

Um die tägliche Windperiode abzuleiten<sup>3)</sup>, welche mit der täglichen

1) Vgl. Lehrbuch der Meteorologie, 3. Aufl., S. 182.

2) Met. Zeitsch. 1909, S. 145.

3) M. Margules, Wien. Sitzber. Bd. 102, Abt. IIa, 1893, S. 1393, und E. Gold, Phil. Magaz., Jan. 1909, S. 26; ferner auch W. Trabert, Met. Zeitsch. 1903, S. 544.

Druckperiode verbunden ist, braucht man von der Ursache der letzteren nichts zu wissen. Wir nehmen sie als gegeben an und benützen zur Berechnung der Windperiode die Gleichungen für horizontale Bewegung von S. 99; sie lauteten:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\omega \sin \varphi v + ku &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} - 2\omega \sin \varphi u + kv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ersetzen wir nun auch, um der Margules'schen Bezeichnung zu folgen, die Breite  $\varphi$  durch die Polhöhe  $\omega$ , die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  aber durch  $n$ . Da  $x$  gegen Osten,  $y$  gegen Süden positiv gezählt wird, so ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{S \sin \omega} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial \omega},$$

wo  $S$  angenähert der Erdradius.

Man erhält somit die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2n \cos \omega v + ku &= -\frac{RT}{S \sin \omega} [E_1 \cos (nt + \lambda_1) + 2E_2 \cos 2(nt + \lambda_2)], \\ \frac{dv}{dt} - 2n \cos \omega u + kv &= -\frac{RT}{S} \left[ \frac{\partial E_1}{\partial \omega} \sin (nt + \lambda_1) + \frac{\partial E_2}{\partial \omega} \sin 2(nt + \lambda_2) \right]. \end{aligned}$$

Sehen wir zunächst von  $k$ , der Reibung an der Erdoberfläche, ab, so gibt die Integration dieser Gleichungen bei konstanter Temperatur  $T$ :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{RT}{nS \sin \omega} \left[ \frac{E_1 + 2 \sin \omega \cos \omega \frac{\partial E_1}{\partial \omega}}{1 - 4 \cos^2 \omega} \sin (nt + \lambda_1) + \frac{2E_2 + \sin \omega \cos \omega \frac{\partial E_2}{\partial \omega}}{2 \sin^2 \omega} \sin 2(nt + \lambda_2) \right], \\ v &= \frac{RT}{nS} \left[ \frac{2E_1 \cotg \omega + \frac{\partial E_1}{\partial \omega}}{1 - 4 \cos^2 \omega} \cos (nt + \lambda_1) + \frac{2E_2 \cotg \omega + \frac{\partial E_2}{\partial \omega}}{2 \sin^2 \omega} \cos 2(\omega t + \lambda_2) \right]. \end{aligned}$$

Der tägliche Gang des Windes hängt also nicht allein vom Gang des Druckes an einem Ort, sondern auch von der Druckverteilung in der Umgebung, den Größen  $\frac{\partial E}{\partial \omega}$ , ab.

Für  $30^\circ$  Breite ist  $\cos \omega = \frac{1}{2}$ ; dort wird der Nenner  $1 - 4 \cos^2 \omega$  zu null; die Gleichung kann dort nicht gelten, es sei denn, daß der Zähler den gleichen Faktor enthält. Sehen wir hiervon ab und betrachten die Komponenten  $u$  und  $v$  unter nicht zu hohen Breiten, wo  $\frac{\partial E_1}{\partial \omega}$  und  $\frac{\partial E_2}{\partial \omega}$  erfahrungsgemäß positiv sind (Abnahme der Amplitude polwärts), so können die Faktoren der Sinus und Kosinus in den eckigen Klammern als positiv angesehen werden. Dann müssen die negativen  $u$ -Werte mit dem Druck synchron verlaufen, die positiven  $v$ -Werte aber mit ihrer Phase um  $90^\circ$  der Druckperiode vorausseilen.

Die Komponenten der Bewegung setzen sich aus den beiden Teilen zusammen, welche durch die zwei täglichen Druckperioden, die einfache und doppelte, erzeugt werden, also  $u = u_1 + u_2$ ,  $v = v_1 + v_2$ . Unter diesen Umständen ergibt sich für beide Teile das folgende Schema (Fig. 66) von Druck und Wind aus den obigen Gleichungen:

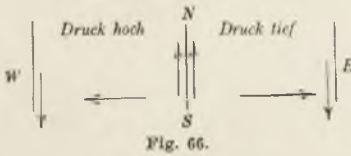


Fig. 66.

Geht über einen Ort demnach die einfache oder doppelte tägliche Welle des Druckes in der Richtung E-W hinweg, so weht zur Zeit hohen Druckes E-Wind, dann folgt S-Wind beim Übergang zum tiefen Druck, während des tiefen Druckes weht W-Wind und schließlich beim Übergang zum hohen Druck N-Wind. Das Windsystem entspricht dem Buys-Balotischen Gesetz nicht, weil eben kein stationärer Zustand besteht.

Hann<sup>1)</sup> hat den Nachweis erbracht, daß diese Folgerungen von Margules aus den Bewegungsgleichungen auch angenähert den Tatsachen entsprechen. Die schwachen Luftströmungen, die die täglichen Druckgradienten begleiten, können ihre freieste Ausbildung fern vom Boden finden, weswegen Hann den täglichen Gang des Windes in der Höhe untersuchte. Für den Säntis (2500 m) z. B. war zunächst der tägliche Gang des Druckes gegeben durch<sup>2)</sup>

$$\Delta p \text{ (mm)} = 0,19 \sin(177^\circ + nt) + 0,17 \sin(133^\circ + 2nt).$$

Hier ist  $t$  die Ortszeit; eine Stunde entspricht  $15^\circ$ .

Die Windkomponenten, welche mit diesem Luftdruck verbunden sind, ergaben sich aus den Beobachtungen zu<sup>3)</sup>:

$$u = -23 \sin(278 + nt) - 15 \sin(149 + 2nt) \text{ cm/sec,}$$

$$v = 14 \cos(34 + nt) + 14 \cos(150 + 2nt) \text{ cm/sec.}$$

Die Phasen, welche jetzt unter der Klammer stehen, sollten der Theorie nach die gleichen sein, wie die Phasen der Druckschwankung. Wie man sieht, ist dies nur für die doppelte Periode, hier aber ziemlich genau der Fall, während die Phasen der einfachen Periode der beiden Windkomponenten sehr stark sowohl voneinander als von der Phase des Druckes abweichen. Die halbtägige Windperiode folgt also der halbtägigen Barometerschwankung im Sinn des obigen Schemas. Die gantztägige Windperiode dürfte durch lokale Verhältnisse, wie Berg- und Talwinde, sehr stark beeinflußt sein; vermutlich haben im Gebirge die

1) Wien. Sitzber. Bd. 111, Abt. IIa, 1902, Met. Zeitsch. 1903, S. 501, daselbst 1908, S. 220 und 1910, S. 319.

2) Hann, Denkschr. Wien. Akad., Bd. 59, 1892, S. 304.

3) Hann, Met. Zeitsch. 1903, S. 509; die Amplituden sind auf die Hälfte zu verkleinern (Gold a. a. O.); zum Vergleich mit den Druckphasen sind die Phasen gegen das Original hier umgeschrieben.

Druckgradienten der 24stündigen Periode nicht mehr die hier vorausgesetzten einfachen Werte.

Die Tatsache, daß die nur etwa 15 cm/sec betragende Amplitude der 12stündigen Windperiode aus den Beobachtungen nachgewiesen und mit der Theorie in Einklang befunden wurde, läßt den Schluß zu, daß es sich hier um eine durch lokale Erwärmungen usw. gar nicht beeinflusste Erscheinung handelt, sondern um eine Welle, die ungestört die Erde umkreist. Dies beweisen ja auch die zahlreichen Analysen des Druckes von den verschiedensten Orten der Erde, welche eine ganz auffallende Regelmäßigkeit der doppelten Periode lieferten.

Gold hat die Berechnung der täglichen Windperiode aus der Druckperiode noch weiter geführt, indem er in den obigen Bewegungsgleichungen die Reibung am Boden nicht mehr vernachlässigte. Die Windperioden erleiden hierdurch hauptsächlich eine Phasenverschiebung gegenüber den Druckperioden, doch wird die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung auch hierdurch keine vollständige. Schließlich hat Gold auch noch die vertikale Bewegung in Rücksicht gezogen und kam zu dem Ergebnis, daß dieselbe in ihrer täglichen Periode nur Amplituden der Ordnung 1 mm/sec aufweist.

**83. Tägliche Periode von Luftdruck und Temperatur.** Die Frage nach der Ursache der täglichen Periode des Luftdrucks, jener Tatsache, die im vorigen Abschnitt einfach als gegeben angenommen wurde, ist in verschiedener Weise beantwortet worden.<sup>1)</sup> Die Regelmäßigkeit der halbtägigen Welle ließ auf eine der ganzen Erde gemeinsame Ursache schließen; daß es sich nicht um eine der Ebbe und Flut des Meeres analoge Erscheinung handelt, folgt nach Hann<sup>2)</sup> einfach daraus, daß keine Mondperiode vorhanden ist, sondern die Welle der Sonnenzeit (Ortszeit) folgt.

Aus den Amplituden der ganztägigen Periode der Luftdrucks unter verschiedenen klimatischen Bedingungen ergibt sich, daß diese Periode mit der täglichen Temperaturschwankung in Zusammenhang steht. Die Temperaturzunahme im Laufe des Tages erzeugt eine mehr oder weniger regelmäßige Konvektionsströmung, die im Prinzip bekannt aber von den lokalen Erwärmungsverhältnissen sehr abhängig ist; sie wird z. B. durch Gebirgsformationen (Berg- und Talwinde), durch die Verteilung von Kontinent und Wasser (Land- und Seewinde) starkt beeinflusst. Die ausführlichste Erörterung einer solchen Konvektionsströmung verdanken wir Defant.<sup>3)</sup>

Für die halbtägige Welle fehlt die analoge Temperaturwelle im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Lord Kelvin äußerte nun die Ansicht,

1) Vgl. Hann, Lehrbuch, 3. Aufl., S. 197.

2) Lehrbuch, 3. Aufl., S. 182.

3) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 118, Abt. IIa, S. 553, 1909.

und Margules hat diese Ansicht durch die Rechnung bestätigt, daß die recht bedeutende halbtägige Welle des Druckes trotzdem durch eine sehr geringe halbtägige Temperaturschwankung zu stande komme, weil die Atmosphäre als ganzes eine freie Schwingung besitze, deren Periode ungefähr ein halber Tag sei. Die halbtägige Druckperiode wäre danach eine durch eine halbtägige Temperaturperiode erzwungene Schwingung, deren Amplitude sehr groß im Verhältnis zur erregenden Schwingung ausfällt, weil die Atmosphäre mitschwingt (Resonanz).

Der tägliche Gang der Temperatur läßt sich wie der des Druckes durch eine Fouriersche Reihe darstellen, in welcher Glieder mit 24, 12, 8 . . . stündiger Periode vorkommen. So lange nun die Änderungen in Druck, Dichte und Geschwindigkeit, welche durch diese Wellen entstehen, nicht groß sind, werden alle diese Temperaturwellen für sich Druckwellen erzeugen, die sich gegenseitig nicht beeinflussen; sie werden im folgenden berechnet. Es entsteht also durch die 24-stündige Periode der Temperatur eine ebensolche des Druckes, durch die 12-stündige der Temperatur eine 12-stündige des Druckes usw. Das Amplitudenverhältnis der Druckschwingung und der sie erzeugenden Temperaturschwingung ist aber für jede Periode ein anderes; es wird ein Maximum, wenn zufällig die erregende Temperaturschwingung die gleiche Periode hat wie die Eigenschwingung der Atmosphäre.

Wir berechnen demnach die Amplituden der Druckwellen, welche durch die ganz- und halbtägige Temperaturwelle hervorgebracht werden. Wollte man die Rechnung noch vollständiger machen, so könnte man auch noch die Wirkung der 8- und 6-stündigen Temperaturwelle, die durch die Fouriersche Reihe gegeben wird, aufsuchen.

Jede Erwärmung, die sich nach 24, 12 oder 8 Stunden regelmäßig wiederholt, wird eine Drucksteigerung zur Folge haben, die in der gleichen Zeit wiederkehrt. Mit dieser sind auch die Luftbewegungen verbunden, die im vorigen Abschnitt berechnet wurden. Die Druckänderung ergibt sich als Folge der Temperaturänderung zunächst mittelst der Gasgleichung. Neben ihr haben wir noch die Kontinuitätsgleichung und die drei Bewegungsgleichungen zu benutzen.

Margules<sup>1)</sup> hat die ganze Rechnung unter der vereinfachenden Voraussetzung durchgeführt, daß die Atmosphäre die Erde wie eine dünne Schale umgibt, in der nur horizontale Bewegungen vorkommen. Nur unter dieser Voraussetzung war es möglich, die Integration der Differenzialgleichung des Druckes durchzuführen.

Anders ist Gold (a. a. O.) vorgegangen; er nahm die beobachtete Druckperiode als gegeben an und berechnete aus ihr nach der Kon-

1) Erste Arbeit in Wien. Sitz.-Ber. Bd. 99, Abt. IIa, S. 204, 1890; weitere Ausführungen daselbst Bd. 102, S. 1369, 1893.



tinuitätsgleichung die Temperaturperiode, die dann mit der tatsächlichen verglichen werden kann. Hier konnte auch die vertikale Bewegung berücksichtigt werden.<sup>1)</sup> Doch zeigt die Methode von Margules viel besser die Entwicklung der ganzen Erscheinung, weswegen wir derselben hier folgen.

Die beiden Bewegungsgleichungen für horizontale Bewegung lauteten (vgl. den vorigen Abschnitt<sup>2)</sup>):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2n \cos \omega v + ku &= -\frac{1}{\rho S \sin \omega} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \\ \frac{dv}{dt} - 2n \cos \omega u + kv &= -\frac{1}{\rho S} \frac{\partial p}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Nach der hier verwendeten Bezeichnungsweise und bei Vernachlässigung der vertikalen Bewegungskomponente  $\dot{r}$  wird aus der Kontinuitätsgleichung von S. 34:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \omega} + \frac{1}{S \sin \omega} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \lambda} + \frac{\rho v}{S} \cotg \omega = 0.$$

Wir lassen nun die quadratischen Glieder in den Bewegungsgleichungen weg (vgl. S. 33) und setzen  $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t}$ ; ferner vernachlässigen wir die Glieder von zweiter Ordnung der Kleinheit in der letzten Gleichung, nämlich  $v \frac{\partial \rho}{\partial \omega}$  und  $u \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}$ . Auch sehen wir bei der folgenden Rechnung von der Bodenreibung  $k$  ab. Dann ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2n \cos \omega v &= -\frac{RT}{pS \sin \omega} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 2n \cos \omega u &= -\frac{RT}{pS} \frac{\partial p}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{S} \left( \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \cotg \omega \right) &= 0. \end{aligned}$$

Nun sollen die kleinen täglichen Änderungen von Druck, Temperatur und Dichte in der folgenden Weise bezeichnet werden:

$$T = T_0(1 + \tau), \quad p = p_0(1 + \varepsilon), \quad \rho = \rho_0(1 + \sigma).$$

1) Ähnlich aber noch allgemeiner ist die Untersuchung von P. Järisch (Met. Zeitsch. 1907, S. 481) angelegt. Dieser sucht Lösungen der Differenzialgleichungen für Temperatur, Druck und Wind. Unter den allgemeinen Lösungen soll dann jene benutzt werden, welche dem tatsächlichen Temperaturverlauf entspricht. Doch ist diese Untersuchung nicht bis zu Ende geführt.

2) Bei Margules ist die W-E-Komponente der Bewegung  $u$  mit  $c$ , die N-S-Komponente  $v$  mit  $b$  bezeichnet.

Aus der Gasgleichung folgt  $\varepsilon = \sigma + \tau$ ;  $T_0, p_0, q_0$  sind Konstanten. Die Größen  $\varepsilon, \sigma, \tau$  sind klein gegen die Einheit. Man erhält dann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + 2n \cos \omega v &= -\frac{RT_0}{S \sin \omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 2n \cos \omega u &= -\frac{RT_0}{S} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{S} \left( \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \cotg \omega \right) &= 0.\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen gestatten prinzipiell die Berechnung der drei Größen  $\varepsilon, u, v$ , wenn  $\tau$  als Funktion von Ort und Zeit gegeben ist.

I. Wir wollen zuerst die Bewegungen auf einer ruhenden Erde betrachten ( $n = 0$ ). Indem die erste Gleichung nach  $\lambda$ , die zweite nach  $\omega$ , die dritte nach  $t$  partiell differenziert wird, läßt sich  $u$  und  $v$  eliminieren, und man erhält aus der dritten Gleichung, indem wieder die Glieder, die Quadrate oder Produkte der Geschwindigkeit enthalten, weggelassen werden:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{RT_0}{S^2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \lambda^2} + \cotg \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right) = 0.$$

Wir berechnen zunächst die Wirkung einer ganztägigen Temperaturwelle, die sich von E nach W um die Erde fortpflanzt. Sie sei durch  $\tau = A \sin \omega \sin (nt + \lambda)$  gegeben, so daß ihre Amplitude polwärts abnimmt.  $n$  hat hier die Bedeutung  $\frac{2\pi}{\Theta}$ , wo  $\Theta$  die Schwingungsdauer (= 1 Tag), und ist identisch mit der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation; die Bewegung geht so vor sich, wie wenn die Sonne in 24 Stunden die Erde umkreisen würde.

Eine Lösung obiger Differenzialgleichung ist dann:

$$\varepsilon = B \sin \omega \sin (nt + \lambda).$$

Dazu muß sein:  $B = A \frac{S^2 n^2}{RT_0 - 2}$ . Die Temperaturwelle erzeugt also eine

synchrone Druckwelle; hoher Temperatur entspricht hoher Druck, so lange  $B$  das gleiche Vorzeichen hat wie  $A$ , sonst tiefer. Wenn  $\frac{S^2 n^2}{RT_0} - 2$  den Wert null hat, was von der Wahl der Konstanten abhängt, so wird  $B$  unendlich, wir haben den Fall der Resonanz. Eine ganz geringe Temperaturwelle kann dann beliebig große Druckwellen erzeugen. Nun ist  $nS$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle am Äquator,  $\sqrt{RT_0}$  ist die Newtonsche Schallgeschwindigkeit (bei isothermen Wellen). Es kommt also darauf an, welche von beiden größer ist.

Um die Wirkung einer halbtägigen Temperaturwelle auf den Druck

zu erhalten, setzen wir:  $\tau = A' \sin^2 \omega \sin 2(nt + \lambda)$ . Die Gleichung gibt ein Integral in der Form:

$$\varepsilon = B' \sin^3 \omega \sin 2(nt + \lambda),$$

wo nun 
$$B' = A' \frac{\frac{2n^2 S^2}{RT_0}}{\frac{2n^2 S^2}{RT_0} - 3}$$

Die Verhältnisse sind den früheren analog; nur ist die Bedingung für die maximale Druckamplitude jetzt eine andere.

Setzt man  $T_0 = 273^\circ$ ,  $S = 6371$  km, so kann man für einen Augenblick von den tatsächlichen Periodenlängen (24 und 12 Stunden) absehen und fragen, welche Perioden nötig wären, um die einfache und doppelte Druckamplitude unendlich zu machen. Man findet für die einfache Welle  $\Theta = 28,09$ , für die doppelte  $\Theta' = 16,23$  Stunden.

Die größtmögliche einfache Schwingung liegt also in ihrer Periode näher an der 24-stündigen als die doppelte an der 12-stündigen. Bei Berücksichtigung der Erdrotation ändert sich dies, wie später ausgeführt wird.

Nehmen wir die wirkliche Größe von  $n = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ sec}^{-1}$  und setzen  $T_0 = 273^\circ$ , so wird für die ganztägige Welle  $B = 3,710 A$ , für die halbtägige  $B' = 2,212 A'$ . Sei nun z. B. am Äquator zur Zeit der größten Erwärmung  $\tau T_0 = 1^\circ$ , so folgt, wenn  $p_0 = 760$  mm, die Druckamplitude für die ganztägige Welle  $\varepsilon p_0 = 10,3$  mm Hg, für die halbtägige  $\varepsilon p_0 = 6,2$  mm Hg.

Die Windverteilung, welche mit diesen Druckperioden verbunden ist, entspricht bei ruhender Erde ganz dem Schema des vorigen Abschnitts (S. 287), das für die rotierende Erde abgeleitet wurde, wie ein Vergleich der Differenzialgleichungen zeigt. Die Phasen sind dieselben, nur die Amplituden sind anders ausgedrückt.

Da mit den obigen Konstanten die Druckamplituden  $B$  und  $B'$  das gleiche Vorzeichen haben wie die Temperaturamplituden  $A$  und  $A'$ , so hat der Ort mit höchster Temperatur Ostwind, der mit niedrigster Westwind. Wäre  $\frac{B}{A}$  negativ, so würden sich die Verhältnisse umkehren.

II. Wenn die Erde rotiert, so ist die Integration der Gleichungen von S. 292 ungleich schwieriger. Wir geben die Margulesseche Rechnung in kurzen Zügen wieder.

a) Es soll zunächst die ganztägige Temperaturperiode in der Form gegeben sein:  $\tau = A(\omega) \sin (nt + \lambda)$ . (Die Amplitude  $A$  sei eine Funktion der Polhöhe). Die Gleichungen werden dann nach  $t$  und  $\lambda$  befriedigt durch Lösungen von der Form:

$$\varepsilon = E(\omega) \sin (nt + \lambda), \quad u = \psi(\omega) \sin (nt + \lambda), \quad v = \varphi(\omega) \cos (nt + \lambda).$$

Durch Einsetzen in dieselben ergeben sich für die Bestimmung der Funktionen  $E$ ,  $\psi$  und  $\varphi$  folgende drei Bedingungen:

$$Sn(E - A) + \frac{1}{\sin \omega} \left[ \frac{d(\varphi \sin \omega)}{d\omega} + \psi \right] = 0,$$

$$\psi = - \frac{RT_0}{Sn} \frac{E}{\sin \omega} + \frac{2 \cos \omega}{1 - 4 \cos^2 \omega} \frac{dE}{d\omega},$$

$$\varphi = \frac{RT_0}{Sn} \frac{2E \cotg \omega + \frac{dE}{d\omega}}{1 - 4 \cos^2 \omega}.$$

Die beiden letzten Gleichungen drücken die Amplituden der Bewegungskomponenten aus und sind naturgemäß mit den S. 287 abgeleiteten Amplituden identisch.

Um diese drei Gleichungen zu lösen, wird zunächst eine Hilfsfunktion  $\Phi(\omega) = \frac{nS}{RT_0} \varphi(\omega) \sin \omega$  eingeführt. Durch Elimination von  $\psi$  findet man:

$$\Phi(1 - 4 \cos^2 \omega) = 2E \cos \omega + \frac{dE}{d\omega} \sin \omega,$$

$$\frac{S^2 n^2}{RT_0^2} (E - A) + \frac{1}{\sin \omega} \left[ \frac{d\Phi}{d\omega} - 2\Phi \cotg \omega - \frac{E}{\sin \omega} \right] = 0.$$

Man wählt nun für  $\Phi(\omega)$  einen Ausdruck, welcher, mit einer beliebig großen Zahl von Konstanten behaftet, die Darstellung einer empirischen Geschwindigkeitsverteilung ermöglicht, nämlich:

$$\Phi(\omega) = C \cos \omega (\alpha_1 \sin \omega + \alpha_3 \sin^3 \omega + \alpha_5 \sin^5 \omega + \dots).$$

Nach der ersten der obigen Gleichungen hat die Funktion  $E$  die Form:

$$E(\omega) = C [\beta_1 \sin \omega + \beta_3 \sin^3 \omega + \beta_5 \sin^5 \omega + \dots],$$

wobei

$$\beta_1 = -\alpha_1, \quad \beta_3 = \frac{4\alpha_1 - 3\alpha_3}{5}, \quad \beta_5 = \frac{4\alpha_3 - 3\alpha_5}{7} \dots$$

Um die zweite Gleichung auszuwerten, muß eine Annahme über die Amplitude der ganztägigen Temperaturwelle gemacht werden. Margules setzt:  $A(\omega) = C \sin \omega$ . Wird dieser Wert und der Ausdruck für  $E$  und  $\Phi$  in die Differenzialgleichung eingeführt, so müssen alle Glieder, die gleiche Potenzen von  $\sin \omega$  und  $\cos \omega$  enthalten, null werden. Auf diese Weise ergibt sich eine Reihe von Gleichungen:

$$\left(1 + \frac{3}{5}\right) \alpha_3 - \left(k + \frac{4}{5}\right) \alpha_1 - k = 0,$$

$$\left(3 + \frac{3}{7}\right) \alpha_5 - \left(\frac{3}{5}k + \frac{4}{7} + 2\right) \alpha_3 + \frac{4}{5}k\alpha_1 = 0,$$

$$\left(i - 2 + \frac{3}{i+2}\right) \alpha_i - \left(\frac{3}{i}k + \frac{4}{i+2} + i - 3\right) \alpha_{i-2} + \frac{4}{i}k\alpha_{i-4} = 0,$$

für  $i = 5, 7, 9 \dots$ , wobei  $k = \frac{n^2 S^2}{RT_0}$ .

Um die unbekanntenen Koeffizienten  $\alpha$  zu bestimmen, wird nach dem Vorgang von Laplace geschrieben:

$$\frac{\alpha_{i-2}}{\alpha_{i-4}} = \frac{4k(i+2)}{3k(i+2) + (i-2)i(i+1) - (i-1)i(i+1) \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-2}}}$$

Man erhält so:

$$q_1 = \frac{\alpha_5}{\alpha_1} = \frac{4k \cdot 7}{3k \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\alpha_5}{\alpha_3}}$$

$$q_3 = \frac{\alpha_5}{\alpha_3} = \frac{4k \cdot 9}{3k \cdot 9 + 5 \cdot 7 \cdot 8 - 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{\alpha_7}{\alpha_5}}, \text{ usw.}$$

Setzt man hier stets die folgende in die vorhergehende Gleichung ein, so wird jedes  $q$  durch einen unendlichen Kettenbruch ausgedrückt, der sehr rasch konvergiert, da der Nenner sehr rasch wächst und die  $q$  stets kleiner werden. Margules führte die Rechnung bis  $q_{19}$  aus. Sind die  $q$  einmal alle bekannt, so kann  $\alpha_1$  aus der ersten Gleichung oben berechnet werden und damit weiter jedes der folgenden  $\alpha$ .

Um die Rechnung wirklich durchzuführen, benötigt man den numerischen Wert von  $k$ , welcher im gegebenen Problem von der Mitteltemperatur  $T_0$  der Atmosphäre abhängt. Margules berechnete diese Kettenbrüche für zwei Werte von  $k$ , nämlich  $k = 2,5$  und  $k' = 2,7352$ , die für  $T_0 = 298,7^\circ$  und  $T_0 = 273^\circ$  gelten. Er fand z. B. für die letztere Temperatur:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_7 & \alpha_9 \\ -1,146 & -0,823 & -0,279 & -0,053 & -0,006 \end{array}$$

Die Konvergenz der Kettenbrüche ist hieraus klar zu erkennen. Einen ähnlichen Verlauf zeigen die Werte  $\beta$ .

Man findet nun folgende Beträge für die relative Druckschwankung in verschiedenen Polhöhen:

$$\begin{array}{cccc} \omega = 90^\circ & 60^\circ & 45^\circ & 30^\circ \\ \frac{E(\omega)}{C} = 0,23 & 0,50 & 0,58 & 0,51. \end{array}$$

Ist die Temperaturschwankung am Äquator z. B.  $1^\circ$ , so ist die Druckschwankung daselbst 0,64 mm Hg, in  $45^\circ$  Breite 1,6 mm.

b) Wird eine halbtägige Temperaturperiode als erregende Welle angenommen, also  $\tau = A(\omega) \sin 2(nt + \lambda)$ , so gestaltet sich die Rechnung ähnlich. Die Lösungen werden unter analogen Formen gesucht wie oben:

$$\begin{array}{l} \varepsilon = E(\omega) \sin 2(nt + \lambda), \\ u = \psi(\omega) \sin 2(nt + \lambda), \\ v = \varphi(\omega) \cos 2(nt + \lambda). \end{array}$$



wird also durch Margules Rechnungen bestätigt. Bei  $T_0 = 298,7$  findet dieser für den Äquator  $\varepsilon = -10,26 C \sin 2(nt + \lambda)$ . Eine Temperaturamplitude von  $0,038^0$  daselbst würde schon eine Druckamplitude von 1 mm Hg erzeugen.

Ist die Mitteltemperatur der Atmosphäre höher als  $268^0$ , so werden alle  $\alpha$  negativ, ist sie niedriger, positiv. Es entspricht daher einem Maximum der Temperatur im ersten Falle ein Minimum, im zweiten ein Maximum des Druckes; die Extreme fallen auch bei dieser Rechnung stets aufeinander, wie bei der ruhenden Erde; die Phasenverschiebung beträgt  $0^0$  oder  $180^0$ .

Margules' Rechnung ist nach zwei Richtungen hin nicht ganz vollständig. Einmal könnte verlangt werden, daß auch das dritte und vierte Glied der Fourierschen Temperaturreihe auf seine Wirkung bezüglich einer entsprechenden Druckperiode untersucht werde. Dies konnte unterlassen werden, da die ersten zwei Glieder der Temperaturreihe zur Darstellung des täglichen Temperaturganges tatsächlich ziemlich ausreichen, so daß die Amplituden der höheren Glieder nur sehr klein sein können. Ferner ist von Margules vorausgesetzt, daß die 24-stündige und 12-stündige Periode einander nicht beeinflussen; denn nur unter diesen Umständen erzeugt jede Temperaturperiode für sich die entsprechende Druckperiode. Diese Voraussetzung steckt in der Vernachlässigung der quadratischen Glieder der Bewegungsgleichungen. Da nun aber, wie im vorigen Abschnitt bemerkt, die Windgeschwindigkeiten der täglichen Periode wirklich sehr klein sind, so war auch diese Voraussetzung erlaubt.

Man hat bei der Margules'schen Theorie der täglichen Barometerschwankung daran Anstoß genommen, daß die reelle Erscheinung der doppelten Schwankung des Luftdrucks durch eine aus dem täglichen Temperaturgang herausgelöste doppelte tägliche Temperaturschwankung zustande kommen soll, welche ein bloßes Rechnungsergebnis der Entwicklung nach der Fourierschen Reihe sei und physikalisch nicht existiere. Margules selbst hat aus diesem Grunde seine Theorie bloß als Rechnung bezeichnet wissen wollen.<sup>1)</sup>

Doch fällt der scheinbare Widerspruch, daß ein Rechnungsergebnis physische Folgen habe, weg, wenn man die zwei Druckperioden, die sich aus den zwei Temperaturperioden ergaben, nun wieder zusammengesetzt denkt; man erhält dann die Kurve, welche der Barograph schreiben muß, wenn die Temperaturperiode die in zwei Wellen zerlegt wurde, wirklich vorhanden ist. Die doppelte tägliche Barometerschwankung ist ja ebenso wenig allein vorhanden, wie die entsprechende Temperaturschwankung. Auch sie ist in diesem Sinne ein Rechnungsergebnis, das sich in seiner Reinheit nur nach Abzug der ganztägigen Welle ergibt.

1) Met. Zeitschr. 1903, S. 562.

Das Ergebnis der Theorie ist also, daß die wirkliche tägliche Temperaturkurve tatsächlich eine tägliche Druckkurve von wesentlich anderer Gestalt erzeugt; die Zerlegung beider Kurven nach der Fourierschen Reihe ist nur ein Rechnungsbehelf.

Das Margulesseche Resultat bezüglich des Zusammentreffens von Temperatur- und Druckextremen entspricht nicht den Tatsachen. Daher hat Margules in die Bewegungsgleichungen noch die Reibung am Boden eingeführt<sup>1)</sup>, wobei sich zeigte, daß nun die Druckperiode eine Phasenverschiebung gegen die Temperaturperiode erhielt. Doch entsprach sie nicht gut den Beobachtungen. Daher hat Gold (a. a. O.) nun auch noch die vertikale Bewegung berücksichtigt, also die Annahme fallen lassen, die Atmosphäre sei eine dünne Schale. Vor kurzem hat auch H. Lamb<sup>2)</sup> das Problem in Angriff genommen, indem er Rücksicht auf die Abnahme der Temperatur mit der Höhe nahm; doch betrachtet er die Atmosphäre nicht als Kugelschale. Ein näheres Eingehen auf diese Details würde zu weit führen; das wesentliche des Problems scheint durch Margules gelöst worden zu sein.

**84. Freie elastische Schwingungen der Atmosphäre.** Die Margulesseche Theorie der täglichen Barometerschwankung fußt auf den Eigenschwingungen der Atmosphäre. Margules hat daher diese letzteren auch direkt untersucht. Die Frage ist: welche Eigenbewegungen führt die Atmosphäre auf irgend eine Störung ihrer Ruhelage hin aus?

In dieser Allgemeinheit würde die Beantwortung der Frage die sämtlichen Luftbewegungen enthalten müssen, die auf der Erde durch eine einmalige Störung irgendwelcher Art möglich sind. Es ist klar, daß dies unendlich viele sein werden. Man muß daher Einteilungen machen, welche eine Übersicht über die möglichen Bewegungen gewähren.

Wäre keine Reibung vorhanden, so würde jede Störung (theoretisch bis in die Unendlichkeit) fortbestehen, es würden Wellen auftreten analog denen einer gezupften Violinseite. Bei allen derartigen Bewegungen würde die Luft in der Regel nicht zum tiefen Druck strömen; denn sonst würde ja das Tiefdruckgebiet bald ausgefüllt sein. Nun werden aber Bewegungen gegen den Gradienten nur selten wirklich beobachtet, wie etwa bei den täglichen Drehungen der Windrichtung auf Berggipfeln (vgl. Abschnitt 82), die übrigens keine freien sondern erzwungene Wellen sind. Sonst findet man vorwiegend Bewegungen in der Richtung

1) a. a. O. 1893; die Rechnungen sind zu weitläufig, um hier wiedergegeben zu werden.

2) Proc. Roy. Soc. London, Serie A, Vol. 84, S. 551, 1910; wie es scheint, hatte Lamb keine Kenntnis von Margules Untersuchungen, die 20 Jahre älter sind.



des Gradienten, allerdings nach der Buys-Ballotschen Regel abgelenkt. Margules schließt daraus, daß die Reibung der Luft bei deren Bewegung eine große Rolle spielen muß. Wenn eine Störung sich unter Reibung auszugleichen strebt, so tritt entweder eine zeitliche Abnahme der Amplitude auf, wobei die Schwingungen allmählich erlöschen, oder die Bewegung wird bei noch größerer Reibung eine ausfüllende, aperiodische. Hier ist die Strömung gegen den Gradienten ganz verschwunden, bei der erlöschenden Schwingung ist sie mehr oder weniger reduziert.

Wir können also schließen, daß in der Atmosphäre freie Schwingungen keine große, selbständige Rolle spielen. Sie sind hauptsächlich dort von Bedeutung, wo sie eine erzwungene Welle vergrößern, wie bei der doppelten täglichen Periode des Luftdrucks. Wäre die Reibung nicht von so großer Wirkung, dann würde es vermutlich viele atmosphärische Erscheinungen von periodischem Verlauf geben und die Untersuchung der freien Wellen in der Atmosphäre wäre von viel größerer Bedeutung, als dies tatsächlich der Fall ist. Es bleibt freilich denkbar, daß in hohen Schichten der Atmosphäre, wo die Reibung gering ist, die freien Wellen eine größere Rolle spielen; doch ist darüber nichts näheres bekannt.

Wir beschränken uns aus diesen Gründen hier auf eine kurze Darstellung der wichtigsten Ergebnisse.<sup>1)</sup> Die Bewegungen der Luft sollen isotherm verlaufen; da die Wellen viel längere Perioden haben, als z. B. die Schallwellen, so ist diese Vereinfachung erlaubt. Es gelten die Gleichungen<sup>2)</sup> von S. 292, wenn in der letzten derselben, der Kontinuitätsgleichung, die Temperaturschwankung  $\tau = 0$  gesetzt wird; also:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\nu \cos \omega v = - \frac{RT_0}{S \sin \omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - 2\nu \cos \omega u = - \frac{RT_0}{S} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{S \sin \omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \sin \omega)}{\partial \omega} \right] = 0.$$

Hier ist für die Rotationsgeschwindigkeit der Erde statt  $n$  der Buchstabe  $\nu$  gewählt, während  $n$  für die Eigenperioden der Atmosphäre reserviert bleibt, die nun nicht mehr Bruchteile eines Tages zu sein

1) Die Margules'schen Arbeiten sind in den zwei Abhandlungen: Wien. Sitzber. Bd. 101, Abt. IIa, 1892, S. 597 und Bd. 102, 1893, S. 11, erschienen; eine sehr klare Darstellung ihres Inhalts gab Trabert in populärer Form in Met. Zeitsch. 1903, S. 481.

2) Die Vernachlässigung der quadratischen Glieder bedeutet die Weglassung der Zentrifugalkräfte neben der ablenkenden Kraft der Erdrotation. Es könnte dann auf einer ruhenden Erde eine stationäre Strömung ohne irgendwelchen Druckgradienten bestehen.

brauchen. Die Lösungen obiger Gleichungen werden unter der Form gesucht:

$$\varepsilon = E(\omega) \sin(hl + nt), \quad u = \psi(\omega) \sin(hl + nt), \quad v = \varphi(\omega) \cos(hl + nt).$$

Die Größe  $h$  soll 0, 1, 2, 3 usw. sein. Für  $h = 1$ ,  $n = \nu$  gehen die Gleichungen in die der eintägigen, für  $h = 2$ ,  $n = 2\nu$  in die der halbtägigen Barometerschwankung über. Ist  $h = 0$ , so hängen die Veränderlichen  $\varepsilon$ ,  $u$ ,  $v$  von der geographischen Länge nicht ab; wir haben es mit „zonaler“ Verteilung von Druck und Wind zu tun. Bewegungen dieser Art rechnet Margules unter die „zonale Klasse“.

Werden wie im früheren Abschnitt diese Lösungen in die Differenzialgleichungen eingesetzt, so ergeben sich Bedingungsgleichungen für die Funktionen  $E$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ . Eine allgemeinere Form, unter welcher  $\varphi$  dargestellt werden kann, ist, ähnlich wie früher:

$$\varphi = \sin \omega (a_1 \cos \omega + a_3 \cos^3 \omega + a_5 \cos^5 \omega + \dots).$$

Nach ihr ist am Äquator die meridionale Bewegung stets null. Lösungen dieser Art werden als „pare“ bezeichnet, der Äquator ist eine Knotenlinie, die Schwingungen sind auf den beiden Hemisphären zueinander symmetrisch.

Eine andere Form für  $\varphi$  ist:

$$\varphi = \sin \omega (a_0 + a_2 \cos^2 \omega + a_4 \cos^4 \omega + \dots).$$

Hier geht die meridionale Bewegung von einer Halbkugel zur anderen über („impare Wellen“).

In beiden Fällen sind zur Berechnung der Größen  $a$  Kettenbruchgleichungen zu lösen, ähnlich den früheren. Aus ihnen ergibt sich eine Reihe von Werten  $n$ , die die Periodenlängen der freien Schwingungen bestimmen (Typus 1, 2, 3 usw.). Bei den paren Schwingungen der zonalen Klasse haben die drei längsten Perioden (drei ersten Typen) die Dauer 0,5165, 0,3283 und 0,2400 Tage, bei den imparen 0,8516, 0,3994 und 0,2779 Tage; dabei ist die Mitteltemperatur der Erde zu 273° angenommen.

Die Bewegungen sind hier gegen die Gradienten gerichtet. Wäre die Erde in Ruhe, so würde die Bewegung längs der Parallelkreise ganz fehlen. Durch ihre Rotation werden die meridionalen Bewegungen, welche die zonale Druckverteilung bewirken, gegen  $W$ , bzw.  $E$  abgelenkt.

Es gibt noch eine dritte Art von Bewegungen, die den Differenzialgleichungen entsprechen und dabei von  $\lambda$  unabhängig sind; die nämlich, wo  $v = 0$  und  $u = \Psi(\omega)$ , wobei  $\Psi$  eine beliebige Funktion von  $\omega$ . Hier haben wir Strömungen im stationären Zustand, wie sie im Abschnitt 37 behandelt wurden, Bewegungen parallel zu den Isobaren.

Ist die Größe  $h$  nicht mehr null, sondern 1, 2 usw., so haben wir es mit Wellen zu tun, die westwärts wandern, wenn  $n > 0$ , ostwärts, wenn  $n < 0$ . Margules bezeichnet solche, wo  $h = 1, 2$  usw., als Wellen der Klasse 1, 2; bei ihnen findet sich auf dem Äquator ein Maximum des Druckes, bzw. deren zwei usw.

Werden unter Beibehaltung von  $h$  nun die allgemeinen Lösungen von oben ( $\varepsilon = E \sin(hl + nt)$  usw.) in die Differenzialgleichungen eingesetzt, so ergeben sich wieder Bedingungsgleichungen für  $E$ ,  $\varphi$  und  $\psi$ , die durch Kettenbruchgleichungen gelöst werden. Der Werte  $n$ , welche dabei herauskommen, gibt es wieder unendlich viele (Typus 1, 2, 3 usw.).

Margules hat namentlich die Wellen der ersten und zweiten Klasse untersucht. Es ergeben sich positive und negative Werte von  $n$ , die Wellen wandern teils westwärts, teils ostwärts mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Von den ersteren gibt es zwei Arten, solche mit größerer und solche mit kleinerer Geschwindigkeit; die letzteren entsprechen bei der ruhenden Erde den stationären Bewegungen. Alle diese Wellen zerfallen wie die zonalen wieder in pare und unpare. Bei ersteren ist die Bewegung auf der südlichen Halbkugel das Spiegelbild von der auf der nördlichen.

Die paren Wellen vom Typus 1 haben beispielsweise die folgende Umlaufsdauer:

Stehende Wellen, zonale Klasse: 20,4 Stunden.

Westwärts wandernde Wellen erster Art; 1. Kl.: 13,9 St., 2. Kl.: 23,9 St.<sup>1)</sup>

„ „ „ zweiter „ „ 130,7 „ „ 187,5 „

Ostwärts „ „ „ „ 36,6 „ „ 36,8 „

Es sei noch bemerkt, daß auf einer ruhenden Erde auch die Wellen der ersten und höheren Klassen stehende wären, wie es auf der rotierenden nur die der zonalen Klasse sind; d. h. es wären Knotenlinien vorhanden. Auf der rotierenden Erde werden jene Wellen alle zu fortschreitenden. Hieraus folgt, daß die Fortbewegung von Gebieten hohen oder tiefen Druckes schon allein durch die Rotation der Erde bedingt sein kann. Die Rotation bringt eine Asymmetrie in die Verhältnisse, die bei ruhender Erde fehlen würde.

Tritt die Reibung an der Erdoberfläche hinzu, so werden die Schwingungen der Atmosphäre noch verwickelter. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen auf S. 292 sind durch den Zusatz der Reibungsglieder  $ku$  und  $k_v$  zu ergänzen. Die Integration derselben gelingt unter ähnlichen Verhältnissen wie früher. Je nach der Größe der Reibungskonstante teilen sich die Bewegungen in ausfüllende (aperiodische) und in erlöschende Schwingungen. Durch die Reibung ist die Perioden-

1) Dieser Wert entspricht fast genau einem Tage, er ist die Ursache für die Größe der doppelten täglichen Barometerschwankung.



länge der letzteren unbedeutend vergrößert. Die Abnahme der Amplitude mit der Zeit erfolgt bei den rasch westwärts wandernden Wellen viel schneller (in 24 Stunden Abnahme auf etwa 0,001), als bei den langsam westwärts wandernden zweiter Art und den ostwärts wandernden (in 24 Stunden etwa auf 0,2 bis 0,1). Die Bewegungen bei den ersten Wellen widersprechen der Buys-Ballotschen Regel (auf der nördlichen Halbkugel hoher Druck links von der Bewegung), die bei den zwei letzten folgen dieser Regel. Bei all diesen Wellen tritt der Hochdruck nicht in allen Breiten zur gleichen Zeit ein, sondern es sind Phasenverschiebungen da, welche die Isobaren unsymmetrisch gestalten. (Vgl. Fig. 68.) Margules hat einzelne dieser Wellen berechnet und auch graphisch dargestellt. Wir geben hier als Beispiel seine Zeichnung der westwärts wandernden Welle erster Art, und zwar die pare Welle erster Klasse mit bloß einem Maximum und Minimum auf jedem Breitenkreis. Fig. 67 gibt die Druck- und Windverteilung (erstere bezogen auf den Mittelwert 1000) ohne Reibung, Fig. 68 dieselbe mit Reibung.



GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

# Register.

## A.

Ablenkungskraft der Erdrotation 28.  
 Ablenkungswinkel, normaler 99.  
 Abplattung der Erde 3.  
 Absorption der Wärme 45.  
 — der Wärme durch Wasserdampf 59.  
 Absorptionsvermögen 58.  
 Absteigende Luftströme 78.  
 Abtrieb 45.  
 Achse der Zyklonen 158.  
 Adiabaten des Regenstadiums 17.  
 — des Trockenstadiums 16.  
 Adiabatische Ausdehnung und Kompression 45.  
 — Vorgänge 12.  
 Advektion 225. 228.  
 Ähnlichkeitsprinzip von Helmholtz 82.  
 Aktionszentren der Atmosphäre 194  
 Albedo der Erde 59.  
 Anomalien der allgemeinen Zirkulation 195.  
 Anpassung der Winde an die vorhandenen Kräfte 113.  
 Antipassat 171. 183.  
 Antizyklonale Bewegung 88.  
 Antizyklonaler Gradient 88.  
 Antizyklonales Windsystem 245.  
 Antizyklonen,  
 —, niedrige 252, hohe 259.  
 Anziehungskraft von Newton 3.  
 Äquator, Ostwinde darüber 182  
 Äquatoriale Strömungen 182.  
 Arbeit der Druckkräfte 127.  
 Asymmetrische Temperaturverteilung in Antizyklonen und Zyklonen 255.  
 Atmosphäre 2.  
 —, homogene 36.  
 —, ihre stabile Schichtung 192.  
 Attraktionskraft von Newton 3.  
 Aufspeicherung von Energie 125.

Aufstiegshöhe warmer Luft 51.  
 Auftrieb 45.  
 Auge des Sturmes 105.  
 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kältewellen 241.  
 Ausbreitung und Temperaturgradient 80.  
 Ausdehnungsarbeit 127.  
 Ausdehnungskoeffizient 9.  
 Ausfüllende Bewegungen 111.  
 Ausgleichsniveau, Erdoberfläche als . . . 223.  
 Auslösung von Kälteeinbrüchen 246.  
 Ausstrahlung 45.  
 Ausstrahlungsvermögen 58.

## B.

Bar 8.  
 Barisches Windgesetz 86.  
 Barometerschwankung, tägliche 285. 289.  
 —, Theorie der täglichen 290.  
 Barometrische Höhenformel 40.  
 Beispiele vertikaler Umlagerungen nach Margules 137.  
 Beschleunigung, vertikale 30. 115.  
 Bewegung eines Massenpunktes auf der Erdoberfläche 25  
 — gegen den Gradienten 111.  
 Bewegungen, ausfüllende 111.  
 —, natürliche 124.  
 —, nichtstationäre 112.  
 —, stationäre 111.  
 Bewegungsgleichungen der Mechanik 19.  
 —, einfachste 26.  
 — für stationäre Bewegung 86.  
 —, hydrodynamische 31.  
 — im rotierenden System 22  
 Bewegungssystem, stabiles der Luftringe 169.  
 Bodendruck, Beiträge der Schichten 237.  
 Bodenreibung 98.  
 Böen 239.

Böenlinie 158.  
 Bora 80.  
 Buys-Ballots Gesetz 86.

## C.

Clayton-Egnellscher Satz 221.

## D.

Dampfdruck 9.  
 Dampfspannung, Abnahme mit der Höhe 31.  
 Depressionen,  
 —, niedrige 262, hohe 265.  
 Dichte der Luft 7.  
 Differenzialgleichung der Statik 36.  
 — des Druckes 228. 230.  
 Diffusion, Ausgleich der Temperatur durch . . 124.  
 Divergenz von Stromlinien 68.  
 Doves Äquatorial- und Polarströmung 253.  
 Drehung der Isobaren mit der Höhe 231.  
 Druckabnahme mit der Höhe 37.  
 Druckänderungen, ihre Ursache 227.  
 —, ihre Voraussage 272.  
 Druckänderung und Kontinuitätsgleichung 71.  
 Druckarbeit 127.  
 Druckgradient 33. 42.  
 —, Pol-Äquator 185.  
 —, zonaler 181.  
 Druckkraft 32.  
 Druckschwankung, Höhe der maximalen 228.  
 Druckstufen, statische Theorie ders. 239.  
 Druck- und Temperaturgefälle 152.  
 Druckverteilung in bewegten Zyklonen 210.  
 Druckzunahme gegen Pol 182.  
 Durchbruch feuchter Luft durch trockene 144.  
 Dynamik der Atmosphäre 1  
 Dynamische Aktionszentren 195.  
 — Druckgebilde 259.  
 Dynamisches Meter 6.

## E.

Eigenschwingung der Atmosphäre 296.

Energie der Luftbewegungen 124.  
 —gleichung einer Luftmasse 134.  
 —, innere 134.  
 —, kinetische 126.  
 —, potentielle 124.  
 —quelle stationärer Bewegung 145.  
 —vorrat 125.  
 Entropie 11.  
 —prinzip 124  
 Erdoberfläche als Ausgleichsniveau 223.  
 — als Störungsniveau 113.  
 Erdradius, mittlerer 4.  
 Erhaltung der großen Konvektionsströmung 173.  
 — der Kraft, Gesetz ders. 126.  
 — des Rotationsmomentes 22.  
 Erwärmungskoeffizient 122.  
 Erzwungene Schwingungen 290.

**F.**

Fallgebiete des Druckes 263.  
 Fall-Luft 141.  
 Feuchtigkeit 9.  
 —, absolute 10.  
 —, relative 11.  
 Flächengeschwindigkeit 23.  
 Flächen gleichen Druckes 41.  
 Föhn 78. 225.  
 Föhngradient 80.  
 Föhnmauer 71.  
 Föhn, Wellen bei . . . 284.  
 Fouriersche Reihe 285.  
 Freie, elastische Schwingung der Atmosphäre 298.

**G.**

Gasgesetz f. feuchte Luft 9.  
 — für trockene Luft 8.  
 Gaaskonstante 9.  
 Gefälle 32.  
 Geoid 5.  
 Geometrisch ähnliche Bewegungen 82.  
 Gesättigte Luft, Temperaturabnahme in . . . 53.  
 Geschwindigkeit infolge Gradientkraft 91.  
 Geschwindigkeitspotential 280.  
 Gesetz der Erhaltung der Kraft 126.

Gewicht bewegter Massen 31.  
 Gewitter talabwärts 141.  
 Gleichgewicht bei Strahlung 57.  
 — bei Wärmeleitung 56.  
 —, indifferentes 46.  
 —, labiles 48.  
 —, stabiles 47.  
 Gleichung der lebendigen Kraft 125. 130.  
 Gleitung 105.  
 Gradient 32.  
 Gradientloser Wind 183.  
 Gradient Mitteleuropas-Nordkap 195.  
 Gradientrichtung 86.  
 Gradient, seine Konstruktion 90.  
 —und Windstärke 100. 104.  
 Graue Strahlung 59.  
 Gravitationswellen 264. 279.  
 Grenzflächen im Polargebiet 248.  
 Grenzflächenwinkel 156.  
 Grenzfläche verschieden warmer Schichten 154. 247.  
 Grenzfläche von Lufttringen 166  
 Grenzflächen, Wellen an . . . 279.  
 Grundgleichung, statische 38.  
 Gilbertsche Regeln 273.  
 Guldberg-Mohnsche Reibung 98.  
 Gustines-Faktor von Dines 114.

**H.**

Hagelstadium feuchter Luft 14.  
 Hannsche Formel 61.  
 Hauptsatz, erster, der mechan. Wärmetheorie 11.  
 Helmholtzs Ähnlichkeitsprinzip 82.  
 — Theorie der Wirbelstürme 144.  
 Helmwind 70.  
 Hemmung kalter Ostwinde am Boden 247.  
 Hochdruckgebiet 88.  
 Hochdruckgürtel, Theorie von Ferrel 197.  
 —, Theorie von Siemens 198.  
 —, ihre Erklärung 177.  
 —, Verlagerung nach oben 178.  
 Höhe der Troposphäre 185.

Höhenformel, barometrische 40.  
 Höhenmessung, barometrische 41.  
 Höhenstufe, barometrische 41.  
 Homogene Atmosphäre 36  
 Horizontale Strömung ohne Reibung 85.  
 Horizont, Lage desselb. 5.  
 Hydrodynamische Bewegungsgleichungen 31.  
 Hydrodynamischer Druck 117.

**I.**

Indifferentes Gleichgewicht 46.  
 — — zonaler Bewegung 170.  
 Ineinandergreifen kalter und warmer Ströme 253.  
 Innere Energie 134.  
 — Reibung der Luft 105.  
 — —, virtuelle 107.  
 Integrale der Bewegungsgleichungen ohne Reibung 91.  
 Inversion 44.  
 — bei stationärer Bewegung 187.  
 — durch Ausbreitung 81.  
 —en, Bildung von 55.  
 Isentropische Vorgänge 12.  
 Isobare Flächen 41.  
 — —, deren Neigung 42.  
 Isobaren 86.  
 —formen, deren Ortsveränderung 27.  
 Isobaren, in der Erdoberfläche gekrümmt 194.  
 Isobronten 243.  
 Isochronen 243.  
 Isogonen des Windes 68.  
 Isothermen in der Atmosphäre 187.  
 Isotherme Zone 44.  
 Isothermie durch Ausbreitung 81.

**K.**

Kälteeinbrüche 239.  
 —, Auslösung denselben 246.  
 —, ihre Wellenform 264.  
 — in der Substratosphäre 261.  
 —, periodische 250.  
 Kältegebiete, stationäre 159.  
 Kältereservoir, Pol als . . . 182.

Kälteschichten, flache in der Höhe 271.  
 Kältewellen, Luftdruck in dens. 252.  
 —, ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit 241.  
 —, von Norden 242.  
 Kalte Hochdruckgebiete 260.  
 Kinetische Energie 126.  
 Kirchhoffs Gesetz 58.  
 Knickung isobarer Flächen 157.  
 Koeffizient der Reibung 99.  
 Kompensation der Temperatur von Strato- und Troposphäre 260.  
 Komponente, vertikale, der Ablenkungskraft 30.  
 — —, der Zentrifugalkraft 30.  
 Kompressible Flüssigkeiten, Zustandsgleichung 83.  
 Kondensationstheorie der Zyklogen 142.  
 Kondensationswärme und lebendige Kraft 142.  
 Konstruktion des Druckgradienten 90.  
 Kontinuitätsgleichung 33.  
 — und Druckänderung 71.  
 — und Vertikalbewegung 73.  
 Konvektion der Wärme 49. 57.  
 Konvektionsströmungen auf der Erde 172.  
 Konvektionsströmung, Erhaltung der großen 173.  
 —, Schema 145.  
 Konvergenz von Stromlinien 68.  
 Koordinatensystem a. d. Erdoberfläche 85.  
 Kopf kalter Luft nach Schmidt 240.  
 Korrelationen der Veränderlichen nach Dines und Schedler 234.  
 Kraftverteilung bei Bodenreibung 101. 103.  
 — bei innerer Reibung 110.  
 Kreisförmige Zyklone 132.  
 Kreislauf, Äquator bis 30° Br. 176.  
 — der Atmosphäre 171.  
 — —, ältere Theorien 196.  
 — —, Theorie von Oberbeck 198.  
 —, Erklärung des großen 175.

## L.

Labiles Gleichgewicht 48.  
 Lebendige Kraft, Produktion durch Kälteeinbrüche 250.  
 — — und Kondensationswärme 142.  
 Ligne de grains (Durand-Gréville) 158.  
 Luftaustausch zwischen verschiedenen Breiten 245.  
 Luftbewegung aus Druckgradienten 92.  
 Luftdruck, Differenzialgleichung desselben 228.  
 —, mittlerer, in der Atmosphäre 186.  
 —, normaler 7.  
 —, tägliche Periode 285, 289.  
 — und Mitteltemperatur 42.  
 Luftdruckgradienten, ihr Zustandekommen 220.  
 Luftnachschieb am Äquator 175.  
 Luftfringe 164.  
 —, ihre Grenzfläche 166.  
 —, stabiles Bewegungssystem derselben 169.  
 — und Rotationsmoment 165.  
 Luftsäule, Massenverteilung in derselben 213.  
 Luftschichten, ihre Umlagerung 135.  
 Luftübertragung zwischen Hemisphären 182.  
 Luftversetzung 220.

## M.

Magnussche Formel 9.  
 Manila-Zyklone nach Em- den 203.  
 Masse der Atmosphäre 5.  
 Massenverteilung in einer Luftsäule 213.  
 Maßeinheiten 7.  
 Maß-Systeme 8.  
 Meeresniveau 5.  
 Millibar 8.  
 Mischungsverhältnis 10.  
 Mischungszone 193.  
 Mitteltemperatur bei linearer Verteilung 39.  
 — einer Luftsäule 37.  
 — und Luftdruck 42.

## N.

Natürliche Bewegungen 124.

Neuordnung der Strahlungsschichten 148.  
 Niederschlag in warmen Gebieten 258.  
 Niederschlagsbildung an Gebirgen 74.  
 Niederschlagsperioden 277.  
 Niederschlag und Vertikalbewegung 77.  
 Niedrige Depressionen und Antizyklogen 252.  
 Normaldruck 8.  
 Normaler Ablenkungswinkel 99.  
 Nutzeffekt des Kreisprozesses 174.  
 — stationärer Zirkulation 146.

## O.

Oberpassat 171.  
 Ortsveränderung d. Druckgebilde 257, 271.  
 — der Isobaren 232, 273.  
 Ostwinde, polare 248.  
 — über Äquator 182.  
 Oszillation der Windbahnen 95.

## P.

Passatwind 171.  
 — oberer 171.  
 Perioden des Niederschlags 277.  
 —, mehrtägige, der Witterung 275.  
 Periode, tägliche, von Luftdruck u. Temperatur 289.  
 — —, — und Wind 285.  
 Periodische Kälteeinbrüche 250.  
 — Temperaturschwankungen 277.  
 Platzwechsel der Schichten 135.  
 Poissonsche Gleichung 12.  
 Pol als Kältereservoir 182.  
 Polare Strömungen 182.  
 Potentielle Energie 124.  
 — — horizontaler Druckverteilung 130.  
 — Temperatur 12.  
 — —, Bedingung ihrer Konstanz 229.  
 — — in der Atmosphäre 189.  
 — — und Rotationsmoment 170.  
 Praktisches Koordinatensystem 22.



Pseudoadiabatische Prozesse 15.  
Pulsatorische Bewegungen 114.

## Q.

Quadranten der Zyklone und Antizyklone 267.

## R.

Rechtsdrehen des Windes 109.  
Reflexionsvermögen der Erde 59.  
Regeln von Guilbert 273.  
Regenstadium feuchter Luft 14.  
Reibung an der Erdoberfläche 98.  
— der polaren Ostwinde 248.  
—, Einfluß auf Geschwindigkeit 102.  
— nach Guldberg-Mohn 98.  
—, innere 32, 105.  
—, virtuelle innere 107.  
Reibungskoeffizient 99.  
Relative Feuchtigkeit bei adiabatischen Prozessen 17.  
Richtung der Vorgänge 124.  
Rinne tiefen Druckes 157.  
Rotationsmoment 23.  
— des Äquators als Maximalwert 180.  
—, dessen Veränderung 180.  
— in der Atmosphäre 191.  
— und indifferentes Gleichgewicht 170.  
— und potentielle Temperatur 170.  
— von Lufringen 165.  
—, Zunahme gegen Äquator 169.  
Rückläufige Depressionen 258.

## S.

Satz von Clayton-Egnell 221.  
Schallgeschwindigkeit 83.  
Scheinbare Kräfte 28.  
Schema der Konvektionsströmung 145.  
— stationärer Zirkulation 145.  
— von Depression und Antizyklone 266.  
Schichtung, stabile, der Atmosphäre 192.

Schlechtwetter im tiefen Druck 121.  
Schneestadium feuchter Luft 14.  
Schönwetter im hohen Druck 121.  
Schwankungen der allgemeinen Zirkulation 195.  
Schwere, Schwerkraft 3.  
Schwingungen, erzwungene 290.  
Schwingung, freie, elastische der Atmosphäre 298.  
Solarkonstante 58.  
Spezifisches Volumen 8.  
Spezifische Wärme 11.  
Stabile Schichtung der Atmosphäre 192.  
Stabiles Gleichgewicht 47.  
Stabilität von Lufringen 167.  
Statik 35.  
—, Grundgleichung ders. 38.  
Stationäre Bewegung und Windverteilung 163.  
— Kälte- und Wärmegebiete 159.  
— Strömungen 150.  
— Strömung und Temperaturgefälle 151.  
— Zirkulation, Schema 145.  
— um die Erde 163.  
Statische Theorie der Druckstufen 239.  
Stauwirbel an Gebirgen 70.  
Stefansches Gesetz 58.  
Steiggebiete des Druckes 263.  
Störungen als Bestandteil der Zirkulation 181.  
Störungsniveau, Erdoberfläche als . . 113.  
Strahlung, graue 59.  
Strahlungs-Gleichgewicht 57.  
Strahlungskonstante 58.  
Strahlungsschichten, Neuordnung der 148.  
Strahlungstemperatur 62.  
— eines Berges 64.  
Stratosphäre 44.  
Stratosphären-Temperatur 62.  
Stratosphäre über Land und Meer 184.  
Stromlinie 66.  
Stromlinien über Gebirgen 69.  
Stromröhre 66.

Strömung, äquatoriale, polare 182.  
Strömungen, stationäre 150  
Strömung, horizontale, ohne Reibung 85.  
Sturm, Auge dess 205.  
Stürme a. d. skandinavischen Halbinsel 141.  
Synoptische Wetterkarten, ihre Veränderung 272.

## T.

Tägliche Periode von Luftdruck und Temperatur 289.  
— — — und Wind 285.  
Talabwärts ziehende Gewitter 141.  
Temperatur der Luft 7.  
—, mittlere, in der Atmosphäre 186.  
—, potentielle 12.  
—, —, in der Atmosphäre 189.  
—, tägliche Periode 289.  
—, virtuelle 10  
— und Ausbreitung 80.  
Temperaturabnahme in gesättigt feuchter Luft 53.  
Temperaturänderung bei vertikaler Bewegung 49.  
—en, ihre Ursache 224.  
Temperaturdifferenz Erde-Luft 121.  
— Erde-Stratosphäre 185.  
Temperaturgefälle bei stationärer Bewegung 151.  
Temperatur- und Druckgefälle 152.  
Temperaturgradient, mittlerer, vertikaler 185.  
— Pol-Äquator 184.  
Temperaturgradientänderungen, ihre Ursache 226.  
Temperaturschwankungen, periodische 277.  
Temperatursprung Erde-Luft 57.  
Temperaturverteilung durch Umsturz d. Strahlungsschichten 147.  
— nach vertikaler Verschiebung 53.  
—, Typen von Schmauß 219.  
— und Erwärmungskoeffizient 122.  
Theorie der täglichen Barometerschwankung 290.  
Thermische Aktionszentren 195.

Thermische Druckgebilde 259.  
 Tiefdruckgebiet 88.  
 Trägheitsbewegung 113.  
 —en der Luft 274.  
 Trägheitsgesetz 19.  
 Trägheitskreis 27.  
 Trägheitsradius 27.  
 Trägheit zonaler Bewegung 173.  
 Trajektorien der Luft 68.  
 — der Zykone 207.  
 Trennungsfläche verschiedenen warmer Schichten 154.  
 Trockenstadium feuchter Luft 13.  
 Tropische Zyklogen, Entstehung 251.  
 Troposphäre 44.  
 —, Höhe derselben 185.  
 Turbulenz 114.  
 Typen der Temperaturverteilung von Schmauß 219.

## U.

Umkehrbare Prozesse 15.  
 Umlagerung der Luftschichten 135.  
 Umsturz der Strahlungsschichten 147.  
 Ursache von Druck- und Temperaturänderungen 224.

## V.

Veränderlichkeit v. Druck und Temperatur 222.  
 Veränderung der synoptischen Wetterkarten 272.  
 Vertikalbewegung u. Kontinuitätsgleichung 73.  
 — und Niederschlag 77.  
 Vertikale Beschleunigung 30, 115.  
 — Bewegung in Depressionen u. Antizyklonen 258.  
 — — u. Kontinuität 118.  
 — —, Temperaturänderung bei ... 49.  
 Vertikaler Druckgradient 116.  
 Vertikale Umlagerungen, Beispiele 137.  
 Virtuelle innere Reibung 107.  
 Voraussage der Druckänderungen 272.  
 — kommender Zustände 71.

## W.

Wärmeabgabe auf der Erde 172.  
 Wärmeäquivalent der Arbeit 11.  
 Wärmeaustausch Erde-Luft 121, 194.  
 Wärmegebiete, stationäre 159.  
 Wärme Gleichung 11.  
 Wärme-Konvektion 49.  
 Wärmeleitung 44.  
 Wärmeleitungs-Gleichgewicht 55.  
 Wärmemaschine, Atmosphäre als ... 146.  
 Wärmestrahlung 44.  
 Wärmewellen 243.  
 Wärmewelle, Luftdruck in ders. 252.  
 Wärmezufuhr, Energiequelle stationärer Bewegungen 145.  
 Wärmezufuhr auf der Erde 172.  
 — und Luftnachschiebung 175.  
 Warme Hochdruckgebiete 260.  
 — Luft, Aufstieghöhe derselben 51.  
 — Luftsäulen nach Trabert 233.  
 Wellen an Grenzflächen 279.  
 — bei Föhn 284.  
 —, fortschreitende 279.  
 —, stehende 283.  
 Wellenform der Kälteeinbrüche 264.  
 Westostbewegung der Druckgebilde 273.  
 — der Isobaren 232.  
 Westwind, allgemeiner 171.  
 Wetterkarten der nördlichen Halbkugel 279.  
 Widerstandskraft der Erdmasse 21.  
 Wind ohne Gradient 183.  
 —, Rechtsdrehung mit der Höhe 109.  
 —, tägliche Periode 285.  
 Windbahnen bewegter Zyklogen 207.  
 — bei geraden Isobaren 93.  
 — bei kreisförmigen Isobaren 97.

Windregime, doppeltes, in der Atmosphäre 192.  
 Windstärke, berechnet, in der Atmosphäre 189.  
 —, mittlere, in der Atmosphäre 188.  
 — und Gradient 100, 104.  
 Windstoß-Faktor von Dines 114.  
 Windverteilung bei stationärer Bewegung 163.  
 Windweg 195.  
 Winkelgeschwindigkeit der Erde 20.  
 Wirbel experiment von Helmholtz 202.  
 Wirbel, hydrodynamischer 200.  
 Wirbelfreie Bewegung 117, 200.  
 Wirbelstürme, Theorie von Helmholtz 144.  
 Witterungsperioden, mehrtägige 275.

## Z.

Zentrifugalkraft 3.  
 Zirkulation 67.  
 — nach Bjerknes 33.  
 —, Schema stationärer 145.  
 —, Schwankungen der allgemeinen 195.  
 Zirkulation, stationäre um die Erde 163.  
 —, Störungen als Bestandteil ders. 181.  
 —en, kleine, zwischen Pol und 30° Br. 181.  
 Zirruszug 273.  
 Zonale Druckgradienten 181, 145.  
 Zustandsgleichung kompressibler Flüssigkeiten 83.  
 Zykel 65.  
 Zyklonab Bewegung 88.  
 Zyklonales Gradient 88.  
 Zyklonales Ausfließen in der Höhe 204.  
 — Windsystem 245.  
 Zykone, kreisförmige 132.  
 — Kontensationstheorie ders. 1-2.  
 — von Manila nach Emden 204.  
 Zyklonertheorie von Ferrel 206.  
 — von Gerbeck 205.

**Meteorologische Zeit- und Streitfragen.** (Wissenschaft und Hypothese.) Von Professor Dr. R. Süring. I. V.

**Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung.**

Mit Ausblicken auf Witterungskunde und Klimalehre. Unterlagen für schulgemäße Behandlung sowie zum Selbstunterricht. Von O. Meißner, wissenschaftl. Hilfsarbeiter am Kgl. Preuß. Geodät. Institut in Potsdam. Mit 33 Abbild. [VII u. 94 S.] gr. 8. 1906 . . . Geh. M. 2.60.

**Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums.** Von weil. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. O. Gilbert. Mit 12 Fig.

im Text. [V u. 746 S.] gr. 8. 1907. M. 20.—, geb. . . . . M. 24.—. Nachdem in einem einleitenden Kapitel das Verhältnis der *μετεωρα* und Elemente festgestellt worden ist, gibt der allgemeine Teil eine Elementarlehre der Griechen. Der spezielle Teil legt sodann die meteorologischen Theorien selbst dar. Hier ist die Meteorologie nicht in dem beschränkenden Sinne des Aristoteles, sondern in der umfassenderen, allgemeinen Auffassung genommen, nach der auch die ätherischen Erscheinungen des Himmels als *μετεωρα* bezeichnet werden. Andererseits mußten aber alle rein astronomischen Fragen ausgeschlossen bleiben.

**Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** (Wissenschaft und Hypothese. Bd. V.) Von Professor G. H. Darwin-Cambridge. Deutsch von A. Pockels. 2. Aufl. Mit 52 Illustrationen. [XXIV u. 420 S.] 8. 1911. Geb. . . . . M. 8.—.

**Lehrbuch der kosmischen Physik.** V. Prof. Dr. W. Trabert-Wien. Mit 149 Fig. u. 1 Taf. [X u. 662 S.] gr. 8. 1911. M. 20.—, geb. M. 22.—.

Diese Physik des Kosmos unterscheidet sich von ähnlichen Werken, welche verknüpfen, was örtlich vereinigt ist, dadurch, daß sie nicht eine lose Aneinanderreihung verschiedener Disziplinen, wie Astrophysik, Physik des Festen und Flüssigen auf der Erde und Physik der Atmosphäre in einem Buche sein will, sondern daß sie das zu verknüpfen sucht, was sachlich zusammengehört, gleichgültig, wo wir es im Weltall finden. Es ist eine Anwendung der Gesetze der allgemeinen Physik auf den Kosmos, dieser aufgefaßt als ein einheitliches Ganzes, und ihre Aufgabe soll sein, das Geschehen im Weltall zu erörtern, dieses zu behandeln in einer Lehre vom Zustande und den Zustandsänderungen des Weltalls. Die Anwendung der Mathematik ist auf ein Minimum beschränkt.

**Das Leitvermögen der Elektrolyte** insbesondere der wäßrigen Lösungen. Methoden, Resultate und chemische Anwendungen. 2. vermehrte Auflage. Von Professor Dr. F. Kohlrausch, weil. Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt und Professor Dr. L. Holborn, Direktor bei der physikalisch-technischen Reichsanstalt. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XVI u. 237 S.] gr. 8. 1916. Geh. M. 7.50, geb. . . . . M. 8.75.

Das Buch behandelt die Verfahren und die Hilfsmittel, die zur Messung der Leitvermögen von Elektrolyten dienen, und enthält eine Übersicht über die Messungsergebnisse, soweit sie sich auf wäßrige Lösungen beziehen. Auf diesem Gebiete brachte die erste Auflage alle Beobachtungszahlen, umgerechnet auf neue gemeinsame Einheiten, die später allgemein Eingang gefunden haben. Inzwischen hat sich das Beobachtungsmaterial stark vermehrt: viele Zahlen haben eine größere Genauigkeit gewonnen, andere sind neu hinzugekommen. Die neue Auflage hat dementsprechend mannigfache Ergänzungen erfahren, die nicht allein die Tabellen, sondern auch viele Stellen des Textes betreffen.

**Radioaktivität.** Von Prof. Dr. St. Meyer-Wien u. Prof. Dr. E. v. Schweidler-Innsbruck. Mit 87 Abb. [XI u. 542 S.] gr. 8. 1916. Geh. M. 22.50, geb. . . . . M. 24.—.

Ausführliche Darstellungen über das Gebiet der Radiologie liegen nur von französischen und englischen Schriftstellern in Übersetzungen vor, während Originalwerke deutscher Autoren bis jetzt fast gänzlich fehlten. Es ist deshalb durch das Erscheinen obigen Werkes, das sich auch auf Teilgebiete erstreckt, die in den Werken von Curie und Rutherford weniger ausführlich behandelt sind, wie z. B. die Radiochemie oder die Beziehungen der Geophysik zur Luftelektrizität, einem langgehegten Wunsche der Fachgelehrten entsprochen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

**Aerodynamik.** Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Von F. V. Lanchester in Birmingham. Aus dem Englischen übersetzt von C. u. A. Runge in Göttingen. In 2 Bänden. Bd. I. Mit 162 Fig. m Text u. 1 Tafel. [XIV u. 360 S.] gr. 8. 1909. Bd. II. Mit 208 Fig. m Text u. 1 Titelbild. [XIV u. 327 S.] gr. 8. 1911. Geb. je . M. 12.—  
 „Als im Jahre 1908 das vorliegende Werk in englischer Sprache erschien, erregte es auch in Deutschland bei allen, die sich mit Aerodynamik befassen, lebhaftes Interesse. Deshalb ist es erfreulich, daß ein Mann wie Runge die Übersetzung übernommen hat. Das Ansehen Runges bürgt dafür, daß der Inhalt des Lanchesterschen Werkes richtig wiedergegeben ist.... Das Werk enthält viele neue und brauchbare Ideen, die in keinem anderen Buche zu finden sind. Es kann deshalb jedem Interessenten wärmstens empfohlen werden.“  
 (Zeitschr. d. Vereins dtsch. Ingenieure.)

**Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** (Wissenschaft und Hypothese, Bd. VI.) Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Max Planck-Berlin. 3. Auflage, [VI u. 278 S.] 8. 1913. Geb. . M. 6.—  
 Behandelt die historische Entwicklung des Prinzips von seinen Ursprüngen bis zu seiner allgemeinen Durchführung in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clausius, Thomson; die allgemeine Definition des Energiebegriffs, die Formulierung des Erhaltungsprinzips nebst einer Übersicht und Kritik über die versuchten Beweise.

**Lehrbuch der praktischen Physik.** Von weil. Prof. Dr. Jr. Kohlrausch. 12., vermehrte Aufl. in Gemeinschaft mit H. Geiger, E. Grüneisen, L. Holborn, W. Jaeger, E. Orlich, K. Scheel, O. Schönrock herausg. von E. Warburg. Mit 389 Figuren. [XXXI u. 742 S.] gr. 8. 1914. In Leinwand geb. . M. 11.—

**Theorie der Elektrizität.** Von Dr. M. Abraham, Professor am R. Istituto Tecnico Superiore zu Mailand. I. Band. Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von A. Föppl. 4. umgearb. Aufl. von M. Abraham. Mit 11 Fig. [XVIII u. 410 S.] gr. 8. 1912. Geb. . M. 11.—  
 II. Band. Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von M. Abraham. 3. Aufl. Mit 11 Fig. [VIII u. 402 S.] gr. 8. 1915. Geb. M. 11.—

**Physik.** Unter Redaktion von E. Warburg, Charlottenburg. (Die Kultur der Gegenwart, herausgeg. von Prof. P. Hinneberg. Teil III, Abteilung III, Band 1.) Mit 106 Abb. [X u. 762 S.] Lex.-8. 1915. Geh. M. 22.—, geb. M. 24.—, in Halbfranz geb. . M. 26.—

Inhaltsübersicht: 1. Mechanik; Die Mechanik im Rahmen der allgemeinen Physik. Von E. Wiechert. — 2. Akustik; Historische Entwicklung und kulturelle Beziehungen. Von F. Auerbach. — 3. Wärme; Thermometrie. Von E. Warburg. Kalorimetrie. Von L. Holborn. Entwicklung der Thermodynamik. Von F. Henning. Mechanische und thermische Eigenschaften der Materie in den drei Aggregatzuständen. Von L. Holborn. Umwandlungspunkte. Erscheinungen bei koexistierenden Phasen. Von L. Holborn. Wärmeleitung. Von W. Jäger. Wärmestrahlung. Von H. Rubens. Theorie d. Wärmestrahlung. V. W. Wien. Experimentelle Atomistik. Von E. Dorn. Theoretische Atomistik. Von A. Einstein. — 4. Elektrizitätslehre; Geschichte der Elektrizität bis zum Siege der Faradayschen Anschauungen. Von F. Richarz. Die Entdeckungen von Maxwell und Hertz. Von E. Lecher. Die Maxwell'sche Theorie und die Elektronentheorie. Von H. A. Lorentz. Ältere und neuere Theorien des Magnetismus. Von R. Gans. Die Energie degradierender Vorgänge im elektromagnetischen Feld. Von E. Gumlich. Die drahtlose Telegraphie. Von F. Braun. Schwingungen gekoppelter Systeme. Von M. Wien. Elektrisches Leitungsvermögen. Von H. Starke. Die Kathodenstrahlen. Von W. Kaufmann. Die positiven Strahlen. Von E. Gehrcke u. O. Reichenheim. Röntgenstrahlen. Von W. Kaufmann. Entdeckungsgeschichte und Grundtatsachen der Radioaktivität. Von J. Elster u. H. Geitel. Radioaktive Strahlungen und Umwandlungen. Von St. Meyer u. E. v. Schweidler. — 5. Lehre vom Licht; Entwicklung der Wellenlehre des Lichts. Von O. Wiener. Neuere Fortschritte der geometrischen Optik. Von O. Lummer. Spektralanalyse. Von F. Exner. Struktur der Spektrallinien. Von E. Gehrcke. Magnetooptik. Von P. Zeeman. — 6. Allgemeine Gesetze und Gesichtspunkte: Über das Verhältnis der Präzisionsmessungen zu den allgemeinen Zielen der Physik. Von E. Warburg. Prinzip der Erhaltung der Energie und die Vermehrung der Entropie. Von F. Hasenöhrl. Prinzip d. kleinsten Wirkung. Von M. Planck. Die Relativitätstheorie. Von A. Einstein. Phänomenologische u. atomist. Betrachtungsweise. Von W. Voigt. Verhältnis der Theorien zueinander. Von M. Planck.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin



