TODHUNTER — ALGEBRA POCZĄTKOWA III

J. TODHUNTER
Członek Tow. Królewskiego w Londynie.

ALGEBRA POCZĄTKOWA

Tłumaczył z angielskiego
WŁ. KWIETNIEWSKI
B. docent b. Szkoły Głównej.

Opracował i uzupełnił
STEFAN KWIETNIEWSKI
Doktór filozofji Uniwersytetu Zuryskiego.

CZĘŚĆ III

ALGEBRA
DLA KLAS WYŻSZYCH SZKÓŁ ŚREDNICH

Napisał
STEFAN KWIETNIEWSKI
Doktór filozofji Uniwersytetu Zuryskiego.

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA—KRAKÓW—LUBLIN—ŁÓDŹ
PARYŻ—POZNAŃ—WILNO—ZAKOPANE

Skład Główny:
„The Polish Book Importing Co., Inc." — New-York

Druk. i Lit. p. f. „Jan Cotty",
w Warszawie, Kapucyńska 7.

1927

PRZEDMOWA.

Tom niniejszy jest zakończeniem opracowanej przeze mnie w wydaniu czwartem „Algebry Początkowej" Todhuntera. Z pierwotnego tekstu Todhuntera mogłem tu zużytkować jedynie niektóre §§ rozdziałów o postępie geometrycznym, procentach i przemianach, przestawieniach, połączeniach. W rozdziale „Tablice logarytmów" zużytkowałem częściowo dodatek do pierwszego polskiego wydania „Algebry" Todhuntera, pisany przez mego Ojca; jednakże w całości opracowanie tego rozdziału jest nowe. Przy opracowywaniu pozostałych rozdziałów, oprócz wymienionej już w części II Algebry Bourleta, były mi pomocne dwa artykuły z dzieła „Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate da Federigo Enriques, vol. I, Bologna, 1912", mianowicie:

F. Enriques. I numeri reali.

D. Gigli. Dei numeri complessi a due e a più unità.

Kilkadziesiąt zadań pochodzi z „Aufgabensammlung" *Bardey—Lietzmann Zühlke.*

Ważniejsze momenty, odróżniające ten podręcznik od innych, są następujące.

Pojęcie funkcji, które w nowoczesnem nauczaniu algebry zajmuje naczelne miejsce, usiłowałem uprzystępnić uczniom przez możliwie szczegółowe zbadanie tych funkcyj, z któremi stale mają do czynienia, a więc przedewszystkiem proporcjonalności prostej i odwrotnej oraz funkcji logarytmowej. Ogólnego określenia pochodnej, ani nawet granicy, nie podaję, obawiając się przedwczesnego zmechanizowania w stosowaniu tych pojęć przez uczniów. Wskutek tego podręcznik ten nie uczy, jak przeprowadzić dyskusję dowolnej funkcji, ale najczęściej spotykane funkcje omawia więcej szczegółowo, niż inne podręczniki.

Przy wykreślaniu hiperboli i krzywej logarytmowej stosowałem ścisłe wyznaczanie dowolnej liczby punktów zapomocą cyrkla i linjału, bez rachunku; to daje możność samodzielnego ułożenia przez ucznia tabliczki logarytmów dwu- lub nawet trzycyfrowych.

Liczby zespolone zostały wprowadzone jako pary liczb rzeczywistych — a to w celu dokładniejszego zrozumienia układu liczb [1]).

Warszawa, w sierpniu 1927 r.

S. Kwietniewski.

---

[1]) Następujące §§, z małemi zmianami, pochodzą z tekstu Todhuntera (w nawiasie podaję odpowiednie numery z pierwszego polskiego wydania z roku 1890): 39—41 (400—408), 45 (410), 112—117 (439—448), 122—131 (417—429). Podług uzupełnień mego Ojca są opracowane: 74 (62*), 76—81 (64*—66*), 82 (61*), 83 (67*), 85, 86 (70*) 88—90 (71*, 72*), 105 (77*), 109 (78*), 110 (79*) 118, 119 (448_1, 448_2), 132 (429_1).

SPIS RZECZY.

I.

Ogólne rozwiązanie układu dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi.

1. Niech będą dane dwa trójmiany.

$$A = a\,x + by - c,$$
$$B = a'x + b'y - c';$$

w tych trójmianach x i y są wielkościami zmiennemi, pozostałe wielkości a, b, c, a', b', c' są stałe. Poszukujemy takich dwóch wielkości, ażeby, po podstawieniu ich zamiast x i y, wartość każdego z tych dwóch trójmianów stała się zerem.

Zauważmy, że jeżeli

$$A = 0; \quad B = 0,$$

wtedy

$$m\,A + n\,B = 0,$$

jakiemikolwiek liczbami byłyby m i n.

Zauważmy jeszcze tożsamości

$$(p\,q' - q\,p')\,A = q'\,(p\,A + q\,B) - q\,(p'\,A + q'B),$$
$$(p\,q' - q\,p')\,B = p\,(p'\,A + q'B) - p'\,(p\,A + q\,B),$$

w których występujące litery mogą oznaczać całkiem dowolne liczby.

Z tych tożsamości wynika, że jeżeli są prawdziwe dwie równości

$$p\,A + q\,B = 0 \tag{1}$$
$$p'A + q'B = 0, \tag{2}$$

wtedy są prawdziwe obie równości

$$(p\,q' - q\,p')\,A = 0 \tag{3}$$
$$(p\,q' - q\,p')\,B = 0. \tag{4}$$

Jeżeli przytem $pq' - qp'$ jest różne od zera, wtedy równości (3) i (4) wyrażają, że

$$A = 0; \quad B = 0.$$

Okazuje się, że wartości trójmianów A i B możemy uczynić zerami, jeżeli x i y wybierzemy w ten sposób, żeby stały się zerami oba wyrażenia

$$p\,A + q\,B$$
$$p'A + q'B,$$

gdzie p, q, p', q' możemy obrać dowolnie, z warunkiem wszakże, ażeby $p\,q' - qp'$ było różne od zera.

2. Jeżeli mamy rozwiązać układ równań

$$a\,x + b\,y = c \tag{5}$$
$$a'x + b'y = c', \tag{6}$$

to zagadnienie takie możemy w ten sposób wyrazić: znaleźć, przy jakich wartościach x, y oba trójmiany

$$A = ax + by - c$$
$$B = a'x + b'y - c'$$

stają się zerami. W założeniu

$$ab' - ba' \neq 0,$$

uczyńmy

$$p = b';\ q = -b;\quad p' = -a';\quad q' = a;$$

równania powyższe (5) i (6) będą więc spełnione na zasadzie § 1, jeżeli x i y wybierzemy takie, ażeby było

$$b'\ (ax + by - c) - b\ \ (a'x + b'y - c') = 0$$
$$-a'\ (ax + by - c) + a\ \ (a'x + b'y - c') = 0,$$

czyli, po uproszczeniu:

$$(ab' - ba')\ x - (cb' - bc') = 0 \tag{7}$$
$$(ab' - ba')\ y - (ac' - ca') = 0, \tag{8}$$

Każde z tych równań zawiera tylko jedną niewiadomą; rozwiązując je, znajdujemy wartości szukane

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \tag{9}$$

Ażeby rozpatrzeć jeszcze i ten przypadek, kiedy $ab' - ba' = 0$, zauważmy, że B na pewno jest zerem, jeżeli

$$A = 0; \quad mA + nB = 0, \tag{10}$$

o ile tylko n nie jest zerem.

Przypuśćmy, że przynajmniej jeden ze spółczynników a, b, a', b' jest różny od 0, np. a; w takim razie uczyńmy $m = a'$, $n = -a$, a równania (10) przyjmą postać

$$ax + by - c = 0$$
$$a'(ax + by - c) - a(a'x + b'y - c') = 0,$$

a uwzględniając, że podług założenia

$$ab' - ba' = 0,$$

możemy tym równaniom nadać prostszą postać:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by - c = 0 \\ ac' - ca' = 0. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Drugie z tych równań nie zawiera niewiadomych i jeżeli $ac' - ca'$ jest różne od zera, wtedy to równanie nie może być prawdziwe, jakkolwiekbyśmy przyjęli wartości x, y; dany układ równań nie ma więc w tym przypadku pierwiastków.

Jeżeli jednak

$$ac' - ca' = 0,$$

wtedy drugie równanie układu (11) wyraża tożsamość i jest prawdziwe dla każdej pary wartości x, y; ażeby więc układowi (11), a co za tem idzie, ażeby układowi danemu uczynić zadość, należy tylko przyjąć dla niewiadomych takie wartości, które czynią zadość pierwszemu z równań (11), to jest równaniu (5). Dostaniemy więc dowolną liczbę rozwiązań: dla każdego y znajdziemy odpowiednią wartość x, tak, ażeby oba równania dane były spełnione, mianowicie:

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Możemy powiedzieć, że nieoznaczoność danego układu jest pierwszego rzędu.

Jeżeli jednak $a = b = a' = b' = 0$, wtedy dany układ przyjmuje postać

$$0 = c; \quad 0 = c';$$

i jeżeli istotnie choć jedna z wielkości c, c' jest różna od 0, wtedy ten układ wyraża sprzeczność i nie może być rozwiązany; ale jeżeli $c = c' = 0$, wtedy dane równania są tożsamościami, a nieoznaczoność układu jest zupełna: każda para wartości, przyjętych za x, y, czyni temu układowi zadość.

Powyższe wyniki streszcza następująca tablica:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

$$ab' - ba' \neq 0; \quad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

$$ab' - ba' = 0 \begin{cases} a \neq 0 \begin{cases} ac' - ca' \neq 0 & \text{niema rozwiązań} \\ ac' - ca' = 0 & \text{nieoznaczoność 1-go rzędu,} \end{cases} \\ a = b = a' = b' = 0 \begin{cases} c \neq 0 & \text{niema rozwiązań} \\ c = c' = 0 & \text{nieoznaczoność zupełna.} \end{cases} \end{cases}$$

Zauważmy jeszcze, że jeżeli

$$ab' - ba' = 0; \quad ac' - ca' = 0; \quad a \neq 0,$$

wtedy

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}; \quad \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c},$$

czyli

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

a więc spółczynniki obu równań są proporcjonalne.

ZADANIA DO ROZDZIAŁU I.

Sprawdzić, które z następujących układów równań mają rozwiązania i znaleźć te rozwiązania.

1. $2x + 10y = 3$; $3x + 15y = 5$.
2. $x + y\sqrt{2} = 2$; $x\sqrt{2} - y = 1$.
3. $x + y = 2$; $3x + 3y = 6$.
4. $3(2x - 1) = 6x + 1$; $y = 0$.

5. Jeżeli t zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, jak zmienia się możliwość rozwiązania układu równań

$$x + 2ty = 1,$$
$$tx + 2y = 1?$$

Przedstawić oba pierwiastki układu x, y, jako funkcje zmiennej t i wykonać wykresy zmienności x i y w zależności od t (por. rozdz. III).

6. Toż samo dla układu równań

$$(t + 1)\,x + (t^2 - 1)\,y = t + 1,$$
$$(t + 1)\,x + (t + 1)\,y = 0.$$

II.

Proporcjonalność odwrotna.

3. Obierzmy jakikolwiek zbiór liczb, między któremi niema dwóch równych, ani też liczby 0; niech to będą np. liczby, wypisane w szeregu (1).

$$(1)\qquad 1;\ \ 6;\ \ -1;\ \ 3;\ \ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \ \frac{2\sqrt{7}-1}{3};$$

$$(2)\qquad 6;\ \ 1;\ \ -6;\ \ 2;\ \ 4\sqrt{3};\ \ \frac{2}{3}(2\sqrt{7}+1).$$

Każdej z tych liczb podporządkujemy inną, którą otrzymamy, dzieląc przez tę liczbę szeregu (1) jakąś liczbę stałą, np. 6. Tak otrzymane liczby zostały wypisane w szeregu (2) pod odpowiedniemi liczbami pierwszego szeregu. Otrzymaliśmy tym sposobem dwa zbiory liczb, między któremi istnieje taki związek, że jeżeli x oznacza *którąkolwiek* liczbę zbioru (1), wtedy w zbiorze (2) jest *jedna i tylko jedna* liczba y, spełniająca warunek

$$y = \frac{6}{x},$$

który inaczej można tak wyrazić:

$$xy = 6.$$

Zależność taka między dwoma zbiorami liczb nazywa się *„proporcjonalnością odwrotną“*.

W celu uniknięcia wątpliwości „proporcjonalność“ (II, 170), w przeciwstawieniu do proporcjonalności odwrotnej, często się nazywa *„proporcjonalnością prostą“*, „wielkości proporcjonalne“ — *„wielkościami wprost proporcjonalnemi“*.

4. Ogólniej, *jeżeli za odpowiadające sobie, albo podporządkowane uważać będziemy dwie liczby x, y, spełniające warunek*

$$y = \frac{k}{x},$$

gdzie k jest liczbą stałą różną od zera, dla wszystkich par liczb x, y jednakową, wtedy zbiór jakkolwiek obranych liczb x (jednak nie zawierający zera) i zbiór odpowiadających im liczb y nazywają się odwrotnie proporcjonalnemi.

Warunek powyższy można inaczej tak napisać: $xy = k$, a także: $x = k : y$.

Jeżeli założymy, że w pierwszym zbiorze wszystkie liczby x są od siebie różne, to osiągniemy przez to, że i w drugim zbiorze niema liczb równych.

Z określenia proporcjonalności prostej wynika, że jeżeli

$$y = \frac{k}{x},$$

to zbiór liczb y jest wprost proporcjonalny do zbioru liczb

$$\frac{1}{x};$$

jeżeli więc dwa zbiory liczb są odwrotnie proporcjonalne, wtedy każdy z nich jest wprost proporcjonalny do zbioru odwrotności liczb drugiego zbioru.

Przykłady. 1) Zbiór wszystkich liczb naturalnych i zbiór wszystkich ułamków, mających 1 za licznik, liczbę naturalną za mianownik, z dołączeniem liczby 1, można uczynić odwrotnie proporcjonalnemi ze względu na wielkość stałą 1.

2) Ogólniej: zbiór jakichkolwiek liczb x jest odwrotnie proporcjonalny do zbioru ich odwrotności

$$y = \frac{1}{x}$$

względem wielkości stałej 1.

3) Jeżeli a i b są jakiemikolwiek liczbami różnemi od 0, wtedy, zaliczając zarówno do pierwszego, jak i do drugiego zbioru wszystkie liczby różne od 0, można oba zbiory uczynić odwrotnie proporcjonalnemi, tak, ażeby liczbie a pierwszego zbioru odpowiadała liczba b w drugim. Należy w tym celu podporządkować każdej liczbie x liczbę

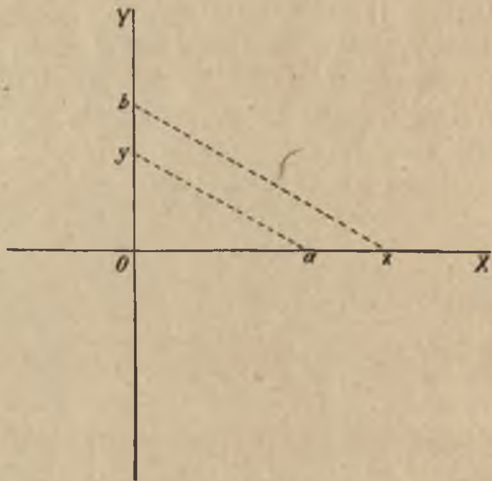
$$y = \frac{ab}{x}.$$

5. Ażeby poznać dokładniej zależność, rozpatrywaną w ostatnim przykładzie, odwzorujmy liczby obu zbiorów na osiach spółrzędnych (II, 184; I, rozdz. XX), a mianowicie liczby x na osi odciętych Ox, liczby y na osi rzędnych Oy; każdy punkt oznaczać będziemy tak samo, jak liczbę, przez ten punkt odwzorowaną. Liczby a i b są przedstawione zapomocą punktów, które mogą leżeć jakkolwiek, jeden na Ox, drugi na Oy, aby tylko nie w O.

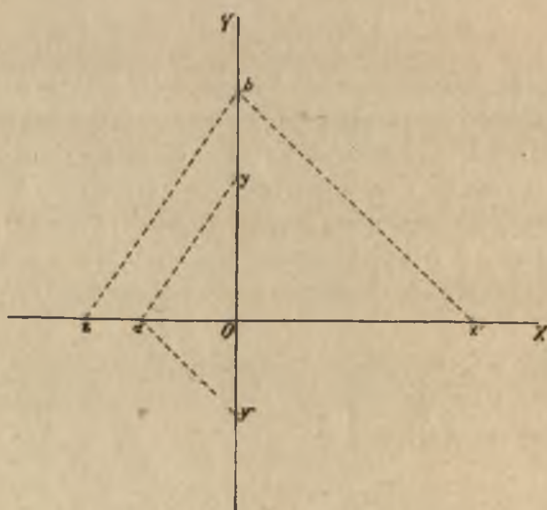
Liczbom x podporządkowujemy przez proporcjonalność odwrotną liczby y w ten sposób, ażeby liczbie a odpowiadała liczba b; osiągniemy to, czyniąc

$$y = \frac{ab}{x}, \quad \text{czyli} \quad x : a = b : y. \tag{1}$$

Możemy więc do każdego punktu x osi odciętych znaleźć odpowiedni punkt y osi rzędnych, prowadząc przez a prostą równoległą do prostej xb i przecinając ją z Oy (rys. 1 i 2). Że dla tak otrzymanego punktu przecięcia y proporcja (1) jest słuszna— przynajmniej co do wartości bezwzględnych jej wyrazów — to



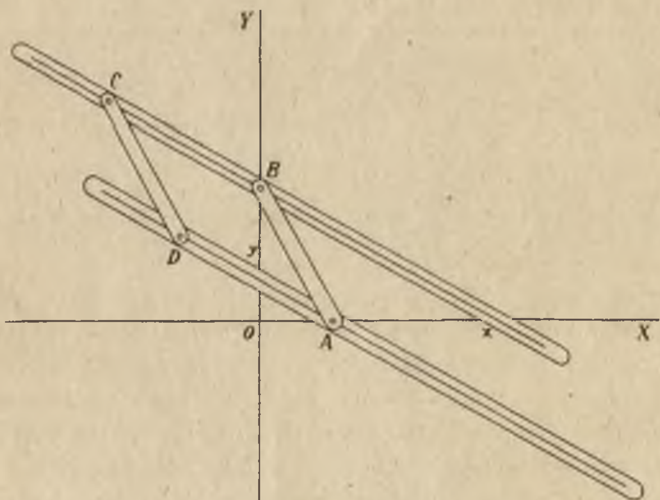
Rys. 1.



Rys. 2.

jest widoczne z podobieństwa trójkątów Oxb, Oay; że ta proporcja pozostaje prawdziwą jeszcze i wtedy, jeżeli uwzględnimy znaki jej wyrazów, to wynika stąd, że wszystkie punkty prostej ay, jako równoległej do xb, leżą po tej samej stronie prostej xb; wszystkie leżą więc względem prostej xb albo po tej samej stronie, co O, albo wszystkie po stronie przeciwnej, niż O. Tym sposobem jeżeli O leży zewnątrz odcinka ax, to leży również zewnątrz odcinka yb; jeżeli zaś leży między a i x, to leży również między y i b; w pierwszym przypadku odcinki Ox, Oa mają zwroty jednakowe, ich stosunek jest więc dodatni, odcinki Ob, Oy mają również zwroty jednakowe i stosunek dodatni; w drugim przypadku odcinki Ox, Oa mają zwroty przeciwne i stosunek ujemny, i tak samo odcinki Ob, Oy.

6. Jeżeli zmieniać będziemy położenie punktu x, przesuwając go wzdłuż osi odciętych, wtedy proste xb i równoległa do niej ay obracać się będą dokoła punktów stałych b i a. Konstrukcję taką można urzeczywistnić zapomocą przyrządu (rys. 3), złożonego z dwóch długich listewek AD, BC, zaopatrzonych w po-



Rys. 3.

dłużne szpary, i połączonych krótszemi listwami AB, DC tak, ażeby długości AB, DC były równe i stałe, i tak samo długości AD, BC; połączenia w punktach A, B, C, D dokonywa się zapomocą sztyfcików tak, ażeby powstał równoległobok, w którym wielkości kątów można dowolnie zmieniać. Sztyfciki A, B umieszcza się w punktach stałych a, b. Przyrząd ten pozwala znaleźć y dla każdego x, oddalonego od A przynajmniej na szerokość listwy, ale niezbyt oddalonego ze względu na ograniczoną długość listwy. Zauważmy jeszcze, że, stosując przyrząd do punktów, położonych po różnych stronach punktu A, musimy obrócić listwę BC przez położenie równoległe do osi odciętych, przyczem listwa AD przechodzi przez O, punktowi O nie odpowiada żaden punkt y; to też, nastawiając listwę BC na O, otrzymalibyśmy położenie drugiej listwy równoległe do osi rzędnych.

7. Przypuśćmy, że M i N są dwoma odwrotnie proporcjonalnemi zbiorami liczb, że więc każdej liczbie x zbioru M została podporządkowana liczba y zbioru N, spełniająca warunek

$$y = \frac{k}{x}, \quad \text{czyli } xy = k,$$

gdzie k jest wielkością stałą.

Obierzmy dwie dowolne wartości zmiennej x i oznaczmy je przez x_1, x_2; odpowiadają im w zbiorze N dwie liczby y_1, y_2, spełniające warunki:

$$y_1 = \frac{k}{x_1}; \quad y_2 = \frac{k}{x_2}.$$

Dzieląc pierwsze z tych równań przez drugie, znajdziemy:

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1,$$

a więc *w dwóch zbiorach odwrotnie proporcjonalnych stosunek dwóch którychkolwiek liczb jednego zbioru równa się odwrotności stosunku odpowiadających im liczb drugiego zbioru.*

8. Jeżeli między dwoma układami liczb została ustalona odpowiedniość jedno-jednoznaczna (II, 173), i jeżeli stwierdzimy, że iloczyn odpowiadających sobie liczb ma wielkość stałą, wtedy odpowiedniość ta jest proporcjonalnością odwrotną; ale proporcjonalność odwrotną możemy stwierdzić i innym sposobem, jeżeli mianowicie przekonamy się, że stosunek każdej pary liczb jednego zbioru równa się odwrotności stosunku pary odpowiadających liczb w drugim zbiorze, gdyż równanie

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

jest na pewno spełnione, jeżeli

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1 .$$

Z powyższego wynika, że pojęcie proporcjonalności odwrotnej można zastosować do dwóch zbiorów jakichkolwiek wielkości, którym liczby nie zostały podporządkowane, jeżeli tylko można wyznaczyć stosunek dwóch wielkości, należących do tego samego zbioru (II, 152). W konstrukcji § 5 jednostka długości nie została obrana, a więc odcinkom osi liczby faktycznie nie zostały podporządkowane; pomimo to otrzymaliśmy zapomocą tej konstrukcji dwa całkiem oznaczone zbiory odcinków odwrotnie proporcjonalnych Ox i Oy.

9. Jeżeli k jest jakąkolwiek liczbą różną od 0, wtedy istnieje proporcjonalność odwrotna, podporządkowująca względem k każdej liczbie różnej od 0 jakąś liczbę. Pytamy, jaki jest zbiór wszystkich liczb, odpowiadających w tej zależności liczbom, zawartym między dwiema jakiemikolwiek liczbami a_1, a_2 różnemi od 0. Nie robiąc żadnych założeń co do znaków liczb a_1 i a_2, ani też co do tego, która z nich jest większa, możemy stwierdzić, że liczba x jest zawarta między a_1 i a_2 — to znaczy, że jest większa od mniejszej i mniejsza od większej z tych dwóch liczb — wtedy i tylko wtedy, jeżeli różnice

$$x - a_1 , \quad x - a_2$$

mają znaki przeciwne, jeżeli więc

$$\frac{x - a_1}{x - a_2} < 0. \tag{1}$$

Przypuśćmy, że w rozpatrywanej zależności liczbom a_1, a_2 odpowiadają b_1, b_2, że więc

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = k ; \tag{2}$$

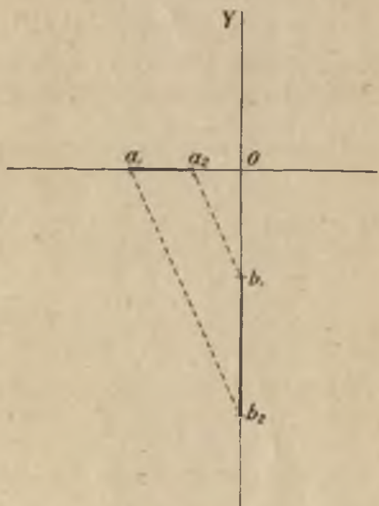
chcemy sprawdzić, czy każdej liczbie x, spełniającej warunek (1), odpowiada liczba y, zawarta między b_1 i b_2; w tym celu należy się przekonać, jaki znak ma stosunek

$$\frac{y - b_1}{y - b_2} .$$

Ponieważ $y = k : x$, przeto, uwzględniając (2), możemy podstawić w poprzedniku $y = \frac{a_1 b_1}{x}$, w następniku $y = \frac{a_2 b_2}{x}$, więc:

$$\frac{y - b_1}{y - b_2} = \frac{\frac{a_1 b_1}{x} - b_1}{\frac{a_2 b_2}{x} - b_2} = \frac{b_1 (a_1 - x)}{b_2 (a_2 - x)} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{x - a_1}{x - a_2}.$$

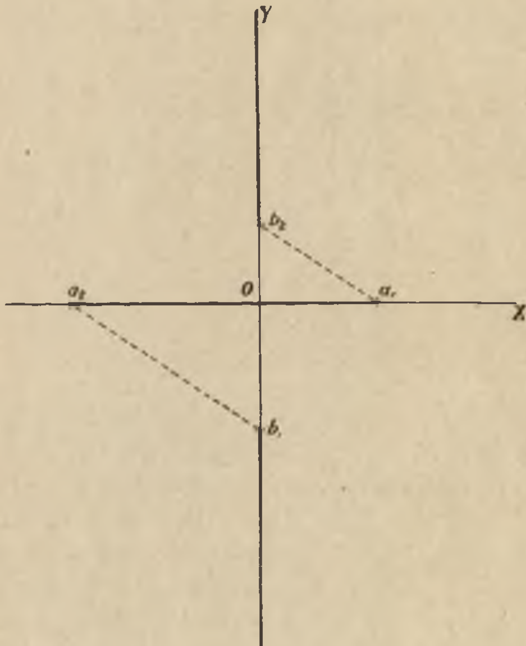
Widzimy przeto, że stosunek $\frac{y - b_1}{y - b_2}$ ma ten sam znak, co $\frac{x - a_1}{x - a_2}$, jeżeli $a_2 : a_1 > 0$, czyli jeżeli a_1 i a_2 mają znaki jednakowe, a więc jeżeli liczba 0 nie jest zawarta między a_1 i a_2; jeśli zaś liczba 0 jest zawarta między temi dwiema liczbami, wtedy oba stosunki mają znaki przeciwne. W pierwszym przypadku każdej liczbie, zawartej między a_1 i a_2, odpowiada liczba, zawarta między b_1 i b_2; w drugim ani jednej liczbie, zawartej między a_1 i a_2, nie odpowiada liczba, zawarta między b_1 i b_2.



Rys. 4.

A ponieważ każda liczba y różna od 0 odpowiada jakiejś liczbie x (§ 3, przykład 3), przeto zbiór wszystkich różnych od 0 liczb od b_1 do b_2 jest odwrotnie proporcjonalny względem k do zbioru wszystkich liczb od a_1 do a_2, lub wszystkich liczb, które nie są zawarte między a_1 i a_2, zależnie od tego, czy 0 nie jest, czy też jest zawarte między a_1 i a_2.

10. Przedstawiając liczby obu zbiorów odwrotnie proporcjonalnych zapomocą punktów osi spółrzędnych, jak w §§ 5, 6, znajdziemy, że odcinkowi $a_1\,a_2$, nie zawierającemu punktu O (rys. 4), odpowiada odcinek $b_1\,b_2$; zaś odcinkowi $a_1\,a_2$, zawierającemu O (rys. 5)—figura, złożona z dwóch półprostych, nie mających punktu wspólnego.



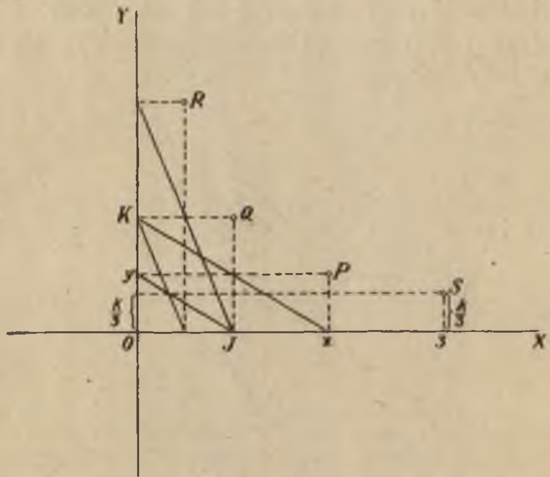
Rys. 5.

Na obu rysunkach 4 punkty zostały tak obrane, ażeby pary prostych $a_1\,b_2$ i $b_1\,a_2$ były równoległe.

Przyrząd opisany w § 5 może być zastosowany do bezpośredniego sprawdzenia powyższych wyników w różnych przypadkach, np. $a_1 < a_2 < 0$; $a_1 < 0 < a_2$; $0 < a_1 < a_2$, przyczem b_1 można obierać bądź dodatnie, bądź ujemne.

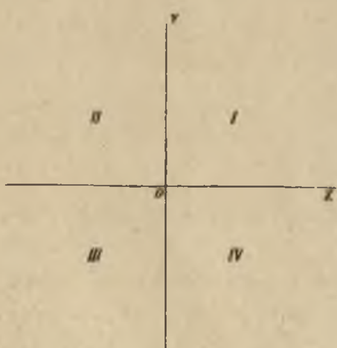
11. Przedstawimy zmienność funkcji $y = k : x$ zapomocą wykresu (I, rozdział XX), zakładając naprzód $k > 0$, $x > 0$; stąd łatwo już będzie otrzymać wykresy dla pozostałych przypadków.

W powyższem założeniu każdy punkt, mający odciętą x i rzędną $y = k : x$ leży w pierwszej ćwiartce płaszczyzny [1]).



Rys. 7.

Odmierzmy $OI = 1$ na osi odciętych, $OK = k$ na osi rzędnych (rys. 7); odmierzając kolejno różne wartości odciętych x, łączyć będziemy za każdym razem koniec odciętej z punktem K i do otrzymanej prostej poprowadzimy równoległą przez punkt I; punkt przecięcia tej równoległej z osią rzędnych leży na odległości



Rys. 6.

[1]) Cztery części, na które osi spółrzędnych dzielą płaszczyznę, numerujemy zazwyczaj w taki sposób (rys. 6):

w I ćwiartce $x > 0$, $y > 0$;
w II „ $x < 0$, $y > 0$;
w III „ $x < 0$, $y < 0$;
w IV „ $x > 0$, $y < 0$.

$y = \frac{k}{x}$ od początku spółrzędnych; otrzymujemy więc punkt P, należący do wykresu, na przecięciu dwóch prostych, poprowadzonych przez punkty x i y równolegle do odpowiednich osi; podobnie został znaleziony punkt R dla odciętej < 1 i punkt Q dla odciętej równej 1. Moglibyśmy też, znając miarę odcinka k, obliczyć rzędną, odpowiadającą każdej z odciętych; tak został znaleziony punkt S, mający spółrzędne 3 i $\frac{k}{3}$.

Przy przesuwaniu punktu x ku prawej stronie, punkt y przesuwa się z góry na dół. O tem się przekonamy, powiększając x o dowolną wielkość dodatnią h i obliczając wartość funkcji dla tak zmienionej wartości zmiennej.

Przypuśćmy, że tą wartością funkcji jest $y + l$, że więc $y + l = \frac{k}{x + h}$; chcemy sprawdzić, czy l jest dodatnie, czy ujemne. Ponieważ

$$l = \frac{k}{x + h} - y = \frac{k}{x + h} - \frac{k}{x} = k\,\frac{-h}{x\,(x + h)},$$

a k, x, h podług założenia są dodatnie, przeto $l < 0$. Więc zmienny punkt P wykresu coraz bardziej się obniża, im dalej się przesuwa na prawo; jeżeli x rośnie do ∞, prosta KX dąży do położenia równoległego do osi odciętych, y maleje do 0. A więc w miarę odsuwania punktu P na prawo wzdłuż krzywej do ∞, odległość jego od osi odciętych maleje do 0; stwierdzamy to, mówiąc, że oś odciętych jest *asymptotą* rozpatrywanej krzywej.

Określenie. Prostą t nazywamy *asymptotą* krzywej C, jeżeli można odsuwać zmienny punkt P wzdłuż krzywej C tak do nieskończoności, że odległość jego od prostej t maleje do zera.

Opierając się na tem określeniu, możemy stwierdzić, że oś rzędnych jest również asymptotą naszej krzywej. Rzeczywiście: odległością punktu P od osi rzędnych jest x; odległość ta maleje do 0, jeżeli punkt P odsuwa się wzdłuż krzywej ku górze do ∞.

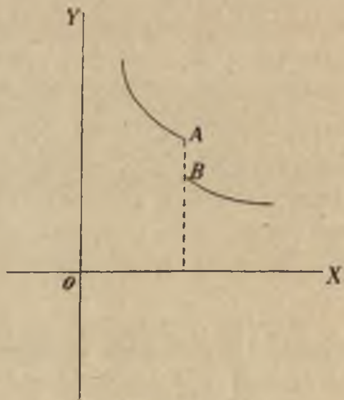
12. Zdanie: „funkcja $y = f(x)$ maleje do zera, jeżeli x rośnie do ∞", które piszemy krócej w ten sposób:

$$\text{„}y \to 0, \text{ jeżeli } x \to \infty\text{"},$$

rozumieć należy tak, że y można zrobić *dowolnie* małem, obierając x *dostatecznie* wielkie, czyli: *jakkolwiek mała jest liczba bezwzględna h, można znaleźć taką liczbę n, że dla każdego $x > n$ jest $|y| < h$.*

W przypadku $y = \frac{k}{x}$ można uczynić $y < h$, obierając $x > \frac{k}{h}$, i dla każdego x, spełniającego ten warunek, dostajemy y tak małe, jak tego żądaliśmy.

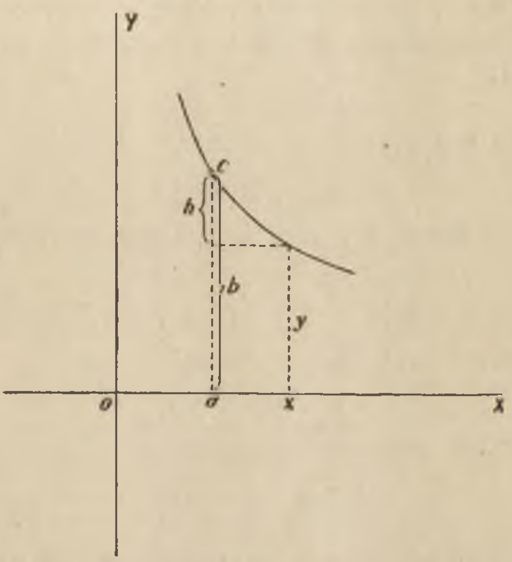
13. Pominąwszy $x = 0$, nie może się zdarzyć, ażeby $y = \frac{k}{x}$ nagle zmieniło swą wartość w sposób widoczny, jeżeli x nieznacznie tylko się zmieni; nie może więc przytrafić się przypadek, zilustrowany na rys. 8, w którym nagłe zmniejszenie rzędnej o odcinek AB odbywa się bez widocznej zmiany odciętej.



Rys. 8.

Jeżeli C jest jednym z punktów naszej krzywej (rys. 9), a spółrzędne jego a i $b = \frac{k}{a}$, to jakkolwiek mała byłaby liczba bezwzględna h, zawsze można znaleźć na krzywej punkty, których rzędne różnią się od b jeszcze mniej, niż o h, a których odcięte są różne od a. Rzeczywiście: nierówność

$$|b - y| < h,$$



Rys. 9.

czyli:

$$\left|\frac{k}{a} - \frac{k}{x}\right| < h$$

będzie spełniona, jeżeli uczynimy

$$\left|\frac{k}{ax}(x - a)\right| < h,$$

czyli

$$|x - a| < \left|\frac{ahx}{k}\right|;$$

a ponieważ

$$\frac{x}{k} = \frac{1}{y},$$

więc ostatnią nierówność można tak napisać:

$$|x - a| < \left|\frac{ah}{y}\right|.$$

Ażeby z tej nierówności wyrugować zmienną y z prawej strony, zauważmy, że ta nierówność na pewno będzie spełniona, jeżeli lewą stronę uczynimy mniejszą od liczby, o której wiemy, że jest mniejsza, aniżeli strona prawa; podstawmy więc w niej zamiast y liczbę, mającą wartość bezwzględną większą, aniżeli y. Z warunku

$$|b-y|<h,$$

którego spełnienia żądaliśmy, wynika

$$|y|<|b|+h;$$

żądanie nasze będzie więc spełnione, jeżeli uczynimy

$$\left|x-a\right|<\frac{|a|.h}{|b|+h}.$$

W każdym więc razie nierówność

$$|b-y|<h$$

będzie spełniona, jeżeli

$$|x-a|<\frac{|a|h}{|b|+h},$$

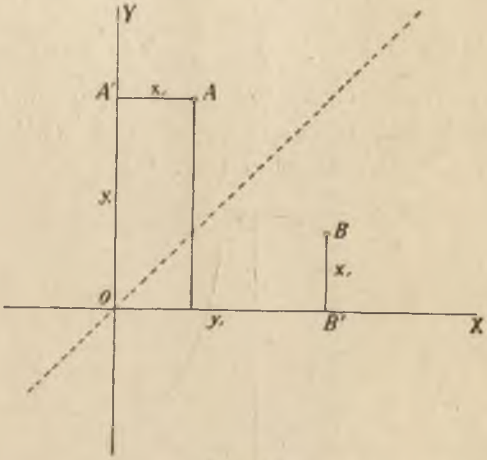
a więc każdy punkt krzywej ma rzędną, różniącą się od b mniej, niż o h, jeżeli tylko jego odcięta różni się od a mniej, niż o $\frac{|a|h}{|b|+h}$.

Własność funkcji $y=\frac{k}{x}$, którą przed chwilą poznaliśmy, nazywamy *ciągłością*.

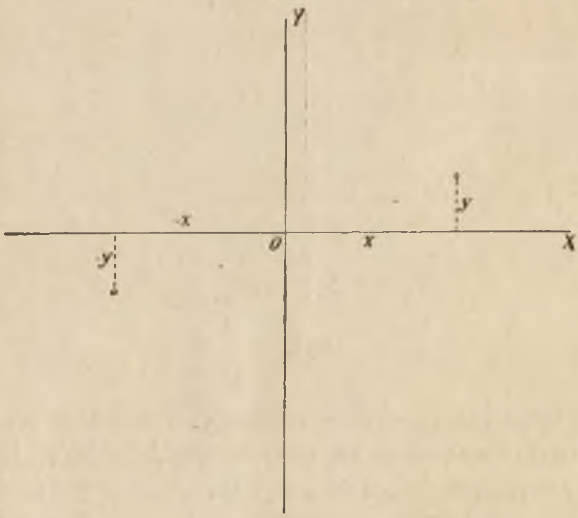
Wogóle mówimy, że funkcja $y=f(x)$ jest ciągła, jeżeli w jej wartości możemy powodować zmiany dowolnie małe przez poddawanie zmiennej niezależnej zmianom dostatecznie małym.

14. Przypuśćmy, że punkt naszej krzywej A ma spółrzędne x_1, $y_1=\frac{k}{x_1}$; znajdźmy ten punkt B krzywej, którego odcięta jest y_1; rzędna jego musi być $\frac{k}{y_1}$, czyli x_1 (rys. 10). Znajdźmy spodek prostopadłej z punktu A do osi rzędnych A' i z punktu B do osi odciętych B' i poprowadźmy dwusieczną I i III-ej ćwiartek płaszczyzny. Pozostawimy czytelnikowi dowód, że ta

dwusieczna jest osią symetrji, naprzód dla pary punktów A' B', a następnie dla pary punktów A, B. Okazuje się stąd, że do każdego punktu krzywej punkt symetryczny względem tej dwu-



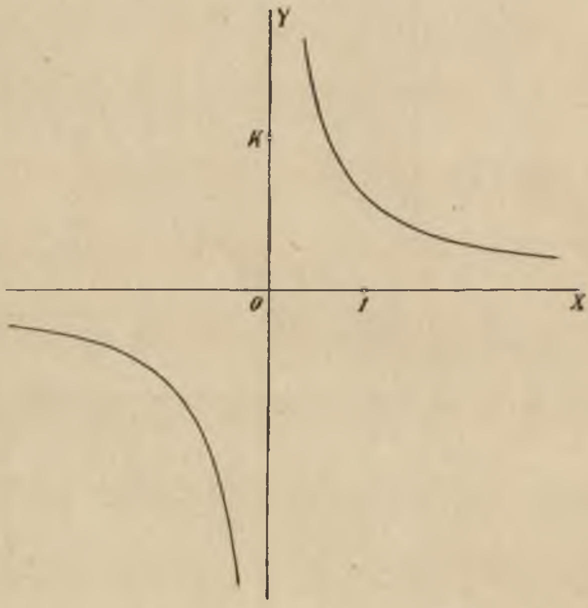
Rys. 10.



Rys. 11.

siecznej należy również do krzywej, czyli że *dwusieczna pierwszej i trzeciej ćwiartki jest 'osią symetrji rozpatrywanej krzywej.*

15. Dotychczas rozpatrywaliśmy tylko dodatnie wartości x; ale łatwo zauważyć, że jeżeli x, y są spółrzędnemi punktu krzywej, jeżeli więc $y = \frac{k}{x}$, to i $-x$, $-y$ są spółrzędnemi jakiegoś jej punktu, gdyż wtedy $-y = -\frac{k}{x}$. Ten nowy punkt jest symetryczny z poprzednim względem początku spółrzędnych (co czytelnik z łatwością udowodni); *początek spółrzędnych jest* więc *środkiem symetrji krzywej* (rys. 11).



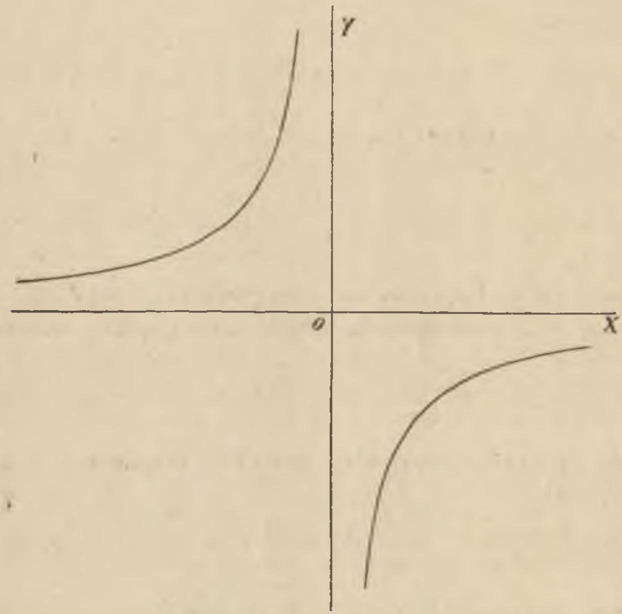
Rys. 12.

Uwzględniając powyższe rezultaty, dostajemy jako wykres rys. 12. Otrzymana krzywa nazywa się *hiperbolą*, jak wogóle każda krzywa, posiadająca asymptoty, o ile jej równanie jest stopnia drugiego; równanie to możemy napisać w postaci

$$xy = k.$$

16. Dotychczas zakładaliśmy, że k jest dodatnie; niech

teraz będzie $k < 0$, $k = -k'$. Porównajmy funkcje $y = \frac{k}{x}$ i $y' = \frac{k'}{x}$; wartości y i y', odpowiadające temu samemu x, różnią się od siebie tylko znakami. Stąd widzimy, że, zmieniając znak stałej k, otrzymamy krzywą symetryczną do poprzedniej względem osi odciętych. Dla $k < 0$ dostaniemy więc hiperbolę, leżącą w II i IV ćwiartce (rys. 13).



Rys. 13.

Rezultaty powyższe możemy streścić w następującej tablicy:

$$y = \frac{k}{x}$$

x	$-\infty$ rośnie 0	rośnie $+\infty$
$k > 0;\ y$	0 maleje $-\infty$	$+\infty$ maleje 0
$k < 0;\ y$	0 rośnie $+\infty$	$-\infty$ rośnie 0

17. Dla wszystkich punktów P, należących do hiperboli, której równanie jest $xy = k$, prostokąt, mający za boki spółrzędne punktu P, ma pole stałe i jest równoważny prostokątowi o bokach OJ, OK (rys. 7). Zmiana jednego tylko z dwóch odcinków OJ, OK wywołuje zawsze zmianę hiperboli; ale obydwa jednocześnie możemy tak zmienić, żeby hiperbola pozostała taż sama.

Niech będzie k równe jakiejkolwiek liczbie dodatniej c^2, gdzie $c = +\sqrt{k}$; wtedy

$$y = \frac{c^2}{x},$$

co można w ten sposób napisać:

$$\frac{y}{c} = \frac{1}{\frac{x}{c}}.$$

Jeżeli jednostkę długości przyjmiemy c razy większą, niż na rys. 12, wtedy ta sama hiperbola mieć będzie równanie

$$y = \frac{1}{x}.$$

Tak np. jeżeli równanie hiperboli względem 1 mm, jako jednostki, jest

$$y = \frac{100}{x},$$

to możemy równanie to napisać w postaci:

$$x \text{ mm } y \text{ mm} = (10 \text{ mm})^2,$$

rozumiejąc przez to: „prostokąt, zbudowany z odcinków długości x mm i y mm jest równoważny kwadratowi o boku równym 10 mm".

Zależność ta, wyrażona w centymetrach, przedstawi się tak:

$$\frac{x}{10} \text{ cm } \frac{y}{10} \text{ cm} = (1 \text{ cm})^2;$$

$\frac{x}{10}$ i $\frac{y}{10}$ to są wielkości odciętej i rzędnej, wymierzone w centymetrach; względem tej nowej jednostki możemy więc napisać równanie hiperboli w postaci:

$$xy = 1,$$

albo

$$y = \frac{1}{x}.$$

Dla $x = 5$ mm, czyli 0,5 cm, dostaniemy w pierwszym przypadku $y = 20$ mm, w drugim $y = 2$ cm, czyli jedno i to samo.

ZADANIA DO ROZDZIAŁU II.

1. Zmienna y jest odwrotnie proporcjonalna do x; wartości $x = 2$ odpowiada $y = 6$. Znaleźć y, odpowiadające wartości $x = 3$.

2. Dowieść, że jeżeli liczby a i b są dodatnie, wtedy można zbiór wszystkich liczb większych od a uczynić odwrotnie proporcjonalnym do zbioru wszystkich liczb dodatnich mniejszych od b.

3. x jest wprost proporcjonalne do y, a odwrotnie proporcjonalne do z (por. cz. II § 183) i $x = a$, gdy $y = b$, a $z = c$. Znaleźć wartość x, gdy $y = c$, a $z = b$.

4. Przedstawić graficznie zmienność funkcji $y = \frac{3}{2x}$.

Wybrawszy odpowiednio jednostki długości, przedstawić graficznie zmienność funkcji:

5. $y = \frac{10^{16}}{x}$.

6. $y = \frac{1}{10^{16}x}$.

7. Przedstawić graficznie zmienność funkcji $y = \frac{1}{x}$ w granicach od $x = 1000$ do $x = 1001$, obierając dla każdej osi inną jednostkę długości w odpowiedni sposób (por. cz. I § 187).

8. Przedstawić graficznie zmienność funkcji $y = \frac{3,14}{10^{12}x}$ w granicach od $x = \frac{1}{10^9}$ do $x = \frac{1}{10^8}$ (obie osi muszą leżeć poza granicami rysunku).

9. Wykreślić hiperbolę $xy = -2$ oraz prostą $x + 2y = -1$, biorąc 1 cm za jednostkę długości. Obliczyć i zmierzyć spółrzędne punktów przecięcia.

III.

Funkcja homograficzna.

18. Funkcją homograficzną nazywamy funkcję, która jest ilorazem dwóch funkcyj linjowych:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d};$$

a, b, c, d mogą być jakiemikolwiek liczbami, jednak ani c, ani $ad - bc$ nie powinno być zerem. Przypadek $c = 0$ wyłączamy dlatego, że funkcja zamienia się w tym przypadku na linjową:

$$y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d};$$

w przypadku zaś $ad - bc = 0$, $(c \neq 0)$ byłoby

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

a ponieważ rozpatrywany iloraz można tak napisać:

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)},$$

przeto dostalibyśmy na y wartość stałą i równą $\frac{a}{c}$ dla wszystkich x, które nie czynią zerem czynnika $x + \frac{b}{a}$, czyli $x + \frac{d}{c}$; jeśli jednak $x = -\frac{b}{a}$, wtedy y staje się nieoznaczone.

Zanim przystąpimy do badania funkcji homograficznej w najogólniejszej postaci, rozpatrzymy kilka przykładów liczbowych.

19. Rozpatrzymy zmienność funkcji

$$y = \frac{3 - x}{2x}.$$

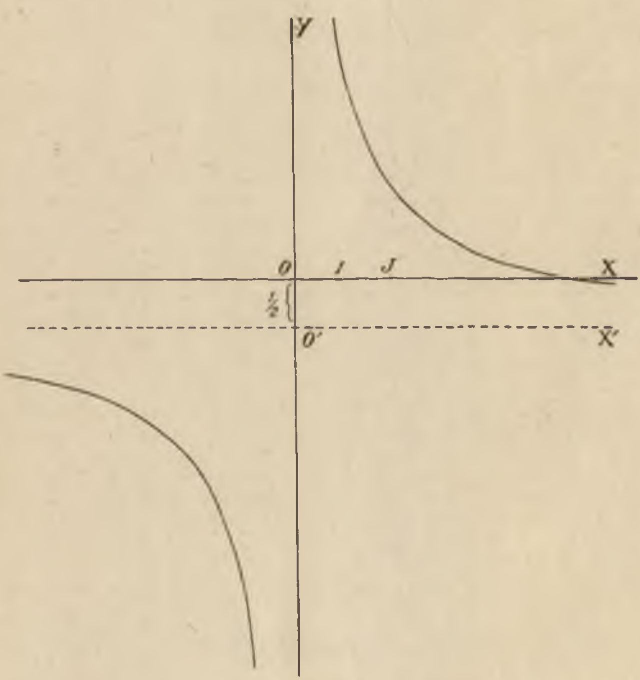
Tę zależność można tak napisać:

$$y = \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$$

Porównywając ją z funkcją

$$y = \frac{3}{2x},$$

widzimy, że wykres żądanej funkcji można otrzymać z wykresu tej drugiej funkcji, zmniejszając dla każdego x rzędną o $\frac{1}{2}$, czyli przesuwając każdy punkt krzywej o $\frac{1}{2}$ ku dołowi; zamiast tego można oś odciętych przesunąć o $\frac{1}{2}$ ku górze. Rys. 14 zo-



Rys. 14.

stał wykonany tym drugim sposobem: pomocnicza oś odciętych $O'X'$ jest poprowadzona równolegle do OX w odległości $\frac{1}{2}$ ku dołowi (OY jest jednostką długości). Względem osi $O'X'$, $O'Y'$

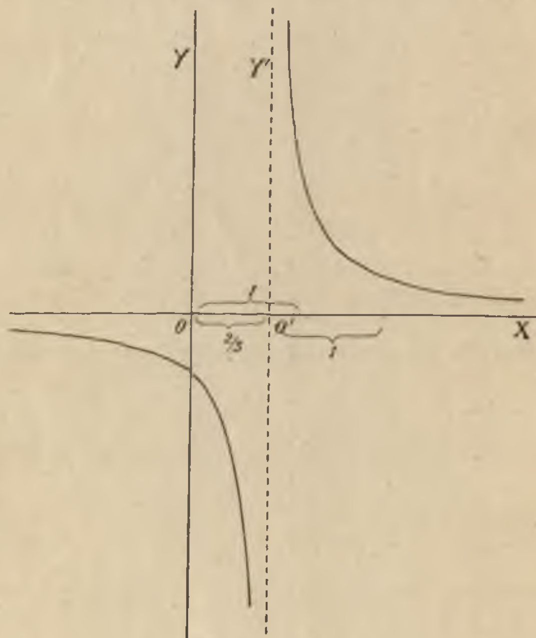
wykreślamy hiperbolę $y = \frac{3}{2x}$ (§ 11 i nast.) i przesuwamy oś odciętych do pierwotnego położenia; względem osi OX, OY ta hiperbola ma równanie zadane.

20. Niech będzie dana funkcja

$$y = \frac{1}{3x - 2},$$

czyli:

$$y = \frac{\frac{1}{3}}{x - \frac{2}{3}}.$$



Rys. 15.

Oznaczmy $x - \frac{2}{3}$ przez x'; otrzymamy znaną nam funkcję

$$y = \frac{\frac{1}{3}}{x'} = \frac{1}{3x'},$$

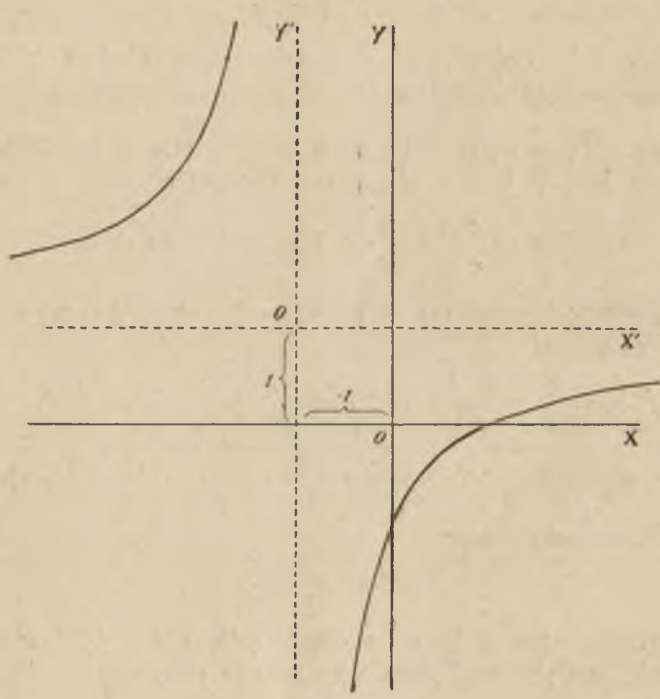
dla której znajdziemy wykres w pomocniczym układzie spółrzędnych $O'X$, $O'Y'$; przesuwamy następnie oś rzędnych do właściwego położenia, a więc tak, ażeby było

$$x - \frac{2}{3} = x',$$

czyli o $\frac{2}{3}$ na lewo (Rys. 15).

21. Rozpatrzymy jeszcze zmienność funkcji

$$y = \frac{x-1}{x+1},$$



Rys. 16.

czyli:

$$y = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 + \frac{-2}{x+1}.$$

Czyniąc

$$x + 1 = x',$$

wykreślimy hiperbolę $y' = \frac{-2}{x'}$ w pomocniczym układzie spółrzędnych $O'X'$, $O'Y'$ (rys. 16); przesuwamy następnie oś rzędnych do położenia OY tak, ażeby było

$$x + 1 = x',$$

a więc o 1 na prawo; wreszcie przesuwamy oś odciętych do położenia OX tak, że

$$y = 1 + y',$$

a więc o 1 ku dołowi. Względem nowego układu OX, OY wykreślona poprzednio hiperbola jest żądanym wykresem.

22. Tę samą metodę, co w poprzednim §, zastosujemy do zbadania funkcji homograficznej w ogólnej postaci:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},\ c \neq o,\ ad - bc \neq o.$$

Funkcję tę możemy tak wyrazić, ażeby x występowało tylko raz jeden:

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(x + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\left(\frac{bc - ad}{c^2}\right)}{x + \frac{d}{c}}.$$

Oznaczamy teraz:

$$x' = x + \frac{d}{c}$$

i w pomocniczym układzie spółrzędnych $O'X'$, $O'Y'$ zbudujmy hiperbolę, mającą względem tego układu równanie

$$y' = \frac{\left(\frac{bc - ad}{c^2}\right)}{x'}.$$

Znajdujemy teraz układ spółrzędnych OX, OY tak, ażeby

$$x' = x + \frac{d}{c};\ y' = y - \frac{a}{c};$$

nowy początek spółrzędnych O musi więc mieć względem dawnego układu spółrzędne

$$x' = \frac{d}{c};\ y = -\frac{a}{c};$$

gdyby zaś osi OX, OY były zgóry zadane, wtedy układ pomocniczy należałoby wybrać tak, ażeby jego początek O' miał względem zadanego układu spółrzędne

$$x = -\frac{d}{c};\ y = \frac{a}{c}.$$

Krzywa, mająca w układzie pomocniczym równanie

$$y' = \frac{\left(\frac{bc - ad}{c^2}\right)}{x'},$$

jest względem układu OX, OY wykresem danej funkcji.

Ta krzywa ma dwie asymptoty, mianowicie osi pomocniczego układu spółrzędnych; ich równania są:

$$y = \frac{a}{c};\quad x = -\frac{d}{c}.$$

Jeżeli x rośnie do ∞, wtedy y dąży do wartości granicznej $\frac{a}{c}$; y rośnie do ∞, jeżeli x zbliża się do wartości granicznej $-\frac{d}{c}$, poza tem każdemu x odpowiada jedna, całkiem oznaczona wartość y, zmieniająca się w sposób ciągły. Funkcja jest *malejąca* — to znaczy: zwiększającym się x odpowiadają zmniejszające się y — jeżeli

$$\frac{bc - ad}{c^2} > 0 \text{ (por. § 16)},$$

czyli, jeżeli

$$ad - bc < 0,$$

zaś *rosnąca*, jeżeli

$$ad - bc > 0.$$

23. Rezultaty poprzedniego § można otrzymać wprost z wzoru

$$y = \frac{ax + b}{cx + d};\quad c \neq 0;\quad ad - bc \neq 0. \qquad (1)$$

Ta funkcja ma dla każdego x całkiem oznaczoną wartość, o ile tylko mianownik nie jest 0;

$$cx + d = 0$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$x = -\frac{d}{c}.$$

Sprawdźmy, jaki jest licznik dla tej wartości x.

$$ax + b = -\frac{ad}{c} + b = \frac{-ad + bc}{c};$$

a ponieważ założyliśmy, że $ad - bc \neq 0$, więc licznik jest w tym przypadku napewno różny od zera. Stąd wniosek, że y rośnie do ∞, jeżeli x zbliża się do wartości granicznej $-\frac{d}{c}$.

Ażeby sprawdzić, w jakich warunkach funkcja rośnie, w jakich maleje, postąpimy podobnie jak w § 11: przypuśćmy, że wielkość x zamieniamy na $x + h$, wartość funkcji w ogólności zmieni się również, przypuśćmy że na $y + l$; chcemy zbadać, w jakich warunkach różnice h i l mają znaki jednakowe, w jakich różne.

Ażeby obliczyć $y + l$, podstawiamy w (1) $x + h$ zamiast x:

$$y + l = \frac{a(x+h) + b}{c(x+h) + d}; \tag{2}$$

od tego równania odejmujemy stronami równanie (1):

$$l = \frac{a(x+h) + b}{c(x+h) + d} - \frac{ax + b}{cx + d},$$

czyli, po sprowadzeniu do wspólnego mianownika:

$$l = \frac{[a(x+h) + b](cx + d) - [c(x+h) + d](ax + b)}{[c(x+h) + d](cx + d)},$$

a po rozwinięciu nawiasów i wykonaniu redukcji w liczniku:

$$l = \frac{(ad - bc)h}{[c(x+h) + d](cx + d)}. \tag{3}$$

Mianownik tego ułamka możemy uczynić dodatnim, jeżeli się postaramy, ażeby jego oba czynniki miały znaki jednakowe. Z nierówności

$$c\,(x+h)+d \gtrless 0;\; cx+d \gtrless 0,$$

w których należy naprzód wziąć oba zwroty górne, później oba dolne, — znajdziemy, że x i $x+h$ powinny być albo oba większe, albo oba mniejsze od $-\frac{d}{c}$, a więc ta wartość x, dla której y staje się nieskończenie wielkie, nie powinna leżeć między x i $x+h$.

W tem założeniu l ma ten sam znak, co i licznik ułamka (3), a więc zgodny z h, jeżeli

$$ad - bc > 0, \tag{4}$$

przeciwny do znaku h, jeżeli

$$ad - bc < 0. \tag{5}$$

Zwiększając x, a więc zakładając $h > 0$, otrzymywać będziemy stale y albo rosnące, albo stale malejące, zależnie od tego, czy $ad - bc$ jest dodatnie, czy ujemne.

Nietrudno teraz sprawdzić, dla jakich x dostaniemy y dodatnie, dla jakich ujemne; należy tylko w tym celu znaleźć jeszcze te wartości x, dla których y staje się zerem.

Przyrównywając licznik ułamka (1) do 0, znajdziemy

$$x = -\frac{b}{a}; \tag{6}$$

podstawiając tę wartość w mianowniku, dostajemy:

$$cx + d = -\frac{bc}{a} + d = \frac{-bc + ad}{a},$$

co podług założenia na pewno nie jest zerem; tak więc $-\frac{b}{a}$ jest poszukiwaną wartością, i to jedyną możliwą. Przy przejściu x przez $-\frac{b}{a}$ znak funkcji się zmienia; drugi raz zmienia się w sposób nieciągły przy przejściu x przez $-\frac{d}{c}$; między $-\frac{b}{a}$ i $\frac{d}{c}$

funkcja ma stale ten sam znak, dla pozostałych wartości x $\left(\text{oczywiście różnych od } -\frac{b}{a} \text{ i } \frac{d}{c}\right)$, znak przeciwny.

Pozostaje jeszcze do zbadania, jak się zachowuje y, jeżeli x rośnie do ∞. Funkcji y nadamy w tym celu taką postać, ażeby x pozostało tylko w mianowniku (por. § 22):

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{\left(\frac{bc - ad}{c^2}\right)}{x + \frac{d}{c}}.$$

Jeżeli wartość bezwzględna x rośnie do nieskończoności, to samo się dzieje z mianownikiem $x + \frac{d}{c}$; licznik pozostaje stały, a więc wartość bezwzględna ułamka maleje do 0; wartością graniczną zmiennej y jest więc $\frac{a}{c}$, co notujemy w ten sposób:

$$x \to \infty; \quad y \to \frac{a}{c}. \tag{7}$$

Ważniejsze wyniki tej dyskusji możemy streścić w tablicy następującej:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}; \quad c \neq 0; \quad ad - bc \neq 0.$$

	x	$-\infty$ rośnie $-\frac{d}{c}$	rośnie $+\infty$
$ad - bc > 0$	y	$\frac{a}{c}$ rośnie $+\infty$	$-\infty$ rośnie $\frac{a}{c}$
$ad - bc < 0$	y	$\frac{a}{c}$ maleje $-\infty$	$+\infty$ maleje $\frac{a}{c}$

ZADANIA DO ROZDZIAŁU III.

Zbadać następujące funkcje i przedstawić je graficznie, dobierając odpowiednio jednostki długości:

1. $\frac{4x + 2}{2x + 1}$. 2. $\frac{4x + 1}{3x}$.

3. $\dfrac{2}{3-x}$. 4. $\dfrac{-5}{100+x}$.

5. $\dfrac{2x+1}{3x-2}$. 6. $\dfrac{ax+b}{bx+a}$.

IV.

Trójmian stopnia drugiego.

24. Trójmianem stopnia drugiego nazywamy wyrażenie postaci:

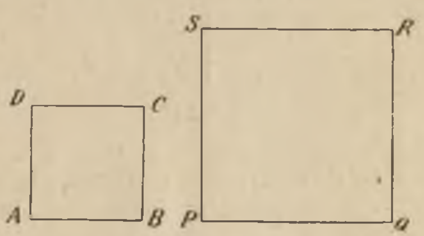
$$ax^2 + bx + c,$$

w którem z trzech spółczynników a, b, c przynajmniej a jest różny od zera, a x jest zmienną niezależną; jest to więc *funkcja algebraiczna całkowita stopnia drugiego jednej zmiennej.*

25. Rozpatrzymy przedewszystkiem najprostszy przypadek, kiedy $b = c = 0$, $a = 1$; funkcja przyjmuje wtedy postać

$$y = x^2.$$

Zależności takie znamy z geometrji: niech będą dwa kwadraty $ABCD$ i $PQRS$ (rys. 17); oznaczmy przez x stosunek ich boków, przez y stosunek pól



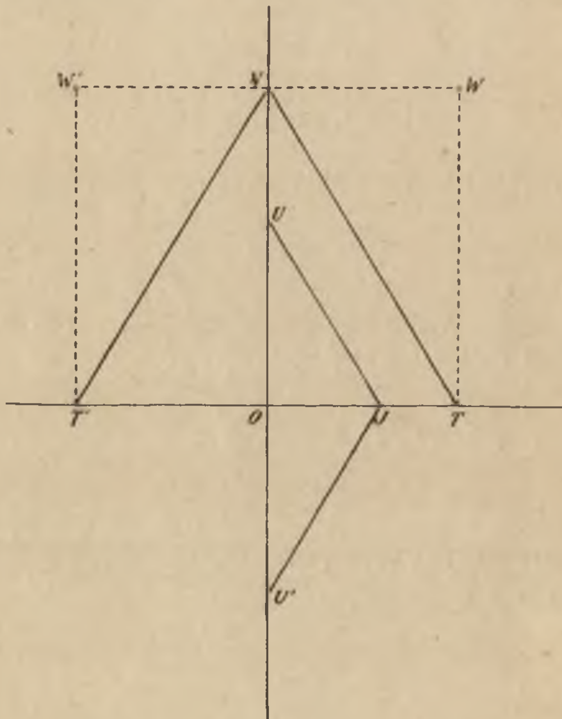
Rys. 17.

$$x = \frac{PQ}{AB}; \quad y = \frac{\text{pole } PQRS}{\text{pole } ABCD},$$

wtedy $y = x^2$. W założeniu, że kwadrat $ABCD$ jest stały, $PQRS$ zmienny, możemy przyjąć AB za jednostkę długości, pole $ABCD$

za jednostkę powierzchni, a wtedy x i y są liczbami wymiarowemi długości boku i pola kwadratu zmiennego.

Wynika stąd możność znalezienia dowolnej liczby punktów wykresu funkcji $y = x^2$ zapomocą linjału i cyrkla. Odmierzmy na osi odciętych jednostkę długości $OI = AB$ (rys. 18) oraz na



Rys. 18.

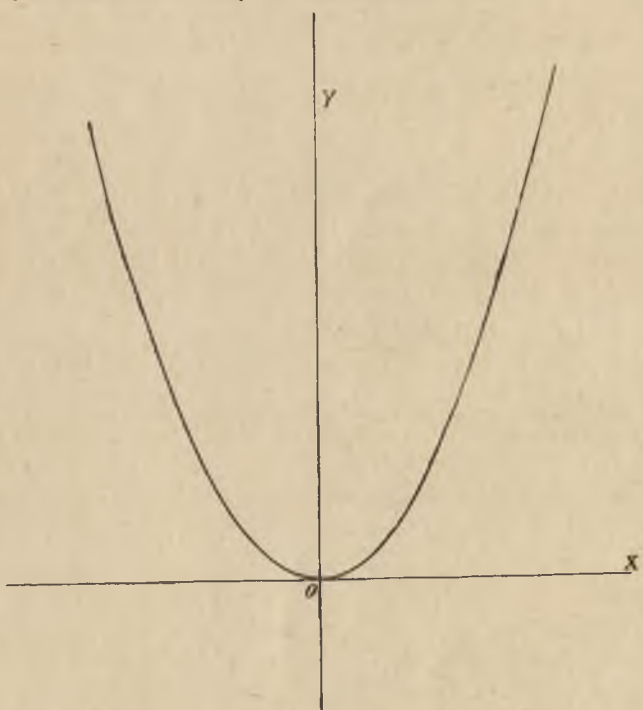
obu osiach $OT = OU = PQ$; połączmy punkty I i U linją prostą i poprowadźmy do niej równoległą przez T; jeżeli przez V oznaczymy jej przecięcie z osią rzędnych, wtedy OV ma za miarę liczbę y, gdyż z konstrukcji wynika

$$OV : OU = OT : OI,$$

a więc prostokąt $OV \, . \, OI$ jest równoważny kwadratowi $OT \, . \, OU$. Długości odcinków OT, OV są odciętą i rzędną jednego z punktów wykresu W.

Ten dowód dotyczy bezpośrednio tylko liczb bezwzględnych; ale sama konstrukcja może być stosowana i do ujemnych wartości x. Ponieważ $(-x)^2 = x^2$, powinniśmy więc dostać dla symetrycznych punktów T i T' względem O ten sam punkt V. To osiągniemy, jeżeli ujemne x odmierzać będziemy na obu osiach w zwrotach ujemnych, jeżeli więc U i U' są symetryczne względem O; gdyż wtedy trójkąty OVT' i $OU'I$ są podobne, jako odpowiednio przystające do OVT i OUI, a więc $T'V \parallel IU'$.

Widać stąd, że wykres leży całkowicie w górnej części płaszczyzny i jest symetryczny względem osi rzędnych. Początek spółrzędnych należy do wykresu, gdyż $0^2 = 0$; obie spółrzędne jednocześnie rosną do nieskończoności.



Rys. 19.

Otrzymany wykres nazywa się *parabolą* (rys. 19), jak wogóle każda krzywa, rozciągająca się do nieskończoności, jeżeli ma równanie stopnia drugiego, a nie ma asymptot.

26. Nie powołując się na wykres, możemy zbadać, w jakich warunkach funkcja $y = x^2$ rośnie, w jakich maleje. W tym celu przypuśćmy, że zmienna x została powiększona o h ($h > 0$), i że funkcja przyjęła wskutek tego wartość $y + l$, a więc

$$y + l = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2, \tag{1}$$

skąd:

$$l = 2xh + h^2 = (2x + h)\, h. \tag{2}$$

Ponieważ podług założenia $h > 0$, przeto znak l jest zgodny ze znakiem $2x + h$; nierówność

$$2x + h > 0$$

jest spełniona, jeżeli

$$x \geqq 0;$$

jeżeli zaś

$$x < x + h < 0,$$

to, dodając do środkowej części tej nierówności wielkość ujemną x, znajdujemy, że tem bardziej

$$2x + h < 0.$$

O ile więc 0 nie leży między x i $x + h$, wtedy funkcja albo stale maleje, albo stale rośnie; mianowicie maleje dla x ujemnych, rośnie dla dodatnich. Dla $x = 0$ funkcja ma wartość mniejszą, niż dla wszystkich innych wartości, mianowicie 0; mówimy, że to jest *minimum* funkcji.

Ażeby sprawdzić, że rozpatrywana funkcja jest ciągła dla każdej wartości zmiennej x, należy się przekonać, że zawsze możemy osiągnąć *dowolnie* małą zmianę wartości funkcji, jeżeli zmienimy x o wielkość *dostatecznie* małą, różną od zera.

Przypuśćmy, że chcemy x zmienić, ale w ten sposób, żeby wartość funkcji $y = x^2$ zmieniła się mniej, niż o liczbę daną dodatnią l; powinno więc być

$$|(x + h)^2 - x^2| < l,$$

jeżeli przez h oznaczymy wielkość, o którą x musiałoby być zmienione; ta wielkość nie jest nam jeszcze znana, ale przekonamy się, że jakiekolwiek są x i l, zawsze można znaleźć takie h różne od 0, że powyższa nierówność będzie spełniona. Rzeczywiście, po wykonaniu działań z lewej strony, widzimy, że powinna być spełniona nierówność

$$|2xh + h^2| < l.$$

Ażeby wyrugować z tej nierówności wyraz stopnia drugiego h^2, zauważmy, że na pewno

$$h^2 < |xh|,$$

jeżeli tylko

$$h < |x|,$$

a wtedy trzeba jeszcze uczynić

$$|3xh| < l,$$

czyli

$$|h| < \left|\frac{l}{3x}\right|.$$

O ile więc wybierzemy h tak, żeby były spełnione obie nierówności:

$$|h| < |x|; \; |h| < \left|\frac{l}{3x}\right|,$$

wtedy $(h + x)^2$ i x^2 różnić się będą od siebie mniej, niż o l. Taką wartość dla h można zawsze znaleźć, o ile x jest różne od zera. Do $x = 0$ ten dowód się nie stosuje, ale ciągłość i w tym przypadku nie ulega przerwie. Rzeczywiście, chcąc uczynić

$$|(0 + h)^2 - 0^2| < l,$$

czyli

$$h^2 < l,$$

wystarczy wybrać h tak, żeby były spełnione obie nierówności:

$$|h| < l; \; |h| < 1;$$

bo jeżeli

$$|h| < 1; \; l > 1,$$

to

$$h^2 < 1 < l,$$

jeżeli zaś $0 < l < 1$; $|h| < l$, to

$$h^2 < |h| < l.$$

Rezultaty powyższe streszcza następująca tablica:

$$y = x^2$$

x	$-\infty$ rośnie 0 rośnie $+\infty$
y	$+\infty$ maleje 0 rośnie $+\infty$

27. Mając już wykres funkcji x^2, nietrudno otrzymać wykres funkcji 3 x^2, — 3 x^2 i w ogólności ax^2. Należy w tym celu pomnożyć wszystkie rzędne przez 3, otrzymamy parabolę, która przedstawia funkcję

$$y = 3\,x^2;$$

symetryczna do niej względem osi odciętych ma równanie

$$y = -3\,x^2.$$

Ta sama parabola, którą otrzymaliśmy w § 25, może zresztą służyć za wykres wszystkich funkcyj postaci

$$y = ax^2,$$

jeżeli tylko na osi rzędnych przyjmiemy za jednostkę $\frac{OI}{a}$, zmieniając zwrot dodatni tej osi w przypadku, kiedy $a < o$.

Ażeby otrzymać wykres funkcji

$$y = x^2 - 1,$$

należy tę samą parabolę przesunąć o jednostkę długości ku dołowi, albo oś odciętych o jednostkę ku górze i wogóle wykres funkcji

$$y = x^2 + c$$

dostaniemy, kreśląc parabolę

$$y = x^2$$

w układzie pomocniczym, którego początek ma spółrzędne 0, c, a kierunki osi pozostają niezmienione.

Wykres funkcji

$$y = (x + 1)^2$$

dostaniemy, oznaczając

$$x' = x + 1$$

i kreśląc parabolę

$$y = x'^2$$

w układzie pomocniczym, w którym rzędne są te same, co w pierwszym, a odcięte o jedność większe, a więc pomocnicza oś rzędnych powinna leżeć o 1 w lewo od pierwotnej.

W celu znalezienia wykresu funkcji

$$y = x^2 - 4\,x + 3$$

uzupełnimy jej dwa pierwsze wyrazy do kwadratu, dodając do nich kwadrat połowy spółczynnika wyrazu drugiego i odejmując tę samą wielkość od wyrazu trzeciego:

$$y = (x^2 - 4\,x + 4) + 3 - 4,$$

czyli:

$$y = (x - 2)^2 - 1.$$

Oznaczmy teraz:

$$x' = x - 2$$
$$y' = x'^2$$

i zbudujmy wykres funkcji $y' = x'^2$ w układzie pomocniczym, względem którego odcięta każdego punktu jest o 2 mniejsza, a rzędna o 1 większa, aniżeli względem pierwotnego; początek układu pomocniczego ma więc spółrzędne 2,—1.

28. Podobnie jak w ostatnim przykładzie postąpimy, poszukując wykresu trójmianu stopnia drugiego w najogólniejszym przypadku:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Wyprowadziwszy spółczynnik a za nawias, uzupełniamy dwa pierwsze wyrazy do kwadratu, dodając do nich $\frac{b^2}{4\,a^2}$ i odejmując tę samą wielkość od wyrazu trzeciego:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,ac}{4\,a^2}\right]. \qquad (3)$$

Oznaczmy

$$x' = x + \frac{b}{2\,a}; \quad y' = x'^2$$

i zbudujmy parabolę $y' = x'^2$ w układzie pomocniczym, którego osi są równoległe do pierwotnych, a którego początek ma spółrzędne $-\frac{b}{2\,a}$, $-\frac{b^2 - 4\,ac}{4\,a^2}$, pomnóżmy rzędną każdego punktu tej paraboli przez a, z uwzględnieniem znaku tego spółczynnika, a otrzymamy żądany wykres.

29. Niezależnie od wykresu zmienność funkcji

$$y = ax^2 + bx + c \tag{4}$$

możemy zbadać w taki sposób.

Przedstawmy ją pod postacią (3):

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Z ostatniego ułamka w nawiasie można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, o ile tylko on nie jest ujemny, o ile więc wyróżnik $b^2 - 4ac \geq 0$ (por. cz. II § 107 i 114); a wtedy całe wyrażenie, zawarte w nawiasie, można rozpatrywać, jako różnicę dwóch kwadratów, można więc rozłożyć je na dwa czynniki stopnia pierwszego względem x. Jeżeli mianowicie oznaczymy przez x_1, x_2 pierwiastki równania

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{5}$$

czyli dwie wartości

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

wtedy

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2); \tag{6}$$

x_1 niech oznacza przytem mniejszy z dwóch pierwiastków.

Rozróżnimy 3 przypadki, zależnie od tego, czy wyróżnik $b^2 - 4ac$ jest dodatni, zero, czy ujemny.

1) $b^2 - ac > 0$, funkcja y może być przedstawiona pod postacią (6), $x_1 < x_2$. Jeżeli $x < x_1$, to jest także $x < x_2$, oba czynniki $x - x_1$, i $x - x_2$ są ujemne, ich iloczyn dodatni, y ma więc ten sam znak, co a.

Jeżeli

$$x_1 < x < x_2,$$

to

$$x - x_1 > 0; \quad x - x_2 < 0,$$

iloczyn tych dwóch różnic jest ujemny, y ma znak przeciwny, aniżeli a.

Jeżeli wreszcie $x > x_2$, to jest także $x > x_1$, obie różnice są dodatnie, y ma ten sam znak, co a.

Jeżeli wyróżnik trójmianu stopnia drugiego jest dodatni, wtedy wartość trójmianu ma ten sam znak, co spółczynnik kwadratu zmiennej, dla wszystkich wartości zmiennej, niezawartych między pierwiastkami trójmianu; zaś znak przeciwny dla wartości zmiennej, zawartych między pierwiastkami.

2) $b^2 - 4ac = 0$, równość (3) przyjmuje postać:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

oba pierwiastki trójmianu są identyczne. Z wyjątkiem przypadku $x = -\frac{b}{2a}$, drugi czynnik jest tu stale dodatni; a więc:

Jeżeli wyróżnik trójmianu stopnia drugiego jest zerem, wtedy wartość trójmianu ma znak spółczynnika kwadratu zmiennej dla wszystkich wartości zmiennej różnych od pierwiastka trójmianu.

3) $b^2 - 4ac < 0$, wtedy

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

przyczem ostatni ułamek w nawiasie jest dodatni, zaś

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

dodatnie lub zero; całe wyrażenie w nawiasie jest więc dodatnie dla wszystkich x.

Jeżeli wyróżnik trójmianu stopnia drugiego jest ujemny, wtedy wartość trójmianu ma stale ten sam znak, co spółczynnik kwadratu zmiennej, i dla żadnej wartości zmiennej nie jest zerem.

Wyniki otrzymane można jeszcze i w ten sposób wyrazić:

Trójmian stopnia drugiego ma ten sam znak, co spółczynnik drugiej potęgi zmiennej, z wyjątkiem przypadku, w którym trójmian, przyrównany do zera, ma pierwiastki rzeczywiste, a wartość, jaką nadajemy zmiennej, jest zawarta między temi pierwiastkami.

30. Ażeby zbadać, w jakich warunkach z wzrastającem x wartość trójmianu rośnie, w jakich maleje, przedstawmy funkcję

$$y = ax^2 + bx + c$$

pod postacią

$$y = a\left[\left(x + \frac{2a}{b}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

i zauważmy, że z prawej strony tego równania x występuje jedynie w wyrażeniu $\left(x + \frac{2a}{b}\right)^2$, które jest zawsze dodatnie, z wyjątkiem $x = -\frac{b}{2a}$, kiedy ono się staje zerem. Jeżeli $a > 0$, iloczyn $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ jest więc zawsze dodatni albo zero; jest on ujemny albo zero, jeżeli $a < 0$. Wypada stąd, że jeżeli $a > 0$, y przyjmuje *wartość możliwie najmniejszą*, czyli *minimum*, przy $x = -\frac{b}{2a}$; jeżeli zaś $a < 0$, wtedy y przyjmuje wartość *możliwie największą*, czyli *maximum*, również przy

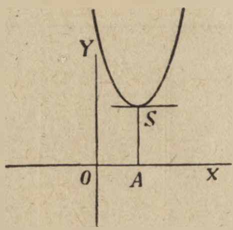
$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Wyrażenie $x + \frac{b}{2a}$ wzrasta razem z x; jeżeli ono jest dodatnie, wtedy $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ wzrasta również razem z x; jeżeli jednak $x + \frac{b}{2a} < 0$, wtedy wartość jego bezwzględna zmniejsza się, gdy wartość względna wzrasta; $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ zmniejsza się więc przy rosnącym x, jeżeli $x + \frac{b}{2a} < 0$.

Iloczyn $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ zmienia się w ten sam lub odwrotny sposób, co $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, stosownie do tego, czy a jest dodatnie, czy ujemne.

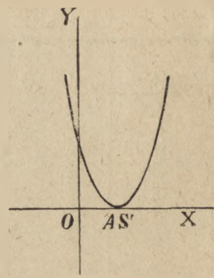
Tablicę zmian, jakim wartość trójmianu podlega w różnych przypadkach, oraz wykresy podajemy na następnych dwóch stronicach.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$x+\dfrac{b}{2a}$	$-\infty$;	ujemne rosnące;	0	; dodatnie rosnące;	$+\infty$
$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$;	dodatnie malejące;	0 *minimum*	; dodatnie rosnące;	$+\infty$
$a>0$ $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$;	dodatnie malejące;	0 *minimum*	; dodatnie rosnące;	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$	$+\infty$;	malejące;	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$; *minimum*	rosnące;	$+\infty$
$a<0$ $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	$-\infty$;	ujemne rosnące;	0 *maximum*	; ujemne malejące;	$-\infty$
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$-\infty$;	rosnące;	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$; *maximum*	malejące;	$-\infty$



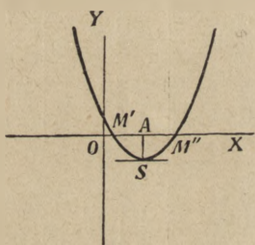
$a > 0;\ 4ac - b^2 > 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$: minimum dodatnie, pierwiastki urojone.



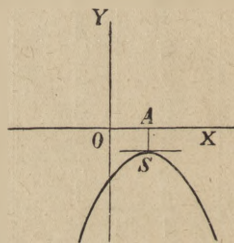
$a > 0\ \ 4ac - b^2 = 0$

minimum zero, pierwiastki równe.



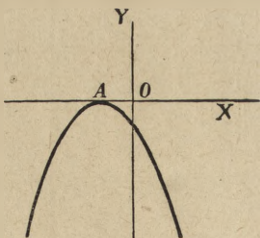
$a > 0\ \ 4ac - b^2 < 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$ minimum ujemne, 2 pierwiastki OM′ i OM″.



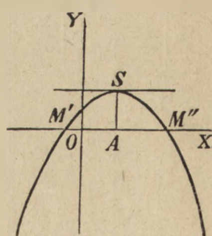
$a < 0\ \ 4ac - b^2 > 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$: maximum ujemne pierwiastki urojone.



$a < 0;\ 4ac - b^2 = 0$

maximum zero, pierwiastki równe.



$a < 0;\ 4ac - b^2 < 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$; maximum dodatnie pierwiastki OM′ i OM″.

Rys. 20.

31. Nazywamy *nierównością stopnia drugiego* nierówność, którą można przedstawić pod taką postacią:

$$ax^2 + bx + c > 0;$$

rozwiązać tę nierówność to znaczy sprawdzić, dla jakich wartości x trójmian

$$ax^2 + bx + c$$

jest dodatni. W tym celu obliczamy wyróżnik trójmianu.

1) Jeżeli $b^2 - 4ac > 0$, wtedy trójmian, przyrównany do zera, daje dwa pierwiastki, z których mniejszy oznaczymy przez x_1, większy przez x_2. Jeżeli przytem $a > 0$, to nierówność zadana wymaga, ażeby wartość trójmianu miała ten sam znak, co a; powinno więc być $x < x_1$, albo $x > x_2$ (§ 29, 1); jeżeli $a < 0$, powinno być $x_1 < x < x_2$.

2) Jeżeli $b^2 - 4ac = 0$, wtedy wartość trójmianu ma znak ten sam, co a, z wyjątkiem $x = -\frac{b}{2a}$. Dla dodatniego a każde x, z wyjątkiem $x = -\frac{b}{2a}$, sprawdza nierówność, przy ujemnem a nierówność jest niemożliwa, wyraża sprzeczność.

3) Jeżeli $b^2 - 4ac < 0$, wtedy wartość trójmianu dla wszystkich x ma ten sam znak, co a; jest więc dla wszystkich x prawdziwa, jeżeli $a > 0$, zaś niemożliwa jeżeli $a < 0$.

32. *Przykłady*. 1) Rozwiązać nierówność:

$$x^2 + x - 2 < 0.$$

Zmieniając wszystkie znaki i zarazem zwrot nierówności (por. cz. I § 261), doprowadzamy ją do postaci poprzednio rozpatrywanej:

$$-x^2 - x + 2 > 0.$$

Wyróżnik trójmianu jest tu $(-1)^2 - 4(-1)2 = 1 + 8 = = 9 > 0$, a ponieważ spółczynnik kwadratu zmiennej $-1 < 0$, przeto nierówność jest prawdziwa dla każdego x, zawartego między pierwiastkami równania

$$-x^2 - x + 2 = 0.$$

A ponieważ pierwiastki te są:

$$\frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2}, \text{ czyli } -2 \text{ i } 1,$$

przeto nierówność sprawdza się dla każdego x, spełniającego warunki:

$$-2 < x < 1.$$

2) Rozwiązać nierówność:

$$(1+x)(x^2+1)(x^2-4x+3) > 0.$$

Jest to wprawdzie nierówność stopnia piątego, ale możemy ją rozwiązać, opierając się na poprzednich rozważaniach.

Zauważmy przedewszystkiem, że drugi czynnik x^2+1 ma ten sam znak dla wszystkich x, mianowicie jest stale dodatni. Nierówność dana będzie więc sprawdzona, jeżeli uczynimy:

$$(1+x)(x^2-4x+3) > 0.$$

Drugi czynnik możemy rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego:

$$(1+x)(x-1)(x-3) > 0.$$

Iloczyn z lewej strony zmienia znak tylko wtedy, jeżeli zmienia się znak jednego z czynników. Znaki czynników dla różnych wartości x notujemy w następującej tablicy:

x	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	3	$+$	$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-3$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

Iloczyn jest dodatni, jeżeli wszystkie trzy czynniki są dodatnie, a więc $x > 3$, i wtedy, kiedy jeden jest dodatni, dwa ujemne, czyli $-1 < x < 1$.

3) Rozwiązać nierówność:

$$\frac{x-2}{x+3} > \frac{x-1}{x+1}.$$

Odejmijmy od obu stron nierówności

$$\frac{x-1}{x+1};$$

dostaniemy:

$$\frac{x-2}{x+3}-\frac{x-1}{x+1}>0,$$

czyli, po sprowadzeniu do wspólnego mianownika:

$$\frac{x^2-x-2-(x^2+2x-3)}{(x+3)\,(x+1)}>0,$$

albo:

$$\frac{-3x+1}{(x+3)\,(x+1)}>0.$$

Pomnóżmy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika; ponieważ jest to wielkość dodatnia (pominąwszy wartości $x=-1$ i $x=-3$), więc zwrot nierówności nie ulega przez to zmianie.

$$(-3x+1)\,(x+3)\,(x+1)>0.$$

Iloczyn z lewej strony staje się zerem dla trzech wartości x, które porządkujemy podług ich wielkości:

$$-3;\quad -1;\quad \tfrac{1}{3}.$$

Układamy tabliczkę, podobnie jak w poprzednim przykładzie:

x	$-\infty$	$-$	-3	$-$	-1	$-$	0	$+$	$\frac{1}{3}$	$+$	$+\infty$
$-3x+1$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x+1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	

Wszystkie trzy czynniki są dodatnie, jeżeli $-1<x<\frac{1}{3}$; dwa są ujemne, jeden dodatni, jeżeli $x<-3$; tym sposobem nierówność została rozwiązana.

33. Jeżeli mamy wykreśloną parabolę $y=x^2$, wtedy możemy znaleźć graficznie pierwiastki jakiegokolwiek równania stopnia drugiego takim sposobem (rys. 21).

Niech będzie dane do rozwiązania równanie

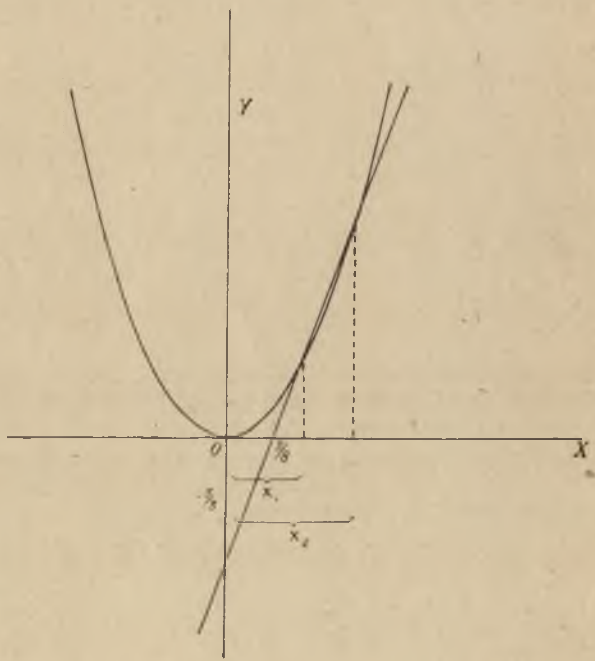
$$3x^2-8x+5=0.$$

Oznaczamy x^2 przez y; w takim razie poszukiwane x powinno czynić zadość obu równaniom:

$$3y - 8x + 5 = 0$$

$$y = x^2.$$

Pierwsze równanie jest stopnia pierwszego, więc jego wykres jest linją prostą; wykres drugiego jest znaną parabolą. Spół-



Rys. 21.

rzędne punktów wspólnych tych dwóch linij czynią zadość obu równaniom, ich odcięte x_1 i x_2 są poszukiwanemi pierwiastkami.

Wykres prostej można znaleźć, obliczając jej punkty przecięcia z osiami. Zakładając $y = 0$, znajdziemy $x = \frac{5}{8}$; dla $x = 0$, $y = -\frac{5}{3}$; żądana prosta odmierza więc na osiach odcinki długości $\frac{5}{8}$ i $-\frac{5}{3}$.

Dla sprawdzenia rozwiązujemy równanie metodą rachunkową i znajdujemy $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 15}}{3}$,

a więc $x_1 = 1;\ x_2 = \frac{5}{3}$.

W ogólności znajdziemy pierwiastki równania stopnia drugiego

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

wymierzając odcięte punktów przecięcia prostej

$$ay + bx + c = 0$$

z parabolą

$$y = x^2.$$

ZADANIA DO ROZDZIAŁU IV.

1. Wykreślić parabolę $y = \frac{1}{2} x^2$, przyjmując za jednostkę długości 1 cm.

2. Wykreślić tę samą parabolę, przyjmując za jednostkę długości 1 mm.

3. Wykreślić krzywą $x = \frac{2}{3} y^2$, biorąc za jednostkę długości 3 cm.

4. Znaleźć wykres paraboli $y = 5 \cdot 10^6 x^2$, przyjmując 1 m za jednostkę długości.

5. Przedstawić zmienność funkcji $y = -\frac{5,4}{10^{12}} x^2$ w granicach od $x = 0$ do $x = 100$, obierając odpowiednie jednostki długości, różne dla obu osi.

6. Przedstawić zmienność funkcji $y = 3 \cdot 10^7 x^2$ w granicach od $x = 1$ do $x = 1{,}01$.

7. Znaleźć graficznie pierwiastki równania $2x^2 - 5x + 3 = 0$; sprawdzić rezultat zapomocą rachunku.

8. Rozwiązać graficznie równanie $16 x^2 + 16 x - 45 = 0$; sprawdzić rezultat rachunkiem.

Zbadać zmienność następujących funkcyj graficznie i rachunkowo:

9. $x^2 + 1$.	10. $3 - 2 x^2$.
11. $x^2 + 3 x + 1$.	12. $2 x^2 + x + 5$.
13. $3 x^2 - 2 x + 4$.	14. $(0{,}4\, x)^2 - 1{,}1\, x + 3{,}4$.

Rozwiązać nierówności:

15. $x^2 < 16$.
16. $x^2 > 4$.
17. $x^2 - 6x + 8 < 0$.
18. $8x - x^2 > 15$.
19. $x^2 - 8x < 15$.
20. $x^2 - 4x + 13 > 0$.
21. $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$.
22. $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n) > 0$, jeżeli

  a) n parzyste; b) n nieparzyste.

23. $\frac{2x-3}{3x-2} > \frac{x-1}{1-x}$.
24. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} > 0$.
25. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1$.
26. $\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} > \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$.

V.

Postęp arytmetyczny.

34. Szereg wielkości tworzy wtedy postęp *arytmetyczny*, czyli *różnicowy*, jeżeli różnica między każdą z nich (z wyjątkiem pierwszej) i poprzedzającą jest wielkością stałą. Ta wielkość stała nazywa się *różnicą* lub wykładnikiem postępu.

Oto kilka przykładów:

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17.$$
$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b, \ldots$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$
$$1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2},\ 1-\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 1-2\sqrt{2}.$$
$$-5,\ -1,\ 3,\ 7.$$

Różnicę, czyli wykładnik, znajdujemy, odejmując którykolwiek wyraz postępu od następującego. W przykładach powyższych te różnice są:

$$5 - 2 = 3.$$
$$a + b - a = b.$$
$$2 - 1 = 1.$$
$$1 - \sqrt{2} - (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$
$$-1 - (-5) = 4.$$

Postęp arytmetyczny nazywa się *rosnącym*, jeżeli różnica jego jest dodatnia, *malejącym*, jeżeli różnica jest ujemna.

35. Znając wyraz pierwszy i różnicę postępu, możemy obliczyć jego którykolwiek wyraz. Tak np. znajdziemy wyraz piąty postępu, którego pierwszym wyrazem jest 2, a różnicą 3, uwzględniając, że ten wyraz jest o 3 większy od 4-go, o 2.3 większy od 3-go, o 3.3 od 2-go i o 4.3 od 1-go; ten wyraz jest więc

$$2 + 4 . 3 = 14.$$

W ogólności znajdziemy wyraz n^{ty} postępu a_n, którego pierwszym wyrazem jest a_1, a różnicą, r, dodając do a_1 tyle razy r, ile wyrazów poprzedza poszukiwany wyraz. Ten wyraz jest więc

$$a_n = a_1 + (n - 1) r. \tag{1}$$

Postęp może się składać z ograniczonej liczby wyrazów i wtedy ma wyraz ostatni, lub też może być nieograniczony. W tym drugim przypadku wyraz n^{ty} rośnie wraz z n do $+\infty$ przez wartości dodatnie lub maleje do $-\infty$, zależnie od tego, czy różnica jest dodatnia, czy ujemna. W postępie nieskończonym

$$1, 11, 21, 31...$$

wyraz pierwszy $a_1 = 1$, różnica $r = 10$, wyraz n^{ty}, który oznaczymy przez a_n, jest

$$a_n = 1 + (n - 1)\, 10 = 10\, n - 9;$$

ten wyraz możemy uczynić większym od 1000, nadając n wartość, która spełnia nierówność

$$10\, n - 9 > 1000,$$

czyli:

$$10\, n > 1009$$
$$n > 100^9/_{10},$$

a ponieważ n jest liczbą całkowitą:

$$n \geqq 101.$$

W postępie malejącym, którego wyrazem pierwszym jest 5, różnicą — $^1/_4$, znaleźlibyśmy wyraz mniejszy od — 100, czyniąc:

$$5 + (n - 1)(- {}^1/_4) < - 100;$$

$$5 - \frac{n}{4} + {}^1/_4 < - 100;$$

$$- \frac{n}{4} < - 105{}^1/_4;$$

$$n > 421;$$

$$n \geqq 422.$$

36. Równanie (1) wyraża zależność między czterema wielkościami a_1, n, r, a_n, z których każda może być obliczona, jeżeli trzy pozostałe są znane. Jeżeli w szczególności dany jest wyraz pierwszy, ostatni i liczba wyrazów, wtedy możemy znaleźć różnicę:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} \tag{2}$$

To daje nam możność rozwiązywania zadań w tym rodzaju: między dwie liczby 10 i 20 wstawić trzy średnie arytmetyczne, — przez co rozumiemy: utworzyć postęp arytmetyczny, w którym wyrazem pierwszym byłoby 10, ostatnim 20, a liczba wyrazów, między niemi zawartych, byłaby 3, a więc ogólna liczba wyrazów 5.

Stosując powyższy wzór, znajdziemy:

$$r = \frac{20 - 10}{4} = 2\tfrac{1}{2},$$

szukane wyrazy są więc:

$$12\tfrac{1}{2};\ 15;\ 17\tfrac{1}{2}.$$

Wstawianie średnich arytmetycznych między dwie liczby dane nazywa się *interpolacją*.

37. Pisząc wyrazy postępu arytmetycznego

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

w odwrotnym porządku, dostalibyśmy postęp, w którym wyrazem pierwszym jest a_n, ostatnim a_1, liczba wyrazów ta sama, co w pierwszym, wykładnik różniłby się tylko znakiem.

Każdy wyraz pierwszego postępu jest i w drugim i jest *poprzedzony* tyloma wyrazami, ile po nim *następuje* w pierwszym postępie. Wyraz, poprzedzony przez q wyrazów w pierwszym postępie, jest

$$a_1 + qr,$$

a wyraz, poprzedzony przez q wyrazów w drugim, jest

$$a_n - qr,$$

ich suma jest więc stała, równa

$$a_1 + a_n.$$

To daje nam możność obliczenia sumy S wszystkich wyrazów postępu: mianowicie, mnożąc przez n sumę wyrazów pierwszego i ostatniego, dostaniemy podwojoną sumę wszystkich wyrazów, czyli $2\,S$; a więc

$$S = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}. \tag{3}$$

Uwzględniając, że

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r,$$

możemy też napisać:

$$S = \frac{n\,[2a_1 + (n-1)\,r]}{2}. \tag{4}$$

Tak np. dostaniemy sumę wszystkich liczb całkowitych od 1 do n, zakładając $a_1 = r = 1$:

$$S = \frac{n(2 + n - 1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Suma 20 wyrazów postępu:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7\ldots.,$$

w którym $a_1 = 1$; $n = 20$; $r = 2$, jest

$$\frac{20\ (2 + 19\,.\,2)}{2} = \frac{20\,.\,40}{2} = 400.$$

Ogólniej: suma n pierwszych liczb nieparzystych

$$1 + 3 + 5 \ldots + [1 + (n-1)\,2]$$

jest

$$S = \frac{n[2+(n-1)2]}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

W zadaniu: znaleźć sumę ośmiu wyrazów postępu:

$$\tfrac{1}{12},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ldots$$

$$a_1 = \tfrac{1}{12};\ r = \tfrac{1}{12};\ n = 8,$$

przeto

$$S = \tfrac{8}{2}\left(\tfrac{2}{12} + \tfrac{7}{12}\right) = 4 \times \tfrac{9}{12} = 3.$$

38. Równanie (4)

$$S = \frac{n\,[2a_1 + (n-1)r]}{2}$$

wyraża zależność między czterema wielkościami S, a_1, n, r; każda z nich może być obliczona, jeżeli trzy pozostałe są znane. Równanie to jest linjowe względem S, a_1, r, kwadratowe względem n, możemy więc dostać dwa różne rozwiązania względem n, które mogą być oba przyjęte za odpowiedzi, o ile są całkowite i dodatnie.

Przykład: Utworzyć postęp arytmetyczny, którego pierwszym wyrazem jest — 7, różnica 2, suma wyrazów — 15.

Równanie, z którego obliczymy liczbę wyrazów, jest:

$$-15 = \frac{n[-14 + (n-1)2]}{2}$$

$$-30 = -14n + 2n^2 - 2n$$

$$2n^2 - 16n + 30 = 0$$

$$n^2 - 8n + 15 = 0$$

$$n = 4 \pm 1$$

Pierwiastki równania są 3 i 5 i oba mogą być przyjęte za odpowiedzi: w postępie

$$-7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1$$

zarówno suma trzech pierwszych, jak i suma wszystkich pięciu wyrazów jest — 15.

Inny przykład: W postępie wyraz pierwszy jest $\frac{3}{2}$, różnica 1, suma wyrazów 4; jaka jest liczba wyrazów?

Z wzoru (4) dostajemy:

$$4 = \frac{n(3+n-1)}{2}$$

$$8 = n(2+n)$$

$$n^2 + 2n - 8 = 0$$

$$n = -1 \pm 3.$$

Pierwiastki równania są 2 i — 4; jedynie pierwszy odpowiada warunkom zadania. Szukany postęp składa się więc tylko z dwóch wyrazów:

$$\frac{3}{2};\quad \frac{5}{2}.$$

ZADANIA DO ROZDZIAŁU V.

Znaleźć sumy następujących szeregów:

1. 100, 101, 102 . . . 9 wyrazów.
2. 2, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{2}$ . . . 12 wyrazów.
3. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{11}{6}$ . . . 15 wyrazów.
4. Pomiędzy 15 i 30 wstawić 4 średnie arytmetyczne.
5. Pomiędzy — 1 i 5 wstawić 8 średnich arytmetycznych.
6. Wyraz pierwszy postępu arytmetycznego jest 5, wyraz piąty 11; znaleźć sumę 8 wyrazów.
7. Suma pięciu liczb, stanowiących postęp arytmetyczny, wynosi 15, a suma kwadratów tych liczb jest 55. Znaleźć te liczby.
8. Jeżeli suma n pierwszych wyrazów postępu arytmetycznego jest zawsze n^2 (jakiekolwiek byłoby n), znaleźć wyraz pierwszy i wykładnik.
9. Wyraz, stojący na miejscu p w postępie różnicowym, równa się t, wyraz, stojący na miejscu q w tymże samym postępie, jest równy u, liczba zaś wszystkich wyrazów jest n. Znaleźć wykładnik, wyraz pierwszy, wyraz ostatni i sumę wyrazów tego postępu.
10. Mam tyle orzechów, że z nich mogę ułożyć trójkąt równoboczny pełny. Dostałem następnie jeszcze tyle orzechów,

ile już miałem, i z tych wszystkich orzechów ułożyłem kwadrat pełny, którego bok zawierał tyle orzechów, ile ich zawierał bok trójkąta. Po takiem ułożeniu wszystkich orzechów, okazało się, że pozostało mi jeszcze 20 orzechów. Ileż miałem orzechów z początku?

11. Pewna osoba rozpoczyna grę na takich warunkach, że w razie wygrania partji odbiera z banku 14 razy wziętą stawkę. Na pierwszą partję stawia 1 zł., który przegrywa, na drugą 2 zł., które także przegrywa, na trzecią 3 zł., które również przegrywa, i t. d., na każdą następną partję powiększa stawkę o jeden złoty. Po pewnej liczbie partyj wygrywa wkońcu, i to tyle, że to, co wygrała, wynosiło ściśle taką sumę, jaką we wszystkich partjach do banku wniosła. Ileż partyj grała?

VI.

Postęp ilorazowy czyli geometryczny.

39. Szereg liczb, z których każda równa się poprzedniej, pomnożonej przez pewien czynnik stały, nazywa się postępem ilorazowym, czyli geometrycznym. Ten czynnik stały nazywa się *wykładnikiem* postępu.

Podług tego określenia następujące szeregi liczb są postępami geometrycznemi:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4\ .\ .\ .\ .\ .$$

Wykładnik w postępie można znaleźć przez podzielenie któregokolwiek wyrazu przez bezpośrednio poprzedzający go. W pierwszym przykładzie wykładnikiem jest 3, w drugim $\frac{1}{2}$, w trzecim r.

Niech a oznacza wyraz pierwszy postępu geometrycznego, a r wykładnik; wtedy drugim wyrazem będzie ar, trzecim ar^2, czwartym ar^3 i tak dalej; n-tym wyrazem będzie ar^{n-1}.

40. *Znaleźć sumę danej liczby wyrazów postępu ilorazowego, gdy są wiadome wyraz pierwszy i wykładnik postępu.*

Niech a oznacza wyraz pierwszy, r wykładnik, n liczbę wyrazów, a s sumę wyrazów. Wtedy:

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1};$$

mnożąc każdy wyraz tej równości przez r, otrzymamy:

$$sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Przez odjęcie pierwszej równości od drugiej otrzymamy:

$$sr - s = ar^n - a,$$

skąd:

$$s = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \ldots\ldots (1).$$

Jeżeli l oznacza wyraz ostatni, wtedy mieć będziemy:

$$l = ar^{n-1} \ldots\ldots (2)$$

i

$$s = \frac{rl - a}{r - 1} \ldots\ldots (3).$$

Równanie (1) daje wartość na s, wyrażoną zapomocą tych wielkości, które podług wysłowienia zadania są wiadome. Równanie (3) daje tęż samą wartość, wyrażoną w dogodniejszej postaci do rachunku w niektórych przypadkach.

Zastosujemy teraz te równania do rozwiązania niektórych zadań, odnoszących się do postępów ilorazowych.

41. Znaleźć sumę 6 wyrazów szeregu: 1, 3, 9, 27 . . . .

Tutaj $a = 1$, $r = 3$, $n = 6$, przeto:

$$s = \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{3 - 1} = 364.$$

Znaleźć sumę 6 wyrazów szeregu 1, — 3, 9, — 27...

Tutaj: $a = 1$, $r = -3$, $n = 6$; przeto:

$$s = \frac{(-3)^6 - 1}{-3 - 1} = \frac{729 - 1}{-4} = -182.$$

Znaleźć sumę 8 wyrazów szeregu 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$....

Tutaj: $a = 4$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 8$, przeto:

$$s = \frac{4\left(\frac{1}{2^8} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{2^8}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{255}{64} \times \frac{2}{1} = \frac{255}{32}.$$

Znaleźć sumę 7 wyrazów szeregu: 8, — 4, 2, — 1, $\frac{1}{2}$ . . . .
Tutaj $a = 8$, $r = -\frac{1}{2}$, $n = 7$, przeto:

$$s = \frac{8\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right]}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{8\left(-\frac{1}{128} - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{129}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{43}{8}.$$

42. Wstawić trzy liczby średnie geometryczne pomiędzy 2 i 32.

Tutaj należy znaleźć postęp ilorazowy, zawierający pięć wyrazów, zaczynający się od 2, a kończący się na 32. W zadaniu tem więc: $a = 2$, $l = 32$, $n = 5$; na zasadzie równania (2) § 40:

$$32 = 2r^4,$$

czyli

$$r^4 = 16 = 2^4,$$

skąd:

$$r = 2.$$

Żądany szereg jest więc: 2, 4, 8, 16, 32.

43. Wartość na s, znalezioną w § 40, możemy napisać tak:

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r},$$

albo:

$$s = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}. \tag{4}$$

Przypuśćmy, że r, co do wartości bezwzględnej, jest mniejsze od jedności

$$|r| < 1;$$

wtedy, biorąc n dostatecznie wielkie, możemy uczynić wartość bezwzględną drugiego ułamka z prawej strony tak małą, jak tylko zechcemy.

Istotnie, przypuśćmy, że ma być spełniona nierówność:

$$\left|\frac{ar^n}{1-r}\right| < h, \tag{5}$$

gdzie h jest jakkolwiek małą liczbą dodatnią. Oznaczmy

$$\left|\frac{1}{r}\right| = q;$$

wartość bezwzględna mianownika w nierówności (5) $|1-r|$ jest albo $1-\frac{1}{q}$, albo $1+\frac{1}{q}$; wystarczy uwzględnić mniejszą z tych dwóch wielkości, to jest $1-\frac{1}{q}$.

Mamy więc uczynić:

$$\frac{|a| \cdot \frac{1}{q^n}}{1-\frac{1}{q}} < h,$$

czyli:

$$\frac{|a|}{q^{n-1}(q-1)} < h; \quad q^{n-1} > \frac{|a|}{h(q-1)}.$$

Łatwo sprawdzić tożsamość (por. cz. I § 110 przyp.):

$$q^{n-1} = 1 + (q-1)(1 + q + q^2 + \ldots q^{n-2}),$$

a ponieważ w drugim nawiasie mamy tu $n-1$ wyrazów, z których pierwszy jest jednością, każdy z pozostałych większy od jedności, więc jest na pewno:

$$q^{n-1} > 1 + (q-1)(n-1).$$

Nierówność żądana będzie więc spełniona, jeżeli uczynimy:

$$1 + (q-1)(n-1) > \frac{|a|}{h(q-1)}.$$

Tę ostatnią nierówność rozwiążemy względem n:

$$n > \frac{|a| - h(q-1)}{h(q-1)^2} + 1; \tag{6}$$

tym sposobem sprawdziliśmy, że *w postępie geometrycznym, w którym wartość bezwzględna wykładnika jest mniejsza od* *jedności, można wziąć zawsze dostateczną liczbę wyrazów tak, że suma ich różnić się będzie tak mało, jak tylko chcemy od*

$$\frac{a}{1-r}.$$

Tę wielkość $\frac{a}{1-r}$ nazywamy krótko *sumą nieskończenie wielu wyrazów postępu geometrycznego*, albo też *sumą wyrazów nieskończonego postępu geometrycznego.*

44. Wzór (6) potrzebny nam był do dowodzenia, ale zwykle można osiągnąć żądaną dokładność, obliczając sumę znacznie mniejszej liczby wyrazów, aniżeliby wynikała z tego wzoru.

Tak np. w szeregu

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots$$

$$a = 1,\ r = \tfrac{1}{2},\ q = 2,\ \frac{a}{1-r} = 2.$$

Podług wzoru (4):

$$s = 2 - \frac{1 \cdot \frac{1}{2}^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ażeby otrzymać sumę wyrazów, różniącą się od 2 mniej, niż o $\frac{1}{100}$, wystarczy uczynić

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \tfrac{1}{100},$$

$$2^{n-1} > 100,$$

a ponieważ $2^7 = 128$, przeto powinno być

$$n - 1 \geqq 7$$

$$n \geqq 8;$$

wystarczy więc wziąć 8 wyrazów, jakkolwiek z wzoru (6) wynikałoby

$$n > 100.$$

45. Ułamki okresowe dają nam przykład tego, co nazywamy postępem geometrycznym nieskończonym.

Tak np. 0,3242424... oznacza toż samo, co

$$\frac{3}{10}+\frac{24}{10^3}+\frac{24}{10^5}+\frac{24}{10^7}+\ldots$$

Pominąwszy wyraz pierwszy, pozostałe tworzą postęp geometryczny, którego pierwszy wyraz jest $\frac{24}{10^3}$, a wykładnik $\frac{1}{10^2}$. Możemy więc powiedzieć, że suma nieskończonej liczby wyrazów tego postępu jest

$$\frac{24}{10^3}:\left(1-\frac{1}{10^2}\right)=\frac{24}{990},$$

przeto wartość danego ułamka okresowego jest $\frac{3}{10}+\frac{24}{990}$.

W praktyce możemy najprościej znaleźć wartość ułamka okresowego w ten sposób: oznaczmy szukaną wartość przez s

$$s=0{,}32424\ldots,$$

przesuńmy przecinek tak, żeby się znalazł tuż przed pierwszym okresem:

$$10s=3{,}2424\ldots,$$

a następnie przesuńmy przecinek między pierwszy okres i drugi:

$$1000s=324{,}2424\ldots;$$

stąd przez odjęcie drugiej równości od trzeciej znajdujemy:

$$(1000-10)s=324-3=321$$

i następnie:

$$s=\frac{321}{990}=\frac{107}{330}.$$

46. Wzór (1) § 40

$$s=\frac{a\,(r^n-1)}{r-1}$$

wyraża zależność między czterema wielkościami s, a, r, n. Jest to równanie linjowe względem s i a, n-tego stopnia względem r, a względem n wogóle nie zalicza się do równań algebraicznych; to też metodami, jakie dotychczas poznaliśmy, nie można w ogólności rozwiązać tego równania względem r lub n; w prostych przypadkach możemy to zrobić przez próbowanie.

Np. niech będzie pierwszy wyraz postępu geometrycznego 1, wykładnik 5, suma wyrazów 3906, mamy znaleźć liczbę wyrazów. Znajdujemy w tym celu kilka pierwszych wyrazów postępu

$$1,\ 5,\ 25,\ 125,\ 625,\ 3125,$$

a obliczywszy sumę, przekonywamy się, że szukana liczba wyrazów jest 6.

ZADANIA DO ROZDZIAŁU VI.

Znaleźć sumę wyrazów następujących postępów:

1. $1,\ 4,\ 16 \ldots.$ 6 wyrazów.
2. $1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2}, \ldots.$ 12 wyrazów.
3. $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9}, \ldots.$ do nieskończoności.
4. $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}, \ldots.$ do nieskończoności.
5. $6,\ -2,\ \frac{2}{3}, \ldots.$ do nieskończoności.

Znaleźć wartości następujących ułamków okresowych:

6. 0,151515 . . . 7. 0,123123123 . . . .
8. 0,28131313 . . . 9. 0,4282828 . . .
10. Wstawić trzy średnie geometryczne między 1 i 256.
11. Wstawić 4 średnie geometryczne między $5\frac{1}{3}$ i $40\frac{1}{2}$.
12. Wstawić 4 średnie geometryczne między 3 i — 729.

13. Suma pierwszych czterech wyrazów postępu geometrycznego jest 40, a suma ośmiu pierwszych wyrazów tego postępu jest 3280; napisać ten postęp.

14. Suma trzech następujących po sobie wyrazów postępu geometrycznego jest 21; suma kwadratów tych wyrazów jest 189; znaleźć te wyrazy.

15. W postępie geometrycznym wyraz pierwszy $a = \frac{1}{8}$, wyraz ostatni $l = 1024$, liczba wyrazów $n = 14$; znaleźć sumę wyrazów s i wykładnik r.

16. Znaleźć sumę $x^9 + x^8y + x^7y^2 + \ldots + xy^8 + y^9$.

17. Znaleźć sumę n wyrazów postępu:

$$(a^2 - b^2) + (a + b) + \frac{a+b}{a-b} + \ldots$$

18. Znaleźć sumę n wyrazów postępu:

$$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}+\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3+\ldots.$$

19. Mając wiadomy stosunek t średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej dwóch liczb, znaleźć stosunek tych dwóch liczb.

20. Opowiadają, że grę w szachy wynalazł Sessa Ebn Daher dla zabawy pewnego króla w Indjach nazwiskiem Shehram. Ten ostatni, chcąc wynagrodzić odpowiednio wynalazcę za grę, która mu się bardzo podobała, pozostawił jemu samemu wybór nagrody. Wynalazca za całą nagrodę prosił tyle pszenicy, ile wypadnie, jeżelibyśmy położyli na pierwszem polu szachownicy 1 ziarno, na drugiem 2 ziarna, na trzeciem 4 ziarna i t. d. aż do ostatniego 64-go pola, zawsze na każde następne pole kładąc dwa razy więcej, niż na poprzednie. Królowi wydała się to zbyt mała nagroda; jednak okazało się po obliczeniu, że taka nagroda o wiele przechodziła możność króla. Jakaż była ilość żądanej pszenicy? a) ile ziarn? b) ile hektolitrów ($1\ \mathrm{hl} = 1{,}6 \cdot 10^6$ ziarn)? c) przez ile lat majątek 1000 hektarów mógłby wyprodukować tę pszenicę (licząc 40 hl z 1 ha)?

21. Ktoś zakomunikował trzem zaufanym przyjaciołom ważną tajemnicę pod warunkiem, ażeby jej nikomu nie wyjawiali; każdy z nich święcie dochował tajemnicy i dopiero po upływie godziny zakomunikował ją trzem innym zaufanym przyjaciołom pod tym samym warunkiem i z tym samym skutkiem. Po upływie jakiego czasu całe miasto poznało tajemnicę, jeżeli do każdego mieszkańca wiadomość doszła tylko raz jeden, a liczba mieszkańców tego miasta wynosi około 1 miljona?

VII.

Liczby niewymierne.

47. Z liczb, które nie są wymierne, poznaliśmy dotychczas *liczby pierwiastkowe* (cz. II, rozdz. III—V) i stwierdziliśmy, że każda z nich określa jakiś, sobie tylko właściwy, przekrój liczb wymiernych (cz. II § 46). Jednak nie należy stąd wnosić, ażeby każdy przekrój liczb wymiernych mógł być określony przez skończoną liczbę pierwiastków z liczb wymiernych; przeciwnie, udowodniono, że tak nie jest; ale dowód jest bardzo skomplikowany i znacznie wykracza poza zakres algebry elementarnej. Do naszych celów wystarczy zresztą stwierdzenie możliwości innego wyznaczenia przekroju, aniżeli zapomocą liczb pierwiastkowych, i zbyteczne będzie rozstrzyganie, czy ten sam przekrój może, czy nie może być również wyznaczony przez liczby pierwiastkowe; otóż w tym rozdziale poznamy odmiennie określone przekroje i zrobimy założenie, że *z każdym przekrojem jest związana jedna i tylko jedna liczba niewymierna, przez ten przekrój określona.*

48. Założenie takie — milcząco lub wyraźnie — jeszcze z innych względów robimy z chwilą, kiedy zakładamy możność podporządkowania każdemu punktowi prostej jakiejś liczby, jako odciętej; bowiem linja prosta ma własność, którą nazywamy *ciągłością*, a której to własności nie ma zbiór wszystkich liczb wymiernych. Tę własność możemy w ten sposób scharakteryzować.

Jeżeli na dowolnym odcinku lub na prostej AB istnieją dwie klasy punktów takie, że żaden punkt pierwszej klasy nie następuje po żadnym punkcie drugiej klasy w zwrocie AB, i dla każdego danego odcinka dowolnie małej długości h istnieją dwa punkty, jeden w pierwszej, drugi w drugiej klasie, których odległość jest mniejsza od h, — wtedy istnieje punkt odcinka AB, który nie poprzedza żadnego punktu pierwszej klasy i nie następuje po żadnym punkcie drugiej klasy[1]).

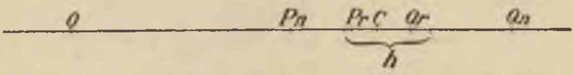
W geometrji przypisujemy linji prostej tę własność bądź milcząco, jako rozumiejącą się samo przez się, bądź wypowiadając ją wyraźnie, jako „pewnik ciągłości". Przy mierzeniu odcinków można jej nie uwzględniać, i nie wywiera to wpływu na

---

[1]) Jest to, w zmienionej nieco postaci, pewnik *Cantora*, który w połączeniu z pewnikiem *Archimedesa* jest równoważny pewnikowi *Dedekinda*. Patrz np. *Enriques* „Zagadnienia, dotyczące geometrji elementarnej". Tom I, art. V.

rezultaty; ale musi być uwzględniona przy teorji mierzenia łuków albo okręgu koła.

49. Wyobraźmy sobie, że jeżeli wielokąt foremny o liczbie boków n, wpisany w dane koło, ma obwód długości p_n, to na osi odciętych został wyznaczony punkt P_n, którego odcięta jest p_n (rys. 22); podobnie Q_m niech będzie punktem, którego



Rys. 22.

odcięta równa się obwodowi q_m wielokąta foremnego o liczbie boków m, opisanego na tem samem kole. Każdy punkt P_n poprzedza, w zwrocie dodatnim osi odciętych, każdy punkt Q_m, gdyż obwód każdego wielokąta (wypukłego) wpisanego w koło jest mniejszy od obwodu każdego wielokąta opisanego; i jeżeli h jest odcinkiem danym, dowolnie małym, wtedy dowodzi się w geometrji, że dla każdego koła można znaleźć taką liczbę r, że $q_r - p_r < h$; istnieją więc dwa takie punkty P_r, Q_r, że odległość $P_r\,Q_r$ jest mniejsza od h. Zaliczając każdy punkt P_n do pierwszej, każdy punkt Q_m do drugiej klasy, widzimy, że żaden punkt pierwszej klasy nie następuje po żadnym punkcie drugiej klasy; a wobec tego, że do pierwszej należy P_r, do drugiej Q_r takie, że $P_r\,Q_r$ jest mniejsze od dowolnego odcinka h, przeto te dwie klasy punktów spełniają warunki, wypowiedziane w „pewniku ciągłości“, a stąd wynika istnienie takiego punktu C na osi odciętych, który nie poprzedza żadnego z punktów P_n, ani też nie następuje po żadnym z punktów Q_m.

50. Ze sposobu, w jaki punkt C w poprzednim § został wyznaczony, nie możemy wnosić, ażeby istniała jakaś liczba wymierna, lub nawet pierwiastkowa, którąby była odciętą punktu C. Ażeby taka liczba na pewno istniała, musimy utworzyć *ciągły zbiór liczb*, tak samo, jak ciągły jest zbiór wszystkich punktów linji prostej. Dołączymy więc do liczb wymiernych *„liczby niewymierne“* w ten sposób, ażeby tak otrzymany zbiór liczb miał własność następującą:

Jeżeli istnieją dwie klasy liczb, klasa liczb x i klasa liczb y, takich, że

$$x \leqq y$$

i że do pierwszej należy liczba x', do drugiej y', spełniające warunek

$$y' - x' < h,$$

gdzie h jest dowolnie obraną, jakkolwiek małą liczbą, bezwzględną, wtedy istnieje liczba z, spełniająca warunek

$$x \leqq z \leqq y.$$

Mówiąc: „istnieje liczba z", nie stwierdzamy zresztą nic więcej, jak tylko istnienie dwóch klas liczb, spełniających omawiane warunki; nazwa „liczba niewymierna" jest, w tem zrozumieniu, jedynie udogodnionym sposobem mówienia.

Przekrój liczb wymiernych, o jakim była mowa w cz. II. § 46, daje nam przykład takich dwóch klas liczb; jednak tutaj mamy do czynienia z przypadkiem ogólniejszym. Tam zaliczaliśmy do każdej z dwóch klas tylko liczby wymierne, tutaj mogą to być i niewymierne, ale takie, które już przedtem zostały określone; tam każda liczba wymierna była zaliczona do jednej lub drugiej klasy — tutaj tego nie zakładamy.

Jednakże każda liczba niewymierna określa jakiś przekrój, gdyż możemy do pierwszej klasy dołączyć wszystkie liczby wymierne, niewiększe od liczb klasy drugiej, zaś do drugiej — wszystkie liczby wymierne nie mniejsze od liczb klasy pierwszej.

Przez dołączenie do liczb wymiernych, określonych w powyższy sposób, liczb niewymiernych dostajemy t. zw. zbiór *liczb rzeczywistych.*

51. Zależności: „równe, większe, mniejsze" określimy dla liczb rzeczywistych w ten sposób, ażeby te określenia w zastosowaniu do liczb wymiernych zgadzały się ze zwykłemi, znanemi nam dotychczas, a w zastosowaniu do niewymiernych — żeby podlegały tym samym prawom, co i w zastosowaniu do liczb wymiernych. Są to prawa następujące:

1. Każda liczba równa się samej sobie $a = a$.
2. Jeżeli $a = b$, to $b = a$.

3. Jeżeli $a = b$, $b = c$, to $a = c$.
4. Jeżeli $a > b$, to $b < a$.
5. Jeżeli $a > b$, $b = c$, to $a > c$.
6. Jeżeli $a < b$, $b = c$, to $a < c$.
7. Jeżeli $a > b$, $b > c$, $a > c$.
8. Jeżeli a nie jest $= b$, to albo $a > b$, albo $a < b$.

Te warunki będą spełnione, jeżeli zrobimy umowę następującą.

Powiemy o każdej liczbie niewymiernej s, że jest większa od każdej liczby wymiernej a, należącej do pierwszej, i mniejsza od każdej liczby wymiernej a', należącej do drugiej klasy przekroju, wyznaczonego przez s:

$$a < s < a'.$$

Jeżeli s i t są jakiemikolwiek liczbami rzeczywistemi, i jeżeli istnieje liczba wymierna p, większa od s i mniejsza od t, mówimy, że $t > s$.

Jeżeli s i t są takiemi liczbami rzeczywistemi, że każda liczba większa od s jest zarazem większa od t, a każda liczba mniejsza od s jest także mniejsza od t, wtedy mówimy, że liczby s i t są równe.

52. Określimy działania arytmetyczne nad liczbami rzeczywistemi w ten sposób, ażeby w tych określeniach były zawarte działania nad liczbami wymiernemi w zwykłem znaczeniu. Nazwiemy mianowicie sumą liczb rzeczywistych s, t taką liczbę u, która spełnia warunek, że jeżeli

$$a < s < a'$$
$$b < t < b',$$

to:

$$a + b < u < a' + b'.$$

Liczba u jest przez to w zupełności określona; ażeby to sprawdzić, wystarczy zauważyć, że jeżeli liczby s, t są wyznaczone przez przekroje liczb wymiernych, wtedy można zawsze wybrać cztery liczby wymierne a, a', b, b' tak, ażeby różnica $(a' + b') - (a + b)$ stała się dowolnie mała.

W rzeczy samej ażeby było

$$(a' + b') - (a + b) < h,$$

czyli

$$(a' - a) + (b' - b) < h,$$

wystarczy uczynić

$$a' - a < \frac{h}{2}$$

$$b' - b < \frac{h}{2},$$

co podług określenia liczb niewymiernych jest zawsze możliwe.

Tym sposobem dla każdej pary liczb rzeczywistych s, t istnieje jedna i tylko jedna liczba

$$u = s + t.$$

53. Iloczyn dwóch liczb rzeczywistych określamy w ten sposób, że znak nadajemy iloczynowi zgodnie z prawidłem znaków (cz. I § 16), a wartości bezwzględne mnożymy według następującej zasady:

Jeżeli każde cztery liczby bezwzględne a, a', b, b', spełniające warunki:

$$a < s < a'$$

$$b < t < b',$$

spełniają też warunki:

$$ab < u < a'b',$$

wtedy u nazywamy iloczynem liczb s i t. Ażeby sprawdzić, że liczba u jest przez to w zupełności wyznaczona, należy się przekonać o możności znalezienia takich liczb a, a', b, b', ażeby była spełniona nierówność

$$a'b' - ab < h$$

dla jakiegokolwiek dowolnie wybranego dodatniego h. W tym celu zauważmy tożsamość

$$a'b' - ab = (a' - a)\,b + (b' - b)\,a + (a' - a)\,(b' - b).$$

Jeżeli każdy z trzech składników z prawej strony będzie mniejszy od $\frac{h}{3}$, wtedy powyższa nierówność będzie spełniona, należy więc uczynić:

$$a' - a < \frac{h}{3b}; \quad b' - b < \frac{h}{3a}$$

$$(a' - a)(b' - b) < \frac{h}{3}.$$

Tym trzem nierównościom uczynimy zadość, obierając z pośród liczb a', b' takie a_1', b_1', ażeby było

$$a_1' > \frac{h}{3}; \; b_1' > 1$$

i czyniąc $a' - a < \frac{h}{3b_1'}; \; b' - b < \frac{h}{3a_1'}$, gdyż wtedy

$$a' - a < \frac{h}{3}; \; b' - b < 1,$$

a więc

$$(a' - a)(b' - b) < \frac{h}{3}.$$

A zatem liczba rzeczywista

$$u = st$$

jest przez to w zupełności wyznaczona.

54. Różnicę jakichkolwiek liczb rzeczywistych i iloraz liczb bezwzględnych rzeczywistych

$$u = s - t; \quad v = s : t$$

możemy określić, jako sumę i iloczyn

$$u = s + (-t); \quad v = s \cdot \frac{1}{t},$$

jeżeli tylko damy określenie liczb przeciwnych i odwrotnych zapomocą nierówności:

$$-b' < -t < -b$$

$$\frac{1}{b'} < \frac{1}{t} < \frac{1}{b} \quad (b > 0; \; b' > 0).$$

Możność wykonywania tych działań jest więc odrazu widoczna.

VIII.

Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmowa.

55. Jeżeli a jest jakąkolwiek liczbą wymierną dodatnią, p jakąkolwiek liczbą wymierną, dodatnią lub ujemną, wtedy

$$| a^p |$$

ma zawsze całkiem oznaczoną i tylko jedną wartość; jeżeli mianowicie

$$p = \frac{m}{n},$$

gdzie n, m są liczbami naturalnemi, wtedy

$$a^p = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(cz. II § 59)},$$

jeśli zaś

$$p = -\frac{m}{n},$$

wtedy

$$a^p = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad \text{(cz. II § 61)}.$$

Uogólnimy teraz pojęcie potęgi w ten sposób, że liczbie podnoszonej do potęgi będzie można nadawać dowolne wartości niewymierne dodatnie, a wykładnikowi — dowolne wartości niewymierne, dodatnie lub ujemne.

56. Dla potęg z wykładnikami całkowitemi, dodatniemi czy ujemnemi, pozostawiamy bez zmiany poprzednie określenia (cz. I § 35; cz. II § 61), przez co potęgowanie sprowadza się do mnożenia i wyznaczania odwrotności, które to działania znamy z poprzedniego rozdziału.

57. Udowodnimy, że jeżeli a jest jakąkolwiek liczbą rzeczywistą > 1, n liczbą naturalną, wtedy istnieje liczba z, której n-ta potęga równa się a.

W tym celu zauważmy, że jakkolwiek mała byłaby liczba bezwzględna l, w szeregu liczb

$$1,\ 1 + l,\ 1 + 2l,\ 1 + 3l \ldots \tag{1}$$

są na pewno takie, których n-ta potęga jest większa od a (§ 51).

Przypuśćmy, że y_1 jest pierwszą taką liczbą, i że liczbę tę w szeregu (1) poprzedza bezpośrednio liczba x_1; wtedy

$$x^n_1 \leqq y^n_1; \; y_1 - x_1 = l.$$

Jeżeli więc utworzymy dwie klasy liczb dodatnich wymiernych, zaliczając do pierwszej każdą liczbę x, której n-ta potęga jest niewiększa od a, do drugiej każdą liczbę y, której n-ta potęga jest niemniejsza od a, wtedy istnieją takie x, y, których różnica jest mniejsza od dowolnie małej liczby l; otrzymaliśmy więc przekrój liczb wymiernych, wyznaczający żądaną liczbę rzeczywistą z. Zgodnie z ogólnem określeniem pierwiastka, liczbę tę uważać będziemy za pierwiastek n-go stopnia z a (por. cz. II § 16) i napiszemy

$$z = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

58. Jeżeli liczba niewymierna dodatnia a jest mniejsza od jedności, wtedy $\frac{1}{a} > 1$, a więc $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ jest określony na zasadzie poprzedniego §; określimy więc w tym wypadku:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}.$$

59. Ponieważ potęgi całkowite liczb niewymiernych już zostały określone (§ 55), przeto możemy określić:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

dzięki czemu możemy podnosić *liczbę niewymierną* do jakiejkolwiek *potęgi z wykładnikiem wymiernym*.

60. Do określenia potęgi w innych przypadkach potrzebne nam będzie następujące twierdzenie pomocnicze:

Jeżeli k jest jakąkolwiek liczbą dodatnią, a n liczbą naturalną, wtedy jest prawdziwa nierówność:

$$(1 + k)^n > 1 + nk.$$

Tę nierówność łatwo sprawdzimy dla $n = 2$ i $n = 3$, gdyż

$$(1 + k)^2 = 1 + 2k + k^2$$
$$(1 + k)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3,$$

a więc:

$$(1+k)^2 > 1+2k$$
$$(1+k)^3 > 1+3k.$$

Jeżeli jednak twierdzenie jest prawdziwe dla całkowitego wykładnika p, wtedy musi być prawdziwe i dla wykładnika $p+1$, gdyż w założeniu

$$(1+k)^p > 1+pk;$$

pomnóżmy obie strony tej nierówności przez $1+k$:

$$(1+k)^{p+1} > 1+(p+1)\,k+pk^2;$$

opuszczając z prawej strony pk^2, zmniejszymy jej wartość, a więc tem bardziej:

$$(1+k)^{p+1} > 1+(p+1)\,k;$$

a ponieważ wiemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n=3$, więc sprawdza się dla każdego całkowitego dodatniego n.

61. Przekonamy się teraz, że jeżeli $a>1$, wtedy można znaleźć liczbę naturalną n dostatecznie wielką, ażeby różnica między $\sqrt[n]{a}$ i 1 była dowolnie mała.

Ponieważ założyliśmy, że $a>1$, przeto $\sqrt[n]{a}>1$ dla każdego $n>1$, gdyż przypuszczenie, że $\sqrt[n]{a} \leq 1$ prowadziłoby do zależności: $a \leq 1$, co jest sprzeczne z założeniem.

Przypuśćmy, że chcemy uczynić

$$\sqrt[n]{a}-1<l,$$

gdzie l jest jakąkolwiek liczbą dodatnią; czyli

$$\sqrt[n]{a}<1+l,$$

a więc

$$a<(1+l)^n.$$

Ponieważ na zasadzie poprzedniego paragrafu

$$(1+l)^n>1+nl,$$

przeto żądana nierówność będzie spełniona, jeżeli uczynimy

$$a<1+nl,$$

czyli

$$n > \frac{a-1}{l}.$$

Ten rezultat można tak zanotować:

Jeżeli $a > 1$, *wtedy* $a^{\frac{1}{n}} - 1 < l$ dla każdego n, spełniającego warunek

$$\frac{1}{n} < \frac{l}{a-1}.$$

62. Zauważmy teraz, że jeżeli $a > 1$ podnosimy do różnych potęg ułamkowych, to dla większego wykładnika dostajemy większą potęgę. Ponieważ można założyć, że oba wykładniki zostały sprowadzone do wspólnego mianownika, więc wystarczy sprawdzić, że

$$a^{\frac{p}{q}} < a^{\frac{p+1}{q}};$$

to jest jednak odrazu widoczne, gdyż

$$a^{\frac{p+1}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{1}{q}}.$$

Drugi czynnik jest tu większy od 1, a więc iloczyn większy od pierwszego czynnika.

Stąd wniosek, że mniejszym wartościom ułamka $\frac{p}{q}$ odpowiadają mniejsze różnice

$$a^{\frac{p}{q}} - 1;$$

a ponieważ sprawdziliśmy, że

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < l,$$

jeżeli

$$\frac{1}{n} < \frac{l}{a-1},$$

to będzie też

$$a^{\frac{p}{q}} - 1 < l,$$

jeżeli tylko

$$\frac{p}{q} < \frac{l}{a-1}.$$

63. Niech teraz s, t oznaczają dwie liczby wymierne, przyczem $0 < s < t$. Zakładając, jak poprzednio, $a > 1$, możemy uczynić różnicę

$$a^t - a^s$$

dowolnie małą, czyniąc różnicę między wykładnikami dostatecznie małą. Gdyż, jeżeli chcemy uczynić

$$a^t - a^s < l,$$

czyli

$$a^s (a^{t-s} - 1) < l,$$

$$a^{t-s} - 1 < \frac{l}{a^s},$$

to na zasadzie poprzedniego § należy tylko uczynić

$$t - s < \frac{l}{a^s(a-1)}.$$

Chcąc z prawej strony wyrugować zmienną liczbę s, możemy ją zastąpić stałą liczbą dodatnią r niemniejszą od żadnej z liczb s, tak, że

$$a^r > a^s$$

i uczynić:

$$t - s < \frac{l}{a^r(a-1)}.$$

64. Możemy teraz określić podnoszenie liczby niewymiernej $a > 1$ do potęgi o wykładniku niewymiernym v.

Weźmy pod uwagę dwie klasy liczb, zaliczając do pierwszej klasy a^s, jeżeli s jest liczbą wymierną mniejszą od v, i zaliczając a^t do drugiej klasy, jeżeli t jest liczbą wymierną większą od v. Każda liczba pierwszej klasy jest w ten sposób mniejsza (§ 62) od każdej liczby drugiej klasy; i na zasadzie poprzedniego § możemy obrać liczby s i t takie, ażeby różnica

$$a^t - a^s$$

była mniejsza od dowolnie obranej liczby l; w tym celu należy uczynić

$$t - s < \frac{l}{a^r(a-1)},$$

gdzie r jest jakąkolwiek liczbą, dowolnie obraną, większą od v. Na zasadzie przeto pewnika ciągłości (§ 50) istnieje jedna i tylko jedna taka liczba z, która nie jest mniejsza od żadnej liczby drugiej klasy; tę liczbę z przyjmujemy za a podniesione do potęgi v i piszemy

$$z = a^v.$$

Jeżeli zaś

$$0 < a < 1,$$

wtedy określamy:

$$a^v = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^v} \text{ (por. § 58).}$$

65. *Nazywamy funkcją wykładniczą zmiennej x potęgę wielkości stałej, której wykładnikiem jest zmienna niezależna x.* Tę wielkość stałą nazywamy *zasadą* funkcji wykładniczej. Jeżeli więc zmienną wartość funkcji wykładniczej oznaczymy przez y, wtedy zależność między x i y wyraża się równaniem:

$$y = a^x,$$

gdzie a jest wielkością stałą. Wartość funkcji wykładniczej przyjmujemy zawsze tylko dodatnią, nie wyłączając tych przypadków, kiedy wartości x są ułamkami o mianownikach parzystych.

Ponieważ potęgi liczb ujemnych w ogólności nie określiliśmy, więc zakładać będziemy zawsze $a > 0$. W tem założeniu dla każdego x wymiernego lub niewymiernego dostajemy y całkiem oznaczone.

Gdybyśmy założyli $a = 1$, byłoby

$$y = 1^x = 1;$$

w tym przypadku y jest wielkością stałą, niezależną od x. Pozostają więc do rozpatrzenia dwa przypadki:

$$0 < a < 1; \quad a > 1.$$

66. Zbadajmy funkcję wykładniczą
$$y = a^x$$
w założeniu:
$$a > 1.$$

Widzieliśmy (§ 62), że w tem założeniu większym wykładnikom wymiernym odpowiadają większe wartości potęg; z określenia potęgi dla wykładnika niewymiernego (§ 64) wynika jednak, że jeżeli
$$s < v < t,$$
gdzie v jest niewymierne, s, t wymierne, to
$$a^s < a^v < a^t.$$

Tym sposobem widzimy, że wogóle większym wykładnikom, nietylko wymiernym, odpowiadają większe wartości potęg; a więc *funkcja* $y = a^x$ *jest rosnąca.*

Funkcję nazwaliśmy ciągłą (§ 13), jeżeli w jej wartości możemy osiągać zmiany dowolnie małe przez poddawanie zmiennej niezależnej zmianom dostatecznie małym; z § 63 widać, że *funkcja rozpatrywana jest bez wyjątku ciągła.*

Funkcja $y = a^x$ *rośnie wraz z* x *do nieskończoności*, to znaczy, można a^x uczynić dowolnie wielkiem, czyniąc x dostatecznie wielkiem.

Rzeczywiście, przypuśćmy, że chcemy, ażeby było
$$a^x > N,$$
gdzie N jest jakkolwiek wybraną, dowolnie wielką liczbą.

Ponieważ
$$a^x = [1 + (a - 1)]^x > 1 + (a - 1)\,x \quad (\S\ 60),$$
przeto nierówność żądana będzie spełniona, jeżeli uczynimy
$$1 + (a - 1)\,x > N,$$
czyli:
$$x > \frac{N - 1}{a - 1}.$$

67. *Wartość funkcji* $y = a^x$ *możemy zrobić dowolnie małą, czyniąc* x *ujemnem i dostatecznie wielkiem co do wartości bezwzględnej.*

Rzeczywiście, jeżeli chcemy uczynić
$$a^x < l,$$

gdzie l jest dowolnie obraną, jakkolwiek małą liczbą dodatnią, to załóżmy

$$x = -x';$$

mamy więc uczynić

$$\frac{1}{a^{x'}} < l,$$

czyli

$$a^{x'} > \frac{1}{l};$$

przekonaliśmy się poprzednio, że ta nierówność będzie spełniona, jeżeli uczynimy

$$x' > \frac{\frac{1}{l} - 1}{a - 1} = \frac{1 - l}{l(a-1)},$$

czyli

$$x < -\frac{1-l}{l(a-1)}.$$

Tablica zmienności rozpatrywanej funkcji jest więc:

$$y = a^x; \quad a > 1.$$

x	$-\infty$ ujemne rosnące 0 dodatnie rosnące $+\infty$
y	0 dodatnie rosnące 1 dodatnie rosnące $+\infty$

68. Rozpatrzymy teraz funkcję wykładniczą

$$y = a^x$$

w przypadku

$$0 < a < 1.$$

Oznaczmy przez b odwrotność liczby a,

$$b = \frac{1}{a},$$

więc

$$y = \frac{1}{b^x}.$$

Funkcję b^x $(b > 1)$ znamy z poprzedniego przypadku i możemy stwierdzić:

jeżeli x rośnie, to b^x rośnie, a^x maleje

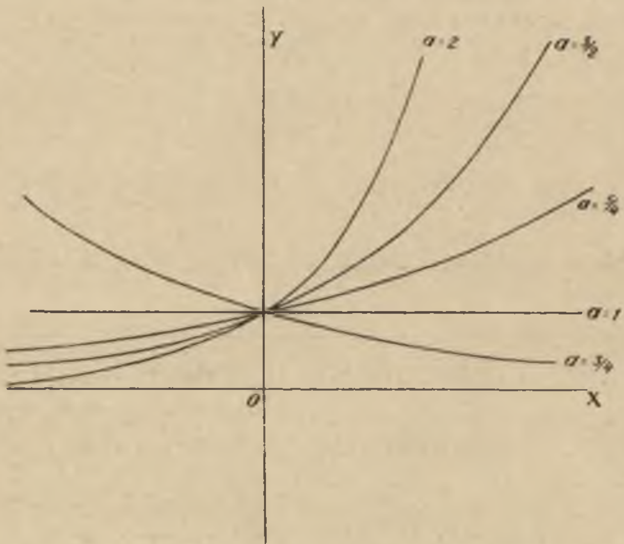
$x \to +\infty$, $b^x \to +\infty$, $a^x \to 0$

$x \to -\infty$, $b^x \to 0$, $a^x \to +\infty$

Dostajemy więc taką tablicę:

$$y = a^x;\ 0 < a < 1.$$

x	$-\infty$ ujemne rosnące 0 dodatnie rosnące $+\infty$
y	$+\infty$ dodatnie malejące 1 dodatnie malejące 0



Rys. 23.

69. Rys. 23 przedstawia wykres funkcji $y = a^x$, w przypadkach: $a = \frac{3}{4}$; $a = 1$; $a = \frac{5}{4}$; $a = \frac{3}{2}$; $a = 2$. Te wykresy zostały otrzymane przez obliczenie spółrzędnych kilku punktów każdej krzywej z uwzględnieniem tabliczek, ułożonych w dwu poprzednich paragrafach. Można zauważyć, że jeżeli a zmieniamy, zmniejszając do zera, to dostawać będziemy krzywe, zbliżające się coraz więcej do dodatniej części osi rzędnych i dodatniej osi odciętych; i jeżeli a wzrasta do nieskończoności, wtedy krzywa

zbliża się coraz więcej do ujemnej części osi odciętych i dodatniej osi rzędnych.

70. Przystąpmy teraz do *określenia logarytmu*, rozróżniając pięć przypadków i oznaczając przez a i b liczby rzeczywiste, które mogą być wymierne lub niewymierne.

1) $a > 1$; $b > 1$.

Tworzymy dwie klasy liczb, zaliczając do pierwszej każdą liczbę u, spełniającą warunek

$$a^u \leqq b,$$

zaś do drugiej każdą liczbę w, spełniającą warunek

$$a^w > b;$$

udowodnimy, że istnieje — wymierna lub niewymierna — liczba v, spełniająca warunek

$$a^v = b.$$

W tym celu trzeba dowieść, że można znaleźć u i w, które się od siebie różnią tak mało, jak tylko zechcemy; jeżeli to zostanie dowiedzione, wtedy na zasadzie pewnika ciągłości (§ 50) będziemy wiedzieli, że istnieje jedna i tylko jedna taka liczba rzeczywista v, która nie jest większa od żadnego u, ani też mniejsza od żadnego w; a ponieważ dla v — jak dla każdej liczby dodatniej — istnieje jedna i tylko jedna wartość funkcji wykładniczej a^v (§ 64), która nie może być ani mniejsza, ani większa od b, przeto musi być dokładnie

$$a^v = b.$$

Ażeby jednak dowieść istnienia liczby v, należy się przekonać, że jakkolwiek mała jest liczba dodatnia l, zawsze można znaleźć dwie liczby dodatnie u i w, spełniające warunki

$$w - u = l$$
$$a^u \leqq b < a^w.$$

Przypuśćmy w tym celu, że n jest liczbą naturalną, spełniającą warunek

$$n > \frac{1}{l},$$

i rozpatrujmy kolejno potęgi z wykładnikami naturalnemi liczby

$a^{\frac{1}{n}}$; ponieważ podług założenia a, a więc i $a^{\frac{1}{n}}$, jest większe od 1, przeto te potęgi tworzą postęp geometryczny rosnący, i jakkolwiek wielka byłaby liczba b, między wyrazami jego na pewno są większe od tej liczby (§ 66). Przypuśćmy, że pierwszym takim wyrazem jest $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{p+1}$, a więc

$$a^{\frac{p}{n}} \leqq b < a^{\frac{p+1}{n}},$$

wtedy żądane warunki będą spełnione, jeżeli uczynimy

$$u = \frac{p}{n}$$

$$w = \frac{p+1}{n}.$$

2) $a > 1$; $o < b < 1$.

Odwrotność b jest > 1, istnieje więc na zasadzie tego, co było tylko co dowiedzione, liczba, którą oznaczymy przez $-v$, a która spełnia warunek:

$$a^{-v} = \frac{1}{b},$$

albo, biorąc z obu stron odwrotności:

$$a^v = b.$$

3) $0 < a < 1$; $0 < b < 1$.

Odwrotności a i b są większe od 1, istnieje więc liczba v, spełniająca warunek:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^v = \frac{1}{b},$$

czyli

$$\frac{1}{a^v} = \frac{1}{b}$$

a biorąc odwrotności z obu stron:

$$a^v = b.$$

4) $0 < a < 1$; $b > 1$.

Odwrotność a jest > 1, istnieje przeto liczba, którą oznaczymy przez $-v$, a która spełnia warunek:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-v} = b,$$

czyli:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{v}} = b,$$

albo:

$$a^v = b.$$

5. $a \neq 1$; $b = 1$.

Podług określenia potęgi o wykładniku zero (cz. II § 62).

$$a^o = 1.$$

71. Tym sposobem dowiedliśmy następującego twierdzenia:

*Dla każdej pary liczb rzeczywistych dodatnich a, b, z wyjątkiem $a = 1$, istnieje jedna i tylko jedna liczba v, spełniająca wa*ı*unek*

$$a^v = b.$$

Ta liczba v nazywa się *logarytmem* liczby b przy zasadzie a. Logarytm możemy więc określić w ten sposób:

Logarytmem jakiejś liczby przy danej zasadzie nazywa się wykładnik potęgi, do jakiej trzeba podnieść zasadę, ażeby otrzymać tę liczbę. Zasadą może być każda liczba dodatnia różna od jedności, logarytm ma każda liczba dodatnia.

Logarytm liczby b przy zasadzie a oznacza się w ten sposób:

$$log_a\ b;$$

tym sposobem równanie

$$v = log_a\ b$$

wyraża tę samą zależność, co

$$a^v = b.$$

72. Zobaczymy, w jaki sposób zmienia się logarytm w zależności od liczby, uważanej za zmienną, jeżeli zasada pozostaje stała.

Funkcję y, określoną przez równanie

$$y = log_a x,$$

gdzie a jest wielkością stałą, x zmienną, nazywamy *funkcją logarytmową*.

Ze zmienności jej łatwo zdamy sobie sprawę, jeżeli zauważymy, że równanie to wyraża tę samą zależność, co

$$a^y = x,$$

i że każdemu x odpowiada jedna i tylko jedna wartość y. Z tablicy § 67 widzimy, że jeżeli $a > 1$, to x i y rosną jednocześnie, zaś z tablicy § 68, że jeżeli $a < 1$, to przy malejącem x, y rośnie, a więc przy rosnącem x, y maleje. Dostajemy więc taką tablicę zmienności funkcji logarytmowej:

$$y = log_a x;\ a > 0,\ a \neq 1.$$

x	0 dodatnie rosnące 1 dodatnie rosnące $+\infty$
$a > 1;\ y$	$-\infty$ ujemne rosnące 0 dodatnie rosnące $+\infty$
$a < 1;\ y$	$+\infty$ dodatnie malejące 0 ujemne malejące $-\infty$

73. Znajdziemy wykres funkcji logarytmowej, a więc krzywą, mającą równanie

$$y = log_a x,$$

czyli

$$a^y = x. \tag{1}$$

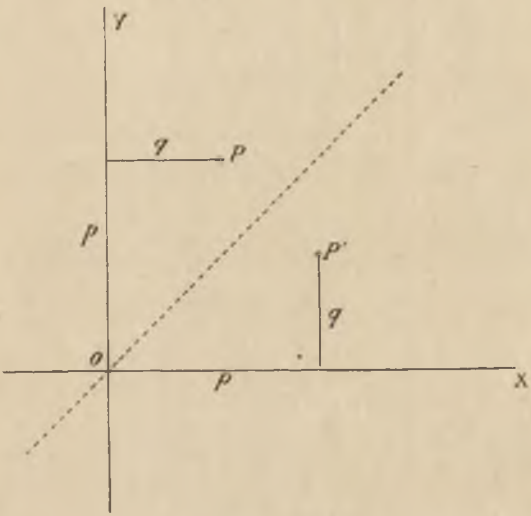
Przypuśćmy, że mamy już wykres funkcji wykładniczej dla tej samej zasady, a więc krzywej, której równanie jest:

$$a^x = y. \tag{2}$$

Jeżeli do krzywej wykładniczej należy punkt P, mający spółrzędne q, p, jeżeli więc

$$a^q = p,$$

wtedy do krzywej logarytmowej należy punkt P' o spółrzędnych p, q (rys. 24); krzywa wykładnicza zamieni się więc na logarytmiczną, jeżeli zmienimy położenie całej figury w ten sposób, ażeby część dodatnia pierwotnej osi rzędnych pokryła się z częścią dodatnią pierwotnej osi odciętych, i odwrotnie; a następnie przeniesiemy osi na dawne miejsce, pozostawiając

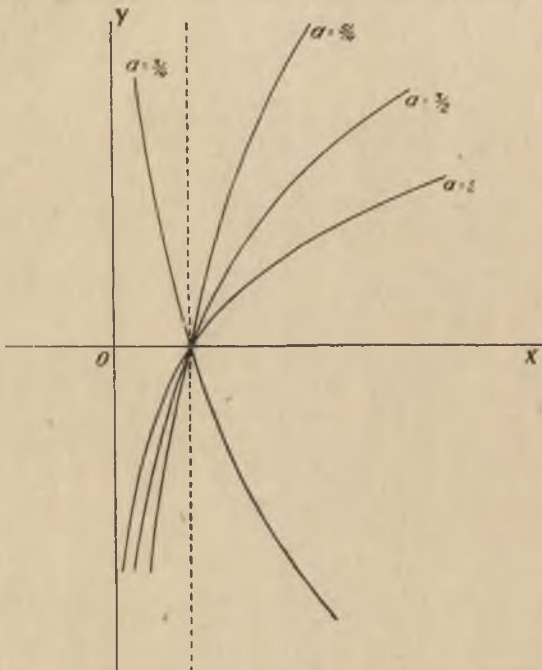


Rys. 24.

na nowem samą krzywą. Można to osiągnąć przez obrót wykresu dokoła osi symetrji obu półprostych, a więc dokoła dwusiecznej pierwszej i trzeciej ćwiartki płaszczyzny (por. § 14). Na rys. 25 widzimy wykresy funkcyj logarytmowych dla tych samych zasad, dla których poprzednio (rys. 23) znaleźliśmy krzywe wykładnicze.

Wszystkie te krzywe mają jeden punkt wspólny o spółrzędnych 1,0. Jeżeli zasada mało się różni od 0, wtedy wszystkie jej punkty leżą wpobliżu dodatniej części jednej lub drugiej osi, z wyjątkiem punktów o bardzo dużych odciętych. Przy zwiększaniu zasady krzywa coraz więcej się wyprostowuje i zbliża do prostej $x = 1$. Przy dalszem powiększaniu zasady punkty krzywej zbliżają się do ujemnej części osi rzędnych i dodatniej osi odciętych.

Możemy jeszcze zauważyć, że przez każdy punkt, leżący na prawo od osi rzędnych w odległości różnej od 1, przechodzi jedna i tylko jedna krzywa logarytmowa.



Rys. 25.

IX.

Tablice logarytmów.

74. *Logarytmem liczby N przy zasadzie a nazywamy wykładnik x tej potęgi, do której trzeba podnieść zasadę, aby otrzymać liczbę daną* (patrz § 71).

Podług tego określenia wartość logarytmu pewnej liczby zależy od zasady; zbiór logarytmów wszystkich liczb przy pewnej zasadzie nazywa się *układem logarytmów* przy tej zasadzie.

Dla oznaczenia logarytmu przyjmujemy takie znakowanie:

$$x = \log_a N,$$

co się czyta tak: x *równa się logarytmowi liczby N przy zasadzie a*. U spodu trzech liter początkowych wyrazu logarytm notujemy zasadę, jako wskaźnik; w przypadkach, w których niema żadnej wątpliwości, co jest zasadą, oznaczenie zasady jest zbyteczne i często się opuszcza.

75. Zależność między wielkościami x, a, N, wyrażona w równaniu

$$x = log_a N,$$

jest ta sama, którą można też tak wyrazić:

$$a^x = N.$$

Z równania tego odczytujemy następujące własności logarytmów (70):

1) Jeżeli $x = 0$, to $a^0 = 1$, a więc *logarytm jedności jest przy każdej zasadzie równy* 0.

2) Jeżeli $x = 1$, to $a^1 = a$, czyli: *logarytm zasady jest zawsze równy* 1.

3) *Przy zasadzie większej od* 1 *logarytmy liczb większych od* 1 *są dodatnie, logarytmy liczb mniejszych od 1 są ujemne.*

4) *Przy zasadzie większej od* 1 *logarytm rośnie do nieskończoności przez wartości dodatnie, jeżeli liczba rośnie do nieskończoności; wartość bezwzględna logarytmu rośnie do nieskończoności, jeżeli liczba maleje do zera.*

5) Przy zasadzie mniejszej od jedności logarytmy liczb większych od 1 są ujemne, logarytmy zaś liczb mniejszych od jedności są dodatnie.

6) Przy zasadzie mniejszej od 1, jeżeli liczba rośnie do nieskończoności przez wartości dodatnie, wartość bezwzględna logarytmu rośnie do nieskończoności; logarytm liczby malejącej do zera rośnie do nieskończoności przez wartości dodatnie.

W dalszym ciągu *zakładać będziemy stale, że zasada jest większa od* 1; używając więc oznaczeń, podanych w poprzednim paragrafie, możemy powyższe własności tak wyrazić:

1) $log_a 1 = 0.$

2) $log_a a = 1.$

3) $x \to +\infty;\ log_a x \to +\infty$

4) $x \to 0;\ log_a x \to -\infty$.

76. *Logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów czynników.*

W rzeczy samej: niech będzie danych ilekolwiek liczb: N, N_1, N_2 ....; oznaczmy dla krótkości głoską x logarytm liczby N przy pewnej zasadzie a, podobnie $x_1 = log_a N_1$, $x_2 = log_a N_2$...... Podług określenia logarytmu wartości x, x_1, x_2.... są oznaczone przez następujące równania:

$$a^x = N$$
$$a^{x_1} = N_1$$
$$a^{x_2} = N_2$$
$$\ldots\ldots$$

Pomnóżmy odpowiedniemi stronami te wszystkie równania:

$$a^x \,.\, a^{x_1} \,.\, a^{x_2} \ldots\ldots = N \,.\, N_1 \,.\, N_2 \ldots\ldots,$$

czyli
$$a^{x+x_1+x_2+} \ldots\ldots = N \,.\, N_1 \,.\, N_2 \ldots$$

Ta ostatnia równość wykazuje, że zasadę a trzeba podnieść do potęgi $x + x_1 + x_2 + \ldots$, aby otrzymać iloczyn $N . N_1 . N_2 \ldots$; z określenia więc logarytmu wypada, że:

$$Log_a (N \,.\, N_1 \,.\, N_2 \ldots) = x + x_1 + x_2 + \ldots, \text{ czyli}$$

$$Log_a (N \,.\, N_1 \,.\, N_2 \ldots) = Log_a N + Log_a N_1 + Log_a N_2 + \ldots, \quad (1)$$

a równość ta wyraża własność, której chcieliśmy dowieść.

77. *Logarytm ilorazu równa się różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika.*

Niech będą dane dwie liczby N i N_1, które należy podzielić w ten sposób, że N jest dzielną, a N_1 dzielnikiem. Dowiedziemy, że:

$$log_a \left(\frac{N}{N_1}\right) = log_a N - log_a N_1. \quad (2)$$

W tym celu oznaczmy dla krótkości głoską x logarytm liczby N przy zasadzie a, głoską zaś x_1 logarytm liczby N_1 przy tejże samej zasadzie. Wtedy x i x_1 czynią zadość równaniom:

$$a^x = N;\ a^{x_1} = N_1.$$

Podzielmy obie strony pierwszego z tych równań przez odpowiednie strony równania drugiego; otrzymamy:

$$a^{x-x_1} = \frac{N}{N_1}.$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że należy a (zasadę) podnieść do potęgi $x - x_1$, aby otrzymać iloraz $\frac{N}{N_1}$. Podług określenia więc logarytmu, $x - x_1$ jest logarytmem liczby $\frac{N}{N_1}$ przy zasadzie a, czyli:

$$og_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = x - x_1,$$

a że $x = log_a N$; $x_1 = log_a N_1$, przeto ostatecznie:

$$log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = Log_a N - Log_a N_1.$$

78. *Logarytm potęgi jest równy iloczynowi logarytmu liczby podnoszonej do potęgi przez wykładnik potęgi.*

To jest: jeżeli przez a oznaczymy zasadę logarytmów, wtedy

$$log_a(N^p) = p \,.\, log_a N. \quad (3)$$

W rzeczy samej: oznaczmy dla krótkości głoską x logarytm liczby N przy zasadzie a; wtedy x czyni zadość równaniu

$$a^x = N.$$

Podnieśmy obie strony tego równania do potęgi p:

$$(a^x)^p = N^p, \text{ czyli}$$
$$a^{px} = N^p.$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że jeżeli zasadę a podniesiemy do potęgi px, wtedy otrzymamy liczbę N^p. Więc px jes logarytmem liczby N^p przy zasadzie a, czyli:

$$log_a(N^p) = px, \text{ albo:}$$
$$log_a(N^p) = p\, log_a N.$$

79. *Logarytm pierwiastka równa się ilorazowi, otrzymanemu z podzielenia logarytmu liczby, z której wyciągamy pierwiastek, przez wykładnik pierwiastka.*

To jest:

$$\log_a\left(\sqrt[q]{N}\right) = \frac{\log_a N}{q} = \frac{1}{q} \cdot \log_a N.$$

W rzeczy samej: jeżeli przez x oznaczymy logarytm liczby N przy zasadzie a, wtedy toż x będzie określone równaniem:

$$a^x = N.$$

Wyciągnijmy pierwiastek potęgi q z obu stron tego równania; otrzymamy:

$$\sqrt[q]{a^x} = \sqrt[q]{N},$$

czyli:

$$a^{\frac{x}{q}} = \sqrt[q]{N}.$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że $\frac{x}{q}$ jest logarytmem liczby $\sqrt[q]{N}$ przy zasadzie a; to jest:

$$\log_a\left(\sqrt[q]{N}\right) = \frac{x}{q},$$

lub nakoniec:

$$\log_a\left(\sqrt[q]{N}\right) = \frac{1}{q} \log_a N \quad . \; . \; . \; (4).$$

80. Własności logarytmów, udowodnione w paragrafie poprzednim, mają ogromne znaczenie praktyczne, i dzięki nim logarytmy mogą być z pożytkiem stosowane przy większych rachunkach. Łatwo to zrozumiemy, jeżeli wyobrazimy sobie, że przy pewnej danej zasadzie mamy już obliczone logarytmy wszystkich liczb i ułożone w tablice w ten sposób, że jedna kolumna zawiera same liczby, druga zaś odpowiadające im logarytmy. Gdybyśmy chcieli znaleźć iloczyn ilukolwiek czynników, wtedy moglibyśmy iloczyn ten wynaleźć tak: odszukalibyśmy naprzód w tablicy logarytmy wszystkich czynników oddzielnie, następnie dodalibyśmy te logarytmy: na zasadzie własności § 76 suma tych logarytmów byłaby równa logarytmowi iloczynu. Odszukawszy następnie w tablicy liczbę, odpowiadającą temu ostatniemu logarytmowi, mielibyśmy żądany iloczyn. Tym sposobem mnożenie zostałoby sprowadzone do działania tego samego rodzaju, ale prostszego: mianowicie do dodawania. Podobnie, na zasadzie drugiej własności (§ 77), zamiast dzielić dwie liczby dla znalezienia ich ilorazu, moglibyśmy odszukać w tablicy logarytmów naprzód logarytm dzielnej, potem logarytm dzielnika, następnie odjąć od pierwszego logarytm drugi, i otrzymalibyśmy logarytm ilorazu. Liczba, wzięta z tablicy, odpowiadająca temu ostatniemu logarytmowi, byłaby szukanym ilorazem. W podobny sposób podnoszenie do potęgi moglibyśmy sprowadzić do mnożenia logarytmu przez wykładnik potęgi; wyciąganie zaś pierwiastka do dzielenia logarytmu liczby, z której chcemy wyciągnąć pierwiastek, przez wykładnik pierwiastka.

Uważając więc dodawanie, mnożenie i podnoszenie do potęgi za działania jednego rodzaju, odejmowanie zaś, dzielenie i wyciąganie pierwiastka za działania drugiego rodzaju, możemy powiedzieć, że zapomocą logarytmów działanie każdego rodzaju zostaje sprowadzone do działania tegoż samego rodzaju, ale prostszego.

Z tego widzimy, jak wielką wagę dla ułatwienia i skrócenia rachunków arytmetycznych mają tablice logarytmowe, zawierające logarytmy wszystkich liczb przy obranej zgóry zasadzie.

81. Logarytm każdej liczby, jak to wypada bezpośrednio z samego określenia, zależy od zasady. Otóż może się przytrafić potrzeba przejścia od jednego układu logarytmów do drugiego, to jest wypada rozwiązać zadanie: jakim sposobem, mając już obliczone logarytmy wszystkich liczb przy jednej zasadzie, znaleźć logarytmy tych liczb przy innej zasadzie.

Przypuśćmy, że już mamy obliczone logarytmy liczb przy zasadzie a; logarytm więc pewnej liczby N jest nam wiadomy. Chcemy zaś znaleźć logarytm tej samej liczby N przy innej zasadzie b; czyli mamy $log_a N$, szukamy zaś: $log_b N$. Uczyńmy dla krótkości $y = log_b N$; wtedy y należy oznaczyć z równania:

$$b^y = N.$$

Biorąc logarytmy obu stron tego równania *przy zasadzie a*, otrzymamy:

$$y \, log_a b = log_a N,$$

skąd:

$$y = \frac{1}{log_a b} log_a N,$$

albo:

$$log_b N = \frac{1}{log_a b} log_a N \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Widzimy z tej równości, że, aby otrzymać logarytm liczby N przy nowej zasadzie b, należy tylko logarytm tej liczby N przy zasadzie dawnej a pomnożyć przez czynnik stały dla całego nowego układu logarytmów i równy ułamkowi, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem logarytm zasady nowej (b), wzięty przy zasadzie dawnej (a). Ten ułamek $\frac{1}{log_a b}$, przez który należy pomnożyć logarytmy wszystkich liczb przy zasadzie a, aby otrzymać logarytmy tych liczb przy zasadzie b, nazywa się *modułem*.

Są dwa główne układy logarytmów, używane w rachunkach. Jeden, którego zasadę oznaczamy literą e, nazywa się *układem naturalnym*; drugi, którego zasada jest 10, nazywa się *układem zwyczajnym*. Pierwszy nazywają jeszcze układem logarytmów Nepera (od nazwiska pierwszego wynalazcy logarytmów, który wyłożył swoje pomysły w dziele ogłoszonem w roku 1614 pod tytułem: Mirifici Logarithmorum canonis descriptio); drugi zaś układem logarytmów Briggsa (od nazwiska profesora w Oxfordzie, który odpowiednie tablice logarytmów ogłosił pierwszy w r. 1624 pod tytułem: Arithmetica logarithmica).

Zasada logarytmów naturalnych, która, jak to powiedzieliśmy wyżej, oznacza się we wszystkich rachunkach przez e, jest liczbą niewymierną i wyraża się szeregiem nieskończonym:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Obliczając wartość przybliżoną tej liczby, znajdziemy, że $e = 2{,}718281828\ldots$ Jest to więc wielkość, której logarytm naturalny jest równy 1. Jakkolwiek zasada ta jest niewymierna, to logarytmy liczb łatwiej się przy niej oblicza, aniżeli przy innej zasadzie. Jakim sposobem to być może, i zapomocą jakiego rozważania dochodzi się do takiej zasady logarytmów, wykładać tu nie będę, przechodzi to bowiem zakres niniejszej książki. Wspomnę tylko, że w teoretycznych rachunkach prawie wyłącznie natrafiamy na logarytmy naturalne.

Podług przyjętego wyżej sposobu pisania logarytmów, należałoby logarytm naturalny jakiejkolwiek liczby N pisać tak: $log_e N$. Lecz w tym razie opuszczać będziemy wskaźnik e, a za skrótem *log* umieszczać będziemy skrót *nat*; a więc *log nat N* należy rozumieć tak: logarytm naturalny liczby N.

Drugim głównym układem logarytmów jest układ, w którym za zasadę przyjęto 10. Jego to wyłącznie używamy w rachunkach praktycznych, gdyż posiada pewne szczególne własności, które zaraz poznamy, a które pochodzą z tego, że w nim zasadą jest taż sama liczba, która służy za podstawę zwykłego sposobu liczenia, to jest 10. Tablice logarytmów, zwykle używane, zawierają właśnie takie logarytmy, i z tego powodu logarytmy zwyczajne nazywają się jeszcze *logarytmami tablicowemi*.

Przy oznaczaniu ich wypadałoby używać takiego sposobu znakowania: $log_{10} N$; lecz i tutaj wskaźnik 10 się opuszcza i pisze wprost: $log\, N$. W dwóch więc tych układach logarytmów, naturalnym i zwyczajnym, zasadę przy pisaniu opuszcza się; w innych przypadkach należy ją zawsze pisać.

Widzieliśmy na początku tego paragrafu, jakim sposobem przejść od jednego układu logarytmów do drugiego. Stosując równanie (5) do przejścia od logarytmów naturalnych do logarytmów zwyczajnych, mamy:

$$log\, N = \frac{1}{log\, nat\, 10}\, log\, nat\, N,$$

czyli logarytm zwyczajny jakiejkolwiek liczby równa się logarytmowi naturalnemu, pomnożonemu przez ułamek, którego licznikiem jest 1, a mianownikiem logarytm naturalny 10. Ponieważ znaleziono zapomocą rachunków, których tu przytaczać nie możemy, że

$$log\, nat\, 10 = 2{,}302\,585\,092\ldots, \text{ przeto } \frac{1}{log\, nat\, 10} = 0{,}434\,294\,481\ldots$$

Tę ostatnią liczbę oznacza się zwykle głoską M, i ją to specjalnie nazywamy *modułem logarytmów.* Jest więc:

$$\log N = M \log nat\, N \text{ , ... } (6)$$

gdzie $M = 0,434...$

To ostatnie równanie (6) daje nam możność znalezienia logarytmu zwyczajnego, skoro logarytm naturalny pewnej liczby jest już wiadomy.

Odwrotnie, gdybyśmy, znając logarytm zwyczajny, chcieli odnaleźć logarytm naturalny liczby, wtedy z równania (6) otrzymalibyśmy:

$$\log nat\, N = \frac{1}{M} \log N.$$

A ponieważ

$$M = \frac{1}{\log nat\, 10}, \text{ więc } \frac{1}{M} = \log nat\, 10 = 2,302\,..., \text{ skąd}$$

$$\log nat\, N = 2,302 \ldots \log N. \qquad (7)$$

82. Zbadajmy, w jakich warunkach liczba x, czyniąca zadość równaniu

$$A^x = B,$$

jest wymierna, jeżeli A i B są całkowite.

Przypuśćmy, że $x = \frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitemi. Podstawiając tę wartość w powyższem równaniu, dostaniemy

$$A^{\frac{p}{q}} = B,$$

skąd

$$A^p = B^q.$$

Z równości tej widać, że A^p i B^q składają się z tych samych czynników pierwszych, a że A^p zawiera tylko te czynniki pierwsze, które wchodzą w skład A, B^q te tylko, które wchodzą w skład B, przeto A i B powinny się składać z jednakowych czynników pierwszych. Niech to będą czynniki $c, d, e\ldots$; wtedy

$$A = c^r \,.\, d^s \,.\, e^t \ldots; \quad B = c^{r'} \,.\, d^{s'} \,.\, e^{t'} \ldots,$$

a równość $A^p = B^q$ można tak napisać:

$$(c^r \,.\, d^s \,.\, e^t \ldots)^p = (c^{r'} \,.\, d^{s'} \,.\, e^{t'} \ldots)^q,$$

czyli

$$c^{rp} \,.\, d^{sp} \,.\, e^{tp} \ldots = c^{r'q} \,.\, d^{s'q} \,.\, e^{t'q} \ldots$$

Zarówno czynniki pierwsze, jak i ilość tych czynników są dla każdej liczby naturalnej w zupełności oznaczone, a więc każdy z czynników powinien z obu stron równania wchodzić jednakową liczbę razy, a więc

$$rp = r'q\,;\; sp = s'q\,;\; tp = t'q \;\ldots.,$$

albo

$$\frac{r'}{r} = \frac{s'}{s} = \frac{t'}{t} = \ldots = \frac{p}{q}.$$

I odwrotnie: gdyby A i B rozkładały się na czynniki pierwsze w taki sposób:

$$A = c^{r} \,.\, d^{s} \,.\, e^{t} \ldots.\,; \quad B = c^{r'} \,.\, d^{s'} \,.\, e^{t'} \ldots,$$

gdzie

$$\frac{r'}{r} = \frac{s'}{s} = \frac{t'}{t} = \ldots,$$

wtedy wartość na x z równania

$$A^{x} = B$$

wypadłaby wymierna; gdyż, czyniąc

$$x = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s} = \frac{t'}{t} = \ldots,$$

dostalibyśmy:

$$r' = rx\,;\; s' = sx\,;\; t' = tx \ldots,$$

a następnie

$$A^{x} = (c^{r}\, d^{s}\, e^{t} \ldots)^{x} = c^{rx}\, d^{sx}\, e^{tx} \ldots,$$

czyli

$$A^{x} = c^{r'} \,.\, d^{s'} \,.\, e^{t'} = B.$$

Okazuje się więc, że *jeżeli A i B są całkowite, to w równaniu $A^x = B$ jest x wtedy i tylko wtedy wymierne, jeżeli czynniki pierwsze, z których się składają A i B są jednakowe, a stosunki wykładników jednakowych czynników obu liczb A i B wszystkie są równe.*

83. Przyjmując za zasadę liczbę 10, dostajemy z równania

$$10^{x} = N$$

następujące logarytmy całkowitych potęg zasady:

$$log\ 1 = 0;\ log\ 10 = 1;\ log\ 100 = 2;\ log\ 1000 = 3$$

i wogóle

$$log\ 10^m = m.$$

A ponieważ

$$10^{-m} = \frac{1}{10^m},$$

przeto

$$log\ 0{,}1 = -1;\ log\ 0{,}01 = -2;\ log\ 0{,}001 = -3$$

i wogóle

$$log \frac{1}{10^{-m}} = -m.$$

To są przy zasadzie 10 jedyne logarytmy wymierne; logarytmy wszystkich pozostałych liczb są niewymierne.

84. Liczba niewymierna x jest dokładnie znana wtedy, jeżeli mamy możność obliczenia jej *z dowolnem przybliżeniem*; to znaczy, jeżeli możemy znaleźć dwie liczby, z których jedna jest mniejsza, druga większa od x, a które się różnią od siebie tak mało, jak tego żądamy. Tak np. potrafimy obliczać z dowolnem przybliżeniem pierwiastki stopnia drugiego i trzeciego z wszelkich liczb wymiernych, możemy też z dowolnem przybliżeniem obliczyć liczbę π, wyrażającą stosunek okręgu koła do jego średnicy; i jeżeli piszemy

$$\pi = 3,\ 14159,$$

to należy to w ten sposób rozumieć, że obliczyliśmy tę liczbę z dokładnością do jednej stutysięcznej, lub z taką dokładnością zamierzamy ją wprowadzić do dalszego rachunku, a pod postacią powyższego równania stwierdzamy nierówności:

$$3,\ 141585 \leqq \pi < 3,\ 141595.$$

Jeżeli wymierzyliśmy jakąś odległość d i znaleźliśmy 16 *km*, to przez to stwierdzamy nierówności

$$15{,}5\ km \leqq d < 16{,}5\ km.$$

Jeżeli jednak ta odległość została wymierzona z dokładnością do 1 metra, jeżeli więc wiemy, że

$$15{,}9995\ km \leqq d < 16{,}0005\ km,$$

możemy zaznaczyć to krócej w ten sposób:

$$d = 16{,}000\ km.$$

Tym sposobem wartość ostatniej napisanej cyfry dziesiętnej wskazuje nam dokładność podanej liczby.

Trzymając się tego samego systemu, napiszemy np., że odległość ziemi od słońca wynosi $1495 . 10^5\ km$ zamiast $149500000\ km$, zaznaczając w ten sposób, że odległość jest podana z dokładnością do stu tysięcy kilometrów. Tę samą wielkość, gdyby to z jakich względów było dogodniej, możemy i tak napisać: $14{,}95 . 10^7\ km$, albo $1{,}495 . 10^8\ km$ i t. d.

Tablice logarytmów mogą być używane tylko do rachunków przybliżonych. Wartości logarytmów są w nich podane — zależnie od rodzaju tablicy — z czterema, pięcioma lub siedmioma cyframi dziesiętnemi, i w ogólności tyle tylko cyfr można uwzględnić w liczbach, nad któremi mamy wykonać rachunek.

85. W logarytmie, przedstawionym pod postacią liczby całkowitej z ułamkiem dziesiętnym, nazywamy część całkowitą *cechą*, część ułamkową *mantysą*. Tak np. gdy czytamy, że $log\ 5137 = 3{,}7107096$, to w tym logarytmie 3 jest cechą, pozostała zaś część ułamkowa jest mantysą. W tablicach zazwyczaj są pomieszczone tylko mantysy; cechy są opuszczone, gdyż z samego wejrzenia na dane liczby łatwo je obliczyć.

W rzeczy samej nietrudno wykazać, że *cecha logarytmu zawiera zawsze w sobie tyle jedności, ile jest cyfr w części całkowitej danej liczby, mniej jedna.* Skoro bowiem $log\ 1 = 0$, $log\ 10 = 1$, przeto logarytmy wszystkich liczb większych od 1, a mniejszych od 10 są większe od 0, a mniejsze od 1. Wyrażać się więc będą tak: 0 i część dziesiętna. Cechą ich zatem będzie 0. Podobnie: ponieważ $log\ 10 = 1$, $log\ 100 = 2$, przeto logarytmy wszystkich liczb większych od 10, a mniejszych od 100, wyrażać się będą tak: 1 z ułamkiem dziesiętnym, czyli cechą ich będzie 1 i t. d. Wogóle, jeżeli jakakolwiek liczba N zawiera m cyfr w swojej części całkowitej, wtedy liczba ta jest większa od 10^{m-1}, a mniejsza od 10^m. Logarytm jej przeto będzie większy od $log\ (10^{m-1})$, czyli od $m - 1$, a mniejszy od $log\ (10^m)$, czyli od m. Jego część całkowita zatem, czyli cecha, będzie $m - 1$.

Np. *log* 3, *log* $3\frac{2}{5}$, *log* 3, 4928 mieć będą za cechę 0.
log 39; *log* 39,4; *log* 84,56 mieć będą za cechę 1.
log 729; *log* 729,6; *log* 999,35 mieć będą za cechę 2.
log 4973; *log* 4973,86, mieć będą za cechę 3 i t. d.

Mając już dany logarytm zwyczajny jakiejkolwiek liczby, nietrudno znaleźć logarytm liczby dziesięć, sto, tysiąc i w ogólności 10^m razy większej lub mniejszej od liczby danej.

W rzeczy samej: przypuśćmy, że oznaczamy głoską N jakąkolwiek liczbę, i że logarytm tej liczby, $\log N$, jest znany. Chcemy zaś znaleźć: po 1-sze $\log(10N)$, $\log(100N)$, $\log(1000N)$... w ogólności $\log(10^m N)$; lub po 2-gie, $\log\left(\frac{N}{10}\right)$, $\log\left(\frac{N}{100}\right)$ $\log\left(\frac{N}{1000}\right)$ i wogóle: $\log\left(\frac{N}{10^m}\right)$.

Co do 1-go. Ponieważ logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów czynników, przeto będzie:

$$\begin{aligned}
\log(10N) &= \log N + \log 10 = \log N + 1 \\
\log(100N) &= \log N + \log 100 = \log N + 2 \\
\log(1000N) &= \log N + \log 1000 = \log N + 3 \text{ i t. d.} \\
\log(10^m N) &= \log N + \log(10^m) = \log N + m.
\end{aligned}$$

Z powyższych równości czytamy, że, aby otrzymać $\log(0N)$, należy do $\log N$ dodać 1; czyli wprost cechę logarytnu N powiększyć o jedność; podobnie, aby znaleźć $\log(100N)$, należy do cechy $\log N$ dodać 2 i t. d., w ogólności, aby znaleźć $\log(10^m . N)$, należy do cechy $\log N$ dodać m.

Co do 2-go. Ponieważ logarytm ilorazu równa się różnicy pomiędzy logarytmem dzielnej i logarytmem dzielnika, przeto:

$$\log\left(\frac{N}{10}\right) = \log N - \log 10 = \log N - 1,$$

$$\log\left(\frac{N}{100}\right) = \log N - \log 100 = \log N - 2,$$

$$\log\left(\frac{N}{1000}\right) = \log N - \log 1000 = \log N - 3,$$

i wogóle:

$$log\left(\frac{N}{10^m}\right) = log\ N - log\ 10^m = log\ N - m.$$

Stąd czytamy, że, aby znaleźć $log\left(\frac{N}{10}\right)$, należy od cechy logarytmu liczby N odjąć 1; aby znaleźć $log\left(\frac{N}{100}\right)$, należy od cechy logarytmu liczby N odjąć 2, i t. d., wogóle, aby znaleźć $log\left(\frac{N}{10^m}\right)$, należy od cechy logarytmu liczby N odjąć m. Więc: logarytmy liczb, różniących się tylko liczbą zer na końcu lub położeniem przecinka, mają jednakowe mantysy, a różnią się tylko cechami.

Te własności, opierające się na tem, że za zasadę logarytmów służy taż sama liczba, która jest zarazem podstawą systemu liczenia, dają możność znalezienia logarytmów wielu liczb z wiadomego logarytmu jednej tylko liczby przez prostą zmianę cechy. Tak np. z tablic znajdujemy, że

$$log\ 2587 = 3{,}4128.$$

Na zasadzie pierwszej z dwóch powyższych własności będzie:

$$log\ 25870 = 4{,}4128;\ log\ 258700 = 5{,}4128$$

i t. d; na zasadzie zaś drugiej własności:

$$log\ 258{,}7 = 2{,}4128,\ log\ 25{,}87 = 1{,}4128;$$

$$log\ 2{,}587 = 0{,}4128.$$

86. Ponieważ ułamek jest ilorazem, przeto dla znalezienia logarytmu ułamka odejmujemy logarytm mianownika od logarytmu licznika. Oznaczywszy jakikolwiek ułamek przez $\frac{p}{q}$, otrzymamy:

$$log\left(\frac{p}{q}\right) = log\ p - log\ q.$$

Jeżeli ułamek jest niewłaściwy, t. j. jeżeli $p > q$, wtedy i $log\ p > log\ q$, powyższe wyrażenie da nam wartość dodatnią na $log \left(\frac{p}{q}\right)$. Lecz gdy ułamek jest właściwy, wówczas $p < q$, $log\ p < log\ q$, i z wyrażenia: $log\ p — log\ q$ otrzymamy wartość ujemną na $log \left(\frac{p}{q}\right)$. Że logarytmy ułamków właściwych (przy zasadzie większej od jedności) są ujemne, wypada to zresztą z tego, co było powiedziane w § 75.

Logarytmy ułamków dziesiętnych wynajduje się w podobny sposób, jak logarytmy ułamków zwyczajnych, t. j. przez odjęcie logarytmu mianownika od logarytmu licznika. Lecz z powodu wielkiej wagi w rachunkach praktycznych i częstego zastosowania, pomówimy tu osobno o różnych sposobach wyrażania logarytmów ułamków dziesiętnych.

Weźmy jako przykład ułamek: 0,2587. Ułamek ten możemy napisać tak: $\frac{2587}{10000}$. Podług zasady, służącej do znalezienia logarytmu ułamka, będzie:

$$log\ 0{,}2587 = log\ 2587 — log\ 10000 = 3{,}4128 — 4;$$

czyli, po wykonaniu odejmowania

$$log\ 0{,}2587 = — 0{,}5872.$$

Podobnie znaleźlibyśmy:

$$log\ 0{,}02587 = log\ 2587 — log\ 100000 = — 1{,}5872;$$
$$log\ 0{,}002587 = — 2{,}5872; \text{ i t. d.}$$

I tutaj widzimy, jak przy liczbach większych od jedności, że logarytmy tych ułamków dziesiętnych, które się różnią tylko położeniem przecinka, mają jednakowe mantysy; różne cechy stanowią całą różnicę pomiędzy temi logarytmami. Przypatrując się sposobowi otrzymywania tych logarytmów, możemy ustalić taką zasadę: Logarytm ujemny ułamka dziesiętnego ma za cechę tyle jedności, ile jest w tym ułamku zer po przecinku przed pierwszą cyfrą znaczącą; za mantysę zaś cyfry, otrzymane przez odjęcie każdej cyfry mantysy logarytmu licznika od 9, z wyjątkiem ostatniej cyfry z prawej strony różnej od zera, otrzymanej przez odjęcie od 10 tejże cyfry mantysy logarytmu licznika.

Gdy więc: $\log 2 = 0{,}3010$,
to: $\log 0{,}2 = -0{,}6990$;
$\log 0{,}02 = -1{,}6990$;
$\log 0{,}002 = -2{,}6990$.

Lecz logarytmy ułamków rzadko używają się w tej postaci; zazwyczaj nadajemy im inną, daleko dogodniejszą do rachunku, i wskutek tego prawie wyłącznie używaną. Weźmy jeszcze raz pod uwagę tenże sam *log* 0,2587. Jest on, jak wiemy, równy 3,4128 — 4. Możemy tę różnicę tak przedstawić:

$$\log 0{,}2587 = 3 + 0{,}4128 - 4,$$

czyli:

$$\log 0{,}2587 = -1 + 0{,}4128.$$

Tutaj logarytm ten został przedstawiony, jako suma dwóch wyrazów, jednego ujemnego, drugiego dodatniego; mianowicie część całkowita jest ujemna, część zaś ułamkowa dodatnia. Zgodzono się pisać razem obie te części, odznaczając część ujemną znakiem *mniej*, napisanym u góry w ten sposób:

$$\log 0{,}2587 = \bar{1}{,}4128.$$

Pisząc w ten sposób logarytm ułamka dziesiętnego, mówimy, że ma on cechę ujemną, a mantysę dodatnią.

Podobnie postępując, znaleźlibyśmy;

$$\log 0{,}02587 = 3 + 0{,}4128 - 5 = \bar{2}{,}4128,$$
$$\log 0{,}002587 = 3 + 0{,}4128 - 6 = \bar{3}{,}4128,$$

i t. d.

Ten sposób pisania logarytmu ułamka dziesiętnego jest przeważnie używany; i my go w dalszym ciągu wyłącznie używać będziemy. Widzimy z powyższych przykładów, że w logarytmie ułamka dziesiętnego, mającym cechę ujemną, a mantysę dodatnią, *cecha ujemna zawiera tyle jedności, ile jest zer przed pierwszą cyfrą znaczącą w ułamku, włączając w to i zero na całkowitą; mantysa zaś jest równa mantysie licznika.* Możemy się przekonać zapomocą następującego rozumowania, że to prawidło jest ogólne: Przypuśćmy, że mamy pewien ułamek dziesiętny właściwy p, przed którego pierwszą cyfrą znaczącą znajduje się k zer, włączając w to i zero na całkowitą. Pomiędzy przecinkiem więc i pierwszą cyfrą znaczącą jest $k - 1$ zer.

Przypuśćmy dalej, że mantysa logarytmu tej liczby całkowitej, jaką otrzymamy, opuszczając w danym ułamku przecinek, jest m. Na zasadzie własności, dowiedzionej w § 85, gdziekolwiekbyśmy umieścili przecinek w tej liczbie, zawsze mantysa logarytmu otrzymanej liczby pozostanie taż sama, t. j. m. Posuńmy przecinek w danym ułamku w prawą stronę tak, aby pierwsza cyfra znacząca stała się całkowitą; przez takie przesunięcie przecinka powiększyliśmy ułamek 10^k razy; nowa liczba będzie więc równa $10^k . p$, mantysą w jej logarytmie będzie m, cechą zaś będzie 0, gdyż jedna tylko cyfra będzie w części całkowitej (§ 85). Zatem:

$$log\ (10^k . p) = 0,\ m, \text{ czyli}$$
$$log\ (10^k) + log\ p = 0,\ m, \text{ i dalej:}$$
$$k\ log\ 10 + log\ p = 0,\ m, \text{ skąd}$$
$$log\ p = 0,\ m - k,$$

czyli, podług omówionego poprzednio sposobu pisania:

$$log\ p = \overline{k},\ m.$$

Tym sposobem, mając tablice, zawierające logarytmy wszystkich liczb całkowitych, możemy odrazu bez żadnego rachunku napisać logarytm każdego ułamka dziesiętnego z cechą ujemną i mantysą dodatnią.

Gdybyśmy mieli dany logarytm całkowicie ujemny ułamka dziesiętnego i chcieli go przekształcić na logarytm z cechą ujemną, a mantysą dodatnią, wtedy należałoby tak postępować: Weźmy jako przykład logarytm poprzednio znaleziony:

$$log\ 0{,}02587 = -\ 1{,}5872.$$

Logarytm ten możemy napisać w ten sposób:

$$log\ 0{,}02587 = -\ 1 - 0{,}5872.$$

Wartość tego logarytmu oczywiście nie zmieni się, gdy do niego dodamy 1 i odejmiemy 1; będzie wtedy:

$$log\ 0{,}02587 = -\ 1 - 1 + 1 - 0{,}5872.$$

Łącząc dwa pierwsze wyrazy i dwa ostatnie, otrzymamy

$$log\ 0{,}02587 = -\ 2 + 0{,}4128, \text{ czyli:}$$
$$log\ 0{,}02587 = \overline{2}{,}4128,$$

to jest to, co znaleźliśmy poprzednio innym sposobem. Gdyby zaszła potrzeba zamiany logarytmu z cechą ujemną a mantysą dodatnią na logarytm całkowicie ujemny, wtedy otrzymalibyśmy żądany wynik przez wykonanie tego odejmowania, które właściwie jest wskazane w logarytmie, napisanym pod tą postacią.

Tak np. przypuśćmy, że:

$$\log 0{,}002587 = \bar{3},\ 4128$$

potrzeba przekształcić na logarytm całkowicie ujemny. Zwróćmy tylko uwagę na to, że:

$$\log 0{,}002587 = -3 + 0{,}4128 = 0{,}4128 - 3;$$

wykonajmy wskazane odejmowanie, a otrzymamy:

$$\log 0{,}002587 = -2{,}5872,$$

jak poprzednio.

87. *Nazywamy kologarytmem liczby N logarytm liczby* $\frac{1}{N}$. Kologarytm tak oznaczamy:

$$\operatorname{colog} N.$$

Według powyższego określenia

$$\operatorname{colog} N = \log\left(\frac{1}{N}\right) = \log 1 - \log N = 0 - \log N,$$

a więc

$$\operatorname{colog} N = -\log N.$$

Tym sposobem, jeżeli znajdziemy w tablicy

$$\log 83{,}20 = 1{,}9201,$$

to

$$\operatorname{colog} 83{,}20 = -1{,}9201,$$

a dodając jednostkę ujemną do cechy, jednostkę dodatnią do mantysy:

$$\operatorname{colog} 83{,}20 = \bar{2},0799.$$

Podobnie, ponieważ

$$\log 0{,}8320 = \bar{1},9201,$$

to

$$\log\left(\frac{1}{0{,}8320}\right) = \operatorname{colog} 0{,}8320 = -\log 0{,}8320,$$

a ponieważ *log* 0,8320 mamy dany z cechą ujemną, mantysą dodatnią, więc po zmianie znaku cechy trzeba od niej odjąć mantysę:

$$colog\ 0{,}8320 = 0{,}0799.$$

Tak samo

$$colog\ 0{,}08320 = -log\ 0{,}08320 = 1{,}0799.$$

I w ogólności, jeżeli oznaczymy przez c cechę, przez m mantysę logarytmu liczby N, wtedy

$$log\ N = c + m,$$
$$colog\ N = -(c + 1) + (1 - m).$$

88. Tablice logarytmów zawierają logarytmy tylko liczb całkowitych; widzieliśmy bowiem poprzednio, że do odszukania logarytmów liczb całkowitych sprowadza się wynalezienie logarytmów i liczb ułamkowych.

Ponieważ nadto cechy są zawsze łatwe do napisania z samego wejrzenia na daną liczbę, przeto cechy zazwyczaj w tablicach logarytmowych opuszczają się. Tablica więc logarytmów zawiera z jednej strony liczby całkowite, z drugiej zaś strony mantysy logarytmów tych liczb.

Jedne tablice od drugich różnią się naprzód liczbą tych liczb całkowitych, których logarytmy są zamieszczone; powtóre stopniem przybliżenia, czyli liczbą cyfr dziesiętnych mantysy. Pod tym względem rozróżniamy tablice małe i wielkie. W małych tablicach znajdują się logarytmy, obliczone do 4, 5-ciu lub 6-ciu cyfr dziesiętnych, wszystkich liczb całkowitych od 1 do 20000 najwyżej. W wielkich tablicach mantysy są obliczone przynajmniej do 7-miu cyfr dziesiętnych dokładnych, i w nich zawarte są logarytmy przynajmniej pierwszych 100000 liczb. Do szkolnego użytku zupełnie wystarczają tablice małe; kto nabierze wprawy w posiłkowaniu się jakąkolwiek tablicą, z łatwością sobie poradzi i z każdą inną po przeczytaniu tekstu objaśniającego.

W książce tej powoływać się będę na tablice logarytmów czterocyfrowych Wojtowicza [1]). W tablicy I są tam logarytmy

---

[1]) Tablice matematyczno-fizyczne czterocyfrowe do użytku szkół średnich, opracował Wł. Wojtowicz, wyd. Gebethner i Wolff.

liczb od 1000 do 1999, w tablicy II od 100 do 999; w ogólności stosujemy tablicę II, zaś I tylko wtedy, jeżeli — ewentualnie po skreśleniu przecinka i zer na początku i na końcu — liczba dana składa się co najmniej z czterech cyfr, z których pierwszą jest 1.

Zajmiemy się naprzód tablicą II. W pierwszej kolumnie widzimy tłustym drukiem wydrukowane liczby **10**, **20**,... **90**, a poniżej **10** zwykłym drukiem 11, 12 i t. d. Są to pierwsze dwie cyfry liczby trzycyfrowej; trzecia jest wypisana u góry w poziomym szeregu: 0, 1, 2,... 9. Mantysa logarytmu każdej liczby trzycyfrowej jest pomieszczona w tym szeregu poziomym, przed którym stoją dwie pierwsze cyfry tej liczby, i w tej kolumnie pionowej, nad którą stoi jej trzecia cyfra. Tak więc mantysa logarytmu liczby 132 jest 1206; mantysa logarytmu liczby 709 jest 8506, a ponieważ cecha każdej z tych dwóch liczb jest 2, więc:

$$\mathit{log}\ 132 = 2{,}1206; \quad \mathit{log}\ 709 = 2{,}8506.$$

Podobnie w tablicy pierwszej odnajdujemy w pierwszej kolumnie trzy pierwsze cyfry liczby czterocyfrowej, w górnym szeregu poziomym jej czwartą cyfrę; żądaną mantysę znajdziemy w tym szeregu, przed którym stoją te trzy pierwsze cyfry, i w tej kolumnie, nad którą stoi cyfra ostatnia liczby danej; np.

$$\mathit{log}\ 1153 = 3{,}0618$$
$$\mathit{log}\ 1009 = 3{,}0039.$$

89. Użycie tablic logarytmowych byłoby bardzo ograniczone, gdybyśmy mogli logarytmy tych tylko liczb otrzymywać, które się bezpośrednio w tych tablicach znajdują. Zobaczymy jednak, że każdą tablicę można niejako rozszerzyć i otrzymać z niej logarytmy liczb, nie znajdujących się w niej bezpośrednio, i to z takim stopniem przybliżenia, z jakim cała tablica jest obliczona, pod warunkiem wszakże, że te liczby nie przechodzą poza pewną granicę. Pokażemy teraz, jakim sposobem można dojść do takiego włączenia do tablicy nowych liczb.

W tym celu musimy naprzód zastanowić się nad pewnemi własnościami, jakie mają różnice pomiędzy logarytmami dwóch po sobie następujących liczb w tablicy. Zauważmy naprzód, że na zasadzie drugiej własności głównej logarytmów (§ 77) różnica pomiędzy dwoma logarytmami może być zawsze przedstawiona, jako logarytm ilorazu. Weźmy trzy liczby dodatnie, następujące po sobie w postępie arytmetycznym, którego wykładnikiem jest r:

$$N, \; N+r, \; N+2r;$$

nietrudno się przekonać, że

$$\frac{N+r}{N} > \frac{N+2r}{N+r} \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Należy tylko sprowadzić te dwa ułamki do jednakowego mianownika; ułamek, znajdujący się na pierwszej stronie nierówności (1), przyjmie postać:

$$\frac{(N+r)^2}{N(N+r)} = \frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)};$$

ułamek zaś, znajdujący się na stronie drugiej:

$$\frac{N(N+2r)}{N(N+r)} = \frac{N^2+2Nr}{N(N+r)}.$$

Ponieważ zaś widocznie:

$$\frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)} > \frac{N^2+2Nr}{N(N+r)},$$

przeto nierówność (1) jest tym sposobem dowiedziona.

Jeżeli teraz weźmiemy logarytmy obu stron nierówności (1), otrzymamy:

$$\log(N+r) - \log N > \log(N+2r) - \log(N+r) \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Pierwsza strona tej nierówności pokazuje, o ile powiększa się logarytm pewnej liczby N, jeżeli tę liczbę powiększymy o pewną wielkość r; druga zaś strona podobnie pokazuje przyrost, jakiego doznaje logarytm liczby $N+r$, gdy ją znowu powiększymy o toż samo r. Własność różnic między logarytmami, zawartą w nierówności (2), możemy tak wyrazić:

Jeżeli liczby powiększają się o równe wielkości, wtedy tym równym przyrostom liczb odpowiadają przyrosty logarytmów ciągle zmniejszające się.

Gdybyśmy uczynili w powyższych nierównościach $r = 1$, wtedy liczby N, $N+1$, $N+2$ tworzyłyby szereg liczb naturalnych, to jest takich, jakich logarytmy są pomieszczone w tablicach logarytmów. Różnice: $log (N+1) - log\, N$, $log (N+2) - log\, (N+1)$ byłyby różnicami między logarytmami po sobie następującemi w tablicach (i dlatego często nazywane różnicami *tablicowemi)*; nierówność (2), zastosowana do różnic tablicowych, wyraża, że

$$log\, (N+1) - log\, N > log\, (N+2) - log\, (N+1),$$

to jest, że *różnice tablicowe po sobie następujące tworzyć muszą szereg malejący.* Łatwo to sprawdzić: tworząc różnice logarytmów kolejnych, znajdziemy, że im bardziej posuwać się będziemy w tablicy do coraz to większych liczb, tem odpowiednie różnice będą mniejsze. I jeżeli w pewnych częściach tablic znajdziemy, że różnica następna jest równa, lub nawet niekiedy większa od różnicy poprzedniej, to pochodzi to tylko z tego, że każdy logarytm w tablicy jest oznaczony w przybliżeniu, do 4-ech cyfr dziesiętnych, z opuszczeniem cyfr dalszych.

90. Przechodzimy teraz do drugiej własności różnic pomiędzy logarytmami, która nas doprowadzi do wprowadzenia do tablicy liczb jakichkolwiek. Własność ta polega na tem, że jakkolwiek różnice pomiędzy logarytmami stają się coraz mniejsze, to wszakże w miarę powiększania się liczb, różnice te różnią się od siebie coraz mniej; czyli *ciągle dążą do tego, aby stać się równemi.*

Aby wykazać tę własność różnic między logarytmami, weźmy pod uwagę oddzielnie wyrażenia, stanowiące dwie strony nierówności (2) § 89, mianowicie: $log\, (N+r) - log\, N$ i $log\, (N+2\,r) - log\, (N+r)$. Pierwszą z tych wielkości oznaczmy głoską d, drugą zaś głoską d_1. Będzie więc:

$$d = log\, (N+r) - log\, N = log \left(\frac{N+r}{N}\right), \quad . \; . \; . \; (1)$$

$$d_1 = log\, (N+2\,r) - log\, (N+r) = log \left(\frac{N+2\,r}{N+r}\right) \quad . \; . \; . \; (2)$$

Odejmijmy teraz od równości (1) równość (2); będzie:

$$d - d_1 = log \left(\frac{N+r}{N}\right) - log \left(\frac{N+2\,r}{N+r}\right);$$

a że różnica logarytmów równa się logarytmowi ilorazu, przeto:

$$d - d_1 = log\left[\frac{(N+r)^2}{N(N+2r)}\right],$$

albo

$$d - d_1 = log\left[\frac{N^2+2Nr+r^2}{N^2+2Nr}\right],$$

czyli:

$$d - d_1 = log\left[1+\frac{r^2}{N^2+2Nr}\right] \quad . . (3)$$

Ponieważ w ułamku $\frac{r^2}{N^2+2Nr}$ licznik jest stały, a mianownik w miarę powiększania się liczby N ciągle się powiększa, przeto widoczną jest rzeczą, że ułamek ten, a zatem i całe wyrażenie na drugiej stronie równości (3), ustawicznie się zmniejsza. Jeżeli w wyrażeniu (3) zamiast r podstawimy jedność, wtedy d i d_1 wyrażać będą różnice tablicowe. Równanie (3) wykazuje, że różnica pomiędzy dwiema różnicami tablicowemi jest mniejsza od poprzedzającej.

Innemi słowy: *różnice pomiędzy różnicami tablicowemi ciągle maleją w miarę posuwania się coraz dalej w tablicy.*

Jako przykład weźmy kilka po sobie następujących logarytmów w tablicy siedmiocyfrowej:

	d	$d - d_1$
$log\ 306 = 2,4857214$		
	0,0014170	
$log\ 307 = 2,4871384$		0,0000047
	0,0014123	
$log\ 308 = 2,4885507$		0,0000045
	0,0014078	
$log\ 309 = 2,4899585$		

Z wypisanych powyżej liczb widzimy: po 1-sze, że różnice d pomiędzy dwoma po sobie następującemi logarytmami stają się coraz mniejsze, i po 2-gie, że różnice $d - d_1$ między niemi także maleją.

91. Jeżeli poprzestaniemy na czterech znakach dziesiętnych, to znajdziemy

$log\ 306 = 2,4857$	
	0,0014
$log\ 307 = 2,4871$	
	0,0015
$log\ 308 = 2,4886$	
	0,0014
$log\ 309 = 2,4900$	

Nie należy jednak stąd wnosić, ażeby różnica między logarytmami liczb 307 i 308 była większa, aniżeli międy 308 i 309, gdyż istotnie tablica czterocyfrowa informuje nas tylko o tem, że

$$2,48705 \leqq log\ 307 < 2,48715,$$
$$2,48855 \leqq log\ 308 < 2,48865;$$

o różnicy $d = log\ 308 - log\ 307$ możemy więc tylko powiedzieć, że jest większa, aniżeli

$$2,48855 - 2,48715 = 0,0014$$

i mniejsza, aniżeli

$$2,48865 - 2,48705 = 0,0016,$$

a więc błąd, jaki popełniamy, pisząc

$$d = 0,0015,$$

może dochodzić do 0,0001.

I wogóle dokładność sumy albo różnicy dwóch liczb, danych z przybliżeniem jednakowem, jest dwa razy mniejsza, aniżeli dokładność każdej z tych liczb zosobna, inaczej mówiąc, możliwy błąd się podwaja:

$$a - \frac{1}{2k} \leqq x < a + \frac{1}{2k}$$
$$b - \frac{1}{2k} \leqq y < b + \frac{1}{2k}$$
$$a \pm b - \frac{1}{k} \leqq x \pm y < a \pm b + \frac{1}{k}.$$

(Znak równości w ostatnim wierszu dotyczy tylko sumy).

Trzeba jednak zauważyć, że błędy dodatnie i ujemne są jednakowo prawdopodobne i przy dłuższych rachunkach zwykle się wyrównywają; mało prawdopodobny jest przypadek, ażeby nam wypadło np. sumować dziesięć liczb przybliżonych, które, wszystkie, lub prawie wszystkie, są za małe, przez co błąd sumy mógłby się stać 10 razy większy, niż błąd każdego składnika zosobna.

92. Powróćmy do równania (3) § 90:

$$d - d_1 = log\left[1 + \frac{r^2}{N^2 + 2Nr}\right],$$

$$\text{gdzie } d = \log (N + r) - \log N$$
$$d_1 = \log (Nr + 2\, r) - \log (N + r).$$

Przekonamy się, że *różnica* $d - d_1$ *może być uczyniona dowolnie mała*

1) *przy dowolnem* r, *jeżeli uczynimy* N *dostatecznie wielkiem i* 2) *przy dowolnem* N, *jeżeli uczynimy* r *dostatecznie małem.*

Przypuśćmy, że chcemy uczynić

$$d - d_1 < l. \tag{4}$$

Oznaczmy w ogólności zasadę przez a (> 1).

Nierówność żądana będzie spełniona, jeżeli uczynimy (§ 66)

$$a^{d-d_1} < a^l,$$

czyli

$$1 + \frac{r^2}{N^2 + 2\, Nr} < a^l,$$

albo

$$\frac{r^2}{N^2 + 2\, Nr} < a^l - 1,$$

a dzieląc obie strony przez r^2 i biorąc następnie odwrotności:

$$N^2 + 2\, Nr > \frac{r^2}{a^l - 1}$$

i nakoniec

$$N^2 + 2\, Nr - \frac{r^2}{a^l - 1} > 0. \tag{5}$$

Rozwiążemy nierówność (5) względem $\frac{r}{N}$, jako niewiadomej; w tym celu podzielmy obie strony nierówności przez N^2 i zmieńmy porządek wyrazów:

$$-\frac{1}{a^l - 1} \cdot \left(\frac{r}{N}\right)^2 + 2 . \frac{r}{N} + 1 > 0.$$

Wyróżnik tej nierówności jest dodatni, można więc uczynić jej zadość; w tym celu znajdziemy rozwiązania równania, jakie otrzymamy, przyrównywając do zera lewą stronę nierówności:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{a^l - 1}}}{-\frac{1}{a^l - 1}} = a^l - 1 \mp \sqrt{(a^l - 1)\, a^l}.$$

Ponieważ spółczynnik przy kwadracie niewiadomej jest ujemny (§ 31), przeto nierówność będzie spełniona dla każdej wartości niewiadomej, zawartej między znalezionemi pierwiastkami, czyli

$$a^l - 1 - \sqrt{(a^l - 1)\, a^l} < \frac{r}{N} < a^l - 1 + \sqrt{(a^l - 1)\, a^l}.$$

Ponieważ

$$a^l > a^l - 1,$$

więc

$$\sqrt{(a^l - 1)\, a^l} > a^l - 1,$$

przed pierwszym znakiem $<$ mamy wielkość ujemną, a uwzględniając tylko dodatnie r, dostaniemy

$$0 < \frac{r}{N} < a^l - 1 + \sqrt{(a^l - 1)\, a^l}. \qquad (6)$$

Stąd widzimy:

1) *Jeżeli r jest wielkością zgóry daną, wtedy dla każdego N, spełniającego warunek*

$$N > \frac{r}{a^l - 1 + \sqrt{(a^l - 1)\, a^l}}, \qquad (7)$$

otrzymamy

$$d - d_1 < l.$$

2) *Jeżeli N jest wielkością zgóry daną, wtedy dla każdego r, spełniającego warunek*

$$0 < r < N\left[a^l - 1 + \sqrt{(a^l - 1) a^l}\right], \qquad (8)$$

otrzymamy

$$d - d_1 < l.$$

Zauważmy jeszcze, że jeżeli para wartości $r = r_0$ i $N = N_0$

czyni zadość nierówności (6), wtedy ta nierówność jest spełniona dla każdej pary wartości r, N, spełniającej warunki

$$r \leqq r_0;\ N \geqq N_0.$$

93. Stosując nierówności poprzedniego § do zwykłych tablic logarytmowych, zawierających, przypuśćmy, m - cyfrowe mantysy logarytmów zwyczajnych liczb całkowitych, należy założyć $a = 10$; $r_0 = 1$; $l = \frac{1}{10^m}$. Tym sposobem żądana różnica różnic w logarytmach ma być tak mała, że nie przewyższa niedokładności samej tablicy i w rachunkach, wykonywanych przy pomocy tej tablicy musi być przyjęta za zero.

Jeżeli oznaczymy

$$N_m = \frac{1}{10^{\left(\frac{1}{10^m}\right)} - 1 + \sqrt{\left[10^{\left(\frac{1}{10^m}\right)} - 1\right] 10^{\left(\frac{1}{10^m}\right)}}},$$

wtedy nierówność (7), a więc i nierówność

$$d - d_1 < l,$$

będzie spełniona dla każdej pary wartości r, N, spełniającej warunek:

$$r \leqq 1;\ N > N_m.$$

Dochodzimy więc do takiego wniosku:

W każdej tablicy logarytmów, posuwając się coraz dalej, natrafimy na takie miejsce, że, począwszy od tego miejsca, różnice między dwoma sąsiedniemi logarytmami są równe z taką dokładnością, z jaką wogóle tablica została obliczona.

Jeżeli teraz, czyniąc $r < 1$, między dwie liczby następujące po sobie w tej części tablicy, w której już różnice pomiędzy dwoma następującemi po sobie logarytmami są równe, wstawimy liczby, z których każda następna równa się poprzedniej, powiększonej o jedną i tę samą wielkość mniejszą od 1, np. o 0,1—wtedy różnice tablicowe między logarytmami, odpowiadającemi tym liczbom, będą niezawodnie równe. Stąd wyprowadzamy ten ważny wniosek:

W tej części tablicy, w której dwie następujące po sobie różnice tablicowe są równe, przyrostom liczb równym, lecz *mniejszym od jedności, odpowiadają równe przyrosty logarytmów* lub, wyrażając się krócej: *różnice między liczbami są proporcjonalne do różnic między odpowiedniemi logarytmami.*

94. *Logarytmy wyrazów postępu geometrycznego tworzą postęp arytmetyczny.*

Ażeby o tem się przekonać, oznaczmy przez b jeden z wyrazów postępu geometrycznego, przez q wykładnik tego postępu; w takim razie wyraz następujący po b jest bq, logarytm jego $\log b + \log q$, a więc logarytmy wyrazów tego postępu geometrycznego różnią się, każdy od poprzedzającego, o stałą wielkość $\log q$, tworzą przeto postęp arytmetyczny o wykładniku $\log q$.

95. Wykonajmy wykres krzywej logarytmicznej

$$y = \log x$$

w granicach od $x = 1$ do $x = 10$, przyjmując za jednostkę długości na osi odciętych 2 *cm*, na osi rzędnych 20 *cm*. Ponieważ piąte części milimetra można jeszcze dość dokładnie okiem oceniać, więc z wykresu takiego będzie można odczytać, z dokładnością do jednej tysiącznej logarytm każdej liczby, wyrażonej trzema cyframi: jednostek, części dziesiątych i części setnych. Taki wykres zastąpiłby tablicę logarytmów trzycyfrową; i gdybyśmy na nim odmierzyli

$$\log 5{,}72 = 0{,}757,$$

to znaleźlibyśmy odrazu

$$\log 572 = 2{,}757.$$

Ażeby wykres taki otrzymać, znajdziemy szereg punktów, których odcięte tworzą postęp geometryczny, mający 1 za wyraz pierwszy, 10 za ostatni, a rzędne są logarytmami odciętych, a więc (§ 94) tworzą postęp arytmetyczny, którego wyrazem pierwszym jest 0, ostatnim 1, zaś wykładnik jest logarytmem wykładnika postępu geometrycznego. Co do wykładnika postępu geometrycznego, to wybierzemy go tak, ażeby były spełnione dwa warunki:

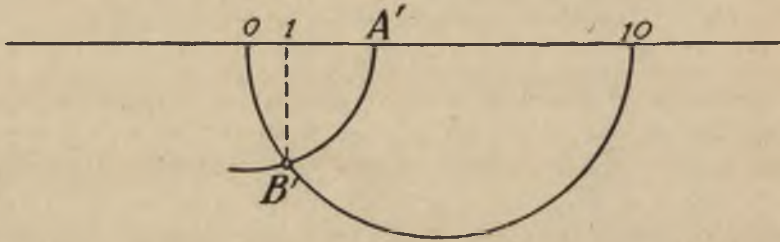
1) Wszystkie punkty mają być dokładnie wykreślone cyrklem i linjałem.

2) Różnica między łukiem krzywej logarytmicznej, łączącym dwa sąsiednie wykreślone punkty, a cięciwą, łączącą te dwa punkty, powinna być niedostrzegalna.

Ażeby uczynić zadość pierwszemu warunkowi, znajdźmy na osi odciętych punkt A_1, którego odcięta a_1 jest średnią proporcjonalną między 1 i 10, a więc

$$a_1 = \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}.$$

W tym celu budujemy półkole na średnicy, której końcami są punkty 0 i 10, przecinamy je w punkcie B_1 prostopadłą, poprowadzoną z punktu 1 do osi i odmierzamy $OA_1 = OB_1$ (rys. 26, czterokrotnie zmniejszony).



Rys. 26.

W podobny sposób znajdziemy punkt A_2, którego odcięta a_2 jest średnią proporcjonalną między 1 i a_1, a więc

$$a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{4}},$$

i w ogólności punkt A_n o odciętej a_n, otrzymanej, jako średnia proporcjonalna między 1 i a_{n-1}:

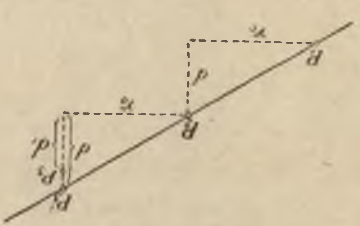
$$a_n = \sqrt{a_{n-1}} = 10^{\frac{1}{2^n}}.$$

Jak wielkie powinno być n, ile więc razy należy to działanie powtórzyć, to wyniknie z rozpatrywania warunku drugiego; i jeżeli już znajdziemy n, czyniące zadość drugiemu warunkowi, wtedy a_n przyjmiemy za wykładnik postępu geometrycznego. Odpowiedni postęp arytmetyczny będzie miał za wykładnik

$$log\ a_n = log\left(10^{\frac{1}{2^n}}\right) = \frac{1}{2^n}\cdot$$

Jednostkę osi rzędnych trzeba więc będzie podzielić na 2^n części równych; liczba punktów krzywej, które mamy wykreślić, oprócz dwóch znanych: 1;0 i 10;1, jest $2^n - 1$.

96. Przechodzimy do drugiego warunku: jeżeli znaleźliśmy już dwa punkty krzywej P_1 i P_2 (rys. 27) o spółrzędnych



Rys. 27.

x_1, $y_1 = log\, x_1$; $x_2 = a_n x_1$, $y_2 = log\, x_2$, to żądamy, ażeby łuk krzywej $P_1 P_2$ nie różnił się widocznie od odcinka, łączącego te dwa punkty.

Oznaczmy

$$r_0 = x_2 - x_1$$

i oznaczmy przez P_3 trzeci punkt krzywej, którego jednak nie mamy potrzeby wykreślać, a którego spółrzędne są $x_3 = x_2 + r_0$; $y_3 = log\, x_3$. Niech będzie P_3' ten punkt prostej $P_1 P_2$, którego odcięta jest x_3. Ponieważ założyliśmy, że na prostych równoległych do osi rzędnych mierzymy z dokładnością do 0,001 (0,2 mm), przeto nie rozróżnilibyśmy punktów P_3 i P_3', gdyby odległość między niemi była mniejsza od 0,001. A ponieważ różnica rzędnych punktów P_3' i P_2 równa się różnicy rzędnych punktów P_2 i P_1 — jak to łatwo spostrzec przez porównanie dwóch przystających trójkątów prostokątnych, — więc, oznaczając

$$d = y_2 - y_1; \quad d_1 = y_3 - y_2,$$

znajdziemy, że punkt P_3 nie da się odróżnić od P_3', jeżeli tylko x_1 i x_2 będą tak wybrane, że

$$d - d_1 < \frac{1}{1000}.$$

Ażeby to osiągnąć, powinna być spełniona nierówność (6) § 92:

$$\frac{r}{N} < a^l - 1 + \sqrt{(a^l - 1)a^l},$$

w której trzeba podstawić

$$r = r_0; \quad N = x_1; \quad a = 10; \quad l \leq \frac{1}{1000}.$$

I jeżeli ta nierówność będzie spełniona, to nierówność

$$d - d_1 < \frac{1}{1000}$$

będzie też spełniona dla każdego $r < r_0$, czyli: dla wszystkich punktów łuku P_1P_3, a więc tem bardziej dla punktów łuku P_1P_2, różnice rzędnych są z żądanem przybliżeniem proporcjonalne do różnic odciętych, łuk ten nie różni się widocznie od cięciwy (cz. II rozdz. XV). Podnoszenia 10 do potęgi $\frac{1}{1000}$, czyli wyciągania z 10 pierwiastka tysiącznego stopnia, bezpośrednio nie moglibyśmy wykonać; dlatego też podstawimy zamiast l najbliższą mniejszą liczbę, dla której działanie takie da się wykonać; przez to prawa strona nierówności ulegnie zmniejszeniu, a tak zmodyfikowana nierówność tem bardziej odpowie warunkom zadania. Najbliższą taką mniejszą liczbą jest $\frac{1}{1024}$, gdyż $1024 = 2^{10}$; otrzymalibyśmy więc liczbę, którą należy podstawić zamiast a^l, gdybyśmy wyciągnęli z 10 pierwiastek kwadratowy, z tego pierwiastka znowu pierwiastek kwadratowy, i t. d. aż do dziesiątego. Metoda, wyłożona w cz. II rozdz. IV, w zasadzie wystarcza do tego celu; nie można jednak nikogo zachęcać do przeprowadzenia tego rachunku. Bo, gdybyśmy chcieli obliczyć żądany pierwiastek choćby tylko z dokładnością do 0,001, a więc otrzymać go pod postacią

$$\frac{c}{10^3},$$

gdzie c jest liczbą całkowitą, to powinno być

$$\frac{c^{1024}}{10^{3.1024}} < 10 < \frac{(c+1)^{1024}}{10^{3.1024}};$$

ażeby więc c znaleźć, należałoby, wyciągając pierwiastek, dopisać do 10 po przecinku $3.1024 = 3072$ zer. Trzeba więc poprzestać na sprawdzeniu rezultatu, osiągniętego przez innych. Można mianowicie sprawdzić przez kolejne podnoszenie do kwadratu z zachowaniem 5 cyfr po przecinku (nie powiększając nigdy piątej cyfry, choćby szósta była > 5), że

$$(1{,}0023)^{1024} > 10{,}46983\,;$$

tym sposobem możemy w naszej nierówności podstawić 1,0023 zamiast a'; otrzymamy wtedy

$$\frac{r_0}{x_1} < 0{,}0023 + \sqrt{0{,}0023\,.\,1{,}0023},$$

a po wykonaniu działań

$$\frac{r_0}{x_1} < 0{,}048\,.$$

Teraz już możemy znaleźć wykładnik postępu, utworzonego przez odcięte poszukiwanych punktów. Ten wykładnik jest

$$a_n = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1 + r_0}{x_1} = 1 + \frac{r_0}{x_1},$$

przeto musi być

$$a_n < 1{,}048.$$

Kto zadał sobie poprzednio trud obliczania kolejnych potęg, o wykładniku postaci 2^n, liczby 1,0023, która jest w przybliżeniu pierwiastkiem stopnia 2^{10} z liczby 10, mógł się przekonać, że

$$(1{,}0023)^{16} = 1{,}037$$
$$(1{,}0023)^{32} = 1{,}075\,,$$

a więc

$$\left(\sqrt[2^{10}]{10}\right)^{16} < 1{,}048 < \left(\sqrt[2^{10}]{10}\right)^{32},$$

otrzymamy więc w każdym razie żądaną dokładność, przyjmując

$$a_n = \left(\sqrt[2^{10}]{10}\right)^{16} = 10^{\frac{2^4}{2^{10}}} = 10^{\frac{1}{2^6}} = 10^{\frac{1}{64}}.$$

Tym sposobem w szeregu średnich proporcjonalnych a_n nie trzeba się dalej posuwać, niż do a_6; ale jeżeli samo techniczne wykonanie rysunku nie jest bardzo precyzyjne, to nie gorsze rezultaty otrzymamy, przyjmując a_5 za wykładnik postępu, bo każde nowe działanie rysunkowe jest źródłem przypadkowych niedokładności. Można też poprzestać na a_4 i stosować dalej metodę paragrafu 97.

97. Zatrzymajmy się przy wykładniku $a_4 = 10^{\frac{1}{16}}$ mamy więc już na osi odciętych cztery punkty A_1, A_2, A_3, A_4, których odcięte są:

$$a_1 = \sqrt{10} = a_4^8; \quad a_2 = \sqrt{a_1} = a_4^4; \quad a_3 = \sqrt{a_2} = a_4^2; \quad a_4 = \sqrt{a_3};$$

oznaczmy przez

$$C_0, C_1\ C_2 \ldots C_s \ldots C_{16}$$

te punkty osi odciętych, których odcięte tworzą postęp geometryczny

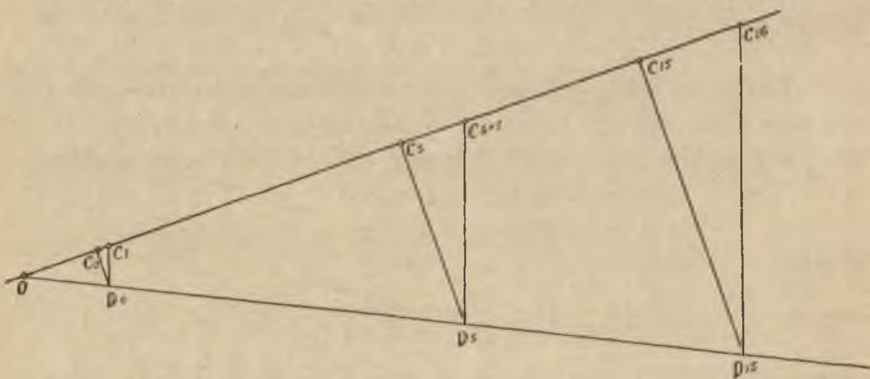
$$c_0 = 1; \; c_1 = a_4; \; c_2 = a_4^2; \; \ldots \; c_s = a_4^s; \; \ldots \; c_{16} = a_4^{16} = 10.$$

Z 17-tu punktów C znamy dotychczas 6:

$$c_0 = 1; \quad c_1 = a_4; \quad c_2 = a_3; \quad c_4 = a_2; \quad c_8 = a_1; \quad c_{16} = 10.$$

Ażeby znaleźć pozostałe, zauważmy, że

$$c_{12} = a_4^{12} = a_4^{\frac{8+16}{2}} = \sqrt{a_4^8 \cdot 10} = \sqrt{a_1 \cdot 10} = \sqrt{c_8 \cdot 10}.$$



Rys. 28.

Możemy więc znaleźć c_{12}, jako średnią proporcjonalną między c_8 i 10; podobnie c_{14}, jako średnią proporcjonalną między c_{12} i 10; i wreszcie c_{15} między c_{14} i 10. Brakujące jeszcze punkty można wyznaczyć albo tą samą metodą, albo też (rys. 28, dwukrotnie zmniejszony) przez punkt O poprowadzić jakąkolwiek prostą pomocniczą OE, obrać na niej dowolny punkt D_{15}, połączyć z C_{15}, i C_{16} linjami prostemi, a wtedy, mając już C_s, znajdziemy następny punkt C_{s+1}, prowadząc przez C_s równoległą do $C_{15}\,D_{15}$ aż do przecięcia z OE w punkcie D_s, a równoległa, poprowadzona przez D_s do $D_{15}\,C_{16}$, przetnie oś odciętych w żądanym punkcie C_{s+1}; gdyż, jak to widać z podobieństwa trójkątów,

$$O\,C_s\,D_s \sim O\,C_{15}\,D_{15};\; O\,C_{s+1}D_s \sim O\,C_{16}\,D_{15}$$

$$O\,C_s : O\,C_{15} = O\,D_s : O\,D_{15} = O\,C_{s+1} : O\,C_{16},$$

a więc

$$O\,C_{s+1} : O\,C_s = O\,C_{16} : O\,C_{15} = a_4 : 1.$$

W zasadzie możnaby zastąpić punkty C_{15} i C_{16} przez C_0 i C_1, unikając przez to wynajdywania średnich proporcjonalnych, omawianych w tym paragrafie; jednak, pod względem technicznym, rysunek stałby się przez to mniej dokładny: dokładniej się rysuje figurę podobną do większej, aniżeli do mniejszej.

Teraz już możemy wyznaczyć 17 punktów P_s, dając każdemu z nich odciętą c_s, rzędną $s/_{16}$ (przez s oznaczam liczby całkowite od 0 do 16).

Dodam jeszcze, że mało wprawny rysownik osiągnie dokładniejsze wyniki, rysując na papierze milimetrowym i ufając więcej gotowej podziałce, aniżeli własnej zręczności; dla biegłego rysownika, rozporządzającego dobrym aparatem rysunkowym, kratki byłyby tylko przeszkodą.

98. Mając już punkty P_s poprzedniego paragrafu, wykreślimy krzywą podług zasad następujących.

1) *Krzywa logarytmiczna jest ciągła*, gdyż zamienia się na wykładniczą przez przestawienie osi, a ciągłość funkcji wykładniczej była dowiedziona w § 66. Możemy więc wyrysować krzywą od pierwszego do ostatniego punktu, nie odrywając ołówka od papieru.

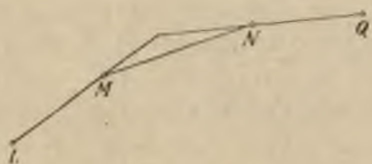
2) Unikać trzeba nagłych zmian kierunku, gdyż 3 dość bliskie punkty krzywej powinny leżeć w przybliżeniu na jednej prostej.

3) Jeżeli M i N są dowolnemi punktami krzywej, N wysunięty dalej na prawo, niż M, wtedy żaden z punktów krzywej,

leżących na prawo od *N*, i żaden z leżących na lewo od *M* nie leży powyżej prostej *MN*; i żaden z punktów łuku *MN* nie leży poniżej tej prostej.

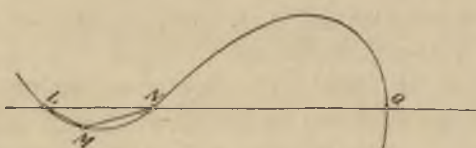
To wynika bezpośrednio z § 96 w tym przypadku, kiedy bierzemy pod uwagę wyłącznie punkty, których odcięte różnią się kolejno o stałą wielkość *r*; wyobraźmy sobie jednak, że *r* jest tak małe, że trzy po sobie następujące z tych punktów można uważać za należące do jednej prostej — wtedy własność ta, widzimy, że jest prawdziwa wogóle, przynajmniej z tą dokładnością, z jaką rysunek został wykonany.

Stąd wyprowadzamy wniosek:



Rys. 29.

4) *Jeżeli LMNQ są punktami krzywej logarytmicznej, i każdy z nich jest dalej na prawo wysunięty, niż poprzedni, wtedy żaden z punktów łuku MN nie leży zewnątrz trójkąta, którego boki leżą na prostych LM, MN i NQ* (rys. 29).



Rys. 30.

Tę ostatnią własność możnaby było, po wykreśleniu krzywej, stosować jako sprawdzian dokładności dla dowolnych czterech jej punktów; jest to jednak zupełnie zbyteczne, bo to samo można osiągnąć jednym rzutem oka. Rzeczywiście, ta własność nie wyraża nic więcej, jak tylko, że rozpatrywana krzywa zwraca swą wypukłość stale w jedną stronę, w przeciwieństwie do krzywej rys. 30.

99. Podług sporządzonego wykresu ułożymy teraz tabliczkę logarytmów trzycyfrowych. W tym celu wymierzymy przedewszystkiem rzędne tych punktów krzywej, których odcięte różnią się kolejno o 0,1. Pisząc pod N liczbę, obok pod *log* jej logarytm, powinniśmy dostać tablicę, zaczynającą się w ten sposób:

N	*log*
1,0	0,000
1,1	0,041
1,2	0,079
1,3	0,114

i t. d., aż do

. . . .

9,8	0,991
9,9	0,996
10,0	1,000

W tej tablicy możnaby opuścić z lewej strony przecinek, z prawej strony cechę, gdyż cechę odrazu znajdziemy, stosownie do położenia przecinka w liczbie.

Sprawdzimy, czy łuki krzywej, zawarte między dwoma następującemi po sobie punktami, których spółrzędne zostały w ten sposób w naszej tablicy wynotowane, nie różnią się widocznie od odpowiednich cięciw. W tym celu stosujemy jeszcze raz nierówność (6) § 92:

$$\frac{r}{N} < a^l - 1 + \sqrt{(a^l - 1)\,a^l}\ ,$$

zakładając $a = 10$, jako zasadę logarytmów, i $l = 0{,}001$, jak to wynika z dokładności naszego rysunku. Prawa strona tej nierówności jest w tym wypadku (§ 96) niemniejsza od 0,048, wystarczy więc uczynić

$$\frac{r}{N} < 0{,}048.$$

Różnica r między odciętemi dwóch następujących po sobie punktów jest 0,1; a więc powinno być

$$\frac{1}{10\,N} < 0{,}048,$$

czyli

$$N > \frac{1}{10.0{,}048} = \frac{100}{48} = 2\frac{1}{12}.$$

Możemy więc w każdym razie zastępować łuki cięciwami, począwszy od $N = 2{,}1$; poza tem, ażeby stosunek $\frac{r}{N}$ zawsze pozostawał mniejszy od 0,48 wystarczy wymierzyć jeszcze logarytmy liczb 1,02; 1,05; 1,15; 1,25; ... 1,95; 2,05. Jednak wymierzanie tych właśnie logarytmów jest niebardzo pewne: odpowiednie równoległe do osi rzędnych przecinają krzywą pod małemi kątami, nie dając wyraźnych punktów przecięcia.

Ażeby tę niedogodność usunąć, możemy przedłużyć wykres na prawo poza odciętą 10, znajdując graficznie logarytmy liczb: $10.a_4$; $10.a_4^2$; $10.a_4^3$; $10.a_4^4$; a wtedy będziemy mogli ułożyć dodatkową tabliczkę logarytmów liczb od 1 do np. 1,8, notując mantysy dla liczb, różniących się kolejno o 0,05.

W dalszym ciągu korzystać będziemy z gotowej tablicy czterocyfrowej. Sposób, w jaki tablica ta została obliczona, jest zupełnie różny od podanego tutaj, jednak nie będę go opisywał, gdyż uzasadnienie tego sposobu wykracza poza ramy algebry elementarnej.

100. Okażemy, w jaki sposób można znaleźć z tablicy logarytm takiej liczby, która bezpośrednio nie jest w tej tablicy umieszczona.

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć logarytm liczby 323,6. Ponieważ mamy tu 3 cyfry przed przecinkiem, przeto cecha logarytmu jest 2. W tablicy znajdziemy mantysę dla 323 i 324:

$$\log 323 = 2{,}5092$$
$$\log 324 = 2{,}5105.$$

Różnica między niemi jest 0,0013, a ponieważ poprzednia różnica ($\log 323 - \log 322$) jest taka sama, więc (§ 93) różnice między logarytmami liczb, zawartych między 323 i 324, są proporcjonalne do różnic między odpowiedniemi liczbami. Różnica między liczbą daną i najbliższą mniejszą od niej, pomieszczoną w tablicy, jest 0,6; oznaczając przez x odpowiednią różnicę między logarytmami dostaniemy więc proporcję:

$$x : 0{,}0013 = 0{,}6 : 1,$$

czyli:

$$x = \frac{0{,}0013 \,.\, 0{,}6}{1} = 0{,}00078.$$

Znaleźliśmy tym sposobem *poprawkę*, którą trzeba dodać do *log* 323, ażeby dostać logarytm szukany; nie będziemy jednak zatrzymywali piątej cyfry dziesiętnej, gdyż byłaby to tylko z pozoru większa dokładność, wobec tego, że w *log* 323 nie znamy piątej cyfry; odrzucamy więc 8, a ponieważ to jest więcej, niż połowa poprzedzającej jednostki, zwiększamy cyfrę 7 o 1; tym sposobem poprawka, którą należy dodać do *log* 323 jest 0,0008, a poszukiwany logarytm jest

$$\log 323{,}6 = 2{,}5092 + 0{,}0008 = 2{,}5100.$$

101. Obliczanie poprawki można sobie udogodnić różnemi sposobami, tak, ażeby rachunek odbywał się szybciej i sprawniej. Przedewszystkiem, układając proporcję, możemy opuszczać zera i przecinki, poprzedzające cyfry różne od zer, a otrzymany rezultat zmniejszyć tyle razy, ile razy przez to został powiększony.

Napiszemy więc:

$$x : 13 = 6 : 1$$

$$x = 78,$$

a następnie, dodając poprawkę do logarytmu, uwzględniamy, że ostatnia cyfra tak otrzymanej poprawki powinna być na piątem miejscu po przecinku: a po odrzuceniu tej ostatniej cyfry poprzedzającą stawiamy na czwartem:

$$\begin{array}{lrl} \log & 323 & = 2{,}5092 \\ \textit{poprawka} & & \quad\quad\;\; 78 \\ \hline \log & 323{,}6 & = 2{,}5100\,. \end{array}$$

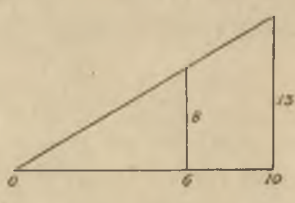
Możemy też proporcji wogóle nie układać: jeżeli zwiększenie liczby o 10 dziesiątych części jednostki wywołuje powiększenie mantysy o 13 jednostek, stojących na czwartem miejscu, to zwiększeniu liczby o 1 taką część odpowiada powiększenie mantysy o 1,3 takich jednostek, a zwiększeniu liczby o 6 takich części—powiększenie mantysy o 6 . 1, 3 = 7, 8.

W tablicy II Wojtowicza jest pomieszczona z boku z prawej strony tabliczka, zatytułowana „Poprawki“, która daje możność uniknięcia tego rachunku: w pierwszym szeregu u góry są wypisane cyfry od 1 do 9, z których trzeba wziąć pod uwagę ostatnią (czwartą) cyfrę liczby danej; potrzebną poprawkę, pomnożoną przez 10000, znajdziemy w tej tabliczce w tym szeregu poziomym, przed którym są dwie pierwsze cyfry danej liczby, i w tej kolumnie, nad którą jest cyfra czwarta tej liczby. Tak np., szukając logarytmu liczby 752,8, znajdujemy, że poprawka ze względu na czwartą cyfrę jest 5, a więc:

$$\begin{array}{rr} \textit{log}\ \ 752 & = 2,8762 \\ \textit{poprawka}\ \text{dla}\ 8 & 5 \\ \hline \textit{log}\ \ 752,8 & = 2,8767\,. \end{array}$$

102. Jeżeli rachunek jest tego rodzaju, że przypadkowe powiększenie lub zmniejszenie ostatniej cyfry mantysy o jedność jest dopuszczalne, wtedy możemy zastosować „*interpolację w wyobraźni*“: usiłujemy wyobrazić sobie wzrokowo jakąś wielkość, którą dzielimy w żądanym stosunku i oceniamy w przybliżeniu rezultat.

Rys. 31.

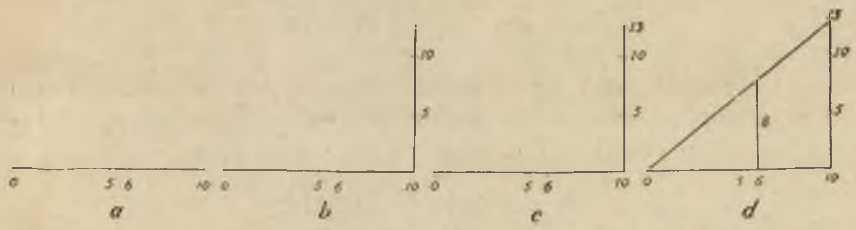


Rys. 32.

Jeżeli np., jak w poprzedniem zadaniu, mamy podzielić 13 w stosunku 6 : 10, wyobraźmy sobie, dajmy na to, pasek prostokątny (rys 31), który przerywamy, odcinając tą przerwą 6 dziesiątych części całego paska. Teraz długość paska przyjmujemy za 13 i długość części odciętej usiłujemy ocenić w tej nowej skali.

Albo też (rys. 32) wyobraźmy sobie część krzywej logarytmicznej od $x = 323$ do $x = 324$; wiemy już, że z dostatecznem przybliżeniem możemy ją uważać za odcinek linji prostej, a ponieważ skale na obu osiach są dowolne, więc i ten odcinek może być dowolnej długości i dowolnie nachylony do poziomu. Wyobraźmy sobie teraz prostą poziomą przez punkt początkowy odcinka i pionową przez punkt końcowy; utworzymy trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątna pozioma przedstawia różnicę liczb, pionowa różnicę logarytmów; odmierzywszy na poziomej daną różnicę 0,6, znajdujemy odcinek pionowy, przedstawiający poprawkę, którą należy zmierzyć, przyjmując, w naszym przykładzie, za jednostkę trzynastą część przyprostokątnej pionowej.

Można uniknąć wykonywania podziału gotowego odcinka na 13 części równych, jeżeli wpierw odmierzymy różnicę logarytmów, a później dopiero pociągniemy cięciwę; w ten sposób poszczególne stadja przedstawią się, jak na rys. 33 *a*, *b*, *c*, *d*.



Rys. 33.

Wszystko to, po niewielu próbach, wykonywa się w wyobraźni z błyskawiczną szybkością; należy jednak koniecznie, zanim się dojdzie do wprawy, sprawdzać rezultat rachunkiem, ażeby osiągnąć nietylko szybkość, ale i dokładność.

103. W początkowej części tablicy, od 100 do 400, piąta cyfra liczby wywiera wpływ na mantysę; jednak uwzględnianie jej zwykle jest bezcelowe, gdyż już czwarte cyfry są przeważnie tylko przybliżone.

Przypuśćmy, że poszukujemy *log* 118,47

$$\begin{array}{lll} & \log 118{,}4 & = 2{,}0734 \text{ (tabl. I)} \\ \textit{poprawka} & 3.7 & \phantom{= 2{,}07}21 \\ \hline & \log 118{,}\,47 & = 2{,}0736 \end{array}$$

Gdybyśmy uwzględnili tylko 4 cyfry liczby, znaleźlibyśmy

$$log\ 118{,}5 = 2{,}0737.$$

Dla liczb większych od 400 różnica tablicowa jest 10 lub mniej; odrzucenie piątej cyfry wywiera największy wpływ, jeżeli ta cyfra jest 5; ale w tym przypadku poprawka jest:

$$0{,}0010 . 0{,}05 = 0{,}00005,$$

a więc już nie wywiera wpływu na czwartą cyfrę mantysy.

104. Przypuśćmy, że mamy znaleźć *log* 42,68; tej liczby niema wprawdzie w tablicy, ale wiemy że jej logarytm ma cechę 1, a co do mantysy, to dostaniemy taką samą, jeżeli daną liczbę pomnożymy lub podzielimy przez 10 podniesione do jakiejkolwiek potęgi całkowitej; weźmiemy więc mantysę dla 426,8.

$$\begin{array}{rr} log\ 42{,}6 = & 1{,}6294 \\ \textit{poprawka}\ 8 . 10 & 8 \\ \hline log\ 42{,}68 = & 1{,}6302. \end{array}$$

I wogóle przy poszukiwaniu mantysy nie zwracamy uwagi na położenie przecinka w liczbie, ani też na zera między przecinkiem i pierwszą cyfrą znaczącą, np.:

$$log\ 0{,}00893 = \bar{3}{,}9509 .$$

Dostaliśmy logarytm z cechą ujemną, mantysą dodatnią; gdyby nam był potrzebny całkowicie ujemny, znaleźlibyśmy:

$$-3 + 0{,}9509 = -2{,}0491 .$$

105. Pokażemy teraz, jak rozwiązać zadanie odwrotne, to jest jak znaleźć liczbę, której logarytm jest wiadomy. Nie przedstawia to żadnej trudności, gdy mantysa danego logarytmu znajduje się w tablicy. Naprzykład: znaleźć liczbę N, której logarytm jest 2,7084. Pierwszą cyfrę mantysy 7 znajdujemy obok liczb, zaczynających się od cyfry 5, i widzimy, że mantysa danego logarytmu odpowiada porządkowi cyfr w liczbie

511.

Teraz uwzględniamy cechę: ponieważ cecha jest 2, więc liczba jest zawarta między 100 i 1000, jest to więc liczba 511. Otrzymany rezultat często się zapisuje w ten sposób:

$$num\ log\ 2{,}7084 = 511;$$

skrót *num* przed skrótem *log* oznacza numerus (liczba); równanie powyższe czytamy tak: liczba, której logarytm jest 2,7084, równa się 511.

Podobnie znajdziemy:

$$num\ log\ 0{,}8482 = 7{,}05,$$

gdyż cecha 0 wskazuje, że liczba jest większa od 1 i mniejsza od 10.

Inny przykład:

$$num\ log\ \bar{2}{,}2648 = 0{,}0184.$$

I tu naprzód znaleźliśmy porządek cyfr w liczbie: 184, a następnie dopisaliśmy tyle zer na początku, ile cecha zawiera ujemnych jedności, i pierwsze zero oddzieliliśmy przecinkiem.

106. Znajdźmy liczbę, której logarytm jest 2,3885.

Danej mantysy nie znajdujemy w tablicy. Jest ona zawarta między

$$3874 \text{ i } 3892,$$

dającemi różnicę tablicową 18. Pierwsza odpowiada porządkowi cyfr w liczbie

$$244,$$

druga

$$245.$$

Liczba szukana zawierać będzie więc cyfry 244, a różnica między logarytmem danym i najbliższym mniejszym określi następną cyfrę, czwartą. Ta różnica jest 11; i jeżeli szukaną czwartą cyfrę oznaczymy przez y, to

$$y : 10 = 11 : 18,$$

czyli

$$y = \frac{110}{18} = 6;$$

a ponieważ cecha jest 2, więc liczba zawiera się między 100 i 1000, trzy cyfry będą przed przecinkiem:

$$num\ log\ 2{,}3885 = 244{,}6.$$

Podobnie:

$$num\ log\ \bar{3},9403 = 0,008716\,;$$

gdyż dla najbliższej mniejszej mantysy

$$9400$$

znajdujemy porządek cyfr w liczbie

$$871\,;$$

różnica tablicowa jest 5, różnica między mantysą daną i najbliższą mniejszą 3. Dzielimy 3 . 10 przez 5, dostajemy 6 jako czwartą cyfrę liczby; wreszcie uwzględniamy cechę.

107. Jeżeli jest dany logarytm całkowicie ujemny, to przed znalezieniem liczby przekształcamy go tak, żeby cecha była ujemna, mantysa dodatnia. Np., znaleźć liczbę, której logarytm jest $-1,7839$.

$$-1,7839 = -2 + (1 - 0,7839) = \bar{2},2161$$

$$num\ log\ \bar{2},2161 = 0,016447.$$

Cyfry czwarta i piąta powstały z podzielenia różnicy między mantysą daną i bezpośrednio mniejszą, znalezioną w tablicy II, t. j. 13, zwiększonej 10 razy, przez różnicę tablicową 27; jednak piąta cyfra nie jest pewna, i można zasadniczo poprzestawać na wyznaczaniu tylu cyfr liczby, ile jest cyfr w mantysie, a więc nie będzie błędu, jeżeli jako rozwiązanie ostatniego zadania podamy:

$$0,01645.$$

108. Znajdźmy jeszcze *num log* 0,0315. Mamy tu mantysę niewiększą od tych, jakie są pomieszczone w tablicy I. Najbliższa mantysa jest

$$0314\,;$$

odpowiedni porządek cyfr w liczbie jest

$$1075\,;$$

a uwzględniając cechę, dostaniemy

$$num\ log\ 0,0315 = 1,075.$$

109. Rozwiążemy kilka zadań z zastosowaniem tablicy logarytmów.

Zadanie 1-sze. Znaleźć iloczyn

$$x = 12 \times 0{,}042 \times 0{,}8268.$$

Znajdziemy logarytmy wszystkich czynników i dodamy; będzie to logarytm iloczynu, a znalazłszy odpowiednią liczbę, dostaniemy sam iloczyn.

$$\log x = \log 12 + \log 0{,}042 + \log 0{,}8268$$

$$\begin{aligned} \log\ 12 &= 1{,}0792 \\ \log\ 0{,}042 &= \bar{2}{,}6232 \\ \log\ 0{,}8268 &= \bar{1}{,}9174 \\ \hline \log\ x &= \bar{1}{,}6198 \\ x &= 0{,}4167. \end{aligned}$$

Przy dodawaniu logarytmów, z których jedne są całkowicie dodatnie, inne zaś mają cechę ujemną i mantysę dodatnią, należy po skończeniu dodawania mantys wykonać uważnie dodawanie algebraiczne cech, *z uwzględnieniem ich znaków.*

Zadanie 2-gie. Znaleźć iloraz

$$x = \frac{67{,}2}{793}.$$

Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$\log x = \log 67{,}2 - \log 793,$$

czyli

$$\log x = 1{,}8274 - 2{,}8993 = -1{,}0719.$$

Ten logarytm ujemny należałoby przekształcić tak, żeby tylko cecha była ujemna, mantysa dodatnia:

$$\log x = \bar{2}{,}9281.$$

Zamiast tego można odrazu zastosować kologarytm (§ 87):

$$x = 67{,}2 \times \frac{1}{793},$$

więc

$$\log x = \log 67{,}2 + \log \frac{1}{793},$$

czyli

$$\log x = \log 67{,}2 + \operatorname{colog} 793.$$

Nie przepisując samego logarytmu liczby 793 z tablicy, możemy go odrazu odejmować od 0, mianowicie cechę od — 1, mantysę od + 1:

$$\log x = 1{,}8274 + \bar{3}{,}1007 = \bar{2}{,}9281.$$

Znajdujemy teraz x:

$$x = 0{,}08474.$$

Zadanie 3-cie. Znaleźć wartość:

$$x = \frac{0{,}0843}{0{,}0064}.$$

$$\log x = \log 0{,}0843 + \operatorname{colog} 0{,}0064$$

$$= \bar{2}{,}9258 + 2{,}1938 = 1{,}1196$$

$$x = 13{,}17.$$

Przy znajdowaniu cechy kologarytmu, od — 1 należało odjąć cechę *log* 0,0064, czyli — 3, a więc — 1 — (— 3) = 2.

Zadanie 4-te. Znaleźć wartość:

$$x = (0{,}0587)^3.$$

Biorąc logarytmy obu stron, mamy

$$\log x = 3 \log 0{,}0587,$$

czyli

$$\log x = \bar{2}{,}7686 \times 3.$$

Przy wykonywaniu mnożenia należy pamiętać o tem, że mamy tu do pomnożenia — 2 + 0,7686 przez 3. Otrzymamy:

$$\log x = \bar{4}{,}3058,$$

skąd

$$x = 0{,}0002022.$$

Zadanie 5-te. Znaleźć wartość

$$x = \sqrt{0{,}00345.}$$

Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$\log x = {}^1/_2 \log 0{,}00345,$$

czyli

$$\log x = {}^1/_2 \times \bar{3}{,}5378.$$

Przy wykonywaniu dzielenia tego logarytmu przez 2 napotykamy trudność z tego powodu, że cecha jest ujemna, mantysa dodatnia, a cecha nie jest podzielna przez 2. Dodajemy więc do cechy tyle jednostek ujemnych, ażeby dzielenie dało się wykonać, a do mantysy dodajemy tyleż jednostek dodatnich. Będzie więc:

$$\log x = \frac{-3 + 0{,}5378}{2} = \frac{-4 + 1{,}5378}{2} =$$

$$= -2 + 0{,}7689 = \bar{2}{,}7689.$$

Stąd

$$x = 0{,}05874.$$

Zadanie 6-te. Znaleźć wartość:

$$x = \sqrt[3]{0{,}0004687}.$$

$$\log x = {}^1/_3 \log 0{,}0004687 = {}^1/_3 \times \bar{4}{,}6709.$$

Ponieważ cecha się nie dzieli przez 3, przeto dodajemy do niej -2, a do mantysy $+2$:

$$\log x = \bar{2}{,}8903,$$

skąd

$$x = 0{,}07768.$$

Zadanie 7-me. Obliczyć wartość

$$x = (0{,}082)^{1{,}53}.$$

Stąd mamy

$$\log x = 1{,}53 \times \log 0{,}082 = 1{,}53 \times \bar{2}{,}9138.$$

Zauważmy, że, pomnożywszy ujemną cechę przez mnożnik, dostaniemy obok całkowitej ujemny ułamek, który należy połączyć z mantysą, a po pomnożeniu dodatniej mantysy dostaniemy całkowitą, którą należy połączyć z cechą.

$$(-2) \times 1{,}53 = -3{,}06$$

$$\begin{array}{r} 0{,}9138 \\ \times\, 1{,}53 \\ \hline 0{,}9138 \\ 4569 \\ 274 \\ \hline 1{,}3981 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -3{,}06 + 1{,}3981 = \\ \\ = \bar{2}{,}3381. \end{array}$$

Można też zamienić logarytm na całkowicie ujemny, następnie wykonać mnożenie, a potem przejść znowu do logarytmu z cechą ujemną i mantysą dodatnią:

$$log\ x = 1{,}53 \times (-1{,}0862) = -1{,}6619 =$$

$$\begin{array}{r} 1{,}0862 \\ \times 1{,}53 \\ \hline 1{,}0862 \\ 5431 \\ 326 \\ \hline 1{,}6619 \end{array} \qquad \begin{array}{l} = \bar{2}{,}3381, \\ \\ x = 0{,}02178. \end{array}$$

110. Zapomocą tablic logarytmów można rozwiązywać niektóre *równania wykładnicze*, to jest takie, w których niewiadoma występuje w wykładniku.

Równanie wykładnicze postaci

$$a^x = b,$$

gdzie a i b są danemi liczbami dodatniemi ($a \neq 1$), może być zawsze rozwiązane. W tym celu należy przyrównać logarytmy obu stron tego równania:

$$x\ log\ a = log\ b,$$

skąd

$$x = \frac{log\ b}{log\ a}.$$

Tak np. przypuśćmy, że mamy do rozwiązania równanie

$$(0{,}826)^x = 2{,}88.$$

Biorąc logarytmy z obu stron, otrzymujemy

$$x\ log\ 0{,}826 = log\ 2{,}88,$$

stąd

$$x = \frac{log\ 2{,}88}{log\ 0{,}826} = \frac{0{,}4594}{-0{,}0830}.$$

Ponieważ mamy tu wykonać dzielenie przez *log* 0,826, przeto musimy wyrazić ten logarytm pod postacią logarytmu całkowicie ujemnego. Oczywiście dzielenie to możemy wykonać zapomocą logarytmów; lecz ponieważ liczby ujemne nie mają logarytmów, więc znajdujemy naprzód wartość bezwzględną ilorazu, a następnie piszemy przed wynikiem znak właściwy. Wykonywając wskazane dzielenie, znajdziemy:

$$x = -5{,}535.$$

Można jeszcze zapomocą logarytmów rozwiązywać równania z niewiadomą, wchodzącą do wykładnika, nieco więcej złożone, niż podane wyżej; niektóre z takich równań podajemy w zadaniach.

111. Podamy jeszcze przykład stosowania logarytmów do rachunków praktycznych. Przypuśćmy, że chcemy obliczyć promień południka ziemskiego, pamiętając, że metr jest jedną dziesięciomiljonową częścią ćwiartki południka, i że stosunek okręgu koła do średnicy $\pi = 3{,}14$. Oznaczając długość w metrach szukanego promienia przez r, znajdziemy

$$2\pi r = 4 \,.\, 10^7$$

$$r = \frac{2 \,.\, 10^7}{\pi},$$

a więc

$$\begin{aligned} \log r &= \log 2 + 7 - \log \pi \\ &= 7{,}3010 - 0{,}4969 = 6{,}8041 \end{aligned}$$

$$num\,\log 6{,}8041 = 6370 \,.\, 10^3.$$

Szukana długość promienia jest więc 6370 *km*. Moglibyśmy uwzględnić więcej cyfr liczby π, ale rachunek i tak nie byłby ścisły, gdyż południk ziemski nie jest kołem.

ZADANIA DO ROZDZIAŁU IX.

1. Jakie są logarytmy liczb 9; 81; 729; 6561; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{243}$ przy zasadzie 3?

2. Jakie są logarytmy tych samych liczb przy zasadzie *a)* 9; *b)* $\frac{1}{3}$?

3. Jakie są logarytmy liczby 4096 przy zasadzie 2; 4; 8; 16; 4096; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{4096}$?

4. Jakie są logarytmy liczb $\frac{9}{25}$; $\frac{27}{125}$; $\frac{81}{625}$ przy zasadzie *a)* $\frac{3}{5}$; *b)* $\frac{5}{3}$?

5. Znaleźć z dokładnością do 1 logarytmy liczb 5; 10; 32; 82; 215; 713; 1295 przy zasadzie *a)* 6; *b)* 9.

Znaleźć logarytmy następujących wyrażeń:

6. $\dfrac{(p+q)^x}{(r+s)^{y-z}}$.   7. $\dfrac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[q]{ab}}$.

8. $\dfrac{\sqrt[p]{a+b}\cdot\sqrt[p]{ab}}{\sqrt[p+q]{a-b}\cdot\sqrt[pq]{\dfrac{a}{b}}}$.   9. $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}$.

10. Wiedząc, że logarytmy naturalne liczb 2; 3; 7; 10 są 0,69315; 1,09861; 1,94591; 2,30258, znaleźć logarytmy zwyczajne tych liczb.

11. Znaleźć w tablicy czterocyfrowej logarytmy następujących liczb: 218; 2,18; 21800; 0,00218; 500,4; 500,5; 0,08433.

12. Znaleźć w tabliczce I $\log 100{,}5$; $\log 1{,}0335$.

13. Wiedząc, że $\log 2 = 0{,}30103$ i $\log 3 = 0{,}47712$, znaleźć bez użycia tablic logarytmy czterocyfrowe następujących liczb: 16; 5; 125; 12; 30; 1,5; 2,5; 40; 3,6; 0,0036; 1080; $\sqrt[5]{0{,}0125}$; $\sqrt{31{,}25}$ (dla znalezienia np. $\log 5$ należy zwrócić uwagę na to, że $5 = \frac{10}{2}$ i t. d.).

14. Z następujących równań znaleźć wartość na x bez użycia tablic:

a) $\log x = 2$; *b)* $\log x = 3$; *c)* $\log x = 0{,}5$; *d)* $\log x = -\frac{5}{2}$; *e)* $\log x = \log a - \log b$; *f)* $\log x = n \log a + n \log b$; *g)* $\log x = 3 \log 18 - 4 \log 12$; *h)* $2 \log x = \log \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$; *i)* $3 \log x = \frac{5}{4} + 2 \log \frac{x}{3}$.

Obliczyć zapomocą tablic logarytmów wartości następujących wyrażeń:

15. $8{,}76 : 0{,}0576$.   16. $\dfrac{4{,}396 \times 0{,}7365}{11{,}56}$.

17. $(0{,}877)^4$.   18. $(8{,}095)^{-3}$.

19. $\sqrt[7]{0{,}06647}$.   20. $\sqrt[3]{\frac{229}{531}}$.

21. $\frac{109}{716}\sqrt{\frac{76}{93}}$.   22. $\sqrt[4]{1{,}84+\sqrt[5]{31}}$

(należy naprzód obliczyć $\sqrt[5]{31}$ i dodać do 1,84).

23. $\sqrt[5]{(2{,}459)^{6,5}-(8{,}74)^{2,3}}$.

Rozwiązać następujące równania:

24. $(0{,}35)^x = 54{,}8$.

25. $4^{x+2} = 60$.

26. $5^{2x-1} = 71{,}7$.

27. $10^{(5-x)(6-x)} = 100$.

28. $ab = \sqrt[x]{c}$.

29. $3^{x^2-4x+3} = 1200$.

30. $8^{2x} - 9 \, . \, 8^x + 20 = 0$.

31. $5^{2x} - 7 \, . \, 5^x = 450$.

32. $5^{2x} \times 3^x = 1875 \times 225$.

33. $\log x + \log y = 2$; $5\,x^2 - 3\,y^2 = 1925$.

34. Obliczyć powierzchnię, objętość i masę kuli ziemskiej (gęstość 5,51).

35. Promień kuli słonecznej jest $6954 \, . \, 10^2$ *km*, gęstość 0,256, jeżeli gęstość ziemi przyjąć za 1. Obliczyć masę słońca; jaki jest stosunek masy słońca do masy ziemi?

36. Średnia odległość ziemi od słońca jest $149{,}5 \, . \, 10^6$ *km*; jaką drogę przebywa ziemia w ciągu jednego dnia?

37. Jak daleko widać powierzchnię morza z punktu, wyniesionego h metrów nad powierzchnię, jeżeli wskutek załamania światła w atmosferze odległość ta jest o 7,7% większa od obliczonej bez uwzględnienia załamania światła? Przykład: $h = 40$ (wysokość latarni morskiej na Helu).

X.

Procenty.

112. *Procentem* nazywamy wynagrodzenie, płacone za użycie wypożyczonych pieniędzy. Pieniądze wypożyczone nazywamy *kapitałem*. Sumę kapitału wraz z procentem, należnym za pewien przeciąg czasu, nazywać będziemy sumą, na którą zamienia się dany kapitał po upływie tegoż czasu, albo krócej *sumą*.

Procent może być dwojaki: *prosty* i *składany*. Gdy procent rachuje się zawsze od samego kapitału początkowego, wtedy nazywamy go *prostym*: lecz jeżeli procent należny, w chwili, gdy przypada jego wypłata, dołączamy do kapitału i w następstwie procent rachujemy od całej sumy, wtedy nazywamy go *składanym*.

Stopą procentu nazywamy kwotę, płaconą za użycie pewnej oznaczonej ilości pieniędzy przez pewien oznaczony czas. W *praktyce* tą ilością pieniędzy jest zwykle 100 zł., a czasem jeden rok. Gdy więc mówimy, że stopa procentu jest 4 od sta (4%), to znaczy, że za użycie 100 złotych przez ciąg jednego roku płacimy 4 zł. W *teorji* dogodną jest rzeczą, jak to zaraz zobaczymy, używać osobnego znaku dla oznaczenia procentu od *jednego* złotego za jeden rok.

113. *Znaleźć sumę, na którą się zamieni dany kapitał po upływie danego czasu przy procencie prostym.*

Niech K oznacza liczbę złotych, zawartą w kapitale, n liczbę lat, r procent od jednego złotego za jeden rok, wyrażony w ułamku złotego i M sumę szukaną, wyrażoną w złotych. Ponieważ r jest procentem od jednego złotego za rok, przeto Kr jest procentem od K złotych za rok, a nKr jest procentem od K złotych za n lat; będzie więc:

$$M = K + nKr = K\,(1 + nr).$$

Z równania $M = K\,(1 + nr)$ można znaleźć jedną z czterech wielkości M, K, n, r, gdy trzy inne są dane. A mianowicie:

$$K = \frac{M}{1 + nr};\; n = \frac{M - K}{Kr};\; r = \frac{M - K}{Kn}.$$

114. *Znaleźć sumę, na którą się zamieni dany kapitał po upływie danego czasu przy procencie składanym.*

Niech K oznacza liczbę złotych kapitału, n — liczbę lat, r — procent od jednego złotego za rok, wyrażony w ułamku złotego, i M — liczbę złotych, zawartą w szukanej sumie. Oznaczmy nadto przez R sumę, na którą się zamieni jeden złoty po upływie jednego roku; wtedy $R = 1 + r$. Zatem KR będzie sumą, na którą się zamieni K złotych w ciągu jednego roku. Więc suma, na którą się zamieni KR złotych, także w ciągu jednego roku, będzie KRR, czyli KR^2; to ostatnie zatem wyrażać będzie sumę, na którą się zamieni K złotych w ciągu *dwóch* lat. Podobnież suma, na którą się zamieni KR^2 złotych w ciągu roku, będzie: KR^2R, czyli KR^3; i to będzie sumą, na którą się zamieni kapitał K złotych po upływie *trzech* lat.

Postępując dalej tym samym sposobem znajdziemy, że suma, na którą się zamieni kapitał K złotych po upływie n lat, będzie KR^n, więc:

$$M = KR^n.$$

Sam procent za przeciąg tych n lat wynosi:

$$KR^n - K = K(R^n - 1).$$

115. *Wartość teraźniejsza*, czyli *obecna*, pewnej sumy mającej być wypłaconą na końcu danego czasu, jest to ten kapitał, który wraz ze swoim procentem za uważany przeciąg czasu zamieni się na tę sumę. Przy oznaczeniach, powyżej przyjętych, K jest wartością teraźniejszą sumy M.

Dyskontem (potrącenie procentu) nazywamy wynagrodzenie za wypłacenie sumy należnej przed tym terminem, w którym miała być wypłacona.

Z określenia *wartości teraźniejszej* wynika, że dług, mający być zapłacony w pewnym oznaczonym terminie, jest w zupełności pokryty przez wypłacenie wcześniej jego *wartości teraźniejszej*, odpowiadającej tej chwili, w której następuje wypłata. Stąd dyskonto jest równe różnicy pomiędzy sumą płatną w oznaczonym terminie, a jej wartością teraźniejszą.

116. *Znaleźć wartość obecną sumy płatnej na końcu danego czasu i dyskonto.*

Niech K będzie liczbą złotych, wyrażających wartość teraźniejszą, n liczbą lat, r procentem od jednego złotego za jeden rok, wyrażonym w ułamku złotego, M liczbą złotych, oznaczających sumę należną, i D dyskontem. Nadto niech będzie:

$$R = 1 + r.$$

Wtedy — przy procencie prostym:

$$M = K(1 + nr), \ \S\ 113,$$

skąd:

$$K = \frac{M}{1 + nr}; \ D = M - K = \frac{Mnr}{1 + nr}.$$

Przy procencie składanym:

$$M = KR^n, \ \S\ 114,$$

skąd:

$$K = \frac{M}{R^n}; \ D = M - K = \frac{M(R^n - 1)}{R^n}.$$

117. W praktyce zwykłą jest rzeczą, zamiast *dyskonta* tak określonego, jak było tutaj wyżej podane, brać *procent* od całej sumy, wypłaconej przed terminem. Tak naprzykład przy procencie prostym, zamiast $\frac{Mnr}{1 + nr}$, płacący otrzyma Mnr, jako wynagrodzenie za natychmiastową wypłatę.

118. *Na początku każdego roku do kasy wnosimy na procent K zł.; znaleźć, na jaką sumę zamienią się wszystkie wniesione raty po upływie n lat przy procencie składanym.*

Oznaczmy przez M szukaną sumę, przez r procent roczny od jednego złotego, wyrażony w ułamku złotego, i nakoniec uczyńmy $R = 1 + r$. Oczywistą jest rzeczą, że rata K, oddana na początku pierwszego roku do kasy, pozostanie na procencie przez przeciąg n lat; podług wzoru § 114 zamieni się więc na sumę KR^n; taka sama rata K, oddana do kasy na początku drugiego roku, pozostanie na procencie $n - 1$ lat, zamieni się więc na sumę KR^{n-1}; podobnież trzecia rata K, oddana na początku trzeciego roku, pozostanie na procencie przez $n - 2$ lata, zamieni się przeto na sumę KR^{n-2}, i tak dalej; — ostatnia rata K, oddana na początku n—tego roku, zamieni się na końcu tegoż roku na sumę KR. Całkowita więc wartość złożonych rat po upływie n lat będzie sumą wyrazów postępu ilorazowego:

$$KR^n,\ KR^{n-1},\ KR^{n-2} \ldots KR;$$

czyli będzie:

$$M = KR^n + KR^{n-1} + KR^{n-2} + \ldots + KR.$$

Na zasadzie wzoru (1) § 40 otrzymamy ostatecznie:

$$M = \frac{KR^{n+1} - KR}{R - 1},$$

czyli:

$$M = KR \cdot \frac{R^n - 1}{R - 1}.$$

119. *Znaleźć, jaką ratę należy płacić rocznie, aby umorzyć w przeciągu n lat kapitał wypożyczony wraz z procentem składanym.*

Przypuśćmy, że dzisiaj zaciągamy pożyczkę K złotych, którą chcemy umorzyć w ciągu n lat przez wypłacanie równych rat na końcu każdego roku. Oznaczmy procent od jednego złotego na rok, wyrażony w ułamku złotego, przez r, przez a — ratę roczną, i uczyńmy $R = 1 + r$. Wtedy kapitał K oczywiście zamieni się po upływie n lat na sumę KR^n; suma wszystkich rat rocznych, wraz z ich procentami składanemi, powinna się równać KR^n. Stąd otrzymujemy równość:

$$KR^n = aR^{n-1} + aR^{n-2} + \ldots + aR + a,$$

czyli:

$$KR^n = a\,\frac{R^n - 1}{R - 1}.$$

Z równości tej z łatwością znajdziemy a. Taż sama równość służyć będzie i do rozwiązania innych jeszcze zagadnień, odnoszących się do rocznych wypłat.

120. Do rozwiązywania zadań na procenty składane mogą być używane tablice logarytmów. Podług § 112 główny wzór na procenty składane jest:

$$M = K \cdot R^n,$$

gdzie K oznacza kapitał początkowy, M sumę, na którą ten kapitał się zamieni po upływie lat n, R zaś równa się $1+r$, gdzie r jest procentem od jednostki kapitału za jeden rok. Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$\log M = \log K + n \log R. \tag{1}$$

równanie, które daje nam odpowiedź na te wszystkie pytania, jakie się odnoszą do wzoru głównego. Mianowicie: równanie (1) bezpośrednio daje nam odpowiedź na to pytanie: na co się zamieni dany kapitał K po upływie n lat przy procencie składanym po 100 r od sta na rok. Gdyby było wiadome M, R i n, a szukane K, wtedy otrzymalibyśmy:

$$\log K = \log M - n \log R \ldots \tag{2}$$

Gdyby były wiadome M, K i n, a szukana stopa procentu, wtedy mielibyśmy:

$$\log R = \frac{\log M - \log K}{n}. \tag{3}$$

Zapomocą tego wzoru znaleźlibyśmy R, to jest $1+r$; odejmując od znalezionej wartości 1 i mnożąc wynik przez 100, otrzymalibyśmy procent od sta na rok.

Nakoniec gdybyśmy chcieli znaleźć n z wiadomych M, K i R, wtedy byłoby:

$$n = \frac{\log M - \log K}{\log R}. \tag{4}$$

Należy jednak zwrócić uwagę tutaj, że przy pomocy tablic logarytmów cztero-, a nawet pięciocyfrowych, tylko zadania o procentach składanych z małemi stosunkowo liczbami mogą być rozwiązane z wystarczającą dokładnością. Większa część zadań, odnoszących się do procentów składanych, wymaga tablic logarytmów o znacznie większej liczbie cyfr dziesiętnych: tu należą np. zagadnienia o umarzaniu pożyczek. Zagadnienie, często zadawane, na jaką sumę zamieniłby się jeden grosz oddany na procent składany w roku narodzenia się Chrystusa do daty obecnej, które teoretycznie rozwiązuje się bardzo prosto zapomocą wzoru (1), wymaga do ścisłego obliczenia logarytmów ze znaczną liczbą cyfr dziesiętnych.

ZADANIA DO ROZDZIAŁU X.

1. Na jaką sumę zamieni się kapitał, wynoszący 17500 zł., przy procencie składanym 4% po upływie 36 lat?

2. Jaki kapitał zamieni się po upływie 10 lat, przy procencie składanym $4\frac{1}{2}\%$, na sumę 14595 zł.?

3. Na jaki procent trzeba wypożyczyć kapitał 36740 zł., ażeby się on zamienił po 15 latach na 79000 zł.?

4. Po ilu latach kapitał 17190 zł., przy procencie składanym $4\frac{3}{4}\%$ zamieni się na 60177 zł.?

5. Po ilu latach potroi się kapitał przy procencie składanym $4\frac{1}{2}\%$?

6. Na początku każdego roku do kasy wnosimy 125 zł.; znaleźć, na jaką sumę zamienią się wszystkie wniesione raty po upływie 12 lat przy procencie składanym 5%?

7. Znaleźć, jaką ratę należy płacić rocznie, ażeby umorzyć w przeciągu 25 lat kapitał 10000 zł. i jego procenty składane przy stopie procentu $4\frac{1}{2}\%$?

XI.

Przemiany, przestawienia i połączenia.

121. Jeżeli mamy do rozporządzenia n jakichkolwiek przedmiotów — nazwijmy je w ogólności *elementami*, — to możemy ułożyć je wszystkie, lub też niektóre z nich, przypuśćmy w liczbie r, w pewnym oznaczonym porządku; mówimy, że możemy utworzyć *zestawienie* r elementów z pośród tych wszystkich n elementów.

Rozróżniamy następujące ważniejsze przypadki zestawień:

1) Każde zestawienie składa się z liczby elementów, która jest mniejsza, aniżeli liczba wszystkich elementów danych, a zestawienia, różniące się porządkiem elementów, uważamy za różne; takie zestawienia nazywają się *przemianami* lub *warjacjami*.

Np. z trzech liter abc, branych po dwie, można utworzyć następujące przemiany:

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bc,\ cb.$$

2) Zestawienia różnią się tylko porządkiem elementów, ale w każdem występują wszystkie elementy dane; takie zestawienia nazywają się *przestawieniami* lub *permutacjami*.

Np. z trzech liter *abc* można utworzyć następujące przestawienia:

abc, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*, *cba*.

3) Każde zestawienie składa się z liczby elementów, która jest mniejsza, aniżeli liczba wszystkich elementów danych, a zestawienia, różniące się tylko porządkiem elementów, uważamy za identyczne; takie zestawienia nazywamy *połączeniami* lub *kombinacjami*.

Np. z trzech liter *abc*, branych po dwie, można utworzyć następujące kombinacje:

ab, *bc*, *ca*.

Zestawienia *ab* i *ba*, będące różnemi *przestawieniami* dwóch przedmiotów *a* i *b*, tworzą jedno *połączenie (jedną kombinację)*, podobnież zbiory *ac* i *ca* także tworzą jedno *połączenie*, również *bc* i *cb*.

122. *Liczba przemian (warjacyj) z n przedmiotów, branych po r naraz, jest:*

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

Niech będzie n głosek a, b, c, d..., przedstawiających tyleż przedmiotów. Znajdziemy naprzód liczbę przemian z tych głosek, branych po dwie naraz. W tym celu umieśćmy a przed każdą z pozostałych głosek; otrzymamy tym sposobem $n-1$ przemian, w których a znajduje się na pierwszem miejscu. Umieśćmy następnie b przed każdą z pozostałych głosek; otrzymamy tym sposobem $n-1$ przemian, z których każda zaczyna się od c. I tak dalej. Więc wszystkich przemian z n głosek, branych po *dwie* naraz, będzie: $n(n-1)$. Znajdziemy teraz liczbę przemian z tych n głosek, branych po *trzy* naraz. Pokazaliśmy dopiero co, że z n głosek możemy utworzyć $n(n-1)$ przemian, z których każda zawiera po dwie głoski; zatem z $n-1$ głosek b, c, d... możemy utworzyć $(n-1)(n-2)$ przemian, biorąc te głoski po dwie naraz. Utworzywszy te

$(n-1)(n-2)$ przemian z głosek b, c, d..., umieśćmy następnie głoskę a przed każdą z tych przemian; otrzymamy tym sposobem $(n-1)(n-2)$ przemian, zawierających po trzy głoski, i w których a znajduje się na pierwszem miejscu. Podobnie będzie $(n-1)(n-2)$ przemian, zawierających po trzy głoski i zaczynających się każda od b. Podobnie tyleż będzie takich przemian, zaczynających się od c. I tak dalej. Ostatecznie więc wszystkich przemian z n głosek, branych po trzy naraz, będzie: $n(n-1)(n-2)$. Z rozważania tych i tym podobnych przypadków możnaby się domyślić, że liczba przemian z n głosek, branych po r naraz, jest:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1);$$

i pokażemy, że tak jest w rzeczy samej. Przypuśćmy bowiem, że już jest wiadome, iż liczba przemian z n głosek, branych po $r-1$ naraz, jest:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\{n-(r-1)+1\};$$

dowiedziemy, że podobny wzór wyrażać będzie i liczbę przemian z n głosek, branych po r naraz. Gdyż z $n-1$ głosek b, c, d... możemy podług założenia utworzyć: $(n-1)(n-2)\ldots\ldots\{n-1-(r-1)+1\}$ przemian, każda po $r-1$ głosek; umieśćmy a przed każdą z tych przemian, a otrzymamy tyleż przemian, zawierających po r głosek i zaczynających się od a. Podobnież taka sama będzie liczba przemian, zawierających po r głosek i zaczynających się każda od b. I jeszcze taka sama będzie liczba przemian, zawierających po r głosek i zaczynających się każda od c. I tak dalej. Ostatecznie więc liczba przemian z n głosek, branych po r naraz, będzie:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1).$$

Jeżeli zatem wzór ten jest prawdziwy, gdy bierzemy po $r-1$ głosek naraz, to jest prawdziwy i wtedy, gdy bierzemy po r głosek naraz. Lecz ponieważ widzieliśmy, iż jest prawdziwy wtedy, gdy bierzemy po *trzy* głoski naraz, przeto wypada z powyższego dowodzenia, że jest prawdziwy i wtedy, gdy bierzemy po cztery głoski, a zatem i wtedy, gdy bierzemy po pięć głosek naraz, i tak dalej. Zatem ten wzór jest ogólny.

123. Z tego wzoru wynika, że liczba *przestawień* z n głosek, to jest liczba przemian z n głosek, branych wszystkie naraz, jest $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3\,.\,2\,.\,1$.

Dla krótkości iloczyn $(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1$ często oznacza się tak: $n!$ (n silnia); tym sposobem znak $n!$ oznacza iloczyn szeregu liczb naturalnych od 1 do n włącznie.

124. *Z każdego połączenia (kombinacji) z r przedmiotów można utworzyć $r!$ przestawień (permutacyj).*

Gdyż podług § 122 te r przedmiotów może być przestawionych w $r!$ różnych sposobów.

125. *Liczba połączeń (kombinacyj) z n przedmiotów, branych po r naraz, jest:*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}.$$

Gdyż liczba *przemian* z n przedmiotów, branych po r naraz, jest $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ na zasadzie § 122; każde zaś *połączenie* (kombinacja) tworzy $r!$ przestawień podług § 121, przeto liczba połączeń musi być

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}.$$

Jeżeli licznik i mianownik tego wyrażenia pomnożymy przez $(n-r)!$, wtedy przyjmie ono postać:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

126. *Znaleźć liczbę przestawień (permutacyj) z n przedmiotów, które nie wszystkie są różne.*

Niech będzie danych n głosek, i przypuśćmy, że w tych n głoskach a wchodzi p razy, b wchodzi q razy, c wchodzi r razy, pozostałe zaś d, e wchodzą każda raz tylko jeden. Wtedy liczba przestawień (permutacyj) z tych głosek będzie:

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}.$$

W rzeczy samej: oznaczmy liczbę szukaną tych przestawień głoską N. Gdyby w któremkolwiek z tych przestawień p głosek

a zostało zamienionych na p nowych głosek, różnych od siebie, wtedy, *nie zmieniając położenia żadnej z innych głosek*, moglibyśmy utworzyć z tego jednego przestawienia $p!$ przestawień różnych: gdyby więc p głosek a zostało zamienionych na p nowych i różnych głosek, wtedy liczba wszystkich przestawień byłaby: $N \times p!$. Podobnież: gdyby q głosek b zostało zamienionych na q nowych i różnych od siebie głosek, wtedy całkowita liczba przestawień, jaką teraz moglibyśmy otrzymać, byłaby $N \times p! \times q!$. I jeżeliby r głosek c zostało również zamienionych na r nowych i różnych od siebie głosek, wtedy całkowita liczba przestawień byłaby: $N \times p! \times q! \times r!$. Lecz ta liczba musi być równa liczbie przestawień z n głosek różnych (§ 123), to jest $n!$. Zatem

$$N \times p! \times q! \times r! = n!,$$

skąd

$$N = \frac{n!}{p!q!r!}.$$

127. Znajdziemy $n^{\text{tą}}$ potęgę dwumianu $(x + a)^n$, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całkowitą i dodatnią.

Przez wykonanie mnożeń znajdziemy:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 + \\ + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + \\ + (abc+bcd+cda+dab)x + abcd.\end{aligned}$$

Rozważając otrzymane iloczyny, dochodzimy do wniosku, że one mają następujące własności:

I. Liczba wyrazów, znajdujących się z prawej strony znaku równości, jest o jedność większa od liczby mnożonych dwumianów.

II. Wykładnik przy x w pierwszym wyrazie równa się liczbie mnożonych dwumianów, a w każdym innym wyrazie wykładnik przy x jest o jedność mniejszy, aniżeli wykładnik przy x w wyrazie poprzedzającym.

III. Spółczynnik wyrazu pierwszego jest jedność, spółczynnik wyrazu drugiego jest sumą drugich głosek mnożonych dwumianów; spółczynnik wyrazu trzeciego jest sumą iloczynów drugich głosek mnożonych dwumianów, branych po dwie naraz; spółczynnik wyrazu czwartego jest sumą iloczynów drugich głosek mnożonych dwumianów, branych po trzy naraz, i tak dalej; — ostatni wyraz jest iloczynem wszystkich drugich głosek mnożonych dwumianów.

Okażemy teraz, że te własności są ogólne, jakakolwiek byłaby liczba mnożonych dwumianów. W tym celu przypuśćmy, że one są prawdziwe dla iloczynu, otrzymanego z pomnożenia $n - 1$ dwumianów: to jest przypuśćmy, że mamy $n - 1$ czynników $x + a$, $x + b$, $x + c$, ... $x + k$, i że:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\,.....\,(x+k) = x^{n-1} + px^{n-2} + qx^{n-3} + rx^{n-4} + \,.....\, + u,$$

gdzie: $p =$ sumie głosek $a, b, c, \ldots\ldots k$,

$q =$ sumie iloczynów z tychże głosek, branych po dwie naraz;

$r =$ sumie iloczynów z tychże głosek, branych po trzy naraz;

. . . .

$u =$ iloczynowi tych wszystkich głosek.

Pomnóżmy obie strony tej równości tożsamościowej przez nowy czynnik $(x + l)$ i uporządkujmy iloczyn na drugiej stronie podług potęg głoski x. Będzie:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\,.....\,(x+k)(x+l) = x^n + (p+l)x^{n-1} + (q+pl)x^{n-2} + (r+ql)x^{n-3} + \,......\, + ul.$$

Lecz: $p + l = a + b + c \,.....\, + k + l =$ sumie wszystkich głosek $a, b, c, \ldots\ldots k, l$;

$q + pl = q + l(a + b + c + \,.....\, + k) =$ sumie iloczynów wszystkich głosek $a, b, c, \ldots\ldots k, l$, branych po dwie naraz;

$r + ql = r + l(ab + ac + bc \,.....\,) =$ sumie iloczynów wszystkich głosek $a, b, c, \ldots\ldots k, l$, branych po trzy naraz;

. . . .

$ul =$ iloczynowi wszystkich głosek.

Stąd, jeżeli iloczyn $n - 1$ czynników ma powyższe własności, wtedy to, co było wyżej powiedziane, okazuje, że to jest prawdziwe i dla n czynników. Lecz widzieliśmy, że tak jest przy tworzeniu iloczynu z *czterech* czynników: przeto tak samo jest utworzony iloczyn z *pięciu* czynników, i tak dalej: te własności są więc ogólne.

Wynik ogólny z pomnożenia n czynników dwumiennych napiszemy dla krótkości w ten sposób:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\;\ldots\;(x+k)\,(x+l) = x^n + Px^{n-1} + \\ + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + V.$$

Na drugiej stronie powyższej równości P oznacza sumę głosek a, b, c, ... k, l, których liczba jest n; Q oznacza sumę iloczynów z tychże głosek, branych po dwie naraz: — liczba tych iloczynów jest $\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$; R jest sumą $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ podobnych iloczynów, i tak dalej. Patrz § 125.

Przypuśćmy teraz, że każda z głosek b, c, ... k, l, staje się równą a. Wtedy pierwsza strona powyższej równości zamieni się na $(x + a)^n$. P zamieni się na na, Q zamieni się na $\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^2$, R zamieni się na $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3$, i tak dalej. Będzie więc ostatecznie:

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^2x^{n-2} + \\ + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3x^{n-3} + \\ + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,a^4x^{n-4} + \ldots + a^n.$$

128. Wzór, który teraz otrzymaliśmy, nazywa się *dwumianem Newtona* od nazwiska wielkiego matematyka angielskiego, który go pierwszy w tej postaci ogólnej podał. Szereg na drugiej stronie znaku równości nazywa się *rozwinięciem* dwumianu $(x + a)^n$, a gdy zamiast $(x + a)^n$, piszemy ten szereg, mówimy, że $(x + a)^n$ *rozwijamy*.

Zwracamy tutaj uwagę na to, że twierdzenie powyższe zostało tu dowiedzione w tym tylko przypadku, gdy n jest liczbą *cał-*

kowitą i *dodatnią*, a sposób, jakiego do dowiedzenia użyliśmy, przedstawia nam przykład *indukcji matematycznej*.

129. Weźmy jako przykład $(x + a)^6$. Tutaj $n = 6$.

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15; \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6,$$

przeto:

$$(x + a)^6 = x^6 + 6\,ax^5 + 15\,a^2x^4 + 20\,a^3x^3 + 15\,a^4x^2 + 6\,a^5x + a^6.$$

Przypuśćmy dalej, że chcemy znaleźć rozwinięcie $(b^2 + cy)^6$; w tym celu należy tylko podstawić b^2, zamiast x, i cy, zamiast a w poprzedniej równości. Otrzymamy:

$$(b^2 + cy)^6 = (b^2)^6 + 6\,cy\,(b^2)^5 + 15\,(cy)^2\,(b^2)^4 + 20(cy)^3\,(b^2)^3 +$$
$$+ 15\,(cy)^4\,(b^2)^2 + 6\,(cy)^5b^2 + (cy)^6 =$$
$$= b^{12} + 6\,cyb^{10} + 15\,c^2y^2b^8 + 20\,c^3y^3b^6 +$$
$$+ 15\,c^4y^4b^4 + 6\,c^5y^5b^2 + c^6y^6.$$

Jako dalszy przykład zadajmy sobie znaleźć rozwinięcie $(x - c)^n$; należy w tym celu we wzorze § 127 podstawić $- c$, zamiast a; otrzymamy:

$$(x - c)^n = x^n - ncx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,c^2x^{n-2} +$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,c^3x^{n-3} + \ldots$$

Podstawmy teraz w rozwinięciu $(x + a)^n$ jedność, zamiast x; znajdziemy:

$$(1 + a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,a^3 \ldots,$$

a ponieważ równość ta jest prawdziwa dla każdej wartości a, przeto możemy w niej napisać x, zamiast a:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,x^3 + \ldots$$

130. Dwumian Newtona można zastosować także do rozwinięcia wyrażeń, zawierających więcej, niż dwa wyrazy. Przypuśćmy naprzykład, że chcemy rozwinąć $(1 + 2x - x^2)^4$. Uczyńmy $y = 2x - x^2$; wtedy mieć będziemy:

$$(1 + 2x - x^2)^4 = (1 + y)^4 = 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4, \text{ czyli:}$$

$$(1 + 2x - x^2)^4 = 1 + 4(2x - x^2) + 6(2x - x^2)^2 + \\ + 4(2x - x^2)^3 + (2x - x^2)^4.$$

Lecz:

$$(2x - x^2)^2 = (2x)^2 - 2(2x)x^2 + (x^2)^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4;$$

$$(2x - x^2)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot x^2 + 3(2x)(x^2)^2 - (x^2)^3 = \\ = 8x^3 - 12x^4 + 6x^5 - x^6;$$

$$(2x - x^2)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3x^2 + 6(2x)^2(x^2)^2 - 4(2x)(x^2)^3 + \\ + (x^2)^4 = 16x^4 - 32x^5 + 24x^6 - 8x^7 + x^8.$$

Podstawiając te wartości w powyższem wyrażeniu i robiąc wszystkie uproszczenia, otrzymamy ostatecznie:

$$(1 + 2x - x^2)^4 = 1 + 8x + 20x^2 + 8x^3 - 26x^4 - 8x^5 + \\ + 20x^6 - 8x^7 + x^8.$$

131. *W rozwinięciu* $(1 + x)^n$ *spółczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazu pierwszego i ostatniego są sobie równe.*

W samej rzeczy: spółczynnik wyrazu, stojącego na miejscu r od początku rozwinięcia, t. j. takiego, przed którym znajduje się wyrazów $(r-1)$, jest: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}$; pomnożywszy licznik i mianownik tego wyrażenia przez $(n - r + 1)!$, otrzymamy:

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}.$$

Wyraz, stojący na miejscu r od końca rozwinięcia, znajduje się na miejscu $(n - r + 1)$-em, licząc od wyrazu pierwszego; jego spółczynnik jest więc:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\{n-(n-r+1)+1\}}{(n-r+1)!},$$

to jest:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots r}{(n-r+1)!};$$

a po pomnożeniu licznika i mianownika tego ułamka przez $(r-1)!$

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!},$$

a to jest wyrażenie spółczynnika, znalezionego poprzednio.

132. *Suma wszystkich spółczynników w rozwinięciu dwumianu* $(1+x)^n$ *jest równa* 2^n.

Jeżeli bowiem we wzorze:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 \ldots\ldots + x^n$$

uczynimy $x=1$, to otrzymamy:

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots + 1.$$

ZADANIA DO ROZDZIAŁU XI.

1. Ile można utworzyć oddziałów małych po 6 ludzi z oddziału, zawierającego 24 ludzi?

2. Znaleźć, ile można utworzyć przestawień (permutacyj) ze wszystkich liter, stanowiących wyraz *Sulejów*?

3. Znaleźć, ile można utworzyć połączeń (kombinacyj) z liter wyrazu „*granitowy*“, branych po cztery naraz?

4. Znaleźć, ile można utworzyć przestawień (permutacyj) ze wszystkich liter, stanowiących wyraz „*Krakowiak*“?

5. Liczba połączeń (kombinacyj) z pewnej liczby elementów, branych po 4 naraz, równa się liczbie połączeń z tej samej liczby elementów, branych po 3 naraz. Jaka jest liczba tych elementów?

6. Z dwudziestu spółgłosek i pięciu samogłosek ile można utworzyć wyrazów, z których każdy byłby złożony z dwóch

spółgłosek i jednej samogłoski w ten sposób, że samogłoska zajmuje w każdym z nich środkowe miejsce?

7. W systemie telegraficznym Morse'a litery i cyfry przedstawia się przez zestawienia punktów i kresek (· —). Ile znaków można utworzyć, jeżeli każdy składa się nie więcej, niż z 4-ch kropek lub kresek?

8. Osada łodzi, składająca się z ośmiu wioślarzy i jednego sternika, ma być wybrana z pomiędzy dwunastu osób, z których dziewięć może tylko wiosłować, a trzy mogą sterować, ale nie mogą wiosłować. Znaleźć, iloma sposobami osada może być utworzona z tych dwunastu osób.

9. Na płaszczyźnie obieramy n punktów a, b, c... w ten sposób, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej linji prostej, i łączymy je z sobą po dwa linjami prostemi ab, ac, bc... Linje te przecinają się ze sobą w nowych punktach A, B, C... Znaleźć liczbę N tych ostatnich punktów przecięcia.

10. Ile może być liczb dziesięciocyfrowych takich, których wszystkie cyfry są różne?

Uwaga. Biorąc pod uwagę jakikolwiek wyraz, zdanie lub wiersz, wogóle jakiekolwiek wyrażenie, i tworząc z głosek, stanowiących to wyrażenie, wszystkie przestawienia (permutacje), otrzymywać będziemy nowe układy głosek, z których jedne mieć będą w pewnym języku znaczenie, inne zaś będą bez żadnego znaczenia, a nawet nie będą mogły być wymówione. Zwykle pierwsze nazywają się *anagramami* względem początkowego wyrażenia. Niektóre anagramy mają sławę historyczną. Tak np. z wyrazów: „*Révolution française*“ po upadku Napoleona, za restauracji, ułożono anagram: „*La France veut son roi*“. Z nazwiska: „*Frère Jacques Clément*“ (zabójcy Henryka III-go) złożono: „*C'est l'enfer qui m'a créé*“. Jeden z najpiękniejszych przykładów takich anagramów, mający związek z naszą historją, stanowi przedmiot zagadnienia następującego:

11. Gdy młody Stanisław Leszczyński powrócił za życia ojca do Leszna z długiej podróży zagranicą, wówczas w tem mieście zgromadziła się cała rodzina Leszczyńskich w celu powitania przyszłej głowy możnego domu. Ówczesny rektor szkoły jezuickiej w Lesznie, Jabłoński, chcąc przyczynić się do uświet-

nienia uroczystości, urządził dialog, odegrany przez uczniów, po którym 13 uczniów, przebranych za bohaterów, odtańczyło balet. Każdy z nich miał na tarczy jedną z liter, stanowiących wyrazy: „Domus Lescinia", złotem wymalowaną. Po każdej figurze baletu tańczący ustawiali się w ten sposób, że litery na tarczach tworzyły anagramy z wyrazów powyższych. I tak po pierwszym balecie czytano na tarczach, obok siebie ustawionych: „Domus Lescinia"; po drugim tarcze tak się ustawiły, że czytano „Ades incolumis"; po trzecim: „Omnis es lucida"; po czwartym: „Lucida sis omen"; po piątym: „Mane sidus loci"; po szóstym: „Sis columna Dei"; i nakoniec po siódmym: „I! scande solium" (idź, wstąp na tron; jak wiemy, sprawdziło się to później). Znaleźć 1-sze, ile może być wszystkich przestawień (permutacyj) z liter: „Domus Lescinia"; 2-gie, przypuszczając, że na utworzenie każdej nowej permutacji powyższych głosek chłopcy potrzebowali tylko $^1/_2$ minuty, w jakim przeciągu czasu wyczerpaliby te wszystkie permutacje; i po 3-ie, ile papieru byłoby potrzeba na napisanie wszystkich permutacyj, gdyby w jednym wierszu można napisać cztery takie permutacje, i gdyby na stronie całego arkusza zmieściło się 40 wierszy?

12. Napisać trzy pierwsze i trzy ostatnie wyrazy rozwinięcia $(a - x)^{13}$.

13. Napisać rozwinięcie $(3 - 2x^2)^5$.

14. Rozwinąć $(1 - 2y)^7$.

15. Znaleźć cztery pierwsze wyrazy rozwinięcia $(x + 2y)^n$.

16. Rozwinąć $(1 + x - x^2)^4$.

17. Znaleźć spółczynnik x^5 w rozwinięciu $(1 + 2x + 3x^2)^7$.

18. Drugi wyraz w rozwinięciu $(x + y)^n$ jest 240, trzeci 720, czwarty 1080; znaleźć x, y, n.

19. W rozwinięciu $(x + y)^n$ wyraz szósty jest 112, siódmy 7, ósmy $\frac{1}{4}$; znaleźć x, y, n.

XII.

Liczby zespolone.

133. Zanotujemy niektóre własności układu liczb rzeczywistych i działań, nad niemi wykonywanych.

I. Jeżeli A i B są liczbami, należącemi do układu, wtedy albo A równa się B ($A = B$), albo też A jest różne od B ($A \neq B$).

II. Każda liczba układu równa się samej sobie ($A = A$).

III. Jeżeli $A = B$, to $B = A$.

IV. Jeżeli $A = B$, $B = C$, to $A = C$.

Jeżeli znak $\ast$ oznacza zarówno dodawanie ($+$), jak mnożenie ($\times$), a A, B, C — liczby, należące do układu, wtedy:

V. Istnieje jedna i tylko jedna liczba, należąca do układu, równa $A \ast B$.

VI. $(A \ast B) \ast C = A \ast (B \ast C)$.

VII. Istnieje jedna i tylko jedna liczba, należąca do układu, Q spełniająca warunek

$$A \ast Q = A;$$

ta liczba Q nazywa się *tożsamościową* ze względu na działanie $\ast$.

VIII. Istnieje jedna i tylko jedna liczba, należąca do układu, A' spełniająca warunek

$$A \ast A' = Q,$$

z wyjątkiem przypadku, kiedy $\ast$ oznacza $\times$, a A jest liczbą tożsamościową ze względu na $+$.

IX. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.

X. $(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$.

Liczbą tożsamościową ze względu na dodawanie jest 0, ze względu na mnożenie 1, gdyż:

$$A + 0 = A,$$
$$A \times 1 = A.$$

Liczba A' w przypadku dodawania jest przeciwna do A, w przypadku mnożenia jest odwrotnością A, gdyż jeżeli

$$A + A' = 0, \text{ to } A' = -A;$$

$$A \times A' = 1, \text{ to } A' = \frac{1}{A},$$

z wyjątkiem $A = 0$, do której to liczby odwrotność nie istnieje.

Wymienione własności nie opisują w zupełności układu *liczb rzeczywistych*, i nie wszystkie twierdzenia o liczbach rzeczywistych mogą z nich być wyprowadzone, ale przyjmiemy te własności za wystarczające do stwierdzenia, że to jest *wogóle układ liczb.*

Jeżeli w jakimś zbiorze elementów zostały określone zależności równości i nierówności, i działania dodawania i mnożenia tak, że warunki I—X są spełnione, wtedy elementy zbioru nazywamy liczbami, a sam zbiór układem liczb.

Tak np. zbiór wszystkich liczb naturalnych, czyli rzeczywistych dodatnich całkowitych, nie jest układem liczb w myśl tego określenia, gdyż nie ma własności VII względem dodawania, ani też własności VIII zarówno ze względu na dodawanie, jak i mnożenie. Własność VII staje się prawdziwa dopiero po dołączeniu zera; własność VIII względem dodawania staje się prawdziwa po dołączeniu liczb ujemnych, zaś względem mnożenia po dołączeniu liczb ułamkowych: dostajemy tym sposobem zbiór liczb rzeczywistych wymiernych, który jest układem liczb w myśl powyższego określenia, tak samo, jak jest układem liczb zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

134. Weźmy pod uwagę zbiór, którego każdy element (a, b) składa się z dwóch liczb rzeczywistych, między któremi rozróżniamy pierwszą a i drugą b. W tym zbiorze określimy równość i działania arytmetyczne tak, ażeby warunki I—X poprzedniego paragrafu były spełnione; zbiór ten będziemy więc mogli uważać za układ liczb, a każdy jego element za liczbę; tak określoną liczbę nazwiemy *liczbą zespoloną.*

Liczbę zespoloną tymczasowo oznaczać będziemy w ten sposób

$$(a, b),$$

nazywając a pierwszą, b drugą częścią tej liczby zespolonej.

Określenia. 1) *Dwie liczby zespolone* (a, b) *i* (a', b') *nazywamy równemi*

$$(a, b) = (a', b')$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$a = a'; \; b = b'.$$

2) *Sumą dwóch liczb zespolonych nazywamy liczbę zespoloną, której część pierwsza równa się sumie części pierwszych, część druga sumie części drugich danych liczb zespolonych*:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

3) *Iloczynem dwóch liczb zespolonych (a, b) i (a', b') nazywamy liczbę zespoloną, której część pierwsza jest $aa'—bb'$, część druga $ab' + ba'$*:

$$(a, b) \times (a', b') = (aa'—bb', ab' + ba').$$

135. Porównywając określenia ostatniego paragrafu z własnościami układu liczb rzeczywistych, podanemi w § 133, odrazu widzimy, że tak określony zbiór liczb zespolonych ma własności I—V. Ażeby sprawdzić własność VI (*prawo łączności*):

$$[(a, b) * (c, d,)] * (e, f) = (a, b) * [(c, d) * (e, f)], \qquad (1)$$

założymy naprzód, że znak $*$ oznacza dodawanie, i obliczymy każdą stronę równości (1) zosobna, stosując określenie 2).

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) =$$
$$= (a + c + e, b + d + f);$$
$$(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a, b) + (c + e, d + f) =$$
$$= (a + c + e, b + d + f);$$

równość (1) jest więc prawdziwa w przypadku dodawania, gdyż każda jej strona równa się tej samej liczbie zespolonej

$$(a + c + e, b + d + f).$$

Obliczmy teraz każdą stronę równości (1) w założeniu, że $*$ jest znakiem mnożenia. Stosując określenie 3), znajdziemy:

$$[(a, b) \times (c, d,)] \times (e, f) = (ac — bd, ad + bc) \times (e, f) =$$
$$= (ace — bde — adf — bcf, acf — bdf + ade + bce);$$
$$(a, b) \times [(c, d) \times (e, f)] = (a, b) \times (ce — df, cf + de) =$$
$$= (ace — adf — bcf — bde, acf + ade + bce — bdf).$$

I w tym przypadku równość (1) jest więc prawdziwa.

Własność VII zostanie sprawdzona, jeżeli się przekonamy, że istnieje liczba zespolona (q, r), taka, że dla każdej liczby zespolonej (a, b) jest

$$(a, b) * (q, r) = (a, b),$$

jednak (q, r) może być inne w przypadku dodawania, inne w przypadku mnożenia.

W przypadku dodawania powinno być:

$$(a, b) + (q, r) = (a, b),$$

czyli podług określenia 2):

$$(a + q, b + r) = (a, b);$$

w myśl określenia 1) ta równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$a + q = a; \; b + r = b,$$

czyli

$$q = 0; \; r = 0.$$

Istnieje więc w rozpatrywanym zbiorze *liczba identyczna (tożsamościowa) względem dodawania*, mianowicie liczba (0, 0).

W przypadku mnożenia powinno być

$$(a, b) \times (q, r) = (a, b), \tag{2}$$

czyli podług określenia 3):

$$(aq - br, ar + bq) = (a, b),$$

a więc podług określenia 1):

$$aq - br = a; \; bq + ar = b.$$

Jeżeli $a = b = 0$, wtedy każda para liczb q, r czyni zadość tym równaniom; we wszystkich pozostałych przypadkach te dwa równania mają następujące rozwiązania względem q i r:

$$q = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1; \; r = \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} = 0.$$

Tym sposobem liczba zespolona (1,0) jest jedyną, sprawdzającą równanie (2) dla każdej liczby zespolonej (a, b). Istnieje więc w naszym zbiorze liczb zespolonych liczba tożsamościowa ze względu na mnożenie: tą liczbą jest (1,0).

Własność VIII będzie sprawdzona, jeżeli udowodnimy dla każdej liczby zespolonej (a, b) istnienie liczby zespolonej (a', b'), spełniającej warunek

$$(a, b) * (a' b') = (q, r)$$

(gdzie (q, r) oznacza liczbę tożsamościową względem $\ast$), z wyjątkiem przypadku, kiedy $\ast$ oznacza $\times$, a (a, b) jest liczbą tożsamościową ze względu na dodawanie, czyli $(a, b) = (0, 0)$.

Poszukujemy więc po 1-e takiej liczby (a', b'), ażeby było:

$$(a, b) + (a', b') = (0, 0),$$

czyli podług określenia 2):

$$(a + a', b + b') = (0, 0).$$

Podług określenia 1) ta równość sprawdza się wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$a + a' = 0; \; b + b' = 0,$$

czyli, jeżeli

$$a' = -a; \; b' = -b.$$

Przeto poszukiwana liczba istnieje, mianowicie $(-a, -b)$.

Po 2-re poszukujemy takiej liczby zespolonej (a', b'), ażeby było

$$(a, b) \times (a', b') = (1, 0), \tag{3}$$

w założeniu, że przynajmniej jedna z dwóch liczb rzeczywistych a, b jest różna od 0.

Podług określenia 3) możemy równanie (3) tak napisać:

$$(aa' - bb', ab' + a'b) = (1, 0);$$

powinno więc być podług określenia 1):

$$aa' - bb' = 1; \; ba' + ab' = 0.$$

Ponieważ a i b podług założenia nie są oba zerami, więc równania te mają w zupełności oznaczone rozwiązanie względem a' i b':

$$a' = \frac{a}{a^2 + b^2}; \; b' = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Poszukiwana liczba zespolona jest więc

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Własność IX wyraża *„prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania“*; nasz zbiór liczb zespolonych podlega temu prawu, jeżeli równość

$$(a, b) \times [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) \times (c, d)] + [(a, b) \times (e, f)] \tag{4}$$

jest tożsamością. Ażeby to sprawdzić, obliczymy oddzielnie każdą stronę tej równości.

Podług określenia 2):

$$(a, b) \times [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \times (c + e,\ d + f),$$

a podług określenia 3) to się równa

$$[a(c + e) - b(d + f),\ b(c + e) + a(d + f)],$$

czyli

$$(ac + ae - bd - bf,\ bc + be + ad + af).$$

Podobnie obliczymy prawą stronę równości (4), stosując naprzód określenie 3), potem 2).

$$[(a, b) \times (c, d)] + [(a, b) \times (e\ f)] = (ac - bd,\ ad + bc) + (ae - bf,\ af + be) = (ac - bd + ae - bf,\ ad + bc + af + be).$$

Takim samym sposobem można udowodnić, że rozpatrywany zbiór ma własność X:

$$[(c, d) + (e, f)] \times (a, b) = [(c, d) \times (a, b)] + [(e, f) \times (a, b)]. \tag{5}$$

Dochodzimy więc do wniosku, że istotnie *zbiór liczb zespolonych, określony w § 134, jest układem liczb.*

Zamiast sprawdzać bezpośrednio własność X, można wpierw udowodnić prawo przemienności dla mnożenia (§ 136), a następnie zauważyć, że wskutek tego prawa

$$[(c, d) + (e, f)] \times (a, b) = (a, b) \times [(c, d) + (e, f)]$$

i

$$(c, d) \times (a, b) = (a, b) \times (c, d)$$
$$(e, f) \times (a, b) = (a, b) \times (e, f),$$

a więc pierwsze strony równości (4) i (5) są równe, i tak samo drugie strony.

136. *„Prawa przemienności dla dodawania i mnożenia liczb zespolonych“* można wyrazić wspólnym wzorem

$$(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b). \tag{6}$$

Sprawdzamy te prawa, obliczając zosobna prawą i lewą stronę równości (6), naprzód dla znaku $+$, potem dla znaku $\times$, i uwzględniając, że liczby rzeczywiste tym prawom podlegają:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$
$$(c, d) + (a, b) = (c + a, d + b) = (a + c, b + d).$$
$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$(c, d) \times (a, b) = (ca - db, da + cb) = (ac - bd, ad + bc).$$

137. Działanie odwrotne do działania $\ast$ oznaczymy w ogólności znakiem $\div$, w szczególności znakiem —, jeżeli $\ast$ oznacza $+$; znakiem :, jeżeli $\ast$ oznacza $\times$. Działania te określimy w taki sposób:

Jeżeli (q, r) *jest liczbą zespoloną tożsamościową względem działania* $\ast$, *i jeżeli*

$$(c, d) \ast (c', d') = (q, r),$$

wtedy

$$(a, b) \div (c, d)$$

oznacza to samo, co

$$(a, b) \ast (c', d').$$

Działanie odwrotne do dodawania nazywa się odejmowaniem, odwrotne do mnożenia — dzieleniem.

Z określenia powyższego wynika, na zasadzie własności VIII, że, z wyjątkiem dzielenia przez (0, 0), odejmowanie i dzielenie dwóch liczb zespolonych jest zawsze możliwe do wykonania i daje w rezultacie liczbę zespoloną.

W szczególności w przypadku odejmowania

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (c', d'),$$

gdzie (c', d') jest liczbą zespoloną, spełniającą warunek

$$(c, d) + (c', d') = (0, 0),$$

czyli

$$(c', d') = (-c, -d),$$

a więc

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d). \tag{7}$$

Zaś w przypadku dzielenia:

$$(a, b) : (c, d) = (a, b) \times (c', d'),$$

gdzie (c', d') jest liczbą zespoloną, spełniającą warunek

$$(c, d) \times (c', d') = (1, 0),$$

czyli, jak to widzieliśmy, dowodząc własności VIII,

$$(c', d') = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2}\right);$$

a więc, na zasadzie określenia 3)

$$(a, b) \times (c', d') = (ac' - bd', ad' + bc') =$$
$$= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right),$$

czyli

$$(a, b) : (c, d) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right). \tag{8}$$

Zamiast

$$(a, b) : (c, d),$$

pisze się często

$$\frac{(a, b)}{(c, d)}.$$

Przypuśćmy np., że chcemy obliczyć

$$(1, -\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{2}, 1);$$

stosujemy wzór (7), zakładając $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 1$.

$$(1, -\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{2}, 1) = (1 - \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} - 1) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}).$$

Podobnie znajdziemy, stosując wzór (8):

$$\frac{(1, -\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}, 1)} = \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1}, \frac{-\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4} + 1}\right) = (0, -1).$$

138. Opierając się na wzorach (7) i (8) poprzedniego paragrafu, łatwo sprawdzić, że jeżeli jeden z dwóch wzorów

$$(a, b) \div (c, d) = (e, f) \tag{9}$$
$$(c, d) \ast (e, f) = (a, b) \tag{10}$$

jest prawdziwy, to i drugi jest prawdziwy, o ile tylko, w przypadku dzielenia i mnożenia, $(c, d) \neq (0, 0)$.

Rzeczywiście, jeżeli podług (9) obliczymy (e, f), opierając się na wzorach (7) i (8), i wartość znalezioną podstawimy w (10) — dostaniemy tożsamość; tak samo dostaniemy tożsamość, jeżeli obliczymy z równania (10) (a, b), opierając się na określeniach 2) i 3), i wartość tę podstawimy w (9).

139. Z pośród wszystkich liczb zespolonych możemy wybrać liczby w ten sposób, ażeby otrzymany zbiór był układem liczb w myśl określenia, podanego w § 133, jakkolwiek nie będzie zawierał wszystkich liczb zespolonych; ażeby jednak stwierdzić, że zbiór taki jest układem liczb, należy się przekonać, że ten zbiór ma 10 własności, o których tam była mowa.

Przekonamy się, że *zbiór wszystkich liczb zespolonych, w których część druga jest zerem, tworzy układ liczb.*

Nie ulega wątpliwości, że zbiór taki ma własności I—IV; i jeżeli sprawdzimy V, VII, VIII, wtedy pozostałe niezawodnie też będą sprawdzone. Należy więc tylko sprawdzić, że 1) suma i iloczyn dwóch liczb tego zbioru należy do tegoż zbioru; że 2) liczby tożsamościowe względem dodawania i mnożenia do tego zbioru należą i że 3) liczby przeciwna i odwrotna do każdej liczby tego zbioru również należą do zbioru.

Sprawdzenie jest bardzo proste:

1) $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$
$$(a, 0) \times (b, 0) = (ab - 0.0,\ a.0 + 0.b) = (ab, 0).$$

2) Elementy tożsamościowe są $(0, 0)$ i $(1, 0)$, oba więc należą do rozpatrywanego zbioru.

3) $(a, 0) + (-a, 0) = (0, 0)$
$$(a, 0) \times \left(\frac{1}{a},\ 0\right) = (1, 0);$$

liczbą przeciwną do $(a, 0)$ jest więc $(-a, 0)$, liczbą odwrotną $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$. Stąd wniosek, że

$$(a, 0) \div (b, 0) = (a \div b, 0),$$

a uwzględniając wzory 1) i oznaczając przez ω którekolwiek z czterech działań arytmetycznych, możemy napisać

$$(a, 0)\ \omega\ (b, 0) = (a\ \omega\ b, 0).$$

Ażeby więc wykonać jakieś działanie arytmetyczne nad liczbami $(a, 0)$ i $(b, 0)$, należy tylko wykonać takież działanie nad liczbami rzeczywistemi a, b i wynik działania przyjąć za część pierwszą wyniku działania nad liczbami zespolonemi, dopisując 0 jako część drugą.

Ponieważ związek między liczbami rzeczywistemi i zespolonemi nie został jeszcze w zupełności określony, mianowicie nie określiliśmy dotychczas, czy i w jakim przypadku liczba zespolona może się równać liczbie rzeczywistej, możemy więc ten związek ustalić w ten sposób, że układ liczb zespolonych, mających zero jako część drugą, uznamy za identyczny z układem liczb rzeczywistych, że więc przez dołączenie do liczby rzeczywistej zera za część drugą zamienimy liczbę rzeczywistą na zespoloną, nie zmieniając jej wartości.

Wszystkie działania nad liczbami określa się tylko zapomocą czterech działań arytmetycznych, nie narazimy się więc na sprzeczność, jeżeli *założymy, że każda liczba zespolona, w której druga część jest zerem, jest równa swojej pierwszej części;* jest to jednak założenie dowolne, podobnie jak dowolne jest założenie, że liczby dodatnie są identyczne z liczbami bezwzględnemi.

W ten sposób liczby rzeczywiste stają się przypadkiem szczególnym liczb zespolonych.

Będziemy rozróżniali trojakie liczby zespolone:

$(a, 0) = a$ — liczba rzeczywista;
$(a, b), (a \neq 0, b \neq 0)$ — *liczba urojona zespolona;*
$(0, b), (b \neq 0)$ — *liczba czysto urojona.*

Liczby urojone zespolone i liczby czysto urojone łączymy ponadto w jedną klasę liczb *urojonych.*

Jeżeli mamy wykonać jakieś działanie ω nad dwiema liczbami, z których jedna jest urojona, druga rzeczywista, to możemy rzeczywistą przedstawić jako zespoloną, której część druga jest zerem, i wykonać wskazane działanie:

$$(a, b)\ \omega\ c = (a, b)\ \omega\ (c, 0).$$

Tak więc:

$$(a, b) \pm c = (a, b) \pm (c, 0) = (a \pm c, b);$$
$$(a, b) \times c = (a, b) \times (c, 0) = (ac, bc);$$
$$(a, b) : c = (a, b) : (c, 0) = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right).$$

140. Oznaczmy przez i liczbę czysto urojoną (0, 1), przez $-i$ liczbę do niej przeciwną (0, —1). Zauważmy, że

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1, 0) \times (0, 1) = (0, -1) = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1.$$

I w ogólności, jeżeli i podniesiemy do potęgi całkowitej p, to, oznaczając przez q iloraz, przez r resztę z podzielenia p przez 4, możemy napisać:

$$p = 4q + r$$
$$i^p = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r.$$

Zależnie od tego, czy $r = 0, 1, 2, 3$, otrzymamy dla i^p jedną z czterech wartości $1, i, -1, -i$.

141. *Każda liczba urojona jest sumą liczby rzeczywistej i liczby czysto urojonej.*

Istotnie,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b);$$

uwzględniając zaś, że

$$(a, 0) = a$$
$$(0, b) = b(0, 1) = bi,$$

możemy każdą liczbę zespoloną (a, b) przedstawić pod postacią

$$(a, b) = a + bi.$$

Liczba

$$a + bi \text{ jest } \left| \begin{array}{l} \text{rzeczywista, jeżeli } b = 0 \\ \text{urojona zespolona, jeżeli } a \neq 0,\ b \neq 0 \\ \text{czysto urojona, jeżeli } a = 0,\ b \neq 0. \end{array} \right.$$

Ten sposób pisania liczb zespolonych jest o wiele dogodniejszy od tego, który dotychczas stosowaliśmy, dlatego też odtąd będziemy liczby zespolone przedstawiali pod tą nową postacią.

Ponieważ, jak to widzieliśmy, działania nad liczbami zespolonemi podlegają tym samym prawom, co działania nad liczbami rzeczywistemi, więc, pisząc liczby zespolone pod tą postacią, *otrzymamy wynik działania, stosując zwykłe metody rachunku algebraicznego i zastępując każdą potęgę liczby i jedną z czterech liczb* $i, -1, -i, 1$, *stosownie do § 140.*

W ten sposób znajdziemy np.

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Możemy też liczbę zespoloną oznaczać jedną tylko literą i wykonywać nad nią działania, nie rozróżniając, czy to jest liczba rzeczywista czy urojona.

142. Nazywamy *modułem* liczby zespolonej wartość bezwzględną pierwiastka kwadratowego z sumy kwadratów części rzeczywistej i spółczynnika przy i w tej liczbie. Tak więc *modułem liczby* $a+bi$ *jest* $\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$. W szczególności dla liczby rzeczywistej a otrzymamy podług tego określenia moduł $\left|\sqrt{a^2}\right|=|a|$. Moduł liczby rzeczywistej nie różni się więc od jej wartości bezwzględnej; z tego powodu *moduł liczby zespolonej nazywa się inaczej jej wartością bezwzględną* i oznacza tak samo, jak wartość bezwzględna liczby rzeczywistej:

$$|a+bi|=\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|.$$

143. *Moduł sumy albo różnicy dwóch liczb zespolonych jest nie mniejszy od różnicy i nie większy od sumy modułów tych liczb.*

Niech będą dane dwie liczby zespolone

$$a+bi;\quad c+di,$$

z których pierwsza ma moduł nie mniejszy, niż druga:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|\geq\left|\sqrt{c^2+d^2}\right|.$$

Suma lub różnica tych dwóch liczb jest

$$a\pm c+(b\pm d)\,i;$$

mamy więc sprawdzić nierówność

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|-\left|\sqrt{c^2+d^2}\right|\leq\left|\sqrt{(a\pm c)^2+(b\pm d)^2}\right|\leq$$
$$\leq\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|+\left|\sqrt{c^2+d^2}\right|.$$

Ponieważ wszystkie trzy części tej nierówności są dodatnie, więc zwrot jej się nie zmieni, jeżeli każdą z tych części podniesiemy do kwadratu; powinno więc być:

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2\left|\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\right|\leq(a\pm c)^2+(b\pm d)^2\leq$$
$$\leq a^2+b^2+c^2+d^2+2\left|\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\right|,$$

czyli, po uproszczeniu:

$$-\left|\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\right| \leqq \pm ac \pm bd \leqq \left|\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\right|.$$

Ta nierówność będzie spełniona wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$\left|\pm ac \pm bd\right| \leqq \left|\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\right|;$$

warunkiem koniecznym i wystarczającym spełnienia tej nierówności jest

$$(\pm ac \pm bd)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

czyli, po uproszczeniu:

$$2\,abcd \leqq a^2 d^2 + b^2 c^2,$$

albo:

$$0 \leqq a^2 d^2 - 2\,ad\,.\,bc + b^2 c^2,$$

a więc

$$0 \leqq (ad - bc)^2,$$

co jest na pewno prawdziwe.

144. *Moduł iloczynu równa się iloczynowi modułów czynników.*

W przypadku dwóch czynników

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$

sprawdzamy równość

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}\right| \cdot \left|\sqrt{c^2+d^2}\right| = \left|\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}\right|$$

przez podniesienie obu jej stron do kwadratu.

W przypadku większej liczby czynników

$$A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$$

znajdujemy na zasadzie poprzedniego przypadku:

$$|A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n| = |A_1 A_2 \ldots A_{n-1}| \,.\, |A_n|;$$

podobnie

$$|A_1 A_2 \ldots A_{n-2} A_{n-1}| = |A_1 A_2 \ldots A_{n-2}| \,.\, |A_{n-1}|$$

. . . .

$$|A_1 A_2| = |A_1| \,.\, |A_2|,$$

więc

$$|A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_{n-1}| \cdot |A_n|.$$

145. Liczba zespolona jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej moduł jest zerem.

Rzeczywiście, ażeby było

$$a + bi = 0,$$

potrzeba i wystarcza

$$a = 0, \ b = 0,$$

a do tego potrzeba i wystarcza

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0.$$

Możemy się teraz przekonać, że *iloczyn czynników zespolonych jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli przynajmniej jeden z jego czynników jest zerem.*

Istotnie, warunek, ażeby iloczyn był zerem, jest równoważny z warunkiem, ażeby jego moduł był zerem, czyli z warunkiem, ażeby iloczyn modułów czynników był zerem; ażeby jednak iloczyn modułów, a więc liczb bezwzględnych, był zerem, potrzeba i wystarcza, żeby przynajmniej jeden z tych modułów był zerem, a więc, żeby przynajmniej jeden z czynników iloczynu był zerem.

146. *Moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych równa się ilorazowi modułu dzielnej przez moduł dzielnika.*

Niech będzie

$$A : B = C,$$

czyli

$$A = BC,$$

a więc, na zasadzie § 144:

$$|A| = |B| \cdot |C|,$$

skąd

$$|C| = \frac{|A|}{|B|}.$$

147. Dwie liczby zespolone nazywają się *sprzężonemi*, jeżeli mają równe części rzeczywiste, a ich spółczynniki przy i

mają równe wartości bezwzględne, a znaki przeciwne; tak więc liczby

$$a + bi;\ a - bi$$

są sprzężone.

Dwie liczby sprzężone $a + bi$ i $a - bi$ mają ten sam moduł $\left|\sqrt{a^2 + b^2}\right|$.

Suma i iloczyn dwóch liczb sprzężonych są rzeczywiste, gdyż

$$a + bi + a - bi = 2a;$$
$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Dzięki temu możemy z łatwością odtworzyć wzór na dzielenie dwóch liczb zespolonych, mnożąc dzielną i dzielnik przez liczbę sprzężoną z dzielnikiem:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2},$$

a więc

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i\,.$$

148. *Jeżeli $a + bi$ jest liczbą zespoloną różną od zera, wtedy istnieją dwie liczby zespolone różne, i nie więcej, niż dwie, których kwadraty są równe $a + bi$; te dwie liczby są do siebie przeciwne.*

Poszukujemy takiej liczby $x + yi$, której kwadrat równa się $a + bi$:

$$(x + yi)^2 = a + bi. \tag{11}$$

Wykonywamy podnoszenie do kwadratu z lewej strony:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi;$$

ażeby ta równość była prawdziwa — potrzeba i wystarcza:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= b \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ażeby rozwiązać ten układ dwóch równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomemi, rozróżnimy trzy przypadki.

1) $b = 0$, $a > 0$; liczba $a + bi$ jest rzeczywista dodatnia, układ równań (12) zamienia się na

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Równanie drugie jest spełnione wtedy i tylko wtedy, jeżeli albo $x = 0$, albo $y = 0$. Zakładając $x = 0$, otrzymalibyśmy z pierwszego równania

$$-y^2 = a,$$

co przeczy założeniom, że a i y są rzeczywiste, $a > 0$; może więc być tylko $y = 0$, a więc

$$x^2 = a,$$

skąd dostajemy dwa różne rozwiązania

$$x = +\sqrt{a}\ ;\ x = -\sqrt{a}.$$

Liczba $a > 0$ ma więc dwa i tylko dwa pierwiastki kwadratowe, oba rzeczywiste:

$$+\sqrt{a} \text{ i } -\sqrt{a}.$$

2) $b = 0$, $a < 0$; liczba $a + bi$ jest rzeczywista ujemna. Układ równań (12) ma i w tym wypadku postać (13), ale nie może być $y = 0$, gdyż toby prowadziło do sprzeczności

$$x^2 = a,$$

gdzie x jest rzeczywiste, $a < 0$. Zakładamy więc $x = 0$; równanie pierwsze zamienia się na

$$-y^2 = a,$$

które to równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$y = +\sqrt{-a},\ y = -\sqrt{-a}.$$

A więc *liczba rzeczywista ujemna a ma dwa różne pierwiastki kwadratowe*, mianowicie

$$+i\sqrt{-a};\ -i\sqrt{-a}.$$

W szczególności pierwiastki kwadratowe liczby -1 są i i $-i$.

3) $b \neq 0$, liczba zespolona $a + bi$ jest urojona. Z równa-

nia drugiego układu (12) widać, że obie liczby x, y, muszą być różne od zera; rozwiązując to równanie względem y, znajdziemy

$$y = \frac{b}{2x}, \tag{14}$$

a po podstawieniu tej wartości w równaniu pierwszem:

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Przyjmując w tem równaniu x^2 za niewiadomą, dostaniemy dla niej dwie wartości

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \quad \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Druga z tych wielkości jest ujemna, gdyż

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2}\right| > a,$$

pierwsza jest dodatnia nawet przy ujemnem a, i tylko tę pierwszą możemy przyjąć za x^2. Znajdujemy więc

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

a po podstawieniu w (14):

$$y = \frac{b}{\pm 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}} = \pm\frac{b}{\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}};$$

znak górny w tem wyrażeniu odpowiada znakowi górnemu w wyrażeniu znalezionem dla x, tak samo odpowiadają sobie znaki dolne. Tak więc liczba zespolona $a + bi$ ma dwa pierwiastki kwadratowe, które możemy napisać we wspólnym wzorze

$$\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \frac{b}{\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}}\, i\right]. \tag{15}$$

Spółczynnik przy i możemy przedstawić pod dogodniejszą postacią, mnożąc jego licznik i mianownik przez

$$\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a};$$

spółczynnik ten przyjmie postać

$$\frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2b^2}}=\frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{|b|.\sqrt{2}};$$

a ponieważ

$$b=\pm|b|,$$

przyczem znak górny odpowiada $b>0$, znak dolny $b<0$, więc wyrażenie (15) przyjmuje postać

$$\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right];\ b>0;$$

$$\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right];\ b<0.$$

Posługując się pierwszym z tych dwóch wzorów, lub wzorem (15), znajdziemy pierwiastki kwadratowe liczby i, zakładając $a=0$, $b=1$:

$$\pm\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right].$$

149. Przy rozwiązywaniu równań możemy już teraz nietylko uwzględniać pierwiastki urojone równań o spółczynnikach rzeczywistych, ale i rozwiązywać takie równania, w których spółczynniki są urojone. Równania stopnia pierwszego rozwiązuje się tak samo, jak w przypadku spółczynników rzeczywistych, a warunki rozwiązalności takich równań pozostają bez zmiany (p. rozdz. I); inaczej jest z równaniami stopnia drugiego.

Przypuśćmy, że w równaniu

$$ax^2+bx+c=0 \tag{16}$$

spółczynniki a, b, c przedstawiają jakiekolwiek liczby zespolone ($a \neq 0$), i że poszukujemy pierwiastków tego równania nietylko rzeczywistych, ale także i urojonych.

Lewą stronę równania (16) napiszemy pod inną postacią, wyprowadzając a przed nawias, a w nawiasie dodając i odejmując $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0.$$

Oznaczając przez $\sqrt{b^2-4ac}$ jedną, którąkolwiek z dwóch liczb zespolonych, których kwadraty są równe b^2-4ac, możemy to równanie tak napisać:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=0. \qquad (17)$$

W nawiasie mamy różnicę kwadratów dwóch wielkości; możemy ją przedstawić jako iloczyn sumy przez różnicę tych wielkości.

$$a\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\cdot\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0.$$

Podług założenia a jest różne od zera; ażeby więc lewa strona tego równania stała się zerem, potrzeba i wystarcza, ażeby jeden z dwóch pozostałych czynników stał się zerem (§ 145); musi więc być albo

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$$

albo też

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$$

dostajemy więc zawsze dwa pierwiastki, które możemy napisać w jednym wzorze

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A więc *każde równanie stopnia drugiego o spółczynnikach rzeczywistych albo urojonych ma dwa pierwiastki rzeczywiste* *albo urojone;* te pierwiastki są równe, jeżeli wyróżnik $b^2-4ac=0$, w każdym innym przypadku są różne.

Jeżeli spółczynniki a, b, c są rzeczywiste, a wyróżnik b^2-4ac ujemny, wtedy jedną z dwóch liczb, mających kwadrat równy b^2-4ac, jest $i.\left|\sqrt{4ac-b^2}\right|$, możemy więc w tym przypadku oba rozwiązania przedstawić wzorem

$$x=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a},$$

z którego widać, że te rozwiązania są urojone sprzężone.

150. *Przykłady.* 1) Rozwiązać równanie

$$x^2-4x+5=0.$$

Wyróżnik tego równania jest

$$16-20=-4,$$

jeden z pierwiastków kwadratowych wyróżnika jest więc $2i$, a pierwiastki równania są

$$x=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i.$$

2) Rozwiązać równanie

$$x^2-(2-i)x+3-i=0.$$

Wyróżnik równania jest

$$(2-i)^2-4.(3-i)=3-4i-12+4i=-9,$$

$3i$ jest jednym z pierwiastków kwadratowych wyróżnika, a więc pierwiastki równania są

$$x=\frac{2-i\pm 3i}{2};\quad x=\frac{2+2i}{2}=1+i,$$

albo

$$x=\frac{2-4i}{2}=1-2i.$$

3) Rozwiązać równanie

$$x^3-1=0.$$

Pierwszą stronę tego równania można napisać w innej postaci:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0;$$

dane równanie ma więc pierwiastek $x = 1$ i oprócz tego jeszcze dwa pierwiastki równania

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Te dwa pierwiastki są

$$x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

sześcian każdego z trzech pierwiastków danego równania równa się jedności, okazuje się więc, że *istnieją trzy różne pierwiastki sześcienne z jedności*, mianowicie

$$1; \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

151. Możemy ustalić podporządkowanie jedno-jednoznaczne między liczbami zespolonemi i punktami płaszczyzny, jeżeli, obrawszy układ spółrzędnych, liczbie zespolonej $a + bi$ podporządkujemy ten punkt płaszczyzny, którego odcięta jest a, rzędna b. Tym sposobem liczbom rzeczywistym ($b = 0$), zgodnie z umową, że liczby zespolonej (a, o) nie odróżniamy od liczby rzeczywistej a (§ 139), odpowiadać będą punkty osi odciętych, liczbom czysto urojonym punkty osi rzędnych; każdej liczbie zespolonej odpowiada jeden i tylko jeden punkt płaszczyzny, każdy punkt płaszczyzny jest obrazem jednej i tylko jednej liczby zespolonej (rys. 34). Płaszczyznę, na której w ten sposób przedstawiamy liczby zespolone, nazywamy *płaszczyzną Gaussa*[1]).

Jeżeli oznaczymy przez r długość odcinka, łączącego punkt (a, b) z początkiem spółrzędnych 0, to z trójkąta prostokątnego, utworzonego przez odcinki długości a, b, r, wynika

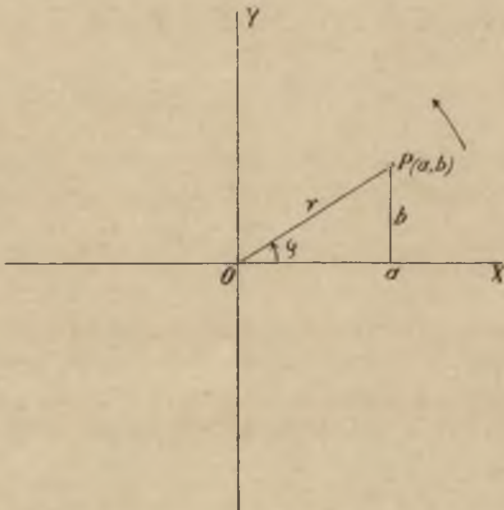
$$r^2 = a^2 + b^2$$

$$r = \left| \sqrt{a^2 + b^2} \right|.$$

Tym sposobem długość tego odcinka r przedstawia *moduł*, czyli *wartość bezwzględną* (§ 142) liczby zespolonej $a + bi$. Jeżeli jeszcze oznaczymy przez φ kąt zawarty między tym odcinkiem i dodatnim zwrotem osi x, wtedy wielkości r i φ wystarczają w zupełności do wyznaczenia punktu (a, b), a więc i liczby

[1]) Karol Fryderyk Gauss, matematyk niemiecki, 1777—1855. Interpretacja geometryczna powyższej umowy polega na tem, że płaszczyznę Gaussa tak ustawiamy, aby jej oś odciętych pokryła się z osią liczb rzeczywistych.

zespolonej $a + bi$; kąt φ nazywa się *odchyleniem* lub *azymutem*, a także *argumentem* tej liczby zespolonej. Mierząc kąt φ, przyjmujemy zwrot dodatni w ten sposób, żeby kąt między dodatnią częścią osi x i dodatnią częścią osi y miał za miarę czwartą część kąta pełnego, czyli $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{nie } \frac{3\pi}{2}\right)$. Kąt φ nie jest jednak w zupełności wyznaczony przez a i b, gdyż, dodając do niego kąt



Rys. 34.

pełny, pomnożony przez jakąkolwiek liczbę całkowitą, dodatnią lub ujemną, dostaniemy kąt, który również może być uważany za azymut tej samej liczby zespolonej. Jeżeli więc φ jest jedną z wartości azymutu, to kąt $\varphi + 2n\pi$ jest również jedną z wartości azymutu tej samej liczby zespolonej, w założeniu, że n jest dowolną liczbą rzeczywistą całkowitą.

Oznaczając

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi; \ \frac{b}{r} = \sin\varphi,$$

możemy liczbę zespoloną napisać w taki sposób:

$$a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \,.\, i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Pierwszy czynnik r jest modułem liczby $a+bi$; drugi jest liczbą zespoloną

$$\cos\varphi + i \sin\varphi,$$

której moduł jest

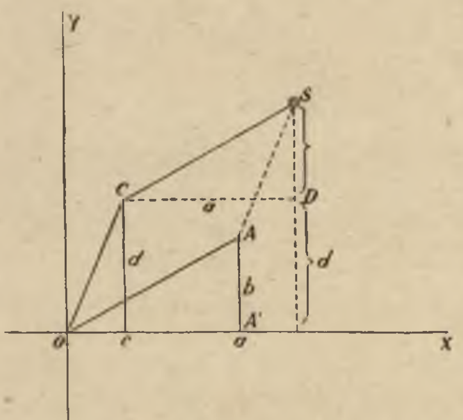
$$\left|\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\right| = 1.$$

A więc *każdą liczbę zespoloną można przedstawić jako iloczyn jej modułu przez taką liczbę zespoloną, której modułem jest* 1.

152. Każdemu działaniu arytmetycznemu, wykonywanemu nad liczbami zespolonemi, odpowiada pewna konstrukcja geometryczna na płaszczyźnie Gaussa.

Przypuśćmy, że chcemy przedstawić geometrycznie sumę dwóch liczb zespolonych $a+bi$, $c+di$, których obrazami geometrycznemi są punkty A i C (rys. 35). Ponieważ

$$(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)\,i,$$



Rys. 35.

więc poszukiwana suma ma za obraz punkt S, którego spółrzędne są $a+c$, $b+d$. Łatwo spostrzec, że poszukiwany punkt dostaniemy, prowadząc przez C równoległą do OA i odmierzając na niej $CS = OA$ tak, ażeby zwroty odcinków CS i OA były zgodne; bo jeżeli poprowadzimy przez S prostą równoległą do osi rzędnych, przez C równoległą do osi odciętych, a punkt przecięcia tych prostych oznaczymy przez D, wtedy otrzymamy trójkąt CDS, przystający do trójkąta $OA'A$ (A' oznacza spodek prostopadłej, poprowadzonej z A do osi odciętych).

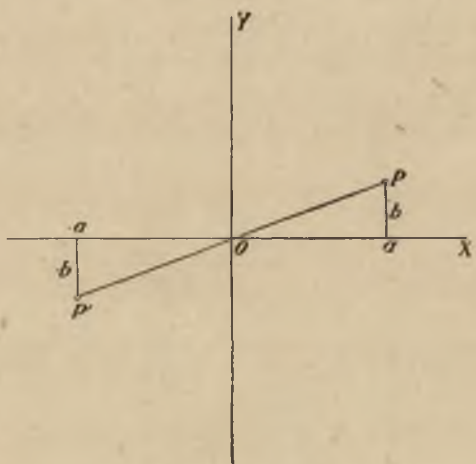
A więc odcięta punktu S równa się

$$c + CD = c + a,$$

a jego rzędna

$$d + DS = d + b.$$

Dwa punkty P i P' symetryczne względem początku spółrzędnych są obrazami liczb przeciwnych, a więc takich, których suma jest zerem (rys. 36).



Rys. 36.

Dwa punkty symetryczne względem osi odciętych (rys. 37) M i N są obrazami liczb sprzężonych.

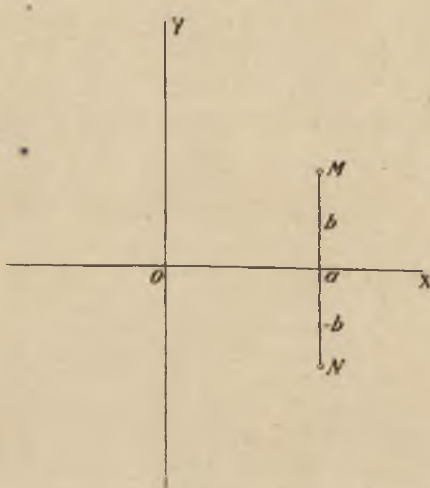
153. Ażeby znaleźć obraz geometryczny iloczynu dwóch liczb zespolonych, najdogodniej napisać je pod postacią, jaką poznaliśmy w § 151. Przypuśćmy więc, że A i B są obrazami liczb zespolonych a i b, z których pierwsza ma moduł r_1, odchylenie φ_1, druga moduł r_2, odchylenie φ_2; chcemy znaleźć punkt P, który jest obrazem iloczynu ab.

Podług założenia

$$a = r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1),$$
$$b = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2);$$

stąd

$$ab = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 +$$
$$+ \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)],$$



Rys. 37.

a stosując znane wzory gonjometryczne

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2,$$

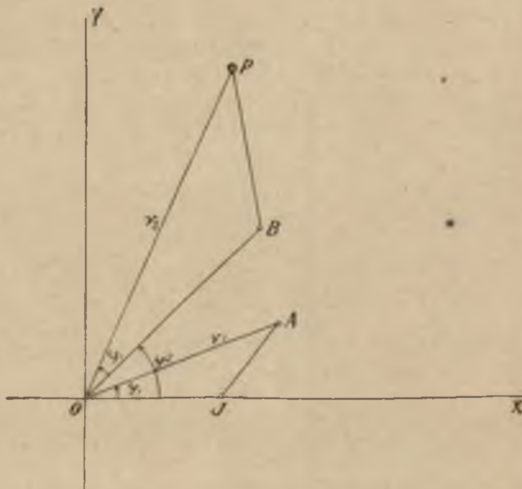
znajdziemy

$$ab = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

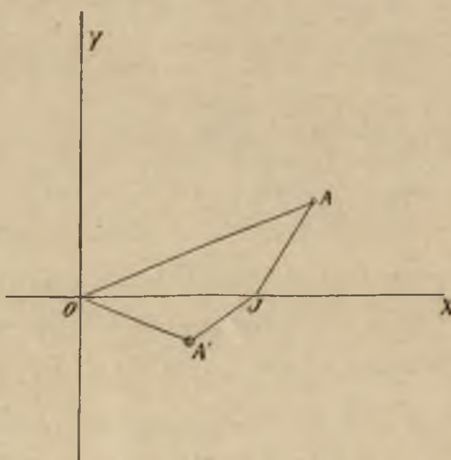
W tym wzorze $r_1 r_2$, jako iloczyn modułów liczb a i b, jest modułem iloczynu ab (§ 144); $\varphi_1 + \varphi_2$ jest więc odchyleniem iloczynu.

Dochodzimy więc do wniosku, że *odchylenie iloczynu dwóch liczb zespolonych równa się sumie odchyleń tych liczb.*

To prowadzi do takiej konstrukcji punktu P (rys. 38): niech I będzie tym punktem osi x, którego odcięta równa się 1; budujemy trójkąt OBP, podobny do OIA, odmierzając $\sphericalangle BOP = \sphericalangle IOA = \varphi_1$ w zwrocie zgodnym z $\sphericalangle IOA$ i $\sphericalangle OBP = \sphericalangle OIA$; wierzchołek P tak znalezionego trójkąta jest punktem szukanym.



Rys. 38.



Rys. 39.

Istotnie,

$$\sphericalangle IOP = \varphi_2 + \varphi_1 = \varphi_1 + \varphi_2;$$
$$OP : OA = OB : OI,$$

czyli $$OP = \frac{OA \cdot OB}{OI} = r_1 r_2.$$

Tak więc P jest obrazem tej liczby zespolonej, której moduł jest $r_1 r_2$, odchylenie $\varphi_1 + \varphi_2$, jest więc obrazem iloczynu ab.

Obraz A' odwrotności tej liczby, którą przedstawia punkt A, znajdujemy, budując trójkąt OIA', podobny do trójkąta OAI (rys. 39) i leżący po przeciwnej stronie osi odciętych. Rzeczywiście, suma odchyleń

$$\sphericalangle IOA + \sphericalangle IOA' = 2\pi,$$

co można zastąpić przez 0 (§ 151); a ponieważ

$$OA : OI = OI : OA',$$

więc iloczyn modułów

$$OA \cdot OA' = OI^2 = 1;$$

iloczyn liczb, których obrazami są punkty A i A', ma więc 1 za moduł, 0 za argument, jest to więc liczba

$$1\ (\cos 0 + i \sin 0) = 1.$$

Widzimy zarazem, że moduł odwrotności liczby a jest odwrotnością modułu tej liczby.

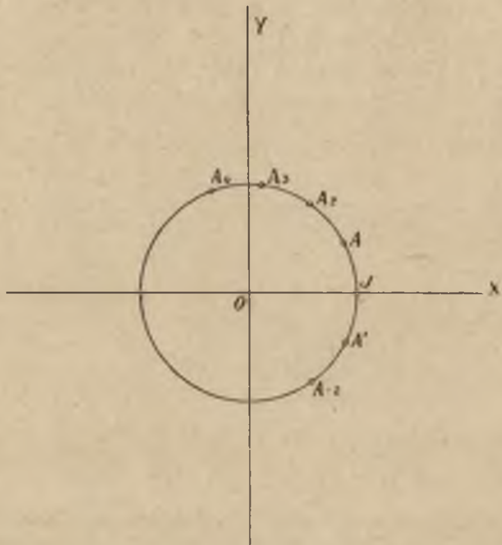
154. Rozpatrywanie potęg liczb zespolonych o dowolnym wykładniku, niewymiernym i zespolonym, nie należy do zakresu Algebry Elementarnej; możemy jedynie zająć się potęgami o wykładniku rzeczywistym wymiernym.

Jeżeli n jest liczbą naturalną, wtedy n-ta potęga liczby zespolonej jest iloczynem n czynników, z których każdy równa się tej liczbie zespolonej. Oznaczmy przez r i φ moduł i odchylenie liczby zespolonej, wtedy moduł n-tej potęgi tej liczby jest r^n, odchylenie $n\varphi$:

$$[r\ (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n\ (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Ten wzór jest znany pod nazwą *wzoru Moivre'a*.

Jeżeli w szczególności liczba ma moduł 1, wtedy ten moduł nie ulega zmianie przy potęgowaniu; obrazy wszystkich potęg są punktami okręgu koła o promieniu 1 i środku w początku spółrzędnych (rys. 40). Punkty $A, A_2, A_3 \ldots,$ tak znalezione, że łuki IA, AA_2, $A_2 A_3$ . . . są równe, przedstawiają kolejne potęgi liczby a, której moduł jest 1, odchylenie $= \sphericalangle IOA$; i jeżeli ten kąt jest współmierny z kątem pełnym, wtedy ist-



Rys. 40.

nieje taka liczba naturalna n, że punkt A_n jest identyczny z A, czyli

$$a^n = a.$$

Taki przypadek już znamy: liczba i, mająca odchylenie $\frac{\pi}{2}$, ma tę własność, że

$$i = i^4 = i^8 = \ldots \text{ (§ 140).}$$

Potęgi liczby a o wykładnikach całkowitych rzeczywistych ujemnych są potęgami liczby $\frac{1}{a}$ o wykładnikach równych liczbom naturalnym; obraz A' liczby $\frac{1}{a}$ jest symetryczny do A względem osi odciętych, zmienia się więc w tym przypadku tylko zwrot, w którym należy odmierzać łuki $= IA$.

155. Jeżeli poszukujemy pierwiastka n-go stopnia z liczby zespolonej a, to znaczy, że mamy znaleźć liczbę b, czyniącą zadość równaniu

$$b^n = a;$$

jeżeli więc r i φ są wartością bezwzględną i odchyleniem liczby a, to musi być

$$b = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

należy jednak uwzględnić (§ 151), że φ nie jest wielkością jednoznacznie oznaczoną, a różne jej wartości różnią się od siebie o kąt pełny, pomnożony przez liczbę całkowitą;

$$\varphi + 2k\pi,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, jest więc również argumentem liczby a, a co za tem idzie,

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

może być również przyjęte jako argument liczby b. Tym sposobem dostajemy różne wartości pierwiastka, które jednak wszystkie mają tę samą wartość bezwzględną; ich argumenty różnią się o $\frac{2k\pi}{n}$.

Można się przekonać, że istnieje dokładnie n różnych liczb, które, podstawione zamiast b w równaniu

$$b^n = a,$$

zamieniają to równanie na tożsamość lub, inaczej mówiąc, że *pierwiastek n-go stopnia z liczby zespolonej ma dokładnie n różnych wartości.*

W rzeczy samej, podstawiając w wyrażeniu

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

zamiast k kolejno wszystkie liczby całkowite od 0 do $n - 1$, dostaniemy n różnych wielkości, z których każda może być przyjęta za argument liczby b; wszystkie tak otrzymane liczby b

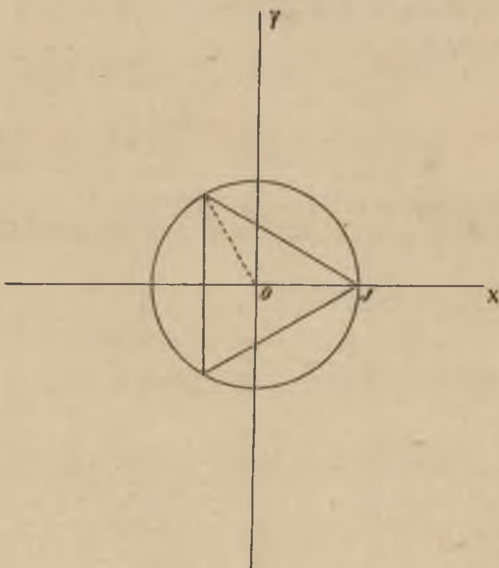
są różne, bo między ich argumentami niema takich, któreby się różniły o kąt pełny, wszystkie różnice między niemi są mniejsze od kąta pełnego; gdybyśmy jednak podstawili zamiast k jakąś inną liczbę całkowitą, większą od $n-1$ lub ujemną, to liczba taka różniłaby się od jakiejś wielokrotności liczby n o liczbę dodatnią, mniejszą od n, można ją więc napisać pod postacią

$$pn+k,$$

gdzie p jest jakąkolwiek liczbą całkowitą, k liczbą całkowitą nie ujemną, mniejszą od n; otrzymalibyśmy więc argument

$$\frac{\varphi+2(pn+k)\pi}{n}=\frac{\varphi+2k\pi}{n}+2p\pi,$$

który należy do jednej z otrzymanych już poprzednio wartości b.



Rys. 41.

Obrazami tych wszystkich liczb b są wierzchołki n-kąta foremnego, wpisanego w koło o promieniu $\sqrt[n]{r}$ i o środku w początku spółrzędnych. W szczególności możemy wykreślić cyrklem i linjałem wszystkie obrazy pierwiastków n-go stopnia z jedności dodatniej lub ujemnej, o ile tylko potrafimy zbudować n-kąt foremny.

Ażeby np. znaleźć wszystkie wartości $\sqrt[3]{1}$, wpisujemy w koło o środku O i promieniu 1 trójkąt foremny, mający jeden wierzchołek w punkcie 1, 0 (rys. 41), odcięta dwóch pozostałych wierzchołków jest $-\frac{1}{2}$, rzędna $\pm\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$; tym sposobem trzy wartości szukanego pierwiastka są

$$1; \quad -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}; \quad -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},$$

jak to już znaleźliśmy poprzednio innym sposobem (§ 150).

ZADANIA DO ROZDZIAŁU XII.

Następujące wyrażenia sprowadzić do postaci $a+bi$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistemi.

1) $(-3+2i)+(2-i)$.
2) $(1+i)-(5+3i)$.
3) $(-\frac{1}{4}-2i)-(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}i)$.
4) $2(3+\frac{1}{2}i)$.
5) $i(1-i)$.
6) $(1+i)(2-i)$.
7) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$.
8) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$.

Rozłożyć na dwa czynniki zespolone:

9) x^2+y^2. 10) a^2+4b^2.
11) $a^2+\frac{b^2}{4}$. 12) $a+b$.
13) a^2+1. 14) $9+1$.
15) 5. 16) 17.

Obliczyć następujące wyrażenia:

17) $(1+i)^2$. 18) $(1-i)^2$.
19) $(2-i\sqrt{2})^2$. 20) $(a+bi)^2-(a-bi)^2$.

21) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2$. 22) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$.

23) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$. 24) $\frac{5}{1+2i}$.

25) $\frac{17i}{3+5i}$. 26) $\frac{1+i}{1-i}$.

27) $\frac{5+12i}{3+2i}$. 28) $\frac{3i}{\sqrt{2}+i}$.

29) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. 30) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

31) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$. 32) $\frac{a+bi}{c+di}-\frac{a-bi}{c-di}$.

33) $\sqrt{5+12i}$. 34) $\sqrt{-13+84i}$.

35) $\sqrt{2i}$. 36) $\sqrt{-i}$.

37) $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$.

38) Obliczyć wartości bezwzględne (moduły) następujących liczb: a) $1+i$; b) $i-1$; c) $\sqrt{3}+i$; d) $i-\sqrt{3}$; e) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$. Przedstawić te liczby geometrycznie.

39) Rozwiązać graficznie zadania 1, 4 — 7.

40) Jak znaleźć graficznie różnicę i iloraz dwóch liczb zespolonych? Rozwiązać graficznie zadania 2, 3, 24 — 32.

41) Jakie są argumenty liczb $1, -1, i, -i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$.

42) Wyrysować kilka punktów A, B, $C, \ldots$, przedstawiających dowolne liczby zespolone a, b, $c, \ldots$ Jak zmieni się figura, złożona z punktów A, B, $C, \ldots$, jeżeli każda z liczb a, b, $c, \ldots$ zostanie pomnożona przez a) -1; b) i; c) $-i$; d) dowolną liczbę rzeczywistą ujemną; f) dowolną liczbę czysto urojoną; g) dowolną liczbę zespoloną o wartości bezwzględnej r, argumencie φ?

43) Zmienny punkt o spółrzędnych x, y posuwa się wzdłuż

linji prostej; jaką linję opisuje obraz liczby $c\,(x+yi)$, jeżeli c jest liczbą zespoloną o module r, argumencie φ?

44) Zmienny punkt o spółrzędnych u, v posuwa się wzdłuż linji prostej; jaką linję opisuje punkt, przedstawiający liczbę $x+yi$, która jest odwrotnością liczby $u+vi$. (Równanie tej linji należy znaleźć metodą geometrji analitycznej).

45) Obliczyć następujące iloczyny:

a) $(\cos 72^0 + i \sin 72^0)\,(\cos 18^0 + i \sin 18^0)$

b) $(\cos 15^0 + i \sin 15^0)\,(\cos 30^0 + i \sin 30^0)$

c) $(\cos 20^0 + i \sin 20^0)\,(\cos 40^0 + i \sin 40^0)$.

46) Obliczyć następujące potęgi:

a) $(\cos 25^0 + i \sin 25^0)^9$; b) $(\cos 45^0 + i \sin 45^0)^7$.

47) Uwzględniając, że $-\sin\varphi = \sin\,(2\pi - \varphi)$,

$\cos\,(2\pi - \varphi) = \cos\varphi$, obliczyć:

a) $(\cos 36^0 - i \sin 36^0)^5$; b) $(\cos 60^0 - i \sin 60^0)^4$.

48) Obliczyć następujące potęgi:

a) $(1+i)^8$; b) $(1-i)^{10}$; c) $(\sqrt{3}+i)^9$.

49) Sprawdzić wzór Moivre'a (§ 154) dla wykładników ujemnych, obliczając

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi - i \sin\varphi)^n}{(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n \,.\, (\cos\varphi - i \sin\varphi)^n}\,.$$

50) Obliczyć

a) $(\cos 45^0 + i \sin 45^0)^{-3}$; b) $(\cos 30^0 - i \sin 30^0)^{-5}$.

Rozwiązać równania:

51) $3x^2 - 2x + 1 = 0$.

52) $x^2 - (3+i)\,x + 4 + 3i = 0$.

53. $\dfrac{x+i}{x-i} = 3\,\dfrac{x-i}{x+i}\,.$

Rozwiązania zadań.

I.

1. Niema rozw. 2. $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$; $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. 3. Nieozn. 1. rz.
4. Niema rozw. 5. $t = +1$: nieozn. 1. rz.; $t = -1$: niema rozw..; $|t| \neq 1$: $\frac{1}{1+t}$; $\frac{1}{2(1+t)}$. 6. $t = -1$: nieozn. zup.; $t = 2$: niema rozw.; dla innych t: $\frac{1}{2-t}$; $\frac{1}{t-2}$.

II.

1. 4. 3. $\frac{ac^2}{b^2}$.

IV.

15. $-4 < x < 4$. 16. $x < -2$; $x > 2$.
17. $2 < x < 4$. 18. $3 < x < 5$. 19. $4 - \sqrt{31} < x < 4 + \sqrt{31}$..
20. Dla każdego x. 21. $1 < x < 2$; $x > 3$.
22. a) $x < 1$; $2l < x < 2l + 1$; $x > n$
b) $2l - 1 < x < 2l$; $x > n$.

l oznacza tu liczbę całkowitą dodatnią $< \frac{n}{2}$.

23. $x < {}^2/_3$; $x > 1$. 24. $x < -2$; $-1 < x < 1$; $x > 2$.
25. $x > 4$; $2^1/_2 < x < 3$. 26. $|x| > |a|$; $ax < 0$.

V.

1. 936. **2.** $139^1/_2$. **3.** — 115 **4.** 18, 21, 24, 27.
5. — $^1/_3$, $^1/_3$, 1, $1^2/_3$, $2^1/_3$, 3, $3^2/_3$, $4^1/_3$, **6.** 82.
7. 1, 2, 3, 4, 5. **8.** 1, 2. **9.** $r = \frac{u - t}{q - p}$;

$$a_1 = \frac{t(q-1) - u(p-1)}{q-p};\ a_n = \frac{u(n-p) - t(n-q)}{q-p};$$

$$s = \frac{n}{2} \cdot \frac{2(qt - pu) + (n+1)(u-t)}{q-p}.$$ **10.** 210.

11. 27.

VI.

1. 1365. **2.** $63(\sqrt{2} + 1)$. **3.** $^3/_4$. **4.** $^2/_3$. **5.** $4\frac{1}{2}$. **6.** $\frac{5}{33}$ **7.** $\frac{41}{333}$.
8. $\frac{557}{1980}$. **9.** $\frac{212}{495}$. **10.** 4, 16, 64. **11.** 8, 12, 18, 27. **12.** — 9, 27, —81, 243. **13.** 1, 3, 9,... **14.** 3, 6, 12. **15.** $s = 2047\ ^7/_8$; $r = 2$.
16. $\frac{x^{10} - y^{10}}{x - y}$. **17.** $\frac{a+b}{(a-b)^{n-2}} \cdot \frac{(a-b)^n - 1}{a - b - 1}$.
18. $\frac{(a+x)^{2n} - (a-x)^{2n}}{4\,a\,x\,(a-x)\,(a+x)^{2n-3}}$. **19.** $2t^2 - 1 \pm 2t\sqrt{t^2 - 1}$.
20. a) 18, 446, 744, 073, 709, 551, 615 ziarn; b) 115. 10^{11} *hl*; c) 2875. 10^5 lat. **21.** 12 godzin.

IX.

1. 2; 4; 6; 8; — 1; — 2; — 5. **2.** a) 1; 2; 3; 4; — $\frac{1}{2}$; — 1; — $^5/_2$; b) — 2; — 4; — 6; — 8; 1; 2; 5. **3.** 12; 6; 4; 3; 1; — 12; — 2; — 1. **4.** a) 2; 3; 4; b) — 2; — 3; — 4. **5.** a) 0; 1; 1; 2; 2; 3; 3; b) 0; 1; 1; 2; 2; 2; 3. **6.** $x \log(p+q) - (y-z)\log(r+s)$.
7. $\frac{(q-p)\log a - p \log b}{pq}$.

8. $$\frac{q \log(a+b) + (q-1)\log a + (q+1)\log b}{pq} + \\ - \frac{1}{(p+q)} \log(a-b).$$

9. $\log 2 + \frac{1}{2}(\log 2 + \frac{1}{2}(\log 2 + \frac{1}{2}(\log 2 + \frac{1}{2}(\log 2 + \frac{1}{2}\log 2))))$.
10. 0,3010; 0,4771; 0,8451; 1,0000. **13.** $\log 16 = 4 \log 2$;

$\log 5 = 1 - \log 2$; $\log 125 = 3\,(1 - \log 2)$; $\log 12 = 2 \log 2 + \log 3$: $\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5$; $\log 1{,}5 = \log 3 - \log 2$; $\log 2{,}5 = 1 - 2 \log 2$; $\log 40 = 1 + 2 \log 2$; $\log 3{,}6 = 2\,(\log 2 + \log 3) - 1$; $\log 0{,}0036 = 2\,(\log 2 + \log 3) - 4$; $\log 1080 = 1 + 2 \log 2 + 3 \log 3$; $\log \sqrt[5]{0{,}0125} = \frac{1}{5}\,(-3 \log 2 - 1)$; $\log \sqrt{31{,}25} = \frac{1}{2}\,(3 - 5 \log 2)$. **14.** *a)* 100; *b)* 1000; *c)* $\sqrt{10}$; *d)* $\frac{1}{\sqrt{100000}}$; *e)* $\frac{a}{b}$; *f)* $\left(\frac{a}{b}\right)^n$; *g)* $\frac{9}{32}$; *h)* $\frac{\sqrt{10}}{200}$; *i)* $\frac{10}{9}\sqrt[4]{10}$. **15.** 152,1. **16.** 0,2800. **17.** 0,5916. **18.** 0,001885. **19.** 0,6789. **20.** 0,7555. **21.** 0,1376. **22.** 1,399. **23.** 2,885. **24.** —3,899. **25.** 0,953. **26.** 0,827. **27.** 7 ; 4. **28.** $\frac{\log c}{\log a + \log b}$. **29.** 4,73; — 0,73. **30.** $\frac{2}{3}$; 0,774. **31.** 2. **32.** 3. **33.** $x = \pm 20$; $y = \pm 5$. **34.** 509,8 . 10^6 km^2; 1,082 . 10^{12} km^3; 5,962 . 10^{24} kg. **35.** 334 . 10^3 masy ziemi. **36.** 2,572 . 10^6 km. **37.** 24,31 km.

X.

1. 71800 zł. **2.** 9398 zł. **3.** 5,24%. **4.** 27 lat. **5.** 24,96. **6.** 2089 zł. **7.** 674,2 zł.

XI.

1. 134596. **2.** 5040. **3.** 126. **4.** 30240. **5.** 7. **6.** 1900. **7.** 30. **8.** 27. **9.** $^1/_8\, n\,(n-1)(n-2)(n-3)$. **10.** $10! - 9! = 3265920$.
11. 1 556 755 200; 1480 lat; 2 432 430 arkuszy.
12. $a^{13} - 13a^{12}x + 78a^{11}x^2 - \ldots - 78a^2x^{11} + 13ax^{12} - x^{13}$.
13. $243 - 810x^2 + 1080x^4 - 720x^6 + 240x^8 - 32x^{10}$.
14. $1 - 14y + 84y^2 - 280y^3 + 560y^4 - 672y^5 + 448y^6 - 128y^7$.
15. $x^n + 2\,nx^{n-1}y + 2\,n\,(n-1)\,x^{n-2}y^2 + \frac{4}{3}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}y^3$.
16. $1 + 4x + 2x^2 - 8x^3 - 5x^4 + 8x^5 + 2x^6 - 4x^7 + x^8$.
17. 5922. **18.** $x = 2$; $y = 3$; $n = 5$. **19.** $x = 4$; $y = \frac{1}{2}$; $n = 8$.

XII.

1. $-1 + i$. **2.** $-4\frac{1}{2} - 2i$. **3.** $-1 - {}^3/_2 i$. **4.** $6 + i$. **5.** $1 + i$. **6.** $3 + i$. **7.** $5\frac{1}{2}i$. **8.** $a + b$. **9.** $(x + yi)(x - yi)$.
10. $(a + 2bi)(a - 2bi)$. **11.** $\left(a + \frac{b}{2}i\right)\left(a - \frac{b}{2}i\right)$.

12. $(\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b})$. **13.** $(a + i)(a - i)$.
14. $(3 + i)(3 - i)$. **15.** $(2 + i)(2 - i)$. **16.** $(4 + i)(4 - i)$.
17. $2i$. **18.** $-2i$. **19.** $2 - 4i\sqrt{2}$. **20.** $4abi$. **21.** $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.
22. 1. **23.** 1. **24.** $1 - 2i$. **25.** $^5/_2 + {}^3/_2 i$. **26.** i. **27.** $3 + 2i$.
28. $1 + i\sqrt{2}$. **29.** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. **30.** 1. **31.** 0. **32.** $\frac{2(bc - ad)}{c^2 + d^2} i$.
33. $\pm(3 + 2i)$. **34.** $\pm(6 + 7i)$. **35.** $\pm(1 + i)$.
36. $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$. **37.** ± 4; $\pm 2i$. **38.** a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}$; c) 2; d) 2; e) 1. **41.** $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. **43.** Prosta. **44.** Koło.
45. a) i; b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **46.** a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. **47.** a) -1; b) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **48.** a) 16; b) $-32i$; c) $-512i$. **50.** a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.
51. $\frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3}$. **52.** $1 + 2i$; $2 - i$. **53.** $(2 \pm \sqrt{3})\, i$.