O indukcji na niższym stopniu nauczania.

W dobie obecnej wiele zajmują się reformą nauczania matematyki. Zwrócono uwagę zarówno na stronę materjalną programu nauki, jak na formalną — faktycznego wykonania w praktyce; podniesiono nawet pewne momenty ważne dydaktycznie a poniekąd w praktyce nowe, jak np. rozwijanie myślenia funkcjonalnego. Są to wszystko kwestje wielkiej doniosłości pedagogicznej. W rozprawce niniejszej interesuje mnie 1⁰ niższy stopień nauczania, a więc początki rachunku, 2⁰ charakter procesu myślenia, jakiego można od ucznia na tym stopniu wymagać. Wady nauczania początkowego kryją w sobie większość późniejszych trudności dydaktycznych, są zbyt często powodem niechęci do przedmiotu u uczni i syzyfowej pracy nauczyciela. Dla tego też zwrócenie uwagi na tę właśnie sferę zagadnienia uważam za jedną z najpilniejszych potrzeb. Nie myślę tu poruszać wszelkich nasuwających mi się wad nauczania: zrobię to kiedyindziej, chcę tylko jedną stronę kwestji rozpatrzyć—stronę formalną, logiczną.

Niema i nie może być wątpliwości, że na wszelkich stopniach nauczania matematyki uczeń musi myśleć. Wszak nawet przy zapoznawaniu się z liczbami pierwszego dziesiątka jest to potrzebne chociażby w tych drobnych, zaczątkowych zadaniach konkretnych, które myśli jego są dostępne. W dziesiątku drugim procesy formalne występują wyraźniej, stając się panującemi w dalszych stadjach, gdzie poglądowością posługiwać się już niepodobna. Jeżeli ktoś, jak np. Klein [1]) ogólnikowo twierdzi, że w szkole niższej i średniej wykład musi być psychologiczny, poglądowy, gienetyczny a dopiero w szkole wyższej systematyczny—niczego nas nie uczy, chociażby już z tego względu że samo pojęcie, dajmy na to, poglądowości jest rzeczą tak złożoną. Przedewszystkim zaś zamiast takich ogólników, trzeba sobie dokładnie zdać sprawę z tych dopuszczalnych psychologicznie procesów myśle-

[1]) Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. wyd. 2-e str. 8, 15.

nia, które na każdym stadjum są m o ż l i w e i tym samym w matematyce k o n i e c z n e. Pierwsze początki nauczania istotnie są w ręku psychologa nie matematyka, na czym nie zawsze sprawa wygrywa, tymbardziej gdy śród psychologów niema zgody co do najgłówniejszych bodaj zagadnień metodyki.

Wykład w szkole niższej i średniej nie może być systematyczny, t. j. opierać się na definicjach, postulatach i następującej dedukcji, — jest to rzecz przynajmniej w odniesieniu do klas niższych szkoły średniej, o które nam głównie chodzi, zupełnie jasna. Taki wykład wymaga wielkiego wyrobienia i usamodzielnienia aparatu logicznego, czego znowu od ucznia wymagać na tym poziomie nie można. Pozostaje jednakże otwarte pytanie, czy odrzucając wykład systematyczny, jako psychologicznie nieodpowiedni, tym samym wykluczamy wszelkie elementy logiczne, elementy rozumowania? Wszak nikt tego twierdzić nie będzie. W takim razie, na czym polega ta reszta? Słowa: traktowanie psychologiczne, gienetyczne, poglądowe wyjaśniają mało [1]). Zachodzi więc potrzeba bliższego zbadania tej sprawy.

W początkowym wykładzie rachunku, wyjaśniając własności działań i wogóle główne zależności i prawa w świecie liczb, wychodzimy zwykle z oddzielnego faktu liczbowego, ilustrujemy rzecz na oddzielnych przykładach, a później uogólniamy. Najczęściej wskazują tylko, „jak się robi”, a tym samym wspomniane uogólnienie ma charakter podanego prawidła i koniec na tym. O ile się nieraz spotyka u autorów podręczników do nauki rachunku chęć bliższego wyjaśnienia rzeczy, to wyjaśnienie często roi się od błędów logicznych, naukowych wprost z tego powodu, że się uprzednio nie zastanowiono, jakiego procesu rozumowania używać można zarówno ze względu na umysł ucznia, jak i na naturę przedmiotu. Dzięki temu „gienetyczne” traktowanie staje się nauką prawideł, a psychologja sprowadza się do zaniechania wszelkiej wewnętrznej spójni i jednolitości logicznej, wszelkiego jasnego procesu rozumowania. Tylko zadania ratują sytuację, dając uczniowi pole do samodzielnego ćwiczenia myśli, ale i tutaj sztuczne metody—prawidła — z powodzeniem z tą odrobiną samodzielności walczą. Jeżeli się przyjrzymy zwykłemu prowadzeniu lekcji rachunku przy rozwiązywaniu zadań, bez trudności zauważymy, że najczęściej to rozwiązywanie ma charakter syntetyczny, t. j. na zapytanie

---

[1]) Porów. np. uwagi Hilberta. Grundlagen der Geometrie. wyd. 3-e. 1909. str. 256—7. Metodę gienetyczną rozwija wszechstronniej O. Willmann. Didaktik als Bildungslehre. 3-e wydanie. Brunświk, 1903. 2 tomy. Ostatnie wydanie wyszło w jednym tomie.

nauczyciela, jak będziemy robić zadanie, jeden z uczniów stawia pierwsze pytanie, potym dalsze, przyczym nieraz reszta klasy, albo niektórzy z tej reszty nie zdają sobie sprawy z celowości tego pytania.

Stwierdzając wyżej niemożliwość systematycznego wykładu rachunku (metody aksjomatycznej), nie chcemy przez to powiedzieć, że metoda ta przestaje dla nas być ideałem, do którego się na wyższym stopniu nauczania dążyć winno. Ale realizacja ideału zależy od możliwości wykonania. Tu rozstrzyga doświadczenie, badania psychologiczne. Niemożliwość dedukcji w czystej formie nie wyłącza możliwości swojego rodzaju indukcji, ale to ostatnie zależy od bliższego wejrzenia w naturę przedmiotu, do czego obecnie przejdziemy.

W znanej ogólnie książce wybitny uczony francuski H. Poincaré podkreślił znaczenie w matematyce wogóle, a w arytmetyce w szczególności t. zw. indukcji matematycznej. Oczywiście nie trzeba tu wyjaśniać, czym jest indukcja matematyczna, jako taka. Ważny jest nadzwyczajnie dla nas ten fakt, że przynajmniej lwia część prawd arytmetyki początkowej da się na tej drodze uzasadnić. Wykazanie tego jest wielką zasługą prof. S. Zaremby [1]) i ma moim zdaniem wielkie znaczenie w poruszonej kwestji. Każde rozumowanie na tle indukcji matematycznej składa się z 2 wyraźnych części: 1⁰ bezpośredniego stwierdzenia danej prawdy dla jednego lub kilku pierwszych kolejnych przypadków poszczególnych, i 2⁰ właściwego rozumowania od n do $n+1$ [2]). To ostatnie ma wszelkie kwalifikacje do tego, aby zaliczyć t. zw. indukcję matematyczną do sui generis rozumowania dedukcyjnego, dla matematyki właściwego. W nauczaniu szkolnym ten drugi moment opuszczamy, poprzestając na pierwszym w wielu razach, mianowicie tych, gdzie indukcja matematyczna ma zastosowanie. Np. wyprowadzamy sposób dodawania liczb całkowitych 2-cyfrowych, 3-cyfrowych i t. p., a następnie uważamy, że ten sposób postępowania jest słuszny dla liczb o jakiejkolwiek liczbie cyfr. W wykładzie ścisłym nie byłoby to dopuszczalne i musiałoby wejść uzupełniające ogniwo drugie. Zakładając np., że proces dodawania jest słuszny dla liczb n—cyfrowych bez trudności na zasadzie praw łączności i przemienności wykazalibyśmy, że będzie słuszny dla liczb $n+1$-cyfrowych. Takie opuszczenie 2-go momentu w nauczaniu opiera się na wprowadzeniu nowego

[1]) Patrz S. Zaremba. Zarys pierwszych zasad teoryi liczb całkowitych. Kraków, 1907. Nak. Ak. Um.

[2]) Istnieje również t. zw. indukcja wsteczna, t. j. rozumowanie od n do $n-1$, ale nietrudno wykazać, że musi się ona oprzeć na indukcji pierwszego rodzaju. Np. dowód Cauchy'ego o średniej arytmetycznej i gieometrycznej.

postulatu bez wyraźnego zaznaczenia tego. Zgodnie z tym postulatem wymagamy jednostajności postępowania formalnego, niezależnej od liczby cyfr, od wielkości i położenia liczby w ciągu naturalnym. Wundt to nazywa Gleichförmigkeit der Zahlgesetze[1]). Taki postulat nadaje procesowi rozumowania w tych przypadkach cechy indukcji.

Indukcja, o ile dotyczy wyprowadzania sądów, a nie wyjaśnienia pojęć, jak np. w znanej jeszcze w starożytności metodzie sokratycznej, ukazuje się zwykle w 2 postaciach, znanych jeszcze Arystotelesowi, które nazwano później: inductio completa i incompleta. Jeśli np. wyprowadzam przez zwyczajne wyliczenie sąd, że wszystkie osoby znajdujące się w tym pokoju są Polakami, rozumuję na tle indukcji zupełnej (tak czasem nazywają indukcję matematyczną: vollständige Induction[2]). Jeżeli zaś wyprowadzam wniosek: wszystkie ciała spadają, opieram go oczywiście nie na bezpośrednim przeliczeniu wszystkich ciał na ziemi, a tymbardziej w przestrzeni niebieskiej. Wobec tego musi ten wniosek oprzeć się na pewnych przesłankach ubocznych. W badaniu przyrody w szerszym tego słowa znaczeniu do takich przesłanek należy postulat jednostajności działań przyrody, jak również t. zw. prawo przyczynowości. Te przesłanki umożliwiają wniosek w nauce doświadczalnej oraz stanowią ukryty spiritus movens w rozumowaniu na tle indukcji niezupełnej. Poprzednio zaznaczona wundtowska Gleichförmigkeit i wspomniane przesłanki wnioskowania indukcyjnego w badaniu przyrody wskazują na pewną analogję, która uprawnia nas do nazwania powyżej zaznaczonego procesu rozumowania w nauce rachunku indukcyjnym w tym drugim znaczeniu.

Zwykle się sądzi, że w indukcji przechodzimy od sądów pojedyńczych do sądów ogólnych, w dedukcji zaś odwrotnie. Tymczasem matematyka—ów wzór dedukcyjnego rozumowania—nastręcza niejeden przykład, gdzie wychodzimy również z sądów pojedyńczych. Tak się dzieje w indukcji matematycznej. Gdy wykazuję, że $\Pi_n = 1 . 2 .... n$, wychodzę z sądów pojedyńczych: $\Pi_1 = 1$, $\Pi_2 = 1 . 2$, a później stosuję ową kapitalną część tego rozumowania — przejście od Π_k do Π_{k+1}. Gdy udowadniam, że $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} b + ... + b^{n-1}$, sprawdzam to najpierw na przykładach: $\frac{a-b}{a-b} = a^0$, $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a + b$, $\frac{a^3 - b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$ i następnie, zakładając słuszność twierdzenia dla $\frac{a^k - b^k}{a-b}$, za pomocą zwykłego

[1]) Wundt. Logik. Tom II str. 144, wyd. 3-e. 1907.

[2]) Patrz np. Weber und Wellstein. Encyklopädie der Elementar-Mathematik. T. 1.

dzielenia wykazuję słuszność tegoż dla $\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b}$. Nawet w gieometrji to samo da się zauważyć.

Jako przykład weźmiemy dowód E. Moore'a twierdzenia 5 na str. 6 wspomnianej książki Hilberta. Twierdzenie to brzmi: Jeżeli dany jest jakikolwiek skończony zbiór punktów prostej, to można te punkty w taki sposób oznaczyć przez A, B, C, D, E,....., K, iż punkt oznaczony przez B znajduje się m i ę d z y A z jednej strony i C, D, E,..., K z drugiej, dalej punkt C m i ę d z y A, B z jednej strony i D, E,..., K z drugiej, tak samo D m i ę d z y A, B, C z jednej strony i E,..., K, z drugiej i t. d. Prócz tego sposobu oznaczenia istnieje tylko odwrotny: K,...., E, D, C, B, A, który posiada tę samą własność. Dowodu Hilbert zwyczajem swym — niezupełnie fortunnym i nawet pod względem naukowym poprawnym—nie podaje. Znaleźć go można prócz u samego Moore'a (cyt. u Hilberta) u Killinga [1]). Dowód ten jest oparty na indukcji matematycznej.

Wiadomo dalej, że wiele twierdzeń w gieometrji opiera się na rozpatrzeniu poszczególnych przypadków (inductio completa): np. twierdzenie o kącie obwodowym, o prostej równoległej do jednego z boków trójkąta (Thales'a), o kwadracie boku w trójkącie, o sumie kątów wewnętrznych wieloboku wypukłego i t. p. Przy tak zwanej zaś dyskusji zadań spotykamy to na każdym kroku. Przypomnę tu dalej, że t. zw. dowód apagogiczny (reductio ad absurdum) bardzo często polega na obaleniu możliwych przypuszczeń niezgodnych z postawionym twierdzeniem [2]). W dedukcyjnym rozumowaniu też nieraz uogólniamy, ale uogólnienie to nie opiera się na żadnych ubocznych przesłankach. W tym właśnie widzimy główną różnicę pomiędzy indukcją a dedukcją. Z drugiej strony w rozumowaniu indukcyjnym nieraz opieramy się na sądach ogólnych. Wobec tego możemy indukcyjne rozumowanie (inductio incompleta) określać jak następuje: j e s t t o t a k i s p o s ó b r o z u m o w a n i a, p r z y k t ó r y m s p r a w d z a m y s ą d y o g ó l n e, w y c h o d z ą c z s ą d ó w p o d p o r z ą d k o w a n y c h p o j e d y ń c z y c h l u b o g ó l n y c h i o p i e r a j ą c s i ę n a p r a w i e p r z y c z y n o w o ś c i o r a z p o s t u l a c i e j e d n o s t a j n o ś c i d z i a ł a ń p r z y r o d y.

---

[1]) Killing und Hovestadt. Handbuch des mathematischen Unterrichts I. Lipsk, 1910. str. 9.

[2]) W teorji mnogości istnieje t. zw. prawo trichomji analogiczne do trzech możliwych sądów o 2 wielkościach A i B skończonych: $A > B$, $A = B$, $A < B$. To prawo trichomji, nieudowodnione dotąd ani obalone, może być uważane za taką przesłankę, o ile stosować ją chcemy do zbiorów nieskończonych.

Dla dziecka, poznającego liczby pierwszego dziesiątka, każda z tych liczb, dla matematyka zaś, zajmującego się teorją liczb, dana kilkudziesięciocyfrowa liczba jest jakby faktem oddzielnym. Dziecko na tle elementarnych działań przy pomocy poglądu poznaje związek danej liczby z mniejszemi, matematyk zaś stosuje swe żmudne metody do tej liczby w celu odkrycia np. faktu, czy jest pierwsza czy nie. Obaj właściwie są jakby w tym samym położeniu. Spostrzeżenie to proste ma jednakże niepoślednią wartość dydaktyczną, a z drugiej strony popiera wyżej powiedziane. Tutaj mogą zachodzić tylko oddzielne spostrzeżenia, a możliwe uogólnienia mają charakter wybitnie indukcyjny. Dziecko, które raz spostrzegło, że $2+3=3+2$ posiada gotową predyspozycję w pewnym mniejszym lub większym stopniu do tego, by sądzić, że $7+2=2+7$. Uogólnia ono często bezkrytycznie i nieraz potrzebna jest wielka ostrożność, by takiemu uogólnieniu zapobiec. Wszak w historji matematyki napotkać można nawet w pismach pisarzy wybitnych tego rodzaju uogólnienia z indukcji. Jako przykład weźmy t. zw. twierdzenie chińskie, według którego liczba $\frac{2^n-2}{n}$ jest całkowitą, gdy n jest liczbą pierwszą, i ułamkiem, jeżeli n jest liczbą złożoną. Twierdzenie to przestaje być słuszne, gdy $n=341$, jak to wykazał p. Banachiewicz [1]), a dla wszystkich mniejszych wartości całkowitych n sprawdza się. Matematyk chiński drogą prób przekonał się o jego słuszności dla pierwszych wartości n i natychmiast uogólnił [2]). W zakresie liczb, z któremi operujemy zwykle, twierdzenie to jest oczywiście słuszne tak samo, jak w użytku praktycznym dwie liczby niewymierne, posiadające kilkanaście, dajmy na to, pierwszych znaków dziesiętnych po przecinku równych, uważamy za równe. Metoda podobnego uogólniania nie jest właściwa matematyce, jako nauce ścisłej, ale że w ten sposób nie jedna prawda została odkryta (jeżeli nie większość), o tym wątpić nie można. Matematyka egipska np. miała charakter empirycznych prawideł takich samych, jakie obecnie posiadają mularze, blacharze i t. p., którzy niejednokrotnie rozwiązują w sposób zadziwiająco prosty zagadnienia matematycznie trudne, wymagające w nauce zawiłych metod. Wykład systematyczny jest najczęściej obrobieniem gotowego materjału, jest późniejszą fazą rozwoju matematycznej myśli. Nauczanie na niższym stopniu nie może być systematyczne, a więc, jeżeli ma być prowadzone

---

[1]) O związku pomiędzy pewnym twierdzeniem matematyków chińskich i t. d. Sprawozd. wyd. nauk. mat.-przyr. Tow. N. w Warszawie. 1909. Str. 7.

[2]) Dobry jest również przykład Eulera, według którego wyrażenie: x^2+x+41 dla $x=0, 1, 2...$ aż do $x=40$ jest liczbą pierwszą, zaś dla $x=41$ jest złożoną.

przez uczących świadomie, musi uwzględniać te metody badania, które są właściwe umysłowi ludzkiemu. Są to metody indukcyjne. Faktycznie nieraz w nauczaniu posługujemy się niemi na tym stopniu, ale to posługiwynie się nie ma w sobie pierwiastka świadomego, obmyślanego sposobu postępowania. Stąd różne wady i niekonsekwencje.

Metodą rozumowania w nauczaniu początków może być tylko metoda samodzielnego rozumowania ucznia. Jest to ogólny postulat dydaktyczny. Wiele braków naszego nauczania powstaje stąd, że wymagamy od myśli niedojrzałej ucznia takiej metody, jaka nie może być jej właściwą, a stąd powstaje cały szereg nieporozumień i kucie... dowodzeń, t. j., że tak powiem dydaktyczne contradictio in adjecto.

Fałszywe i pochopne uogólnienia uczniów niech nas nie przestraszają, nie bójmy się o losy nauki ani o sprawność myślową naszych pupilów. Nie myli się ten, kto nie myśli, a w omyłkach jest czasem więcej pouczenia, niż w suchej in verbis magistri podanej prawdzie. Wszak prawda musi być dla nas wartością subjektywną, o ile ma nas obchodzić i o ile nie jesteśmy filozofami tak jak nasi uczniowie. Tę wartość subjektywną prawdy określa samodzielność odkrycia, które jest możliwe tylko wtedy, gdy operujemy metodą naszej myśli, poziomowi jej właściwą. Nadużywanie owego postulatu (Gleichförmigkeit der Zahlgesetze) i ryczałtowe uogólnienia, skorygowane odpowiednio przez nauczyciela i przez własne dochodzenie, nauczą lepiej ucznia o wartości metody dedukcyjnej, niż droga odwrotna, a tymbardziej zaniechanie wszelkiego celowego postępowania.

Powyżej wyszliśmy z t. zw. indukcji matematycznej, która nie obejmuje jednakże całej arytmetyki początkowej np. nauki o ułamkach. Był to wygodny punkt wyjścia dla wyjaśnienia rozwijanej tu myśli, ale zasadniczo postępowanie indukcyjne dzięki temu się nie zmieni również w tych przypadkach, gdzie indukcja matematyczna w wykładzie systematycznym miejsca nie ma. Przejdziemy właśnie teraz do przykładów, które najlepiej rzecz wyjaśnią.

Kurs zwyczajny arytmetyki dzieli się zwykle na 3 części: naukę o liczbach całkowitych, ułamkach, o stosunku i zadaniach, których rozwiązanie oparte jest na pojęciu zależności proporcjonalnej. Podział ten nie znaczy, aby przy nauce o liczbach całkowitych nie można było mówić o ułamkach w odpowiedniej formie, albo nie rozwiązywać jeszcze w zaczątkach nawet nauki zadań, uprawianych w dziale trzecim. Gdybyśmy tak postępowali, przeczyłoby to zasadzie indukcji najzupełniej. Wyżej mówiliśmy o wnioskowaniu indukcyjnym, ale przy nauczaniu ważne jest również indukcyjne wyrabianie pojęć. W tym tkwi jedna z podstaw każdego t. zw. propedeutycznego kursu. Cała nauka rachunku jest propedeutyką arytmetyki, czyli t. zw. algiebry na stopniu średnim, a w tej nauce rachunku istnieje cały szereg pojęć, które należy stopniowo przygotowywać, rozkładać na dłuższe okresy czasu, pozwalać im rosnąć. W tym tkwi idea gienetycznego traktowania przedmiotu, z której wynika, że w odpowiedniej formie, w najelementarniejszych przejawach należy rzecz zaczynać wcześnie, przygotowywać do więcej systematycznego, późniejszego ujęcia. A więc jeszcze w pierwszych 2 dziesiątkach można mówić o połowie, trzeciej części, czwartej, piątej i t. p., ilustrując rzecz konkretnemi przykładami poglądowo. Można kształcić również na odnośnych zadaniach pierwsze zacząki pojęcia zależności proporcjonalnej, np.: jeżeli 1 funt chleba kosztuje 3 kop., ile kosztują 2, 3 i t. d. funtów chleba. W ten sposób wspomniany wyżej podział kursu ma sens tylko w znaczeniu systematyczniejszego traktowania odnośnych działów, przy którym zbieramy najpierw zdobyte wiadomości, uporządkowujemy je i pogłębiamy.

To samo, co dotyczy całych działów, stosuje się również do oddzielnych momentów nauki. Weźmy, dajmy na to, dodawanie. Wykład systematyczny wykazuje potrzebę podkreślenia prawa łączności, przemienności, twierdzeń o dodawaniu sumy, dodawaniu do sumy, wymaga wreszcie pojęcia o liczbie jako o pewnej sumie. Te wszystkie momenty powinny być celowo i powoli wyjaśnione na liczbach mniejszych przy zadaniach konkretnych i przykładach liczbowych i tylko wtedy sam późniejszy sposób dodawania stanie się jasny i świadomy. Prawa łączności i przemienności występują już w dziesiątku pierwszym, a dodawanie sumy i dodawanie do sumy w dziesiątkach następnych. Uczący, zachowując tu stopniowanie, potrzebne przy rachunku pamięciowym, te rzeczy wskazuje i wyjaśnia. Oczywiście nie znaczy to, aby w pamięci wykonywano działania tak, jak później piśmiennie, potrzebna tu jest swoboda i liczenie się z wygodniejszym sposobem, który właśnie pozwoli należycie opanować wspomniane rzeczy. To samo dotyczy innych działań i takich np. kwestji jak tabliczka mnożenia i cechy podzielności. Tabliczkę mnożenia często wykuwają uczniowie jakby jednorazowo zgodnie z ową starożytną metodą mnemotechniczną. Lepiej daleko, aby sami uczniowie po zaznajomieniu się praktycznym w zadaniach i przykładach z częściami tabliczki zapisywali później w kajetach mnożenie przez 2, przez 3 i t. d. Co się tyczy cech podzielności, te zwykle odsuwane są na koniec kursu liczb całkowitych i traktowane jednorazowo, przyczym zwykle podawane są wyjaśnienia bardzo problematyczne, tymbardziej że uczeń przeciętny dokładnego dowodu nie w stanie jest przyswoić. Lepiej obrać inną drogę. W miarę zaznajamiania się z ciągiem naturalnym wydzielamy z niego liczby, dzielące się przez 2, 3, 5 i t. p. i układamy nowe ciągi. Łatwe jest spostrzeżenie co do liczb dzielących się przez 2 i przez 5. Nieco trudniejsze przez 3, ale przy pewnej umiejętności nauczyciela można znaną cechę uczniom podsunąć. Przekonają się bezpośrednio, że spełnia się ona dla ciągu liczb im znanego, wtedy nauczyciel proponuje aby napisali liczbę jakąkolwiek, która spełnia warunki cechy i natychmiast wykazuje, że następna w ciągu dzielących się przez trzy również ten warunek spełnia [1]). Tak samo z innemi cechami.

Tych przykładów chyba wystarcza dla wyjaśnienia metody traktowania liczb całkowitych: wszak artykuł nie jest metodyką.

W nauce ułamków myśl zasadnicza pozostaje w swej sile. Komplikuje się tu sprawa tym, że potrzebne są definicje działań, gdyż, jak wiadomo, w wykładzie systematycznym ułamki stanowią nowy rodzaj liczb, pierwszy stopień dalszego rozszerzenia pojęcia liczby [2]); stąd działania z ułamkami wymagają nowych definicji. Zwykle popełnia się niedopuszczalny naukowo, a tym samym niepotrzebny dydaktycznie błąd, uważając działania te za coś jakby danego i usiłując wyjaśnić sam proces ich wykonania. Nie od rzeczy tu będzie kilka uwag poświęcić samym definicjom wogóle i definjowaniu na różnych stopniach nauczania, sprawa to bowiem bardzo ważna.

Definicje na stopniu niższym grzeszą bardzo często nieścisłością, nienaukowością, a przedewszystkim tym, że właściwie niczego nie dają i są tylko materjałem do wykuwania. Na stopniu wyższym prócz wad powyżej zaznaczonych definicje zbyt często mają charakter syntetyczny. Zacznijmy od tego. W wykładzie systematycznym, który jest rezultatem, wykończeniem pracy naukowej, definicje często zjawiają się, szczególniej dla człowieka mniej przygotowanego, jak deus ex machina. W każdej takiej definicji zakłada się istnienie i niesprzeczność definjowanej rzeczy. Wyjaśnijmy rzecz na przykładzie. Określam proste równoległe: dwie proste, które leżą w tej samej płaszczyźnie i nie przecinają się, nazywam równoległemi. To określenie przypuszcza istnienie takich prostych czyli, co często (nie zawsze) na jedno wychodzi

[1]) Cechy podzielności przez 3, 7, 9, 11, 13, t. j. zwykle używane w szkole bez trudności można również wyprowadzić za pomocą indukcji matematycznej. Rzecz ta zasługuje na uwagę uczących.

[2]) Patrz wyborny artykuł prof. Łomnickiego p. t. „Kolejne rozszerzanie zakresu pojęcia liczby". Wiad. Mat. t. XV. 1911.

(w logice opartej na zasadzie sprzeczności)[1]), brak sprzeczności pomiędzy pojęciem prostych równoległych a innemi pojęciami gieometrji. Skądinąd wiadomo, że tej sprzeczności niema, ale wiadomo temu, który daje wykład systematyczny, ale nie temu, który naukę i myślenie nad danemi objektami rozpoczyna. Zarówno ścisłość naukowa, jak względy pedagogiczne wymagają, aby przed podaniem podobnej definicji wyjaśnić uczącemu się możliwość pojęcia prostych równoległych, jako wynik dotychczasowej jego wiedzy; jednym słowem definicja syntetyczna musi być zastąpiona przez analityczną, która w formie zwięzłej i jasnej rozwija istotne cechy znanego pojęcia, do pewnego stopnia uformowanego przed definicją. Definicja jest potrzebna dla siły argumentacji i ścisłego rozumowania, ale ona nie daje przedmiotu, jak deus ex machina, przynajmniej nie powinna go dawać w nauczaniu szkolnym. Nie mówię tu o definicjach błędnych albo pozornych, marnych tautologjach, które niczego nie dają, a są używane tylko dzięki tradycji i w celu zadośćuczynienia niemądrej pedanterji. Do takich np. należy definicja starożytna liczby: liczba jest rezultatem pomiaru i liczenia. Trzeba samemu być zbyt mało krytycznym i wierzyć w pożytek takiego nonsensu, aby go podawać do nauczenia się na pamięć, jak to dawniej robiono. Na stopniu niższym definicja ścisła jest niemożliwa, nie odpowiada bowiem rozwojowi umysłowemu dzieci, ale obejść się bez segregacji pojęć zdobywanych nie możemy, powstaje więc pytanie, jak tu sobie dawać radę. W zaczątku nauczania należy—że tak powiem—dawać definicje przez pogląd i przez działanie. Łączę dwie i trzy kulki na przyrządzie rachunkowym i powiadam: „dodaję kulki". Rozwiązuję proste zadanie konkretne na dodawanie i podkreślam fakt, że tu dodaję. Przez taką praktykę i przez umiejętny dobór zadań na przykładach uwypuklają się cechy dodawania i one właśnie w sumie swej stanowią ową definicję bez słów, bez sformułowania, tworzywo gienetyczne definicji ścisłej. Jeżeli dziecko świadomie stosuje operacje arytmetyczne, jeżeli świadomie wykonywa dany rachunek, nauczyciel ma sprawdzian dostateczny istnienia potrzebnych mu czynników myśli u dzieci. Powoli zaczną przyzwyczajać się do formułowania swoich pojęć. Kiedy to można robić, zależy od taktu i inteligiencji pedagogicznej nauczyciela.

W kursie ułamków można i należy sobie pozwolić na określanie działań. Weźmy dla przykładu mnożenie. Przed tym muszą być

---

[3]) Patrz J. Łukasiewicz. O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Kraków, 1910. Autor tutaj nie porusza uzgodnienia definicji wyraźnie, ale rozważania jego są bardzo pouczające, jakkolwiek w odniesieniu do pojęć matematycznych nie wolne od nieporozumień.

znane następujące rzeczy: 1° oznaczanie części całości i związane z tym 2 działania; 2° rozwiązywanie zadań konkretnych, w których to oznaczanie występuje w odpowiedniej formie, np. metr taśmy kosztuje 60 kop., ile kosztuje $\frac{3}{5}$ m.; 3° ten fakt, że każdą liczbę całkowitą mogę przedstawić w postaci ułamka (wyjaśnienie konkretne i formalne). Tych faktów wystarcza, aby przez analogję z mnożeniem liczb całkowitych nazwać mnożeniem przez ułamek mnożenie przez jego licznik i podzielenie przez mianownik. Nauczyciel może w powyższym przykładzie $\frac{3}{5}$ m. zamienić na decymetry, dowiedzieć się ile kosztuje 1 dec. i następnie wykonać mnożenie liczb całkowitych. To samo przez zwyczajne znajdywanie części całości. Jako dobry przykład może służyć tutaj również obliczanie pola prostokąta, którego wymiary można wyrazić liczbą całkowitą w jednostkach drobniejszych albo ułamkiem, używając większych jednostek. Tak samo widzimy, że znajdywanie, dajmy na to, $\frac{15}{3}$ całości jest równoważne mnożeniu przez 5. Tych analogji, popartych odnośnemi zadaniami, wystarcza do definicji mnożenia ułamków. W podobny sposób możemy postępować i przy dzieleniu, przyczym ilustracja gieometryczna (odcinek, prostokąt) może oddać wielkie usługi.

Nauka o ułamkach uzupełnia się przez pojęcie stosunku, jako najogólniejszej formy liczby wymiernej. Pojęcie stosunku w związku z pojęciem zależności proporcjonalnej stanowią kapitalny moment w trzecim rozdziale zwykłego kursu rachunku. Pojęcia te również rozwijać się winny w związku z konkretnemi przykładami, a rozwiązywanie zadań na t. zw. regułę trzech nie wymaga nic więcej ponad wyjaśnienie tych pojęć. W rozwiązywaniu zadań na złożoną regułę trzech mamy przykład rozumowania indukcyjnego z zastosowaniem wspomnianego postulatu, o ile chodzi o wykazanie niezależności procesu rozwiązania od liczby danych stosunków.

Mnożenie i dzielenie przez stosunek najzupełniej w tych zadaniach wystarcza, tymbardziej, gdy się zwróci uwagę na analogję pomiędzy poprzednio znanemi operacjami znajdywania części całości i całości z danej części.

Pojęcie zależności proporcjonalnej, tak ważne w zastosowaniach, zwykle szwankuje, gdyż zbyt wiele zwracamy uwagi na formę i szablon, zbyt mało zaś na istotę rzeczy, na przykłady konkretne i cechy charakterystyczne.

Jako pierwszy widoczniejszy przykład zależności funkcjonalnej, proporcjonalność wymaga szczególnej pieczy i byłoby bardzo pożyteczne, gdyby wzorem Anglików zaczęto tu już stosować metodę graficzną.

Wychodząc z układania tabliczek np. wartości różnych ilości towaru przy danej cenie, wymiarów prostokąta przy danym polu, długości ramienia dźwigni przy różnych obciążeniach i danym momencie i t. p. kształcimy pojęcie proporcjonalności. Następnie, przyglądając się jednej z takich tabliczek liczb, zwracamy uwagę na stałość pewnych stosunków i iloczynów, a stąd wyprowadzamy metodę krótszą dalszego rozwijania tabliczki czyli rozwiązywania zadań. Nie będę w tym miejscu bliżej w te kwestje wchodził, gdyż idzie mi o przykład, a ten jest widoczny.

Poznane właściwości liczb lub też procesy postępowania, działania możemy wyrażać bardzo często z pożytkiem nie w szacie słownej, jak to ongi robiono wobec braku symboli, ale w szacie symbolicznej, używając oznaczeń literowych. Nie jest to, szanowny czytelniku, algiebra jeszcze, jakkolwiek są litery, jest to tylko dobry i naukowo oraz metodycznie uzasadniony sposób nauczania.

Wezmę przykład na początek. Jeżeli dzielenie nie obywa się bez reszty, wmawiamy w naszych uczniów, że dzielna równa się dzielnikowi pomnożonemu przez iloraz więcej reszta. Powiedziałem wmawiamy, bo jeżeli sprawy się nie traktuje indukcyjnie, rozkładając na dłuższe okresy czasu, ilustrując na poszczególnych przykładach przy rosnącym zakresie liczbowym, podanie takiego twierdzenia jest wmawianiem. Ale mniejsza o to, chodzi tu nam o co innego. Powiadam, że twierdzenie powyższe można wyrazić symbolicznie tak: $D = d . l + r$, gdzie D—dzielna, d—dzielnik, l—iloraz, a r—reszta. Twierdzę, że takie oznaczenie jest możliwe i dla umysłowości ucznia na tym poziomie przystępne, twierdzę na zasadzie własnego doświadczenia i doświadczenia, którym się podzielił z czytającą publicznością prof. Dewey z Ameryki, który tego rodzaju oznaczenia stosuje już w szkole początkowej. Możliwość lub niemożliwość podobnych rzeczy może uzasadnić tylko doświadczenie. Kto nie wierzy, niech sine ira et studio spróbuje. Twierdzę dalej, że jest to pożyteczne. Każde krótkie i jasne sformułowanie myśli jest dla umysłu pożyteczne, a temu warunkowi powyższy sposób zadość czyni. To jedno. Takie sformułowanie chroni od błędów. Uczniowie np. wiedzą, że jeżeli dzielna i dzielnik mają na końcu zera, można jednakową liczbę tych zer tu i tam skreślić. Przyzwyczajają się do tego, gdy dzielenie odbywa się bez reszty, a później stosują w drugim przypadku — gdy jest reszta i... zapisują mylną resztę. Tymczasem uświadomienie sobie jasne powyższej formuły oraz znajomość elementarnych własności podzielności sumy (zdobytych na drodze indukcyjnej) uchroni ich od tego błędu.

Takich przykładów przytoczyć można wiele, np. $(a+b)c = ac+bc$, $m + \frac{a}{b} = \frac{mb+a}{b}$ i t. d. Ten ostatni przykład przytoczyłem umyślnie, gdyż uczniowie popełniają tu bardzo często błędy. Błędy uczniowskie bywają różnego rodzaju: indywidualne i niejako powszechne. Te ostatnie uwarunkowane są zapewne „jednolitością" nauczania, ale bezwątpienia mają też powody w pewnych właściwościach umysłu młodego. Skracanie $\frac{a+b}{a}$ przez a jest bardzo częste, odruchowym niemal błędem dla wielu uczniów. Takie błędy uczą nauczyciela i ucznia. Podobne symboliczne wyrażenia mogą znakomicie zastąpić definicję żmudną.

Wprowadzenie symbolów ogólnych stanowić może most pomiędzy indukcją a dedukcją, pomiędzy rachunkiem początkowym a algiebrą na stopniu średnim, wypływający z samej natury i sposobu rozumowania wyżej zaznaczonego.

Daleki jestem od myśli, że udało mi się kwestję wyczerpać. Dałoby się tu jeszcze wiele powiedzieć. Nie wyrzekam się też myśli ponownego zabrania głosu, co tym rychlej może nastąpić, jeżeli ta ważna sprawa zainteresuje uczących. Psychologja w nauczaniu matematyki o tyle jest potrzebna, o ile pozwala nam świadomie wybrać ten lub inny sposób rozumowania. Inaczej będziemy się ciągle kręcili w błędnym kole, z którego nie wyprowadzi nas eksperyment psychologiczny w dotychczasowej swej formie, bo niema sił po temu i zawiera nieraz petitionem principii [1]).

W samym przedmiocie szukałem sił, które pozwoliłyby ukształtować nauczanie niezależnie od ubocznego rusztowania. Zdaje mi się, że takie siły są. Dlatego też sceptycznie, moim zdaniem, należy się zapatrywać na głośną poniekąd t. zw. metodę laboratoryjną nauczania matematyki. Ta metoda jest tylko grubym zastosowaniem indukcji przyrodniczej do przedmiotu, który na każdym kroku opiera się takiemu gwałtowi. Metoda laboratoryjna ma znaczenie, jako protest przeciw nienaturalności zadań, dalekich od życia i zainteresowań dziecka. W tym jej wartość, jak również w umiejętnym łączeniu różnych

[1]) Patrz np. Couturat. Les principes des Mathematiques (tłum. niem. p. t.: Die philosopchischen Principien der Mathematik. Phil.-sociologische Bücherei. B. VII str. 48. 1908. Lipsk). Zarzucić to można badaniom Lay'a, Walsemanna i innym.

odrębnych gałęzi poznania. Ale matematyka ma w sobie siły, by stać na własnych nogach. W sobie, to znaczy w naturze umysłu ludzkiego. Zdaniem moim nawet nauczycielowi początkowemu nie powinna być obca scisła teorja naukowa arytmetyki początkowej. Z tej bowiem teorji wypłynie bardzo często porządek i układ przedmiotu, a także te drobne, lecz ważne momenty logiczne, które w przeciętnym nauczaniu opuszczamy niebacznie, nie zdając sobie sprawy, że takie opuszczenie zasłania przed uczniem światło rozumienia i samodzielności, czyli to, co posiada największą wartość pedagogiczną.

Warszawa, 5 czerwca 1911 r. *L. Zarzecki.*
