RACHUNEK WYKREŚLNY

NA PŁASCZYZNIE

CZĘŚĆ DRUGA

PRZEZ

M. SZYSTOWSKIEGO
Inżyniera Komunikacyj
b. ucznia Szkoły Politechnicznej w Rydze i Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu dnia 13 września 1879 roku.)

TREŚĆ CZĘŚCI DRUGIEJ

ROZDZIAŁ PIERWSZY

WYKREŚLENIE LINIJ

§ 1. — W pierwszej części Rachunku Wykreślnego, zajmowaliśmy się działaniami wykonywanemi niezależnie od położenia linij na danej płasczyznie; w działaniach zaś, które obecnie traktować zamierzamy, dane linije są związane z *miejscem* płasczyzny, albo, co na jedno wychodzi, odniesione za pomocą spółrzędnych do pewnej linii stałej zwanej *południkiem porównania.*

W tym względzie przyjmiemy raz na zawsze następującą ugodę (fig. 1) :

1° Południk porównania XX′ z początkiem albo biegunem O jest wielkością daną i stanowi całość z systematem danych linij.

2° Początek każdej linii AB danego systematu będziemy odnosić do południka porównania za pomocą spółrzędnych biegunowych czyli promienia wodzącego $OA = \rho$ i kąta biegunowego $AOX = \varphi$.

3° Dla wyznaczenia wielkości i kierunku linii AB będziemy odnosić jej koniec B do południka pomocniczego UU′ także za pomocą spółrzędnych biegunowych, czyli promienia wodzącego $AB = R$ i kąta biegunowego $BAU = \alpha$. Południk pomocniczy UU′ jest równoległym do południka XX′ i ma swój biegun w początku A linii AB, którą się zajmujemy.

4° Kąty będziemy liczyć tak, jak w Trygonometryi, to jest, wychodząc z dowolnego punktu wziętego na odpowiednim południku, pójdziemy po okręgu koła w stronę przeciwną posuwaniu się skazówek na zegarze.

5° Przyjmiemy, że początek każdej linii AB znajdował się pierwotnie na południku XX′; wszelka więc linija AB ma swój obecny początek w punkcie A, w skutek wirowania promienia wodzącego OA naokoło bieguna O, w stronę wyżej oznaczoną o kąt równy kątowi biegunowemu φ.

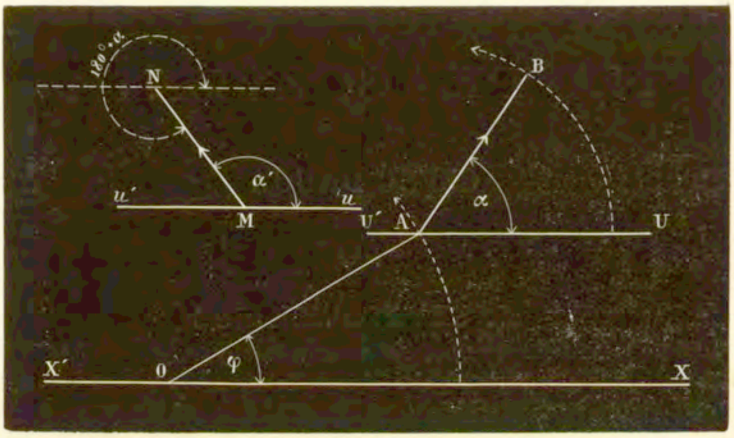

Fig. 1.

Zakładając następnie, że pierwotnym kierunkiem każdej linii AB był kierunek południka OX, to jest, że strzałka jej była zwróconą od O do X, obecny kierunek linii uważanej może być utworzony przez wirowanie tejże około punktu A, w stronę wyżej oznaczoną o kąt równy kątowi α.

Widocznem więc jest, że dla kąta α_1, zawartego między 0° i 180°, strzałka prostej MN będzie

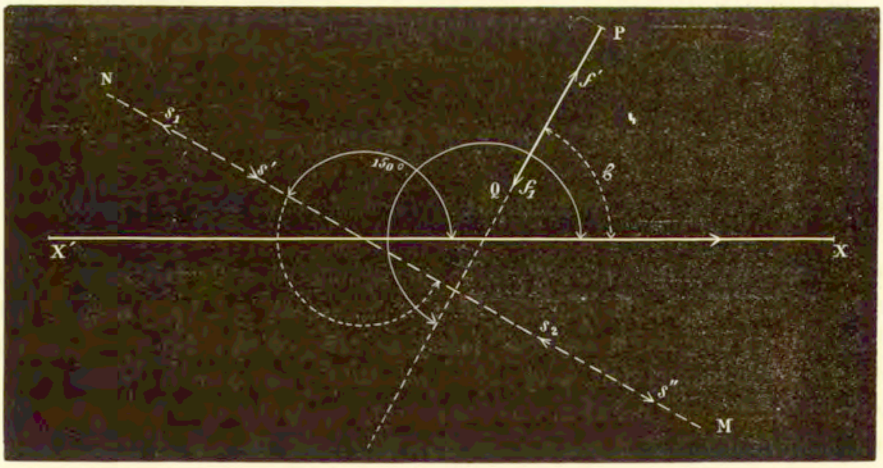

Fig. 2.

zwróconą w stronę płaszczyzny położoną nad uu'; dla kąta $\alpha_1 = 180°$, prosta MN przyjmie położenie uu' i jej strzałka zostanie zwróconą od u do u'; strzałki prostych nachylonych do południka pod kątem zawartym między 180° i 360°, zwrócone będą w stronę płaszczyzny leżącą pod uu, a przy $\alpha_1 = 360°$, prosta MN przejdzie do swego pierwotnego położenia uu' i jej strzałka będzie zwróconą od u' do u.

Dla lepszego wyjaśnienia tego związku między położeniem i strzałką linii podajemy figurę 2, z której widzimy, że dla kąta $\alpha = 150^\circ$, położenie linii uważanej jest MN i jej kierunek wskazuje się strzałką s_1 lub s_2, stosownie do tego czy linija ta znajduje się nad lub pod południkiem XX′, w każdym jednak razie jej kierunek jest zawsze zwrócony od M ku N, albowiem postawiwszy strzałki s' i s'', to jest biorąc kierunek od N ku M, położenie NM tworzyłoby z południkiem nie kąt $\alpha = 150^\circ$, lecz kąt $\alpha' = 180^\circ + \alpha = 330^\circ$.

Odwrotnie, mając liniję PQ i jej kierunek wskazany strzałką f_1, widzimy natychmiast, że kąt tej linii z południkiem XX′ jest $= 180^\circ + \beta$; kąt ten nie może być uważany jako $= \beta$, gdyż wtedy. strzałka linii PQ byłaby f', a linija uważana miałaby kierunek przeciwny kierunkowi linii danej.

§ 2 — Rozbiór kątów, utworzonych przez dane linije z południkiem porównania, prowadzi do dania linijom dodatnym i odjemnym, a także linijom tego samego, przeciwnego i rozmaitego kierunku obok określenia, o którem już była mowa w § 5, Cz. I, innego określenia, a mianowicie :

1° Liniją *odjemną* A′B′ względem danej linii AB (fig. 3) nazwiemy taką liniję, której kąt α' jest większy od kąta α lub też od niego mniejszy o 180°, to jest, $\alpha' = \alpha \pm 180^\circ$. Figura 3cia przedstawia linije dodatne, i odjemne bądź tego samego położenia, bądź też położenia równoległego.

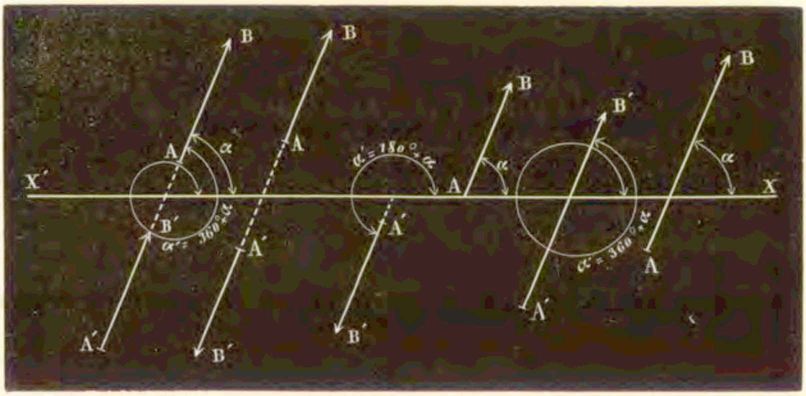

Fig. 3.

2° Określenie linij *kierunku przeciwnego* względem danego kierunku, będzie takie samo jak określenie linii odjemnej.

3° Linijami *tego samego kierunku* nazywamy takie linije, dla których kąty α' i α są, albo równe między sobą, albo też kąt $\alpha' = \alpha + n.360^\circ$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

4° Linijami *rozmaitego kierunku* będą te, których kąty z południkiem porównania są jakiekolwiek, to jest nie należą do żadnego z powyższych przypadków.

Metoda przez nas przyjęta i służąca do wyznaczenia linij polega na znajomości czterech ilości, a mianowicie :

$$\rho, \quad \text{kąta } \varphi, \quad R, \quad \text{kąta } \alpha.$$

Te cztery ilości wystarczają zupełnie do wyznaczenia jakiejkolwiek linii co do jej położenia, kierunku, wielkości i początku. W rzeczy samej, wszelkie możebne przypadki szczegółowe dają się wyrazić bez żadnej dwuznaczności. Dla lepszego zrozumienia przytoczmy kilka przykładów.

1° Dla linij mających swój początek na południku XX′, kąt φ będzie równy 0° lub $n \times 180^\circ$, gdzie n oznacza liczbę całkowitą parzystą lub nieparzystą. W pierwszym razie, dla n równego liczbie parzystej, początek danej linii znajduje się na prawo od bieguna O, zaś w drugim razie, dla n równego liczbie nieparzystej, początek linii znajduje się na lewo od bieguna O.

2° Dla linij mających swój początek w biegunie O, kąt φ nie ma żadnego znaczenia geometrycznego i może przybierać wszelkie dowolne wielkości. Cechą charakterystyczną tego przypadku jest właśnie wielkość ρ, która w danym razie musi być równą zeru.

3° Dla linij równoległych do południka XX', kąt α jest równy zeru albo $n \times 180°$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Jeżeli n jest liczbą parzystą, to linije uważane są kierunku dodatnego, czyli, że ich strzałki są zwrócone od O ku X; w przeciwnym zaś razie, dla n liczby nieparzystej, ten kierunek staje się odjemnym i strzałki linij są zwrócone od O ku X'.

4° Dla linij prostopadłych do południka XX', kąt α jest równy 90° albo też 270°. W pierwszym razie strzałki linij są zwrócone od dołu ku górze, zaś w drugim, od góry ku dołowi, a zatem ich kierunek jest przeciwny kierunkowi poprzedniemu.

Uwaga. — Punktem wyjścia naszej metody, służącej do wyznaczenia linij, była praca P. Scheffler'a: *Der Situationscalcul*, 1851, Braunschweig. W tem dziele autor traktuje związek zachodzący między ilościami urojonemi i linijami wchodzącemi w zakres Rachunku Wykreślnego. Jednym z ważniejszych wniosków autora jest ten, że każda linija prosta rozumiana co do swej wielkości, położenia, kierunku i początku, może być przedstawioną przez dwa równania następujące:

$$(AB) = R(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1}), \qquad 1)$$

$$P(AB) = \rho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}). \qquad 2)$$

Równanie 1) daje nam wielkość i kierunek linii AB; równanie 2) jej początek, a oba równania razem wzięte dają nam położenie tejże linii AB.

Jeden rzut oka na naturę i charakter tych równań jest wystarczającym, aby się przekonać, że metoda przez nas przyjęta jest odbiciem wniosku P. Scheffler'a, z tą li tylko różnicą, że P. Scheffler wyraził prawa zależności między czterema ilościami

$$\rho, \quad \varphi, \quad R, \quad \alpha,$$

za pomocą dwóch równań liczebnych, my zaś przekładaliśmy przedstawić związki między temi ilościami za pomocą wykreśleń geometrycznych, co jest bezwątpienia więcej zgodne z charakterem Rachunku Wykreślnego.

ROZDZIAŁ II

MNOŻENIE

§ 4. **Określenie.** — Mnożyć jednę wielkość (mnożna) przez drugą (mnożnik) jest to znaleźć trzecią wielkość (iloczyn) tak utworzoną z pierwszej, jak druga powstała z jedności.

W Rachunku Wykreślnym odróżniamy:

A. Mnożenie linij przez liczbę, czyli ogólniej przez stosunek $\frac{m}{n}$ dwóch wielkości.

B. Mnożenie linij przez liniję.

§ 5. Ponieważ linija stanowiąca przedmiot Rachunku Wykreślnego, obejmuje cztery cechy: położenie, kierunek, początek i wielkość, należy więc przy mnożeniu linij brać pod uwagę wszystkie określające ją elementy. Stosownie do metody przez nas przyjętej, wymienione cechy każdej linii AB (fig. 1) wyznaczają się w sposób następujący :

1° Wielkość linii AB — przez długość promienia wodzącego . . . $AB = R$.

2° Początek linii AB — przez spółrzędne biegunowe punktu A,

to jest przez promień wodzący i kąt biegunowy $\begin{cases} OA = \rho, \\ \angle AOX = \angle \varphi \end{cases}$

3° Kierunek linii AB — przez kąt biegunowy . . . . $\angle BAU = \angle \alpha$,

3° Położenie linii AB — przez zestawienie jej początku A i kierunku.

Te kilka słów wskazują nam, że elementa wyznaczające każdą linię są : R, ρ, $\angle \varphi$, $\angle \alpha$, z których dwa pierwsze : R i ρ przedstawiają nam *długości* promieni wodzących, a dwa ostatnie : $\angle \varphi$ i $\angle \alpha$ kierunki albo nachylenia tychże promieni względem południków XX′ i UU′,

Powiedzieliśmy już w § 3, że metoda wyznaczenia linij przez nas przyjęta nie podlega żadnej dwuznaczności w rezultatach, a zatem mnożenie linij, albo co na jedno wychodzi, mnożenie ich cech charakterystycznych, może być sprowadzonem do mnożenia wyznaczających je elementów, to jest ilości : R, ρ, $\angle \varphi$, $\angle \alpha$. Uwaga ta jest bardzo ważną, ponieważ na tym wniosku polega nietylko mnożenie linij, lecz także i wszystkie inne działania nad linijami, które w niniejszej pracy traktować zamyślamy.

A. — Mnożenie linij przez stosunki.

§ **6. Określenie.** — Pomnożyć linię daną przez stusunek $\frac{m}{n}$, jest to znaleźć linię, której położenie, kierunek, początek i wielkość tak są utworzone z położenia, kierunku, początku i wielkośc linii danej, jak stosunek $\frac{m}{n}$ powstał z jedności (fig. 4).

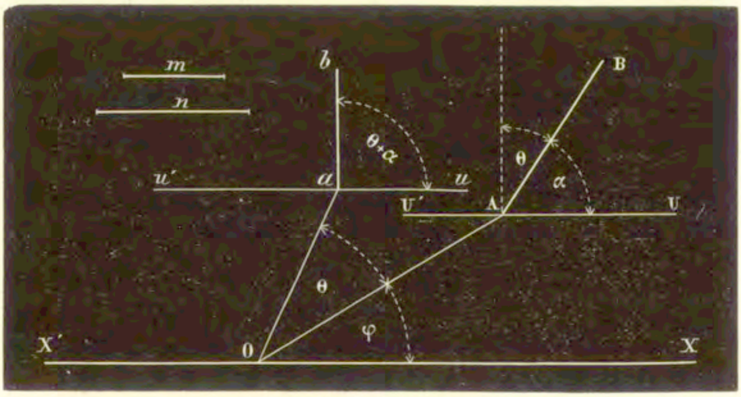

Fig. 4.

Ponieważ wielkość danej linii AB i odległość jej początku A od bieguna południka XX′, wyznaczają się przez *długości* R i ρ, a stosunek $\frac{m}{n}$, daje się przez dwie linije m i n, przeto mnożenia tych elementów wyznaczających, przez dany stosunek, nie przedstawia w gruncie żadnego nowego pojęcia i sprowadza się poprostu do wykreślenia czwartej proporcyonalnej.

Co się tyczy mnożenia kierunków promieni wodzących R i ρ przez stosunek $\frac{m}{n}$, kwestya staje się więcej delikatną i potrzebuje bliższego zastanowienia się. Wychodząc z określenia mnożenia dwóch wielkości powiadamy, że pomnożyć kierunek danej linii AB (fig. 5) przez stosunek $\frac{m}{n}$, jest to utworzyć z *kierunku* tej linii inny kierunek tak, jak stosunek $\frac{m}{n}$ powstał z jedności.

Otóż, wszelki kierunek powstaje z kierunku danego AB, przez wirowanie linii AB około jej początku A, odbywając zawsze ruch od strony prawej ku lewej, a zatem, pomnożyć kierunek linii AB

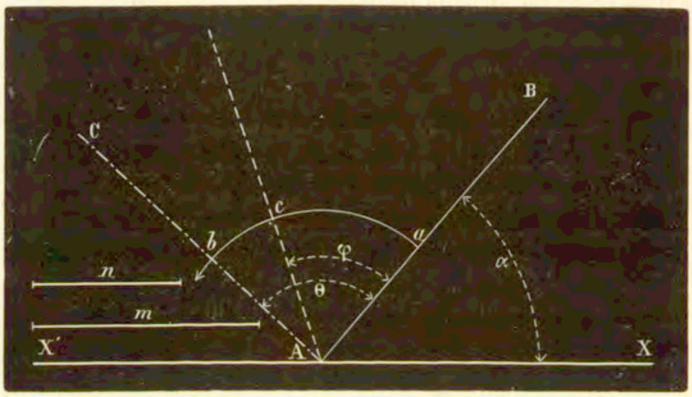

Fig. 5.

przez stosunek $\frac{m}{n}$, znaczy obrócić linię AB około punktu A na kąt θ taki, ażeby stosunek rozwartości tego kąta θ do rozwartości kąta powstałego z obrotu linii na *jedność kątową*, był taki sam, jak stosunek liczby $\frac{m}{n}$ do *jedności liczebnej*.

Ponieważ rozwartość każdego kąta wyznacza się stosunkiem łuku do promienia, zatem dla kąta φ mającego być wziętym za *jedność kątową*, rzeczony stosunek ma się równać jedności. Opisując więc promieniem n łuk koła i odcinając na nim długości,

$$ab = m \quad \text{i} \quad ac = n,$$

a także łącząc punkta b i c z punktem A, otrzymamy dwa kąty, θ i x związane proporcyą

$$\theta : x = \text{łuk } ab : \text{łuk } ac = m : n;$$

lecz kąt x jest jednością kątową, albowiem jego łuk równa się promieniowi, a zatem

$$\theta = \varphi \frac{m}{n} = \frac{n}{n} \times \frac{m}{n} = \frac{m}{n},$$

czyli, *pomnożyć kierunek linii danej przez stosunek* $\frac{m}{n}$, *jest to wykreślić na linii* AB (w stronę wskazaną znakiem postawionym przed tym stosunkiem) *kąt* θ, *dla którego stosunek łuku* l *do promienia* r *byłby równy danemu stosunkowi*, to jest :

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{m}{n}$$

Widzimy ztąd również, że kąt jaki tworzy linija AC, z południkiem AX, czyli iloczyn otrzymany z pomnożenia kierunku linii AB przez stosunek $\frac{m}{n}$, jest równym summie kątów złożonej z kąta α utworzonego przez liniję AB z tymże południkiem i z kąta θ mierzonego danym do mnożenia stosunkiem.

Te kilka słów, w których wyłożyliśmy sposób mnożenia kierunków przez stosunki i podali jak to mnożenie ma być rozumianem, dozwalają nam wykonać działania warunkowane przez określenie mnożenia linij przez stosunki.

Wracając tedy do fig. 4, na której ma być wykonane mnożenie linii AB przez stosunek $\frac{m}{n}$, pierwszym zadaniem będzie znalezienie początku szukanego iloczynu. W tym celu, przez punkt O poprowadźmy liniję Oa, która tworzy z promieniem wodzącym OA, kąt aOA $=\theta$ mierzony danym do mnożenia stosunkiem $\frac{m}{n}$, następnie, na promieniu Oa odetnijmy długość Oa = OA $\times \frac{m}{n}$, czyli czwartą proporcyonalnę między ilościami ρ, m i n, daną przez równanie :

$$x : \rho = m : n.$$

W taki sposób znaleziony punkt a jest początkiem iloczynu linii AB przez stosunek $\frac{m}{n}$. Dla znalezienia kierunku i wielkości tegoż iloczynu, poprowadźmy przez punkt a, południk pomocniczy uu' równoległy do XX', i oznaczmy kąt bau równy summie kątów, złożonej z kąta α utworzonego przez liniję AB z południkiem UU' i z kąta θ mierzonego danym do mnożenia stosunkiem; nakoniec na promieniu ab odetnijmy długość ab=AB $\times \frac{m}{n}$, czyli czwartą proporyonalnę między ilościami R, m i n, daną przez równanie

$$x : \mathrm{R} = m : n.$$

Tak znaleziona linija ab, odniesiona do południka XX', przedstawia co do położenia, kierunku, początku i wielkości, iloczyn otrzymany z pomnożenia linii AB przez stosunek $\frac{m}{n}$.

§ 7. Każda linija prosta może być uważaną już to ze względu na swe elementa wyznaczające R, ρ, $<\alpha$, $<\varphi$, już to ze względu na swe cechy charakterystyczne, t. j. ze względu na położenie, kierunek, początek i wielkość. Ten dwojaki rodzaj zapatrywania się na liniję prostą pociąga za sobą dwa rodzaje mnożenia linii przez stosunki, stosownie do tego, czy stosunki dane wyrażają zależność między elementami wyznaczającemi, czy też między cechami charakterystycznemi. Pierwszy gatunek mnożenia będziemy nazywali *mnożeniem linii przez stosunki elementów*, a drugi — *mnożeniem linii przez stosunki cech.*

W paragrafie poprzedzającym widzieliśmy, że mnożenie linii przez stosunek zmienia wszystkie jej cechy, jako to, położenie, kierunek, początek i wielkość, albo też, co na jedno wychodzi, że elementa wyznaczające iloczyn różnią się od elementów wyznaczających mnożnę. Lecz mogą być zadania, w których zachodzi potrzeba zmienienia stosunku $\frac{m}{n}$, jednego tylko elementu lub jednej tylko cechy danej linii, pozostawiając inne jej elementa lub cechy nienaruszonemi; również możemy sobie przedstawić potrzebę zmienienia wszystkich czterech elementów lub cech, ale w rozmaitych stosunkach. Przypadek pierwszy nazwiemy *mnożeniem częściowem*, a drugi *mnożeniem ogólnem.* Jeżeli przy mnożeniu ogólnem wszystkie stosunki będą równe, to otrzymamy tak zwane *mnożenie zupełne.*

Nadto zgodzimy się raz na zawsze, nazywać dany stosunek odpowiednio do cechy lub elementu, które mają uledz zmianie tym stosunkiem wyrażonej; tak naprzykład, jeżeli chcemy zmienić kierunek danej linii w stosunku $\frac{m}{n}$, to powiadamy, że mnożymy tę linię przez stosunek kierunku $K=\frac{m}{n}$, albo jeżeli chcemy zmienić element wyznaczający R w stosunku $\frac{m}{n}$, to powiadamy, że mnożymy tę linię przez stosunek promieni wodzących końca $W=\frac{m}{n}$.

§ **8.** Dla większej jasności podajemy w niniejszym paragrafie tablicę szematyczną wszystkich możebnych rodzajów mnożenia linii przez stosunki.

Mnożenie liii przez stosunki

- A. Mn. linii przez stosunki elementów
  - 1. Mn. częściowe przez stosunki elementów
    - *a*. Mn. przez stosunek promieni wodzących końca $\frac{R_0}{R_1}=w$,
    - *b*. Mn. przez stosunek nachylenia promieni wodzących końca $\frac{l}{r}=k$,
    - *c*. Mn. przez stosunek promieni wodzących początku $\frac{\rho_0}{\rho_1}=p$,
    - *d*. Mn. przez stosunek nachylenia promieni wodzących początku $\frac{\lambda}{\rho}=s$,
  - 2. Mn. ogólne przez stosunki elementów
    - *e*. Mn. ogólne w ścisłym znaczeniu (w, k, p i s) różnią się między sobą,
    - *f*. Mn. zupełne $\left(w=k=p=s=\frac{m}{n}\right)$.
- B. Mn. linii przez stosunki cech.
  - 3. Mn. częściowe przez stosunki cech.
    - *g*. Mn. przez stosunek wielkości, $w=W$,
    - *h*. Mn. przez stosunek kierunku, $k=K$,
    - *i*. Mn. przez stosunki początków, $P_\rho=p$ i $P_\alpha=s$,
    - *k*. Mn. przez stosunki położenia, $K=k$, $P_\rho=p$, $P_\alpha=s$.
  - 4. Mn. ogólne przez stosunki cech.
    - *l*. Mn. ogólne w ścisłym znaczeniu (W, K, P_ρ, P_α) różnią się między sobą,
    - *m*. Mn. zupełne $\left(W=K=P_\rho,=P_\alpha=\frac{m}{n}\right)$.

Uwaga I. — Dla uniknienia wszelkiej niejasności zauważyć należy, że przy mnożeniu linii przez stosunki elementów wyznaczających, należy trzymać się przepisów podanych przy wyznaczeniu linii, a mianowicie, spółrzędne biegunowe początku linii uważanej odnoszą się do południka porównania XX′, zaś spółrzędne biegunowe końca tejże linii, do południka pomocniczego UU′, równoległego do XX′ i przechodzącego przez początek danej linii.

Uwaga II. — Mnożenie linii przez stosunki cech musi być zawsze sprowadzonem do mnożenia linii przez stosunki elementów wyznaczających, nad któremi tylko właściwie, działanie wykonanem być może. Rozbierzmy po kolei wszystkie cztery stosunki cech charakterystycznych :

1° Stosunek wielkości W jest identycznym ze stosunkiem w promieni wodzących końca danej linii.

2° Stosunek kierunku K jest identycznym ze stosunkiem k nachylenia promieni wodzących końca.

3 Stosunki początków P_ρ i P_α dają się wyrazić przez stosunki spółrzędnych biegunowych początku p i s.

4° Stosunki położenia P_ρ, P_α, K dają się wyrazić przez stosunki początków i kierunku, to jest przez p, s i k.

§ 9. Wychodząc z tak obszernego poglądu na mnożenie linij przez stosunki, możemy uogólnić podane wyżej określenie tego działania w sposób następujący :

Pomnożyć liniję daną co do położenia, kierunku, początku i wielkości, przez stosunek tychże cech charakterystycznych, jest to wykreślić drugą liniję, której cechy tak są utworzone z cech odpowiednich danej linii, jak właściwe im stosunki powstają z jedności.

§ 10. **Mnożenie. odcinków przez stosunek.** — Jużeśmy powiedzieli, że mnożenie linii przez stosunek *długości* albo *wielkości* (§ 6), sprowadza się poprostu do wykreślenia czwartej proporcyo-

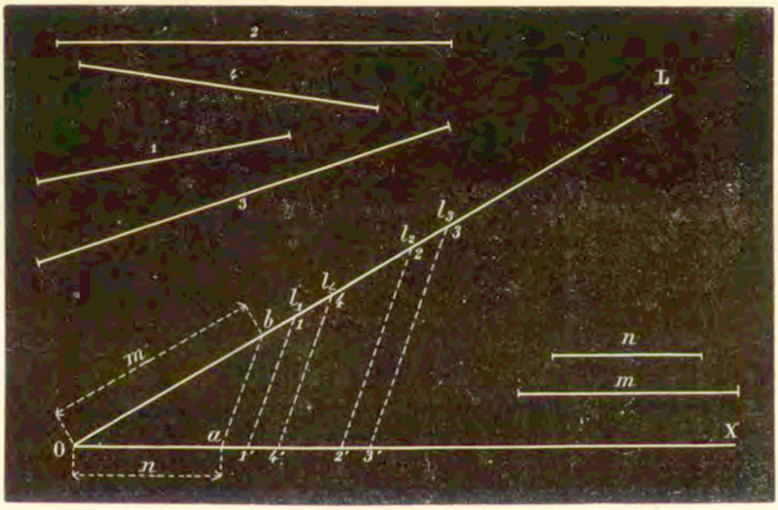

fig. 6.

nalnej; wypada nam teraz podać inne sposoby, również prowadzące do celu i mogące być z korzyścią użyte przy mnożeniu kilku linij l_1, l_2.., przez *jeden i ten* sam stosunek $\frac{n}{m}$.

Sposób I. — Z dowolnie obranego punktu O (fig. 6) poprowadźmy dwie proste OX i OL, pod kątem jakimkolwiek; na pierwszej z nich odetnijmy $Oa = n$, a na drugiej $Ob = m$, i połączmy punkta a i b. Następnie, na prostej OL, zaczynając od punktu O, odetnijmy odcinki Ol_1, Ol_2, Ol_3, Ol_4... równe danym linijom, 1, 2, 3, 4,...; linije równoległe do ab, poprowadzone przez punkta 1, 2, 3, 4,... wyznaczają na prostej OX odcinki 01', 02' 03', 04',..,' które są równe $l_1 \times \frac{n}{m}$, $l_2 \times \frac{n}{m}$, $l_3 \times \frac{n}{m}$, $l_4 \times \frac{n}{m}$,...., jak się to okazuje z podobieństwa trójkątów; mamy bowiem :

$$01' : Ol_1 = Oa : Ob,$$

$$02' : Ol_2 = Oa : Ob,$$

zkąd

$$01' = l_1 . \frac{n}{m}; \quad 02' = l_2 . \frac{n}{m};$$

Gdyby, zamiast iloczynu $l.\frac{n}{m}$, potrzeba było mieć $l.\frac{m}{n}$, natenczas odcięlibyśmy $Oa' = m$ na prostej OX, i $Ob' = n$ na prostej OL, i przez punkta l_1, l_2, l_3,... poprowadzilibyśmy równoległe do linii $a'b'$.

Sposób II. — W odległościach równych n i m, od dowolnego punktu O (fig. 7) poprowadźmy dwie równoległe NN′ i MM′. Na prostej MM′ odetnijmy, jeden po drugim, odcinki ab, bc, cd, de...

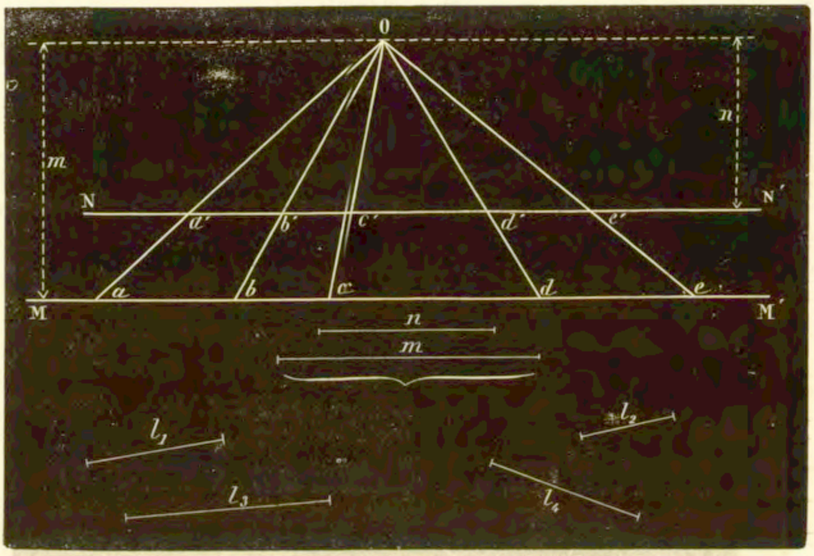

Fig. 7.

równe danym linijom: l_1, l_2, l_3, l_4...; poczem, z punktu O wyprowadźmy promienie Oa, Ob, Oc,...; punkta a', b', c', d', e', w których te promienie przecinają liniję NN′, wyznaczą nam szukane iloczyny. W samej rzeczy:

$$a'b' : ab = Ob' : Ob = n : m,$$

zkąd

$$a'b' = ab.\frac{n}{m} = l_1.\frac{n}{m};$$

podobnież,

$$b'c' = bc.\frac{n}{m} = l_2.\frac{n}{m}, \text{ i t. d.}$$

Ponieważ

$$ab = a'b'.\frac{m}{n},$$

przeto, dla pomnożenia linij l_1, l_2, l_3..., przez stosunek odwrotny $\frac{m}{n}$, należy odciąć na prostej NN′ odcinki,

$$\alpha\beta = l_1, \quad \beta\gamma = l_2. \quad \gamma\delta = l_3,$$

poprowadzić promienie $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$,.... Otrzymane ztąd odcinki $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$,.... na prostej MM′, będą oczywiście zadość czynić zadaniu.

Sposób III. — Sposób mnożenia odcinków przez stosunki, podany w dziele P. Culmann'a, na str. 11, zdaje się posiadać szczególną wartość, opis więc jego podajemy idąc za słowami autora (*Graph. Stat.* 2 *Aufl. Zürich*).

Zapatrując się na rzecz ze stanowiska teoretycznego, metody mnożenia podane dotychczas są również dobre, ale dla praktycznego użycia, sposób niniejszy zdaje się odpowiadać najlepiej, gdyż ani szukanego iloczynu $l.\frac{n}{m}$, ani linij m i n nie potrzebujemy wcale rysować, lecz tylko zmierzyć ich długości otworem cyrkla, a wiadomo, że działania wykonane jedynie za pomocą cyrkla są najdokładniejsze. Tak więc, dla wykreślenia iloczynu $x = l.\frac{n}{m}$, poprowadźmy dowolnie (fig. 8) linię OM, na

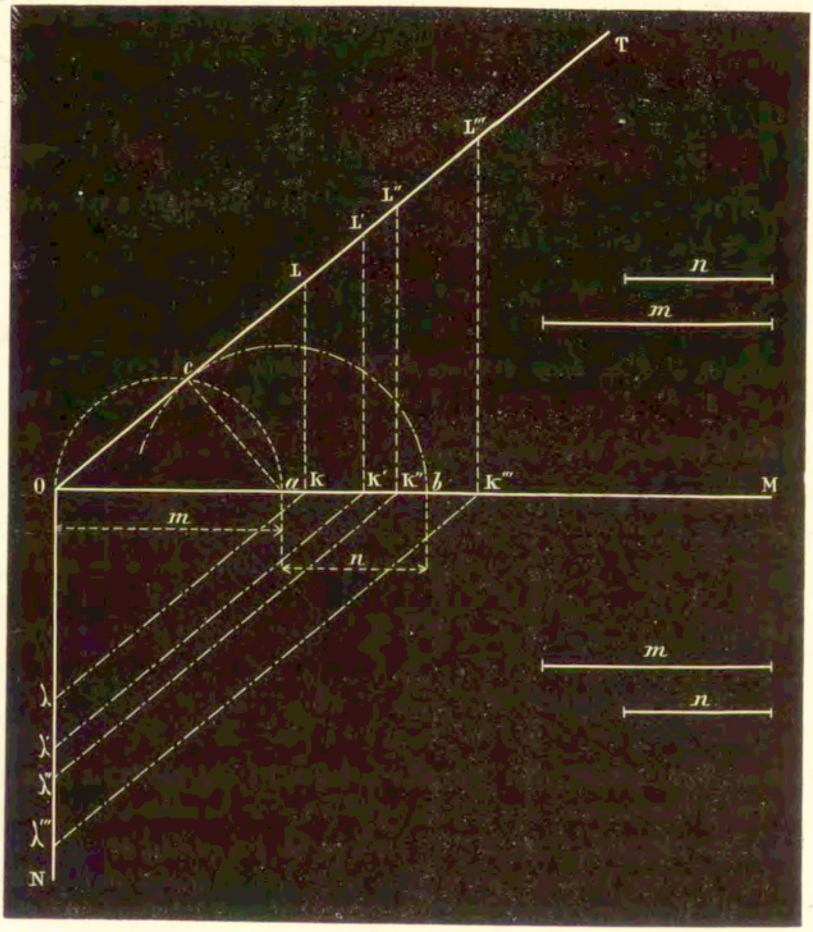

Fig. 8.

której odetnijmy $0a = m$; z punktu a, promieniem $ab = n$, opiszmy koło, i nakreślmy doń z punktu O styczną OT, to jeżeli na tej stycznej odetniemy odcinek $OL = l$, i zmierzemy otworem cyrkla odległość punktu L od prostej OM, otrzymamy szukaną wartość,

$$LK = x = l.\frac{n}{m},$$

albowiem z podobieństwa trójkątów OLK i $0ac$, wypada, że

$$LK : OL = ac : 0a = n : m.$$

Długość LK możemy zmierzyć cyrklem, nie kreśląc wcale samej tej linii.

Metoda ta oddaje szczególne usługi wtedy mianowicie, kiedy mamy do mnożenia przez jeden i ten sam stosunek $\frac{n}{m}$ wiele odcinków l, l', l'',.... W tym bowiem razie, po wykreśleniu stycznej OT, odetnijmy na niej

$$OL = l, \quad OL' = l', \quad OL'' = l'',...$$

i zmierzmy cyrklem odpowiednie odległości LK, L'K', L''K'',... bez rysowania tych linij, a otrzymamy szukane iloczyny w sposób bardzo szybki.

Zauważmy, że z podanej wyżej proporcyi wypada :

$$OL = LK.\frac{m}{n},$$

a to wskazuje nam sposób otrzymania iloczynu odcinków $\lambda, \lambda', \lambda''$,... przez stosunek $\frac{m}{n}$ większy od jedności. W samej rzeczy, po wykreśleniu, jak poprzednio, stycznej OT, poprowadźmy z punktu O i prostopadle do OM, linię ON, na której odetnijmy

$$O\lambda = \lambda, \quad O\lambda' = \lambda', \quad O\lambda'' = \lambda'',...$$

nakreślmy z punktów $\lambda, \lambda', \lambda''$,... linije równoległe do stycznej OT, i przedłużmy je do spotkania się ich w punktach K, K', K'',... z prostą OM, to linije λK, λ'K', λ''K'',... przedstawiać będą iloczyny odpowiednich im odcinków $\lambda, \lambda', \lambda''$,... przez stosunek $\frac{m}{n}$.

Uwaga — Dla wyczerpania kwestyi, należy nam jeszcze wspomnieć o *paraboli*, użytej do mnożenia odcinków przez stosunek wielkości, lecz metoda ta jest mozolną i trudną w zastosowaniu. Interesujących się tem zadaniem odsyłamy do dzieła P. Culmann'a (str. 10).

ROZTRZĄSANIE MNOŻENIA LINII PRZEZ STOSUNKI

§ 11. Ponieważ wartość spółrzędnych początku ρ i φ zależy od położenia południka XX', i od jego początku O, zatem iloczyn przez stosunek początków będzie się zmieniał ze zmianą bądź samego południka, bądź też jego początku. Wypada więc ztąd, że dla jednej i tej samej linii wykreślonej na płaszczyznie i dla tego samego stosunku początków, może być nieskończona ilość iloczynów.

Wiadomo, że wszelka linija prosta może być przyprowadzona od jednego jej położenia do jakiegokolwiek innego przez nadanie jej dwóch ruchów, *przenośnego* (translation) i *wirowego* (rotation), i że jakikolwiek punkt O wzięty na linii w jej pierwotnem położeniu, może być zniewolonym do zajęcia punktu Ω, z góry oznaczonego na przyszłem położeniu, przez nadanie mu ruchu wzdłuż linii $O\Omega$ łączącej te dwa punkta. Przemiana miejsca południka albo jego bieguna musi więc wpłynąć na iloczyn z pomnożenia danych linij przez stosunki.

Rozbierzmy zatem trzy następujące przypadki :

1° Zmiana iloczynu zależąca od zmiany początku O południka.

2° Zmiana iloczynu zależąca od przenośnego ruchu południka.

3° Zmiana iloczynu zależąca od ruchu wirowego południka.

1° Zmiana iloczynu zależąca od zmiany początku południka. — Niech daną będzie linija AB (fig. 9), odniesiona do południka porównania XX' mającego swój początek w punkcie O. Iloczynem (częściowym) tej linii przez stosunek p promieni wodzących początku i przez stosunek nachylenia s tychże promieni, będzie linija A_0B_0 równoległa do AB i otrzymana wiadomym już nam sposobem. Jeśli przeniesiemy początek O południka do punktu O_1, wtedy iloczynem linii AB, odniesionej teraz do nowego początku O_1, przez te same stosunki p i s, będzie linija A_1B_1, która musi być także równoległą do AB, gdyż stosunek kierunków został nienaruszony. Widzimy więc, że przeniesienie bieguna z punktu O do punktu O_1 na odległość $OO_1 = d$, przenosi początek iloczynu z punktu A_0 do punktu A_1 na odległość $A_0A_1 = \delta$; aby wykazać zależność tych dwóch odległości, uważmy trójkąty AOA_0, AO_1A_1.

Te dwa trójkąty są podobne, gdyż :

1) $$\angle AOA_0 = \angle AO_1A_1,$$

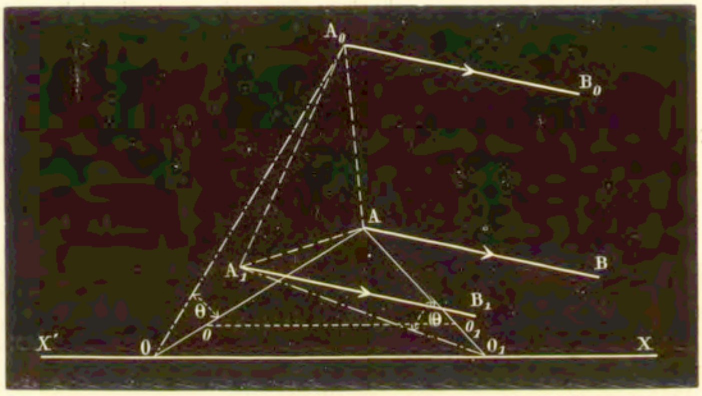

Fig. 9.

jako kąty mające za miarę jeden i ten sam stosunek nachylenia s ; nadto mamy:

2) $$OA_0 : O_1A_1 = OA : OA_1,$$

Z podobieństwa trójkątów AOA_0 i AO_1A_1 wypada

3) $$OA : O_1A = AA_0 : AA_1.$$

Prócz tego z figury widzimy, że

4) $$\angle OAO_1 = \angle A_0AA_1$$

zatem trójkąt OAO_1 jest podobny do trójkąta A_0AA_1.

Z podobieństwa tych ostatnich trójkątów wypada,

$$OO_1 : A_0A_1 = OA : AA_0 = O_1A : AA_1,$$

czyli, oznaczając OA przez ρ i AA_0 przez λ, albo $O_1A = \rho$, i $AA_1 = \lambda$, otrzymamy,

5) $$d : \delta = \rho : \lambda = \rho_1 : \lambda_1.$$

Równania (4) i (5) wyznaczają w zupełności położenie punktu A_1.

Skoro więc początek A_0 iloczynu (p, s)AB dla bieguna O jest nam dany, możemy wykreślić początek A_1 iloczynu $(p, s)AB$ dla bieguna O_1, łącząc początek A danej linii AB z nowym biegunem O_1, i na linii AO, licząc od A, odcinając $Ao = AA_0 = \lambda$, kreśląc następnie przez o prostę oo_1 równoległą do południka XX′, otrzymujemy $Ao_1 = AA_1 = \lambda_1$ i $oo_1 = A_0A_1 = \delta$. Za pomocą tych długości λ_1 i δ wykreślmy na $AA_0 = \lambda$, jako na podstawie, trójkąt AA_0A_1; wierzchołek jego A_1 będzie właśnie szukanym początkiem iloczynu z pomnożenia linii AB przez stusunki p i s względem bieguna O_1. Zauważyć należy, że trójkąt AA_0A_1 musi być nakreślony w taką stronę, aby trójkąty OAA_0 i O_1AA_1 były podobnemi między sobą. Oprócz tego widzimy, że linija A_0A_1 łącząca oba początki iloczynów tworzy z liniją AA_0 kąt, równy kątowi nachylenia $<AOX$ odpowiedniego promienia AO względem XX′, czyli że:

$$<A_1A_0A = <AOX.$$

Nakoniec podobieństwo trójkątów OAA_0 i O_0AA_1 wskazuje nam, że kąty, utworzone przez promienie wodzące początku i linije łączące punkt A z nowemi położeniami iloczynu, są równe między sobą, to jest

$$<OAA_0 = <O_1AA_1.$$

§ 13. Twierdzenie. — *Jeżeli biegun* O *południka* X′X *porusza się po tymże południku, to początki iloczynów, otrzymanych z pomnożenia danej linii* AB *przez stosunki rzędnych biegunowych początku* p *i* s *względem rozmaitych położeń bieguna, leżą na jednej prostej* MN (fig. 10).

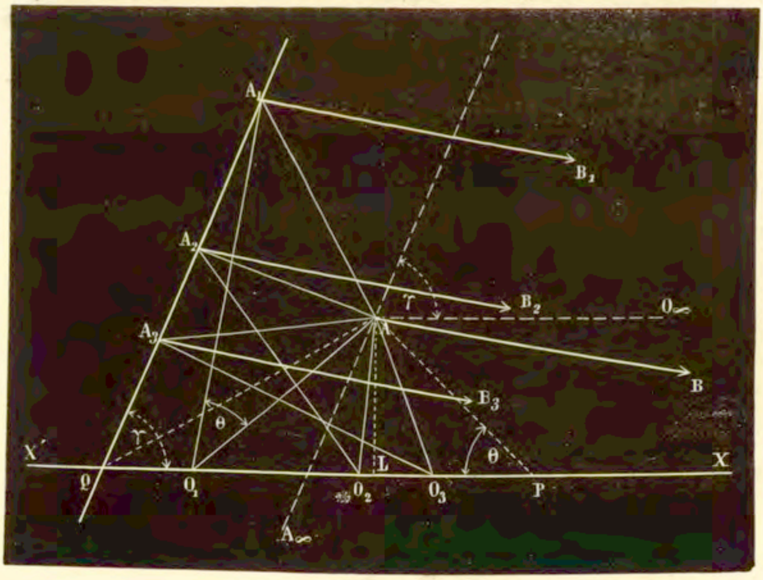

Fig. 10.

To twierdzenie będzie dowiedzionem, jeżeli dowiedziemy jego prawdziwości dla trzech jakichkolwiek dowolnie obranych położeń bieguna, na przykład dla O_1, O_2 i O_3.

Niech będzie linija AB, odniesiona do południka X′X, liniją daną do mnożenia przez stosunki p i s. Po wykonaniu mnożenia względem punktów O_1, O_2 i O_3 jako biegunów, otrzymamy iloczyny A_1B_1, A_2B_2 i A_3B_3, których początki leżą w punktach A_1, A_2 i A_3. Jeżeli te punkta nie leżą na jednej prostej, to możemy je połączyć linijami prostemi A_1A_2 i A_1A_3, a kreśląc linije AA_1, AA_2 i AA_3, otrzymamy dwie pary trójkątów podobnych:

$$A_1AA_2 \text{ i } O_1AO_2, \quad A_1AA_3 \text{ i } O_1AO_3.$$

Z podobieństwa tych trójkątów wypada

$$\sphericalangle AA_1A_2 = \sphericalangle AO_1O_2,$$

$$\sphericalangle AA_1A_3 = \sphericalangle AO_1O_3,$$

lecz

$$\sphericalangle AO_1O_3 = \sphericalangle AO_2O_1,$$

zatem

$$\sphericalangle AA_1A_2 = \sphericalangle AA_1A_3,$$

czyli, że punkta A_1, A_2 i A_3 leżą na jednej prostej MN.

§ **14**. Oznaczmy teraz *kierunek* i *położenie* linii MN.

a) Sposób wykreślny. — Dla oznaczenia kierunku, przypuśćmy że szukamy iloczynu dla bieguna O_∞, który się znajduje w nieskończoności. W tym razie linija AO_∞ łącząca ten biegun z punktem A będzie równoległą do południka X'X, a ponieważ dla wszystkich biegunów, kąty utworzone przez odpowiednie im promienie wodzące i przez linije łączące punkt A z nowemi położeniami iloczynów, są równe, zatem, w danym razie, w punkcie A kreślimy kąt $O_\infty AA_\infty$ równy kątowi O_1AA_1 i otrzymujemy liniję AA_∞, na której musi się znajdować początek szukanego iloczynu, a ponieważ ten początek leży w nieskończoności, więc linia MN, przechodząc przez ten punkt nieskończenie daleki, musi być co najmniej, równoległą do AA_∞.

Dla oznaczenia położenia linii MN należy tylko znaleźć punkt Q, w którym ona przecina południk X'X. W tym celu obierzmy na południku taki biegun P, aby odpowiedni mu promień wodzący PA tworzył z południkiem X'X kąt θ albo $180° - \theta$, mierzony danym do mnożenia stosunkiem. Następnie, na zasadzie wyżej podanej, wykreślmy w punkcie A na promieniu PA kąt QAP równy kątom $\sphericalangle O_1AA_1 = \sphericalangle O_3AA_3$ etc. Punkt Q przecięcia się promienia AQ z południkiem X'X jest punktem, przez który linija MN przechodzić powinna.

Jeden rzut oka na figurę wskazuje, że trójkąty O_1AA_1, O_2AA_2, O_3AA_3 etc. są podobne.

b) Sposób analityczny. — Oznaczmy części składowe jednego z tych trójkątów np. trójkąta O_1AA_1 jak następuje,

Stronę O_1A przez literę ρ,

Stronę O_1A_1 » » $\rho_1 = \rho \times p$,

Kąt AO_1A_1 » » θ (ten kąt jest mierzony stosunkiem *s*).

Zatem strona $AA_1 = \lambda$ wyrazi się przez równanie :

$$\lambda^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\theta = \rho^2 + \rho^2 p^2 - 2\rho^2 p \cos\theta,$$

$$\lambda = \rho\sqrt{(1 + p^2 - 2p\cos\theta)}.$$

Oznaczmy nachylenie linii MN względem XX' przez γ, otrzymamy :

$$\sphericalangle\gamma = 180° - \sphericalangle O_1AA_1 \quad \text{albo} \quad \sin\gamma = \sin O_1AA_1.$$

Lecz mamy nadto

$$\sin\theta : \sin\gamma = \lambda : \rho p,$$

czyli

$$\sin\gamma = \frac{\rho p \sin\theta}{\lambda} = \frac{\rho p \sin\theta}{\rho\sqrt{(1+p^2-2p\cos\theta)}} = \frac{p\sin\theta}{\sqrt{1+p^2-2p\cos\theta}}. \tag{1}$$

Dla znalezienia punktu Q nakreślmy pionowę AL do X'X, a oznaczając AL przez L, otrzymamy w trójkącie ALP :

$$AP = \frac{AL}{\sin\theta} \quad \text{i} \quad LP = AP\cos\theta = \frac{AL}{\tan g\theta} = \frac{L}{\tan g\theta}.$$

W trójkącie ALQ mamy równanie :

$$QL = QP - LP = AP \times p - LP = \frac{AL}{\sin\theta}p - \frac{AL}{\tan g\theta},$$

czyli

$$QL = \left(\frac{p}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{L}{\sin\theta}(p - \cos\theta) \qquad (2).$$

Równania (1) i (2) wyznaczają w zupełności położenie linii MN; równanie (1) wyznacza kierunek, a równanie (2), punkt przecięcia się tej linii z południkiem porównania.

§ **15. Zmiana iloczynu zależąca od przenośnego ruchu południka.** — Niech będzie daną linija AB (fig. 11) odniesiona do południka porównania X'X mającego swój początek w punkcie O. Iloczynem częściowym tej linii, przez stosunki rzędnych biegunowych początku p i s, będzie linija A_0B_0 równoległa do AB. Jeżeli przeniesiemy dany południk X'X do równoległej mu linii Y'Y, a to w taki sposób, aby jego początek przypadł w punkcie O_1, to iloczyn linii AB przez stosunki p i s,

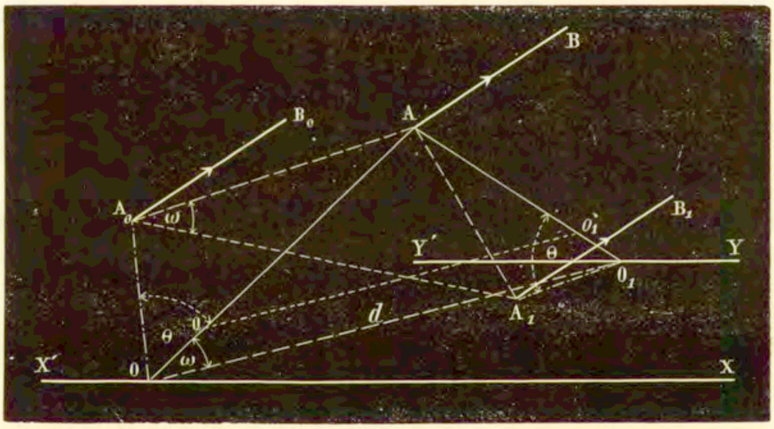

Fig. 11.

odniesiony do nowego położenia południka, przedstawi linija A_1B_1, która musi być także równoległą do AB, gdyż stosunek kierunków został nienaruszonym. Widzimy więc, że przeniesienie południka X'X do Y'Y i bieguna O do O_1 na odległość $OO_1 = d$, przenosi początek iloczynów z punktu A_0 do A_1 na odległość δ, w kierunku linii A_0A_1. Dla zdania sobie sprawy ze zmiany iloczynu, zależącej od przenośnego ruchu południka, rozbierzmy związki zachodzące między otrzymanemi rezultatami wykreśleń geometrycznych.

Widzimy naprzód, że trójkąty AOA_0 i AO_1A_1, są podobne gdyż kąt

(1) $$\angle AOA_0 = \angle AO_1A_1,$$

jako mające za miarę jeden i ten sam stosunek s.

(2) $$OA_0 : O_1A = OA_0 = O_1A_1.$$

Z podobieństwa tych trójkątów wypada,

(3) $$OA : O_1A = AA_0 : AA_1,$$

i

(4) $$\sphericalangle OAO_1 = \sphericalangle A_0AA_1,$$

zatem trójkąt OAO_1 jest podobny do trójkąta A_0AA_1.

Na zasadzie podobieństwa tych trójkątów otrzymamy,

$$OO_1 : A_0A_1 = OA : AA_0,$$

albo, oznaczając w poprzedzającem równaniu OA przez ρ i AA_0 przez λ.

(5) $$d : \delta = \rho : \lambda,$$

Rezultat ten jest w zupełności taki sam, jakiśmy już otrzymali w § **12**. Wykreślenie wielkości δ może być wykonanem według przepisów podanych w pomienionym paragrafie; co się zaś tyczy linii A_0A_1, łączącej oba początki iloczynów, to kąt utworzony przez tę linię A_0A_1 z liniją AA_0, jest równy kątowi nachylenia odpowiedniego promienia OA względem linii łączącej oba położenia bieguna, czyli że kąt $A_1A_0A = AOO_1$.

§ **16. Zmiana iloczynu zależąca od ruchu wirowego południka.** — Przy rozpatrywaniu własności iloczynów zależących od ruchu wirowego południka, należy odróżnić dwa przypadki:

1° Środek wirowania leży w biegunie południka.

2° Środek wirowania leży w dowolnym punkcie południka.

Drugi przypadek może być zawsze sprowadzonym do pierwszego, uważając nowe położenie bieguna, jako powstałe skutkiem ruchu przenośnego, którego wpływ na iloczyn poznaliśmy już w poprzedzającym paragrafie; pozostaje więc nam do rozebrania tylko przypadek pierwszy. Otóż, ruch wirowy w ścisłym znaczeniu jest bez wpływu na absolutne cechy rozbieranego iloczynu, ponieważ przy mnożeniu przez stosunki długości (ρ i R), iloczyny pozostają temi samemi, jakiemi były przed wirowaniem południka, a przy mnożeniu przez stosunki kierunków (φ i α) kąty mierzone temi stosunkami dodają się tylko do kątów już istniejących.

§ **17. Wykreślny sposób przejścia od iloczynu danego do iloczynu względem nowego położenia południka.** — Niech będzie linija AB (fig. 12) daną co do swego położenia, kierunku, początku i wielkości względem południka XX'. Mnożąc tę linię przez stosunki elementów w, k, p, s, albo co na jedno wychodzi, przez stosunki cech charakterystycznych W, K, P_ρ i P_φ, otrzymamy jako wynik tego działania linię A_0B_0. Jeżeli chcemy otrzymać iloczyn linii AB przez te same stosunki z tą jednak różnicą, że linię AB odniesiemy do nowego południka $Y'Y$ i bieguna O_1, to na zasadzie poprzedzających paragrafów, w których traktowaliśmy wpływ przemiany południków i biegunów na iloczyny, możemy wykreślić szukany iloczyn, omijając właściwe działanie mnożenia.

Przypuśćmy w tym celu, że nowe położenie południka $Y'Y$ powstało ze starego $X'X$ skutkiem podwójnego ruchu: naprzód, z ruchu przenośnego z $X'X$ do $Z'Z$, tak aby punkt O przypadł w punkcie O i południk $Z'Z$ stał się równoległym do $X'X$, a następnie, z ruchu wirowego około punktu O_1 o kąt równy kątowi ω. Ruch wirowy południka, jak wiadomo, nie ma wpływu na iloczyn, pozostaje więc nam do rozebrania tylko ruch przenośny. Na zasadzie § **11** początek szukanego iloczynu będzie wyznaczonym, jeżeli połączymy punkt A, t. j. początek danej linii AB z nowym położeniem bieguna O_1 i na linii AO, zaczynając od A, odetniemy $Ao = AA_0$, i przez o poprowadzimy równoległę oo_1 do linii OO_1 łączącej oba bieguny; następnie, jeżeli za pomocą otrzymanych długości Ao_1 i oo_1 wykreślimy trójkąt AA_0A_1 na linii AA_0, jako na podstawie. Wierzchołek tego trójkąta, czyli punkt A_1, będzie szukanym początkiem iloczynu $AB(P_\rho, P_\alpha)$ względem bieguna O_1 i południka $Y'Y$. Dla wykonania mnożenia przez stosunki W i K, poprowadźmy przez nowo znaleziony początek A_1 liniję A_1B_1 równą i równoległą do linii A_0B_0.

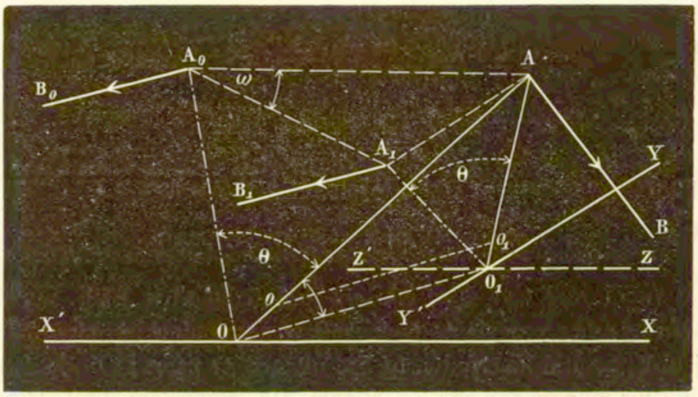

Fig. 12.

Tak wykreślona linija A_1B_1 będzie żądanym iloczynem linii AB przez dane stosunki, względem południka $Y'Y$ mającego swój biegun w punkcie O_1.

TWIERDZENIA POMOCNICZE.

§ 18. TWIERDZENIE I. — *Iloczyn summy dwóch linij przez stosunki cech albo elementów, równa się summie iloczynów każdej z tych linij przez te same stosunki*

$$(a+b)\times\frac{m}{n}=a\times\frac{m}{n}+b\times\frac{m}{n}.$$

Dowiedźmy tego twierdzenia w przypadku najogólniejszym, to jest dla mnożenia ogólnego w ścisłem znaczeniu.

Niech będą dane dwie linije AB i CD, odniesione do południka porównania XX' i bieguna O (fig. 13).

w, k, p, s = stosunki przez które mnożenie ma być wykonanem

$$\left.\begin{aligned}A_2B_4 &= \text{iloczyn linii AB}\\ C_2D_4 &= \text{iloczyn linii CD}\\ E_2F_4 &= \text{iloczyn linii EF}\end{aligned}\right\}\ \text{przez stosunki } w.\ k, p, s,$$

$$F = \text{summa linij } (AB+CD).$$

Trzeba dowieść, że :

$$(AB+CD)\times(w, k, p, s)=AB\times(w, k, p, s)+CD\times(w, k, p, s)$$

albo, ze względu na fig. 13

$$E_2F_4=EF\times(w, k, p, s)=A_2B_4+C_2D_4.$$

Ponieważ mnożenie ogólne przez stosunki elementów wyznaczających, składa się z czterech mnożeń częściowych od siebie nie zależnych, możemy więc rozłożyć to twierdzenie na cztery inne, z których każde będzie odpowiadało jednemu ze stosunków danych.

Te cztery twierdzenia wyrażą się zatem przez równania:

	W notacyi ogólnej:	*ze względu na* fig. 13:
I_a.	$(AB+CD)\times s=AB\times s+CD\times s$	$E_1F_1+A_1B_1=C_1D_1$
I_b.	$(AB+CD)\times p=AB\times p+CD\times p$	$E_2F_2+A_2B_2=C_2D_2$
I_c.	$(AB+CD)\times k=AB\times k+CD\times k$	$E_2F_3+A_2B_3=C_2D_3$
I_d.	$(AB+CD)\times w=AB\times w+CD\times w$	$E_2F_4+A_2B_4=C_2D_4$.

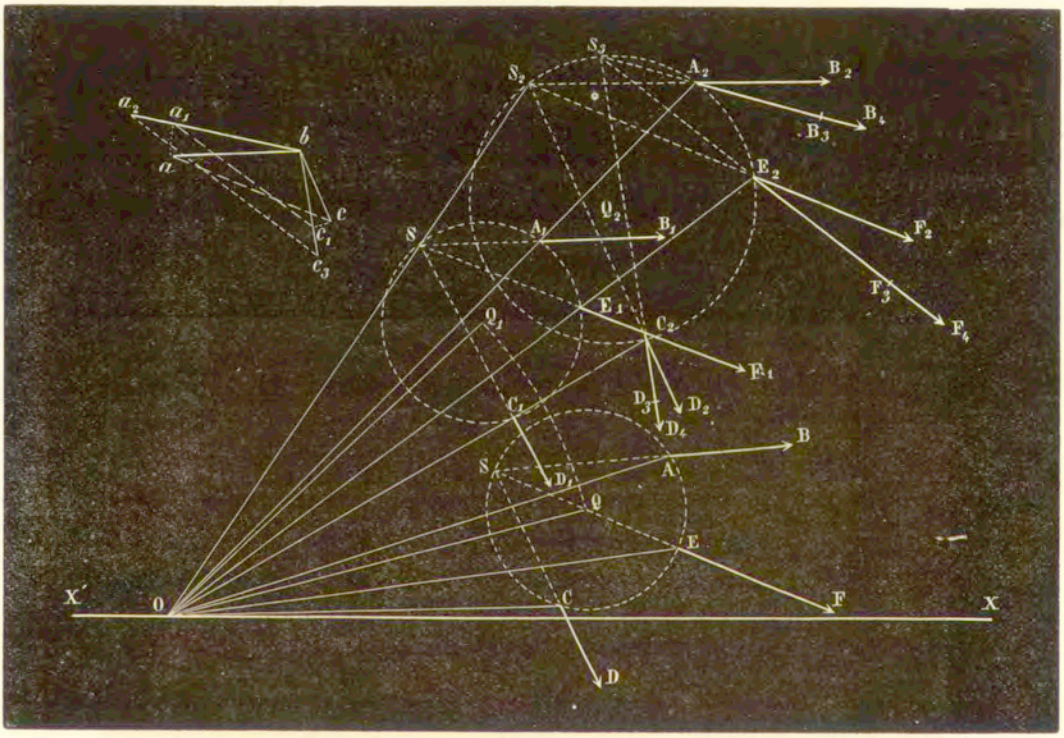

Fig. 13.

§ 19. Twierdzenie I_a. — *Iloczyny summy dwóch linij przez stosunek kierunku promieni wodzących początku, równa się summie iloczynów każdej z tych linij przez ten sam stosunek* (fig. 14)

$$(AB+CD)\times s=AB\times s+CD\times s.$$

Po wykonaniu mnożenia twierdzenie rozbierane może się wyrazić przez równanie

$$E_1F_1=A_1B_1+C_1D_1.$$

Ponieważ przy mnożeniu przez stosunek s ani wielkości, ani też kierunki linij mnożonych nie zmieniają się, potrzebujemy więc tylko rozpatrzyć ich położenia i początki, albo, mówiąc innemi słowy, należy wyrazić, że trzy linije A_1B_1, C_1D_1, i E_1F_1 przecinają się w jednym punkcie S_1, który się znajduje na kole przechodzącem przez początki linij wymienionych, to jest przez A_1, C_1 i E_1.

Dla dowodu, połączmy te trzy punkta linijami prostemi, a otrzymany w ten sposób trójkąt A_1, C_1, E, wpiszmy w koło Q_1, którego promień musi być równym promieniowi koła Q. W rzeczy samej na figurze 14 widzimy że

$$\left.\begin{array}{l} OC_1 = OC \\ OE_1 = OE \\ \angle C_1OE_1 = \angle COE \end{array}\right\} \text{a zatem trójkąt } C_1OE_1 \text{ jest podobny do trójkąta } COE \text{ i } C_1E_1 = CE.$$

$$\left.\begin{array}{l} OC_1 = OC \\ OA_1 = OA \\ \angle A_1OC_1 = \angle AOC \end{array}\right\} \text{» trójkąt } A_1OC_1 \text{ » trójkąta } AOC \text{ i } A_1C_1 = AC.$$

$$\left.\begin{array}{l} OA_1 = OA \\ OE_1 = OE \\ \angle A_1OE_1 = \angle AOE \end{array}\right\} \text{» trójkąt } A_1OE_1 \text{ » trójkąta } AOE \text{ i } A_1E_1 = AE.$$

trójkąt $A_1C_1E_1$ jest podobny do trójkąta ACE albo koło Q_1 = koło Q.

Jak wiadomo, w kołach równych, czyli opisanych równemi promieniami, łuki odpowiadające kątom równym są równe, a zatem :

$$\text{łuk } A_1C_1 = \text{łuk } AC,$$
$$\text{łuk } C_1E_1 = \text{łuk } CE.$$

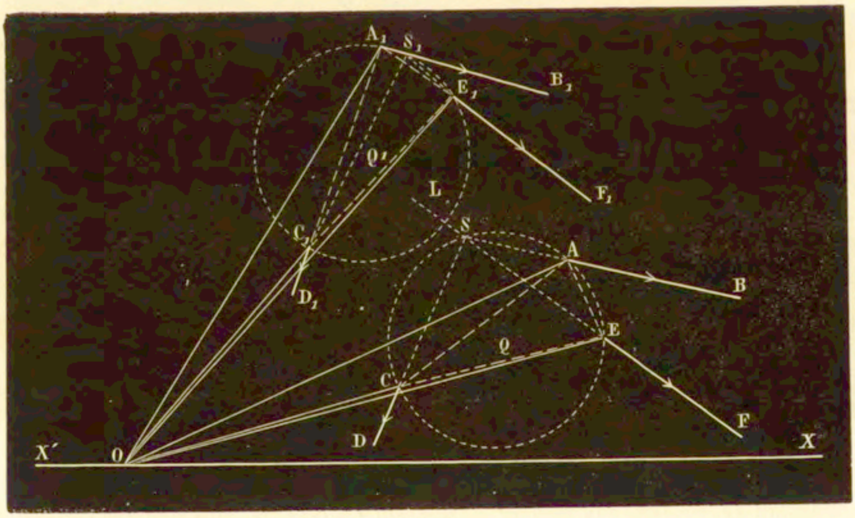

Fig. 14.

Przedłużając linię C_1D_1, równoległą do CD, do przecięcia się z obwodem w punkcie S_1 i łącząc punkt S_1 z punktami A_1 i E_1, otrzymamy :

$$\angle A_1S_1C_1 = \angle LSC \quad \text{i} \quad A_1S_1 \text{ równoległe } AB,$$
$$\angle C_1S_1E_1 = \angle CSE \quad \text{i} \quad S_1E_1 \quad \text{»} \quad EF,$$

Lecz według wykreślenia

$$A_1B_1 \quad \text{»} \quad AB$$
$$E_1E_1 \quad \text{»} \quad EF,$$

a zatem linije $A_1S_1B_1$ i S_1E_1F są linijami prostemi i przechodzą przez punkt S_1, przecięcia się linii C_1D_1 z obwodem Q_1.

§ 20. Twierdzenie I$_b$. — *Iloczyn summy dwóch linij przez stosunek promieni wodzących początku, równa się summie iloczynów każdej z tych linij przez ten sam stosunek* (fig. 15).

$$(AB + CD) \times p = AB \times p + CD \times p.$$

Po wykonaniu mnożenia, twierdzenie rozbierane może się wyrazić przez równanie

$$F_2F_2 = A_2B_2 + C_2D_2.$$

Ponieważ przy mnożeniu przez stosunek p, ani wielkości, ani też kierunek linij mnożonych nie zmieniają się, potrzebujemy więc tylko rozebrać ich położenia i początki, albo mówiąc innemi słowy, należy nam dowieść, że trzy linije C_2D_2, A_2B_2 i E_2F_2 przecinają się w jednym punkcie S_2, położonym na kole przechodzącem przez początek linij wymienionych, to jest przez punkta A_2, C_2 i E_2.

Dla dowodu, połączmy te trzy punkta linijami prostemi, a otrzymany trójkąt $A_2C_2E_2$ wpiszmy w koło Q_2, którego promień R tak musi być utworzony z promienia r koła Q, jak stosunek p powstał z jedności, to jest

$$R : r = p : 1.$$

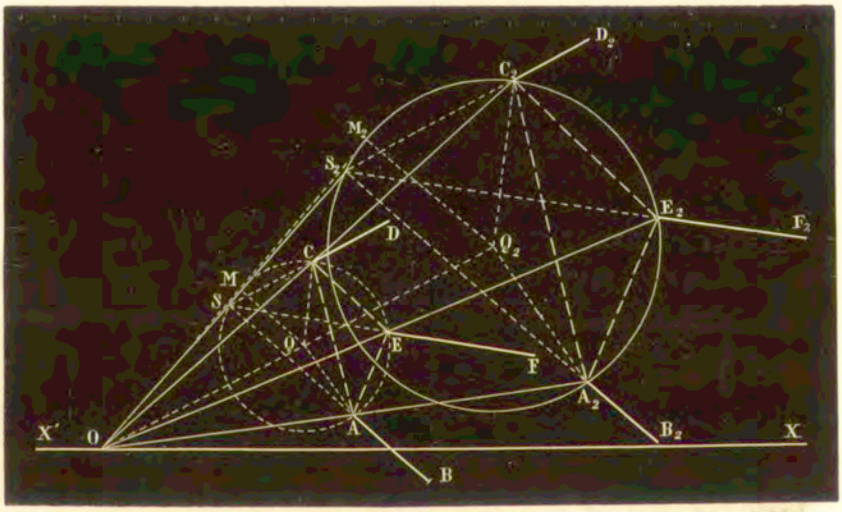

Fig. 15.

W rzeczy samej, na zasadzie wykonanych konstrukcyj na fig. 15 widzimy, że :

$\left.\begin{array}{l} OC_2 : OC = p : 1 \\ OE_2 : OE = p : 1 \\ \angle C_2OE_2 = \angle COE \end{array}\right\}$ zatem trójkąt C_2OE_2 jest podobny do trójkąta COE i $C_2E_2 : CE = p : 1$.

$\left.\begin{array}{l} OC_2 : OC = p : 1 \\ OA_2 : OA = p : 1 \\ \angle A_2OC_2 = \angle AOC \end{array}\right\}$ » trójkąt A_2OC_2 » trójkąta AOC i $A_2C_2 : AC = p : 1$.

$\left.\begin{array}{l} OA_2 : OA = p : 1 \\ OE_2 : OE = p : 1 \\ \angle A_2OE_2 = \angle AOE \end{array}\right\}$ » trójkąt A_2OE_2 » trójkąta AOE i $A_2E_2 : AE = p : 1$.

} trójkąt $A_2C_2E_2$ jest podobny do trójkąta ACE albo $R : r = p : 1$.

Jak wiadomo, w kołach opisanych promieniami proporcyonalnemi, i łuki odpowiadające kątom równym są proporcyonalne, a zatem,

$$\text{łuk } A_2C_2 : \text{łuk } AC = p : 1,$$

$$\text{łuk } C_2E_2 : \text{łuk } CE = p : 1.$$

Przedłużając liniję C_2D_2, równoległą do CD, do przecięcia się z obwodem w punkcie S_2 i łącząc punkt S_2 z punktami A_2 i E_2, otrzymamy:

$$<A_2S_2C_2 = <ASC \text{ i } A_2S_2 \text{ równoległą do } AB,$$

$$<C_2S_2E_2 = <CSE \text{ i } S_2E_2 \quad » \quad EF.$$

Lecz według wykreślenia,

$$A_2B_2 \quad » \quad AB,$$

$$E_2F_2 \quad » \quad EF,$$

a zatem linije $S_2A_2B_2$ i $S_2E_2F_2$ są linijami prostemi i przechodzą przez punkt S_2, przecięcia się linii C_2D_2 z obwodem O_2.

UWAGA. — Koła O i O_2 są perspektywą jedno drugiego i biegun O danego południka X'X jest ich biegunem. Aby dowieść, że linija QQ_2 przechodzi przez O, uważmy szereg trójkątów podobnych, AOC i A_2OC, ACQ i A_2C_2Q, OCQ i OC_2Q_2. Dla dowiedzenia zaś, że wspólne styczne kół Q i Q_2 przechodzą przez O, uważmy trójkąty podobne, MOQ i MOQ_2.

Dowód tych własności jest elementarnym i uważamy za zbyteczne podawać po szczegółowo.

§ **21**. TWIERDZENIE I_c. — *Iloczyn summy dwóch linij przez stosunek kierunku, równa się summie iloczynów każdej z tych linii przez ten sam stosunek* (fig. 16).

$$(AB + CD) \times k = AB \times k + CD \times k.$$

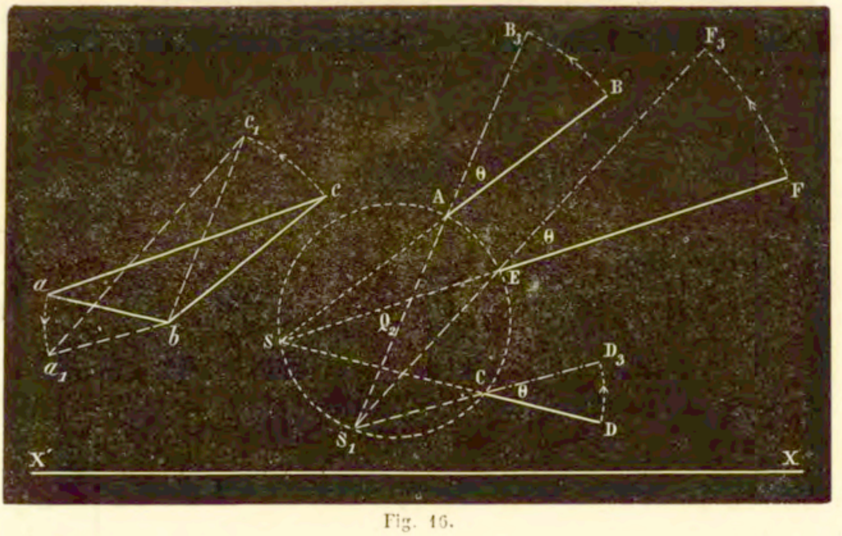

Fig. 16.

Po wykonaniu mnożenia twierdzenie rozbierane da się przedstawić przez równanie

$$EF_3 = AB_3 + CD_3,$$

Ponieważ przy mnożeniu przez stosunek k, ani wielkość, ani też początek linii mnożonej nie zmieniają się, należy więc tylko rozebrać jej położenie i kierunek, albo mówiąc innemi słowy, należy dowieść, że po wykreśleniu wieloboku pierwszego rzędu $a_1\, b_1\, c_1$ iloczynów AB_3 i CD_3, ich summa, to jest linija c_1a_1, będzie równą i równoległą do linii EF_3.

1° Aby dowieść, że $EF_3 = a_1c_1$, uważmy dwa trójkąty abc i a_1bc_1, w których

$$ab = a_1b,$$

$$bc = bc_1,$$

$$< cba = < c_1ba_1,$$

zatem trójkąt abc jest podobny do trójkąta a_1bc_1

Z równości tych trójkątów wypada

$$ac = a_1c_1.$$

Według wykreślenia

$$EF_3 = FE = ac,$$

więc

$$EF_3 = a_1c_1.$$

2° Dla dowiedzenia, że EF_3 jest równoległe do a_1c_1, zauważmy, że w kole Q_2 linija EF_3, na zasadzie własności początku summy, jest przedłużeniem linii ES_1, więc

$$< cab = < FSD = < F_3S_1D_3$$

Z równości trójkątów abc i a_1bc_1 wypada

$$< c_1a_1b = < cab,$$

a następnie

$$< c_1a_1b = < F_2S_1D_3.$$

Ponieważ linije a_1b i CE_3 są równoległe, zatem EF jest równoległe do a_1c_1.

§ 22. Twierdzenie I_d. — *Iloczyn summy dwóch linij przez stosunek wielkości, równa się summie iloczynów każdej z tych linij przez ten sam stosunek* (fig. 17)

$$(AB + CD) \times w = AB \times w + CD \times w.$$

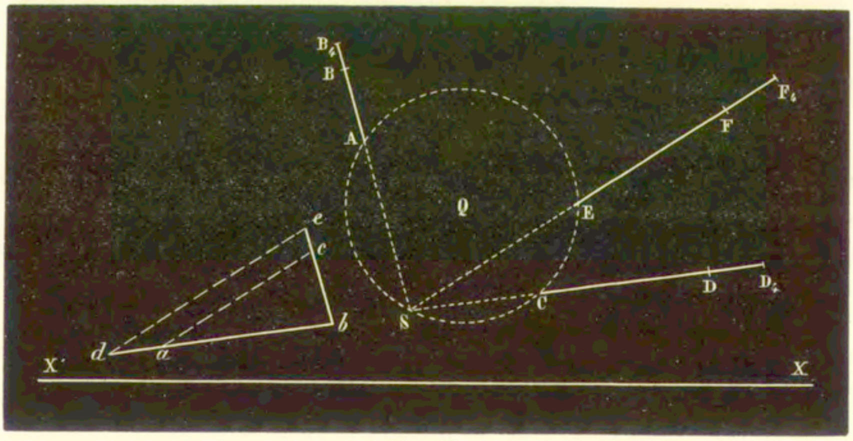

Fig. 17.

Po wykonaniu mnożenia twierdzenie rozbierane da się przedstawić przez równanie

$$EF_4 = AB_4 + CD_4.$$

Ponieważ przy mnożeniu przez stosunek wielkości, ani początek, ani kierunek, ani też położenie linii mnożonej nie zmieniają się, należy więc tylko rozebrać jej wielkość.

Dla dowiedzenia twierdzenia wykreślmy wielobok pierwszego rzędu abc dla linij AB i CD, następnie pomnóżmy odcinki $ab=\mathrm{AB}$ i $bc=\mathrm{CD}$ przez stosunek w i tak znalezione iloczyny nakreślmy na wieloboku abc w taki sposób, aby

$$bd=ab\times w \quad \text{i} \quad be=bc\times w$$

Łącząc punkta d i e liniją prostą, otrzymamy liniję $de=(db+be)$, która się równa linii $ac=(ab+bc)$ pomnożonej przez stosunek w.

W rzeczy samej, w trójkątach abc i dbe :

$$<abc=<dbe,$$

$$db:ab=be:bc=w:1,$$

zatem trójkąt abc jest podobny do trójkąta dbe.

Z podobieństwa tych trójkątów wypada :

$$de:ac=db:ab=ab\times w:ab=w:1,$$

$$de=ac\times w=(ab+bc)\times w=(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\times w.$$

Trójkąt dbe uważany jako wielobok pierwszego rzędu linij AB_4 i CD_4 daje nam :

$$de=\mathrm{AB}\times w+\mathrm{CD}\times w,$$

zatem

$$(\mathrm{AB}+\mathrm{CE})\times w=\mathrm{AB}\times w+\mathrm{CD}\times w.$$

Twierdzenie II. — (Odwrócenie *twierdzenia I.*)

Summa iloczynów dwóch linij przez stosunki cech charakterystycznych elementów wyznaczających, równa się iloczynowi summy tych dwóch linij przez te same stosunki.

To twierdzenie, ze względu na cztery elementy wyznaczające, może się rozłożyć na cztery twierdzenia następujące:

Twierdzenie II_a. — *Summa iloczynów dwóch linij przez stosunek kierunku promieni wodzących początku, równa się iloczynowi summy tych dwóch linij przez ten sam stosunek.*

Twierdzenie II_b. — *Summa iloczynów dwóch linij przez stosunek promieni wodzących początku, równa się iloczynowi summy tych dwóch linij przez ten sam stosunek.*

Twierdzenie II_c. — *Summa iloczynów dwóch linij przez stosunek kierunku, równa się iloczynowi summy tych dwóch linij przez ten sam stosunek.*

Twierdzenie II_d. — *Summa iloczynów dwóch linij przez stosunek wielkości, równa się iloczynowi summy tych dwóch linij przez ten sam stosunek.*

Uwaga. — Dowód tych twierdzeń nie przedstawia żadnej trudności, jest on podobny do dowodu twierdzeń poprzedzających, uważaliśmy więc za stosowne zostawić go czytelnikowi jako użyteczne ćwiczenie.

(Ciąg dalszy nastąpi.)