ROZWIĄZANIE PEWNEGO ZADANIA

Z GEOMETRYI WIELOWYMIAROWEJ

PODAŁ

WŁADYSŁAW KRETKOWSKI.

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych, dnia 8 października 1879 roku.)

Nim przystąpię do właściwego przedmiotu, rozwiążę zadanie pomocnicze następujące: Rozwiązać (gdy to możebne) układ

(1) $$o = d^2 - \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (z_\mu - z_{\mu,\nu})^2; \qquad (1 \leqq \nu \overset{=}{<} n+1)$$

$n+1$ równań drugiego stopnia, względem tyluż nieznanych

(2) $$d; \quad z_\mu; \quad (1 \leqq \mu \overset{=}{<} n).$$

W tym celu przekształćmy dany układ (1) na następujący

(3) $$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} z^2_{\mu,\nu} = \left(d^2 - \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_\mu^{\,2} \right) + \sum_{n=1}^{\mu=n} 2 z_n z_{n,\nu}; \quad (1 \leqq \nu \overset{=}{<} n+1)$$

który jest pierwszego stopnia względem $n+1$ nieznanych

(4) $$\left(d^2 - \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_\mu^{\,2} \right); \qquad 2 z_\mu; \qquad (1 \leqq \mu \overset{=}{<} n).$$

Jeżeli więc wyznacznik $n+1$ stopnia

$$
\text{(5)} \qquad W = \begin{vmatrix} 1, & z_{1,1}, & z_{2,1}, & \dots, & z_{n,1} \\ 1, & z_{1,2}, & z_{2,2}, & \dots, & z_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_{1,n+1}, & z_{2,n+1}, & \dots, & z_{n,n+1} \end{vmatrix}
$$

nie jest zerem, to układ (3) można rozwiązać względem nieznanych (4). Oznaczywszy przez

$$W_\mu; \qquad (0 \leqq \mu \leqq n)$$

$n+1$ wyznaczników, otrzymanych kolejno z wyznacznika (5) przez podstawienie za jego kolejne wiersze pionowe, zacząwszy od pierwszego wiersza pionowego tak złożonego

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} z^2_{\mu,1}$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} z^2_{\mu,2}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} z^2_{\mu,n+1}$$

to jest wtedy

$$d^2 - \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z^2_\mu = W^{-1} W_0; \qquad 2z_\mu = W^{-1} W_\mu; \qquad (1 \leqq \mu \leqq n)$$

a ztąd ostatecznie

$$\text{(6)} \qquad d = W^{-1}\left(W W_0 + \frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} W_\mu{}^2\right); \quad z_\mu = \frac{1}{2} W^{-1} W_\mu; \quad (1 \leqq \mu \leqq n).$$

Zważywszy, że układy rownań wyższego stopnia nad pierwszy, z wielu nieznanemi, rzadko dotąd napotykają się rozwiązane, powyższe więc rozwiązanie zdawało mi się zasługiwać na uwagę.

W przestrzeni n wymiarowej, którą tu uważamy, punkt A_ν jest oznaczony przez n współrzędnych prostokątnych, $z_{\mu,\nu}$, $(1 \leqq \mu \leqq n)$, a kwadrat z odległości dwóch punktów A_ν, A_π wyraża się wzorem

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} (z_{\mu,\pi} - z_{\mu,\nu})^2.$$

Równanie

$$W = 0$$

wyraża, że $n+1$ punktów A_ν, $(1 \leqq \nu \leqq n+1)$ leżą na jednej płaszczyznie, która w razie $n=2$ jest tem, co zwykle nazywamy liniją prostą. Przestrzeń i płaszczyzna zwykłe, odniesione do współrzędnych prostokątnych w nich znajdujących się, odpowiadają przypadkom $n=3$ i $n=2$.

Zadanie, które zamierzam rozwiązać jest następujące:

Mając dane w przestrzeni n wymiarowej, odniesionej do współrzędnych prostokątnych, $n+1$ punktów A_ν, $z_{\mu,\nu}$ $(1 \leqq \mu \overset{=}{<} n)$, $(1 \leqq \nu \overset{=}{<} n+1)$ nieleżących na jednej płasczyznie; znaleźć współrzędne z_μ, $(1 \leqq \mu \overset{=}{<} n)$ punktu A równo od poprzednich punktów oddalonego, oraz odległość wspólną d.

Można to inaczej jeszcze wysłowić:

Znaleźć współrzędne środka kuli przechodzącej przez $n+1$ punktów danych i jej promień, lub krócej, poprowadzić kulę przez $n+1$ punktów danych.

W powyższem wysłowieniu rozumiemy przez powierzchnię kuli, miejsce wszystkich punktów równooddalonych od punktu zwanego środkiem. Kula ta w razie $n=2$ jest tem, co zwykle nazywamy kołem.

Oczywiście wzory (6) rozwiązują zadanie.

W razie $n=3$ zadanie przedstawia się w ten sposób:

Mając dane w przestrzeni zwykłej, odniesionej do współrzędnych prostokątnych, cztery punkty A_ν, $z_{\mu,\nu}$, $(1 \leqq \mu \overset{=}{<} 3)$, $(1 \leqq \nu \overset{=}{<} 4)$ nie leżące na jednej płasczyznie, znaleźć współrzędne z_μ, $(1 \leqq \mu \overset{=}{<} 3)$ punktu A równo od nich oddalonego, oraz odległość wspólną d.

Zadanie jest tu zawsze rozwiązalnem, bowiem wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1, & z_{1,1}, & z_{2,1}, & z_{3,1} \\ 1, & z_{1,2}, & z_{2,2}, & z_{3,2} \\ 1, & z_{1,3}, & z_{2,3}, & z_{3,3} \\ 1, & z_{1,4}, & z_{2,4}, & z_{3,4} \end{vmatrix}$$

nie jest zerem, jeżeli dane cztery punkty A_ν $(1 \leqq \nu \overset{=}{<} 4)$ nie leżą na jednej płasczyznie.

W razie $n=2$ zadanie jest następujące.

Mając dane na płasczyznie zwykłej, odniesionej do dwóch współrzędnych prostokątnych na niej leżących, trzy pnnkty A_ν, $z_{\mu,\nu}$, $(1 \leqq \mu \overset{=}{<} 2)$, $(1 \leqq \nu \overset{=}{<} 3)$, nie leżące na jednej linii prostej, znaleźć współrzędne z_μ, $(1 \leqq \mu \overset{=}{<} 2)$ punktu A, równo od nich oddalonego, oraz odległość wspólną d.

Drugie zaś wysłowienie zadania jest w tym razie:

Przez trzy punkty dane na płasczyznie poprowadzić okrąg koła.

Zadanie to także jest rozwiązalnem, gdyż wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1, & z_{1,1}, & z_{2,1} \\ 1, & z_{1,2}, & z_{2,2} \\ 1, & z_{1,3}, & z_{2,3} \end{vmatrix}$$

nie jest zerem, jeżeli dane trzy punkty nie leżą na jednej linii prostej.