O SPOSOBIE

UKŁADANIA SIĘ ELEKTRYCZNOŚCI

DO RÓWNOWAGI NA WOLNYM, ODOSOBNIONYM PRZEWODNIKU ELIPSOIDALNYM I DZIAŁANIA JEGO W TYM STANIE NA JAKIKOLWIEK PUNKT ZEWNĘTRZNY

PRZEZ

Dr. WOJCIECHA URBAŃSKIEGO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 3 maja 1880 roku.)

I

Elektryczność w stanie równowagi musi być na wolnym przewodniku zawsze tak rozpostarta, aby całkowite jej działanie na każdy punkt wewnętrznej jego przestrzeni składało się ostatecznie na wypadkowę $= 0$. Wystawmy sobie tedy elektryczność w postaci nieściśliwego płynu, tworzącego na powierzchni elipsojdy nieskończenie cieniuchną warstewkę, zamkniętą niejako pomiędzy dwiema podobnemi i podobnie leżącemi (współogniskowemi) powierzchniami elipsoidalnemi, w której on wszędzie równą gęstość posiada. W takim razie warstewka ta w różnych miejscach na przewodniku elipsoidalnym różną ma grubość, która przedstawia poniekąd ilość nagromadzonej w tych miejscach elektryczności. Chcąc przeto oznaczyć tak zwaną *gęstość elektryczności* w jakim kolwiek punkcie na powierzchni elipsojdy przewodnika, potrzeba tam poprowadzić *normalnę* do tej powierzchni i oznaczyć jej przedłużenie, leżące pomiędzy temi dwiema współśrodkowemi powierzchniami elektrycznej warstewki. Wielkość tego przedłużenia będzie przedstawiała ilość, do gęstości nagromadzonej w tem miejscu elektryczności, proporcyonalną.

Prawidłowość tego wniosku nietrudno wykazać, gdy się weźmie na uwagę, że wogóle z przestrzeni zamkniętej dwiema powierzchniami elipsoidalnemi współogniskowemi i napełnionej jednostajnie działaczem, którego każda cząsteczka wywiera dokoła siebie przyciąganie lub odpychanie, zmniejszające się w odwrotnym stosunku drugiej potęgi rosnących odległości, wszystkie działania, wywierane na jakikolwiek punkt wewnętrzny, t. j., leżący w przestrzeni, dolną powierzchnią onej warstewki osłoniętej, znoszą się zawsze w zupełności [1], zatem pomimo obecności tylu cząsteczek czynnych nie ma tam żadnego objawu siły, wskutek czego potencyał ich wszystkich jest *ilością stałą*. Tak samo więc przy rzeczonem ułożeniu się elektryczności na elipsojdzie przewodniku do równowagi, wypadkowa wszystkich działań na punkta jego wewnętrzne musi być $=0$.

Udowodnić to można z całą ścisłością matematyczną, jak następuje :

Niechaj będzie r *promień wodzący* jakiegobądź punktu zewnętrznej powierzchni warstewki elektrycznej na danej elipsojdzie, N *normalna* w tym punkcie, δr i δN waryacye tych dwóch ilości zmiennych, (N, r) zaś kąt, przez tę normalną nazewnątrz poprowadzoną i ów promień wodzący utworzony. Element przestrzeni w elektrycznej warstewce $ds.\delta N$, z powodu, że $\delta N = \delta r.\cos(N, r)$, wyraża się przez $ds.\delta r.\cos(N, r)$.

Lecz $ds.\cos(N, r) = d\sigma$, jeśli $d\sigma$ oznacza rzut elementu ds na płaszczyznę do promienia wodzącego r prostopadłą, zatem także element przestrzeni

$$ds.\delta N = d\sigma.\delta r = r^2 \sin\theta d\theta dw \delta r = r^2 d\omega.\delta r,$$

gdyż $d\sigma$ jest właściwie elementem powierzchni kuli o promieniu r, a $d\omega$ tak samo elementem powierzchni kuli o promieniu $=1$.

Jeśli k oznacza stałą gęstość elektryczności w onym elemencie przestrzeni, $r^2 k \sin\theta d\theta dw \delta r$ wyrażać będzie ilość nagromadzonej tamże elektryczności, a jej działanie na drugi *punkt końcowy tego promienia wodzącego* przedstawia się w wyrażeniu

$$k \sin\theta d\theta dw \delta r = k.d\omega.\delta r.$$

Przyjąwszy środek elipsojdy za początkowy punkt współrzędnych w przestrzeni, na jej osiach leżących, i oznaczywszy przez ξ, ν, ζ współrzędne prostokątne podstawy elementu przestrzeni, leżącej na powierzchni elipsojdy, a przez x, y, z takie same współrzędne onego punktu końcowego linii r, tudzież przez α, β, γ *dostawy* kątów, które r z temi osiami kolejno zamyka, mamy :

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\nu - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

a *równoległe* do rzeczonych osi *składowe* onego działania elementarnego będą miały odpowiednio następujące wartości :

$$(1) \qquad \alpha k \sin\theta d\theta dw \delta r, \qquad \beta k \sin\theta d\theta dw \delta r, \qquad \gamma k \sin\theta d\theta dw \delta r.$$

Całki tych wyrażeń przedstawiają właściwe składowe X, Y, Z *całkowitego działania* na wewnętrzny punkt (x, y, z) tej na danym przewodniku znajdującej się elektryczności.

Dla otrzymania odpowiedniejszych wyrażeń na te składowe eliminować wypada ilość δr, co się da wykonać następującym sposobem.

Jeśli OA, OB, OC są półosiami elipsojdy a między niemi dla $OA = \frac{h}{a}$, $OB = \frac{h}{b}$, $OC = \frac{h}{c}$, zachodzi związek, przedstawiony następującą proporcyą :

$$OA : OB : OC = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

[1] Twierdzenie to opiera się na tej prawdzie geometrycznej, że gdy dokoła danej elipsy wykreśli się podobną większą a potem w tej drugiej poprowadzi jakąkolwiek cięciwę, która pierwszą przecina, zawsze kawałki cięciwy pomiędzy elipsami zawarte są sobie równe.

to równanie elipsojdy tak wygląda :

(2) $$a^2\xi^2+b^2\nu^2+c^2\zeta^2=h^2.$$

Dla elipsoidy, zakreślonej zewnętrzną powierzchnią warstewki elektrycznej, półosie mają wartości :

$$\mathrm{OA}'=\frac{h+\delta h}{a},\quad \mathrm{OB}'=\frac{h+\delta h}{b},\quad \mathrm{OC}'=\frac{h+\delta h}{c},$$

a że

$$\alpha=\frac{\xi-x}{r},\quad \beta=\frac{\nu-y}{r},\quad \gamma=\frac{\zeta-z}{r},$$

zatem

$$\xi=x+\alpha r,\quad \nu=y+\beta r,\quad \zeta=z+\gamma r,$$

więc z (2) otrzymujemy bezpośrednio :

$$a^2(x+\alpha r)^2+b^2(y+\beta r)^2+c^2(z+\gamma r)^2=h^2,$$

a po rozwinięciu należytem i położeniu dla skrócenia

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-h^2=\mathrm{M},$$

$$a^2\alpha x+b^2\beta y+c^2\gamma z=\mathrm{K},$$

$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2=\mathrm{L},$$

także

(3) $$\mathrm{L}r^2+2\mathrm{K}r+\mathrm{M}=0;$$

z czego, gdy w istocie tylko wartość $+r$ ma tu znaczenie, wypada

$$r=\frac{-\mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{ML}}}{\mathrm{L}},$$

zatem

$$\delta r=\frac{-\delta\mathrm{M}}{2\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{ML}}},$$

lub dla

$$\delta\mathrm{M}=-2h\delta h,$$

ostatecznie

$$\delta r=+\frac{h\delta h}{\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{ML}}}.$$

Ze względu na to ostatnie wyrażenie powyższe składowe (1) elementarnego działania na punkt wewnętrzny uważany, przyjąwszy nadto $k=1$, będą miały następującą formę :

$$\mathrm{X}\delta h=+\int\alpha d\omega.\frac{h\delta h}{\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{ML}}},$$

$$\mathrm{Y}\delta h=+\int\beta d\omega.\frac{h\,\delta}{\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{ML}}},$$

$$\mathrm{Z}\delta h=+\int\gamma d\omega.\frac{h\delta h}{\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{ML}}}.$$

a właściwe składowe całkowitego działania X, Y, Z, kolejno wartości

$$(4) \qquad X = h\int \frac{\alpha d\omega}{\sqrt{K^2 - ML}}, \qquad Y = h\int \frac{\beta d\omega}{\sqrt{K^2 - ML}}, \qquad Z = h\int \frac{\gamma d\omega}{\sqrt{K^2 - ML}}.$$

Całkowania rozciągają się tu na całą powierzchnię kuli, zakreślonej promieniem $=1$ do koła punktu zaczepienia (x, y, z). Gdy punkt ten leży wewnątrz elipsojdy, M ma wartość *ujemną*, albowiem dla środka elipsojdy, gdzie $x = y = z = 0$, $M = -h^2$. Dla punktów zewnątrz elipsoidy, M jest ilością dodatnią, dla punktów zaś na jej powierzchni *zerem*. Ilość L jest zawsze dodatnią, równie też i K^2; dla tego mamy właściwie pod znaczkiem pierwiastkowym w wyrażeniach (4) sumę dwóch liczb dodatnich, która nie doznaje zmiany, jeśli α, β, γ bez zmiany swej wielkości staną się ujemnemi, t. j., jeśli punkt zaczepienia wewnątrz elipsojdy na przeciwległej stronie zostanie obrany. Można przeto powyższe całki (4) uważać za sumy, złożone z samych dwumianowych ilości, parami znoszących się zupełnie, z czego oczywiście wynika, że koniecznie $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ być musi.

W takim zaś wypadku także całkowite działanie elipsoidalnej warstwy elektrycznej danego przewodnika na każdy punkt wewnętrznej jego przestrzeni nie inne, jak $=0$ być może.

Zatem istotnie takie tylko ułożenie się elektryczności do równowagi na wolnym, odosobnionym przewodniku elipsoidalnym jest możliwe, gdzie płyn elektryczny tworzy na nim rodzaj warstewki, nieskończenie cieniuchnej, pomiędzy dwiema podobnemi i podobnie leżącemi powierzchniami elipsoidalnemi zawartej, a więc grubość tej warstewki na każdem miejscu jego powierzchni panująca tamże *gęstość elektryczności* przedstawia.

II

Przechodząc do drugiej części danego zagadnienia, zająć się mamy najsamprzód dochodzeniem znaczenia całek (4) w tym przypadku, gdy *punkt zaczepienia* leży w przestrzeni *zewnętrznej* wobec elektrycznej warstewki na elipsoidalnym przewodniku. Całki te, jak się niżej okaże, nie są w takim razie $=0$, lecz mają pewne od napięcia elektrycznego na elipsojdzie i od położenia względem niej punktu zaczepienia zależne wartości, które nietrudno będzie oznaczyć, zatrzymawszy wszystkie wyżej użyte litery z odpowiedniem im znaczeniem, do tego drugiego wypadku zastosowanem.

Jeśli przeto r oznacza tu w ogólności odległość *punktu zaczepienia od punktu działania*, dostawy α, β, γ (jak to z figury, do wykreślenia nie trudnej, na pierwszy rzut oka zaraz widać) mają wartości:

$$\alpha = \frac{x-\xi}{r}, \qquad \beta = \frac{y-\nu}{r}, \qquad \gamma = \frac{z-\zeta}{r};$$

zatem

$$\xi = x - \alpha r, \qquad \nu = y - \beta r, \qquad \zeta = z - \gamma r,$$

a

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\nu)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Równanie elipsojdy jest teraz

$$a^2(x-\alpha r)^2 + b^2(y-\beta r)^2 + c^2(z-\gamma r)^2 = h^2;$$

z niego też otrzymujemy podobnym sposobem jak wyżej nastepujące wyrażenie:

$$Lr^2 - 2Kr + M = 0,$$

którego bezpośrednio

$$r = \frac{K + \sqrt{K^2 - LM}}{L},$$

okazuje się, zatem

$$\delta r = + \frac{h\delta h}{\sqrt{K^2 - LM}}.$$

Na daną elipsojdę pomyślmy sobie teraz (jak kapelusz na głowę) nałożoną powierzchnię stożka, którego wierzchołek jest zarazem punktem (x, y, z) zaczepienia siły, pochodzącej od całej elektryczności, na tej elipsojdzie rozpostartej, tudzież poprowadzone z tego punktu linije proste do wszystkich elementów elektrycznej warstewki. Na każdą z tych linij z wyjątkiem jedynie wszystkich leżących na samej powierzchni stożkowej, będących właściwie stycznemi naelektryzowanej elipsojdy, przypadają widocznie dwa elementa elektrycznej warstewki, które na punkt zaczepienia (x, y, z) jednakowo i zgodnie działają. Całkowe przeto wartości składowych X, Y, Z działania warstewki elektrycznej na elipsojdzie są tu złożone z dwóch równych części, wskutek czego wolno nam położyć :

$$(5)\qquad X = 2h\int\frac{\alpha d\omega}{\sqrt{K^2 - LM}},\qquad Y = 2h\int\frac{\beta d\omega}{\sqrt{K^2 - LM}},\qquad Z = 2h\int\frac{\gamma d\omega}{\sqrt{K^2 - LM}},$$

rozciągając całkowania na wszystkie części powierzchni kuli, promieniem $= 1$ dokoła punktu zaczepienia zakreślonej, które ów *stożek styczny* z tej kulistej powierzchni wycina.

Dla wynalezienia tych granic całkowania wypadnie przedsięwziąć zmianę współrzędnych. Zatrzymując tedy powyższe znaczenie liter, oznaczmy dalej literami α', β', γ' dostawy kątów, które linija prosta r tworzy z nowemi, także prostokątnemi osiami współrzędnemi, tak jednak względem dawniejszych (na osiach elipsojdy samej położonych) dobranemi, aby w wyrażeniu pierwiastkowej ilości $\sqrt{K^2 - LM}$ pod znakiem całkowania w (5) wszystkie iloczyny dostaw znikły, zatem współczynnikowe ich wyrażenia tamże mogły być kolejno położone $= 0$. W tym celu niechaj będzie :

$$(6)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{A}'\alpha' + \mathfrak{A}''\beta' + \mathfrak{A}'''\gamma', \\ \beta &= \mathfrak{B}'\alpha' + \mathfrak{B}''\beta' + \mathfrak{B}'''\gamma', \\ \gamma &= \mathfrak{C}'\alpha' + \mathfrak{C}''\beta' + \mathfrak{C}'''\gamma', \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

i także

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

W takim razie

$$K^2 = a^4\alpha^2x^2 + b^4\beta^2y^2 + c^4\gamma^2z^2 + 2a^2b^2\alpha\beta xy + 2a^2c^2\alpha\gamma xz + 2b^2c^2\beta\gamma yz,$$

$$LM = Ma^2\alpha^2 + Mb^2\beta^2 + Mc^2\gamma^2,$$

a więc

$$K^2 - LM = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\alpha\gamma + 2F\alpha\beta,$$

po wykonanej zaś należycie substytucyi wyrażeń (6) za α, β, γ mamy

$$K^2 - LM = \begin{cases} [A\mathfrak{A}'^2 + B\mathfrak{B}'^2 + C\mathfrak{C}'^2 + 2D\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' + 2E\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' + 2F\mathfrak{A}'\mathfrak{B}']\alpha'^2, \\ + [A\mathfrak{A}''^2 + B\mathfrak{B}''^2 + C\mathfrak{C}''^2 + 2D\mathfrak{B}''\mathfrak{C}'' + 2E\mathfrak{A}''\mathfrak{C}'' + 2F\mathfrak{A}''\mathfrak{B}'']\beta'^2, \\ + [A\mathfrak{A}'''^2 + B\mathfrak{B}'''^2 + C\mathfrak{C}'''^2 + 2D\mathfrak{B}'''\mathfrak{C}''' + 2E\mathfrak{A}'''\mathfrak{C}''' + 2F\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}''']\gamma'^2, \\ + 2[A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' + B\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'' + C\mathfrak{C}'\mathfrak{C}'' + D(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'' + \mathfrak{B}''\mathfrak{C}') + E(\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'' + \mathfrak{A}''\mathfrak{C}') + F(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'' + \mathfrak{A}''\mathfrak{B}')]\alpha'\beta', \\ + 2[A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''' + B\mathfrak{B}'\mathfrak{B}''' + C\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''' + D(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}''' + \mathfrak{B}'''\mathfrak{C}') + E(\mathfrak{A}'\mathfrak{C}''' + \mathfrak{A}'''\mathfrak{C}') + F(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}''' + \mathfrak{A}'''\mathfrak{B}')]\alpha'\gamma', \\ + 2[A\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''' + B\mathfrak{B}''\mathfrak{B}''' + C\mathfrak{C}''\mathfrak{C}''' + D(\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''' + \mathfrak{B}'''\mathfrak{C}'') + E(\mathfrak{A}''\mathfrak{C}''' + \mathfrak{A}'''\mathfrak{C}'') + F(\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''' + \mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'')]\beta'\gamma'. \end{cases}$$

Położywszy tedy

$$
\begin{aligned}
&A\mathfrak{A}'^2+B\mathfrak{B}'^2+C\mathfrak{C}'^2+2D\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'+2E\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'+2F\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'=Q',\\
(7)\qquad &A\mathfrak{A}''^2+B\mathfrak{B}''^2+C\mathfrak{C}''^2+2D\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''+2E\mathfrak{A}''\mathfrak{C}''+2F\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''=Q'',\\
&A\mathfrak{A}'''^2+B\mathfrak{B}'''^2+C\mathfrak{C}'''+2D\mathfrak{B}'''\mathfrak{C}'''+2E\mathfrak{A}'''\mathfrak{C}'''+2F\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''=Q''',
\end{aligned}
$$

i zważywszy, że iloczyny dostaw $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$, $\beta'\gamma'$ nie mają w ilości pierwiastkowej wyrażeń (5) znajdować się, zatem ich w nawiasie zawarte współczynniki za zera uważane być tu mają, jest widocznie

$$
\begin{aligned}
&A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''+B\mathfrak{B}'\mathfrak{B}''+C\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''+D(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}''+\mathfrak{B}''\mathfrak{C}')+E(\mathfrak{A}'\mathfrak{C}''+\mathfrak{A}''\mathfrak{C}')+F(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}''+\mathfrak{A}''\mathfrak{B}')=0,\\
(8)\quad &A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'''+B\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'''+C\mathfrak{C}'\mathfrak{C}'''+D(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'''+\mathfrak{B}'''\mathfrak{C}')+E(\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'''+\mathfrak{A}'''\mathfrak{C}')+F(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'''+\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}')=0,\\
&A\mathfrak{A}''\mathfrak{A}'''+B\mathfrak{B}''\mathfrak{B}'''+C\mathfrak{C}''\mathfrak{C}'''+D(\mathfrak{B}''\mathfrak{C}'''+\mathfrak{B}'''\mathfrak{C}')+E(\mathfrak{A}''\mathfrak{C}'''+\mathfrak{A}'''\mathfrak{C}'')+F(\mathfrak{A}''\mathfrak{B}'''+\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'')=0,
\end{aligned}
$$

a więc owa ilość pod znakiem pierwiastkowym

$$K^2-LM=Q'\alpha'^2+Q''\beta'^2+Q'''\gamma'^2.$$

Z wyrażeń (7) i (8) otrzymuje się bez trudności

$$
\begin{aligned}
Q'&=(A\mathfrak{A}'+E\mathfrak{C}'+F\mathfrak{B}')\mathfrak{A}'+(B\mathfrak{B}'+D\mathfrak{C}'+F\mathfrak{A}')\mathfrak{B}'+(C\mathfrak{C}'+D\mathfrak{B}'+E\mathfrak{A}')\mathfrak{C}',\\
0&=(A\mathfrak{A}'+E\mathfrak{C}'+F\mathfrak{B}')\mathfrak{A}''+(B\mathfrak{B}'+D\mathfrak{C}'+F\mathfrak{A}')\mathfrak{B}''+(C\mathfrak{C}'+D\mathfrak{B}'+E\mathfrak{A}')\mathfrak{C}'',\\
0&=(A\mathfrak{A}'+E\mathfrak{C}'+F\mathfrak{B}')\mathfrak{A}'''+(B\mathfrak{B}'+D\mathfrak{C}'+F\mathfrak{A}')\mathfrak{B}'''+(C\mathfrak{C}'+D\mathfrak{B}'+E\mathfrak{A}')\mathfrak{C}'''.
\end{aligned}
$$

Jeśli się zaś pierwsze z tych równań pomnoży przez $\mathfrak{A}'$, drugie przez $\mathfrak{A}''$ a trzecie przez $\mathfrak{A}'''$, potem wszystkie trzy w ten sposób zmienione razem zesumuje i przy tem uwzględni, iż w razie odniesienia *nowych prostokątnych osi współrzędnych* do również prostokątnych osi elipsojdy, koniecznie

$$\mathfrak{A}'^2+\mathfrak{A}''^2+\mathfrak{A}'''^2=1,$$

$$\mathfrak{B}'^2+\mathfrak{B}''^2+\mathfrak{B}'''^2=1,$$

$$\mathfrak{C}'^2+\mathfrak{C}''^2+\mathfrak{C}'''^2=1,$$

i zarazem

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''+\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''=0,$$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{C}''+\mathfrak{A}'''\mathfrak{C}'''=0,$$

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'+\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''+\mathfrak{B}'''\mathfrak{C}'''=0,$$

być musi, otrzyma się bezpośrednio

$$Q'\mathfrak{A}'=A\mathfrak{A}'+E\mathfrak{C}'+F\mathfrak{B}',$$

i podobnie też

$$Q'\mathfrak{B}'=F\mathfrak{A}'+B\mathfrak{B}'+D\mathfrak{C}',$$

$$Q'\mathfrak{C}'=E\mathfrak{A}'+D\mathfrak{B}'+C\mathfrak{C}'.$$

To, cośmy tu w szczególności dla Q' odnośnie do $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ znaleźli, ma równą ważność całkiem ogólnie (jak to nietrudno udowodnić), dla każdego Q odnośnie do odpowiednich współczynników $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Podstawiwszy jeszcze wartości za A, E, F, będzie przeto :

$$Q\mathfrak{A} = a^2(a^2x^2 - M)\mathfrak{A} + a^2b^2xy\mathfrak{B} + a^2c^2xz\mathfrak{C},$$

czyli

$$(Q + a^2M)\mathfrak{A} = a^2x(a^2x\mathfrak{A} + b^2y\mathfrak{B} + c^2z\mathfrak{C}).$$

Położywszy dla skrócenia wyrażeń :

(9) $$a^2x\mathfrak{A} + b^2y\mathfrak{B} + c^2z\mathfrak{C} = \frac{1}{T},$$

mamy, jak się łatwo przekonać można,

(10) $$\mathfrak{A}T = \frac{a^2x}{Q + a^2M}, \quad \mathfrak{B}T = \frac{b^2y}{Q + b^2M}, \quad \mathfrak{C}T = \frac{c^2z}{Q + c^2M},$$

a pomnożywszy pierwsze z tych trzech ostatnich równań przez a^2x, drugie przez b^2y, trzecie przez c^2z i zesumowawszy wszystkie trzy następnie, także bezpośrednio :

$$T(\mathfrak{A}a^2x + \mathfrak{B}b^2y + \mathfrak{C}c^2z) = \frac{a^4x^2}{Q + a^2M} + \frac{b^4y^2}{Q + b^2M} + \frac{c^4z^2}{Q + c^2M},$$

czyli ze względu na równanie (9), nareszcie

(11) $$1 = \frac{a^4x^2}{Q + a^2M} + \frac{b^4y^2}{Q + b^2M} + \frac{c^4z^2}{Q + c^2M}.$$

Wyrażenie to, uwolnione od ułamków i uporządkowane, daje równanie trzeciego stopnia nieznanej ilości Q, mające Q', Q'', Q''' za swe pierwiastki, które wszystkie są rzetelne ; Q' jest ilością *dodatnią*, Q'', Q''' zaś ujemnemi [1]. Skoro zaś Q jest oznaczone, mamy z wyrażeń pod (10) z uwzględnieniem wyrażenia

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = 1,$$

najprzód

(12) $$T^2 = \left(\frac{a^2x}{Q + a^2M}\right)^2 + \left(\frac{b^2y}{Q + b^2M}\right)^2 + \left(\frac{c^2z}{Q + c^2M}\right)^2,$$

a przytem zarazem bezpośrednio :

(13) $$\mathfrak{A} = \frac{a^2x}{T(Q + a^2M)}, \quad \mathfrak{B} = \frac{b^2y}{T(Q + b^2M)}; \quad \mathfrak{C} = \frac{c^2z}{T(Q + c^2M)}.$$

Możemy przeto ze względu na tę okoliczność, że $+Q'$, $-Q''$, $-Q'''$ są pierwiastkami onego równania (według Q) trzeciego stopnia, położyć

$$K^2 - LM = Q'\alpha'^2 - Q''\beta'^2 - Q'''\gamma'^2,$$

---

[1] Zobacz *Crelle Journal für reine und angew. Mathematik;* t. XX, str. 203-216.

a po wstawieniu tej ostatniej wartości za $K^2 - LM$, tudzież wartości za α, β, γ z (6) w onych wyrażeniach składowych X, Y, Z pod (5) nareszcie

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
X &= 2h\int \frac{(\mathfrak{A}'\alpha' + \mathfrak{A}''\beta' + \mathfrak{A}'''\gamma')}{\sqrt{Q'\alpha'^2 - Q''\beta'^2 - Q'''\gamma'^2}} . d\omega, \\
Y &= 2h\int \frac{\mathfrak{B}'\alpha' + \mathfrak{B}''\beta' + \mathfrak{B}'''\gamma'}{\sqrt{Q'\alpha'^2 - Q''\beta'^2 - Q''\gamma'^2}} . d\omega, \\
Z &= 2h\int \frac{\mathfrak{C}'\alpha' + \mathfrak{C}''\beta' + \mathfrak{C}'''\gamma'}{\sqrt{Q'\alpha'^2 - Q''\beta'^2 - Q'''\gamma'^2}} . d\omega
\end{aligned}
$$

Dajmy nato, że $\alpha' = \cos\varphi$, $\beta' = \sin\varphi\cos v$, $\gamma' = \sin\varphi\sin v$; wówczas element kulistej powierzchni $d\omega = \sin\varphi . d\varphi\, dv$, a

$$
\begin{aligned}
Q'\alpha'^2 - Q''\beta'^2 - Q'''\gamma'^2 &= Q'\cos\varphi^2 - Q''\sin\varphi^2\cos v^2 - Q'''\sin\varphi^2\sin v^2 \\
&= Q' - (Q' + Q''\cos v^2 + Q'''\sin v^2)\sin\varphi^2.
\end{aligned}
$$

Gdy zaś dla tych r, które leżą na powierzchni stycznego do elipsojdy stożka, ilość pierwiastkowa w (14) oczywiście znika, zatem oznaczenie granic całkowania według $d\omega$ tak ma tu być dokonanem, aby granica *górna* przez położenie tej ilości pierwiastkowej $= 0$ sama się wyłoniła, gdyż dla wszystkich *rzetelnych* wartości tych całek koniecznie

$$Q' > \sin\varphi^2(Q' + Q''\cos v^2 + Q'''\sin v^2),$$

czyli

$$\sin\varphi^2 < \frac{Q'}{Q' + Q''\cos v^2 + Q'''\sin v^2},$$

a położywszy tę funkcyę ułamkową $= \sin\lambda^2$, $\sin\varphi < \sin\lambda$ być musi, więc przeprowadzając całkowania w wyrażeniach (14) dla X, Y, Z tylko takie φ i v uwzględniać należy, dla których $\sin\varphi^2$ jest ilością *mniejszą* lub co najwięcej *równą* onej funkcyi ułamkowej $\frac{Q'}{Q' + Q''\cos v^2 + Q'''\sin v^2}$. Lecz dla ilości v odstęp możliwych zmian leży pomiędzy granicami o i 2π, dla ilości zaś φ, według tego co właśnie powiedziano, między o i λ, a współczynniki $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}'''$ nie zawierają już żadnych φ i v dla tego mamy:

$$
X = \left\{
\begin{aligned}
& 2h\mathfrak{A}' \int_0^{2\pi}\int_0^{\lambda} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, dv}{\sqrt{Q'\cos\varphi^2 - (Q''\cos v^2 + Q'''\sin v^2)\sin\varphi^2}} \\
& + 2h\mathfrak{A}'' \int_0^{2\pi}\int_0^{\lambda} \frac{\sin\varphi^2\cos v\, d\varphi\, dv}{\sqrt{Q'\cos\varphi^2 - (Q''\cos v^2 + Q'''\sin v^2)\sin\varphi^2}} \\
& + 2h\mathfrak{A}''' \int_0^{2\pi}\int_0^{\lambda} \frac{\sin\varphi^2\sin v\, dv\, d\varphi}{\sqrt{Q'\cos\varphi^2 - (Q''\cos v^2 + Q'''\sin v^2)\sin\varphi^2}},
\end{aligned}
\right.
$$

i tym samym sposobem także podobne wyrażenia dla Y i Z.

Wykonawszy tu najprzód całkowanie co do φ i uwzględniwszy tę okoliczność, że ostatnie dwie całki zchodzą ostatecznie do zera, bo dla każdej wartości na v i wypadającej przytem wartości na φ zawsze się dwie równe a przeciwnemi znaczkami jakości opatrzone ilości otrzymuje, widać odrazu, iż właściwie

$$X = 2h\mathfrak{A}' \int_0^{2\pi}\int_0^{\lambda} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, dv}{\sqrt{Q' - (Q' + Q''\cos v^2 + Q'''\sin v^2)\sin\varphi^2}},$$