ZASTOSOWANIE

TEORYI WSTAW WYŻSZYCH RZĘDÓW

DO CAŁKOWANIA

RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIJNYCH

(*Comptes rendus de l'Académie des Sciences, dnia 29 maja i 5 kwietnia 1880 roku.*)

PRZEZ

M. YVON VILLARCEAU

(*Tłomaczenie z francuzkiego* [1].)

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 4 czerwca 1880 roku.)

W pracach mych przedstawionych Akademii, w dniu 13, 20 i 27 maja, 1870 roku, wskazałem jak, robiąc poszukiwania w dziedzinie Astronomii żeglarskiej, doprowadzony zostałem do uważania za nowe, funkcyje już opisane, przed sześćdziesięciu laty przez Hoëne Wrońskiego i nazwane przez tego matematyka *Wstawami wyższych rzędów*.

Zajęty następnie innemi pracami naukowemi, odłożyłem na później rozbiór tych funkcyj, lecz ostatniemi czasy, zadanie odnoszące się do zgięcia lunet astronomicznych i podpór pewnych narzędzi, zwróciło na nowo mą uwagę na ten przedmiot.

Ponieważ wskazanie dróg, któremi dokonanym został postęp naukowy jest rzeczą bardzo zajmującą, upraszam więc Akademię o zezwolenie mi przedstawienia, w jaki sposób zadanie czysto mechaniczne, które zdawało się na pozór w zupełności rozwiązanem, doprowadziło mnie do przekonania, że te nowe funkcyje są bardzo użyteczne przy całkowaniu obszernej klassy równań różniczkowych linijnych i zajmują przy tem całkowaniu miejsce prawdziwie wysokiej wagi.

---

(1) Rozbiór kwestyi objętej niniejszym artykułem, rzuca nowe światło na nieocenione prace matematyka polskiego Hoëne Wrońskiego, z tego powodu *Towarzystwo Nauk Ścisłych* podjęło jego tłomaczenie i zamieszcza go w swych Pamiętnikach.

« Badając niegdyś zadanie dotyczące zgięcia lunet, postępowałem w sposób przyjęty przez inżynierów do wyznaczenia zgięcia płaskiego ciał o przecięciu stałem, t. j. obliczałem momenta zgięcia nie zwracając uwagi na odkształcenie ciała, a otrzymawszy pierwszą ich wartość przybliżoną, obliczałem je ściślej czyli inaczej mówiąc, używałem metody kolejnych przybliżeń.»

Postępując w ten sposób, zupełne rozwiązanie zadania mogło być otrzymanem tylko za pomocą nadzwyczajnie długich rozwinięć nie nadających się wcale do łatwego wyprowadzenia na jaw prawa tego fenomenu. Zająłem się więc ponownie jego rozwiązaniem, stosując go do badań Astronomicznych wymagających zupełnej ścisłości; otóż wszelkie możliwe poszukiwania w dziełach francuzkich pozostały bezowocne i nigdzie nie znalazłem rozwiązania wprost, zadania odnoszącego się do ciała przymocowanego *pochyło* do poziomu a poddanego : wpływowi siły pionowej działającej na jego wolny koniec i działaniu jego własnego ciężaru.

Rozwiązanie wprost zależnem jest od możności zcałkowania równania różniczkowego linijnego czwartego rzędu, którego *cecha* ma jeden pierwiastek równy zeru i trzy pierwiastki różne, dwa z nich są urojone i dadzą się otrzymać mnożąc pierwiastek rzetelny przez dwa urojone pierwiastki sześcienne jedności.

« Zcałkowawszy równanie sposobami zazwyczaj używanemi, a prowadzącemi do kombinacyj funkcyj wykładniczych z kołowemi, doszedłem do wypadku uderzającego swą analogiją w ułożeniu ze wstawami drugiego rzędu (rodzaj eliptyczny); rzeczywiście, wystarczyło stosownie ustawić rozrzucone wyrazy, żeby dojść do przekonania, że rozwiązanie składa się z trzech funkcyj tego rzędu pomnożonych odpowiednio przez tyleż ilości stałych. Wypadek ten przedstawił mi całą rzecz w zupełnem świetle.

« Taki jest początek sposobu całkowania równań linijnych, który teraz przedstawię, zaczynając dla większej jasności, od przypadku najprostszego i przechodząc kolejno do więcej złożonych.

« Przedewszystkiem przypomnijmy jednę z własności zasadniczych wstaw rzędów wyższych. Liczba wstaw rzędu $m-1$, jest równa m mniej jedna dostawa, czyli mówiąc inaczej, jest równa jednej dostawie i $m-1$ wstaw, t. j. liczba właściwych wstaw jest równa liczbie oznaczającej ich rząd. Charakter właściwy dostawie jest ten, że ona staje się jednością jak zmienna staje się zerem, a charakter właściwy wstawie jest, że ona staje się zerem wraz ze zmienną ».

Te nowe funkcyje, jak wstawy pierwszego rzędu, dzielą się na dwa rodzaje, jeden *hiperboliczny* a drugi *eliptyczny*.

Oznaczmy, dla zrozumienia w ogólnych zarysach własności wspólnych obu rodzajom, wstawy rzędu $m-1$ przez

$$\varphi_0 x,\ \varphi_1 x,\ \varphi_2 x,\ \varphi_3 x,\ \ldots,\ \varphi_{m-1} x;$$

skaźnik zero służy tu do oznaczenia dostawy. Jak idzie o odróżnienie rodzaju hiperbolicznego od eliptycznego, wówczas dla pierwszego z nich zastępujemy głoskę φ przez $\mathfrak{F}$ a dla drugiego przez f. Widzieliśmy w pracach wspomnianych na początku niniejszego artykułu, że dla każdego skaźnika μ różnego od zera, różniczkowanie wstaw jest przedstawione wzorem następującym

$$(1)\qquad \frac{d\varphi_\mu x}{dx} = \varphi_{\mu-1} x,$$

a dla dostawy mamy

$$(2)\qquad \frac{d\varphi_0 x}{dx} = \pm \varphi_{m-1} x \qquad \text{rodzaj} \begin{cases} \text{hiperboliczny,} \\ \text{eliptyczny.} \end{cases}$$

Znak podwójny napotykany w równaniach przed funkcyją φ należy, górny do rodzaju hiperbolicznego, a dolny do rodzaju eliptycznego.

« Z wzorów (1) i (2) wyciągamy odwrotnie

$$\left.\begin{array}{ll}(3) & \int \varphi_\mu x\,dx = \varphi_{\mu+1}x + \text{stała.} \\ (4) & \int \varphi_{m-1}x\,dx = \pm\varphi_0 x + \text{stała.}\end{array}\right\}\ \mu \text{ będąc różnem od } m-1.$$

« Nie będziemy tu dowodzić, że różniczkując m razy funkcyę φ, znajdziemy dla każdego skaźnika, nawet dla skaźnika zero

$$\frac{d^m\varphi_\mu x}{dx^m} = \pm\varphi_\mu x. \tag{5}$$

« Ścisłość wzoru tu podanego, w teoryi równań linijnych dwumiennych o spółczynnikach stałych, da się sprawdzić z łatwością. Wzór ten wskazuje, że pochodna m^{go} stopnia wstawy rzędu $m-1$ daje samą wstawę, zmieniając lub nie jej znak, stosownie do rodzaju wstawy.

« Własność ta, którą napotykamy w równaniach wykładniczych i we wstawach hiperbolicznych lub kołowych, daje możność wypisania natychmiast, całki równań dwumiennych drugiego rzędu, mamy więc,

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} \mp r^2\eta = 0,$$

$$\eta = c_0\,\mathbf{Dos}\,rx + c_1\,\mathbf{Wst}\,rx \quad \text{i} \quad \eta = c_0 \operatorname{dos} rx + c_1 \operatorname{wst} rx,$$

pierwsze z tych rozwiązań, odpowiada górnemu znakowi a drugie dolnemu.

Zasadzając się na własności ogólnej (5) przedstawimy rozwiązanie równania ogólniejszego

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \mp r^m\eta = 0, \tag{6}$$

w którem r jest stałą równą pierwiastkowi arytmetycznemu m^{go} stopnia spółczynnika ilości η. Wypada ztąd widocznie, że rozwiązanie tego równania jest następujące :

$$\eta = C_0\varphi_0 rx + C_1\varphi_1 rx + C_2\varphi_2 rx + \ldots + C_{m-1}\varphi_{m-1} rx; \tag{7}$$

wreszcie można sprawdzić, że rzeczywiście rozwiązanie to, zadosyć czyni równaniu danemu, gdyż zawiera ono stałe C_μ w liczbie równej stopniowi tego równania.

« Zanim pójdziemy dalej, przedstawimy korzyści wypływające z takiego rozwiązania. I tak, przedewszystkiem, wyznaczenie stałych C_μ zależy od związku pomiędzy funkcyją η i jej pochodnemi, związki te najczęściej bywają przedstawione przez równania stopnia pierwszego, otóż zauważyć należy, że pochodne funkcyi η otrzymują się zmieniając poprostu skaźnik wyrazu $\varphi_\mu rx$ za pomocą wzoru (1) lub (2) i że liczba wyrazów pozostaje taż sama, podczas całego różniczkowania, wyznaczenie więc stałych odbywa się na równaniach bardzo łatwych do utworzenia i do rozwiązania.

« Jeżeli, podług metod używanych zwyczajnie, utworzymy równanie charakterystyczne, w takim razie winniśmy wyznaczyć m pierwiastków jedności tak rzetelnych jak urojonych i ugrupować równania wykładnicze urojone w ten sposób, żeby je zamienić na iloczyny równań wykładniczych o wykładnikach rzetelnych przez funkcyje trygonometryczne. Rozwiązanie podane uwalnia od wykonania wszelkich rachunków odnoszących się do tych przekształceń. Wreszcie, za pomocą metod zwyczajnie używanych, rozwiązanie obejmuje liczbę wyrazów, utworzonych z iloczynów równań wykładniczych rzetelnych przez funkcyje trygonometryczne, zwiększającą się wraz ze stopniem m, a te iloczyny utworzą, przez następujące po sobie różniczkowania, liczbę wyrazów zwiększającą się wraz z liczbą różniczkowań i będą wymagały, każdą razą, starannego redukowania wypływającego z rachunków poprzednio dokonanych.

Rozwiązanie, które podajemy geometrom usuwa te wszystkie trudności, których niepodobna byłoby uniknąć w zupełności, zachowując, podczas różniczkowania i rugowania, wyrazy rozwiązania przedstawione w formie (kształcie) równań wykładniczych urojonych, gdyż komplikacyje przedstawiłyby się ostatecznie jakby przyszło do przekształcenia wypadków na wyrażenia oswobodzone z wszelkich oznak urojonych.

« Wypadki otrzymane byłyby bezwątpienia jednakie z wypadkami otrzymanemi z użycia wstaw rzędów wyższych, lecz byłoby nadzwyczaj trudno, a często nawet niemożebnem, złożyć je na nowo, w rozwiązaniu w ten sposób otrzymanem i przedstawiającem elementa składowe w stanie nadzwyczajnie zawikłanym. Podług nas nie należy rozdzielać na części funkcyj $\varphi_\mu x$; uwaga ta jest nadzwyczajnie ważną, gdyż w samej rzeczy, prawa, którym te funkcyje podlegają, zezwalają, w ich kombinowaniu się na redukcyje tego samego rodzaju jak redukcyje przy użyciu funkcyj hiperbolicznych lub kołowych. Do rachunków liczebnych służyć mogą, jeżeli nie posiadamy tablic funkcyj $\varphi_\mu x$, ich wyrażenia w kształcie skończonym, otrzymane za pomocą równań wykładniczych i funkcyj hiperbolicznych lub kołowych.

« Wreszcie, winniśmy zwrócić uwagę na przypadek bardzo ogólny, dla którego obliczanie tych funkcyj, za pomocą wzorów ścisłych, nie jest ani potrzebnem ani użytecznem; ma to miejsce wtedy gdy argument rx jest małym ułamkiem. W tym ostatnim przypadku nadzwyczaj jest korzystnem używać rozwinięcia funkcyj $\varphi_\mu rx$ na szeregi.

Wiadomą jest rzeczą, że wykładniki wyrazów rozwinięcia w szeregi funkcyj kołowych lub hiperbolicznych rosną o dwie jednostki, przechodząc od jednego wyrazu do następującego, otóż wykładniki te we wstawach drugiego rzędu rosną o trzy jednostki, a we wstawach $m-1$ rzędu rosną one o m jednostek, widocznem więc jest, że szeregi tem są zbieżniejsze im rząd wstaw jest wyższy. Zatem korzystnem jest zachować nienaruszonemi funkcyje $\varphi_\mu rx$ aż do chwili zamieniania ich na liczby, gdyż inaczej napotkalibyśmy iloczyny z szeregów, których wykładniki rosłyby tylko o jednę lub dwie jednostki. Przypadek o którym tu mowa napotyka się właśnie przy studyowaniu zgięcia rur lunetowych. Prawdopodobnie ten sam przypadek przedstawia się często, tak samo jak to ma miejsce przy rozmaitych zastosowaniach wstaw pierwszego rzędu.

« Zajmijmy się teraz całkowaniem równania

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \mp r^m\eta = V, \tag{8}$$

w którem wyraz drugiej strony jest funkcyą tylko jednej zmiennej x.

W tym celu użyjemy zmiany stałych dowolnych, lub innemi słowy, przyjmiemy za rozwiązanie równania (8), odpowiadającego przypadkowi w którym V jest równem zeru, wzór (7), uważając w nim ilości $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ jako zmienne, które należy wyznaczyć w ten sposób, żeby czyniły zadość równaniu (8). Ten ostatni warunek daje tylko jedno z m równań potrzebnych do wyznaczenia m niewiadomych C_μ; $m-1$ równań pozostałych znajdziemy, przyrównywając raz po raz do zera wyrazy razem wzięte $m-1$ pierwszych pochodnych ilości η, które obejmują pochodne ilości C_μ.

W ten sposób postępując otrzymamy następujący układ równań, z których wyznaczymy te pochodne

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dC_0}{dx}\varphi_0 rx+\frac{dC_1}{dx}\varphi_1 rx+\frac{dC_2}{dx}\varphi_2 rx+\frac{dC_3}{dx}\varphi_3 rx+\ldots+\frac{dC_{m-2}}{dx}\varphi_{m-2} rx+\\
&\qquad\qquad+\frac{dC_{m-1}}{dx}\varphi_{m-1} rx=0,\\
&\pm\frac{dC_0}{dx}\varphi_{m-1} rx+\frac{dC_1}{dx}\varphi_0 rx+\frac{dC_2}{dx}\varphi_1 rx+\frac{dC_3}{dx}\varphi_2 rx+\ldots+\frac{dC_{m-2}}{dx}\varphi_{m-3} rx+\\
&\qquad\qquad+\frac{dC_{m-1}}{dx}\varphi_{m-2} rx=0,\\
&\pm\frac{dC_0}{dx}\varphi_{m-2} rx\pm\frac{dC_1}{dx}\varphi_{m-1} rx+\frac{dC_2}{dx}\varphi_0 rx+\frac{dC_3}{dx}\varphi_1 rx+\ldots+\frac{dC_{m-2}}{dx}\varphi_{m-4} rx+\\
&\qquad\qquad+\frac{dC_{m-1}}{dx}\varphi_{m-3} rx=0,\\
&\pm\frac{dC_0}{dx}\varphi_{m-3} rx\pm\frac{dC_1}{dx}\varphi_{m-2} rx\pm\frac{dC_2}{dx}\varphi_{m-1} rx+\frac{dC_3}{dx}\varphi_0 rx+\ldots+\frac{dC_{m-2}}{dx}\varphi_{m-5} rx+\\
&\qquad\qquad+\frac{dC_{m-1}}{dx}\varphi_{m-4} rx=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\pm\frac{dC_0}{dx}\varphi_1 rx\pm\frac{dC_1}{dx}\varphi_2 rx\pm\frac{dC_2}{dx}\varphi_3 rx\pm\frac{dC_3}{dx}\varphi_4 rx\pm\ldots\pm\frac{dC_{m-2}}{dx}\varphi_{m-1} rx+\\
&\qquad\qquad+\frac{dC_{m-1}}{dx}\varphi_0 rx=\frac{V}{r^{m-1}}.
\end{aligned}\right.
$$

« Równania te rozwiązują się łatwo, pamiętając o wzorach summowania wstaw różnych rzędów, podanych (w pracy naszej 2 maja, 1876 r., (wzory (13)). Mnożąc je odpowiednio przez czynniki

$$\varphi_0(-rx),\ \varphi_1(-rx),\ \varphi_2(-rx),\ \ldots,\ \varphi_{m-1}(-rx),$$

dodając wyraz do wyrazu znajdziemy, że spółczynnik ilości $\frac{dC_0}{dx}$ jest równy $\varphi_0(0)$ czyli jedności, gdy tymczasem spółczynniki innych pochodnych stają się równe albo różnym innym funkcyjom $\varphi_\mu(0)$ albo zeru. W ten sposób znajdujemy pierwsze równanie

$$
(10)\qquad \frac{dC_0}{dx}=\frac{1}{r^{m-1}}V\varphi_{m-1}(-rx).
$$

« Dla innych równań, używamy po sobie następujących mnożników

$$
\begin{array}{llllll}
\pm\varphi_{m-1}(-rx), & \varphi_0(-rx), & \varphi_1(-rx), & \ldots, & \varphi_{m-2}(-rx),\\
\pm\varphi_{m-2}(-rx), & \pm\varphi_{m-1}(-rx), & -\varphi_0(-rx), & \ldots, & \varphi_{m-3}(-rx),\\
\pm\varphi_{m-3}(-rx), & \pm\varphi_{m-2}(-rx), & \pm\varphi_{m-1}(-rx), & \ldots, & \varphi_{m-4}(-rx),\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\pm\varphi_1(-rx), & \pm\varphi_2(-rx), & \pm\varphi_3(-rx), & \ldots, & \varphi_0(-rx).
\end{array}
$$

« W ten sposób otrzymamy $m-1$ nowych równań kształtu (10), w których skaźniki ilości C zwiększają się o jedność, gdy tymczasem skaźniki funkcyi φ maleją o tyleż.

« Całkując tak znalezione równania i oznaczając przez $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ stałe wprowadzone przez każde całkowanie, otrzymamy ostatecznie :

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} C_0 = \dfrac{1}{r^{m-1}}\displaystyle\int V\varphi_{m-1}(-rx)dx + c_0, \\ C_1 = \dfrac{1}{r^{m-1}}\displaystyle\int V\varphi_{m-2}(-rx)dx + c_1, \\ C_2 = \dfrac{1}{r^{m-1}}\displaystyle\int V\varphi_{m-3}(-rx)dx + c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{m-1} = \dfrac{1}{r^{m-1}}\displaystyle\int V\varphi_0(-rx)dx + c_{m-1}, \end{array}\right.$$

wyrażenia, w których całkowanie odnosi się tylko do zmiennej x, a które to całkowanie zawsze może być sprowadzone do kwadratu, jeżeli inne sposoby całkowania nie dadzą się zastosować.

Na mocy wartości (11), równanie (7) jest całką zupełną równania danego (8). Nie wykonywamy tu podstawienia jedynie dla tego, żeby skorzystać z $m-1$ pierwszych pochodnych ilości η, które mogą być wykonane, w skutek równań warunkowych (9), przyjmując ilości C_μ za stałe; pochodna m^{go} stopnia w skutek równania (8) będzie :

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} = \pm r^m\eta + V.$$

« Zcałkujmy obecnie równanie

$$\frac{d^ky}{dx^k} \pm p\frac{d^hy}{dx^h} + q = V,$$

w którem p oznacza stałę dodatną, q stałę jakiegokolwiek znaku, a V funkcyję wyraźną zmiennej x, i przyjmijmy, że w przypadku dla którego h będzie zerem, pochodna rzędu h przedstawi samą funkcyję y, to otrzymamy :

$$\mp p\frac{d^hy}{dx^h} + q = \mp p\eta.$$

zkąd

$$(14)\qquad \frac{d^hy}{dx^h} = \eta \pm \frac{p}{q};$$

zakładając nadto

$$(15)\qquad m = k - h, \qquad r = \sqrt[m]{p},$$

równanie (13) zamieni się na następujące

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \mp r^m\eta = V,$$

a jego całkę otrzymamy za pomocą wzoru (7) i wartości (11) funkcyj C_μ.

« W tej chwili zostaje nam tylko do zcałkowania równanie (14); otóż to ostatnie, całkując go raz po raz h razy, daje oznaczając przez $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$ nowe stałe, których liczba jest równą h

$$(16)\qquad \left\{ y = a_0 + a_1\frac{x}{1} + a_2\frac{x^2}{1.2} + a_3\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + a_{h-1}\frac{x^{h-1}}{1.2.3\ldots(h-1)} \pm \frac{q}{p}\frac{x^h}{1.2.3\ldots h}\int^h \eta\, dx^h. \right.$$

«Całkowanie równania danego (13) jest wykonanem, łącząc to ostatnie wyrażenie z wartością otrzymaną dla η (wzory (7) i (11)).

Zastanowiwszy się chwilkę, przekonywamy się, że rozwiązanie otrzymane za pomocą wstaw różnych rzędów jest najprostszem (powiedziałbym najwięcej naturalnem, gdyby to wyrażenie było przyjętem w języku matematycznym) dla równań różniczkowych dających się sprowadzić do kształtu równań dwumiennych ze współczynnikami stałemi, a których druga strona jest lub nie jedynie funkcyją zmiennej niezależnej. Użycie ich przy rozwiązywaniu tych równań stawia je w miejscu im właściwem, z którego wyrugować ich nie można bez komplikacyj, nietylko bezużytecznych lecz nadto szkodliwych. Wyprowadzanie na jaw własności charakterystycznych ilości niewiadomych w rezultacie ostatecznym znalezionym dla zadań, które życzymy rozwiązać, polega bezwarunkowo na ich użyciu.

«Badania nasze odnoszące się do całkowania równań linijnych ograniczymy na tem co poprzedza, gdyż głównym naszym celem jest tylko zwrócenie uwagi geometrów na korzyści, które będą mogli osiągnąć, wprowadzając do Analizy matematycznej wstawy rzędów wyższych. Zachęcamy ich do dalszego posunięcia pracy podanej tu w stanie szkicu, albowiem jesteśmy przekonani, że w ich ręku te nowe funkcyje znajdą liczne zastosowania do zadań należących do Mechaniki i do Fizyki matematycznej. Zadania te prowadzą do równań różniczkowych nie dających się rozwiązać po dziś dzień za pomocą Analizy matematycznej w stanie rozwinięcia w jakim się ona dotąd znajduje.

Chociaż nie jesteśmy w stanie ręczyć za prawdziwość wypadków, jednakże możemy przypomnieć, że wynalazca wstaw rzędów wyższych zapewnia, iż na ich użyciu oparł jednę z ogólnych metod całkowania i przedstawił ją. Wreszcie Wroński uprzedził uczonych, że użycie sposobów polegających jedynie na funkcyjach trygonometrycznych i rozwinięciu na szeregi, kiedy zmienne przechodzą granice w których szeregi są dostatecznie zbieżnemi, do przedstawienia wypadków mających zarazem charakter postępowy i peryodyczny, jest niedostatecznem.

Wprowadzenie wstaw rzędów wyższych powinnoby, tak się przynajmniej zdaje, usunąć te niedostatki, np. w Mechanice niebieskiej, gdyż funkcyje te posiadają właśnie ten podwójny charakter, którego brakuje funkcyjom zazwyczaj używanym.

«Użycie funkcyj eliptycznych, wprowadzonych ostatniemi czasy do Astronomii przez P. Hugo Gyldén, jest bezwątpienia postępem w kierunku który wskazujemy, lecz niedostateczność tych funkcyj zdaje nam się być już widoczną, gdyż ten astronom zmuszony jest przy ich użyciu dzielić na części orbity ciał niebieskich.

Żałujemy mocno, że nie możemy odesłać do dzieł Wrońskiego, lecz te ostatnie są prawie niedostępne dla uczonych, którzy nie mając w ręku wszystkich wydawnictw poprzedzających, chcieliby się zająć odrazu dziełami obejmującemi przedmiot rozbierany. Wydawnictwa te nie istnieją w całości w żadnej z naszych Bibliotek; — Biblioteka Paryzka Akademii nauk posiada zaledwie dwa tomy; słaby zabytek tak licznego zbioru.

Lecz

$$\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{Q'-(Q'+Q''\cos v^2+Q'''\sin v^2)\sin\varphi^2}}=-\frac{\sqrt{Q'-(Q'+Q''\cos v^2+Q'''\sin v^2)\sin\varphi^2}}{Q'+Q''\cos v^2+Q'''\sin v^2},$$

a

$$\int_0^\lambda\frac{\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{Q'-(Q'+Q''\cos v^2+Q'''\sin v^2)\sin\varphi^2}}=\frac{\sqrt{Q'}}{Q'+Q''\cos v^2+Q'''\sin v^2},$$

tudzież

$$\int\frac{dv}{Q'+Q''\cos v^2+Q'''\sin v^2}=\int\frac{dv}{(Q'+Q'')\cos v^2+(Q'+Q''')\sin v^2}=$$

$$\int\frac{\dfrac{dv}{\cos v^2}}{Q'+Q''+(Q'+Q''')\mathrm{tang}v^2}=\frac{1}{\sqrt{(Q'+Q'')(Q'+Q''')}}\,\mathrm{arc.\ tang}\sqrt{\frac{Q'+Q'''}{Q'+Q''}}\,.\,\mathrm{tang}\,v,$$

a

$$\int_0^{2\pi}\frac{dv}{Q'+Q''\cos v^2+Q'''\sin v^2}=2\pi,$$

albowiem w ciągu tego odstępu całkowania od 0 do 2π, okazuje się przerwa w ciągłości dla tang $\frac{\pi}{2}=\infty$ i dla tego całkowanie nieodrazu tu i bezpośrednio wykonać się daje, lecz rozłożenia na części, mianowicie od 0 do $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, potem od $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ do $\frac{3\pi}{2}-\varepsilon$, a naostatek od $\frac{3\pi}{2}+\varepsilon$ do 2π porzebuje. Zatem mamy:

$$X=\frac{4\pi h\mathfrak{A}'\sqrt{Q'}}{\sqrt{(Q'+Q'')(Q'+Q''')}},$$

(15)
$$Y=\frac{4\pi h\mathfrak{B}'\sqrt{Q'}}{\sqrt{(Q'+Q'')(Q'+Q''')}},$$

$$Z=\frac{4\pi h\mathfrak{C}'\sqrt{Q'}}{\sqrt{(Q'+Q'')(Q'+Q''')}}.$$

Teraz wypada nam iloczyn $(Q'+Q'')(Q'+Q''')$ bliżej oznaczyć. W tym celu połóżmy

$$1-\frac{a^4x^2}{Q+a^2M}-\frac{b^4y^2}{Q+b^2M}-\frac{c^4z^2}{Q+c^2M}=U$$

a

$$(Q+a^2M)(Q+b^2M)(Q+c^2M)=W.$$

Gdy ze względu na (11) wielomian $U=0$, więc także $UW=0$ być musi. Lecz Q', $-Q''$, $-Q'''$ są to trzy pierwiastki równania U, dla tego mamy też równanie

$$UW=(Q-Q')(Q+Q'')(Q+Q'''),$$

a różniczkując je według Q, także

$$W\left(\frac{dU}{dQ}\right)+U\frac{dW}{dQ}=(Q+Q'')(Q+Q''')+(Q-Q')(Q+Q'')+(Q-Q')(Q+Q'''),$$

które to wyrażenie dla $Q = Q'$, ze względu na $U = 0$, przemienia się w następujące :

$$W'\left(\frac{dU}{dQ}\right)' = (Q' + Q'')(Q' + Q''').$$

Ponieważ zaś

$$\frac{dU}{dQ} = \frac{a^4x^2}{(Q+a^2M)^2} + \frac{b^4y^2}{(Q+b^2M)^2} + \frac{c^4z^2}{(Q+c^2M)^2} = T^2, \qquad \text{(ob. 12)}$$

a więc analogicznie

$$\left(\frac{dU}{dQ}\right)' = T'^2, \qquad \text{zatem} \qquad W'T'^2 = (Q' + Q'')(Q' + Q'''),$$

przeto wartości składowych X, Y, Z w wyrażeniach pod N° 15 są ostatecznie

$$(16) \qquad X = \frac{4\pi h\mathfrak{A}'}{T'}\sqrt{\frac{Q'}{W'}}, \qquad Y = \frac{4\pi h\mathfrak{B}'}{T'}\sqrt{\frac{Q'}{W'}}, \qquad Z = \frac{4\pi h\mathfrak{C}'}{T'}\sqrt{\frac{Q'}{W'}}.$$

Wielkość zaś R całkowitego działania elektryczności, na elipsoidzie rozpostartej, na punkt w mowie będący, dla $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, tudzież dla tej okoliczności, że jak wiadomo $\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{C}'^2 = 1$, wyrażać się będzie przez

$$R = \frac{4\pi h}{T'}\sqrt{\frac{Q'}{W'}};$$

wskutek czego znowu oczywiście

$$X = \mathfrak{A}'R, \qquad Y = \mathfrak{B}'R, \qquad Z = \mathfrak{C}'R.$$

Z tych ostatnich wyrażeń widać odrazu, że nowo obrany kierunek osi x' leży właśnie na samym kierunku *wypadkowej* wszystkich działań elektrycznej warstewki elipsoidalnej na punkt zewnętrzny m, czuły na to działanie; wskutek czego tamte dwie osie y', z', mają kierunek *normalnych* obydwóch hiperboloid, które przez ten sam punkt zaczepienia m nakreślone być mogą. Gdy nadto wyrażenie

$$Q'\alpha'^2 - Q''\beta'^2 - Q'''\gamma'^2 = 0,$$

dla $\alpha'r = \xi'$, $\beta'r = \upsilon'$, $\gamma'r = \zeta'$ zamienia się na wyrażenie

$$Q'\xi'^2 - Q''\upsilon'^2 - Q'''\zeta' = 0,$$

będące (jak to z teoryi powierzchni drugiego rzędu wiadomo) *równaniem stożka*, mającego za wierzchołek punkt początkowy onych *współrzędnych prostokątnych*, które w *punkcie zaczepienia m* biorą swój początek, więc *wypadkowa działania* ma tu właściwie kierunek osi samej wspomnianego stożka stycznego, czyli (co na jedno wychodzi) kierunek *normalnej*, poprowadzonej do powerzchni elipsoidy przez ów punkt zaczepienia.

Ten ostatni wynik naszego poszukiwania wyraża się w twierdzeniu Poissona, jak następuje :

Działanie nieskończenie cienkiej, dwiema podobnemi powierzchniami elipsoidalnemi zamkniętej warstewki elektrycznej na zewnętrzny punkt zaczepienia odbywa się w kierunku osi stożka stycznego elipsoidy, który z tego punktu jako do niej możliwy pomyśleć sobie można, rozumiejąc pod osią stożka liniję prostą, która w punkcie środkowym odpowiedniej elipsy, jako podstawy, prostopadle ustawiona przez wierzchołek jego przechodzi.

DODATEK

Proste prawo układania się elektryczności do równowagi na przewodniku elipsoidalnym można też wyprowadzić następującem rozumowaniem.

Jeśli a, b, c są ilości *stałe*, p, p', p'' *zmienne* parametry i $p > a > p' > b > p'' > c$, natenczas (jak wiadomo) równania:

$$\frac{x^2}{p-a}+\frac{y^2}{p-b}+\frac{z^2}{p-c}=1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{p'-a}+\frac{y^2}{p'-b}+\frac{z^2}{p'-c}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{p''-a}+\frac{y^2}{p''-b}+\frac{z^2}{p''-c}=1, \tag{3}$$

przedstawiają trzy ortogonalne powierzchnie, mianowicie równanie (1) elipsoidalną, (2) jednopowłokową, (3) zaś dwupowłokową hiperboloidalną. Znana funkcya Lamego

$$\varepsilon=\int_a^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)}},$$

od zmiennej μ zawisła, wyobraża tu potencyał V elektrycznego działania, t. j.

$$V=\int_a^p \frac{dp}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}, \tag{4}$$

którego doznaje jakikolwiek punkt na powierzchni elipsoidalnej (1) od masy czynnej, wewnątrz tej elipsoidy zawartej, która to masa znajduje się na płasczyznie ogniska, czyli jest rozpostarta na powierzchni elipsy, leżącej na płasczyznie yz i równaniem $\frac{x^2}{a-b}+\frac{y^2}{a-c}=1$ wyrażonej.

Z tego wynika (zgodnie z odpowiedniemi wywodami w mojem dziele *Vorträge über höhere Physik*, że ułożenie się danej elektryczności do równowagi na powierzchni przewodnika elipsojdy wtedy nastąpi, gdy jej gęstość, od wzajemnego działania cząstek na siebie zawisła, w każdym punkcie m tej powierzchni jest proporcyonalna do wartości *ilorazu różniczkowego* $\frac{dV}{dN}$, wzdłuż odpowiedniej *normalnej* N wziętego, jaką on w tym punkcie m posiada.

Oznaczywszy tedy przez p parametr naelektryzowanego przewodnika elipsoidy, przez p' i p'' parametry obu przez punkt m na powierzchni onej elipsoidy położonych hiperboloid, otrzymujemy dla powyższej wartości ilorazu $\frac{dV}{dN}$ następujące wyrażenie:

$$\frac{dV}{dN}=\frac{2}{\sqrt{(p-p')(p-p'')}}, \tag{5}$$

które ma swoje pewne proste znaczenie geometryczne. Poprowadziwszy bowiem do punktu m ze *środka elipsoidy promień wodzący* i wykonawszy tak zwane *przecięcie średnicowe z tym promieniem związane*, czyli, co na jedno wychodzi, nakreśliwszy przez środek elipsoidy płasczyznę równoległą do płaszczyzny *stycznej* w punkcie m otrzymuje się (jak wiadomo) krzywą linię krawędziową na elipsoidzie t. j. poprostu elipsę, mającą powierzchnię

$$(6) \qquad P = \pi \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)\left[\left(\frac{x}{p-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{p-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{p-c}\right)^2\right]},$$

jeśli x, y, z są współrzędnemi punktu m. Gdy zaś zamiast nich położymy ich wartości, z równań (1), (2), (3) wydobyte, powierzchnia owa P wyraża się też, jak następuje :

$$(7) \qquad P = \pi . \sqrt{(p-p')(p-p'')}.$$

Ze względu na to ostatnie wyrażenie, wartość *ilorazu różniczkowego* (pod N° 5), przedstawiającego poniekąd względną gęstość elektryczności w różnych miejscach na powierzchni w mowie będącego przewodnika (elipsoidy), można przeto wyrazić ostatecznie przez

$$\frac{dV}{dN} = \frac{2}{\sqrt{(p-p')(p-p'')}} + \frac{2\pi}{P};$$

wskutek czego okazuje się, że

Na elipsoidzie przewodniku układa się elektryczność do równowagi w taki sposób, iż gęstość jej na każdem miejscu jego powierzchni jest odwrotnie proporcyonalna do powierzchni tego średnicowego przekroju, który jest równoległym do płaszczyzny stycznej w onem miejscu.

UWAGA. — Powyższe wywody matematyczne i rozumowania pochodzą jeszcze z moich wykładów, na uniwersytecie lwowskim miewanych, które w małej tylko części w dziele *Vorträge über höhere Physik....* zostały drukiem ogłoszone. Ktoby się z dosyć obszerną dziś literaturą tego ciekawego przedmiotu chciał więcej obznajomić, niechaj czyta następujące traktaty : Plana, *sur l'attraction d'un ellipsoïde* (w Crelle Journal für reine und angewandte Mathematik, t. XX i XXVI ; Catalan, *Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur* ou *sur un point intérieur*, Paris, 1841 ; Despeyrous, *sur l'attraction des ellipsoïdes* (w Crelle Journal XXXI) ; Heine, *Theorie der Anziehung eines Ellipsoids* (w Crelle Journal XXIX i XLII) ; Dirichlet w Denkschriften der Berliner Academie, z r. 1836 Schlömilch der Attractionscalcül. Halle 1851 ; nareszcie dotyczące prace Gaussa w V tomie świeżo wydanych dzieł jego (Gauss Werke, 1863-70).

Dr W. URBAŃSKI
Bibliotekarz Uniwersytecki.