No 93

Hipolit Pantawicz

tego książeczka ucznia
u Szkoły Nowogrodzkiej
Gimnazium

POCZĄTKI
ALGEBRY,

DLA SZKOŁ GIMNAZYALNYCH

NA KLASSĘ DRUGĄ,

UŁOZONE

PRZEZ

ANTONIEGO WYRWICZA

RADCĘ DWORU, PROFESSORA MATEMATYKI WYŻSZEY W CESARSKIM UNIWERSYTECIE WILEŃSKIM.

WYDANIE DRUGIE POPRAWNE.

Bolesław Krajski

WILNIE

NAKŁADEM I DRUKIEM ANTONIEGO MARCINOWSKIEGO.

1828.

Oddział Nauk fizycznych i matematycznych w Cesarskim Uniwersytecie Wileńskim, dzieło Początki Algebry dla Szkół Gimnazyalnych na Klassę II, ułożone przez Antoniego Wyrwicza Radcę Dworu i Professora, po przeyrzeniu stosownie do § 125 ustaw o Cenzurze, uznał za pożyteczne dla gimnaziow. D. 5 mca marca 1828 w Wilnie.

Dziekan M. Poliński.
Michał Oczapowski Prof. gosp. wieyskiego.
Karol Podczaszyński Prof. Architektury.
Felix Drzewiński Prof. Fizyki.
Piotr Sławiński Prof. Astronomii.
Edward Eichwald Prof. Zoologii.

Pozwolono drukować Wilno d. 13 marca 1828 roku.
Cenzor Kollegialny Assesor
Ignacy Szydłowski.

POCZĄTKI ALGEBRY.

ROZDZIAŁ III.

DZIAŁANIA.

PODNOSZENIE DO POTĘG.

1. Nauczyliśmy się, w Rozdziale Iszym Algébry, odbywać główne działania w literach, jakie nam z natury ilości, zależących na możności powiększania się i zmnieyszania, wprost wypadły. Takiemi działaniami były, *dodawanie*, *odciąganie*, *mnożenie* i *dzielenie*. Te potém wiadomości działań, zastosowaliśmy w Rozdziale IIgim, do rozwiązywania zrównań pierwszego stopnia o jedney i więcey ilości nieznanych; powróćmy dopiero znowu do działań i przypomniymy sobie, cośmy powiedzieli w nauce mnożenia ilości.

Powiedzieliśmy tam, że ile razy litera czyli ilość ma bydź kilkakrotnie przez się mnożoną, tyle razy raz ją piszemy, kładąc nad nią liczbę, zawierającą w sobie tyle jedności, ile razy miała bydź wziętą za mnożnik: i wzajemnie, każda ilość naznaczona wykładnikiem, pokazuje mnożenie samey przez się ilości. Ale mnożyć ilość lub wyrażenie jakie samo przez się, nazywa się w Arytmetyce wynosić ją do potęgi; a że działania arytmetyczne też same zachodzą w literach co i w liczbach, należy nam więc teraz zatrzymać się nad tym nowym gatunkiem działania, które niczém nie jest, tylko szczegulnym przypadkiem mnożenia.

2. *Potęgą jakieykolwiek ilości, nazywamy mnogość wypadłą z wielokrotnego teyże ilości przez siebie mnożenia.* I tak: mnogość wypadła z przemnożenia raz samey przez się ilości, czyli mnogość wypadła z dwa razy wziętey za mnożnik ilości, nazywa się *potęgą drugą*. Mnogość wypadająca z przemnożenia dwa razy przez się ilości, czyli mnogość wypadła z ilości trzy razy wziętey za mnożnik, nazywa się *potęgą trzecią* i t. d.; tak, iż mnogość wypadła z przemnożenia samey przez się ilości $m-1$ razy, czyli co toż samo jest, mnogość powstała z ilości, m razy wziętey za mnożnik, nazywa się *potęgą* mtą.

Ilość, która przez się mnożona rodzi potęgę, nazywa się *pierwiastkiem* tey *potęgi:* liczba zaś oznaczająca wiele razy pierwiastek, czyli taka ilość wchodzi w potęgę za mnożnik, nazywa się *stopniem potęgi.* Działanie zaś wiodące do napisania potęgi z pierwiastku danego, nazywa się, *wynoszeniem do potęg* albo *rozwinieniem potęgi.*

3. Dla oznaczenia, iż ilość ma bydź wyniesioną do potęgi pewnego stopnia, bierzemy ją w nawiasy, i z prawey strony nad nią kładziemy liczbę, oznaczającą stopień potęgi: ta liczba nazywa się inaczey *wykładnikiem potęgi.* Wykładnik potęgi oznacza, iż ilość czyli pierwiastek, tyle razy ma wchodzić w potęgę za mnożnik, ile się w nim zawiera jedności.

I tak, te wyrażenia $(ax^m)^n$ i $(a+x)^n$, oznaczają, iż ax^m i $a+x$ mają bydź wzięte, każda w szczególności, n razy za mnożnik; a mnogość ztąd wypadająca będzie potęgą ntą. Te ilości ax^m i $a+x$, nazywają się pierwiastkiem potęgi; liczba zaś n nazywa się wykładnikiem potęgi.

4. Z wyższego opisania potęg pokazuje się, *aby jaką ilość podnieść do pewney potęgi, trzeba ją tyle razy przez się rozmnożyć, ile jest jedności w wykładniku potęgi mniey jedną;* albo co na toż samo wychodzi, *potrzeba, żeby ta i-*

lość, to jest pierwiastek, tyle razy była wzięta za mnożnik, ile jest jedności w wykładniku potęgi. Jeżeli zaś z wypadku otrzymanego wyczytane zostanie prawo układania się potęgi, tedy to prawo będzie prawidłem do pisania wprost potęgi tey ilości.

5. Podnosić będziem do potęg ilość jednowyrazową albo wielowyrazową: a jako wszystkie działania zaczynaliśmy od nayprostszych, to jest jednowyrazowych ilości, a zawikłańsze przywodziliśmy zawsze do działań z jednowyrazami, tak i teraźnieysze zaczniymy od jednowyrazów.

Przywiązując uwagę do samych jednowyrazowych ilości, postrzegamy, że jeżeli stopień potęgi jest oznaczony przez n, każda litera pierwiastku jednowyrazowego powinna bydź w potędze, n razy za mnożnik napisana; tak, iż wykładnik każdey litery pierwiastku będzie m razy wziętey. I tak

$$(1) \quad (a^m)^n = a^m . a^m . a^m . a^m \ldots\ldots = a^{m+m+m+m \ldots\ldots} = a^{nm}$$

$$(2) \quad (ax^m)^n = ax^m . ax^m \ldots = a . a . a \ldots\ldots x^m . x^m . x^m \ldots\ldots =$$

$$= (a)^n (x^m)^n = a^{1+1+1 \ldots} x^{m+m+m \ldots} = a^n x^{nm}.$$

$$(3) \quad (a^m b^q x^r)^n = a^m . a^m \ldots\ldots b^q . b^q \ldots x^r . x^r \ldots =$$

$$= a^{m+m+\ldots} \times b^{q+q+\ldots} \times x^{r+r\ldots} = (a^m)^n . (b^q)^n . (x^r)^n = a^{nm} . b^{nq} . x^{nr}.$$

$$\left(\frac{a^p b^q}{c^r y^s}\right)^n = \frac{a^p b^q \times a^p b^q \times a^p b^q \times \ldots\ldots}{b^r y^s \times b^r y^s \times b^r y^s \times \ldots\ldots} = \frac{(a^p b^q)^n}{(b^r y^s)^n} = \frac{a^{pn} b^{qn}}{b^{rn} y^{sn}}.$$

Skąd na zawsze te sobie wyciągamy prawidła.

1od *Chcąc podnieść ilość jednowyrazową do potęgi, należy wykładnik jey rozmnożyć przez wykładnik potęgi.*

2do *Potęga z mnogości, jest równa mnogości z potęg mnożników:* tak, iż chcąc wynieść jaką mnogość do potęgi, należy każdy jey mnożnik wynieść osobno do potęgi, a mnogość z tych potęg, będzie potęgą żądaną.

3tio Ponieważ spółczynnik pierwiastku, może bydź uważany jako litera czyli mnożnik; *przeto, w podnoszeniu ilości do potęgi, należy także wynieść i spółczynnik do tey potęgi.* A że w każdym razie, stopień potęgi uważa się, iż dany jest w liczbach, a zatém podnoszenie spółczynnika do potęgi, odbędzie się zwyczaynym arytmetyki sposobem.

4to *Potęga ułomku jest równa ułomkowi z potęg licznika przez potęgę mianownika.*

6. Co się tycze znakow, którémi potęgi nacechowane bydź powinny, te łatwo z prostey uwagi samych potęg wyprowadzamy. Jeżeli pierwiastek jest ze znakiem dodatnym czyli $+$, ilekolwiek razy wezmiemy go za mnożnik, zawsze w wieloczynie czyli w potędze wypada znak $+$. Jeżeli zaś pierwiastek jest ze znakiem odjemnym czyli $-$, wówczas w potędze wypadnie albo znak $+$ albo $-$; *wypadnie znak* $+$, *kiedy liczba mnożników, wchodząca do potęgi, jest parzystą*, czyli co tož samo jest, *kiedy wykładnik potęgi jest parzysty*: przeciwnie zaś wypadnie znak $-$, *kiedy liczba mnożników będzie nieparzysta*, czyli *kiedy wykładnik potęgi jest nieparzysty*. Skąd znowu te sobie wyciągamy prawidła.

1º *Każda potęga stopnia parzystego bądź z ilości dodatney bądź odjemney zawsze jest dodatną.*

2do *Każda potęga stopnia nieparzystego z ilości jednowyrazowey, jest tego samego znaku, jakiego jest i pierwiastek*: tak, iż potęga nieparzysta zachowuje statecznie znak swojego pierwiastku. (*Obacz do tego nru przykłady w przypisach* N. 1).

7. Nauczywszy się podnosić wszelki jednowyraz do wszelkiey potęgi, należy nam teraz nauczyć się podnieść do wszelkiey potęgi, wszelki wielowyraz. Zaczniymy naprzód od podnoszenia dwówyrazów, i z wypadków otrzymanych staraymy się wyczytać prawo, podług którego wyrazy potęgi układają się z wyrazow pierwiastku; a potém rozciągniemy to prawo do jakichkolwiek wielowyrazów. Lecz abyśmy łatwiey zamierzonego celu dostąpili, zaczniymy od nayniższey potęgi, a zatém od podnoszenia do potęgi drugiey.

Chcąc podnieść dwuwyrazową ilość $x \pm a$ do potęgi drugiey, co się oznacza przez $(x \pm a)^2$; rozmnożmy ją raz samę przez się, a otrzymamy;

$$(x \pm a)^2 = (x \pm a)(x \pm a) = x^2 \pm 2ax + a^2.$$

Ten wypadek odkrywa nam tę prawdę o częściach w drugą potęgę z ilości dwuwyrazowey wchodzących, 1° *W skład potęgi drugiey z dwuwyrazu wchodzi, potęga druga pierwszego wyrazu pierwiastku: 2° potęga druga drugiego wyrazu tegoż pierwiastku: 3° mnogość podwóyna pierwszego przez wyraz drugi.* (*Ob. przykł. w przyp.* N. 11).

8. Ta prawda o częściach potęgi drugiey, powstającey z ilości dwuwyrazowey, służyć nam może do wynoszenia ilości z więcey wyrazow złożoney; należy tylko starać się przywieść do przypadku poprzedzającego.

Zadaymy naprzykład sobie wynieść tróywyraz $x+a+b$, do potęgi drugiey. Abyśmy ten przypadek przywiedli do poprzedzającego, nazwiymy $x+a$ jedną literą s; przez co będzie

$$(x+a+b)^2 = (s+b)^2 = s^2 + 2sb + b^2;$$

a że $s^2 = (x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$, a zaś $2bs = 2b(x+a) = 2bx + 2ba$: więc włożywszy za s^2 i $2bs$ ich wartości, otrzymamy potęgę drugą tróywyrazu $x+a+b$: to jest znaydziemy

$$(x+a+b)^2 = x^2 + 2xa + a^2 + 2xb + 2ab + b^2.$$

Skąd widzimy, że potęga druga, czyli kwadrat z tróywyrazu, składa się z summy kwadratów trzech terminow pierwiastku, oraz podwóynych mnogości tychże terminów po dwa na raz branych.

Idąc drogą analogii wnieść moglibyśmy, że potęga druga z ilości czterowyrazowey, składa się z summy kwadratów czterech terminow pierwiastku i podwóynych mnogości z tychże czterech terminów po dwa na raz branych. A nakoniec że potęga druga z m terminow pierwiastku, *składa* *się z summy kwadratow* m *terminow pierwiastku i podwóynych mnogości tychże terminow po dwa na raz branych.*

9. Abyśmy jednak tę prawdę ściśley wywiedli, staraymy się pokazać, że gdy to prawo odkryte, służy potędze drugiey z liczby m terminow powstającey, tedy musi koniecznie służyć teyże potędze z liczby $m+1$ terminow. Na ten koniec przypuśćmy, że potęga druga z wielowyrazu $x+a+b+c \ldots . +i$, złożonego z liczby m terminow, tworzy się podług prawidła wyżey dostrzeżonego. Tę summę m terminową, oznaczmy przez s. Przybierzmy teraz nowy termin k i szukaymy potęgi drugiey z wielowyrazu $x+a+b+c+\ldots . +i+k$, złożonego z $m+1$ terminow, czyli z $s+k$; mieć więc będziemy $(s+k)^2 = s^2 + 2sk + k^2$: w co włożywszy za s jey wartość, otrzymamy

$$(s+k)^2 = (x+a+b+c+\ldots . +i)^2 + 2(a+b+c+\ldots . +i)k+k^2.$$

A że część pierwsza tego wyrażenia, składa się podług przypuszczenia, z kwadratow wszystkich terminow pierwszego wielowyrazu, i podwóynych mnogości tychże terminow po dwa na raz branych: druga zaś część tego wyrażenia zamyka wszystkie podwóyne mnogości terminow pierwszego wielowyrazu przez termin nowo wprowadzony k; a nakoniec trzecia część, jest kwadratem z tegoż terminu k; skąd się przekonywamy, że gdy prawo wyżey wzmiankowane służy kwadratowi z m terminow powstającemu, tém samém służyć musi i kwadratowi z $m+1$ terminow. A że z doświadczenia (n. 8) przekonaliśmy się, iż prawo to służy kwadratowi ze trzech terminow, służyć więc także musi i kwadratowi z czterech terminow, a skoro służy kwadratowi z czterech, musi służyć kwadratowi i z pięciu terminow; i t. d. To więc prawo jest ogólne i służy kwadratowi z jakieykolwiekbądź liczby terminow powstającemu.

Dowiedzione teraz prawo, tak się wysłowić może, *kwadrat z jakiegokolwiek wielowyrazu, zawiera kwadrat pierwszego terminu pierwiastku, więcey mnogość podwóyna pierwszego terminu przez drugi, więcey kwadrat z dru-*

giego terminu, więcey podwóyna mnogość każdego z dwóch pierwszych terminow przez termin trzeci. więcey kwadrat trzeciego terminu, więcey podwóyna mnogość trzech pierwszych terminow przez czwarty; więcey kwadrat z czwartego terminu i t. d. (*Ob. przykł. w przyp.* N. III).

Tu uważać powińnimy, że wszystkie terminy w kwadracie wypadły nam dodatne; bo też wszystkie terminy w pierwiastku braliśmy za dodatne. Gdyby zaś terminy pierwiastku były dodatne i odjemne razem, więc też i w potędze wypadłyby terminy dodatne i odjemne; które zaś mają bydź dodatne a które odjemne, to łatwo z samego prawidła pisania drugiey potęgi wyciągamy. *Ponieważ w skład drugiey potęgi wchodzą kwadraty z każdego terminu pierwiastku, te więc oczywiście muszą bydź dodatne, bądź terminy pierwiastku będą dodatne bądź odjemne. Terminy zaś potęgi tworzone z mnożenia przez się terminow pierwiastku, będą dodatne, jeżeli terminy, które wypada przez się mnożyć, będą jednego znaku; będą zaś odjemne, jeżeli terminy mające przez się mnożyć będą znaków przeciwnych.* (*Ob. przykł. w przyp.* N. IV).

10. Ułatwiliśmy się już z wynoszeniem do potęgi drugiey ilości dwówyrazowych, a nakoniec wielowyrazowych; należy nam teraz nauczyć się wynosić dwówyraz $x+a$ do potęgi trzeciey, czyli sześcianu, i na wykonanie tego działania wyciągnąć stałe prawidło.

Nic łatwieyszego jak podnieć dwówyraz do potęgi trzeciey: należy bowiem wziąć go, podług opisania potęg (n. 2), trzy razy za mnożnik i wykonać mnożenie. Tym sposobem postępując znaydziemy

$$(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3.$$

Spóyrzawszy na tę potęgę, następujące wyciągamy prawidło do napisania jey, nieprzechodząc przez proste mnożenie. *Potęga trzecia dwówyrazu składa się z potęgi trzeciey pierwszego terminu pierwiastku, więcey potróyny kwadrat z pierwszego terminu pierwiastku, mnożony przez* *drugi; więcey potróyny pierwszy termin pierwiastku mnożony przez kwadrat drugiego, więcey potęga trzecia z drugiego terminu pierwiastku.* Gdyby który termin pierwiastku był odjemny, wówczas w potędze samey, ten termin byłby odjemnym, gdzieby ta ilość wchodziła w potędze nieparzystey: czyli znaki poszłyby naprzemian dodatny z odjemnym. (*Ob. przykł. w przyp.* N. V).

11. Chcąc teraz tróywyraz jaki podnieść do potęgi, należy dwa jego terminy naznaczyć jedną literą, a tym sposobem podnoszenie tróywyrazu do potęgi, przywiedzie się do podnoszenia dwówyrazu do potęgi trzeciey. Po rozwinieniu tey potęgi, należy za tę literę wartość jey nazad odstawić i wykonać wskazane działania; a tak otrzymamy potęgę tróywyrazu. Z tey potęgi moglibyśmy potém wyczytać prawidło na jey wprost pisanie i rozciągnąć je do potęgi trzeciey z ilukolwiek terminow pierwiastku, tak jak zrobiliśmy w potędze drugiey; ale że to prawidło nie jest tak proste; a w każdym razie, przez przywiedzenie wielowyrazu do dwówyrazu, wynieść go umiemy podług wyżey podaney reguły; dla tego tu go nie wywodzimy, żebyśmy zbyt pamięci prawidłami nie obciążali. (*Ob. przykł. w przyp.* N. VI).

12. Z tego cośmy powiedzieli, łatwo przewidujemy, że wynoszenie jakichkolwiek ilości wielowyrazowych do potęgi, *zasadza się na umiejętności wynaszania dwówyrazu do potęgi;* dla tego należy nam umieć pisać jakąkolwiek potęgę z dwówyrazu.

Widzieliśmy jakim sposobem wyprowadzają się prawidła na pisanie potęgi drugiey i trzeciey z dwówyrazu; tymże sposobem wyprowadzilibyśmy prawidła na pisanie czwartey, piątey, i t. d. potęgi.

Te prawidła, każdey potędze właściwe, są różne od siebie, a zatém byłoby ich tyle, ile bydź może potęg różnych: to jest nieskończona liczba.

13. Należy nam więc w wypadkach różnych potęg śle-

dzić ogólnego prawa, któreby służyło wszystkim potęgom. Natenkoniec weźmy dwówyraz $x+a$, wynieśmy go do rozmaitych potęg i w nich upatruymy prawa podług jakiego wyrazy potęgi układają się z wyrazow pierwiastku: a dostrzegłszy tego prawa rozciągnąć je należy drogą analogii do wszelkiey potęgi. I tak,

$$(x+a)^1 = x + a,$$
$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$
$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

Roztrząsając te wszystkie potęgi co do samych ilości, wykładników, spółczynników i znakow, łatwo postrzegamy następujące prawo. *Naprzód. Liczba terminów, w każdą potęgę wchodzących, równa jest liczbie oznaczającey stopień potęgi powiększoney jednością:* tak, że potęga m zamykać będzie $m+1$ terminow. *Powtóre pierwszy termin jakieykolwiek potęgi, jest to pierwszy termin pierwiastku z wykładnikiem potęgi, który w następnych po sobie wyrazach zmnieysza się jednością dopóty, póki w ostatnim nie zniknie. Wykładnik zaś drugiego terminu pierwiastku o tyle rośnie, ile się pierwszego zmnieysza, póki doszedłszy naywyższey liczby nie zakończy samotnym swym terminem potęgi, tak jak się pierwszy zaczął:* tak iż w każdym terminie potęgi, summa wykładnikow nad ilościami jest równa wykładnikowi potęgi. W potędze więc m z dwówyrazu $x+a$, co do wykładników taki zachodzić będzie porządek:

$$x^m, \quad ax^{m-1}, \quad a^2x^{m-2}, \quad a^3x^{m-3}, \quad \text{i t. d.,} \quad a^m.$$

Potrzecie. Jeżeli terminy pierwiastku są dodatne, tedy wszystkie terminy potęgi także dodatne będą. Poczwarte: Lubo prawo co do spółczynnikow zdaje się bydź zawikłane, atoli rozważając je pilnie, postrzeżemy, *że spółczynnik* *drugiego terminu potęgi, jest równy wykładnikowi potęgi; spółczyńnik zaś każdego inszego terminu, tworzy się ze spółczyńnika terminu poprzedzającego, mnożąc go przez wykładnik ilości* x *w tymże terminie poprzedzającym, i dzieląc przez tyle jedności, ile jest terminow poprzedzających termin szukany.* I tak naprzykład spółczynnik trzeciego terminu potęgi piątey; to jest $10 = \frac{5.4}{2}$; toż samo się prawdzi w każdym innym wyrazie.

Zebrawszy te wszystkie uwagi przekonywamy się, że potęga m dwówyrązu $x+a$, tak się układa:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots\ldots + a^m.$$

Ten wzór, służący na wynoszenie dwówyrazu do jakieykolwiek potęgi, od nazwiska swego wynalazcy zowie się wzorem *Newtona.* Wyciągnęliśmy go z prostey obserwacyi i analogii między potęgami dostrzeżoney, co nie może mieć ścisłego dowodu matematycznego, którego nam szukać potrzeba w początkach do natury ilości przywiązanych.

14. Powiedzieliśmy że potęga jest mnogością z pewney liczby mnożnikow równych, i ta liczba oznacza stopień potęgi: potęga więc, jest szczegulnym przypadkiem mnogości. Mając więc ogulną z liczby m mnożnikow utworzoną mnogość, jeżeli w niey założymy, iż te mnożniki są równe między sobą, tedy ta mnogość zamieni się na potęgę stopnia m. A jeżeli na utworzenie tey mnogości z liczby m mnożnikow, mieliśmy pewne prawo, więc to prawo mnogości, zamieni się na prawo potęgi stopnia m. Że zaś nam chodzi o wynalezienie prawa na potęgę z dwówyrazu $x+a$, przeto należy nam wziąć mnogość z pewney liczby mnożnikow dwówyrazowych, a to jeszcze taką, którey prawo tworzenia się z mnożnikow danych, jest nam znane.

Mnogość z wielu mnożnikow dwówyrazowych jeden termin spólny mających, tworzy się podług pewnego stałego prawa, to jest:

1º *Że wyraz spólny wszystkim mnożnikom, znayduje się w mnogości z wykładnikiem naywyższym tyle jedności zawierającym, ile jest mnożnikow danych do rozmnożenia, i że w następnych terminach mnogości, wykładnik jego statecznie się zmnieysza jednością aż nie stanie się zero:* 2º *Społczyńnikiem pierwszego terminu mnogości jest jedność: spółczyńnikiem zaś drugiego terminu jest summa drugich terminow mnożnikow. Spółczyńnikiem trzeciego terminu jest summa mnogości różnych z drugich terminów mnożników po dwa na raz branych. Spółczyńnikiem czwartego terminu, jest summa mnogości rożnych z tychże drugich terminow mnożnikow, po trzy na raz branych; i t. d. Nakoniec ostatni termin jest mnogością wszystkich drugich terminow mnożnikow dwówyrazowych.* Tak iż mnogość z liczby m mnożnikow tak się wyraża:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d\ldots\ldots(x+r)=$$

$$(1)\qquad =x^m\begin{array}{l|}+a\\+b\\+c\\+d\\\cdot\cdot\\+r\\ \\ \\ \\ \end{array}x^{m-1}\begin{array}{l|}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+ce\\+cd\\\cdot\cdot\cdot\\ \end{array}x^{m-2}\begin{array}{l|}+abc\\+abd\\+acd\\\cdot\cdot\cdot\cdot\\\cdot\cdot\cdot\cdot\\\cdot\cdot\cdot\cdot\\\cdot\cdot\cdot\cdot\\ \\ \end{array}x^{m-3}+\ldots\ldots+abcd\ldots\ldots r.$$

To prawo pisania mnogości z tego rodzaju mnożników, mamy dowiedzione ze wszelką ścisłością geometryczną. (*Obacz wywod tey prawdy w przyp.* N. VII).

15. Chcąc teraz tę ogólną mnogość, z tego rodzaju mnożników powstałą, zamienić na potęgę stopnia m ilości $x+a$, należy w niey założyć $a=b=c=d=e=\ldots=r$; przez co układ mnogości z m mnożników, zamieni się na układ potęgi stopnia m. Położywszy więc w mnogości (1), za b, za c, za d, i t. d. literę a, otrzymamy

$$\begin{array}{r|r|r|l}
(x+a)^m = x^m + a & x^{m-1} + a^2 & x^{m-2} + a^3 & x^{m-3} + \dots\dots + a^m. \\
+a & +a^2 & +a^3 & \\
+a & +a^2 & +a^3 & \\
+a & +a^2 & +a^3 & \\
+a & \dots & +a^3 & \\
+\text{ i t. d.} & +\text{ i t. d.} & +\text{ i t. d.} &
\end{array}$$

Tu widzimy, że chcąc mieć wyrażenie potęgi, należy nam wiedzieć wiele razy wziąć powinniśmy a, wiele a^2, a^3, i t. d., czyli co to samo jest, jaki ma być spółczyńnik przy a, a^2, a^3, i t. d.

Zastanowiwszy się nad mnogością (1), z którey ta potęga powstała, łatwo postrzegamy, że a tyle razy wzięte bydź powinno, ile było liter $a, b, c, d, \dots r$, to jest m razy; a^2 tyle razy powinno bydź powtórzone, ile było mnogości ab, ac, ad, bc, bd, $ce, \dots$; to jest tyle razy, ile z liter m $(a, b, c, d, \dots r)$, zrobić możemy mnogości różnych, biorąc ich po dwie na raz. Podobnie a^3 tyle razy wziąć należy, ile z liter m zrobić możemy mnogości różnych, biorąc ich po trzy na raz; i tak daley.

Z tego cośmy dotąd powiedzieli wypada, że potęga stopnia m z ilości dwówyrazowey $x+a$ będzie tey postaci:

$$(2)\quad (x+a)^m = x^m + max^{m-1} + M_2 a^2 x^{m-2} + M_3 a^3 x^{m-3} + \\ + M_4 a^4 x^{m-4} + \dots + M_n a^n x^{m-n} + \dots + a^m;$$

gdzie spółczyńniki M_2, M_3, $M_4 \dots M_n$, oznaczają liczby, zawierające tyle w sobie jedności, ile ułożyć możemy mnogości różnych z liter m, biorąc ich po dwie, po trzy, po cztery, i t. d. na raz.

16. Cała więc trudność wynalezienia spółczyńników w rozwinieniu dwówyrazu $(x+a)^m$, sprowadza się do rozwiązania tego ogólnego zadania: *Mając liter* m, *wynaleźć wiele z nich utworzyć możemy mnogości różnych, biorąc po* n *liter na raz.*

Otoż dowiedzione mamy, że $M_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}$,

$M_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, $M_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$; a w ogólności $M_n = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\{m-(n-1)\}}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}$.

(*Obacz wywod tego, w przyp.* N VIII).

Podstawiwszy dopiero wynalezione wartości na M_2, M_3, $M_4\ldots\ldots M_n$, we wzorze (2), otrzymamy

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\{m-(n-1)\}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots n}x^{m-n}a^n + \ldots + a^m \quad \text{(A)}.$$

Jest to wzór na podniesienie jakiegokolwiek dwówyrazu do potęgi m, znany pod nazwiskiem wzoru Newtona. Jest on tenże sam, który drogą analogii wyżey (n. 13) otrzymaliśmy; lecz tu daleko ściśley i sposobem bardziey z duchem geometrycznym zgadzającym się dowiedliśmy.

Uwaga. Tu braliśmy a, ze znakiem dodatnym; gdyby zaś było ze znakiem odjemnym, wówczas należałoby odmienić znak we wszystkich wyrazach rozwinienia potęgi, gdzie a znayduje się z wykładnikiem nieparzystym, i wówczas znaki szłyby naprzemian dodatny z odjemnym. Ostatni zaś termin wypadłby dodatny albo odjemny, podług tego, jak m jest parzyste lub nieparzyste.

17. Mając wzór na rozwinienie potęgi ogólney z dwówyrazu, łatwo jest utworzyć w każdém razie potęgę szczególną; bo dosyć jest dwówyraz szczególny porównać z dwówyrazem $(x+a)^m$, i za x, a i m, podstawić we wzorze (A) im odpowiadające wartości. (*Ob. przykł. w przyp.* N. IX).

18. Rzuciwszy okiem na wyrazy składające wzór Newtona (A), odkrywamy w nim proste prawo tworzenia spółczyńnikow, dla każdego terminu, ze spółczyńnika terminu go poprzedzającego. To prawo jest następujące: *Spółczyńnik jakiegokolwiek wyrazu w porządku rozwinienia, tworzy się, mnożąc społczyńnik poprzedzającego wyrazu, przez wykładnik* x *w tymże wyrazie poprzedzającym, i dzieląc tę mnogość przez liczbę tyle jedności w sobie zawierającą, ile jest terminow poprzedzających termin szukany.* Owoż

na témto prawie, którego odkrycie winniśmy Newtonowi, zasadza się wzór potęgi z dwówyrazu. Prawo to służy do rozwinienia jakieykolwiek potęgi szczególney, nie udając się do wzoru głównego (A). (*Ob. przykł. w przyp.* N. x).

19. Jeżeli, we wzorze Newtona, założymy $x=1$, $a=1$; otrzymamy

$$(1+1)^m \text{ czyli } 2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\text{ i t. d.}$$

To jest, *summa spółczyńników wszystkich terminow w rozwinieniu dwówyrazu, jest równa potędze* 2 *stopnia* m, *i wzajemnie*. I tak we wzorze szczególnym $(x+a)^5=$ $=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$; summa $1+5+$ $+10+5+1$ spółczyńników, równa jest $2^5=32$. Podobnie w rozwinieniu 10tey potęgi, summa spółczyńników, równa jest $2^{10}=1024$.

20. Nauczyliśmy się już podnosić każdy dwówyraz do potęgi. Gdyby zaś wyrażenie dane do wyniesienia do potęgi więcey niż dwa terminy zawierało, natenczas wynoszenie to przywiedlibyśmy do poprzedzającego, biorąc, dwa, trzy i więcey wyrazow, za jeden; tak jak już zrobiliśmy w potędze drugiey: tych potém różne znakowe potęgi, rozebrawszy podług tablicy na swe właściwe potęgi, i położywszy je w ogólném rozwinieniu, mielibyśmy rozwinienie wielowyrazu. I tak, chcąc rozwinąć $(x+a+b)^m$; należy we wzorze (A), za wyraz a położyć $a+b$; przez co otrzymamy

$$(x+a+b)^m=x^m+m(a+b)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^2x^{m-2}+$$

$$+\frac{m(m-1)m-2)}{1.2.3}(a+b)^3x^{m-3}+\ldots\ldots+(a+b)^m.$$

Teraz tylko, należałoby rozwinąć rozmaite potęgi dwówyrazu $a+b$. Tymże samym sposobem postąpilibyśmy z wynoszeniem cztero, pięcio i t. d. wyrazem, do potęgi. (*Ob. przykł. w przyp.* N. xi).

WYCIĄGANIE PIERWIASTKÓW.

21. Odbywszy wynoszenie ilości do jakichkolwiek potęg, i na wykonanie tego działania, wyciągnąwszy stałe i nieodmienne przepisy czyli prawidła; należy nam teraz wynaleźć inny wywrotny sposób, za pomocą którego moglibyśmy od wszelkiey potęgi powrócić do samey ilości z którey ta potęga powstała. Owoż działanie to, wbrew przeciwne pierwszemu, nazywamy *wyciąganiem pierwiastku*, a ilość z takiego działania wypadającą, zowiemy *pierwiastkiem*. Pierwiastek więc z jakiey ilości czyli wyrażenia, uważanego za potęgę pewnego stopnia, jest to mnożnik, którýby wyniesiony do tey potęgi, wydał ilość podaną.

Z tego opisu teraźnieyszego działania oczywiście widzimy, iż jako podnoszenie do potęg było rozwiązaniem zadania: *z daney jakieykolwiek ilości złożyć czyli utworzyć potęgę pewną*, tak działanie wyciągania pierwiastku, jest rozwiązaniem zadania, *z daney ilości, uważaney za potęgę pewnego stopnia, znaleźć pierwiastek*: to jest, tak rozłożyć podaną ilość, aby z tego rozkładu wypadł jey pierwiastek rodzący. Azatém jako podnoszenie do potęg jest składaniem ilości, tak wyciąganie pierwiastku jest jey rozkładaniem.

22. Jako na cechowanie każdego działania stanowiliśmy pewne znaki ostrzegające nas o gatunku roboty, tak i na oznaczenie teraźnieyszego, to jest wyciągania pierwiastków, użyjemy znaku litery początkowey, łacińskiego wyrazu *radix* (pierwiastek), tak przekształconey $\sqrt{}$; tym znakiem przykryjemy wielkość z którey pierwiastek wyciągać mamy. W otworzystość zaś tego znaku kłaśdź będziemy liczbę oznaczającą stopień potęgi, którey pierwiastku szukamy. Tę liczbę pospolicie zowiemy *stopniem* lub *wykładnikiem pierwiastku*, albo jeszcze inaczey *nazwaniem pierwiastku*. I tak naprzykład $\sqrt[3]{a^5-b^3}$, znaczy wyciągnąć pierwiastek trzeciey potęgi z wyrażenia a^5-b^3. Podobnie dla oznaczenia wyciągania pierwiastku potęgi $m$tey z ilości a^n piszemy $\sqrt[m]{a^n}$.

Wykładnik więc pierwiastku, jest razem wykładnikiem potęgi ilości znakiem pierwiastku zajętey.

Uwaga. Ponieważ potęga druga ze wszystkich jest nayniższą, przeto w oznaczeniu wyciągania jey pierwiastku, znak pierwiastku pisać będziemy bez żadnego wykładnika. I tak $\sqrt{a}$, to samo znaczyć będzie co $\sqrt[2]{a}$.

23. Przystąpmy teraz do wytknięcia prawideł na wyciąganie pierwiastku; a naprzód zaczniymy od ilości jednowyrazowych. Aby przyyść od potęgi do ich pierwiastkow, należy przewrócić prawidła tyczące się tworzenia potęg. I tak, ponieważ mówiąc o potęgach jednowyrazowych dostrzegliśmy, iż w działaniu ich należy wykładnik ilości mnożyć przez wykładnik potęgi, więc w działaniu przeciwném, jakiém jest teraźnieysze, potrzeba *wykładnik ilości dzielić przez wykładnik znaku pierwiastkowego, a ta ilość z wykładnikiem wielorazowym, będzie pierwiastkiem szukanym.*

I tak chcąc wynaleźć pierwiastek potęgi drugiey z ilości a^2, a^4, a^6, a^n, otrzymamy $\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a$, $\sqrt{a^4}=a^{\frac{4}{2}}=a^2$, $\sqrt{a^6}=a^{\frac{6}{2}}=a^3$, $\sqrt{a^n}=a^{\frac{n}{2}}$; a w ogólności mówiąc $\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}$.

Powiedzieliśmy byli mówiąc o potęgach, że potęga z mnogości, równa jest mnogości z potęg; więc wzajemnie *w wyciąganiu pierwiastkow z mnogości, należy z każdego mnożnika wyciągnąć pierwiastek, a mnogość tych pierwiastkow, będzie pierwiastkiem z mnogości.* I tak naprzykład

$$\sqrt[m]{a^p.b^q.c^r}=\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[m]{b^q}\times\sqrt[m]{c^r}=a^{\frac{p}{m}}.b^{\frac{q}{m}}.c^{\frac{r}{m}};$$

$$\sqrt[m]{(a+x)^p(b+c)^q(c-x)}=\sqrt[m]{(a+x)^p}\times\sqrt[m]{(b+c)^q}\times\sqrt[m]{(c-x)}=$$

$$=(a+x)^{\frac{p}{m}}\times(b+c)^{\frac{q}{m}}\times(c-x)^{\frac{1}{m}}=(a+x)^{\frac{p}{m}}(b+c)^{\frac{q}{m}}(c-x)^{\frac{1}{m}}.$$

Ponieważ w podnoszeniu do potęg, spółczynniki liczbowe, jako mnożniki, wynosiły się do potęg, więc w wyciąganiu pierwiastkow z ilości jednowyrazowych, *wyciąga się pierwiastek ze spółczynnika.*

Ponieważ potęga z ułamku, otrzymuje się podnosząc osobno licznik a osobno mianownik do potęgi, przeto w wyciąganiu pierwiastkow z ilości ułamkowych, *osobno wyciąga się pierwiastek z licznika a osobno z mianownika, a ułamek z tych pierwiastkow będzie pierwiastkiem z ułamku podanego.* I tak naprzykład:

$$\sqrt[m]{\frac{a^p.b^q}{c^r.d^s}}=\frac{\sqrt[m]{a^p.b^q}}{\sqrt[m]{c^r.d^s}}=\frac{\sqrt[m]{a^p}.\sqrt[m]{b^q}}{\sqrt[m]{c^r}.\sqrt[m]{d^s}}=\frac{a^{\frac{p}{m}}.b^{\frac{q}{m}}}{c^{\frac{r}{m}}.d^{\frac{s}{m}}};$$

$$\sqrt[m]{\frac{(a+x)^n}{(b-d)^p}}=\frac{\sqrt[m]{(a+x)^n}}{\sqrt[m]{(b-d)^p}}=\frac{(a+x)^{\frac{n}{m}}}{(b-d)^{\frac{p}{m}}}.$$

(*Ob. do tych ogólnych prawideł, szczególne przykłady w przyp.* N. XII).

24. Powiedzieliśmy (n. 23), że dla wyciągnienia pierwiastku z ilości jednowyrazowey, potrzeba wykładnik ilości podzielić przez wykładnik pierwiastku; więc 1º *wyciąganie pierwiastku możemy oznaczać albo przez znaki pierwiastkowe albo przez wykładniki ułamkowe.* I tak $\sqrt[m]{a^p}$ jedno jest co $a^{\frac{p}{m}}$; $\sqrt[m]{(a-b)^n}$ jedno jest co $(a-b)^{\frac{n}{m}}$.

2º Wzajemnie, *wszystkie ilości z wykładnikami łamanemi, są pierwiastkowe;* tak, że licznik wykładnika ułamkowego, jest wykładnikiem ilości, a zaś mianownik jest wykładnikiem znaku pierwiastkowego.

3º Ponieważ wyciąganie pierwiastkow z ilości jednowyrazowych, kończy się na dzieleniu wykładnika ilości przez wykładnik pierwiastku; przeto wykładnik ilości albo się da dokładnie rozdzielić, jak naprzykład $\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a$, lub $\sqrt[m]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{m}}=a^p$, i daje pierwiastek z wykładnikiem całkim; albo nie da się dokładnie rozdzielić, jak naprzykład $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[m]{a^p}=a^{\frac{p}{m}}$ i daje pierwiastek z wykładnikiem ułamkowym. W pierwszym razie, nazywa się pierwiastkiem *wymiernym*, a w drugim *niewymiernym*.

Trafiliśmy więc w Algebrze na nowy rodzay wyrażeń, jakiemi są ilości z wykładnikami ułamkowemi, czyli pokryte znakiem pierwiastku: należałoby więc z niemi podobnie nauczyć się obchodzić, jak nauczyliśmy się z ilościami wymiernemi: ale żebyśmy nie przerywali sobie ciągu, odkładamy o nich niżey mówić.

25. Dotychczas mówiliśmy o wyciąganiu pierwiastkow z ilości jednowyrazowych, czyli złożonych z wyraźnych mnożników; ale nic nie powiedzieliśmy o znaku, jakim sam pierwiastek naznaczonym bydź powinien.

Ponieważ potęgą parzystego stopnia, bądź dodatney bądź odjemney ilości, jest zawsze dodatną; więc *pierwiastek parzystego stopnia z ilości, może bydź naznaczony albo znakiem dodatnym albo odjemnym*. A że bez wskazania, przez szczególne warunki, bądź zadania bądź natury rzeczy rozważaney, nie wiemy któremu z tych znaków dadź pierwszeństwo; przeto w ogólności obadwa pisać należy. I tak $\sqrt{a^2}=\pm a$, $\sqrt[4]{a^8}=\pm a^2$; a w ogólności $\sqrt[2n]{a^{2nm}}=\pm a^m$ (*)

Co się tycze znaków, jakiemi pierwiastki nieparzystego stopnia nacechowane bydź powinny, te żadney nie ciągną za sobą niepewności; bo jako każda potęga nieparzystego stopnia z ilości, zachowuje znak swojego pierwiastku (n. 6), tak wzajemnie znak potęgi ilości, będzie znakiem pierwiastku. Azatém znak *pierwiastku nieparzystego stopnia z ilości dodatney będzie dodatny, a zaś z odjemney będzie*

(*) Wzór ogólny na wyrażenie liczb parzystych jest $2n$, a zaś na liczby nieparzyste jest $2n+1$. Jakoż nadając rozmaite liczby całkie na n, zawsze z pierwszego wzoru mieć będziemy liczby parzyste, a z drugiego nieparzyste.

odjemny. I tak $\sqrt[5]{+a^5}=+a$, $\sqrt[5]{-a^5}=-a$; a w ogólności $\sqrt[2n+1]{+a^m}=+a^{\frac{m}{2n+1}}$, $\sqrt[2n+1]{-a^m}=-\sqrt[2n+1]{a^m}=-(a)^{\frac{m}{2n+1}}$.

Uwaga. Tu jeszcze widzimy, że możemy znak, przed znakiem pierwiastku nieparzystego stopnia położony, podciągnąć pod sam znak pierwiastku, i wzajemnie.

26. Gdyby nam teraz wypadło wyciągnąć pierwiastek parzystego stopnia z ilości odjemney; naprzykład, wyciągnąć pierwiastek drugiego stopnia z wyrazu $-a^2$; byłoby $\sqrt{-a^2}$. Ponieważ tu $-a^2$, uważamy jako potęgę drugą, która z natury potęg parzystych zawsze powinna bydź dodatną, bądź ona powstaje z ilości dodatney dądź odjemney; przeto pierwiastek jey, nie może bydź ani wielkością dodatną, ani odjemną, ani zero, ani też nieskończenie wielką; bo żadna z tych ilości, wyniesiona do potęgi parzystey, nie daje na powrót ilości skończoney odjemney. Mieć więc ilość, pod znakiem pierwiastku parzystego stopnia, odjemną, jestto mieć rzecz przeciwną całey naturze ilości; i dla teyci to przyczyny, *pierwiastki parzystego stopnia*, jakiemi są $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$; a w ogólności $\sqrt[2n]{-a}$, *mające ilość odjemną pod swemi znakami pierwiastkowemi, wzięły imie urojonych:* bo w rzeczy samey, takie wyrażenie nie jest ilością, tylko znakiem niepodobieństwa.

Z pierwszego wyobrażenia tych pierwiastkow zdawałoby się nam, iż wyrażenia tego rodzaju, jako nie mające swojey wartości w naturze, nie powinny wchodzić w poczet rachunkow. To jednak nasze mniemanie byłoby zawczesne i mylne. Rachunek bowiem pierwiastkow urojonych jest jeden z nayważnieyszych prawie rachunkow, i obaczymy niżey, że wyrażenia te są szacownemi symbolami. Często bowiem w rozwiązaniu pytania nie możemy z samego wysłowienia poznać czy zadanie może bydź podobne lub nie, i wtenczas tylko o niepodobieństwie jego wyraźnie ostrzeżeni bywamy; kiedy z ciągu rachunku, przywiedzeni będziemy do potrzeby wyciągnięcia pierwiastku parzystego stopnia z ilości odjemney. Owszem w wyższych częściach Matematyki, obaczymy obszerne ich użycie i wielkie znaczenie.

Ponieważ pierwiastki urojone są szczególnym przypadkiem ilości niewymiernych; więc one podlegać mogą wszystkim działaniom, jakim i pierwiastki niewymierne podlegają. O działaniach z niemi, zaraz po pierwiastkach niewymiernych, niżey powiemy.

27. Nauczyliśmy się dotychczas wyciągać pierwiastki wszelkiego stopnia z ilości jednowyrazowych; należy nam teraz nauczyć się wyciągać pierwiastki z wyrażeń wielowyrazowych. Wątpić nie możemy, że działanie z niemi przywiedzie się do działania z jednowyrazami. Pamiętaymy tylko o tey uwadze, że w każdą potęgę wchodzą, prócz liczb, też same ilości, jakie były w pierwiastku; nie pozostaje nam więc tylko, przez działania stosowne, wyciągnąć w właściwym sobie składzie, te ilości. Ponieważ działanie wyciągania pierwiastku jest działaniem przeciwném, przez któreśmy składali potęgi, przeto nie inaczey odkryte bydź może, tylko roztrząsając wprzódy skład samych potęg. A ponieważ każdego stopnia potęga ma właściwe sobie prawo układania się, więc też każdego stopnia wyciąganie pierwiastkow, musi mieć właściwe także sobie przepisy.

28. Zaczniymy od wyciągania pierwiastku z drugiey potęgi jako nayprostszey, i przypomniymy sobie prawo jey układu. Oznaczmy przez W wielowyraz, z którego otrzymać mamy pierwiastek drugiego stopnia; a przez P sam pierwiastek, który uważmy na moment jako nam znany. Nadto wystawmy sobie, iż oba te wielowyrazy, to jest, potęga druga W, i jey pierwiastek P, uszykowane są podług potęg rosnących jedney z liter do nich wchodzących; niech tą literą będzie naprzykład, a.

Dwa wyrazy pierwsze wyrażenia W, wprost wydać mogą wyraz pierwszy i drugi szukanego pierwiastku P: co oczywiście wypada z tego prawa. 1º *Że kwadrat z pierwszego terminu pierwiastku* P, *zamyka* a *z wykładnikiem* *naywyższym:* 2º *Że podwóyna mnogość* 1go *terminu* P, *przez drugi, zamyka także wykładnik wyższy niż jest w następnych po nim terminach.* Te więc dwie wzmiankowane części nie mogące się z innemi redukować, są to koniecznie dwa terminy wyrażenia *W* z naywyższym i bezpośrednie niższym wykładnikiem litery *a*. Jeżeli więc *W*, jest rzeczywiście potęgą drugą; tedy 1º *Pierwszy jego termin jest kwadratem dokładnym z pierwszego terminu pierwiastku, a zatém wyciągniony z niego pierwiastek jednowyrazowy, będzie pierwszym terminem pierwiastku szukanego* P. 2º *drugi termin tego wielowyrazu, powinien się dokładnie rozdzielić przez podwóyny wyraz pierwszy pierwiastku* P, *a wypadek tego dzielenia będzie drugim terminém* P.

Dla otrzymania następnych wyrazow pierwiastku, zróbmy kwadrat z dwówyrazu znalezionego i odciągniymy go od *W;* reszta z tego odciągania pozostała, którą oznaczmy przez *W'*, zawiera także podwóyne mnogości, pierwszego terminu *P* przez trzeci, drugiego terminu *P* przez trzeci, więcey szereg następnych części. *Lecz podwóyna mnogość pierwszego terminu przez trzeci, powinna zamykać* a z *wykładnikiem większym niż jest w następnych;* a przeto z niemi redukować się nie może; a zatém ta podwóyna mnogość jest pierwszym terminem *W'*, *więc ten pierwszy termin wielowyrazu* W' *powinien dać się rozdzielić przez podwóyny pierwszy termin* P, *i to dzielenie wykonane, da wieloraz, który będzie trzecim terminem* P.

Chcąc otrzymać nowy termin pierwiastku, *należy utworzyć podwóyne mnogości pierwszego i drugiego terminu przez termin trzeci, więcey kwadrat z 3go terminu, a potém wszystkie te mnogości odciągnąć od reszty W'*. Jeżeli więc pierwiastek składa się więcey niż z trzech wyrazów, tedy zostanie nowa reszta *W"*, zawierająca także podwóyną mnogość pierwszego terminu *P* przez czwarty, więcey szereg innych części. Lecz tymże poprzedzającym sposobem dowieśdź można, *że pierwszy termin reszty uszyko-*

waney W″, *jest koniecznie podwóyną mnogością pierwszego terminu* P *przez termin czwarty. Dzieląc więc pierwszy termin* W″ *przez podwóyny pierwszy termin* P, *otrzymamy wieloraz, który jest czwartym z porządku wyrazem pierwiastku* P: i tak daley.

Jeżeli w ciągu takiego działania, przyydziemy do reszty zero, wówczas wielowyraz podany, jest zupełnym kwadratem, a zaś z ciągu działania otrzymany wielowyraz drugi, jest jego pierwiastkiem. Lecz gdy pierwszy termin jedney z reszt nie daje się dokładnie rozdzielić przez podwóyny pierwszy termin pierwiastku, wniesiemy, że wielowyraz podany nie jest pełnym kwadratem; a zatém, że pierwiastek nie może bydź otrzymany w skończonym i całkim wyrazie. Jestto oczywisty wniosek wypływający z rozumowania, które nas do tego postępowania sposobu przywiodło. I w takim razie wielowyraz podany pokrywamy znakiem $\sqrt{}$, i nazywa się niewymiernym, który atoli, niżey podanemi sposobami, częstokroć uproszczony bydź może. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XIII).

29. Nauczyliśmy się wyciągać pierwiastek kwadratowy z wielowyrazu i na wykonanie tego działania odkryślimy, przez ciąg rozumowań, stałe prawidło, które wysłowione jest w n° poprzedzającym literami pisanemi czyli włoskiemi, i podług tego prawidła postępując, możemy z wszelkiego wielowyrazu wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Nadto, rozumowanie, które nas przywiodło do odkrycia wyżey przytoczonego prawidła, jest nieomylną drogą do odkrywania prawidła na wyciąganie wszelkiego stopnia pierwiastku z wielowyrazu podanego. Jakoż zadaymy sobie wynaleźć prawidło na wyciąganie pierwiastku P trzeciego stopnia czyli sześciennego, z wielowyrazu podanego W. Na ten koniec wyobraźmy sobie podobnie jak w n° 28, oba te wielowyrazy uszykowane podług potęg jedney litery, naprzykład a. Z prawa układania się potęgi trzeciey z wielowyrazu wypada (n. 10), że *sześcian* z P, zawiera dwie części nie mogące się redukować z innemi: to jest sze-

ścian z pierwszego terminu pierwiastku, i potróyny kwadrat z pierwszego terminu, mnożony przez termin drugi pierwiastku: bo oczywiście te dwie części zawierają literę *a* z wykładnikiem wyższym niż jest w potróynym kwadracie drugiego terminu przez pierwszy, w sześcianie drugiego terminu, w potróynym kwadracie pierwszego terminu przez trzeci, i t. d. Te dwie więc części koniecznie stanowią pierwszy i drugi termin wielowyrazu uszykowanego *W*. A zatém, *wyciągając pierwiastek sześcienny z pierwszego terminu* W, *otrzymamy pierwszy termin pierwiastku* P. *Dzieląc potém drugi termin* W *przez potróyny kwadrat pierwszego terminu* P, *otrzymamy drugi termin pierwiastku* P. Znając dwa pierwsze terminy *P*, *utworzyć należy sześcian z tego dwówyrazu i odciągnąć go od* W, jako w skład jego przez dodawanie algébraiczne wchodzący. Jeżeli zostanie reszta, którą oznaczmy przez *W'*, tedy będzie znakiem, iż pierwiastek składa się z więcey niż dwóch terminów. Ta reszta *W'*, zawiera także mnogości potróynego kwadratu pierwszego terminu *P* przez trzeci, więcey szereg innych części, zawierających *a* z niższym wykładnikiem, niż jest w tey mnogości: ta więc mnogość stanowi pierwszy trmin reszty uszykowaney *W'*. Jeżeli więc *podzielimy pierwszy termin* W' *przez potróyny kwadrat pierwszego terminu* P, *otrzymamy koniecznie trzeci termin pierwiastku* P. *Utworzywszy potém sześcian z tróywyrazu już znalezionego, odciągnąć go należy od wielowyrazu podanego* W. *A jeżeli pozostanie nowa reszta* W'', *tedy z nią tak postąpić potrzeba, jak postępowaliśmy z* W', *przez co otrzymalibyśmy czwarty termin pierwiastku;* i t. d.

Zebrawszy dopioro wszystkie części poprzedzającego rozumowania, wyrażone w literach pisanych czyli włoskich, mieć będziemy ogólne prawidło do wyciągania pierwiastku sześciennego z jakiegokolwiek wielowyrazu podanego. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XIV).

30. Zastanowiwszy się tak nad rozumowaniem jako i

nad trybem z niego wypadającym do wyciągania pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia, łatwo postrzegamy, że ten tryb rozciągniony bydź może do wyciągania wszelkiego stopnia pierwiastku z wielowyrazu podanego. Jakoż wiemy z podnoszenia ilości wielowyrazowych do potęg; iż gdy pierwiastek składa się z różnych terminow $x+y+z+u\ldots$, tedy wyrażenie potęgi *mtey* tego pierwiastku zawierać będzie w liczbie innych terminow, terminy $x^m+mx^{m-1}y+\ldots+mx^{m-1}z+\ldots+mx^{m-1}u+\ldots$. Te więc części kładzione na widoku z kolei w wielowyrazie podanym (co się otrzymuje przez szykowanie terminów) posłużą do wynalezienia różnych terminów pierwiastku. Tak, iż *dla wyciągnienia pierwiastku* mgo *z wielowyrazu* W, *uszykowanego podług potęg wzrastających lub ubywających jedney z liter w wielowyraz wchodzących: wystaw sobie pierwiastek* P *tymże sposobem uszykowany. Pierwiastek* mty *z* 1go *terminu* W, *będzie pierwszy termin* p, *pierwiastku szukanego* P: *odciągniy* p^m *od* W, *zostanie reszta* W': 1szy *termin tey reszty* W' *dzielony przez* mp^{m-1} *wyda drugi termin* p_1, *pierwiastku* P. *Odciągniy* $(p+p_1)^m$ *od* W: *otrzymasz drugą resztę* W'': *dziel* 1szy *termin* W'' *przez* mp^{m-1}, *otrzymasz* 3ci *termin* p_2 *pierwiastku: i tak daley.*

Uwaga. W całym ciągu tych działań, potęga *m*ta z części znalezioney pierwiastku, dodana do reszty odpowiadającey, dadź powinna summę równą wielowyrazowi danemu *W:* gdyby zaś to nie prawdziło się, wnieślibyśmy, iż w rachunku błąd został popełniony.

Gdy wielowyraz i reszty z działania wypadające szykowane będą podług potęg ubywających jedney litery, naprzykład *a;* tedy wykładniki teyże litery *a*, w resztach po sobie idących, zmnieyszać się będą: i gdy przyydziemy do takiego terminu π pierwiastku, że wykładnik nad *a* w π^m jest mnieyszy od wykładnika ostatniego terminu *W*, wniesiemy, iż nigdy nie przyydziemy do reszty zero: i wtenczas *W* nie jest potęgą pełną z wyrażenia całkiego i skończonego: gdyż ostatni termin *mtey* potęgi z wielowyrazu, jest koniecznie *mtą* potęgą z ostatniego terminu pierwiastku.

RACHUNEK Z ILOŚCIAMI PIERWIASTKOWEMI.

31. Powiedzieliśmy w kilku mieyscach, że gdy ilość jedno lub wielowyrazowa, z którey wyciągnąć chcemy pierwiastek pewnego stopnia, nie jest dokładną potęgą tego stopnia, wówczas nie możemy wykonać działania wyciągania pierwiastku, ale przestajemy na oznaczeniu znakiem $\sqrt{\ }$, kładąc, w otworzystość jego, liczbę oznaczającą stopień pierwiastku szukanego. Takie ilości nazwaliśmy *niewymiernemi*; zwać je będziemy jeszcze *ilościami* lub *wyrażeniami pierwiastkowemi*.

Lubo z wyrażeń niewymiernych nie może bydź wyciągniony dokładnie w terminach skończonych pierwiastek, częstokroć atoli wyrażenia tego rodzaju uproszczone bydź mogą. To uproszczenie zasadza się w ogólności na wydobyciu niektórych mnożników z pod znaku pierwiastkowego przed znak pierwiastku. I tak: ponieważ wiemy (n. 23), że pierwiastek z mnogości jest równy mnogości z pierwiastków; przeto stąd wypada:

1º *Jeżeli w ilości pierwiastkowey znayduje się jeden lub kilka mnożników takich, że każdy z nich w szczególności jest zupełną potęgą, natenczas z każdego takich mnożników wyciąga się pierwiastek dokładny, i mnogość z nich kładzie się przed znakiem pierwiastku, pod którym same tylko mnożniki, nie będące zupełnemi potęgami, zostaną.* Tym sposobem wyrażenie pierwiastkowe zamienione będzie na inne, złożone z ilości pierwiastkowey i wymiernych. *Wyrażenie wymierne mnożące ilość pierwiastkową nazywa się jey spółczynnikiem.*

2º Wzajemnie: *wszelkie wyrażenie mnożące ilość pierwiastkową, może bydź podciągnione pod sam znak pierwiastku; a to wynosząc je do potęgi oznaczoney wykła-*

dnikiem znaku pierwiastkowego, i biorąc ją za mnożnik wyrażenia pod znakiem pierwiastku będącego. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XV.)

32. Ilości niewymierne czyli pierwiastkowe tymże samym działaniom podlegać muszą co i wymierne. Bo jako działania z ilościami nie były skutkiem ich wymierności, tylko skutkiem tey ogólney własności, iż każda ilość wzrastać i ubywać może, tak i wyrażenia niewymierne czyli pierwiastkowe, jako ilości, tymże odmianom i podobnym działaniom podpaść mogą. A zatém, jako ilości wymierne dodają się i odciągają, mnożą i dzielą się, wynoszą się do potęg i wyciąga się z nich pierwiastek, tak podobnie dziać się może i z wyrażeniami pierwiastkowemi.

33. *Dodawanie i odciąganie.* Jako różne litery i wykładniki, w ilościach wymiernych, nie dozwalały nam dorzucać lub odciągać je razem, chyba przez same tylko znaki; tak podobnie, *różne litery i wykładniki znaków pierwiastkowych, stanowiąc różne gatunki ilości, nie dozwalają inaczey łączyć je z sobą tylko przez znaki* + i —.

A jako w dodawaniu i odciąganiu ilości wymiernych, zachodziło uproszczenie czyli redukcya wyrazow podobnych; tak i tu podobna redukcya czyli zlewanie się w jeden ilości pierwiastkowych, zayśdź może w pierwiastkach podobnych.

Pierwiastkami podobnemi nazywamy te, które są jednego nazwania i znak pierwiastku też same ilości pokrywa. Mogą częstokroć wyrażenia pierwiastkowe, pokazać się na pierwszy rzut oka różnemi, lubo w rzeczy samey takiemi nie są: dla dóyścia prawdziwego ich znaczenia, przywieśdź je trzeba do jednostaynego wyrazu: co się wykonywa *wydobywając z pod znaku pierwiastkowego te mnożniki, które wydobyte bydź mogą, lub wciągając niektóre pod sam znak pierwiastkowy*, podług podanego w n. 31 prawidła.

Dodawanie lub odciąganie ilości pierwiastkowych po-

dobnych, odbędzie się na ich spółczynnikach. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XVI).

34. *Mnożenie i dzielenie.* Powiedzieliśmy byli, mówiąc o wyciąganiu pierwiastków (n. 23), że pierwiastek z mnogości jest równy mnogości z pierwiastków; a pierwiastek z ułamku jest równy ułamkowi z pierwiastku licznika i pierwiastku z mianownika: to jest, powiedzieliśmy, że

$$\sqrt[m]{a^p b^q c^r} = \sqrt[m]{a^p} \times \sqrt[m]{b^q} \times \sqrt[m]{c^r}; \qquad \sqrt[m]{\frac{a^p}{b^q}} = \frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[m]{b^q}}:$$

stąd wzajemnie to wyciągamy prawidło; że *w mnożeniu jakieykolwiek liczby pierwiastków jednego nazwania, mnożą się z sobą ilości pod znakiem pierwiastkowym będące, a wieloczyn wypadły, oznacza się tymże znakiem pierwiastku. W dzieleniu zaś pierwiastków jednego nazwania, dzielą się przez się ilości pod znakiem pierwiastku będące, a wypadek tego dzielenia oznacza się tymże znakiem pierwiastku.* (*Ob. przykł. w przyp.* N. XVII.)

35. Lecz jeżeli ilości pierwiastkowe, dane do mnożenia lub dzielenia przez się, nie są jednego nazwania, tedy do nich nie może bydź wprost zastosowane wyżey podane prawidło; ale przestajemy naówczas na oznaczeniu działań zwyczaynemi znakami.

Chcąc atoli i ten przypadek przywieśdź do poprzedzającego, należy tak przerobić pierwiastki, iżby te bez nadweręženia wewnętrzney swojey wartości, miały jednaki wykładnik. Tego zaś łatwo dokazać można uważając, iż wszelkie ilości pierwiastkowe, naprzykład $\sqrt[m]{a^p}$, $\sqrt[n]{b^q}$ są toż samo co $a^{\frac{p}{m}}$ i $b^{\frac{q}{n}}$, (n. 24). Chcąc więc *te pierwiastkowe ilości zamienić na pierwiastki jednego nazwania, dosyć jest, żeby wykładniki ułamkowe miały jednego mianownika: co się dokazuje przywodząc ułomki* $\frac{p}{m}$ *i* $\frac{q}{n}$ *do* *spólnego mianownika.* I tak

$$\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[n]{b^q}=a^{\frac{p}{m}}.\ b^{\frac{q}{n}}=a^{\frac{pn}{mn}}.\ b^{\frac{qm}{nn}}=\sqrt[mn]{a^{pn}}\times\sqrt[mn]{b^{qm}}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qm}}.$$

Podobnie mieć będziemy

$$\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[n]{b^q}\times\sqrt[s]{c^r}=a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{n}}c^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{pns}{mns}}\times b^{\frac{qms}{mns}}\times c^{\frac{rmn}{mns}}=\sqrt[mns]{a^{pns}.b^{qms}.c^{rmn}}.$$

Skąd widzimy, *że wartość arytmetyczna wyrażenia pierwiastkowego bynaymniey się nie odmienia, gdy się pomnoży lub rozdzieli przez jednę liczbę wykładnik znaku pierwiastkowego i wykładnik ilości pod pierwiastkiem zostającey.* Jakoż w rzeczy samey, przerabiać wykładnik znaku pierwiastkowego na inny, jestto podwyższać lub zniżać pierwiastek potęgi wyrażenia pod znakiem zostającego: w tey odmianie ocalimy wartość samego wyrażenia, jeżeli samę ilość pod znakiem o tyle wyżey lub niżey do potęgi podniesiemy, ile się powiększyć lub zmnieyszyć powinna wartość pierwiastku w tém przerabianiu: wykonywamy bowiem tym sposobem dwa sobie przeciwne działania; a zatém co jedno odmienia w wyrażeniu, to drugie znosi i przywraca ją do dawney wartości.

36. Toż samo prawidło stosuje się i do dzielenia przez się pierwiastków różnego nazwania. I tak dzieląc $\sqrt[m]{a^p}$ przez $\sqrt[n]{b^q}$ mamy

$$\frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[n]{b^q}}=\frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{q}{n}}}=\frac{a^{\frac{pn}{mn}}}{b^{\frac{qm}{nn}}}=\frac{\sqrt[mn]{a^{pn}}}{\sqrt[mn]{b^{qm}}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{pn}}{b^{qm}}}.$$

37. *Chcąc przywieść kilka ilości pierwiastkowych do jednego nazwania, dosyć jest pomnożyć nazwanie każdego pierwiastku w szczególności, oraz każdy wykładnik ilości pod pierwiastkiem, przez mnogość wykładników innych pierwiastków.* I tak ilości pierwiastkowe

$\sqrt[3]{2ab^2}$, $\sqrt[4]{3a^2b}$, $\sqrt[5]{7a^4d}$, przywiedzione do jednego nazwania, są $\sqrt[60]{2^{20}.a^{20}.b^{40}}$ $\sqrt[60]{3^{15}.a^{30}.b^{15}}$, $\sqrt[60]{7^{12}.a^{48}.d^{12}}$.

Uwaga. *Gdy wykładniki pierwiastkowe mają spólny mnożnik, upraszcza się rachunek, biorąc za spólny wykładnik, dla wszystkich pierwiastków, liczbę naymnieyszą dokładnie dającą się rozdzialać przez każdy z danych nazwań.* Naprzykład niech będzie d naywiększy spólny dzielnik trzech wykładników pierwiastkowych: te pierwiastkowe ilości będą postaci $\sqrt[md]{\alpha}$, $\sqrt[nd]{\beta}$, $\sqrt[pd]{\gamma}$: m, n, p; oznaczają liczby między sobą pierwsze. Naymnieysza liczba dokładnie rozdzielająca się przez każdy wykładnik pierwiastkowy md, nd, pd, jest $mnpd$: a pierwiastkowe ilości przywiedzione do naymnieyszego, jak tylko bydź może, nazwania spólnego, będą $\sqrt[mnpd]{\alpha^{np}}$, $\sqrt[mnpd]{\beta^{mp}}$, $\sqrt[mnpd]{\gamma^{mn}}$.

38. Ponieważ ilości pierwiastkowe, wyrażone bydź mogą przez wykładniki ułamkowe, przeto wszelkie rachunki z ilościami pierwiastkowemi, zamienione bydź mogą na rachunki z ilościami o wykładnikach łomanych, i wzajemnie. Idzie nam więc teraz o przekonanie się czy prawidła odkryte w działaniach na wykładniki całkie, służą także i wykładnikom ułomkowym. Na ten koniec weźmy do rozmnożenia $a^{\frac{p}{m}}$ przez $a^{\frac{q}{n}}$: mieć będziemy

$$a^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[m]{a^p} \times \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn}} \times \sqrt[mn]{a^{qm}} = \sqrt[mn]{a^{pn+qm}} =$$

$$= a^{\frac{pn+qm}{mn}} = a^{\frac{pn}{mn}+\frac{qm}{mn}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}}.$$

Skąd się przekonywamy, że *prawidło na mnożenie ilości z wykładnikami całkiemi, rozciąga się także i do wykładników ułomkowych.*

Podobnie, dzieląc $a^{\frac{p}{m}}$ przez $a^{\frac{q}{n}}$, mieć będziemy

$$\frac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = \frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[n]{a^q}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{pn}}{a^{qm}}} = \sqrt[mn]{a^{pn-qm}} = a^{\frac{pn-qm}{mn}} = a^{\frac{pn}{mn}-\frac{qm}{mn}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}.$$

Skąd widzimy *toż samo prawidło, co i na wykładniki całkie.*

Ponieważ p jest jakąkolwiek liczbą, przeto załóżmy w powyższém wyrażeniu $p=0$, otrzymamy $\frac{1}{a^{\frac{q}{n}}}=a^{-\frac{q}{n}}$.

Sąd widzimy, że prawidło na przerobienie wykładników odjemnych całkich na dodatne lub dodatnych na odjemne, służy także i wykładnikom ułamkowym.

Gdyby nawet w ilościach zdarzyły się wykładniki pierwiastkowe, jak naprzykład $a^{\sqrt{2}}$, i wtenczas jednak prawidła na wykładniki tego rodzaju są też same co i na wykładniki całkie. Bo lubo z takiego wykładnika nie możemy dokładnie wyciągnąć pierwiastku, atoli uważać można, iż z niego, przez przybliżenie tak się wyciągnął pierwiastek, że błąd popełniony jest nieskończenie mały. Pierwiastek więc taki, otrzymany w liczbach dziesiętnych, może bydź zastąpiony ułamkiem zwyczaynym; a ilości z takiemi wykładnikami ulegają we wszystkiém wyżey przepisanym prawidłom.

39. Ponieważ wykładniki ułamkowe podlegają tymże samym prawidłom co i wykładniki całkie, przeto w działaniach z wyrażeniami pierwiastkowemi dogodniey częstokroć jest zamienić je na ilości z wykładnikami. Nadto wszelkie uwagi tyczące się mnożenia i dzielenia ilości wielowyrazowych z wykładnikami całkiemi, służą całkiem i wielowyrazom zamykającym wykładniki ułamkowe. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XVIII).

40. *Podnoszenie do potęg.* Podnieść jaką ilość do potęgi, jest toż samo co rozmnożyć ją samę przez się liczbą razy oznaczoną wykładnikiem potęgi. Z tego więc ogólnego opisania potęg wypada, że *chcąc podnieść ilość pierwiastkową do potęgi, należy do tey potęgi wynieść ilość pod pierwiastkiem zostającą, i pokryć ten wypadek znakiem pierwiastku tegoż samego nazwania. Jeżeli zaś jest spółczynnik przy pierwiastku, ten się osobno wynosi do potęgi daney.* I tak:

$$(\sqrt[m]{a^p})^n=\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[m]{a^p}\times\ldots.=\sqrt[m]{a^p.a^p.a^p\ldots}=\sqrt[m]{(a^p)^n}=\sqrt[m]{a^{pn}};$$

albo

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n=\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n=a^{\frac{pn}{m}}=\sqrt[m]{a^{pn}}.$$

Podobnie

$$(p\sqrt[m]{a^p.b^q})^s=p^s\sqrt[m]{(a^p)^s(b^q)^s}=p^s\sqrt[m]{a^{ps}.b^{qs}}.$$

Jeżeli zaś wykładnik potęgi jest mnożnikiem wykładnika pierwiastku, wtenczas *podnoszenie pierwiastku do potęgi odbyć się może przez rozdzielenie tylko wykładnika pierwiastku.* Naprzykład

$$\left(\sqrt[ms]{a^n.b^q}\right)^s=\sqrt[ms]{a^{ms}.b^{qs}}=\sqrt[m]{a^m.b^q}: \text{ albo } \left(\sqrt[ms]{a^m b^q}\right)^s=$$

$$\left(a^{\frac{p}{ms}}b^{\frac{q}{ms}}\right)^s=\left(a^{\frac{p}{ms}}\right)^s\left(b^{\frac{q}{ms}}\right)^s=a^{\frac{p}{m}}.b^{\frac{q}{m}}=\sqrt[m]{a^m.b^q}.$$

Jeżeli zaś wykładnik znaku pierwiastkowego jest równy wykładnikowi potęgi, wtenczas potęgą jest sama ilość pod znakiem pierwiastku zostająca. I tak.

$$(\sqrt[m]{a^p})^m=a^p.$$

41. Nauczywszy się podnosić do potęg pierwiastki niewymierne jednowyrazowe, czyli złożone z wyraźnych mnożników, łatwo jest teraz wszelki wielowyraz, zawierający pierwiastki niewymierne, wynieść do wszelkiey potęgi; bo to działanie odbywa się za pomocą tychże samych prawideł co i wynoszenie do potęg wielowyrazow całkich. Dla łatwieyszego zaś rachunku, ilości pierwiastkowe zamienić należy na ilości wykładnikowe.

Tu należy nam zrobić uwagę, jeżeli wielowyraz zawiera terminy niewymierne, tedy i wszelka z niego potęga, oprócz terminów wymiernych, zawierać będzie także terminy niewymierne czyli z wykładnikami ułamkowemi: co jest oczywistym wnioskiem wypływającym ze składu samey potęgi. (*Ob. do tego nru przykł. w przy.* N. XIX).

42. *Wyciąganie piewiastkow.* Ponieważ w podnoszeniu do potęg ilości pierwiastkowych jednowyrazowych, czyli złożonych z wyraźnych mnożników, mnożył się tylko wykładnik ilości przez wykładnik potęgi; *przeto w wyciąganiu pierwiastku z ilości pierwiastkowey, dzielić potrzeba wykładnik ilości przez dany stopień pierwiastku.* I tak pierwiastek stopnia m z wyrażenia $\sqrt[n]{a^t}$, jest $\sqrt[m]{a^{\frac{t}{n}}}$ czyli $a^{\frac{t}{mn}}$ czyli $\sqrt[mn]{a^t}$; tak iż $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^t}}=\sqrt[mn]{a^t}$ (1).

Skąd jeszcze widzimy, *że wyciąganie pierwiastku z ilości pierwiastkowych, odbywa się także przez mnożenie wykładnika znaku pierwiastkowego, przez dany stopień pierwiastku.* Co dobrze się godzi z prawidłem podnoszenia do potęg; bo powiedzieliśmy (n. 40), że ilość pierwiastkowa wynosi się także do potęgi, gdy wykładnik znaku pierwiastkowego rozdzielimy przez wykładnik stopnia potęgi: więc w wyciąganiu pierwiastku, jako w działaniu przeciwném, mnożyć się może.

43. Zapatrzywszy się na wyrażenie (1) postrzegamy, że także

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[s]{a^t}}}=\sqrt[mns]{a^t}.$$

Jakoż wiemy, że

$$\sqrt[n]{\sqrt[s]{a^t}}=\sqrt[ns]{a^t}=a^{\frac{t}{ns}};$$

azatém

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[s]{a^t}}}=\sqrt[m]{a^{\frac{t}{ns}}}=a^{\frac{t}{mns}}=\sqrt[mns]{a^t}.$$

Skąd wnosimy 1º *że koleją wyciągać pierwiastki rozmaitych stopni z wielkości daney, jest toż samo, co wyciągnąć z niey pierwiastek stopnia oznaczonego mnogością wykładników pierwiastkowych.* 2º Ponieważ nawzajem

$$\sqrt[mns]{a^t}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[s]{a^t}}}$$

przeto ile razy stopień pierwiastku jest liczbą z kilku mno-

żników złożoną, tyle razy pierwiastek żądany z wielkości daney, otrzymać się może przez szereg koleynego wyciągania pierwiastków stopni prostszych, oznaczonych mnożnikami podanego stopnia. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XX).

44. Wyciąganie pierwiastku wszelkiego stopnia z wielowyrazu zawierającego wyrazy pierwiastkowe, czyli z wykładnikami łomanemi, tymże samym sposobem odbywa się co i wyciąganie pierwiastku z wielowyrazu całkiego. Owszem wszystkie uwagi tam zrobione, w całości tu się powtarzają. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXI).

45. *Ilości urojone.* Odbywszy rachunek z ilościami pierwiastkowemi rzetelnemi; przystąpmy teraz do rachunku z ilościami urojonemi. Ilościami urojonemi nazwaliśmy te wyrażenia, które pod znakiem parzystego stopnia pierwiastku, mają całkiem ilość odjemną. Wszyskie więc pierwiastki urojone, zawarte są w tey ogólney postaci $\sqrt[2n]{-a}$: gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całką, a zaś a wyrażeniem koniecznie dodatném.

Ponieważ $-a$ jest równe $-1\times a$ przeto $\sqrt[2n]{-a}=$ $=\sqrt[2n]{-1\times a}=(\sqrt[2n]{a})\sqrt[2n]{-1}=b\sqrt[2n]{-1}$; gdzie b zastępuje mieysce $\sqrt[2n]{a}$, i jest wyrażeniem rzetelném. Lecz dowiedziemy nieco niżey, że wyrażenie $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt{-1}$; azatém ogólna postać wyrażenia urojonego $\sqrt[2n]{-a}=b\sqrt[2n]{-1}=b\sqrt{-1}$. Wszystkie więc pierwiastki urojone przywieść się mogą do postaci $b\sqrt{-1}$: b wyrażenie rzetelne, nazywa się spółczynnikiem znaku urojenia $\sqrt{-1}$. Z tego więc daley wypada, *że wszystkie pierwiastki urojone są podobne sobie*; bo są jednego nazwania, a różnią się od siebie tylko spółczynnikami.

46. W *dodawaniu* więc i *odciąganiu* od siebie wyrazów urojonych, co się odbywa przez łączenie ich z sobą z temiż lub przeciwnemi znakami, zawsze zachodzić musi redukcya czyli uproszczenie, i wypadnie wyrażenie albo urojone

albo rzetelne. Będzie urojone jeżeli summa spółczyńników dodatnych nie jest równa summie spółczyńników odjemnych; może zaś bydź rzetelne, jeżeli summa spółczyńników dodatnych jest równa summie odjemnych; wówczas bowiem pierwiastki urojone zniszczą się, a jeżeli były terminy rzetelne te tylko ocaleją. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXII).

47. *Mnożenie przez się pierwiastków urojonych* żadnych nie czyni trudności; wiedząc, iż $\sqrt{-1}$ mnożony przez $\sqrt{-1}$ daje -1: co jest rzeczą oczywistą; bo pomnożyć $\sqrt{-1}$ przez $\sqrt{-1}$, jest to robić kwadrat z $\sqrt{-1}$, którym jest ilość -1, pod pierwiastkiem będąca. I tak mając do rozmnożenia $\sqrt{-a}$ przez $\sqrt{-b}$, piszemy

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}.$$

Tu razem postrzegamy, iż w mnożeniu, pierwiastki urojone znoszą się i dają wyraz rzetelny. Baczyć oraz popowinniśmy, że mnożenie tego rodzaju wyrażeń, może łatwo nas w błąd wprowadzić: bo gdybyśmy, trzymając się prawidła (n. 23) na mnożenie pierwiastków niewymiernych jednego nazwania, mnożyli przez się ilości pod pierwiastkiem będące, otrzymalibyśmy podług tego prawidła $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{-a\times-b}=\sqrt{ab}$; co się nie zgadza z mnogością $-\sqrt{ab}$, inną drogą otrzymaną.

48. Mnożenie przez się ilości wielowyrazowych, zamykających w sobie terminy rzetelne i urojone, zupełnie podobnym sposobem się odbywa, jak i mnożenie wielowyrazow rzetelnych, i ostatecznie się przywodzi do mnożenia jednowyrazów urojonych. (*Ob. przykł w przyp.* N. XXIII).

49. *Dzielenie pierwiastkow urojonych* żadney także trudności nie robi. I tak mając do dzielenia $\sqrt{-a}$ przez $\sqrt{-b}$ piszemy.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-1}\times\sqrt{a}}{\sqrt{-1}\times\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

50. Dzielenie wielowyrazów zamykających terminy urojone, odbędzie się tymże samym trybem, co i dzielenie wielowyrazow rzetelnych, i ostatecznie się przywiedzie do dzielenia przez się jednowyrazow. Wykonywanie atoli tego działania wielkiey ostróżności wymaga. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXIV).

51. *Podnoszenie do potęg.* Ponieważ każdy pierwiastek urojony przywodzi się do postaci $b\sqrt{-1}$ przeto jakakolwiek potęga $n$ta, jest $(b\sqrt{-1})^n=b^n(\sqrt{-1})^n$: że zaś b, jako ilość rzetelną, umiemy wynieść do wszelkiey potęgi; przeto *należy nam tylko nauczyć się wynosić do potęg różnych wyrażenie* $\sqrt{-1}$. Na ten koniec zwyczaynym sposobem mnożenia tworzymy z kolei rozmaitego stopnia potęgi z wyrażenia $\sqrt{-1}$.

I tak

$$
\begin{array}{ll}
(\sqrt{-1})^2=-1 & (\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^4=+1 & (\sqrt{-1})^5=+\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^6=-1 & (\sqrt{-1})^7=-\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^8=+1 & (\sqrt{-1})^9=+\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^{10}=-1 & (\sqrt{-1})^{11}=-\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^{12}=+1 & (\sqrt{-1})^{13}=+\sqrt{-1} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots
\end{array}
$$

Zapatrzywszy się na te rozmaite potęgi $\sqrt{-1}$, postrzegamy. 1° *Wszelka potęga parzystego stopnia jest* $+1$ *albo* -1 *czyli rzetelna.* 2° *Wszelka potęga, nieparzystego stopnia, jest* $+\sqrt{-1}$ *albo* $-\sqrt{-1}$ *czyli urojona.* Co się dobrze godzi z ogólném opisaniem potęg. 3° *Potęga parzystego stopnia z* $\sqrt{-1}$ *daje* $+1$, *gdy stopień jey zawarty jest we wzorze* $4n$, (gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całką); *daje zaś* -1, *gdy stopień jey zawarty jest we wzorze* $4n+2$. 4° *Potęga nieparzystego stopnia z* $\sqrt{-1}$ *jest* $+\sqrt{-1}$, *gdy stopień potęgi zawarty jest we wzorze* $4n+1$; *daje zaś* $-\sqrt{-1}$ *gdy stopień potęgi zawarty jest* *we wzorze* $4n+3$. Co wszystko tak przez skrócenie wyrazi się

$$(\sqrt{-1})^{4n}=+1,\qquad (\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2}=-1,\qquad (\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}\qquad (A).$$

Mając więc wynieść $\sqrt{-1}$ do potęgi wysokiego stopnia, *dosyć jest ten stopień dzielić przez* 4: *jeżeli z dzielenia nic się nie zostanie, tedy potęga jest równa* $+1$. *Jeżeli zostanie* 1, *potęga jest równa* $+\sqrt{-1}$; *jeżeli zostanie* 2, *potęga jest równa* -1; *a jeżeli zostanie* 3, *potęga jest równa* $-\sqrt{-1}$.

52. Umiejąc same pierwiastki urojone wynosić do wszelkiey potęgi, łatwo teraz jest wynieść wszelkie wyrażenia z pierwiastkami urojonemi do potęgi; bo się to wykonywa zwyczaynym trybem podnoszenia do potęg wielowyrazow, i ostatecznie się sprowadza do działań z pierwiastkami urojonemi jednowyrazowemi. (*Ob. przykł w przyp.* N. XXV).

53. *Wyciąganie pierwiastków* z pierwiastków urojonych, także nie stawi żadney trudności. I tak pierwiastek stopnia n z $\sqrt{-1}$, jest $\sqrt[n]{\sqrt{-1}}=\sqrt[2n]{-1}$.

Tu zrobić należy nam uwagę, iż ze wzorów (A), przez wyciąganie z obudwóch stron pierwiastku, otrzymamy te jeszcze wzory

$$(1)\qquad \sqrt[4n+2]{-1}=\sqrt{-1};\quad \sqrt[4n+3]{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$$

$$\text{czyli}\qquad \sqrt[4n+3]{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1},\ \text{i}\ \sqrt[4n+1]{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}\qquad (2)$$

z których te prawdy wyczytujemy: a naprzód z (2), *że wszelki pierwiastek nieparzystego stopnia z pierwiastku urojonego, jest pierwiastek urojony drugiego stopnia.* Powtóre z (1); *że wszelkiego stopnia pierwiastek urojony, jest to pierwiastek urojony stopnia drugiego.* I dla tego to, w całym rachunku z ilościami urojonemi, uważaliśmy tylko pierwiastki urojone drugiego stopnia.

54. Wyciąganie pierwiastków różnych stopni z wyrażeń

zawierających w sobie pierwiastki urojone, odbędzie się tymże samym sposobem co i wyciąganie pierwiastków z wielowyrazów wymiernych. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXVI).

55. Nauczyliśmy się wyciągać pierwiastki wszelkiego stopnia z wszelkich wyrażeń algébraicznych, bądź rzetelnych bądź urojonych, i w tey rzeczy nie zostawiliśmy żadney trudności. Ale widzieliśmy razem, iż wtenczas tylko pierwiastek w ograniczoney liczbie wyrazow otrzymany bydź może, gdy wyrażenie, z którego wyciągać mamy pierwiastek, jest dokładną potęgą; w przeciwnym razie, działanie wyciągania pierwiastku, a z niém i liczba terminów jego, pociągnie się bez końca. Jeżeli więc szereg wypadły z wyciągania pierwiastku będzie malejący: to jest, jeżeli terminy w nim po sobie następne co raz będą mnieysze, co do wartości swojey, od terminów poprzedzających; natenczas przestać będziemy mogli na pewney liczbie pierwszych terminów szeregu: i tym bardziey zbliżymy się do rzeczywistey wartości pierwiastku, im terminy bardziey są malejące, i im większą ich liczbę weźmiemy.

Skąd *naprzód* widzimy, iż tak układać musielibyśmy terminy wielowyrazu, z którego wyciągać mamy pierwiastek aby pierwiastek z niego wypadł w terminach malejących: *powtóre:* ten sposob wyciągania pierwiastku niewymiernego przez szereg, jako ciągnący za sobą długi i zawikłany rachunek, a mianowicie jeżeli stopień pierwiastku jest wysoki, nie może bydź dogodny w zastowaniach, zwłaszcza gdy wielkiey liczby terminów potrzeba. Należy więc nam wynaleźć łatwieyszy i dogodnieyszy sposób wyrażenia pierwiastku niewymiernego przez szereg.

56. Przypomniymy sobie, że pierwiastek z jakiegokolwiek wyrażenia niewymiernego, jestto toż samo wyrażenie pokryte znakiem pierwiastku stopnia, jakiego chcemy pierwiastek wyciągnąć. I tak naprzykład pierwiastek stopnia m z ilości $(x+a)^n$, jest toż samo co $\sqrt[m]{(x+a)^n}$; albo toż samo, co $(x+a)^{\frac{n}{m}}$ (n. 23). Podobnie pierwiastek stopnia m z ilo-

ści ax^2+bx+c, jest toż samo co $\sqrt[m]{ax^2+bx+c}$, czyli toż samo co $(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{m}}$. Skąd wpadamy na tę uwagę, gdyby prawo, wyprowadzone na rozwinienie wyrażenia z wykładnikiem całkim, służyło także i wyrażeniu z wykładnikiem ułomkowym, natenczas moglibyśmy wprost otrzymać szereg terminow wyrażających pierwiastek potęgi. Cała więc trudność dopiero przywodzi się do tego, aby się przekonać czyli wzór Newtona służy jeszcze i wtenczas kiedy wykładnik jest ułomkowym.

57. Ponieważ dowiedliśmy, iż prawidła odkryte na wykładniki całkie, służą także wykładnikom ułomkowym i odjemnym; idąc więc drogą analogii wnieśćby się godziło, że i wzór Newtona służyć także musi, gdy wykładnik będzie ułomkowy lub odjemny. Ta jednak analogija albo raczey domysł, potrzebuje o rzeczywistości swojey mocnieyszego przekonania czyli dowodu. Niemożemy wprawdzie z dotąd nabytych wiadomości odkryć, przez rozumowanie, na tę rzecz potrzebnego dowodu, któryby z właściwego sobie wypływał źródła, staraymy się jednak o niezawodności naszego domysłu przekonać się, jeżeli nie drogą rozumowania, to choć drogą doświadczenia czyli rachunku; zostawując wyższey części matematyki ściśleyszy dowód tey rzeczy.

Oto przypuśćmy naprzód, że domysł nasz jest prawdziwy, a potém przez stosowne przerabiania, staraymy się przywieśdź rzecz naszę do tego, co jest nam z przekonania wiadomém. Jeżeli więc nie pokaże się żadna sprzeczność, będzie dowodem, że nasz domysł jest prawdziwym; w przeciwnym zaś razie, będzie fałszywym.

I tak przypuśćmy, że wzór Newtona

$$(x+a)^n=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.\,2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}a^3x^{m-3}+ \text{ i t. d.}$$

służy jeszcze, gdy m jest ułomkiem: to jest gdy $m=\frac{p}{q}$, tak iż

$$(1)\ (a+x)^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{p}{q}}+\frac{p}{q}ax^{\frac{p}{q}-1}+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1.\,2}a^2x^{\frac{p}{q}-2}+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1.\,2.\,3}a^3x^{\frac{p}{q}-3}+ \text{ i t. d.}$$

Jeżeli więc to przypuszczenie jest prawdziwe, azatém jeżeli pierwsza strona nie rozwiniona, jest rzeczywiście równą drugiey stronie rozwinioney; czyli jeżeli ta równość jest dokładna, tedy ona pod jakiekolwiek działania poddana, zachować się powinna: tak iż gdybyśmy obie strony tey równości podnieśli do jakiey potęgi, tedy i wypadki tego działania równość okazać powinny. Podnieśmy więc przypuszczony wzór (1) do potęgi q: a dla krótkości nazwiymy drugą stronę przez P; mieć będziemy $(x+a)^p=(P)^q$. Przywiedliśmy więc tym sposobem obie strony do podnoszenia do potęg całkich; na co wiemy, że wzór Newtona służy. Gdybyśmy więc uskutecznili wskazane podnoszenie do potęg, znaleźlibyśmy

$$x^p+pax^{p-1}+\frac{p(p-1)}{1.2}a^2x^{p-2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^3x^{p-3}+\ldots\ldots=$$
$$x^p+pax^{p-1}+\frac{p(p-1)}{1.2}a^2x^{p-2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^3x^{p-3}+\ldots\ldots;$$

skąd na oko przekonywamy się, że to jest równość dokładna, a następnie, że taką jest i wzór przypuszczony (1).

58. Przekonaliśmy się, chociaż drogą samego rachunku, że wzór Newtona służy i wtenczas, gdy wykładnik jest ułomkowy dodatny. Należy nam teraz upewnić się, azali służy także, gdy wykładnik będzie odjemny. Ta uwaga warta naszego zastanowienia; często bowiem mniey dogodne zwyczayne dzielenie, zamienić moglibyśmy na łatwieysze podnoszenie do potęg.

Na ten koniec przypuśćmy, że wzór Newtona służy i wtenczas gdy wykładnik potęgi jest odjemny: to jest załóżmy, że

(2) $(x+a)^{-m}=x^{-m}-max^{-m-1}-\frac{m(-m-1)}{1.2}a^2x^{-m-2}\ldots\ldots\ldots$

Ponieważ $(x+a)^{-m}$, jest toż samo co $\frac{1}{(x+a)^m}$; przeto dla przekonania się azali jest dokładną równość (2) przypuszczona; należy dzielić 1 przez rozwinienie $(x+a)^m$, i uważać czy z tego dzielenia wypadnie wyrażenie takie, jakieśmy przypuścili. Jakoż uskuteczniwszy to dzielenie, znajdziemy że $\frac{1}{(x+a)^m}$ czyli

$$(x+a)^{-m}=x^{-m}-max^{-m-1}-\frac{m(-m-1)}{1.2}a^2x^{-m-2}+\ldots\ldots$$

skąd naocznie przekonywamy się, iż otrzymujemy tenże sam wypadek, jaki przypuściliśmy, a który niczém nie jest tylko wzorem Newtona, w którym za m położono $-m$. Stąd tedy wnosimy, że wzór Newtona służy i wtenczas, gdy wykładnik jest odjemny.

59. Przekonawszy się, że wzór Newtona

$$(A)\quad (x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}+\text{ i t. d.}$$

rozciąga się do jakichkolwiek wykładników, należy nam teraz uczynić nad nim niektóre uwagi.

Wiemy skąd inąd, że jeżeli m jest całkie, tedy liczba terminów we wzorze (A) jest ograniczona: to nawet sam wzór oczywiście potwierdza: bo koniecznie przyydziemy w nim do spółczynnika zero, po którym wszystkie następne staną się także zero. Lecz jeżeli m będzie ułomkiem, wówczas we wzorze (A) terminy póydą bez końca; gdyż odciągając od m ciągle po całkowitych jednościach, nigdy nie możemy zrobić zero mnożnik wchodzący do spółczynników. Toż samo jest gdy wykładnik m jest odjemny; bo w takim razie mnożniki spółczynników ciągle się powiększają. Te oba przypadki dobrze się godzą z samą naturą rzeczy; gdyż w pierwszym razie znaczy wyciąganie pierwiastku z ilości która nie jest zupełną potęgą: w drugim zaś, znaczy dzielenie 1 przez wielowyraz niewchodzący w skład 1 przez mnożenie.

60. Ponieważ wzór Newtona, w przypadku gdy wykładnik m jest ułomkowy lub odjemny, daje rozwinienie w terminach bez końca idących, przeto nie mogąc mieć całko-

witey liczby wyrazów rozwinienia, przestać musimy na pewney liczbie pierwszych terminów: co wtenczas tylko zrobić możemy, jeżeli terminy są malejące. Zapatrzywszy się na wzór (A) postrzegamy, iż to rozwinienie rzeczywiście jest wtenczas malejące, gdy a, będąc samo ilością drobną czyli ułamkiem, jest mnieysze od x; w przeciwnym razie, albo nie prędko zaczyna maleć albo zgoła nie jest malejące. Należy nam więc podać sposób przerobienia tego wzoru na inny, złożony z terminów malejących co do swey wartości. Przypuśćmy, iż we wzorze (A) x jest większe od a (to przypuszczenie zgoła nie ogranicza ogólności wzoru, bo gdyby było przeciwnie $a>x$, natenczas to zrobilibyśmy co do a, co zrobimy względem x). Pomnożmy i podzielmy drugą stronę przez x^m, mieć będziemy

$$(x+a)^m=x^m\left\{1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{a^3}{x^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\frac{a^4}{x^4}\right\} \qquad (B).$$

Podług tego założenia i przerobienia, terminy tego szeregu są malejące, i tym bardziey i nagley, im x znaczniey jest większe od a.

Wzór ten użyty bydź może do wyciągania pierwiastków z liczb, które nie są pełnemi potęgami. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXVIJ).

ROZDZIAŁ IV.

O ZRÓWNANIACH.

ZRÓWNANIA DRUGIEGO STOPNIA.

61. Widzieliśmy w rozdziale IIgim Algebry, że wszystkie zrównania pierwszego stopnia o jedney ilości nieznaney, wyrazić się mogą pod tą ogólną postacią $ax+b=o$; gdzie dwa tylko gatunki terminów wchodzą. Wszystkie zaś zrównania wiele ilości nieznanych zawierające, były wzoru

$ax+by+cz+\ldots+k=o$; gdzie każda nieznana mnożona jest przez same ilości znane; azatém tyle gatunków terminów wchodzić może, ile jest ilości nieznanych więcey jedną.

Ale ktokolwiek przywykł już do rozleglejszego nieco poznawania rzeczy, powinien był sobie pomyśleć, że pytania przywieśdź nas mogą do zrównań, gdzie ilość nieznana weydzie w drugiey, trzeciey, czwartey, i t. d. potędze, czyli z wykładnikiem 2, 3, 4, i t. d.; a w ogólności mówiąc, pytanie przywieśdź nas może do zrównania takiego, do którego ilość nieznana weydzie z wykładnikiem *m*. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXVIII).

Nakonieć trafić możemy na pytania wiodące nas do zrównań, w których ilość nieznana mnożona będzie przez inne nieznane: natenczas do rozwiązania mieć będziemy zrównania pod takiemi wzorami $axy+by+cx+d=o$, $axyz+bxy+cxz+dyz+ey+fx+gy+h=o$, ax^2+bxy+ $+cy+dy^2+ex+f=o$ i t. d. Ale powiedzieliśmy, że jeżeli pytanie ma bydź oznaczone, tedy bydź powinno tyle zrównań ile jest rzeczy nieznanych: mając zaś tyle zrównań ile jest ilości nieznanych, zawsze przyyść możemy do zrównania o jedney tylko nieznaney. Dla tego o tym ostatnim gatunku zrównań i sposobie przerabiania ich na inne, do którychby tylko jedna nieznana wchodziła, odkładamy do wyższey części Algebry: tu zaś zamierzamy tylko mówić o zrównaniach takich, do których jedna nieznana wchodzi.

62. Jako zrównanie o jedney nieznaney, zawierające ją tylko w potędze pierwszey czyli z wykładnikiem jedność, nazwaliśmy *zrównaniem pierwszego stopnia;* tak podobnie zrównanie, zawierające w sobie ilość nieznaną w drugiey potędze czyli z naywyższym wykładnikiem 2, nazywać będziemy *zrównaniem drugiego stopnia;* z wykładnikiem 3, trzeciego stopnia: a w ogólności zrównanie mające ilość nieznaną z naywyższym wykładnikiem *m*, nazwiemy zrównaniem stopnia *m*. Wykładnik więc naywyższy ilości nieznaney w zrównaniu, będzie razem skazówką jego stopnia.

63. Zamierzamy sobie mówić tu naprzód o zrównaniach drugiego stopnia.

Nayogólnieysze zrównanie zawierające w sobie ilość nieznaną w drugiey potędze, to jest nayogólnieysze zrównanie drugiego stopnia, zamykać powinno w sobie trzy wyrazów gatunki: 1º wyrazy z drugą potęgą nieznaney, 2º wyrazy z tąż ilością nieznaną pierwszego stopnia, 3º wyrazy znane. Przeniosłszy więc wszystkie terminy na jednę stronę znaku równości, i zebrawszy wszystkie terminy mnożone przez x^2 (x uważamy za rzecz nieznaną) w jeden wyraz; wszystkie znowu mnożone przez x w drugi, a zaś wyrazy znane zebrawszy w trzeci termin, zrównanie nayogólnieysze drugiego stopnia mieć będziemy tey postaci,

$$Ax^2+Bx+C=0.$$

Rozdzieliwszy całe zrównanie przez A, i położywszy dla krótkości $\frac{B}{A}=P$, a zaś $\frac{C}{A}=Q$, mieć będziemy

$$x^2+Px+Q=0. \qquad (\alpha)$$

P i Q uważają się jako liczby lub ilości algebraiczne znane, a to jako całkie lub łomane, dodatne lub odjemne. Jestto nayogólnieysza postać zrównania drugiego stopnia, do którey wszystkie tegoż stopnia zrównania szczególne przywieśdź się mogą i w niey są zawarte. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXIX).

64. Rozwiązać zrównanie, jestto wynaleźć taką wartość lub wyrażenie algebraiczne, któreby podstawione w zrównanie za ilość nieznaną, przywiodło je do zero, czyli zrobiło identyczném. Taką wartość na ilość nieznaną nazywamy *pierwiastkiem zrównania.*

65. Zapatrując się na zrównanie (α), przypominamy sobie (Roz. I n. 57, i przyp. do Roz. III. N. VII), że każda mnogość z dwóch mnożników powstająca, mających jeden termin spólny x, jest postaci x^2+Px+Q, skąd wzajemnie wnieśliśmy, że każde wyrażenie postaci x^2+Px+Q, jest mnogością

dwóch mnożników mających jeden termin x spólny. Zrównanie więc nasze, o jakiem mówimy, jest składem dwóch mnożników postaci $x-a$, $x-b$: to jest że

$$x^2+Px+Q=(x-a)(x-b)=o;$$

gdzie a i b są nam jeszcze co do wielkości swojey nieznane.

66. Ponieważ zrównanie drugiego stopnia przywiedzione do zero jest składem dwóch mnożników, przeto równe bydź może zero, albo z przyczyny jednego mnożnika, albo z przyczyny drugiego: to jest staje się zero, albo gdy $x-a=o$, czyli $x=a$; albo gdy $x-b=o$, co daje $x=b$. Skąd widzimy, *że dwie są wartości na ilość nieznaną, które sprawdzają zrównanie drugiego stopnia, czyli dwa są pierwiastki zrównanie.* Aże te wartości czyli pierwiastki zrównania wyciągają się z mnożników dwówyrazowych, składających zrównanie, przywodząc je koleją do zera, przeto *pierwiastki te niczém nie są tylko drugiemi terminami tych mnożników, wzięte ze znakiem przeciwnym:* i wzajemnie: *drugie terminy mnożników składających zrównanie przywiedzione do postaci* $x^2+Px+Q=o$, *są to pierwiastki zrównania wzięte ze znakiem przeciwnym.*

Skąd widzimy, *że rozwiązać zrównanie jest jedno co wynaleźć jego mnożniki proste, i wzajemnie rozebrać na swoje mnożniki proste zrównanie, jest jedno co wynaleźć jego pierwiastki.*

67. Ponieważ zrównanie

$$x^2+Px+Q=o,$$

jest składem dwóch pierwszego stopnia mnożników, więc P jest summą drugich terminów mnożników czyli jest *summą pierwiastków zrównania ze znakiem przeciwnym wziętych.* A zaś Q jest mnogością tychże drugich terminów mnożników, czyli co toż samo jest; *Q jest mnogością pierwiastków zrównania.*

68. Nie rozwiązując jeszcze zrównania drugiego stopnia, a w samych początkach rzuciliśmy tyle światła na nasze

badanie, i wyśledziliśmy główną naturę tego rodzaju zrównań. Należy nam teraz przystąpić już do ich rozwiązania, i te wszystkie prawdy rachunkiem potém stwierdzić.

Zrównania drugiego stopnia mogą bydź, albo dwówyrazowe, czyli takie

$$x^2-r=o, \qquad (\alpha)$$
$$x^2+r=o; \qquad (\beta)$$

albo trzy wyrazowe, to jest takie

$$x^2+px+q=o, \qquad (a)$$
$$x^2+px-q=o, \qquad (b)$$
$$x^2-px+q=o, \qquad (c)$$
$$x^2-px-q=o; \qquad (d)$$

Więcey odmian w żaden sposób zachodzić nie może. Ilości r, p, q, uważamy albo jako liczby albo jako znane pewne wyrażenia algebraiczne, całkie lub łamane, lecz zawsze dodatne.

69. Zastanowiwszy się nad pierwszém z kolei zrównaniem $x^2-r=o$, postrzegamy, że pierwszy jego członek uważany bydź może jako różnica kwadratów; bo $r=(\sqrt{r})^2$; azatém zrównanie to w prost się rozbiera na dwa znane swoje mnożniki proste; to jest

$$x^2-r=(x-\sqrt{r})(x+\sqrt{r})=o.$$

A ponieważ to zrównanie, jako składające się z wyraźnych dwóch mnożników, z dwóch przyczyn może bydź zero; albo z przyczyny $x-\sqrt{r}=o$, albo z przyczyny $x+\sqrt{r}=o$; przeto dwie wypadają na x wartości, $x=+\sqrt{r}$, $x=-\sqrt{r}$, czyli $x=\pm\sqrt{r}$. Co wszystko dobrze się zgadza, i potwierdza początki o naturze tego rodzaju zrównań dostrzeżone.

Prędzey jeszcze do tegoż samego celu przyszlibyśmy, przenosząc r na drugą stronę zrównania, to jest pisząc $x^2=r$, i z obudwóch stron jego, wyciągając pierwiastek kwadratowy; co dałoby

$$x=\pm\sqrt{r} \qquad (\alpha').$$

Położyliśmy tu znak podwóyny dla tego, że kwadrat czy z dodatney czy odjemney ilości, zawsze jest dodatny, przeto wyciągając pierwiastek znak dwoisty kłaśdź powińniśmy.

Uwaga. Mógłby się nas kto zapytać; dla czego przed x nie kładziemy dwoistego znaku, kiedy x jest także pierwiastkiem z x^2. Odpowiedzielibyśmy na to, że litera x jest bez żadnego znaku czyli ze znakiem $+$ położona, jako cecha ilości nieznaney, dla którey należy oznaczyć wartość tak co do wielkości jako też i znaku. Wreszcie, gdybyśmy i położyli przed x dwoisty znak; to jest gdybyśmy napisali $\pm x = \pm\sqrt{r}$; tedy rozmaicie te znaki kombinując otrzymalibyśmy

$$(1)\ \begin{cases} +x=+\sqrt{r}, \\ +x=-\sqrt{r}, \end{cases} \qquad \begin{rcases} -x=-\sqrt{r}. \\ -x=+\sqrt{r}, \end{rcases}\ (2),$$

cztery na pozor pierwiastki czyli wartości; z tych atoli dwie tylko rzeczywiście są różne; gdyż odmieniając po obudwóch stronach znaki w (2), trafiamy na (1), i wzajemnie.

70. Gdy r jest liczbą szczególną, całką lub ułomkową, otrzymać z niey możemy pierwiastek kwadratowy bądź dokładny bądź przybliżony. W pierwszym razie obie wartości na x są *wymierne* w drugim *niewymierne*. Jeżeli r jest ilością algebraiczną, zastosować do niey należy początki ustanowione na wyciąganie pierwiastków z ilości algebraicznych: i tu podobnie trafić możemy na wartości x albo wymierne albo niewymierne.

Jakośmy rozwiązali zrównanie $x^2-r=o$, tak podobnym całkiem sposobem rozwiązuje się i zrównanie $x^2+r=o$ (*), czyli $x^2=-r$. Ale wyciągając z obustron pierwiastek kwadratowy, znalezlibyśmy ilość odjemną pod znakiem

---

(*) Zrównanie $x^2+r=o$, tak się wyrazić może $x^2-(\sqrt{-r})^2=o$, czyli $(x+\sqrt{-r})(x-\sqrt{-r})=o$; skąd widzimy, że składa się z wyraźnych dwóch mnożników urojonych, które koleją przywiedzione do zero, dają dwie wartości na x urojone.

pierwiastku drugiego stopnia; a zatém trafilibyśmy na wartość urojoną: to jest

$$x = \pm\sqrt{-r} \qquad (\beta').$$

Jakoż zastanowiwszy się nad zrównaniem $x^2 = -r$, oczywiście widzimy, iż żadna liczba za x wzięta, nie uczyni temu zrównaniu zadosyć, czyli żadney nie masz rzetelney wartości: i dla tegoto wyrażenie urojone ostrzega nas, iż to, czego szukamy, jest rzeczą niepodobną do wynalezienia.

71. Z tego wszystkiego, cośmy powiedzieli, na rozwiązanie zrównań drugiego stopnia dwówyrazowych, to wyciągamy prawidło. *Przenoszą się wszystkie wyrazy znane na jednę stronę zrównania, wyciąga się z obudwóch stron pierwiastek kwadratowy, i przed wartością otrzymaną kładzie się znak* $\pm$. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXX).

Uwaga. Rozwiązawszy zrównanie $x^2 \pm r = o$, możemy sprawdzić naocznie ogólne własności w n. 65—67 wytknięte.

72. Póydźmy teraz z kolei do rozwiązywania zrównań drugiego stopnia trzywyrazowych; a naprzód zaczniymy od zrównania

$$x^2 + px + q = o, \qquad (a).$$

Gdyby pierwszy członek tego zrównania był zupełną potęgą drugą, natenczas wyciągając z niego pierwiastek kwadratowy, przyszlibyśmy do zrównania pierwszego stopnia, a ztąd do wartości na ilość nieznaną. Lecz żeby tróywyraz $x^2 + px + q$ był zupełną potęgą drugą, potrzeba, podług składu potęgi drugiey, iżby trzeci termin był kwadratém z połowy spółczynnika drugiego terminu: a zatém potrzeba tego warunku $q = \frac{p^2}{4}$. Nie możemy wprost przypuszczać tego warunku; bobyśmy przez to uszczególnili nasze zrównanie: starać się nam więc o to potrzeba, aby zrównanie, zgoła nie tracąc nic ze swey ogólności, miało pierwszy członek pełną potęgę drugą: to jest, aby jeden jego członek zawierający x, miał wszystkie części potrzebne do zupełney potęgi drugiey. O tey możności przekonywa nas samo lekkie zastanowienie się nad naturą zrównań, w których bez naruszenia ich związku wszystko działać możemy, byleby te działania z obudwóch stron zrównania zachodziły. Przenieśmy więc w naszém zrównaniu termin znany na drugą stronę, a mieć będziemy

$$x^2+px=-q,$$

Dopełnijmy teraz co brakuje pierwszemu członkowi do zupełney potęgi drugiey: to jest dodaymy do obudwóch stron $\frac{p^2}{4}$, czyli kwadrat z połowy spółczynnika drugiego terminu: wypadnie

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

zrównanie, którego pierwszy członek jest zupełną potęgą drugą z $x+\frac{p}{2}$: to jest

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q. \qquad (\gamma)$$

Wyciągając teraz pierwiastek kwadratowy z obudwóch stron, otrzymamy

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

dwa zrównania pierwszego stopnia, skąd wyciągniemy

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad (a').$$

Z tego, następujące na rozwiązanie zrównania drugiego stopnia, wyciągamy prawidło. *Przywiodłszy zrównanie do postaci* $x^2+Px+Q=0$; *przenieść potrzeba wszystkie terminy znane na jednę stronę: dorzucić do obudwóch stron kwadrat ze spółczynnika drugiego terminu: wyciągnąć* *pierwiastek kwadratowy z obudwóch stron, i naznaczyć pierwiastek z drugiey strony dwoistym znakiem $\pm$: nakoniec z tych dwóch nowych zrównań pierwszego stopnia wyciągnąć wartość na ilość nieznaną* (*).

(*) W tym sposobie postępowania, lubo nie widzimy naocznie, iż zrównanie drugiego stopnia składa się z dwóch mnożników pierwszego stopnia, atoli ta prawda nie mniey jest rzetelną jak i oczywistą: bo wziąwszy zrównanie (γ), to jest $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$, wypadłe ze zrównania $x^2+px+q=o$, przez zrobienie pierwszą stronę zupełną potęgą drugą, widzimy oczywiście, iż to zrównanie tak się wyrazić może

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=o.$$

A że różnica kwadratów rozebrać się może na mnogość, przeto podane zrównanie jest toż samo co

$$\left\{x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right\}\left\{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right\}=o.$$

Skąd *naprzód* widzimy oczywiście, że zrównanie drugiego stopnia składa się z dwóch mnożników pierwszego stopnia. *Powtóre*, ponieważ mnogość, powstająca z dwóch mnożników, zrównana z zero, staje się zero, kiedy którykolwiek z jey mnożników zrobimy zero; przez takowe przeto założenia dwojakim sposobem tylko uczynić możemy zadosyć zrównaniu, to jest zakładając, że $x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=o$, albo że $x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=o$. Skąd wyciągniemy dwie wartości na x to jest: $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; czyli $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; wartości na x zupełnie też same, jakieśmy inną drogą, przez wyciąganie pierwiastku z obudwóch stron zrównania dopełnionego, otrzymali. Skąd naocznie widzimy, że *zrównanie drugiego stopnia ma dwie wartości na ilość nieznaną, i więcey nad dwie mieć nie może.*

Ten sposób rozwiązywania zrównań, lubo jest dłuższy od pierwszego, tę ma za sobą korzyść, że oczywiście pokazuje bytność dwóch wartości, i że więcey nad dwie ich nie ma zrównanie.

Tym sposobem postępując znaydziemy, że

$$(b)\quad x^2+px-q=o, \text{ daje } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},\quad (b')$$

$$(c)\quad x^2-px+q=o, \text{ daje } x=+\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad (c')$$

$$(d)\quad x^2-px-q=o, \text{ daje } x=+\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},\quad (d').$$

(*Ob. przykł. w przyp.* N. XXXI).

73. Zapatrzywszy się na wartości (a'), (b'), (c'), (d'), wypadające ze zrównań drugiego stopnia (a), (b), (c), (d), wyczytujemy z nich to prawidło, na napisanie wprost wypadku, bez poprzedniczego przerabiania.

Dwoista wartość na x wypadająca ze zrównania drugiego stopnia przywiedzionego do postaci $x^2+Px+Q=o$, *równą jest połowie spółczyńnika przy* x, *wziętego ze znakiem przeciwnym,* $\pm$ *pierwiastek kwadratowy z wyrazu znanego, wziętego ze znakiem przeciwnym, powiększonego kwadratem z połowy spółczyńnika przy* x. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXXII).

74. Rozwiązawszy zrównanie drugiego stopnia, sprawdzić teraz możemy naocznie wszystkie własności, któreśmy w n. 65—67, nie rozwiązując zrównania dostrzegli: to jest 1º *że zrównanie drugiego stopnia przywiedzione do postaci* $x^2+Px+Q=o$, *jest mnogością dwóch mnożników, mających jeden termin spólny* x, *a za drugie terminy, pierwiastki zrównania wzięte ze znakami przeciwnemi;* stąd 2º: *że summa pierwiastków zrównania, wzięta ze znakiem przeciwnym, jest równa spółczyńnikowi drugiego terminu zrównania:* 3º *że mnogość tychże pierwiastków, jest równa trzeciemu terminowi zrównania.*

75. Dotychczas uczyliśmy się rozwiązywać zrównania drugiego stopnia, i dociekać ich własności głównych; należy nam teraz z wypadków otrzymanych wyczytać wszystkie przypadki szczególne, jakie tylko z przyczyny rozmaitych wielkości spółczyńników p i q, pochodzić mogą. Na ten ko-

niec należałoby każdą z wartości (a'), (b'), (c'), (d'), wyniknych ze zrównań (a), (b), (c), (d), roztrząsnąć w szczególności; atoli, abyśmy tę rzecz w ciaśnieyszych granicach zawarli i lepiey do siebie wypadki zbliżyli, weźmy ogólne zrównanie

$$x^2+Px+Q=0, \qquad (A)$$

które rozwiązane, daje

$$x=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{-Q+\frac{P^2}{4}}, \qquad (A').$$

Tu P i Q nietylko uważamy, że są jakiemikolwiek wielkościami, ale też, że są rozmaitego znaku; a zatém zrównanie to, zawiera w sobie, jako szczególne przypadki, wszystkie zrównania (a), (b), (c), (d) oraz (α) i (β); a następnie pierwiastek jego, to jest (A'), zawiera w sobie wszystkie pierwiastki (a'), (b'), (c'), (d') oraz (α') (β'), jako swoje szczególne przypadki. Roztrząsnąć więc (A'), wynikające ze zrównania (A), jestto roztrząsnąć wszystkie pierwiastki zrównań drugiego stopnia.

76. *Naprzód*, zapatrzywszy się na ogólne wyrażenie (A') postrzegamy, że jeżeli $\frac{P^2}{4}-Q$ jest zupełną potęgą drugą, tedy obie wartości na x będą wymierne; a jeżeli $\frac{P^2}{4}-Q$ nie jest zupełnym kwadratem, tedy pierwiastki zrównania są niewymierne. Pytanie więc, do takiego zrównania wiodące, nie może bydź rozwiązane tylko przez przybliżenie. Ponieważ wymierność lub niewymierność pierwiastków zrównania, zawisłą jest od wyrażenia pokrytego znakiem pierwiastku; przeto *w zrównaniu drugiego stopnia, albo oba pierwiastki zrównania są wymierne albo oba niewymierne.*

Powtóre: pierwiastki tak wymierne jako i niewymierne w zrównaniu drugiego stopnia, *mogą bydź albo oba dodatne, albo jeden dodatny a drugi odjemny, albo oba odjemne.* Co oczywiście zależy od kombinacyi wielkości P i Q i ich znaków. Jeżeli wypadną oba dodatne, tedy są wprost dwiema odpowiedziami na pytanie, które do takiego zrównania przywiodło. Jeżeli zaś jest jeden dodatny a drugi odjemny, tedy pierwszy wprost odpowiada na pytanie, drugi zaś daje odpowiedź wbrew przeciwną pierwszey czyli odpowiedzi szukaney. Gdy zaś oba wypadną odjemne, tędy pytanie do takowego wiodące zrównania, nie ma żadney wprost żądaney odpowiedzi, tylko pod temiż samemi warunkami, które do zrównania przywiodły, są dwie odpowiedzi wbrew przeciwne żądanym. Co wszystko wypływa z natury znaków dodatnych i odjemnych w Roz. I wyłożonych.

Potrzecie: jeżeli trzeci termin Q w zrównaniu (A) jest odjemny, tedy w pierwiastku jego, to jest w (A'), będzie on ze znakiem dodatnym: tak, iż wyrażenie pod znakiem pierwiastku całkiem będzie dodatne; gdyż $\frac{P^2}{4}$, jako kwadrat z $\pm\frac{P}{2}$, zawsze jest dodatny; a zatém pierwiastek ten, a następnie oba pierwiastki zrównania, są rzetelne. *Ile razy więc w zrównaniu drugiego stopnia przywiedzionėm do zero, trzeci termin jest odjemny, tyle razy pierwiastki jego są oba rzetelne.*

Poczwarte. Lecz jeżeli trzeci termin zrównania (A) jest dodatny, tedy odjemnym on będzie w pierwiastku (A'): tak, iż zrównanie

$$x^2+Px+q=0, \text{ daje } x=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\frac{P^2}{4}-q}.$$

Tu w ilości pod znakiem pierwiastku będącey, trzy przypadki zachodzić mogą: 1° może bydź $\frac{P^2}{4}>q$: 2° $\frac{P^2}{4}=q$: 3° $\frac{P^2}{4}<q$. Roztrząśniymy koleją te trzy przypadki.

Co się tycze pierwszego przypadku, ten żadney trudności nie stawi: gdyż w tym razie ilość pod znakiem pierwiastku zostająca będzie dodatną; azatém pierwiastek jey, a następnie oba pierwiastki zrównania są rzetelne: a podług tego jak ta ilość jest zupełną lub niezupełną potęgą drugą, pierwiastki zrównania czyli wartości na x, będą wymierne lub niewymierne.

W drugim przypadku, to jest kiedy $\frac{P^2}{4}=q$, ilość pod pierwiastkiem staje się zero; tak, iż daje

$$x=-\frac{P}{2}\pm 0:$$

to jest, że oba pierwiastki zrównania są równe sobie. Jakoż w rzeczy samey, kiedy $\frac{P^2}{4}=q$, natenczas zrównanie

$$x^2+Px+Q=0, \text{ zamieni się na}$$

$$x^2+Px+\frac{P^2}{4}=\left(x+\frac{P}{2}\right)^2=0.$$

Skąd widzimy, że *zrównania drugiego stopnia, mogą mieć oba pierwiastki rzetelne równe.*

W trzecim przypadku, to jest kiedy $\frac{P^2}{4}<q$, wartość ilości pod znakiem pierwiastku jest odjemna: to jest

$$x=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{-1\left(q-\frac{P^2}{4}\right)},$$

czyli

$$x=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{q-\frac{P^2}{4}}\cdot\sqrt{-1}$$

a następnie oba pierwiastki zrównania są urojone: to jest iż pytanie do takowego zrównania wiodące nie ma żadney odpowiedzi rzetelney, któraby zrównaniu, a następnie i samemu pytaniu, zadosyć uczyniła. Jakoż, ponieważ wtenczas pierwiastki zrównania są urojone, kiedy $\frac{P^2}{4}-q$ jest ilością odjemną, przeto wprowadźmy ten warunek w samo zrównanie i obaczmy na co się ono zamieni. Na ten koniec położmy

$$\frac{P^2}{4}-q=-c^2,$$

a otrzymamy

$$x=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{-c^2}=-\frac{P}{2}\pm c\sqrt{-1},$$

skąd wyciągniemy

$$q=\frac{P^2}{4}+c^2.$$

Podstawmy teraz tę wartość za q w zrównanie

$$x^2+Px+q=0,$$

a otrzymamy

$$x^2+Px+\frac{P^2}{4}+c^2=0,$$

czyli

$$\left(x+\frac{P}{2}\right)^2+c^2=0.$$

Gdzie widzimy oczywiście, że niepodobieństwem jest, aby summa dwóch kwadratów, to jest summa dwóch ilości dodatnych, była zero Chociaż żadna liczba, a w ogólności żadne wyrażenie algebraiczne rzetelne, nie może uczynić zadosyć temu zrównaniu, są atoli pewne wyrażenia algebraiczne urojone, z któremi gdy odbędziemy działania wskazane przez znaki i skład terminów zrównania, zawsze się jemu uczyni zadosyć, czyli przywiedzie zrównanie do $o=o$.

Z tego ostatniego roztrząsania widzimy, 1º *że lubo zrównanie drugiego stopnia jest postaci rzetelney, atoli pierwiastki swe może mieć urojone.*

2º *Że tylko zrównanie drugiego stopnia, gdy ma trzeci termin dodatny większy od kwadratu z połowy spółczynnika drugiego terminu, zawiera oba pierwiastki urojone.*

3º *Pierwiastki urojone zrównania drugiego stopnia, różnią się od siebie znakami + i — przed wyrazem urojonym kładzionemi:* tak, iż gdy jeden jest $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, tedy drugim bydź musi $\alpha-\beta\sqrt{-1}$: i *dla tegoto pierwiastki te, nazywają się pierwiastkami urojonemi sprzężonemi.*

Zostaje nam jeszcze jeden przypadek do roztrząśnienia, to jest, kiedy w (A') będzie P albo Q zero. Jeżeli P jest zero, tedy (A') daje, $x = \pm\sqrt{-Q}$: a podług tego jak Q jest odjemne lub dodatne, wartości na x, albo obie są rzetelne albo obie urojone: i w tym razie zrównanie (A) zamienia się na $x^2 + Q = o$: o którym na początku (n. 68) mówiliśmy. Jeżeli zaś będzie $Q = o$, wtenczas (A') daje

$$x = -\frac{P}{2} \pm \frac{P}{2},$$

czyli

$$x = o, \quad \text{i} \quad x = -P.$$

W takim razie jeden pierwiastek jest zero. Jakoż założywszy, w samém zrównaniu (A), $Q = o$, mieć będziemy

$$x^2 + Px = o,$$

czyli

$$x(x + P) = o.$$

Skąd widzimy, iż temu zrównaniu zadosyć się czyni, kładąc $x = o$, albo $x + P = o$, co daje $x = -P$.

77. W poprzedzającem roztrząsaniu nie został zajęty jeden jeszcze szczególny przypadek, a który się często w rozwiązaniu pytań drugiego stopnia przytrafia. Oto w poprzedzającym numerze roztrząsnęlismy wszystkie przypadki szczególne zrównania $x^2 + Px + Q = o$, pochodzące z różnych znaków i wielkości spółczynników P i Q; ale nic nie powiedzieliśmy o przypadku, bardzo szczególnym zrównania

$$Ax^2 + Bx + C = o, \qquad (1)$$

gdy w niém spółczynnik A, jest zero.

Na ten koniec rozwiążmy zrównanie (1), które da

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad (2).$$

Założmy teraz, że podług przypuszczenia szczególnego w dątkach pytania, mamy $A = o$. Przez to założenie, wyrażenie (2) na x, zamieni się na

$$x=\frac{-B\pm B}{0}, \text{ skąd } \begin{cases} x=\frac{0}{0}, \\ x=-\frac{B}{0}. \end{cases}$$

Należy nam wytłumaczyć znaczenie tych dwóch wyrażeń. *Co do pierwszego.* Powiedzieliśmy, mówiąc o zrównaniach pierwszego stopnia w Rozdziale II, że wyrażenie, jawiące się pod postacią $\frac{0}{0}$ w zrównaniach pierwszego stopnia, oznacza, iż zrównanie a następnie i pytanie jest nieoznaczone; ale razem zrobiliśmy uwagę, iż częstokroć takie wyrażenie bywa skutkiem spólnego mnożnika w liczniku i mianowniku, który na pewną wartość stawszy się zero, jawi wyrażenie pod postacią $\frac{0}{0}$. Należy więc nam i tu przekonać się, czyli wartość $x=\frac{0}{0}$ jest skutkiem zrównania, a następnie i pytania, nieoznaczonego, lub też skutkiem spólnego mnożnika.

Na ten koniec wprowadźmy tę wartość $A=0$, w samo zrównanie $Ax^2+Bx+C=0$, które w tym przypadku zamieni się na $0x^2+Bx+C=0$, czyli $Bx+C=0$, skąd $x=-\frac{C}{B}$: co pokazuje, *że zrównanie, a następnie i samo pytanie, ma jednę tylko odpowiedź* $-\frac{C}{B}$ *w liczbach skończonych.* Skąd daley wnosimy, że jawienie się jedney z wartości (2) w postaci $\frac{0}{0}$, jest skutkiem mnożnika A spólnego licznikowi i mianownikowi. Jakoż przed uczynieniem $A=0$, weźmy tę wartość, to jest weźmy

$$x=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{4A}$$

i pomnożmy oba wyrazy tego ułomku przez $\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{4A}$; który przez to zamieni się na

$$x=\frac{(-B+\sqrt{B^2-4AC})(-B-\sqrt{B^2-4AC})}{2A(-B-\sqrt{B^2-4AC})},$$

czyli

$$x=\frac{B^2-(B^2-4AC)}{2A(-B-\sqrt{B^2-4BC})},$$

czyli

$$x=\frac{+4AC}{2A(-B-\sqrt{B^2-4AC})}.$$

Tu oczywiście widzimy, iż $2A$ jest mnożnikiem spólnym obu wyrazóm ułomku: usunąwszy więc go, mieć będziemy

$$x=\frac{2C}{-B-\sqrt{B^2-4AC}},$$

który, na założenie $A=o$, przywodzi się do $\frac{2C}{-2B}$ czyli do $x=-\frac{C}{B}$; wypadek ten sam, jaki z samego zrównania otrzymaliśmy.

Co do drugiego. Powiedzieliśmy, mówiąc o zrównaniach pierwszego stopnia (Roz. II), że wszelkie wyrażenie mające mianownik zero, jest *ilością nieskończenie wielką, i tam oznaczało niemożność zadosyć uczynienia pytaniu.* Nasza więc druga wartość $-\frac{B}{o}$ jest nieskończoną: i wtenczas tylko uważana bydź może za odpowiedź na pytanie, jeżeli wysłowienie jego jest tey natury, że zdolne jest mieć odpowiedź *nieskończoną.*

Gdy oprócz przypuszczenia $A=o$, będzie jeszcze $B=o$; wówczas wartość $-\frac{C}{B}$ sama przez się sprowadza się do $-\frac{C}{o}$ czyli do ∞: to jest, iż w tym przypadku *obie wartości na* x *są nieskończenie wielkie.*

Nakoniec, jeżeli razem będzie $A=o$, $B=o$, $C=o$, zrównanie staje się nieoznaczone; gdyż wówczas będzie postaci $ox^2+ox+o=o$, któremu każda wielkość za x wzięta zadosyć uczyni.

Roztrząsnąwszy już wszystko, co się tylko ściąga do zrównań drugiego stopnia, należy nam teraz tę ogólną teoryą i z niey nabyte wiadomości, zastosować do szczególnych pytań, i tu wywiedzione prawdy przykładami objaśnić i mocniey przez to je utwierdzić. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXXIII).

78. Z całey rozwagi zrównań drugiego stopnia przywiedzionych do postaci $x^2+Px+Q=o$, naymocniey przekonani jesteśmy, iż pierwszy jego członek, to jest x^2+Px+Q, jest mnogością dwóch mnożników mających jeden termin spólny x, a za drugie terminy, mających pierwiastki zrównania wzięte ze znakiem przeciwnym. *Chcąc więc jakie wyrażenie postaci* x^2+Px+Q, *rozebrać na swoje mnożniki proste co do* x; *należy przywieśdź je naprzód do zera, rozwiązać to zrównanie co do* x, *i pierwiastki otrzymane przyłączyć do* x *ze znakami przeciwnemi; a dwa wyrażenia tym sposobem otrzymane, będą mnożnikami prostemi, wyrażenia podanego* x^2+Px+Q. Wyrażenie x^2+Px+Q, ponieważ składa się z dwóch mnożnikow prostych, nazywa się przeto *mnogością drugiego stopnia.*

Tu zrobić należy nam uwagę, że na ile tylko natrafiliśmy gatunków pierwiastków zrównania drugiego stopnia; tyleż gatunków bydź może mnożników prostych w mnogości drugiego stopnia. Tak, iż *mnogość drugiego stopnia postaci wymierney i rzetelney, może bydź składem dwóch mnożników prostych, albo wymiernych albo niewymiernych, równych lub nierównych, rzetelnych lub urojonych.*

A ponieważ pierwiastki zrównania drugiego stopnia urojone są postaci $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, i nazywają się sprzężone, przeto i mnożniki proste urojone mnogości drugiego stopnia, będą postaci $x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1}$, i nazywają się *mnożnikami urojonemi sprzężonemi.* (*Ob. do tego numeru przykłady w przyp.* N. XXXIV).

ZRÓWNANIA WYŻSZYCH STOPNI.

79. W poprzedzających rozdziałach, rozwiązując zrównania pierwszego i drugiego stopnia, nie mieliśmy żadney trudności pojąć ich naturę i odkryć wszystkie ich własności: te atoli ostatnie potrzebowały już znaczney pomocy rachunku, dla tego, że kombinacye w nich bardziey są już zawikłane. Im do wyższych postępujemy stopni zrównań (*), tym bardziey zapuszczamy się w delikatnieysze i cięższe stosunki, pod których liczbą upadłaby myśl nasza, gdyby nie była wsparta pomocą rachunku. A że dochodzimy rzeczy nieznanych przez znane, każda zatém walna prawda dostrzeżona, jest dla nas jakby nowém światłem prowadzącém do innych rozlegleyszych.

Zrównanie drugiego stopnia, tak ze swey postaci, do którey przywiedliśmy, jako też z samego rachunku, pokazały nam oczywiście, że mnożniki pierwszego stopnia są jego częściami składowemi; to jest, że zrównanie drugiego stopnia powstaje z rozmnożenia dwóch mnożników prostych, bądź rzetelnych, bądź urojonych, bądź równych, bądź nierównych, z których każdy w szczególności przywiedziony do zero zadosyć czyni zrównaniu; a stąd daje tyle wartości na ilość nieznaną, ile jest mnożników, czyli ile jest jedności w wykładniku stopnia zrównania. Ta prawda w zrównaniach drugiego stopnia dostrzeżona, powinna naprowadzić nas na pytanie, czyli zrównania wyższych stopni niepowstają także z rozmnożenia tylu mnożników prostych, ile jest jedności w wykładniku stopnia zrównania; a zatém czyli zrównania wyższych stopni dają tyle wartości na ilość nieznaną, ile jest jedności w wykładniku stopnia. Powinniśmy dobrze nad tém pytaniem

---

(*) Wszystkie zrównania mające naywyższy wykładnik ilości nieznaney większy od 2, czyli wszelkie zrównania większego stopnia od zrównania stopnia drugiego, nazywają się w ogólności *zrównaniami wyższych stopni*, a pytania do nich wiodące zowiemy *pytaniami wyższych stopni*.

zastanowić naszę uwagę; bo od niego wszelkie nasze dociekania, tyczące się zrównań, zawisły.

80. Zastanowiwszy się nad postaciami zrównań, do których warunki pytania przywieśdź nas mogą, łatwo postrzegamy, że zrównanie nayogólnieysze jakiegokolwiek stopnia m, przez przeniesienie wszystkich wyrazow na jednę stronę znaku równości, czyli przez przywiedzenie zrównania do zero, wyrazić się może pod tą postacią

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots Mx + N = o;$$

gdyż zrównanie stopnia m, może zawierać $m+1$ gatunkow terminów; to jest może zawierać wszystkie potęgi ilości nieznaney, od m aż do o, łącznie. W tém zrównaniu litery A, B, C, $D \ldots N$, uważają się jako ilości znane, i zowią się spółczynnikami rozmaitych potęg ilości nieznaney: mogą one wyrażać jakiekolwiek bądź liczby albo wyrażenia algebraiczne, dodatne lub odjemne, całkie lub ułomkowe; lub nakoniec mogą z nich bydź niektóre zero: tak iż w tey ogólney postaci zrównania jakiegokolwiek stopnia m, wszystkie szczególne przypadki tegoż stopnia zrównań są zawarte.

81. Ta ogólna postać zrównania stopnia m, może bydź jeszcze, bez stracenia swey ogólności, przywiedzioną do prostszey postaci; a to rozdzielając przez A, spółczynnik przy naywyższey potędze ilości nieznaney, żeby dadź pierwszemu wyrazowi jedność za spółczynnik: przez co wypadnie

$$x^m + \frac{B}{A}x^{m-1} + \frac{C}{A}x^{m-2} + \frac{D}{A}x^{m-3} + \ldots + \frac{M}{A}x + \frac{N}{A} = o;$$

a oznaczywszy, dla krótkości, $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \ldots \frac{M}{A}, \frac{N}{A}$, przez $P, Q, R \ldots T, U$, otrzymamy

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots\ldots + Tx + U = o. \quad (a)$$

Przedział kropkami zajęty wtenczas się dopełnia, gdy wykładnikowi m nadamy szczególną wartość liczbową. Spółczyńniki $P, Q, R \ldots . T, U,$ mają toż samo znaczenie, co i spółczyńniki $A, B, C, D, \ldots .$ w numerze poprzedzającym.

Jako w zrównaniach pierwszego i drugiego stopnia *pierwiastkiem zrównania* nazwaliśmy wszelkie wyrażenie, które podstawione w zrównaniu za ilość nieznaną, robi je identycznem: tak podobnie i w zrównaniach wyższych stopni, *pierwiastkiem zrównania* nazywać będziemy wszelkie wyrażenie, bądź rzetelne, bądź urojone, bądź wymierne, bądź niewymierne, które włożone za ilość nieznaną w zrównanie, czyni mu zadosyć.

72. Zapatrzywszy się na zrównanie (a) pod tą ogólną postacią wystawione, przywodzimy sobie zaraz na pamięć tę prawdę (Roz. I n. 58 i przyp. Roz. III. N. VII), że każda mnogość powstająca z liczby m mnożników, mających jeden termin spólny x, jest postaci

$$x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+rx^{m-3}+\ldots+tx+u \quad (1);$$

skąd wzajemnie wnieśliśmy, że każde wyrażenie postaci (1) jest mnogością z liczby m mnożników mających jeden termin x spólny. A ponieważ pierwszy członek naszego zrównania (a) właśnie jest to postać (1); przeto stąd wnosimy, że to jest mnogość powstająca z liczby m mnożników, mających jeden termin x spólny, przywiedziona do zero. Z tey tedy prostey uwagi, wyciągamy tę walną i fundamentalną prawdę, stanowiącą główną własność wszystkich zrównań, iż

1° *Wszelkie zrównanie przywiedzione do zero, a mające, przy naywyższey potędze ilości nieznaney* x, *spółczyńnik jedność, jest mnogością liczby mnożników, oznaczoney stopniem zrównania, mających jeden termin spólny* x. Tak, iż zrównanie nasze (a), jest składem liczby m mnożników postaci $x-a, x-b, x-c, x-d \ldots .$; to jest, że

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots .(x-l)=o.$$

$a, b, c, \ldots l,$ nie są nam jeszcze znane, ale wiemy tylko, że nie zawierają w sobie x: i że te wszystkie mnożniki

$x-a$, $x-b$, $x-c$. . $x-l$, rozmnożone przez się dają wyrażenie identycznie równe wyrażeniu

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\cdots+Tx+U=0:$$

tak, iż zamiast tey ostatniey postaci, pierwszą brać możemy.

Ponieważ zrównanie (a) jest składem czyli mnogością liczby m mnożników prostych; to jest ponieważ zrównanie (a) jest to

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.(x-l)=0, \qquad (a'),$$

przeto tey mnogości, a następnie zrównaniu (a) liczbą m sposobów zadosyć uczynić można, czyli liczbą m sposobów uczynić można zero: to jest zakładając albo $x-a=0$, czyli $x=a$; albo $x-b=0$, czyli $x=b$; albo $x-c=0$ czyli $x=c$; i t. d., albo nakoniec $x-l=0$ czyli $x=l$ (*). Skąd znowu wyciągamy te prawdy o zrównaniach, że:

2º *Wszelkie zrównanie tyle ma pierwiastków swoich czyli wartości na ilość nieznaną, ile jest jedności w wykładniku stopnia.* (*Ob. ściśleyszy dowód tych dwóch prawd walnych w przyp.* N. XXXV).

3º *Pierwiastki zrównania są to drugie terminy jego mnożników prostych, wzięte ze znakiem przeciwnym; i wzajemnie, pierwiastki zrównania wzięte ze znakiem przeciwnym, są to drugie terminy mnożników prostych:* skąd

4º *Rozebrać zrównanie na swoje mnożniki proste, jest to jedno co je rozwiązać, i wzajemnie rozwiązać jakie zrównanie, jest to jedno co rozebrać je na swoje mnożniki.*

(*) Tu należy nam dobrze uważać, że te wszystkie mnożniki nie mogą jednocześnie zadosyć czynić zrównaniu, tylko każdy koleją; bo wpadlibyśmy w oczywistą niedorzeczność: tak, iż gdy mnożnik $x-a=0$, co daje $x=a$, nie może bydź w tymże samym czasie $x-b=0$, co dałoby $x=b$; bo wypadłoby $a=b$; co bydź nie może, kiedy a i b nie są równe sobie.

5º *Ilość nieznana, złączona z pierwiastkiem zrównania, wziętym ze znakiem przeciwnym, rozdziela dokładnie zrównanie.*

6º *Jeżeli jakimkolwiek sposobem odkryjemy taką wielkość, która podstawiona w wielowyraz na mieyscu jakiey litery, przywodzi go do zera; natenczas ta litera, złączona z tą ilością (przywodzącą wielowyraz do zera) wziętą ze znakiem przeciwnym, będzie dzielnikiem dokładnym tego wielowyrazu.*

73. Ponieważ każde zrównanie stopnia m jest to mnogość z liczby m mnożników, postaci $x-a, x-b, x-c, \ldots$; a że dowiedliśmy (Roz. III. przyp. N. VII), że spółczyńnik drugiego terminu takiey mnogości, równy jest summie drugich terminów mnożników; spółczyńnik trzeciego terminu jest summą mnogości różnych po dwa na raz biorąc drugie terminy mnożników prostych, i t. d.; nakoniec ostatni termin, jest mnogością wszystkich razem drugich terminów mnożników prostych: że zaś drugie terminy mnożników składających zrównanie, wzięte ze znakiem przeciwnym sąto pierwiastki zrównania; przeto w zrównaniu jakiemkolwiek:

Spółczyńnik 2go terminu zrównania jest równy summie wszystkich pierwiastków wziętych ze znakiem przeciwnym.

Spółczyńnik 3go terminu jest równy summie mnogości różnych z pierwiastkow zrównania po dwa na raz branych.

Spółczyńnik 4go terminu równy jest summie mnogości różnych z pierwiastków zrównania po trzy na raz branych ze znakami przeciwnemi, i t. d. *Nakoniec ostatni termin jest mnogością wszystkich pierwiastków zrównania, wziętych ze znakami przeciwnemi.*

Jeżeli więc w jakiem zrównaniu brakuje któregokolwiek bądź terminu w porządku, ten nie mógł zniknąć inaczey, tylko, że spółczyńnik jego stać się musiał zero. Azatém, jeżeli nie ma terminu drugiego, ten inaczey zniknąć nie mógł tylko, że spółczyńnik jego, to jest summa pierwiastków, stała się zero: czyli, że w tém zrównaniu znaydują się pierwiastki dodatne i odjemne, i że summa pierwszych jest równa summie drugich. Jeżeli braknie z porządku 3go terminu, tedy w takiém zrównaniu summa dodatna mnogości po dwa na raz branych pierwiastków, jest równa summie odjemney. Podobnie sądzić należy o innych terminach. Ale jeżeli w jakiem zrównaniu brakuje ostatniego terminu, ten nie mógł inaczey zniknąć, tylko, że jeden z pierwiastków zrównania stał się zero: i natenczas całe zrównanie rozdzielić się może przez ilość nieznaną i zniżyć o jeden stopień.

74. Ponieważ zrównanie jakiegokolwiek bądź stopnia powstaje z liczby mnożników prostych, oznaczoney wykładnikiem stopnia zrównania; że zaś mnogość dwóch mnożników prostych stanowi mnożnik drugiego stopnia, mnogość trzech mnożników prostych, stanowi mnożnik 3go stopnia, i t. d.; przeto każde zrównanie, uważać możemy jako powstające z mnożników wyższych stopni od pierwszego; byleby tak były dobrane, aby mnogość ich wydadź mogła zrównanie podane. I tak zrównanie 3go stopnia, to jest postaci $x^3+Px^2+Qx+R=0$, uważać możemy jako mnogość postaci $(x-a)(x^2+px+q)=0$, to jest mnogość z mnożnika pierwszego stopnia przez mnożnik stopnia drugiego. Zrównanie 4go stopnia, to jest postaci $x^4+Px^3+Qx^2+$ $+Rx+S=0$, uważać możemy, jako mnogość postaci $(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')=0$: to jest mnogość z dwóch mnożników drugiego stopnia, i t. d. Zrównanie 5go stopnia, uważać możemy, albo jako mnogość dwóch mnożników drugiego stopnia a jednego pierwszego stopnia; albo jako mnogość mnożnika 3go stopnia przez mnożnik stopnia drugiego; albo jako mnogość z mnożnika 4go stopnia przez mnożnik pierwszego stopnia. Toż samo się rozumie i o innych zrównaniach.

75. Ponieważ zrównanie wyższych stopni uważać się może, jako mnogość z mnożnikow drugiego stopnia, których tyle bydź może, ile razy 2 całkowicie zawiera się w wykładniku stopnia zrównania; że zaś każdy z tych mnożni-

ków przywiedziony do zera, wydadź może pierwiastki urojone *sprzężone* czyli postaci $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, które zadosyć uczynią zrównaniu podanemu; przeto zrównania wyższych stopni, będą mogły zamykać tyle par pierwiastków urojonych sprzężonych, ile razy 2 zawiera się całkowicie w wykładniku stopnia. Skąd daley wnosimy, że:

1º *Zrównania stopni parzystych mogą mieć wszystkie pierwiastki urojone, stopni zaś nieparzystych, muszą mieć koniecznie jeden przynaymniey pierwiastek rzetelny.*

2º *Jeżeli zrównanie ma jeden pierwiastek urojony postaci $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, tedy koniecznie bydź musi i drugi z nim sprzężony, postaci $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.*

76. Z tego wszystkiego, cośmy tylko o zrównaniach wyższych stopni powiedzieli, następujące jeszcze prawdy wyciągamy:

Zrównanie wyższych stopni postaci wymierney i rzetelny, zawierają, w ogólności mówiąc, pierwiastki rzetelne, a te bydź mogą równe lub nierówne, wymierne lub niewymierne: pierwiastki urojone sprzężone, równe lub nierówne.

77. Nie rozwiązawszy jeszcze zrównań wyższych stopni, a już tyle odkryliśmy ich własności znamienujących główną naturę zrównań. Owszem gdyby nam czas i wyższe usposobienie w początkach tey nauki, pozwoliły w głębsze zapuścić się dociekania, odkrylibyśmy wiele nowych i ważnych dla samey naszey nauki prawd i wynalazków. Wyznać atoli potrzeba, iż te wszystkie liczne i piękne a nieprzeparte w swey pewności o zrównaniach prawdy, z głębokiego zastanowienia się i uwagi, wydobyte przez naypierwszych matematyków, jakkolwiek są ważnego w całey matematyce użytku i niezaprzeczoną chwałę rozumowi ludzkiemu przynoszą, nie potrafiły jednak dotychczas naprowadzić do odkrycia sposobu, na rozwiązania ogólnych zrównań wyższych stopni: to jest, dotychczas nie potrafili matematycy pierwiastków zrównania wyższych stopni, ogólney postaci, wyrazić przez pewny skład czyli postać, utworzoną ze spółczynników samego zrównania, taką, któ-

raby zadosyć uczyniła zrównaniu: to jest dla daney ogulney postaci zrównania, nie potrafili odkryć postaci pierwiastków jego: a co jednak oczywiście i bez żadney trudności udało się nam rozwiązać czyli wynaleźć ogólną postać pierwiastków, zrównań, ogólnych co do postaci, pierwszego i drugiego stopnia.

A lubo usiłowania i niezmordowana praca matematyków dokazały tego, iż odkryto sposób na rozwiązanie zrównań ogólnych 3go i 4go stopnia; ale *naprzód, nad rozwiązanie zrównania 4go stopnia, daley posunąć się nie potrafili;* powtóre wzory czyli postaci pierwiastków zrównania przez nich otrzymane, tak są co do swego układu zawikłane, iż prawie żadnego użytku w zastosowaniach mieć nie mogą. Stąd daley wnosimy, że gdybyśmy i przyszli do rozwiązania zrównań ogólnych piątego i następnych stopni, tedy bez wątpienia otrzymalibyśmy bardziey jeszcze zawikłane wypadki czyli wzory pierwiastków zrównania, niż się pokazały matematykom w zrównaniach 3go i 4go stopnia. Wzory więc te algebraiczne, szacowne byłyby przez się; bo naocznie potwierdziłyby wszystkie własności fundamentalne wyciągnione bez rozwiązywania zrównań; lecz nie wielkiego w szczególnych zastosowaniach użytku. I dla tegoto nie podajemy tu sposobów na rozwiązywanie zrównań ogólnych 3go i 4go stopnia (*).

78. Lubo nieudało się matematykom wynaleźć sposobu na rozwiązanie ogólnych zrównań wyższych stopni, atoli prace ich uwieńczone zostały odkryciem własności spólnych wszystkim zrównaniom, z których część wymieniliśmy w n. 72. te potém własności posłużyły:

1° *Do wynalezienia sposobów na rozwiązanie pewney klassy zrównań, pozbawionych niektórych terminów.*

(*) Pierwszy Scypion Ferei Prof. Mat. w Bolonie, około roku 1570, wynalazł sposób rozwiązywania zrównań 3go i 4go stopnia, który poźniey przez Karda, i Tartaglia, matematyków włoskich, wydoskonalony, a przez Rafaela Bombelli dokładniey objasniony został.

2º *Do przywiedzenia rozwiązania zrównania danego, do rozwiązania zrównań łatwieyszych do traktowania;* co transformacyą czyli przerabianiem zrównań zowiemy.

3º *Do rozwiązania zrównań wszelkiego stopnia, mających za spółczynniki liczby; czyli do rozwiązania zrównań liczbowych:* to jest zrównań, które pochodzą z algebraicznego wysłowienia pytania, którego datkami są liczby szczególne.

79. *Co do pierwszego.* Nie możemy tu wyłożyć tych sposobów, bo do tego potrzeba większey znajomości Algebry, i dla tego zostawujemy je wyższym częściom Matematyki. Tę tylko sobie zrobimy wiadomość: do klassy rozwiązanych zrównań szczególnie należą zrównania postaci $y^m \mp 1 = 0$, do których się przywodzą wszystkie zrównania dwówyrazowe postaci $x^m \mp p = 0$, przez założenie $x = y\sqrt[m]{p}$. Zrównania $y^m \mp 1 = 0$, mają liczbę m pierwiastków, to jest liczbę m wyrażeń na y takich, które zadosyć czynią tym zrównaniom: a ponieważ $y^m \mp 1 = 0$, jest toż samo co $y^m = \pm 1$, czyli co $y = \sqrt[m]{\pm 1}$; stąd przeto widzimy, ponieważ liczba m jest wartości na y, przeto też jest i m wartości na $\sqrt[m]{\pm 1}$: tak, iż *wszelkiego stopnia pierwiastek z jedności dodatney lub odjemney, ma tyle wartości, ile jest jedności w wykładniku stopnia znaku pierwiastkowego.*

Rozwiązując matematycy zrównania $y^m \mp 1 = 0$, znaleźli, iż pierwiastki tych zrównań, czyli wartości na y, a następnie wartości na $\sqrt[m]{\pm 1}$, albo *jedna jest rzetelna* a reszta urojonych i nierównych sobie; albo *dwie są rzetelne*, a reszta ich jest urojone i nierówne sobie; albo nakoniec *wszystkie są urojone*; a to podług tego, jak m jest parzyste lub nieparzyste, i jedność jest dodatna lub odjemna. Co do pierwiastków rzetelnych, to i sami oczywiście widzimy kiedy te są, i jaka liczba ich bydź może.

Ponieważ każda wielkość $\pm a$ uważaną jest jako mnogość $\pm 1 \times a$; więc pierwiastek z niey stopnia m, to jest

$\sqrt[m]{\pm a}=\sqrt[m]{\pm 1 \times a}=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{\pm 1}$: aże $\sqrt[m]{\pm 1}$ ma liczbę m wartości, przeto tyleż ma i $\sqrt[m]{\pm a}$; skąd daley wnosimy, *że wszelkiego stopnia pierwiastek z jakieykolwiek liczby lub wyrażenia algebraicznego, tyle ma wartości, ile jest jedności w wykładniku stopnia znaku pierwiastkowego.*

A jeżeli w wyciąganiu pierwiastków z wielkości dodatnych trzymamy się jedney lub dwóch wartości, podług stopnia pierwiastku; to jedynie dla tego robimy, iż resztę ich, jako urojone, opuszczamy.

Co do drugiego i trzeciego (n. 78): to jest co do transformacyy zrównań i rozwiązywania zrównań liczbowych; te następnie wyłożymy, ograniczając się jednak bardzo, istotną potrzebą i nabytemi w ciągu naszey nauki wiadomościami.

PRZERABIANIE CZYLI TRANSFORMACYA ZRÓWNAŃ.

80. Mówiąc o własnościach zrównań, powiedzieliśmy, jeżeli w zrównaniu braknie ostatniego terminu, natenczas zrównanie rozdzielić się może przez ilość nieznaną i zniżyć się o jeden stopień; z drugiey strony, z samey natury rzeczy przekonani jesteśmy, że zrównanie, im mniey ma terminów, tym jest łatwieysze do traktowania; tak dalece, iż matematykom udało się rozwiązać wszystkie zrównania postaci $x^m \mp p = 0$. Obie te uwagi powinny nam podać takie pytanie: czyliby w zrównaniu jakiémkolwiek nie można było wyrzucić terminu jakiegokolwiek lub ich kilka razem, bez naruszenia jego związku; przez to moglibyśmy przywieśdź zrównanie do prostszey postaci. Na rozwiązanie tego pytania powinniśmy sobie przypomnieć, że zrobiwszy jakie zrównanie nieoznaczoném przez wprowadzenie do niego nowey ilości niedeterminowaney, mamy wtenczas prawo przypuszczać takie warunki, jakie się nam podobają, lub jakie nam są potrzebne: przez to przypuszczenie nic innego nie robimy, tylko nadajemy pewną wartość ilości niedeterminowaney.

Weźmy zrównanie ogólne

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\ldots+Tx+U=0 \quad (1)$$

i załóżmy, że $x=y+h$: gdzie h jest ilością nieoznaczoną mogącą mieć jakąkolwiek wartość; a zaś y ilością nieznaną podobnie jak jest x. Włożywszy tę wartość na x w zrównanie (1), otrzymamy

$$(y+h)^m+P(y+h)^{m-1}+Q(y+h)^{m-2}+\ldots+T(y+h)+U=0.$$

Wykonawszy wskazane podnoszenia do potęg i uszykowawszy terminy podług potęg y, tak jak zrównanie (1) uszykowane jest podług potęg x, znaydziemy

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^m+mh & y^{m-1}\;+m\frac{m-1}{2}h^2 & y^{m-2}+\ldots+h^m \\ \quad+P & & \qquad\quad+\ldots+Ph^{m-1} \\ & \qquad+(m-1)Ph & \qquad\quad+\ldots+Qh^{m-2} \\ & \qquad+\qquad\quad Q & \qquad\qquad\;+\ldots \\ & & \qquad\qquad\;+Th \\ & & \qquad\qquad\;+U \end{array}\right\}=0 \quad (a).$$

Oczywiście to rozwinienie jest teyże samey postaci co i zrównanie (1): tak, iż możemy napisać

$$y^m+py^{m-1}+qy^{m-2}+ry^{m-3}+\ldots+ty+u=0 \quad (2).$$

Tu naprzód powinniśmy zrobić uwagę, że pierwiastki tego zrównania (2), są mnieysze ilością h od pierwiastków zrównania (1); gdyż $x=y+h$, a stąd $y=x-h$. Gdybyśmy zaś położyli byli, że $x=y-h$; czyli co toż samo jest, gdybyśmy w pierwszym przypadku zamiast h dodatnego wzięli odjemne, wtenczas otrzymalibyśmy zrównanie tegoż samego stopnia co i podane; lecz wszystkie jego pierwiastki większe byłyby ilością h od pierwiastków zrównania podanego; gdyż w tym przypadku byłoby $y=x+h$. Skąd widzimy, że kładąc w zrównaniu na mieyscu ilości nieznaney drugą nieznaną zmnieyszoną lub powiększoną jaką ilością, nic innego nie robimy, tylko szukamy takiego zrównania, któregoby pierwiastki były mnieysze lub większe pewną ilością: a ogólniey mówiąc, szukamy zrównania takiego, któregoby pierwiastki miały związek z pierwiastkami zrównania podanego, dany przez zrównanie $x=y+h$, czyli $y=x-h$, czyli $y-x-h=0$. Rozciągając jeszcze ogólniey teraźnieyszą uwagę, postrzegamy, że mając jakie zrównanie (1), a chcąc je przerobić na inne takie, któregoby pierwiastki miały związek z pierwiastkami zrównania podanego, wyrażony ogólnie przez $\varphi(x,y)=0$; należy z tych dwóch zrównań wyrugować x: tak, iż rozwiązanie ogólne tego pytania przywodzi się prosto do nauki eliminacyi zrównań wyższych stopni: co jest rzeczą wyższych Matematyki części.

81. Powróćmy znowu do naszego zrównania (1), i starajmy się to uskutecznić cośmy sobie zadali. Powiedzieliśmy, że chcemy przerobić zrównanie (1) na inne, któreby mogło mieć mniey terminów niż ich zawiera podane zrównanie (1). Na ten koniec wprowadziliśmy ilość nieoznaczoną h i otrzymaliśmy zrównanie (α) czyli (2). Chcąc z niego wyrzucić drugi termin; należy założyć, że

$$mh+P=0.$$

Ten warunek przypuścić możemy; bo h jest nieoznaczone; skąd otrzymamy

$$h=-\frac{P}{m}.$$

Ta wartość na h, wprowadzona we wszystkie terminy zrównania (α), zamieni je na

$$y^m+p'y^{m-2}+q'y^{m-3}+r'y^{m-4}+\ldots+t'y+u'=0;$$

gdzie p', q', $r'\ldots t'$, u' są już ilościami zupełnie znanemi.

Ponieważ $h=-\frac{P}{m}$, więc $x=y-\frac{P}{m}$;

skąd tę regułę, na wyrzucenie drugiego terminu ze zrównania, wyciągamy: *należy na mieyscu ilości nieznaney wziąć inną ilość rownie nieznaną, dodadź do niey spółczynnik drugiego terminu ze znakiem przeciwnym rozdzielony przez wykładnik stopnia zrównania i to podstawić za ilość nieznaną. (Ob. przykł. w przyp.* N. XXXVI).

Lecz kiedy jakie zrównanie nie ma terminu drugiego, więc spółczynnik jego, który oznacza summę pierwiastków ze znakiem przeciwnym wziętych, staje się zero: przeto nasze przerabianie, przez które wyrzucamy drugi wyraz ze zrównania, wychodzi na to, że powiększamy lub też zmnieyszamy każdy pierwiastek zrównania taką liczbą, że wtenczas summa pierwiastków dodatnych jest równa summie odjemnych. Jakoż w rzeczy samey, gdy zakładamy

$$x = y - \frac{P}{m} \text{ czyli } y = x + \frac{P}{m},$$

więc każdy pierwiastek x będzie zmnieyszony ilością $\frac{P}{m}$; aże pierwiastków jest liczba m, a każdy się zmnieysza ilością $\frac{P}{m}$, więc summa ich zmnieyszy się ilością $\frac{Pm}{m}$ czyli P: aże P jest summą pierwiastków, przeto summa pierwiastków nowego zrównania (α), będzie $P - P = 0$.

92. Gdybyśmy zamiast wyrzucenia drugiego terminu ze zrównania (α), chcieli z niego wyrzucić trzeci z kolei idący termin; należałoby przywieśdź jego spółczynnik do zera: to jest założyć,

$$\frac{m(m-1)h^2}{1.2} + (m-1)Ph + Q = 0.$$

Co nas prowadzi do rozwiązania zrównania drugiego stopnia; więc na h wypadłaby dwojaka wartość. Lubo dla tego wyrzucić możemy tym sposobem trzeci termin ze zrównania (α), rozwiązując naprzód zrównanie na h i podstawując którąkolwiek jego wartość w zrównanie (α); lecz że h otrzymać możemy pierwiastkowe czyli niewymierne, a co gorsze, trafić możemy na urojone, a taką wartość wprowadzając w zrównanie (α) wprowadzilibyśmy razem urojenie; dla tego nigdy albo bardzo rzadko tego używamy rachunku.

Chcąc wyrzucić ze zrównania (α) czwarty z kolei idący w niém termin, przyszlibyśmy do zrównania warunkowego na h 3go stopnia. A chcąc wyrzucić ostatni termin, znalezlibyśmy zrównanie warunkowe na h, takie

$$h^m + Ph^{m-1} + Qh^{m-2} + \ldots + Th + U = 0.$$

Skąd oczywiście widzimy, iż dla wyrzucenia ostatniego terminu, trzeba tegoż samego stopnia rozwiązać zrównanie co i podane. Z tego wszystkiego widzimy, iż tylko drugi termin ze zrównania wyrzucić umiemy.

93. Powiedzieliśmy (n. 90), że możemy zawsze zmnieysyć lub powiększyć pewną ilością wszystkie pierwiastki zrównania bez jego rozwiązania; a to zakładając, że $x=y+h$, czyli $x=y-h$, przez co otrzymamy zrównanie przerobione, którego pierwiastki będą mnieysze lub większe ilością h od pierwiastków zrównania. Ale możemy jeszcze tak przerobić zrównanie podane na inne, iż zrównanie przerobione będzie miało pierwiastki, h razy większe od pierwiastków zrównania podanego: to jest, że będzie $y=hx$: skąd $x=\frac{y}{h}$.

Włożywszy tę wartość na x w zrównanie (1), otrzymamy

$$\frac{y^m}{h^m}+\frac{Py^{m-1}}{h^{m-1}}+\frac{Qy^{m-2}}{h^{m-2}}+\ldots\ldots+\frac{Ty}{h}+U=0,$$

które, gdy pomnożymy przez h^m dla zniesienia ułomków, zamienimy je na

$$y^m+Phy^{m-1}+Qh^2y^{m-2}+\ldots+Th^{m-1}+Uh^m=0.$$

Skąd wyciągamy to prawidło, że *chcąc przerobić zrównanie na inne, któregoby pierwiastki były wielokrotne ilością* h *względem pierwiastków zrównania podanego, należy wyrazy zrównania podanego, rozmnożyć przez potęgi po sobie idące* $h^0, h^1, h^2, h^3, h^4 \ldots h^m$.

94. Ten rachunek podaje nam łatwy bardzo sposób pozbycia się ze zrównania spółczynników ułomkowych. Jakoż, każde zrównanie, mające spółczynniki ułomkowe, przez sprowadzenie ich do spólnego mianownika, przywodzi się do tey postaci

$$kx^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+tx+u=0:$$

gdzie $k, p, q \ldots t, u$, są całkie; ale wtenczas ilość nieznana z naywyższym wykładnikiem ma spółczynnik. Chcąc więc to zrównanie tak przerobić, żeby przy x^m był spółczynnik jedność, a zaś inne spółczynniki nie przestały bydź całkiemi, założyć potrzeba, że

$$x=\frac{y}{h}.$$

Gdy włożymy tę wartość w powyższe zrównanie, zamienimy je na

$$\frac{ky^m}{h^m}+p\frac{y^{m-1}}{h^{m-1}}+q\frac{y^{m-2}}{h^{m-2}}+\ldots+t\frac{y}{h}+u=0,$$

które rozmnożone przez h^{m-1}, zamieni się na

$$\frac{k}{h}y^m+phy^{m-1}+qhy^{m-2}+\ldots+thy^{m-2}+uh^{m-1}=0.$$

A ponieważ wziąć możemy h tak wielkie, jak się nam podoba, przeto zrobiwszy $h=k$, otrzymamy

$$y^m+py^{m-1}+qky^{m-2}+\ldots+tk^{m-2}+uk^{m-1}=0.$$

Skąd następujące prawidło wyciągamy: *chcąc zrównanie, mające spółczyńniki ułomkowe, przerobić na inne o spółczyńnikach całkich, należy naprzód pozbyć się mianownika i za ilość nieznaną* x, *położyć drugą nieznaną* y, *rozdzieloną przez spółczyńnik będący przy naywyższey potędze* x.

Chcąc ze zrównania

$$kx^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+tx+u=0,$$

wyrzucić drugi termin i razem pozbyć się spółczyńników ułomkowych, czyli spółczyńnika k, w pierwszym terminie będącego, dosyć jest założyć

$$x=\frac{y-p}{mk}.$$

(*Ob. przykł. w przyp.* N. XXXVII).

95. Mając jakie zrównanie, a chcąc je przerobić na inne, któregoby pierwiastki były równe pierwiastkom podanego zrównania rozdzielonym przez jaką liczbę h, należy założyć

$$y=\frac{x}{h},\ \text{skąd}\ x=hy,$$

i w zrównaniu za x podstawić hy.

Tego przerabiania wtenczas używamy, gdy spółczyńniki w zrównąniu są bardzo wielkie; przez nie bowiem sprowadzić możemy do naymnieyszych liczb. (*Obacz przykł. w przyp.* N. XXXVIII).

96. Jeżeli w zrównaniu jakiém, za x położymy $\frac{1}{y}$, natenczas naywiększe pierwiastki x, odpowiadać będą naymnieyszym y; a zaś naymnieysze, odpowiadać będą naywiększym.

Przestańmy na tych wyłożonych przez nas przerabianiach zrównań, zostawując resztę wyższym Matematyki częściom, a przystąpmy podług zrobionego przez nas zamierzenia w n. 89, do rozwiązywania zrównań liczbowych.

O ROZWIĄZYWANIU ZRÓWNAŃ LICZBOWYCH.

97. Pierwszy Viette matematyk francuzki, w swoim traktacie *de numerosa potestatum adfectarum resolutione*, zatrudniać się zaczął rozwiązywaniem zrównań liczbowych wyższych stopni, i pierwszy on pokazał, iż wiele tego gatunku zrównań rozwiązać się może, przez podobne działania, jakich na wyciąganie pierwiastków z liczb używamy. Poźniey Hariot, Ougtred, Pell i inni starali się w praktyce ułatwić sposób Vietta, podając na to szczególne prawidła, zmnieyszające ciągłe na oślep postępowania. Lecz te prawidła, jako wymagające wielkich i mnogich działań, a w wielkiey liczbie przypadków niepewne, przy końcu ostatniego wieku w niepamięć puszczono.

Po sposobie Vietta, nastąpił sposób Newtona, który, właściwie mówiąc, służy tylko do wynalezienia wartości przybliżonych, gdy pierwiastek jest już dany, a nie jest bliski prawdy. Pierwszy dopiero Lagrange w ostatnim wieku podał pewne i żadney wątpliwości nie ulegające prawidła na rozwiązanie zrównań liczbowych. On pierwszy rozwiązał to wielkie zadanie. *Maiąc dane zrównanie liczbowe, którego ani wielkości ani natury pierwiastków nie wiemy, wynaleźć ich wartości liczbowe w zupełności, jeżeli tego dokazać można, albo tak przybliżone ile sami zechcemy.*

98. Rozwiązanie pełne tego zadania, rozdziela się, stosownie do natury pierwiastków zrównania, na cztery części. Jakoż zrównanie liczbowe może mieć pierwiastki rzetelne i urojone: pierwsze mogą bydź wymierne lub niewymierne;

pierwiastki zaś wymierne mogą bydź całkie lub ułomkowe: a wszystkie zaś takowe pierwiastki zrównania, mogą bydź równe albo nierówne, dodatne lub odjemne: tak, iż wszystkie te gatunki pierwiastków sprowadzają się do czterech klass: 1° Pierwiastki rzetelne nierówne i wymierne: 2° pierwiastki rzetelne równe: 3° pierwiastki rzetelne niewymierne. 4° Pierwiastki urojone równe i nierówne. Podług więc tych czterech klass pierwiastków, rozdziela się i nauka rozwiązania naszego zadania.

Tu nam z góry ostrzedz należy, iż rozwiązanie pełne tego zadania, jest nauką obszerną, i nierównie więcey potrzebującą wiadomości algebraicznych, niż my w ciągu całego uczenia się tey nauki nabyli. I dla tego to, ograniczeni czasem i wiadomościami naszemi, przestaniemy tylko na szukaniu pierwiastków rzetelnych wymiernych nierównych, oraz pierwiastków rzetelnych wymiernych równych.

99. Przypomniymy tu naprzód sobie (n. 94), żeśmy podali sposób przerabiania jakichkolwiek zrównań o spółczynnikach ułomkowych, na tegoż stopnia zrównanie o spółczynnikach całkich: w naszém więc badaniu, należy tylko uważać zrównania postaci

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0 \quad (1);$$

gdzie $P, Q, \ldots T, U$, są liczbami całkiemi dodatnemi lub odjemnemi.

Pierwiastki zrównania tey postaci, nie mogą bydź ułomkowe; bo wypadłyby albo spółczynniki ułomkowe w zrównaniu (1), albo ilość nieznana x^m miałaby jaką liczbę za spółczynnik. Przypuśćmy bowiem, jeżeli to bydź może, że zrównanie (1) ma jeden pierwiastek ułomkowy $\frac{a}{b}$, to jest że $x = \frac{a}{b}$: gdzie a i b są między sobą liczbami pierwszemi, czyli nie mającemi żadnego spólnego mnożnika. Podstawiwszy więc ten pierwiastek w zrównaniu (1), mieć powinniśmy dokładną równość

$$\frac{a^m}{b^m} + \frac{Pa^{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{Qa^{m-2}}{b^{m-2}} + \ldots + \frac{Ta}{b} + U = 0,$$

która pomnożona przez b^{n-1}, daje

$$\frac{a^n}{b}+Pba^{m-1}+Qa^{m-2}+\ldots+Tab^{m-2}+Ub^{m-1}=0 \qquad (1).$$

Ta równość powinna bydź dokładnie zero, co jest niepodobieństwem, gdyż wszystkie terminy po $\frac{a^m}{b}$ idące, są liczbami całkiemi, prócz terminu $\frac{a^m}{b}$, który jest ułomkowy, a którego żadna liczba całka zniszczyć nie może; a zatém równie niepodobieństwem jest, aby zrównanie (1) miało pierwiastek ułomkowy. Ta sprzeczność wynikająca z przypuszczenia pierwiastku ułomkowego, jaśniey się ukazuje wynaydując ze zrównania (1) wartość na $\frac{a^m}{b}$; gdzie ilość ułomkowa $\frac{a^n}{b}$ wyrażoną byłaby przez liczbę całką: co jest oczywistą sprzecznością.

Ponieważ naymocniey przekonani jesteśmy, że każde zrównanie o spółczynnikach całkich, gdy spółczynnik przy naywyższey potędze jest jedność, nie ma pierwiastków ułomkowych; przeto szukanie pierwiastków wymiernych sprowadza się tylko do szukania pierwiastków całkich.

100. Powiedzieliśmy byli, mówiąc o ogólnych własnościach zrównań (n. 83), że ostatni termin jakiegokolwiek zrównania, jest mnogością ze wszystkich pierwiastków zrównania. Więc gdybyśmy go rozebrali na swoje mnożniki, tedy między temi koniecznie znaydować się muszą i pierwiastki wymierne zrównania podanego. Chcąc zaś przekonać się, które z nich są pierwiastkami zrównania, należy z kolei każdy z tych mnożników wziąć raz ze znakiem dodatnym, drugi raz z odjemnym, i podstawić za x w zrównanie; a które z nich przywiodą zrównanie podane do zero, te będą jego pierwiastkami.

Z tego więc oczywiście widzimy, że szukanie pierwiastkow wymiernych, zawisło od rozbioru ostatniego terminu zrównania na swoje mnożniki całkie, z których, chociażby nieskończona ich liczba była, te tylko brać należy za pierwiastki zrównania, które mu zadosyć czynią: tych zaś nie więcey bydź może tylko tyle, ile jest jedności w wykładniku stopnia zrównania.

Znalazłszy jeden pierwiastek, wiele na tém zyskujemy; bo przez dzielenie zniżyć możemy zrównanie o jeden stopień. A gdybyśmy znalezli dwa pierwiastki, tedy przez dzielenie zniżyć moglibyśmy zrównanie o dwa stopnie, i t. d. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XXXIX).

101. Zastanowiwszy się jednak nad teraz podanym sposobem wynaydowania pierwiastkow całkich, łatwo przewidujemy, że gdy liczba dzielników ostatniego wyrazu zrównania będzie wielka, natenczas działanie przypadnie bardzo pracowite, a w przypadku niebytności pierwiastkow całkich, tak długie działania byłyby bezskuteczne. Należy nam więc podadź inny łatwieyszy sposób na przekonanie się, które z dzielników ostatniego terminu zrównania, są jego pierwiastkami. To jest trzeba nam takie wynaleźć warunki, którymby same tylko pierwiastki zrównania zadosyć uczynić mogły.

102. Ponieważ ogólność tego sposobu, który tu wyłożyć mamy, całkiem niezależy od wielkości stopnia zrównania, przeto dla lepszego wyrozumienia rzeczy, przywiążmy się do zrównania ogólnego, ale ograniczonego jednościami stopnia. Weźmy naprzykład zrównanie

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=o.$$

Niech a będzie pierwiastkiem tego zrównania: więc gdy go włożymy za x w zrównanie, mieć będziemy

$$a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=o,$$

skąd

$$S=-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4;$$

a następnie

$$\frac{S}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3 \qquad (1).$$

Skąd widzimy, że każdy pierwiastek zrównania musi rozdzielać bez reszty ostatni jego termin, jak to skądinąd już wiemy. Szukaymy jeszcze innych z tego zrównania (1) warunków. Na ten koniec przenieśmy R na drugą stronę zrównania, a dla krótkości $\frac{S}{a}$ nazwiymy S', mieć będziemy

$$\frac{S'+R}{a}=R'=-Q-Pa-a^2 \qquad (2).$$

Tu znowu widzimy, że kiedy a jest pierwiastkiem zrównania podanego, więc ten musi dzielić $S'+R$ bez reszty. Podobnie ze zrównania (2) otrzymamy

$$\frac{R'+Q}{a}=Q'=-P-a \qquad (3),$$

To jest, że $R'+Q$ jest także rozdzielném przez a. Nakoniec

$$\frac{Q'+P}{a}=P'=-1, \text{ czyli } P'+1=0 \qquad (4).$$

Zebrawszy teraz wyłożone warunki postrzegamy, że liczba a będzie pierwiastkiem zrównania, jeżeli będąc dzielnikiem ostatniego jego terminu, dzieli bez reszty R', Q', P': nadto przywodzi $P'+1=0$.

A uważając, że rozumowanie nasze zgoła niezależy od wielkości stopnia zrównania, wyciągamy, na przeświadczenie się czyli dzielnik a ostatniego terminu zrównania jest jego pierwiastkiem, następujące prawidła:

1º *Dziel ostatni wyraz zrównania przez dzielnik* a, *i do wielorazu tego doday spółczynnik przy* x.

2º *Dziel tę summę przez tenże sam dzielnik* a *i do tego wielorazu doday spółczyńnik przy* x^2.

3º *Dziel tę nową summę przez tenże dzielnik* a *i do wielorazu otrzymanego doday spółczyńnik przy* x^3.

4º *Dziel tę nową summę przez dzielnik* a *i do wielorazu doday spółczyńnik przy* x^4: *i t. d.*

Nakoniec, *gdy przyydziesz do pierwszego terminu zrównania, wtenczas spółczyńnik tego wyrazu czyli jedność doday do wielorazu poprzedzającego; a ta summa będzie zero, jeżeli* a *jest pierwiastkiem zrównania.*

Należy nam więc, wynalazłszy wszystkie dzielniki ostatniego terminu zrównania, wziąć każdy z nich w szczególności raz ze znakiem + drugi raz ze znakiem — i przepuścić przez wszystkie te proby: a które zadosyć uczynią wszystkim tym warunkom bez żadnego wyjątku, te będą pierwiastkami zrównania. Jeżeli zaś po przebraniu wszystkich mnożników, nie znaydziemy żadnego, któryby zadosyć tym wszystkim warunkom czynił, natenczas przekonani będziemy, że zrównanie podane żadnego nie ma pierwiastku wymiernego.

Ten sposób przekonywania się, o pierwiastkach wymiernych zrównania, ma tę za sobą zaletę: 1º że nie wielkiego działania wyciąga, 2º że po odbytém 2giém lub 3ciém działaniu, zaraz ostrzega nas, że dzielnik wzięty nie jest pierwiastkiem zrównania.

Tu nam jeszcze zrobić należy uwagę; że lepiey jest wprost probować, na samém zrównaniu, czyli $+1$ albo -1, które zawsze są dzielnikami ostatniego terminu, czynią zadosyć zrównaniu lub nie: bo te liczby $+1$, i -1, jako dzielniki każdey liczby, nie wprzódy nas ostrzegłyby, w ogólnym sposobie przekonywania się, że nie są pierwiastkami zrównania, aż przy końcu ostatniego działania. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XL.)

103. Wyłożywszy ogólny sposób wynaydowania pierwiastkow wymiernych zrównania, przystąpić należy do wynaydowania pierwiastków wymiernych równych. Nie możemy wyłożyć ogólnego w tym celu sposobu, jaki podany został przez matematyków; bo do tego potrzeba i więcey czasu i więcey znajomości Algebry; ale przestaniemy na sposobie, lubo nie tak ogólnym i dogodnym, niemniey atoli pewnie prowadzącym do zamierzonego celu.

Wynayduiąc wyżey podanym sposobem (n. 102) pierwiastki wymierne, wynaydujemy wszystkie pierwiastki wymierne, jakie tylko bydź mogą w zrównaniu podaném; a zatém w rzędzie ich liczą się i pierwiastki wymierne równe. Zostaje nam więc tylko przekonać się, które z nich i wiele razy w zrównanie przedsięwzięte wchodzą. Na ten koniec bierze się jeden z pierwiastków wynalezionych wymiernych, naprzykład a, łączy się do x ze znakiem przeciwnym i przez ten dzielnik $x-a$, dzieli się zrównanie podane: przez co otrzymamy wieloraz całki. Jeżeli tenże sam dzielnik $x-a$ rozdziela dokładnie otrzymany wieloraz, tak iż daje nowy dokładny wieloraz, którego już daley $x-a$ nie może bez reszty rozdzielać; tedy znakiem będzie, że mnożnik $x-a$, dwa razy za mnożnik wchodzi w zrównanie, a następnie pierwiastek a dwa razy także wchodzi. Gdyby zaś tenże mnożnik $x-a$ dzielił z kolei i trzeci wieloraz, a nie dzielił czwartego; tedyby znakiem było, iż pierwiastek a trzy razy wchodzi w zrównanie. Tak iż liczba odbytych dokładnie koleynych dzieleń, będzie skazówką, ile razy pierwiastek wchodzi w zrównanie. To cośmy powiedzieli o jednym pierwiastku, toż samo się rozumie i o każdym innym w szczególności.

Albo; chcąc się przekonać ile razy a wchodzi jako pierwiastek w zrównanie podane, należy rozdzielić je przez $x-a$: i ten nowy wieloraz, będący także zrównaniem, poddadź pod probę (n. 102), azali a zadosyć czyni wszystkim warunkom. Jeżeli zaś pokaże się, iż czyni zadosyć; więc będzie pierwiastkiem tego ostatniego zrównania; przeto a dwa razy już wchodzi za pierwiastek w zrównanie podane. Chcąc przekonać się, azali więcey razy jeszcze nie wchodzi, należy wielorazowe zrównanie rozdzielić przez $x-a$, i otrzymany wypadek, to jest zrównanie, poddadź nowey probie, azali a nie czyni i tu zadosyć wszystkim warunkom (n. 102). Jeżeli nie czyni zadosyć, tedy będzie znakiem, iż dwa razy tylko wchodzi w zrównanie; jeżeli zaś czyni zadosyć, tedy będzie znakiem, iż naymniey trzy razy wchodzi w zrównanie. Tak, iż liczba koleynych warunkow, którym a zadosyć czyni, będzie skazówką, ile razy wchodzi a, jako pierwiastek, w zrównanie podane. (*Ob. przykł. w przyp.* N. XLI).

Przestajemy na tych wyłożonych przez nas sposobach rozwiązywania zrównań liczbowych, odsyłając po dokładnieysze i pełnieysze sposoby, do wyższych części Matematyki.

TABLICA
SZCZEGOŁOWA MATERYY.

ROZDZIAŁ I.

PODNOSZENIE DO POTĘG.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKÓW.

Rachunek z ilościami urojonemi.

ROZDZIAŁ IV.

ZRÓWNANIA DRUGIEGO STOPNIA.

PRZERABIANIE CZYLI TRANSFORMACYA ZRÓWNAŃ.

ROZWIĄZANIE ZRÓWNAŃ LICZBOWYCH.

SPISANIE MATERYI.

ROZDZIAŁ III.

ROZDZIAŁ IV.

KONIEC.

Od str. 63 do 73 numera powiększyć dziesiątkiem.