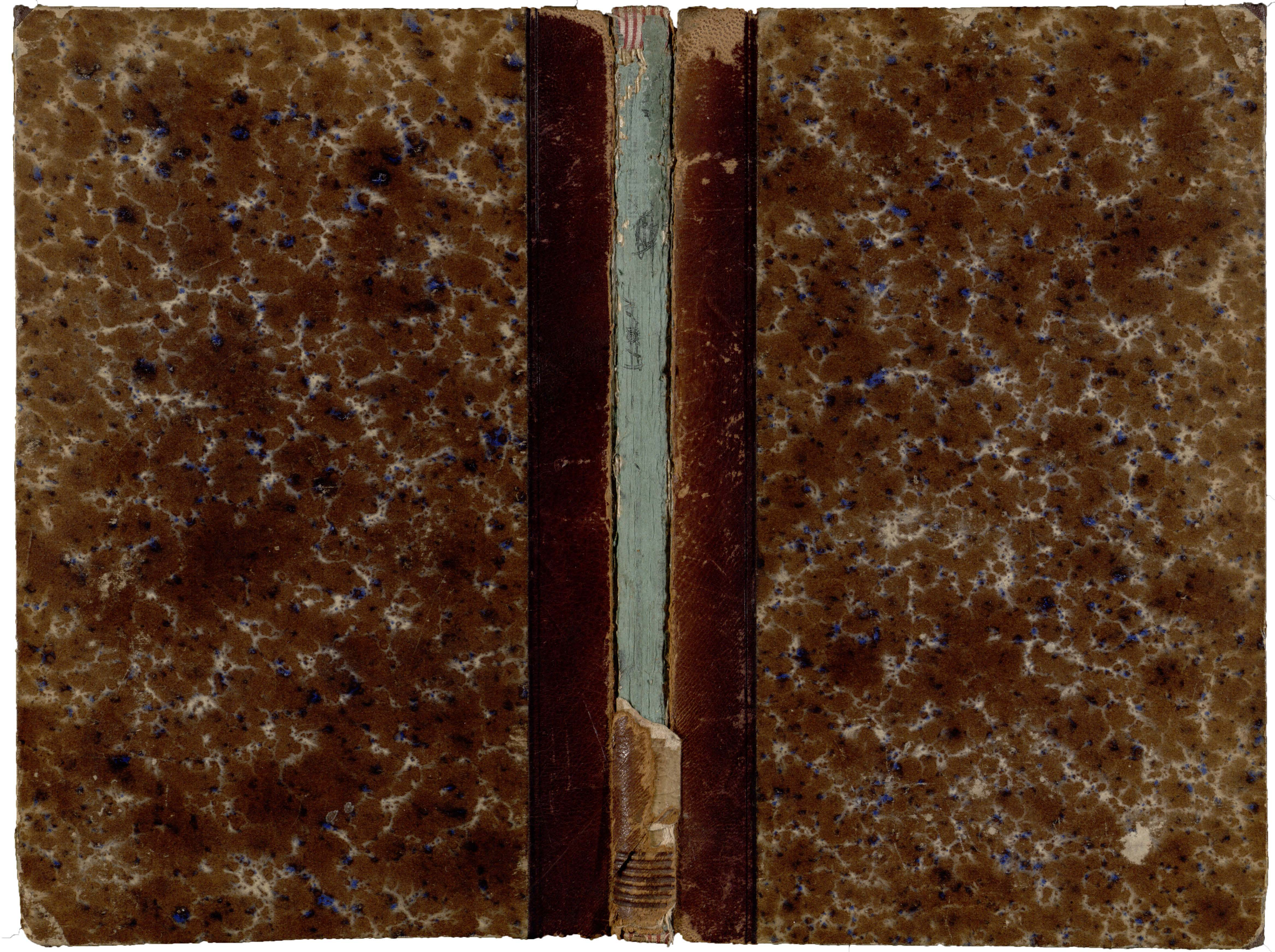

[illegible]

1809

Diktator

1809

G. F. Lichtenfeld

Die Lehre

von den

Combinationen

nach einem neuen Systeme bearbeitet

und erweitert

von

Dr. LUDW. ÖTTINGER
ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

Freiburg,
Druck und Verlag der GEBRÜDER GROOS.

1837.

Vorwort.

Die vorliegende Schrift ist aus der Absicht hervorgegangen, der Combinations-Lehre zu dienen und sie der Aufmerksamkeit der Mathematiker zu empfehlen. Sie ist deſswegen als ein Versuch zur systematischen Begründung dieses wichtigen und zur weiteren Anwendung sehr geeigneten Zweiges der Mathematik zu betrachten.

Man kann sich nicht verhehlen, daſs sich Manche der Ansicht zuwenden: die Combinationslehre sey eine unpraktische, der leeren Speculation anheimgefallene, nur weitschweifige, unbrauchbare, Formeln gebärende, Wissenschaft. Diese Ansicht hat sich vielleicht im Rückblicke auf die Zeit gebildet, in welcher man zuerst auf die Combinationen aufmerksam wurde, und sie zu Antworten auf Fragen der Neugierde, noch unbekannt mit der Bedeutung und Brauchbarkeit der Combinationen, benützte, und wurde vielleicht durch die neue, der Combinationslehre eigenthümliche, Zeichensprache befestigt.

Seitdem man aber durch die Bemühungen Hindenburg's, Weingärtner's, Rothe's u. A. ihre Brauchbarkeit und Dienste im Bereiche der Analysis erkannte, verliert sich diese Ansicht immer mehr, und man möchte wohl Mühe haben, einen gründlichen Kenner der Mathematik aufzufinden, der ihr nicht die gebührende Achtung und Anerkennung zu Theil werden liefse. Es bleibt nur noch übrig, ihre grofse und ausgedehnte Brauchbarkeit für die Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen, um die wichtige Stellung, die sie im Gebäude der Mathematik einnimmt, noch mehr zu sichern.

Das Uebergehen ihrer Lehren in die Lehrbücher der Mathematik gibt von dieser Anerkennung das günstigste und wahrste Zeugnifs, denn schon ist wohl kein umfassendes und gründliches Lehrbuch der Mathematik zu finden, das nicht die Elemente der Combinationslehre enthielte.

Auch die Mathematiker des Auslandes, namentlich Englands und Frankreichs haben den Combinationen ihre Aufmerksamkeit geschenkt. Wenn schon die Combinationslehre eine Wissenschaft ist, die dem deutschen Boden entsprossen ist, so hat diefs jene Kenner nicht abgehalten, auf sie Rücksicht zu nehmen. Vielleicht empfiehlt diefs die auf deutschem Boden erwachsene Blume den Mathematikern des Heimathslandes zu grösserer Sorge und Pflege; denn das läfst sich wohl nicht bezweifeln, dafs die Combinationslehre dem heimischen Boden entwuchs.

Man darf nun wohl mit Recht erwarten, dafs man den einmal betretenen Weg, die Lehre von den Combinationen in die ersten Anfänge des mathematischen Studiums aufzunehmen, nicht verlassen, sondern weiter verfolgen und diesen nicht unwichtigen und grofser Erweiterung fähigen Zweig auch weiter ausbilden werde.

Diefs wird Gelegenheit geben, die Brauchbarkeit und Anwendbarkeit der Combinationen immer mehr in das Licht zu stellen. Denn jetzt schon hat sich gezeigt, dafs die Begründung des binomischen und polynomischen Lehrsatzes (die Hauptgrundlage der ganzen höheren Mathematik) durch Combinationen die einfachste und klarste ist und darum den Vorzug vor allen andern verdient, der vielen anderen möglichen Anwendungen auf Gleichungen und Summirung der Reihen gar nicht zu gedenken.

Ist die Brauchbarkeit der Combinationen auf diesem Wege gesichert, so kann es kaum fehlen, dafs nicht dadurch ihre Bedeutung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine neue Stütze gewinnt. Jakob Bernoulli war der erste, der in seiner *Ars conjectandi* die Combinationen zu Beantwortung von Fragen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzte. Nach ihm thaten diefs auch Andere. Die Ausbeute war gering. Euler versuchte mit Glück seinen Scharfsinn an der Beantwortung einiger schwierigeren hierher gehörigen Aufgaben. Der Umstand aber, dafs die Wahrscheinlichkeitsrechnung in Laplace einen so glücklichen Bearbeiter fand, der im Besitze aller Mittel und Vortheile des Calculs dieser Rechnung Geheimnisse entlockte, nach welchen kaum einer seiner Vorgänger zu fragen unternahm, der, im Besitze einer schöpferischen Geisteskraft, sich mittelst des höheren Calculs unbetretene Wege bahnte, um die unbekannten Stellen dieses Feldes zu beschauen, und diefs alles mit beinahe gänzlicher Umgehung der Combinationen that, wirkte ungünstig für die Combinationslehre und drängte sie ganz von diesem Felde zurück. Doch mit Unrecht; denn diese Lehre trägt hier eine

Schuld, die Folge ihrer Vernachlässigung ist. Gelingt es nun, die Bedeutung, welche die Combinationslehre durch ihre einfachen und allgemeinen Entwicklungsmethoden in diesem Zweige der Wissenschaft haben kann und hat, nachzuweisen, so wird diefs ein neues Schutzmittel gegen den ungegründeten Vorwurf werden, als sey die Combinationslehre eine unpractische, der leeren Spekulation anheim gefallene, Wissenschaft und nicht wenig zu ihrer weiteren Ausbildung beitragen.

Von dieser Ansicht ist der Verf. der vorliegenden Schrift mit ausgegangen. Schriften, welche die Bedeutung der Combinationen in ihrer Anwendung auf Analysis erörtern, gibt es gute und viele, und es bedarf wohl hiezu keines weiteren Beweises, als den der Erwähnung. Daher ist in der vorliegenden Schrift auf diesen Zweig der Mathematik weniger, dagegen hauptsächlich auf ihre Anwendbarkeit und Brauchbarkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Rücksicht genommen, wenn schon keine der Lehren der Combinationen, welche in der Analysis ihre Anwendungen finden, übergangen ist, und hier selbst keine Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht sind.

Diese Schrift mag daher als eine Vorbereitung und Grundlage für die Bearbeitung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf combinatorischem Wege gelten, derjenigen Ansicht gegenüber, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung diesem Boden entreifsen will, und der Verf. hofft ein andermal den Beweis führen zu können, dafs die Wahrscheinlichkeitsrechnung von der Combinationslehre auf einfachem, elementarem und zugleich allgemeinem Wege Antworten erhalten kann, die sie bisher nur dem geheimnifsvollen Gange des höheren Calculs entnahm, und hält dadurch die Bedeutung dieses Zweiges der Mathematik am besten gesichert.

Ein grofser Uebelstand, in dem sich die Combinationslehre befindet, ist einerseits die Unsicherheit ihrer Zeichensprache und andererseits ihre übermäfsige, oft bunte, Ueberladung mit Zeichen. Dafs eine Wissenschaft ihre Terminologie habe, kann nicht in Abrede gestellt werden, denn sie hat ihre Begriffe und mufs sie bezeichnen. Die Mathematik hat die kürzeste Terminologie und bedient sich zu dem Ende der Zeichen. Sie hat diese gewählt, um desto gewandter und sicherer mit ihren Begriffen arbeiten zu können. Die Zeichen können die Begriffe nur andeuten, nie erörtern; sind daher etwas Aeufseres, Zufälliges, nicht Hauptsache, sondern Nebensache, und unterliegen defswegen der Wahl des Erfinders.

Diese Wahl verbürgt aber nicht zugleich die Richtigkeit und Zweckmäfsigkeit der aufgestellten Zeichen und kann defswegen auch nicht als Beweis für ihre allgemeine Gültigkeit gebraucht werden. Nur wenn sie dem Standpunkte der Wissenschaft entspricht, mit der allgemein üblichen Zeichensprache der Mathematik im Einklange steht, richtig und wahr ist, wird ihr der gebührende Vorzug eingeräumt werden. Daher wird diese Wahl beschränkt seyn, wird nicht in Willkühr ausarten dürfen, sondern bestimmten Gesetzen unterliegen, von Grundsätzen ausgehen, mit dem Geiste der Wissenschaft übereinstimmen, ihren Fortschritten sich anschliefsen müssen und zur Hauptaufgabe haben: die Begriffe, welche sie andeuten soll, so klar und erschöpfend als möglich vor Augen zu legen.

Hierauf hat die Wissenschaft, ihre systematische Entwicklung, ihre weitere Ausbildung, und derjenige, der die Wissenschaft kennen lernen will, ein wohlbegründetes und unbestrittenes Recht. Es kann eine Wissenschaft nur fördern, wenn ihre Zeichensprache richtig und klar gestellt ist, wenn sie im Zusammenhange mit dem ganzen Gebäude der Wissenschaft steht, wenn sie die richtige Auffassung der Begriffe erleichtert und das Gedächtnifs unterstützt. Es kann einer Wissenschaft und ihrer Ausbildung nur schaden, wenn ihre Zeichensprache willkürlich und unbestimmt ist, oder wenn sie ohne Zusammenhang und Einklang mit den übrigen Theilen ordnungslos und isolirt steht, oder gar zufällig und aufserwesentlich künstlich zusammengesetzt und launenhaft gewählt ist.

So einfach, zweckmäfsig und dem wissenschaftlichen Entwicklungsgange entsprechend die so eben aufgestellten Forderungen dem Verf. erscheinen, so sind sie doch nicht bei der Begründung der Zeichensprache für die Combinationen als maafsgebend aufgetreten, und ihre Vernachlässigung möchte wohl manches, der Combinationslehre ungünstiges, Urtheil veranlafst und deren allgemeinere Aufnahme beschränkt haben. Hauptsächlich mag aber der Umstand dem allgemeineren Studium der Combinationen geschadet haben, dafs beinahe Jeder, der über Combinationen schrieb, andere Zeichen wählte, dafs sich so eine sehr bunte Zeichensprache für eine und dieselbe Sache bildete, dafs die nämlichen Sätze in verschiedenen Schriften unter anderen Zeichen erschienen und ein neues Kleid nichts anderes als die alte Waare verbarg. Nichts aber täuscht unangenehmer, als unter neuem lockendem Gewande die alte Larve wieder zu erkennen, nichts wirkt entmuthigender, als einen alten, längst gekannten, Satz unter neuer Form wieder zu finden, die Mühe des Studiums und Hoffnung auf ersehnte Ausbeute neuer Wahrheiten in einem äufseren Blendwerke verschwinden zu sehen und aufgewendete kostbare Zeit verloren zu wissen.

Man hat sich von der ursprünglichen Bezeichnungsweise für die Combinationen entfernt, und mit Recht; sie genügte den weiteren Fortschritten nicht mehr. Dadurch aber trat eine unbegränzte Willkühr ein, und es liegt nun die Aufgabe vor, auf eine einfache, zweckmäfsige und zugleich erschöpfende Zeichensprache für die Combinationen hinzuarbeiten, und dadurch die Combinationslehre auf die, ihrer Wichtigkeit und Brauchbarkeit gebührende, Stellung zu führen.

Diefs hat der Verfasser in der vorliegenden Schrift versucht; die Grundzüge, welche ihn in der Wahl der zu gebrauchenden Zeichen leiteten, sind in §. 7 der Einleitung, pag. 6 u. ff. niedergelegt. Er hat dabei die Zeichen, welche bis jetzt in diesem Zweige der Mathematik des meisten Beifalls sich erfreuen, gewählt, und sie mit einigen zweckmäfsig erscheinenden Abänderungen aufgenommen.

Einen Hauptgrund für die Brauchbarkeit der gewählten Bezeichnungsweise glaubt der Verf. darin zu finden, dafs sie alle in dieser Schrift behandelten einfachen und zusammengesetzten Begriffe, von denen viele bisher nicht in die Combinationslehre aufgenommen waren, gleich leicht, bequem und richtig darstellt, wie diefs aus der Bezeichnung für die Vertheilungen und Zerstreuungen der Elemente einer oder mehrerer Reihen in Fächer, für die Stellenelemente, der Combinationen zu bestimmten Summen, bei ausgeschlossenen Anfangs- und Schlufselementen u. s. w. hervorgeht.

Diefs sind die Gründe, welche den Verf. abhielten, der Bemerkung des Herrn Recensenten zu folgen, welche derselbe in einer Beurtheilung meiner „Forschungen im Gebiete der höheren Analysis" in der Haller Literaturzeitung machte. Die von ihm vorgeschlagene Bezeichnungsweise würde eine allgemeinere Ausdehnung, die hier nöthig wurde, nicht zulassen, wenn man auch von dem Umstande absehen wollte, dafs die von ihm vorgeschlagene Bezeichnungsweise schon eine bestimmte Bedeutung in der Mathematik hat, und defswegen, nach des Verf. Ansicht (§. 7) nicht wohl ohne Gefahr der Unsicherheit und Verwirrung für eine zweite verwendet werden darf.

Ueber die einzelnen Materien ist Folgendes zu bemerken: Die Einleitung, §. 1—7, ist gegeben, um den einfachen Zusammenhang vorzulegen, in welchem die Combinationen (Versetzungen und Verbindungen mit und ohne Wiederholungen) unter einander stehen, und auf ihn die weitere Entwicklung des Lehrgebäudes zu gründen. Schon in den Heidelberger Jahrbüchern (Jahrgang 1826) hat der Verf. hierauf aufmerksam gemacht. Er ist zu einfach, als dafs er sich nicht von selbst an die Hand geben sollte, und defswegen auch schon in manche Lehrbücher übergegangen. Er erleichtert die weitere Ausführung des Lehrgebäudes der Combinationen sehr und ist der Haltpunkt seiner sämmtlichen Bestandtheile. Aus ihm geht das Schema §. 6 hervor.

Die erste Abtheilung, §. 8—13, behandelt die Combinationen mit und ohne Wiederholungen mit ihren numerischen Ausdrücken. Die Gruppenanzahlen ergeben sich aus der hier angegebenen Entwicklungsweise sehr leicht. Die Gruppenanzahlen der Verbindungen ohne Wiederholungen sind von denen der Versetzungen ohne Wiederholungen abgeleitet.

Für die Bestimmung der Gruppenanzahlen der Verbindungen mit Wiederholungen, §. 13, sind zwei Methoden angegeben. Die erste läfst sich aus einer von Euler in seiner Einleitung in die Analysis, Cap. 16, angewendeten Methode ableiten, wie ich mich aus einer Vergleichung des angeführten Werkes überzeugte. Die zweite ist der Summirung der Reihen entnommen, sie schliefst sich der hier beobachteten Ableitung der Gruppenanzahlen der späteren Classen aus den früheren an, und steht an Einfachheit der ersten nicht nach.

Die zweite Abtheilung behandelt die Combinationen zu bestimmten Summen. Man kann die Combinationen zu bestimmten Summen aus allen Elementen einer Reihe bilden, die überhaupt einen Summenausdruck zu erzeugen fähig sind, oder aus einer beschränkten Elementenanzahl. Hiebei können bestimmte Anfangs-, Schlufs- und Zwischen-Elemente von der Erzeugung einer Summe ausgeschlossen seyn. Auf diese Art von Combinationen hat der Verf. schon in seinen Forschungen (Heidelberg bei A. Ofswald, 1831) aufmerksam gemacht und sie in die Combinationslehre eingeführt. Hier erscheinen sie in ihrem Zusammenhang mit dem ganzen Gebäude der Wissenschaft in gröfserer Allgemeinheit und erweitert.

Diese Bemerkung glaubte der Verfasser machen zu müssen, weil eine im J. 1833 (also zwei Jahre später) erschienene Schrift dieselbe, aber unter anderer Form dargestellte, Idee mit gänzlicher Umgehung meiner Arbeit für „ganz neu" erklärt.

Die Combinationen zu bestimmten Summen aus der vollständigen Elementenanzahl sind schon früher und öfters untersucht worden. Sie werden auch Zerfällungen der Zahlen genannt. Schon Euler hat sich in dem 16ten Kapitel seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Weingärtner in seiner combinatorischen Analysis und Spehr in seinem Lehrbegriff u. A. mit ihnen beschäftigt. Der Verf. hat nicht nur das Bekannte aufgenommen, sondern auch ihre Lehre zu vervollständigen sich bemüht, wie sich der aufmerksame Leser leicht überzeugen wird.

Das, was über die Combinationen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Elementen, mitgetheilt ist, dürfte nicht unwichtig seyn, da es Anwendungen nicht nur auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern auch auf Analysis zuläſst.

Die dritte Abtheilung berührt einen Gegenstand, der nicht ohne interessante Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, und der besser dort seine Ausführung findet. Deſswegen ist er hier nicht mitgetheilt.

Die vierte Abtheilung behandelt die Summirung der durch Combinationen erzeugten Producte. Für die Summenproducte, welche durch Versetzungen und Verbindungen sowohl ohne als mit Wiederholungen erzeugt werden, sind ganz allgemein geltende Formeln mitgetheilt. Die Gleichungen 73, 74, 86, 87, 88 und 89 sind schon in meinen Forschungen gegeben und ihre allgemeine Brauchbarkeit dort gezeigt. Für die Summe der aus den Verbindungen ohne Wiederholungen erzeugten

Producte sind hier weitere sehr zweckmäfsige und allgemein gültige Formeln 77 und 80 mitgetheilt. Der Verfasser hält die hier mitgetheilten Gleichungen um so beachtungswerther, weil sie für die weitere Ausbildung der Analysis, Differenzen- und Summenrechnung, und der mit diesen in Verbindung stehenden Doctrinen sehr wichtig zu werden scheinen und aufserdem zu Anwendungen in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung dienen. Wenigstens ist es dem Verf. gelungen, mittelst der Summenausdrücke für die Producte der Verbindungen mit Wiederholungen eine allgemeine für die positiven und negativen Unterschiede der Potenzial-Functionen gültige Formel aufzufinden, die auf gleich einfache Weise die einen wie die anderen Unterschiede bildet, und von der die schwer zu entwickelnde Bernoullische Reihe nur ein besonderer Fall ist. Hierüber sehe man meine Lehre von den aufsteigenden Functionen, Nr. 142, pag. 60 und die Vorrede zu meiner Algebra, pag. X, nach, und man wird sich von der Brauchbarkeit der vom Verfasser angegebenen Gleichungen eine bessere Ueberzeugung holen, wenn man auch ihre Anwendbarkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz zurückwerfen wollte. Nicht zu übersehen ist der Zusammenhang, in welchem die Summen der Verbindungen ohne Wiederholungen mit den Differenzialen und Differenzen der Fakultäten, und in welchem die Summen der Verbindungen mit Wiederholungen mit den Differenzen der Potenzialgröfsen stehen.

Die Gleichung 96 ist schon längst bekannt, und von Weingärtner in seiner combinatorischen Analysis angegeben, wie ich mich aus einer Vergleichung überzeugte.

In §. 41 meiner Forschungen habe ich bemerkt, dafs ich mich, aber ohne Erfolg, bemüht habe, eine Gleichung zu finden, welche auf einfachere Weise die Productensumme der Verbindungen ohne Wiederholungen darzustellen geeignet wäre. Der Herr Recensent meiner Forschungen hat in der allgem. hallischen Literaturzeitung eine Gleichung für Fakultäten mitgetheilt und glaubt mit ihr das gesuchte Mittel gefunden zu haben. Doch ist zu bemerken, daſs diese Gleichung nicht die gewünschten Dienste leisten möchte.

Die fünfte Abtheilung handelt von den Combinationen, welche durch die Verbindung der Gruppen einer oder mehrerer Elementenreihen erzeugt werden. Sie sind in der combinatorischen Analysis von groſser Wichtigkeit, wie aus den Andeutungen des §. 35 erhellt; denn diese Doctrin beruht gröſstentheils auf ihnen. Auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung zieht von ihnen viele Anwendungen. Drei allgemeine Auflösungen der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Gröſsen sind durch sie §. 32 gewonnen worden. Einiges Hierhergehörige findet man in der Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen von Meier Hirsch, IV, p. 103 u. ff. Die Abhandlung über Permutationen von Rothe, von welcher Meier Hirsch p. 107 des angeführten Werkes spricht, konnte sich der Verf. nicht verschaffen.

Die sechste Abtheilung betrachtet die Vertheilung der Elemente in Fächer und findet ihre Anwendung hauptsächlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In dem eben angegebenen Werke von Meier Hirsch findet man Einiges, was hierher gehört.

Die siebente Abtheilung beschäftigt sich mit der

Zerstreuung der Elemente in Fächer. Anwendungen hievon lassen sich nicht allein in der Analysis, sondern auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewinnen.

Die achte Abtheilung beschäftigt sich mit den Stellenelementen. So hat der Verfasser diese Art von Combinationen benannt, weil der angegebene Name das Wesen dieser Combinationen gut zu bezeichnen scheint. Sie finden ihre Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie auch schon Euler *(Opuscula analytica)* und Laplace *(Théorie analytique des probabilités)* einige hierher bezügliche Anwendungen gemacht haben. Die Gleichungen, welche hier mitgetheilt sind, finden sich nicht in den angeführten Werken, aber die dort angegebenen Anwendungen lassen sich aus ihnen gewinnen. Die hier gewählte einfache und elementare Entwicklungsweise gestattet noch anderweitige Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, als die in den genannten Werken gegebenen, was die hier mitgetheilten Entwicklungen besonders empfehlen möchte.

Die neunte Abtheilung enthält die Darstellung der Zahlenwerthe sehr grofser Fakultäten. Sie dürfte vielleicht nicht unwillkommen seyn, indem sie in Stand setzt, diejenigen Fälle, zu deren Beurtheilung keine ganz genauen Bestimmungen erfordert werden, näherungsweise und ziemlich genau auf eine sehr leichte und schnelle Weise anzugeben, was bei Berechnung der Wahrscheinlichkeit häufig eintritt. Die Gleichungen Nr. 179, 180, 181 sind schon längst bekannt und einige der hier vorkommenden vom Verf. schon im Crelle'schen Journale mitgetheilt worden.

Was nun endlich die Combinationslehre als Wissenschaft betrifft, so kann sie auf diesen Namen noch nicht, wie die übrigen Zweige der Mathematik, Anspruch machen. Die Zeit, seit welcher sie mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet wird, ist noch zu kurz, als dafs sie mit allen, einer solchen Stellung entsprechenden, Erfordernissen ausgestattet seyn könnte. Die übrigen Zweige der Mathematik erfreuen sich schon seit langer oder längerer Zeit einer sorgsamen Pflege und gröfserer Aufmerksamkeit, haben weniger mit ungünstigen Ansichten zu kämpfen, und sind daher auch weiter voran geschritten; dennoch ist noch nicht bei allen eine sichere Basis gewonnen. Wie wäre diefs schon von der Combinationslehre in ihren jungen Jahren zu erwarten. Auch diese Schrift ist nur als ein Versuch zu betrachten, ihre wissenschaftliche Stellung zu begründen und ihre Lehren systematisch zu entwickeln.

Der Verf. ist der Meinung, dafs die Methode des Generalisirens oder einer allgemeinsten Theorie das Aufblühen einer Wissenschaft keinesweges fördern, wohl aber hemmen möchte. Zuerst führt man der aufkeimenden Pflanze Nahrung und Säfte zu, damit sie wachsen und erstarken könne, dann gibt man ihr eine Stütze und zuletzt legt man Messer und Scheere an, um Auswüchse zu hindern. In diesem Falle befindet sich die Combinationslehre gegenwärtig. Es ist vor Allem nöthig, dafs die Combinationslehre erstarke, dafs sie Nahrung für ihr Wachsthum gewinne, Aeste und Zweige treibe und sie mit Blättern und Blüthen schmücke. Die Aufgabe ihrer Bearbeiter ist: sie in ihrem Wachsthume zu unterstützen, und, erst wenn sie gehörig erstarkt ist, von unfruchtbaren Zweigen zu befreien.

Es möchte daher dem Entwicklungsgange einer Wissenschaft vor Allem zuträglich seyn, die Sätze, welche ihr angehören, zu erforschen, das Feld, worauf ihr Gebäude aufgeführt werden soll, wohl zu untersuchen, das Material, woraus dasselbe erbaut werden soll, zusammen zu tragen, und mit der Errichtung des Gebäudes zu beginnen, wenn genug Material vorhanden ist.

Der Plan zu einem Gebäude kann nur mit Einsicht und Sicherheit gemacht werden, wenn die Mittel zu seiner Aufführung vollkommen bekannt sind. Fehlt aber eine genaue Kenntnifs der vorhandenen Mittel, so wird sich wohl kaum eine klare Uebersicht über die Ausführbarkeit des Plans gewinnen lassen. Ein wissenschaftliches Gebäude aber läfst sich leicht ändern, sobald neues Material vorhanden ist, welches eine Erweiterung oder Vergröfserung bedingt.

Auf diese Weise wird man am besten einer Wissenschaft dienen. Von dieser Ansicht ist der Verfasser ausgegangen und hat versucht, nach Kräften das Seinige beizutragen. Möchte es ihm gelungen seyn!

Die vorliegende Schrift war ihrer Anlage nach schon im Laufe des Jahres 1833 niedergeschrieben. Die Ueberarbeitung konnte aber vom Verf. erst im vorigen Jahre vorgenommen werden, wefswegen sich der Druck bis jetzt verschob. Die hierher gehörige Literatur hat der Verf. in dem Vorworte und an den betreffenden Stellen in der Schrift selbst in Kürze angegeben, wodurch der Leser in Stand gesetzt ist, die früheren Leistungen zu würdigen, und das, was diese Schrift Neues enthält, zu erkennen.

Sollte hiebei eine Notiz zu geben vergessen seyn, so möge diefs der Leser nicht übel deuten, denn es ist nicht geschehen, um die Verdienste Anderer zu schmälern. Im Gegentheil erkennt der Verfasser die Verdienste eines Jeden um die Wissenschaft mit Freuden zum Voraus an.

Ueber die Literatur der Combinationslehre und ihre Geschichte findet der Leser in Klügel's mathematischem Lexikon (1. Bd.) und den dazu gehörigen Supplementen (1. Bd.) weitere Auskunft.

Freiburg, im April 1837.

L. Oettinger.

Inhalt.

Einleitung §. 1—7.

Der Leser möge folgende Unrichtigkeiten verbessern:

Seite 8 Zeile 18 v. u. lies lateinisches statt lateinitches.
„ 9 „ 12 v. o. l. $P(a_1 \ldots . a_n)^2$ st. $P(a_1 \ldots . a_n)^3$
„ 9 „ 9 v. u. l. $P[a_1 \ldots . a_n]^2$ st. $P[a_1 \ldots . a_n]^3$
„ 41 „ 2 v. u. l. leicht st. leieht.
„ 47 „ 16 v. u. l. $SP(a_1^p, a_2^q \ldots .)^n$ st. $SP(a_1^p, a_2^q \ldots .)^x$
„ 67 „ 5 v. u. l. $+ \ldots \left(\frac{x}{1}\right)^{r|1}$ st. $+ \left(\frac{x}{1}\right)^{r|1} =$
„ 93 „ 5 v. u. l. müssen st. mufs.
„ 96 „ 2 v. u. l. Sie geht st. Sie 122 geht.

Combinationslehre.

Einleitung.

§. 1.

Irgend eine unbestimmte Zahl von Elementen, die von einander gesondert betrachtet werden sollen, bezeichnen wir auf folgende Weise

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\ldots$$

die rechts unten angehängten kleinen Zahlen, die man Stellenzahlen nennen mag, machen es möglich, die vorliegenden Elemente sogleich auf jede beliebige beschränkte Anzahl zurück zu führen. Alle Elemente zusammen werden wir mit dem Namen Elementen-Reihe bezeichnen, um sie von andern Elementen-Reihen, die wir auf ähnliche Weise

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots\ldots$$
$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots\ldots$$

u. s. w. bezeichnen, zu unterscheiden.

Die Elemente einer Reihe müssen nicht nothwendig in einem Zusammenhange unter einander stehen. Sie können unabhängig von einander seyn, obgleich ein Zusammenhang nicht ausgeschlossen ist, der auch in manchen Fällen, wie bei den Combinationen zu bestimmten Summen, oder bei den Producten der Combinationen, hervor tritt.

§. 2.

Die Elemente einer oder mehrerer Reihen können auf verschiedene Weise neben einander gereiht werden, und mancherlei Stellungen unter einander annehmen. Die Zusammenstellungen, in welchen die Elemente zu gleichen Anzahlen neben einander erscheinen können, werden mit dem allgemeinen Namen Combinationen bezeichnet. Die Elemente können nämlich entweder einzeln, oder zu zweien, dreien, vieren etc. neben einander erscheinen. Hiernach kann man zwischen Combinationen zu einem, zu zwei, zu drei, zu vier Elementen etc. oder besser zwischen Combinationen zur ersten, zweiten, dritten, vierten Classe etc. unterscheiden. Unter Gruppe oder Complexion wird jedes einzelne Gebilde aus irgend einer Combinations-Classe verstanden.

§. 3.

Die Combinationen zerfallen in zwei Arten: in Versetzungen und Verbindungen.

Die erste Art betrachtet die einer Classe zugehörigen Elemente in ihrer Stellung oder Aufeinanderfolge — ordnet sie und weiset jedem Elemente eine Stelle nach der andern an, bis es alle mögliche Stellen in seiner Beziehung auf die übrigen durchlaufen hat.

Die zweite betrachtet die einer Classe zugehörigen Elemente in ihrer Gesammtheit, vergleicht jede Gruppe mit den übrigen und beachtet nicht die Stelle, in welcher die Elemente unter einander erscheinen, sondern untersucht in wie fern sich die Gruppen durch die in ihnen vorkommenden Elemente von einander unterscheiden.

Die Versetzungen werden wir durch den Buchstaben P, die Verbindungen durch C andeuten, wie diefs auch von Ohm, Spehr, v. Ettingshausen, Thibaut u. a. geschehen ist.

Die Verbindungen werden in manchen Schriften Combinationen im engern Sinn, auch schlechthin Combinationen genannt. Gegen diese Benennung hat der Sprachgebrauch entschieden, wie deutlich aus den Ausdrücken: combinatorische Analysis, combinatorisches Verfahren etc. hervorgeht, wobei bekanntlich nicht die Combinationen im engern Sinne allein, sondern Versetzungen und Verbindungen in Betracht kommen. Ganz unzweckmäfsig ist die Benennung geordnete Verbindungen.

§. 4.

Die Elemente, welche in den Gruppen der verschiedenen Combinationsclassen vorkommen, können sämmtlich unter einander verschieden seyn, so dafs jedes Element in einer Gruppe nur einmal, oder sie können einander gleich seyn, so dafs ein oder mehrere Elemente mehreremal vorkömmt. Hiedurch wird man auf die Unterscheidung zwischen Combinationen ohne und mit Wiederholungen geführt, woraus sich folgendes allgemeine Schema ableitet, das bei jeder besondern Betrachtungsweise der Combinationen wiederkehren mufs;

1) Versetzungen:
   a. ohne Wiederholungen,
   b. mit Wiederholungen,
      α. mit beschränkten Wiederholungen,
      β. mit unbeschränkten Wiederholungen;

2) Verbindungen:
   a. ohne Wiederholungen,
   b. mit Wiederholungen,

α. mit beschränkten Wiederholungen,
β. mit unbeschränkten Wiederholungen.

Die Versetzungen mit unbeschränkten Wiederholungen werden auch Variationen genannt, und als eine besondere Art der Combinationen von manchen angeführt, was nach der vorliegenden Eintheilung unzuläfsig ist. Diefs rechtfertigt sich zum Theil aus der Einfachheit des vorstehenden Schemas, und dann überhaupt aus der Analogie, die zwischen den Versetzungen und Verbindungen herrscht, wornach sich beide Arten von Combinationen von einander ableiten lassen, wenn man in jede Gruppe die möglichen Versetzungen der Elemente einführt, oder aus ihr entfernt.

Die eben mitgetheilte Ansicht über die Natur der Combinationen, die uns für eine systematische Entwickelung der Combinations-Lehre die geeignetste scheint, haben wir schon in den Heidelberger Jahrbüchern der Literatur vom Jahr **1826 P. 1064** u. ff. ausgesprochen.

Die Combinationen mit unbeschränkten Wiederholungen werden wir gewöhnlich schlechthin Combinationen mit Wiederholungen nennen.

§. 5.

Bei den im vorhergehenden §. gegebenen Bestimmungen wurden die Elemente als unabhängig von einander betrachtet. Nimmt man nun in den Begriff der Combinationen, den Zussammenhang, worein die Elemente unter einander treten können, auf; so lassen sich mancherlei Beziehungen der Elemente unter einander denken, von denen wir folgende drei: die der Addition, die der Subtraction, die der Multiplikation heraus heben.

Legt man nämlich den Elementen, welche den Gruppen einer Combinationsclasse zugehören, Werthe bei und zählt sie zusammen; so wird man auf die Summen der Combinationen geführt, welche defswegen Combinationen zu bestimmten Summen genannt werden.

Wendet man auf die Gruppen das Geschäft der Subtraction an, so wird man auf Differenzen der Combinationen und dadurch auf die Benennung Combinationen zu bestimmten Unterschieden geführt.

Betrachtet man die Elemente der Gruppen einer Combinationsclasse als Factoren und bildet aus ihnen alle möglichen Producte, so wird man hiedurch auf den Begriff der Producte der Combinationen geführt, die wir Producten Summe der Combinationen oder schlechthin Summen der Combinationen nennen wollen.

Zu diesen Betrachtungsweisen lassen sich noch gar manchfaltige gesellen. Die weitere Ausdehnung führt aber gar zu leicht ins

Unbestimmbare oder auf Einzelnheiten, die hier nicht ihre Stelle finden können. Werden sie nöthig, so wird die Wissenschaft in ihrem Entwicklungsgange auf sie hinweisen. Auf manche werden wir später aufmerksam zu machen Gelegenheit finden.

Auf die Verbindung der Combinationen zu verschiedenen Classen unter einander machen wir ferner noch aufmerksam. Wir werden sie mit dem Namen Vertheilung der Elemente in Unterabtheilungen oder in Fächer bezeichnen. Zu ihnen soll sich noch die Untersuchung einiger anderer Betrachtungsweisen der Combinationen gesellen.

§. 6.

Nach den in den beiden vorhergehenden §§. gemachten Bemerkungen gewinnt man folgendes Schema.

I. Combinationen im Allgemeinen.

1) Versetzungen:
 a. ohne Wiederholungen,
 b. mit Wiederholungen,
 α. mit beschränkten Wiederholungen,
 β. mit unbeschränkten Wiederholungen.

2) Verbindungen:
 a. ohne Wiederholungen,
 b. mit Wiederholungen,
 α. mit beschränkten Wiederholungen,
 β. mit unbeschränkten Wiederholungen.

II. Combinationen zu bestimmten Summen.

1) Versetzungen zu bestimmten Summen:
 a. ohne Wiederholungen,
 b. mit Wiederholungen,
 α. mit beschränkten Wiederholungen,
 β. mit unbeschränkten Wiederholungen;

2) Verbindungen zu bestimmten Summen:
 a. ohne Wiederholungen,
 b. mit Wiederholungen,
 α. mit beschränkten Wiederholungen,
 β. mit unbeschränkten Wiederholungen.

III. Combinationen zu bestimmten Unterschieden.

1) Versetzungen zu bestimmten Unterschieden:
 a. ohne Wiederholungen,
 b. mit Wiederholungen,

α. mit beschränkten Wiederholungen,
β. mit unbeschränkten Wiederholungen;

2) Verbindungen zu bestimmten Unterschieden:
a. ohne Wiederholungen,
b. mit Wiederholungen,
α. mit beschränkten Wiederholungen,
β. mit unbeschränkten Wiederholungen.

IV. Producten-Summen der Combinationen.

1) Summe der Versetzungen:
a. ohne Wiederholungen,
b. mit Wiederholungen,
α. mit beschränkten Wiederholungen,
β. mit unbeschränkten Wiederholungen;

2) Summe der Verbindungen:
a. ohne Wiederholungen,
b. mit Wiederholungen,
α. mit beschränkten Wiederholungen,
β. mit unbeschränkten Wiederholungen.

Bei dem vorliegenden Schema ist vorausgesetzt, dafs die Elementen-Reihen, woraus die Combinationen gebildet werden sollen, vollständig sind, also mit dem Elemente, dessen Stellenzahl die Einheit ist, beginnen, mit irgend einem fixirten Schlufselemente enden, und alle zwischenliegende Elemente, die überhaupt fähig sind bei der Bildung der Gruppen einer Combinationsclasse mitzuwirken, umfassen. Es ist jedoch auch möglich, dafs Combinationen, wie z. B. die zu bestimmten Summen, gebildet werden sollen aus Reihen, in denen Anfangs- oder Schlufs- oder auch Zwischenelemente fehlen, die bei der vollständigen Bildung der Combinationen mitwirken würden. Für diese wiederholt sich das angegebene Schema, und man würde dann Combinationen aus irgend einer Anzahl bestimmter Elemente erhalten. Hierauf haben wir schon in unsern Forschungen im Gebiete der Analysis 1. Untersuchung (Heidelberg bei Ofswald 1831) aufmerksam gemacht, und sie in die Lehre von den Combinationen eingeführt.

Die Combinationen sind noch nicht nach allen den im Schema aufgeführten Beziehungen untersucht. Auch hier sollen sie in der angegebenen Ausdehnung in so weit untersucht werden, als sie sich hauptsächlich zu Anwendungen, worunter auch die auf Wahrscheinlichkeits-Rechnung aufgenommen ist, benutzen lassen können. Das Schema soll den Gang der Untersuchang bezeichnen und dazu beitragen dem noch immer unsichern Boden der Combinations-Lehre eine festere Unterlage zu geben.

Die unter II, 1 angeführten Materien sind von den Mathematikern in mancher Beziehung, besonders zur Entwicklung der Potenzen des Polymoniums, bearbeitet worden; die unter III und IV angegebenen wenig oder gar nicht, wenn man nicht wegen III eine Abhandlung von Scherk, Journal von Crelle XI. Bd. 3. Hft. hieher rechnen will.

§. 7.

Es ist nicht zu läugnen, dafs die Combinationslehre in ihrer Bezeichnungsweise auf keinem festen Boden steht und dafs ihr die so wünschenswerthe Einheit mangelt. Man hat die Bezeichnungsart der ersten Begründer gänzlich verlassen, und wohl nicht mit Unrecht, denn sie hätte dem weiteren Fortschreiten der Wissenschaft nicht genügt. Mit der Ueberschreitung dieser Grenze trat aber ein anderer sehr mifslicher Umstand ein. Man betrachtete die Bezeichnung als eine Nebensache, über die jeder nach Willkühr verfügen könnte. So kam es, dafs jeder der über Combinationen schrieb andere Zeichen wählte, was das Studium dieser Wissenschaft sehr erschwerte, ihr im Fortschreiten nachtheilig ist, anstatt sie zu fördern, und ihr noch dazu den Vorwurf der Unwissenschaftlichkeit zuführt.

Dieser Uebelstand wurde von vielen Freunden der Wissenschaft mit Recht gerügt, und es ist Bedürfnifs, die Zeichen in der Combinationslehre, so wie letztere selbst als Wissenschaft, festzustellen, wozu die Worte dieses §. beitragen sollen. *)

Wenn nun die im Folgenden gewählte Bezeichnungsart mit der mancher Mathematiker nicht übereinstimmt, ja sogar selbst von derjenigen, die wir in unsern frühern Werken gebraucht haben, abweicht; so wird es um so nöthiger seyn, die Gründe dieser Abänderung vorzulegen.

Werden neue Zeichen in einem Zweige der Wissenschaft gewählt, so müssen sie so beschaffen seyn:

1) dafs sie mit der Methode, wornach die Zeichen einer Wissenschaft überhaupt gewählt werden, übereinstimmen, dem Entwicklungsgange der Wissenschaft sich anschliefsen, und eine rich-

*) Zwei Schriften, die über diesen Gegenstand ausschliefslich handeln sind: 1) Weingärtner über die Bezeichnung in der combinatorischen Annalysis, Erfurt 1831, 4. 2) C. G. Scheibert. Ein Versuch die Combinationslehre als Wissenschaft zu begründen und die Wort- und Zeichensprache in ihr festzustellen. 4.

tige Stellung in ihr einnehmen. Willkühr und Unsicherheit müssen verbannt seyn und sich allgemeinen Gesichtspunkten unterordnen;

2) dafs sie den Begriff, den sie andeuten sollen, richtig auffassen und einfach, klar und erschöpfend vor Augen legen. Alle Elemente, welche zur Construction des Begriffes mitwirken, müssen aufgenommen, keines darf übersehen, nichts Unerhebliches oder Zufälliges darf als wesentlich aufgenommen seyn. Endlich

3) müssen Zeichen, denen die Wissenschaft schon eine bestimmte Bedeutung gegeben hat, für diese ausschliefslich beibehalten, und können nicht auf andere Begriffe übergetragen werden. Diefs würde eintreten, wenn man einfache Klammern zur Bezeichnung der Combinationen gebrauchen wollte, was von einigen bereits geschehen ist, indem die Klammern schon eine bestimmte Bedeutung (die des Zusammenfassens der Gröfsen in den Begriff der Totalität) in der Mathematik haben.

Berücksichtigt man nun, dafs die Mathematik, diejenigen Begriffe, welche sie in der neuern Zeit aufgestellt hat, mit einem oder einigen Anfangsbuchstaben des ihn andeutenden Wortes, bezeichnet, wie dies deutlich bei der Bezeichnung der Differenzen, Sinus, Cosinus etc. der Functionen, Logarithmen etc. hervortritt; so wird es nicht unrichtig seyn, die Versetzungen durch P (Anfangsbuchstabe des Wortes Permutation) und die Verbindungen durch C (Anfangsbuchstabe des Wortes Combination) anzudeuten, die Elemente, woraus die Combinationen gebildet werden sollen, in Klammern neben anzuschreiben, und die Classe zu welcher sie gebildet werden sollen oben rechts an die Klammer zu setzen. Die Classe ist mit der Dimension, in welcher die Elemente anzureihen sind, einerlei, und daher die Classenzahl Exponent. Die weiter hinzu kommenden Bestimmungen werden in die Klammer aufgenommen. Die Wiederholungen werden, wie diefs in vielen Schriften geschieht, durch ein oben rechts an die Buchstaben P oder C gesetzten Strich (′) angezeigt.

Hiernach bezeichnen wir die Versetzungen der Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n$ zur q^{ten} Classe durch

$$1)\ P(a_1, \ldots a_n)_q$$

Die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, worin das Element a_2 gerade k, a_4, aber h mal u. s. w. vorkommen soll, zur q^{ten} Classe durch

$$2)\ P(a_1, a_2^k, a_3, a_4^h, a_5 \ldots a_n)^q$$

Die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$, zur q^{ten} Classe durch

3) $P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$

Die Verbindungen der Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n$ zur q^{ten} Classe durch

4) $C(a_1, \ldots a_4)^q$

Die Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$ zur q^{ten} Classe durch

5) $C(a_1, a_2^k, a_3, a_4^h, a_5 \ldots a_n)^q$

Die Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$ zur q^{ten} Classe

6) $C'(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$

Die gleiche Bezeichnung behalten wir bei den Combinationen zu bestimmten Summen und Unterschieden bei, und setzen in die Klammer vor die Elemente den kleinen lateinischen, aber langen Buchstaben (ſ) mit Angabe der Summe, und den kleinen lateinischen Buchstaben (d) mit Angabe des Unterschiedes. Hiernach ist z. B. das Zeichen für die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zur Summe n zur q^{ten} Classe.

7) $P'(ſn; a_1, a_2, \ldots)^q$

für die nämlichen Versetzungen zum Unterschiede n

8) $P'(dn; a_1, a_2, a_3 \ldots)^q$

die Summe der Producte, welche durch die Combinationen einer Klasse gebildet werden, zeigen wir dadurch an, dafs wir dem Combinationszeichen ein grofses lateinitches S, als Summenzeichen, vorschreiben. Hiernach ist die Summe der Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zur q^{ten} Classe zu bezeichnen durch:

9) $SC'(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)^q$

Im folgenden werden wir uns statt des Ausdrucks Combinationen ohne Wiederholungen schlechthin des Ausdrucks Combinationen (Versetzungen oder Verbindungen) bedienen.

Sollen die Gebilde, welche durch die Darstellung der Combinationen entstehen, bezeichnet werden, so werden wir uns bei den vorstehenden Zeichen, der runden Klammern; sollen aber die numerischen Ausdrücke, welche der Zahl der Combinationen irgend einer Classe entsprechen, angedeutet werden, so werden wir uns statt der runden Klammern der eckigen bedienen. Hiernach wird die Zahl der Versetzungen aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$ zur q^{ten} Classe durch

$$P[a_1, a_2, \ldots a_n]$$

angedeutet werden u. s. w.

I. Combinationen im Allgemeinen.

1) Versetzungen.

§. 8.

Versetzungen ohne Wiederholungen.

Die Versetzungen aus den Elementen a_1, a_2, a_3 ...... a_n zur ersten Classe sind die Elemente in ihrer Einzelnheit selbst. Ihre Anzahl ist der Zahl der Elemente gleich.

Die Versetzungen aus den genannten Elementen zur zweiten Classe werden entstehen, wenn jede Gruppe aus der ersten Classe, (also jedes einzelne Element) sich der Reihe nach mit allen übrigen Elementen, die nicht in ihr vorkommen, verbindet. Sie sind:

$$
\begin{array}{lllll}
P(a_1 \ldots\ldots a_n)^3 = a_1\,a_2 & + a_2\,a_1 & + a_3\,a_1 & + \ldots\ldots & a_n\,a_1 \\
 a_1\,a_3 & a_2\,a_3 & a_3\,a_2 & & a_n\,a_2 \\
 a_1\,a_4 & a_2\,a_4 & a_3\,a_4 & & a_n\,a_3 \\
 a_1\,a_5 & a_2\,a_5 & a_3\,a_5 & & a_n\,a_4 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_1\,a_{n-1} & a_2\,a_{n-1} & a_3\,a_{n-1} & & a_n\,a_{n-2} \\
 a_1\,a_n & a_2\,a_n & a_3\,a_n & & a_n\,a_{n-1}
\end{array}
$$

Die Anzahl der durch die Versetzungen zur zweiten Classe erzeugten Gruppen bestimmt sich, wenn man bemerkt, dafs jede Gruppe der ersten Classe mit $(n-1)$ Elementen in Verbindung tritt. Die erste Classe hat n Gruppen, denn die Gruppen stimmen mit der Elementen-Anzahl überein; also geschieht das Zusammentreten n mal und man hat hiernach für die gesuchte Anzahl.

$$P[a_1, \ldots\ldots a_n]^3 = n\,(n-1) = n^{2|-1}$$

Die Versetzungen aus den genannten Elementen zur dritten Classe werden entstehen, wenn jede Gruppe aus den Versetzungen zur zweiten Classe mit jedem Elemente in Verbindung tritt, welches in der Gruppe nicht erscheint. Sie sind:

$$
\begin{array}{llll}
P(a_1, \ldots\ldots a_n)^3 = a_1\,a_2\,a_3 & + a_1\,a_3\,a_2 & + \ldots\ldots + & a_n\,a_{n-1}\,a_1 \\
 a_1\,a_2\,a_4 & a_1\,a_3\,a_4 & & a_n\,a_{n-1}\,a_2 \\
 a_1\,a_2\,a_5 & a_1\,a_3\,a_5 & & a_n\,a_{n-1}\,a_3 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_1\,a_2\,a_n & a_1\,a_3\,a_n & & a_n\,a_{n-1}\,a_{n-2}
\end{array}
$$

Alle Gruppen der zweiten Classe treten also mit $(n-2)$ Elementen in Verbindung. Hiernach ist die gesuchte Anzahl

$$P[a_1, a_2 \ldots a_n]^3 = P[a_1 \ldots\ldots a_n]^2 . (n-2) = n(n-1)(n-2) = n^{3|-1}$$

Das Gesagte steigert sich leicht in das Allgemeine und die Gruppen-Anzahl der Versetzungen aus den genannten Elementen zur q^{ten} Classe ist

$$10)\ P[a_1, \ldots a_n]^q = n(n-1)(n-2) \ldots (n-q+1) = n^{q|-1}$$

Ist Elementenzahl und Versetzungsclasse gleich, so geht der vorstehende Ausdruck in folgenden über

$$11)\ P[a_1, \ldots\ldots a_n]^n = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1 = n^{n|-1} = 1^{n|1}$$

Steigt man bei n, als Versetzungsclassenzahl abwärts, so leitet sich leicht aus der Natur der Facultäten ab

$$12)\ P[a_1, \ldots\ldots a_n]^0 = n^{0|-1} = 1$$

ferner ist

$$13)\ P[a_1, \ldots\ldots a_n]^{n+r} = 0$$

Bisher haben mir nur eine Elementen-Reihe betrachtet. Dehnen wir das Gesagte auf zwei und mehr Elementen-Reihen, deren Elemente gleichartig betrachtet werden,

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 & \ldots\ldots & a_n \\ b_1, & b_2, & b_3 & \ldots\ldots & b_m \\ c_1, & c_2, & c_3 & \ldots\ldots & c_o \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \end{matrix}$$

u. s. w. aus, so steigern sich mit dem Zuwachse neuer Elemente die Gruppenanzahlen, und man hat für die Zahl der Versetzungen aus mehreren Elementen-Reihen zur q^{ten} Classe folgende Bestimmung

$$14)\ P[a_1, \ldots\ldots a_n, b_1, \ldots\ldots b_m, c_1, \ldots\ldots c_0, \ldots]^q =$$
$$= (n+m+o+\ldots)(n+m+o+\ldots-1) \ldots (n+m+o+\ldots-q+1)$$
$$= (n+m+o+\ldots)^{q|-1}$$

§. 9.

Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen.

Unter Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen verstehen wir solche, in deren sämmtlichen Gruppen ein oder mehrere Elemente mehreremal und zwar gleich viel mal wiederholt vorkömmt. Sie leiten sich in ihrer entwickelten Darstellung aus den Versetzungen ohne Wiederholungen ab, wenn in ihren Gruppen ein oder mehrere Elemente gleich gesetzt und die hiedurch gleich erscheinenden Gruppen bis auf eine ausgeschieden werden.

Die Bildungsweise dieser Versetzungen wird sich an folgendem speciellen Falle, welcher die Versetzungen zur vierten Classe darstellt, verdeutlichen.

$$P(a_1, a_2, a_3, a_3)^4 = \begin{array}{llll} a_1\,a_2\,a_3\,a_3 & + \; a_2\,a_3\,a_1\,a_3 & + \; a_2\,a_3\,a_3\,a_1 \\ a_2\,a_1\,a_3\,a_3 & \; a_3\,a_2\,a_1\,a_3 & \; a_3\,a_2\,a_3\,a_1 \\ a_1\,a_3\,a_2\,a_3 & \; a_1\,a_3\,a_3\,a_2 & \; a_3\,a_3\,a_1\,a_2 \\ a_3\,a_1\,a_2\,a_3 & \; a_3\,a_1\,a_3\,a_2 & \; a_3\,a_3\,a_2\,a_1 \end{array}$$

Die Bestimmung der Gruppenanzahl der Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen leitet sich aus denen der Versetzungen ohne Wiederholungen ab, wenn man berücksichtigt, dafs so vielmal jede Gruppe weniger entstehen wird, als die gleichgesetzten Elemente hätten unter einander Versetzungen eingehen können, wenn sie verschieden gewesen wären. Hiernach ist die Gruppenanzahl des vorliegenden Falles

$$P[a_1, a_2, a_3, a_3]^4 = \frac{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,.}{1\,.\,2\,.} = \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1}}$$

Bildungsweise und Schlüsse bleiben für alle Classen gleich, und sind allgemein. Sie dehnen sich leicht auf die Fälle aus, wenn mehrere Elemente mehrere mal in jeder Gruppe gleichgesetzt werden sollen. Die Gruppenanzahl der Versetzungen aus den Elementen a_1, a_2, a_3, ... worin ein Element p, ein zweites q, ein drittes r mal etc. wiederholt vorkommen soll, ist:

$$15)\; P[a_1\, a_2^p, a_3, a_4^q, a_5^r, \ldots\ldots]^n =$$
$$= \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r\ldots\ldots} = \frac{n^{n|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}.1^{r|1}\ldots\ldots}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dafs die Bedingungsgleichung für die Versetzungsclasse

$$n = 1 + p + 1 + q + r + \ldots\ldots\ldots$$

gilt. Schlüsse und Bildungsweise ändern sich nicht, wenn mehrere Elementen-Reihen in Frage stehen. Es ist

$$16)\; P[a_1^p, a_2^q, \ldots\ldots b_1^r, b_2^s, \ldots\ldots c_1^t, c_2^u \ldots\ldots]^n =$$
$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots p.1.2\ldots q\ldots 1.2\ldots r.1.2\ldots s.\ldots 1.2\ldots t.1.2\ldots u\ldots} =$$
$$= \frac{n^{n|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}\ldots.1^{r|1}.1^{s|1}\ldots 1^{t|1}.1^{u|1}\ldots}$$

wobei die Bedingungsgleichung für den Classenexponenten gilt

$$n = p + q + \ldots + r + s + \ldots + t + u + \ldots$$

Die vorstehende Gleichung kann auch unter folgender Form ohne Bedingungsgleichung erscheinen

$$17)\; P[a_1^p, a_2^q\ldots\ldots b_1^r, b_2^s\ldots\ldots c_1^t, c_2^u\ldots\ldots]^n =$$
$$= \frac{(p+q+\ldots+r+s+\ldots+t+u+\ldots)^{p+q\ldots+r+s+\ldots+t+u\ldots|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}.\ldots\ldots 1^{r|1}.1^{s|1}\ldots\ldots 1^{t|1}.1^{u|1}\ldots\ldots}$$

Die Gleichungen dieses § sind allgemeiner, als die des vorhergehenden, und man kann die des vorhergehenden aus den eben gegebenen ableiten, wenn man allenthalben $p = q = r = s = \ldots\ldots = 1$

setzt. Zu bemerken ist, dafs bei diesen Versetzungen die Classenzahl der Elementenzahl immer gleich ist.

§. 10.

Versetzungen mit Wiederholungen.

Die Versetzungen mit Wiederholungen unterscheiden sich von denen ohne oder mit beschränkten Wiederholungen dadurch, dafs die Elemente nicht nur unter einander, sondern auch jedes mit sich selbst ohne Beschränkung in Verbindung tritt.

Die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2 \ldots a_n$ zur ersten Classe sind die Elemente selbst. Gruppen und Elementenanzahl sind also auch hier einander gleich.

Die Versetzungen mit Wiederholungen aus denselben Elementen zur zweiten Classe entstehen, wenn jedes Element der Reihe mit jeder Gruppe der ersten Classe in Verbindung tritt. Die entwickelte Darstellung ist:

$$\begin{array}{lcccccccc} P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^2 = & a_1 a_1 & + & a_2 a_1 & + & a_3 a_1 & + \ldots + & a_n a_1 \\ & a_1 a_2 & & a_2 a_2 & & a_3 a_2 & & a_n a_2 \\ & a_1 a_3 & & a_2 a_3 & & a_3 a_3 & & a_n a_3 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & a_1 a_n & & a_2 a_n & & a_3 a_n & & a_n a_n \end{array}$$

Die Gruppenanzahl bestimmt sich, wenn man berücksichtigt, dafs jedes von n Elementen mit n Gruppen zusammentritt. Hiernach ist.

$$P'[a_1 \ldots . a_n]^2 = n \times n = n^2$$

Die Versetzungen mit Wiederholungen zur dritten Classe werden gebildet werden, wenn sich jede Gruppe der zweiten Classe mit jedem Elemente verbindet. Hiernach verbinden sich n^2 Gruppen mit jedem von n Elementen. Es ist also

$$P'[a_1, \ldots a_n]^3 = P'[a_1, \ldots . a_n]^2 . n = n^2 . n = n^3$$

Der Uebergang von jeder Classe auf die nachfolgende ist der gleiche, und daher allgemein. Hieraus ergibt sich für die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$ zur q^{ten} Classe

$$18)\ P'[a_1, \ldots a_n]^q = n^q$$

Schlüsse und Bildungsweise werden nicht geändert, wenn auch mehrere Elementen-Reihen in Frage kommen. Es ist allgemein

$$19)\ P'[a_1, \ldots a_n, b_1 \ldots b_m, c_1, \ldots c_o \ldots]^q = (n + m + o + \ldots)^q$$

Die Versetzungen mit Wiederholungen haben das Eigenthümliche, dafs bei ihnen Versetzungsclasse und Elementenanzahl unter einander in gar keinem Zusammenhange stehen, sondern ganz unabhängig sind. Die Elementenanzahl kann die Versetzungsclasse und umgekehrt überschreiten. Letztere Eigenschaft haben die Versetzungen ohne und mit beschränkten Wiederholungen nicht, und die Versetzungsclasse kann nicht gröfser als die Elementenanzahl seyn, nach §. 8 Nro 13; sie mufs entweder kleiner seyn, oder kann ihr höchstens gleichkommen.

2) Verbindungen.

§. 11.

Verbindungen ohne Wiederholungen.

Die Gruppen der einer bestimmten Classe zugehörigen Verbindungen unterscheiden sich durch Aufnahme neuer Elemente von einander. Eine bestimmte Anordnung in den Elementen wird die Bildung der Gruppen für die höheren Verbindungsclassen sehr erleichtern. Diese Anordnung hängt von der Willkühr ab; die natürliche Reihenfolge der Elemente soll hier als solche gelten.

Die Verbindungen aus den Elementen $a_1, a_2, \dots a_n$ zur ersten Classe sind die einzelnen Elemente selbst. Gruppen- und Elementenzahl sind gleich.

Die Verbindungen aus den nämlichen Elementen zur zweiten Classe entstehen, wenn sich jede Gruppe der ersten Classe nur mit spätern, als den in ihr enthaltenen, Elementen verbindet. Sie sind:

$$C(a_1, a_2 \dots a_n)^2 =$$

$$\begin{array}{llllllll}
= a_1 a_2 & + a_2 a_3 & + a_3 a_4 & + \dots & a_{n-2} a_{n-1} & + a_{n-1} a_n \\
 a_1 a_3 & a_2 a_4 & a_3 a_5 & & a_{n-2} a_n & \\
 a_1 a_4 & a_2 a_5 & a_3 a_6 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 a_1 a_n & a_2 a_n & a_3 a_n & & &
\end{array}$$

Die Verbindungen zur dritten Classe werden gebildet, wenn sich jede Gruppe der zweiten Classe nur mit spätern, als den in ihr enthaltenen, Elementen verbindet. Sie sind:

$$C(a_1, \dots a_n)^3 =$$

$$\begin{array}{llllll}
= a_1 a_2 a_3 & + a_1 a_3 a_4 & + a_1 a_4 a_5 & + \dots & a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} & + a_{n-2} a_{n-1} a_n \\
 a_1 a_2 a_4 & a_1 a_3 a_5 & a_1 a_4 a_6 & & a_{n-3} a_{n-2} a_n & \\
 a_1 a_2 a_5 & a_1 a_3 a_6 & a_1 a_4 a_7 & & a_{n-3} a_{n-1} a_n & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 a_1 a_2 a_n & a_1 a_3 a_n & a_1 a_4 a_n & & &
\end{array}$$

u. s. w. Auf gleiche Weise wird jede spätere Verbindungsclasse aus der vorhergehenden abgeleitet. Das Allgemeine der Bildungsweise ist leicht zu erkennen.

Die Gruppenanzahlen der Verbindungen lassen sich aus denen der Versetzungen ableiten, wenn man den Umstand berücksichtigt, dafs in den Gruppen der Verbindungen keine Versetzungen vorkommen dürfen. Um diese auszuschliefsen, hat man die numerischen Ausdrücke der verschiedenen Versetzungsclassen der Reihe nach durch 1, 1 . 2, 1 . 2 . 3 . . . . zu theilen; denn jede Gruppe mufs so viel mal weniger erscheinen, als ihre Elemente Versetzungen eingehen können. Hiernach ist.

$$C[a_1, a_2 \ldots a_n]^1 = \frac{P\,[a_1 \ldots a_n]^1}{1} = \frac{n}{1} = \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}$$

$$C[a_1 \ldots a_n]^2 = \frac{P\,[a_1 \ldots a_n]^2}{1\,.\,2} = \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} = \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}$$

$$C[a_1 \ldots a_n]^3 = \frac{P\,[a_1 \ldots a_n]^3}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

Hieraus allgemein

$$20)\quad C[a_1, \ldots a_n]^q = \frac{P[a_1, \ldots a_n]^q}{1\,.\,2 \ldots q} = \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{n(n-1) \ldots (n-q+1)}{1\,.\,2 \ldots q}$$

Die Bildungsweise wird durch mehrere Elementenreihen nicht geändert, sondern nur die Gruppenanzahl gesteigert, und es ist

$$21)\quad C\,[a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_m, c_1, \ldots c_o, \ldots]^q =$$

$$= \frac{(n+m+o+\ldots)\,(n+m+o+\ldots-1) \ldots (n+m+o\ldots-q+1)}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,q} =$$

$$= \frac{(n+m+o+\ldots)^{q|-1}}{1^{q|1}}$$

§. 12.

Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen.

Die Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen unterscheiden sich dadurch von denen ohne Wiederholungen, dafs ein oder mehrere Elemente mehrere mal vorkommen können. Das Maximum der Wiederholungen darf nicht überschritten werden. Ihre Bildungsweise zeigen wir an folgendem Falle

$$C(a_1, a_1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)^4 = \begin{array}{l} a_1\,a_1\,a_1\,a_2 \\ a_1\,a_1\,a_1\,a_3 \\ a_1\,a_1\,a_1\,a_4 \\ a_1\,a_1\,a_1\,a_5 \\ a_1\,a_1\,a_2\,a_3 \\ a_1\,a_1\,a_2\,a_4 \\ a_1\,a_1\,a_2\,a_5 \\ a_1\,a_1\,a_3\,a_4 \\ a_1\,a_1\,a_3\,a_5 \\ a_1\,a_1\,a_4\,a_5 \end{array} + \begin{array}{l} a_1\,a_2\,a_3\,a_4 \\ a_1\,a_2\,a_3\,a_5 \\ a_1\,a_2\,a_4\,a_5 \\ a_1\,a_3\,a_4\,a_5 \\ a_2\,a_3\,a_4\,a_5 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Die Gruppen der entwickelten Darstellung trennen sich hiernach in Verbindungen aus den Elementen $a_1, a_2 \dots a_n$ zur vierten Classe, und in solche zur zweiten Classe, die sämmtlich mit zwei gleichen Elementen in Verbindung getreten sind. Hiernach ist

$$C(a_1, a_1, a_1, a_2 \dots a_5)^4 = C(a_1, a_2 \dots a_5)^4 + a_1\,a_1\,C(a_1, \dots a_5)^2$$

Bei den höhern Classen tritt diese Trennung gleichfalls ein, so zwar dafs sich diese Verbindungen in solche zerfällen lassen, deren Classen-Exponenten immer von dem höchsten an um zwei Einheiten fallen, wobei sich immer die entsprechende Anzahl gleicher Elemente ausscheidet. Hiernach ist

$$C(a_1^k, a_2, a_3 \dots a_n)^q =$$
$$= C(a_1 \dots a_n)^q + a_1^2\,C(a_1 \dots a_n)^{q-2} + a_1^4\,C(a_1, \dots a_n)^{q-4} + \dots$$

Bemerkt man, dafs die Anordnung, in welcher die Elemente bei Bildung der Verbindungen aufgestellt werden nach §. 3 und 11 willkührlich also auch gleichgültig ist; so folgt, dafs die angegebene Bildungsweise für die Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen unverändert bleibt, welche Stelle das wiederholende Element einnehmen mag.

Die Gruppenanzahl bestimmt sich nun nach dem Gesagten leicht und es ist

$$22)\quad C[a_1, a_2 \dots a_g^k \dots]^q = \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} + \frac{n^{q-2|-1}}{1^{q-2|1}} + \frac{n^{q-4|-1}}{1^{q-4|1}} + \dots$$

Die Zahl der gleichen Elemente (k) kann die Verbindungsclasse, unbeschadet der Gültigkeit dieser Gleichung, übertreffen. Ist k kleiner als q und eine gerade Anzahl, so werden im Schlufsgliede alle gleichen Elemente ausgeschieden, und die Zahl der Elemente, woraus in ihm die Verbindungen gebildet werden sollen, erniedrigt sich um die Einheit. Defswegen wird dann n in $n-1$ übergehen und die Gleichung erhält folgende Form.

$$C[a_1, a_2, \dots a_g^k \dots a_n]^q = \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} + \frac{n^{q-2|1}}{1^{q-2|1}} + \dots + \frac{(n-1)^{q-k|-1}}{1^{q-k|1}}$$

Bei ungeradem k aber folgende:

$$C[a_1, a_2 \ldots a_g^k \ldots a_n]^q = \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} + \frac{n^{q-2|-1}}{1^{q-2|1}} + \ldots + \frac{n^{q-k+1|-1}}{1^{q-k+1|1}}$$

Wir bemerken, dafs sich die Verbindungen dieser Art auch noch nach nachfolgender Gleichung bestimmen lassen:

$$C(a_1, a_2 \ldots a_g^k + \ldots a_n)^q = C(a_1, a_2 \ldots a_n)^q + a_g\, C(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-1} + a_g^2\, C(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-2} \ldots\ldots + a_g^x\, C(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-x} \ldots\ldots$$

so dafs in den Verbindungen, worauf sie zurückgeführt werden, das gleichgesetzte Element nicht erscheint, und x alle Werthe von 1 bis q oder bis k, wenn $k < q$ ist, durchlaufen kann. Wir verfolgen diesen Gegenstand nicht weiter, und begnügen uns auf ihn aufmerksam gemacht und ihn an der Stelle, wo er in das System eintritt, aufgeführt zu haben. Spehr hat ihn in seinem Lehrbegriffe der reinen Combinations-Lehre, Pg. 67. aufgeführt. Unabhängig hatten wir diesen Gegenstand, vor der Bekanntschaft mit dem genannten Werke betrachtet, wie diefs aus dem Gesagten hervor geht.

§. 13.

Verbindungen mit Wiederholungen.

Die Verbindungen mit Wiederholungen sind solche, bei denen jedes Element, nicht nur mit andern, sondern so oft als möglich mit sich in Verbindung treten kann. Die Anordnung der Elemente zum Behufe der Bildungsweise der Gruppen bleibt dieselbe, wie bei den Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$, zur ersten Classe sind die einzelnen Elemente selbst. Gruppen- und Elementenanzahl sind gleich.

Die Verbindungen mit Wiederholungen zur zweiten Classe entstehen, wenn jede Gruppe der ersten Classe nicht nur mit dem Schlufs-Elemente, sondern auch mit allen spätern in Verbindung tritt. Hiernach ist

$$C'(a_1, a_2 \ldots a_n)^2 = \begin{array}{l} a_1\, a_1 \\ a_1\, a_2 \\ a_1\, a_3 \\ a_1\, a_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1\, a_n \end{array} + \begin{array}{l} a_2\, a_2 \\ a_2\, a_3 \\ a_2\, a_4 \\ a_2\, a_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2\, a_n \end{array} + \begin{array}{l} a_3\, a_3 \\ a_3\, a_4 \\ a_3\, a_5 \\ a_3\, a_6 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_3\, a_n \end{array} + \ldots\ldots + \begin{array}{l} a_{n-1}\, a_{n-1} \\ a_{n-1}\, a_n \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} + \begin{array}{l} a_n\, a_n \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Die Verbindungen mit Wiederholungen zur dritten Classe entstehen, wenn jede Gruppe der zweiten Classe sich nicht nur mit dem Schlufs-Elemente, sondern auch mit allen spätern verbindet. Hiernach ist

$$C'(a_1, a_2 \dots a_n)^3 = \begin{array}{cccc} a_1 a_1 a_1 + & a_1 a_2 a_2 + & a_1 a_3 a_3 + & \dots a_{n-1} a_{n-1} a_{n-1} \\ a_1 a_1 a_2 & a_1 a_2 a_3 & a_1 a_3 a_4 & a_{n-1} a_{n-1} a_n \\ a_1 a_1 a_3 & a_1 a_2 a_4 & a_1 a_3 a_5 & a_{n-1} a_n \; a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_n \; a_n \; a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1 a_1 a_n & a_1 a_2 a_n & a_1 a_3 a_n & \end{array}$$

Auf gleiche Weise werden die Gruppen jeder Classe aus denjenigen der vorhergehenden abgeleitet.

Die Gruppenanzahlen der Verbindungen mit Wiederholungen können dadurch gefunden werden, dafs man sie auf die der Verbindungen ohne Wiederholungen zurückführt. Diefs geschieht dadurch, dafs man in den entwickelten Darstellungen die Stellenzahlen der Elemente jeder Gruppe von dem zweiten an erhöht, und zwar die Stellenzahlen derjenigen Elemente, welche in der zweiten Reihe stehen um, 1, die der dritten Reihe um 2, die der vierten Reihe um 3, u. s. w., die der q^{ten} Reihe um $q-1$. Hiedurch wird Zahl und Bildungsweise der Gruppen nicht verändert, sondern nur die oben bemerkte Zurückführung erzweckt; so dafs die Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur zweiten Classe der Zahl nach übereinstimmen mit denen ohne Verbindungen aus $n+1$ Elementen zu derselben Classe u. s. w. Hiernach hat man

$$C'[a_1, a_2 \dots a_n]^1 = C[a_1 \dots a_n]^1 = \frac{n}{1}$$

$$C'[a_1, a_2 \dots a_n]^2 = C[a_1, a_2 \dots a_{n+1}]^2 = \frac{n\,(n+1)}{1\;.\;2}$$

$$C,[a_1, \dots a_n]^3 = C[a_1, a_2 \dots a_n, a_{n+1}, a_{n+2}]^3 = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\;.\;2\;.\;3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$23)\; C'(a_1, \dots a)^q = C[a_1, \dots a_n, a_{n+1} \dots a_{n+q-1}]^q =$$

$$= \frac{n\,(n+1) \dots (n+q-1)}{1\;.\;2\;.\;\dots\;.\;q} = \frac{n^{q|1}}{1^{q|1}} = \left(\frac{n}{1}\right)^{q|1}$$

Anmerkung. Das Verfahren: die Gruppen-Anzahl der Verbindungen mit Wiederholungen auf die ohne Wiederholungen zurückzuführen, hat schon Euler in seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen Cap 16 § 315 (Uebersetzung von Michelsen) angewendet. Diese Bemerkung machten wir, als wir den Inhalt des genannten Capitels mit unserer Arbeit verglichen.

Eine andere Art, die Anzahl dieser Verbindungen zu bestimmen, ergibt sich aus der Bemerkung, dafs die Gruppen-Anzahl jeder späteren Classe aus derjenigen der vorhergehenden abgeleitet wird, indem sich alle Gruppen der vorhergehenden Classe ohne Unterschied mit dem ersten Elemente; alle, die kein niederes Element als das zweite enthalten, mit dem zweiten; alle, die kein niederes Element als das dritte enthalten, mit dem dritten u. s. f. verbinden. Hiernach ist

$$C'(a_1, a_2 \ldots a_n)^q = a_1 C'(a_1, a_2 \ldots)^{q-1} + a_2 C'(a_2, a_3 \ldots a_n)^{q-1} + a_3 C'(a_3 \ldots a_n)^{q-1} + \ldots + a_n C'(a_n)^q$$

Setzt man nun hierin statt q allmählig die Werthe 2, 3, . . . q, so führt diefs zu folgender zurücklaufenden Bestimmungsweise

$$C'[a_1 \ldots a_n]^2 = n + n - 1 + n - 2 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} = \left(\frac{n}{1}\right)^{2|1}$$

$$C'[a_1, \ldots a_n]^3 = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2} + \frac{2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \left(\frac{n}{1}\right)^{3|1}$$

$$24)\quad C'[a_1, \ldots a_n]^q =$$

$$= \frac{n^{q-1|1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(n-1)^{q-1|1}}{1^{q-1|1}} + \ldots + \frac{2^{q-1|1}}{1^{q-1|1}} + \frac{1^{q-1|1}}{1^{q-1|1}} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+q-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots q} = \left(\frac{n}{1}\right)^{q|1}$$

Bildungsweise und Bestimmung der Gruppen-Anzahl für die Verbindungen mit Wiederholungen bleiben unverändert, wenn auch mehrere Elementen-Reihen zu Grund gelegt werden. Es ist

$$25)\quad C'[a_1, \ldots a_n, b_1 \ldots b_m, c_1 \ldots c_o, \ldots]^q =$$

$$= \frac{(n+m+o+\ldots)(n+m+o+\ldots+1)\ldots(n+m+o+\ldots+q-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, q \ldots} = \frac{(n+m+o+\ldots)^{q|1}}{1^{q|1}} = \left(\frac{n+m+o+\ldots}{1}\right)^{q|1}$$

II. Combinationen zu bestimmten Summen

A. Combinationen zu bestimmten Summen aus der vollständigen Elementen-Anzahl.

1) Versetzungen zu bestimmten Summen.

§. 14.

Versetzungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen.

Die Stellenzahlen der Elemente dienten bisher, die Elemente von einander zu unterscheiden. Nimmt man auf den Werth der Stellenzahlen Rücksicht, betrachtet sie im Zusammenhange untereinander, und zählt sie zusammen; so werden dadurch Summen, die entweder übereinstimmen oder verschieden sind, erzeugt. Betrachtet man diejenigen Gruppen, welche gleiche Summen erzeugen, in ihrer Gesammtheit; so ist man auf den Begriff der Combinationen zu bestimmten Summen geführt.

Von diesen betrachten wir zuerst die Versetzungen zu bestimmten Summen. Die Art, wie diese gebildet werden, mag sich an den Versetzungen ohne Wiederholungen der dritten Classe aus den Elementen $a_1, a_2 \ldots a_7$ zur Summe 10 zeigen. Es ist

$$P(\text{ſ}10;\, a_1, a_2 \ldots a_7)^3 = \begin{array}{lllllll} a_1\, a_2\, a_7 & + & a_1\, a_3\, a_6 & + & a_1\, a_4\, a_5 & + & a_2\, a_3\, a_5 \\ a_2\, a_1\, a_7 & & a_3\, a_1\, a_6 & & a_4\, a_1\, a_5 & & a_3\, a_2\, a_5 \\ a_1\, a_7\, a_2 & & a_1\, a_6\, a_3 & & a_1\, a_5\, a_4 & & a_2\, a_5\, a_3 \\ a_7\, a_1\, a_2 & & a_6\, a_1\, a_3 & & a_5\, a_1\, a_4 & & a_5\, a_2\, a_3 \\ a_2\, a_7\, a_1 & & a_3\, a_6\, a_1 & & a_4\, a_5\, a_1 & & a_3\, a_5\, a_2 \\ a_7\, a_2\, a_1 & & a_6\, a_3\, a_1 & & a_5\, a_4\, a_1 & & a_5\, a_3\, a_2 \end{array}$$

Zu Erzeugung dieser Summe sind die 7 Anfangs-Elemente der Reihe nöthig. Das Verfahren besteht einfach darin: dafs alle Gruppen zur dritten Classe, welche die Summe 10 durch ihre Stellenzahlen erzeugen, herausgenommen und mit ihren Versetzungen angegeben werden. Die Zahl der Gruppen, welche hiedurch entstehen, sind 24, während die der Versetzungen aus 7 Elementen zur dritten

Classe 7 . 6 . 5 = 210 ist. 186 Gruppen fallen weg, denn sie sind nicht fähig, die genannte Summe zu erzeugen.

Sieht man von den Versetzungen, welche in diesen Gruppen vorkommen, ab; so bemerkt man leicht, dafs nur vier verschiedene Gruppen $a_1\, a_2\, a_7$, $a_1\, a_3\, a_6$, $a_1\, a_4\, a_5$, $a_2\, a_3\, a_5$ die Grundlage des Ganzen bilden, und dafs die übrigen durch Versetzungen aus diesen entstehen. Diese vier Gruppen sind die Verbindungen mit Wiederholungen der dritten Classe aus den Elementen $a_1, a_2 \ldots a_7$ zur Summe 10, was zu der Folgerung führt, dafs die beiden genannten Combinations-Arten sich von einander ableiten lassen. Hiernach ist für den vorliegenden Fall zur Bestimmung der Gruppenanzahl

$$P[\text{ſ}10;\, a_1, a_2 \ldots]^3 = 1 . 2 . 3\; C[\text{ſ}10;\, a_1, a_2 \ldots]^3$$

Fügt man die Bemerkung hinzu, dafs das Gesagte von jedem andern Falle gilt, wie denn sich überhaupt die Versetzungen aus den Verbindungen, und umgekehrt nach §. 11 Nro. 20 ableiten lassen, so ist allgemein

$$26)\; P[\text{ſ}n;\, a_1, a_2 \ldots]^q = 1^{q|1}\; C[\text{ſ}n;\, a_1, a_2 \ldots]^q$$

Die Versetzungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen sind hiernach auf die Verbindungen zu denselben Summen zurückgeführt. Daher verweilen wir nicht länger bei diesem Gegenstande und verweisen auf die Verbindungen zu bestimmten Summen. §. 17.

Wir bemerken noch, dafs die Summe der Versetzungen der q^{ten} Classe zur Summe n entweder so grofs, oder gröfser als $\frac{q\,(q+1)}{1\ \ 2}$, aber nie kleiner seyn kann.

Die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen zu bestimmten Summen übergehen wir gleichfalls aus dem angeführten Grunde.

§. 15.

Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen.

Wie die Versetzungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen, so werden auch die mit Wiederholungen aus den Versetzungen im Allgemeinen abgeleitet.

Um die Versetzungen mit Wiederholungen der q^{ten} Classe aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots.$ zur Summe n zu erhalten, wenden wir folgendes Verfahren an.

Einmal weniger, als die Versetzungsclasse angibt, wird die Einheit an sich angereiht; diesen (q — 1) Einheiten wird ein Element zugefügt, das mit ihnen die verlangte Summe erzeugt, also das Element a_{n-q+1}. Darauf wird die Stellenzahl des letzten Elementes erniedrigt und die des vorletzten, so lange erhöht, bis das gegenseitige Erniedrigen und Erhöhen nicht mehr möglich wird. Ist diefs geschehen, so wird die Stellenzahl des dritt-letzten Elementes um die Einheit erhöht, die der beiden letzten zur hiedurch erforderlichen Summe ergänzt, und das gegenseitige Erniedrigen und Erhöhen mit ihnen auf die genannte Art ausgeführt. Das Erhöhen der Stellenzahl des dritt-letzten Elementes mufs so lange in Verbindung mit dem genannten gegenseitigen Erhöhen und Erniedrigen fortgesetzt werden, bis sie den höchst möglichen Werth $n-q+1$ erhalten hat. Dasselbe Verfahren wird auf das viert-letzte Element u. s. f. ausgedehnt bis endlich alle Elemente auf die angegebene Weise behandelt sind, worauf die Operation ihr Ende erreicht hat.

Hier mag folgendes Beispiel stehen.

$$
\begin{array}{llllll}
P'(f7;\, a_1, a_2, a_3, a_4)^4 = & a_1a_1a_1a_4 & + a_1a_2a_2a_2 & + a_2a_1a_1a_3 & + a_2a_3a_1a_1 \\
 & a_1a_1a_2a_3 & a_1a_2a_3a_1 & a_2a_1a_2a_2 & a_3a_1a_1a_2 \\
 & a_1a_1a_3a_2 & a_1a_3a_1a_2 & a_2a_1a_3a_1 & a_3a_1a_2a_1 \\
 & a_1a_1a_4a_1 & a_1a_3a_2a_1 & a_2a_2a_1a_2 & a_3a_2a_1a_1 \\
 & a_1a_2a_1a_3 & a_1a_4a_1a_1 & a_2a_2a_2a_1 & a_4a_1a_1a_1
\end{array}
$$

Die Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen läfst sich dadurch finden, dafs man die der nachfolgenden Classe auf die der vorhergehenden zurückführt, wodurch eine zurücklaufende Bildungsweise gegeben ist. Von der ersten Classe geht man zu den spätern über, woraus sich die unabhängige ergibt. Scheidet man in dem vorstehenden Falle die Gruppen, welche gleiche Anfangs-Elemente haben, aus; so gewinnt man folgende Darstellung

$$
\begin{aligned}
P'(f7;\, a_1, a_2 \ldots)^4 = {} & a_1\, P'(f6;\, a_1, a_1, a_3, a_4)^3 + a_2\, P'(f5;\, a_1, a_2, a_3)^3 \\
& + a_3\, P'(f4;\, a_1, a_2)^3 + a_4\, P'(f3;\, a_1)^3
\end{aligned}
$$

wodurch man sich leicht zu folgender allgemeinen Darstellung erhebt

$$
\begin{aligned}
27)\quad P'(fn;\, a_1, a_2 \ldots)^q = {} & a_1\, P'(f(n-1);\, a_1, a_2 \ldots)^{q-1} \\
& + a_2\, P'(f(n-2);\, a_1, a_2 \ldots)^{q-1} \\
& + a_3\, P'(f(n-3);\, a_1, a_2 \ldots)^{q-1} \\
& \quad \vdots \\
& + a_{n-q+1}\, P'(f(q-1);\, a_1)^{q-1}
\end{aligned}
$$

Werden in dieser Gleichung statt q allmählig die Werthe 2, 3, ... gesetzt, so gewinnt man folgende Darstellungen für die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus den verschiedenen Classen

$$P'[\text{ſ}n;\ a_n]^1 = 1$$

$$P'[\text{ſ}n;\ a_1,\ a_2 \ldots]^2 =$$

$$a_1\, P'[\text{ſ}(n-1);\ a_1,\ \ldots]^1 + a_2\, P'[\text{ſ}(n-2);\ a_1 \ldots]^1 + \ldots$$

$$= 1 + 1 + 1 \ldots\ldots = \frac{n-1}{1} = \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}}$$

$$P'[\text{ſ}n; a_1, a_2..]^3 = a_1\, P'[\text{ſ}(n-1); a_1, a_1..]^2 + a_2 P'[\text{ſ}(n-2), a_1, a_2..]^2 + ..$$

$$\ldots + a_{n-2}\, P'[\text{ſ}2;\ a_1]^2$$

$$= \frac{n-2}{1} + \frac{n-3}{1} + \frac{n-4}{1} + \ldots 3 + 2 + 1$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\ .\ 2} = \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}$$

$$P'[n;\ a_1,\ a_2 \ldots]^4 =$$

$$a_1 P'[\text{ſ}(n-1);\ a_1,\ a_2..]^3 + a_2 P'[\text{ſ}(n-2);\ a_1,\ a_2..]^3 + .. a_{n-3} P'[\text{ſ}3; a_1]^3$$

$$= \frac{(n-2)\,(n-3)}{1\ .\ 2} + \frac{(n-3)\,(n-4)}{1\ .\ 2} + \ldots + \frac{3\ .\ 2}{1\ .\ 2} + \frac{2\ .\ 1}{1\ .\ 2} =$$

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3} = \frac{(n-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}$$

Hieraus leitet sich leicht das allgemeine Gesetz ab

$$28)\quad P'[\text{ſ}n:\ a_1,\ a_2 \ldots a_{n-q+1}]^q =$$

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots(n-q+1)}{1\ .\ 2\ .\ 2\ \ldots\ldots\ (q-1)} = \frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

Von dem eben gezeigten Verfahren, die Gruppenanzahl dieser Versetzungen zu bestimmen, ist das in meinen Forschungen §. 18 Pg. 36 gegebene verschieden. Die Versetzungen mit Wiederholungen erscheinen dort unter dem Namen Zerfällungen der Zahlen. Die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen ist auf die der Verbindungen zurückgeführt.

2) Verbindungen zu bestimmten Summen.

§. 16.

Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen.

Wir betreten bei der Untersuchung der Verbindungen ohne und mit Wiederholungen zu bestimmten Summen den umgekehrten Weg von dem bisher beobachteten, und behandeln zuerst die Verbindungen mit Wiederholungen, dann die ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen, weil sich letztere ganz leicht von ersteren ableiten lassen, was umgekehrt nicht der Fall ist.

Die Verbindungen mit Wiederholungen der ersten Classe zu bestimmten Summen werden durch die Elemente, deren Stellenzahl der Summe gleich ist, dargestellt. Jede Summe erzeugt also nur eine Gruppe, die aus einem Elemente besteht, und es ist:

$$C'(fn;\ a_1,\ a_2 \ldots)^1 = a_n$$

Die Verbindungen mit Wiederholungen der ersten Classe zur Summe n aus den Elementen a_1, a_2, ... werden gebildet, indem man die Stellenzahl 1 mit $n-1$ verbindet, und dann mit gegenseitigem Erhöhen und Erniedrigen gleichzeitig fortfährt, bis die Stellenzahlen beider Elemente entweder einander gleich geworden, oder um die Einheit verschieden sind. Das erste wird bei einer geraden, das andere bei einer ungeraden Summenzahl eintreten. Hiernach zerfallen die Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen der zweiten Classe in zwei Abtheilungen, in die für gerade und ungeraden Summenzahlen. Bezeichnet man die Summen der geraden Zahlen durch $2n$, die der ungeraden durch $2n+1$, so hat man hiernach folgende Darstellungen:

$$C'(f2n;\ a_1,\ a_2 \ldots)^2 = \begin{matrix} a_1 & a_{2n-1} \\ a_2 & a_{2n-2} \\ a_3 & a_{2n-3} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_n & a_n \end{matrix}$$

$$C'(f(2n+1);\ a_1,\ a_2, \ldots)^2 = \begin{matrix} a_1 & a_{2n} \\ a_2 & a_{2n-1} \\ a_3 & a_{2n-2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} \end{matrix}$$

Zugleich erkennt man, dafs die Gruppenanzahl beider Fälle gleich grofs ist, und sich in n vereinigt.

Bei den Verbindungen mit Wiederholungen der dritten Classe zu bestimmten Summen unterscheidet man folgende drei Fälle unter den fraglichen Summen: $3n$, $3n+1$, $3n+2$, die man zu betrachten hat. Die Bildungsweise erfordert, dafs man das erste Element a_1 zweimal nimmt, und die Stellenzahl des dritten zur erforderlichen

Summe ergänzt, dann die Stellenzahlen der zwei letzten Elemente gegenseitig so lange um die Einheit erhöht und erniedrigt, bis beide einander gleich oder um die Einheit verschieden sind. Hierauf wird die Stellenzahl des ersten Elementes erhöht, die des zweiten ihr gleichgesetzt und die des dritten zur Summe ergänzt, und dann die Stellenzahlen der beiden letzten Elementen gegenseitig, wie vorhin, erhöht und erniedrigt. Diefs allmälige Erhöhen der Stellenzahl des ersten Elementes und das damit verbundene gegenseitige Erhöhen und Erniedrigen der beiden letzten wird so lange fortgesetzt, bis die Stellenzahlen der drei Elementen entweder einander gleich geworden, oder um die Einheit verschieden sind. Die Schlufsgruppen müssen eine von den folgenden Formen haben, $a_n\,a_n\,a_n$, $a_n\,a_n\,a_{n+1}$, $a_n\,a_{n+1}\,a_{n+1}$. Auf ähnliche Weise werden die Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen für die späteren Classen gebildet.

Wenden wir uns zur Bestimmung der Gruppenanzahl dieser Verbindungen, so wird diese nicht so leicht gefunden. Zurücklaufende Methoden zur Ableitung der Gruppenanzahl finden sich leicht; aber einen allgemeinen unabhängigen Ausdruck für ihre Bestimmung gibt es wohl nicht. Wir theilen folgende zurücklaufende Bildungsweisen mit, und wählen zur Erörterung folgendes Beispiel:

$$C'(\text{ſ}13;\, a_1,\, a_2 \ldots)^4 = \begin{array}{llll} a_1\,a_1\,a_1\,a_{10} & + a_1\,a_2\,a_3\,a_7 & + & a_2\,a_2\,a_2\,a_7 \\ a_1\,a_1\,a_2\,a_9 & a_1\,a_2\,a_4\,a_6 & & a_2\,a_2\,a_3\,a_6 \\ a_1\,a_1\,a_3\,a_8 & a_1\,a_2\,a_5\,a_5 & & a_2\,a_2\,a_4\,a_5 \\ a_1\,a_1\,a_4\,a_7 & a_1\,a_3\,a_3\,a_6 & & a_2\,a_3\,a_3\,a_5 \\ a_1\,a_1\,a_5\,a_6 & a_1\,a_3\,a_4\,a_5 & & a_2\,a_3\,a_4\,a_4 \\ a_1\,a_2\,a_2\,a_8 & a_1\,a_4\,a_4\,a_4 & & a_3\,a_3\,a_3\,a_4 \end{array}$$

Scheiden wir bei denjenigen Gruppen, welche es zulassen, zuerst das Anfangselement a_1, dann a_2, dann a_3 aus; so werden dadurch die vorstehenden Gruppen zur vierten Classe zurück gebracht auf Verbindungen zur dritten Classe zur Summe, welche der Reihe nach um 1, 2, 3 Einheiten niederer stehen, ohne dafs dadurch die Gruppenanzahl geändert worden wäre. Diefs führt zu folgender Darstellung:

$$C'(\text{ſ}13;\, a_1,\, a_2 \ldots)^4 =$$
$$a_1\,C'(\text{ſ}12;\, a_1, a_2 \ldots)^3 + a_2\,C'(\text{ſ}11;\, a_2,\, a_3 \ldots)^3 + a_3\,C'(\text{ſ}10;\, a_3,\, a_4 \ldots)^3$$

In dem Ausdrucke $a_1\,C'(\text{ſ}12;\, a_1,\, a_2 \ldots)^3$ kommen alle Elemente, die zur Erzeugung der Summe 12 beitragen ohne Unterschied vor, in den beiden übrigen nicht. In dem Ausdrucke $a_2\,C'(\text{ſ}11;\, a_2,\, a_3 \ldots)^3$ fehlt das Element a_1; in dem Ausdrucke

$a_3\,C'(\text{ſ}10;\ a_3,\ a_4\ldots)^3$ die Elemente a_1, a_2. Erniedrigt man nun alle Stellenzahlen der Gruppen des ersten Ausdrucks um 1, und die des zweiten um 2, so wird dadurch die Anzahl nicht geändert, und es ist:

$$a_2\,C'[\text{ſ}11;\ a_2,\ a_3..]^3 = a_2 \left|\begin{array}{lll} a_2 & a_2 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_6 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_3 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_4 \end{array}\right. = a_1 \left|\begin{array}{lll} a_1 & a_1 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_5 \\ a_1 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_3 \end{array}\right. = C'[\text{ſ}8;\ a_1,\ a_2..]^3$$

$$a_3\,C'[\text{ſ}10;\ a_3,\ a_4..]^3 = a_3\ a_3\ a_3\ a_4 = a_1\ a_1\ a_1\ a_2 = C'[\text{ſ}4;\ a_1, a_2..]^3$$

Hieraus gewinnt man durch Einführung folgende Gleichung für die Gruppenanzahl

$$C'[\text{ſ}13;\ a_1,\ a_2\ldots]^4 =$$
$$C'[\text{ſ}12;\ a_1,\ a_2\ldots]^3 + C'[\text{ſ}8;\ a_1,\ a_2\ldots]^3 + C'[\text{ſ}4;\ a_1,\ a_2\ldots]^3$$

Diese Schlüsse gelten für jeden andern Fall, und lassen sich leicht in das Allgemeine übertragen. Hiernach erhalten wir für die Ableitung der Gruppenanzahl der Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe n für die q^{te} Classe aus den Gruppenanzahlen dieser Verbindungen zur $(q-1)^{\text{ten}}$ Classe folgende Gleichung:

$$29)\quad C'[\text{ſ}n;\ a_1,\ a_2\ldots]^q = C'[\text{ſ}(n-1);\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots]^{q-1}$$
$$+ C'[\text{ſ}(n-q-1);\ a_1,\ a_2\ldots]^{q-1}$$
$$+ C'[\text{ſ}(n-2q-1);\ a_1,\ a_2\ldots]^{q-1}$$
$$+ C'[\text{ſ}(n-3q-1);\ a_1,\ a_2\ldots]^{q-1}$$
$$+ C'[\text{ſ}(n-4q-1);\ a_1,\ a_2\ldots]^{q-1}$$
$$\vdots$$

Die Reihe bricht ab, sobald man auf ein Glied kömmt, das eine Unmöglichkeit fordert, was eintritt, wenn $\text{ſ}(n-rq-1)$ in 0 oder einen negativen Werth übergehen sollte.

Wird die eben gefundene Gleichung benüzt, um eine unabhängige Bildungsweise zu suchen, zu dem Ende statt q allmälig die Werthe 1, 2, 3.... gesetzt, und die sich hiedurch ergebenden Reihen summirt; so gewinnt man folgende numerische Ausdrücke für die Gruppenanzahl der Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen, und zwar für die zur ersten Classe:

$$30)\quad C'[\text{ſ}n;\ a_1,\ a_2\ldots]^1 = 1$$

für die zur zweiten Classe

$$C'[\text{ſ}\,2n;\ a_1,\ a_2\ldots]^2 = n$$
$$C'[\text{ſ}(2n+1);\ a_1,\ a_2\ldots]^2 = n$$

für die zur dritten Classe

$$C'[f\,6n;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots]^3 = 3n^2$$

$$C'[f(6n+1);\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots]^3 = 3n^2 + n$$

$$C'[f(6n+2);\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots] = 3n^2 + 2n$$

$$C'[f(6n+3);\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots] = 3n^2 + 3n+1$$

$$C'[f(6n+4);\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots] = 3n^2 + 4n+1$$

$$C'[f(6n+5);\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots] = 3n^2 + 5n+2$$

u. s. w, Man erkennt aus dieser Zusammenstellung, wie sehr sich die zu bestimmenden Ausdrücke vervielfältigen.

Eine andere zurücklaufende Bildungsweise gewinnt man, wenn man die Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen nur in zwei statt in mehrere Abtheilungen zerlegt, so zwar, dafs nur das niederste Element a_1 aus allen ihm gemeinschaftlichen Gruppen ausgeschieden wird. Hiernach erhält man für die Darstellung der Verbindungen mit Wiederholungen der 4ten Classe zur Summe 13, die des oben gewählten Beispieles, Folgendes:

$$C'(f\,13;\ a_1,\ a_2,\ \ldots)^4 =$$

$$\begin{array}{llllclllll}
a_1 & a_1 & a_1 & a_{10} & + & a_2 & a_2 & a_2 & a_7 & = a_1\,C'(f12;\ a_1,\ a_2\ldots)^3 + C'(f13;\ a_2, a_3\ldots)^4 \\
a_1 & a_1 & a_2 & a_9 & & a_2 & a_2 & a_3 & a_6 & \\
a_1 & a_1 & a_3 & a_8 & & a_2 & a_2 & a_4 & a_5 & \\
a_1 & a_1 & a_4 & a_7 & & a_2 & a_3 & a_3 & a_5 & \\
a_1 & a_1 & a_5 & a_6 & & a_2 & a_3 & a_4 & a_4 & \\
a_1 & a_2 & a_2 & a_8 & & a_3 & a_3 & a_3 & a_4 & \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_7 & & & & & & \\
a_1 & a_2 & a_4 & a_6 & & & & & & \\
a_1 & a_2 & a_5 & a_5 & & & & & & \\
a_1 & a_3 & a_3 & a_6 & & & & & & \\
a_1 & a_3 & a_4 & a_5 & & & & & & \\
a_1 & a_4 & a_4 & a_4 & & & & & &
\end{array}$$

Der Ausdruck $C'(f\,13;\ a_2,\ a_3\ldots)$ enthält lauter Gruppen, worin das Anfangs-Element a_1 fehlt. Erniedrigt man die Stellenzahlen sämmtlicher durch ihn erzeugter Gruppen um die Einheit, so wird dadurch die Zahl der Gruppen nicht, sondern nur die Summe, welche sie bilden, verändert, und um vier Einheiten erniedrigt. Dann ist

$$C'[f13;\ a_2, a_3\ldots]^4 = \begin{array}{llll}
a_2 & a_2 & a_2 & a_7 \\
a_2 & a_2 & a_3 & a_6 \\
a_2 & a_2 & a_4 & a_5 \\
a_2 & a_3 & a_3 & a_5 \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_4 \\
a_3 & a_3 & a_3 & a_4
\end{array} = \begin{array}{llll}
a_1 & a_1 & a_1 & a_6 \\
a_1 & a_1 & a_2 & a_5 \\
a_1 & a_1 & a_3 & a_4 \\
a_1 & a_2 & a_2 & a_4 \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_3 \\
a_2 & a_2 & a_2 & a_3
\end{array} = C'[f9;\ a_1, a_2\ldots]^4$$

Diese Darstellung führt zu folgender Gleichung für die Gruppenanzahl

$$C'[\mathfrak{f}13;\ a_1,\ a_2\ldots]^4 = C'[\mathfrak{f}12;\ a_1,\ a_2\ldots]^3 + C'[\mathfrak{f}9;\ a_1,\ a_2\ldots]^4$$

Die vorliegenden Schlüsse dehnen sich leicht in das Allgemeine aus, und man erhält für die Anzahl der Verbindungen mit Wiederholungen der q^{ten} Classe zur Summe n aus den Elementen a_1, a_2, $a_3\ldots$ folgende Gleichung

$$31)\quad C'[\mathfrak{f}n;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]^q =$$
$$C'[\mathfrak{f}(n-1);\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots]^{q-1} + C'[\mathfrak{f}(n-q);\ a_1,\ a_2\ldots]^q$$

Diese Gleichung ist in doppelter Hinsicht zurücklaufend, denn sie setzt voraus, dafs bei der Bestimmung der Gruppenanzahl der Verbindungen mit Wiederholungen zu einer Classe die Anzahlen der vorhergehenden Classe, und die früheren derselben Classe bekannt sind.

Bisher sind wir bei der Bildung der Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen von der fraglichen Summe ausgegangen, und aus ihr wurden die Elemente, welche sie erzeugen können, abgeleitet. Geht man aber von einer bestimmten Anzahl der Elemente aus, und bildet aus ihnen die möglichen Summen, so bekommt man eine neue Methode für die Blidungsweise der genannten Verbindungen zu bestimmten Summen.

Wir wählen hiezu die Elemente a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, um aus ihnen die Summen, welche zu den verschiedenen Classen möglich sind, zu bilden und so das Verfahren zu zeigen. Hiernach ist

$$C'(\mathfrak{f}5;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)^1 = a_5$$

$$C'(\mathfrak{f}6;\ a_1,\ a_2\ \ldots\ a_5)^2 = \begin{matrix} a_1\ a_5 \\ a_2\ a_4 \\ a_3\ a_3 \end{matrix}$$

$$C'(\mathfrak{f}7;\ a_1,\ a_2\ \ldots\ a_5)^3 = \begin{matrix} a_1\ a_1\ a_5 \\ a_1\ a_2\ a_4 \\ a_1\ a_3\ a_3 \\ a_2\ a_2\ a_3 \end{matrix}$$

$$C'(\mathfrak{f}8;\ a_1\ \ldots\ldots\ a_5)^4 = \begin{matrix} a_1\ a_1\ a_1\ a_5 \\ a_1\ a_1\ a_2\ a_4 \\ a_1\ a_1\ a_3\ a_3 \\ a_1\ a_2\ a_2\ a_3 \\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2 \end{matrix}$$

$$C'(\int 9;\ a_1 \,.\,.\,.\,.\, a_5)^5 = \begin{array}{l} a_1\ a_1\ a_1\ a_5 \\ a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_5 \\ a_1\ a_1\ a_1\ a_3\ a_3 \\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_3 \\ a_1\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2 \end{array}$$

$$C'(\int 10;\ a_1, \,.\,.\,.\, a_5)^6 = \begin{array}{l} a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_5 \\ a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_4 \\ a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_3\ a_3 \\ a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_3 \\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2 \end{array}$$

u. s. w. In diesen Gruppen ist die Elementen-Anzahl beständig, während sich Classen und Summenzahl verändert und gleichzeitig um die Einheit wächst, so dafs ihr Unterschied unveränderlich und hier $= 4$ ist. Man bemerkt nun leicht, dafs die Gruppenanzahl der verschiedenen Classen wächst, sich zu einem Maximum erhebt und von da an durch alle höheren Classen und höheren Summen sich gleich bleibt. Diefs tritt dann ein, wenn die Summenzahl gerade das Doppelte von der Classenzahl ist, und aus dem Grunde, weil die Schlufsgruppe dieser Classe lauter gleiche Elemente und zwar die, deren Stellenzahl 2 ist, haben mufs, und die spätern Classen die Stellenzahlen 2 in gröfserer Dimension nicht haben können, da Classen und Summenzahl um gleichen Zuwachs sich erhöhen. Hiernach hat man folgende Gleichung:

$$32)\ C'[\int 2q;\ a_1 \ldots a_{q+1}]^q = C'[\int (2q+1);\ a_1 \ldots a_{q+1}]^{q+1} =$$
$$= C'[\int (2q+2;\ a_1 \ldots a_{q+1}]^{q+2} = \ldots .$$

und das Gesetz: die Gruppenanzahlen derjenigen Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen, deren Classenexponent und Summenanzahl gleiche Unterschiede bilden, sind gleich, wenn die Summe kleiner oder höchstens doppelt so grofs als der Classenexponent ist. Man hat also für den genannten Fall den Classenexponenten von der Summenzahl abzuziehen, den Unterschied als Classenexponenten und das Doppelte von ihm als Summe anzuschreiben, um die fraglichen Verbindungen auf andere und niedere zurückzuführen. Das Gesagte führt zu der Gleichung

$$33)\ C'[\int n;\ a_1, a_2 \ldots]^q = C'[\int 2(n-q);\ a_1, a_2 \ldots]^q$$

Diese Gleichung ist sehr brauchbar, wenn n und q grofse und nicht sehr von einander entfernt liegende Zahlen bedeuten.

Wir theilen nun noch eine Methode mit, die Gruppenanzahlen der Verbindungen mit Wiederholungen zu einerlei Summe, welche mehreren Classen zugehören, in einen Ausdrucke zu vereinigen. Sie mag hier am zweckmäſsigsten ihre Stelle finden.

Wie bei der Darstellung der Verbindungen der genannten Art einigemal Gruppen zusammenbegriffen wurden, bei welchen ein oder mehrere Anfangs-Elemente ausgeschlossen sind, worauf wir später §. 22. wieder zurückkommen werden, so lassen sich auch Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus Elementen bilden, worin a_0 als Anfangselement erscheint. Sie lassen sich leicht auf Gruppen zurückführen, die aus den Elementen der Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$ erzeugt sind. Dieſs zeigen wir an folgendem Beispiele

$$C'(\text{ſ}\,9;\, a_0, a_1, a_2 \ldots)^4 = \begin{array}{llll} a_0\,a_0\,a_0\,a_9 & + a_0\,a_1\,a_2\,a_6 & + a_1\,a_1\,a_1\,a_6 \\ a_0\,a_0\,a_1\,a_8 & \;\; a_0\,a_1\,a_3\,a_5 & \;\; a_1\,a_1\,a_2\,a_5 \\ a_0\,a_0\,a_2\,a_7 & \;\; a_0\,a_1\,a_4\,a_4 & \;\; a_1\,a_1\,a_3\,a_4 \\ a_0\,a_0\,a_3\,a_6 & \;\; a_0\,a_2\,a_2\,a_5 & \;\; a_1\,a_2\,a_2\,a_4 \\ a_0\,a_0\,a_4\,a_5 & \;\; a_0\,a_2\,a_3\,a_4 & \;\; a_1\,a_2\,a_3\,a_3 \\ a_0\,a_1\,a_1\,a_7 & \;\; a_0\,a_3\,a_3\,a_3 & \;\; a_2\,a_2\,a_2\,a_3 \end{array}$$

Erhöhet man die Stellenzahlen aller Gruppen um die Einheit, so bleibt ihre Anzahl ungeändert, die gemeinschaftliche Summe erhöhet sich aber um so viele Einheiten, als der Classenexponent in sich begreift. Hieraus flieſst die folgende Gleichung

$$C'[\text{ſ}9;\, a_0, a_1, \ldots]^4 = C'[\text{ſ}13;\, a_1, a_2, \ldots]^4$$

Diese Schlüsse bleiben bei jedem andern Falle dieselben und man hat allgemein

$$34)\quad C'[\text{ſ}n;\, a_1, a_2 \ldots]^q = C'[\text{ſ}(n+q);\, a_1, a_2 \ldots]^q$$

Vernachläſsigt man in den oben erhaltenen Gruppen diejenigen Elemente, deren Stellenzahl 0 ist, so wird dadurch die Gruppenanzahl keineswegs geändert, und man erhält bei anderer Anordnung:

$$C'[\text{ſ}\,9;\, a_0, a_1, a_2 \ldots]^4 = a_9 + \begin{array}{l} a_1\,a_8 \\ a_2\,a_7 \\ a_3\,a_6 \\ a_4\,a_5 \\ \\ \\ \\ \end{array} + \begin{array}{l} a_1\,a_1\,a_7 \\ a_1\,a_2\,a_6 \\ a_1\,a_3\,a_5 \\ a_1\,a_4\,a_4 \\ a_2\,a_2\,a_5 \\ a_2\,a_3\,a_4 \\ a_3\,a_3\,a_3 \end{array} + \begin{array}{l} a_1\,a_1\,a_1\,a_6 \\ a_1\,a_1\,a_2\,a_4 \\ a_1\,a_1\,a_3\,a_4 \\ a_1\,a_2\,a_2\,a_4 \\ a_1\,a_2\,a_3\,a_3 \\ a_2\,a_2\,a_2\,a_3 \\ \\ \end{array}$$

$$= C'[\text{ſ}9;\, a_1, a_2 ..]^1 + C'[\text{ſ}9;\, a_1, a_2 ..]^2 + C'[\text{ſ}9;\, a_1, a_2 ..]^3 + C'[\text{ſ}9;\, a_1, a_2 ..]^4$$

welches die Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe 9 von der ersten bis vierten Classe aus den Elementen $a_1, a_2 \ldots$ sind. Zeigen wir nun diese Verbindungen zu einerlei Summen und verschiedenen zusammengehörigen Classen durch die nachstehenden Ausdrücke

$$C'(\mathfrak{f}n;\; a_1,\, a_2 \ldots)^{1,2,3\ldots q} \text{ oder } C'(\mathfrak{f}n;\; a_1,\, a_2 \ldots)^{\Sigma q}$$

an, so erhalten wir für die Gruppenanzahl des vorliegenden Falles in Rücksicht auf Nro. 34 folgende Gleichung

$$C'[\mathfrak{f}9;\; a_1,\, a_2 \ldots]^{1,2,3,4} = C'[\mathfrak{f}13;\; a_1,\, a_2 \ldots]^q$$

Diese Schlüsse sind allgemein und geben eine leichte Methode, die Gruppenanzahl, welche durch die Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus mehreren oder allen zusammen gehörigen Classen erzeugt werden, anzugeben. Hiernach ist

$$35)\;\; C'[\mathfrak{f}n;\; a_1,\, a_2 \ldots]^{\Sigma q} = C'[\mathfrak{f}(n+q);\; a_1,\, a_2 \ldots]^q$$

Merkwürdig ist die Harmonie, welche zwischen den Gleichungen 33 und 35 herrscht, die besonders dann hervortritt, wenn die Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus allen Classen zusammen begriffen werden sollen. Dann geht nämlich in Nro. 35 q in n über, und aus $C'[\mathfrak{f}(n+q);\; a_1,\, a_2 \ldots]^q$ wird $C'[\mathfrak{f}2n;\; a_1,\, a_2 \ldots]^n$, wodurch man auf Summen der Verbindungen mit Wiederholungen des gleichen Unterschiedes geführt ist.

Gruppenanzahl der Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen.

Summe der Zahlen. / Classe der Verbindungen.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12
3			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52
4				1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108	120
5					1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192
6						1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235
7							1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248
8								1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230
9									1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201
10										1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164
11											1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131
12												1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100
13													1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77
14														1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56
15															1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
16																1	1	2	3	5	7	11	15	22	30
17																	1	1	2	3	5	7	11	15	22
18																		1	1	2	3	5	7	11	15
19																			1	1	2	3	5	7	11
20																				1	1	2	3	5	7
21																					1	1	2	3	5
22																						1	1	2	3

Classe der Verbindungen.

Um in dieser Tabelle die Zahlenausdrücke für die Verbindungen mit Wiederholungen aus irgend einer Classe zu einer bestimmten Summe zu finden, suche man in der obersten Horizontalreihe die Summe, in der vordersten Vertikalreihe die Classe, und sehe in welchem Felde sich die beiden Reihen vereinigen. Die eingeschriebene Zahl gibt die gesuchte Gruppenanzahl an.

§. 17.

Verbindungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen.

Die Verbindungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen lassen sich leicht auf die mit Wiederholungen zu bestimmten Summen zurückführen, wenn man bemerkt, dafs die Gruppen der Verbindungen ohne Wiederholungen aus denen mit Wiederholungen, wie schon §. 13. Pg. 17 bemerkt wurde, dadurch erzeugt werden, dafs die Stellenzahlen der Elemente aller Gruppen, welche die zweite Stelle einnehmen, um 1, diejenigen, welche die dritte Stelle einnehmen, um 2, u. s. w., welche die q^{te} einnehmen, um $(q-1)$ Einheiten erhöht werden. Die Gruppenanzahl ändert sich hiedurch nicht, sondern nur die aus ihnen hervorgehende Summe. Diese wird um die Gröfse

$$1 + 2 + 3 + \ldots + q - 1 = \frac{q\,(q-1)}{1\,.\,2}$$

erhöht. Hierin stimmen Bildungsweise und Anzahl der Gruppen überein, und man hat

$$36)\quad C\left(f\left(n + \frac{q\,(q-1)}{1\,.\,2}\right);\ a_1,\ a_2 \ldots\right)^q = C'(fn;\ a_1,\ a_2 \ldots)^q$$

und

$$37)\quad C\left[f\left(n + \frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\right);\ a_1,\ a_2 \ldots\right]^q = C'[fn;\ a_1,\ a_2 \ldots]^q$$

Die beiden Gleichungen führen die Verbindungen ohne Wiederholungen auf die mit Wiederholungen zurück, und gehen hiebei von der Summe der Verbindungen mit Wiederholungen aus.

Geht man aber von den Summen der Verbindungen ohne Wiederholungen aus, um von ihnen auf die mit Wiederholungen überzugehen; so gewinnt man für die Bildungsweise und Bestimmung der Gruppenanzahl folgende Gleichungen.

$$38)\quad C(fn;\ a_1, a_2 \ldots)^q = C'\left(f\left(n - \frac{q\,(q-1)}{1\,.\,2}\right);\ a_1,\ a_2 \ldots\right)^q$$

und

$$39)\quad C[fn;\ a_1,\ a_2 \ldots]^q = C'\left[f\left(n - \frac{q\,(q-1)}{1\,.\,2}\right);\ a_1,\ a_2 \ldots\right]^q$$

Gruppenanzahl der Verbindungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen.

Summe der Zahlen. / Classe der Verbindungen.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13
3						1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48
4										1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72
5															1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47
6																					1	1	2	3	5	7	11
7																											
8																											
9																											
10																											
11																											
12																											
13																											
14																											

Um die Zahlenausdrücke für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus dieser Tabelle zu irgend einer Summe in einer bestimmten Classe zu finden, suche man in der obersten Horizontalreihe die Summe in der vordersten Vertikalreihe die Classe, und sehe in welchem Felde sich beide vereinigen. Die ihm eingeschriebene Zahl gibt die gesuchte Gruppenanzahl.

B. Combinationen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Elementen.

1) Versetzungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Elementen.

§. 18.

Versetzungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangs-, Zwischen- und Schlufs-Elementen.

Die Combinationen zu bestimmten Summen können, wie bisher geschah, aus vollständigen Elementen-Reihen gebildet werden, so dafs keines von den Elementen a_1, a_2, a_3 . . . . . . , welches zur Erzeugung der gegebenen Summen mit beitragen kann, ausgeschlossen wird. Es lassen sich aber auch Combinationen zu bestimmten Summen aus solchen Elementen-Reihen bilden, in denen Elemente, welche zu Erzeugung einer bestimmten Summe beitragen können, fehlen. Hiebei heben wir drei Fälle heraus:

1) Combinationen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangs-Elementen;
2) Combinationen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen höheren Elementen.
3) Combinationen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Zwischen-Elementen.

Es können auch Zwischen-Elemente, die sich zufällig an einander reihen, ausgeschlossen seyn. Wir lassen diese unberücksichtigt, da sie den Gesetzen eines Systems nicht unterliegen.

Schon in §. 16 kommen Combinationen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangs-Elementen zum Behufe weiterer Benutzung vor.

Das Bilden der Combinationen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangs - Elementen unterliegt keiner weitern Schwierigkeit, da die Elementen-Reihe von demjenigen Elemente an, welches durch den Ausschlufs der früheren als erstes erscheint, ununterbrochen alle Elemente, die zur Erzeugung der fraglichen Summe beitragen, angibt.

Bei der Darstellung der Gruppen der Combinationen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangs-Elementen wendet man im Allgemeinen das Verfahren an, welches in den §§. 14—17 angegeben wurde. Man hat daher die Elemente der abgekürtzten

Reihe nach den schon bekannten Gesetzen an einander zu reihen. Die hiedurch erzeugten Gruppen unterscheiden sich von denen aus einer vollständigen Reihe erzeugten nicht durch die Bildungsweise, sondern nur durch die Stellenzahlen und höheren Summen. Hier mag ein specieller Fall für die Gruppen der Versetzungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangselementen stehen

$$P(\int 16;\, a_3,\, a_4 \ldots)^3 = \begin{array}{l} a_3\, a_4\, a_9 \\ a_4\, a_3\, a_9 \\ a_3\, a_9\, a_4 \\ a_9\, a_3\, a_4 \\ a_4\, a_9\, a_3 \\ a_9\, a_4\, a_3 \end{array} + \begin{array}{l} a_3\, a_5\, a_8 \\ a_5\, a_3\, a_8 \\ a_3\, a_8\, a_5 \\ a_8\, a_3\, a_5 \\ a_5\, a_8\, a_3 \\ a_8\, a_5\, a_3 \end{array} + \begin{array}{l} a_3\, a_6\, a_7 \\ a_6\, a_3\, a_7 \\ a_3\, a_7\, a_6 \\ a_7\, a_3\, a_6 \\ a_6\, a_7\, a_3 \\ a_7\, a_6\, a_3 \end{array} + \begin{array}{l} a_4\, a_5\, a_7 \\ a_5\, a_4\, a_7 \\ a_4\, a_7\, a_5 \\ a_7\, a_4\, a_5 \\ a_5\, a_7\, a_4 \\ a_7\, a_5\, a_4 \end{array}$$

Bildungsweise und Gruppenanzahl stimmen mit denen, §. 14 angegebenen, überein, und man hat für die Gruppenanzahl im vorstehenden Falle folgende Gleichung

$$P[\int 16;\, a_3,\, a_4 \ldots]^3 = P[\int 10;\, a_1,\, a_2 \ldots]^3$$

Führt man nun im Allgemeinen die Gruppenanzahl der Versetzungen zu bestimmten Summen aus Elementenreihen mit ausgeschlossenen Anfangselementen auf vollständige Elementenreihen zurück, so hat man zu berücksichtigen, dafs die Stellenzahl jedes Elementes um die Einheiten des Schlufselementes der ausgeschlossenen erniedrigt, und daher die Summe selbst um dieses Element so vielmal, als die Versetzungsclasse Einheiten enthält, verkleinert werden mufs. Hiernach hat man für die Gruppenanzahl der Versetzungen zur Summe n aus den Elementen a_{s+1}, a_{s+2}, a_{s+3}; .... zur q^{ten} Classe

$$40)\; P[\int n;\, a_{s+1},\, a_{s+2},\, \ldots]^q = P[\int(n - s\,q);\, a_1,\, a_2 \ldots]^q$$

Hier mögen auch die Gleichungen für die Gruppen solcher Versetzungen zu bestimmten Summen stehen, die aus Elementen-Reihen, deren Stellenzahlen mit 0 oder einer negativen Gröfse beginnen. Die Zurückführung ihrer Gruppenanzahlen auf die aus vollständigen Elementenreihen erzeugt die Gleichungen

$$41)\; P[\int n;\, a_0,\, a_1,\, a_2 \ldots]^q = P[\int(n + q);\, a_1,\, a_2 \ldots]^q$$

$$42)\; P[\int n;\, a_{-r},\, a_{-r+1}, \ldots a_0,\, a_1,\, a_2 \ldots] = P[\int(n + (r+1)\,q);\, a_1,\, a_2 \ldots]^q$$

Die Versetzungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Schlufselementen sind von keiner Anwendung, weswegen wir sie übergehen.

Um diejenigen bei ausgeschlossenen Zwischenelementen zu gewinnen, bezeichnen wir das erste Element durch x, und die Zunahme, wodurch sich die übrigen Elemente von einander unterscheiden, durch Δx. Hieraus folgert sich leicht, dafs nur Versetzungsklasse und Zahl der erzeugenden Elemente, nicht aber die zu erzeugende Summe wilkührlich seyn kann, und dafs letztere von der Classe und den Elementen abhängt. Sollen daher die Versetzungen zur q^{ten} Classe aus $r+1$ Elementen gebildet, und ihre Gruppenanzahl auf die der vollständigen Reihe zurückgeführt werden, so entsteht folgende Gleichung

$$43)\ P\left[f\left(qx+\frac{(q-2)(q-1)}{1\ .\ 2}\Delta x+r\Delta x\right);\ x,\ x+\Delta x, \ldots x+r\Delta x\right]^q$$

$$=P\left[f\left(q+\frac{(q-2)(q-1)}{1\ .\ 2}+r\right);\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{r+1}\right]^q$$

$$=P\left[f\left(\frac{(q-1)q}{1\ .\ 2}+r+1\right);\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{r+1}\right]^q$$

§. 19.

Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangselementen.

Die Bemerkungen des vorhergehenden § entheben uns der Mühe eine entwickelte Darstellung der Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangselementen vorzulegen. Die hieher gehörigen Gleichungen sind

$$44)\ P'[fn;\ a_{s+1},\ a_{s+2},\ \ldots]^q = P'[f(n-qs);\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots]^q$$

Hiernach bestimmt sich der numerische Ausdruck der Gruppenanzahl leicht, wenn in Nro. 28 $n-qs$ statt n gesetzt wird.

$$45)\ P'[fn;\ a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots]^q = \frac{(n-qs-1)(n-qs-2)\ldots(n-(s+1)q+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$= \frac{(n-qs-1)^{q-1|-1}}{q^{q-1|1}}$$

Auch hier mögen die Gleichungen für die Gruppenanzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus Elementenreihen, deren Stellenzahlen mit 0 oder einer negativen Gröfse beginnen, stehen. Sie sind

$$46)\ P'[fn;\ a_0,\ a_1,\ a_2\ldots]^q = P\ [f(n+q);\ a_1,\ a_2\ldots]^q$$

$$47)\ P'[fn;\ a_0,\ a_1,\ a_2\ldots]^q = \frac{(n+q-1)(n+q-2)\ldots(n+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$= \frac{(n+q-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} = \left(\frac{n+1}{1}\right)^{q-1|1}$$

Ferner

48) $P'[fn;\ a_{-r}, a_{-r+1}, \ldots]^q = P'[f(n+(r+1)q);\ a_1, a_2 \ldots]^q$

49) $P'[fn;\ a_{-r}, a_{-r+1}, \ldots a_0, a_1 \ldots] =$

$$= \frac{(n+(r+1)q-1)(n+(r+1)q-2)\ldots\ldots(n+rq-1)}{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q-1)}$$

$$= \frac{(n+(r+1)q-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

$$= \left(\frac{n+rq-1}{1}\right)^{q-1|1}$$

§. 20.

Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Schlufselementen.

Die Aufgabe, deren Auflösung uns beschäftigt, ist folgende: Es sollen die Versetzungen zur Summe n aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_s$ zur q^{ten} Classe gebildet werden.

Wären die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n aus der vollständigen Elementenreihe zu bilden, so müfsten alle Elemente $a_1, a_2, a_3 \ldots a_s, a_{s+1}, \ldots a_{n-q+1}$ zur Summenbildung mitwirken. Nun sollen aber bei dieser Darstellung nur Gruppen vorkommen, welche aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_s$ gebildet sind, defswegen müssen alle diejenigen, worin die Elemente $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots a_{n-q+1}$ erscheinen, ausgeschlossen bleiben.

Die Bildungsweise für die Darstellung der hiedurch entstehenden Gruppen ist nach den angegebenen Vorschriften leicht. Daher übergehen wir sie und wenden uns zur Darstellung des Ausdrucks für ihre Gruppenanzahl.

Zu dem Ende nehmen wir die Elementenreihe als vollständig an, schliefsen der Reihe nach zuerst das Element mit der höchsten dann das mit der zweit-höchsten u. s. f. aus, und beobachten hiebei das allgemeine Gesetz.

Die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n aus der vollständigen Elementenreihe zur q^{ten} Classe ist nach Nro. 28

$$P'[fn;\ a_1, a_2 \ldots a_{n-q+1}]^q = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ (q-1)}$$

Alle die Gruppen, worin das Element a_{n-q+1} erscheint, müssen ausgeschlossen werden. Dieses Element ist mit allen denen verbunden, welche mit ihm die Summe n, also ohne es die Summe q—1) bilden. Da aber alle diese Gruppen durch Versetzungen erzeugt werden, so ist die Zahl der es enthaltenden Gruppen nicht nur so grofs, als es seine Stelle ändern kann (also q mal), sondern so viel mal gröfser als die übrigen (q—1) Elemente unter sich Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe (q-1) und zur $(q-1)^{\text{ten}}$ Classe eingehen können, während es sich auf jeder Stelle befindet. Die Zahl der Versetzungen, welche die übrigen (q—1) Elemente sofort eingehen können, ist nach Nro. 28

$$P'[f(q-1);\ a_1, \ldots]^{q-1} = \frac{(q-2)(q-3)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(q-2)}$$

Die Gesammtzahl der auszuschliefsenden Gruppen, welche das Element a_{n-q+1} enthalten, ist hiernach

$$q\,.\,\frac{(q-2)(q-3)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-2)}$$

Gesellt sich zu der Ausschliefsung des höchsten Elementes die des zweit höchsten a_{n-q}, so gelten die gleichen Schlüsse, wie vorhin, nur mit der Abänderung, dafs die übrigen q—1 Elemente, mit welchen es sich verbindet, Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe q in der $(q-1)^{\text{ten}}$ Classe bilden. Die Zahl der Gruppen, welche hiernach auszuschliefsen sind, ist

$$q\,.\,\frac{(q-1)(q-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(q-2)}$$

Aus ähnlichen Gründen ist die Zahl der Gruppen, welche der Ausschlufs des dritten Elementes bedingt

$$q\,.\,\frac{q(q-1)\,.\,.\,.\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-2)}$$

u. s. f. Das Gesagte begreift alle Elemente bis zu dem Elemente a_{s+1}. Hiernach bestimmt sich die Zahl der auszuscheidenden Gruppen durch nachstehende, sich in einen einfachen Summenausdruck vereinigende, Reihe

$$q\,.\,\frac{(q-1)(q-3)\ldots 3.2.1}{1\,.\,2\ldots(q-2)} + q\,.\,\frac{(q-1)(q-2)\ldots 3.2}{1\,.\,2\ldots(q-2)} + q\frac{q(q-1)\ldots 4.3}{1.2\ldots(q-2)} + \ldots$$

$$q\,\frac{(n-s-2)\ldots(n-s-q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-2)} = q\,.\,\frac{(n-s-1)\,(n-s-2)\,.\,.\,.\,.\,(n-s-q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(q-1)}$$

Diese Schlüsse bleiben in voller Kraft, so lange die Stellenzahlen der ausgeschlossenen Elemente sich nicht um so viel vermindert haben, dafs in den Summen, die sie mit den übrigen Elementen zur $(q-1)^{\text{ten}}$ Classe bilden, gleiche oder höhere Elemente vorkommen, als sie selbst sind. Geschieht diefs, so ist das Ausscheiden zu oft und im letzten Falle unter zwei Elementen, und zwar so oft mal zu viel eingetreten, als zwei Elemente mit einander auf q Stellen Verbindungen zu zweien $\left(\text{also} \frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\right)$ eingehen können.

Dieser Fehler mufs entfernt, und defswegen die hiedurch erzeugte Gruppenanzahl selbst wieder von der ausgeschiedenen ausgeschlossen, oder der ursprünglichen zugezählt werden. Die hiedurch erzeugten Gruppenanzahlen bilden selbst wieder eine Reihe von Ausdrücken, welche die steigenden Summen zur $(q-2)^{\text{ten}}$ Classe darstellen. Sie vereinigeu sich nach Art der oben stehenden Reihe in folgendem Ausdrucke

$$\frac{q(q-1)}{1\,.\,2} \cdot \frac{(n-2s-1)\,(n-2s-2)\ldots\ldots(n-2s-q+1)}{1\quad.\quad2\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(q-1)}$$

Sind die Stellenzahlen der ausgeschiedenen Elemente wieder um s gefallen, so dehnt sich das Gesagte auf drei Elemente aus, und man hat dann von der so eben ausgeschiedenen Gruppenanzahl selbst wieder die Zahl auszuscheiden, welche in dem Ausdrucke

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot \frac{(n-3s-1)\,(n-3s-2)\ldots\ldots(n-3s-q+1)}{1\quad.\quad2\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(q-1)}$$

begriffen ist u. s. f. Nach dem Gesagten erhält man nun für die Bestimmung der fraglichen Gruppenanzahl folgende Gleichung

$$50)\; P'[fn;\, a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_s]^q =$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots(n-q+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(q-1)}$$

$$-q\,\frac{(n-s-1)(n-s-2)\ldots(n-s-q+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(q-1)}$$

$$+\frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\,\frac{(n-2s-1)(n-2s-2)\ldots(n-2s-q+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(q-1)}$$

$$-\frac{q(q-1)(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(n-3s-1)(n-3s-2)\ldots(n-3s-q+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(q-1)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Die Reihe bricht ab, wenn eine Facultät in 0 übergeht. Die Aufgabe ist nur so lange möglich, als qs so grofs oder gröfser als n ist. Sie ist unmöglich, wenn qs kleiner, als n oder s kleiner als $\frac{n}{q}$ werden sollte.

Hier wurde die Ableitungsweise dieser Versetzungen ganz im Allgemeinen und ohne Rücksicht auf einen speciellen Fall vorgetragen. Eine ausführlichere Erörterung dieser Art von Combinationen haben wir zuerst in unsern Forschungen im Gebiete der höhern Analysis §. 19, Pg. 37 u. f. f. gegeben. Dort liegt dieselbe Idee zu Grunde. Die dort gewählte Darstellung gibt genaue Einsicht in den Bau dieser Versetzungen.

Soll nun die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer Elementen-Reihe, deren Stellenzahlen mit 0 beginnen, und von der die Schlufs-Elemente ausgeschlossen werden, bestimmt werden; so hat man aus der Gleichung 46 für die Ableitung der Gruppenanzahl von der einen aus der andern Elementenreihe

$$P'[fn;\ a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots a_s]^q = P'[f(n+q);\ a_1,\ a_2 \ldots a_{s+1}]^q$$

und durch Einführung der entsprechenden Werthe in 50

$$51)\quad P'[fn;\ a_0,\ a_1,\ a_2]^q =$$

$$\frac{(n+q-1)\,(n+q-2)\,(n+q-3)\ldots(n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$-\frac{q}{1}\cdot\frac{(n+q-s-2)(n+q-s-3)(n+q-s-4)\ldots(n-s)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$+\frac{q(q-1)}{1.2}\cdot\frac{(n+q-2s-3)(n+q-2s-4)(n+q-2s-5)\ldots(n-2s-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$-\frac{q(q-1)(q-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ \frac{(n+q-3s-4)(n+q-3s-5)\ \ldots\ (n-3s-2)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Auch diese Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht.

Soll die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus einer Elementenreihe, deren Stellenzahlen mit negativen Gröfsen beginnen, und wobei die Schlufselemente ausgeschieden sind, bestimmt werden, so ist aus 48

$$P'[fn;\ a_{-r},\ a_{-r+1},\ \ldots a_0,\ a_1 \ldots a_s]^q =$$

$$P'[f(n+(r+1)q);\ a_1,\ a_2 \ldots a_{s+r+1}]$$

Werden die entsprechende Werthe benutzt, so entsteht aus 50

$$52)\ P'[\int n;\ a_{-r},\ a_{-r+1},\ \ldots\ a_s]^q$$

$$= \frac{[n+(r+1)q-1]\,[n+(r+1)q-2]\ldots[n+rq+1]}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$- \frac{q}{1}\ .\ \frac{[n+(r+1)q-s-r-2]\,[n+(r+1)q-s-r-3]\ldots\ldots[n+rq-s-r]}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$+ \frac{q(q-1)}{1\ .\ 2}\ .\ \frac{[n+(r+1)q-2(s+r)-3]\,[n+(r+1)q-2(s+r)-4]\ldots\ldots[n+rq-2(s+r)-1]}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$- \frac{q(q-1)(q-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ .\ \frac{[n+(r+1)q-3(s+r)-4]\,[n+(r+1)q-3(s+r)-5]\ldots[n+rq-3)(s+r)-2]}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (q-1)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Diese Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Die Elementenreihe, woraus die Gruppen zu der fraglichen Summe gebildet werden sollen, ist so lange unvollständig, als $s+r$ kleiner als $n+rq$ ist. Wird aber $s+r$ so grofs, oder gar gröfser, als $n+rq$, so wird die Elementenreihe vollständig, und enthält im letzteren Falle sogar mehr Elemente, als nöthig sind, die erforderliche Summe zu erzeugen. Es verschwinden dann auch in der Gleichung 51 alle Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit Ausnahme des ersten.

§. 21.

Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen, bei ausgeschlossenen Anfangs-, Schlufs- und Zwischen-Elementen.

Mittelst der Gleichungen 44 und 50 wird es nun leicht seyn, die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen, bei ausgeschlossenen Anfangs- und Schlufselementen zu bestimmen.

Ist nämlich die Zahl dieser Versetzungen zur Summe n aus den Elementen $a_{r+1},\ a_{r+2} \ldots a_t$ zur q^{ten} Classe zu bestimmen, so ist nach 43

$$P'[\mathfrak{f}\,n;\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ \ldots\ a_t]^q = P'[\mathfrak{f}(n-rq);\ a_1,\ a_2\ \ldots\ a_{t-r}]^q$$

und hiernach durch Einführung der entsprechenden Werthe in 50.

$$\begin{aligned}
53)\ P'[\mathfrak{f}n;\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ \ldots\ a_t] &= \frac{(n-rq-1)\,(n-rq-2)\ldots(n-(r+1)\,q+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ (q-1)} \\
&- q\,.\,\frac{[n-rq-(t-r)-]\,[n-rq-(t-r)-2]\ldots[n-(r+1)q-(t-r)+1]}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ (q-1)} \\
&+ \frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\,\frac{[n-rq-2(t-r)-1]\,[n-rq-2(t-r)-2]\ldots[n-(r+1)q-2(t-r)+1]}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ (q-1)} \\
&- \frac{q(q-1)(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{[n-rq-3(t-r)-1]\,[n-rq-3(t-r)-2]\ldots[n-(r+1)q-3(t-r)+1]}{1\ .\ 2\ \ldots\ (q-1)} \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Behalten wir, um die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Zwischenelementen zu gewinnen, die §. 18 angegebene Bezeichnung bei, so ist auch hier zu bemerken, daſs nur die Zahl der Elemente und der Classe willkührlich ist, dagegen die Summe von diesen beiden abhängt. Hiernach gewinnt man folgende zurückführende Gleichung zur Bestimmung der durch sie erzeugten Gruppenanzahl.

$$\begin{aligned}
54)\ P'[\mathfrak{f}(q\,x + r\,\Delta x);\ x,\ x+\Delta x,\ \ldots\ x + r\,\Delta x]^q &= P'[\mathfrak{f}(q+r);\ a_1,\ a_2\ \ldots\ a_{r+1}]^q \\
&= \frac{(q+r-1)\,(q+r-2)\ldots(r+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ (b-1)}
\end{aligned}$$

2) Verbindungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Elementen.

§. 22.

Verbindungen ohne und mit Wiederholungen zu bestimmten Summen bei ausgeschlossenen Anfangs- und Zwischen-Elementen.

Die entwickelte Darstellung der Verbindungen zu bestimmten Summen übergehen wir, da sie keiner weiteren Schwierigkeit unterliegt. Die Gruppenanzahlen dieser Verbindungen lassen sich leicht auf die durch vollständige Elementenreihen erzeugten zurückführen.

Die Gleichungen, die wir zu dem Ende mittheilen, sind folgende: Für die Gruppenanzahl der Verbindungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen.

$$55)\ C[\mathfrak{f}n;\ a_{s+1},\ a_{s+2}\ldots]^q = C[\mathfrak{f}(n-sq);\ a_1,\ a_2,\ldots]^q$$

Für die Ableitung der Gruppenanzahl dieser Verbindungen aus der Gruppenanzahl der mit Wiederholungen aus der vollständigen Elementenreihe nach 39 §. 17.

$$56)\ C[\mathfrak{f}n;\ a_{s+1},\ a_{s+2}\ldots]^q = C'[\mathfrak{f}\left(n-sq-\frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\right);\ a_1,\ a_2,\ldots]^q$$

Für die Ableitung der Gruppenanzahl der Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen einer abgekürzten Reihe von denen der vollständigen nach 31. §. 16

$$57)\ C'[\mathfrak{f}n;\ a_{s+1},\ a_{s+2},\ldots]^q =$$

$$C'[\mathfrak{f}(n-sq-1);\ a_1,\ a_2\ldots]^{q-1} + C'[\mathfrak{f}(n-(s+1)q);\ a_1,\ a_2\ldots]^q$$

nach Nro. 29 aber

$$58)\ C'[\mathfrak{f}n;\ a_{s+1},\ a_{s+2},\ldots]^q = C'[\mathfrak{f}(n-sq-1);\ a_1,\ a_2\ldots]^{q-1}$$
$$+ C'[\mathfrak{f}(n-(s+1)q-1);\ a_1,\ a_2\ldots]^{q-1}$$
$$+ C'[\mathfrak{f}(n-(s+2)q-1);\ a_1,\ a_2\ldots]^{q-1}$$
$$\vdots$$

Die beiden lezten Gleichungen geben eine zurücklaufende Bildungsweise an.

Die Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer Elementenreihe, deren Stellenzahlen mit 0 beginnen, nebst ihrer Anwendung haben wir schon §. 16 mitgetheilt. Die Gleichung für diese Verbindungen aus Reihen, deren Elemente mit negativen Stellenzahlen beginnen, ist:

$$59)\ C'[\mathfrak{f}n;\ a_{-r},\ a_{-r+1}, \ldots a_0, a_1, \ldots]^q =$$
$$C'[\mathfrak{f}(n + (r+1)\,q;\ a_1,\ a_2 \ldots]^q$$

Aus dieser gewinnt man in Verbindung mit 31 und 29 folgende

$$60)\ C'[\mathfrak{f}n;\ a_{-r},\ a_{-r+1}, \ldots]^q =$$
$$C'[\mathfrak{f}(n+(r+1)q-1);\ a_1,\ a_2 \ldots]^{q-1} + C'[\mathfrak{f}(n+rq):\ a_1,\ a_2 \ldots]^q$$

$$61)\ C'[\mathfrak{f}n;\ a_{-r},\ a_{-r+1}, \ldots]^q =$$
$$C'[(n + (r+1)\,q - 1);\ a_1,\ a_2 \ldots]^{q-1}$$
$$+\ C'[\mathfrak{f}(n + rq - 1);\ a_1,\ a_2 \ldots]^{q-1}$$
$$+\ C'[\mathfrak{f}(n + (r-1)\,q - 1);\ a_1,\ a_2 \ldots]^{q-1}$$
$$+\ C'[\mathfrak{f}(n + (r-2)\,q - 1);\ a_1,\ a_2 \ldots]^{q-1}$$
$$\vdots$$

Die Verbindungen ohne und mit Wiederholungen zu bestimmten Summen, bei ausgeschlossenen Schlufselementen, eben so die bei ausgeschlossenen Anfangs- und Schlufselementen übergehen wir, da sie von keiner Anwendung und Wichtigkeit sind. Ihre Bildungsweise folgt ohnedem aus dem bisher Mitgetheilten leicht.

Behalten wir für die Verbindungen ohne und mit Wiederholungen bei ausgeschlossenen Zwischenelementen die in §. 18 gewählte Bezeichnung bei, so haben wir in Folge der schon dort gemachten Bemerkungen, für die Zurückführung der hiernach sich ergebenden Gruppenanzahl auf die der vollständigen Reihe, folgende Gleichungen:

$$62)\ C[\mathfrak{f}\left(qx + \frac{(q-2)(q-1)}{1\ .\ 2}\triangle x + r\triangle x\right);\ x,\ x+\triangle x, \ldots x+r\triangle x]^q =$$

$$= C[\mathfrak{f}\left(q + \frac{(q-2)(q-1)}{1\ .\ 2} + r\right);\ a_1,\ a_2, \ldots a_{r+1}]^q$$

$$= C[\mathfrak{f}\left(\frac{(q-1)\,q}{1\ .\ 2} + r + 1\right);\ a_1,\ a_2, \ldots a_{r+1}]^q$$

und

$$63)\ C'[\mathfrak{f}(q\,x + r\triangle x);\ x,\ x+\triangle x, \ldots x + r\triangle x] =$$
$$C'[\mathfrak{f}(q + r);\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_{r-1}]^q$$

III. Combinationen zu bestimmten Unterschieden.

§. 23.

Die Combinationen zu bestimmten Unterschieden sind uns schon bei den Combinationen zu bestimmten Summen begegnet. Diejenigen Combinationen zu bestimmten Summen nämlich, die aus Reihen, deren Elemente mit negativen Stellenzahlen beginnen, gebildet wurden, drücken Differenzen aus, wenn man ihre Stellenzahlen nach Angabe der Zeichen vereinigt. Daher beziehen sich die Gleichungen 42, 48, 49, 52, 59, 60, 61, auf Combinationen zu bestimmten Unterschieden. Da diese Combinationen uns zu keiner weitern Anwendung dienen, so sey erlaubt, auf die für sie geltenden Gleichungen und auf ihre Stellung in einem systematischen Zusammenhange aufmerksam zu machen.

Es gibt übrigens noch eine Art von Combinationen, die in den Dimensionen ihrer gleichartigen Elemente auf Unterschiede führen, und die merkwürdige Resultate liefern. Es würde uns zu weit führen, sie hier zu untersuchen: Wir behalten diefs einer andern Gelegenheit vor.

IV. Summen der durch Combinationen erzeugten Producte.

1) Summen der durch Versetzungen erzeugten Producte.

§. 24.

Summen der Versetzungen ohne Wiederholungen.

Die Summirung der Producte, welche die Gruppen der Versetzungen irgend einer Classe erzeugen, ergibt sich leicht, wenn man das, was §. 11 über den Zusammenhang zwischen den Versetzungen und Verbindunden gesagt wurde, berücksichtigt. Die Gleichung 20 gilt nämlich nicht nur von der Gruppenanzahl, sondern auch von der Bildungsweise. Benutzen wir sie zu unserm Zwecke, so entsteht.

64) $P(a_1, a_2, \ldots . a_n)^q = 1 . 2 . 3 \ldots . q . \; C\,(a_1, a_2 \ldots . a_n)^q$

und es ist somit auch die Summirung der Versetzungen ohne Wiederholungen auf die der Verbindungen ohne Wiederholungen zurück geführt. Hieraus fliefst ferner

$$SP(a_1, a_2 \ldots a_n)^q = 1 . 2 . 3 \ldots . p . \; SC(a_1, a_2 \ldots a_n)^q$$

In den §§. 26 und 27 sind zwei allgemeine Summirungsmethoden für die Verbindungen ohne Wiederholungen angegeben. Wir verweisen auf sie. Führen wir die dort angegebene, der Summirungsmethode angemessene, Bezeichnungsweise der Elemente: $x, x + \Delta x, x + 2 \Delta x \ldots . x + (n-1) \Delta x$, wornach die Elemente in eine gleiche Grundgröfse x, und eine gemeinschaftliche Zunahme Δx zerlegt werden, auch hier ein; so erhalten wir aus Nr. 77 §. 27. folgende Gleichung

65) $SP(x, x + \triangle x, x + 2 \triangle x, \ldots x + (n-1) \triangle x)^q =$

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots . q\,[\lg(1 + \triangle)]^{n-q} x^{n|\Delta x}}{1 . 2 . 3 \ldots (n-q) (\triangle x)^{n-q}}$$

Am einfachsten wird der Summenausdruck, wenn Elementenanzahl und Classenexpoment gleich sind. Es ist dann

$$66)\ SP(x, x+\triangle x, \ldots x+(n-1)\triangle x)^n = 1^{n|1} \cdot x^{n|\triangle x}$$

Die entwickelten Darstellungen der Summen einzelner Classen ergeben sich durch Multiplication der Gleichungen Nr. 74 und 78. mit der Fakultät $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q$.

Die in Nr. 65 gewonnene Gleichung gilt allgemein; die Gruppen mögen aus vollständigen oder abgekürzten Elementenreihen, oder aus solchen, deren Stellenzahlen mit negativen Gröfsen beginnen, entstanden seyn. Die Gröfse x vertritt die Stellenzahl des Anfangs-Elementes.

§. 25.

Summen der Versetzungen mit beschränkten und unbeschränkten Wiederholungen.

Die Producte, welche die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen erzeugen, summiren sich leicht, denn es erscheinen nach §. 9. in jeder Gruppe alle Elemente, nur in verschiedener Ordnung. Jede Gruppe erzeugt also dasselbe Product. Behalten wir die Bezeichnung des §. 9 bei, so ist aus Nr. 16 ganz allgemein.

$$67)\ SP(a_1^p, a_2^q \ldots . b_1^r, b_2^s \ldots . c_1^t, c_2^u \ldots .)^x =$$

$$\frac{1^{n|1} a_1^p \cdot a_2^q \ldots b_1^r \cdot b_2^s \ldots . c_1^t \cdot b_2^u \ldots .}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1} \ldots 1^{r|1} \ldots 1^{s|1} \ldots 1^{t|1} \ldots 1^{u|1} \ldots}$$

wobei die Bedingungsgleichung

$$n = p + q + \ldots + r + s + \ldots + t + u + \ldots$$

gilt, und zu bemerken ist, dafs die Elementenreihen vollständig, oder abgekürzt seyn, oder negative Stellenzahlen führen können, oder nicht, ja dafs die Elemente selbst untereinander gar nicht im Zusammenhange, der im vorhergehenden §. vorausgesetzt ist, stehen müssen.

Um die Summen der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmen, hat man zu berücksichtigen, dafs sie die Potenzen der der Summen sind, welche durch die Vereinigung der Werthe sämmtlicher Elemente der gegebenen Reihen erzeugt werden. Hiernach ist ganz allgemein

$$68)\ SP(a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, \ldots b_n, c, \ldots c_o \ldots)^q =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_m + b_1 + b_2 + \ldots . b_n + c_1 + c_2 + \ldots . + o_o \ldots)^q$$

Auch hier gelten die so eben gemachten Bemerkungen.

2) Summen der durch Verbindungen erzeugten Producte.

§. 26,

Summe der Verbindungen ohne Wiederholungen.

Bei der Summirung der Verbindungen, die wir zu unserm Zwecke hier durch

$$SC(x, x+\triangle x, x+2\triangle x, \ldots x+(n-1)\triangle x)^q$$

bezeichnen, nehmen wir die Differenziale der Function

$$x^{n|\triangle x} = x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots\ldots(x+(n-1)\triangle x)$$

zu Hülfe, worin x veränderlich und $\triangle x$ beständig angenommen wird.

Wird diese Function differenzirt, so erzeugt das Product auf der ersten Seite so viele, um einen Factor verkürzte, Producte, als verschiedene Factoren in ihm vorkommen. Das Differenzial jedes Factors ist *d*x. Hiernach entsteht

$$\frac{dx^{n|\triangle x}}{dx}$$

$$= x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots\ldots(x+(n-2)\triangle x)$$
$$+ x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots\ldots(x+(n-3)\triangle x)(x+(n-1)\triangle x)$$
$$+ x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots\ldots(x+(n-4)\triangle x)(x+(n-2)\triangle x)(x+(n-1)\triangle x)$$
$$x(x+\triangle x)(x+3\triangle x)\ldots\ldots\ldots(x+(n-2)\triangle x)(x+(n-1)\triangle x)$$
$$x(x+2\triangle x)(x+3\triangle x)\ldots\ldots(x+(n-2)\triangle x)(x+(n-1)\triangle x)$$
$$(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots\ldots(x+(n-2)\triangle x)(x+(n-1)\triangle x)$$

Es ergibt sich aus dem Ueberblicke dieser Producte und dem eben Gesagten, dafs die erhaltenen Producten-Aggregate die Verbindungen aus den Elementen $x, x+\triangle x, x+2\triangle x \ldots (x+(n-1)\triangle x)$ zur $(n-1)^{ten}$ Classe sind. Hiernach ist

$$\frac{dx^{n|\triangle x}}{dx} = SC(x, x+\triangle x, x+2\triangle x, \ldots\ldots x+(n-1)\triangle x)^{n-1}$$

Wiederholt man an dem so eben erhaltenen Resultate das Differenziren, so erzeugt jedes einzelne Product, das aus (n—1) Factoren besteht, (n — 1) neue Producte, worin der Reihe nach immer ein Factor verschwindet. In jedem Producte fehlen demnach in Vergleichung mit der ursprünglichen Facultät je zwei Factoren. Das Ausfallen je zweier Factoren erzeugt immer zwei einander gleiche Producte, wie denn z. B. die Differenziation von $x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots(x+(n-3)\triangle x).d(x+(n-2)\triangle x)=$

$$x(x+\triangle x)\ldots(x+(n-3)\triangle x)dx$$

und von $x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots(x+(n-3)\triangle x).d(x+(n-1)\triangle x)=$

$$x(x+\triangle x)\ldots(x+(n-3)\triangle x)dx$$

eine und dieselbe Facultät erzeugt. Das Ausfallen je zweier Factoren erzeugt die Verbindungen aus den Elementen

$$x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x$$

zur $(n-2)^{\text{ten}}$ Classe. Hiernach hat man:

$$\frac{d^2x^{n|\triangle x}}{(dx)^2}=1\,.\,2\,.\,SC(x,\ x+\triangle x,\ \ldots,x+(n-1)\triangle x)^{n-2}$$

Setzt man diese Geschäfte und Schlüsse weiter fort, so führt die wiederholte Differenziation zu der Gleichung

$$\frac{d^3x^{n|\triangle x}}{(dx)^3}=1.2.3.SC(x,\ x+\triangle x,\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^{n-3}$$

u. s. w. Hieraus folgt der allgemeine Schlufs

69) $d^rx^{n|\triangle x}=1.2.3\ldots rSC(x,\ x+\triangle x,\ldots x+(n-1)\triangle x)^{n-r}$

In dieser Gleichung hängt die Verbindungsclasse von der Elementenanzahl und dem Differnzial-Exponenten ab. Entfernen wir diese Abhängigkeit und nennen die Verbindungsclasse wie früher q, so ist

$$n-r=q$$

und folglich $r=n-q$ zu setzen, woraus sofort folgende Gleichung entsteht:

70) $SC(x,\ x+\triangle x,\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^q=$

$$\frac{d^{n-q}\,x^{n|\triangle x}}{1.2.3\ldots(n-q)(dx)^{n-q}}$$

Diese Gleichung ist nur formell und zeigt, wie die Summenausdrücke der Verbindungen ohne Wiederholungen mit den Differenzialen der Facultäten zusammenhängen; ein Zusammenhang, der immer merkwürdig bleibt.

Um nun eine Gleichung zu finden, welche die Summirung der Verbindungen möglich macht, entwickeln wir die Facultät $x^{n|\triangle x}$ in eine Reihe, deren Glieder nach den fallenden Potenzen von x geordnet sind. Eine einfache Entwickelung führt auf folgende Gleichung:

$$71)\quad x^{n|\Delta x} = x^n + SC(1,\,2,\,\ldots,n-1)^1\,x^{n-1}\,\Delta x$$
$$+ SC(1,\,2,\,\ldots,n-1)^2\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2$$
$$+ SC(1,\,2,\,\ldots\,n-1)^3\,x^{n-3}\,(\Delta x)^3$$
$$\vdots$$
$$SC(1,\,2,\,\ldots\,n-1)^{n-1}\,x^0\,(\Delta x)^{n-1}$$

Wird diese Gleichung differenzirt, und der Kürze wegen die Summe der Verbindungen, welche mit den einzelnen Gliedern der entwickelten Reihe verbunden sind, durch SC^1, SC^2, SC^3 ... bezeichnet; so gewinnt man

$$72)\quad \frac{d^r x^{n|\Delta x}}{(dx)^r} = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots.\,(n-r+1)\;SC^0\,x^{n-r}$$
$$+ (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,(n-r)\;SC^1\,x^{n-r-1}\,\Delta x$$
$$+ (n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,\ldots\,(n-r-1)\;SC^2\,x^{n-r-2}\,(\Delta x)^2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Um diese Gleichung mit 70 in Harmonie zu bringen, haben wir $r = n - q$ zu setzen, und dann 70 mit 69 zu verbinden. Hieraus wird

$$73)\quad SC(x,\,x+\Delta x,\,x+2\Delta x\,\ldots\,x+(n-1)\Delta x)^q = \frac{d^{n-q}\;x^{n|\Delta x}}{1.2.3\ldots(n-q)\,(dx)^{n-q}} =$$
$$= \frac{n^{n-q|-1}}{1^{n-q|1}}\,x^q + \frac{(n-1)^{n-q|-1}}{1^{n-q|1}}\;SC^1\,x^{q-1}\Delta x + \frac{(n-2)^{n-q|-1}}{1^{n-q|1}}\;SC^2\,x^{q-2}\,(\Delta x)^2 + \frac{(n-3)^{n-q|-1}}{1^{n-q|1}}\;SC^3\,x^{q-3}\,(\Delta x)^3 + \ldots$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Diese Gleichung haben wir schon in der zweiten

Untersuchung unserer Analysis mitgetheilt, und dort eine weitere Methode gezeigt, sie für höhere Verbindungs-Classen brauchbar zu machen. Indem wir deswegen dorthin verweisen, geben wir hier eine entwickelte Darstellung für einige specielle Fälle.

$$74)\quad SC(x,\ x+\triangle x,\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^1 = \frac{n}{1}\,x + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\triangle x$$

$$SC(x,\ x+\triangle x\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^2 = \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\,x^2 + \frac{n-1}{1}\,\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\,x.\triangle x + \frac{3n-1}{4}\,\frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}\,(\triangle x)^2$$

$$SC(x,\ x+\triangle x,\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^3 = \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}\,x^3 + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\,x^2\triangle x + \frac{n-2}{1}\cdot\frac{3n-1}{4}\cdot\frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}\,x\,(\triangle x)^2 + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{n^{4|-1}}{1^{4|1}}\,(\triangle x)^3$$

$$SC(x,\ x+\triangle x\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^4 = \frac{n^{4|-1}}{1^{4|1}}\,x^4 + \frac{(n-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\,x^3\triangle x + \frac{(n-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{3n-1}{4}\cdot\frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}\,x^2(\triangle x)^2 + \frac{n-3}{1}\cdot\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{n^{4|-1}}{1^{4|1}}\,x(\triangle x)^3 + \frac{15(n-1)^2\,n-2(5n-1)}{1.2.3.4.2}\cdot\frac{n^{5|-1}}{1^{5|1}}\,(\triangle x)^4$$

u. s. w.

Diese Reihen gelten für die Summen der Verbindungen allgemein, die Gruppen können aus vollständigen, oder abgekürzten Elementenreihen, oder aus solchen, deren Stellenzahlen mit negativen Gröfsen beginnen, entstanden seyn. x vertritt auch hier die Stellenzahl des Anfangs-Elementes.

§. 27.

Wir theilen noch eine andere allgemeine Summirungsmethode für die Verbindungen ohne Wiederholungen mit, die dadurch gewonnen wird, dafs wir in der Gleichung 70 das erforderliche Differenzial durch Unterschiede der angegebenen Facultät $x^{n|\triangle x}$ darstellen. Die Unterschiede dieser Facultät lassen sich leicht gewinnen.

Deswegen unterliegt die weitere Entwicklung des gesuchten Summenausdrucks keiner Schwierigkeit. Es ist bekanntlich *)

$$75)\quad \frac{d^m X}{(dx)^m} = \frac{1}{(\triangle x)^m}\left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\right)^m X$$

wo X jede beliebige Function von x bezeichnet, deren Zunahme $\triangle x$ ist. Berücksichtigt man, dafs die in Klammern eingeschlossene Reihe mit folgender zusammen fällt,

$$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots$$

wenn man $\triangle$ statt y, oder ein Geschäft statt einer Gröfse einführt; so hat man hieraus

$$76)\quad \frac{d^m X}{(dx)^m} = \frac{1}{(\triangle x)^m}\,[\lg\,(1+\triangle]^m X$$

In dieser Gleichung drückt $\triangle$ das Geschäft des Unterschiedsnehmens aus. Die Bedeutung der Gleichung aber ist: man soll die durch $\lg\,(1+\triangle)$ angedeutete Reihe in die m^{te} Potenz erheben, jedes Glied mit der begleitenden Function X verbinden, und an ihr das Unterschiednehmen so oft vornehmen, als der Exponent von $\triangle$ ausspricht.

Setzen wir nun in 76 $m = n - q$, $X = x^{n|\triangle x}$ und bringen das hiedurch erhaltene Resultat mit 70 in Verbindung, so entsteht die allgemeine Gleichung

$$77)\quad SC(x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^q$$

$$= \frac{[\lg\,(1+\triangle)]^{n-q}\ x^{n|\triangle x}}{1.2.3\ldots(n-q)\,(\triangle x)^{n-q}}$$

Die für diese Gleichung nöthig werdende entwickelte Darstellung fällt mit der Erhebung des Polynomiums

$$\frac{\triangle}{1} - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} \ldots$$

in die verschiedenen Potenzen zusammen. Diese geschieht nach den aus der Analysis bekannten Gesetzen, die in der nachstehenden Gleichung enthalten sind.

$$78)\ \left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} \cdots\cdots\right)^m x^{n|\triangle x} =$$

$$P'(\text{ſ}m;\ 1,\ {}^1\!/_2,\ {}^1\!/_3 \ldots\ldots)^m\ \triangle^m x^{n|\triangle x}$$
$$-\ P'(\text{ſ}(m+1);\ 1,\ {}^1\!/_2,\ {}^1\!/_3,\ldots)^m\ \triangle^{m+1} x^{n|\triangle x}$$
$$+\ P'(\text{ſ}(m+2);\ 1,\ {}^1\!/_2,\ {}^1\!/_3,\ldots)^m\ \triangle^{m+2} x^{n|\triangle x}$$
$$-\ P'(\text{ſ}(m+3);\ 1,\ {}^1\!/_2,\ {}^1\!/_3,\ldots)^m\ \triangle^{m+3} x^{n|\triangle x}$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

wozu die Gleichung 92 Pg. 80 meines Differenzialcalculs als Grundlage dient, und wobei zu bemerken ist, daſs bei der Bildung der angezeigten Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen die Nenner der beigefügten Elemente als Stellenzahlen zu betrachten sind. Die Unterschiede der Facultät, welche hiezu nöthig werden, bestimmen sich nach §. 132 Pg. 239 des genannten Werkes durch die Gleichung

$$79)\ \triangle^r x^{n|\triangle x} = n^{r|-1}.\ (x + r\triangle x)^{n-r|\triangle x}\,(\triangle x)^r$$

Die gewonnene Reihe Nro. 78 scheint der Form nach unendlich; ist es aber nicht, indem die Unterschiede der Facultät $x^{n|\triangle x}$ nach §. 132 des angeführten Werkes auf 0 führen, wenn r gröſser als n wird. Verbinden wir nun 77 mit 78 und 79, so erhalten wir, wenn $m = n - q$ gesetzt wird, folgende Gleichung

$$80)\ SC(x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^q =$$

$$= P'(f(n-q);\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \ldots)^{n-q} \cdot \frac{n^{n-q|-1}}{1^{n-q|1}} (x+(n-q)\triangle x)^{q|\triangle x}$$

$$- P'(f(n-q+1);\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \ldots)^{n-q} \cdot \frac{n^{n-q+1|-1}}{1^{n-q|1}} (x+(n-q+1)\triangle x)^{q-1|\triangle x}\ \triangle x$$

$$+ P'(f(n-q+2);\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \ldots)^{n-q} \cdot \frac{n^{n-q+2|-1}}{1^{n-q|1}} (x+(n-q+2)\triangle x)^{q-2|\triangle x} \cdot (\triangle x)^2$$

$$- P'(f(n-q+3);\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \ldots)^{n-q} \cdot \frac{n^{n-q+3|-1}}{1^{n-q|1}} (x+(n-q+3)\triangle x)^{q-3|\triangle x} \cdot (\triangle x)^3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht.

Setzt man, um einige entwickelte Darstellungen zu erhalten, der Reihe nach $n-1$, $n-2$, $n-3\ldots$ statt q; so gewinnt man folgende

$$81)\ SC(x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots\ x+(n-1)\triangle x)^{n-1} =$$

$$\frac{n}{1} (x+\triangle x)^{n-|\triangle x} - \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2} (x+2\triangle x)^{n-2|\triangle x}\ \triangle x + \frac{n(n-1)(n-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3} (x+3\triangle x)^{n-3|\triangle x}\ (\triangle x)^3$$

$$SC(x,\ x+\triangle x,\ \ldots,\ x+(n-1)\triangle x)^{n-2} =$$

$$\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}(x+2\triangle x)^{n-2|\triangle x} - \frac{n^{3|-1}}{1^{2|1}}(x+3\triangle x)^{n-3|\triangle x}\triangle x + \frac{11\ .\ n^{4|-1}}{12\ .\ 1.2}(x+4\triangle x)^{n-4|\triangle x}(\triangle x)^2$$

$$-\frac{5.\ n^{2|-1}}{2\ .\ 6}(x+5\triangle x)^{n-5|\triangle x}(\triangle x)^3 + \frac{137\ .\ n^{6|-1}}{2\ .\ 180}(x+6\triangle x)^{n-6|\triangle x}(\triangle x)^4$$

$$-\frac{7\ .\ n^{7|-1}}{2\ .\ 10}(x+7\triangle x)^{n-7|\triangle x}(\triangle x)^5 + \frac{3267\ .\ n^{8|-1}}{2\ .\ 5040}(x+8\triangle x)^{n-8|\triangle x}(\triangle x)^6 - \ldots .$$

$$SC(x,\ x+\triangle x,\ \ldots\ldots\ x+(n-1)\triangle x)^{n-3} =$$

$$\frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}(x+3\triangle x)^{n-3|\triangle x} - \frac{3\ .\ n^{4|-1}}{2\ .\ 6}(x+4\triangle x)^{n-4|\triangle x}\triangle x$$

$$+\frac{7\ \ n^{5|-1}}{1.2.3.4}(x+5\triangle x)^{n-5|\triangle x}(\triangle x)^2 - \frac{15\ \ n^{6|-1}}{1.2.3.8}(x+6\triangle x)^{n-6|\triangle x}(\triangle x)^3$$

$$+\frac{29\ \ n^{7|-1}}{1.2.3\ .\ 15}(x+7\triangle x)^{n-7|\triangle x}(\triangle x)^4 - \frac{421\ .\ 12^{8|-1}}{1.2.3\ .\ 240}(x+8\triangle x)^{n-8|\triangle x}(\triangle x)^5 + \ldots.$$

$$SC(x,\ x+\triangle x,\ \ldots\ldots\ x+(n-1)\triangle x)^{n-4} =$$

$$\frac{n^{4|-1}}{1^{4|1}}(x+4\triangle x)^{n-4|\triangle x} - \frac{2\,n^{5|-1}}{1^{4|1}}(x+5\triangle x)^{n-5|\triangle x}.\ \triangle x$$

$$+\frac{17\ \ n^{6|-1}}{1^{4|1}\ .\ 6}(x+6\triangle x)^{n-6|\triangle x}(\triangle x)^2 - \frac{7\ \ n^{7|-1}}{1.2.3.4.2}(x+7\triangle x)^{n-7|\triangle x}(\triangle x)^3$$

$$+\frac{967\ .\ n^{8|-1}}{1.2.3.4.\ 240}.\ (x+8\triangle x)^{n-8|\triangle x}(\triangle x)^4 - \frac{89\ .\ n^{9|-1}}{1.2.3.4\ .\ 20}.\ (x+9\triangle x)^{n-9|\triangle x}(\triangle x)^5 + \ldots$$

u. s. w. Diese Darstellungen lassen sich leicht weiter fortsetzen, und sind für die erzeugenden Elemente ganz allgemein, sie mögen einer vollständigen oder abgekürzten Elementenreihe oder einer solchen angehören, deren Stellenzahlen mit negativen Gröfsen beginnen.

*) Anmerkung

Um nicht wegen Entwickelung der Gleichung 75 auf ein anderes Werk verweisen zu müssen, theilen wir sie selbst kurz und einfach auf folgende Art mit:

Die Unterschiede einer Function werden durch die nachstehenden Gleichungen mittelst Differenziale, wie man sich aus meiner Lehre von den aufsteigenden Functionen Pg. 86 Nro. 214 (Berlin bei Reimer) überzeugen kann, dargestellt

$$\triangle X = \frac{\triangle x}{1}\frac{dX}{dx} + \frac{(\triangle x)\, d^2X}{1.2\,(dx)^2} + \frac{(\triangle x)^3\, d^3X}{1.2.3\,(dx)^3} + \frac{(\triangle x)^4\, d^4X}{1.2.3.4\,(dx)^4} + \ldots\ldots$$

$$\triangle^2 X = 2\,.\,\frac{(\triangle x)^2\, d^2X}{1.2\,(dx)^2} + 6\,.\,\frac{(\triangle x)^3\, d^3X}{1.2.3\,(dx)^3} + 14\,\frac{(\triangle x)^4\, d^4X}{1.2.3.4(dx)^4} + 30\,\frac{(\triangle x)^5\, d^5X}{1.2.3.4.5\,(dx)^5} + \ldots\ldots$$

$$\triangle^3 X = 6\,\frac{(\triangle x)^3\, d^3X}{1.2.3\,(dx)^3} + 36\,\frac{(\triangle x)^4\, d^4X}{1.2.3.4.\,(dx)^4} + 150\,\frac{(\triangle x)^5 d^5X}{1.2.3.4.5.(dx)^5} + \ldots\ldots$$

$$\triangle^4 X = 24\,.\,\frac{(\triangle x)^4 d^4X}{1.2.3.4\,(dx)^4} + 240\,.\,\frac{(\triangle x)^5 d^5X}{1.2\ldots5.(dx)^9} + 1560\,\frac{(\triangle x)^6 d^6X}{1.2\ldots.6(dx)^6} + \ldots\ldots$$

u. s. w.

Die Glieder der entwickelten Reihen, sind der Reihe nach mit Zahlenausdrücken verbunden, welche nach §. 128, Pg. 228 u. ff. meines Differenzialculculs die Eigenschaft haben, dafs sämmtliche, einer Reihe zugehörigen, Zahlen durch den Exponenten des Unterschiedes gemessen werden können, ohne einen Rest zu erzeugen. Machen wir von dieser Bemerkung Anwendung, und setzen der Reihe nach die Horizontalreihen mit abwechselnden Zeichen zusammen; so erhalten wir

$$\begin{array}{rcl}
\triangle X & = & \frac{\triangle x \,.\, dX}{1 \,.\, dx} + \frac{(\triangle x)^2 d^2X}{1 \,.\, 2\,(dx)^2} + \frac{(\triangle x)^3 d^3X}{1 \,.\, 2 \,.\, 3\,(dx)^3} + \frac{(\triangle x)^4 d^4X}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\,(dx)^4} + \ldots\ldots \\
-\frac{\triangle^2 X}{2} & = & \qquad\qquad - \frac{(\triangle x)^2 d^2X}{1 \,.\, 2\,(dx)^2} - 3\,\frac{(\triangle x)^3 d^3X}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, (dx)^3} - 7\,\frac{(\triangle x)^4 d^4X}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\,(dx)^4} - \ldots\ldots \\
+\frac{\triangle^3 X}{3} & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2\,\frac{(\triangle x)^3 d^3X}{1 \,.\, 2 \,.\, 3\,(dx)^4} + 12\,\frac{(\triangle x)^4 d^4X}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\,(dx)^4} + \ldots\ldots \\
-\frac{\triangle^4 X}{4} & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 6\,.\,\frac{(\triangle x)^4 d^4X}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\,(dx)^4} - \ldots\ldots \\
\vdots & &
\end{array}$$

Die Vereinigung aller Reihen auf der rechten Seite des Gleicheitszeichens macht alle Glieder mit Ausnahme des ersten verschwinden, während die Reihe auf der linken Seite, deren Gesetz sich leicht erkennen läſst, unendlich wird. Daraus leitet sich folgende Gleichung ab:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{\triangle x}\left(\frac{\triangle X}{1} - \frac{\triangle^2 X}{2} + \frac{\triangle^3 X}{3} - \frac{\triangle^4 X}{4} + \ldots\ldots\right)$$

Das Gesetz, welches in dieser Gleichung liegt, wird noch deutlicher, wenn man die mit allen Gliedern verbundene Function X ausscheidet, dann entsteht:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{\triangle x}\left(\frac{\triangle}{1} - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\ldots\right)X$$

Diese Gleichung hat das Merkwürdige, dafs sie die Beziehung, worin zwei Geschäfte zu einander stehen, bestimmt. Sie drückt das Gesetz aus, wie das erste Differenzial einer Function durch die Unterschiede derselben Function dargestellt wird. Um die Ableitung der höheren Differenziale zu gewinnen, vervielfachen wir vorerst die vorstehende Gleichung mit dem ersten Differenzial. Dadurch entsteht:

$$d\left(\frac{dX}{dx}\right) = \frac{1}{\triangle x}\left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\right) . dX$$

oder wenn dX auf der rechten Seite nach der vorigen Gleichung entwickelt wird:

$$\frac{d^2X}{(dx)^2} = \frac{1}{\triangle x}\left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\right) . \frac{1}{\triangle x}\left(\frac{\triangle}{1} - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots\right) X$$

$$= \frac{1}{(\triangle x)^2}\left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots.\right)^2 X$$

Auf gleiche Weise erhält man die Darstellung des dritten Differenzials

$$\frac{d^3X}{(dx)^3} = \frac{1}{(\triangle x)^3}\left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} \ldots\ldots\right)^3 X$$

und hieraus allgemein

$$\frac{d^mX}{(dx)^m} = \frac{1}{(\triangle x)^m}\left(\frac{\triangle}{1} - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots..\right)^m X$$

wornach die vorgelegte Gleichung begründet ist.

Die vorstehende Gleichung gibt auch eine Methode an, die Integrale durch die Differenzen einer Function zu bestimmen. Berücksichtigt man nämlich, dafs die Intrale negative Differenziale sind, so hat man, wenn $\triangle x = 1$ gesetzt wird, folgende Darstellung

$$\int^m X\ (dx)^m = \frac{X}{\left(\frac{\triangle}{1} - \frac{\triangle^2}{2} + \frac{\triangle^3}{3} - \frac{\triangle^4}{4} + \ldots..\right)^m}$$

oder in Beziehung auf 75 und 76 Pg. 52

$$\int^m X\ (dx)^m = \frac{X}{[\lg\ (1 + \triangle)]^m}$$

Kramp schreibt die Erfindung der Gleichung 76 Laplace zu. Archiv der reinen und angewandten Mathematik von Hindenburg 10. Heft, P. 226, und gibt dort selbst eine Entwicklung dieses Satzes.

§. 28.

Summe der Verbindungen mit Wiederholungen.

Bei der Auffindung der Summen, welche durch die Verbindungen mit Wiederholungen erzeugt werden, gehen wir von der Elementenanzahl aus, und steigen bei einerlei Classe von einem Elemente zu zweien, von zweien zu dreien auf etc., um das allgemeine Gesetz zu erforschen.

Die nachstehende Reihe mit ihrem Summenausdrucke

82) $a^r + a^{r-1} b + a^{r-2} b^2 + a^{r-3} b^3 + \ldots . + b^m = \frac{a^{r+1} - b^{r+1}}{a - b}$

setzen wir als bekannt voraus. Sie dient als Grundlage.

Das Product, welches durch die Verbindungen mit Wiederholungen aus dem Elemente x zur q^{ten} Classe gebildet werden kann, fällt mit der q^{ten} Potenz der Grundgröfse x zusammen. Es ist hiernach

$$SC'(x)^q = x^q$$

Die Producte, welche durch die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen aus zwei Elementen $(x. \; x + \triangle x)$ zur q^{ten} Classe entstehen, bilden folgende Darstellung

$$\begin{aligned} SC'(x, x + \triangle x)^q = {} & x.x.x \ldots x \\ & + x.x.x \ldots x (x + \triangle x) \\ & + x.x.x \ldots x (x + \triangle x)(x + \triangle x) \\ & + x.x.x \ldots x (x+\triangle x)(x+\triangle x)(x+\triangle x) \\ & \vdots \\ & + (x+\triangle x)(x+\triangle x) \ldots \ldots (x + \triangle x) \end{aligned}$$

Das Product jeder Gruppe hat q Dimensionen. Es erscheinen in diesen Producten zwei Grundgröfsen, deren Potenzen sich zu q ergänzen. Wählt man die umgekehrte Ordnung und beginnt man mit der letzten oder höchsten Gruppe, so gewinnt man folgende Gleichung:

$$SC'(x, x + \triangle x)^q =$$
$$(x+\triangle x)^q + (x+\triangle x)^{q-1} x + (x+\triangle x)^{q-2} x^2 + \ldots + (x+\triangle x) . x^{q-1} + x^q$$

die sich nach 82 sehr einfach darstellen läfst, wenn

$$a = x + \triangle x, \; b = x, \text{ und } r = q$$

gesetzt wird. In diesem Falle hat man

$$83)\ SC'(x,\ x+\triangle x)^q = \frac{(x+\triangle x)^{q+1} - x^q}{\triangle x}$$

Bemerkt man, daſs $(x+\triangle x)^{q+1} - x^q$ der Unterschied der Function x^{q+1} ist, so hat man:

$$SC'(x,\ x+\triangle x)^q = \frac{\triangle x^{q+1}}{\triangle x}$$

Um nun die weitere Ableitung leichter führen zu können, bemerken wir, daſs sich die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen, aus einer Anzahl von Elementen einer Classe, durch Ausscheiden eines Elementes, in Gruppen zu dieser und allen früheren Classen aus einer um Eins kleinern Elementen-Anzahl zurückführen lassen.

Dieſs zeigen wir an dem speciellen Falle, welcher die Verbindungen mit Wiederholungen aus drei Elementen zur vierten Classe darstellt, und wobei wir das Element a_1 ausscheiden

$$SC'(a_1,\ a_2,\ a_3,\ )^4 =$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1 a_1 a_1 a_1 & + & a_1 a_1 a_1 . a_2 & + & a_1\ a_1 . a_2\ a_2 & + & a_1 . a_2\ a_2\ a_2 & + & a_2\ a_2\ a_2\ a_2 \\
 & & a_1 a_1 a_1 . a_3 & & a_1\ a_1 . a_2\ a_3 & & a_1 . a_2\ a_2\ a_3 & & a_2\ a_2\ a_2\ a_3 \\
 & & & & a_1\ a_1 . a_3\ a_3 & & a_1 . a_2\ a_3\ a_3 & & a_2\ a_2\ a_3\ a_3 \\
 & & & & & & a_1 . a_3\ a_3\ a_3 & & a_2\ a_3\ a_3\ a_3 \\
 & & & & & & & & a_3\ a_3\ a_3\ a_3
\end{array}$$

$$= a_1^4 SC'(a_2, a_3)^0 + a_1^3 SC'(a_2, a_3)^1 + a_1^2 SC'(a_2, a_3)^2 + a_1^1 SC'(a_2, a_3)^3 + SC'(a_1, a_3)^4$$

Tragen wir das Gesetz, welches hierin liegt, in das Allgemeine über, behalten die oben angegebene Bezeichnung der Elemente bei, scheiden das Element x aus, und wählen in der Darstellung die umgekehrte Ordnung; so wird

$$\begin{aligned}
84)\ & SC'(x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x\ \ldots.\ x+(n-1)\triangle x)^q = \\
& SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots.\ x+(n-1)\triangle x)^q \\
& + x\ .\ SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots.\ x+(n-1)\triangle x)^{q-1} \\
& + x^2\ SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots.\ x+(n-1)\triangle x)^{q-2} \\
& + x^3\ SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots.\ x+(n-1)\triangle x)^{q-3} \\
& \quad \vdots \\
& x^q\ SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots.\ x+(n-1)\triangle x)^0
\end{aligned}$$

Mittelst dieser Gleichung können wir von den Summen der Verbindungen mit Wiederholungen aus zwei Elementen zur q^{ten}

Classe, die wir in 83 bereits gefunden haben, auf die Summen dieser Verbindungen aus drei Elementen, und so fort von diesen auf die aus vier Elementen u. s. w. übergehen, und dann das allgemeine Gesetz erschliefsen. Zu dem Zwecke erhalten wir folgende Darstellung:

$$SC'(x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x)^q =$$
$$= SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x)^q$$
$$+ x\,.\,SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x)^{q-1}$$
$$+ x^2\ SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x)^{q-2}$$
$$+ x^3\ SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x)^{q-3}$$
$$\vdots$$
$$x^{q-1}\ SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x)^1$$
$$x^q\ \ SC'(x+\triangle x,\ x+2\triangle x)^0$$

Werden die Glieder dieser Darstellung nach der Gleichung 83 summirt, so erhält man, wenn nämlich $x+\triangle x$ statt x, und $x+2\triangle x$ statt $x+\triangle x$ und allmälig q, q—1, q—2, ... 3, 2, 1, 0 statt q gesetzt wird

$$SC'(x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x)^q =$$
$$= \frac{(x+2\triangle x)^{q+1}-(x+\triangle x)^{q+1}}{\triangle x}$$
$$+ x\,.\,\frac{(x+2\triangle x)^q-(x+\triangle x)^q}{\triangle x}$$
$$+ x^2\,.\,\frac{(x+2\triangle x)^{q-1}-(x+\triangle x)^{q-1}}{\triangle x}$$
$$+ x^3\,.\,\frac{(x+2\triangle x)^{q-2}-(x+\triangle x)^{q-2}}{\triangle x}$$
$$\vdots$$
$$x^{q-1}\,.\,\frac{(x+2\triangle x)^2-(x+\triangle x)^2}{\triangle x}$$
$$x^q\,.\,\frac{(x+2\triangle x)^1-(x+\triangle x)^1}{\triangle x}$$

Es erscheinen hier zwei Vertikalreihen, die der Form nach mit der Gleichung 82, jedoch mit dem Unterschiede übereinstimmen, dafs die hier erhaltenen um ein Glied kürzer sind. Der ersten und zweiten Vertikahlreihe fehlt das Glied $\frac{x^{q+1}}{\triangle x}$,

Zählt man dieses Glied mit der ersten Reihe zu und mit der zweiten ab, oder was dasselbe ist, zählt man der vorstehenden Darstellung das Glied

$$x^{q+1} \cdot \frac{(x + 2\triangle x)^0 - (x + \triangle x)^0}{\triangle x} = 0$$

zu, so wird dadurch der Werth nicht geändert, sondern die Reihen ihrer Form nach nur vervollständigt, und dann erhält man folgende Reihen, die sich selbst nach 82, wenn für die erste Vertikalreihe $a = x + 2\triangle x$, und $b = x$, für die zweite $a = x + \triangle x$, $b = x$, und für beide $r = q + 1$ gesetzt wird, auf folgende Art summiren lassen

$$\frac{1}{\triangle x}\Big[(x+2\triangle x)^{q+1} + (x+2\triangle x)^q . x + (x+2\triangle x)^{q-1} . x^2 + \ldots$$

$$\ldots + (x + 2\triangle x)\, x^q + x^{q+1}\Big] = \frac{(x + 2\triangle x)^{q+2} - x^{q+2}}{2(\triangle x)^2}$$

$$-\frac{1}{\triangle x}\Big[(x+\triangle x)^{q+1} + (x+\triangle x)^q . x + (x+\triangle x)^{q-1} . x^2 + \ldots$$

$$\ldots + (x + \triangle x)\, x^q + x^{q+1}\Big] = -\frac{(x + \triangle x)^{q+2} - x^{q+2}}{(\triangle x^2)}$$

und hieraus durch Vereinigung beider Summenausdrücke mit den nöthigen Reductionen

$$SC'(x,\ x + \triangle x,\ x + 2\triangle x)^q =$$

$$= \frac{(x + 2\triangle x)^{q+2} - 2(x + \triangle x)^{q+2} + x^{q+2}}{1 \,.\, 2 \,.\, (\triangle x)^2}$$

Man erkennt leicht, dafs der Zähler des Summenausdrucks den zweiten Unterschied der Potenzialgröfse x^{q+2} darstellt, wenn die Zunahme $\triangle x$ ist. Hiernach läfst sich auch die Summe der Verbindungen mit Wiederholungen aus drei Elementen zur q^{ten} Classe durch den zweiten Unterschied der Potenzialgröfse x in der $(q + 2)^{ten}$ Potenz darstellen, und es ist

$$SC'(x,\ x + \triangle x,\ x + 2\triangle x)^q = \frac{\triangle^2 x^{q+2}}{1 \,.\, 2\, (\triangle x)^2}$$

Da nun die Gleichung 84 die Eigenschaft hat, den Übergang von dem Summenausdrucke der Verbindungen mit Wiederholungen zur

q^{ten} Classe aus irgend einer Elementenzahl, auf den der nächst höhern Elementenanzahl, wenn nur ersterer bekannt ist, zu bahnen; so ist es nun leicht die Untersuchung weiter zu führen. Wir erhalten auf dieselbe Art den Summenausdruck der Verbindungen mit Wiederholungen aus vier Elementen, x, $x+\triangle x$, $x+2\triangle x$, $x+3\triangle x$ zur q^{ten} Classe, und es ist

$$SC'(x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ x+3\triangle x)^q =$$

$$\frac{(x+3\triangle x)^{q+3}-3(x+2\triangle x)^{q+3}+3(x+\triangle x)^{q+3}-x^{q+3}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,(\triangle x)^3} = \frac{\triangle^3 x^{q+3}}{1^{3|1}(\triangle x)^3}$$

und hieraus allgemein

$$85)\ SC'(x, x+\triangle x, x+2\triangle x, \ldots x+(n-1)\triangle x)^q = \frac{\triangle^{n-1}\, x^{q+n-1}}{1^{n-1|1}(\triangle x)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{1^{n-1|1}(\triangle x)^{n-1}}\Big[(x+(n-1)\triangle x)^{q+n-1} - \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}}(x+(n-2)\triangle x)^{q+n-1}$$

$$+ \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(x+(n-3)\triangle x)^{q+n-1} - \ldots (-)^{n-1}\, x^{q+n-1}\Big]$$

oder wenn man zur bequemern Darstellung n statt $n-1$ setzt

$$86)\ SC'(x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots\ x+n\triangle x)^q = \frac{\triangle^n\, x^{q+n}}{1^{n|1}(\triangle x)^n} =$$

$$= \frac{1}{1^{n|1}(\triangle x)^q}\Big[(x+n\triangle x)^{q+n} - \frac{n}{1}(x+(n-1)\triangle x)^{q+n} +$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}(x+(n-2)\triangle x)^{q+n} - \ldots\ (-)^n\, x^{q+n}\Big]$$

Die hier mitgetheilte Summirungsmethode ist allgemein, und gilt für Summen der Verbindungen mit Wiederholungen, die aus einer vollständigen oder abgekürzten Elementenreihe, oder auch aus einer solchen, deren Stellenzahlen mit negativen Werthen beginnen, erzeugt seyn können. Anwendungen und Beispiele hierüber haben wir schon in unsern Forschungen §. 39 Pg. 92 u. ff. gegeben, worauf wir defswegen verweisen. Merkwürdig ist der Zusammenhang der nach 86 zwischen den Summen der Verbindungen mit Wiederholungen, und dem Unterschiede der Potenzial-Functionen statt findet.

Hier mögen die einzelnen Fälle für die Summen der Wiederholungen stehen, wenn die natürliche Zahlenreihe die erzeugenden Elemente bildet.

87) $SC'(1)^q = 1^q$

$$SC'(1,\ 2)^q = 2^{q+1} - 1^{q+1}$$

$$SC'(1,\ 2,\ 3)^q = \frac{1}{2}(3^{q+2} - 2 \,.\, 2^{q+2} + 1)$$

$$SC'(1,\ 2,\ 3,\ 4)^q = \frac{1}{6}(4^{q+3} - 3 \,.\, 3^{q+3} + 3 \,.\, 2^{q+3} - 1)$$

$$SC'(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)^q = \frac{1}{24}(5^{q+4} - 4 \,.\, 4^{q+4} + 6 \,.\, 3^{q+4} - 4 \,.\, 2^{q+4} + 1)$$

$$SC'(1,2,3,4,5,6)^q = \frac{1}{120}(6^{q+5} - 5 \,.\, 5^{q+5} + 10 \,.\, 4^{q+5} - 10 \,.\, 3^{q+5} + 5 \,.\, 2^{q+5} - 1)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Eine zweite kurze und zweckmäfsige Darstellung der Summen-Ausdrücke für die Verbindungen mit Wiederholungen haben wir in unsern Forschungen im Gebiete der Analysis, zweite Untersuchung 86 P. 92, mitgetheilt, worauf zu verweisen, wir uns hier beschränken müssen, da uns die Entwickelung dieser zweiten Methode zu weit führen würde.

§. 29.

Sind die Summen der Verbindungen mit Wiederholungen bei nicht zu grofser Elementenzahl, und nicht zu hohen Verbindungsclassen darzustellen, so benützt man am zweckmäfsigsten die Darstellungen der höheren Unterschiede Nro. 86. Man kann jedoch auch eine der folgenden wählen, die wir aus unsern Forschungen Pg. 87 u. ff. 78 und 79 entlehnen, und wegen deren Begründung wir dorthin verweisen.

88) $SC'(x,\ x + \triangle x,\ x + 2\triangle x \ldots x + n\triangle x)^q =$

$$= SC'(1,\ 2,\ \ldots\ n)^0 \frac{(n+q)^{n|-1}\, x^q}{1^{n|1}}$$

$$+ SC'(1,\ 2,\ \ldots\ n)^1 \frac{(n+q)^{n+1|-1}}{1^{n+1|-1}} x^{q-1} \triangle x$$

$$+ SC'(1,\ 2,\ \ldots\ n)^2 \frac{(n+q)^{n+2|-1}}{1^{n+2|1}} x^{q-2} (\triangle x)^2$$

$$+ SC'(1,\ 2,\ \ldots\ n)^3 \frac{(n+q)^{n+3|-1}}{1^{n+3|1}} x^{q-3} (\triangle x)^3$$

$$\vdots$$

$$+ SC'(1,\ 2,\ \ldots\ n)^q \frac{(n+q)^{n+q|1}}{1^{q+n|-1}} x^0 (\triangle x)^q$$

oder, wenn die hier angezeigten Werthe für die Summen der Verbindungen wirklich eingeführt werden.

89) $SC'(x, x+\triangle x, x+2\triangle x, \ldots x+n\triangle x)^q =$

$$= \frac{(n+q)^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot x^q$$
$$+ \frac{(n+q)^{n+1|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{n-1|1}} x^{q-1} \cdot \triangle x$$
$$+ \frac{3n+1}{4} \cdot \frac{(n+q)^{n+2|-1}}{1^{3|1}\ 1^{n-1|1}} \cdot x^{q-2} (\triangle x)^2$$
$$+ \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot} \cdot \frac{(n+q)^{n+3|-1}}{1^{4|1}\ 1^{n-1|1}} x^{q-3} \cdot (\triangle x)^3$$
$$+ \frac{30n^2(n+2)+10n-4}{2 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{(n+q)^{n+4|-1}}{1^{5|1} \cdot 1^{n-1|1}} x^{q-4} (\triangle x)^4$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Die Gleichung 86 wird dann besonders brauchbar seyn, wenn die Anzahl der Elemente kleiner als die Verbindungsclasse, also wenn $n < q$ ist, die Gleichungen 88 und 89 aber, wenn umgekehrt die Verbindungsclasse kleiner als die Elementenzahl, oder wenn $q < n$ ist.

Bei Darstellung der Summen der Verbindungen mit Wiederholungen aus einer sehr grofsen Elementenanzahl und sehr hoher Verbindungsclasse werden die vorstehenden Gleichungen sehr mühsam auszuführende Geschäfte erzeugen. Defswegen mögen Abkürzungen für die auszuführende Geschäfte hier stehen, um ohne bedeutende Fehler die gesuchten Werthe bestimmen zu können.

Die Gleichung 86 läfst sich auf folgende Art darstellen:

90) $SC'(x, x+\triangle x, x+2\triangle x, \ldots x+n\triangle x)^q =$

$$= \frac{(x+n\triangle x)^{n+q}}{1^{n|1}\ (\triangle x)^n} \left[1 - \frac{n}{1}\left(\frac{x+(n-1)\triangle x}{x+n\triangle x}\right)^{n+q} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{x+(n-2)\triangle x}{x+n\triangle x}\right)^{n+q} - \ldots\right]$$

Die Ausdrücke in den Klammern stellen ächte Brüche dar, deren Werthe bei grofsem n und q sehr schnell convergiren. Daher werden einige wenige Glieder hinreichen, um den gesuchten

Werth zu bestimmen. Hiezu werden sich zweckmäfsig die Logarithmen benutzen lassen. Hiernach ist

$$\frac{n}{1} \cdot \left(\frac{x + (n-1)\triangle x}{x + n\triangle x}\right)^{n+q} =$$

$$= N[\lg n + (n+q)\lg(x + (n-1)\triangle x) - (n+q)\lg(x + n\triangle x)]$$

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{n + (n-2)\triangle x}{x + n\triangle x}\right)^{n+q} =$$

$$= N[\lg n(n-1) - \lg 2 + (n+q)\lg(x + (n-2)\triangle x - (n+q)\lg(x + n\triangle x)]$$

u. s. w.

Ist aber neben x die Elementenanzahl n eine sehr grofse Zahl, so kann man in der Darstellung 86

$$(x + (n-1)\triangle x)^{n+q} = (x + (n-2)\triangle x)^{n+q} = \ldots = (x + n\triangle x)^{n+q}$$

setzen und $(x + n\triangle x)^{n+q}$ als gemeinschaftlichen Factor ausscheiden. Dann entsteht.

$$SC'(x, x + \triangle x, x + 2\triangle x, \ldots x + n\triangle x)^q =$$

$$= \frac{(x + n\triangle x)^{n+q}}{1^{n|1}(\triangle x)^n}\left(1 - \frac{n}{1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{3|1}} - \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots\right)$$

Wird ferner auch hier bei sehr grofsem n

$$\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} = \frac{n^2}{1^{3|1}},\quad \frac{n^{3|1}}{1^{3|1}} = \frac{n^3}{1^{3|1}},\quad \frac{n^{4|-1}}{1^{4|1}} = \frac{n^4}{1^{4|1}} \ldots\ldots$$

gesetzt, und berücksichtigt, dafs

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n^2}{1.2} - \frac{n^3}{1.2.3} + \frac{n^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots = e^{-n}$$

ist, so hat man hieraus nahe genau

$$91)\ SC'(x, x + \triangle x, x + 2\triangle x, \ldots x + n\triangle x)^q = \frac{(x + n\triangle x)^{n+q}\,.\,e^{-n}}{1^{n|1}(\triangle x)^n}$$

wo e die Zahl bedeutet, deren Logarithme die Einheit ist.

Wendet man hierauf endlich noch die Darstellung sehr grofser Facultätenausdrücke aus der Abtheilung IX. an, so hat man

$$92)\ SC'(x, x + \triangle x, \ldots x + n\triangle x)^q =$$

$$= \frac{(x + n\triangle x)^{n+q}}{(\triangle x)^n n^n\,.\,\sqrt{(2\pi n)}\,.\,e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \ldots}}$$

oder bei unendlich grofsem n, wo die Brüche in dieser Reihe, deren Nenner n führen, verschwinden

$$93)\ SC'(x,\, x+\triangle x,\, \ldots\, x+n\triangle x)^q = \frac{(x+n\triangle x)^{n+q}}{(\triangle x)^n \,.\, n^n \,.\, \sqrt{(2\pi n)}}$$

Kürzer noch werden diese Formeln, wenn man $\triangle x = 1$, und $x = 1$ setzt.

§. 30

Summe der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen.

An das bisher Mitgetheilte möge sich noch die Summirung der Producte schliefsen, welche die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen erzeugen. Um die fragliche Summe auffinden zu können, ist uns die Gleichung

$$94)\ 1\,.\,\frac{x^{r|1}}{1^{r|1}} + \frac{2}{1}\,.\left(\frac{x-1}{1}\right)^{r|1} + \frac{3}{1}\left(\frac{x-2}{1}\right)^{r|1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x-1}{1}\,.\left(\frac{2}{1}\right)^{r|1} + \frac{x}{1}\,.\left(\frac{1}{1}\right)^{r|1} = \frac{x^{r+2|1}}{1^{r+2|1}}$$

nöthig. Ihre Richtigkeit zeigt sich durch folgende Zerlegung:

$$\begin{array}{llll}
\left(\frac{1}{1}\right)^{r|1} = & & & = \frac{1^{r+1|1}}{1^{r+1|1}} \\
+\left(\frac{1}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{2}{1}\right)^{r|1} + & & & = \frac{2^{r+1|1}}{1^{r+1|1}} \\
+\left(\frac{1}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{2}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{3}{1}\right)^{r|1} = & & & = \frac{3^{r+1|1}}{1^{r+1|1}} \\
+\left(\frac{1}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{2}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{3}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{4}{1}\right)^{r|1} = & & & = \frac{4^{r+1|1}}{1^{r+1|1}} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & & \vdots \\
+\left(\frac{1}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{2}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{3}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{4}{1}\right)^{r|1} + \cdots + \left(\frac{x-1}{1}\right)^{r|1} & & & = \frac{(x-1)^{r+1|1}}{1^{r+1|1}} \\
+\left(\frac{1}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{2}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{3}{1}\right)^{r|1} + \left(\frac{x}{1}\right)^{r|1} = & & & = \frac{x^{r+1|1}}{1^{r+1|1}}
\end{array}$$

denn alle Horizontalreihen vereinigen sich in die vorstehende Vertikalreihe, und diese nach bekanntem Gesetze in den oben angeschriebenen Ausdruck. Die Summe aller Horizontalreihen erzeugt die fragliche Reihe in 94.

Geht man nun bei der Auffindung der Summen der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen von den niedern Classen zu den höhern über, so erhält man für die der zweiten Classe

$$SP'(fn;\ a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ a_{n-1})^2 = \begin{array}{l} a_1\ .\ a_{n-1} \\ a_2\ .\ a_{n-2} \\ a_3\ .\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_{n-2}\ .\ a_2 \\ a_{n-1}\ .\ a_1 \end{array}$$

und hieraus nach 94, da nur die Werthe der Stellenzahlen als Factoren in Betracht kommen, wenn $x = n - 1$ und $r = 1$ gesetzt wird.

$$95)\ SP'(fn;\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ .\ a_{n-1})^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3} = \left(\frac{n-1}{1}\right)^{3|1}$$

Nach der Gleichung 27 §. 15, lassen sich die Gruppen jeder Classe dieser Versetzungen durch allmäliges Ausscheiden der Elemente auf die der nächst vorhergehenden Classe zurückführen. Führen wir nun hiernach die der dritten Classe auf die der zweiten zurück, so können wir letztere durch Einführung der erforderlichen Werthe nach der Gleichung 95 summiren, wodurch entsteht.

$$SP'(fn;\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ .\ a_{n-2})^3 =$$

$$= a_1\ .\ SP'(f(n-1);\ a_1,\ a_2\ .\ .\ .)^2 = 1\ .\left(\frac{n-2}{1}\right)^{3|1}$$

$$+\ a_2\ .\ SP'(f(n-2);\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ )^2 = 2\ .\left(\frac{n-3}{1}\right)^{3|1}$$

$$+\ a_3\ .\ SP'(f(n-3);\ a_1,\ a_2\ .\ .\ .)^2 = 3\ .\left(\frac{n-4}{1}\right)^{3|1}$$

$$\vdots$$

$$+\ a_{n-3}\ SP'(f3;\ a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ )^2 = (n-3)\left(\frac{2}{1}\right)^{3|1}$$

$$+\ a_{n-2}\ SP'(f2;\ a_1,\ a_2\ .\ .\ .)^2 = (n-2)\left(\frac{1}{1}\right)^{3|1}$$

und hieraus nach 94, wenn $x = n-2$ und $r = 2$ gesetzt wird,

$$SP'(fn;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-2})^3 = \left(\frac{n-2}{1}\right)^{5|1} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}$$

Das allgemeine Gesetz erforscht sich auf diesem Wege leicht, und es ist:

$$96)\ SP'(fn;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-q+1})^q =$$

$$\left(\frac{n-q+1}{1}\right)^{2q-1|1} = \frac{(n-q+1)(n-q+2)\ldots n(n+1)\ldots(n+q-1)}{1\ .\ 2\ .\ \ldots\ldots\ .\ (2q-1)}$$

Diese Summirungsmethode trägt sich leicht in das Allgemeine über. Sind nämlich die Elemente $x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x, \ldots$, als Summen erzeugend, gegeben, und geht man auch hier von den niedern Classen zu den höheren über; so wird bei entwickelter Darstellung und Zerlegung

$$SP(f(2x+(n-2)\triangle x);\ x,\ x+\triangle x, \ldots x+(n-2)\triangle x)^2 =$$

$$\begin{array}{l}
= x\,(x+(n-2)\triangle x) = x^2 + (n-2)\triangle x . x \\
+ (x+\triangle x)(x+(n-3)\triangle x) = x^2 + (n-3)\triangle x .\ x + \triangle x . x + (n-3)\triangle x . \triangle x \\
+ (x+2\triangle x)(x+(n-4)\triangle x) = x^2 + (n-4)\triangle x . x + 2\triangle x . x + (n-4)\triangle x . 2\triangle x \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
+ (x+(n-3)\triangle x)(x+\triangle x) = x^2 + 1\triangle x\ .\ x + (n-3)\triangle x . x + 1\triangle x . (n-3)\triangle x \\
+ (x+(n-2)\triangle x)\ x = x^2 \qquad\qquad\qquad + (n-2)\triangle x . x
\end{array}$$

Werden die Vertikalreihen mit Hülfe der Gleichung 94 summirt, so entsteht:

$$97)\ SP'(f(2x+(n-2)\triangle x);\ x, x+\triangle x, \ldots x+(n-2)\triangle x)^2 =$$

$$= (n-1)x^2 + \frac{(n-2)(n-1)}{1\ .\ 2} x\triangle x + \frac{(n-2)(n-1)}{1\ .\ 2}\triangle x . x + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(\triangle x)^2$$

$$= \left(\frac{n-1}{1}\right)x^2 + 2\ .\left(\frac{n-2}{1}\right)^{2|1} x\ .\ \triangle x + \left(\frac{n-3}{1}\right)^{3|1}(\triangle x)^2$$

Benutzen wir auch hier die Darstellung von 27, um die Summe der Versetzungen mit Wiederholungen zur dritten Classe aus der der zweiten Classe zu entwickeln, wobei die Gleichung 97 selbst zu benutzen ist, so erhalten wir:

$$SP'(\mathfrak{f}(3x + (n-3)\triangle x);\; x,\; x + \triangle x,\; x + 2\triangle x,\; \ldots\; x + (n-3)\triangle x)^3 =$$

$$= x \;.\; SP'(2x + (n-3)\triangle x);\; x,\; x + \triangle x,\; \ldots)^2 = x\,.\left[\frac{(n-2)}{1}x^2 + 2\,.\left(\frac{n-3}{1}\right)^{2|1} x\,\triangle x + \left(\frac{n-4}{1}\right)^{3|1}(\triangle x)^2\right]$$

$$+ (x+\triangle x)\,.\,SP'(2x+(n-4)\triangle x);\; x,\; x+\triangle x, \ldots)^2 = (x+\triangle x)\left[\frac{n-3}{1}x^2 + 2\,.\left(\frac{n-4}{1}\right)^{2|1} x.\triangle x + \left(\frac{n-5}{1}\right)^{3|1}(\triangle x)^2\right]$$

$$+ (x+2\triangle x).SP'(2x+(n-5)\triangle x);\; x,\; x+\triangle x,\; \ldots)^2 = (x+2\triangle x)\left[\frac{n-4}{1}x^2 + 2\,.\left(\frac{n-5}{1}\right)^{2|1} x\,.\,\triangle x + \left(\frac{n-6}{1}\right)^{3|1}(\triangle x)^2\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+ (x+(n-5)\triangle x)\,.\,SP'(\mathfrak{f}(2x+2\triangle x);\; x,\; x+\triangle x \ldots)^2 = (x+(n-5)\triangle x).\left[\frac{3}{1}x^2 + 2\,.\left(\frac{2}{1}\right)^{2|1} x.\triangle x + \left(\frac{1}{1}\right)^{3|1}(\triangle x)^2\right]$$

$$+ (x+(n-4)\triangle x)\,.\,SP'(\mathfrak{f}(2x+\triangle x);\; x,\; x+\triangle x, \ldots)^2 = (x+(n-4)\triangle x)\,.\left[2x^2 + 2\,.\left(\frac{1}{1}\right)^{2|1} x \;.\; \triangle x\;.\right]$$

$$+ (x + (n-3)\triangle x\;.\;SP'(\mathfrak{f}(2x);\; x,\; x+\triangle x, \ldots.)^2 = (x + (n-3)\triangle x\;[\,x^2.]$$

Werden die begleitenden Factoren mit den Gliedern der Horizontalreihen wirklich vervielfacht, und die hieraus sich ergebenden Ausdrücke in Vertikalreihen nach den Potenzen von x geordnet, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

$$=\left(\frac{n-2}{1}\right)x^3+2\left(\frac{n-3}{1}\right)^{2|1}x^2\triangle x+1(n-3)x^2\triangle x+\left(\frac{n-4}{1}\right)^{3|1}x(\triangle x)^2+2.1.\left(\frac{n-4}{1}\right)^{2|1}x(\triangle x)^2+1.\left(\frac{n-5}{1}\right)^{3|1}\triangle x)^3$$

$$+\left(\frac{n-3}{1}\right)x^3+2.\left(\frac{n-4}{1}\right)^{2|1}x^2\triangle x+2(n-4)x^2\triangle x+\left(\frac{n-5}{1}\right)^{3|1}x(\triangle x)^2+2.2.\left(\frac{n-5}{1}\right)^{2|1}.x(\triangle x)^2+2.\left(\frac{n-6}{1}\right)^{3|1}(\triangle x)^3$$

$$+\left(\frac{n-4}{1}\right)x^3+2.\left(\frac{n-5}{1}\right)^{2|1}x^2\triangle x+3(n-5)x^2\triangle x+\left(\frac{n-6}{1}\right)^{3|1}x(\triangle x)^2+2.3.\left(\frac{n-6}{1}\right)^{2|1}x(\triangle x)^2+3.\left(\frac{n-3}{1}\right)^{3|1}(\triangle x)^3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+\ .3x^3+2.\left(\frac{2}{1}\right)^{2|1}x^2\triangle x+(n-5).3x^2\triangle x+\left(\frac{1}{1}\right)^{3|1}x.(\triangle x)^2+2.(n-5)\left(\frac{2}{1}\right)^{2|1}x(\triangle x)^2+(n-5)\left(\frac{1}{1}\right)^{3|1}\triangle x^3$$

$$+2.x^3+2.\left(\frac{1}{1}\right)^{2|1}x^2\triangle x+(n-4).2.x^2\triangle x \qquad +2.(n-4)\left(\frac{1}{1}\right)^{2|1}x(\triangle x)^2$$

$$+1.x^3 \qquad +(n-3)1.x^2\triangle x$$

Werden die so erhaltenen Scheitelreihen nach 94 summirt, so gewinnt man

$$SP(f(3x+(n-3)\triangle x);\ x,\ x+\triangle x,\ x+2\triangle x,\ \ldots\ldots\ x+(n-3)\triangle x)^3=$$

$$=\left(\frac{n-2}{1}\right)^{2|1}x^3+\left[2.\left(\frac{n-3}{1}\right)^{3|1}+\left(\frac{n-3}{1}\right)^{3|1}\right]x^2\triangle x+\left[\left(\frac{n-4}{1}\right)^{4|1}+2.\left(\frac{n-4}{1}\right)^{4|1}\right]x(\triangle x)^2+\left(\frac{n-5}{1}\right)^{5|1}(\triangle x)^3$$

$$=\left(\frac{n-2}{1}\right)^{2|1}x^3+\frac{3}{1}\left(\frac{n-3}{1}\right)^{3|1}x^2\triangle x+\frac{3.2}{1.2}\left(\frac{n-4}{1}\right)^{4|1}x(\triangle x)^2+\frac{3.2.1}{1.2.3}\left(\frac{n-5}{1}\right)^{5|1}(\triangle x)^3$$

Das allgemeine Gesetz folgert sich aus dieser Entwicklung, welche in dem vorgeschriebenen Gange fortschreitet, leicht. Es läfst sich in folgenden zwei Gleichungen, die nur in der Form von einander verschieden sind, ausdrücken.

$$98)\quad SP'(f(qx + (n-q)\triangle x);\ x,\ x + \triangle x,\ x + 2\triangle x\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .)^{q} =$$

$$= \left(\frac{n-q+1}{1}\right)^{q-1|1} x^{q} + \frac{q}{1}\left(\frac{n-q}{1}\right)^{q|1} x^{q-1}\triangle x + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{n-q-1}{1}\right)^{q+1|1} x^{q-2}.(\triangle x)^{2} + \ldots\ldots + \left(\frac{n-2q+1}{1}\right)^{2q-1|1}. (\triangle x)^{q}$$

$$99)\quad SP'(f(qx + (n-q)\triangle x);\ x,\ x + \triangle x,\ x + 2\triangle x,\ .\ .\ .\ .\ x + (n-q)\triangle x)^{q} =$$

$$= \frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q|1}} x^{q} + \frac{q}{1}.\frac{(n-1)^{q|-1}}{1^{q|1}} x^{q-1}\triangle x + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}.\frac{(n-1)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} x^{q-2}(\triangle x)^{2} + \ldots\ldots + \frac{(n-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}(\triangle x)^{q}$$

Wird in diesen Gleichungen $x = 1$ und $\triangle x = 1$ gesetzt, so ergibt sich hieraus wieder die Gleichung 96, wenn man hiezu die Gleichungen des §. 142 Pg. 257 u. f. meines Differenzialcalculs zu Hülfe nimmt.

Die Gleichungen 98 und 99 gelten allgemeiu; die Elementenreihen mögen vollständig, oder abgekürzt seyn, oder mit Elementen beginnen, deren Stellenzahlen negative Zeichen tragen.

Anmerkung. Die Idee, welche der Summirung dieser Art von Versetzungen zu Grunde liegt, habe ich schon in meinem Differenzialcalcul §. 34, Pg. 45 u. ff. angewendet.

Die Gruppenanzahl dieser Versetzungen aus den Elementen x, $x + \triangle x$, $x + 2\triangle x$ . . . läfst sich leicht finden, wenn man die Elemente, die hier einer abgekürzten und unterbrochenen Reihe zugehören, auf die einer vollständigen zurückführt, was dadurch geschieht, dafs $x = 1$ und $\triangle x = 1$ gesetzt wird. Die Gleichung 28 §. 15 gibt dann durch Einführung der genannten Werthe weitere Auskunft.

V. Combinationen, die durch die Verbindungen der Gruppen verschiedener Elementen-Reihen erzeugt werden.

§. 31.

Versetzungen ohne Wiederholungen, welche durch Verbindungen der Gruppen verschiedener Elementen-Reihen erzeugt werden.

In den bisherigen Untersuchungen, haben wir angenommen, dafs die Gruppen, welche aus den Combinationen verschiedener Elementenreihen hervorgingen, so betrachtet werden, als wären sie aus gleichartigen Elementen entstanden, und als bilden sie eine Gesammtheit, die sich zu einem gemeinschaftlichen Begriffe vereinigen. Im Folgenden sollen aber die Elemente verschiedener Reihen als verschiedenen Reihen zugehörig betrachtet werden, und zwar so, dafs sie von einander getrennt, die von einer Reihe aber in dieser Trennung als zusammengehörig erscheinen.

Wir beginnen auch hier mit dem Einfachen, gehen von ihm zu dem Zusammengesetzten über, und betrachten die Versetzungen ohne Wiederholungen, welche aus den Elementen der zwei Reihen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\ \ldots\ .$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\ \ldots\ .$$

erzeugt werden können und fragen: welches sind die Fälle, in welchen ein Element aus der ersten Reihe mit einem aus der zweiten Reihe, nach der vorstehenden Ordnung der Reihen, zusammen treten kann. Wir wählen zu dem Ende vier Elemente aus der ersten, und drei aus der zweiten Reihe, und stellen diefs auf folgende Weise dar:

$$P(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4;\ b_1,\ b_2,\ b_3)^{1,1} = \begin{matrix} a_1\,b_2 & a_2\,b_1 & a_3\,b_1 & a_4\,b_1 \\ a_1\,b_3 & a_2\,b_3 & b_3\,b_2 & a_4\,b_2 \end{matrix}$$

Die Anzahl bestimmt sich leicht, wenn man bemerkt, dafs sich jedes von den vier Elementen der ersten Reihe mit einem andern aus der zweiten verbindet. Hiernach ist

$$P[a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3]^{1,1} = 4^{1|-1}\, 2^{1|-1}$$

Betrachtet man den Fall, in welchem sich zwei Elemente der ersten Reihe mit zweien aus der zweiten Reihe, wenn beide Reihen vier Elemente führen, verbinden; so hat man

$$P(a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4)^{2,2} =$$

$$\begin{array}{cccccc} = a_1 a_2 b_3 b_4 & a_1 a_3 b_2 b_4 & a_1 a_4 b_2 b_3 & a_2 a_3 b_1 b_4 & a_2 a_4 b_1 b_3 & a_3 a_4 b_1 b_2 \\ a_2 a_1 b_3 b_4 & a_3 a_1 b_2 b_4 & a_4 a_1 b_2 b_3 & a_3 a_2 b_1 b_4 & a_4 a_2 b_1 b_3 & a_4 a_3 b_1 b_2 \\ a_1 a_2 b_4 b_3 & a_1 a_3 b_4 b_2 & a_1 a_4 b_3 b_2 & a_2 a_3 b_4 b_1 & a_2 a_4 b_3 b_1 & a_3 a_4 b_2 b_1 \\ a_2 a_1 b_4 b_3 & a_3 a_1 b_4 b_2 & a_4 a_1 b_3 b_2 & a_3 a_2 b_4 b_1 & a_4 a_2 b_3 b_1 & a_4 a_3 b_2 b_1 \end{array}$$

Die Anzahl dieser Gruppen bestimmt sich, wenn man bemerkt, Dafs sich je zwei Elemente der ersten Reihe, an je zwei, ihnen unähnliche, aus der zweiten anreihen, in ihrer Trennung Versetzungen bildend. Hiernach ist

$$P[a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4] = 4^{2|-1} \,.\, 2^{2|-1} = 4.3 \times 2.1$$

das allgemeine Gesetz für die Bestimmung der Anzahl dieser Versetzungen läfst sich nun leicht erkennen, wenn man berücksichtigt, dafs so viele Elemente der zweiten Reihe in jeder Gruppe weniger erscheinen werden, als die Versetzungsclasse der ersten angibt. Hiernach ist

$$P[a_1, a_2, a_3 \ldots a_n; b_1, b_2, b_3 \ldots b_m]^{h,k} = n^{h|-1} \,.\, (m - h)^{k|-1}$$

Der Uebergang in der Bestimmung der Anzahl dieser Versetzungen, die sich aus zwei Elementenreihen erzeugen lassen, zu derjenigen, welche aus der Verbindung dreier Elementen-Reihen hervorgeht, ist leicht gefunden, wenn man berücksichtigt, dafs so viele Elemente aus der dritten Reihe ausgeschlossen werden müssen, als in den beiden vorhergehenden Versetzungsclassen erschienen sind. Ähnliches gilt von mehr Elementenreihen, und es ist allgemein

100) $$P[a_1, a_2 \ldots a_n; b_1, b_2 \ldots b_m; c_1, c_2 \ldots c_o \ldots]^{h,k,l\ldots} =$$

$$= n^{h|-1} \,.\, (m - h)^{k|-1} (o - h - k)^{l|-1} \ldots.$$

Die Exponenten der Verbindungsclassen müssen in der Ordnung, wie sie folgen, auf die Elementen-Reihen bezogen werden.

Merkwürdig ist, dafs bei Bestimmung der Anzahl dieser Versetzungen die Ordnung, in welcher die Elementen-Reihen auf einander folgen, einen großen Einfluß ausübt. Es können bei gleicher Elementen-Menge und gleichen Classen-Exponenten, aber veränderter Ordnung der Reihen, verschiedene Gruppenanzahlen entstehen, was an folgenden Fällen sich zeigt.

$$P[a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3]^{1,1} = 4^{1|-1} \,.\, 2^{1|-1} = 8$$

$$P[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3, b_4]^{1,1} = 4^{1|-1} \,.\, 3^{1|-1} = 9$$

Wir bemerken, daß wir künftig, die mit gleichen Stellenzahlen versehenen Elemente aus verschiedenen Reihen ähnliche, oder gleichartige Elemente nennen werden, wie: a_1, b_1, c_1; $a_2, b_2, c_2, \ldots$

§. 32.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen.

Mittelst der Versetzungen ohne Wiederholungen, welche durch die Verbindungen der Gruppen verschiedener Elementenreihen erzeugt werden, läßt sich eine Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen auf eine einfache Weise gewinnen.

Bezeichnet man die Gleichungen zwischen zwei unbekannten Größen auf folgende Art:

$$a_1\, x + b_1\, y = c_1$$

$$a_2\, x + b_2\, y = c_2$$

so hat man durch einfaches Ausstoßen einer unbekannten Größe, und durch ein hierauf sich ergebendes Entwickeln der andern folgende entwickelte Gleichungen:

$$101)\quad x = \frac{c_1\, b_2 - c_2\, b_1}{a_1\, b_2 - a_2\, b_1}$$

$$y = \frac{c_1\, a_2 - c_2\, a_1}{b_1\, a_2 - b_2\, a_1}$$

Die Folge der Zeichen in diesen Darstellungen ist einfach. Bezeichnet man die Gleichungen zwischen unbekannten Größen durch

$$a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z = d_1$$
$$a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z = d_2$$
$$a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z = d_3$$

stößt dann nach den bekannten Regeln zuerst eine, dann die zweite unbekannte Gröfse aus, entwickelt sofort allmählig jede einzelne unbekannte: so ergeben sich folgende entwickelte Gleichungen für die drei unbekannten.

$$102)\quad x = \frac{d_1 b_2 c_3 - d_1 b_3 c_2 - d_2 b_1 c_3 + d_2 b_3 c_1 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}$$

$$y = \frac{d_1 a_2 c_3 - d_1 a_3 c_2 - d_2 a_1 c_3 + d_2 a_3 c_1 + d_3 a_1 c_2 - d_3 a_2 c_1}{b_1 a_2 c_3 - b_1 a_3 c_2 - b_2 a_1 c_3 + b_2 a_3 c_1 + b_3 a_1 c_2 - b_3 a_2 c_1}$$

$$z = \frac{d_1 a_2 b_3 - d_1 a_3 b_2 - d_2 a_1 b_3 + d_2 a_3 b_1 + d_3 a_1 b_2 - d_3 a_2 b_1}{c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2 - c_2 a_1 b_3 + c_2 a_3 b_1 + c_3 a_1 b_2 - c_3 a_2 b_1}$$

Der Werth jeder Unbekannten ist durch einen Bruch bestimmt, dessen Zähler und Nenner Versetzungen bilden, welche die Gruppen zur ersten Classe aus drei Elementen-Reihen erzeugen. Jeder Zähler führt die Elemente der vierten und die der zwei Elementenreihen, welche nicht mit der zu bestimmenden unbekannten Gröfse verbunden sind. Die Nenner führen die Elemente der mit den drei unbekannten Gröfsen verbundenen Elementenreihen.

Die Folge der Zeichen in den Producten - Aggregaten ist.

$$+ - - + + -$$

Diese Bemerkungen führen zu folgender Darstellung in Zeichen

$$103)\quad x = \frac{P(d_1,\ d_2,\ d_3;\ \ b_1,\ b_2,\ b_3;\ \ c_1,\ c_2,\ c_3)^{1,\,1,\,1}}{P(a_1,\ a_2,\ a_3;\ \ b_1,\ b_2,\ b_3;\ \ c_1,\ c_2,\ c_3)^{1,\,1,\,1}}$$

$$y = \frac{P(d_1,\ d_2,\ d_3;\ \ a_1,\ a_2,\ a_3;\ \ c_1,\ c_2,\ c_3)^{1,\,1,\,1}}{P(b_1,\ b_2,\ b_3;\ \ a_1,\ a_2,\ a_3;\ \ c_1,\ c_2,\ c_3)^{1,\,1,\,1}}$$

$$z = \frac{P(d_1,\ d_2,\ d_3;\ \ a_1,\ a_2,\ a_3;\ \ b_1,\ b_2,\ b_3)^{1,\,1,\,1}}{P(c_1,\ c_2,\ c_3;\ \ a_1,\ a_2,\ a_3;\ \ b_1,\ b_2,\ b_3)^{1,\,1,\,1}}$$

Bei Ausführung der angedeuteten Geschäfte mufs die angegebene Ordnung in Bildung der Versetzungen beibehalten werden. Eine Abänderung würde den Zeichenwechsel stören.

Für die Rechnung ist folgende Darstellung, die leicht aus 102 folgt, zweckmäfsiger

$$x = \frac{d_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - d_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + d_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)}$$

$$y = \frac{d_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) - d_2(a_1 c_3 - a_3 c_1) + d_3(a_1 c_2 - a_2 c_1)}{b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) - b_2(a_1 c_3 - a_3 c_1) + b_3(a_1 c_2 - a_2 c_1)}$$

$$z = \frac{d_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - d_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + d_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - c_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

Die Darstellung in Zeichen führt zu Folgendem:

$$104)\ x=\frac{d_1P(b_2,b_3;c_2,c_3)^{1,1}-d_2P(b_1,b_3;c_1,c_3)^{1,1}+d_3P(b_1,b_2;c_1,c_2)^{1,1}}{a_1P(b_2,b_3;c_2,c_3)^{1,1}-a_2P(b_1,b_3;c_1,c_3)^{1,1}+a_3P(b_1,b_2;c_1,c_2)^{1,1}}$$

$$y=\frac{d_1P(a_2,a_3;c_2,c_3)^{1,1}-d_2P(a_1,a_3;c_1,c_3)^{1,1}+d_3P(a_1,a_2;c_1,c_2)^{1,1}}{b_1P(a_2,a_3;c_2,c_3)^{1,1}-b_2P(a_1,a_3;c_1,c_3)^{1,1}+b_3P(a_1,a_2;c_1,c_2)^{1,1}}$$

$$z=\frac{d_1P(a_2,a_3;b_2,b_3)^{1,1}-d_2P(a_1,a_3;b_1,b_3)^{1,1}+d_3P(a_1,a_2;b_1,b_2)^{1,1}}{c_1P(a_2,a_3;b_2,b_3)^{1,1}-c_2P(a_1,a_3;b_1,b_3)^{1,1}+c_3P(a_1,a_2;b_1,b_2)^{1,1}}$$

Nun zeigt die Vergleichung der drei Entwicklungen von 102, daſs in den drei Nennern dieselben Producte erscheinen, jedoch mit dem Unterschiede, daſs der Nenner in der Gleichung für die zweite Unbekannte (y) die entgegengesetzten Zeichen trägt. Verwandelt man der Uebereinstimmung wegen die Zeichen des Nenners in die entgegengesetzten, so müssen auch die des Zählers in die entgegengesetzten verwandelt werden, damit das Resultat unverändert bleibe. Hiemit ist aber zugleich eine Änderung in der Stellung der Elementen-Reihen bedingt. Dieſs führt zu folgender Darstellung:

$$x=\frac{d_1\,b_2\,c_3-d_1\,b_3\,c_2-d_2\,b_1\,c_3+d_2\,b_3\,c_1+d_3\,b_1\,c_2-d_3\,b_2\,c_1}{a_1\,b_2\,c_3-a_1\,b_3\,c_2-a_2\,b_1\,c_3+a_2\,b_3\,c_1+a_3\,b_1\,c_2-a_3\,b_2\,c_1}$$

$$y=\frac{a_1\,d_2\,c_3-a_1\,d_3\,c_2-a_2\,d_1\,c_3+a_2\,d_3\,c_1+a_3\,d_1\,c_2-a_3\,d_2\,c_1}{a_1\,b_2\,c_3-a_1\,b_3\,c_2-a_2\,b_1\,c_3+a_2\,b_3\,c_1+a_3\,b_1\,c_2-a_3\,b_2\,c_1}$$

$$z=\frac{a_1\,b_2\,d_3-a_1\,b_3\,d_2-a_2\,b_1\,d_3+a_2\,b_3\,d_1+a_3\,b_1\,d_2-a_3\,b_2\,d_1}{a_1\,b_2\,c_3-a_1\,b_3\,c_2-a_2\,b_1\,c_3+a_2\,b_3\,c_1+a_3\,b_1\,c_2-a_3\,b_2\,c_1}$$

Die Darstellung in Zeichen führt zu folgenden Gleichungen

$$105)\ x=\frac{P(d_1,d_2,d_3;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3)^{1,1,1}}{P(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,b_3)^{1,1,1}}$$

$$y=\frac{P(a_1,a_2,a_3;d_1,d_2,d_3;c_1,c_2,c_3)^{1,1,1}}{P(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3)^{1,1,1}}$$

$$z=\frac{P(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;d_1,d_2,d_3)^{1,1,1}}{P(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3)^{1,1,1}}$$

In den Zählern dieser Darstellungen vertritt die vierte Elementenreihe d_1, d_2, d_3 diejenige Elementenreihe, welche mit der Gröſse, um deren Entwicklung es sich handelt, verbunden erscheint. Für die Darstellung in Zeichen eignen sich die Gleichungen 105 ganz besonders; aber die für die Rechnung zweckmäſsigere, obgleich scheinbar weitläufigere Darstellung 104 geht dann verloren.

Die hier gefundenen Darstellungen lassen sich nun ohne Schwierigkeit auf die Auflösung der Gleichungen mit vier und mehr unbekannten Gröfsen ausdehnen, denn man erkennt leicht, dafs die gemachten Schlüsse sich auf jeden einzelnen Falle übertragen lassen und allgemein sind. Wählen wir daher für m unbekannte Gröfsen folgende Bezeichnung

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\ \ldots\ldots\ x_m$$

und für die zur Auflösung von m unbekannten Gröfsen erforderlichen m Gleichungen folgende

$$\begin{array}{l}
a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 x_4 + \ldots + m_1 x_m = n_1 \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2 x_4 + \ldots + m_2 x_m = n_2 \\
a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + d_3 x_4 + \ldots + m_3 x_m = n_3 \\
a_4 x_1 + b_4 x_2 + c_4 x_3 + d_4 x_4 + \ldots + m_4 x_m = n_4 \\
\vdots \\
a_m x_1 + b_m x_2 + c_m x_3 + d_m x_4 + \ldots + m_m x_m = n_m
\end{array}$$

so ergeben sich hieraus für die allgemeine Auflösung von m unbekannten Gröfsen aus m Gleichungen folgende drei entwickelte Darstellungen

$$106)\quad x_1 = \frac{P(n_1, n_2 \ldots n_m; b_1, b_2 \ldots b_m \ldots m_1, m_2 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}}{P(a_1, a_2 \ldots a_m; b_1, b_2 \ldots b_m \ldots m_1, m_2 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}}$$

$$x_2 = \frac{P(n_1, n_2 \ldots n_m; a_1, a_2 \ldots a_m; c_1, c_2 \ldots c_m; \ldots m_1, m_2 \ldots m_m)^{1,1,\ldots}}{P(b_1, b_2, \ldots b_m; a_1, a_2 \ldots a_m; c_1, c_2 \ldots c_m; \ldots m_1, m_2 \ldots m_m)^{1,1,\ldots}}$$

$$x_3 = \frac{P(n_1, n_2, \ldots n_m; a_1, a_2 \ldots a_m; b_1, b_2 \ldots b_m; d_1, d_2 \ldots d_m; \ldots m_1, m_2 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}}{P(c_1, c_2 \ldots c_m; a_1, a_2 \ldots a_m; b_1, b_2 \ldots b_m; d_1, d_2, \ldots d_m; \ldots m_1, m_2 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_m = \frac{P(n_1, n_2, \ldots n_m; a_1, a_2 \ldots a_m; b_1, b_2 \ldots b_m; \ldots l_1, l_2, \ldots l_m)^{1,1,1\ldots}}{P(m_1, m_2, \ldots m_m; a_1, a_2 \ldots a_m; b_1, b_2, \ldots b_m; \ldots l_1, l_2, \ldots l_m)^{1,1,1\ldots}}$$

$$107)\ x_1 = \Big[n_1 P(b_2, b_3 \ldots b_m; c_2, c_3 \ldots c_m; \ldots m_2, m_3 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$- n_2 P(b_1, b_3, b_4 \ldots b_m; c_1, c_3, \ldots c_m; \ldots m_1, m_3 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$+ n_3 P(b_1, b_2, b_4 \ldots b_m; c_1, c_2, c_4 \ldots c_m; \ldots m_1, m_2, m_4 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(-)^{m-1} n_m P(b_1, b_2 \ldots b_{m-1}; c_1, c_2 \ldots c_{m-1}; \ldots m_1, m_2 \ldots m_{m-1})^{1,1,1\ldots} \Big] :$$
$$: \Big[a_1 P(b_2, b_3 \ldots b_m; c_2, c_3 \ldots c_m; \ldots m_2, m_3 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$- a_2 P(b_1, b_3, b_4 \ldots b_m; c_1, c_3, c_4 \ldots c_m; \ldots m_1, m_3 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$+ a_3 P(b_1, b_2, b_4 \ldots b_m; c_1, c_2, c_4 \ldots c_m; \ldots m_1, m_2, m_4 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(-)^{m-1} a_m P(b_1, b_2 \ldots b_{m-1}; c_1, c_2 \ldots c_{m-1}; \ldots m_1, m_2 \ldots m_{m-1})^{1,1,1\ldots} \Big]$$

$$x_2 = \Big[n_1 P(a_2, a_3 \ldots a_m; c_2, c_3 \ldots c_m; \ldots m_2, m_3 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$- n_2 P(a_1, a_3 \ldots a_m; c_1, c_3 \ldots c_m; \ldots m_1, m_3 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$+ n_3 P(a_1, a_2, a_4 \ldots a_m; c_1, c_2, c_4 \ldots c_m; \ldots m_1, m_2, m_4 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(-)^{m-1} n_m P(a_1, a_2 \ldots a_{m-1}; c_1, c_2 \ldots c_{m-1}; \ldots m_1, m_2 \ldots m_{m-1})^{1,1,1\ldots} \Big] :$$
$$: \Big[b_1 P(a_2, a_3 \ldots a_m; c_2, c_3 \ldots c_m; \ldots m_2, m_3 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$- b_2 P(a_1, a_3 \ldots a_m; c_1, c_3 \ldots c_m; \ldots m_1, m_3, \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$+ b_3 P(a_1, a_2, a_4 \ldots a_m; c_1, c_2, c_4 \ldots c_m; \ldots m_1, m_2, m_4 \ldots m_m)^{1,1,1\ldots}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(-)^{m-1} b_m P(a_1, a_2 \ldots a_{m-1}; c_1, c_2 \ldots c_{m-1}; \ldots m_1, m_2 \ldots m_{m-1})^{1,1,1\ldots} \Big]$$

$$x_m = \Big[n_1 P(a_2, a_3 \,.\,.\, a_m;\ b_2, b_3 \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ l_2, l_3 \,.\,.\, l_m)^{1,1,1\,..}$$
$$- n_2 P(a_1, a_3 \,.\,.\, a_m;\ b_1, b_3 \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ l_1, l_3 \,.\,.\, l_m)^{1,1,1\,..}$$
$$+ n_3 P(a_1, a_2, a_4 \,.\,.\, a_m;\ b_1, b_2, b_4 \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ l_1, l_2, l_4 \,.\,.\, l_m)^{1,1,1\,..}$$
$$\vdots$$
$$(-)^{m-1} n_m P(a_1, a_2 \,.\,.\, a_{m-1};\ b_1, b_2 \,.\,.\, b_{m-1};\ \ldots\ l_1, l_2, \,.\,.\, l_{m-1})^{1,1,1\,..}\Big] :$$
$$: \Big[m_1 P(a_2, a_3 \,.\,.\, a_m;\ b_2, b_3 \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ l_2, l_3 \,.\,.\, l_m)^{1,1,1\,..}$$
$$- m_2 P(a_1, a_3 \,.\,.\, a_m;\ b_1, b_3 \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ l_1, l_3 \,.\,.\, l_m)^{1,1,1\,..}$$
$$+ m_3 P(a_1, a_2, a_4 \,.\,.\, a_m;\ b_1, b_2, b_4 \,.\,.\, b\ ;\ \ldots\ l_1, l_2, l_4 \,.\,.\, l_m)^{1,1,1\,..}$$
$$\vdots$$
$$(-)^{m-1} m_m P(a_1, a_2 \,.\,.\, a_{m-1};\ b_1, b_2 \,.\,.\, b_{m-1};\ \ldots\ l_1, l_2, \,.\,.\, l_{m-1})^{1,1,1\,..}\Big]$$

$$108)\ x_1 = \frac{P(n_1, n_2 \,.\,.\, n_m;\ b_1, b_2 \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ m_1, m_2 \,.\,.\, m_m)^{1,1,1\,..}}{P(a_1, a_2 \,.\,.\, a_m;\ b_1, b_2 \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ m_1, m_2 \,.\,.\, m_m)^{1,1,1\,..}}$$

$$x_2 = \frac{P(a_1, a_2, \,.\,.\, a_m;\ n_1, n_2, \,.\,.\, n_m;\ c_1, c_2 \,.\,.\, c_m \ldots m_1, \,.\,.\, m_m)^{1,1,1\,..}}{P(a_1, a_2, \,.\,.\, a_m;\ b_1, b_2 \,.\,.\, b_m;\ c_1, c_2, \,.\,.\, c_m \ldots m_1, \,.\,.\, m_m)^{1,1,1\,..}}$$

$$\vdots$$

$$x_m = \frac{P(a_1, a_2, \,.\,.\, a_m;\ b_1, b_2 \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ l_1, l_2 \,.\,.\, l_m;\ n_1, n_2 \,.\,.\, n_m)^{1,1,1\,..}}{P(a_1, a_2, \,.\,.\, a_m;\ b_1, b_2, \,.\,.\, b_m;\ \ldots\ l_1, l_2, \,.\,.\, l_m;\ m_1, m_2 \,.\,.\, m_m)^{1,1,1\,..}}$$

In allen Darstellungen ist die Zeichenfolge

$$+ - - + + - - + + - - \ldots.$$

zu beobachten. Sollte die in diesem §. angegebene Ordnung in den Elementenreihen, woraus die nöthig werdenden Versetzungen gebildet werden sollen, nicht gewählt und eine andere an ihre Stelle gesetzt werden; so unterliegen dann die Vorzeichen auch einer andern Folge, und man hat dann jedem einzelnen Producte das negative Zeichen in der so vielten Potenz vorzuschreiben, als eine niedere Stellenzahl mittelbar oder unmittelbar auf eine höhere folgt.

Anmerkung. Rothe hat nach der Angabe von Meier Hirsch (Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, Berlin Pg. 107) die dritte Auflösungs-Methode Nro. 108 in der zweiten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen von Hindenburg Pg. 263 u. f. schon gelehrt. Von dieser Darstellung sind die zwei ersten 106 und 107 verschieden. Die zweite ist für die Rechnung besonders zweckmäfsig.

§. 33.

Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen, die durch Verbindung der Gruppen verschiedener Elementen-Reihen erzeugt werden.

Sollen Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen durch Verbindung der Gruppen verschiedener Elementenreihen erzeugt werden, so werden hiernach diejenigen Änderungen eintreten, welche nach §. 9 aus der Gleichsetzung verschiedener Elemente folgen. Es werden dann in den Gruppen der verschiedenen Versetzungsclassen so viele Versetzungen weniger entstehen, als die Zahl der gleichen Elemente hätte Versetzungen eingehen können, wenn sie ungleich gewesen wären. Hiernach ist

109) $$P[a_1, a_2, \ldots a_t^r, \ldots a_n;\ b_1, b_2 \ldots b_u^q, \ldots b_m;\ c_1, c_2 \ldots c_x^s \ldots c_0 \ldots]^{h,k,l} =$$
$$= \frac{n^{h|-1} \,.\, (m-h)^{k|-1} \,.\, (o-h-k)^{l|-1} \,.\,.\,.\,.}{1^{r|1} \,.\, 1^{q|1} \,.\, 1^{s|1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.}$$

§. 34.

Versetzungen mit Wiederholungen, welche aus verschiedenen Elementen-Reihen gebildet werden.

Wir unterscheiden folgende Arten:

1) solche Versetzungen, in denen die Elemente einer jeden Reihe mit ähnlichen und unähnlichen der übrigen Elementen-Reihen zusammentreten, wobei die Stellenzahlen ähnlicher Elemente wiederholt erscheinen;

2) solche, bei denen die Elemente einer jeden Reihe nicht nur mit allen Elementen der übrigen, sondern auch mit sich selbst zusammentreten. Hier erscheinen die Stellenzahlen desselben und ähnlicher Elemente wiederholt.

Wir zeigen die Bildungsweise der Versetzungen mit Wiederholungen der ersten Art an folgendem Beispiele, und wählen zu ihrer Bezeichnung $P^{\cdot}$. Hiernach ist:

$$P^{\cdot}(a_1, a_2, a_3;\ b_1, b_2, b_3)^{2,2} =$$
$$\begin{array}{lllll}
= a_1 a_2 b_1 b_2 + & a_1 a_2 b_2 b_3 + & a_1 a_3 b_1 b_3 + & a_2 a_3 b_1 b_2 + & a_2 a_3 b_2 b_3 \\
\quad a_2 a_1 b_1 b_2 & a_2 a_1 b_2 b_3 & a_3 a_1 b_1 b_3 & a_3 a_2 b_1 b_2 & a_3 a_2 b_2 b_3 \\
\quad a_1 a_2 b_2 b_1 & a_1 a_2 b_3 b_2 & a_1 a_3 b_3 b_1 & a_2 a_3 b_2 b_1 & a_2 a_3 b_3 b_2 \\
\quad a_2 a_1 b_2 b_1 & a_2 a_1 b_3 b_2 & a_3 a_1 b_3 b_1 & a_3 a_2 b_2 b_1 & a_3 a_2 b_3 b_2 \\
\quad a_1 a_2 b_1 b_3 & a_1 a_3 b_1 b_2 & a_1 a_3 b_2 b_3 & a_2 a_3 b_1 b_3 & \\
\quad a_2 a_1 b_1 b_3 & a_3 a_1 b_1 b_2 & a_3 a_1 b_2 b_3 & a_3 a_2 b_1 b_3 & \\
\quad a_1 a_2 b_3 b_1 & a_1 a_3 b_2 b_1 & a_1 a_3 b_3 b_2 & a_2 a_3 b_3 b_1 & \\
\quad a_2 a_1 b_3 b_1 & a_3 a_1 b_2 b_1 & a_3 a_1 b_3 b_2 & a_3 a_2 b_3 b_1 &
\end{array}$$

Die Anzahl dieser Versetzungen ist leicht zu bestimmen. Sie beruht auf der Verbindung der numerischen Ausdrücke für die entsprechenden Versetzungsclassen und es ist:

$$P^{\cdot}\,[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3]^{2,2} = 3^{2|-1} \,.\, 3^{2|-1} = 3\,.\,2 \times 3\,.\,2$$

Der Schlufs ins Allgemeine für zwei Elementenreihen wird durch folgende Gleichung dargestellt:

$$P^{\cdot}\,[a_1, a_2, \ldots a_n; b_1, b_2, \ldots b_m]^{h,k} = n^{h|-1} \,.\, m^{k|-1}$$

Das für jede beliebige Anzahl von Elementen-Reihen gültige Gesetz ist:

110) $P^{\cdot}[a_1, a_2, \ldots\ldots a_n; b_1, b_2, \ldots b_m; c_1, c_2, \ldots c_o; \ldots\ldots]^{h,k,l\ldots} =$
$$= n^{h|-1} \,.\, m^{k|-1} \,.\, o^{l|-1}$$

Erscheinen auch bei diesen Elementen-Reihen einige gleiche Elemente, so ändert sich die Gruppenanzahl nach den in §. 9. angegebenen Bestimmungen. Es ist:

$P'\,[a_1, a_2 \ldots a_t^r \ldots a_n; b_1, b_2 \ldots b_u^q, \ldots b_m; c_1, c_2 \ldots c_x^s, \ldots c_o \ldots]^{h,k,l\ldots\ldots} =$

$$= \frac{n^{h|-1} \,.\, m^{k|-1} \,.\, o^{l|-1} \ldots\ldots}{1^{r|1} \,.\, 1^{q|1} \,.\, 1^{s|1} \ldots\ldots}$$

Zur Darstellung der Versetzungen mit Wiederholungen der zweiten Art wählen wir folgendes Beispiel:

$$\begin{array}{lllll} P'\,(a_1, a_2; b_1, b_2)^{2,2} = & a_1 a_1 b_1 b_1 + & a_1 a_1 b_1 b_2 + & a_1 a_1 b_2 b_1 + & a_1 a_1 b_2 b_2 \\ & a_1 a_2 b_1 b_1 & a_1 a_2 b_1 b_2 & a_1 a_2 b_2 b_1 & a_1 a_2 b_2 b_2 \\ & a_2 a_1 b_1 b_1 & a_2 a_1 b_1 b_2 & a_2 a_1 b_2 b_1 & a_2 a_1 b_2 b_2 \\ & a_2 a_2 b_1 b_1 & a_2 a_2 b_1 b_2 & a_2 a_2 b_2 b_1 & a_2 a_2 b_2 b_2 \end{array}$$

Jede Gruppe der Versetzungen mit Wiederholungen, welche die erste Elementen-Reihe erzeugt, verbindet sich mit jeder aus der zweiten Reihe. Es ist also die gesuchte Gruppenanzahl:

$$P'\,[a_1, a_2; b_1, b_2]^{2,2} = 2^2 \,.\, 2^2$$

Hieraus erschliefst sich das allgemeine Gesetz für diese Versetzungen aus zwei Elementen-Reihen:

$$P'\,[a_1, a_2, \ldots a_n; b_1, b_2 \ldots b_m]^{h,k} = n^h \,.\, m^k$$

Eben so für jede Anzahl von Elementenreihen:

111) $P'\,[a_1, a_2 \ldots\ldots b_n; b_1, b_2, \ldots b_m; c_1, c_2 \ldots c_o \ldots\ldots]^{h,k,l\ldots} = n^h . m^k . o^l \ldots\ldots$

§. 35.

Von den im vorhergehenden §. angegebenen Versetzungen mit Wiederholungen der zweiten Art ist gar vielfache Anwendung auf die Entwicklung der Polynomien zu den höheren Potenzen gemacht worden. Für die combinatorische Analysis ist diese Art der Versetzungen von der gröſsten Wichtigkeit.

Bei dieser Anwendung hat man die Anzahl der Elemente in den verschiedenen Reihen entweder als unbeschränkt, oder als beschränkt und gleich angenommen. Gewöhnlich geht man anstatt von mehreren Elementenreihen nur von einer aus, deren Elemente der Reihe nach mit den steigenden Potenzen einer Grundgröſse verbunden sind, um Ordnung und Unterscheidung in die entwickelte Darstelleng zu bringen. Die Form unter welcher die zu entwickelnden Polynomien erscheinen, ist:

$$(a_1\,x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots\ldots)^m$$

$$\text{oder } (a_1 + a_2x + a_3x + a_4x^3 + \ldots\ldots)^m$$

Die Entwicklung selbst gibt Versetzungen mit Wiederholungen der zweiten Art (nach §. 34) und zwar in Rücksicht auf die ordnende Gröſse x zu bestimmten Summen.

Man hat dieser Art von Versetzungen mancherlei Benennungen gegeben. Gewöhnlich werden sie **Variationen** genannt. Der Name ändert die Sache nicht. Zwekmäſsige Behandlung eines Gegenstandes einer Wissenschaft bleibt bei allen Benennungen Hauptsache.

Nach der hier angegebenen Bezeichnungsart würde sich die Darstellung des Polynomiums, wovon wir einen speciellen Fall herausheben, so ergeben:

$$P'\,(a_1x + a_2x^2, a_3x^3; b_1x, b_2x^2, b_3x^3; c_1x, c_2x^2, c_3x^3)^{1,1,1} =$$

$$= (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)(b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)(c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) =$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l}
a_1b_1c_1\,x^3 + a_1b_1c_2 & x^4 + a_1b_1c_3 & x^5 + a_1b_2c_3 & x^6 + a_1b_3c_3 & x^7 + a_2b_3c_3 & x^8 + a_3b_3c_3\,x^9 \\
\quad a_1b_2c_1 & \quad a_1b_2c_2 & \quad a_1b_3c_2 & \quad a_2b_2c_3 & \quad a_3b_2c_3 & \\
\quad a_2b_1c_1 & \quad a_1b_3c_1 & \quad a_2b_1c_3 & \quad a_2b_3c_2 & \quad a_3b_3c_2 & \\
 & \quad a_2b_1c_2 & \quad a_2b_2c_2 & \quad a_3b_1c_3 & & \\
 & \quad a_2b_2c_1 & \quad a_2b_3c_1 & \quad a_3b_2c_2 & & \\
 & \quad a_3b_1c_1 & \quad a_3b_1c_2 & \quad a_3b_3c_1 & & \\
 & & \quad a_3b_2c_1 & & &
\end{array}$$

Die Versetzungen mit Wiederholungen, welche sich aus der gleichen Elementen-Zahl der verschiedenen Elementen-Reihen ohne Rücksicht auf die ordnende Gröſse x ergeben würden, sind:

$$P'(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3)^{1,1,1} = 3^3 = \begin{array}{lll} a_1b_1c_1 + & a_2b_1c_1 + & a_3b_1c_1 \\ a_1b_1c_2 & a_2b_1c_2 & a_3b_1c_2 \\ a_1b_1c_3 & a_2b_1c_3 & a_3b_1c_3 \\ a_1c_2c_1 & a_2b_2c_1 & a_3b_2c_1 \\ a_1b_2c_2 & a_2b_2c_2 & a_3b_2c_2 \\ a_1b_2c_3 & a_2b_2c_3 & a_3b_2c_3 \\ a_1b_3c_1 & a_2b_3c_1 & a_3b_3c_1 \\ a_1b_3c_2 & a_2b_3c_2 & a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_3 & a_2b_3c_3 & a_3b_3c_3 \end{array}$$

Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes gehört nicht hierher, sondern in das Gebiet der combinatorischen Analysis. Jedoch verlassen wir diesen Gegenstand nicht, ohne auf einen Fall, der bis jetzt noch nicht in den Entwicklungen der combinatorischen Analysis betrachtet wurde, aufmerksam zu machen und dessen nähere Untersuchung nicht ohne Gewinn für die Wissenschaft seyn dürfte. Es ist die Verbindung mehrerer Polynomien von beschränkter aber ungleicher Glieder-Anzahl mit einander. Wir bezeichnen ihn so:

$$P'(a_1x, a_2x^2, \ldots a_nx^n; b_1x, b_2x^2, \ldots b_mx^m; c_1x, c_2x^2, \ldots c_ox^o; \ldots)^{1,1,1\ldots} =$$
$$(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots a_nx^n)(b_1x + b_2x^2 + \ldots b_mx^m)(c_1x + c_2x^2 + \ldots c_ox^o)\ldots$$

Aus ihm werden sich leicht andere, und so auch die Entwicklung der Polynomien von beschränkter aber gleicher Glieder-Anzahl ableiten lassen. Einen speciellen Fall dieser Darstellung theilen wir mit.

$$P'(a_1x,\ a_2x^2;\ b_1x,\ b_2x^2,\ b_3x^3;\ c_1x,\ c_2x^2,\ c_3x^3,\ c_4x^4)^{1,1,1} =$$

$$a_1b_1c_1x^3 + \left.\begin{matrix} a_1b_1c_2 \\ a_1b_2c_1 \\ a_2b_1c_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix} a_1b_1c_3 \\ a_1b_2c_2 \\ a_1b_3c_1 \\ a_2b_1c_2 \\ a_2b_2c_1 \\ \\ \end{matrix}\right| x^5 + \left.\begin{matrix} a_1b_1c_4 \\ a_1b_2c_3 \\ a_1b_3c_2 \\ a_2b_1b_3 \\ a_2b_3c_1 \\ a_2b_2c_2 \end{matrix}\right| x^6 + \left.\begin{matrix} a_1b_2c_4 \\ a_2b_1c_4 \\ a_1b_3c_3 \\ a_2b_2c_3 \\ a_2b_3c_2 \\ \\ \end{matrix}\right| x^7 + \left.\begin{matrix} a_1b_3c_4 \\ a_2b_2c_4 \\ a_2b_3c_3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right| x^8 + a_2b_3c_4$$

Die Zahl allerGruppen, die nach Nro. 111 §. 34 in der entwickelten Darstellung erscheinen, ist 2. 3. 4 = 24. Die Stellenzahlen der Elemente bilden die Versetzungen mit Wiederholungen zu der Summe, welche der Exponent der mit ihnen verbundenen ordnenden Gröfse x angibt, und zwar bei ausgeschlossenen Schlufselementen. Die Elemente, welche die Summen erzeugen, haben das Eigenthümliche, dafs die Stellenzahl 3 nicht in der ersten, sondern nur in der zweiten und dritten; die Stellenzahl 4 aber weder in der ersten noch zweiten, sondern nur in der dritten Vertikal-Reihe der Vorzahlen vorkömmt.

§. 36.

Verbindungen ohne Wiederholungen, welche durch Verbindung der Gruppen verschiedener Elementen-Reihen erzeugt werden.

Da sich die Verbindungen nach §. 11. überhaupt aus den Versetzungen dadurch ableiten lassen, dafs in den Gruppen, welche die Versetzungen erzeugen, die Umstellung der Elemente ausgeschlossen wird; so können wir leicht die Verbindungen ohne und mit Wiederholungen aus verschiedenen Elementen-Reihen in der Bildungsweise und besonders in der Bestimmung der Gruppenanzahl aus den Versetzungen §. 31. ableiten.

Wir theilen, um die Bildungsweise der Verbindungen zu zeigen, die Gruppen der Verbindungen zu je zwei Elementen aus den Reihen $a_1\ a_2,\ a_3,\ a_4;\ b_1\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5$ mit.

$$
\begin{array}{llll}
C(a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)^{2,2} = & a_1\, a_2\, b_3\, b_4 & a_1\, a_4\, b_2\, b_3 & a_2\, a_4\, b_1\, b_3 \\
 & a_1\, a_2\, b_3\, b_5 & a_1\, a_4\, b_2\, b_5 & a_2\, a_4\, b_1\, b_5 \\
 & a_1\, a_2\, b_4\, b_5 & a_1\, a_4\, b_3\, b_5 & a_2\, a_4\, b_3\, b_5 \\
 & a_1\, a_3\, b_2\, b_4 & a_2\, a_3\, b_1\, b_4 & a_3\, a_4\, b_1\, b_2 \\
 & a_1\, a_3\, b_2\, b_5 & a_2\, a_3\, b_1\, b_5 & a_3\, a_4\, b_1\, b_5 \\
 & a_1\, a_3\, b_4\, b_5 & a_2\, a_3\, b_4\, b_5 & a_3\, a_4\, b_2\, b_5
\end{array}
$$

Die Gruppen-Anzahl ist hiernach:

$$C[a_1\ a_2,\ a_3,\ a_4;\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5]^{2,2} = \frac{4\ .\ 3}{1\ .\ 2} \cdot \frac{3\ .\ 2}{1\ .\ 2}$$

Das allgemeine Gesetz für die Bestimmung der Gruppen-Anzahl leitet sich aus Nro. 100 durch Ausscheidung der Versetzungen ab und es ist:

$$112)\ C\,[a_1,\ a_2 \ldots\ldots a_n;\ b_1,\ b_2 \ldots\ldots b_m; c_1, c_2, \ldots\ldots c_o; \ldots]^{h,k,l,\ldots\ldots} =$$

$$= \frac{n^{h|-1}\ .\ (m-h)^{k|-1}\ .\ (o-h-k)^{l|-1}\ldots\ldots}{1^{h|1}\ .\ 1^{k|1}\ .\ 1^{l|1}\ldots\ldots}$$

Die Verbindungen mit Wiederholungen aus mehreren Reihen lassen sich einfach nach den bekannten Grundzügen bilden; defswegen übergehen wir sie.

§. 37.

Verbindungen mit Wiederholungen, welche durch Gruppen mehrerer Elementen-Reihen erzeugt werden.

Wir unterscheiden, wie bei den Versetzungen mit Wiederholungen §. 34, zwei Fälle:

1) Verbindungen, in denen die Elemente jeder Reihe mit ähnlichen und unähnlichen der übrigen Reihen zusammen treten. Die Stellenzahlen ähnlicher Elemente sind wiederholt.

2) Verbindungen, in denen die Elemente jeder Reihe nicht nur mit allen Elementen der übrigen, sondern auch mit sich zusammentreten. Die Stellenzahlen eines jeden Elementes und ähnlicher erscheinen wiederholt.

Die Bildungsweise dieser Arten von Verbindungen läſst sich leicht aus der Natur der gegebenen Bestimmungen ableiten, deſswegen glauben wir der Mühe, entwickelte Darstellungen für sie geben zu müssen, überhoben zu seyn. Wir wenden uns daher zur Bestimmung ihrer Gruppen-Anzahl und theilen für sie die allgemeinen Formeln mit.

Die Gruppenanzahl der ersten Art ist:

$$113)\ C^{\cdot}\,[a_1,\ a_2,\ldots a_n;\ b_1,\ b_2\ldots b_m;\ c_1,\ c_2,\ldots c_o;\ldots]^{h,k,l,\ldots} = \\ = \frac{n^{h|-1}\,.\,m^{k|-1}\,.\,o^{l|-1}\ldots\ldots\ldots}{1^{h|1}\,.\,1^{k|1}\,.\,1^{l|1}\ldots\ldots}$$

Die Gruppen-Anzahl der zweiten Art ist:

$$114)\ C'\,[a_1,\ a_2\ldots a_n;\ b_1,\ b_2\ldots b_m;\ c_1,\ c_2\ldots c_o;\ ,\ldots]^{h,k,l,\ldots} = \\ = \frac{n^{h|1}\,.\,m^{k|1}\,.\,o^{l|1}\ldots\ldots}{1^{h|1}\,.\,1^{k|1}\,.\,1^{l|1}\ldots\ldots}.$$

Auch die Summen, die durch die Verbindung der Gruppen verschiedener Elementen-Reihen erzeugt werden, lassen sich untersuchen; doch übergehen wir sie, weil die Untersuchung uns zu weit führen würde, und der Weg zur weitern Untersuchung gezeichnet ist.

VI. Vertheilung der Elemente in Fächer.

§. 38.

Vertheilung der Elemente einer Reihe in Fächer.

Die Gesammtheit aller möglichen Zusammenstellungen von Gruppen, die dadurch entstehen, dafs man zwei oder mehrere Fächer annimmt, und in sie der Reihe nach eine gegebene Elementen-Anzahl gruppenweise so bringt, dafs in jedem Fache immer eine gleich grofse Zahl von den Elementen erscheint, soll mit dem Namen Vertheilung der Elemente in Fächer bezeichnet werden.

Dasselbe einzelne Fach kann hiernach nur Gruppen von gleichen Dimensionen, die Fächer selbst aber in Vergleichung mit einander Gruppen von gleichen oder ungleichen Dimensionen enthalten. Jede Gesammtgruppe ist aus zwei oder mehreren Fachgruppen zusammengesetzt und begreift die Summe aller in den Fachgruppen vertheilten Elementen in sich. Die Gesammtgruppen unterscheiden sich dadurch, dafs sie nie gleiche Zusammenstellungen der Elemente in den einzelnen Fachgruppen, sondern immer neue oder verschiedene zeigen. Versetzungen sind ausgeschlossen, denn die verschiedene Stellung der Elemente in der einzelnen Fachgruppe erzeugt keine neue Vertheilung. Wir betrachten zuerst die Vertheilung der Elemente einer, dann die mehrerer Reihen in Fächer.

Die Vertheilung der Elemente in Fächer deuten wir durch das Zeichen (V) an, welches wir den Elementen vorsetzen. Die Zahl der Elemente, welche in jedem Fache vorkommen soll, zeigen wir, wie bisher, durch Exponenten an.

Wir gehen vom Speciellen aus, und wählen zur entwickelten Darstellung die Vertheilung der Elemente a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 in zwei Fächer, wovon das erste zwei, das zweite die übrigen Elemente enthalten soll.

$$V(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)^{2,3} = \left|\begin{array}{cc|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_3 & a_2 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_4 & a_2 & a_3 & a_5 \\ a_1 & a_5 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_1 & a_3 & a_5 \\ a_2 & a_5 & a_1 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_1 & a_2 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array}\right|$$

Die Anzahl der Vertheilungen des vorstehenden Falles ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dafs jede Gruppe des zweiten Faches durch die des ersten bedingt ist und nur die Ergänzung der Gruppe des ersten Faches bildet. Die Gruppen des ersten Faches sind die Zusammenstellungen der Elemente zu je zweien, deren Gruppen sich durch Aufnahme neuer Elemente charakterisiren. Die gesuchte Anzahl ist:

$$V[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^{2,3} = \frac{5.4}{1.2} \cdot \frac{3.2.1}{1.2.3}$$

Der Schlufs auf das allgemeine Gesetz ist hiedurch gegeben. Die Anzahl der Vertheilungen von n Elementen in zwei Fächer, wovon das erste q, das andere die übrigen Elemente enthalten soll, ist:

$$115)\; V[a_1, a_2, a_3 \dots a_n]^{q,n-q} = \frac{n^{q|-1}}{{}^{q|1}} \cdot \frac{(n-q)^{n-q|-1}}{1^{n-q|1}} = \frac{n^{n|-1}}{1^{q|1}.1^{n-q|1}}$$

Diese Gleichung läfst auch folgende Darstellung zu:

$$V[a_1, a_2, a_3 \dots\dots a_n]^{q,n-q} = \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{n^{n-q|-1}}{1^{n-q|1}}$$

je nachdem man die eine, oder die andere Fakultät im Zähler und Nenner ausscheidet. Hieraus erkennt man, dafs es einerlei ist, wie man die Fächer, welche die Elemente aufnehmen, ordnet.

Um die Bildungsweise für die Vertheilung der Elemente in drei Fächer kennen zu lernen, wählen wir den Fall, wornach fünf Elemente in drei Fächer und zwar in das erste ein Element, in das zweite zwei, und in das dritte zwei vertheilt werden sollen. Es ist:

$$V(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)^{1,2,2} =$$

$$\left|\begin{array}{c|cc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_5 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_3 & a_4 & a_2 & a_5 \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_4 & a_5 & a_2 & a_3 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|cc|cc} a_2 & a_1 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_5 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_5 & a_1 & a_4 \\ a_2 & a_4 & a_5 & a_1 & a_3 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|cc|cc} a_3 & a_1 & a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 & a_5 \\ a_3 & a_1 & a_5 & a_2 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_4 & a_1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_5 & a_1 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_1 & a_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|cc|cc} a_4 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ a_4 & a_1 & a_3 & a_2 & a_5 \\ a_4 & a_1 & a_5 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_5 & a_1 & a_3 \\ a_4 & a_3 & a_5 & a_1 & a_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|cc|cc} a_5 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_1 & a_3 & a_2 & a_4 \\ a_5 & a_1 & a_4 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_2 & a_3 & a_1 & a_4 \\ a_5 & a_2 & a_4 & a_1 & a_3 \\ a_5 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \end{array}\right|$$

Die Anzahl dieser Vertheilungen bestimmt sich, wenn man bemerkt, dafs jede Gruppe des ersten Faches so vielmal mit vier Elementen in Verbindung tritt, als sich diese nach 115 in zwei Fächer zu zwei und zwei Elementen vertheilen lassen. Hiernach ist:

$$V\,[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^{1,2,2} = \frac{5}{1} \cdot \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{2.1}{1.2}$$

Bildungsweise und Schlüsse bleiben für alle Fälle unverändert. Die Anzahl der Vertheilungen einer Reihe von n Elementen, die so in drei Fächer vertheilt werden sollen, dafs das erste q, das zweiter, und das dritte die übrigen Elemente enthält, bestimmt sich durch die Gleichung:

$$V\,[a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^{q,r,n-q-r} = \frac{n^{n|-1}}{1^{q|1}.1^{r|1}.1^{n-r-q|1}} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots3.2.1}{1.2\ldots q.1.2\ldots r.1.2..(n-r-q)}$$

Die gemachten Bemerkungen steigern sich leicht in das Allgemeine, und man hat zur Bestimmung der Anzahl der Vertheilungen von n Elementen in jede beliebige Fächer-Anzahl, welche der Reihe nach q, r, s, . . . Elemente enthalten soll, folgende Gleichung:

$$116)\quad V\,[a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^{q,r,s,\ldots} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3.2.1}{1.2\ldots q.1.2..r.1.2..s..1.2\ldots(n-q-r-s\ldots)}$$

$$= \frac{1^{n|1}}{1^{q|1}.1^{r|1}.1^{s|1}\ldots\ldots1^{n-q-r-s-\ldots|1}}$$

§. 39.

Vertheilung der Elemente verschiedener Reihen in Fächer.

Wir betrachten nun mehrere Elementen-Reihen, deren Elemente in Fächer vertheilt werden sollen und zwar so, dafs in einem Fache bestimmte Gruppen aus verschiedenen Elementen-Reihen vorkommen sollen. Dabei findet jedoch die Bedingung nicht statt, dafs in jedem Fache Elemente aus allen Reihen vorkommen müssen. Es können in einem Fache Gruppen von nur einer oder mehreren Reihen vorkommen.

Wir wählen zur Darstellung der Bildungsweise dieser Vertheilungen den Fall, wenn die Elemente a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3 in zwei Fächer vertheilt werden sollen, so dafs das erste Fach drei Elemente der ersten und ein Element der zweiten Reihe, das zweite die übrigen Elemente enthält:

$$V\,(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4;\ b_1,\ b_2,\ b_3)^{3,1;\,1,2} =$$

$$\left|\begin{array}{l|l} a_1\,a_2\,a_3\,b_1 & a_4\,b_2\,b_3 \\ a_1\,a_2\,a_3\,b_2 & a_4\,b_1\,b_3 \\ a_1\,a_2\,a_3\,b_3 & a_4\,b_1\,b_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{l|l} a_1\,a_2\,a_4\,b_1 & a_3\,b_2\,b_3 \\ a_1\,a_2\,a_4\,b_2 & a_3\,b_1\,b_3 \\ a_1\,a_2\,a_4\,b_3 & a_3\,b_1\,b_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{l|l} a_1\,a_3\,a_4\,b_1 & a_2\,b_2\,b_3 \\ a_1\,a_3\,a_4\,b_2 & a_2\,b_1\,b_3 \\ a_1\,a_3\,a_4\,b_3 & a_2\,b_1\,b_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{l|l} a_2\,a_3\,a_4\,b_1 & a_1\,b_2\,b_3 \\ a_2\,a_3\,a_4\,b_2 & a_1\,b_1\,b_3 \\ a_2\,a_3\,a_4\,b_3 & a_1\,b_1\,b_2 \end{array}\right|$$

Man erkennt, daſs sich jede Gruppe zu drei Elementen aus der ersten Elementen-Reihe mit allen Gruppen zu einem Elemente aus der zweiten Reihe im ersten Fache verbindet, und daſs die Gruppen des zweiten Faches die Ergänzungen zu denen des ersten bilden. Hiernach ist die Gruppenanzahl:

$$V\,[a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4;\ b_1,\ b_2,\ b_3]^{3,1;1,2} =$$

$$= \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2.1}{1.2} = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.1} \cdot \frac{3.2.1}{1.1.2}$$

Das allgemeine Gesetz läſst sich hieraus entnehmen. Sollen die Elemente zweier Reihen in zwei Fächer so vertheilt werden, daſs in dem ersten q Elemente der ersten und r Elemente der zweiten Reihe, und in dem zweiten die übrigen Elemente der beiden Reihen enthalten sind; so ist ihre Gruppenanzahl:

$$V\,[a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots a_n;\ b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots b_m]^{q,r;n-q,m-r}$$

$$= \frac{n^{n|-1}}{1^{q|1}.1^{n-q|1}} \cdot \frac{m^{m|-1}}{1^{r|1}.1^{m-r|1}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1\,.\,2\,.\ldots.\,q} \cdot \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\ldots\ldots.\,r}$$

Nachdem diese Gleichung gefunden ist, so läſst sich mit ihr und der Gleichung 116 auf zusammengesetztere Fälle übergehen. Sollen daher die Elemente mehrerer Reihen in mehrere Fächer so vertheilt werden, daſs in dem ersten q_1 Elemente aus der ersten Reihe, r_1 aus der zweiten, s_1 aus der dritten u. s. f; in dem zweiten q_2 aus der ersten, r_2 aus der zweiten, s_2 aus der dritten u. s. f; in dem dritten q_3 aus der ersten, r_3 aus der zweiten, s_3 aus der dritten u. s. f. enthalten sind; so hat man ganz allgemein für die Bestimmung der Gruppenanzahl folgende Gleichung:

$$117)\ V\,[a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2 \ldots b_m;\ c_1, c_2, \ldots c_o \ldots)^{q_1, r_1, s_1, \ldots;\, q_2, r_2, s_2, \ldots;\, q_3, r_3, s_3 \ldots}$$

$$= \frac{n^{n|-1}}{1^{q_1|1}1^{q_2|1}1^{q_3|1}\ldots 1^{n-q_1-q_2-\ldots|1}} \cdot \frac{m^{|m-1}}{1^{r_1|1}1^{r_2|1}1^{r_3|1}\ldots 1^{m-r_1-r_2\ldots|1}} \cdot \frac{o^{o|-1}}{1^{s_1|1}1^{s_2|1}1^{s_3|1}\ldots 1^{o-s_1-s_2\ldots|1}}$$

wobei $n = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots, m = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots, o = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$ seyn muſs.

§. 40.

Vertheilung der Elemente einer oder mehrerer Reihen in Fächer mit Wiederholungen.

Wird der zu Anfange des §. 38. gegebene Begriff der Vertheilung der Elemente in Fächer so erweitert, dafs die Elemente, welche in den einzelnen Fachgruppen erscheinen, wiederholt werden; so soll die Gesammtheit aller hiedurch möglichen Zusammenstellungen durch den Namen Vertheilung der Elemente in Fächer mit Wiederholungen bezeichnet werden.

Die Zahl der hiedurch möglichen Gruppen bestimmt sich, wenn man bemerkt, dafs jede Gruppe des ersten Faches so vielmal erscheint, als sie sich mit den einzelnen Gruppen des zweiten Faches verbinden kann, ferner dafs alle Gesammtgruppen der zwei ersten Fächer so vielmal erscheinen werden, als sie sich mit jeder Gruppe des dritten Faches verbinden können u. s. f. Diese Schlüsse gelten von jeder möglichen Anzahl von Fächern und Elementen-Reihen.

Wir bezeichnen die Vertheilungen der Elemente in Fächer mit Wiederholungen nach §. 7. und 38. durch V' .

Zur Darstellung der Bildungsweise dieser Combinationen mag die Vertheilung der Elemente a_1, a_2, a_3 in zwei Fächer mit Wiederholungen zu zwei und einem Elemente dienen.

$$V'(a_1, a_2\ a_3)^{2,1} = \left|\begin{array}{c|c} a_1\ a_1 & a_1 \\ a_1\ a_2 & a_1 \\ a_1\ a_3 & a_1 \\ a_2\ a_2 & a_1 \\ a_2\ a_3 & a_1 \\ a_3\ a_3 & a_1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} a_1\ a_1 & a_2 \\ a_1\ a_2 & a_2 \\ a_1\ a_3 & a_2 \\ a_2\ a_2 & a_2 \\ a_2\ a_3 & a_2 \\ a_3\ a_3 & a_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} a_1\ a_1 & a_3 \\ a_1\ a_2 & a_3 \\ a_1\ a_3 & a_3 \\ a_2\ a_2 & a_3 \\ a_2\ a_3 & a_3 \\ a_3\ a_3 & a_3 \end{array}\right|$$

Die Gruppenanzahl des vorliegenden Falles ist:

$$V'[a_1,\ a_2,\ a_3]^{2,1} = \frac{3.4}{1.2} \cdot \frac{3}{1}$$

Die Gruppenanzahl der Vertheilung der Elemente einer Reihe in Fächer mit Wiederholungen, so dafs im ersten q, im zweiten r, im dritten s Elemente u. s. f. enthalten sind, ist.

$$118)\quad V'[a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n] = \left(\frac{n}{1}\right)^{q|1} \cdot \left(\frac{n}{1}\right)^{r|1} \cdot \left(\frac{n}{1}\right)^{s|1} \ldots\ldots$$

Die Gruppenanzahl der Vertheilung der Elemente mehrerer Reihen in Fächer, so dafs im ersten q_1 Elemente der ersten, r_1 der zweiten, s_1 der dritten u. s. w.; im zweiten q_2 der ersten, r_2 der zweiten, s_2 der dritten u. s. w.; im dritten q_3 der ersten, r_3 der zweiten, s_3 der dritten Reihe u. s. f. enthalten sind, ist:

$$119)\ V'[a_1, a_2, a_3, \ldots a_n; b_1, b_2 \ldots b_m; c_1, c_2, \ldots c_0; \ldots]^{q_1, r_1, s_1 \ldots; q_2, r_2, s_2 \ldots; q_3, r_3, s_3 \ldots}$$

$$= \binom{n}{\bar{1}}^{q_1|1} \cdot \binom{m}{\bar{1}}^{r_1|1} \cdot \binom{o}{\bar{1}}^{s_1|1} \cdots\cdots \binom{n}{\bar{1}}^{q_2|1} \cdot \binom{m}{\bar{1}}^{r_2|1} \cdot \binom{o}{\bar{1}}^{s_2|1} \cdots\cdots \binom{n}{\bar{1}}^{q_3|1} \cdot \binom{m}{\bar{1}}^{r_3|1} \cdot \binom{o}{\bar{1}}^{s_3|1} \cdots\cdots$$

Bei dieser Art von Vertheilungen in Fächer gilt keine Beschränkung in der Fächer und Elementen-Anzahl unter einander wie §. 39. Die Zahl der Fächer kann gröſser seyn, als die Zahl der Elemente, wie sich denn die Wiederholung einer und derselben Sache bis ins Unendliche fortsetzen läſst.

VII. Zerstreuungen der Elemente in Fächer.

§. 41.

Zerstreuung der Elemente einer Reihe in Fächer mit und ohne Wiederholungen, mit und ohne Versetzungen.

Wird irgend eine Elementen-Anzahl so in Fächer vertheilt, dafs immer nur ein Element in jedem Fache erscheint, die Elemente selbst aber nach und nach alle mögliche Zusammenstellungen in den Fächern einnehmen; so werden wir die hiedurch gewonnenen Gruppen mit dem Namen **Zerstreuung** der Elemente in Fächer bezeichnen.

Die Zerstreuung der Elemente in Fächer deuten wir durch das Zeichen (Z) an, dem wir die zu zerstreuenden Elemente und die Anzahl der Fächer, beide durch (;) getrennt, in Klammern eingeschlossen, rechts neben anschreiben. Die Zahl der Elemente, welche in Gruppen durch die Fächer zerstreut erscheinen sollen, wird als Exponent oben rechts an die Klammern gesetzt werden.

Es ist leicht zu bemerken, dafs die Dimensionen der Gruppen kleiner, als die Fächer-Anzahl, oder höchstens eben so grofs seyn mufs.

Die Bildungsweise der Zerstreuungen der Elemente in Fächer und die Bestimmung ihrer Gruppenanzahl zeigen wir in Folgendem.

Die Zerstreuung der Elemente a_1, a_2 in sechs Fächer erzeugt folgende Gruppen:

$Z\,(6;\, a_1,\, a_2)^2 =$

a_1	a_2				
a_1		a_2			
a_1			a_2		
a_1				a_2	
a_1					a_2
	a_1	a_2			
	a_1		a_2		
	a_1			a_2	
	a_1				a_2
		a_1	a_2		
		a_1		a_2	
		a_1			a_2
			a_1	a_2	
			a_1		a_2
				a_1	a_2

Sie entstehen dadurch, dafs das erste Element im ersten Fache so lange ruhig bleibt, bis das zweite die übrigen Fächer durchlaufen hat, dafs ferner das erste Element in das zweite Fach einrückt und so lange ruhig bleibt, bis das zweite Element alle spätern Fächer durchlaufen hat, u. s. f., dafs daher das erste Element allmählig alle Fächer einnimmt, während das zweite immer fortrückt.

Die Gruppenanzahl dieser Zerstreuung findet sich, wenn man berücksichtigt, dafs das erste Element so oft in dem ersten Fache erscheint, als das zweite die nachfolgenden Fächer durchläuft, so oft in dem zweiten Fache erscheint, als das zweite die nachfolgenden durchläuft, und so fort, und dafs das erste Element alle Fächer mit Ausnahme des letzten durchläuft. Hiernach ist:

$$Z\,[6;\, a_1,\, a_2]^2 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{5\,.\,6}{1\,.\,2}$$

Da die Bildungsweise für zwei Elemente unverändert bleibt, wie grofs auch die Anzahl der Fächer werden mag, so ist hieraus:

120) $$Z\,[q;\, a_1, a_2]^2 = (q-1) + (q-2) + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{q(q-1)}{1\,.\,2}$$

Die Zerstreuung dreier Elemente in 6 Fächer erzeugt folgende Darstellung:

$Z\,(6;\ a_1,\ a_2,\ a_3)^3 =$

a_1	a_2	a_3			
a_1	a_2		a_3		
a_1	a_2			a_3	
a_1	a_2				a_3
a_1		a_2	a_3		
a_1		a_2		a_3	
a_1		a_2			a_3
a_1			a_2	a_3	
a_1			a_2		a_3
a_1				a_2	a_3
	a_1	a_2	a_3		
	a_1	a_2		a_3	
	a_1	a_2			a_3
	a_1		a_2	a_3	
	a_1		a_2		a_3
	a_1			a_2	a_3
		a_1	a_2	a_3	
		a_1	a_2		a_3
		a_1		a_2	a_3
			a_1	a_2	a_3

Die Gruppen dieser Zerstreuung entstehen, indem das erste Element so lange in dem ersten Fache ruhig bleibt, als sich die zwei übrigen Elemente in die nachfolgenden 5 Fächer zerstreuen lassen; indem ferner das erste Element in das zweite Fach einrückt und so lange ruhig bleibt, als sich die beiden übrigen Elemente in die 4 folgenden Fächer zerstreuen lassen u. s. f. Das erste Element rückt bis zum drittletzten Fache vor.

Nach dem Gesagten leitet sich nun die Zahl der hieraus hervorgehenden Gruppen leicht mittelst der Gleichung 120 ab, denn die Zahl der Zerstreuungen dreier Elemente in Fächer ist auf die zweier Elemente in Fächer zurück geführt. Hiernach ist:

$$Z\,[6;\ a_1,\ a_2,\ a_3]^3 = \frac{5\,.\,4}{1\,.\,2} + \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2} + \frac{3\,.\,2}{1\,.\,2} + \frac{2\,.\,1}{1\,.\,2} = \frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}$$

und so fort. Die Gruppenanzahl der Zerstreuung dreier Elemente in q Fächer ist:

$$Z\,[q;\ a_1,\ a_2,\ a_3]^3 = \frac{q\,(q-1)\,(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Es ist nun leicht von drei Elementen zu vieren überzugehen u. s. f., denn der Gang dieser Ableitung ist vorgezeichnet. Hiernach erschliefsen wir für die Bestimmung der Gruppenanzahl der Zerstreuungen von n Elementen in q Fächer das Gesetz:

$$121)\ Z\,[q; a_1, a_2 \ldots a_n]^n = \frac{q\,(q-1)\,(q-2) \ldots (q-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n} = \frac{q^{n|-1}}{1^{n|1}}$$

In den bisherigen Fällen wurde angenommen, dafs in jeder Gruppe die Gesammtanzahl der Elemente erscheine. Diese Beschränkung ist nicht nöthig. Es können auch Aussonderungen gemacht, je r Elemente aus n Elementen ausgeschieden und in Fächer zerstreut werden. In diesem Falle ist zu berücksichtigen, dafs eine Aussonderung von r Elementen aus n Elementen $\frac{n\,(n-1) \ldots (n-r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,r}$ Gruppen erzeugt und dafs die Elemente jeder Gruppe auf gleiche Weise durch die Fächer zerstreut werden können. Daher wird sich die Anzahl der Zerstreuungen $\frac{n^{r|-1}}{1^{r|1}}$ mal steigern, und man hat zur Bestimmung der Anzahl der Zerstreuungen von n Elementen zu je r Elementen in q Fächer folgende Gleichung:

$$122)\ Z\,[q; a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^r = \frac{n(n-1) \ldots (n-r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,r} \,.\, \frac{q(q-1) \ldots (q-r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,r} =$$
$$= \frac{n^{r|-1}\,.\,q^{r|-1}}{1^{r|1}\;1^{r|1}}$$

Die entwickelte Darstellung eines besonderen Falles soll das Gesagte verdeutlichen:

$$Z\,(5; a_1, a_2, a_3)^2 =$$

=	a_1	a_2				+	a_1	a_3				+	a_2	a_3			
	a_1		a_2				a_1		a_3				a_2		a_3		
	a_1			a_2			a_1			a_3			a_2			a_3	
	a_1				a_2		a_1				a_3		a_2				a_3
		a_1	a_2					a_1	a_3					a_2	a_3		
		a_1		a_2				a_1		a_3				a_2		a_3	
		a_1			a_2			a_1			a_3			a_2			a_3
			a_1	a_2					a_1	a_3					a_2	a_3	
			a_1		a_2				a_1		a_3				a_2		a_3
				a_1	a_2					a_1	a_3					a_2	a_3

Die Elemente, woraus bisher die Zerstreuungen gebildet wurden, sind verschieden. Die Gleichung 122 gilt noch, wenn die Elemente, welche zur Bildung der Zerstreuungen dienen, sämmtlich gleich gesetzt werden. Sie 122 geht dann in folgende über:

$$123)\ Z[q;\, a^n]^n = \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}$$

Dabei ist zu bemerken, dafs in jeder Gruppe immer alle Elemente vorkommen müssen, wie sich diefs an folgendem Beispiele zeigt:

$$Z(5;\, a, a)^2 = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} a & a & & & \\ a & & a & & \\ a & & & a & \\ a & & & & a \\ & a & a & & \\ & a & & a & \\ & a & & & a \\ & & a & a & \\ & & a & & a \\ & & & a & a \end{array}\right|$$

Die Gleichungen 121 und 122 gelten nur, wenn bei Bildung der Zerstreuungen die Versetzungen ausgeschlossen sind, und die zu zerstreuenden Elemente in einerlei Ordnung durch alle Fächer erscheinen sollen. Schliefst man diese Ordnung aus und führt die Versetzungen in die Zerstreuungen ein, so hat man so viel mal mehr Zerstreuungsgruppen, als sich die vorkommenden Elemente versetzen lassen. Hiernach hat man für die Zerstreuungen mit Versetzungen, die wir durch ZP andeuten wollen, aus 121:

$$124)\ ZP[q;\, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^n = q(q-1)\ldots(q-n+1)$$

und aus 122:

$$125)\ ZP[q;\, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n]^r = n(n-1)\ldots(n-r+1)\,.\,\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1\,.\,2\ldots r}$$

$$= n^{r|-1}\,.\,\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}$$

Die Gleichung 124 folgt aus 125, wenn $n = r$ wird, wie denn die Gleichung 125 allgemeiner als 124 ist.

So wie sich die Versetzungen in die Zerstreuungen der Elemente in Fächer einführen lassen, so lassen sich auch die Wiederholungen in sie einführen. Durch die Einführung der Wiederholungen wird sich auf ähnliche Weise, wie im Früheren, die Gruppenanzahl der Zerstreuungen steigern.

Führen wir zuerst die Wiederholungen ohne Versetzungen ein, und bezeichnen sie durch Z', so werden sich so viele Gruppen in Fächer zerstreuen lassen, als durch die Verbindungen mit Wiederholungen aus einer gegebenen Elementenzahl zu einer bestimmten Classe gebildet werden können. Hiernach ist die Zahl der Zerstreuungen mit Wiederholungen von n Elementen zu je r Elementen in q Fächer:

$$126)\ Z'[q;\ a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^r =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2.3\ldots r} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r} = \frac{n^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}$$

wobei die Gleichung 122 benutzt wurde.

Ist $n = r$, wie bei 121, so wird:

$$127)\ Z'[q;\ a_1, a_2 \ldots a_n]^n = \frac{n^{n|1}}{1^{n|1}} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{1.2\ldots n}$$

Die Gruppen eines besonderen Falles sollen hier stehen:

$$Z'(5;\ a_1, a_2)^2 =$$

=	a_1	a_1				+	a_1	a_2				+	a_2	a_2			
	a_1		a_1				a_1		a_2				a_2		a_2		
	a_1			a_1			a_1			a_2			a_2			a_2	
	a_1				a_1		a_1				a_2		a_2				a_2
		a_1	a_1					a_1	a_2					a_2	a_2		
		a_1		a_1				a_1		a_2				a_2		a_2	
		a_1			a_1			a_1			a_2			a_2			a_2
			a_1	a_1					a_1	a_2					a_2	a_2	
			a_1		a_1				a_1		a_2				a_2		a_2
				a_1	a_1					a_1	a_2					a_2	a_2

Auf ähnliche Weise erhalten wir für die Bestimmung der Zahl der Zerstreuungen mit Wiederholungen und Versetzungen von n Elementen zu je r Elementen in q Fächer:

$$128)\ ZP'[q;\ a_1, a_2 \ldots a_n]^r = n^r \cdot \frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}$$

und wenn $n = r$, wie bei 121, ist:

$$129)\ ZP'[q;\ a_1, a_2 \ldots a_n]^r = n^n \cdot \frac{q^{n|-1}}{1^{n|1}}$$

§. 42.

Zerstreuung der Elemente mehrerer Reihen in Fächer ohne und mit Wiederholungen, ohne und mit Versetzungen.

Bei den Zerstreuungen der Elemente in Fächer erscheint immer die gleiche Anzahl der Fächer von Elementen besetzt, die übrigen leer. Werden die leeren Fächer von Elementen anderer Reihen ausgefüllt, entweder selbst wieder Zerstreuungen oder einfache Combinationen bildend, so wird sich dann die Zahl jeder Zerstreuungsgruppe so viel mal steigern, als verschiedene Gruppen in die leeren Fächer eintreten können.

Setzen wir mit den Zerstreuungen die einfachen Combinationen in Verbindung, so erhalten wir, wenn die leeren Fächer durch Elemente einer zweiten Reihe ausgefüllt werden sollen, zur Bestimmung der Anzahl:

$$130)\quad Z[q;\ a_1,\ a_2 \ldots a_n;\ b_1,\ b_2 \ldots b_m]^{r,\ q-r} = \frac{n^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{m^{q-r|-1}}{1^{q-r|1}}$$

für die Bestimmung der Zahl der Zerstreuungen mit Versetzungen aus n Elementen zu je r Elementen in q Fächer, wobei die leeren Fächer durch die Elemente einer zweiten Reihe ausgefüllt werden:

$$131)\quad ZP[q;\ a_1,\ a_2 \ldots a_n;\ b_1,\ b_2 \ldots b_m]^{r,\ q-r} = n^{r|-1} \cdot \frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot m^{q-r|-1}$$

Für die Bestimmung der Zahl der Zerstreuungen mit Wiederholungen unter den nämlichen Bedingungen, wie vorhin:

$$132)\quad Z'[q;\ a_1,\ a_2 \ldots a_n;\ b_1,\ b_2 \ldots b_m]^{r,\ q-r} = \frac{n^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{m^{q-r|1}}{1^{q-r|1}}$$

Für die Bestimmung der Zahl der Zerstreuungen mit Versetzungen und Wiederholungen unter den genannten Bedingungen:

$$133)\quad ZP'[q;\ a_1,\ a_2 \ldots a_n;\ b_1,\ b_2 \ldots b_m]^{r,\ q-r} = n^{r} \cdot \frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot m^{q-r}$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht weiter verfolgen, wenn Elemente von mehreren Reihen die Ergänzungen in den leeren Fächern bilden.

VIII. Stellen-Elemente bei Versetzungen.

Stellen-Elemente bei Versetzungen, die durch die Elemente einer Reihe erzeugt werden.

§. 43.

Nimmt man bei den Elementen einer Reihe:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n$$

auf die Ordnung, worin die Elemente erscheinen, Rücksicht, so nimmt das Element a_1 die erste, a_2 die zweite, a_3 die dritte Stelle u. s. f. ein, wie diefs durch die unten angeschriebene Stellenzahl angedeutet wird.

Werden nun die Versetzungen zu irgend einer Classe aus der vorstehenden Reihe gebildet, so werden die einzelnen Elemente alle möglichen Stellen unter einander einnehmen, und jedes wird bald auf der ersten, bald auf der zweiten, bald auf der dritten u. s. w. erscheinen. Nennt man nun diejenige Stelle, die einem Elemente nach Angabe seiner Stellenzahl angewiesen ist, die ihm zugehörige Stelle, es selbst aber, wenn es diese Stelle einnimmt, Stellen-Element, so knüpft sich hieran die Frage: wie oft nimmt jedes Element die ihm zugehörige Stelle ein? Wir drücken sie auch so aus: Wie grofs ist die Zahl der Stellen-Elemente bei irgend einer Versetzungsclasse?

Um die Stellen-Elemente anzudeuten, wählen wir das Zeichen *St*, dem wir die Elemente in Klammern rechts neben anschreiben, und oben rechts an die Klammer die Versetzungsclasse setzen.

Um die vorgelegte Frage zu beantworten, gehen wir von den Gruppen, die durch eine Elementen-Reihe erzeugt werden, aus, und theilen die Darstellung der Stellen-Elemente zur dritten und vierten Classe aus vier Elementen mit, um an ihnen das allgemeine Gesetz zu erforschen. Es ist:

$$St(a_1, a_2, a_3, a_4)^3 = \begin{array}{llll} A_1 A_2 A_3 + & A_1 A_2 a_4 + & A_1 a_3 a_4 + & a_3 A_2 a_4 \\ a_2 a_1 A_3 & A_1 a_4 a_2 & A_1 a_4 A_3 & a_2 a_4 A_3 \\ A_1 a_3 a_2 & a_4 A_2 a_1 & a_4 a_1 A_3 & a_4 A_2 A_3 \\ a_3 A_2 a_1 & & & \end{array}$$

Die Zahl der Gruppen, welche Stellenelemente enthalten, ist hiernach 13, während die Zahl aller Gruppen zur dritten Classe aus vier Elementen 24 beträgt. Das Element a_4 kann nicht als Stellenelement erscheinen.

Die Gruppen zur vierten Classe, welche Stellenelemente enthalten, sind:

$$St(a_1, a_2, a_3, a_4)^4 = \begin{array}{lll} A_1 A_2 A_3 A_4 + & a_3 A_2 a_1 A_4 + & A_1 a_4 A_3 a_2 \\ a_2 a_1 A_3 A_4 & A_1 A_2 a_4 a_3 & a_4 a_1 A_3 a_2 \\ A_1 a_3 a_2 A_4 & A_1 a_4 a_2 a_3 & a_3 A_2 a_4 a_1 \\ a_3 a_1 a_2 A_4 & a_4 A_2 a_1 a_3 & a_4 A_2 A_3 a_1 \\ a_2 a_3 a_1 A_4 & A_1 a_3 a_4 a_2 & a_2 a_4 A_3 a_1 \end{array}$$

Ihre Zahl ist 15, während die aller Gruppen der Versetzungen aus vier Elementen zur vierten Classe 24 ist.

Bei den Versetzungen zur dritten Classe können nur die drei ersten Elemente als Stellenelemente erscheinen, und zwar jedes, als einzelnes Element betrachtet, so oft, als es mit den Versetzungen zur zweiten Classe aus den übrigen (also drei) Elementen in Verbindung treten kann. Die Anzahl, welche hiedurch gewonnen wird, ist $3 \times 3 . 2$. Von dieser Anzahl müssen diejenigen Fälle ausgeschlossen werden, worin zwei Elemente zugleich auf ihrer Stelle erscheinen. Diefs geschieht bei den Gruppen $a_1 a_2$; $a_1 a_3$; $a_2 a_3$ an verschiedenen Orten, und zwar so oft, als sich drei Elemente zu zweien verbinden und dann mit den übrigen (also zwei) Elementen, welche Versetzungen zur ersten Classe bilden, zusammentreten können. Hiernach ist die auszuschliefsende Anzahl $\frac{3 . 2}{1 . 2} . 2$

Durch dieses Ausschliefsen sind zugleich diejenigen Gruppen ausgeschlossen worden, worin sich drei Elemente zu dreien verbinden können. Diefs geschieht bei der Gruppe $a_1 a_2 a_3$. Die hiedurch erzeugte Anzahl $\frac{3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3}$ mufs sofort wieder zugezählt werden. Hiernach ist die Zahl der Stellenelemente der Versetzungen aus vier Elementen zur dritten Classe:

$$St[a_1, a_2, a_3, a_4]^3 = \frac{3}{1} . 3 . 2 - \frac{3 . 2}{1 . 2} . 2 + \frac{3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3} = 13$$

Aehnliche Schlüsse werden die Bestimmung der Gruppen der vierten Versetzungsclasse begründen, welche Stellenelemente führen.

Jedes Element, als einzelnes betrachtet, wird so oft auf seiner Stelle erscheinen, als die übrigen drei Versetzungen zur dritten Classe eingehen können. Die Anzahl dieser Fälle ist:

$$4 \times 3 . 2 . 1$$

Von dieser Anzahl müssen die Fälle ausgeschlossen werden, wo Stellenelemente zu zweien erscheinen (in den Gruppen $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_1 a_4$, $a_2 a_3$, $a_2 a_4$, $a_3 a_4$) und mit den übrigen zwei Elementen, welche Versetzungen bilden, in Verbindung treten. Ihre Zahl ist:

$$\frac{4 . 3}{1 . 2} . 2 . 1$$

Hievon müssen diejenigen Fälle ausgeschlossen werden, wo Stellenelemente zu dreien erscheinen (in den Gruppen $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_2 a_4$, $a_1 a_3 a_4$, $a_2 a_3 a_4$) und mit dem übrigen oder dem ergänzenden Elemente in Verbindung treten. Diese Zahl ist:

$$\frac{4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3} . 1$$

Hievon endlich mufs diejenige Anzahl von Gruppen ausgeschlossen werden, die durch das Zusammentreten von vier Elementen zu vieren entsteht, diefs ist die Gruppe $a_1 a_2 a_3 a_4$, und die entsprechende Anzahl ist:

$$\frac{4 . 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 . 4}$$

Die richtige Verbindung der gefundenen Ausdrücke führt zu folgender Bestimmung:

$$St[a_1, a_2, a_3, a_4]^4 = \frac{4}{1} . 3.2.1 - \frac{4.3}{1.2} .2.1 + \frac{4.3.2}{1.2.3} .1 - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 15$$

Die gemachten Schlüsse lassen sich leicht auf jeden andern Fall übertragen und sind allgemein. Hiernach ist die Anzahl der Gruppen, welche bei den Versetzungen aus n Elementen zur q^{ten} Classe Stellenelemente führen, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$134)\; St[a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^q = \frac{q}{1}(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$$
$$- \frac{q(q-1)}{1 . 2}(n-2)(n-3)\ldots(n-q+1)$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)}{1 . 2 . 3}(n-3)(n-4)\ldots(n-q+1)$$
$$- \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1 . 2 . 3 . 4}(n-4)(n-5)\ldots(n-q+1)$$
$$\vdots$$

Die Reihe hat q Glieder. Sie bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Sie beantwortet die Frage: Wie grofs ist die Anzahl der Gruppen bei den Versetzungen aus n Elementen zur q^{ten} Classe, welche Stellen-Elemente überhaupt führen; und somit auch folgende: Wie grofs ist die Anzahl der Gruppen bei den Versetzungen aus n Elementen zur q^{ten} Classe, worin wenigstens ein Element auf seiner Stelle steht.

Ist Elementenanzahl und Versetzungsclasse gleich, so ziehen wir aus der vorstehenden Gleichung folgende speciellere:

$$135)\ St[a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^n = n^{n|-1} - \frac{n^{n|-1}}{1^{2|1}} + \frac{n^{n|-1}}{1^{3|1}} - \ldots (-)^{n-1} \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}$$

$$= n^{n|-1}\left[1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots (-)^{n-1} \frac{1}{1.2\ldots n}\right]$$

Bedeutet n eine sehr grofse oder gar unendlich grofse Anzahl, so wird auch die Gliederzahl der in den Klammern eingeschlossenen Reihe sehr grofs oder gar unendlich grofs. Führt man in diesem Falle die in §. 29, p. 66, gegebene Darstellung ein, so gewinnt man hieraus folgende sehr kurze Darstellung (§. 115 meiner Algebra, Nro. 13, pag. 211:

$$136)\ St[a_1, a_2, a_3 \ldots]^n = \frac{1^{n|1}(e-1)}{e}$$

oder mit Berücksichtigung der abgekürzten Formeln für sehr grofse Fakultäten, §. 47:

$$137)\ St[a_1, a_2, a_3 \ldots]^n = \frac{n^n(e-1)\sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}$$

§. 44.

Da die Gleichungen des vorigen §. die Frage beantworten: wie grofs die Anzahl derjenigen Gruppen ist, worin bei Versetzungen aus n Elementen zur q^{ten} Classe überhaupt ein Stellenelement erscheint, so ist auch damit die Frage beantwortet: wie grofs ist bei diesen Versetzungen die Anzahl der Gruppen, worin kein Stellenelement erscheint. Beide Anzahlen schliefsen einander aus und man hat daher, um letztere zu finden, die Zahl der ersteren von der Gesammtanzahl der Gruppen, welche die Versetzungen aus n Elementen zur q^{ten} Classe bilden, abzuziehen. Wir deuten diefs durch eine 0 an, welche wir in die Klammer setzen. Es ist daher die Zahl der Gruppen, welche keine Stellenzahlen führen, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$138)\ St[0; a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^q = n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$$
$$-\frac{q}{1}(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$$
$$+\frac{q(q-1)}{1.2}(n-2)(n-3)\ldots(n-q+1)$$
$$-\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}(n-3)(n-4)\ldots(n-q+1)$$
$$\vdots$$

Die Gleichung bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Sie hat $(q+1)$ Glieder.

Ist die Versetzungsclasse so grofs, als die Elementen-Anzahl, so ergibt sich aus 138 folgende speciellere Gleichung:

$$139)\ St[0; a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^n = n^{n|-1} - \frac{n^{n|-1}}{1} + \frac{n^{n|-1}}{1^{2|1}} - \frac{n^{n|-1}}{1^{3|1}} \ldots (-)^n \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}$$

Ist die Zahl der Elemente eine sehr grofse oder gar unendlich grofse Zahl, so kann man auch die in §. 43 angegebenen Abkürzungen anwenden und man hat:

$$140)\ St[0; a_1, a_2 \ldots]^n = 1^{n|1} . e^{-1}$$

oder in Rücksicht auf §. 47:

$$141)\ St[0; a_1, a_2 \ldots]^n = \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^{n+1}}$$

Nach der Beantwortung der vorstehenden Fragen wollen wir nun folgende beantworten: Wie grofs ist die Anzahl der Gruppen bei den Versetzungen aus n Elementen zur q^{ten} Classe, worin gerade r Elemente, nicht mehr, nicht weniger, auf der ihnen zugehörigen Stelle erscheinen?

Die Beantwortung dieser Frage ist dadurch bedingt, dafs gerade r Elemente auf ihrer Stelle erscheinen müssen, welche aus n Elementen ausgeschieden werden und von der Gesammtzahl der q Stellen immer r Stellen besetzen, woraus sich

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-r+1)}{1.2.3\ldots r}$$

Fälle ergeben, und dafs ferner jede von diesen Gruppen so beschaffen sey, dafs die übrigen $(n-r)$ Stellen von keinem Stellen-Elemente nach der Gleichung 138 besetzt sind. Die Anzahl der Gruppen, worin dieses eintritt, bestimmt sich, wenn in 138 $n-r$ statt n, $q-r$ statt q gesetzt wird. Hiernach ist die Anzahl der Gruppen bei den Versetzungen aus n Elementen zur q^{ten} Classe, worin gerade r Elemente auf ihrer Stelle erscheinen:

$$142)\ St[r;\, a_1,\, a_2,\, a_3 \ldots a_n]^q =$$

$$= \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r}(n-r)(n-r+1)\ldots(n-q+1)$$

$$-\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r}\cdot\frac{q-r}{1}(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-q+1)$$

$$+\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r}\cdot\frac{(q-r)(q-r-1)}{1.2}(n-r-2)(n-r-3)\ldots(n-q+1)$$

$$-\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r}\cdot\frac{(q-r)(q-r-1)(q-r-2)}{1.2.3}(n-r-3)(n-r-4)\ldots(n-q+1)$$

$$\vdots$$

Diese Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Wird die Versetzungsclasse so grofs, als die Elementenanzahl, so vereinfacht sich die Reihe und man erhält für die Gruppenanzahl der Versetzungen aus n Elementen zur n^{ten} Classe, worin gerade r Stellenelemente erscheinen:

$$143)\ St[r;\, a_1, a_2 \ldots a_n]^n = \frac{n^{n|-1}}{1^{r|1}}\left[1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\ldots(-)^{n-r}\frac{1}{1.2\ldots(n-r)}\right]$$

und hieraus, wenn n eine sehr grofse, und $(n-r)$ eine nicht unbedeutende Zahl bedeutet:

$$144)\ St[r;\, a_1,\, a_2,\, a_3 \ldots]^n = \frac{1^{n|1}}{1^{r|1}\,.\,e} = \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{1^{r|1}\,e^{n+1}}$$

Es läfst sich endlich durch Vereinigung der entsprechenden Gleichungen auch die Frage beantworten: wie grofs die Gruppenanzahl bei Versetzungen aus n Elementen zur q^{ten} Classe ist, worin wenigstens oder höchstens r Elemente auf ihrer Stelle erscheinen? Da uns aber die Beantwortung der Frage zu weit führen würde, so behalten wir sie für ein andermal auf.

Stellenelemente bei Versetzungen, die durch Elemente mehrerer Reihen erzeugt werden.

§. 45.

In den beiden vorhergehenden §. haben wir die Stellenelemente bei Versetzungen der Elemente einer Reihe untersucht. Wir nehmen nun dieselbe Elementenzahl aus verschiedenen Elementenreihen in die Rechnung auf, von denen jede einzelne durch ihre Elemente der Aufgabe genügen kann, und fragen: Wie grofs ist in diesem Falle die Anzahl der Gruppen, welche wenigstens ein Stellenelement führen?

Zuerst beantworten wir die Vorfrage: Wie grofs ist die Anzahl der Gruppen bei Versetzungen, die aus p verschiedenen Elementenreihen gebildet werden, worin r Stellenelemente erscheinen?

Wir wählen, um die vorgelegte Frage zu beantworten, die Betrachtung der besonderen Fälle: wornach aus je vier Elementen zweier Elementenreihen a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4 die Gruppen aus je einem, je zwei, je drei Stellenelementen gebildet werden. Bei dieser Bildungsweise kommen die ähnlichen Elemente aus den beiden Elementenreihen in Betracht; denn es ist einerlei, ob ein Element aus der ersten oder zweiten Reihe auf seiner Stelle erscheint, wenn es sich darum handelt, dafs es auf seiner Stelle erscheint.

Die Gruppen der Versetzungen zur ersten Classe, welche Stellenelemente führen, sind:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array}$$

Ihre Zahl ist 2. Die Gruppen der Versetzungen zur zweiten Classe, welche je zwei Stellenelemente führen, sind:

$$\begin{array}{c} a_1\,a_2 \\ a_1\,b_2 \\ b_1\,a_2 \\ b_1\,b_2 \end{array}$$

Sie werden durch das Wechseln der ähnlichen Elemente erzeugt, während die Stellenzahlen selbst ruhig bleiben. Bezeichnet man jedes von den Elementen der ersten Reihe ohne Unterschied durch 1; jedes aus der zweiten ohne Unterschied durch 2; so läfst sich ihre Gruppenanzahl so darstellen:

$$\begin{array}{lll} a_1\,a_2 = & 1\,1 & = 2^2 \\ a_1\,b_2 & 1\,2 & \\ b_1\,a_2 & 2\,1 & \\ b_1\,b_2 & 2\,2 & \end{array}$$

woraus man erkennt, dafs a und b allmählig alle Stellen mit Wiederholungen unter einander durchlaufen. Diese Bildungsweise haben wir schon §. 10 kennen gelernt. Es sind die Versetzungen mit Wiederholungen aus zwei Elementen zur zweiten Classe.

Die Gruppen der Versetzungen aus beiden Elementenreihen zur dritten Classe, welche je drei Stellenelemente führen, sind:

$$
\begin{array}{ll}
a_1\,a_2\,a_3 = & 1\,1\,1 = 2^3 \\
a_1\,a_2\,b_3 & 1\,1\,2 \\
a_1\,b_2\,a_3 & 1\,2\,1 \\
a_1\,b_2\,b_3 & 1\,2\,2 \\
b_1\,a_2\,a_3 & 2\,1\,1 \\
b_1\,a_2\,b_3 & 2\,1\,2 \\
b_1\,b_2\,a_3 & 2\,2\,1 \\
b_1\,b_2\,b_3 & 2\,2\,2
\end{array}
$$

und man erkennt, dafs die Anzahl dieser Gruppen mit derjenigen von den Versetzungen mit Wiederholungen zur dritten Classe aus zwei Elementen übereinstimmt. Führt man diese Untersuchung weiter, so erhält man das Resultat: dafs die Anzahl der Gruppen bei Versetzungen, die aus mehreren Elementenreihen erzeugt werden, und worin die Stellenelemente durch das Wechseln ähnlicher Elemente bedingt sind, mit den Versetzungen mit Wiederholungen aus so viel Elementen übereinstimmt, als verschiedene Elementenreihen vorhanden sind und zur so vielten Classe, als Stellenelemente vorkommen.

Werden nun die Versetzungen aus p Elementenreihen zur q^{ten} Classe gebildet, so ist die Anzahl der Gruppen, worin gerade x bestimmte Elemente auf ihrer Stelle erscheinen, durch den Ausdruck

$$145)\quad p^x$$

bestimmt.

Wir wenden uns nun zur Beantwortung der oben vorgelegten Frage, und gehen dabei von dem speciellen Falle, wenn die Zahl der Gruppen der Versetzungen aus den zwei Elementenreihen: $a_1, a_2, a_3, a_4;\ b_1, b_2, b_3, b_4$ zur dritten Classe, worin Stellenelemente erscheinen, bestimmt werden soll.

In diesen Gruppen wird jedes der drei ersten Elemente jeder Reihe einzeln so vielmal auf seiner Stelle erscheinen, als es sich an die Versetzungen, die aus den übrigen 7 Elementen zur zweiten Classe gebildet werden können, anreihen läfst. Hiedurch entstehen

$$\frac{3}{1}.2.7.6$$

Gruppen. Von dieser Anzahl müssen alle die ausgeschieden werden, worin zugleich zwei Elemente auf ihrer Stelle vorkommen. Wären es Elemente von einer Reihe, so würden, nach §. 43, je zwei von ihnen nicht mehr als $\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}$ mal vorkommen und sich mit den Versetzungen aus den übrigen 6 Elementen verbinden, wodurch die auszuscheidende Anzahl $\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\,.\,6$ würde. Nun sind es aber Elemente von zwei Reihen, defswegen wird jede Gruppe so vielmal mehr erscheinen, als ähnliche Stellenelemente den Forderungen der Aufgabe entsprechen. Diese sind nach Nro. 145 $= 2^2$. Daher ergibt sich die hiedurch auszuscheidende Anzahl:

$$\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\,.\,2^2\,.\,6$$

Durch dieses Ausscheiden sind zugleich alle Gruppen ausgeschieden worden, worin die Stellenelemente zu je dreien erscheinen. Defswegen müssen auch diese hievon wieder gesondert werden. Wären die Elemente von einer Reihe, so wäre die auszusondernde Anzahl $\frac{3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3}$. Da aber das Wechseln der ähnlichen Elemente dabei in Betracht kommt, so müssen in Rücksicht auf 145

$$\frac{3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,2^3$$

Gruppen ausgesondert werden. Diese Schlüsse führen zu folgender Anzahl:

$$St\,[a_1, a_2, a_3, a_4;\ b_1, b_2, b_3, b_4]^3 = \frac{3}{1}\,.\,2^1.7.6 - \frac{3.2}{1.2}\,.\,2^2.6 + \frac{3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,2^3$$

Die hier vorgelegten Schlüsse tragen sich leicht auf jeden anderen Fall über, und sind daher allgemein. Die Anzahl der Gruppen mit Stellenelementen bei den Versetzungen aus p Reihen von gleicher Elementenanzahl zur q^{ten} Classe ist:

146) $St\,[a_1, a_2 \ldots a_n;\ b_1, b_2 \ldots b_n;\ c_1, c_2 \ldots c_n;\ \ldots\ p_1, p_2, p_3 \ldots p_n]^q =$

$$= \frac{q}{1}\,.\,p^1\,.\,(pn-1)(pn-2)\ldots(pn-q+1)$$

$$-\frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\,.\,p^2(pn-2)(pn-3)\ldots(pn-q+1)$$

$$+\frac{q(q-1)(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,p^3(pn-3)(pn-4)\ldots(pn-q+1)$$

$$-\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,p^4(pn-4)(pn-5)\ldots(pn-q+1)$$

$$\vdots$$

oder bei anderer Darstellung:

$$147)\ St[a_1, a_2 \ldots a_n; b_1, b_2 \ldots b_n; c_1, c_2 \ldots c_n; \ldots p_1, p_2 \ldots p_n]^q =$$

$$= \frac{q^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot p^1 . (pn-1)^{q-1|-1} - \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot p^2 (pn-2)^{q-2|-1} + \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot p^3 (pn-3)^{q-3|-1} - \ldots$$

$$\ldots (-)^{q-1} \frac{1^{q|1}}{1^{q|1}} \cdot p^q$$

Die Reihe hat q Glieder und bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Es ist leicht einzusehen, dafs die Zahl der Elemente, welche jede Reihe führt, gleich grofs seyn mufs.

Ist $q = n$ oder die Versetzungsclasse so grofs, als die Anzahl der einer Reihe zugehörigen Elemente, so geht die Gleichung 146 in folgende über:

$$148)\ St[a_1, a_2 \ldots a_n; b_1, b_2 \ldots b_n; c_1, c_2 \ldots c_n; \ldots p_1, p_2 \ldots p_n]^n =$$

$$= \frac{n}{1} \cdot p(pn-1)(pn-2)(pn-3) \ldots ((p-1)n+1)$$

$$- \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot p^2 (pn-2)(pn-3)(pn-4) \ldots ((p-1)n+1)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^3 (pn-3)(pn-4)(pn-5) \ldots ((p-1)n+1)$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} p^4 (pn-4)(pn-5)(pn-6) \ldots ((p-1)n+1)$$

$$\vdots$$

$$(-)^{n-1} \left(\frac{1}{1}\right)^{n|1} p^n$$

§. 46.

Die Gleichungen des vorigen §. beantworten die Frage: wie grofs die Anzahl der Gruppen ist, welche wenigstens ein Stellen-Element führen. Dadurch ist auch die Frage beantwortet: wie grofs die Anzahl derjenigen Gruppen ist, welche kein Stellenelement führen; denn diefs sind alle übrigen, und man hat daher die so eben gefundene Anzahl von derjenigen abzuziehen, welche der Gesammtzahl aller Versetzungsgruppen entspricht. Hiernach ist die Zahl aller Gruppen der q^{ten} Versetzungsclasse aus p Elementenreihen, wovon jede n Elemente hat, welche keine Stellenelemente führen:

$$149)\ St[0;\ a_1, a_2 \ldots a_n;\ b_1, b_2 \ldots b_n; \ldots p_1, p_2 \ldots p_n]^q =$$

$$= pn(pn-1)(pn-2)\ldots(pn-q+1)$$

$$- q \cdot p^1(pn-1)(pn-2)(pn-3)\ldots(pn-q+1)$$

$$+ \frac{q(q-1)}{1.2} \cdot p^2(pn-2)(pn-3)(pn-4)\ldots(pn-q+1)$$

$$- \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} p^3(pn-3)(pn-4)(pn-5)\ldots(pn-q+1)$$

$$\vdots$$

$$(-)^q \left(\frac{1}{1}\right)^{q|1} \cdot p^q$$

Ist die Elementenzahl jeder einzelnen Reihe dem Classenexponenten gleich, so geht 149 in folgende Gleichung über:

$$150)\ St[0;\ a_1, a_2 \ldots a_n;\ b_1, b_2 \ldots b_n; \ldots p_1, p_2 \ldots p_n]^n =$$

$$= (pn)^{n|-1} - \frac{n}{1} p^1(pn-1)^{n-1|-1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot p^2(pn-2)^{n-2|-1} - \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} p^3(pn-3)^{n-3|-1}$$

$$\ldots (-)^n \left(\frac{1}{1}\right)^{n|1} \cdot p^n$$

Hieran schliefst sich die Beantwortung folgender Frage: wie grofs ist die Anzahl aller Gruppen der Versetzungen zur q^{ten} Classe aus p verschiedenen Elementenreihen von gleicher Elementenzahl, worin gerade r Stellenelemente erscheinen?

Die Anzahl dieser Gruppen wird dadurch gefunden, dafs man bestimmt: wie oft r Elemente aus n Elementen auf q Stellen erscheinen, und wie oft in diesen das Wechseln ähnlicher Elemente aus p Elementenreihen eintreten kann? Die Berücksichtigung von dem zu Nro. 142, §. 44 Gesagten führt in Verbindung mit Nro. 145 zu folgendem Ausdrucke:

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-r+1)}{1.2.3\ldots r} \cdot p^r$$

Die hiedurch bestimmte Gruppenanzahl tritt nun mit den Versetzungen aus den übrigen $(pn-r)$ Elementen zur $(q-r)^{ten}$ Classe in Verbindungen, welche keine Stellenelemente führen. Werden nun hiernach in 149 die erforderlichen Werthe, nämlich $pn-r$ statt pn und $q-r$ statt q gesetzt, so hat man zur Bestimmung der fraglichen Anzahl folgende Gleichung:

151) $St[r;\, a_1, a_2 \ldots a_n;\, b_1, b_2 \ldots b_n;\, \ldots p_1, p_2 \ldots p_n]^q =$

$$= \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r} \cdot p^r (pn-r)(pn-r-1)\ldots(pn-q+1)$$

$$- \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r} \cdot \frac{q-r}{1} \cdot p^{r+1}(pn-r-1)(pn-r-2)\ldots(pn-q+1)$$

$$+ \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r} \cdot \frac{(q-r)(q-r-1)}{1.2} \cdot p^{r+2}(pn-r-2)(pn-r-3)\ldots(pn-q+1)$$

$$- \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r} \cdot \frac{(q-r)(q-r-1)(q-r-2)}{1.2.3} p^{r+3}(pn-r-3)(pn-r-4)\ldots(pn-q+1)$$

$$\vdots$$

$$(-)^{q-r} \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^{q-r|1} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r} p^q$$

$$= \frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot p^r \Big[(pn-r)^{q-r|-1} - \frac{q-r}{1} \cdot p^1 (pn-r-1)^{q-r-1|-1} +$$

$$+ \frac{(q-r)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot p^2 (pn-r-2)^{q-r-2|-1} \ldots (-)^{q-r} \left(\frac{1}{1}\right)^{q-r|1} \cdot p^{q-r} \Big]$$

Wird die Versetzungsclasse der Zahl der Elemente jeder einzelnen Reihe gleich, so gewinnt man hieraus zur Bestimmung der Gruppenanzahl folgende Gleichung:

152) $St[r;\, a_1, a_2 \ldots a_n;\, b_1, b_2 \ldots b_n;\, \ldots\, p_1, p_2 \ldots p_n]^n =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} p^r (pn-r)(pn-r-1)\ldots((p-1)n+1)$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2\ldots r.1} p^{r+1}(pn-r-1)(pn-r-2)\ldots((p-1)n+1)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r-1)}{1.2.3\ldots r.1.2} p^{r+2}(pn-r-2)(pn-r-3)\ldots((p-1)n+1)$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r-2)}{1.2.3\ldots r.1.2.3} p^{r+3}(pn-r-3)(pn-r-4)\ldots((p-1)n+1)$$

$$\vdots$$

$$(-)^n \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} \cdot p^n \quad .$$

Auch hier läfst sich noch die Frage beantworten: wie grofs die Gruppenanzahl bei diesen Versetzungen ist, worin höchstens, oder wenigstens r Stellenelemente erscheinen. Doch wir übergehen ihre Beantwortung, da sie uns zu weit führen würde, und bemerken noch, dafs die Gleichungen der §§ 45 und 46 allgemeiner sind, als die der §§ 43 und 44, und dafs sich die der beiden letzten §§ aus denen der §§ 44 und 45 ableiten lassen, wenn p = 1 gesetzt wird.

IX. Von den Näherungswerthen sehr grosser Fakultäten.

§. 47.

Da die Bestimmung der Gruppenanzahl der Combinationen auf Fakultäten von sehr grofsen Zahlen führen kann, deren Werth zu kennen oft nöthig ist, und die Werthbestimmung in diesem Falle sehr mühsam und weitläufig wird, so möchte es von Wichtigkeit seyn, solche Darstellungen aufzufinden, die den gesuchten Werth ganz genau, oder wenigstens sehr genau, auf kurze Weise geben.

Diefs machen solche Fälle um so wünschenswerther, bei denen es nicht darauf ankommt, vollkommen genaue Resultate zu erhalten, sondern hauptsächlich darauf, das Verhalten und die Eigenschaften der Fakultäten von sehr grofsen und vielen Factoren unter einander leicht überblicken zu können.

Um eine Methode zu finden, setzen wir in der bekannten Darstellung des m^{ten} Unterschiedes von x^p, die wir aus §. 127, p. 216 unseres Differenzial-Calculs entlehnen:

$$\triangle^m x^p = (x+m\triangle x)^p - \frac{m}{1}(x+(m-1)\triangle x)^p + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(x+(m-2)\triangle x)^p - \dots$$

$x = 0$, $m = z$, $p = z$ und $\triangle x = 1$; scheiden dann nach Vorschrift der oben p. 65, §. 29, angegebenen Gleichung 90 den allen gemeinschaftlichen Factor aus, und erhalten:

$$\triangle 0^z = z^z \left[1 - z\left(\frac{z-1}{z}\right)^z + \frac{z(z-1)}{1.2}\left(\frac{z-2}{z}\right)^z - \dots\right]$$

Berücksichtigt man nun, dafs der Werth dieser Gleichung keineswegs eingebildet, sondern nach Nro. 476, p. 234 meines Differenzialcalculs der Fakultät $1^{z|1}$ gleichkommt, so hat man hiernach:

153) $\triangle^z 0^z = 1.2.3 \ldots z = z^z \left[1 - z\left(\frac{z-1}{z}\right)^z + \frac{z(z-1)}{1.2}\left(\frac{z-2}{z}\right)^z - \ldots\right]$

Ist nun z eine sehr grofse Zahl, so convergiren die Werthe in der Reihe um so schneller, je weiter sie von dem ersten Gliede entfernt liegen, und defswegen werden schon einige Anfangsglieder hinreichen, um den Werth der Reihe ziemlich genau zu bestimmen. Bedient man sich dabei, wie schon früher §. 29 angegeben wurde, der Logarithmen, so hat man sie auf folgende Art zu benützen:

$$lg\, z\left(\frac{z-1}{z}\right)^z = lg\, z - z[lg\, z - lg\,(z-1)]$$

$$lg\, \frac{z(z-1)}{1.2}\left(\frac{z-2}{z}\right) = lg\, \frac{z(z-1)}{1.2} - z[lg\, z - lg\,(z-2)]$$

u. s. f.; dann die Zahlen zu bestimmen und nach Angabe der Gleichung zu- und abzuzählen.

Ziemlich erschöpfend wird sich der Werth der genannten Fakultät bei sehr hohem z durch folgende Gleichung bestimmen:

154) $1.2.3 \ldots z = z^z \left[1 - \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{z}{2}+1}\right]^z = z^z \left(\frac{z^{\frac{z}{2}+1} - (z-1)^{\frac{z}{2}+1}}{z^{\frac{z}{2}+1}}\right)^z$

$$= \frac{\left(z^{\frac{z}{2}+1} - (z-1)^{\frac{z}{2}+1}\right)^z}{z^{\frac{z^2}{2}}}$$

Sie ist aus der Gleichung 153, wie man leicht erkennt, abgeleitet, und bestätigt bei genauerer Untersuchung ihre Brauchbarkeit. Zu berücksichtigen ist, dafs der Exponent von $\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{z}{2}+1}$, wenn z eine ungerade Zahl ist, so bestimmt werden mufs, als wenn z die nächst höhere gerade Zahl wäre.

Diese Gleichung haben wir zuerst in der Lehre von den aufsteigenden Functionen (Berlin bei Reimer 1836), §. 48, mitgetheilt und dort ihre Brauchbarkeit gezeigt.

Eine andere Methode, die Fakultäten sehr grofser Zahlen auf kurze Weise darzustellen, bieten die Logarithmen. Es ist nämlich:

$lg\, z.(z+1).(z+2)\ldots(z+m) = lg\, z + lg\,(z+1) + lg\,(z+2) \ldots + lg\,(z+m)$

Nun ist bekanntlich (s. §. 114 meiner Algebra):

155) $lg\,(z+u) = lg\, z + \frac{u}{z} - \frac{u^2}{2z^2} + \frac{u^3}{3z^3} - \frac{u^4}{4z^4} + \ldots.$

Hieraus zieht man durch Einführung der erforderlichen Werthe 1, 2, 3 ... m statt u folgende Zusammenstellung:

$$\begin{array}{lllllll}
lg\,z & = lg\,z & & & & & \\
lg(z+1) & = lg\,z & + \frac{1}{z} & - \frac{1}{2z^2} & + \frac{1}{3z^3} & - \ldots \\
lg(z+2) & = lg\,z & +2\frac{1}{z} & -2^2\frac{1}{2z^2} & +2^3\frac{1}{3z^3} & - \ldots \\
lg(z+3) & = lg\,z & +3\frac{1}{z} & -3^2\frac{1}{2z^2} & +3^3\frac{1}{3z^3} & - \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
lg(z+m) & = lg\,z & +m\frac{1}{z} & -m^2\frac{1}{2z^2} & +m^3\frac{1}{3z^3} & - \ldots
\end{array}$$

Die Vereinigung der Vertikalreihen gibt:

$$\begin{aligned}
lg[z(z+1)(z+2)\ldots(z+m)] = & \,(m+1)\,lg\,z \\
& +(1+2+3+\ldots+m)\frac{1}{z} \\
& -(1+2^2+3^2+\ldots+m^2)\frac{1}{2z^2} \\
& +(1+2^3+3^3+\ldots+m^3)\frac{1}{3z^3} \\
& \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wird unendlich. Die Summenreihe der Potenzen der natürlichen Zahlenreihen sind die Vorzahlen der ordnenden Gröfse $\frac{1}{z}$. Bezeichnet man die Summenreihen kurz durch das Zeichen

$$S\,m^p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + m^p$$

und berücksichtigt, dafs:

$$\frac{m^\infty}{z^\infty} = \left(\frac{m}{z}\right)^\infty$$

verschwindend klein wird, wenn nur m kleiner als z, also $\frac{m}{z}$ ein ächter Bruch ist, so convergiren die Werthe der vorstehenden Reihe um so mehr, je kleiner m im Verhältnisse zu z wird. Hieraus ergibt sich also für Fakultäten von nicht sehr grofsen

Dimensionen, aber bei sehr grofsen Factoren, folgende zweckmäfsige Darstellung:

$$156)\ lg[z(z+1)(z+2)\ldots(z+m)] =$$
$$= (m+1)\,lg\,z + \frac{m(m+1)}{1.2.z} - \frac{Sm^2}{2z^2} + \frac{Sm^3}{3z^3} - \ldots$$

oder:

$$157)\ z(z+1)(z+2)\ldots(z+m) = z^{m+1}.\,e^{\frac{m(m+1)}{1.2.z} - \frac{Sm^2}{2z^2} + \frac{Sm^3}{3z^3} - \ldots}$$

Legt man die abnehmende Fakultät:

$$lg[z.(z-1).(z-2)\ldots(z-m) = lg\,z + lg(z-1) + lg(z-2)\ldots + lg(z-m)$$

zu Grunde und führt, wie vorhin in die Gleichung 155, die entsprechenden Werthe ein, so gewinnt man eine Darstellung, worin die Horizontalreihen lauter negative Zeichen, mit Ausnahme des ersten, tragen, und dann hat man, mit Rücksicht auf die oben gemachten Bemerkungen:

$$158)\ lg[z(z-1)(z-2)\ldots(z-m)] =$$
$$= (m+1)\,lg\,z - \frac{m(m+1)}{1.2.z} - \frac{Sm^2}{2z^2} - \frac{Sm^3}{3z^3} - \ldots$$

oder:

$$159)\ z.(z-1)(z-2)\ldots.(z-m) = z^{m+1}.\,e^{-\frac{m(m+1)}{1.2.z} - \frac{Sm^2}{2z^2} - \frac{Sm^3}{3z^3} - \ldots}$$

Vereinigt man die Reihen 156 und 158 und theilt die Fakultät durch z, oder zieht in der Darstellung durch Logarithmen $lg\,z$, der zweimal vorkommen würde, auf beiden Seiten ab, so fliefst hieraus folgende Gleichung:

$$160)\ lg[(z-m)(z-m+1)(z-m+2)\ldots(z-1).z.(z+1)(z+2)\ldots(z+m)] =$$
$$= (2m+1)\,lg\,z - \frac{Sm^2}{z^2} - \frac{Sm^4}{2z^4} - \frac{Sm^6}{3z^6} - \ldots$$

oder:

$$161)\ (z-m)^{2m+1|1} = z^{2m+1}.\,e^{-\frac{Sm^2}{z^2} - \frac{Sm^4}{2z^4} - \frac{Sm^6}{3z^6} - \ldots}$$
$$= \frac{z^{2m+1}}{e^{\frac{Sm^2}{z^2} + \frac{Sm^4}{2z^4} + \frac{Sm^6}{3z^6} + \ldots}}$$

Die vorstehenden Gleichungen sind dann vorzüglich brauchbar, wenn z im Verhältnisse zu m eine grofse Zahl ist, also für Fakultäten von grofsen Factoren, aber nicht sehr grofsen Dimensionen. Ist z um vieles gröfser als m, so kann man schon das dritte, um so eher aber das vierte Glied der Reihe vernachlässigen.

Die Gleichungen gelten von Fakultäten, deren Factorenanzahl ungerade ist, und führen den Werth derselben auf das Mittelglied zurück. Der Werth der Fakultät kommt dann ungefähr dem Producte gleich, welches man erhält, wenn das Mittelglied in die so vielte Potenz erhoben wird, als die Factorenanzahl der Fakultät angibt. Der hiedurch erhaltene Werth einer Fakultät stellt sich etwas zu hoch dar, was sich dadurch einfach ergibt, dafs in der Gleichung 160 die Werthe aller Glieder, aufser dem ersten, sämmtlich negativ sind.

Hält man übrigens das eben Gesagte fest, und wendet es auch auf Fakultäten von gerader Factorenanzahl an, so bestätigt sich auch an ihnen die aufgestellte Behauptung, ja sogar bei Fakultäten, die mit ganz niederen Factoren beginnen; wenn nur die Factoren-Anzahl nicht sehr grofs ist, und man die Vorsicht gebraucht, die mit der Einheit beginnenden Fakultäten auf solche, die mit der Zahl 2 beginnen, zurück zu führen, wie denn

$$1^{z|1} = 2^{z-1|1}$$

ist. Legt man daher die Fakultät:

$$n^{q|1} = n(n+1)(n+2)\dots(n+q-1)$$

zu Grunde, so ist das Mittelglied oder arithmetische Mittel zwischen den beiden Schlufs-Factoren $\frac{2n+q-1}{2}$, und die Zahl der Factoren q, also ist in 160: $z = \frac{2n+q-1}{2}$, $2m+1 = q$, $m = \frac{q-1}{2}$ zu setzen, und man hat:

$$lg\, n^{q|1} = q \cdot lg \frac{2n+q-1}{2} - \frac{S\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}{\left(\frac{2n+q-1}{2}\right)^2} - \frac{S\left(\frac{q-1}{2}\right)^4}{2 \cdot \left(\frac{2n+q-1}{2}\right)^4} - \dots$$

oder da

$$S\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} S(q-1)^2,\quad S\left(\frac{q-1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} S(q-1)^4 \dots$$

$$162)\quad lg\, n^{q|1} = q\, lg \left(\frac{2n+q-1}{2}\right) - \frac{S(q-1)^2}{(2n+q-1)^2} - \frac{S(q-1)^4}{2(2n+q-1)^4} - \dots$$

oder:

$$163)\quad n(n+1)\dots(n+q-1) = \left(\frac{2n+q-1}{2}\right)^q \cdot e^{-\frac{S(q-1)^2}{(2n+q-1)^2} - \frac{S(q-1)^4}{(2n+q-1)^4} - \dots}$$

Legt man aber die Fakultät

$$n^{q|-1} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$$

zu Grunde, so wird $z = \frac{2n-q+1}{2}$ und man hat:

$$164)\ lg[n(n-1)\ldots(n-q+1)] =$$

$$= q\, lg\left(\frac{2n-q+1}{2}\right) - \frac{S(q-1)^2}{(2n-q+1)^2} - \frac{S(q-1)^4}{2(2n-q+1)^4} - \ldots$$

$$165)\ n^{q|-1} = \left(\frac{2n-q+1}{2}\right)^q . e^{-\frac{S(q-1)^2}{(2n-q+1)^2} - \frac{S(q-1)^4}{2(2n-q+1)^4} - \ldots}$$

Die hiezu nöthigen Summenausdrücke der Potenzen der natürlichen Zahlen sind bekannt. Eine Zusammenstellung von ihnen findet sich in meiner Algebra, §. 130, p. 249.

Soll z. B. der Werth der Fakultät:

$$9990 . 9991 \ldots 9999 . 10000 . 10001 \ldots 10010$$

bestimmt werden, so hat man in der Formel 160:

$$lg\, 9990^{21|1} = 21 . lg\, nat. 10000 - \frac{S10^2}{10000^2} - \frac{S10^4}{10000^4} - \ldots$$

Die Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens geben natürliche Logarithmen. Sollen sie auf künstliche zurückgebracht werden, so mufs man sie durch die bekannte Zahl 0,43429448... vervielfachen. Hiernach wird:

$$21\, lg\, 10000 = 84{,}00000000$$

$$\frac{S10^2}{10000^2} = \frac{2310 . 0{,}43429448}{6 . 100000000} = 0{,}00000166.$$

Das Glied: $\frac{S10^4}{2 . 10000^4}$ influirt nicht mehr, und man hat daher:

$$9990^{21|1} = N\, 83{,}99999834\ldots$$

woraus sich eine Zahl von 84 Stellen ergibt, die mit 99999 beginnt, und allerdings dem Werthe nach von 10000^{21} nicht bedeutend abweicht.

Eine weitere Methode, die Fakultäten von sehr grofsen Zahlen und nicht unbedeutenden Dimensionen auf kurze Weise darzustellen, liefern die Unterschiede der Logarithmen.

Die Gleichungen 426, §. 120, und 437, §. 124 meines Differenzialcalculs, geben uns zu unserem Zwecke, wenn wir dort die Function $X = lg\, x$ setzen, folgende zwei Entwicklungen:

$$166)\ lg(x+m\triangle x) = lg\,x + \frac{m}{1}\triangle lg\,x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\triangle^2 lg\,x + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\triangle^3 lg\,x + \dots$$

und:

$$167)\ lg(x-m\triangle x) = lg\,x - \frac{m}{1}\triangle lg\,x + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\triangle^2 lg\,x - \\ - \frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\triangle^3 lg\,x + \dots$$

Legt man nun die Fakultät:

$$z(z+1)(z+2)\dots(z+m)$$

zu Grunde und setzt in 166 $x = z$, $\triangle x = 1$ und statt m allmälig die Werthe $0, 1, 2, 3 \dots m$, so hat man, da

$$lg[z(z+1)(z+2)\dots(z+m)] = lg\,z + lg(z+1) + lg(z+2) \dots + lg(z+m)$$

ist, folgende Zusammenstellung:

$$\begin{array}{lll} lg\,z & = & lg\,z \\ lg(z+1) & = & lg\,z + \triangle lg\,z \\ lg(z+2) & = & lg\,z + \frac{2}{1} lg\,z + \frac{2\,.\,1}{1\,.\,2}\triangle^2 lg\,z \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ lg(z+m) & = & lg\,z + \frac{m}{1} lg\,z + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\triangle^2 lg\,z + \dots \end{array}$$

Werden die Vertikalreihen summirt, so hat man:

$$168)\ lg\,z^{m+1|1} = (m+1) lg\,z + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\triangle lg\,z + \frac{(m-1)m(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3}\triangle^2 lg\,z + \\ + \frac{(m-2)(m-1)m(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\triangle^3 lg\,z + \dots$$

Legt man aber die Fakultät:

$$lg[z(z-1)(z-2)\dots(z-m)] = lg\,z + lg(z-1) + lg(z-2) \dots lg(z-m)$$

zu Grunde und behandelt die Werthe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach 167 unter den nämlichen Bedingungen, wie vorhin, so hat man folgende Zusammenstellung:

$$
\begin{aligned}
lg\, z &= lg\, z \\
lg(z-1) &= lg\, z - \triangle lg\, z + \frac{2.1}{1.2}\triangle^2 lg\, z - \ldots \\
lg(z-2) &= lg\, z - \frac{2}{1}\triangle lg\, z + \frac{2.3}{1.2}\triangle^2 lg\, z - \ldots \\
&\vdots \\
lg(z-m) &= lg\, z - \frac{m}{1}\triangle lg\, z + \frac{m(m+1)}{1.2}\triangle^2 lg\, z - \ldots
\end{aligned}
$$

und hieraus durch Vereinigung der Vertikalreihen:

$$
169)\ lg[z(z-1)(z-2)\ldots(z-m)] =
$$

$$
= (m+1)\, lg\, z - \frac{m(m+1)}{1.2}\triangle lg\, z + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\triangle^2 lg\, z - \ldots
$$

Beide Reihen, 168 und 169, convergiren stark, wenn z eine sehr grofse Zahl, m aber nicht sehr grofs ist. Die Reihe wird also für Fakultäten von grofsen Factoren und nicht grofsen Dimensionen brauchbar seyn, und dann werden einige Anfangsglieder hinreichen, um den Werth der Reihe hinlänglich genau darzustellen. Sie lassen sich auch unter folgender Gestalt darstellen:

$$
170)\ z^{m+1|1} = z^{m+1} \cdot e^{\frac{m(m+1)}{1.2}\triangle lg\, z + \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}\triangle^2 lg\, z + \ldots}
$$

$$
171)\ z^{m+1|-1} = z^{m+1} \cdot e^{-\frac{m(m+1)}{1.2}\triangle lg\, z + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\triangle^2 lg\, z - \ldots}
$$

Vereinigt man beide Reihen, so hat man:

$$
\begin{aligned}
172)\ lg(z-m)^{2m+1|1} = {} & (2m+1)\, lg\, z \\
& + \left(\frac{m^{2|1}}{1^{2|1}} - \frac{m^{2|1}}{1^{2|1}}\right)\triangle lg\, z \\
& + \left(\frac{(m+1)^{3|-1}}{1^{3|1}} + \frac{m^{3|1}}{1^{3|1}}\right)\triangle^2 lg\, z \\
& + \left(\frac{(m+1)^{4|-1}}{1^{4|1}} - \frac{m^{4|1}}{1^{4|1}}\right)\triangle^3 lg\, z \\
& \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

und bei entwickelter Darstellung:

$$
173)\ lg(z-m)^{2m+1,1} =
$$

$$
= (2m+1)\, lg\, z + \frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3}\triangle^2 lg\, z - \frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3}\triangle^3 lg\, z + \ldots
$$

Die Vorzahlen der folgenden Glieder dieser Reihe lassen sich leicht nach 172 bestimmen. Die Unterschiede der Logarithmen bestimmen sich durch die nachstehende Gleichung:

$$174)\ \triangle^m lg\, z = (-1)^{m-1}.1.2.3\ldots m\Big(\frac{(\triangle x)^m}{m z^m} - \frac{m(m+1)}{1.2}\cdot\frac{(\triangle x)^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}}$$
$$+\frac{3m+1}{4}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\cdot\frac{(\triangle x)^{m+2}}{(m+2)z^{m+2}}$$
$$-\frac{m(m+1)}{1.2}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{(\triangle x)^{m+3}}{(m+3)z^{m+3}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\Big)$$

die wir in unserer Lehre von den aufsteigenden Functionen, §. 35, Nro. 185, pag. 71 mitgetheilt haben, wohin wir wegen ihrer Begründung verweisen.

Auch die Gleichungen 172 und 173 gehen von dem Mittelgliede aus. Legt man nun die Fakultät:

$$n^{q|1} = n(n+1)(n+2)\ldots(n+q-1)$$

zu Grunde, so hat man, wie oben, $z = \frac{2n+q-1}{2}$, $2m+1 = q$ und $m = \frac{q-1}{2}$ in 173 zu setzen. Dann zieht man hieraus:

$$175)\ lg[n(n+1)(n+2)\ldots(n+q-1)] =$$
$$= q\,lg\frac{2n+q-1}{2} + \frac{(q-1)(q+1)q}{1.2.3.2^2}\triangle^2 lg\frac{2n+q-1}{2}$$
$$-\frac{(q-1)(q+1).q}{1.2.3.2^2}\triangle^3 lg\frac{2n+q-1}{2}$$
$$\vdots$$

Eben so erhält man folgende Gleichung, wenn man die Fakultät $n^{q|-1}$ zu Grunde legt:

$$176)\ lg[n(n-1)\ldots(n-q+1)] =$$
$$= q\,lg\frac{2n-q+1}{2} + \frac{(q-1)(q+1).q}{1.2.3.2^2}\triangle^2 lg\frac{2n-q+1}{2}$$
$$-\frac{(q-1)(q+1).q}{1.2.3.2^2}\triangle^3 lg\frac{2n-q+1}{2}$$
$$\vdots$$

und ferner bei anderer Darstellung:

$$177)\quad n^{q|1} = \left(\frac{2n-q+1}{2}\right)^q . e^{\frac{(q-1)(q+1)q}{1.2.3.2^2}\triangle^2 lg\frac{2n+q-1}{2} - \frac{(q-1)(q+1).q}{1.2.3.2^2}\triangle^3 lg\frac{2n+q-1}{2} - \ldots}$$

$$178)\quad n^{q|-1} = \left(\frac{2n-q+1}{2}\right)^q . e^{\frac{(q-1)(q+1).q}{1.2.3.2^2}\triangle^2 lg\frac{2n-q+1}{2} - \frac{(q-1)(q+1)q}{1.2.3.2^2}\triangle^3 lg\frac{2n-q+1}{2} - \ldots}$$

Eine vierte Methode, den Werth der Fakultäten von grofsen Factoren und grofsen Dimensionen zu bestimmen, gewinnen wir auf folgende Weise. Es ist:

$$lg\, z^{z|-1} = lg z + lg(z-1) + lg(z-2) + lg(z-3) \ldots.$$

Wird differenzirt, so entsteht:

$$d(lg\, z^{z|-1}) = \frac{dz}{z} + \frac{dz}{z-1} + \frac{dz}{z-2} + \frac{dz}{z-3} + \ldots. = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} + \ldots.\right) dz$$

und man ist auf die Glieder der harmonischen Reihe geführt. Bezeichnet man nun die in der Klammer eingeschlossenen Glieder der Kürze wegen durch $S\frac{1}{z}$, so ist:

$$d(lg\, z^{z|-1}) = \left(S\frac{1}{z}\right) dz$$

und hievon das Integral:

$$lg\, z^{z|-1} = \int \left(S\frac{1}{z}\right) dz$$

Um das Integral darzustellen, ist der Summenausdruck der harmonischen Reihe nöthig. Er ist nach der Gleichung 745 §. 196 meines Differenzialcalculs:

$$S\frac{1}{z} = lg\,z + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4z^4} - \dots + C$$

Das Integral aber nebst der Constante gewinnt sich leicht, und man hat:

$$179)\quad lg\,1^{z|1} = (z + \tfrac{1}{2})\,lg\,z + \tfrac{1}{2}\,lg\,2\pi - z + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \dots$$

oder:

$$180)\quad 1^{z|1} = z^z.\sqrt{2\pi z}.\,e^{-z + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \dots}$$

Bei sehr grofsem n convergirt der Werth der Glieder sehr stark, und es werden daher einige Glieder hinreichen, um den Werth der Fakultät hinlänglich genau zu bestimmen. Ist n unendlich grofs oder eine sehr bedeutende Zahl, so hat man, weil die Bruchglieder vernachlässigt werden können:

$$181)\quad lg\,1^{z|1} = (z + \tfrac{1}{2})\,lg\,z + \tfrac{1}{2}\,lg\,2\pi - z$$

oder:

$$182)\quad 1.2.3\dots z = \frac{z^z\sqrt{2\pi z}}{e^z}$$

Der Gleichung 179 hat sich schon Euler (Differenzialrechnung) und Laplace (*Théorie analyt. des probab.*) bedient.

Die Gleichungen 156, 160, 162, 168, 169 und 179 haben wir schon in unserer Lehre von den aufsteigenden Functionen, §. 48 u. ff., mitgetheilt.

§. 48.

Wir machen von den bis jetzt gefundenen Gleichungen zur weiteren zweckmäfsigen Benutzung in vorkommenden Fällen einige Anwendungen.

Ist der Werth der Fakultät $\left(\frac{n}{1}\right)^{q|1}$ bei sehr grofsem n und q zu bestimmen, so hat man:

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+q-1)}{1.2.3\ldots q} = \frac{1.2.3\ldots(n+q-1)}{1.2.3\ldots(n-1).1.2.3\ldots q}$$

und aus 180, durch Einführung der erforderlichen Werthe:

$$183)\quad \left(\frac{n}{1}\right)^{q|1} = \frac{(n+q-1)^{n+q-1}.\sqrt{2\pi(n+q-1)}.e^{-(n+q-1)+\frac{1}{12(n+q-1)}-\frac{1}{360(n+q-1)^3}+\ldots}}{(n-1)^{n-1}.\sqrt{2\pi(n-1)}.e^{-n+1+\frac{1}{12(n-1)}-\ldots}.q^q\sqrt{2\pi.q}.e^{-q+\frac{1}{12q}-\ldots}}$$

oder nach 182:

$$184)\quad \frac{n(n+1)\ldots(n+q-1)}{1.2\ldots q} = \frac{(n+q-1)^{n+q}.\sqrt{(n-1)}}{(n-1)^n.q^q.\sqrt{2\pi.q(n+q-1)}}$$

Aus der Verbindung von 162 und 180:

$$185)\quad \left(\frac{n}{1}\right)^{q|1} = \frac{\left(\frac{2n+q-1}{2}\right)^q.e^{-\frac{S(q-1)^2}{(2n+q-1)^2}-\frac{S(q-1)^4}{2(2n+q-1)^4}-\ldots}}{q^q.\sqrt{2\pi q}.e^{-q+\frac{1}{12.q}-\frac{1}{360q^3}+\ldots}}$$

oder bei sehr hohem n: 186) $\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+q-1)}{1.2\ldots\ldots q} = \frac{(2n+q-1)^q . e^q}{(2q)^q . \sqrt{2\pi q}}$

Aus der Vereinigung von 177 und 180:

$$187)\quad \left(\frac{n}{1}\right)^{q|1} = \frac{\left(\frac{2n+q-1}{2}\right)^q . e^{\frac{(q-1)(q+1)q}{1.2.3.2^2}\triangle^2 lg\frac{2n+q-1}{2} - \frac{(q-1)(q+1)q}{1.2.3.2^2}\triangle^3 lg\frac{2n+q-1}{2}\ldots\ldots}}{q^q\sqrt{2\pi q}.e^{-q+\frac{1}{12q}-\frac{1}{360q^3}+\ldots}}$$

Bei bedeutend hohem n führt auch diese Gleichung auf 186. Aus der Gleichung 154 gewinnt man:

$$188)\quad \left(\frac{n}{1}\right)^{q|1} = \frac{(n+q-1)^{n+q-1}\left[1-\left(\frac{n+q-2}{n+q-1}\right)^{\frac{n+q-1}{2}+1}\right]^{n+q-1}}{(n-1)^{n-1}\left[1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}+1}\right]^{n-1}.q^q\left[1-\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{q}{2}+1}\right]^q}$$

$$= \frac{\left[(n+q-1)^{\frac{n+q-1}{2}+1}-(n+q-2)^{\frac{n+q-1}{2}+1}\right]^{n+q-1}.(n-1)^{\frac{(n-1)^2}{2}}.q^{\frac{q^2}{2}}}{(n+q-1)^{\frac{(n+q-1)^2}{2}}\left[(n-1)^{\frac{n-1}{2}+1}-(n-2)^{\frac{n-1}{2}+1}\right]^{n-1}.\left[q^{\frac{q}{2}+1}-(q-1)^{\frac{q}{2}+1}\right]^q}$$

Von den Exponenten gelten die oben angegebenen Bestimmungen.

Ist die Fakultät $\frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}$ gegeben und ihr Werth für ein grofses n und q zu bestimmen, so sind aus der nachstehenden Gleichung:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-q+1)}{1.2.3\dots q} = \frac{1.2.3\dots(n-q)(n-q+1)\dots n}{1.2.3\dots(n-q).1.2\dots q}$$

die schicklichen Werthe einzuführen.

Aus 180 wird:

$$189)\quad \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{n^n\sqrt{2\pi n}\,.\,e^{-n+\frac{1}{12.n}-\frac{1}{360\,n^3}+\dots}}{(n-q)^{n-q}\sqrt{2\pi(n-q)}\,.\,e^{-n+q+\frac{1}{12(n-q)}-\dots}\times q^q\sqrt{2\pi q}\,.\,e^{-q+\frac{1}{12q}-\dots}}$$

oder bei bedeutend grofsem n und q, so dafs auch n—q noch eine grofse Zahl bedeutet, aus 182:

$$190)\quad \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{n^n.(n-q)^q.\sqrt{n}}{(n-q)^n.q^q.\sqrt{(n-q)2\pi q}}$$

Aus 165 und 180 wird:

$$191)\quad \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{\left(\frac{2n-q+1}{2}\right)^q.\,e^{-\frac{S(q-1)^2}{(2n-q+1)^2}-\frac{S(q-1)^4}{(2n-q+1)^4}-\dots}}{q^q\sqrt{2\pi q}\,.\,e^{-q+\frac{1}{12.q}-\frac{1}{360\,q^3}+\dots}}$$

oder bei sehr grofsem n und nicht ganz unbedeutendem q:

$$192)\quad \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{(2n-q+1)^q . e^q}{(2q)^q\sqrt{2\pi q}}$$

Aus 178 und 180 wird:

$$193)\quad \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{\left(\frac{2n-q+1}{2}\right)^q . e^{\frac{(q-1)(q+1).q}{1.2.3.2^2}\triangle^2 lg\frac{2n-q+1}{2} - \frac{(q-1)(q+1)q}{1.2.3.2^2}\triangle^3 lg\frac{2n-q+1}{2}}}{q^q\sqrt{2\pi q}.e^{-q+\frac{1}{12q}-\frac{1}{360q^3}+\dots}}$$

Aus 154 aber gewinnt man:

$$194)\quad \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{n^n\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}\right]^n}{(n-q)^{n-q}\left[1-\left(\frac{n-q-1}{n-q}\right)^{\frac{n-q}{2}+1}\right]^{n-q} . q^q\left[1-\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{q}{2}+1}\right]^q}$$

$$= \frac{\left[n^{\frac{n}{2}+1}-(n-1)^{\frac{n}{2}+1}\right]^n . (n-q)^{\frac{(n-q)^2}{2}} . q^{\frac{q^2}{2}}}{n^{\frac{n^2}{2}}\left[(n-q)^{\frac{n-q}{2}+1}-(n-q-1)^{\frac{n-q}{2}+1}\right]^{n-q} . \left[q^{\frac{q}{2}+1}-(q-1)^{\frac{q}{2}+1}\right]^q}$$

Ist die Fakultät $n(n+1)(n+2)\dots(n+q-1)$ gegeben und ihr Werth bei grofsem n und q zu bestimmen, so kann man sich aufser den in §. 47 gegebenen hierher gehörigen Formeln auch noch folgender bedienen.

Es ist nämlich: $$n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+q-1) = \frac{1.2.3\ldots\ldots(n+q-1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}$$

Benützt man nun die schicklichen Werthe und die Gleichung 180, so hat man:

$$195)\quad n^{q|1} = \frac{(n+q-1)^{n+q-1}.\sqrt{2\pi(n+q-1)}.e^{-(n+q-1)+\frac{1}{12(n+q-1)}-\ldots}}{(n-1)^{n-1}.\sqrt{2\pi(n-1)}.e^{-n+1+\frac{1}{12(n-1)}-\ldots}}$$

oder bei sehr grofsem n und q aus 182:

$$196)\quad n^{q|1} = \frac{(n+q-1)^{n+q}.\sqrt{(n-1)}}{(n-1)^{n-1}.e^{q}.\sqrt{n+q-1}}$$

Aus 154 gewinnt man:

$$197)\quad n^{q|1} = \frac{(n+q-1)^{n+q-1}\left[1-\left(\frac{n+q-2}{n+q-1}\right)^{\frac{n+q-1}{2}+1}\right]^{n+q-1}}{(n-1)^{n-1}\left[1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}+1}\right]^{n-1}}$$

$$= \frac{\left[(n+q-1)^{\frac{n+q-1}{2}}-(n+q-2)^{\frac{n+q-1}{2}+1}\right]^{n+q-1}.(n-1)^{\frac{(n-1)^2}{2}}}{(n+q-1)^{\frac{(n+q-1)^2}{2}}\left[(n-1)^{\frac{n-1}{2}+1}-(n-2)^{\frac{n-1}{2}+1}\right]^{n-1}}$$

Ist die Fakultät $n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$ gegeben und ihr Werth bei großem n und q zu bestimmen, so hat man außer den in §. 47 angegebenen Gleichungen mittelst der Darstellung:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n+q-1)=\frac{1.2.3\ldots.n}{1.2.3\ldots.(n-q)}$$

aus der Gleichung 180:

$$198)\quad n^{q|-1}=\frac{n^n\sqrt{2\pi n}\,.\,e^{-n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360.n^3}+\ldots}}{(n-q)^{n-q}.\sqrt{2\pi(n-q)}.e^{-n+q+\frac{1}{12(n-q)}-\ldots}}$$

oder bei sehr großem n und q aus 180:

$$199)\quad n^{q|-1}=\frac{n^n(n-q)^q\sqrt{n}}{(n-q)^n.\,e^q\sqrt{(n-q)}}$$

Aus 154 wird:

$$200)\quad n^{q|-1}=\frac{n^n\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}\right]^n}{(n-q)^{n-q}\left[1-\left(\frac{n-q-1}{n-q}\right)^{\frac{n-q}{2}+1}\right]^{n-q}}$$

$$=\frac{\left[n^{\frac{n}{2}+1}-(n-1)^{\frac{n}{2}+1}\right]^n.\,(n-q)^{\frac{(n-q)^2}{2}}}{n^{\frac{n^2}{2}}\left[(n-q)^{\frac{n-q}{2}+1}-(n-q-1)^{\frac{n-q}{2}+1}\right]^{n-q}}$$

$$\frac{ax^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{ax^3}}{3} = \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3} = \tfrac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}$$

$$= \tfrac{2}{3}(ax \cdot \sqrt{x})$$

$$\frac{6}{\frac{2}{3}} = \frac{18}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}}{2}\ ax^{\frac{2}{2}}$$