Les constantes caractéristiques du noyau $\frac{\partial}{\partial u} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(u)-y(t)}{x(u)-x(t)}$

par

Włodzimierz Stożek.

Soit (C) une courbe plane fermée sans points multiples dont les coordonnées rectangulaires sont des fonctions uniformes d'un seul paramètre, de sorte qu'on peut poser:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ désignent des fonctions dont les premières dérivées sont continues. Nous supposons de plus que la courbure de cette ligne, considérée comme fonction du paramètre t reste finie pour toutes les valeurs de t.

Désignons:

1) par (o, l) l'intervalle, dans lequel varie le paramètre t, lorsque le point (x, y) correspondant à ce paramètre, décrit une fois la courbe (C) dans le sens positif.

2) par $f(p)$ une fonction des coordonnées rectangulaires x et y du point p.

3) par r_{pt} la distance du point p à celui des points de la ligne (C) qui correspond au paramètre t.

4) par w_+ et w_- les valeurs périphériques intérieure et extérieure de la fonction $w(p)$ par rapport à la courbe (C), c'est à dire les limites respectives de la fonction $w(p)$ lorsque le point p tend

vers un point de la courbe (C) sans sortir du domaine intérieur ou extérieur limité par la courbe considérée.

5) par $\frac{dv}{dn_+}$ et $\frac{dv}{dn_-}$ les dérivées normales d'une fonction $v(p)$ calculées, la première pour le côté intérieur de la ligne (C) et la seconde pour le côté extérieur, la normale elle-même étant, dans les deux cas, dirigée vers l'intérieur du domaine limité par la courbe (C).

On sait que le problème fondamental de la théorie du potentiel logarithmique est le suivant:

Établir l'existence d'un potentiel de simple couche et celle d'une double couche, vérifiant respectivement les équations suivantes:

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda}\frac{dv}{dn_-}-\frac{1-\lambda}{2\lambda}\frac{dv}{dn_+}=f(s)$$

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda}w_+(s)-\frac{1-\lambda}{2\lambda}w_-(s)=f(s)$$

où λ représente un paramètre variable et $f(s)$ une fonction donnée, continue dans l'intervalle (o, l) et telle que l'on ait:

$$f(o)=f(l)$$

Les problèmes en question se ramènent à deux équations intégrales associées:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu(s)+\lambda\int_o^l K(st)\,\mu(t)\,dt=f(s)\\ &\nu(s)+\lambda\int_o^l \nu(t)\,K(ts)\,dt=f(s)\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(2)\qquad K(st)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{arc\,tg}\frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}.$$

On aura, remarquons le, dès maintenant:

$$(3)\qquad \int_o^l K(ts)\,dt\equiv 1$$

Si λ n'est pas une constante caractéristique des équations (1) chacune d'elles admet une solution unique. Il résulte de la théorie des équations intégrales que les fonctions $\mu(s)$ et $\nu(s)$ considérées comme fonctions de la variable λ sont des fonctions uniformes dans tout le plan de la variable complexe λ, n'admettant, à distance finie, d'autres points singuliers que des pôles.

M. Plemelj[1]) a posé la question de savoir s'il existe des courbes (C) pour lesquelles les équations intégrales (1) possédent un nombre limité de constantes caractéristiques.

Voici la réponse à cette question:

Pour chaque courbe (C) excepté le cercle, les équations intégrales (1) possédent une infinité de constantes caractéristiques.

Pour démontrer ce théorème nous allons nous appuyer sur les théorèmes suivants bien connus ou faciles à démontrer:

I. Chaque fonction continue $h(s)$ qui vérifie les relations:

$$\int_0^l \int_0^l \log r_{st}\, h(s)\, h(t)\, ds\, dt = 0$$

$$\int_0^l h(t)\, dt = 0$$

est identiquement nulle.

II.[2]) Le noyau $\frac{\partial}{\partial u}$ arc tg $\frac{y(u)-y(t)}{x(u)-x(t)}$ est symétrisable, puisque la fonction $g(st)$ définie par la formule:

$$g(st) = \int_{(C)} \log r_{su} \frac{\partial}{\partial u} \text{ arc tg } \frac{y(u)-y(t)}{x(u)-x(t)}\, du$$

est une fonction symétrique par rapport aux variables s et t.

III.[3]) Les constantes caractéristiques des équations associées (1) sont réelles; parmi elles $\lambda = -1$ est la constante caractéristique de valeur absolue minima ainsi que de degré de multiplicité et de rang 1.

IV. La seule courbe, pour laquelle les équations intégrales

[1]) Dr. Josef Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Teubner in Leipzig 1911. pag. 71.

[2]) Dr. Josef Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Teubner in Leipzig 1911. pag. 27.

[3]) Dr. Josef Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Teubner in Leipzig 1911. pag. 52.

(1) possédent seulement la constante caractéristique -1, est le cercle.

V.[1]) Si λ_0 est une constante caractéristique et $\varphi_0(s)$ une fonction fondamentale de l'équation intégrale homogène:

$$\varphi_0(s) + \lambda_0 \int_o^l \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} \varphi_0(t)\, dt = 0$$

l'expression

$$\psi_0(s) = \int_o^l \log r_{su}\, \varphi_0(u)\, du$$

est une fonction fondamentale de l'équation intégrale associée.

VI.[2]) Si deux noyaux $K_1(st)$ et $K_2(st)$ sont continus dans chaque point du domaine $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$, excepté peut-être sur la ligne $s = t$, lorsque, de plus, les intégrales

$$\int_o^l \int_o^l \{K_1(st)\}^2\, ds\, dt, \quad \int_o^l \int_o^l \{K_2(st)\}^2\, ds\, dt$$

ont un sens, lorsqu'en outre on a identiquement

$$\int_o^l K_1(su)\, K_2(ut)\, du \equiv 0$$

ou

$$\int_o^l K_2(su)\, K_1(ut)\, du \equiv 0$$

alors l'ensemble des constantes caractéristiques du noyau $K_1(st) + K_2(st)$ est la somme des ensembles de constantes caractéristiques des noyaux $K_1(st)$ et $K_2(st)$.

VII.[3]) Un noyau de la forme $\Phi_1(s)\,\Psi_1(t) + \ldots\, \Phi_n(s)\,\Psi_n(t)$, où les fonctions $\Phi_p(s)$ et $\Psi_p(t)$ sont à carré sommables, peut posséder au plus n constantes caractéristiques.

---

[1]) Trajan Lalesco. Introduction à la Théorie des Equations intégrales. Paris 1912. Pag. 78 et 79.

[2]) Trajan Lalesco. Introduction à la Théorie des Équations intégrales Paris 1912 Pag. 41.

[3]) Trajan Lalesco. Introduction à la Théorie des Équations intégrales. Paris 1912. Pag. 61.

VIII.[1]) Si le noyau $\frac{\partial}{\partial s}$ arc tg $\frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$ posséde un nombre limité des constantes caractéristiques $\lambda_1\,\lambda_2\ldots\lambda_m$, il est nécessairement de la forme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(s)\,\psi_k(t)}{-\lambda_k}$$

Passons maintenant à la démonstration de notre théorème. Selon le théorème (III) le nombre -1 est la constante caractéristique du noyau (2) et par conséquent il existe une fonction $\varphi(s)=m(s)$ qui vérifie l'équation intégrale homogène:

$$\varphi(s)-\int_0^l K(st)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{4}$$

Observons que la fonction $m(s)$ posséde, à cause de la périodicité de la fonction $K(st)$, la période l.

Dans l'équation homogène associée:

$$\psi(s)-\int_0^l \psi(t)\,K(ts)\,dt=0$$

on peut prendre comme fonction fondamentale $\psi(s)=1$, comme cela résulte de l'égalité (3).

Les fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ remplissent la condition:

$$\int_0^l \varphi(t)\,\psi(t)\,dt=1$$

c'est à dire:

$$\int_0^l m(t)\,dt=1 \tag{5}$$

On a aussi d'après le théorème (V)

$$\int_0^l \log r_{su}\,m(u)\,du=\text{Const.} \tag{6}$$

Posons

$$K(st)=m(s)+A(st) \tag{7}$$

en vertu de (4), (5) et (7), on aura:

$$\int_0^l A(st)\,m(t)\,dt=0 \tag{8}$$

---

[1]) W. Stożek. Rozprawy Polskiego Tow matem. p. 90.

En outre (7) et (3) donnent:

$$\int_o^l A(ts)\,dt = 0$$

Si nous posons:

$$n(s) = \frac{s}{l} - \int_o^l m(t)\,dt \tag{9}$$

on déduit de la relation (5):

$$\int_o^l \frac{dn(s)}{ds}\,ds = 0$$

La fonction $n(s)$ est périodique avec la période l.

Les équations (2), (7) et (9) donnent:

$$A(st) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s} \text{arc tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} + \frac{dn(s)}{ds} - \frac{1}{l}$$

Pour définir sans ambiguité, dans le domaine $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$, la détermination $N(st)$ de la fonction multiforme:

$$\text{arc tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$$

nous fixerons le sens positif sur la courbe (C) comme on le fait ordinairement dans la théorie des fonctions et nous supposerons qu'au point $t = 0$ la tangente à la courbe (C) est parallèle à l'axe des x et que le sens de parcours positif sur la courbe (C) correspond à la croissance du paramètre t. Cela posé nous définirons la fonction $N(st)$ par les trois conditions suivantes:

1° On prendra

$$N(o, o) = 0$$

2° Pour $t \leqq s$ nous regarderons $N(st)$ comme égale à la plus petite détermination non négative de la fonction

$$\text{arc tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$$

3° Pour $s < t$, nous poserons

$$N(st) = N(ts)$$

La fonction $N(st)$ étant définie dans le domaine $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$, nous en étendrons la définition à tout le plan (st), en posant:

$$N(st) \equiv N(s't') + (k+n)\pi$$

où s' et t' sont définis par la condition de vérifier les relations:

$$o \leqq s' < l, \quad o \leqq t' < l$$
$$s = s' + k.l, \quad t = t' + n.l$$

où k et n représentent les entiers.

Il résulte des hypothèses faites au sujet de la courbe (C) que la fonction $N(st)$ est bornée et pour $s \neq t$ elle posséde des dérivées partielles du premier ordre.

En outre:

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s} \text{ arc tg } \dfrac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)} = \dfrac{\partial}{\partial s} N(st) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \text{ arc tg } \dfrac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)} = \dfrac{\partial}{\partial t} N(st) \end{cases}$$

Posons:

$$(11) \qquad Q(st) = N(st) - \frac{(s+t)\pi}{l}$$

La fonction $Q(st)$ est périodique et symétrique par rapport aux variables s et t, c'est à dire:

$$(12) \qquad Q(s+k.l,\ t+nl) = Q(st) = Q(ts)$$

D'après (2), (10) et (11) on a:

$$(13) \qquad K(st) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial Q(st)}{\partial s} + \frac{1}{l}$$

En portant cette expression dans la formule (3), nous trouvons:

$$\int_o^l \frac{\partial Q(st)}{\partial t}\, dt \equiv 0$$

Si l'on porte la valeur (7) du $K(st)$ dans (13), en ayant égard à (9), on trouve:

$$A(st) = \frac{\partial}{\partial s}\left[n(s) + \frac{1}{\pi} Q(st)\right]$$

On aura donc:

$$A(st) = \frac{\partial}{\partial s} P(st) \tag{14}$$

en posant

$$P(st) = n(s) + n(t) + \frac{1}{\pi} Q(st) \tag{15}$$

La fonction $A(st)$ jouit des propriétés suivantes:

1) Elle est la dérivée partielle du premier ordre d'une fonction symétrique des variables s et t [formule (11)] et périodique par rapport à ces variables avec la période l [formules (12), (4) et (9)].

2) Elle est symétrisable par composition avec $\log r_{su}$ [théorème II, formules (6) et (7)].

3) Au nombre -1 près, l'ensemble des constantes caractéristiques du noyau $A(st)$ est identique à l'ensemble des constantes caractéristiques du noyau $K(st)$ [théorèmes III, VI, formules (7) et (8)]. Il résulte de la dernière des propositions précédentes que, pour établir notre théorème nous pouvons substituer le noyau $A(st)$ au noyau $K(st)$. D'autre part, il résulte de (14) que les ensembles de constantes caractéristiques des noyaux $A(st)$ et $P(st)$ sont à la fois finis ou infinis [théorème VII, VIII]. Nous pouvons donc, dans notre théorème, considérer la fonction $P(st)$ au lieu de $K(st)$. Supposons que le noyau $P(st)$ posséde un nombre limité de constantes caractéristiques, que nous désignons par $-\lambda_1 - \lambda_2 \ldots - \lambda_n$ (quelques unes peuvent être égales entr'elles) et soient $\varphi_1(s)\, \varphi_2(s) \ldots \varphi_n(s)$ les fonctions fondamentales correspondantes qui en vertu de (10) (11) et (15) ont la première dérivée continue.

Nous aurons:

$$P(st) = \frac{\varphi_1(s)\, \varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s)\, \varphi_2(t)}{\lambda_2} + \ldots \frac{\varphi_n(s)\, \varphi_n(t)}{\lambda_n} \tag{16}$$

avec

$$\int_0^l \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, ds = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases} \tag{17}$$

Remarquons encore que les fonctions $\varphi_p(s)$ sont périodiques avec la période l.

D'après la première et la seconde propriété de la fonction $A(st)$ nous pouvons poser:

$$\int_0^l \log r_{su} \frac{\partial}{\partial u} P(ut)\, du = h(st) \tag{18}$$

où $h(st)$ est une fonction symétrique par rapport aux variables s et t.

Substituons l'expression (16) dans l'équation (18); nous obtiendrons:

$$\int_0^l \log r_{su} \left[\frac{\varphi'_1(u)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi'_2(u)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2} + \ldots \frac{\varphi'_n(u)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}\right] du = \tag{19}$$

$$\frac{\psi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\psi_2(s)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2} + \ldots \frac{\psi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n} = h(st)$$

où

$$\psi_p(s) = \int_0^l \log r_{su}\, \varphi'_p(u)\, du \quad (p = 1, 2, \ldots n) \tag{20}$$

Puisque la fonction $h(st)$ est symétrique

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\psi_p(s)\;\varphi_p(t)}{\lambda_p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\psi_p(t)\;\varphi_p(s)}{\lambda_p}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par la fonction $\varphi_k(s)$ et intégrant de o à l, on aura d'après (17):

$$\psi_k(t) = a_{k1}\,\varphi_1(t) + a_{k2}\,\varphi_2(t) + \ldots a_{kn}\,\varphi_n(t) \quad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{21}$$

où

$$a_{kp} = \frac{\lambda_k}{\lambda_p} \int_0^l \varphi_k(u)\,\psi_p(u)\, du \quad (k, p = 1, 2, \ldots n) \tag{22}$$

D'après (21) on a encore

$$a_{kp} = \int_0^l \psi_k(u)\,\varphi_p(u)\, du \tag{23}$$

Pareillement nous pouvons écrire:

$$a_{pk} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k} \int_0^l \varphi_p(u)\,\psi_k(u)\, du \tag{24}$$

$$a_{pk} = \int_0^l \psi_p(u)\, \varphi_k(u)\, du \tag{25}$$

En comparant les relations (22) et (23) et puis (24) et (25) nous trouvons

$$\frac{a_{kp}}{\lambda_k} = \frac{a_{pk}}{\lambda_p} \quad (k, p = 1, 2, \dots n) \tag{26}$$

Posons

$$b_{kp} = \frac{a_{kp}}{\lambda_k} \tag{27}$$

D'où en tenant compte de la relation (26)

$$b_{kp} = b_{pk}$$

Les relations (20), (21) et (27) nous donnent

$$b_{k_1}\varphi_1(s) + b_{k_2}\varphi_2(s) + \dots b_{kn}\varphi_n(s) = \frac{1}{\lambda_k}\int_0^l \log r_{su}\, \varphi_k'(u)\, du \; (k = 1, 2 \dots n) \tag{28}$$

D'où l'on tire par des calculs simples:

$$b_{k_1}\int_0^l \log r_{su}\, \varphi'_1(u)\, du + b_{k_2}\int_0^l \log r_{su}\, \varphi'_2(u)\, du + \dots b_{kn}\int_0^l \log r_{su}\, \varphi'_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k}\int_0^l \log r_{su}\, \psi'_k(u)\, du$$

ou selon la relation (20):

$$b_{k_1}\psi_1(s) + b_{k_2}\psi_2(s) + \dots b_{kn}\psi_n(s) = \frac{1}{\lambda_k}\int_0^l \log r_{su}\, \psi'_k(u)\, du$$

Nous distinguerons dans la suite trois cas.

Premier cas.

L'équation:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \frac{z}{\lambda_1} & b_{21} \dots b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} - \frac{z}{\lambda_2} \;\; b_{n2} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \cdot \;\; \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} \dots b_{nn} - \frac{z}{\lambda_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

admet au moins une racine réelle $z = \alpha$, où α est différent de zéro.

Les équations

$$(30) \qquad b_{1k} x_1 + b_{2k} x_2 + \dots \left(b_{kk} - \frac{\alpha}{\lambda_k}\right) x_k + \dots b_{nk} x_n = 0 \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

admettent une solution $x_p = x_p^0$, où tous les x_p^0 ne sont pas nuls. Multiplions les équations (30) respectivement par $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0$ et ajoutons les membre à membre; il viendra:

$$(31) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} b_{k1} x_k^0\right) \varphi_1(s) + \dots \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kn} x_k^0\right) \varphi_n(s) = \frac{1}{\alpha} \int_0^l \log r_{su} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha x_k^0}{\lambda_k} \varphi_k'(u) \right\} du$$

En posant:

$$F_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha x_k^0}{\lambda_k} \varphi_k(s)$$

on tire de (31):

$$(32) \qquad F_n(s) = \frac{1}{\alpha} \int_0^l \log r_{su} \, F_n'(u) \, du$$

La fonction $F_n(s)$ est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_p(s)$ $(p = 1, 2, \dots n)$ et par conséquent elle est périodique avec la période l et posséde une dérivée du premier ordre continue.

En multipliant la relation (32) par $F_n'(s)$ et intégrant de o à l, on aura:

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^l \int_0^l \log r_{su} \, F_n'(u) \, F_n'(s) \, du \, ds = \int_0^l F_n(s) \, F_n'(s) \, ds = 0$$

En utilisant le théorème (I) on tire de cette égalité:

$$F_n(s) \equiv 0$$

qui exprime que, contre l'hypothèse, les fonctions $\varphi_p(s)$ vérifient identiquement une combinaison linéaire à coëfficients non tous nuls des fonctions $\varphi_p(s)$.

Deuxième cas.

L'équation (29) admet une racine complexe $z = a + i\, b$ où b est différent de zéro.

L'égalité (32) subsistera encore dans le cas actuel, mais une modification des considérations antérieures devient nécessaire, puisque nous avons maintenant:

$$F_n(s) = \Phi_n(s) + \mathrm{i}\ \Psi_n(s)$$

où i est l'unité imaginaire, $\Phi_n(s)$ et $\Psi_n(s)$ étant des combinaisons linéaires à coefficients réels et non tous nuls des $\varphi_p(s)$.

Pour achever de mettre en évidence les quantités réelles et imaginaires, nous poserons

$$\alpha = a + \mathrm{i}\ b$$

en désignant par a et b des nombres réels, définis plus haut. Dans ces conditions l'équation (32) donne:

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} a\,\Phi_n(s) - b\,\Psi_n(s) &= \int_0^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, du \\ b\,\Phi_n(s) + a\,\Psi_n(s) &= \int_0^l \log r_{su}\, \Psi'_n(u)\, du \end{aligned}\right.$$

en posant:

$$\Phi_n(s) = v_1\, \varphi_1(s) + v_2\, \varphi_2(s) + \ldots v_n\, \varphi_n(s)$$
$$\Psi_n(s) = w_1\, \varphi_1(s) + w_2\, \varphi_2(s) + \ldots w_n\, \varphi_n(s)$$

où les v_k et les w_k sont des constantes réelles, non toutes nulles. Les fonctions $\Phi_n(s)$ et $\Psi_n(s)$ ne sont évidemment pas nulles toutes les deux.

Cela posé je dis qu'il n'existe aucun système de deux constantes A et B, non nulles à la fois, telles que l'on ait identiquement:

$$A\,\Phi_n(s) + B\,\Psi_n(s) \equiv 0$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Dans ce cas on tirerait de (33) les égalités suivantes:

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} (aB + bA)\,\Phi_n(s) &= B\int_0^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, du \\ (aA - bB)\,\Psi_n(s) &= A\int_0^l \log r_{su}\, \Psi'_n(u)\, du \end{aligned}\right.$$

En multipliant la première équation par $\Phi'_n(s)$ et la seconde par $\Psi'_n(s)$ et intégrant de o à l, nous trouvons en remarquant encore que les fonctions $\Phi_n(s)$ et $\Psi_n(s)$ sont périodiques avec la période l:

$$\int_o^l\int_o^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, \Phi'_n(s)\, du\, ds = 0$$

$$\int_o^l\int_o^l \log r_{su}\, \Psi'_n(u)\, \Psi'_n(s)\, du\, ds = 0$$

d'où d'après le théorème I:

$$\Phi'_n(s) \equiv 0$$
$$\Psi'_n(s) \equiv 0$$

De ces équations et des relations (34) on déduit:

$$aB + bA = 0$$
$$-bB + aA = 0$$

Le déterminant de ces équations étant égal à $a^2 + b^2$, il est impossible qu'elles soient vérifiées par un système de valeurs non nulles à la fois de A et B. Notre assertion est donc établie. Revenons maintenant aux équations (33).

Multiplions la première équation par $\Psi'_n(s)$, la seconde par $\Phi'_n(s)$ et intégrons de o à l. Nous trouvons:

$$a\int_o^l \Phi_n(s)\, \Psi'_n(s)\, ds = \int_o^l\int_o^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, \Psi'_n(s)\, du\, ds$$

$$a\int_o^l \Psi_n(s)\, \Phi'_n(s)\, ds = \int_o^l\int_o^l \log r_{su}\, \Phi'_n(u)\, \Psi'_n(s)\, du\, ds$$

d'où

$$(35)\qquad a\int_o^l \Phi_n(s)\, \Psi'_n(s)\, ds = a\int_o^l \Psi_n(s)\, \Phi'_n(s)\, ds$$

Si a est différent de zéro l'égalité (35) et l'égalité élémentaire

$$\int_o^l \Phi_n(s)\, \Psi'_n(s)\, ds = \int_o^l \Phi'_n(s)\, \Psi_n(s)\, ds = \int_o^l [\Phi_n(s)\, \Psi_n(s)]'\, ds = 0$$

donneraient:

$$\int_o^l \Phi_n(s)\ \Psi'_n(s)\,ds = \int_o^l \Phi'_n(s)\ \Psi'_n(s)\,ds = 0 \tag{36}$$

Multiplions maintenant la première équation (33) par $\Phi'_n(s)$ et intégrons de o à l D'après (36) on a:

$$\int_o^l\int_o^l \log r_{su}\ \Phi'_n(u)\ \Phi'_n(s)\,du\,ds = 0$$

d'où par le théorème I:

$$\Phi'_n(u) \equiv 0$$

et d'une façon analogue:

$$\Psi'_n(u) \equiv 0$$

En intégrant ces deux identités, nous obtiendrons:

$$\Phi_n(u) \equiv \text{const}$$
$$\Psi_n(u) \equiv \text{const}$$

c'est à dire qu'il existe une combinaison linéaire entre $\Phi_n(u)$ et $\Psi_n(u)$, ce qui est impossible comme nous l'avons démontré plus haut. Si a est égal à zéro, le système (33) se réduit à:

$$-b\,\Psi_n(s) = \int_o^l \log r_{su}\ \Phi'_n(u)\,du$$

$$b\,\Phi_n(s) = \int_o^l \log r_{su}\ \Psi'_n(u)\,du$$

En portant la valeur de la fonction $\Psi_n(s)$, tirée de la première équation, dans la seconde, en multipliant ensuite par $\Phi'_n(s)$ et en intégrant do o à l, on trouvera:

$$\int_o^l\int_o^l\int_o^l \log r_{su} \log r_{ut}\ \Phi'_n(s)\ \Phi'_n(t)\,du\,ds\,dt = 0$$

ou

$$\int_o^l \left\{\int_o^l \log r_{ut}\ \Phi'_n(t)\,dt\right\}^2 ds = 0$$

d'où

$$\int_0^l \log r_{st}\, \Phi'_n(t)\, dt = 0$$

et d'une façon analogue:

$$\int_0^l \log r_{st}\, \Psi'_n(t)\, dt = 0$$

Ces deux égalités entraînent d'après le théorème I:

$$\Phi'_n(t) \equiv 0$$
$$\Psi'_n(t) \equiv 0$$

ce qui est impossible, comme nous l'avons vu plus haut.

Troisième cas.

Le déterminant $|b_{pk}|$ $(p, k = 1, 2 \ldots n)$ est égal à zéro.

Les égalités (21) et (27) nous apprennent qu'il existe une relation de la forme:

$$e_1 \psi_1(s) + e_2 \psi_2(s) + \ldots e_n \psi_n(s) \equiv 0$$

où les e_p sont des constantes réelles, non toutes nulles.

De là et des relations (20) on déduit au moyen du théorème I que l'on a:

$$e_1 \varphi_1(s) + e_2 \varphi_2(s) + \ldots e_n \varphi_n(s) = e_0 \tag{37}$$

où e_0 est une nouvelle constante réelle.

Supposons par exemple que e_n soit différent de zéro. En substituant alors la valeur de la fonction $\varphi_n(s)$ tirée de l'équation (37) dans les $n-1$ premières relations (28), nous trouverons:

$$c_{k1}\varphi_1(s) + c_{k2}\varphi_2(s) + \ldots c_{k,n-1}\varphi_{n-1}(s) + c_{kn} = \int_0^l \log r_{su}\, \varphi'_k(u)\, du \tag{38}$$

$$(k = 1, 2, \ldots n-1)$$

où les c_{kp} sont des constantes réelles.

L'équation:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - z & c_{21} \ldots & c_{n-1,1} \\ c_{12} & c_{22} - z & c_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1,n-1} & c_{2,n-1} & c_{n-1,n-1} - z \end{vmatrix} = 0 \tag{39}$$

ne peut posséder une racine $z = 0$. Dans ce cas il existerait, comme cela résulte des équations (38) et du théorème (I) une relation de la forme:

$$d_1\,\varphi_1(s) + d_2\,\varphi_2(s) + \dots\; d_{n-1}\cdot\varphi_{n-1}(s) = d_0 \tag{40}$$

où d_k $(k = 0, 1, \dots n-1)$ sont des constantes réelles, non toutes nulles. Les relations (37) et (40) sont indépendantes et par conséquent il existe une relation linéaire et homogène entre les $\varphi_p(s)$ contrairement à l'hypothèse que nous avons faite plus haut. Si l'équation (39) a une racine $z = a_1$, où a_1 est un nombre réel, différent de zéro, la méthode que nous avons appliquée dans le premier cas nous donne:

$$F_{n-1}(s) = \frac{1}{a_1}\int_o^l \log r_{su}\, F_{n-1}(u)\, du \tag{41}$$

où

$$F_{n-1}(s) = \alpha_1\,\varphi_1(s) + \dots\; \alpha_{n-1}\,\varphi_{n-1}(s) + \alpha_0 \tag{42}$$

en désignant par α_i $(i = 0, 1, 2 \dots n-1)$ les constantes réelles, non toutes nulles.

Si l'équation (39) a une racine $z = a_1 + i\, b_1$, en procédant comme dans le deuxième cas, nous trouvons:

$$\left\{\begin{aligned} a_1\,\Phi_{n-1}(s) - b_1\,\Psi_{n-1}(s) &= \int_o^l \log r_{su}\,\Phi'_{n-1}(u)\,du \\ b_1\,\Phi_{n-1}(s) + a_1\,\Psi_{n-1}(s) &= \int_o^l \log r_{su}\,\Psi'_{n-1}(u)\,du \end{aligned}\right. \tag{43}$$

où $\Phi_{n-1}(s)$ et $\Psi_{n-1}(s)$ sont, comme la fonction $F_{n-1}(s)$, des combinaisons linéaires de $\varphi_1(s) \dots \varphi_{n-1}(s)$ avec les coefficients réels, non tous nuls.

Nous avons reconnu plus haut que (32) entraîne la relation:

$$F'_n(s) \equiv 0$$

pour toutes les valeurs de s. Nous avons reconnu aussi qu'en vertu des égalités (33) on a identiquement:

$$\Phi'_n(s) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \Psi'_n(s) \equiv 0$$

D'une façon tout à fait analogue on déduira des égalités (41) et (43) que l'on a

(44) $$F'_{n-1}(s) \equiv 0$$

ainsi que

(45) $$\Phi'_{n-1}(s) \equiv \Psi'_{n-1}(s) \equiv 0$$

pour toutes les valeurs de s.

Il résulte de (44) que

$$F_{n-1}(s) \equiv \text{Const.}$$

Or, cette relation et la relation (37) entraîneraient l'existence d'une relation linéaire et homogène entre les $\varphi_\nu(s)$ ce qui, par hypothèse, est impossible. Cela prouve qu'au cas où le nombre des constantes caractéristiques serait fini, l'équation (39) ne peut pas avoir de racines réelles. D'autre part si (39) avait une racine complexe, on aurait les relations (45). Donc, dans ce cas on aurait

$$\Phi_{n-1}(s) = \text{Const.} \quad \Psi_{n-1}(s) = \text{Const.}$$

Mais chacune des fonctions $\Phi_{n-1}(s)$ et $\Psi_{n-1}(s)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants des fonctions:

$$\varphi_1(s) \ldots \varphi_{n-1}(s)$$

donc, à cause de (37) il existerait encore une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants non tous nuls entre les fonctions

$$\varphi_1(s) \ldots \varphi_n(s)$$

ce qui, par hypothèse, est impossible.

En résumé l'hypothèse que, pour une courbe (C) qui n'est pas un cercle, le nombre des constantes caractéristiques du noyau $P(st)$ est fini, entraîne dans tous les cas une contradiction. Donc lorsque la courbe (C) n'est pas un cercle, le noyau $P(st)$ et par conséquent le noyau $A(st)$ admettent une infinité des constantes caractéristiques. Il en est de même dans le cas considéré du noyau $K(st)$.

C. Q. F. D.