LEGENDRE

SOLIDOMETRYA

SOLIDOMETRYA

PODŁUG

A. M. LEGENDRE.

A. Czajewicz

w WARSZAWIE

w Drukarni Xięży Pijarów.

1834

Za pozwoleniem Cenzury Rządowéy

SOLIDOMETRYA

ROZDZIAŁ I.

O PŁASZCZYZNACH I KĄTACH BRYŁOWYCH

1. Linia prosta, iest prostopadła do płaszczyzny, gdy iest prostopadłą do wszystkich liniy prostych na teyże płaszczyznie poprowadzonych, i przez iey spodek przechodzących. I odwrotnie, płaszczyzna iest prostopadła do linii prostéy.

Spodkiem prostopadłéy, iest punkt w którym przecina płaszczyznę,

2. Liniia prosta iest równoodległa od płaszczyzny gdy iak naydaléy wraz z płaszczyzną przedłużona przeciąć iey nie

może. Odwrotnie płaszczyzna iest równoodległa od linii.

3. Dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe, gdy iak naydaléy przedłużone przeciąć się nie mogą.

4. Poźniéy się okaże, że wspólném przecięciem dwóch płaszczyzn iest liniia prosta: kąt, czyli nachylenie do siebie dwóch płaszczyzn, iest mnieysza lub większa ilość o którą są od siebie oddalone; miarą tego nachylenia iest kąt zawarty między dwiema prostopadłemi do wspólnego ich przecięcia wyprowadzonemi, na każdéy z płaszczyzn w szczególności, z punktu wziętego na témże przecięciu.

Kąt ten, może być ostry, prosty, lub roztwarty.

5. Gdy kąt zawarty między dwiema płaszczyznami iest prosty, płaszczyzny są do siebie prostopadłe.

6. Kąt bryłowy iest przestrzeń kątowa, zawarta między wielą płaszczyznami w iednym punkcie się schodzącemi. — Tak kąt bryłowy S, fig. 1. powstał

z połączenia płaszczyzn ASB, BSC, CSD, DSA. — Do utworzenia kąta bryłowego potrzeba przynaymniéy trzech płaszczyzn.

7. *Twierdz.* 1. Liniia prosta nie może być w części na płaszczyznie, w części za płaszczyzną.

Dowodz. Jakoż podług opisania płaszczyzny, liniia prosta znayduie się cała na płaszczyznie, gdy ma tylko dwa punkta z nią wspólne.

Uwaga. Dla przekonania się czy powierzchnia iest płaską, potrzeba do niéy w różnych kierunkach przykładać liniią prostą, i uważać czyli dotyka teyże powierzchni w całéy iéy rozciągłości.

8. *Twierdz. 2gie.* Dwie liniie proste przecinaiące się, znayduią się na iednéy płaszczyznie, i wyznaczaią iéy położenie.

Dow. Niech będą dwie liniie AB, AC, fig. 2. przecinaiące się w punkcie A; wystawmy sobie płaszczyznę na któréy znayduie się liniia AB: płaszczyznę tę obracaymy około linii AB, dopóki nie przyydzie na punkt C. liniia AC, maiąc wtedy dwa punkta A i C na teyże płaszczyznie, będzie się cała na niéy znaydować, a tém samém położenie téy płaszczyzny iest wyznaczone, z tym iedynie warunkiem, że na niéy maią się znaydować liniie AB, AC.

Wniosek 1. Tróykąt ABC, albo trzy punkta A, B, C, fig. 2. nie znayduiące się na iednéy linii prostéy, wyznaczaią położenie płaszczyzny.

Wn. 2gi. Dwie liniie równoodległe AB, CD, fig. 3. wyznaczaią także położenie płaszczyzny; bo poprowadziwszy sieczną EF, płaszczyzna przechodzącą przez liniie AE, EF, będzie także przechodzić przez równoodległe AB, CD.

9. *Twierdzenie* 3*cie.* Wspólném przecięciem dwóch płaszczyzn iest liniia prosta.—

Dowodz. Gdyby między punktami wspólnemi dwom płaszczyznom, znalazły się trzy nieleżące na iednéy linii prostéy, dwie płaszczyzny, o których mowa, przechodząc razem przez te trzy punkta byłyby tylko iedną płaszczyzną: co iest przeciw założeniu.

10. *Twierdz. 4te.* Liniia prosta AP, prostopadła do dwóch innych PB, PC poprowadzonych przez iéy spodek na płaszczyznie MN fig. 4, będzie także prostopadłą do linii prostéy iakieykolwiek PQ, poprowadzonéy przez iéy spodek na teyże płaszczyznie, a tém samém będzie prostopadłą do płaszczyzny MN.

Dowodz. Przez punkt Q, wzięty od upodobania na linii PQ, poprowadźmy w kącie BPC, liniią prostą BC, tak, aby było $BQ = QC$, i połączmy AB, AQ, AC. Wtróykącie BPC, ponieważ podstawa BC, iest podzielona na dwie równe części w punkcie Q, więc:

$$PC^2 + PB^2 = 2PQ^2 + 2QC^2.$$

Dla téyże saméy przyczyny w tróykącie ABC;

$$AC^2 + AB^2 = 2AQ^2 + 2QC^2.$$

Odiąwszy równanie pierwsze od drugiego i uważaiąc że w tróykątach APC i APB prostokątnych przy P, iest $AC^2-PC^2=AP^2$ i $AB^2-PB^2=AP^2$; będzie:

$$AP^2+AP^2=2AQ^2-2PQ^2$$

$$\text{czyli } 2AP^2=2AQ^2-2PQ^2,$$

ztąd $AP^2=AQ^2-PQ^2$; tróykąt więc APQ iest prostokątny przy P, a tém samém liniia AP iest prostopadła do PQ.

Uwaga. Ztąd się pokazuie, że liniia prosta nie tylko być może prostopadłą do wszystkich liniy prostych poprowadzonych przez iéy spodek na płaszczyznie, ale nadto że to zawsze ma mieysce, ile razy tylko ta liniia iest prostopadła do dwóch liniy poprowadzonych na płaszczyznie.

11. *Wn.* 1, Prostopadła AP iest krótsza odkażdéy pochyłéy AQ, i mierzy prawdziwą odległość punktu A od płaszczyzny PQ.

12 *Wn.* 2gi. Z punktu P wziętego na płaszczyznie, można tylko iednę prostopadłą wyprowadzić do teyże pła-

szczyzny; bo gdyby można z tegoż samego punktu P, wyprowadzić dwie prostopadłe, więc poprowadziwszy przez nie płaszczyznę, któréy przecięciem z płaszczyzną MN, niech będzie liniia PQ; dwie prostopadłe o których mowa znayduiące się na téy saméy płaszczyznie byłyby także wiednym punkcie prostopadłe do linii PQ, co być nie może.

Podobnież z punktu wziętego za płaszczyzną, nie można do niéy spuścić dwóch prostopadłych, bo przypuściwszy że liniie AP, AQ są temi dwiema prostopadłemi; w tróykącie APQ byłyby dwa kąty APQ i AQP proste, co być nie może.

13. *Twierdz. 5te.* Pochyłe równo oddalone od prostopadłéy są równe, a z dwóch pochyłych nie równo od prostopadłéy oddalonych, ta iest większa która się bardziéy od niéy oddala.

Dowodz. Ponieważ kąty APB, APC, APD fig. 5 są proste, więc przypuściwszy że odległości PB, PC, PD, są sobie równe, tróykąty APB, APC, APD, maiące po dwa boki równe i po kącie między niemi zawartym równym, przystaną do siebie, a tém samém przeciw prostokątne czyli pochyłe AB, AC, AD, będą sobie równe. Lecz ieżeli odległość PE iest większsa od PD lub iéy równéy PB, pochyła AE będzie także większa od AB, lub iéy równéy AD.

14. *Wniosek*. Spodki wszystkich pochyłych równych AB, AC, AD i t. d. znayduią się na okręgu BCD zakreślonym ze spodka prostopadłéy P, iako środka; maiąc zatém dany punkt A, za płaszczyzną, i chcąc znaleść na niey punkt P, w którym przypadnie spodek prostopadłéy z punktu A spuszczonéy, dosyć wyznaczyć na teyże płaszczyznie trzy punkta B, C, D, równooddalone od punktu A, i znaleźć środek okręgu koła przez te trzy punkta przechodzącego; a środek ten będzie szukanym punktem P.

Uwaga. Kąt ABP, nazywa się nachyleniem pochyłéy AB, do płaszczyzny MN, nachylenia pochyłych AB, AC, AD i t. d. równooddalonych od prostopadłéy, są równe; gdyż wszystkie tróykąty ABP, ACP, ADP i t. d. są równe.

15. *Twierdz.* 6. Gdy liniia AP fig. 6 iest prostopadła do płaszczyzny MN, a liniia BC, leży na teyże płaszczyznie, ze spodka P prostopadłéy spuściwszy PD prostopadłą do BC, i połączywszy punkt A z punktem D, liniią AD; liniia AD, będzie prostopadłą do BC.

Dowodz. Wziąwszy DB=DC, i połączywszy PB, PC, AB, AC, ponieważ BD=DC, pochyła PB=PC; nadto uważaiąc względem prostopadłéy AP, ponieważ PB=PC, pochyła AB=AC; liniia zatém AD maiąca dwa pnnkta A i D równooddalone od końców B i C linii BC, iest prostopałdą w środku do teyże linii BC.

Wn. Tu zarazem widzimy że BC, iest prostopadła do płaszczyzny APD, iako prostopadła do dwoch liniy AD i PD, przez które ta płaszczyzna przechodzi.

Uwaga. Dwie linii AE i BC, są przykładem dwóch liniy, nie przecinaiących się, bo nieleżą na iednéy płaszczyznie. Naykrótszą odległością tych dwoch liniy iest liniia PD, prostopadła razem i do linii AE i do linii BC. Odległość PD tych dwóch liniy iest naykrótsza; bo połączywszy dwa inne punkta iak A i B będzie AB>AD, aże AD>PD więc tym bardziéy AB>PD.

Liniie AE i CB, lubo nie leżą na iednéy płaszczyznie, uważaią się, iednak za prostopadłe do siebie, bo liniia AD i równoodległa od BC, poprowadzona przez ieden z iéy punktów, byłyby do siebie prostopadłe. Podobnież liniie AB i PD, które oznaczaią iakiekolwiek dwie liniie proste nieleżące na iednéy płaszczyznie, biorą się za liniie czyniąc z sobą ten sam kąt któryby czyniła z liniią AB, równoodległa od PD, poprowadzona przez którykolwiek punkt linii AB.

16. *Twierdz.* 7. Gdy liniia AP iest prostopadła do płaszczyzny MN fig. 7, liniia DE od niéy równoodległa, iest także prostopadła do téyże płaszczyzny,

Dowodz: Przez liniie równoodległe AP i DE, poprowadziwszy płaszczyznę, téy przecięciem z płaszczyzną MN niech będzie liniia PD, poprowadźmy na płaszczyznie MN liniią BC, prostopadłą do PD, i złączmy pnnkt A z D liniią AD. Podług wniosku z twierdzenia poprzedzaiącego BC iest prostopadła do płaszczyzny APDE, a tém samém kąt BDE iest prosty; aże i kąt EDP iest także prosty, gdyż AP iest prostopadła do PD, a DE iest równoodległa od AP: więc liniia DE, prostopadła do dwóch liniy DP i DB. iest tém samém prostopadłą do płaszczyzny MN, na któréy léżą też liniie.

17. *Wn.* 1. Odwrotnie, gdy liniie AP

i DE są prostopadłe do iednéy płaszczyzny MN, liniie te są od siebie równoodległe, bo gdyby takiemi nie były, więc z punktu D wyprowadziwszy równoodległą od AP, ta byłaby prostopadłą do płaszczyzny MN; a tém samém, z iednego punktu D, możnaby wyprowadzić dwie prostopadłe do teyże saméy płaszczyzny, co być nie może.

18. *Wn.* 2gi. Dwie liniie A i B, równoodległe od trzeciéy C, są także od siebie równoodległe; wystawiwszy sobie bowiem płaszczyznę prostopadłą do linii C liniie A i B, iako równoodległe od C, będą także prostopadłe do téy płaszczyzny; a tém samem na mocy wniosku poprzedzaiącego od siebie równoodległe. Uważać tu potrzeba że trzy liniie A, B, C, nie leżą na iednéy płaszczyznie.

19. *Twierdz* 8. Liniia AB (fig. 8.) równoodległa od linii CD poprowadzonéy na płaszczyznie MN, iest także równoodległa od téy płaszczyzny.

Dowodz. Gdyby liniia AB znayduią-ca się na płaszczyźnie ABCD, przecięła płaszczyznę MN, przecięcie to mogłoby tylko mieć mieysce w pewnym punkcie linii CD, która iest wspólnem przecięciem dwóch płaszczyzn; aże liniia AB, nie może przeciąć CD, iako od niéy równoodległa; więc nieprzetnie także płaszczyzny MN, a tém samém iest od niéy równoodległą.

20. *Twierdz.* 9. Dwie płaszczyzny MN i PQ fig. 9. prostopadłe do iednéy linii prostéy AB, są od siebie równoodległe.

Dowodz. Gdyby te dwie płaszczyzny przecięły się, więc na ich wspólnem przecięciu wziąwszy puukt O, i połączywszy go z punktami A i B, liniiami prostemi OA i OB, liniia AB, prostopadła do płaszczyzny MN, byłaby także prostopadłą do OA, na téyże płaszczyźnie przez iéy spodek poprowadzonéy, dla téy saméy przyczyny AB, byłaby prostopadła do BO; a tém samém OA i OB, byłyby dwie prostopadłe spuszczone z punktu O, do iednéy linii; co być nie może. Dwie zatém płaszczyzny MN i PQ, nie mogą się z sobą przeciąć a tém samém są od siebie równoodległe.

21. *Twierdz.* 10. Przecięcia EF i GH fig. 10 dwoch płaszczyzn równoodległych MN i PQ, płaszczyzną trzecią FG są równoodległe.

Dowodz. Jeżeli liniie EF, i GH leżące na téy samey płaszczyznie nie są równoodległe, więc przedłużone, przetną się; lecz tém samém przecięłyby się także płaszczyzny MN i PQ, na których leżą też liniie, co być nie może, bo płaszczyzny te są z założenia równoodległe.

22. *Twierdz.* 11. Liniia AB fig. 9 prostopadła do płaszczyzny MN, iest także prostopadła do płaszczyzny PQ rownoodległéy od MN.

Dowodz. Na płaszczyznie PQ, poprowadziwszy iakąkolwiek liniią prostą BC, przez liniie AB i BC poprowadźmy płaszczyznę ABC, któréy przecięciem z płaszczyzną MN, będzie liniia

AD, równoodległa od BC; lecz liniia AB prostopadła do płaszczyzny MN, iest prostopadłą i do linii AD, więc tém samém będzie prostopadłą do BC równoodległéy od AD; (10) liniia zatém AB prostopadła do linii iakiéykolwiek BC, poprowadzonéy przez iéy spodek na płaszczyznie PQ, iest także prostopadłą do téy płaszczyzny.

23. *Twierdz.* 12. Liniie równoodległe EG, i FH fig. 10. zawarte między dwiema płaszczyznami równoodległemi MN, PQ, są sobie równe.

Dow. Przez liniie równoodległe EG, FH poprowadźmy płaszczyznę EGHF, ta przetnie płaszczyzny równoodległe podług liniy EF i GH. Przecięcia EF i GH są od siebie równoodległe (21) więc czworokąt EGHF iest równoległobokiem a tém śamém EG=FH.

24. *Wn.* Ztąd wypada, że dwie płaszczyzny równoodległe, wszędzie zarówno od siebie są oddalone; bo gdy liniie EG i FH są prostopadłe do płaszczyzn MN, PQ, liniie te są od sie-

bie równoodległe (16), a tém samém równe.

25. *Twierdz.* 13. Gdy dwa kąty CAE i DBF fig. 11. nie leżące na iednéy płaszczyznie, maią ramiona od siebie równoodległe i w iednę stronę się rozchodzące, kąty te są równe, a ich płaszczyzny od siebie równoodległe.

Dow. Wziąwszy AC=BD, AE=BF, połączmy CE, DF, AB, CD, EF. Ponieważ liniia AC iest równa linii BD, i od niéy równoodległa, więc czworokąt ABDC iest równoległobokiem; a tém samém liniia CD, równa linii AB i od niéy równoodległa. Dla téyże przyczyny liniia EF, równa AB, i od niéy równoodległa; więc liniia CD iest także równa linii EF i od niéy równoodległa, a tém samèm czworokąt CEFD iest równoległobokiem, i i bok CE równy bokowi DF i od niego równoodległy; tróykąty zatém CAE, i DBF, są równoboczne; i kąt CAE=DBF.

Powtore, płaszczyzna ACE, iest równoodległa od płaszczyzny DBF; bo przypuściwszy że płaszczyzna równoodległa od BDF, przez punkt A poprowadzona, przecina liniie CD i EF, w innych punktach, *np.* I i H, a nie w punktach C i E; więc podług *Wn.* 2. *Twierdz.* 7. trzy liniie AB, ID. FH, będą równe, a że trzy liniie AB CD, i EF, są także równe, więc byćby musiało CD=ID, FH=EF, co być nie może; płaszczyzna więc ACE iest równoodległa od BDF.

26. *Wn.* Gdy dwie płaszczyzny równoodległe MN, PQ przecięte są dwiema innemi płaszczyznami, CABD, EABF kąty CAE, DBF, powstałe z przecięć płaszczyzn równoodległych będą równe; gdyż przecięcie AC iest równoodległe od BD (21) AE równoodległe od BF, a tém samém kąt CAE=DBF.

27. *Twierdz.* 14. Gdy trzy liniie AB CD, EF fig. 11. nieleżące na iednéy, płaszczyznie są równe i równoodległe, tróykąty ACE, BDF, utworzone z iednéy i drugiéy strony przez połącze-

nie końców tychże liniy, są równe, a ich płaszczyzny równoodległe.

Dow. Ponieważ AB iest równe i równoodległe od CD, więc czworokąt ABCD, iest równoległobokiem, a tém samém bok AC iest równy BD i od niego równoodległy. Dla teyże przyczyny boki AE i BF, tudzież CE i DF, są równe i równoodległe; tróykąty więc ACE i BDF, są równe. Podobnym sposobem iak w twierdzeniu poprzedzaiącém dowiedziemy, że ich płaszczyzny są od siebie równoodległe.

28, *Twierdz.* 15. Dwie liniie proste przecięte trzema płaszczyznami równoodległemi, podzielone są na części proporcyonalne.

Dow. Daymy na to że liniia AB fig. 12 przecina płaszczyzny równoodległe MN, PQ, RS w punktach A, E, B; a liniia CD przecina też płaszczyzny w punktach C, F, D, dowiedziemy że będzie AE: EB = CF: FD.

Poprowadziwszy liniią AD, przecinaiącą płaszczyznę PQ w punkcie G, połączmy punkta A i C, E i G, G i F, B i D liniiami AC, EG, GF, BD; przecięcia EG i BD płaszczyzn równoodległych PQ, RS płaszczyzną ABD są równoodległe,

więc . . . . AE: EB=AG: GD.

podobnież, ponieważ przecięcia AC i FG są równoodległe, więc AG: GD=CF: FD.

Złożywszy te dwie proporcye wypadnie: AE: EB=CF: FD.

29 *Twierdz.* 16. Miarą kąta zawartego między dwiema płaszczyznami MAN, MAP fig. 13. iest kąt NAP zawarty między dwiema prostopadłemi AN, AP do wspólnego przecięcia, na każdéy z tych płaszczyzn poprowadzonemi.

Aby dowieśdź tego twierdzenia, potrzeba *tód* dowieśdź że kąt zawarty między prostopadłemi do wspólnego przecięcia dwóch płaszczyzn, na każdéy znich poprowadzonemi iest stały; to iest, że się nie zmienia z jakiegokolwiek punktu wspolnego przecięcia, będą wyprówadzone też prostopadłe.

Wziąwszy iakikolwiek inny punkt M, i poprowadziwszy prostopadłe MC na płaszczyznie MN, i MB na płaszczyznie MP, do wspolnego przecięcia AM; liniie MB i AP iako prostopadłe do iednéy linii AM, są od siebie równoodległe. Dla téyże przyczyny MC iest równoodległa od AN; więc kąt BMC=PAN, a zatém czy to z punktu A, czy też z innego iakiegokolwiek punktu M, wyprowadzimy prostopadłe do wspólnego przecięcia, kąt między niemi zawarty będzie zawsze ieden.

2re. Potrzeba dowieśdź, że w miarę powiększania się lub zmnieyszania w pewnym stósunku kąta zawartego między dwiema płaszczyznami, kąt PAN, będzie się w tym samym stosunku powiększał lub zmnieyszał.

Na płaszczyznie PAN, z punktu A iako środka promieniem iakimkolwiek zakreślmy łuk NDP, a z punktu M, tym samym promieniem łuk CEB, i poprowadźmy w iakimkolwiek bądź kierunku liniią AD; płaszczyzny PAN i BMC iako prostopadłe do linii MA, są od siebie równoodległe; więc i ich przecięcia AD i ME trzecią płaszczyzną AMD, będą także równoodległe, a tém samém kąt BME=PAD. Gdyby kąt DAP był równy kątowi DAN, kąt dwuścienny DAMP byłby także równy kątowi dwuściennemu DAMN, bo podstawa PAD przystałaby do równéy sobie DAN, wysokość AM, byłaby zawsze ta sama, i te dwa kąty przystałyby do siebie. Podobnież gdyby kąt DAP mieścił się zupełnie pewną liczbą razy w kącie PAN, kąt dwuścienny DAMP, mieściłby się tyleż razy w kącie dwuściennym PAMN. Aże od stosunku w liczbach całkowitych można zawsze przéyść do stosunku iakiegokolwiek, więc w iakimkolwiek stosunku będzie kąt DAP do PAN, w takim też stósunku będzie kąt dwuścienny DAMP do PAMN; kąt zatèm NAP, może być uważany za miarę kąta dwuściennego PAMN, czyli kąta zawartego między dwiema płaszczyznami MAP i MAN.

Uwaga. W kątach zawartych między dwiema płaszczyznami też same okoliczności maią mieysce co w kątach zawartych między dwiema liniiami prostemi. Tak gdy dwie płaszczyzny tworzące kąt, będą przedłużone za wspólne przecięcie, kąty wierzchołkiem przeciwległe będą równe, a kąty przyległe równe dwom kątom prostym; gdy więc iedna płaszczyzna iest prostopadła do drugiéy, druga iest prostopadła do pierwszéy. Podobnież w przecięciu płaszczyzn równoodległych trzecią płaszczyzną, zachodzi ta sama równość, i te same własności, co w przecięciu dwoch liniy równoodległych trzecią.

30. *Twierd.* 17, Gdy liniia AP fig. 14, iest prostopadła do płaszczyzny MN, każda płaszczyzna APB, przez tęż liniią AP poprowadzona, będzie także prostopadłą do płaszczyzny MN.

Dowodz. Niech będzie BC, przecięcie płaszczyzn AB i MN, na płaszczyznie MN poprowadziwszy DE prostopadłą do BP, liniia AP, iako prostopadła do płaszczyzny MN, będzie także prostopadłą do każdéy z linii BC i DE; aże kąt APD, zawarty między prostopadłemi PA i PD do wspólnego przecięcia PB, iest miarą kąta zawartego między płaszczyznami AB i MN, a iest prosty; więc te dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe.

Uwaga. Gdy trzy liniie proste, iak AP BP, DP są do siebie prostopadłe, każda z nich iest prostopadła do płaszczyzny dwóch innych, a trzy płaszczyzny na których leżą te liniie po dwie brane są do siebie prostopadłe.

31. *Twierdz.* 18. Gdy płaszczyzna AB fig. 14 iest prostopadła do płaszczyzny MN, a na płaszczyznie AB poprowadzimy linią PA prostopadłą do wspólnego przecięcia PB, liniia PA będzie także prostopadła do płaszczyzny MN.

Dowodz. Na płaszczyznie MN poprowadziwszy PD prostopadłą do PB, kąt APD będzie prosty, gdyż płaszczyzny są do siebie prostopadłe; liniia więc AP, prostopadła do dwóch liniy PB i PD, iest tém samém prostopadłą do ich płaszczyzny MN.

32, *Wniosek.* Jeżeli płaszczyzna AB, iest prostopadła do płaszczyzny MN, a z punktu wziętego na ich wspólnem przecięciu wyprowadzimy prostopadłą do płaszczyzny MN, prostopadła ta będzie leżała na płaszczyznie AB; bo gdyby na niey nie leżała, możnaby na płaszczyznie AB, poprowadzić prostopadłą AP, do wspólnego przecięcia PB, którąby razem była prostopadłą do płaszczyzny MN; a tém samém byłyby dwie prostopadłe do płaszczyzny MN, w iednym punkcie P, co być nie może.

33. *Twierdz.* 19. Jeżeli dwie płaszczyzny AB i AD fig. 14. są prostopadłe do trzeciéy MN, wspólne ich przecięcie AP, będzie także prostopadłe, do téy trzeciéy płaszczyzny.

Dowodz. Z punktu P wyprowadziwszy prostopadłą do płaszczyzny MN prostopadła ta, musi się razem znaydować i na płaszczyznie AB i na płaszczyznie AD (32); a tém samém iest ich wspólném przecięciem AP.

34. *Twierdz.* 20. W kącie bryłowym złożonym z trzech kątów płaskich, summa dwóch których kolwiek z tychże kątów iest większa od trzeciego.

Dowodz. Twierdzenie to dosyć będzie dowieść na ten przypadek, gdy ieden kąt płaski porównywany z dwoma innymi, iest od każdego z nich większy: Niech więc będzie kąt bryłowy S fig. 15 złożony z trzech kątów płaskich ASB, ASC, BSC, przypuściwszy że kąt ASB, iest naywiększy z nich, będzie ASC+BSC>ASB.

Na płaszczyznie ASB, wykreśliwszy kąt BSD=BSC, poprowadźmy liniią ABD i wziąwszy SC=SD, połączmy AC i BC. — Ponieważ boki BS i SD są równe bokom BS i SC, i kąt BSD=BSC, więc dwa tróykąty BSD i BSC, są równe a tém samém BD=BC. Lecz w tróykącie ABC, AC+BC>AB, odiąwszy z iednéy strony BC, z drugiéy BD, zostanie AC>AD. W tróykątach ASC i ASD, boki AS i SD, są równe bokom AS i SC, lecz że bok AC iest większy od boku AD, więc i kąt ASC>ASD; dodawszy do obu stron BSD=BSC, będzie ASC+BSC>ASD +BSD czyli ASC+BSC>ASB.

35. *Twierdz.* 21. Summa kątow płaskich tworzących kąt bryłowy, iest zawsze mnieysza od czterech kątów prostych.

Dowodz. Przeciąwszy kąt bryłowy S fig. 16 płaszczyzną iakąkolwiek ABCDE; z punktu O, wziętego na teyże płaszczyznie poprowadźmy do wierzchołków wszystkich kątów liniie OA, OB, OC, OD, OE.

W tróykątach ASB, BSC i t. d. maiących wierzchołek w S, summa kątów iest równa summie kątów równéy liczby tróykątów AOB; BOC i t. d., maiących wierzchołek w O. Lecz przy punkcie B, summa kątów ABO i OBC czyli kąt ABC, iest mnieyszy od kątów ABS+BSC (34); podobnież przy punkcie C, summa kątów BCO+OCD <BCS+SCD i t. d. Ztąd wypada że w tróykątach maiących wierzchołek w O, summa kątów przy podstawach, iest mnieysza od summy kątów przy podstawach w tróykątach maiących wierzchołek w S; więc tém samém summa kątów przy O musi bydź większa od summy kątów przy S. Aże summa kątów przy O, waży 4 kąty proste, więc summa kątów płaskich tworzących kąt bryłowy S, iest mnieysza od czterech kątów prostych.

Uwaga.. W twierdzeniu tém uważa się kąt bryłowy wypukły, czyli taki że płaszczyzna iednéy ściany przedłużona nie może przeciąć kąta bryłowego; inaczéy bowiem summa kątów płaskich niemiałaby granic.

36. *Twierdz.* 22. Gdy dwa kąty bryłowe składaią się z trzech kątów płaskich równych, kąty dwuścienne zawarte

między ścianami równemi są sobie równe.

Dowodz. Niech będzie kąt ASC=DTF fig. 17; kąt ASB=DTE i kąt BSC=ETF; dowiedziemy że kąt dwuścienny zawarty między ścianami ASC i ASB iest równy kątowi dwuściennemu zawartemu między ścianami DTF i DTE.

Wziąwszy SB iakieykolwiek długości, poprowadźmy BO, prostopadłą do płaszczyzny ASC; z punktu O, w którym ta prostopadła przecina płaszczyznę poprowadźmy OA, OC, prostopadłe do SA i SC i połączmy AB i BC; daléy wziąwszy TE=SB, poprowadźmy EP prostopadłą do płaszczyzny DTF, z punktu P poprowadźmy PD i PF prostopadłe do TD i TF nakoniec połączmy DE i EF.

Tróykąt SAB iest prostokątny przy A, a tróykąt TDE przy D; a że kąt ASB=DTE, więc i SAB=TED. Nadto ponieważ SB=TE, więc tróykąt SAB iest równy tróykątowi TDE; a tém samém SA=TD i AB=DE. Podobnież dowiedziemy, że SC=TF i BC=EF. Czworokąt zatém SAOC iest równy czworokątowi TDPF, przeniosłszy bowiem kąt ASC na iemu równy DTF, ponieważ SA=TD i SC=FT, punkt A padnie na punkt D, a punkt C, na punkt F. Nadto AO prostopadła do SA, poydzie po DP prostopadłéy do DT i OC po PF; a tém samém punkt O padnie na punkt P, i będzie AO =DP. Aże w tróykątach AOB i DPE prostokątnych przy O i P, przeciwprostokątna AB=DE i bok AO=DP, tróykąty więc te przystaną do siebie, a tém samém kąt OAB= PDE. Lecz kąt OAB, iest miarą kąta dwuściennego zawartego między płaszczyznami ASB i ASC, a kąt PDE miarą kąta dwuściennego zawartego między płaszczyznami DTE i DTF; więc te kąty dwuścienne są sobie równe. Uważać tu iednak należy że kąt A tróykąta prostokątnego OAB, wtenczas tylko właściwie iest miarą nachylenia płaszczyzny ASB do ASC, gdy prostopadła BO przypada z téy saméy strony względem SA co SC; bo gdyby przypadała z drugiéy strony, wtedy kąt zawarty między dwiema płaszczyznami byłby roztwarty, a dodany do kąta A tróykąta OAB, czyniłby dwa kąty proste. Lecz w tym samym razie kąt zawarty między płaszczyznami TDE i TDF, byłby także roztwarty, a dodany do kąta D tróykąta DPE czyniłby dwa kąty proste; a ponieważ kąt A, byłby zawsze równy kątowi D, więc i nachylenie płaszczyzny ASB do ASC, iest równe nachyleniu płaszczyzny TDE do TDF.

Uwaga. Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z kątów płaskich równych, i iednakowo ułożonych, takie kąty bryłowe są sobie równe i przystaną do siebie. Jakoż widzieliśmy iuż że czworokąt SAOC, może pczystać do czworokąta TDPF; przeniosłszy zatém SA na TD, SC padnie na TF, i punkt C na punkt F. Aże tróykąty AOB i DPE są równe, więc prostopadła OB, do płaszczyzny ASC, iest równa prostopadłéy PE do płaszczyzny TDF; nadto prostopadłe te idą w iednę stronę; punkt zatem B, padnie na pnnkt E, linia SB na TE, a tém samem dwa kąty bryłowe przystaną do siebie.

Przystawanie to wtenczas tylko ma mieysce gdy z.założenia kąty płaskie równe, są iednakowo ułożone w obu kątach bryłowych; bo gdyby kąty płaskie były przeciwnie ułożone, czyli, co toż samo znaczy, gdyby prostopadłe OB i PE zamiast znaydować się z téy saméy strony, płaszczyzna ASC i DTF, znaydowały się ze stron przeciwnych, wtedy dwa kąty bryłowe nie mogłyby przystać do siebie. Jednakże zawsze kąty dwuścienne zawarte między ścianami równemi byłyby sobie równe tak iż dwa kąty bryłowe składałyby się ze wszystkich części równych, leczby przystać do siebie nie mogły. Ten gatunek pewności nie będący pewnością przez przystawanie, ma swe szczególne nazwisko i nazywa się równością przez symetryą. Tak więc dwa kąty bryłowe o których mowa, złożone z kątow płaskich równych lecz przeciwnie ułóżonych; nazywać się będą kąty równe przez symetryą, albo wprost kąty symetryczne. Taż sama uwaga stosuie się do kątów bryłowych, złożonych z więcéy iak trzech kątów płaskich; i tak kąt bryłowy złożony z kątów płaskich A, B, C, D, E, i drugi kąt bryłowy złożony z tych samych kątów przeciwnie ułożónych A, E, D, C, B, mogą być takie, że płaszczyzny na ktorych znayduią się kąty równe, są równo do siebie nachylone. Takie dwa kąty bryłowe, któreby sobie były równe, chociażby do siebie przystać nie mogły, nazywać się będą *kąty bryłowe* równe *przez symetryą* albo *kąty bryłowe symetryczne*.

W figurach płaskich niema właściwie równości przez symetryą, i wszystkie któreby tak nazwać chciano, byłyby równościami przez przystawanie, dla tego że można przewrócić figurę płaską, i wziąść bez rożnicy wierzch za spód. Ale inaczéy się rzecz ma z bryłami, gdzie trzeci wymiar może bydź brany w dwoch różnych od siebie kierunkach.

37. Zagad. Maiąc dane trzy kąty płaskie tworzące kąt bryłowy, wykreślić na płaszczyznie kąt zawarty między dwiema z tych płaszczyzn.

Rozw. Niech będzie S fig. 18 dany kąt bryłowy, w którym wiadome są trzy kąty płaskie ASB, ASC, BSC; trzeba wykreślić na płaszczyznie kąt zawarty między dwiema z tych płaszczyzn *np.* ASB i ASC. Wykonawszy to samo wykreślenie co w twierdzeniu póprzedzaiącem, kąt DAB będzie kątem szukanym; cała rzecz teraz zasadza się na wykreśleniu równego mu kąta na płaszczyznie. Dla tego nakreślmy na płaszczyznie iakieykolwiek kąty B'SA, ASC, B''SC, równe kątom BSA, ASC, BSC, składaiącym kąt bryłowy; wziąwszy B'S i B''S równe krawędzi BS kąta bryłowego, spuśćmy z punktu B' i B'' prostopadłe B'A i B''C, do SA i SC, które się przetną w punkcie O. Z punktu A, iako środka promieniem AB' zakreślmy półkule B' bE, z punktu O, wyprowadźmy prostopadłą Ob do B'E, która przetnie okrąg w punkcie b: nakoniec połączmy punkt A z *b* linią A*b*, a kąt EA*b* będzie szukaném nachyleniem dwóch płaszczyzn ASC i ASB, kąta bryłowego. Dowiedź teraz potrzeba że tróykąt AO*b* iest równy troykątowi ABD. W troykątach B'SA i BSA, prostokątnych przy A, w których kąty przy S, są równe, kąt B=B'; nadto ponieważ przeciwprostokątna SB', iest równa przeciwprostokątnéy SB, więc tróykąty te są sobie równe, a tem samem liniia SA, rowna iest krawędźi SA kąta bryłowego, i AB' czyli A*b*, równa krawędzi AB kąta bryłowego. Podobnież dowiesdź można że SC=SC; a ztąd wypada że czworokąt SAOC iest równy czworokątowi SADC, i AD=AO w kącie bryłówym, dwa więc tróykąty AOb i ADB prostokątne, maiące równe przeciwprostokątne i po iednym boku równym, są sobie równe, a tém samém kąt EAb wykreślony na płaszczyznie, iest równy nachyleniu dwoch płaszczyzn SAB i SAC kąta bryłowego.

Gdy punkt O przypada między punktami A i B' na figurze płaskiey, kąt EAb, iest roztwarty, i mierzy prawdziwe nachylenie Płaszczyzn; dla tego to wyraziliśmy przez EAb, a nie przez OAb nachylenie żądane, aby rozwiązanie powyższe służyło bez wyiątku na wszelki wypadek.

Uwaga. Aby z trzech kątow płaskich złożyć kąt bryłowy, potrzeba 1*ód* aby summa trzech kątów danych była mnieysza od czterech kątów prostych (35) 2*re* aby wziąwszy dwa którekolwiek ztych kątów B'SA i ASC, trzeci CSB'' był taki iżby prostopadła B''C do boku SC przecięła średnicę B'E, między punktami B' i E. Granice zatem wielkości kąta CSB" są te w których prostopadła B"C przecina średnicę w punktach B' i E. Z tych punktów spuściwszy prostopadłe B' I, EK na CS, te przetną w punktach I i K okrąg zakreslony promieniem SB" a granicami kąta CSB" będą kąty CSI i CSK.

Ponieważ w troykącie równoramiennym B'SI, liniia CS przedłużona, iest prostopadła do podstawy, więc CSI =CSB'=ASC+ASB': a w tróykącie równoramiennym ESK, liniia SC iest także prostopadła do podstawy EK, a tèm samém kąt CSK=CSE; nadto ponieważ w tróykątach równych ASE i ASB', kąt ASE=ASB' więc CSE czyli CSK=ASC—ASB'.

Ztąd wypada że zagadnienie zawsze może byc rozwiązane, gdy trzeci kąt CSB" iest mnieyszy od summy dwoch innych ASC i ASB', a większy od ich różnicy, który to warunek zgadza się z twierdzeniem 20, bo na mocy tego twierdzenia musi być CSB" < ASC

$+ ASB' i ASC < CSB'' + ASB'$, albo $CSB'' > ASC - ASB'$.

38. *Zag.* 2. Maiąc dane dwa kąty płaskie z trzech tworzących kąt bryłowy, i kąt zawarty między dwiema płaszczyznami, znaleść trzeci kąt płaski.

Rozw. Niech będą ASC i ASB' fig. 18. dwa dane kąty płaskie: przypuściwszy że kąt CSB'' iest trzeciem kątem szukanym, wykonaymy to samo wykreślenie co w zagadnieniu poprzedzaiącém, a kąt zawarty między płaszczyznami dwóch pierwszych kątów będzie EA*b*. Jako za pomocą kąta CSB'', maiąc dane dwa inne, wyznaczamy kąt EA*b*; tak też za pomocą kąta EA*b* można wyznaczyć kąt CSB''. Wziąwszy zatem SB' od upodobania, spuśćmy B'E prostopadłą na SA, i wykreślmy kąt EA*b*, równy kątowi nachylenia dwoch płaszczyzn danych; z punktu *b*, w którym ramie A*b*. przecina okrąg zakreślony ze środka A, promieniem AB', spuśćmy *b*O prostopadłą na AE, a z punktu O, prostopadłą OCB'' na SC, na którey weźmy SB''=SB'; a kąt CSB'' będzie trzecim kątem szukanym.

Jakoż złożywszy kąt bryłowy z trzech kątów płaskich B'SA, ASC, CSB'' na, chylenie płaszczyzn ASB', ASC, będzie równe kątowi danemu EA*b*.

Uwaga. Gdy kąt bryłowy składa się z czterech kątów płaskich ASB, BSC, CSD, DSA, fig. 19. wtedy, nie dosyć iest mieć dane też kąty, do wyznaczenia wzaiemnych nachyleń ich płaszczyzn, albowiem z tychże samych kątów płaskich, można złożyć nieograniczoną liczbę kątów bryłowych. Lecz dodawszy ieden warunek *np*. że dane iest nachylenie dwóch płaszczyzn ASB, i BSC, kąt bryłówy iest zupełnie wyznaczony, i można znaleść nachylenie dwóch którychkolwiekiego płaszczyzn. I tak wystawny sobie kąt bryłowy złożony z kątów płaskłch ASB, BSC, ASC, w którym dwa pierwsze kąty są dane, równie iak i nachylenie ich płaszczyzn; można będzie za pomocą poprzedzaiącego zagadnienia, wyznaczyć kąt trzeci ASC. Daley uważaiąc kąt bryłowy złożony z kątów płaskich ASC, ASD, DSC, te trzy kąty są wiadome a zatem kąt bryłowy iest całkowicie wyznaczony. Lecz kąt bryłowy czworościenny składa się z dwoch kątów bryłowych tróyściennych, o których dopiero mowiliśmy; a że te kąty cząstkowe są wyznaczone, więc i cały kąt iest także wyznaczony.

Kąt zawarty między płaszczyznami ASD, DSC, możnaby znaleść za pomocą drugiego kąta bryłowego cząstkowego. Co do kąta zawartego między płaszczyznami BSC, i CSD, trzebaby w iednym kącie bryłowym cząstkowym szukać kąta zawartego między płaszczyznami ASC, DSC, a w drugim kąta zawartego między płaszczyznami ASC. i BSC, a summa tych dwoch kątów dałaby kąt zawarty między płaszczyznami BSC i DSC.

ROZDZIAŁ II.

O WIELOSCIANACH.

1. Bryłą wielościenną albo wielościanem nazywa się bryła ograniczona płaszczyznami czyli ścianami płaskiemi. W szczególności *czworościanem* nazywa się bryła, maiąca cztery ściany; *sześcianem* bryła maiąca sześć ścian; ośmiościanem bryła maiąca ośm ścian, dwudziestościanem bryła maiąca dwadzieścia ścian i t. d.

Czworościan iest nayprostszy z wielościanów; trzeba albowiem przynaymniey trzech ścian do utworzenia kąta bryłowego, lecz te trzy ściany zostawuią ieszcze przestrzeń z iednéy strony nieograniczoną, dla któréy zamknięcia potrzeba czwartéy ściany.

2. Wspólne przecięcie dwoch scian przyległych wielościanu nazywa się *krawędzią* wielościanu.

3. *Wielościanem foremnym* nazywa się wielościan w którym wszystkie ścia-

ny są wielokątami foremnemi równemi, i wszystkie kąty bryłowe są sobie równe. Tych wielościanów iest pięć; z których trzy maią za ściany tróykąty równoboczne a takiemi są: czworościan foremny, ośmiościan i dwudziestościan, ieden w którym ściany są kwadratami a takowy iest sześcian, i ieden w ktorym ściany są pięciokątami foremnymi a takim iest dwnuastościan.

4. Graniastosłup iest bryla zawarta między wielu równoległobokami, zakończonymi z obu stron wielokątami równymi i rownoodległymi. Aby wystawić graniastosłup któregoby podstawą był wielokąt ABCDE fig. 20 dosyć na płaszczyznie równoodległéy od ABC, poprowadzić liniie FG, GH HI i t. d. równe i równoodległe od boków AB, BC, CD, i t. d. które uformuią wielokąt FGHIK równy wielokątowi ABCDE; a połączywszy wierzchołki odpowiadaiących kątów tych wielokątów liniiami prostemi AF, BG, CH,

i t. d. Sciany ABGF, BCHG i. t. d. będą równoległobokami, a bryła ABCDEFGHIK graniastosłupem.

5. Wielokąty równe i równoodległe ABCDE i FGHIK, nazywaią się *podstawami graniastosłupa:* równoległoboki zaś razem wzięte składaią *powierzchnią boczną graniastosłupa.* Liniie proste równe AF, BG, CH, i t. d. nazywaią się *krawędziami graniastosłupa.*

6. *Wysokość graniastosłupa,* iest odległość dwoch iego podstaw, czyli prostopadła spuszczona z punktu wziętego na podstawie górnéy, na podztawę dolną.

7. *Graniastosłup nazywa się prosty,* gdy krawędzie AF, BG i t. d. są prostopadłe do podstaw, w tym razie każda z krawędzi iest równa wysokości graniastosłupa. W każdym innym przypadku, graniastosłup iest *pochyły*, i wysokość iest mnieysza od krawędzi.

8. *Graniastosłup* iest *tróykątny, czworokątny, pięciokątny, sześciokątny,* według tego, iak podstawą iego, iest

troykąt, czworokąt, pięciokąt, sześciokąt. i t. d.

9. Graniastosłup którego podstawą iest równoległobok, nazywa się *równoległościanem*. *Równoległościan* iest *prostokątny*, gdy wszystkie iego ściany są prostokątami.

10. Pomiędzy równoległościanami prostokątnemi, odróżnić należy *szescian foremny*, którego ściany są kwadratami równymi,

11. Piramida czyli ostrosłup, iest bryła zamknięta wielu tróykątami wychodzącymi z tegoż samego punktu S fig. 34, a kończącymi się na bokach płaszczyzny wielokątnéy ABCDE.

Wielokąt ABCDE, nazywa się *podstawą piramidy*, punkt S iey wierzchołkiem, a zbior tróykątów ASB, BSC i t. d. składa *powierzchnią boczną* piramidy.

12. *Wysokość piramidy*, iest prostopadła spuszczona z wierzchołka na podstawę.

13. Piramida iest troykątna, czworokątna

i t. d. podług tego iak pódstawą iest tróykąt, czworokąt i t. d.

14. Piramida iest foremna, gdy iey podstawą iest wielokąt foremny, a prostopadła spuszczona z wierzchołka na podstawę, przypada w środek teyże podstawy; liniia ta nazywa się wtenczas osią piramidy.

15. *Przekątną wielościanu* nazywa się liniia prosta łącząca wierzchołki dwóch kątów bryłowych nieprzyległych wielościanu.

16. *Wielościanami symetrycznemi* nazywać będziemy takie dwa wielościany, które maiąc wspólną podstawę, lecz ieden znayduie się nad, a drugi pod nią, tak że wierzchołki kątów bryłowych odpowiadaiących, znayduią się w równych odległościach od podstawy, na téy saméy prostopadłey. Tak *np.* gdy liniia fig. 22 ST iest prostopadła do płaszczyzny ABC, i iest w punkcie O, w którym tęż płaszczyznę przecina, podzielona na dwie równe części, dwie piramidy SABC i TABC,

maiące wspólną podstawę ABC, będą dwoma wielościanami symetrycznemi.

17. *Dwie piramidy troykątne* są *podobne*, gdy maią po dwie ściany odpowiadaiące podobne, podobnie ułożone, i równo nachylone. I tak przypuściwszy że kąty fig. 23, ABC=DEF, BAC=EDF, ABS=DET, BAS=EDT, i prócz tego że nachylenie płaszczyzny ABS i ABC, iest równe nachyleniu odpowiadaiących im płaszczyzn DTE i DEF, piramidy SABC, i TDEF będą podobne.

18. Wykreśliwszy tróykąt za pomocą wierzchołków trzech kątów wziętych na iedneyże ścianie, lub podstawie wielościanu, można sobie wystawić że wierzchołki rożnych kątów bryłowych tegoż wielościanu leżące za płaszczyzną podstawy, są wierzchołkami tyluż piramid tróykątnych, maiących za wspólną podstawę wyżey rzeczony troykąt, a każda z nich wyznaczy położenie kąta bryłowego wielościanu względem podstawy. Idzie zatem że

dwa wielościany są podobne, gdy maią podobne podstawy, a wierzchołki kątów bryłowych odpowiadaiących wyznaczone przez piramidy troykątne podobne.

19. *Wierzchołkami* wielościanu nazywać będziemy punkta położone w wierzchołkach różnych iego kątów bryłowych.

Uwaga. Wszystkie wielościany które tu uważamy są wielościany maiące kąty wyskakuiące, czyli *wielościany wypukłe.* Pod tém nazwiskiem rozumieć będziemy te wielościany, których powierzchnią liniia prosta w dwoch tylko punktach przeciąć może. W tego rodzaiu wielościanach płaszczyzna iednéy ściany przedłużona nie może przeciąć bryły; niepodobna więc aby wielościan znaydował się wczęści nad, w części pod płaszczyzną iedneyże ściany, lecz iest cały z iednéy strony téyże płaszczyzny.

20. *Twierdz.* 1. Dwa wielościany maiące te same wierzchołki, i iednakową ich

liczbę, są tylko iednym wielościanem.

Daymy na to że ieden z tych wielościanów iest iuz wystawiony, gdybyśmy chcieli wystawić drugi maiący te same wierzchołki i tę samę ich liczbę, płaszczyzny iego niepowinnyby przechodzić przez też same punkta, co płaszczyzny pierwszego, bo inaczéy wielościany te wcaleby się od siebie nie różniły; lecz wtedy niektóre z nowo prowadzonych płaszczyzn przecinałyby pierwszy wielościan; byłyby więc wierzchołki nad i pod temi płaszczyznami, co być nie może w wielościanie wypukłym; dwa zatem wielościany maiące te same wierzchołki i tę samę ich liczbę, są tylko iednym wielościanem.

Uwaga. Maiąc dane co do położenia punkta A, B, C, K i t. p. fig. 24 które maią być wierzchołkami wielościanu, łatwo tenże wielościan wykreślić.

Weźmy 1ód trzy pnnkta przyległe sobie D, E, H, takie aby płaszczyzna

DEH, przechodziła przez punkta K i C, lecz aby wszystkie inne punkta znaydowały się z iednéy strony teyże płaszczyzny: płaszczyzna DEK lub DEHCK, tym sposobem wyznaczona, będzie iedną ścianą bryły. Przez ieden z iéy boków EH, poprowadźmy płaszczyznę, i te obracaymy, dopoki nie przyydzie na nowy wierzchołek F, lub też na kilka wierzchołków F, I, i t. d. a otrzymamy drugą ścianę FEH lub FEHI. Tak daley postępuymy prowadząc płaszczyzny przez znalezione boki, dopóki bryła nie będzie ze wszystkich stron zamknięta; a bryła tym sposobem otrzymana będzie wielościanem żądanym, bo nie mogą być dwa wielościany maiące te same wierzchołki.

21. *Twierdz.* 2. W dwoch wielościanach symetrycznych ściany odpowiadaiące są sobie równe, i nachylenie ścian przyległych w iednéy z tych brył, iest równe nachyleniu ścian odpowiadaiących w drugiey.

Dowodz. Niech będzie ABCDE wspólna podstawa dwoch wielościanów fig. 25; M i N wierzchołki dwóch którychkolwiek kątów bryłowych iednego wielościanu, a M' i N' wierzchołki odpowiadaiące drugiego wielościanu; stosownie do opisania brył symetrycznych, liniie MM' i NN' powinny być prostopadłe do płaszczyzny ABC, i nadto w punktach *m* i *n*, w których też płaszczyznę przecinaią, powinny być podzielone na dwie części równe. Dowiedziemy więc lod że liniia MN iest równa M'N'. Obracaiąc trapez *m*M' *n*N' około boku *mn*, dopoki iego płaszczyzna nie przyydzie na płaszczyznę *m*MN*n*; ponieważ kąty przy *m* i *n*, są proste, bok *m*M' padnie na równy mu *m*M *i n*N' *na n*N; dwa zatem tróykąty przystaną do siebie i będzie MN =M'N'. Niech będzie P trzeci wierzchołek wielościanu lgo a P odpowiadaiący wu wierzchołek wielościanu drugiego, będzie MP=M'P' i NP=N'P'; a tém samem tróykąt MNP łączący trzy którekoiwiek wierzchołki wielościanu pierwszego, iest równy tróykątowi M'N'P' łączącemu odpowiadaiące wierzchołki wielościanu drugiego. Jeżeli więc między temi tróykątami, te tylko uważamy, które się znayduią na powierzchni wielościanów, można iuż ztąd wnieść że powierzchnie tych dwoch wielościanów składaią się z iednakowéy liczby troykątów równych. Nadto ieżéli troykąty będące na powierzchni iednego wielościanu, znayduią się na iednéy płaszczyznie, i tworzą ścianę wielokątną, tróykąty im odpowiadaiące na powierzchni drugiego wielościanu, będą także na iednéy płaszczyznie i utworzą ścianę wielokątną równą pierwszéy. I tak niech będą MPN, i NPQ dwa tróykąty przyległe sobie leżące na iednéy płaszczyznie i M'P'N', i N'P'Q', tróykąty im odpowiadaiące; kąt MNP=M'N'P', i kąt PNQ=P'N'Q', a złączywszy MQ i M'Q', troykąt MNQ będzie równy M'N'Q', i kąt MNQ = M'N'Q'. Aże figura

MPNQ iest płeską, i kąt MNQ =MNP+ PNQ; więc także M'N'O' =M'N'P'+P'N'Q'. Gdyby więc trzy płaszczyzny M'N'P', P'N'Q', i M'N'Q'; nie były iedną płaszczyzną, składałyby kąt bryłowy, i byłby kąt M'N'O' <M'N'P' + P'N'Q' (33); aże, warunek ten nie ma mieysca, więc tróykąty M'N'P' i P'N'Q' znayduią się na iednéy płaszczyznie.

Ztąd wypada że każdéy ścianie czy to tróykątney, czy wielokątnéy w iednym wielościanie odpowiada ściana równa w drugim a tem samém że dwa wielościany składaią się z iednakowéy liczby ścian równych.

Pozostaie teraz dowieść że nachylenie dwoch ścian przyległych którychkolwiek w iednym wielościanie, iest równe nachyleniu ścian odpowiadaiących w drugim.

Niech będą MPN, NPQ dwa tróykąty na płaszczyznach dwoch ścian przyległych, których wspólnym bokiem iest krawędź NP; i M'P'N', P'N'Q tróykąty im odpowiadaiące, można sobie wystawić w punkcie N kąt bryłowy złożony z trzech kątów płaskich MNQ, MNP, PNQ a w punkcie N' takiż kąt złożony z kątów M'N'Q', M'N'P', P'N'Q'. Dowiedliśmy iuż że te kąty płaskie są sobie równe; a więc nachylenie dwoch ścian MNP, PNQ, iest równe nachyleniu ścian odpowiadaiących M'N'P', P'N'Q' (35). W dwoch zatem wielościanach symetrycznych, ściany są sobie równe i płaszczyzny dwoch ścian przyległych w iednéy z tych brył maią to samo nachylenie co płaszczyzny dwoch ścian odpowiadaiących w drugiey.

Uwaga. Łatwo tu widzieć ze kąty bryłowe iednego wielościanu są symetryczne względem kątów bryłowych drugiego wielościanu; bo ieżeli kąt bryłowy N składa się z kątów płaskich MNP, PNQ, QNR i t. d. kąt iemu odpowiadaiący N', składa się z kątów płaskich M'N'P'. P'N'Q', Q'N'R', i t. d. A lubo te zdaią się być ułożone w tym samym porządku co pierwsze, iednakże ponieważ dwa kąty bryłowe maią przeciwne położenie względem siebie, więc rzeczywiste położenie kątów płaskich składaiących kąt bryłowy N' iest przeciwne położeniu kątów płaskich składaiących kątiemu odpowiadaiący N. Nadto nachylenia płaszczyzn przyległych sobie są równe tak w iednym iak drugim kącie bryłowym, kąty więc te są symetryczne. Uwaga ta pokazuie że *iakikolwiek wielościan nie może mieć tylko ieden wielościan symetryczny*. Bo gdybyśmy wystawili na innéy podstawie nowy wielościan symetryczny z danym, iego kąty bryłowe, byłyby zawsze symetryczne z kątami bryłrwymi wielościanu danego, a tém samém byłyby równe kątom bryłowym wielościanu symetrycznego wystawionego na pierwszéy podstawie. Nadto ściany odpowiadaiące byłyby sobie zawsze równe, a zatem te dwa wielościany symetryczne, wystawione ua iednéy, i drugiéy podstawie, iako maiące ściany i kąty bryłowe równe, przystałyby do siebie i czyniłyby tylko ieden wielościan.

22\. *Twierdz.* 3. Dwa Graniastosłupy są równe, gdy maią po kącie bryłowym złożonym z trzech kątow płaskich równych, i iednakowo ułożonych

Dowodz. Niech będzie podstawa ABCDE równa podstawie *abcde* fig. 20 równoległobok ABGF równy równoległobokowi *abgf*, i równoległobok BCHG, równy równoległobokowi *bchg*, dowiedziemy że graniastosłup ABCI będzie równy graniastosłupowi *abci*. Przeniosłszy bowiem podstawę ABCDE, na podstawę *abcde*, te iako równe przystaną do siebie a ponieważ trzy kąty płaskie składaiące kąt bryłowy B, są równe trzem kątom płaskim składaiącym kąt bryłowy *b*, to iest że ABC=*abc*, ABG=*abg*, GBC=*gbc*, nadto ponieważ te kąty są iednakowo ułożone, więc kąty bryłowe B i *b* są równe (35) i krawędź BG, przystanie do iéy równéy krawędzi *bg*; a że równoległoboki ABGF i *abgf*, są równe, więc krawędź GF poydzie po *gf* i GH po *gh*; a tém samém podstawa górna FGHIK przystanie do iéy równéy podstawy *fghik*, i dwie bryły będą tylko iedną, iako maiące też same wierzchołki.

Wniosek. Dwa graniastosłupy proste maiące równe podstawy i wysokości, są równe. Iakoż gdy bok AB iest równy bokowi *ab*, i wysokość BG, równa wysokości *bg*; prostokąt ABGF iest równy prostokątowi *abgf*; dla teyże przyczyny prostokąt BGHC równy prostokątowi *bghc*, więc trzy płaszczyzny tworzące kąt bryłowy B, są równe trzem płaszczyznom, tworzącym kąt bryłowy *b*, a tem samém dwa graniastosłupy są równe.

23. *Twierdz*. 4. W każdym równoległościanie ściany przeciwne są sobie równe, i od siebie równoodległe.

Dowodz. Podług opisania równoległościanu podstawy ABCD i EFGH fig. 26, są równoległobokami równymi, i boki ich są równoległe; dowieść tylko należy że dwie ściany boczne przeciwne iak AEHD i BFGC, są także równe i od siebie równoległe. Ponieważ AD iest równe i równoódległe od BC, iako boki przeciwne w równoległoboku ABCD, i ponieważ dla teyże samey przyczyny AE iest równe i równoodległe od BF; więc kąt DAE, iest równy kątowi CBF (25) płaszczyzna DAE iest równoodległa od CBF. i równoległobok DAEH iest równy równoległobokowi CBFG. Podobnym sposobem dowiedziemy że równoległoboki przeciwne ABFE i DCHG, są równe i równoodległe.

Wniosek. Ponieważ równoległościan iest bryłą zamkniętą sześciu płaszczyznami, tak że przéciwne są sobie równe i od siebie równoodległe, więc którakolwiek ściana i iéy przeciwna, mogą być wzięte za iego podstawy.

Uwaga. Maiąc dane trzy liniie proste AB, AE, AD, przechodzące przez ieden punkt A, i czyniące z sobą kąty dane można na nich wystawić równoległościan, dla tego dosyć poprowadzić przez koniec każdey z tych liniy płaszczyznę równoodległą od płaszczyzny dwoch innych; to iest przez punkt B płaszczyznę równoodległą od DAE, przez punkt D, płaszczyznę równoodległą od DAE, a przez punkt E płaszczyznę równoodległą od BAD; a płaszczyzny te przecinaiąc się z sobą utworzą równoległościan żądany.

24. *Twierdz.* 5 W każdym równoległościanie kąty bryłowe przeciwne są symetryczne a przekątne przez wierzchołki tychże kątów poprowadzone dzielą się na dwie równe części.

Dowodz. Porównaymy np. kąt bryłowy A, z przeciwnym mu kątem G, fig. 26 kąt EAB, równy EFB iest także równy kątowi HGC, kąt DAE=DHE =CGF, i kąt DAB=DCB=HGF. więc trzy kąty płaskie składaiące kąt bryłowy A, są równe trzem kątom płaskim składaiącym kąt bryłowy G; nadto kąty te są przeciwnie ułożone a zatem *lód.* Dwa kąty bryłowe A i G są symetryczne. Poprowadźmy przekątne EC i AG przez wierzchołki przeciwne; ponieważ AE iest równe i równoodległe od CG, więc czworokąt AEGC równoległokiem, a tém samém przekątne iego AG i EC dzielą się na dwie równe części: podobnież okazać można, że przekątne EC i DF, dzielą się także na dwie równe części, więc 2*re* cztery przekątne równoległościanu przecinaią się na części równe w tym samym punkcie który można uważać za iego środek.

25. *Twierdz.* 6. Płaszczyzna BDHF fig. 27. przechodząca przez dwie krawędzie BF, DH równoodległe i przeciwne, dzieli równoległościan AG na dwa graniastosłupy tróykątne ABDHEF, GHFBCD symetryczne.

Dowodz. Dwie te bryły są graniastosłupami, gdyż tróykąty ABD i EFH, maiąc boki równe i równoodległe są równe; nadto ściany boczne ABFE: ADHE, BDHF są równoległobokami;

bryła więc ABDHEF iest graniastosłupem: toż samo rozumieć należy o bryle GHFBCD. Aby teraz okazać że te graniastosłupy są symetryczne, na podstawie ABD wystawmy graniastosłup ABDE'F'H' symetryczny z graniastosłupem ABDEFH. Podług tego co się wyżéy powiedziało (21) ściana ABF'E' iest równa ścianie ABFE, i ściana ADH'E' równa ścianie ADHE; lecz porównawszy graniastosłup GHFBCD z graniastosłupem ABDE'F'H', widzimy że podstawa GHF iest równa ABD, równoległobok GHDC równy ABFE iest także równy ABF'E', i równoległobok GFBC równy ADHE iest także równy równoległobokowi ADH'E'; więc trzy płaszczyzny tworzące kąt bryłowy G w graniastosłupie GHFBCD. są równe trzem płaszczyznom tworzącym kąt bryłowy A w graniastosłupie ABDH'E'F', nadto płaszczyzny te są iednakowo ułożone a zatem te dwa graniastosłupy są sobie równe, i mogą przystać do siebie (22); a że ieden z nich ABDH'E'F' iest symétryczny z graniastosłupem ABDHEF, więc i drugi GHFBDC iest także symetryczny z ABDHEF.

26. *Twierdz.* 7. Przecięcia graniastosłupa ABCI fig. 21 płaszczyznami równoodległemi są wielokątami równymi.

Dowodz. W wielokątach MOPQR, STNXY, które są przecięciami graniastosłupa płaszczyznami równoległemi, boki MO, ST, są równoodległe, iako przecięcia dwoch płaszczyzn równoodległych trzecią ABGF; nadto boki te są sobie równe, iako zawarte między równoległemi MS, OT krawędziami graniastosłupa. Dla podobnéyże przyczyny boki OP, PQ, QR, i t. d. przecięcia MOPQR są równe bokom TN, NX, XY i t. d. przecięcia STNXY. Nadto ponieważ te boki równe są razem i od siebie równoodległe, więc kąty MOP, OPQ i t. d. pierwszego są rowne kątom STN, TNX i t. d. drugiego przecięcia a tém samém przecięcia

MOPQR i STNXY są wielokatami równymi.

Wn. Przecięcie graniastosłupa płaszczyzną równoodległą od podstawy, iest równe teyże podstawie.

27. *Twierdz.* 8. Dwa graniastosłupy tróykatne symetryczne ABDHEF, BCDFGH fig. 28 na które rozkłada się równoległościan AG, sa równe co do bryłowatości.

Dowodz. Przez wierzchołki B i F poprowadźmy płaszczyzny B*adc*, F*ehg* prostopadłe do krawędzi BF, które przetną trzy inne krawędzie AE, DH, CG, tegoż równoległościanu, pierwsza w punktach *a*, *d*, *c*, druga w *e*, *h*, *g*, przecięcia B*adc* i F*ehg* będą równoległobokami równymi, bo płaszczyzny przecinaiące równoległościan iako prostopadłe do iednéy linii prostey są od siebie równoodległe, nadto boki przeciwne *a*B i *dc* tegoż samego przeciecia są przecięciami dwoch płaszczyzn równoodległych ABFE i DCGH, trzecią płaszczyzną. Dla podobneyże przyczyny czworokąt B*ac*F iest równoległobokiem, równie i inne ściany boczne BF*gc*, *cdhg*, *adhe*, bryły B*adc* F*ehg*, bryła więc ta iest graniostosłupem prostym bo krawędź BF iest prostopadła do podstawy.

Podzieliwszy teraz graniastosłup prosty B*h* płaszczyzną BFHD, na dwa graniastosłupy tróykątne proste *a*B*de*F*h* i B*dc*F*hg*, dowiedziemy że graniastosłup tróykątny ukośny ABDEFH iest równy co do bryłowatości graniastosłupowi tróykątnemu prostemu *a*B*de*F*h*. Ponieważ te graniastosłupy maią wspólną część ABD*he*F, więc dosyć będzie okazać, że części pozostałe to iest bryły B*a*AD*d* i F*e*EH*h*, są równe co do bryłowatości. Ponieważ ściany ABFE i *a*BF*e* są równoległobokami, więc krawędzie AE i *ae* równe od nich równoodległéy BF, są także sobie równe, odiąwszy zatem wspólną część AE zostanie A*a*=E*e*. Podobnież dowiedziemy że D*d*=H*h*. Aby téraz dwie bryły B*a*AD*d* i F*e*EH*h* przystały do siebie przenieśmy podstawę Fch na iéy równą Bad; ponieważ punkt e, padnie na a, i punkt h na d, krawędzie eE i Hh, póydą po im równych krawędziach Aa i Dd, iako prostopadłe doiednéy płaszczyzny Bad; a tém samém dwie bryły o których mowa, przystaną do siebie; graniastosłup więc ukośny BADFEH, iest równy co do bryłowatości graniastosłupowi prostemu $Bad\,Feh$.

Podobnież dowiedziemy że graniastosłup ukośny BDCFHG iest równy co do bryłowatości graniastosłupowi prostemu $Bdc\ Fhg$. Aże dwa graniastosłupy proste $BadFeh$ i $Bdc\ Feh$ są sobie równe, bo maią wspólną wysokość EF, a podstawy ich Bad i Bdc, są połowami iednegoż równoległoboku, więc dwa graniastosłupy tróykątne ABDFEH, BDCFHG, równe co do bryłowatości, dwom równym graniastosłupom, są także sobie równe co do bryłowatości.

Wniosek. Każdy graniastosłup tróykątny ABDHEF, iest połową równoległościanu AG, maiącego ten sam kąt bryłowy A, i te same krawędzie AB, AD, AE.

28. *Twierdz.* 9. Dwa równoległościany AG i AL, fig. 29 maiące wspólną podstawę ABCD, a podstawy górne EFGH i IKLM, na iedney płaszczyznie zawarte między liniami równoodległemi EK, HL, są równe co do bryłowatości.

Dowodz. Mogą tu być trzy przypadki, według tego iak EI, iest większe, mnieysze, lub równe EF; lecz dowodzenie iest zawsze to samo, a lód dowiedziemy że graniastosłup tróykątny AEIDHM iest równy graniastosłupowi BFKCGL.

Ponieważ AE iest równe i równoodległe od BF i HE równe i równoodległe od GF, więc kąt AEI=BFK, HEI=GFK, i HEA=GFB. Z tych sześciu kątów trzy pierwsze składaią kąt bryłowy E, a trzy drugie kąt bryłowy F, że zaś te kąty płaskie są sobie równe i iednakowo ułożone, więc i kąty bryłowe E i F są sobie równe. Przeniosłszy graniastosłup AEM na graniastosłup BFL, tak aby podstawa AEI przystała do podstawy BFK, krawędź EH póydzie po krawędzi FG, bo kąty bryłowe E i F są sobie równe, a tém samém dwa graniastosłupy przystaną do siebie, bo podstawa AEI i krawędź EH wyznaczaią graniastosłup AEM, a podstawa BFK, i krawędź FG, graniastosłup BFL. Od całey bryły AL odiąwszy graniastosłup AEM, zostanie równoległościan AIL: od teyże samey bryły AL odiąwszy graniastosłup BFL, zostanie równoległościan AEG; dwa zatém równoległościany AIL, AEG, są równe co do bryłowatości.

29. *Twierdz.* 10. Dwa równoległościany maiące równe podstawy i wysokości są równe co do bryłowatości.

Dowodz. Niech będzie ABCD podstawa wspólna dwoch równoległościanów AG i AL fig. 30; ponieważ te równoległościany maią wspólną wysokość więc ich podstawy górne EFGH, IKLM, będą na iednéy płaszczyznie, Nadto, krawędzie są EF i AB równe i równoodległe, podobnież krawędzie IK i AB; więc EF iest równe i równoodległe od IK; dla podobneyże przyczyny GF iest równe i równoodległe od LK. Liniie EF i HG, tudzież LK i IM przedłużmy aż do przecięcia się z sobą, powstanie ztąd równoległobok NOPQ, równy każdéy z podstaw EFGH i IKLM. Równoległobok ten wziąwszy za podstawę górną trzeciego równoległościanu, maiącego tęż samę podstawę dolną ABCD, ten będzie równy równoległóścianowi AG (28) bo obadwa maią tę samę podstawę dolną a podstawy górne na iednéy płaszczyznie zawarte między równoodległemi GQ, FN. Dla teyże samey przyczyny ten trzeci równoległościan, iest równy równoległościanowi AL; a więc dwa równoległościany AG i AL maiące równe podstawy i wysokości są równe co do bryłowatości.

30. *Twierdz.* 11. Każdy równoległościan może być zamieniony na równoległościan prostokątny równy mu co do bryłowatości, maiący tę samę wysokość i równą podstawę.

Dowodz. Niech będzie AG fig. 30 dany równoległościan, z punktów A, B, C, D wyprowadźmy AI, BK, CL, DM, prostopadłe do płaszczyzny podstawy, otrzymamy tym sposobem równoległościan AL równy co do bryłowatości równoległościanowi AG, którego ściany boczne AK, BL i t. d. będą prostokątami. Jeżeli więc podstawa AC iest prostokątem, równoległościan AL będzie prostokątnym równym co do bryłowatości równoległościanowi danemu AG. Lecz gdy ABCD nie iest prostokątem, poprowadźmy fig. 31 AO i BN prostopadłe do CD, tudzież OQ i NP prostopadłe do podstawy, otrzymamy bryłę ABNOIKPQ, która będzie równoległościanem prostokątnym. Jakoż z wykreślenia podstawa ABNO i iey przeciwna IKPQ są prostokątami, ściany boczne są także prostokątami, bo NP, OQ, i t. d. są prostopadłe do podstawy, a tém samém bryła AP iest równoległościanem prostokątnym. Aże dwa równoległościany AP i AL można uważać iako maiące wspólną podstawę ABKI, i wysokość AO, a tém samém równe co do bryłowatości; więc równoległościan AG fig. 30 zamieniony naprzod na równóległościan AL, iest teraz zamieniony na równoległościan prostokątny AP fig. 31, maiący tęż samę wysokość AI, a za podstawę prostokąt ABON rowny podstawie ABCD.

31. *Twierdz.* 12. Dwa równoległościany prostokątne AG, AL fig. 33 maiące wspólną podstawę ABCD, są do siebie iak ich wysokości AE i AI.

Dowodz. Przypuśćmy 1*od* że wysokości AE i AI są do siebie iak liczby całkowite, *np.* iak 15 do 8. Podzielmy wysokość AE na 15 części równych, z których AI zamykać będzie 8, i przez punkta podziału x, y, z, i t. d., poprowadźmy płaszczyzny równoodległe od podstawy. Płaszczyzny te podzielą równoległościan AG na 15 równoległościanów równych iako maiących równe wysokości, i podstawy, gdyż te ostatnie są przecięciami równoległościanu AG płaszczyznami równoodległemi od iego podstawy (29). Z tych zaś 15 równoległościanów równych, 8 zawiera równoległościan AL; a więc równoległościan AG, tak iest do równoległościanu AL, iak 15 do 8, albo w ogolności iak wysokość AE do wysokości AI. 2re Gdy stosunek AE do AI, nie może być wyrażony w liczbach, będzie także równol: AG: równol: AL=AE:AI. Bo ieżeli ta proporcya nie iest prawdziwa, daymy na to: że iest równol: AG: równol. AL=AE: AO. Podzielmy AE na części równe, byle mnieysze od OI, przynaymniéy ieden punkt podziału m przypadnie między O i I. Niech będzie P równoległościan maiący podstawę ABCD a wysokość A*m*. Ponieważ wysokości AE i A*m* są do siebie iak liczby całkowite, więc będzie równol: AG: P = AE. A*m*. Aże z przypuszczenia rów. AG: rów. AL=AE: AO, więc będzie równol: AL: P = AO: A*m*. Lecz AO iest większe od A*m*, zatém aby ta proporcya miała mieysce, musiałby także równoległościan AL, być większy od P, gdy przeciwnie iest mnieyszy: wyraz zatem czwarty proporcyi równol. AG: AL=AE: AI nie może być liniią większą od AI. Podobném rozumowaniem okazalibyśmy że czwarty wyraz nie może być mnieyszy od AI, a tém samém musi być równy AI, dwa zatem równoległościany prostokątne, maiące iednę podstawę, są do siebie iak wysokości.

32. *Twierdz.* 13. Dwa równoległościany prostokątne AG, i AK fig. 32 maiące wspólną wysokość AE, są do siebie iak ich podstawy ABCD i AMNO.

Dowodz. Postawiwszy dwa równoległościany obok siebie iak figuza okazuie, przedłużmy płaszczyznę ONKL, do przecięcia płaszczyzny DCGH podług linii PQ, otrzymamy trzeci równoległościan AQ, który można porównać z każdym z równoległościanów AG, AK. Dwa równoległościany AG i AQ, maiące wspólną podstawę AEHD, są do siebie iak ich wysokości AB i AO; podobnież dwa równoległościany AQ i AK, maiące wspólną podstawę AOLE są do siebie iak ich wysokości AD, i AM. Otrzymamy zatem dwie proporcye:

równol. AG: równol: AQ=AB: AO.

równol. AQ: równol: AK=AD: AM.

których wyrazy odpowiadaiące rozmnożywszy przez siebie, i podzieliwszy pierwszy stosunek ztąd wynikłéy proporcyi przez wspólny czynnik równol. AQ, będzie.

równol. AG: równol: AK=AB
×AD: AO×AM.

Aże AB×AD znaczy podstawę ABCD,

a $AO \times AM$, podstawę AMNO, więc dwa równoległościany maiące wspólną wysokość są do siebie iak ich podstawy.

83. *Twierdz.* 14. Dwa iakiekolwiek równoległościany prostokątne są do siebie, iak iloczyny z ich podstaw przez wysokości albo iak iloczyny z trzech wymiarów.

Dowodz. Postawiwszy dwa równoległościany AG, i AZ fig. 32 tak, aby ich powierzchnie miały wspólny kąt BAE, przedłużmy płaszczyzny, potrzebne do utworzenia trzeciego równoległościanu AK, maiącego tę samę wysokość co równoległościan AG. Podług twierdzenia poprzedzaiącego.

równol. AG:równol.AK=ABCD: AMNO.

Aże dwa równoległościany AK i AZ maiące wspólną podstawę AMNO, są do siebie iak ich wysokości AE i AN, więc.

równol. AK: równol: AZ=AE: AN.

Rozmnożywszy przez siebie wyrazy odpowiadaiące tych dwoch proporcyy i podzieliwszy pierwszy stosunek proporcyi stąd wynikłéy przez równol. AK, będzie:

równol. AG: równol: AZ=ABCD ×AE: AMNO×AN.

Zamiast podstaw ABCD i AMNO móżna wstawić AB×AD i AO×AM, przez co proporcya poprzedzaiąca zamieni się w następuiącą:

równol. AG: równol. AZ= AB×AD ×AE: AO×AM×AN

Uwaga. Ztąd wypada że za miarę równoległościanu prostokątnego można wziąść iloczyn z iego podstawy przez wysokość, czyli iloczyn z trzech iego wymiarów. Na téy to zasadzie obliczać będziemy wszystkie bryły. Dla zrozumienia téy miary, przypomnieć sobie należy, że przez iloczyn z dwoch lub ilukolwiek liniy rozumiemy iloczyn z liczb, tez liniie wyrażaiących, a liczby te zależą od iedności liniynéy, którą wziąć można od upodobania: iloczyn więc z trzech wymiarów równoległościanu iest liczba przez się nic nie znacząca, a która innaby była, gdyby wzięto inną iedność liniyną. Lecz rozmnożywszy podobnież trzy wymiary innego równoległościanu, obliczaiąc ie podług téy saméy iedności liniynéy, dwa takie iloczyny, będą do siebie w stosunku brył, i dadzą wyobrażenie o ich względnéy wielkości. Wielkość bryły, iey obiętość lub iéy rozciągłość stanowią to co nazywamy iéy bryłowatością, a wyraz bryłowatość używa się szczególniéy dla oznaczenia miary bryły; itak mowi się: że bryłowatość równoległościanu prostokątnego iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość, czyli iloczynowi z trzech iego wymiarów.

Ponieważ trzy wymiary sześcianu są sobie równe, więc gdy krawędź iest 1, iego bryłowatość będzie $1 \times 1 \times 1$ czyli 1, gdy krawędź iest 2 bryłowatość będzie $2 \times 2 \times 2$ czyli 8, gdy krawędź iest 3 bryłowatość będzie $3 \times 3 \times 3$ czyli 27; gdy więc krawędzie sześcianów są iak liczby 1, 2, 3 i t. d. sześciany czyli ich bryłowatości są iak liczby 1, 8, 27 i t. d. Ztąd to pochodzi że w arytmetyce nazywamy *sześcianem* liczby iloczyn z trzech czynników równych teyże liczbie.

Chcąc wystawić sześcian dwa razy większy od danego, potrzebaby mu dać krawędź, którąby była do krawędzi sześcianu danego iak pierwiastek sześcienny liczby 2 do 1. A lubo łatwo przez wykreslenie ieometryczne znayduie się pierwiastek kwadratowy 2, nie można iednak tym sposobem znaleść pierwiastku sześciennego téy liczby, przynaymniéy przez proste działania ieometryi początkowey, które się zasadzaią iedynie na użyciu liniy prostych, których wiadome są dwa punkta, i kół których środki i promienie są wyznaczone. Z przyczyny też tey trudności zagadnienie o *podwoieniu sześcianu*, było równie sławne u dawnych ieometrów iak zagadnienie o podzieleniu kąta na trzy równe części, które iest prawie tego samego rodzaiu. Lecz oddawna wiadome sę rozwiązania, iakie mogą mieć zagadnienia tego rodzaiu, które lubo nie tak proste iak wykreślenia początkowéy ieometryi, nie są przecięż ani mniéy dokładne ani też mniéy ściśłe.

34. *Twierdz.* 15. Bryłowatość równoległościanu, a w ogólności bryłowatość iakiegokolwiek graniastosłupa równa iest iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.

1*mo*. Równoległościan iakikolwiek iest równy co do bryłowatości równoległościanowi prostokątnemu, maiącemu tę samę wysokość i równą podstawę. Aże bryłowatość równoległościanu prostokątnego iest równa iego podstawie pomnożonéy przez wysokość, więc i bryłowatość każdego równoległościanu iest także równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.

2*re*. Każdy graniastosłup tróykątny iest połową równoległościanu maiącego tę samę wysokość, a dwa razy większą podstawę; aże bryłowatość równoległościanu równa iest iloczynowi z iego podstawy przez wysokość, więc bryłowatość graniastosłupa tróykątnego, iest równa iloczynowi z iego podstawy, będącéy połową podstawy równoległościanu, przez wysokość.

3cie. Graniastosłup iakikolwiek może być podzielonym na tyle graniastosłupów tróykątnych maiących tę samę wysokość, na ile tróykątów da się podzielić wielokąt będący iego podstawą. Bryłowatość każdego graniastosłupa tróykątnego iest równa iego podstawie pomnożonéy przez wysokość, aże wysokość iest wspólna wszystkim, więc summa wszystkich graniastosłupów cząstkowych, będzie równa summie wszystkich tróykątów ich podstawami będących pomnożonéy przez wspólną im wysokość. Bryłowatość zatem iakiegokolwiek graniastosłupa wielokątnego, iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.

Wn. Porównawszy dwa graniastosłupy maiące równą wysokość, iloczyny z ich podstaw przez wysokości będą iak podstawy: a więc dwa graniastosłupy maiąc równą wysokość, są do siebie iak podstawy, a dla podobneyże przyczyny dwa graniastosłupy maiące równą podstawę są do siebie iak ich wysokości.

35. *Twierdz.* 16. Gdy piramida SABCDE fig. 34 przecięta iest płaszczyzną *abcde* równoodległą od podstawy, 1*od* Krawędzie SA, SB, SC, it. d. i wysokość SO podzielone są na części proporcyonalne w punktach *a*, *b*, *c*,... *i o*, 2*re*. Przecięcie *abcde* iest wielokątem podobnym podstawie.

Dowodz. Co do 1go. Ponieważ płaszczyzny ABC, i *abc* są równoodległe, więc ich przecięcia AB i *ab* trzecią płaszczyzną SAB, będą także równoodległe, a tém samem troykąty SAB i *Sab* są podobne, i SA: Sa=SB: *Sb*; podobnież SB; *Sb*=SC: *Sc*, i t. d. Wszystkie zatem krawędzie SA, SB, SC.... przecięte są w punktach *a*, *b*, *c*,... na części proporcyonalne. Nadto wysokość SO iest także przecięta w punkcie o na części proporcyonalne, bo BO i *bo* są równoodległe, a zatém SO:So=SB:Sb.

2re. Ponieważ AB iest równoodlęgłe od *ab*, BC od *bc*, CD od *cd* i t. d. więc kąt *abc* =ABC kąt *bcd*=BCD i t. d. Nadto ponieważ w tróykątach podobnych SAB i S*ab*, iest AB: *ab* =SB: S*b*, tudzież w tróykątach SBC, S*bc* podobnych iest: SB: S*b*= BC: *bc* więc AB: *ab*=BC: *bc* i t. d. Wielokąty zatem ABCDE i *abcde* iako maiące kąty równe i boki odpowiadaiące proporcyonalne są podobne.

Wn. Niech będą SABCDE i SXYZ dwie piramidy maiące wspólny wierzchołek, i iednę wysokość, czyli których podstawy leżą na iednéy płaszczyznie, przeciąwszy te piramidy płaszczyzną równoodległą od płaszczyzny ich podstaw, przecięcia *abcde* i

iyz, będą do siebie w stosunku podstaw.

Ponieważ wielokąty ABCDE i $abcde$, są podobne, więc powierzchnie ich są do siebie w stosunku kwadratów z boków odpowiadaiących AB i ab, aże $AB : ab = SA : Sa$, więc $ABCDE : abcde = SA^2 : Sa^2$. Dla teyże saméy przyczyny $XYZ : iyz = SX^2 : Si^2$. Aże $abcde$, iyz są tylko iedną płaszczyzną, więc $SA : Sa = SX : Si$, a tém samém: $ABCDE : abcde = XYZ : iyz$, to iest przecięcia $abcde$ i iyz są do siebie iak podstawy ABCDE i XYZ. Jeżeli więc podstawy ABCDE i XYZ są równe co do powierzchni, przecięcia równo oddalone od tychże podstaw są także równe co do powierzchni.

36. *Twierdz.* 17. Dwie piramidy tróykątne maiące równe podstawy i wysokości, są równe co do bryłowatości.

Dowodz. Niech będą dwie piramidy SABC i $sabc$ fig. 35, których podstawy ABC i abc z przypuszczenia leżące na iednéy płaszczyznie, są równe co do powierzchni, maiące wspólną wysokość TA; ieżeli piramidy te nie są równe co do bryłowatości, daymy że *sabc* iest mnieysza, i weźmy AX za wysokość graniastosłupa wystawionego na podstawie ABC, równego ich różnicy. Podzielmy wysokość wspólną AT na części równe mnieysze od AX, i daymy na to, że *k*, iest iedną z tych części; przez punkta podziału wysokości, poprowadźmy płaszczyzny równoodległe od płaszczyzny ich podstaw; przecięcia obu piramid ztąd wynikłe iak DEF i *def*, KLM i *klm* będą równe co do powierzchni (35). Na tróykątach ABC, DEF, KLM i t. d. wziętych za podstawy wystawmy graniastosłupy, których krawędziami będą części AD, DK, KN i t. d. krawędzi SA; a na tróykątach *def*, *klm*, *nop* wziętych za podstawy w drugiéy piramidzie graniastosłupy, których krawędziami będą odpowiadaiące części krawędzi *sa*, wszystkie te graniastosłupy cząstkowe będą miały wspólną wysokość *k*.

Summa graniastosłupów znayduiących się zewnątrz piramidy SABC, iest większa od teyże piramidy, a summa graniastosłupów będących wewnątrz piramidy *sabc*, iest od niéy mnieysza, więc różnica zachodząca między temi dwiema summami graniastosłupów powinna być większa od różnicy zachodzącéy między dwiema piramidami. Lecz począwszy od ABC i *abc*, drugi praniastosłup zewnętrzny DEFK, równy iest pierwszemu wewnętrznemu *defa*, bo maią podstawy DEF i *def* równe, i wspólną wysokość *k*; dla teyże przyczyny trzeci graniastosłup KLMN i drugi *klmd* są równe i t. d. aż do ostatniego tak z pierwszych iak drugich. Wszystkie zatem graniastosłupy będące zewnątrz piramidy SABC, prócz pierwszego ABCD, maią równe graniastosłupy wewnątrz piramidy *sabc*. Graniastosłup zatem ABCD iest różnicą między summą graniastosłupów pierwszych i drugich; lecz ta różnica między dwiema summami graniastosłupów iest większa od różnicy piramid, graniastosłup zatem ABCD, musiałby być większy od graniastosłupa ABCX; gdy przeciwnie iest mnieyszy, bo obadwa maiąc wspólną podstawę ABC, wysokość *k* pierwszego, iest mnieysza od wysokości A*x* drugiego. Przypuszczenie zatem nasze nie może mieć mieysca, a tém samém dwie piramidy SABC i *sabc* maiące równe podstawy i wysokości są równe co do bryłowatości.

37. *Twierdz.* 18. Piramida tróykątna iest trzecią częścią graniastosłupa tróykątnego, maiącego tę samę podstawę i wysokość.

Dowodz. Niech będzie SABC fig. 36 piramida troykątna ABCDES, graniastosłup tróykątny maiący tę samą podstawę i wysokość, dowiedziemy, że piramida iest trzecią częścią graniastosłupa. Odiąwszy od graniastosłupa piramidę SABC, zostanie bryła SACDE, którą można uważać za piramidę czworokątną maiącą wierzchołek w punkcie S, a za podstawę równoległobok ACDE; poprowadziwszy przekątną CD, i płaszczyznę SCD, ta podzieli piramidę czworokątną na dwie tróykątne SACD i SDCE. Wysokością wspólną tych dwóch piramid iest prostopadła spuszczona z wierzchołka S na płaszczyznę ACDE; nadto podstawy ich ACD i DCE są równe, iako połowy iednegoż równoległoboku; dwie więc piramidy SACD i SDCE są równe co do bryłowatości; lecz piramidy SDCE i SABC, maią równe podstawy ABC i DES, i równe wysokości, bo te są odległościami płaszczyzn równoodległych ABC i DES: piramidy więc te są równe; aże piramida SDCE iest równa piramidzie SACD, więc trzy piramidy SABC, SDCE i SACD składaiące graniastosłup ABD, są równe sobie co do bryłowatości, a tém samém iedna z nich SABC iest trzecią częścią tegóż graniastosłupa.

Wn. Bryłowatość piramidy tróykątnéy iest równa trzeciéy części iloczynu z iéy podstawy przez wysokość.

38. *Twierdz.* 19. Bryłowatość piramidy iakiéykolwiek SABCDE, równa iest trzeciéy części iloczynu z iéy podstawy ABCDE, przez wysokość SO fig. 34.

Dowodz. Poprowadziwszy płaszczyzny SEB, SEC przez przekątne EB, EC, podzielimy piramidę wielokątną SABCDE na piramidy tróykątne maiące wspólną wysokość SO; aże podług twierdzenia poprzedzaiącego każda z tych piramid iest równa iloczynowi ze swéy podstawy ABE, BCE, CDE, przez trzecią część wysokości SO, więc summa piramid tróykątnych, to iest piramida wielokątna SABCDE, równa iest iloczynowi z summy tróykątów ABE, BCE, CDE czyli wielokąta ABCDE przez $\frac{1}{3}$ *SO*.

Wn. 1. Każda piramida iest trzecią częścią graniastosłupa maiącego tę samą podstawę i wysokość.

Wn. 2. Dwie piramidy maiące równe

wysokości są w stosunku ich podstaw a maiące równe podstawy są w stosunku ich wysokości.

Uwaga. Bryłowatość każdego wielościanu można obliczyć, rozkładaiąc go na piramidy; któryto rozkład może być wykonany wielu sposobami, nayłatwiéy się zaś uskuteczniać da prowadząc płaszczyzny podziału przez wierzchołek iednego kąta bryłowego; tym sposobem wielościan rozłoży się na tyle piramid cząstkowych, ile ma ścian, prócz tych które tworzą kąt bryłowy przez który przechodzą płaszczyzny podziału.

39. Twierdz. 20. Dwa wielościany symetryczne, są równe co do bryłowatości.

Dowodz. 1*ód* dwie piramidy tróykątne symetryczne SABC TABC fig. 22 są równe iloczynowi z podstawy ABC, przez trzecią część wysokości SO lub TO, piramidy więc te są równe sobie co do bryłowatości. 2*re* podzieliwszy iakimkolwiek sposobem ieden z wielościanów na piramidy tróykątne, można także podzielić drugi wielościan na piramidy symetryczne, aże piramidy tróykątne symetryczne są równe co do bryłowatości, więc i całe, dwa wielościany będą sobie także równe co do bryłowatości.

40. *Twierdz.* 21. Piramida ścięta płaszczyzną równoodległą od podstawy iest równa summie trzech piramid maiących za wspólną wysokość wysokość piramidy ściętéy, a za podstawy, iedna podstawę dolnę piramidy ściętéy, druga iéy podstawę górną a trzecia średnio-ieometrycznie proporcyonalną do tych dwóch podstaw.

Dowodz. Niech będzie SABCDE fig, 37. piramida ścięta płaszczyzną *abd* równoodległą od podstawy i TFGH piramida tróykątna, któréy podstawa i wysokość równe są podstawie i wysokości piramidy SABCDE. Przypuściwszy że podstawy obu piramid są na iednéy płaszczyznie płaszczyzna, *abd* przedłużona przetnię piramidę tróykątną podług tróykąta *fgh*, leżącego w téy saméy odległości od płaszczyzny podstaw co *abd*, idzie zatém że przecięcie *fgh*. iest równe przecięciu *abd*, bo i podstawa FGH iest równa podstawie ABD (34). Piramidy S*abcde* i T*fgh* są równe co do bryłowatości, bo maią iednę wysokość i równe podstawy, dla téyże przyczyny i całe piramidy SABCDE i TFGH są równe, więc i piramidy ścięte ABD*abd* i FGH*fgh* są sobie równe co do bryłowatości, dosyć zatem będzie dowieść twierdzenia dopiero wysłowionego na piramidzie ściętéy tróykątnéy.

Niech więc będzie FGH*hfg* fig. 38 piramida tróykątna ścięta o podstawach równoodległych: przez punkta F, g, H, poprowadziwszy płaszczyznę FgH, ta odetnie od piramidy ściętéy piramidę troykątną gFGH, któréy podstawą iest podstawa dolna FGH piramidy ściętéy, a wysokość równa wysokości piramidy ściętéy, bo wierzchołek g, znayduie się na płaszczyznie podstawy górnéy *fgh*. Po odięciu téy piramidy, zostanie piramida czworokątna *gfh* HF, któréy wierzchołek iest g, a podstawa *fh* HF. Przez punkta *f*, g, H, poprowadziwszy płaszczyznę *f*gH, ta podzieli piramidę czworokątną na dwie tróykątne gF*f*H i *gfh*H, z których ostatnia ma za podstawę podstawę górną *gfh* piramidy ściętéy, a za wysokość wysokość teyże piramidy ściętéy, bo iey wierzchołek H znayduie się na podstawie dolnéy. Pozostaie teraz trzecia piramida gF*f*H, poprowadźmy liniią gK równoodległą od *f*F, i wystawmy sobie nową piramidę *f*FHK, maiącą za podstawę tróykąt F*f*H, a wierzchołek w punkcie K, te dwie piramidy iako maiące wspólną podstawę F*f*H, iednakową wysokość, bo ich wierzchołki g i K znayduią się na linii gK równoodległéy od F*f*, a tèm samém od płaszczyzny ich podstaw, są równe co do bryłowatości Lecz w piramidzie *f*FKH można uważać za wierzchołek punkt

f, a za podstawę tróykąt FKH, a tak piramida ta będzie miała tę samę wysokość co piramida ścięta: dowieść tylko wypada że iéy podstawa iest średnio-ieometrycznie proporcyonalną do podstaw FGH i fgh. Ponieważ w tróykątach FHK i fgh kąt $F = f$ i bok $FK = fg$, więc $FHK : fgh = FH : fh$, nadto $FHG : FHK = FG : FK$ lub fg. Lecz w tróykątach podobnych FGH i fgh iest $FG : fg = FH : fh$; więc $FGH : FHK = FHK : fgh$. Podstawa zatém FHK iest średnio-ieometrycznie proporcyonalną do podstaw FGH, fgh,

41. *Twierdz.* 22. Graniastosłup tróykątny ABCDES fig. 39 ścięty płaszczyzną nierównoodległą od podstawy, równy iest summie trzech piramid, których wierzchołkami są punkta D, E, S, a wspólną podstawą tróykąt ABC.

Dowodz. Przez trzy punkta S, A, C, poprowadźmy płaszczyznę SAC, ta odetnie od graniastosłupa ściętego piramidę tróykątną SABC, któréy podstawą iest tróykąt ABC, a wierzchołek w punkcie S. Po odcięciu téy piramidy, zostanie piramida czworokątna SACDE, maiąca wierzchołek w punkcie S, a za podstawę czworokąt ACDE. Przez trzy punkta S, E, C poprowadziwszy płaszczyznę SEC, ta podzieli piramidę czworokątną na dwie tróykątne SACE i SCDE. Piramida SACE, maiąca za podstawę tróykąt AEC, a za wierzchołek punkt S, równa iest piramidzie EABC, maiącéy za podstawę tróykąt AEC, a wierzchołek w punkcie B; gdyż dwie te piramidy maiąc wspólną podstawę maią także i wspólną wysokość, bo liniia BS równoodległa od każdéy z linii AE i CD, iest tém samém równoodległa od płaszczyzny ACE; lecz w piramidzie EABC, można uważać za podstawę tróykąt ABC, a za wierzchołek punkt E. Trzecia piramida SCDE, może być zamieniona lód na piramidę ASCD, bo te piramidy maiąc wspólną podstawę SCD maią także równą wysokość, gdyż liniia AE iest równoodległa od płaszczyzny SCD piramida zaś ASCD; może być zamieniona na piramidę ABCD, bo maią wspólną podstawę ACD, i równe wysokości, gdyż ich wierzchołki S i B, znayduią się na linii równoodległéy od ich wspólnéy podstawy. Piramida więc SCDE równa piramidzie ASCD iest także równa piramidzie ABCD, w któréy można wziąć za podstawę tróykąt ABC, a za wierzchołek punkt D.

Wn. Gdy krawędzie AE, BS, CD są prastopadłe do podstawy, krawędzie, te będą zarazem wysokościami piramid składaiących graniastosłup ścięty, bryłowatość zatem całego graniastosłupa ściętego, wyrazi się przez $\frac{1}{3}$ ABC $\times$ AE $+\frac{1}{3}$ ABC $\times$ BS $+\frac{1}{3}$ ABC $\times$ CD czyli $\frac{1}{3}$ ABC (AE+BS+CD).

42. *Twierdz.* 23. W dwóch piramidach tróykątnych podobnych ściany odpowiadaiące są podobne, a kąty bryłowe równe.

Dowodz. Podług opisania (17) dwie piramidy tróykątne SABC, i TDEF fig.

23, są podobne, gdy dwa tróykąty SAB i ABC, są podobne dwom tróykątom TDE DET, i iednakowo ułożone, to iest kąt ABS=DET. BAS =EDT, ABC=DEF, BAC=EDF, a nadto gdy nachylenie płaszczyzn SAB i ABC, iest równe nachyleniu płaszczyzn TDE i DEF.

Wziąwszy BG=ED, BH=EF, BI =ET, połączmy GH, GI, IH. Piramida TDEF iest równa piramidzie IGBH; bo skoro boki GB i BH są z wykreślenia równe bokom DE i EF, i kąt GBH równy z przypuszczenia DEF, tróykąt GBH iest równy tróykątowi DEF; więc aby te dwie piramidy przystały do siebie, można naprzód przenieść podstawę DEF, na iéy równą GBH: daléy, ponieważ nachylenie płaszczyzny DTE, do DEF iest równe nachyleniu płaszczyzny SAB do ABC, więc płaszczyzna DET padnie na ABS, aże nadto z przypuszczenia kąt DET=GBI, więc ET padnie na BI: cztery zatem punkta D, E, F, T, piramidy pierwszéy przystaią do czterech punktów G, B, H, I piramidy drugiey, a ztądi piramida TDEF przystanie do piramidy IGBH. Ponieważ tróykąty DEF i GBH są równe, więc kąt BGH=EDF=BAC, a tém samém GH iest równoodległe od AC Dla podobneyże przyczyny GI iest równoodległe od AS; a zatém płaszczyzna IGH iest równoodległa od SAC. Ztąd wypada, że tróykąt IGH lub iemu równy TDF iest podobny tróykątowi SAC, i tróykąt IBH, lub iemu równy TEF podobny tróykątowi SBC, w dwóch zatem piramidach tróykątnych podobnych ściany odpowiadaiące są podobne. Nadto kąty bryłowe są równe; iuż albowiem kąt bryłowy E przystał do odpowiadaiącego B; toż samo zrobićby można z dwoma innymi odpowiadaiącymi kątami bryłowemi; lecz widzimy bezpośrednio że dwa kąty bryłowe odpowiadaiące np. T i S są równe bo się składaią z trzech kątów płaskich równych i iednakowo ułożonych.

W dwóch więc piramidach tróykątnych podobnych ściany odpowiadaiące są podobne i kąty bryłowe odpowiadaiące równe.

Wn. 1. Z tróykątów podobnych w obu piramidach wypadaią następuiące proporcye AB: DE=BC: EF=AC: DF =AS: DT=SB: TE=SC: TF; więc w piramidach tróykątnych podobnych krawędzie odpowiadaiące są proporcyonalne.

2*gi.* Ponieważ kąty bryłowe odpowiadaiące są równe, więc nachylenie dwóch ścian którychkolwiek w iednèy piramidzie iest równe nachyleniu ścian odpowiadaiących w piramidzie podobnéy.

3*ci.* Przeciąwszy piramidę tróykątną SABC, płaszczyzną GHI równoodległą od iednèy ze ścian SAC, piramida odcięta BGHI, będzie podobna całéy piramidzie BACS, gdyż tróykąty BGI, BGH są podobne tróykątom BAS, BAC, nadto są podobnie ułożone; nachylenie ich płaszczyzn, iest równe tak w iednéy iak drugiéy, te więc piramidy są podobne.

4ty. W ogólności przeciąwszy piramidę iakąkolwiek SABCDE fig. 34 płaszczyzną *abcde* równoodległą od podstawy, piramida odcięta *Sabcde*, będzie podobną całéy piramidzie SABCDE. Gdyż podstawy ABCDE i *abcde* są podobne, nadto połączywszy AC i *ac*, podług dopiero okazanego twierdzenia piramida tróykątna SABC iest podobna piramidzie *Sabc*; więc punkt S, iest tak wyznaczony względem podstawy ABC, iak punkt S względem podstawy *abc*, a tém samém dwie piramidy SABCDE i *Sabcde* są podobne.

Uwaga. Zamiast pięciu danych potrzebnych do określenia podobieństwa dwóch piramid podobnych możnaby wziąć pięć innych, różnie ie z sobą kombinuiąc, a ztąd wypadłoby tyleż twierdzeń, między któremi zasługuie na uwagę następuiące: dwie piramidy tróykątne są podobne, gdy maią krawędzie odpowiadaiące proporcyonalne. Albowiem fig. 23 gdy AB: DE=BC: EF=AC: DF=AS: DT=SB: TE=SC: TF, co zamyka pięc warunków. tróykąty ABS i ABC będą podobne tróykątom DET i DEF i podobnie ułożone, tróykąt SBC będzie także podobny tróykątowi TEF, więc trzy kąty płaskie składaiące kąt bryłowy B, będą równe kątom płaskim składaiącym kąt bryłowy E, a ztąd wypada, że nachylenie ścian ASB, ABC, iest równe nachyleniu ścian odpowiadaiących TDE, DEF, a tém samém, że dwie piramidy są podobne.

43. *Twierdz.* 24. W dwóch wielościanach podobnych ściany odpowiadaiące są podobne, a kąty bryłowe odpowiadaiące równe.

Dowodz. Niech będzie ABCDE fig. 40 podstawa iednego wielościanu. M i N wierzchołki dwóch kątów bryłowych za podstawą leżących, wyznaczone przez piramidy tróykątne MABC, NABC, których wspólna podstawa iest ABC, niech będzie *abcde* pódstawa drugiego wielościanu, podobna ABCDE, *m* i *n* wierzchołki odpowiadaiące wierzchołkom M i N, wyznaczone przez piramidy tróykątne *mabc*, i *nabc* podobne piramidom MABC, i NABC, dowiedziemy naprzód: że odległości MN i *mn*, są proporcyonalne do odpowiadaiących krawędzi AB i *ab*.

Ponieważ piramidy MABC i *mabc* są podobne, więc nachylenie płaszczyzn MAC, i BAC, iest równe nachyleniu płaszczyzn *mac*. *bac*; podobnież dla podobieństwa piramid NABC, *nabc* nachylenie płaszczyzn NAC, BAC, iest równe nachyleniu płaszczyzn *nac*, *bac;* odiąwszy zatém nachylenia pierwsze od drugich, zostanie nachylenie płaszczyzn NAC, MAC, równe nachyleleniu płaszczyzn *nac*, *mac*, Lecz z przyczyny podobieństwa tychże piramid, tróykąty MAC i *mac*, tudzież NAC, i *nac* są podobne, dwie zatem piramidy tróykątne MNAC i *mnac* maiące po dwie ściany odpowiadaiące podobne i podobnie ułożone i równo do siebie nachylone, są podobne a tém samém ich odpowiadaiące krawędzie są proporcyonalne; to iest: MN: *mn*=AM; *am*. A ponieważ AM: *am*=AB: ab; więc MN: *mn* =AB:*ab*.

Niech będą P, *p* dwa inne wierzchołki odpowiadaiące tychże wielościanów, będzie podobnież PN: *pn* =AB: *ab*, PM: *pm*=AB: *ab*; ztąd MN: *mn*=PN: *pn*=PM: *pm*. Tróykąt zatém PNM łączący trzy którekolwiek wierzchołki iednego wielościanu, iest podobny tróykątowi *pnm* łączącemu trzy odpowiadaiące wierzchołki drugiego wielościanu.

Wziąwszy ieszcze Q i *q* dwa wierzchołki odpowiadaiące, tróykąt PQN będzie podobny tróykątowi *pqn*. Nadto nachylenie płaszczyzn PQN, PMN, iest równe nachyleniu płaszczyzn *pqn*, *pmn*. Połączywszy albowiem QM i *qm*, otrzymamy tróykąty QNM, i *qnm* podobne, a tém samém kąt QNM równy *qnm*. Wystawmy sobie w N kąt bryłowy złożony z trzech kątów płaskich QNM, QNP, PNM, i w punkcie *n* kąt bryłowy złożony z trzech kątów płaskich *qnm*, *qnp*, *pnm*; ponieważ te kąty płaskie są sobie równe, więc i kąty bryłowe są równe. Nachylenie zatém ścian PNQ, PNM, iest równe nachyleniu ścian odpowiadaiących *pnq*, *pnm*; gdyby więc dwa tróykąty PNQ, PNM, były na iednéy płaszczyznie, w którym to przypadku byłby kąt QNM=QNP+PNM; byłby także kąt *qnm*=*qnp* + *pnm*, i dwa tróykąty *qnp*, *pnm*, byłyby także na iednéy płaszczyznie.

Wszystko cośmy dotąd powiedzieli ma mieysce, iakiekolwiek będą kąty M, N, P, Q porownane z odpowiadaiącemi im kątami *m*, *n*, *p*, *q*.

Przypuśćmy teraz że powierzchnia iednego z wielościanów iest podzielona na tróykąty ABC, ACD, MNP, NPQ i t. d. powierzchnia drugiego wielościanu, zawierać będzie podobną liczbę tróykątów *abc*, *acd* , *mnp*, *pnq* i t. d. podobnych i podobnie ułożonych; ieżeli tróykąty MNP, NPQ i t. d. należą do iednéy ściany, i są na iednéy płaszczyznie, tróykąty im odpowiaiące, *mpn*, *npq* i t. d. będą podobnież na iednéy płaszczyznie. Każda więc ściana wielokątna w iednym wielościanie odpowiadać będzie ścianie wielokątnéy podobnéy w drugim wielościanie; dwa zatém wielościany składać się będą z iednakowéy liczby ścian podobnych i podobnie ułożonych.

Dowiedziemy teraz że kąty bryłowe odpowiadaiące będą równe. Gdyż ieżeli kąt N np. składa się z kątów płaskich QNP, PNM, MNR, QNR, kąt bryłowy odpowiadaiący *n* będzie się składał z kątów płaskich *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*; aże te kąty płaskie są sobie równe i nachylenie dwoch ścian przyległych w iednym kącie bryłowym iest równe nachyleniu ścian odpowiadaiących w drugim; więc dwa kąty bryłowe są równe, bo mogą przystać do siebie.

Wn. Z dowodzenia poprzedzaiącego wypada, że gdy cztery wierzchołki iednego wielościanu wezmiemy za wierzchołki piramidy tróykątnéy, a cztery wierzchołki odpowiadaiące drugiego wielościanu, za wierzchołki drugiéy piramidy tróykątnéy, dwie te piramidy będą podobne, bo ich krawędzie odpowiadaiące będą próporcyonalne. Tu zarazem widzimy że dwie przekątne odpowiadaiące np. AN i *an* są do siebie w stosunku dwóch odpowiadaiących krawędzi AB i *ab*.

4. *Twier.* 25. Dwa wielościany podobne mogą być podzieloné na iednakową liczbę piramid tróykątnych podobnych i podobnie ułożonych.

Dowodz. Widzieliśmy bowiem że powierzchnie dwóch wielościanów mogą być podzielone na iednakową liczbę tróykątów podobnych i podobnie ułożonych. Uważaiąc wszystkie tróykąty wielościanu, prócz tych które składaią kąt bryłowy A za podstawy tyluż piramid tróykątnych maiących wierzchołek w A; piramidy te razem wzięte złożą wielościan; rozłożmy podobnież drugi wielościan na piramidy tróykątne maiące wspólny wierzchołek w punkcie *a*, odpowiadaiącym punktowi A, każda piramida łącząca cztery wierzchołki iednego wielościanu, będzie podobna piramidzie łączącéy cztery odpowiadaiące wierzchołki drugiego wieloscianu, a tém samém dwa wielościany podobne, będą rozłożone na iednakową liczbę piramid tróykątnych podobnych i podobnie ułożonych.

5. *Twierdz.* 26. Dwie piramidy podobne są do siebie w stosunku sześcianów z krawędzi odpowiadaiących.

Dowodz. Ponieważ dwie piramidy są podobne, więc mniéysza może być wsunięta w większą, tak, iż obie będą miały wspólny kąt bryłowy S fig. 34. Wtenczas podstawy ABCDE i *abcde* będą równoodległe: albowiem, ponieważ ściany odpowiadaiące są podobne, kąt *Sab* iest równy SAB i kąt *Sbc* $=$SBC, więc płaszczyzna *abc* iest równoodległa od ABC. Niech będzie SO prostopadła spuszczona z wierzchołka S na płaszczyznę ABC, i niech płaszczyznę *abc* przecina w punkcie o. Podług tego co się wyżéy okazało (35) będzie: SO: So$=$SA: *Sa*$=$ AB: *ab*, a tém samém:

$$\tfrac{1}{3}\,SO : \tfrac{1}{3}\,So = AB : ab.$$

Lecz ponieważ podstawy ABCDE i *abcde*, są wielokątami podobnymi, więc.

$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2.$$

Rozmnożywszy przez siebie wyrazy odpowiadaiące tych dwóch proporcyy będzie:

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3}SO : abcde \times \tfrac{1}{3}So = AB^3 : ab^3,$$

Aże ABCDE$\times\frac{1}{3}$SO znaczy bryłowatośc piramidy SABCDE a, *abcde*$\times\frac{1}{3}$ So bryłowatość piramidy *Sabcde*; więc dwie piramidy podobne są do siebie w stosuukn sześcianów z ich krawędzi odpowiadaiących.

46. *Twierdz.* 27. Dwa wielościany podobne są do siebie w stosunku sześcianów z krawędzi odpowiadaiących.

Dowodz. Dwa wielościany podobne mogą być podzielone na iednakową liczbę piramid tróykątnych podobnych; dwie zaś piramidy podobne APNM i *apnm* fig. 40 są do siebie iak sześciany z odpowiadaiących krawędzi AM i *am* albo iak sześciany z krawędzi AB i *ab*. Ten sam stosunek zachodzi między któremikolwiek dwiema piramidami odpowiadaiącemi; summa zatém wszystkich piramid składaiących ieden wielościan, czyli wielościan pierwszy, tak się ma do wielościanu drugiego, iak sześcian z któreykolwiek krawędzi pierwszego wielościanu, do sześcianu z odpowiadaiącéy krawędzi drugiego wielościanu.

Uwaga ogólna. Głownieysze twierdzenia tego rozdziału, można wyrazić w wzorach algebraicznych.

Oznaczywszy przez P podstawę graniastosłupa a przez W iego wysokość; bryłowatość graniastosłupa będzie $P \times W$ czyli PW.

Oznaczywszy P podstawę piramidy a przez W iéy wysokość, bryłowatość piramidy będzie $\frac{1}{3} W \times P$, albo $\frac{1}{3} P \times W$ albo nakoniec $\frac{PW}{3}$

Nazwiymy W wysokość piramidy ściętéy o podstawach równoodległych, a przez P i P' iey podstawy. $\sqrt{PP'}$ będzie średnio-ieometrycznie proporcyonalna do tych podstaw a bryłowatość piramidy ściętéy będzie $\frac{1}{3} W(P+P' + \sqrt{PP'})$.

Oznaczywszy przez P podstawę graniastosłupa tróykątnego ściętego, przez K, K', K'', wysokości trzech wierzchołków górnych, bryłowatość graniastosłupa ściętego będzie $\frac{1}{3} P(K+K'+K'')$

Nakoniec nazwiymy B i *b* bryłowatości dwóch wielościanów podobnych K i *k* ich przekątne lub krawędzie odpowiadaiące, będzie: $B:b = K^3:k^3$

— —

ROZDZIAŁ III.

O TRZECH CIAŁACH OKRĄGŁYCH.

O walcu i ostrokręgu.

47. Walcem nazywa się bryła utworzona obrotém prostokąta ABCD, około boku nieruchomego AB fig. 41. W obrocie tym boki AD, i BC, zostaiąc zawsze prostopadłe do AB, zakreślaią koła DHP, CGQ, zwane podstawami walca a bok CD opisuie powierzchnią krzywą walca.

Liniia nieruchoma AB nazywa się osią walca.

Przecięcie walca płaszczyzną prostopadłą do osi np. przecięcie KLM, iest kołem równém podstawie; gdyż w czasie obrotu prostokąta ABCD, około boku AB, liniia IK prostopadła do AB zakreśla koło równe podstawie, któreto koło iest przecięciem walca płaszczyzną prostopadłą do osi w punkcie I.

Przecięcie PQGH, walca, płaszczyzną przez oś przechodzącą iest prostokątem dwa razy większym od prostokąta tworzącego ABCD.

48. Ostrokręgiem nazywa się bryła utworzona obrotem tróykąta prostokątnego SAB fig. 42 około boku SA. W tym obrocie przeciwprostokątna SB opisuie powierzchnią krzywą ostrokręgu, a bok AB koło zwane podstawą ostrokręgu. Punkt S nazywa się wierzchołkiem ostrokręgu, SA osią albo wysokością, a SB krawędzią.

Przecięcie HFKI ostrokręgu płaszczyzną prostopadłą do osi iest kołem, przecięciem zaś płaszczyzną przez oś przechodzącą iest tróykąt równoramienny dwa razy większy od tróykąta tworzącego SAB.

49. Od ostrokręgu SCDB odciąwszy płaszczyzną równoodległą od podstawy ostrokręg SHEF, bryła pozostała CBHF, nazywa się ostrokręgiem ściętym o podstawahh równoodległych. Można sobie wystawić że ostrokręg

ten iest utworzony obrotem trapeza ABHG prostokątnego przy A i G, około boku AG. Liniia nieruchoma AG, nazywa się osią albo wysokością ostrokręgu ściętego; koła BDC, HFK podstawami, a BH krawędzią.

50. Dwa walce, lub dwa ostrokręgi są podobne, gdy ich osi są do siebie w stosunku średnic ich podstaw.

51. W koło ACD fig. 43 będące podstawą walca, wpisawszy wielokąt ABCDEM, i na niem iako na podstawie wystawiwszy graniastosłup prosty, równy co do wysokości walcowi, graniastosłup ten będzie wpisany w walec a walec będzie opisany na graniastosłupie. Ponieważ krawędzie AF, CH BG, i t. d. graniastosłupa są prostopadłe do podstawy, więc leżą na powierzchni krzywéy walca; graniastosłup zatém i walec dotykaią się podług tych krawędzi.

52. Podobnież, gdy na podstawie walca opiszemy wielokąt ABCD fig. 44 i na nim iako na podstawie wystawimy

graniastosłup prosty, równy walcowi co do wysokości, graniastosłup ten będzie opisany na walcu, a walec będzie wpisauy w graniastosłup.

Daymy że punkta M, N it. d. są punktami dotknięcia boków AB, BC,.. z okręgiem koła i wyprowadźmy z nich prostopadłe MX, NY it. d. do podstawy; prostopadłe te będą razem i na powierzchni walca i na powierzchni graniastosłupa opisanego a zatém będąto liniie podług których graniastosłup dotyka się walca.

53. *Twierdz* 28. Bryłowatość walca; iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.

Dowodz. Niech będzie CA fig. 45 promień podstawy walca danego, H iego wysokość; oznaczywszy przez k. CA powierzchnią koła zatoczonego promieniem CA; dowiedziemy że bryłowatość walca będzie k. CA$\times$H. Bo ieżeli iloczyn k. CA $\times$H, nie iest równy bryłowatości walca danego, więc będzie równy albo bryłowatości walca większego, albo mnieyszego. Przypuśćmy naprzód że iest równy bryłowatości walca mnieyszego, np. walca, którego podstawą iest koło promienia CD, a H wysokością. Na kole promienia CD opiszmy wielokąt foremny GHIP, tak żeby iego obwód w żadnym punkcie nieschodził się z okręgiem promienia CA; i wystawmy sobie graniastosłup prosty maiący za podstawę wielokąt GHIP, a wysokość H, opisany na walcu którego podstawą iest koło promienia CD. Bryłowatość graniastosłupa, iest równa iego podstawie GHIP pomnożonéy przez wysokość H; aże podstawa GHIP, iest mnieysza od koła promienia CA; więc bryłowatość graniastosłupa, iest mnieysza od k. CA $\times$ H. Lecz k. CA $\times$ H, oznacza z przypuszczenia bryłowatość walca w graniastosłup wpisnego, graniastosłup zatem byłby mnieyszy od walca; gdy przeciwnie walec iest mnieyszy od graniastosłupa, bo iest w nim zamknięty; być więc nie może aby iloczyn k. CA$\times$H, oznaczał bryłowatość walca, którego podstawą iest koło promienia CD, a wysokością H; czyli ogólniéy mowiąc, iloczyn z podstawy walca przez iego wysokość, nie może oznaczać bryłowatości walca mnieyszego. Dowiedziemy 2re że tenże iloczyn nie może oznaczać bryłowatości walca większego; bo niech będzie CD promień podstawy walca danego, i ieżeli to być może niech iloczyn k. CD$\times$H oznacza walec większy np., walec, którego podstawą iest koło promienia CA, a H wysokość. Odbywszy to samo wykreslenie co w poprzedzaiącym przypadku, bryłowatość graniastosłupa opisanego na danym walcu będzie równa iloczynowi GHIP$\times$H; aże wielókąt GHIP iest większy od koła promienia CD; więc i bryłowatość graniastosłupa o którym mowa iest, większa od iloczynu k.CD$\times$H; graniastosłup zatém byłby większy od walca maiącego tę samę wysokość, a za podstawę koło promienia CA. Lecz graniastosłup ten iest mnieyszy od walca, bo iest w nim zamknięty, być więc nie może aby iloczyn z podstawy walca pomnożonéy przez iego wysokość oznaczał bryłowatość walca większego.

Więc bryłowatość walca iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.

Wn. 1. Walce maiące równe wysokości są do siebie w stosunku podstaw; maiące zaś równe podstawy, są w stosunku wysokości.

Wn. 2. Walce podobne są w stosunku sześcianów z wysokóści, albo sześcianów ze średnic ich podstaw. Gdyż podstawy są w stosunku kwadratów z ich średnic; aże walce są podobne, więc średnice podstaw są proporcyonalne do wysokości; podstawy przeto są w stosunku kwadratów z wysokości; a tém samem podstawy pomnożone przez wysokość, czyli walce są iak sześciany z wysokości.

Uwaga. Niech będzie R promień podstawy walca, H, iego wysokość, powierzchnia podstawy będzie πR^2, a bryłowatość walca będzie $\pi R^2 \times H$ czyli $\pi R^2 H$.

54. *Twierdz.* 29. Powierzchnia boczna graniastosłupa prostego iest równa iloczynowi z obwodu podstawy przez wysokość.

Dowodz. Powierzchnia albowiem ta iest równa summie prostokątów fig. 43 AFGB, BGHC, CHID i t. d. z których się składa; wysokości zaś AF, BG, CH i t. d. tych prostokątów są równe wysokości graniastosłupa; a ich podstawy AB, BC, CD i t. d. razem wzięte, składaią obwod podstawy graniastosłupa. Więc summa tych prostokątów, czyli powierzchnia boczna graniastosłupa, iest równa obwodowi iego podstawy pomnożonemu przez wysokość.

Wn. Gdy dwa graniastosłupy proste maią równą wysokość, ich powierzchnie boczne, są w stosunku obwodów ich podstaw.

55. *Twierdz.* 30. Powierzchnia boczna walca iest większa od powierzchni boczney graniastosłupa wpisanego, a mnieysza od powierzchni boczney graniastosłupa opisanego.

Dowodz. Powierzchnia boczna walca i powierzchnia boczna graniastosłupa wpisanego ABCDEF figura 43 mogą być uważane iako maiące tę samę długość, bo każde przecięcie iędnéy i drugiey równoodległe od AF iest równe AF, i gdy dla otrzymania szerokości tychże powierzchni, przetniemy ie płaszczyznami równoodległemi od podstawy, czyli prostopadłemi do krawędzi AF, iedno z przecięć będzie równe okręgowi podstawy, drugie obwodowi wielokąta ABCDE, mnieyszemu od tegoż okręgu; a ponieważ przy równey długości, szerokość powierzchni walca, iest większa od szerokości powierzchni graniastosłupa, więc pierwsza z nich iest większa od drugiéy—Zupełnie podobnie rozumuiąc dowiedziemy że powierzchnia boczna walca, iest mnieysza od takieyże powierzchni graniastosłupa opisanego.

56. *Twierdz.* 31. Powierzchnia boczna walca iest równa iloczynowi z okręgu iego podstawy przez wysokość.

Niech będzie CA promien podstawy walca danego fig. 45, H iego wysokość, oznaczywszy przez okr. CA okrąg zakreślony promieniem CA, dowiedziemy że okr.CA$\times$H będzie powierzchnią boczną tego walca. Bo ieżeli ten iloczyn nie iest równy powierzchni boczney walca danego, więc musi być równy albo powierzchni walca większego, albo mnieyszego; a naprzód daymy, że znaczy powierzchnią walca mnieyszego; np. walca, którego podstawą iest koło promienia CD, a H wysokością.

Na kole promienia CD opiszmy wielokąt foremny GHIP, tak aby iego boki nieschodziły się w żadnym punkcie z okręgiem promienia CA, i wystawmy sóbie graniastosłup prosty maiący wysokość H, a za podstawę wielokąt GHIP. Powierzchnia boczna tego graniastosłupa będzie równa iloczynowi z obwodu wielokąta GHIP pzzez wysokość H: aże obwod ten iest mnieyszy od okręgu promienia CA więc powierzchnia boczna graniasto. słupa iest mnieysza od okręgu CA×H. Lecz okręg CA × H, znaczy podług przypuszczenia powierzchnią boczną walca, maiącego za podstawę koło promienia CD, któryto walec iest w pisany w graniastosłup, więc podług tegoż przypuszczenia powierzchnia boczna graniastosłupa, byłaby mnieysza od takieyże powierzchni walca wpisanego; co być nie może: przypuszczenie więc to iest fałszywe a zatém 1*ód* Iloczyn z okręgu podstawy walca przez iego wysokość, nie może oznaczać powierzchni boczney walca mnieyszego.

Iloczyn ten nie może *2re* oznaczać

powierzchni walca większego. Jakoż: niech będzie CD promień podstawy walca danego, i niech będzie, ieżeli to być może, okręg CD$\times$H powierzchnia boczna walca, któryby przy téy saméy wysokości miał za podstawę koło większe np. koło promienia CA. Wykonaymy to samo wykreślenie co w przypuszczeniu poprzedzaiącém, powierzchnia boczna graniastosłupa będzie zawsze równa obwodowi wielokąta GHIP pomnożonemu przez wysokość H. Lecz obwod ten iest większy od okręgu CD, a zatém i powiérzchnia graniastosłupa byłaby większa od okręgu CD$\times$H, który to iloczyn podług przypuszczenia znaczy powierzchnią walca maiącego tę samę wysokość, a za podstawę koło promienia CA. Powierzchnia więc graniastosłupa byłaby większa ,od powierzchni tego walca. Lecz chociażby nawet graniastosłup był wpisany w walec, powierzchnia iego byłaby mnieysza od powierzchni walca, więc tém bardziéy ieszcze iest mnieysza gdy graniastosłup nigdzie się z walcem nieschodzi. A taki drugie przypuszcenie nie może mieć mieysca; więc $2re$ okręg podstawy walca pomnożony przez iego wysokość, nie może oznaczać powierzchni walca większego.

Więc powierzchnia boczna walca iest równa iloczynowi z okręgu iego podstawy przez wysokość.

57. *Twierdz.* 32. Bryłowatość ostrokręgu równa iest iloczynowi z iego podstawy przez trzecią część wysokości.

Niech będzie SO wysokość, danego ostrokręgu, AO promień iego podstawy fig 46 oznaczywszy przez k. AO powierzchnią podstawy; dowiedziemy że bryłowatość tego ostrokręgu będzie równa iloczynowi k.AO $\times \frac{1}{3}$ SO.

Jakoż przypuśćmy naprzód że iloczyn k.AO$\times\frac{1}{3}$SO, znaczy bryłowatość ostrokręgu większego, np. ostrokręgu; którego wysokością iest SO, a podstawą koło promienia OB, większego od OA. Na kole promienia AO opiszmy wielokąt foremny MPQT, tak aby iego boki nieschodziły się w żadnym punkcie z okręgiem koła promienia OB, i wystawmy sobie piramidę maiącą tenże wielokąt za podstawę, a wierzchołek w punkcié S. Bryłowatość téy piramidy, iest równa powierzchni wielokąta MPQT rozmnożonéy przez trzecią część wysokości SO. Lecz że wielokąt iest większy od koła wpisanego oznaczonego przez k. AO więc i piramida iest większa od iloczynu k.AO $\times\frac{1}{3}$SO, który podług przypuszczenia oznacza bryłowatość ostrokręgu maiącego wierzchołek w S, a za podstawę koło promienia OB. Przeciwnie zaś piramida iest mnieysza od ostrokręgu, bo iest w nim zawarta a zatém łód być nie może, aby iloczyn z podstawy ostrokręgu przez trzecią część iego wysokości oznaczał bryłowatość ostrokręgu większego.

2re. Tenże sam iloczyn nie może także oznaczać bryłowatości ostrokręgu mnieyszego. Niech albówiem będzie OB, fig. taż sama, promień podstawy ostrokręgu danego, i ieżeli to być może, niech iloczyn k.OB$\times\frac{1}{3}$ SO znaczy bryłowatość ostrokręgu, którego wysokość iést SO, a podstawa koło promienia AO. Odbywszy to samo co wyżéy wykreślenie, piramida SMPQT, będzie równa powierzchni wielokąta MOQT, pomnożonéy przez $\frac{1}{3}$ SO. Lecz że wielokąt MPQT iest mnieyszy od koła promienia OB; więc piramida byłaby mnieysza od k. OB $\times\frac{1}{3}$ SO, a tem samém mni ey sza od ostrokręgu maiącego za podstawę koło promienia OA, a wysokość SO. Gdy przeciwnie piramida iest większa od ostrokręgu, bo go ze wszystkich stron otacza, więc 2re być nie może aby iloczyn z podstawy ostrokręgu przez trzecią część wysokości oznaczał bryłowatość ostrokręgu większego.

Bryłowatość zatém ostrokręgu, równa iest iloczynowi z iego podstawy przez $\frac{1}{3}$ wysokości.

Wn. Ostrokręg iest trzecią częścią walca, maiącego tę samę podstawę i wysokość, a z tąd wypada że:

1*ód.* Ostrokręgi maiące równe wysokości są w stosunku swych podstaw.

2*re* Ostrokręgi maiące równe podstawy są w stosunku swoich wysokości.

3*cie.* Ostrokręgi podobne, są w stosunku sześcianów ze średnic ich podstaw, albo sześcianów z ich wysokości.

Uwaga. Nazwiymy R promien podstawy ostrokręgu, H iego wysokość, bryłowatość ostrokręgu będzie $\pi R^2 \times \frac{1}{3} H$ czyli $\frac{1}{3} \pi R^2 H$.

58. *Twierdz.* 33. Ostrokręg ścięty ADEB fig. 47 którego podstawami są koła promieniami AO, i DP zakreślone; a PO wysokością równy iest $\frac{1}{3} \pi OP(AO^2 + DP^2 + AO \times DP)$.

Dowodz. Niech będzie TFGH piramida tróykątna maiąca tę samę wysokość co ostrokręg *SAB*, i podstawę FHG równą co do powierzchni, podstawie ostrokręgu. Możemy przypuścić, że te obie podstawy są na iednéy płaszczyznie, a wtedy wierzchołki S i T będą w równych odległościach od płaszczyzny podstaw, nadto przedłużywszy płaszczyznę EPD, ta przetnie piramidę podług IKL, które to przecięcie będzie równe podstawie DE. Ponieważ podstawy AB, i DE są do siebie w stosunku kwadratów promieni AO, DP, albo w stosunku kwadratów z wysokości SO i SP; a tróykąty FGH i IKL, są do siebie także w stosunku kwadratów z tychże wysokości, więc koła AB i DE, są do siebie w stosunku tróykątów FGH i IKL; aże z założenia tróykąt FGH iest równy powierzchni koła AB; więc też tróykąt IKL iest równy powierzchni koła DE.

Jloczyn z podstawy AB przez $\frac{1}{3}$ SO znaczy bryłowatość ostrokręgu SAB a iloczyn z podstawy FGH przez $\frac{1}{3}$SO, bryłowatość piramidy TFGH; aże podstawy są sobie równe, więc bryłowatość piramidy, iest równa bryłowatości ostrokręgu. Dla teyże samey przyczyny, piramida TIKL iest równa co do bryłowatości ostrokręgowi SDE; a tém samém ostrokręg ścięty ADEB iest równy co do bryłowatości piramidzie ściętéy FGHIKL. Powierzchnia podstawy FGH równéy kołu promienia AO równa się $\pi \times AO^2$, podobnież powierzchnia podstawy $IKL = \pi \times DP^2$; a średnio-ieometrycznie proporcyonalna do $\pi \times AO^2$ i $\pi \times DP^2$ iest $\pi \times AO \times DP$; więc bryłowatość piramidy ściętéy, albo ostrokręgu ściętego równa się $\frac{1}{3}OP(\pi \times AO^2 + \pi \times DP^2 + \pi AO \times DP) = \frac{1}{3}\pi OP(AO^2 + DP^2 + AO \times DP)$.

59. *Twierdz.* 34. Powierzchnia boczna ostrokręgu iest równa iloczynowi z okręgu iego podstawy, przez połowę iego krawędzi. πAO

Dowodz. Niech będzie AO promień podstawy ostrokręgu danego fig. 146 S iego wierzchołek, a SA krawędź, dowiedziemy że powierzchnia iego będzie równa okręgowi OA $\times$ $\frac{1}{2}$ SA. Daymy na to, ieżeli być może, że okręg AO $\times$ $\frac{1}{2}$ SA; znaczy powierzchnią ostrokręgu, któryby miał wierzchołek w punkcie S, a za podstawę koło promienia OB większego od AO,

Na kole mnieyszem opiszmy wielokąt foremny MPQT; tak, aby iego boki w żadnym punkcie nieschodziły się z okręgiem koła promienia OB; i niech będzie SMPQT piramida foremna maiąca tenże wielokąt za podstawę a wierzchołek w punkcie S. Powierzchnia tróykąta SMP iednego ze składaiących powierzchnią boczną piramidy, równa iest iego podstawie MP pomnożonéy przez połowę wysokości SA, która iest zarazem krawędzią ostrokręgu danego; a ponieważ ta wysokość iest wspólna wszystkim tróykątom SPQ, SQR i t. d. wypada ztąd, że powierzchnia boczna piramidy równa iest obwodowi iéy podstawy MPQTM pomnożonemu przez $\frac{1}{2}$ SA. Aże obwód MPQTM iest większy od okręgu AO, więc i powierzchnia boczna piramidy iest większa od iloczynu okręgu AO $\times \frac{1}{2}$ SA, a tém samém większa od powierzchni boczněy ostrokręgu, któryby miał ten sam wierzchołek, a za podstawę koło zakreślone promieniem OB. Lecz przeciwnie; powierzchnia boczna ostrokręgu iest większa od powierzchni boczněy piramidy; bo przyłożywszy do siebie podstawami piramidę z piramidą równą, ostrokręg z ostrokręgiem równym, powierzchnia dwóch ostrokręgów, będzie ze wszystkich stron otaczała powierzchnią dwóch piramid, a zatém pierwsza będzie większa od drugiéy, a tém samém powierzchnia ostrokręgu iest większa od powierzchni w nim zawartèy piramidy. Ponieważ ta sprzeczność pochodziła z naszego przypuszczenia, więc to przypuszczenie nie może mieć mieysca; a tém samém 1ód iloczyn z okręgu podstawy ostrokręgu, przez połowę iego krawędzi nie może oznaczać powierzchni ostrokręgu większego.

Dowiedziemy 2re że ten iloczyn nie może oznaczać powierzchni ostrokręgu mnieyszego. Jakoż niech będzie BO promień podstawy ostrokręgu danego, i niech iloczyn okręgu BO$\times\frac{1}{2}$SB, ieżeli to być może, znaczy powierzchnią ostrokręgu maiącego wierzchołek w S a za podstawę koło promienia AO, mnieyszego od OB.

Odbywszy to samo wykreślenie co wyżéy, powierzchnia piramidy SMPQT będzie zawsze równa iloczynowi z obwodu MQPT przez $\frac{1}{2}$ SA. Aże obwód MPQT iest mnieyszy od okręgu BO, i SA mnieysze od SB, więc dla tych dwóch przyczyn powierzchnia boczna piramidy iest mnieysza od iloczynu okręgu BO$\times\frac{1}{2}$SB, który podług przypuszczenia oznacza powierzchnią ostrokręgu maiącego za podstawę koło zatoczone promieniem AO, powierzchnia więc piramidy byłaby mnieysza od powierzchni ostrokręgu wpisanego. Lecz przeciwnie iest większa: przyłożywszy bowiem do siebie podstawami piramidę z piramidą równą, ostrokrąg z ostrokręgiem równym, powierzchnia dwóch piramid otoczy ze wszystkich stron powierzchnią dwóch ostrokręgów, a tém samém będzie większa. Więc 2*re* być nie może, aby iloczyn z okręgu podstawy ostrokręgu przez połowę iego krawędzi oznaczał powierzchnią ostrokręgu mnieyszego.

Powierzchnia zatém boczna ostrokręgu iest równa iloczynowi z okręgu iego podstawy przez połowę krawędzi.

Uwaga. Niech będzie L krawędź ostrokręgu, R promień iego podstawy; okrąg téy podstawy będzie $2\pi R$, a powierzchnia ostrokręgu będzie równa $2\pi R \frac{1}{2} L$ czyli πRL.

60. *Twierdz.* 35. Powierzchnia boczna ostrokręgu ściętego ADEB fig. 48, iest

równa iloczynowi z iego krawędzi AD, przez połowę summy okręgów dwóch podstaw AB i DE.

Dowodz. Na płaszczyznie SAB, przechodzącéy przez oś SO poprowadźmy AF prostopadłą do SA, równą okręgowi podstawy dolnéy AB i połączywszy punkt S z punktem F, poprowadźmy DH równoodległą od AF.

Wtróykątach podobnych SAO, SDC iest: AO: DC=SA: SD; aże i tróykąty SAF, SDH są także podobne, więc będzie AF: DH=SA: SD; ztąd AF: DH=AO: DC; albo = okrąg AO: okręgu DC. Aże z wykreślenia AF=okręg: AO, więc DH= okręg: DC Powierzchnia tróykąta SAF równa AF$\times\frac{1}{2}$SA, iest równa powierzchni ostrokręgu SAB, równéy okręgowi AO $\times\frac{1}{2}$ SA Dla podobnéyże przyczyny powierzchnia tróykąta SDH iest równa powierzchni ostrokręgu SDE. Powierzchnia zatém ostrokręgu ściętego ADEB iest równa powierzchni trapeza ADHF; a że tę ostatnią wyraża iloczyn $AD\left(\frac{AF+DH}{2}\right)$ czyli $AD\left(\frac{\text{okr.}AO+\text{okr.}DC}{2}\right)$; więc powierzchnia ostrokręgu ściętego ADEB równa iest iego krawędzi AD pomnożonéy przez połowę summy okręgów dwóch iego podstaw.

Wn. Przez punkt I środek krawędzi AD, poprowadziwszy IKL równoodległą od AB, i IM równoodległą od AF; dowiedziemy iak wyżéy że IM = okr. IK. Aże powierzchnia trapeza ADHF = AD × IM = AD × okr. IK; więc powiedzieć także można że powierzchnia ostrokręgu ściętego iest równa iego krawędzi pomnożonéy przez okrąg przecięcia od dwóch podstaw równooddalonego.

Uwaga. Gdy liniia AD, leżąca z iednéy strony linii OC, i na téy saméy płaszczyznie obróci się całkowicie około linii OC, powierzchnia opisana przez AD będzie równa $AD\left(\frac{\text{okr.}AO+\text{okr.}DC}{2}\right)$

albo AD$\times$okr. IK; gdyż liniie AO, DC, IK, są prostopadłe spuszczone z końców i ze środka linii AD na oś OC. Bo przedłużywszy AD i OC aż do ich wspólnego przecięcia się w S, powierzchnia opisana przez AD iest widocznie powierzchnia ostrokręgu ściętego, którego podstawami są koła promieni AO i DC; cały zaś ostrokrąg ma wierzchołek w S, powierzchnia więc się ta równa powyższemu iloczynowi. Iloczyn ten wyraża zawsze tęż powierzchnią, chociażby punkt D przypadł w punkcie *S*, zkądby powstał cały ostrokrąg chociażby liniia AD była równoodległa od osi, zkądby powstał walec. W pierwszym przypadku DC byłoby zero, w drugim DC byłoby równe AO i IK.

O Kuli.

61. I. *Kula*, iest to bryła ograniczona powierzchnią krzywą, któréy wszystkie punkta są równooddalone od

puuktu wewnątrz będącego zwanego środkiem.

Wystawić sobie można że kula powstaie z óbrotu półkola DAE fig. 49 około średnicy DE; gdyż wszystkie punkta powierzchni, którą w tym obrocie opisnie pół-okrąg DAE, będą równooddalone od środka C.

II. *Promień kuli* iestto liniia prosta poprowadzona ze środka do którégokolwiek punktu powierzchni; *średnica* albo *oś* iest liniia przechodząca przez środék, kończąca się z iednéy i drugiéy strony na powierzchni. Wszystkie promienie kuli są równe; wszystkie także średnice są równe i każda równa iest dwom promieniom.

III. Wkrótce dowiedziemy, że przecięcie kuli płaszczyzną iest kołem; *koło wielkie* iestto przecięcie przechodzące przez środek kuli; *koło zaś małe iest* przecięcie przez tenże srodek nieprzechodzące.

IV. *Płaszczyzna iest styczna*

do kuli, gdy ma tylko ieden punkt wspólny z iéy powierzchnią.

V. *Biegun koła* do kuli należącego iest punkt na powierzchni kuli równooddalony od wszystkich punktów okręgu tegoż koła. Poźniéy okażemy, że każde koło wielkie czy małe ma zawsze dwa bieguny.

VI. *Tróykąt kulisty* iest część powierzchni kuli, zawarta między trzema łukami kół wielkich. Łuki te nazywaią się bokami tróykąta, i uważaią się zawsze za mnieysze od pół-okręgu. Kąty zawarte między płaszczyznami tych łuków są kątami tróykąta.

VII. Tróykąt kulisty nazywa się *prostokątnym*, *równoramiennym*, *równobocznym* w tych samych przypadkach, co tróykąt prostokreślny.

VIII. *Wielokąt kulisty*, iest część powierzchni kuli zawarta między łukami wielu kół wielkich.

IX. *Taśma* iest częśc powierzchni kuli zawarta między dwoma pół-okręgami koł wielkich przecinaiącymi się na wspólnéy średnicy.

X. *Piramida kulista* iest część bryłowatości kuli zawarta miedzy płaszczyznami kąta bryłowego maiącego wierzchołek w środku kuli. Podstawą téy piramidy iest wielokąt kulisty, temiż płaszczyznami wyznaczony.

XI. *Pas kulisty*, iest część powierzchni kuli zawarta między dwiema płaszczyznami równoodległemi, które są iéy *podstawami*. Gdy iedna z tych płaszczyzn iest styczna do kuli, pas ma tylko iednę podstawę.

XII. *Odcinek kulisty*, iest część bryłowatości kuli zawarta między dwiema płaszczyznami rownoodległemi, które są iéy podstawami. Gdy iedna z tych płaszczyzn iest styczna do kuli, odcinek kulisty, ma tylko iednę podstawę.

XIII. *Wysokością pasa*, lub *odcinka* iest odległość dwóch płaszczyzn równoodległych będących podstawami pasa lub odcinka.

XIV. Gdy półkule, DAE obrotem swoim około średnicy DE opisuie kulę, każdy wycinek koła np. DCF lub FCG, opisuie bryłę zwaną wycinkiem kulistym.

62. *Twierdz.* 36. Przecięcie kuli płaszczyzną iest kołem.

Dowodz. Niech będzie AMB fig. 50 przecięcie płaszczyzną kuli któréy środek iest C. Z punktu C wyprowadźmy prostopadłą CO do płaszczyzny AMB, i poprowadźmy liniie CM, CM', do różnych punktów liniie krzywéy AMB.

Pochyłe CM, CM', CB są równe, iako promienie kuli, więc są równooddalone od prostopadłéy CO; wszystkie zatém liniie OM, OM', OB. są sobie także równe; a tém samém przecięcie AMB, iest kołem, którego śródkiem iest punkt O.

Wn. 1. Gdy przecięcie przechodzi przez środek kuli, promieniem iego będzie promień kuli, wszystkie zatém koła wielkie są sobie równe.

2gi. Dwa koła wielkie przecinaią się zawsze na dwie równe części; gdyż ich wspólne przecięcie przechodząc przez środek, iest średnicą.

3ci. Każde koło wielkie dzieli kulę i iéy powierzchnią na dwie równe części; bo gdy po oddzieleniu od siebie dwóch półkul damy im takie położenie, aby obróciwszy w iednę stronę ich wypukłość, miały wspólną podstawę, dwie powierzchnie przystaną do siebie tak, iż iedne punkta nie będą bliższe środka iak drugie.

4ty. Środek koła małego i środek kuli są zawsze na iednéy linii prostopadłéy do płaszczyzny tegoż koła.

5ty. Koła małe są tém mnieysze, im bardziéy są oddalone od środka kuli; gdyż im większa iest odległość CO, tym mnieysza iest cięciwa AB, średnica koła małego AMB.

6ty. Przez dwa punkta dane na powierzchni kuli może zawsze przechodzić łuk koła wielkiego, gdyż dwa dane punkta i środek kuli są trzema punktami wyznaczaiącemi położenie płaszczyzny. Gdyby iednak dwa dane punkta leżały na końcach iednéy średniey, wtenczas dwa punkta i środek kuli byłyby na iednéy linii prostéy, a tém samém możnaby nieograniczoną liczbę kół wielkich przez takie dwa punkta poprowadzić.

63. *Twierdz*- 37. W każdym troykącie kulistym ABC fig. 51 summa dwóch boków iest większa od trzeciego.

Dowodz. Niech będzie O środek kuli, i promienie OA, OB, OC; wystawmy sobie płaszczyzny CAB, AOC, COB, te złożą przy punkcie O kąt tróyścienny, a miarami kątów AOB, AOC, BOC będą boki AB, AC, BC, tróykąta kulistego. Aże summa dwóch kątów płaskich w kącie tróyściennym iest większa od trzeciego, więc też summa dwoch boków w tróykącie ABC, iest większa od trzeciego.

64. *Twierdz*. 38. Naykrótszą odległością dwóch puuktów na powierzchni kuli

iest łuk koła wielkiego też punkta łączący.

Dowodz. Niech będzie ANB fig. 52 łuk koła wielkiego łączący punkta A i B, i niech będzie, ieżeli to być może, M punkt należący do linii naykrotszéy między punktami A i B. Przez punkt M poprowadźmy łuki kół wielkich MA, i MB, i weźmy BN=MB. Podług twierdzenia poprzedzaiącego AM + MB>ANB, odiąwszy z obu stron BN=BM, będzie AM>AN. Lecz odległość od B do M, czy to nią iest łuk BM, czy też iakakolwiek inna liniia, iest równa odległości punktów B i N; obracaiąc albowiem płaszczyznę koła wielkiego BM, około średnicy przechodzącéy przez punkt B, można iéy takie nadać położenie, że punkt M przypadnie na punkt N, a wtedy liniia naykrótsza od M do B, przystanie do linii naykrótszéy od N do B; a tak dwie odległości od A do B, z których iedna przechodzi przez punkt M, druga przez punkt N, maią część równą od M do B i od N do B. Pierwsza odległość iest z przypuszczenia naykrótsza a zatém odległośći od A do M iest krótsza od odległośći od A do N, co być nie może, bo łuk AM iest większy od AN; więc żaden punkt linii naykrótszéy od A do B, nie może się znaydować za łukiem AB; łuk więc ten iest naykrótszą liniią między temi dwoma punktami.

65. *Twierdz.* 39. Obwód tróykąta kulistego iest mnieyszy od okręgu koła wielkiego.

Dowodz. Niech będzie tróykąt kulisty ABC fig. 53, przedłużmy boki AB i AC do przecięcia się w D: Łuki ABD i ACD, będą poł-okręgami, bo dwa koła wielkie przecinaią się zawsze na dwie równe częśći; lecz w tróykącie BCD; $BC < BD + CD$, do obu stron téy nierówności dodaymy $AB + AC$ będzie $AB + AC + BC < ABD + ACD$, to iest mnieysze od okręgu koła wielkiego.

66. *Twierdz.* 40. Obwod wielokąta ku-

listego, iest mnieyszy od okręgu koła wielkiego.

Dowodz. Niech będzie np. pięciokąt kulisty ABCDE fig. 55. przedłużmy boki AB i DC, do przecięcia się w F: ponieważ BC iest mnieysze od BF + CF, więc obwód pięciokąta ABCDE iest mnieyszy od obwodu czworokąta AEDF. Przedłużmy znowu boki AE i FD do przecięcia się w punkcie G, będzie ED$<$EG+GD; więc obwód czworokąta iest mnieyszy od obwodu tróykąta AFG; a że ten ostatni iest mnieyszy od okręgu koła wielkiego, więc tém bardziéy obwód pięciokąta ABCDE, iest mnieyszy od tegoż okręgu.

67. *Twierdz.* 41. Poprowadziwszy średnicę DE fig. 49 prostopadłą do płaszczyzny kola wielkiego AMB, końce D i E téyże średnicy będą biegunami koła AMB, i wszystkich kół małych iak FNG od niego równoodległych.

Dowodz. 1e. Ponieważ liniia DC iest

prostopadła do płaszczyzny AMB, więc iest także prostopadła do wszystkich liniy ,CA, CM, CB i t, d., poprowadzonych przez iéy spodek na teyże płaszczyznie; każdy zatém z łuków DA, DM, DB, iest $\frac{1}{4}$ okręgu. Toż samo rozumieć należy o łukach EA, EM, EB i t. d., a tém samém punkta D i E iako równooddalone od wszystkich punktów okręgu AMB są iego biegunami.

2re. Promień DC iako prostopadły do płaszczyzny AMB, iest także prostopadły do płaszczyzny FNG równoodległéy od pierwszéy a tém samém przechodzi przez środek O koła FNG; poprowadziwszy więc pochyłe DF, DN, DG, te iako równooddalone od prostopadłéy DO będą równe, a skoro cięciwy są równe, więc i łuki DF, DN, DG i t. d. muszą także być równe; punkt zatem D iest biegunem koła małego FNG, i dla téy saméy przyczyny punkt E iest iego drugim biegunem.

Wn. I. Każdy łuk DM poprowadzony z punktu wziętego na okręgu koła wielkiego AMB do iego bieguna iest $\frac{1}{4}$ okręgu i czyni z łukiem AM kąt prosty. Ponieważ liniia DC iest prostopadła do płaszczyzny AMC, więc każda płaszczyzna DMC przez nią przechodząca iest prostopadła do płaszczyzny AMC, a zatém kąt zawarty między temi dwiema płaszczyznami, czyli kąt AMD iest prosty.

2*re*. Aby znaleść biegun łuku AM, potrzeba poprowadzić łuk nieograniczony DM prostopadły do AM i na nim wziąć MD$=\frac{1}{4}$ okręgu, a punkt D, będzie iednym z biegunów łuku AM; albo raczéy z dwoch punktów A i M wyprowadzić należy łuki AD i MD prostopadłe do łuku a AM, punkt D, w którym się te łuki przetną, będzie biegunem szukanym.

Uwaga. Własności biegunów podaią sposób kreślenia na powierzchni kuli łuków koła z tą samą łatwością co na powierzchni płaskiéy. Widzimy np.

że obracaiąc łuk DF około punktu D, punkt F opisze koło małe FNG; a obracaiąc $\frac{1}{4}$ okręgu DFA około punktu D, punkt A zakreśli łuk koła wielkiego AM.

Gdy potrzeba przedłużyć łuk AM, lub gdy dane są dwa punkta A i M, przez które łuk ten ma przechodzić, wyznaczymy naprzód biegun D przez przecięcie się dwoch łuków zakreślonych z punktów A i M iako środków odległością równą $\frac{1}{4}$ okręgu; a znalazłszy biegun D zakreślmy z punktu D iako środka tąż samą odległością łuk AM, i iego przedłużenie.

Nakoniec gdy potrzeba z punktu P spuścić łuk prostopadły na AM, przedłużymy AM do S tak aby odległość PS była rowna $\frac{1}{4}$ okręgu a potem z bieguna S, tą samą odległością zakreślimy łuk PM, a ten będzie łukiem prostopadłym szukanym.

68. *Twierdz.* 42. Płaszczyzna prostopadła do końca promienia, iest styczną do kuli fig. 54.

Dowodz. Niech będzie FAG płaszczyzna prostopadła do końca promienia OA; wziąwszy na niey punkt M połączmy go z punktem O i A liniami OM i AM; kąt OAM będzie prosty, a tém samem odległość OM będzie większa od OA. Punkt więc M iest za kulą; aźe toż samo powiedzieć można o każdym innym punkcie płaszczyzny FAG, więc płaszczyzna ta maiąc tylko ieden punkt wspólny z powierzchnią kuli, iest do niey styczną.

Uwaga. można podobnież dowieść, że dwie kule maią tylko ieden punkt wspolny, a tém samém są do siebie styczne, gdy odległość ich środka iest równa summie lub rożnicy promieni, i że w tenczas ich środki i punkt dotknięcia leżą na iednéy linii prostéy.

69. *Twierdz.* 43. Gdy z wierzchołków A, B, C, troykąta ABC fig. 56 iako biegunów zakreslimy łuki EF, FD, DE; wierzchołki D, E, F, troykąta z tych łuków złożonego będą nawzaiem biegunami boków BC, AC, AB.

Dowodz. Ponieważ punkt A iest biegunem łuku EF, więc odległość AE iest $\frac{1}{4}$ okręgu; punkt C iest biegunem łuku DE, więc odległość CE, iest także $\frac{1}{4}$ okręgu; a zatem punkt E, iako oddalony o $\frac{1}{4}$ okręgu od każdego z punktów A i C iest biegunem łuku AC. Podobnież dowiedziemy że punkt D iest biegunem łuku BC, a punkt F biegunem łuku AB. Dla téy przyczyny troykąty ABC i DEF nazywaią się polarne.

70. *Twierd.* 44. Miarą kąta w tróykącie kulistym iest różnica między półokręgiem a bokiem odpowiadaiącym tróykąta polarnego fig *ta sama.*

Dowodz. Przedłużmy, ieżeli tego potrzeba, boki AB i AC do przecięcia boku EF w punktach G i H, ponieważ punkt A iest biegunem łuku GH, więc miarą kąta A będzie łuk GH. Aże łuk EH iest $\frac{1}{4}$ okręgu, bo punkt E iest biegunem łuku AH, a punkt F biegunem łuku AG; więc EH + GF znaczy pół-okręgu. Ponieważ zaś EH

+GF znaczy to samo co EF+ GH, łuk zatem GH będący miarą kąta A, iest równy $\frac{1}{2}$ okręgu mniey bokiem EF; podobnież miarą kąta B iest $\frac{1}{2}$okr.—DF, kąta C, $\frac{1}{2}$ okr.—DE.

71. *Twierdz.* 45. W tróykącie kulistym summa trzech kątów iest mnieysza od sześciu, a większa od dwoch kątów prostych.

Dowodz. *Iod* każdy kąt troykąta kulistego, iest mnieyszy od dwoch kątów prostych, (70) więc summa trzech kątow iest mnieysza od sześciu kątów prostych.

2re. Miarą każdego kąta tróykąta kulistego iest $\frac{2}{1}$ okręgu mniey bokiem odpowiadaiącym troykąta polarnego, więc miarą wszystkich trzech kątów są trzy pół-okręgi mniey summą trzech boków tróykąta polarnego, aże ta ostatnia iest mnieysza od iednego okręgu, odiąwszy ią zatem od trzech pół-okręgów, reszta będzie większa od iednego pół-okręgu który iest miarą dwoch kątów prostych; więc *2re* summma trzech kątów troykąta kulistego iest większa od dwóch kątów prostych.

Wn. I. Summa kątów w troykącie kulistym nie iest stała iak w troykącie prostokreślnym: zmienia się ona od dwóch do sześciu kątów prostych, nie mogąc nigdy dosięgnąć ani iednéy, ani drugiey granicy; przeto z dwóch kątów nie można wiedzieć trzeciego.

Wn. 2*gi*. Tróykąt kulisty, może mieć dwa, albo trzy kąty proste, dwa albo trzy kąty roztwarte. Tróykąt kulisty ABC fig. 57 nazywa się dwu-prostokątny, gdy dwa kąty B i C są proste, wtedy wierzchołek A iest biegunem podstawy BC; a każdy z boków AB, i AC iest $\frac{1}{4}$ okręgu. Gdy prócz tego i kąt A iest prosty, tróykąt ABC, iest trzy-prostokątny, wszystkie iego kąty są proste, a każdy z boków iest równy $\frac{1}{4}$ okręgu. Powierzchnia kuli składa się z ośmiu troykątów trzy-prostokątnych.

72. *Twierdz.* 46. Niech będą AB, BC,

CD fig. 58 następne boki wielokąta foremnego , O iego środek, a OI promień koła wpisanego; przypuściwszy że część wielokąta ABCD leżąca z iednéy strony średnicy FG, obraca się około teyże średnicy, powierzchnia którą w tym obrocie zakreśla część wielokąta ABCD, równa iest MQ$\times$okr. OI; gdzie MQ iest wysokością téy powierzchni, czyli częścią osi zawartą między prostopadłemi AM, DQ.

Dowodz. Ponieważ punkt I, iest środkiem boku AB, a IK prostopadłą spuszczoną z punktu I do osi, więc powierzchnia opisana bokiem AB będzie równa AB$\times$okr. IK (60) poprowadziwszy AX równoodległą od osi, troykąty ABX, OIK są podobne, bo ich boki są do siebie prostopadłe, to iest OI do AB, IK do AX i OK do BX; a zatem: AB: AX albo MN=OI: IK albo =okr. OI: okr. IK. Ztąd AB $\times$okr IK=MN$\times$okr.OI. Ztąd widzimy że powierzchnia opisana bokiem AB równa iest swéy wysokości MN pomnożnéy przez okrąg koła wpisanego. Podobnież powierzchnia opisana obrotem boku BC=NP $\times$ okr. OI, powierzchnia opisana obrotem CD=PQ $\times$ okr. OI. A zatem powierzchnia opisana obrotem części wielokąta ABCD równa iest (MN+NP+PQ) okr. OI, czyli MQ $\times$ okr. OI; to iest, swéy wysokości przez okrąg koła w wielokąt wpisanego.

Wn. Gdy wielokąt ma parzystą liczbę boków, a FG, przechodzi przez dwa wierzchołki przeciwne F i G, cała powierzchnia utworzona przez obrot połowy wielokąta FAG, równa iest swéy osi FG przez okrąg koła w tenże wielokąt wpisanego. Oś FG będzie razem średnicą koła opisanego.

73. *Twierdz.* 47. Powierzchnia kuli równa się iloczynowi z iey średnicy przez okrąg koła wielkiego.

Dowodz. Naprzód iloczyn z średnicy kuli przez okrąg iéy koła wielkiego nie może znaczyć powierzchni kuli większey. Bo daymy na to, ieżeli być może, że AB $\times$ okr. AC fig. 59. znaczy powierzchnią kuli promienia CD. Na kole promienia CA opiszmy wielokąt foremny o parzystéy liczbie boków, tak aby obwod iego nieschodził się w żadnym punkcie z okręgiem koła promienia CD; niech będą M i S dwa przeciwne wierzchołki tego wielokąta. Powierzchnia utworzona obrotem połowy wielokąta MPS około średnicy MS będzie równa MS $\times$ okr. AC ażeMS iest większe od AB, więc powierzchnia utworzona obrotem wielokąta iest większa od iloczynu AB$\times$okr. AC, a tém samem większa od powierzchni kuli promienia CD. Przeciwnie zaś powierzchnia kuli, iako otaczaiąca ze wszystkich stron powierzchnią utworzoną przez obrot wielokąta iest od niéy większa. Więc 1*mo* iloczyn ze średnicy kuli przez okrąg iéy koła wielkiego nie może znaczyć powierzchni kuli większey.

2*re*. Tenże sam iloczyn nie może znaczyć powierzchni kuli mnieyszéy. Albowiem niech będzie ieżeli to być może DE$\times$ okr.CD powierzchnia kuli promienia CA. Odbywszy to samo wykreślenie co w pierwszym przypadku, powierzchnia bryły utworzonéy obrotem wielokąta będzie równa iloczynowi MS$\times$ okr. AC. Lecz że MS iest mnieysze od DE, i okr. AC mnieyszy od okr. CD; więc dla tych dwoch przyczyn powierzchnia bryły utworzonéy obrotem wielokąta byłaby mnieysza od iloczynu DE $\times$okr. CD, a tém samém mnieysza od powierzchni kuli promienia AC. Gdy przeciwnie powierzchnia utworzona obrotem wielokąta iako otaczaiąca kulę promieniem AC iest większa od iéy powierzchni, więc 2re iloczyn ze średnicy kuli przez okrąg iéy koła wielkiego nie może znaczyć powierzchni kuli mnieyszey.

Powierzchnia zatem kuli iest równa iloczynowi ze średnicy przez okrąg iéy koła wielkiego.

Uwaga. Niech będzie R promień kuli, okrąg iéy koła wielkiego będzie 2π R, a kuli powierzchnia $4\pi R^2$

Wn. Powierzchnia koła wielkiego iest równa iloczynowi z iegu okręgu przez połowę promienia czyli $\frac{1}{4}$ średnicy; więc powierzchnia kuli iest cztery razy większa od powierzchni koła wielkiego.

174. *Twierdz.* 48. Powierzchnia pasa kulistego równa iest iloczynowi z iego wysokości przez okrąg koła wielkiego.

Dowodz. Niech będzie EF fig. 60 łuk iakikolwiek większy, lub mnieyszy od $\frac{1}{4}$ okręgu, i FG prostopadła spuszczona na promień EC, dowiedziemy że pas o iednéy podstawie utworzony obrotem łuku EF około EC będzie rowny iloczynowi EG$\times$okr. EC.

Przypuśćmy naprzod że pas ten równy iest iloczynowi mnieyszemu, np EG$\times$ okr. CA. W łuk EF wpiszmy część wielokąta foremnego EMNOPF, tak aby iego boki nieschodziły się z okręgiem koła zakreślonego promieniem CA, i spuśćmy CI prostopadłą do EM; powierzchnia utworzona obrotem wielokąta EMF około EC będzie równa iloczynowi EG$\times$okr. CI. Ażeiloczyn ten iest większy od iloczynu

EG × okr. AC; który podług przypuszczenia oznacza powierzchnią pasa utworzonego łukiem EF; więc powierzchnia utworzona obrotem wielokąta EMNOPF byłaby większa od powierzchni utworzonéy obrotem łuku EF, na tymże wielokącie opisanego, co być nie może, bo ta ostatnia iako otaczaiąca pierwszą iest od drugiéy większa. Więc 1*wsza* powierzchnia pasa kulistego nie może być mnieysza od iloczynu z iego wysokości przez okrąg koła wielkiego.

Dowiedziemy 2*re* ze tenże pas nie może być równy iloczynowi większemu od iloczynu ze swey wysokości przez okrąg koła wielkiego. Daymy bowiem że idzie o pas opisany obrotem łuku AB około AC, i niech będzie ieżeli być może pas AB > AD × okr. AC. Cała powierzchnia kuli składa się z dwóch pasów AB i BH, i iest równa AH × okr, AC; gdyby więc był pas AB > AD × okr, AC musiałby być pas BH < DH × okr, AC, coby było przeciwne pierwszéy części dowodzenia. Więc 2re pas nie może być równy iloczynowi większemu od iloczynu ze swéy wysokości przez okrąg koła wielkiego; a tém samém każdy pas kulisty iest równy iloczynowi ze swéy wysokości przez okrąg koła wielkiego.

Uważaymy teraz pas iakikolwiek o dwoch podstawach, opisany obrotem łuku FH, fig.49 około średnicy DE; z punktu F i H spuśćmy na średnicę prostopadłe FO, HQ. Pas opisany obrotem łuku FH iest różnicą dwoch pasów opisanych obrotem łuków DH, DF, ztych pierwszy równy iest DQ $\times$okr.CD, drugi DO$\times$okr. CD; więc pas opisany obrotem łuku FH równa się (DQ—DO) okr. CD, czyli OQ $+$okr. CD.

Każdy zatem pas kulisty o dwoch podstawach iest równy iloczynowi ze swéy wysokości przez okrąg koła wielkiego.

Wn: Dwa pasy iednéy kuli, lub dwoch

kul równych są do siebie w stosunku wysokości; pas zaś iest do powierzchni kuli, iak iego wysokość do średnicy.

75. *Twierdz.* 49. Taśma AMBNA fig. 61 tak się ma do powierzchni kuli iak kąt MAN; do czterech kątów prostych, lub iak łuk MN będący miarą tego kąta do okręgu.

Dowodz. Uważaymy naprzód przypadek w którym łuk MN. iest spółmierny z okręgiem koła, i daymy że łuk MN iest do okręgu koła MNPQ np. iak 5 do 48. Podzielmy okręg MNPQ na 48 części, łuk MN będzie zamykał 5 takich części; a połączywszy punkta podziału z biegunem A, otrzymamy 48 troykątów równych sobie na półkuli AMPNQ, cała więc powierzchnia kuli będzie zamykała 96 takich troykątów cząstkowych, iakich taśma AMBNA 10, taśma więc iest do powierzchni kuli, iak 10 do 96, albo 5 do 48, to iest iak łuk MN do okręgu.

Gdyby łuk MN nie był spółmierny z okręgiem, dowiedlibyśmy sposobem pospolicie w takim przypadku używanym, że zawsze taśma iest do powierzchni kuli iak łuk MN do o okręgu.

Wn: Powierzchnia kuli równa iest iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez średnicę, więc powierzchnia taśmy równa iest iloczynowi z łuku będącego miarą iéy kąta przez średnicę.

76. *Twierdz.* 50. Jeżeli tróykąt BAC i prostokąt BCEF, fig. 62 maiące iednę podstawę i wysokość obracaią się razem około wspólnéy podstawy BC; bryła utworzona obrotem troykąta będzie trzecią częścią walca utworzonego obrotem prostokąta.

Dowodz. Spuściwszy do osi prostopadłą AD, ostrokrąg utworzony obrotem tróykąta ABD, iest $\frac{1}{3}$ walca utworzonego obrotem prostokąta AFBD, podobnież ostrokrąg utworzony obrotem tróykąta ADC iest $\frac{1}{3}$ walca utworzonego obrotem prostokąta ADCE; więc summa tych dwoch ostrokręgów czyli bryła utworzona obrotem tróykąta ABC iest $\frac{1}{3}$ summy dwoch walców, czyli walca utworzonego obrotem prostokąta BCEF.

Gdy prostopadła AD przypada za troykątem fig, 63, wtenczas bryła utworzona przez ABC, będzie różnicą dwoch ostrokręgów opisanych przez ABD i ACD; lecz też i walec utworzony przez BCEF będzie rożnicą walców utworzonych przez AFBD i AECD. Więc bryła utworzona obrotem tróykąta będzie zawsze $\frac{1}{3}$ walca utworzonego obrotem prostokąta maiącego tę samę podstawę i wysokość.

Uwaga. Powierzchnia koła promienia AD iest $\pi \times AD^2$; więc walec utworzony obrotem prostokąta BCEF będzie $\pi \times AD^2 \times BC$, a bryła utworzona obrotem troykąta ACB będzie $\frac{1}{3} \pi \times AD^2 \times BC$.

77. *Zagadn.* Znaleść bryłę utworzoną obrotem tróykąta ABC fig. 64. około linii CD poprowadzonéy w iakim-

kolwiek kierunkn za troykątem przez iego wierzchołek G.

Rozw. Bok AB przedłużmy do przecięcia osi CD w punkcie D, i z punktów A i B spuśćmy do osi prostopadłe AM i BN. Bryła utworzona obrotem troykąta CAD równa iest iloczynowi $\frac{1}{3}\pi \times AM^2 \times CD$: bryła utworzona tróykątem CBD rowna iest $\frac{1}{3}\pi \times BN^2 \times CD$; więc różnica tych brył czyli bryła utworzona tróykątem ABC będzie równa $\frac{1}{3}(AM^2 - BN^2) CD$. Wyrażeniu temu można dać inną postać. Z punktu I środka boku AB, poprowadźmy IK prostopadłą do CD, a przez punkt B poprowadźmy BO rownoodległą od CD, będzie: $AM + BN = 2IK$; a $AM - BN = AO$; więc $(AM + BN)(AM - BN)$ czyli $AM^2 - BN^2 = 2IK \times AO$. Bryłę zatem o którey mowa wyraża iloczyn $\frac{2}{3} \times IK \times AO \times CD$. Lecz spuściwszy CP prostopadłą do AB, troykąty ABO i DCP będą podobne, a zatem: $AO : CP = AB : CD$, ztąd $AO \times CD = CP \times AB$; aże $CP \times AB$

iest to dwa razy wzięta powierzchnia tróykąta ABC, więc AO×CD=2ABC; a tém samém bryła utworzona obrotem tróykąta ABC iest także równa $\frac{4}{3}\pi$×ABC×IK, czyli co toż samo znaczy ABC×$\frac{2}{3}$okr.IK, gdyż okr.IK=2πIK.

Bryła więc utworzona obrotem tróykąta ABC, równa iest iloczynowi z powiérzchni tegoż troykąta przez $\frac{2}{3}$ okręgu zakreślonego punktem I, który iest środkiem iego podstawy.

Wn. Gdy bok AC=CB fig. 65 liniia CI będzie prostopadła do AB, powierzchnia tróykąta ABC będzie AB×$\frac{1}{2}$CI a bryłowatość $\frac{4}{3}\pi$×ABC×IK zamieni się na $\frac{2}{3}\pi$×AB×IK×CI. Ażе tróykąty ABO, CIK są podobne i daią proporcyą AB: BO albo MN=CI: IK, więc AB×IK =MN×CI; bryła zatém utworzona obrotem tróykąta równoramiennego ABC równa iest $\frac{2}{3}\pi$×MN×CI^2

Uwaga. Lubo ogólne rozwiązanie zdaie się przypuszczać, że liniia AB przedłużona przecina oś; wypadki iednak równie prawdziwe byłyby, chociażby liniia AB była równoodległa od osi, iak się o tém łatwo przekonać uważaiąc że walec opisany prostokątem AMNB fig. 66 iest równy $\pi AM^2 \times MN$; ostrokrąg utworzony przez ACM $= \frac{1}{3}\pi AM^2 \times CM$. a ostrokrąg utworzony przez $BCN = \frac{1}{3}\pi AM^2 \times CN$. Dodawszy do siebie dwie pierwsze bryły, i od ich summy odiąwszy trzecią, otrzymamy bryłę utworzoną obrotem tróykąta $ABC = \pi AM^2 (MN + \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CN)$, aże $CN - CM = MN$, wyrażenie więc to przywodzi się do $\pi AM^2 \times \frac{2}{3} MN$ czyli $\frac{2}{3} CP^2 MN$, co się zupełnie zgadza z wypadkami wyżéy otrzymanemi.

78. *Twierdz.* 51. Niech będą AB, BC, CD fig. 58 następne boki wielokąta foremnego, O iego środek, a OI promień koła w tenże wielokąt wpisanego; wystawiwszy sobie że wycinek wielokątny AOCD, leżący z iednéy strony średnicy FG, obraca się około téyże średnicy, bryła tym sposobem utworzona będzie równa iloczynowi

$\frac{2}{3}\pi OI^2 \times MQ$, MQ iest część osi zawarta między prostopadłemi AM i DQ.

Dowodz. Ponieważ wielokąt iest foremny, więc wszystkie tróykąty AOB BOC, i t. d. są równoramienne i równe. Podług zaś wniosku poprzedzającego, bryła utworzona obrotem tróykąta równoramiennego AOB, iest równa $\frac{2}{3}\pi OI^2 . MN$. Bryła utworzona obrotem troykata BOC iest równa $\frac{2}{3}\pi OI^2 . NP$, a bryła utworzona obrotem tróykąta $COD = \frac{2}{3}\pi OI^2 \times PQ$; więc summa tych brył, czyli cała bryła utworzona obrotem wycinka wielokątnego równa iest $\frac{2}{3}\pi OI^2 (MN + NP + PQ)$ czyli $\frac{2}{3}\pi OI^2 . MQ$.

79. *Twierdz.* 52. Wycinek kuli równy iest iloczynowi z pasa który iest iego podstawą przez $\frac{1}{3}$ promienia; a cała kula iloczynowi ze swéy powierzchni przez $\frac{1}{3}$ promienia.

Dowodz. Niech będzie ABC fig. 60 wycinek koła, który obracaiąc się około AC, tworzy wycinek kuli; ponieważ pas utworzony obrotem łuku AB iest równy $AD \times$ okr. AC czyli $2\pi AC \times AD$, więc dowiedziemy że wycinek kuli będzie równy iloczynowi z tego pasa przez $\frac{1}{3}AC$ czyli $\frac{2}{3}\pi AC^2.AD$. Jakož 1° daymy na to, ieżeli być może; że to wyrażenie $\frac{2}{3}\pi AC^2.AD$ znaczy większy wycinek kuli, np. wycinek utworzony obrotem wycinka koła ECF podobnego wycinkowi ACB. W łuk EF wpiszmy część wielokąta foremnego EMNF, któregoby boki nigdzie się nieschodziły z łukiem AB, i wystawmy sobie, że wycinek wielokątny ENFC, obraca się około EC razem z wycinkiem koła ECF. Niech będzie CI promień koła wpisanego w wielokąt, i FG prostopadła do EC spuszczona. Bryła utworzona w tym obrocie przez wycinek wielokątny będzie równa $\frac{2}{3}\pi CI^2.EG$; a że CI iest większa od AC z wykreślenia, a EG większe od AD, bo połączywszy AB i EF, w tróykątach EFG i ABD podobnych iest $EG:AD=FG:BD=CF:CB$, więc $EG>AD$. Z tych dwóch przyczyn $\frac{2}{3}\pi CI^2.EG$ iest większe od $\frac{2}{3}\pi CA^2.AD$. Ażeby pierwsze z nich oznacza bryłę utworzoną obrotem wycinka wielokątnego, a drugie podług przypuszczenia wycinek kuli utworzony obrotem wycinka koła ECF, więc bryła utworzona obrotem wycinka wielokątnego byłaby większa od wycinka kuli utworzonego obrotem wycinka koła Gdy przeciwnie bryła o któréy mowa iest mnieysza od wycinka kuli, bo iest w nim zamknięta; przypuszczenie więc to utrzymać się nie może; a tak łódź iloczyn z pasa będącego podstawą wycinka kuli przez $\frac{1}{3}$ promienia, nie może oznaczać większego wycinka kuli.

Dowiedziemy 2re, że tenże sam iloczyn nie może oznaczać mnieyszego wycinka kuli. Niech będzie albowiem wycinek koła CEF który swoim obrotem tworzy dany wycinek kuli, i daymy, ieżeli to być może że $\frac{2}{3}\pi$ CE^2 EG oznacza mnieyszy wycinek kuli, np. wycinek utworzony obrotem wycinka koła ACB. Wykonawszy to samo co w poprzedzaiącym przypadku wykreślenie, bryła utworzona obrotem wycinka wielokątnego będzie zawsze $\frac{2}{3}\pi CI^2.EG$. Lecz CI iest mnieysze od CE; więc ta bryła iest mnieysza od $\frac{2}{3}\pi CE^2.EG$, co z przypuszczenia znaczy wycinek kuli utworzony obrotem wycinka ACB. Bryła zatém utworzona obrotem wycinka wielokątnego byłaby mnieysza od wycinka kuli utworzonego obrotem wycinka koła ACB; co byc nie może; bo ta bryła iako otaczsiąca zewsząd wycinek kuli iest od niego większa. Więc 2*re* być nie może, aby iloczyn z pasa będącego podstawą wycinka kuli przez $\frac{1}{3}$ promienia był mnieyszy od tegoż wycinka. Ztąd wypada że wycinek kuli równy iest iloczynowi z pasa który iest iego podstawą przez trzecią część promienia.

Wycinek koła ACB może się powiększać, aż się zamieni w pół-kole, a wtedy wycinkiem kuli utworzonym przez iego obrot iest cała kula; a tak bryłowatość kuli iest równa iéy powierzchni rozmnożonéy przez trzecią część promienia.

Wn. Ponieważ powierzchnie dwóch kul, są w stosunku kwadratów z promieni, więc powierzchnie te pomnożone przez promienie są iak sześciany z tychże promieni; a tém samém *bryłowatości dwoch kul są w stosunku sześcianów z ich promieni, albo sześcianów z ich średnic.*

Uwaga. Nazwiymy R promień kuli, iéy powierzchnia będzie $4\pi R^2$, a bryłowatość $4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$ czyli $\frac{4}{3}\pi R^3$. Oznaczywszy przez S średnicę kuli, będzie $R = \frac{1}{2} S$, a $R^3 = \frac{1}{8} S^3$, ztąd bryłowatość kuli można także wyrazić przez $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} S^3$. czyli $\frac{1}{8}\pi S^3$.

80. *Twierdz.* 53. Powierzchnia kuli tak się ma do całéy powierzchni walca na niéy opisanego, (uważaiąc razem i iego podstawy) iak 2 do 3. Bryłowatości tych dwoch ciał są do siebie w tymże samym stosunku.

Dowodz. Niech będzie MNPQ fig. 67 koło wielkie kuli, ABCD kwadrat na nim opisany; obracaiąc razem pół-kole PMQ, i połowę kwadratu PADQ około średnicy PQ, pół-kole utworzy kulę, a połowa kwadratu walec na teyże kuli opisany. Co do 1go wysokość AD walca iest równa średnicy PQ; podstawa zaś iego iest kołem wielkiém bo iéy średnica AB iest równa MN; powierzchnia zatém boczna walca iest równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez iego średnicę. Aże ten sam iloczyn oznacza także powierzchnią kuli, więc powierzchnia kuli, iest równa powierzchni bocznéy walca na niéy opisanego.

Lecz powierzchnia kuli równa się czterem kołom wielkim, więc i powierzchnia boczna walca na niéy opisanego iest także równa czterem kołom wielkim; dodawszy zaś do niéy dwie podstawy, które znaczą dwa koła wielkie, cała powierzchnia walca opisanego będzie równa szesciu kołom wielkim. Powierzchnia więc kuli iest do całéy powierzchni walca na niéy opisanego, iak 4 do 6, czyli iak 2 do 3.

2re. Ponieważ podstawą walca opisanego na kuli iest koło wielkie, a wysokością średnica, więc iego bryłowatość iest równa kołu wielkiemu pomnożonemu przez średnicę, bryłowatość zaś kuli iest rowna czterem kołom wielkim pomnożonym przez $\frac{1}{3}$ promienia czyli, co toż samo znaczy, iednemu kołu wielkiemu pomnożonemu przez $\frac{4}{3}$ promienia, czyli $\frac{2}{3}$ średnicy; więc kula iest do walca na niéy opisanego iak $\frac{2}{3}$ do $\frac{3}{3}$ czyli iak 2: 3; bryłowatości zatem tych dwóch ciał są do siebie w stosunku ich powierzchni.

Uwaga. Gdy sobie wystawimy wielościan taki, że iego ściany są styczne do kuli, to iest wielościan opisany na kuli, wielościan ten można będzie uważać za złożony z piramid maiących za wspólny wierzchołek środek kuli, a za podstawy ściany wielościanu. Wspolną wysokością tych wszystkich piramid będzie promień kuli tak, iż każda piramida będzie równa ścianie wielościanu, która iest iéy podstawą, pomnożonéy przez $\frac{1}{3}$ promienia; cały zatém wielościan na kuli opisany będzie równy swéy powierzchni rozmnożonéy przez $\frac{1}{3}$ promienia kuli wpisanéy.

Ztąd widzimy że bryłowatości wielościanów na kuli opisanych są do siebie w stosunku swych powierzchni.

81. *Zagadn.* Wyrachować bryłę utworzoną obrotem odcinka koła BMD fig. 68. około średnicy za tym odcinkiem znayduiącéy się.

Rozw. Spuśćmy na oś prostopadłe BE i DF, wyprowadźmy ze środka C, prostopadłą CI do cięciwy BD, i promienie CB, i CD. Bryła utworzona obrotem wycinka. $BCA = \frac{2}{3}\pi CB^2 . AE$; bryła utworzona obrotem wycinka $DCA = \frac{2}{3}\pi CB^2 . AF$; więc różnica tych dwóch brył to iest bryła utworzona obrotem wycinka $BCD = \frac{2}{3}\pi CB^2 (AF - AE) = \frac{2}{3}\pi CB^2 . EF$. Aże bryła utworzona obrotem tróykąta równoramiennego $DCB = \frac{2}{3}\pi CI^2 \cdot EF$; więc bryła utworzona obrotem odcinka BMD $= \frac{2}{3}\pi EF(CB^2 - CI^2)$. W tróykącie prostokątnym CBI iest $CB^2 - CI_2 = BI^2 = \frac{1}{4}BD^2$ więc bryła utworzona obrotem odcinka $BMD = \frac{2}{3}\pi EF . \frac{1}{4}BD^2$ czyli $\frac{1}{6}\pi BD^2 . EF$.

Uwaga Bryła utworzona obrotem odcinka BMD, iest do kuli, któréy średnicą iest, BD, iak $\frac{1}{6}\pi BD^2 . EF$ do $\frac{1}{6}\pi BD^3$, czyli iak EF: BD.

82 *Twierdz.* 54. Odcinek kuli zawarty między dwiema płaszczyznami równoodległemi równa się połowie summy swych podstaw pomnożonéy przez iego wysokość, więcéy kulą któréy taż wysokość iest średnicą.

Dowodz. Niech będą BE i DF fig 68 promienie podstaw odcinka, EF iego wysokość, tak iż część koła BMDFE, obracaiąc się około osi EF, tworzy tenże odcinek kuli. Bryła utworzona obrotem odcinka koła $BMD = \frac{1}{6}\pi BD^2 \times EF$, (81) ostrokręg ścięty utworzony obrotem trapeza $BDFE = \frac{1}{3}\pi EF(BE^2 + DF^2 + BE.DF)$; (58) więc odcinek kuli iako summa tych dwóch brył $= \frac{1}{6}\pi EF(2BE^2 + 2DF^2 + 2BE. \times BF + BD^2)$. Poprowadziwszy BO równoodległą od EF będzie $DO = DF - BE$; ztąd $DO^2 = DF^2 - 2DF.BE + BE^2$ a tém samem $BD^2 = BO^2 + DO^2 = EF^2 + DF^2 - 2DF \times BE + BE^2$. Ważność tę wstawiwszy za BD^2, w wyrażeniu na odcinek, i odbywszy redukcyą otrzymamy następuiące wyrażenie bryłowatości odcinka $\frac{1}{6}\pi EF(3BE^2 + 3DF^2 + EF^2)$, które można rozłożyć na dwie części, z tych 1wsza $\frac{1}{6}\pi EF(3BE^2 + 3DF^2)$ czyli

$$EF\left(\frac{(\pi BE^2 + \pi DF^2)}{2}\right)$$ iest iloczynem

z połowy summy dwóch podstaw przez wysokość, 2ga $\frac{1}{6}\pi EF^3$, znaczy kulę któréy EF iest średnicą.

Wn. Gdy iedna z podstaw iest zero, odcinek, o ktorym mowa, zamienia się na odcinek kuli o iednéy podstawie;

odcinek więc kuli o iednéy podstawie równa się połowie walca maiącego tę samę podstawę i wysokość więcéy kulą któréy taż wysokość iest średnicą.

Uwaga. Nazwiymy P, Q podstawy odcinka, W iego wysokość, bryłowatość tego odcinka będzie: $\left(\frac{P+Q}{2}\right) W + \frac{1}{6}\pi W^3$.

Gdy odcinek kuli ma tylko iednę podstawę P, bryłowatość iego będzie $\frac{2}{1}PW + \frac{1}{6}\pi W^3$.

KONIEC.

OMYŁKI DRUKU

Stron.	*Wiersz od gory*	*Zamiast*	*Czytay.*
5.	24	w	na
11.	21.	końca	końców
12	4	ME	AE
15.	2	przeciętą była	przecięła
15.	22	poprowadżony	poprowadzonéy
16	9	liinia	linije
19	16	pozostałe	powstałe
22	10	rowno legła	równoodległa
22	15	ten sam	ieden
22	22	punkt	z punktu
22	24	luk	łuk
23	20	przyyść	przejść
30	17	z punktu B	P
31	3	TDPD	TDPF
33.	23 24	pewności pewnością	równości równością
40	1.	po głoskach SC: dodać: nakoniec z punktu S jako środka promieniem SB′ nakreślmy okręg, ten przetnie prostopadłą OCB″ w B″ a połączywszy SB″, kąt CSB″ i t. d.	
46	15	maiąc	maią
49	23	wykreślić	wystawić
51	19	trójkąty	trapezy
53	25	P′NQ	P′N′Q′
59	8	DAE	BAE
64	2	równie i inne	równe jak i inne
83	6	Ax	AX
85	10	Ax	AX
106	7	z wierzchołkiem	z wierzchołka
112	12	to ich linije	to linije
127	11	Na kołs	na kole
131	6	prostopadłę	prostopadłą
153	13	promieniem	promiena

Tabl. I.

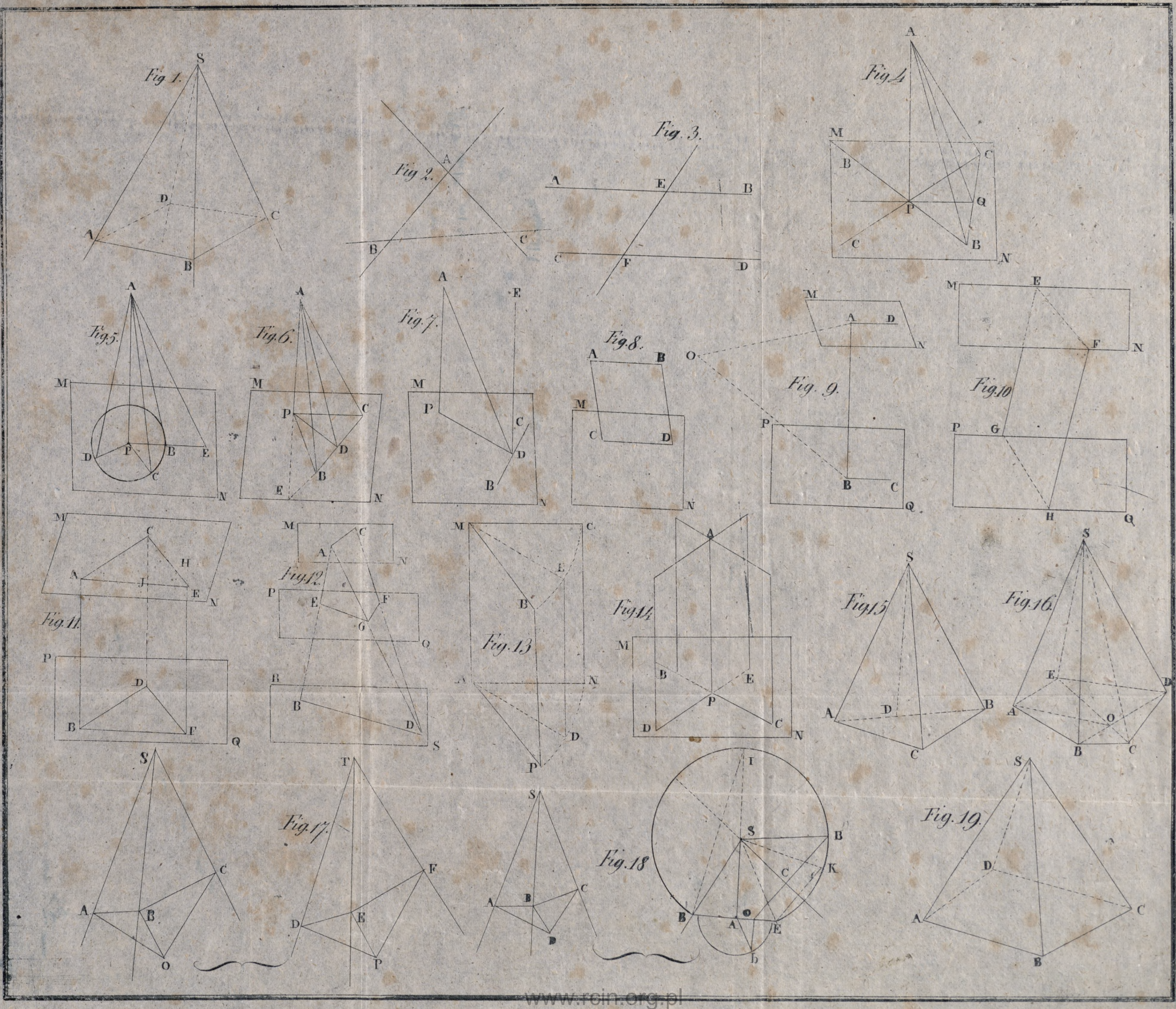
Fig 1.
Fig 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

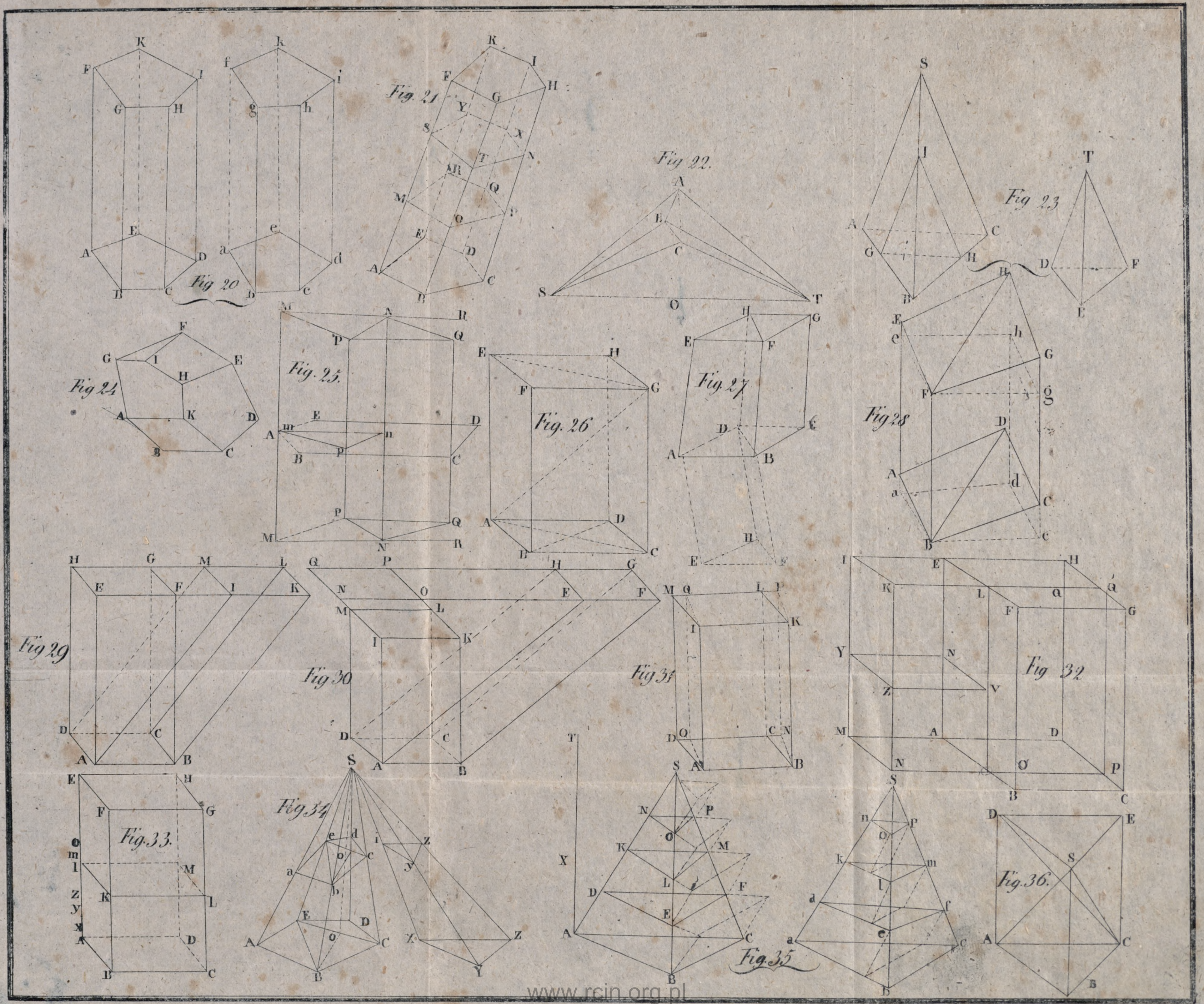
Fig 20
Fig. 21
Fig 22
Fig 23
Fig 24
Fig. 25.
Fig. 26
Fig. 27
Fig 28
Fig 29
Fig 30
Fig 31
Fig 32
Fig. 33.
Fig 34
Fig. 35
Fig. 36.

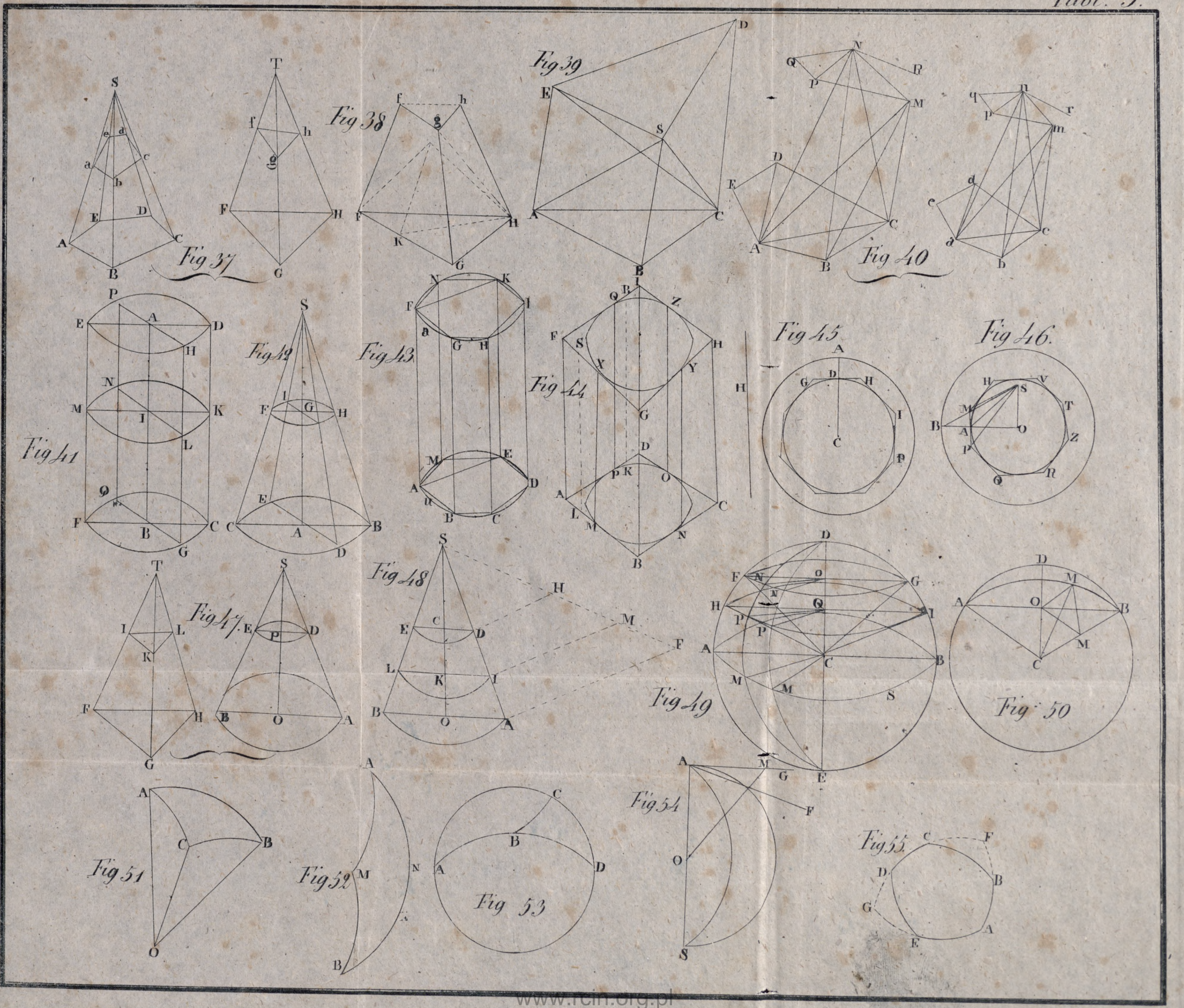
Fig 37
Fig 38
Fig 39
Fig 40
Fig 41
Fig 42
Fig 43
Fig 44
Fig 45
Fig 46
Fig 47
Fig 48
Fig 49
Fig 50
Fig 51
Fig 52
Fig 53
Fig 54
Fig 55

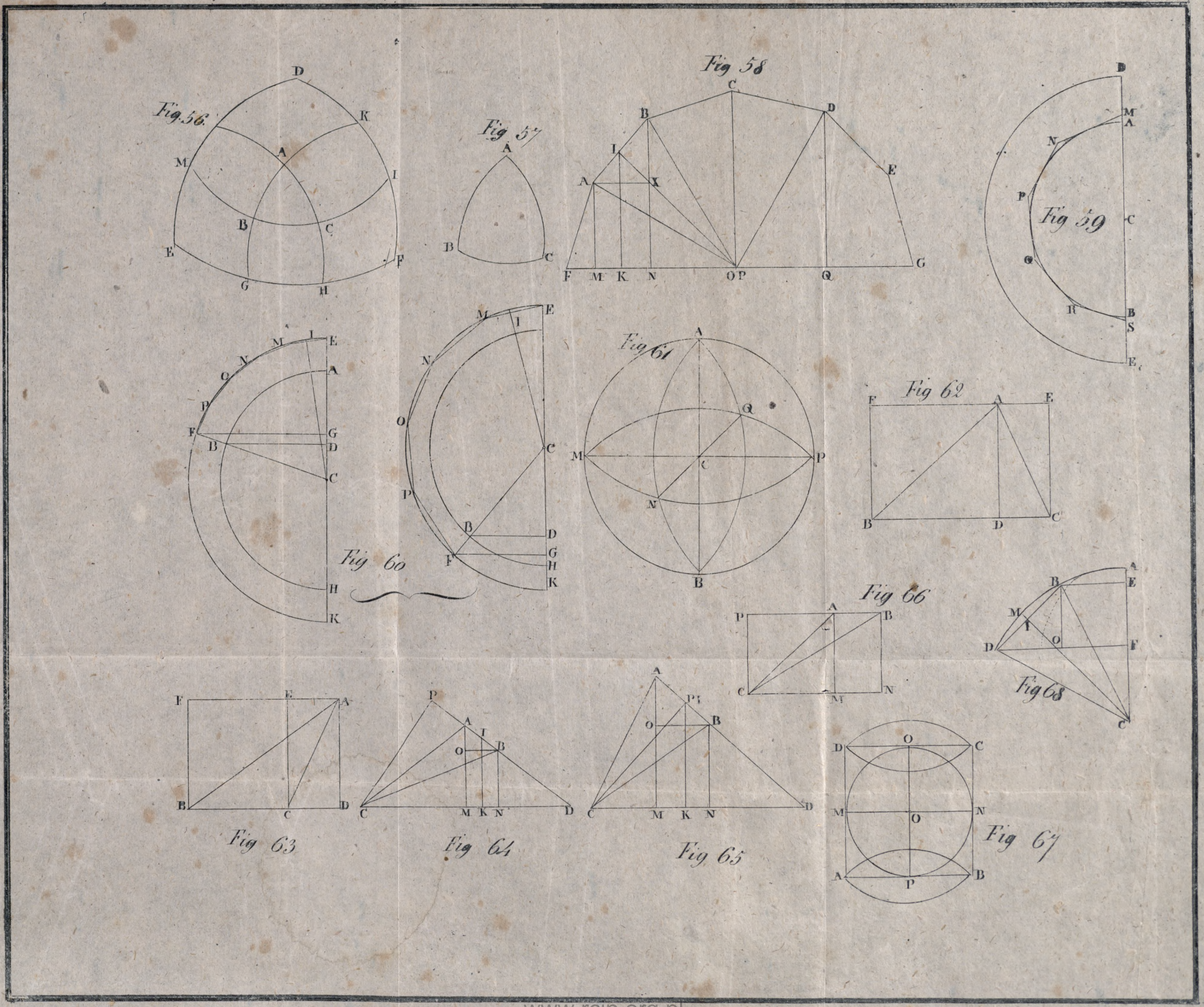
Fig 56.
Fig 57
Fig 58
Fig 59
Fig 60
Fig 61
Fig 62
Fig 63
Fig 64
Fig 65
Fig 66
Fig 67
Fig 68