Neumann

Hankel

Hesse

opis: 47071
opis: 47078
opis: 47080
opis: 47083
opis: 47086
opis: 47091
opis: 47092

465, 6, 7, 8, 9, 470

2113, 2114, 2115
2116, 2117, 2118
2119

Dickstein

1. Ueber die Entwickelung einer Function ~~mit~~ imaginären Argumente nach den Kugelfunctionen 1er u. 2er Art.
Carl Neumann.

2. Ueber die Principien der Galilei-Newtonschen Theorie
Carl Neumann

3. Theorie der Besselschen Functionen.
Carl Neumann.

4. Die Entwickelung d. Mathematik in d. letzten Jahrhunderts.
H. Hankel.

5. Die Eulerschen Integrale
H. Hankel.

6. Die Determinanten
O. Hesse

7. Die vier Species
O. Hesse.

Ueber

die Entwickelung einer Function

mit imaginärem Argument

nach

den Kugelfunctionen erster und zweiter Art.

Von

Carl Neumann.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1862.

Bezeichnet R irgend einen auf der $\overline{xy}$-Ebene abgegrenzten Raum, innerhalb dessen eine von $z = x + iy$ (auf monogene Weise) abhängende Function $f(z)$ überall stetig bleibt, und repräsentirt $z_1 = x_1 + iy_1$ einen innerhalb dieses Raumes befindlichen Punct, so gilt bekanntlich folgende Formel

$$(1.) \qquad 2\pi i f(z_1) = \int \frac{f(z)\,dz}{z - z_1},$$

wo die Integration über alle Puncte z, die zur Peripherie von R gehören, auszudehnen und in derjenigen Richtung fortzuführen ist, welche zur äusseren*) Normale der Peripherie so liegt, wie die y-Achse zur x-Achse.

Vermittelst dieses Satzes ist es Cauchy gelungen**), die Taylor'sche Entwickelung in einfacherer und zugleich allgemeinerer Weise, als es früher

*) Unter der äusseren Normale der Peripherie von R verstehe ich die aus dem Innern von R in den angrenzenden Raum hineinlaufende Richtung der Normale.

**) Man sehe darüber z. B. Théorie des fonct. doubl. périodiques, par Briot et Bouquet. Pag. 23 — 33.

geschehen war, zu begründen. Cauchy fand bekanntlich, dass die Entwickelung einer Function nach steigenden Potenzen von z immer möglich ist, wenn dieselbe innerhalb eines um den Anfangspunct ($z = 0$) beschriebenen Kreises überall stetig bleibt; und dass andererseits eine Entwickelung derselben gleichzeitig nach steigenden und fallenden Potenzen von z möglich ist, sobald sie zwischen irgend zwei um jenen Punct ($z = 0$) beschriebenen Kreisen stetig ist. Selbstverständlich ist dann jede dieser beiden Entwickelungen nur für dasjenige Gebiet des Argumentes z gültig, innerhalb dessen die Function in dem einen oder in dem andern Fall als stetig vorausgesetzt wird.

In analoger Weise lässt sich nun, wie ich zeigen werde, die Formel (1.) verwenden, um die Entwickelung einer Function $f(z)$ nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art d. i. nach den $P^{(n)}(z)$ und $Q^{(n)}(z)$ *) zu bewerkstelligen. An Stelle der concentrischen Kreise wird dabei ein System confocaler, um die Brennpuncte $z = +1$ und $z = -1$ beschriebener Ellipsen auftreten, um dasjenige Ge-

---

*) Unter $\overset{(n)}{P}(z)$ und $\overset{(n)}{Q}(z)$ sind die beiden particulären Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial(1-z^2)\frac{\partial F}{\partial z}}{\partial z} + n(n+1)F = 0$$

zu verstehen, und zwar in derjenigen Form, welche in Heine's Handbiet des Argumentes z zu bestimmen, für welches diese Entwickelungen anwendbar sind. Es wird sich nämlich herausstellen, dass eine Function $f(z)$ innerhalb des von einer solchen Ellipse umschlossenen Raumes immer durch eine nach den $P^{(n)}(z)$ fortschreitende Reihe darstellbar ist, falls sie innerhalb jenes Raumes überall stetig ist; und ferner, dass die Function $f(z)$ innerhalb des ringförmigen Raumes, der zwischen zwei Ellipsen jenes Systemes liegt, durch eine gleichzeitig nach den $P^{(n)}(z)$ und $Q^{(n)}(z)$ fortschreitende Reihe ausgedrückt werden kann, falls sie innerhalb des eben genannten ringförmigen Raumes überall stetig ist.

Die Begründung der Taylor'schen Reihe gelang Cauchy bekanntlich dadurch, dass er den in (1.) unter dem Integral befindlichen Bruch $\frac{1}{z - z_1}$ nach dem Binomischen Satze entwickelte.

Die neuen Reihen, von denen hier die Rede ist, werden dadurch erhalten werden, dass man zur Entwickelung jenes Bruches den Heine'schen Satz*):

buch der Kugelfunctionen (Pag. 14, 15 und 59) als die Normalform festgesetzt ist, nämlich:

$$\overset{(n)}{P}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z - \sqrt{z^2 - 1}\cos\alpha)^n d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{(z + \sqrt{z^2-1}\,.\cos\alpha)^{n+1}}$$

$$\overset{(n)}{Q}(z) \qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{(z + \sqrt{z^2-1}\cos i\alpha)^{n+1}}$$

*) Heine, Handb. d. Kugelfunct. Pag. 104.

$$(2.)\qquad \frac{1}{z-z_1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \,.\, \overset{(n)}{P}(z_1)\, \overset{(n)}{Q}(z)$$

in Anwendung bringt. Daraus ergeben sich jene Reihen mit solcher Leichtigkeit, dass ihre Aufstellung als eine unmittelbare Folge dieses merkwürdigen Satzes anzusehen ist.

Bemerkt muss zunächst werden, dass die Darstellung (2.), wie Heine nachgewiesen hat*), immer und nur dann gültig ist, wenn

$$(3.)\qquad \bmod\,(z+\sqrt{z^2-1}) > \bmod\,(z_1+\sqrt{z_1{}^2-1})$$

ist. Hinsichtlich der Vorzeichen von $\sqrt{z^2-1}$ und $\sqrt{z_1{}^2-1}$ wird dabei vorausgesetzt**), dieselben seien so bestimmt worden, dass j e d e r d e r e b e n g e n a n n t e n b e i d e n M o d u l n g r ö s s e r a l s 1 i s t. — Um dieser Bedingung (3.) zunächst eine mehr übersichtliche Fassung zu geben, führen wir an Stelle der Coordinaten x, y zwei neue Variable ϑ, ω ein, und setzen:

$$(4.)\qquad z = x+iy = \cos(\omega - i\vartheta).$$

Daraus ergeben sich für die Abhängigkeit zwischen x, y und ϑ, ω folgende Gleichungen:

$$(4.\,a.)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2}\cos\omega \\[2ex] y = \dfrac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2}\sin\omega \end{cases}$$

und

*) l. c. Pag. 105 seq.

**) l. c. Pag. 75.

$$(4.b.)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\cos^2\omega} - \dfrac{y^2}{\sin^2\omega} = 1 \\ \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{e^\vartheta + e^{-\vartheta}}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{e^\vartheta - e^{-\vartheta}}{2}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

woraus ersichtlich ist, dass die Gleichungen $\omega =$ Const. und $\vartheta =$ Const. zwei Systeme confocaler Hyperbeln und Ellipsen vorstellen, deren Brennpuncte die Coordinaten $x = 1$, $y = 0$ und $x = -1$, $y = 0$ besitzen. Man kann sämmtliche Ellipsen dieses Systemes auf doppelte Weise erhalten, entweder dadurch, dass man ϑ von 0 bis ∞ wachsen, oder dadurch, dass man dasselbe von 0 bis $-\infty$ abnehmen lässt. Um diese Willkür zu vermeiden, setzen wir fest, dass unter ϑ nur positive Werthe verstanden werden sollen. Da alsdann diejenige Ellipse, welche sich als Verbindungslinie der beiden Brennpuncte darstellt, den Parameter $\vartheta = 0$, und andererseits diejenige Ellipse, welche sich in unendlicher Ferne um die Brennpuncte herumzieht, den Parameter $\vartheta = +\infty$ besitzt; so wird ϑ jederzeit im Wachsen begriffen sein, sobald man von einer die Brennpuncte enger umschliessenden zu einer dieselben aus weiterer Entfernung umgebenden Ellipse übergeht. — Was nun die Bedingung (3.) anbelangt, so wird:

$$z = \cos(\omega - i\vartheta)$$
$$\sqrt{z^2 - 1} = \pm\, i \sin(\omega - i\vartheta)$$

$$z+\sqrt{z^2-1} = e^{\pm i(\omega - i\vartheta)} = e^{\pm\vartheta}(\cos\omega \pm i\sin\omega)$$
$$\operatorname{mod}(z+\sqrt{z^2-1}) = e^{\pm\vartheta}.$$

Beachtet man nun, dass das, hier durch die Zweideutigkeit von $\sqrt{z^2-1}$ hereingekommene, Vorzeichen $\pm$ der Art zu wählen ist, dass $\operatorname{mod}(z+\sqrt{z^2-1})>1$ wird, und beachtet man ferner, dass unter ϑ eine Grösse von positivem Werth verstanden wird, so ergiebt sich:

$$\operatorname{mod}(z+\sqrt{z^2-1}) = e^{\vartheta}.$$

Ebenso wird, falls man $z_1 = (x_1+iy_1) = \cos(\omega_1 - i\vartheta_1)$ setzt:

$$\operatorname{mod}(z_1+\sqrt{z_1{}^2-1}) = e^{\vartheta_1}.$$

Die Bedingung (3.) verwandelt sich demnach in

$$\vartheta > \vartheta_1,$$

und wird also erfüllt sein, sobald die durch den Punct z gelegte Ellipse grösser ist als die durch z_1 gelegte Ellipse. Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

(5.) Von den beiden Formeln

$$\frac{1}{z-z_1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \overset{(n)}{P}(z_1) \overset{(n)}{Q}(z)$$

$$\frac{1}{z_1-z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \overset{(n)}{P}(z) \overset{(n)}{Q}(z_1)$$

ist die erstere immer anwendbar, wenn sich der Punct z_1 *innerhalb*, die letztere immer anwendbar, wenn sich derselbe *ausserhalb* einer durch den Punct z gehenden Ellipse mit den Brennpuncten $(z = \pm 1)$ befindet.

Wendet man demnach die Gleichung (1.) auf denjenigen Raum R an, welcher von einer Ellipse mit den Brennpuncten ($z = \pm 1$) umschlossen wird, indem man dabei für $f(z)$ eine innerhalb dieses Raumes überall stetige Function nimmt, so wird zufolge (5.):

$$2\pi i\, f(z_1) = \int f(z) \left\{ \sum (2n+1) \overset{(n)}{Q}(z) \overset{(n)}{P}(z_1) \right\} dz.$$

Daraus ergiebt sich folgender Satz:

(6.) Ist $f(z)$ innerhalb einer Ellipse mit den Brennpuncten ($z = \pm 1$) überall stetig, so gilt für jeden innerhalb dieser Ellipse befindlichen Punct z_1 folgende Entwickelung:

$$f(z_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \,.\, \overset{(n)}{P}(z_1)$$

wo die Coefficienten

$$A_n = \frac{2n+1}{2\pi i} \int f(z)\, \overset{(n)}{Q}(z)\, dz$$

sind. Die Integration ist hier über die ganze Peripherie der Ellipse auszudehnen und zwar in solcher Richtung fortzuführen, dass der zwischen der positiven x- und y-Achse enthaltene Quadrant von der ersteren Achse nach der letzteren hin durchlaufen wird.

Nimmt man ferner in (1.) an Stelle von R einen ringförmigen, von zwei Ellipsen mit den Brennpuncten ($z = \pm 1$) begrenzten Raum, und gleichzeitig natürlich für $f(z)$ eine Function, die innerhalb dieses

Raumes überall stetig ist, so ergiebt sich durch Anwendung von (5.):

$$2\pi i f(z_1) = \int_a f(z) \left\{ \sum (2n+1) \overset{(n)}{Q}(z) \overset{(n)}{P}(z_1) \right\} dz$$

$$- \int_i f(z) \left\{ \sum (2n+1) \overset{(n)}{P}(z) \overset{(n)}{Q}(z_1) \right\} dz,$$

wo das Integral $\int_a$ über die Peripherie der äusseren, das Integral $\int_i$ über die der inneren Ellipse ausgedehnt ist und in beiden die Richtung der Integration zu der äusseren Normale des ringförmigen Raumes so liegt, wie die y-Achse zur x-Achse. Der zwischen der pos. x- und y-Achse liegende Quadrant wird daher bei der Integration $\int_a$ von der erstern nach der letztern Achse hin, bei der Integration $\int_i$ hingegen in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Um beide Integrations-Richtungen unter einander gleichsinnig zu machen, verwandeln wir das Vorzeichen — des Integrals $\int_i$ in $+$, und erhalten dann folgenden Satz:

(7.) Ist $f(z)$ innerhalb eines ringförmigen Raumes, der von zwei confocalen Ellipsen mit den Brennpuncten ($z = \pm 1$) begrenzt wird, überall stetig, so gilt für jeden Punct z_1 im Innern dieses Raumes folgende Entwickelung:

$$f(z_1) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n . \overset{(n)}{P}(z_1) + \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \overset{(n)}{Q}(z_1)$$

wo die Coefficienten

$$A_n = \frac{2n+1}{2\pi i}\int_a f(z)\, \overset{(n)}{Q}(z)\, dz$$

$$B_n = \frac{2n+1}{2\pi i}\int_i f(z)\, \overset{(n)}{P}(z)\, dz$$

sind. Die Integrationen $\int_a$ und $\int_i$ sind hier respective über den äusseren und inneren Rand jenes Raumes auszudehnen und dabei in solcher Richtung fortzuführen, dass der zwischen der positiven x- und y-Achse befindliche Quadrant des äusseren oder inneren Randes immer von der erstern nach der letztern Achse hin durchlaufen wird.

Beiläufig mag noch auf einige Formeln aufmerksam gemacht werden, die sich aus (6.) leicht ergeben. Offenbar kann man dort an Stelle von $f(z)$ die Function $\overset{(m)}{P}(z)$ nehmen. Dann ergiebt sich

$$\text{(8.)} \qquad \overset{(m)}{P}(z_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \overset{(n)}{P}(z_1)$$

wo:

$$A_n = \frac{2n+1}{2\pi i}\int_e \overset{(m)}{P}(z)\, \overset{(n)}{Q}(z)\, dz\,.$$

Da nun in (8.) die Coefficienten der P auf beiden Seiten übereinstimmen müssen, so folgt, dass alle A_n, mit alleiniger Ausnahme von A_m, $= 0$ sind, A_m selber aber $= 1$ ist. D. i.

$$\int \overset{(m)}{P}(z)\, \overset{(m)}{Q}(z)\, dz = \frac{2\pi i}{2m+1}$$

$$\int \overset{(m)}{P}(z)\, \overset{(n)}{Q}(z)\, dz = 0\,, \qquad (m \gtrless n).$$

Beachtet man ferner, dass in (7.) an Stelle von $f(z)$ sowohl $\overset{(m)}{P}(z)$ als auch $\overset{(m)}{Q}(z)$ genommen werden kann, so ergeben sich ähnliche Formeln. Man erhält im Ganzen folgende Resultate:

(9. a.) Das über die Peripherie einer Ellipse mit den Brennpuncten $(z = \pm 1)$ ausgedehnte Integral:

$$\int \overset{(m)}{P}(z) \, . \, \overset{(n)}{Q}(z) \, . \, dz$$

ist, je nachdem m und n einander gleich oder verschieden sind, entweder $= \frac{2\pi i}{2n+1}$ oder $= 0$. Dabei ist die Integrationsrichtung wiederum so zu denken, dass der zwischen der positiven x- und y-Achse befindliche Quadrant der Ellipse von der x- nach der y-Achse hin durchlaufen wird.

(9. b.) Die über die Peripherie einer Ellipse mit den Brennpuncten $(z = \pm 1)$ ausgedehnten Integrale

$$\int \overset{(m)}{P}(z) \, \overset{(n)}{P}(z) \, dz \quad \text{und}$$

$$\int \overset{(m)}{Q}(z) \, \overset{(n)}{Q}(z) \, dz$$

sind, mögen nun m und n einander gleich oder verschieden sein, immer $= 0$.

Schliesslich mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die in (6.) und (7.) zur Coefficientenbestimmung dienenden Integrationen nicht immer nothwendigerweise über den Rand von Ellipsen auszudehnen sind, sondern unter geeigneten Umständen leicht auf andere Curven übertragen werden können. So überzeugt man sich z. B. leicht davon, dass an Stelle des Satzes (6.) folgender allgemeinerer hingestellt werden kann:

(10.) Ist $f(z)$ innerhalb einer Fläche R, welche die von $z = -1$ nach $z = +1$ gehende gerade Linie in sich enthält, übrigens aber beliebig begrenzt sein kann, allenthalben stetig, und bezeichnet man mit E die grösste Ellipse mit den Brennpuncten $(z = \pm 1)$, welche innerhalb R construirt werden kann, so gilt für jeden innerhalb E liegenden Punct z_1 die Entwickelung

$$f(z_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \overset{(n)}{P}(z_1),$$

wo die Coefficienten A folgende Werthe besitzen

$$A_n = \frac{2n+1}{2\pi i} \int f(z) \overset{(n)}{Q}(z) dz.$$

Die Integration kann hier entweder über den Rand von E selber, oder über den Rand von R oder endlich über eine beliebige geschlossene Curve, welche zwischen diesen beiden Rändern hin fortläuft, ausgedehnt werden. Dabei ist die Richtung, in welcher die Integration fortgeführt wird, immer der Art zu nehmen, dass der zwischen der positiven x- und y-Achse befindliche Quadrant der Integrations-Curve von der erstern nach der letztern Achse hin durchlaufen wird.

In analoger Weise kann man auch den in (7.), (9. a.) und (9. b.) gefundenen Resultaten leicht eine allgemeinere Fassung geben.