ÜBER DIE POINCARÉ'SCHEN REIHEN DER $(-1)^{\text{ten}}$ DIMENSION.

VON

ROBERT FRICKE.

Das Problem der analytischen Darstellung der eindeutigen automorphen Formen ist bisher nur erst nach einer Richtung hin mit besonderem Erfolge bearbeitet worden. Die Darstellung jener Formen durch sogenannte *„Poincaré'sche Reihen“* ist vornehmlich durch Poincaré's eigene Forschungen, sowie durch eine Reihe weiterer Untersuchungen vielfach behandelt und zu einem gewissen Abschlusse gebracht.

Die Bildung der Poincaré'schen Reihen beruht bekanntlich auf folgender Ueberlegung. Es seien ζ_1, ζ_2 zwei complexe Variabele, deren Quotient $\zeta_1 : \zeta_2$ durch ζ bezeichnet werden soll; es sei ferner eine „Gruppe Γ linearer Substitutionen“:

(1) $\zeta_1^{(k)} = \alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \quad \zeta_2^{(k)} = \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

dieser Variabelen vorgelegt, welche in der Ebene der Variabelen $\zeta = \zeta_1 : \zeta_2$ „eigentlich discontinuirlich“ ist und daselbst ein zusammenhängendes Netz N von unendlich vielen Kreisbogenpolygonen P_0, P_1, P_2, ... liefert. Wir denken die Substitution (1) unimodular geschrieben:

(2) $\alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k = 1, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

und wollen diese Substitutionen symbolisch durch U_k bezeichnen, wobei insbesondere $U_0 = 1$ die identische Substitution ist.

Zu einem ersten Werthepaare ζ_1, ζ_2 gehören unter diesen Umständen vermöge der Substitutionen U_k unendlich viele Paare $\zeta_1^{(k)}$, $\zeta_2^{(k)}$, welche alle unter einander „bezüglich der Gruppe Γ äquivalent“ heissen. Auch auf die Quotienten $\zeta^{(k)} = \zeta_1^{(k)} : \zeta_2^{(k)}$, welche mit ζ vermöge der Gleichung:

$$\zeta^{(k)} = \frac{\alpha_k \zeta + \beta_k}{\gamma_k \zeta + \delta_k}$$

zusammenhängen, übertragen wir diese Benennung, d. h. wir nennen die Werthe $\zeta = \zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots$ „bezüglich Γ äquivalent“. Ist $\zeta = \zeta^{(0)}$ ein Werth, der einem Punkte des Polygons P_0 entspricht, so wird $\zeta^{(k)}$ den mit ζ homologen Punkt des „zu P_0

äquivalenten" Polygons P_k bedeuten. Diese für den Quotienten ζ eben angegebenen nicht-homogenen Substitutionen wollen wir symbolisch durch $V_0 = 1, V_1, V_2, \ldots$ bezeichnen.

Auf den hiermit dargelegten Ansatz wird nun eine ganz allgemeine mathematische Ideenentwickelung angewandt. Jede wissenschaftliche Forschung geht, wie Kronecker einmal gesagt hat, darauf aus, Aequivalenzen festzustellen und deren Invarianten zu ermitteln. Bei den eben beschriebenen Aequivalenzen betrachtet man als die zugehörigen Invarianten homogene analytische Formen $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ der ζ_1, ζ_2, welche bei Ausübung der Substitutionen U_k auf ζ_1, ζ_2 ihren Werth nicht ändern:

$$(3) \qquad \varphi(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2) = \varphi(\zeta_1, \zeta_2).$$

Indem man noch hinzusetzt, dass die Formen $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ im ersten Polygone oder Fundamentalbereiche P_0 der Gruppe frei von wesentlich singulären Stellen sein sollen, gelangt man zum Begriff der „automorphen Formen", deren Theorie neuestens eine vielseitige Entwickelung erfahren hat.

Poincaré hat uns für die analytische Darstellung solcher automorphen Formen eine Methode geliefert, welche sich besonderer Einfachheit und dabei grosser Tragweite erfreut. Wir wollen unter $H_d(\zeta_1, \zeta_2)$ irgend eine rationale Form, d. h. irgend eine rationale homogene Function der ζ_1, ζ_2 verstehen, deren Dimension in den ζ_1, ζ_2 durch d bezeichnet werden soll. Mit dieser Form $H_d(\zeta_1, \zeta_2)$ bilden wir die Reihe:

$$(4) \qquad \sum_k H_d(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}) = \sum_k H_d(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2),$$

wobei sich das Summenzeichen auf alle Substitutionen U_k von Γ beziehen soll. Ist diese Reihe im Bereiche des Polygonnetzes N absolut und gleichmässig convergent, und besitzt sie daselbst überdies einen nicht identisch verschwindenden Summenwerth, so wird dieselbe eine automorphe Form unserer Art darstellen:

$$(5) \qquad \varphi_d(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_k H_d(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2).$$

Indem wir uns vorbehalten, weiter unten den hiermit beschriebenen Ansatz noch einer gewissen Erweiterung zu unterziehen, wollen wir für die Reihen von der Gestalt (4) fortan die Bezeichnung „Poincaré'sche Reihen" benutzen.

Die Convergenzuntersuchung der Poincaré'schen Reihen ist vielfach behandelt, aber allerdings zur Zeit noch nicht völlig zum Abschluss gebracht. Die ersten und wichtigsten in dieser Richtung liegenden Untersuchungen rühren von Poincaré selber her. Letzterer zeigte, dass, wenn kein Pol der rationalen Form H_d in einen Grenzpunkt von Γ fällt, die Reihe (4) für $d \leqq -4$ stets im obigen Sinne convergent ist, sowie dass ferner bei Gruppen mit Hauptkreis die gleiche Convergenz auch bei $d = -3$ stattfindet. Indessen ist hiermit die Grenze der Convergenz noch nicht immer erreicht. Unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen betreffs der Gruppe Γ sind nämlich auch noch die Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension absolut und gleichmässig convergent. Diesen Fall betreffen Untersuchungen von Schottky, Burnside und Ritter, von denen die zweite unten noch ausführlich genannt werden wird. Insbesondere findet diese Convergenz statt bei allen Gruppen mit Hauptkreis, der aber kein Grenzkreis des Netzes N ist, bei denen also das Netz N bis auf unendlich viele isolirt auf dem Hauptkreise gelegene Grenzpunkte die ganze ζ-Ebene überspannt.

Bis zu dieser Stelle habe ich die Convergenztheorie der Poincaré'schen Reihen in dem Werke „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen“, welches ich in Gemeinschaft mit F. Klein herausgebe [1]), ausführlich dargestellt.

Es ist nun bisher in Deutschland noch nicht ausreichend beachtet worden, dass die Burnside'sche Convergenzbetrachtung auch noch auf die Dimension $d = -1$ ausgedehnt werden kann, wie Burnside selbst in seiner unten zu nennenden Abhandlung angiebt. Auch in meinem eben genannten Werke habe ich diesen Fall ausser Acht gelassen, und zwar weil ich die für die Dimensionen $d \leqq -2$ seitens der ausgeführten Theorie der automorphen Formen für die Untersuchung der Poincaré'schen Reihen zur Verfügung gestellten Schlussweisen bei $d = -1$ nicht ohne Weiteres anwenden konnte. In der vorliegenden Abhandlung will ich nun, unter Anknüpfung an die Burnside'sche Convergenzbetrachtung, die Theorie der Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension in Angriff nehmen.

[1]) Bd. 1 (1897); Bd. 2, Lief. 1 (1901) bei B. G. Teubner in Leipzig. Dieses Werk ist weiterhin als „Vorl.“ unter Angabe des Bandes und der Seite citirt.

§. 1. Fundamentalpolygone der Hauptkreisgruppen mit isolirt liegenden Grenzpunkten.

Um der folgenden Untersuchung eine übersehbare Basis zu geben, sollen weiterhin nur Hauptkreisgruppen Γ zugelassen werden. Auch wollen wir annehmen, dass in Γ keine Substitutionen vorkommen, welche beide Seiten des Hauptkreises austauschen. Eine Gruppe, welche Substitutionen der letzteren Art aufweist, enthält stets eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2, welche frei von solchen Substitutionen ist. Wir haben für unsere Gruppe vor Allem vorauszusetzen, dass die Grenzpunkte derselben auf dem Hauptkreise isolirt liegen, und dass mithin das Polygonnetz N die ganze ζ-Ebene bis auf jene unendlich vielen Grenzpunkte überspannt.

Ueber die Gestalt des Ausgangs- oder Fundamentalpolygons P_0 habe ich in „Vorl." I eine ausführliche Theorie entwickelt, welche indessen für die hier vorliegenden Zwecke einiger Ergänzungen bedarf. Bei jener Untersuchung war es von der grössten Bedeutung, dass die geometrischen Erwägungen nicht sogleich in der ζ-Ebene, sondern in der a. a. O. vorangestellten „projectiven Ebene" ausgeführt wurden. In letzterer lag ein „absoluter Kegelschnitt" zu Grunde, der zweckmässig als Ellipse gewählt wurde. Die a. a. O. näher besprochene Beziehung der projectiven Ebene auf die ζ-Ebene ist dann eine solche, dass jene Ellipse selbst dem Hauptkreise entspricht, während der einzelne Punkt im Innern der Ellipse immer zweien bezüglich des Hauptkreises symmetrischen Punkten correspondirt.

In „Vorl." I, 319 habe ich den grundlegenden Satz gezeigt, dass das Fundamentalpolygon P_0 in der projectiven Ebene stets als geradliniges Polygon von $2n' + 4p'$ Seiten und von lauter concaven Winkeln ausgewählt werden kann. Hierbei bedeutet n' die Anzahl der „festen" Polygonecken, d. h. derjenigen Ecken, welche Fixpunkte von Substitutionen der Gruppe sind. Andrerseits ist p' das „projective Geschlecht" des Polygons, welches den Grad des Zusammenhanges derjenigen geschlossenen Fläche F_0 misst, die aus P_0 durch Zusammenbiegen auf einander bezogener Seiten entspringt. Diese Zusammenordnung der Seiten ist aber die folgende. Erstlich gehören je zwei Seiten zusammen, welche in einer „festen Ecke“ zusammenstossen; die betreffende erzeugende Substitution ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem jener feste Eckpunkt innerhalb, auf oder ausserhalb der absoluten Ellipse gelegen ist. Weiter haben wir p' Systeme von je vier auf einander folgender Seiten, wobei jedesmal die erste auf die dritte, die zweite auf die vierte durch hyperbolische Erzeugende bezogen ist (man vergl. die weiter unten folgenden Figuren).

Soll der bei uns in Betracht kommende Fall vorliegen, so muss mindestens eine feste Ecke hyperbolisch sein, wobei alsdann P_0 einen daselbst über die Ellipse hinausragenden Zipfel bekommt, der natürlich für die Abbildung auf die ζ-Ebene verloren geht. Es können auch mehrere, ja alle n' festen Ecken hyperbolisch sein; im letzteren Falle besteht Γ ausschliesslich aus hyperbolischen Substitutionen.

Es sind nun einige abgeänderte Gestalten des Polygons P_0 (namentlich auch für die Fortführung der vorliegenden Untersuchung) von grösster Bedeutung. Eine erste dieser Gestalten wird durch folgende Betrachtung eingeführt. Ein einzelnes der p' Seitenquadrupel lieferte zwei Erzeugende von Γ, die symbolisch durch V_a und V_b bezeichnet werden mögen. Wir gesellen ihnen alsdann die in Γ enthaltene hyperbolische Substitution:

$$V_c = V_b\, V_a^{-1}\, V_b^{-1}\, V_a$$

als überzählige erzeugende Substitution hinzu. Durch eine Abänderung, welche zunächst nur die vier Seiten des eben gemeinten Quadrupels betrifft, können wir dieselben in der That durch sechs Seiten ersetzen, von denen zwei zu V_c, zwei zu V_a und endlich zwei zu V_b gehören (cf. „Vorl.“ I, 316).

Ueben wir nun diese Abänderung an allen p' Quadrupeln einander kreuzweise zugewiesener Seiten aus, so gelangen wir zu einem Polygon von $2n' + 6p'$ Seiten, und es kommen die p' überzähligen Erzeugenden $V_{c_1}, V_{c_2}, \ldots, V_{c_{p'}}$ hinzu.

An dieser Gestalt des Polygons ist die Möglichkeit der Composition unserer Gruppe Γ aus einfachen Gruppen besonders leicht zu übersehen. Nennen wir die den n' festen

Ecken correspondirenden Erzeugenden $V_1, V_2, \ldots, V_{n'}$, so nehmen wir erstlich $V_1, \ldots, V_{n'}, V_{c_1}, \ldots, V_{c_{p'}}$ als Erzeugende zusammen. Aus ihnen entspringt eine Gruppe, bei welcher an Stelle der bisherigen Zahlen p', n' die Zahlen $0, n' + p'$ treten. Nehmen wir weiter $V_{a_1}, V_{b_1}, V_{c_1}$ für sich, sodann $V_{a_2}, V_{b_2}, V_{c_2}$ u. s. w., so entstehen p' Gruppen, bei denen die Zahlen p', n' insbesondere die Werthe 1,1 haben. Man bezeichnet die Zusammenstellung (p', n') dieser Zahlen als „Charakter" der Gruppe Γ. Man kann alsdann sagen, die Gruppe Γ könne durch Composition aus einer Gruppe des Charakters $(0, n' + p')$ und p' Gruppen der Charaktere (1,1) hergestellt werden (cf. „Vorl." I, 310 ff.).

In dem für uns in Betracht kommenden Falle, dass P_0 mindestens einen über die Ellipse hinausragenden hyperbolischen Zipfel besitzt, können wir nun die Decomposition der Gruppe Γ noch wesentlich weiter treiben. Einen ersten Schritt habe ich in dieser Hinsicht bereits in „Vorl." II, 216 gethan. Die nähere Betrachtung der „zufälligen" oder „beweglichen" Polygonecken wird hier von Wichtigkeit. Diese Ecken ordnen sich zu $p' + 1$ Cyklen zusammen. Ein erster Cyklus wird nämlich von $n' + p'$ Ecken gebildet und ihm entspricht die Relation:

$$V_1 \cdot V_2 \ldots V_{n'} V_{c_1} \cdot V_{c_2} \ldots V_{c_{p'}} = 1$$

zwischen den Erzeugenden. Weiter kommen p' Cyklen zu je fünf Ecken, denen die Relationen parallel laufen:

$$V_{a_1}^{-1} V_{b_1} V_{a_1} V_{b_1}^{-1} V_{c_1} = 1,$$
$$V_{a_2}^{-1} V_{b_2} V_{a_2} V_{b_2}^{-1} V_{c_2} = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Es ist nun a. a. O. gezeigt, dass man zunächst die $n' + p'$ Ecken des ersten Cyklus über die absolute Ellipse hinaus führen kann. Die Wirkung dieser Abänderung wird am besten in der ζ-Ebene evident; wir wollen hierselbst den Hauptkreis zur reellen ζ-Achse machen und nehmen übrigens an, dass das projective Polygon insgesammt $h > 0$ hyperbolische Ecken hat. In der ζ-Ebene wird das Polygon P_0 in der eben zuletzt gedachten Gestalt einen bezüglich der reellen Achse symmetrisch gebauten Bereich darstellen, dessen Rand aus

$$(n' - h) + 2\,(h - 1) + p' = n' + h + p' - 2$$

getrennten Theilen besteht. In der That erscheint jetzt Γ decomponirt in:

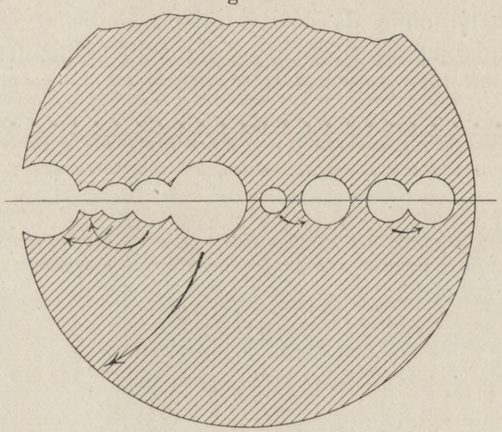
1. $n' - h$ cyklische elliptische oder parabolische Gruppen, wobei der Fundamentalbereich der einzelnen solchen cyklischen Gruppe einen aus zwei Kreisbogen bestehenden zusammenhängenden Rand hat,

2. $h - 1$ cyklische hyperbolische Gruppen, deren einzelne einen von zwei getrennt verlaufenden Vollkreisen berandeten Fundamentalbereich besitzt,

3. p' Gruppen, die in der ζ-Ebene den Charakter (2,0) bekommen; dabei ist der einzelne Fundamentalbereich durch eine Kette von zehn Kreisbogen berandet.

Hierbei gilt von jedem componirenden Fundamentalbereiche, dass sich die gesammten Randcurven aller übrigen Bereiche gänzlich im Innern jenes Bereiches finden. Die hier beigefügte Figur 1, welche dem Falle $n' = 3$, $h = 2$, $p' = 1$ entspricht, möge diese Verhältnisse erläutern.

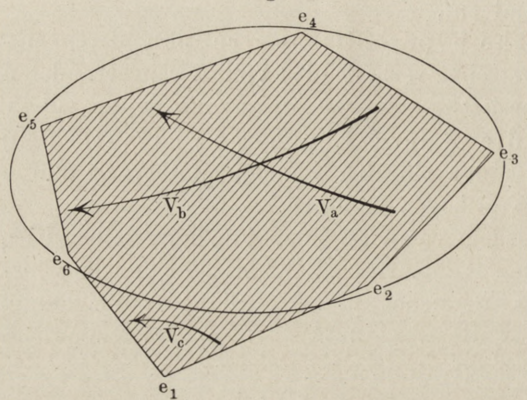
Fig. 1.



Wir können nun eine wichtige Weiterführung der hier skizzirten Ueberlegung an den p' zuletzt genannten Gruppen vornehmen. Man gehe zu diesem Ende nochmals auf die projective Ebene zurück, wo die einzelne jener p' Gruppen als Fundamentalbereich ein Sechseck der in Figur 2 (a. f. S.) skizzirten Gestalt aufweist. Die fünf „beweglichen“ zu einem Cyklus zusammengehörigen Ecken sind hier $e_2, e_3, \ldots, e_6$, während die ausserhalb der Ellipse angedeutete „feste“ Ecke e_1 den Fixpunkt der hyperbolischen Substitution V_c darstellt. Die Randgeraden aller übrigen componirenden Bereiche finden längs des dem Innern jenes Sechseckes angehörenden Segmentes der Ellipse Platz.

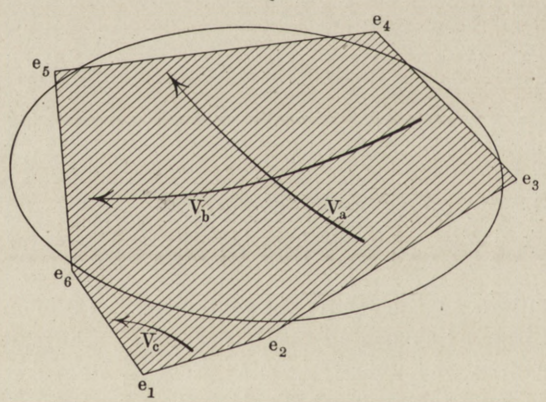
Wir können nun die Ecke e_2 längs der von e_2 nach e_1 ziehenden Niveaugeraden von V_c bis zum Punkte b der Ellipse selbst führen, wobei zu gleicher Zeit die Punkte e_3, e_4, e_5, e_6 bis zu Punkten der Ellipse fortgewandert sind. Vier unter den Seiten unseres Bereiches sind damit Ellipsensehnen geworden, die paarweise durch V_a und V_b auf einander bezogen sind. Eine Collision dieser Ellipsensehnen mit sonstigen Seiten des Gesammtpolygons P_0 ist hierbei ausgeschlossen.

Fig. 2.



Wir können sogar, ohne dass eine solche Collision eintritt, e_2 noch um ein endliches Stück über die Ellipse hinausführen. Hierdurch gewinnt unser Sechseck die in Figur 3 skizzirte Gestalt. Für die ζ-Ebene geht der ausserhalb der Ellipse gelegene Theil verloren; die vier Ellipsensehnen aber liefern vier Vollkreise, die paarweise einander vermöge V_a, V_b zugeordnet sind. Figur 4 (a. f. S.) bringt die nun vorliegenden Verhältnisse zur Anschauung.

Fig. 3.

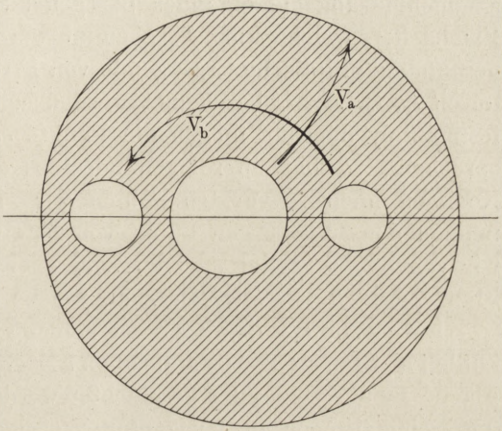


Wir haben auf diese Weise den für die weitere Ueberlegung grundlegenden Satz gewonnen: Das Fundamentalpolygon einer Gruppe mit Hauptkreis, welche auf letzterem eigentlich discontinuirlich ist, lässt sich, unter (p', n') den projectiven Charakter verstanden, in der ζ-Ebene stets so gestalten, dass es, abgesehen von $2n' - 2h$ Paaren parabolisch oder elliptisch zusammengeordneter Kreise resp. Kreisbogen, von

$4p' + 2h - 2$

getrennt verlaufenden Vollkreisen begrenzt ist.

Fig. 4.



Vornehmlich wird uns der Fall beschäftigen, dass elliptische und parabolische Substitutionen überhaupt nicht auftreten. Alsdann ist $h = n'$, und das Polygon P_0 ist in der ζ-Ebene derart wählbar, dass es durch $2n' + 4p' - 2$ Vollkreise, die getrennt von einander verlaufen, berandet ist.

§. 2. Herstellung einer Untergruppe ohne elliptische Substitutionen.

Burnside hat bei seiner Convergenzbetrachtung eine Schwierigkeit im Auftreten elliptischer Substitutionen in Γ gesehen. Indessen lässt sich diese Schwierigkeit leicht überwinden. Selbstverständlich ist zunächst aus den allerersten Principien der Theorie der Poincaré'schen Reihen folgender Satz: Enthält Γ eine Untergruppe von endlichem Index, für welche die Poincaré'schen Reihen der Dimension d convergiren, so sind auch für die Gesammtgruppe die Reihen eben dieser Dimension d convergent.

Wir dürfen uns demnach darauf beschränken, die Convergenzbetrachtung auf den Fall einer von elliptischen Substitutionen freien Gruppe zu beziehen, sofern es gelingt, den folgenden Satz zu zeigen: In jeder unserer Gruppen Γ existiren Untergruppen endlicher Indices, welche keine elliptischen Substitutionen mehr enthalten.

Um diesen Satz zu zeigen, gehe man nochmals auf das projective Polygon P_0 zurück und stelle aus demselben durch Zusammenbiegung auf einander bezogener Seiten eine geschlossene Fläche her, welche kurz F_0 genannt werden soll. Es mögen insgesammt ν elliptische Erzeugende von Γ vorliegen, deren Perioden durch $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ bezeichnet werden sollen. Den ν zugehörigen festen Polygonecken mögen die Punkte $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ auf F_0 entsprechen. P_0 hat überdies mindestens eine hyperbolische Ecke. Kommen mehrere vor, so wählen wir eine von ihnen aus und nennen den zugehörigen Punkt von F_0 etwa e. Demnächst ziehen wir von den ν Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ ebenso viele sich nicht überkreuzende Schnitte $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$, welche sämmtlich in e münden.

Es sei nun l das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$. Alsdann sollen l Exemplare der zerschnittenen Fläche F_0 über einander geschichtet werden, und es sollen hierauf die Schnittränder in geeigneter Weise wieder zusammengefügt werden. Letzteres soll so geschehen, dass an der einzelnen Stelle e_k insgesammt $\frac{l}{l_k}$ Verzweigungspunkte zu je l_k Blättern über einander liegen. Offenbar lässt sich dies noch in mannigfacher Weise erreichen. Haben wir an allen Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ die Anordnung der Blätter festgelegt, so wird die Verzweigung bei e gleichfalls eine bestimmte sein; doch braucht letztere nicht weiter bekannt zu sein.

Die gewonnene geschlossene l-blätterige Fläche soll nunmehr rückwärts auf das Polygonnetz der projectiven Ebene abgebildet werden. Dabei folgert man vermöge einer bekannten Ueberlegung aus dem einfachen Zusammenhange des Netzes, dass sich die l Blätter der Fläche auf l verschiedene, neben einander liegende Polygone des Netzes übertragen. In diesem Complexe von l Polygonen erscheinen jetzt die früheren elliptischen Ecken rings umschlossen. Dieser Polygoncomplex wird uns somit den Fundamentalbereich einer Untergruppe Γ_l des endlichen Index l liefern, welche keine einzige der elliptischen Substitutionen von Γ_0 mehr enthält. Unser oben ausgesprochenes Theorem ist damit bewiesen.

Auf anderem Wege kann man zu dem gleichen Ergebnisse vermöge der unten näher zu besprechenden Multiplicatorsysteme der automorphen Formen gelangen. Indessen soll die sich hier anknüpfende Ueberlegung an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden.

§. 3. Convergenzuntersuchung der Poincaré'schen Reihen der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension.

Während bei den geometrischen Betrachtungen der beiden voraufgehenden Paragraphen die mit V_k bezeichneten nichthomogenen Substitutionen:

$$\zeta^{(k)} = \frac{\alpha_k \zeta + \beta_k}{\gamma_k \zeta + \delta_k} \tag{1}$$

der Gruppe Γ zunächst allein in Betracht kamen, kehren wir jetzt zu der ursprünglich in der Einleitung zu Grunde gelegten homogenen unimodularen Schreibweise (1) S. 3 der Substitutionen zurück. In dieser Gestalt bezeichnen wir, wie oben schon in Aussicht genommen wurde, die Substitutionen symbolisch durch U_k.

Den Ansatz der Poincaré'schen Reihen wollen wir nunmehr so allgemein fassen, als es die entwickelte Theorie der automorphen Formen erfordert. In der That hat man diese Formen, die wir allgemein durch $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ bezeichnen, neuerdings so fixirt, dass sie gegenüber U_k nicht absolut invariant sind, sondern sich bis auf einen constanten, d. i. von den ζ_1, ζ_2 unabhängigen Factor μ_k reproduciren, der aber in jedem Falle, d. h. bei der einzelnen Substitution U_k und der einzelnen Form $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ ein bestimmter sein soll:

$$\varphi(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2) = \mu_k \cdot \varphi(\zeta_1, \zeta_2). \tag{2}$$

Dieser Forderung entspricht der Begriff der „eindeutigen“ automorphen Formen. Den noch etwas allgemeineren Begriff der „unverzweigten“ automorphen Formen können wir hier abseits lassen, da er in der Theorie der Poincaré'schen Reihen nicht unmittelbar zur Geltung kommt (vergl. übrigens „Vorl.“ II, 66 ff.).

Im nächsten Paragraphen kommen wir auf diese Multiplicatoren μ_k der Formen $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ noch etwas ausführlicher zurück. Wir werden sehen, dass die den elliptischen Substitutionen entsprechenden Multiplicatoren immer Einheitswurzeln sein müssen. Sind alle Multiplicatoren einer Form Zahlen des absoluten Betrages 1, so benenne ich $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ als eine „unimultiplicative“ Form.

Wir können nun in Gestalt von Poincaré'schen Reihen einstweilen nur solche unimultiplicativen Formen darstellen. Von dem zu U_k gehörenden Multiplicator μ_k setzen wir also:

$$(3) \qquad |\mu_k| = 1$$

voraus. Wie diese Multiplicatoren μ_k des Näheren gewählt sein müssen, betrachten wir, wie schon bemerkt, in §. 4.

Ist jetzt $H(\zeta_1, \zeta_2)$ eine rationale Form $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension der ζ_1, ζ_2, so bilde man, um eine Form mit vorgegebenen Multiplicatoren μ_k zu gewinnen, etwas allgemeiner als in (5) (S. 4) die Poincaré'sche Reihe:

$$(4) \qquad \sum_k \mu_k^{-1} H(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2),$$

wo sich die Summe auf alle Substitutionen U_k der homogenen Gruppe Γ bezieht. Für die Betrachtung der Convergenz dieser Reihe $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension benutze ich nun die Art der Ueberlegung, welche Burnside in seiner schon oben erwähnten Abhandlung „On a Class of Automorphic Functions“[1] zur Verwendung bringt.

Hierbei soll noch der Fall, dass Γ auch parabolische Substitutionen enthält, zum Ausschluss gebracht werden. Es hat freilich, wie auch Burnside vermuthet, dieser Fall keineswegs einen principiell anderen Charakter. Doch bringt derselbe gewisse Umständlichkeiten mit sich, denen ich an der vorliegenden Stelle aus dem Wege gehen möchte. Kommen elliptische Substitutionen in Γ vor, so gehen wir auf Grund des im vorigen Paragraphen abgeleiteten Satzes zunächst zu einer von elliptischen Substitutionen freien Untergruppe eines endlichen Index. Ist für diese die Convergenz der Reihe (4) gezeigt, so besteht sie für die mit der gleichen Form H bei der ursprünglichen Gruppe angesetzte Reihe (4) ohne Weiteres auch. Hiernach ist es keine weitere Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir zufolge §. 1

---

[1]) Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 23 (1892).

annehmen, dass der Fundamentalbereich P_0 von r Paaren getrennt von einander verlaufender Vollkreise begrenzt ist. Dabei werden die Kreise des einzelnen Paares hyperbolisch auf einander bezogen sein; die correspondirenden r Erzeugenden der Gruppe Γ mögen in der nicht-homogenen Gestalt durch $V_1, V_2, \ldots, V_r$ bezeichnet sein.

Natürlich halten wir an der Voraussetzung fest, dass die Pole von $H(\zeta_1, \zeta_2)$ nicht in Grenzpunkte des Polygonnetzes fallen. Aus den ersten Grundlagen der Theorie der Poincaré'schen Reihen (cf. „Vorl." II, 142) ergiebt sich alsdann, dass die Reihe (4) absolut convergent ist, falls die Reihe:

$$\sum_k \left| \frac{1}{\gamma_k \zeta + \delta_k} \right|$$

convergirt. Man schreibe nun diese Reihe so:

$$\sum_k \left| \frac{1}{\gamma_k} \right| \cdot \left| \frac{1}{\zeta + \frac{\delta_k}{\gamma_k}} \right|$$

und beachte, dass die Werthe $-\frac{\delta_k}{\gamma_k}$ die bezüglich Γ mit ∞ äquivalenten Punkte liefern. Wir denken den Ausgangsbereich P_0 derart gewählt, dass der Punkt ∞ im Innern dieses Bereiches liegt, und schränken ζ auf einen kleinen Bereich in irgend einem der Polygone des Netzes ein. Da alsdann ζ nur mit einem der Punkte $-\frac{\delta_k}{\gamma_k}$ im gleichen Polygone liegt, so werden die Beträge $\left| \zeta + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|$, abgesehen von einem einzigen, der für die Frage der Convergenz unserer Reihe nicht in Betracht kommen kann, sämmtlich oberhalb einer angebbaren, von null verschiedenen endlichen Zahl liegen. Wir finden somit, dass die Reihe (4) absolut und gleichmässig convergent sein wird, falls die Reihe:

(5) $$\sum_k \left| \gamma_k^{-1} \right|$$

convergent ist.

Für die Glieder dieser Reihe wollen wir nun nach folgendem Princip eine bestimmte Anordnung herstellen. An das Ausgangspolygon P_0, welches den Punkt ∞ enthält, lagern sich in den $2r$ zunächst offen bleibenden Vollkreisen ebenso viele weitere

Polygone unmittelbar an, welche den Substitutionen $V_1^{\pm 1}$, $V_2^{\pm 1}$, ..., $V_r^{\pm 1}$ entsprechen. Diese $2r$ Polygone fassen wir zu einem ersten Complex zusammen. Es bleiben alsdann $2r(2r-1)$ Kreisflächen noch unbedeckt. Die $2r(2r-1)$ sich hier unmittelbar anschliessenden Polygone mögen einen zweiten Complex zusammensetzen, worauf $2r(2r-1)^2$ Kreisflächen offen bleiben. Die $2r(2r-1)^2$ sich demnächst anschliessenden Polygone bilden den dritten Complex. In der hiermit eingeleiteten Weise, Polygoncomplexe herzustellen, fahren wir weiter und weiter fort. Es werden so nach und nach alle Polygone des Netzes erschöpft; und zwar besteht der ν^{te} Polygoncomplex aus $2r(2r-1)^{\nu-1}$ Polygonen, während nach Herstellung des ν^{ten} Complexes die Anzahl der noch frei bleibenden Kreisflächen $2r(2r-1)^{\nu}$ sein wird.

Es sei nun S_ν die Summe derjenigen Glieder der Reihe (5), welche zum ν^{ten} Polygoncomplexe gehören. Wir bringen dann die Reihe (5) in die Anordnung:

$$(6) \qquad S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$$

und prüfen in dieser Gestalt die Convergenz.

Die $2r$ Randkreise des ersten Polygons P_0 mögen K_{+1}, K_{-1}, K_2, K_{-2}, ..., K_{+r}, K_{-r} genannt werden. Dieselben sollen durch die Erzeugenden in der Weise auf einander bezogen sein, dass:

$$(7) \qquad K_1 = V_1(K_{-1}),\ K_2 = V_2(K_{-2}),\ \ldots,\ K_r = V_r(K_{-r})$$

zutrifft. Die Polygone des ν^{ten} Complexes werden offenbar von denjenigen Substitutionen der Gruppe Γ geliefert, welche sich symbolisch als Producte von ν Factoren:

$$(8) \qquad V_{a_1}^{\varepsilon_1} \cdot V_{a_2}^{\varepsilon_2} \cdot V_{a_3}^{\varepsilon_3} \cdots V_{a_\nu}^{\varepsilon_\nu}$$

darstellen. Dabei werden die Indices a Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, r$ bedeuten, die Exponenten ε aber entweder gleich $+1$ oder -1 sein. Wesentlich ist dabei noch, dass keine zwei auf einander folgende Factoren in (8) einander invers sein dürfen. Um vom Ausgangspolygon bis zu dem der Substitution (8) entsprechenden Polygone zu gelangen, hat man im Polygonnetze einen Weg zu beschreiben, welcher der Reihe nach die Kreise $K_{\varepsilon_1 a_1}$, $K_{\varepsilon_2 a_2}$, $K_{\varepsilon_3 a_3}$, ..., $K_{\varepsilon_\nu a_\nu}$ überschreitet.

Wir haben nun zunächst noch für die erzeugenden Substitutionen eine analytische Entwickelung durchzuführen. Eine einzelne der $2r$ Substitutionen $V_1^{\pm 1}, V_2^{\pm 1}, \ldots, V_r^{\pm 1}$ nennen wir für den Augenblick V, ihre Coefficienten aber $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Die Fixpunkte der Substitution, welche durch Lösung der Gleichung:

$$\gamma \zeta^2 + (\delta - \alpha)\zeta - \beta = 0$$

zu berechnen sind, mögen auf der reellen ζ-Achse bei η_1 und η_2 gelegen sein, und zwar möge V die Punkte der ζ-Ebene von η_1 fort nach η_2 hin transformiren. Wir haben alsdann, wenn V in Uebereinstimmung mit $\alpha + \delta > 2$ geschrieben wird, als Gestalt der Substitution:

$$\frac{\zeta' - \eta_1}{\zeta' - \eta_2} = \sigma^2 \frac{\zeta - \eta_1}{\zeta - \eta_2}, \tag{9}$$

wo η_1, η_2 und der „Multiplicator" σ^2 der Substitution gegeben sind durch:

$$\eta_1 = \frac{\alpha - \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2\gamma}, \quad \eta_2 = \frac{\alpha - \delta + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2\gamma},$$

$$\sigma = \frac{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2}.$$

Man merke an, dass hierbei $\sigma > 1$ zutrifft. Die Coefficienten α, β, γ, δ stellen sich aber in σ, η_1, η_2 so dar:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{\eta_1 \sigma^{-1} - \eta_2 \sigma}{\eta_1 - \eta_2}, & \beta &= \frac{\eta_1 \eta_2 (\sigma - \sigma^{-1})}{\eta_1 - \eta_2}, \\ \gamma &= \frac{\sigma^{-1} - \sigma}{\eta_1 - \eta_2}, & \delta &= \frac{\eta_1 \sigma - \eta_2 \sigma^{-1}}{\eta_1 - \eta_2}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Der eigentliche Nerv der Convergenzbetrachtung besteht nun in folgender Ueberlegung. Irgend ein Polygon des ν^{ten} Complexes gehöre zu der Substitution:

$$V_\nu = V_{a_1}^{\varepsilon_1} \cdot V_{a_2}^{\varepsilon_2} \cdot V_{a_3}^{\varepsilon_3} \cdots V_{a_\nu}^{\varepsilon_\nu}, \tag{11}$$

deren Coefficienten $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu, \delta_\nu$ genannt werden mögen. Von hier stellen wir $2r - 1$ Polygone des folgenden Complexes her, indem wir die Substitutionen $V V_\nu$ heranziehen, wo V alle $2r - 1$ von $V_{a_1}^{-\varepsilon_1}$ verschiedenen Erzeugenden durchläuft. Eine einzelne dieser Substitutionen nenne man $V_{\nu+1}$, ihre Coefficienten aber $\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}, \gamma_{\nu+1}, \delta_{\nu+1}$; dann gelten die Gleichungen:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha \alpha_\nu + \beta \gamma_\nu, \quad \beta_{\nu+1} = \alpha \beta_\nu + \beta \delta_\nu,$$
$$\gamma_{\nu+1} = \gamma \alpha_\nu + \delta \gamma_\nu, \quad \delta_{\nu+1} = \gamma \beta_\nu + \delta \delta_\nu.$$

Mit Benutzung der Gleichungen (10) ergiebt sich hieraus:

$$(12)\qquad \frac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_\nu} = \sigma \frac{\eta_1 - \dfrac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}}{\eta_1 - \eta_2} + \sigma^{-1} \frac{\dfrac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2}.$$

Man beachte nun, dass $\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}$ bezüglich V_ν mit ∞ äquivalent ist. Somit wird der Punkt $\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}$ im Innern des Kreises $K_{\varepsilon_1 a_1}$ gelegen sein, der zur ersten in (11) rechts auftretenden Substitution gehört. Da andererseits η_1 im Innern des einen zu V gehörenden und von $K_{\varepsilon_1 \alpha_1}$ verschiedenen Kreises K_{-1} liegt, so können wir für den absoluten Betrag $\left|\eta_1 - \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}\right|$ aus der Gestalt von P_0 sofort eine von 0 verschiedene positive untere Grenze angeben. Desgleichen werden wir für $\left|\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} - \eta_2\right|$ eine endliche obere Grenze bestimmen können. Dabei ist besonders wichtig, dass diese beiden Grenzen von ν unabhängig sind.

Wir nehmen jetzt eine Abänderung der Gestalt des Polygons P_0 vor; und zwar sollen die Kreise K_{+i} und K_{-i} des einzelnen der r Paare unter Erhaltung der Fixpunkte der zugehörigen V_i, d. i. im System der Niveaucurven von V_i, zusammengezogen werden. Hierbei wird die untere für $\left|\eta_1 - \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}\right|$ soeben angegebene Grenze nicht verkleinert, die obere für $\left|\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} - \eta_2\right|$ aufgestellte Grenze aber nicht vergrössert werden. Andererseits wird aber der Multiplicator σ der Substitution V_i hierbei wachsen, und er kann durch hinreichend weit getriebene Zusammenziehung über jede angebbare Zahl hinaus vergrössert werden.

Man schreibe daraufhin, unter τ eine positive, den Betrag $2r - 1$ übertreffende Zahl verstanden, die Ungleichung:

$$(13)\qquad \left|\frac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_\nu}\right| \geqq \tau > 2r - 1$$

vor, und zwar für jedes Polygon des ν^{ten} Complexes und jedes mit ihm in der betrachteten Weise zusammenhängende Polygon des folgenden Complexes. Da die eben wiederholt genannten

Grenzen von ν unabhängig sind, so kann man, falls die Ungleichung (13) noch nicht vermöge jener Grenzen erfüllt sein sollte, eine Vergrösserung der r Multiplicatoren σ um endliche Beträge derart eintreten lassen, dass der Ungleichung (13) bei allen Complexen und je zwei zugehörigen Polygonen Genüge geschieht.

Nun reihen sich an jedes Polygon des ν^{ten} Complexes $2r - 1$ Polygone des folgenden Complexes. Summiren wir die auf diese bezüglichen Ungleichungen:

$$\left| \gamma_\nu^{-1} \right| \geqq \tau \left| \gamma_{\nu+1}^{-1} \right|,$$

so ergiebt sich:

$$(2r - 1) \left| \gamma_\nu^{-1} \right| \geqq \tau \sum \left| \gamma_{\nu+1}^{-1} \right|.$$

Man schreibe jetzt $2r - 1 = q . \tau$, so dass q eine positive, im Intervall $0 < q < 1$ gelegene Zahl sein wird. Addiren wir alsdann die letzte Ungleichung, gebildet für alle $2r(2r - 1)^{\nu-1}$ Polygone des ν^{ten} Complexes, so ergiebt sich, wenn wir die bereits in (6) benutzte Bezeichnung wieder aufnehmen:

$$S_{\nu+1} \leqq q\, S_\nu \tag{14}$$

als eine für jedes ν gültige Ungleichung. Man sieht daraufhin, dass die auf ihre Convergenz zu untersuchende Reihe (6) mindestens ebenso schnell convergent ist, wie die geometrische Reihe vom Quotienten q.

Endlich wolle man noch überlegen, dass bei der oben gedachten Vergrösserung der Multiplicatoren σ der Charakter (p', n') unserer Gruppe eine Veränderung nicht erfährt. Dies gilt auch für den Fall, dass wir von Γ erst zu einer Untergruppe haben fortgehen müssen, die von elliptischen Substitutionen frei ist; im letzteren Falle kann man sogleich an den Erzeugenden der ursprünglichen Gruppe die erforderliche Vergrösserung der Multiplicatoren vornehmen.

Wir sind auf diese Weise zu dem folgenden grundlegenden Ergebnisse gelangt: Sehen wir von den Gruppen mit parabolischen Substitutionen ab, so giebt es bei den auf dem Hauptkreise eigentlich discontinuirlichen Gruppen Γ, und zwar bei jedem Charakter (p', n'), stets Gruppen, bei denen die Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension absolut und gleichmässig convergent sind. Hat man eine einzelne Gruppe Γ, bei der dieses gilt, so wird die gleiche Convergenz bei allen denjenigen Gruppen bestehen bleiben, welche durch die eben entwickelte Vergrösserung der Multiplicatoren aus jener entstehen.

Uebrigens soll nochmals hervorgehoben werden, dass die Gruppen mit parabolischen Substitutionen hier keineswegs eine Ausnahmerolle spielen. Vielmehr wird der ausgesprochene Satz auch bei ihnen gültig bleiben. Zum Beweise kann man Gruppen mit parabolischen Erzeugenden in Vergleich stellen mit Gruppen gleicher Charaktere, bei denen die parabolischen Erzeugenden durch elliptische ersetzt erscheinen. Man hat sich bei der Durchführung der Ueberlegung derjenigen Gesichtspunkte zu bedienen, welche Poincaré bei seinen beiden ersten Convergenzuntersuchungen auf die Betrachtung des Modulus der Abbildung der verschiedenen Polygone des Netzes N auf einander gegründet hat. Doch wollen wir der Kürze halber von dieser Entwickelung hier absehen.

§. 4. Von den Multiplicatoren der automorphen Formen der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension.

Um die Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension im Falle der Convergenz der genaueren functionentheoretischen Untersuchung zu unterziehen, müssen wir noch etwas eingehender auf die Multiplicatoren der eindeutigen automorphen Formen der Dimension -1 zurückkommen. Wegen der ausführlichen Theorie dieses Gegenstandes sei auf „Vorl.“ II, 64 ff. verwiesen.

Eine vorgelegte eindeutige automorphe Form $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ der Dimension -1 nehme gegenüber der Substitution U_k den Factor μ_k an. Offenbar gilt alsdann der folgende Satz: Gehören zu den Substitutionen U_i und U_k von Γ die Multiplicatoren μ_i bezw. μ_k, so gehört zu $U_i U_k$ der Multiplicator $\mu_i \cdot \mu_k$ von $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$. Hiernach werden die Multiplicatoren von $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ bereits für alle Substitutionen von Γ berechnet werden können, wenn man dieselben nur für die Erzeugenden kennt.

Die betrachtete Gruppe Γ möge entstehen durch Composition aus $n = n' - h$ cyklischen elliptischen Gruppen, $h - 1$ cyklischen hyperbolischen Gruppen und p' Gruppen vom Charakter (2,0). Indem wir die letzteren p' Gruppen nach S. 11 weiter aus je zwei cyklischen hyperbolischen Gruppen componiren, können wir auch sagen, Γ entstehe durch Composition aus $n = n' - h$ cyklischen elliptischen Gruppen und $p = 2p' + h - 1$ cyklischen hyperbolischen Gruppen. Die hierdurch bestimmte Zahl p stellt dann zugleich das Geschlecht des durch Γ bezw. P_0 definirten algebraischen Gebildes dar.

Die n elliptischen Erzeugenden mögen $U_1, U_2, \ldots, U_n$, eine beliebige unter ihnen U_k genannt werden. Die Periode der U_k entsprechenden nicht-homogenen Substitution V_k sei l_k, die Fixpunkte dieser Substitution mögen bei $\zeta = \varepsilon_k$ und $\zeta = \varepsilon_k'$ gelegen sein, und zwar gehöre der Punkt ε_k der positiven Halbebene an. Wir spalten ε_k und ε_k' in die Quotienten:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(1)} : \varepsilon_k^{(2)}, \quad \varepsilon_k' = \varepsilon_k'^{(1)} : \varepsilon_k'^{(2)}$$

und setzen zur Abkürzung:

$$\zeta_1 \varepsilon_k^{(2)} - \zeta_2 \varepsilon_k^{(1)} = (\zeta, \varepsilon_k), \quad \zeta_1 \varepsilon_k'^{(2)} - \zeta_2 \varepsilon_k'^{(1)} = (\zeta, \varepsilon_k').$$

Die Substitution U_k soll dann die Gestalt haben:

$$(1) \qquad (\zeta', \varepsilon_k) = e^{\frac{\pi i}{l_k}} (\zeta, \varepsilon_k), \quad (\zeta', \varepsilon_k') = e^{-\frac{\pi i}{l_k}} (\zeta, \varepsilon_k').$$

Für die p hyperbolischen Erzeugenden schreiben wir die Ungleichung $\alpha + \delta > 2$ vor.

Man beachte nun, dass $U_k^{l_k} = -1$ ist, wenn mit -1 symbolisch die Substitution $\zeta_1' = -\zeta_1$, $\zeta_2' = -\zeta_2$ bezeichnet wird. Als Form ungerader Dimension wird aber $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ gegenüber der Substitution -1 selbst einen Zeichenwechsel erfahren. Der zur elliptischen Substitution U_k gehörende Multiplicator μ_k muss demnach der Gleichung $\mu_k^{l_k} = -1$ genügen und hat also die Gestalt:

$$(2) \qquad \mu_k = e^{i\pi \frac{2\nu_k + 1}{l_k}}, \quad (\nu_k = 0, 1, 2, \ldots, l_k - 1).$$

Es sind somit bei der einzelnen elliptischen Erzeugenden l_k verschiedene Multiplicatoren zulässig.

Die Multiplicatoren der hyperbolischen Erzeugenden bleiben willkürlich wählbar, nur dass sie, wie schon S. 14

verabredet wurde, für unsere durch Poincaré'sche Reihen darzustellenden Formen Zahlen des absoluten Betrages 1 sein sollen. Man schliesst übrigens die hier vorliegenden Verhältnisse dadurch am besten an die allgemeinen Erörterungen in „Vorl.“ II, 228 an, dass man die p hyperbolischen Erzeugenden als Substitutionen $U_{b_1}, U_{b_2}, \ldots, U_{b_p}$ der genannten Entwickelungen ansieht. Indem wir hieran festhalten, werden die a. a. O. erklärten Substitutionen $U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_p}$ mit 1 identisch, so dass auch die zugehörigen Multiplicatoren $\mu_{a_1}, \mu_{a_2}, \ldots, \mu_{a_p}$ gleich 1 zu nehmen sind.

Ausser den angegebenen Relationen $U_k^{l_k} = -1$ bestehen keine weiteren Gleichungen zwischen den $n+p$ hier in Betracht kommenden erzeugenden Substitutionen (cf. „Vorl.“ II, 217). Die Folge ist, dass die Multiplicatoren, abgesehen von den genannten Beschränkungen, an keine weiteren Relationen gebunden sind.

Ein zulässiges System von $n+p$ erzeugenden Multiplicatoren μ bezeichnen wir weiterhin als ein zu Γ gehörendes Multiplicatorsystem M. Wir merken noch an, was aus den gegebenen Darlegungen unmittelbar hervorgeht: In Ansehung der elliptischen Multiplicatoren giebt es nur $l_1 . l_2 \ldots l_n$ verschiedene Systeme M. Sobald aber $p > 0$ ist, hat man wegen der hinzukommenden hyperbolischen Multiplicatoren stets unendlich viele Multiplicatorsysteme M.

§. 5. Von den Polen und Nullpunkten der automorphen Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension.

Die Ableitung der Eigenschaften der automorphen Formen gründet man zweckmässig auf die Darstellung jener Formen durch eine geeignet gewählte Primform, welche zu dem durch Γ definirten algebraischen Gebilde gehört; und zwar ist zu diesem Ende diejenige Primform besonders brauchbar, welche ich in „Vorl.“ II, 226 als „Ritter'sche Primform“ bezeichnet habe. Es handelt sich, wenn man die Behandlung der automorphen Formen auf diese Primform gründen will, zuvörderst um einen Aufbau der einzelnen Form als Primformproduct, wobei die

Nullpunkte und Pole jener automorphen Form direct zum Ausdruck kommen.

Unter den zahlreichen Folgerungen, welche aus dieser Darstellung der automorphen Formen entspringen, seien zunächst die beiden Sätze genannt: Eine eindeutige automorphe Form ist durch ihre im Fundamentalbereiche P_0 gelegenen Pole und Nullpunkte bis auf eine multiplicative Exponentialfunction eines überall endlichen Integrals eindeutig bestimmt. Eine unimultiplicative automorphe Form ist durch ihre im Fundamentalbereiche gelegenen Pole und Nullpunkte bis auf einen constanten Factor eindeutig bestimmt. Uebrigens ist das im ersten Satze gemeinte Integral erster Gattung im vorliegenden Falle kein ganz beliebiges, sondern muss eine ganzzahlige Combination der $2 i \pi W_1^z, \ldots, 2 i \pi W_p^z$ vorstellen, unter $W_1^z, \ldots, W_p^z$ die in „Vorl." II, 226 erklärten Normalintegrale erster Gattung verstanden.

Was nun zunächst die Nullpunkte einer automorphen Form der Dimension — 1 angeht, so liegen in den elliptischen Ecken des Fundamentalbereiches Nullpunkte „gebrochener" Ordnungen, welche letztere aus dem Multiplicatorsystem M bestimmbar sind. Für eine einzelne vorgelegte elliptische Ecke fixiren wir in Uebereinstimmung mit (1), S. 21, die zugehörige elliptische Substitution derart, dass ihre Ausübung einem einmaligen Umlaufe im „positiven" Sinne um die zugehörige Stelle der aus dem Polygon P_0 entspringenden geschlossenen Fläche gleichkommt. Ist l die Periode dieser Substitution, so haben wir den Multiplicator μ einer vorliegenden Form $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ der Dimension — 1 in der Gestalt $\mu = e^{i\pi\frac{\lambda}{l}}$ anzusetzen, wo λ nach (2), S. 21, eine ungerade ganze Zahl ist. Man kann alsdann zeigen (cf. „Vorl." II, 249), dass $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ in der fraglichen elliptischen Ecke einen Nullpunkt der Ordnung:

$$\frac{m}{l} = \frac{\lambda - 1}{2l} - E\left[\frac{\lambda - 1}{2l}\right],$$

besitzt, unter $E[a]$ die grösste, den Werth a nicht übertreffende ganze Zahl verstanden.

Um diese Regel auf die $2n$ elliptischen Ecken ε_k, ε_k' unseres

Fundamentalbereiches P_0 anzuwenden, haben wir für die der positiven ζ-Halbebene angehörenden Ecken ε_k die in (2), S. 21, gegebenen Multiplicatoren einzutragen, während zu den Ecken ε'_k alsdann jedesmal μ_k^{-1} gehört. Wir folgern: Eine zum ausgewählten Multiplicatorsysteme M gehörende Form der Dimension -1 hat in den Ecken ε_k, ε'_k Nullpunkte der Ordnungen $\frac{\nu_k}{l_k}$ bezw. $\frac{l_k - \nu_k - 1}{l_k}$, so dass insbesondere die Summe der Ordnungen dieser $2n$ Nullpunkte durch:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k}{l_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{l_k - \nu_k - 1}{l_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$$

gegeben ist.

Neben diesen in den elliptischen Ecken fest liegenden Nullpunkten hat $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ noch eine Reihe weiterer Nullpunkte sowie Pole, welche irgendwo im Polygone P_0 liegen und auch in die schon betrachteten Ecken rücken dürfen. Die Gesammtordnung der Nullpunkte sei t, diejenige der Pole s. Sehen wir einen Pol erster Ordnung als einen Nullpunkt der Ordnung -1 an und schreiben $t - s = m$, so würde bei dieser Auffassung:

$$(1) \qquad t - s + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{l_k}\right) = m + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)$$

die Summe der Ordnungen aller Nullpunkte der betrachteten automorphen Form $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension im Polygone P_0 sein.

Es ist nun einer der wichtigsten Sätze, die aus der Primformdarstellung der automorphen Formen hervorgehen, dass die Gesammtordnung des Verschwindens, d. h. die Summe aller in P_0 gelegenen Nullpunkte einer automorphen Form der Dimension d gleich ist dem Producte der Dimension d und der Zahl:

$$1 - p - \frac{1}{2}\sum\left(1 - \frac{1}{l_k}\right),$$

wo p das Geschlecht bedeutet, und wo sich die Summe auf alle elliptischen Ecken von P_0 bezieht (cf. „Vorl.“ II, 247). Wenden wir dies Theorem auf den bei uns vorliegenden Fall der Dimension $d = -1$ und des Polygons P_0 mit den $2n$ elliptischen Ecken ε_1, ε'_1, ε_2, ε'_2, ... an, so folgt: Für eine Form der Dimension -1

ist der Ueberschuss m der Summe der Ordnungen der „frei beweglichen" Nullpunkte über diejenige der Pole:

(2) $$m = t - s = p - 1,$$

wo p das Geschlecht von P_0 ist, und wo, wie schon angedeutet, die in den elliptischen Ecken gelegenen Nullpunkte ausser Betracht geblieben sind.

Eine Form mit s Polen oder, wie wir kurz sagen wollen, eine „s-polige Form" hat hiernach ausser den in den Ecken festliegenden Nullpunkten insgesammt noch $s + p - 1$ Nullpunkte im Fundamentalbereiche. Für $p \geqq 1$ giebt es somit insbesondere stets „ganze" oder „polfreie" Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension. Eine einzelne solche Form wird $p - 1$ Nullpunkte ausser den wiederholt genannten Nullpunkten in den Polygonecken besitzen. In der That kann man nach „Vorl." II, 243 aus der Primform sofort polfreie Formen mit $p - 1$ freien Nullpunkten, sowie mit weiteren vorschriftsmässigen Nullpunkten in den festen Ecken herstellen. Uebrigens ist, wie man sogleich bemerken wolle, keineswegs bewiesen, dass man auch unimultiplicative ganze Formen bilden kann. Würde man die Exponentialfunction eines beliebigen Integrals erster Gattung als Factor zusetzen dürfen, so stände freilich der Bildung unimultiplicativer ganzer Formen nach einem in „Vorl." II, 261 bewiesenen Theoreme nichts im Wege. Indessen dürfen wir, wenn wir die Eindeutigkeit der Formen nicht aufgeben wollen, nur Exponentialfunctionen ganzzahliger Combinationen der $2i\pi W_1^z, \ldots, 2i\pi W_p^z$ zufügen, wie schon S. 23 hervorgehoben.

Die polfreien Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension stehen in naher Beziehung zu den p linear-unabhängigen Formen $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$, welche durch den Differentionsprocess (cf. „Vorl." II, 253) aus den p Integralen erster Gattung $W(\zeta)$ entspringen:

$$\Phi(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{d\,W(\zeta)}{\zeta_1\, d\zeta_2 - \zeta_2\, d\zeta_1} = -\frac{d\,W(\zeta)}{\zeta_2^2\, d\zeta}.$$

Um diese Beziehung auseinanderzusetzen, gehen wir auf den Begriff der „conjugirten" Formen zurück (cf. „Vorl." II, 255). Zwei automorphe Formen heissen conjugirt, wenn sie gegenüber der einzelnen Substitution stets zwei einander reciproke Multiplicatoren annehmen, und wenn ausserdem die Summe ihrer Dimensionen gleich — 2 ist. Zu Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension sind somit stets wieder Formen dieser Dimension conjugirt. Das Product zweier conjugirten ganzen Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension ist alsdann stets eine Form $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$. Da die $2p-2$ Nullpunkte der letzteren durch $p-1$ unter ihnen eindeutig bestimmt sind, so kann man die Nullpunkte der einen der beiden Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension willkürlich wählen; die Nullpunkte der anderen Form sind alsdann fest bestimmt.

§. 6. Partialbruchzerlegung der Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension.

Nach den in den beiden letzten Paragraphen eingeschalteten Zwischenentwickelungen kehren wir zu den Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension zurück und denken in:

$$(1) \qquad \varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_k \mu_k^{-1} H(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2)$$

eine zum Multiplicatorsystem M gehörende convergente Reihe dieser Art vorgelegt. Mit Benutzung von (1), S. 3, können wir diese Reihe auch kurz so schreiben:

$$(2) \qquad \varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_k \mu_k^{-1} H\left(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}\right).$$

Natürlich bezieht sich hier die Summe wieder auf die gesammten Substitutionen von Γ.

Es soll jetzt eine Zerlegung der Reihe (2) in eine Summe von Reihen besprochen werden, deren einzelne eine besonders einfache Bauart besitzt.

Das Product $\zeta_2 . H(\zeta_1, \zeta_2)$, welches wir zu diesem Zwecke betrachten, ist von nullter Dimension und stellt also eine rationale „Function" von ζ dar. Die letztere wolle man in eine ganze Function von ζ, vermehrt um eine Summe von Partialbrüchen, entwickeln. Wir können alsdann jedes Glied dieser Entwickelung der durch das Symbol $\sum\limits_k$ angedeuteten Summirung unterwerfen, da auf diese Weise, wie man leicht ausführlicher zeigen wird, lauter einzelne absolut und gleichmässig convergente Reihen entspringen. Der einzelne Partialbruch liefert hierbei eine Reihe:

$$(3) \qquad \sum_k \frac{\mu_k^{-1}\left(\zeta_2^{(k)}\right)^{s-1}}{(\zeta^{(k)}, \xi)^s},$$

wo s eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist, und wo das auch schon in §. 4 benutzte Klammersymbol (ζ, ξ) die Bedeutung hat:

(4) $$(\zeta, \xi) = \zeta_1 \xi_2 - \zeta_2 \xi_1.$$

Andererseits führt das einzelne Glied der bei der Partialbruchzerlegung auftretenden ganzen Function von ζ auf eine Reihe der Gestalt:

(5) $$\sum_k \mu_k^{-1} \frac{\left(\zeta_1^{(k)}\right)^{s'}}{\left(\zeta_2^{(k)}\right)^{s'+1}},$$

wobei s' ganzzahlig und $\geqq 0$ ist.

Die Reihen (3) und (5) lassen sich auf verschiedene Arten in einen Ansatz zusammenfassen.

Zunächst kann man die Reihe (5) unter die Gestalt (3) subsummiren, falls man in (3) auch negative ganzzahlige Exponenten $s = -s'$, sowie $s = 0$ zulässt; man hat nur im Speciellen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ einzutragen. Um ein zusammenfassendes Resultat aussprechen zu können, setzen wir voraus, dass der Punkt $\xi = 0$, den wir soeben in Benutzung nahmen, kein Grenzpunkt der Gruppe ist. Wir können alsdann den Satz formuliren: Eine Poincaré'sche Reihe der Dimension -1 ist darstellbar als lineares Aggregat von Reihen der Gestalt (3), in deren einzelner s eine endliche ganze Zahl bedeutet, während $\xi = \xi_1 : \xi_2$ einen von einem Grenzpunkte des Netzes N verschiedenen Punkt der ζ-Ebene darstellt.

Auch in folgender Art kann man die beiden Reihen (3) und (5) in einen Ansatz zusammenfassen. Man verstehe unter $\eta = \eta_1 : \eta_2$ einen beliebigen Werth, gleichgültig ob derselbe einen Grenzpunkt der Gruppe darstellt oder nicht, während ξ nach wie vor keinen Grenzpunkt von Γ darstellen darf. Man setze alsdann die folgende Reihe an:

(6) $$\sum_k \frac{\mu_k^{-1} (\zeta^{(k)}, \eta)^{s-1}}{(\zeta^{(k)}, \xi)^s},$$

wo (ζ, η) in gewohnter Weise zur Abkürzung für $\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1$ geschrieben ist, und wo jetzt unter s eine ganze Zahl $\geqq 1$ verstanden sein soll. Hier gelangen wir offenbar zur Reihe (3) zurück, falls $\eta_1 = -1$, $\eta_2 = 0$ gewählt wird; dagegen entspringt die Reihe (5), wenn $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$, $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ gesetzt wird. Man hat das Ergebniss: Nicht nur jeder Ansatz (6) liefert eine brauchbare Reihe, sondern umgekehrt jede Poincaré'sche Reihe unserer Art lässt sich als ein Aggregat von Reihen der Gestalt (6) darstellen.

Die für $s = 1$ gebildete Reihe (6) möge im Speciellen durch:

$$\psi(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2) = \sum_k \frac{\mu_k^{-1}}{(\zeta^{(k)}, \xi)} \tag{7}$$

bezeichnet werden. Da bei gleichzeitiger Ausübung einer Substitution der Gruppe auf die beiden Variabelenpaare ζ_1, ζ_2 und ξ_1, ξ_2 der Ausdruck (ζ, ξ) invariant ist, so ergiebt sich der Satz: $\psi(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2)$ ist nicht nur in den ζ_1, ζ_2, sondern auch in den ξ_1, ξ_2 eine automorphe Form unserer Gruppe; die Multiplicatorsysteme, welche ψ einmal als Form der ζ_1, ζ_2, sodann als Form der ξ_1, ξ_2 besitzt, sind einander invers, d. h. je zwei correspondirende Multiplicatoren sind zu einander reciprok.

Die zu $s > 1$ gehörenden Formen (6) entstehen aus ψ durch wiederholte Polarisation. Bezeichen wir die durch (6) gegebene Form allgemein durch ψ_s, so gilt in der That:

$$-s \,.\, \psi_{s+1} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial \psi_s}{\partial \xi_2}\eta_2.$$

Es ergiebt sich: ψ_s ist eine automorphe Form der beiden cogredienten Variabelenpaare ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2; das Multiplicatorsystem ist invers zu demjenigen, welche ψ_s als automorphe Form der ζ_1, ζ_2 besitzt.

Bei den functionentheoretischen Ausführungen, welche jetzt folgen sollen, werden die besonderen Reihen (3), (6) und (7) in den Vordergrund treten.

§. 7. Functionentheoretische Ausführungen, vornehmlich für niedere Werthe von p.

Die soeben unter (7) definirte einpolige Form $\psi(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2)$ bezeichnen wir meist abgekürzt $\psi(\zeta, \xi)$. So oft es nöthig erscheint, das Multiplicatorsystem mit anzugeben, möge ausführlicher $\psi_M(\zeta, \xi)$ geschrieben werden. Das zu M inverse Multiplicatorsystem soll $\overline{M}$ heissen.

Aus der Invarianz des Ausdruckes (ζ, ξ) bei cogredienten

Variabelenpaaren ζ_1, ζ_2 und ξ_1, ξ_2 entspringt der folgende, weiterhin zu verwendende Satz: Beim Austausch der beiden Variabelenpaare ζ_1, ζ_2 und ξ_1, ξ_2 zeigt $\psi_M(\zeta, \xi)$ das durch die folgende Gleichung:

$$\psi_M(\xi, \zeta) = - \psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi) \tag{1}$$

festgelegte Verhalten.

Für die Fortsetzung der Untersuchung ist nun der S. 25 aufgestellte Satz, dass eine s-polige Form unserer Art ausser den in den etwaigen elliptischen Ecken festliegenden Nullpunkte insgesammt noch $t = s + p - 1$ Nullpunkte im Fundamentalbereiche besitzt, von grundlegender Bedeutung. Wir prüfen die sich hieran anknüpfenden Folgerungen zunächst für niedere Geschlechter p.

Erstlich gelangt man im Falle des Geschlechtes $p = 0$ zu einem besonders einfachen Resultate. Nehmen wir hier $s = 1$, d. h. ziehen wir die Formen $\psi(\zeta, \xi)$ heran, so ist die einzelne unter ihnen abgesehen von ihrem bei ξ gelegenen Pole und von den in den elliptischen Ecken auftretenden Nullpunkten überall endlich und von null verschieden. Es ergiebt sich hieraus: Zwei Formen $\psi(\zeta, \xi)$ und $\psi(\zeta, \xi')$ desselben Multiplicatorsystems, aber mit verschiedenen Werthen ξ, liefern als Quotienten $\psi(\zeta, \xi') : \psi(\xi, \xi)$ eine Hauptfunction, d. i. eine einwerthige Function des zugehörigen automorphen Gebildes; und zwar liegt der Nullpunkt jener Function bei ξ, der Pol bei ξ'. Den reciproken Werth von $\psi(\zeta, \xi)$ könnte man demnach hier als Primform des Gebildes benutzen; doch würde dieselbe natürlich in den elliptischen Ecken Pole darbieten, deren gebrochene Ordnungen in eindeutiger Weise vom Multiplicatorsysteme abhängen.

Irgend zwei Hauptfunctionen des Gebildes hängen bekanntlich vermöge einer bilinearen Relation zusammen. Es folgt vermöge einer kurzen Zwischenbetrachtung: Zwischen den reciproken Werthen irgend dreier zum gleichen Multiplicatorsystem gehörender Formen $\psi(\zeta, \xi)$, $\psi(\zeta, \xi')$, $\psi(\zeta, \xi'')$ besteht eine lineare Relation:

$$\frac{a}{\psi(\zeta, \xi)} + \frac{a'}{\psi(\zeta, \xi')} + \frac{a''}{\psi(\zeta, \xi'')} = 0 \tag{2}$$

mit Coefficienten a, a', a'', die von ζ_1, ζ_2 unabhängig sind. Die letzteren kann man aus zweien unter den drei Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad a'\psi(\xi, \xi'') + a''\psi(\xi, \xi') = 0, \\ a\psi(\xi', \xi'') \qquad\quad + a''\psi(\xi', \xi) = 0, \\ a\psi(\xi'', \xi') + a'\psi(\xi'', \xi) \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

bestimmen. Das Verschwinden der Determinante dieses Gleichungssystems liefert mit Rücksicht auf die Gleichung (1) die folgende bemerkenswerthe Relation:

$$\psi_M(\xi, \xi')\,\psi_M(\xi', \xi'')\,\psi_M(\xi'', \xi) = \psi_{\overline{M}}(\xi, \xi')\,\psi_{\overline{M}}(\xi', \xi'')\,\psi_{\overline{M}}(\xi'', \xi).$$

Man kann diese Relation auch direct beweisen, indem man daran anknüpft, dass $\psi_M(\xi, \xi')\cdot\psi_M(\xi'', \xi)$ in den ξ_1, ξ_2 eine eigentlich automorphe, d. h. zum Multiplicatorsystem 1 gehörende Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension ist, die bei ξ' und ξ'' Pole besitzt und ausser in den festen Ecken keine Nullpunkte aufweist.

Uebrigens kann man auch noch auf andere Arten aus den einpoligen Poincaré'schen Reihen Hauptfunctionen gewinnen. So hat z. B. das Product $\psi(\zeta, \xi)\cdot\psi(\xi, \zeta)$ als Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension der ζ_1, ζ_2 bei ξ einen Pol zweiter Ordnung; und es handelt sich hier um eine eigentlich automorphe Form. Die Nullpunkte von $\psi(\zeta, \xi)\cdot\psi(\xi, \zeta)$ in den elliptischen Ecken sind solche, dass der Differentialausdruck nullter Dimension:

$$\psi(\zeta, \xi)\cdot\psi(\xi, \zeta)(\zeta_1 d\zeta_2 - \zeta_2 d\zeta_1)$$

ebendort überall endlich und von null verschieden ist. Die Folge ist, dass:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(\zeta, \xi)\,\psi(\xi, \zeta)(\zeta_1 d\zeta_2 - \zeta_2 d\zeta_1)$$

bei variabel gedachter oberer Grenze ζ eine Hauptfunction darstellt, deren Nullpunkt bei ζ_0 und deren Pol bei ξ liegt. —

Wenden wir uns nunmehr zum Geschlechte $p = 1$, so wird die Gruppe Γ n elliptischen und eine hyperbolische Erzeugende aufweisen, auf welche letztere wir sogleich zurückkommen. Wir werfen hier wieder die Frage auf, wie wir aus den Poincaré'schen Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension einfachste, d. h. im vorliegenden Falle zweiwerthige Functionen aufzubauen vermögen.

Allgemein weist jetzt eine s-polige Reihe s freie Nullpunkte im Fundamentalbereiche auf. Im Producte $\psi(\zeta, \xi) \cdot \psi(\xi, \zeta)$ der beiden einander conjugirten einpoligen Formen $\psi(\zeta, \xi)$ und $\psi(\xi, \zeta)$ liegt demnach insbesondere eine eigentlich automorphe Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension vor, welche an der Stelle ξ einen Pol zweiter Ordnung hat und ausser den in den elliptischen Ecken gelegenen Nullstellen noch zwei Nullpunkte aufweist. Nun giebt es nach „Vorl.“ II, 267 für unsere Gruppe des Geschlechtes 1 eine polfreie, nicht identisch verschwindende Reihe $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension:

$$\Phi(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_k \frac{(\eta, \eta')}{(\zeta^{(k)}, \eta)(\zeta^{(k)}, \eta')},$$

wo $\eta = \eta_1 : \eta_2$ eine beliebige Stelle des Fundamentalbereiches ist und $\eta' = \eta_1' : \eta_2'$ durch die soeben genannte hyperbolische Erzeugende aus η hervorgeht. Die Form $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$ ist eigentlich automorph und hat in den elliptischen Ecken Nullpunkte derselben Ordnungen wie $\psi(\zeta, \xi) \cdot \psi(\xi, \zeta)$. Es ergiebt sich: Im Falle einer Gruppe Γ des Geschlechtes $p = 1$ hat man in:

$$\frac{\sum\limits_k \frac{\mu_k^{-1}}{(\zeta^{(k)}, \xi)} \cdot \sum\limits_k \frac{\mu_k^{-1}}{(\xi^{(k)}, \zeta)}}{\sum\limits_k \frac{(\eta, \eta')}{(\zeta^{(k)}, \eta)(\zeta^{(k)}, \eta')}} = \varphi(\zeta) \tag{4}$$

eine zweiwertige automorphe Function von ζ, deren beide Pole bei ξ coincidiren und solchergestalt einen Pol zweiter Ordnung liefern.

Polfreie eigentlich automorphe Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension kann man aber auch ohne Benutzung der Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension im directen Anschluss an unsere obigen Reihen $\psi(\zeta, \xi)$ bilden. Die betreffende Ueberlegung soll hier gleich für beliebiges Geschlecht $p > 0$ ausgeführt werden. Es sei irgend eine einpolige Reihe $\psi_M(\zeta, \xi)$, deren p Nullpunkte sich im Fundamentalbereiche an den Stellen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(p)}$ finden. Für eine beliebige dieser Stellen, $\xi^{(i)}$, bilde man die zum inversen Multiplicatorsystem gehörende Reihe $\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(i)})$ und stelle das Product her:

$$\psi_M(\zeta, \xi) \cdot \psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(i)}).$$

Dieses Product ist in den ζ_1, ζ_2 eine eigentlich automorphe Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, die entweder einpolig oder ganz ist; denn der Pol $\xi^{(i)}$ des zweiten Factors wird durch den an der gleichen Stelle befindlichen Nullpunkt von $\psi_M(\zeta, \xi)$ aufgehoben.

Nun giebt es aber keine einpoligen eigentlich automorphen Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, wie in „Vorl." II, 260 bewiesen ist. Es entspringt also der Satz: Verschwindet die einpolige Reihe $\psi_M(\zeta, \xi)$ an der Stelle $\xi^{(i)}$, so verschwindet die zum inversen Multiplicatorsysteme $\overline{M}$ gehörende Reihe $\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(i)})$ an der Stelle ξ, so dass in:

(5) $$\psi_M(\zeta, \xi)\,\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(i)}) = \Phi^{(i)}(\zeta_1, \zeta_2)$$

eine ganze und eigentlich automorphe Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension vorliegt.

Wir schliessen hier auch noch das folgende Theorem an: Der Ansatz (5) liefert von jeder einpoligen Reihe $\psi(\zeta, \xi)$ aus p linear unabhängige Formen $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$. Liegen nämlich die p Stellen $\xi^{(i)}$ sämmtlich getrennt, so liefert Formel (5), für $i = 1, 2, \ldots, p$ gebildet, p Formen $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$, die man leicht als linear unabhängig erkennt. Eine zwischen ihnen bestehende lineare Relation hat nämlich eine Gleichung von der Gestalt:

$$c_1\,\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(1)}) + c_2\,\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(2)}) + \cdots + c_p\,\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(p)}) = 0$$

zur Folge; indessen zeigt man leicht, dass hier alle Coëfficienten c verschwinden müssen. Fallen bei $\xi^{(i)}$ im Ganzen s Nullpunkte von $\psi_M(\zeta, \xi)$ zusammen, so hat man die $\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(i)})$ durch die entsprechende s-polige Reihe zu ersetzen. Da aber letztere s Parameter linear und homogen enthält, so gelangt man von ihr aus zu s linear unabhängigen Formen $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$. Insgesammt entspringen wieder p linear unabhängige Formen $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$.

Wir verfolgen diese Verhältnisse noch ein wenig weiter im Falle $p = 2$ und damit bei einem hyperelliptischen Gebilde. Hier sind die einfachsten algebraischen Functionen zweiwerthig, und zwischen je zwei solchen Functionen besteht eine bilineare Relation. Man kann aber auf folgende Weise von dem oben entwickelten Ansatze aus in der That zu zweiwerthigen Functionen gelangen:

Die beiden Nullstellen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ einer vorgelegten einpoligen Reihe $\psi_M(\zeta, \xi)$ mögen der Kürze halber als getrennt liegend angenommen werden. Die beiden correspondirenden Reihen $\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(1)})$ und $\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(2)})$ werden dann den Pol ξ von $\psi_M(\zeta, \xi)$ als gemeinsamen Nullpunkt besitzen. Die Folge ist offenbar, dass der Quotient:

$$\varphi(\zeta) = \frac{\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(2)})}{\psi_{\overline{M}}(\zeta, \xi^{(1)})}$$

eine zweiwerthige eigentlich automorphe Function des Gebildes wird. Einer der beiden Nullpunkte liegt bei $\xi^{(1)}$, ein Pol bei $\xi^{(2)}$; den zweiten Nullpunkt und den zweiten Pol findet man von hier aus durch Ausübung der Transformation der Periode zwei, welche das hyperelliptische Gebilde in sich überführt.

§. 8. Sätze über Darstellung beliebiger Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension durch Poincaré'sche Reihen.

Es sollen sich jetzt endlich bei beliebigem Geschlechte p noch ein paar Ausführungen über Darstellung irgend einer Form $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension durch eine Poincaré'sche Reihe anschliessen. Möge eine vorgelegte Form $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ vom Multiplicatorsystem M im Fundamentalbereiche s-polig sein. Dann kann man durch Heranziehung der Reihenentwickelungen von $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ in den Umgebungen der einzelnen im Fundamentalbereiche gelegenen Pole eine rationale Form von der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension $G_{s-1}(\zeta_1, \zeta_2) : G_s(\zeta_1, \zeta_2)$ bilden, die von $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ abgezogen in:

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2) - \frac{G_{s-1}(\zeta_1, \zeta_2)}{G_s(\zeta_1, \zeta_2)}$$

einen im Fundamentalbereiche polfreien Ausdruck liefert. Unter diesen Umständen gewinnt man in:

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2) - \sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{s-1}\left(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}\right)}{G_s\left(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}\right)}$$

eine ganze automorphe Form der Dimension -1, so dass wir für die Darstellung der vorgelegten Form den Ansatz gewinnen:

$$(1) \quad \varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{s-1}\left(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}\right)}{G_s\left(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}\right)} + \text{ganze autom. Form.}$$

Wir wollen diesen Ansatz auf alle Formen $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ anwenden, welche das gegebene Multiplicatorsystem M haben und deren s Pole fest liegen sollen. Zunächst gelingt es leicht, die Mannigfaltigkeit aller dieser Formen aus der Anzahl $t = s + p - 1$ der Nullpunkte zu bestimmen. Es giebt nach dem Riemann-

Roch'schen Satze $t - p + \tau + 1 = s + \tau$ eigentlich automorphe linear unabhängige Functionen, welche an den t Nullstellen einer einzelnen jener Formen Pole erster Ordnung haben; und zwar bedeutet hierbei τ die Anzahl der linear unabhängigen Form $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$, welche an den t Nullpunkten zugleich verschwinden. Hieraus ergiebt sich leicht, dass sich die gedachten Formen $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ aus $s + \tau$ linear-unabhängigen aufbauen lassen.

Auf der anderen Seite bemerke man, dass durch die Lage der Pole von $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ nur erst die in:

$$(2) \qquad \sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{s-1}\left(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}\right)}{G_s\left(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}\right)}$$

auftretende Form G_s bestimmt ist, während G_{s-1} noch unbestimmt bleibt. Den s Coefficienten von G_{s-1} entsprechend wird sich der allgemeinste Ausdruck (2) mit gegebenen Polen aus s speciellen Reihen dieser Art linear-homogen zusammensetzen lassen, wobei man diese s speciellen Reihen leicht als linear-unabhängig erkennt.

Wenn nun $\tau = 0$ ist, so stimmt diese Mannigfaltigkeit mit derjenigen der Formen $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ überein. Man gewinnt unter diesen Umständen vermöge einer elementaren Ueberlegung: Falls $\tau = 0$ ist, was für $p = 0$ und $p = 1$, sowie bei $p > 1$ für $s \geqq p$ stets zutrifft, so wird $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ als Poincaré'sche Reihe darstellbar sein. Für das in diesem Falle vorliegende Multiplicatorsystem M können ganze Formen nicht existiren. Da nämlich der Ausdruck (2) für keine Auswahl von G_{s-1} eine polfreie Reihe liefern kann, so würde man beim Auftreten von ganzen Formen aus der rechten Seite von Gleichung (1) mehr als s linear-unabhängige Formen $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ herleiten können.

Sobald aber $\tau > 0$ ist, wird die Mannigfaltigkeit der Formen $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ diejenige der Reihen (2) übertreffen, so dass nunmehr für das Multiplicatorsystem M ganze Formen existiren. Ohne auf die Frage der Existenz ganzer „unimultiplicativer" Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension ausführlicher zurückzukommen, die wir auch oben (S. 25) unerledigt lassen mussten, wollen wir hier jedenfalls noch den Satz zeigen, dass man polfreie Poincaré'sche Reihen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension auf keine Weise zu bilden im Stande ist.

Wie wir nämlich gesehen haben, lässt sich jede Reihe unserer Art in eine endlichgliedrige Summe von Reihen der Gestalt zerlegen:

$$(3)\qquad \sum_k \mu_k^{-1}\,\frac{G_{s-1}\left(\zeta_1^{(k)},\,\zeta_2^{(k)}\right)}{(\zeta^{(k)},\xi)^s}.$$

Sollen nun bei einer vorgelegten Reihe alle Pole fortfallen, so müssen bei der Zerlegung in eine Summe von Reihen der Gestalt (3) immer mehrere solche Reihen an äquivalenten Stellen ξ in der gleichen Ordnung unendlich werden. Wir wollen daraufhin ein Reihenaggregat:

$$(4)\qquad \sum_i \sum_k \mu_k^{-1}\,\frac{G_{s-1}^{(i)}\left(\zeta_1^{(k)},\,\zeta_2^{(k)}\right)}{(\zeta^{(k)},\,\xi^{(i)})^s}$$

dieser Art betrachten. Die an der Stelle ξ unendlich werdenden Glieder dieses Ausdruckes liefern folgende Summe:

$$(5)\qquad \sum_i \mu_i^{-1}\,\frac{G_{s-1}^{(i)}\left(\zeta_1^{(i)},\,\zeta_2^{(i)}\right)}{(\zeta,\,\xi)^s},$$

da in der That $(\zeta^{(i)},\,\xi^{(i)})$ immer gleich $(\zeta,\,\xi)$ ist. Schreiben wir, indem wir die $\zeta_1^{(i)}$, $\zeta_2^{(i)}$ durch ihre linearen Ausdrücke in ζ_1, ζ_2 ersetzen:

$$\sum_i \mu_i^{-1}\,G_{s-1}^{(i)}\left(\zeta_1^{(i)},\,\zeta_2^{(i)}\right) = G_{s-1}(\zeta_1,\,\zeta_2),$$

so liefert die Summe (5) in den ζ_1, ζ_2 einen Ausdruck von der Gestalt:

$$\frac{G_{s-1}(\zeta_1,\,\zeta_2)}{(\zeta,\,\xi)^s}.$$

Da hier der Zähler nur auf die Dimension $(s-1)$ ansteigt, so wird dieser Quotient, falls $G_{s-1}(\zeta_1,\,\zeta_2)$ nicht identisch verschwindet, sicher bei ξ einen Pol aufweisen. Sollte aber $G_{s-1}(\zeta_1,\,\zeta_2)$ mit 0 identisch sein, so würde damit nothwendig auch die Reihe (4) identisch verschwinden. Eine nicht identisch verschwindende Reihe $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension kann demnach in der That nie polfrei sein. —

Da bei den Dimensionen $d \leqq -2$, sofern die Convergenz der zugehörigen Poincaré'schen Reihen überhaupt besteht, stets auch jede ganze Form (die in den etwaigen parabolischen Spitzen verschwindet) als polfreie Poincaré'sche Reihe darstellbar ist, so erweckt die eben skizzirte Sachlage die Vermuthung, dass bei unseren Gruppen Γ unimultiplicative ganze Formen vielleicht überhaupt nicht existiren möchten. Die nähere Untersuchung dieses Gegenstandes, welche sich auf die Primformdarstellung der ganzen Formen gründen müsste und wesentlich in der Discussion der dabei auftretenden Periodengleichungen zu bestehen hätte, passt indessen nicht mehr in den Rahmen der vorliegenden Abhandlung hinein.