BEITRÄGE

ZUR

THEORIE DES POTENTIALS GALVANISCHER STRÖME.

Von

HEINRICH WEBER

IN BRAUNSCHWEIG.

Unter den verschiedenen Stromcurven, welche lineare galvanische Ströme besitzen können, ist der Kreis die einfachste und wichtigste. Im Folgenden soll zunächst das Potential eines Kreisstromes in einer allgemeinen Gestalt entwickelt werden, welche die besonderen Formen, in denen das Potential unter verschiedenen Annahmen erscheint, als specielle Fälle in sich einschliesst.

Das Potential eines linearen Stromes, welches im Allgemeinen eine vieldeutige Function ist, kann durch Einführung einer beliebigen „Stromfläche“, welche die Stromcurve zur Begrenzung hat, zu einer eindeutigen umgewandelt werden. Aber auch in dem letzteren Falle kommen dem Potentiale je nach Wahl der Stromfläche im Allgemeinen verschiedene Werthe in einem Punkte zu, die sich jedoch nur durch eine Constante von einander unterscheiden können. Legt man nämlich durch einen und denselben Strom zwei verschiedene Stromflächen, die sich nicht durchschneiden, und sind V und V' die diesen Stromflächen entsprechenden Potentiale in einem und demselben Punkte $(\xi \eta \zeta)$, so hat man, da die Kraftcomponenten sich im Raume stetig ändern und von der Art der Stromfläche gänzlich unabhängig sind,

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial V'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial V'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \frac{\partial V'}{\partial \zeta}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und nachherige Addition ergiebt sich

$$dV = dV'$$

und hiernach

$$V = V' + \text{Const.}$$

Die Constante ist leicht zu bestimmen mit Hülfe des von Gauss gegebenen Ausdruckes für das Potential eines linearen Stromes von der Intensität i gemessen in elektromagnetischem Maasse

$$V = \pm i\omega,$$

wo ω den körperlichen Winkel bedeutet, unter dem einem im Einheitspole befindlichen, nach der Stromfläche hinsehenden Auge die Stromcurve erscheint und wo das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem dabei der Strom der Bewegung des Uhrzeigers entgegen oder gleich gerichtet ist. Nimmt man an, dass die V' entsprechende Stromfläche auf der positiven Seite von der Stromfläche für V gelegen sei, so ist für alle ausserhalb der beiden Stromflächen gelegenen Punkte die Constante gleich Null, für alle Punkte dagegen, welche dem von den beiden Stromflächen eingeschlossenen Raume angehören, gleich $4\pi i$, so dass im ersten Falle

$$V = V',$$

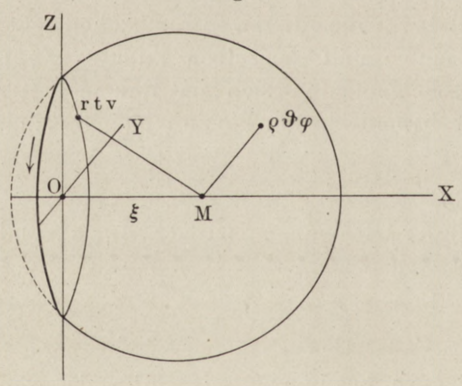
im zweiten Falle

$$V = V' + 4\pi i$$

zu setzen ist.

Für viele Anwendungen empfiehlt es sich, bei dem Potential eines Kreisstromes die Kreisebene zur Stromfläche zu wählen, weshalb dieser Fall specieller ins Auge gefasst werden soll. Das Potential eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche lässt sich direct entwickeln, viel einfacher und rascher gelangt man aber zu demselben Ziele, wenn man dieses Potential auf dasjenige eines Kreisstromes mit einer Kugelfläche als Stromfläche zurückführt. Es sei zu dem Zwecke (Fig. 1) O der Mittelpunkt des Kreisstromes und zugleich der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen X-Achse mit der positiven Normale zur Stromebene, dessen Y-Achse, mit irgend einem Radius und dessen Z-Achse mit der Richtung von Fuss zu Kopf einer Person zusammenfällt, welche in O auf der XY-Ebene stehend, in den positiven Winkelraum zwischen der X- und Y-Achse schauend, die X-Achse zur

Fig. 1.



Rechten hat. Dabei wird unter „positiver Normale“ die Richtung von Fuss zu Kopf einer Person verstanden, welche sich auf der Kreisebene so aufstellt, dass der Strom von rechts über vorn nach links an ihr vorbei fliesst.

In dem Abstand ξ vom Anfangspunkt nehmen wir auf der X-Achse einen Punkt M an und machen denselben zum Mittelpunkt einer durch die Kreisperipherie gelegten Kugelfläche. Derjenige Theil der Kugelfläche, welcher auf der positiven Seite des Kreisstromes gelegen ist, soll zur Stromfläche angenommen werden. Ferner bilde M den Anfangspunkt eines Polarcoordinatensystems, dessen Achse MX sei, und dessen Fundamentalebene die XY-Ebene bilde. (rtv) seien die Polarcoordinaten eines Peripheriepunktes des Kreises, $(\varrho \vartheta \varphi)$ diejenigen des Einheitspoles.

Nach den obigen Ausführungen ergiebt sich dann, wenn das Potential des Stromes mit der Kreisebene als Stromfläche durch V, dasjenige mit der Kugelfläche als Stromfläche durch V' bezeichnet wird,

$$(1) \qquad \text{für } \varrho > r \qquad V = V'$$

$$\text{für } \varrho < r \text{ und } \begin{cases} \xi + \varrho \cos\vartheta > 0 & V = 4\pi i + V' \\ \xi + \varrho \cos\vartheta < 0 & V = V' \end{cases}$$

oder indem man im zweiten Falle die beiden Specialfälle zusammenfasst

$$(2) \qquad \text{für } \varrho < r \qquad V = 2\pi i \left(1 + \frac{\xi + \varrho \cos\vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho\cos\vartheta)^2}}\right) + V'.$$

Die Beziehungen (1) und (2) haben auch noch Geltung, wenn ξ einen negativen Werth besitzt, d. h. der Punkt M auf der negativen Seite der Kreisebene gelegen ist.

Das Potential V' ist mehrfach nach Kugelfunctionen entwickelt worden [1]). Setzt man, wie üblich, $\cos t = m$, $\cos\vartheta = \mu$, so ist

[1]) F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, herausgegeben von C. Neumann, Leipzig 1881, S. 91 und 92. J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, deutsch von Weinstein, Berlin 1883, Bd. II, S. 412. E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, deutsch von Levy, Berlin 1888, Bd. II, S. 134.

$$\varrho < r \quad V' = -2\pi i \left\{1 - m + (1 - m^2) \sum_1^\infty \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n P_n(\mu) \frac{d P_n(m)}{dm}\right\}$$

$$\varrho > r \qquad V' = 2\pi i (1 - m^2) \sum_1^\infty \frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} P_n(\mu) \frac{d P_n(m)}{dm}.$$

Nach (2) und (1) ergiebt sich daher für das Potential des Stromes mit der Kreisebene als Stromfläche

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} \varrho < r \qquad V &= 2\pi i \left\{ \frac{\xi + \varrho \cos\vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho\cos\vartheta)^2}} \right. \\ &\left. + m - (1 - m^2) \sum_1^\infty \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n P_n(\mu) \frac{d P_n(m)}{dm} \right\} \\ \varrho > r \qquad V &= 2\pi i (1 - m^2) \sum_1^\infty \frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} P_n(\mu) \frac{d P_n(m)}{dm} \end{aligned}$$

oder ausgeführt, da $m = -\frac{\xi}{r}$, $\mu = \cos\vartheta$, $r = \sqrt{R^2 + \xi^2}$, wenn R den Radius des Kreises bedeutet:

$$\begin{aligned} (3) \qquad \varrho < r \qquad V = 2\pi i & \left\{ \frac{\xi + \varrho\cos\vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho\cos\vartheta)^2}} - \frac{\xi}{r} \right. \\ & - \frac{R^2}{r^2} \left[\frac{\varrho}{r} \cos\vartheta - \left(\frac{1.3}{2!}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \frac{\xi}{r} \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) \right. \\ & + \left(\frac{1.3.5}{3!}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^3 \left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 - \frac{1}{5}\right) \left(\cos^3\vartheta - \frac{3}{5}\cos\vartheta\right) \\ & - \left(\frac{1.3.5.7}{4!}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 \left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^3 - \frac{3}{7}\frac{\xi}{r}\right) \left(\cos^4\vartheta - \frac{6}{7}\cos^2\vartheta + \frac{3}{35}\right) \\ & \left.\left. + \cdots\cdots\cdots\cdots \right]\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \varrho > r \quad V = 2\pi i \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 & \left\{ \frac{1}{2}\cos\vartheta - \left(\frac{1.3}{2!}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{\xi}{r} \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) \right. \\ & + \left(\frac{1.3.5}{3!}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 - \frac{1}{5}\right) \left(\cos^3\vartheta - \frac{3}{5}\cos\vartheta\right) \\ & - \left(\frac{1.3.5.7}{4!}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^3 \left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^3 - \frac{3}{7}\frac{\xi}{r}\right) \left(\cos^4\vartheta - \frac{6}{7}\cos^2\vartheta + \frac{3}{35}\right) \\ & \left. + \cdots\cdots\cdots\cdots \right\} \end{aligned}$$

Aus dem allgemeinen Falle ergiebt sich leicht das Potential in Specialfällen. Liegt der Einheitspol auf der Kreisachse, so braucht man denselben nur mit dem Punkte M zusammenfallen zu lassen, d. h. $\varrho = 0$ zu setzen. Man erhält dann

$$(5) \qquad V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + R^2}} \right\}.$$

Lässt man den Einheitspol in die Achse fallen, aber jenseits oder diesseits von M, so braucht man nur $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ zu setzen. Die erste der Gleichungen (I) ergiebt dann

$$\varrho < r \quad V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi \pm \varrho}{\sqrt{(\xi \pm \varrho)^2}} + m - (1 - m^2) \sum_1^\infty \frac{(\pm 1)^n}{n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \frac{dP_n(m)}{dm} \right\}$$

unter Berücksichtigung, dass

$$m = -\frac{\xi}{r}, \qquad r^2 = R^2 + \xi^2$$

$$\frac{1 - m^2}{n} \frac{dP_n(m)}{dm} = P_{n-1}(m) - m P_n(m)$$

und

$$\sum_0^\infty (\pm 1)^n \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{1 \mp 2 \frac{\varrho m}{r} + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}$$

ist, folgt

$$V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi \pm \varrho}{\sqrt{(\xi \pm \varrho)^2}} - \frac{\xi \pm \varrho}{\sqrt{R^2 + (\xi \pm \varrho)^2}} \right\}$$

in Uebereinstimmung mit (5), wenn daselbst $\xi \pm \varrho$ für ξ gesetzt wird. Zu demselben Ausdrucke gelangt man im Falle $\varrho > r$, indem man von der Formel

$$\frac{1 - m^2}{n + 1} \frac{dP_n(m)}{dm} = m P_n(m) + P_{n+1}(m)$$

Gebrauch macht.

Lässt man den Anfangspunkt der Polarcoordinaten M mit dem Kreismittelpunkt zusammenfallen, so ist $m = 0$, und man erhält für das Potential eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche, wenn der Anfangspunkt M der Polarcoordinaten mit dem Kreismittelpunkte zusammenfällt

$$\text{II)} \quad \varrho < R \quad V = 2\pi i \left\{ \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta}} - \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1.3..2n+1}{n!\, 2^n} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\mu) \right\}$$

$$\text{II)}\quad \varrho > R \quad V = 2\pi i \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+2} \frac{1.3..2n+1}{n!\ 2^n} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n} P_{2n+1}(\mu)$$

oder ausgeführt[1])

$$(6)\qquad \varrho < R \qquad V = 2\pi i \left\{ \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta}} \right.$$

$$-\frac{\varrho}{R}\cos\vartheta \left[1 + \left(\frac{1.3}{1.2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{3}\cos^2\vartheta\right) \right.$$

$$+ \left(\frac{1.3.5}{2!\ 2^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^4 \left(1 - \frac{14}{3}\cos^2\vartheta + \frac{21}{5}\cos^4\vartheta\right)$$

$$+ \left(\frac{1.3.5.7}{3!\ 2^3}\right)^2 \cdot \frac{1}{7}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^6 \left(1 - 9\cos^2\vartheta + \frac{99}{5}\cos^4\vartheta - \frac{429}{35}\cos^6\vartheta\right)$$

$$\left. \left. + \cdots\cdots\cdots\cdots \right] \right\}$$

$$(7)\quad \varrho > R \quad V = 2\pi i \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \cos\vartheta \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1.3}{1.2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{3}\cos^2\vartheta\right) \right.$$

$$+ \left(\frac{1.3.5}{2!\ 2^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^4 \left(1 - \frac{14}{3}\cos^2\vartheta + \frac{21}{5}\cos^4\vartheta\right)$$

$$+ \left(\frac{1.3.5.7}{3!\ 2^3}\right)^2 \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^6 \left(1 - 9\cos^2\vartheta + \frac{99}{5}\cos^4\vartheta - \frac{429}{35}\cos^6\vartheta\right)$$

$$\left. + \cdots\cdots\cdots\cdots \right\}$$

In Folge der Symmetrie besitzen alle Punkte mit derselben Abscisse ξ und demselben zur Kreisachse senkrechten Abstande dasselbe Potential. Setzt man in (I) $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, d. i. $\mu = 0$, so erhält man für das Potential eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche, wenn die Lage des Einheitspoles durch die Abscisse ξ und durch den zur Kreisachse senkrechten Abstand ϱ bestimmt wird,

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} \varrho < r \qquad V = 2\pi i \Bigg\{ & \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} + m \\ & -(1-m^2)\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n} \frac{1.3..2n-1}{n!\ 2^n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{2n} \frac{dP_{2n}(m)}{dm} \Bigg\} \end{aligned}$$

---

[1]) Die vorhergehende Formel findet sich entwickelt E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, Bd. II, S. 127, Art. 768.

$$\text{(III)} \quad \varrho > r \quad V = 2\pi i(1 - m^2) \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1.3\ldots 2n-1}{n!\, 2^n} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1} \frac{d P_{2n}(m)}{dm}$$

oder ausgeführt

$$\text{(8)} \quad \varrho < r \quad V = 2\pi i \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - \frac{\xi}{r} \right.$$
$$- \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\frac{\xi}{r}\right) \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{1.3}{2!\,2^2}\right)^2 \cdot 5 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{7}{3}\left(\frac{\xi}{r}\right)^2\right) \right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{1.3.5}{3!\,2^3}\right)^2 \cdot 7 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 \left(1 - 6\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 + \frac{33}{5}\left(\frac{\xi}{r}\right)^4\right) + \quad \ldots \quad \right] \right\}$$

$$\text{(9)} \quad \varrho > r \quad V = 2\pi i \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right) \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{1.3}{2!\,2^2}\right)^2 \cdot 4 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \left(1 - \frac{7}{3}\left(\frac{\xi}{r}\right)^2\right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1.3.5}{3!\,2^3}\right)^2 \cdot 6 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 \left(1 - 6\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 + \frac{33}{5}\left(\frac{\xi}{r}\right)^4\right) + \cdots \right\},$$

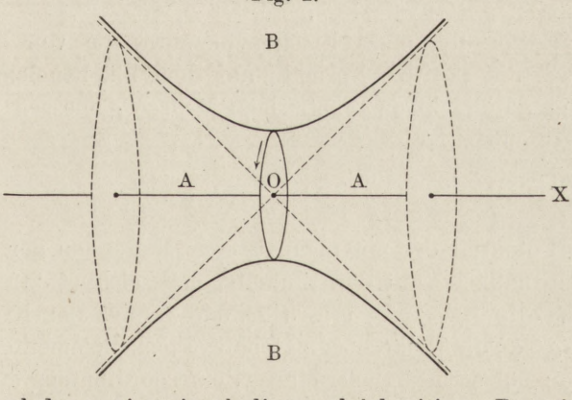
wobei $r^2 = R^2 + \xi^2$ ist.

Construirt man die gleichseitige Hyperbel Fig. 2, deren Gleichung durch

$$\frac{\varrho^2}{R^2} - \frac{\xi^2}{R^2} = 1$$

gegeben ist, und lässt dieselbe um ihre Nebenachse rotiren, so

Fig. 2.



entsteht alsdann ein einschaliges gleichseitiges Rotationshyperboloid. Für alle Punkte, welche innerhalb des Raumes A, das ist zwischen den Hyperboloidflächen gelegen sind, ist $\varrho < r$, für alle Punkte dagegen, welche in dem schalenförmigen Raum B gelegen sind, ist $\varrho > r$. Man hat daher, so lange der Einheitspol im Raume A gelegen ist, die Formel (8), so lange er im Raume B liegt, die Formel (9) zur Anwendung zu bringen.

Setzt man einmal $\xi = +a$, das andere Mal $\xi = -a$ und lässt a bis zu null abnehmen, so ergiebt sich

$$V_{+0} - V_{-0} = \begin{cases} 4\pi i & \text{für } \varrho < R \\ 0 & \;\;\text{„} \;\; \varrho > R \end{cases}$$

Zurückführung des Potentials eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche auf das Potential einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Kreisfläche.

Obgleich das Potential eines Kreisstromes mit der Kreisebene als Stromfläche sich auf dem vorher eingeschlagenen Wege am einfachsten ergiebt, empfiehlt es sich doch, dasselbe Potential auf einen zweiten, weit umständlicheren Weg abzuleiten, weil die dabei gewonnenen Formeln eine nützliche Anwendung finden bei Herstellung des Potentials von Spulen und Rollen.

Aus dem bekannten Ausdruck für das Potential eines Stromes

$$V = i \int \frac{\partial \left(\frac{1}{e}\right)}{\partial n} d\omega,$$

wo e die Entfernung eines Flächenelementes $d\omega$ von dem Einheitspole, n die positive Normale auf dem Flächenelemente bedeutet, und i in elektromagnetischem Maasse gemessen wird, ergiebt sich unmittelbar

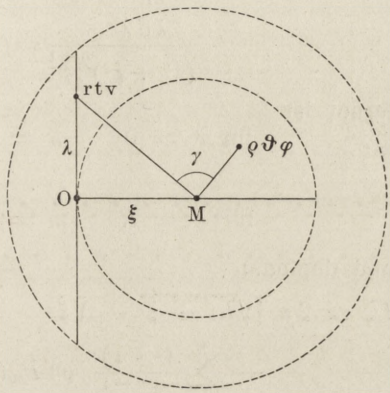
$$V = i \frac{\partial}{\partial n} \int \frac{d\omega}{e} = i \frac{\partial U}{\partial n},$$

wo U das Potential der mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Stromfläche auf den Einheitspol bezeichnet. In unserem speciellen Falle ist, wenn Fig. 3 R den Radius der Kreisfläche, (rtv) und $(\varrho\vartheta\varphi)$ die Polarcoordinaten des Flächenelementes $d\omega$ und des Einheitspoles bezüglich eines Polarcoordinatensystems mit dem Pole M und der Kreisachse als Achse bedeuten und mit λ der Abstand des Elementes $d\omega$ vom Kreismittelpunkte bezeichnet wird,

$$U = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\lambda\, d\lambda\, dv}{e}.$$

Wir construiren mit M als Mittelpunkt, Fig. 3, eine Kugelfläche, welche die Kreisebene in ihrem Mittelpunkte O berührt, und eine zweite concentrische Kugelfläche, welche die Kreisperipherie in sich aufnimmt, und unterscheiden die drei Fälle:

Fig. 3.



1. Der Einheitspol liegt innerhalb der Kugel mit dem Radius ξ. Dann ist

$$\varrho < \sqrt{\xi^2}.$$

2. Der Einheitspol liegt ausserhalb der Kugel mit dem Radius $\sqrt{R^2 + \xi^2}$. Dann ist

$$\varrho > \sqrt{R^2 + \xi^2}.$$

3. Der Einheitspol liegt zwischen den beiden Kugelflächen. Dann ist $\sqrt{R^2 + \xi^2} > \varrho > \sqrt{\xi^2}$.

Diesen drei Fällen entsprechend werde das Potential U durch U_1, U_2, U_3 bezeichnet. Hierbei ist für ξ $\sqrt{\xi^2}$ geschrieben worden, weil M sowohl auf der positiven wie auf der negativen Seite der Kreisebene liegen kann.

Erster Fall. Bezeichnet man mit γ den Winkel, welchen die Radienvectoren r und ϱ mit einander einschliessen, so findet sich

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\varrho}{r}\cos\gamma + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r} + \sum_1^\infty \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

und hiernach

$$U_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\lambda\, d\lambda\, dv}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} + \sum_1^\infty \varrho^n \int_0^R \frac{\lambda\, d\lambda}{(\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, dv$$

oder [1])

$$U_1 = 2\pi\left\{\sqrt{R^2+\xi^2} - \sqrt{\xi^2} + \sum_1^\infty \varrho^n P_n(\mu)\int_0^R \frac{\lambda\, d\lambda}{(\lambda^2+\xi^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(m)\cdot\right\}$$

Man hat nun

$$m = -\frac{\xi}{\sqrt{\lambda^2+\xi^2}} \qquad dm = \frac{\xi\lambda\, d\lambda}{(\lambda^2+\xi^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\lambda\, d\lambda}{(\lambda^2+\xi^2)^{\frac{n+1}{2}}} = (-1)^n \frac{m^{n-2}}{\xi^{n-1}}\, dm.$$

ferner ist

$$\text{für } \lambda = 0 \qquad m = -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} = m_0,$$

$$\text{für } \lambda = R \qquad m = -\frac{\xi}{\sqrt{R^2+\xi^2}} = m_2$$

und demnach

$$U_1 = 2\pi\left\{\sqrt{R^2+\xi^2} - \sqrt{\xi^2} \right.$$
$$\left. + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\xi^{n-1}} \varrho^n P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_2} m^{n-2}\, P_n(m)\, dm\right\}$$

Beachtet man, dass für $n > 1$

$$\int m^{n-2} P_n(m)\, dm = -m^{n-1} . \frac{1-m^2}{n.n-1} \frac{dP_{n-1}(m)}{dm} + \text{Const.}$$

ist [2]), so findet sich durch Integration von m_0 bis zu einem be-

---

[1]) Es ist

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\mu)\, P_n(m) + \sum_{=1}^{j=n} \frac{2\,(\sqrt{1-\mu^2})^j\,(\sqrt{1-m^2})^j}{(n-j+1)(n-j+2)\ldots(n+j)} \frac{d^j P_n(\mu)}{d\mu^j}$$
$$\cdot \frac{d^j P_n(m)}{dm^j} \cos j\,(v-\varphi)$$

und folglich da

$$\int_0^{2\pi} \cos jv\, dv = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \sin jv\, dv = 0$$

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, dv = 2\pi\, P_n(\mu)\, P_n(m).$$

[2]) Aus der bekannten Formel

$$P_n(m) = m P_{n-1}(m) - \frac{1-m^2}{n} \frac{dP_{n-1}(m)}{dm}$$

folgt durch Multiplication mit m^{n-2}

liebigen Werth m'

$$\int_{m_0}^{m'} m^{n-2} P_n(m)\,dm = -m'^{\,n-1} . \frac{1-m'^2}{n.n-1} \frac{d P_{n-1}(m')}{dm'}$$

oder auch

$$(1) \qquad \int_{m_0}^{m'} m^{n-2} P_n(m)\,dm = m'^{\,n-1} \int_{m_0}^{m'} P_{n-1}(m)\,dm.$$

In dieser letzten Form gilt die Formel auch für $n = 1$, wovon man sich direct überzeugen kann.

Da ferner

$$\frac{m_2^{\,n-1}}{\xi^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{R^2+\xi^2})^{n-1}}$$

ist, so ergiebt sich schliesslich

$$(2) \qquad U_1 = 2\pi \left\{ \sqrt{R^2+\xi^2} - \sqrt{\xi^2} \right.$$

$$\left. - \sqrt{R^2+\xi^2} \sum_1^\infty \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2+\xi^2}}\right)^n P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_2} P_{n-1}(m)\,dm \right\}.$$

Zweiter Fall. Ist $\varrho > \sqrt{R^2+\xi^2}$, so folgt wie vorher

$$U_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\lambda\, d\lambda\, dv}{e},$$

wo aber jetzt

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{\varrho}\cos\gamma + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}} = \frac{1}{\varrho} + \sum_1^\infty \frac{r^n}{\varrho^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

$$m^{n-2} P_n(m) = \frac{m^{n-2}}{n.n-1}\left(n.n-1 . m P_{n-1}(m) - (n-1)(1-m^2)\frac{d P_{n-1}(m)}{dm}\right.$$

oder weil

$$n.n-1\, P_{n-1}(m) = -\frac{d}{dm}\left[(1-m^2)\frac{d P_{n-1}(m)}{dm}\right]$$

$$m^{n-2} P_n(m) = -\frac{1}{n.n-1}\left(m^{n-1}\frac{d}{dm}\left[(1-m^2)\frac{d P_{n-1}(m)}{dm}\right]\right.$$

$$\left. + (n-1)\, m^{n-2}(1-m^2)\frac{d P_{n-1}(m)}{dm}\right)$$

$$= -\frac{1}{n.n-1}\frac{d}{dm}\left[m^{n-1}(1-m^2)\frac{d P_{n-1}(m)}{dm}\right]$$

woraus die obige Integralformel hervorgeht.

zu setzen ist. Es findet sich alsdann

$$U_2 = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^2}{\varrho} + \sum_1^\infty \frac{P_n(\mu)}{\varrho^{n+1}} \int_0^R P_n(m) (\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n}{2}} \lambda d\lambda \right\}.$$

Führt man wieder m an Stelle von λ als Veränderliche ein, so erhält man aus

$$m = -\frac{\xi}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}, \quad (\lambda^2 + \xi^2)^{\frac{n}{2}} \lambda d\lambda = -(-1)^n \frac{\xi^{n+2} dm}{m^{n+3}}$$

$$U_2 = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^2}{\varrho} - \sum_1^\infty \frac{P_n(\mu)}{\varrho^{n+1}} \xi^{n+2} (-1)^n \int_{m_0}^{m_2} \frac{P_n(m)}{m^{n+3}} dm \right\}.$$

Es ist nun [1])

$$\int \frac{P_n(m)}{m^{n+3}} dm = -\frac{1}{n+1 \,.\, n+2} \frac{1-m^2}{m^{n+2}} \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} + \text{Const.}$$

und daher bei Integration von m_0 bis zu einem beliebigen Werth m'

$$(3) \quad \int_{m_0}^{m'} \frac{P_n(m)}{m^{n+3}} dm = -\frac{1}{n+1 \,.\, n+2} \frac{1-m'^2}{m'^{n+2}} \frac{dP_{n+1}(m')}{dm'}$$

$$= \frac{1}{m'^{n+2}} \int_{m_0}^{m'} P_{n+1}(m)\, dm.$$

---

[1]) Aus der bekannten Formel

$$P_n(m) = m P_{n+1}(m) + \frac{1-m^2}{n+1} \frac{dP_{n+1}(m)}{dm}$$

folgt durch Division mit m^{n+3}

$$\frac{P_n(m)}{m^{n+3}} = \frac{1}{n+1 \,.\, n+2 \,.\, m^{n+3}} \Big(n+1 \,.\, n+2 \,.\, m P_{n+1}(m)$$
$$+ (n+2)(1-m^2) \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} \Big)$$
$$= \frac{1}{n+1 \,.\, n+2} \Big(-\frac{1}{m^{n+2}} \frac{d}{dm} \Big[(1-m^2) \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} \Big]$$
$$+ \frac{n+2}{m^{n+3}} (1-m^2) \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} \Big)$$
$$= -\frac{1}{n+1 \,.\, n+2} \frac{d}{dm} \Big[\frac{1-m^2}{m^{n+2}} \frac{dP_{n+1}(m)}{dm} \Big]$$

woraus die obige Integralformel folgt.

Da ferner

$$\frac{\xi^{n+2}}{m_2^{\,n+2}} = (-1)^n \left(\sqrt{R^2 + \xi^2}\right)^{n+2}$$

ist, so ergiebt sich

$$(4) \qquad U_2 = 2\pi \left\{ \frac{1}{2}\frac{R^2}{\varrho} - \sqrt{R^2 + \xi^2} \sum_1^\infty \left(\frac{\sqrt{R^2+\xi^2}}{\varrho}\right)^{n+1} P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_2} P_{n+1}(m)\, dm \right\}.$$

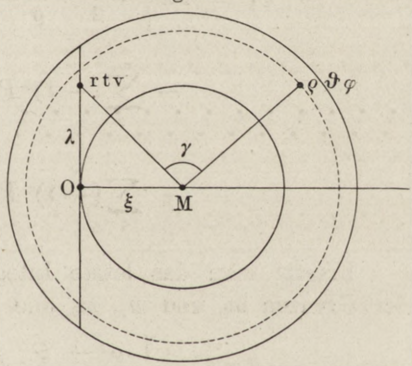
Dritter Fall. Ist $\sqrt{R^2 + \xi^2} > \varrho > \sqrt{\xi^2}$, so zerlegen wir das Integral

$$U_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\lambda\, d\lambda\, dv}{e}$$

bezüglich λ in zwei Integrale mit den Grenzen 0 und $\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}$ und R, dann ist

$$U_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\varrho^2-\xi^2}} \frac{\lambda\, d\lambda\, dv}{e} + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{\varrho^2-\xi^2}}^{R} \frac{\lambda\, d\lambda\, dv}{e}.$$

Fig. 4.



In dem ersten Integral, Fig. 4, ist $r = \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} < \varrho$, in dem zweiten dagegen $r > \varrho$. Wir setzen daher in dem ersten Integral

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\varrho}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{\varrho}\cos\gamma + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}},$$

in dem zweiten Integral

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\varrho}{r}\cos\gamma + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}$$

und erhalten dann

$$U_3 = 2\pi\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\varrho^2 - \xi^2}{\varrho} + \sum_1^\infty \frac{P_n(\mu)}{\varrho^{n+1}}\int_0^{\sqrt{\varrho^2-\xi^2}} P_n(m)(\lambda^2+\xi^2)^{\frac{n}{2}}\,\lambda\,d\lambda\right.$$

$$\left. + \sqrt{R^2+\xi^2} - \varrho + \sum_1^\infty P_n(\mu)\,\varrho^n \int_{\sqrt{\varrho^2-\xi^2}}^{R} P_n(m)\,\frac{\lambda\,d\lambda}{(\lambda^2+\xi^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right\}$$

oder, indem man mit Hülfe der Beziehung

$$m = -\frac{\xi}{\sqrt{\lambda^2+\xi^2}}$$

λ durch m ausdrückt und zur Abkürzung

$$m_0 = -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}},\quad m_1 = -\frac{\xi}{\varrho},\quad m_2 = -\frac{\xi}{\sqrt{R^2+\xi^2}}$$

setzt,

$$U_3 = 2\pi\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{\varrho^2+\xi^2}{\varrho} + \sqrt{R^2+\xi^2}\right.$$

$$- \sum_1^\infty (-1)^n P_n(\mu)\,\frac{\xi^{n+2}}{\varrho^{n+1}}\int_{m_0}^{m_1}\frac{P_n(m)dm}{m^{n+3}}$$

$$\left. + \sum_1^\infty (-1)^n P_n(\mu)\,\frac{\varrho^n}{\xi^{n-1}}\int_{m_1}^{m_2} P_n(m)\,m^{n-2}\,dm\right\}.$$

Ersetzt man das letzte Integral durch zwei Integrale mit den Grenzen m_0 und m_1, m_0 und m_2, so erhält man

$$U_3 = 2\pi\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{\varrho^2+\xi^2}{\varrho} + \sqrt{R^2+\xi^2}\right.$$

$$- \sum_1^\infty (-1)^n P_n(\mu)\left[\frac{\xi^{n+2}}{\varrho^{n+1}}\int_{m_0}^{m_1}\frac{P_n(m)}{m^{n+3}}dm + \frac{\varrho^n}{\xi^{n-1}}\int_{m_0}^{m_1} P_n(m)m^{n-2}dm\right]$$

$$\left. + \sum_1^\infty (-1)^n P_n(\mu)\,\frac{\varrho^n}{\xi^{n-1}}\int_{m_0}^{m_2} P_n(m)\,m^{n-2}\,dm\right\}.$$

Unter Anwendung der Formeln (1) und (3) wird

$$(5)\qquad U_3 = 2\pi \Bigg\{ -\frac{1}{2}\frac{\varrho^2+\xi^2}{\varrho} + \sqrt{R^2+\xi^2}$$
$$-\varrho \sum_1^\infty P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_1} [(P_{n+1}(m) - P_{n-1}(m)]\, dm$$
$$-\sqrt{R^2+\xi^2} \sum_1^\infty P_n(\mu) \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2+\xi^2}}\right)^n \int_{m_0}^{m_2} P_{n-1}(m)\, dm \Bigg\}.$$

Nun ist aber[1])

$$\sum_1^\infty P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_1} [P_{n+1}(m) - P_{n-1}(m)]\, dm$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\varrho^2+\xi^2}{\varrho^2} + \frac{\sqrt{(\xi+\varrho\cos\vartheta)^2}}{\varrho} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}\cos\vartheta$$

---

[1]) Diese Formel ergiebt sich wie folgt. Bestimmt man nach (5) die Kraftcomponente senkrecht zur Kreisfläche im Punkte $(\varrho\,\vartheta\,\varphi)$ $X = -\frac{\partial U_3}{\partial \xi}$ und lässt sodann den Radius R ins Unendliche wachsen, so ergiebt sich für die zur Ebene senkrechte Kraftcomponente einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten unendlichen Ebene im Punkte $(\varrho\,\vartheta\,\varphi)$

$$X = 2\pi \left\{ \frac{\xi}{\varrho} - \sum_1^\infty P_n(\mu)\,[P_{n+1}(m_1) - P_{n-1}(m_1)] \right\},$$

welche zugleich die Gesammtkraft bildet. Dieselbe Componente lässt sich noch auf andere Weise berechnen, indem man vom Punkte $(\varrho\,\vartheta\,\varphi)$, der von der Kreisebene den Abstand $\xi + \varrho\cos\vartheta$ besitzt, ein Perpendikel auf die Ebene fällt. Das Potential V in $(\varrho\,\vartheta\,\varphi)$ einer Kreisfläche mit dem Radius R', welche den Fusspunkt des Perpendikels zum Mittelpunkte hat, ist alsdann

$$V = 2\pi\left(\sqrt{R'^2 + (\xi+\varrho\cos\vartheta)^2} - \sqrt{(\xi+\varrho\cos\vartheta)^2}\right).$$

Daraus ergiebt sich für die X-Componente der unendlichen Fläche

$$X = -\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{R'=\infty} = 2\pi\,\frac{\xi+\varrho\cos\vartheta}{\sqrt{(\xi+\varrho\cos\vartheta)^2}}.$$

Setzt man beide Ausdrücke für X einander gleich und ersetzt $-\frac{\xi}{\varrho}$ durch m_1, so folgt

$$\sum_1^\infty P_n(\mu)\,[P_{n+1}(m_1) - P_{n-1}(m_1)] = -m_1 - \frac{-m_1+\cos\vartheta}{\sqrt{(-m_1+\cos\vartheta)^2}}.$$

Multiplicirt man den Ausdruck mit dm_1 und integrirt zwischen den Grenzen m_0 und m_1, so wird und folglich

$$(6) \quad U_3 = 2\pi \Big\{ -\sqrt{(\xi + \varrho \cos\vartheta)^2} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \varrho \cos\vartheta + \sqrt{R^2 + \xi^2}$$

$$- \sqrt{R^2 + \xi^2} \sum_1^\infty \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} \right)^n P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_2} P_{n-1}(m) dm \Big\}.$$

Der Ausdruck U_3 schliesst den früher gefundenen Ausdruck U_1 in sich ein. Es lässt sich nämlich zeigen, wenn die Bedingung $\varrho < \sqrt{\xi^2}$ erfüllt ist, was bei U_1 vorausgesetzt wurde, dass alsdann der Ausdruck U_3 in denjenigen von U_1 übergeht.

Man hat

$$\sqrt{(\xi + \varrho \cos\vartheta)^2} = \sqrt{\xi^2} \sqrt{\left(1 + \frac{\varrho}{\xi} \cos\vartheta\right)^2}.$$

Ist die Bedingung $\varrho < \sqrt{\xi^2}$ erfüllt, so ist $(1 + \frac{\varrho}{\xi} \cos\vartheta)$ stets eine positive Grösse, folglich ist in diesem Falle

$$\sqrt{(\xi + \varrho \cos\vartheta)^2} = \sqrt{\xi^2} + \frac{\sqrt{\xi^2}}{\xi} \varrho \cos\vartheta = \sqrt{\xi^2} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \varrho \cos\vartheta.$$

Führt man diesen Werth in U_3 ein, so ergiebt sich U_1.

Als Resultat der vorhergehenden Betrachtungen erhalten wir daher für das Potential einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Kreisfläche, wenn die Lage des Einheitspoles durch ξ und $(\varrho \vartheta \varphi)$ festgestellt wird, wobei ξ

$$\sum_1^\infty P_n(\mu) \int_{m_0}^{m_1} [P_{n+1}(m_1) - P_{n-1}(m_1)]\, dm_1$$

$$= -\left(\frac{m_1^2}{2} - \frac{m_0^2}{2}\right) + \sqrt{(-m_1 + \cos\vartheta)^2} - \sqrt{(-m_0 + \cos\vartheta^2)}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\xi^2 - \varrho^2}{\varrho^2} + \frac{\sqrt{(\xi + \varrho \cos\vartheta)^2}}{\varrho} - \sqrt{\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} + \cos\vartheta\right)^2}.$$

Nun ist

$$\sqrt{\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} + \cos\vartheta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\xi^2}}{\xi} + \cos\vartheta\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} \sqrt{(\sqrt{\xi^2} + \xi \cos\vartheta)^2},$$

der letzte Ausdruck ist aber, da stets $\sqrt{\xi^2} + \xi \cos\vartheta \geqq 0$ ist, gleich $1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \cos\vartheta$. Führt man diesen Werth ein, so ergiebt sich die obige Formel.

sowohl positive als negative Werthe annehmen kann, folgende Formeln:

(IV)

$$\varrho < \sqrt{R^2 + \xi^2} \qquad U = 2\pi \Big\{ -\sqrt{(\xi + \varrho\cos\vartheta)^2} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}\varrho\cos\vartheta + \sqrt{R^2+\xi^2} - \sqrt{R^2+\xi^2}\sum_1^\infty \left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2+\xi^2}}\right)^n P_n(\mu)\int_{m_0}^{m_2} P_{n-1}(m)\,dm \Big\}.$$

$$\varrho > \sqrt{R^2 + \xi^2} \qquad U = 2\pi \Big\{ \frac{1}{2}\frac{R^2}{\varrho} - \sqrt{R^2+\xi^2}\sum_1^\infty \left(\frac{\sqrt{R^2+\xi^2}}{\varrho}\right)^{n+1} P_n(\mu)\int_{m_0}^{m_2} P_{n+1}(m)\,dm \Big\}.$$

Diese Formeln lassen sich in weiterer Ausführung schreiben, wenn man beachtet, dass

$$\text{für } n > 0 \int_{m_0}^{m} P_n(m)\,dm = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{(n+1)!}\Big[m^{n+1} - \frac{1}{2}\frac{n+1.n}{2n-1}m^{n-1} + \frac{1}{2!\,2^2}\frac{n+1.n.n-1.n-2}{2n-1.2n-3}m^{n-3} - \ldots\Big],$$

$$\text{für } n = 0 \qquad \int_{m_0}^{m} P_n(m)\,dm = m - m_0.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\sqrt{R^2 + \xi^2} = r$, so folgt

$$(7) \qquad \varrho < r \quad U = 2\pi \Big\{ -\sqrt{(\xi + \varrho\cos\vartheta)^2} + r + \varrho\Big[\frac{\xi}{r}\cos\vartheta - \left(\frac{1.3}{2!}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\frac{\varrho}{r}\left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 - 1\right)\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1.3.5}{3!}\right)^2\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^3 - \frac{\xi}{r}\right)\left(\cos^3\vartheta - \frac{3}{5}\cos\vartheta\right) - \left(\frac{1.3.5.7}{4!}\right)^2\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^3\left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^4 - \frac{6}{5}\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\right)\left(\cos^4\vartheta - \frac{6}{7}\cos^2\vartheta + \frac{3}{35}\right) + \cdots\cdots \Big]\Big\}.$$

$$(8)\quad \varrho > r \quad U = -2\pi \frac{r^2}{\varrho}\left\{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 - 1\right) - \left(\frac{1}{1!}\right)^2 \frac{3}{2.3}\frac{r}{\varrho}\left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^3 - \frac{\xi}{r}\right)\cos\vartheta\right.$$

$$+ \left(\frac{1.3}{2!}\right)^2 \cdot \frac{5}{3.4}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^4 - \frac{6}{5}\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\right)\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)$$

$$-\left(\frac{1.3.5}{3!}\right)^2 \frac{7}{4.5}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^3\left(\left(\frac{\xi}{r}\right)^5 - \frac{10}{7}\left(\frac{\xi}{r}\right)^3 + \frac{3}{7}\frac{\xi}{r}\right)\left(\cos^3\vartheta - \frac{3}{5}\cos\vartheta\right)$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

Aus den Formeln (IV) lassen sich leicht die Werthe des Potentials ableiten für den Fall, dass der Anfangspunkt des Polarcoordinatensystems $(\varrho\,\vartheta\,\varphi)$ mit dem Kreismittelpunkte zusammenfällt.

Setzt man in der ersten Formel für $\varrho < \sqrt{R^2 + \xi^2}$, $\xi = 0$, so findet sich

$$U = 2\pi\left\{-\varrho\sqrt{\cos^2\vartheta} \pm \varrho\cos\vartheta + R\right.$$
$$\left. - R\sum_1^\infty\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_n(\mu)\int_{\mp 1}^{0} P_{n-1}(m)\,dm\right\},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem ξ von der positiven oder negativen Seite aus zu Null übergeht. Sondert man von der Summe die beiden ersten Glieder ab und schreibt in der übrig bleibenden Summe für n: $n+2$, indem man zugleich die Summe von $n = 1$ bis $n = \infty$ erstreckt, so findet sich leicht

$$\varrho < R \quad U = 2\pi R\left\{1 - \frac{\varrho}{R}\sqrt{\cos^2\vartheta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 P_2(\mu)\right.$$
$$\left. - \sum_1^\infty\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n+2} P_{n+2}(\mu)\int_{\mp 1}^{0} P_{n+1}(m)\,dm\right\}.$$

Desgleichen giebt die zweite Gleichung (IV) für $\xi = 0$

$$\varrho > R \quad U = 2\pi R\left\{\frac{1}{2}\frac{R}{\varrho} - \sum_1^\infty\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} P_n(\mu)\int_{\mp 1}^{0} P_{n+1}(m)\,dm\right\}.$$

Es ist aber für $n > 0$

$$\int_{\mp 1}^{0} P_{2n}(m)\,dm = 0, \quad \int_{\mp 1}^{0} P_{2n+1}(m)\,dm = -(-1)^n \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{(n+1)!\, 2^{n+1}}$$

und folglich erhält man für das Potential einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Kreisscheibe, wenn der Anfangspunkt der Polarcoordinaten $(\varrho \vartheta \varphi)$ mit dem Kreismittelpunkte zusammenfällt

$$\text{(V)} \quad \begin{aligned} \varrho < R \quad U &= 2\pi R \left\{ 1 - \frac{\varrho}{R}\sqrt{\cos^2\vartheta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 P_2(\mu) \right. \\ &\left. + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{1.3\ldots.2n-1}{(n+1)!\, 2^{n+1}} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n+2} P_{2n+2}(\mu) \right\} \\ \varrho > R \quad U &= 2\pi R \left\{ \frac{1}{2}\frac{R}{\varrho} \right. \\ &\left. + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{1.3\ldots 2n-1}{(n+1)!\, 2^{n+1}} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} P_{2n}(\mu) \right\} \end{aligned}$$

oder [1])

$$\text{(9)} \quad \varrho < R \quad U = 2\pi R \left\{ 1 - \frac{\varrho}{R}\sqrt{\cos^2\vartheta} + \frac{1}{2} P_2(\mu)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 - \frac{1}{2!\,2^2} P_4(\mu)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^4 + \frac{1.3}{3!\,2^3} P_6(\mu)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^6 - \ldots \right\},$$

$$\text{(10)} \quad \varrho > R \quad U = 2\pi R \left\{ \frac{1}{2}\frac{R}{\varrho} - \frac{1}{2!\,2^2} P_2(\mu)\left(\frac{R}{\varrho}\right)^3 + \frac{1.3}{3!\,2^3} P_4(\mu)\left(\frac{R}{\varrho}\right)^5 - \frac{1.3.5}{4!\,2^4} P_6(\mu)\left(\frac{R}{\varrho}\right)^7 + \ldots \right\}$$

Setzt man in (IV) $\vartheta = 90^0$, d. h. $\mu = 0$, so erhält man unter Berücksichtigung, dass

$$P_{2n+1}(o) = 0, \quad P_{2n}(o) = (-1)^n \frac{1.3\ldots 2n-1}{n!\, 2^n},$$

$$\frac{1}{2}\frac{R^2}{\varrho} = -\frac{1}{2}\frac{R^2+\xi^2}{\varrho}\left(\frac{\xi^2}{R^2+\xi^2} - 1\right)$$

---

[1]) Diese Formeln finden sich auf anderem Wege entwickelt in E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, deutsch von Levy, Bd. I, S. 332, nur mit dem Unterschied, dass das zweite Glied in der ersten Formel nicht wie oben $\sqrt{\cos^2\vartheta}$, sondern einfach $\cos\vartheta$ zum Factor hat. Letzteres kann aber nicht der Fall sein, da die Werthe von U für ϑ und $180-\vartheta$ identisch sein müssen.

ist, für das Potential einer mit magnetischer Masse von der Dichte 1 belegten Kreisfläche, wenn die Lage des Einheitspoles durch den Abscisse ξ und den senkrechten Abstand von der Kreisachse ϱ bestimmt wird

$$
\text{(VI)}\quad
\begin{aligned}
&\varrho < \sqrt{R^2+\xi^2} \quad U = 2\pi\sqrt{R^2+\xi^2}\left\{1-\frac{\sqrt{\xi^2}}{\sqrt{R^2+\xi^2}}\right.\\
&\qquad \left.-\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1.3\ldots 2n-1}{n!\;2^n}\left(\frac{\varrho}{\sqrt{R^2+\xi^2}}\right)^{2n}\int_{m_0}^{m_2}P_{2n-1}(m)\,dm\right\},\\
&\varrho > \sqrt{R^2+\xi^2} \quad U = -2\pi\sqrt{R^2+\xi^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R^2+\xi^2}}{\varrho}\left[\frac{\xi^2}{R^2+\xi^2}-1\right]\right.\\
&\qquad \left.+\sum_1^\infty(-1)^n.\frac{1.3..2n-1}{n!\;2^n}\left(\frac{\sqrt{R^2+\xi^2}}{\varrho}\right)^{2n+1}\int_{m_0}^{m_2}P_{2n+1}(m)dm\right\}
\end{aligned}
$$

oder ausgeführt, wenn zur Abkürzung $\sqrt{R^2+\xi^2}=r$ gesetzt wird[1])

$$
\text{(11)}\quad
\begin{aligned}
\varrho < r \quad U = 2\pi r&\left\{1-\frac{\sqrt{\xi^2}}{r}+\frac{1}{2^2}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\left[\left(\frac{\xi}{r}\right)^2-1\right]\right.\\
&-\frac{1.3.5}{(2!\;2^2)^2}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4\left[\left(\frac{\xi}{r}\right)^4-\frac{6}{5}\left(\frac{\xi}{r}\right)^2+\frac{1}{5}\right]\\
&+\frac{1.3.5.7.9}{(3!\;2^3)^2}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^6\left[\left(\frac{\xi}{r}\right)^6-\frac{5}{3}\left(\frac{\xi}{r}\right)^4+\frac{5}{7}\left(\frac{\xi}{r}\right)^2-\frac{1}{21}\right]\\
&\left.-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\text{(12)}\quad
\begin{aligned}
\varrho > r \quad U = -2\pi r&\left\{\frac{1}{2}\frac{r}{\varrho}\left[\left(\frac{\xi}{r}\right)^2-1\right]\right.\\
&-\frac{1.3.5}{(2^2)^2}\frac{1}{3.4}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^3\left[\left(\frac{\xi}{r}\right)^4-\frac{6}{5}\left(\frac{\xi}{r}\right)^2+\frac{1}{5}\right]\\
&+\frac{1.3.5.7.9}{(2!\;2^2)^2}\frac{1}{5.6}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^5\left[\left(\frac{\xi}{r}\right)^6-\frac{5}{3}\left(\frac{\xi}{r}\right)^4+\frac{5}{7}\left(\frac{\xi}{r}\right)^2-\frac{1}{21}\right]\\
&\left.-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}.
\end{aligned}
$$

---

[1]) Die erste der folgenden Formeln ist in E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, deutsch von Levy, Bd. I, S. 331, Glch. 12, entwickelt. Es ist jedoch daselbst x durch $\sqrt{x^2}$ zu ersetzen, da U denselben Werth für positive und negative Werthe von x beibehalten muss.

Die gewonnenen Ausdrücke für das Potential U können dazu dienen, nach der Formel

$$V = i\,\frac{\partial U}{\partial n} = -\,i\,\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

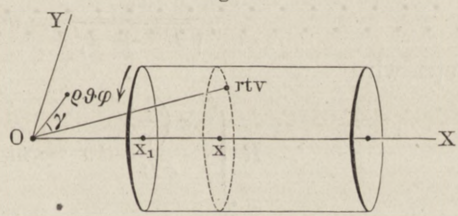
die entsprechenden Ausdrücke für das Potential V abzuleiten. In der That ergeben sich aus (IV) und (VI) die früher gefundenen Formeln (I) und (III).

Bestimmung des Potentials eines Kreisstromes mit einer Cylinderfläche als Stromfläche.

Unter Umständen ist es vortheilhaft, als Stromfläche die Cylinderfläche zu wählen, welche man erhält, wenn man durch die Peripheriepunkte des Kreises in der Richtung der positiven Normale Linien zieht und die so gewonnene Cylinderfläche in einem beliebigen Abstand von der Kreisebene durch eine der letzteren parallele Ebene begrenzt.

Es seien Fig. 5 R der Radius des Kreises, $(r\vartheta\varphi)$ und (rtv) die Polarcoordinaten des Einheitspoles und eines Flächenelementes $d\omega$ auf der Cylinderfläche, bezogen auf ein räumliches Polarcoordinatensystem mit dem Anfangspunkt O, dessen Achse OX mit der im Kreismittelpunkt errichteten positiven Normale und dessen Fundamentalebene mit einer beliebig gewählten Ebene YOX zusammenfällt.

Fig. 5.



Es seien ferner γ der Winkel, welchen die beiden Leitstrahlen ϱ und r mit einander einschliessen, e die Entfernung des Flächenelementes $d\omega$ vom Einheitspole und x_1 und x die Abstände der Kreisebene und der durch $d\omega$ senkrecht zur Cylinderachse gelegten Schnittfläche vom Anfangspunkt O.

Je nach der Grösse von ϱ sind hierbei verschiedene Fälle zu unterscheiden, welche sich in ähnlicher Weise wie oben behandeln lassen. Es soll jedoch hier nur der einfachste und zugleich wichtigste Fall ins Auge gefasst werden, wo die Endfläche des Cylinders im Unendlichen liegt und $\varrho < R$ ist. Man kann alsdann die Endfläche gänzlich unberücksichtigt lassen, da ihr Antheil an dem Gesammtpotential in Folge ihrer unendlichen Entfernung gleich Null ist. Man erhält daher für das Potential den einfachen Ausdruck

$$V = i \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{x_1}^{\infty} R\,dv\,dx \, \frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial R}.$$

Hierin ist

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\varrho\cos\gamma + \varrho^2}} = \frac{1}{r} + \sum_1^{\infty} \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

zu setzen, wodurch man unter Berücksichtigung der Note (1), S. 98,

$$(1) \quad V = 2\pi i R \left[\int\limits_{x_1}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial R} dx + \sum_1^{\infty} \varrho^n P_n(\mu) \int\limits_{x_1}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{P_n(m)}{r^{n+1}}\right)}{\partial R} dx \right]$$

erhält. Es ergiebt sich nun leicht, wenn

$$\frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} = m_1$$

gesetzt wird

$$R \int\limits_{x_1}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial R} dx = m_1 - 1,$$

ferner hat man

$$\frac{\partial\left(\frac{P_n(m)}{r^{n+1}}\right)}{\partial R} = \frac{1}{r^{n+1}} \frac{dP_n(m)}{dm} \frac{\partial m}{\partial R} - (n+1) \frac{P_n(m)}{r^{n+2}} \frac{\partial r}{\partial R}$$

oder weil

$$m = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \qquad r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{P_n(m)}{r^{n+1}}\right)}{\partial R} = -\frac{R}{r^{n+3}} \left((n+1) P_n(m) + m \frac{dP_n(m)}{dm} \right).$$

Führt man diese Werthe in den Ausdruck (1) ein und nimmt m an Stelle von x zur Veränderlichen an, so ergiebt sich mit Hülfe der Beziehungen

$$m = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad x = \frac{mR}{\sqrt{1 - m^2}} \quad dx = \frac{R\,dm}{[1 - m^2]^{\frac{3}{2}}} \quad r = \frac{R}{\sqrt{1 - m^2}}$$

$$V = 2\pi i \left\{ -1 + m_1 - \sum_1^\infty \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_n(\mu) \int_{m_1}^1 dm (1 - m^2)^{\frac{n}{2}} \right.$$

$$\left. \left[(n+1) P_n(m) + m \frac{d P_n(m)}{dm} \right] \right\}.$$

Unter Berücksichtigung, dass

$$n \,.\, \overline{n + 1}\, P_n(m) = - \frac{d}{dm} (1 - m^2) \frac{d P_n(m)}{dm}$$

ist

$$V = 2\pi i \left\{ -1 + m_1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_n(\mu) \right.$$

$$\left. \int_{m_1}^1 dm \frac{d}{dm} \left[(1 - m^2)^{\frac{n}{2}} (1 - m^2) \frac{d P_n(m_1)}{d m_1} \right] \right\}$$

und folglich, wenn

$$\frac{R}{\sqrt{1 - m_1^2}} = \sqrt{R^2 + x_1^2} = r_1$$

gesetzt wird

$$(2) \quad \varrho < R \quad V = 2\pi i \left\{ -1 + m_1 - (1 - m_1^2) \sum_1^\infty \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r_1}\right)^n P_n(\mu) \frac{d P_n(m_1)}{d m_1} \right\}.$$

Hierin haben r_1 und m_1 dieselbe Bedeutung wie r und m in der Formel I, S. 92. Lässt man, um die Uebereinstimmung noch vollständiger zu machen, den Anfangspunkt O des Polarcoordinatensystems auf die positive Seite der Kreisebene fallen und bezeichnet dann den Abstand des Kreismittelpunktes von O wie früher durch ξ, so hat man $\xi = -x_1$ und

$$m_1 = - \frac{\xi}{\sqrt{R^2 + \xi^2}}.$$

Die Formel (2) ergiebt sich unmittelbar aus der ersten der Formeln I nach den S. 89 u. 90 angestellten Betrachtungen. Bezeichnet man jetzt mit V' das Potential des Kreisstromes mit der

Cylinderfläche als Stromfläche, mit V dasjenige mit der Kreisfläche als Stromfläche, so ist

$$V' = V - 4\pi i \text{ oder } V' = V,$$

je nachdem der Einheitspol auf der positiven oder negativen Seite der Kreisfläche gelegen ist. Im ersteren Falle ist

$$\xi + \varrho \cos\vartheta > 0 \qquad \frac{\xi + \varrho \cos\vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho \cos\vartheta)^2}} = 1$$

im zweiten Falle ist

$$\xi + \varrho \cos\vartheta < 0 \qquad \frac{\xi + \varrho \cos\vartheta}{\sqrt{(\xi + \varrho \cos\vartheta)^2}} = -1$$

womit die Uebereinstimmung nachgewiesen ist.

Drehungsmoment, welches ein Kreisstrom auf einen Magnet ausübt, dessen Mitte in die Kreisachse fällt.

Mit Hülfe der Gleichung (2), S. 111, lässt sich unmittelbar das Potential $\boldsymbol{P}$ eines Kreisstromes auf einen Magnet herstellen, dessen Mitte in der Kreisachse gelegen ist und dessen Polabstand kleiner ist als der Durchmesser des Kreises und zwar für jeden Winkel, den die magnetische Achse dabei mit der Kreisachse einschliesst. Denn bei Drehung des Magnets aus einer Anfangslage in eine beliebige Endlage ändert sich das Potential des Stromkreises in jedem der Pole immer stetig, sprungweise Aenderungen sind ausgeschlossen.

Bezeichnet man mit V_1 und V_2 das Potential des Kreisstromes im Nord- und Südpol, in denen die magnetischen Mengen $+\mu'$ und $-\mu'$ concentrirt seien, so erhält man aus $\boldsymbol{P} = \mu'(V_1 - V_2)$, wenn man beachtet, dass V_2 aus V_1 erhalten wird, wenn für ϑ und φ: $180 - \vartheta$ und $180 + \varphi$ gesetzt wird, und wenn man das magnetische Moment $2\mu\varrho$ mit M bezeichnet

$$\boldsymbol{P} = -\frac{2\pi i M R^2}{r_1^3} \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\varrho}{r_1}\right)^{2n} P_{2n+1}(\mu) \frac{d P_{2n+1}(m_1)}{d m_1}.$$

Das Drehungsmoment, welches der Strom auf den Magnet in der Richtung der wachsenden ϑ ausübt, ist

$$-\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\vartheta} = \sin\vartheta \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \mu}.$$

Bezeichnet man das entgegengesetzt gerichtete Drehungsmoment durch D und führt man zugleich für ϑ sein Complement α

ein, welches dem Winkel zwischen der magnetischen Achse und der Stromebene gleich ist, so ergiebt sich

$$(1)\quad D = \frac{2\pi i M R^2}{r_1^3} \cos\alpha \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{\varrho}{r_1}\right)^{2n} \frac{dP_{2n+1}(\mu)}{d\mu}\frac{dP_{2n+1}(m_1)}{dm_1}$$

oder ausgeführt,

$$D = \frac{2\pi i M R^2}{r_1^3} \cos\alpha \sum_0^\infty \left(\frac{1.3\ldots.4n+1}{(2n+1)!}\right)^2 (2n+1)\left(\frac{\varrho}{r_1}\right)^{2n}$$

$$\left[\left(\frac{\xi}{r_1}\right)^{2n} - \frac{2n.2n-1}{2.4n+1}\left(\frac{\xi}{r_1}\right)^{2n-2}\right.$$

$$\left. + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{2!2^2\ 4n+1.4n-1}\left(\frac{\xi}{r_1}\right)^{2n-4} - \ldots\ldots\right]$$

$$\left[\sin^{2n}\alpha - \frac{2n.2n-1}{2.4n+1}\sin^{2n-2}\alpha\right.$$

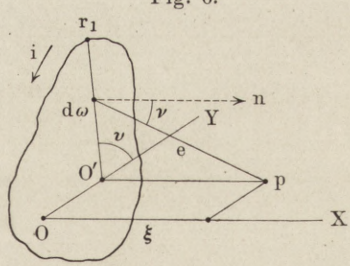
$$\left. + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{2!2^2\ 4n+1.4n-1}\sin^{2n-4}\alpha - \ldots\ldots\right].$$

Ein Ausdruck, welcher in der Theorie der Tangentenbussole eine wichtige Rolle spielt.

Untersuchung der Gültigkeit des Ampère'schen Satzes über die Ersetzung eines Stromes durch eine magnetische Doppelfläche.

Um die Bedingungen festzustellen, unter denen ein galvanischer Strom durch eine magnetische Doppelfläche ersetzt werden kann, vergleichen wir das Potential des Stromes mit dem Potential der ihm entsprechenden Doppelfläche. Es soll dies hier nur für den speciellen Fall geschehen, wo die Stromcurve eine ebene Curve ist.

Fig. 6.



Um zunächst das Potential eines beliebigen, aber ebenen Stromes zu bestimmen, werde, Fig. 6, irgend ein Punkt O der umflossenen Stromfläche zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems angenommen. Die X-Achse habe die Richtung der positiven Normale, die Y-Achse falle in die durch O und den Einheitspol p gelegten Ebene. Fällt man dann von p, dessen

Coordinaten ξ, η seien, ein Perpendikel pO' auf die Stromebene, so kann der Fusspunkt O' entweder innerhalb der umflossenen Fläche oder ausserhalb derselben zu liegen kommen oder endlich in die Stromcurve selbst fallen. Wir nehmen in allen drei Fällen O' zum Anfangspunkte eines Polarcoordinatensystems (r, v), dessen Achse mit der Y-Achse zusammenfällt. Ist dann $d\omega$ irgend ein Element der Stromfläche mit den Polarcoordinaten (r, v), ferner e die Entfernung zwischen $d\omega$ und p, und ν der Winkel, welchen die auf $d\omega$ errichtete positive Normale n mit der Richtung $\overline{d\omega p}$ bildet, so ist das Potential des Stromes in p

$$V = i \int \frac{\cos \nu}{e^2} d\omega$$

oder da $d\omega = r dr dv$, $\cos \nu = \frac{\xi}{e}$

$$V = i\xi \iint \frac{r dr dv}{e^3} = i\xi \iint \frac{r dr dv}{[\xi^2 + r^2]^{3/2}}.$$

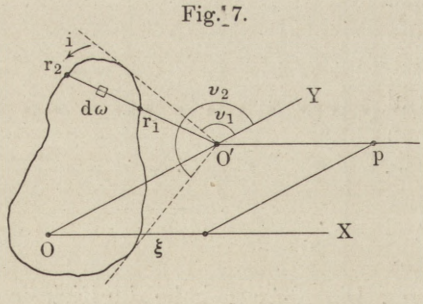
Bezeichnet im ersten Falle r_1 den Radiusvector des Curvenpunktes, in welchem der verlängerte Radiusvector von $d\omega$ die Curve schneidet, wo dann r_1 durch die Polargleichung der Stromcurve $r_1 = F(v)$ als Function von v gegeben ist, so erhält man

$$(1) \qquad V = 2\pi i \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Lässt man den Einheitspol durch die Stromfläche von der negativen zur positiven Seite wandern, so muss sich das Potential sprungweise um $4\pi i$ ändern. In der That ergiebt sich aus obiger Formel

$$V_{+0} - V_{-0} = 4\pi i.$$

Fig. 7.



Liegt zweitens der Fusspunkt ausserhalb der Stromfläche und sind r_1 und r_2 die Leitstrahlen der Durchschnittspunkte des Radiusvectors von $d\omega$ mit der Curve, welche als Functionen von v durch die Polargleichung $r = F(v)$ gegeben sind, bezeichnen ferner v_1 und v_2 die Winkel, welche die beiden die Curve tangirenden Leitstrahlen mit der Y-Achse bilden, so hat man

$$(2)\quad V = i\xi \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{[\xi^2 + r^2]^{3/2}} = -i\xi \int_{v_1}^{v_2} dv \left[\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + r_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}\right].$$

Um das Potential im dritten Falle herzuleiten, sei v_0 der Winkel, welchen die Tangente im Schnittpunkte von Curve und Y-Achse mit der letzteren bildet, dann findet sich

$$(3)\quad V = i\xi \int_{v_0}^{v_0+\pi} dv \int_0^{r_1} \frac{r\,dr}{[\xi^2 + r^2]^{3/2}} = \pi i \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} - i\xi \int_{v_0}^{v_0+\pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Zu dem gleichen Resultate gelangt man, wenn man im ersten oder zweiten Falle den Fusspunkt O' in die Curve rücken lässt. Das Potential V ändert sich daher stetig, wenn der Fusspunkt durch die Curve schreitet, ausgenommen ist nur der Fall, wo der Einheitspol in der Stromebene selbst gelegen ist.

Auf ganz gleiche Weise ergiebt sich in den drei betrachteten Fällen das Potential U, welches der Stromfläche zukommt, diese belegt gedacht mit magnetischer Masse von der Dichte 1. Es ist allgemein

$$U = \iint \frac{r\,dr\,dv}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}.$$

Daraus folgt in den drei Fällen der Reihe nach

$$U = -2\pi\sqrt{\xi^2} + \int_0^{2\pi} dv \sqrt{\xi^2 + r_1^2}$$

$$(4)\quad U = \int_{v_1}^{v_2} dv \left[\sqrt{\xi^2 + r_2^2} - \sqrt{\xi^2 + r_1^2}\right],$$

$$U = -\pi\sqrt{\xi^2} + \int_{v_0}^{v_0+\pi} dv \sqrt{\xi^2 + r_1^2}.$$

Versteht man unter Doppelfläche zwei der Stromfläche parallele und congruente Flächen, von denen jede den kleinen Abstand h von der Stromfläche besitzt und die auf der positiven Seite der Stromfläche liegende mit magnetischer Masse von der

Dichte $+\frac{i}{2h}$, die andere mit magnetischer Masse von der Dichte $-\frac{i}{2h}$ belegt ist, so ergiebt sich aus (4) in den drei Fällen für das Potential der Doppelfläche, welches durch V' bezeichnet werden möge,

$$V' = -\frac{2\pi i}{2h}\left(\sqrt{(\xi-h)^2} - \sqrt{(\xi+h)^2}\right)$$
$$+\frac{i}{2h}\int_0^{2\pi} dv\left(\sqrt{(\xi-h)^2+r_1^2} - \sqrt{(\xi+h)^2+r_1^2}\right),$$

(5)
$$V' = \frac{i}{2h}\int_{v_1}^{v_2} dv\left(\sqrt{(\xi-h)^2+r_2^2} - \left(\sqrt{(\xi+h)^2+r_2^2}\right)\right.$$
$$-\frac{i}{2h}\int_{v_1}^{v_2} dv\left(\sqrt{(\xi-h)^2+r_1^2} - \sqrt{(\xi+h)^2+r_1^2}\right),$$

$$V' = -\frac{\pi i}{2h}\left(\sqrt{(\xi-h)^2} - \sqrt{(\xi+h)^2}\right)$$
$$+\frac{i}{2h}\int_{v_0}^{v_0+\pi} dv\left(\sqrt{(\xi-h)^2+r_1^2} - \sqrt{(\xi+h)^2+r_1^2}\right).$$

Um die drei Fälle zusammenfassen zu können, sei r allgemein die Entfernung zwischen dem Fusspunkt des von dem Einheitspol auf die Stromebene gefällten Perpendikels und einem Punkte der Stromcurve, dann hat man

$$\sqrt{(\xi-h)^2+r^2} - \sqrt{(\xi+h)^2+r^2}$$
$$= \sqrt{(\xi^2+r^2)}\left\{\sqrt{1-2\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\frac{h}{\sqrt{\xi^2+r^2}}+\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\right)^2}\right.$$
$$\left.-\sqrt{1+2\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\cdot\frac{h}{\sqrt{\xi^2+r^2}}+\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2+r^2}}\right)^2}\right\}$$

oder

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+r^2}} = \cos v \qquad \frac{h}{\sqrt{\xi^2+r^2}} = a$$

gesetzt

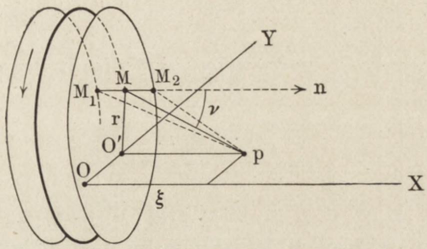
$$\sqrt{(\xi-h)^2+r^2} - \sqrt{(\xi+h)^2+r^2}$$
$$= \sqrt{\xi^2+r^2}\left\{\sqrt{1-2a\cos v+a^2} - \sqrt{1+2a\cos v+a^2}\right\}.$$

Die Bedeutung der eingeführten Grössen ergiebt sich aus Figur 8, welche sich auf den ersten Fall bezieht. Es ist $Mp = \sqrt{\xi^2 + r^2}$ der Abstand des Curvenpunktes M vom Einheitspol, ferner

$$\cos\nu = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}$$

der Cosinus des Winkels, welchen die in M errichtete positive Normale mit Mp einschliesst. Endlich sind,

Fig. 8.



wenn M_1 und M_2 zu M correspondirende Punkte auf den mit Magnetismus belegten Flächen bedeuten, $\sqrt{(\xi + h)^2 + r^2}$ und $\sqrt{(\xi - h)^2 + r^2}$ die Entfernungen $M_1 p$ und $M_2 p$.

Entwickelt man nun in dem letzten Ausdrucke die beiden Wurzelgrössen nach steigenden Potenzen von a, so ergiebt sich

$$\sqrt{(\xi - h)^2 + r^2} - \sqrt{(\xi + h)^2 + r^2}$$
$$= -\sqrt{\xi^2 + r^2} \, . \, 2\, a \cos\nu \left\{ 1 + \sum_1^\infty \frac{1\,.\,3\ldots 4n-1}{(2n+1)!}\, a^{2n} \right.$$
$$\left[\cos^{2n}\nu - \frac{1}{2}\,\frac{2n+1\,.\,2n}{4n-1} \cos^{2n-2}\nu \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2!\; 2^2}\,\frac{2n+1\,.\,2n\,.\,2n-1\,.\,2n-2}{4n-1\,.\,4n-3} \cos^{2n-4}\nu - \cdots \right] \right\}$$

Diese Reihe convergirt, so lange $a < 1$, d. h. so lange $\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} < 1$ ist. Führt man für a und $\cos\nu$ ihre Werthe ein und bezeichnet zur Abkürzung die Summe durch R, setzt also

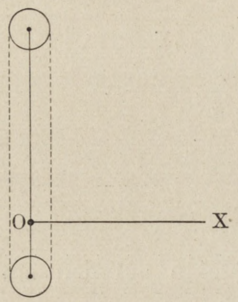
$$R = \frac{1\,.\,3}{3!}\, a^2 (\cos^2\nu - 1) + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{5!}\, a^4 \left(\cos^4\nu - \frac{10}{7} \cos^2\nu + \frac{3}{7} \right) + \cdots,$$

so folgt

$$\sqrt{(\xi - h)^2 + r^2} - \sqrt{(\xi + h)^2 + r^2} = - \frac{2 h \xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} (1 + R).$$

Construirt man (Fig. 9, a. f. S.) um einen Punkt der ebenen Stromcurve einen Kreis mit dem Radius h, dessen Ebene senkrecht zur Stromebene steht, und führt denselben mit seinem Mittelpunkte längs der Stromcurve entlang, während seine Ebene immer zur Stromfläche senkrecht bleibt, so erhält man alsdann einen Ring. Für alle Punkte, welche ausserhalb des Ringes gelegen sind, ist die Bedingung

Fig. 9.



$$\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} < 1$$

erfüllt. Die Formeln (5) nehmen daher für alle im Aussenraum vom Ringe gelegenen Punkte die Gestalt an

$$V' = -\frac{2\pi i}{2h}\left[\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}\right] - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}(1 + R_1),$$

$$(6) \quad V' = -i\xi\left[\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_2^2}}(1 + R_2) - \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}(1 + R_1)\right],$$

$$V' = -\frac{\pi i}{2h}\left[\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}\right] - i\xi \int_{v_0}^{v_0 + \pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}(1 + R_1),$$

wobei R_1 und R_2 die Werthe von R bedeuten, wenn für r: r_1 resp. r_2 gesetzt wird.

Im ersten Fall, wo der Fusspunkt des Perpendikels innerhalb der Stromfläche liegt, unterscheiden wir noch die beiden Unterfälle: α) Der Einheitspol liegt ausserhalb der Doppelfläche oder auf einer der beiden Grenzflächen, dann ist $-h \geqq \xi \geqq h$, β) der Einheitspol liegt im Inneren der Doppelfläche, dann ist $-h < \xi < h$.

Im Falle α) findet sich

$$\frac{1}{2h}\left[\sqrt{(\xi - h)^2} - \sqrt{(\xi + h)^2}\right] = \frac{\sqrt{\xi^2}}{2h}\left[\sqrt{\left(1 - \frac{h}{\xi}\right)^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{h}{\xi}\right)^2}\right]$$

oder da $-h \geqq \xi \geqq h$ ist und in Folge davon $1 - \frac{h}{\xi}$ und $1 + \frac{h}{\xi}$ stets positive Grössen sind:

$$\frac{1}{2h}\left[\sqrt{(\xi-h)^2}-\sqrt{(\xi+h)^2}\right]=\frac{\sqrt{\xi^2}}{2h}\left[1-\frac{h}{\xi}-\left(1+\frac{h}{\xi}\right)\right]$$
$$=-\frac{\sqrt{\xi^2}}{\xi}=-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}.$$

Im Falle β) dagegen hat man

$$\frac{1}{2h}\left[\sqrt{(\xi-h)^2}-\sqrt{(\xi+h)^2}\right]=\frac{h}{2h}\left[\sqrt{\left(\frac{\xi}{h}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{\xi}{h}+1\right)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(1-\frac{\xi}{h}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\frac{\xi}{h}\right)^2}\right]$$

Nun ist $-h<\xi<h$, und folglich sind $1-\frac{\xi}{h}$ und $1+\frac{\xi}{h}$ stets positive Grössen, mithin folgt

$$\frac{1}{2h}\left[\sqrt{(\xi-h)^2}-\sqrt{(\xi+h)^2}\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\xi}{h}-\left(1+\frac{\xi}{h}\right)\right]=-\frac{\xi}{h}.$$

Fällt der Fusspunkt des Perpendikels in die Stromcurve, so folgt, weil wir voraussetzen, dass für alle Punkte der Stromcurve $\frac{h}{\sqrt{\xi^2+r_1^2}}<1$ ist, und in diesem Falle der kleinste Werth, den r_1 annehmen kann, null ist, dass

$$\sqrt{\xi^2}>h \text{ oder } -h>\xi>+h$$

sein muss. In der dritten Gleichung (6) ist demnach stets

$$\frac{1}{2h}\left[\sqrt{(\xi-h)^2}-\sqrt{(\xi+h)^2}\right]=-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}$$

zu setzen.

Man erhält hiernach an Stelle der ersten Gleichung (6), indem man noch die Ausdrücke 1), 2), 3) für das Potential des Stromes in Rücksicht zieht

$$(7)\quad -h\geqq\xi\geqq h\quad V'=2\pi i\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}-i\xi\int_0^{2\pi}\frac{dv}{\sqrt{\xi^2+r_1^2}}(1+R_1)$$
$$=V-i\xi\int_0^{2\pi}\frac{R_1\,dv}{\sqrt{\xi^2+r_1^2}}.$$

$$(8)\quad -h < \xi < h \quad V' = 2\pi i \frac{\xi}{h} - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} (1 + R_1)$$

$$= V + 2\pi i \left(\frac{\xi}{h} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \right) - i\xi \int_0^{2\pi} \frac{R_1\, dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

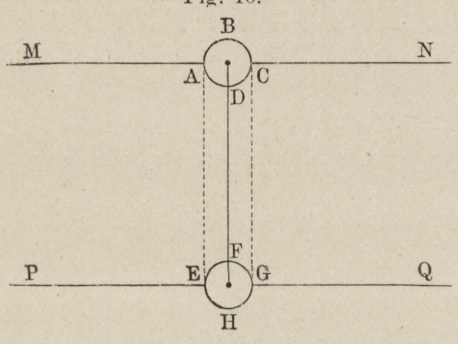
Ferner geben die beiden letzten Gleichungen (6)

$$(9)\qquad V' = V - i\xi \left[\int_{v_1}^{v_2} \frac{R_2\, dv}{\sqrt{\xi^2 + r_2^2}} - \int_{v_1}^{v_2} \frac{R_1\, dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}} \right].$$

$$(10)\qquad V' = V - i\xi \int_{v_0}^{v_0 + \pi} \frac{R_1\, dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Um die Resultate dieser Betrachtungen übersichtlich aussprechen zu können, ziehen wir durch die einzelnen Punkte der Stromcurve Linien, welche zu der Stromfläche senkrecht stehen. Dieselben bilden in ihrer Gesammtheit einen Cylinder $MNPQ$. In Fig. 10 wird die Doppelfläche durch AE und CG dargestellt. Die Kreisflächen $ABCD$ und $EFGH$ vom Durchmesser $2h$ sind Durchschnitte des Ringes, welcher die Stromcurve umgiebt.

Fig. 10.



Das Potential V des Stromes lässt sich dann durch das Potential V' der zugehörigen Doppelfläche auf folgende Weise ausdrücken.

1. Liegt der Einheitspol im Innenraume des Cylinders, $MNPQ$, aber im Aussenraume der Doppelfläche $AECG$, so ist

$$V = V' + i\xi \int_0^{2\pi} \frac{R_1\, dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Dieselbe Formel gilt auch noch, wenn der Einheitspol in eine der Begrenzungsflächen AE oder CG selbst zu liegen kommt.

2. Liegt der Einheitspol im Innern der Doppelfläche, aber im Aussenraume des Ringes, so hat man

$$V = V' - 2\pi i\left(\frac{\xi}{h} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}\right) + i\xi\int_0^{2\pi}\frac{R_1\,dv}{\sqrt{\xi_1^2 + r_1^2}}.$$

3. Liegt der Einheitspol im Aussenraume sowohl des Cylinders als auch des Ringes, so ist

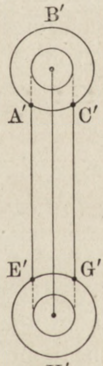
$$V = V' + i\xi\left[\int_{v_1}^{v_2}\frac{R_2\,dv}{\sqrt{\xi^2 + r_2^2}} - \int_{v_1}^{v_2}\frac{R_1\,dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}\right].$$

4. Liegt der Einheitspol in der Cylinderfläche, aber im Aussenraume des Ringes, so ist

$$V = V' + i\xi\int_{v_0}^{v_0+\pi}\frac{R_1\,dv}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Von diesen strengen Formeln würde man Gebrauch zu machen haben, wenn es sich z. B. darum handelt, das Potential einer Spule mit gerader Achse zu bestimmen, deren Windungen einen merklichen Abstand von einander besitzen, oder bei welcher Drähte mit dicker Umspinnung verwandt wurden.

Fig. 11.



Ist $\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}$ für alle Punkte der Stromcurve so klein, dass das Quadrat gegen 1 verschwindet, oder, was dasselbe ist, lässt man den Einheitspol nur so nahe an die Stromcurve heranrücken, dass für seinen kürzesten Abstand von der Stromcurve $\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}\right)^2$ gegen 1 verschwindet, so ist auch R verschwindend klein und sämmtliche Zusatzglieder, welche R enthalten, fallen aus den obigen Formeln fort.

Construirt man, Fig. 11, zu dem Ringe mit dem kreisförmigen Querschnitt vom Radius h einen concentrischen Ring $A' B' C'$, $E' G' H'$ mit kreisförmigem Querschnitt von einem solchen Radius λ, dass $\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$ gegen 1 als verschwindend betrachtet werden darf, so gilt das Theorem: Für alle Punkte, welche im Aussenraum des Ringes mit dem Querschnitt vom Radius λ und zugleich im Aussenraume der Doppelfläche, respective auf einer der Begrenzungsflächen derselben gelegen sind, ist das Potential des Stromes demjenigen der Doppelfläche gleich, also

(11) $$V = V'.$$

Für alle Punkte dagegen, welche im Aussenraume des Ringes mit dem Querschnitt vom Radius λ und zugleich im Innenraume der Doppelfläche gelegen sind, ist

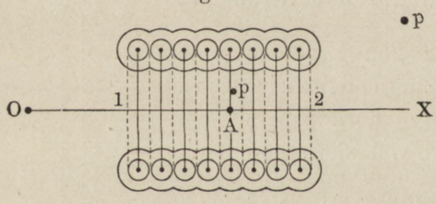
(12) $$V = V' - 2\pi i \left(\frac{\xi}{h} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}\right).$$

Potential einer Spule mit geradliniger Achse.

Die obigen Formeln finden unmittelbare Anwendung, wenn es sich darum handelt, das Potential einer Spule mit geradliniger Achse auf einen ausserhalb oder innerhalb derselben gelegenen Einheitspol zu bestimmen.

Es sei, Fig. 12, OX die Achse einer Spule mit n-Umwindungen von der Steighöhe $2h$. Die Wirkung der Spule lässt sich ersetzen durch die Wirkung von n geschlossenen, ebenen Strömen, welche parallele und zur Spulenachse senkrechte Stromflächen vom Abstande $2h$ besitzen. Die Lage der Stromflächen werde durch ihren Abstand ξ von einem beliebigen, auf der Achse gelegenen Punkt O bestimmt, und ferner falle die Richtung der Achse OX mit der Richtung der positiven Normale zusammen.

Fig. 12.



Wir construiren zu jeder Stromcurve die zugehörige Doppelfläche mit dem Flächenabstand $2h$ und bezeichnen die am negativen und positiven Ende der Spule gelegenen Flächen, welche mit magnetischer Masse von der Dichte $-\frac{i}{2h}$ und $+\frac{i}{2h}$ belegt sind, durch 1 und 2. Der Abstand der Flächen 1 und 2 werde die Länge der Spule genannt und mit l bezeichnet. Endlich umgeben wir jede Stromcurve mit einem Ringe von kreisförmigem

Querschnitt, so dass die Stromcurve die Mittelpunkte der Querschnitte enthält; dabei sei der Radius λ des Querschnittes so gewählt, dass $\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$ gegen 1 verschwindet.

Es liege nun zunächst der Einheitspol im Aussenraume der Ringe und zugleich im Aussenraume der Spule oder auf einer der Grenzflächen 1 oder 2, dann darf jeder Strom durch seine Doppelfläche ersetzt werden. Man erhält dann, weil die zusammenfallenden Flächen sich in ihren Wirkungen aufheben, für das Potential Ω der Spule

$$(1) \qquad \Omega = U_1 + U_2,$$

wo U_1 und U_2 die Potentiale der belegten Endflächen 1 und 2 auf den Einheitspol bedeuten.

Beachtet man, dass

$$l = 2h \,.\, n, \quad \text{also } \frac{1}{2h} = \frac{n}{l} = \nu$$

ist, wenn ν die Anzahl Ströme bezeichnet, welche auf die Längeneinheit der Achse kommen, so hat man

$$U_1 = -i\nu\int\frac{d\omega}{e_1} \qquad U_2 = +i\nu\int\frac{d\omega}{e_2}.$$

Darin sind e_1 und e_2 die Entfernungen eines Flächenelementes $d\omega$ der Fläche 1 respective 2 vom Einheitspol.

Liegt zweitens der Einheitspol im Aussenraume der Ringe, aber im Innenraume der Spule, so können wie vorher die einzelnen Ströme durch ihre Doppelflächen ersetzt werden, mit Ausnahme desjenigen Stromes, innerhalb dessen Doppelfläche der Einheitspol zu liegen kommt.

Ist, Fig. 12, $OA = a$ der Abstand dieses Stromes vom Anfangspunkte O, so ergiebt sich sein Potential auf den Einheitspol nach (12) S. 122, indem daselbst für $\xi : \xi - a$ gesetzt wird:

$$V = V' - 2\pi i\left(\frac{\xi - a}{h} - \frac{\xi - a}{\sqrt{(\xi - a)^2}}\right).$$

Für die Summe der Potentiale aller Ströme, d. h. für das Potential der Spule findet sich jetzt

(2) $$\Omega = U_1 + U_2 - 2\pi i\left(\frac{\xi - a}{h} - \frac{\xi - a}{\sqrt{(\xi - a)^2}}\right).$$

Es ist $\frac{\xi - a}{\sqrt{(\xi - a)^2}} = \pm 1$, je nachdem der Einheitspol auf der positiven oder negativen Seite der Stromfläche des Stromes a gelegen ist. Hiernach kann man auch schreiben

$$\Omega = U_1 + U_2 - 2\pi i \frac{\xi}{h} + 2\pi i\left(\pm 1 + \frac{a}{h}\right).$$

Das letzte Glied ist eine Constante. Führt man für $\frac{1}{h}$ seinen Werth 2ν ein, so ergiebt sich schliesslich für einen Punkt im Innern der Spule

(3) $$\Omega = U_1 + U_2 - 4\pi i \nu \xi + \text{Const.}$$

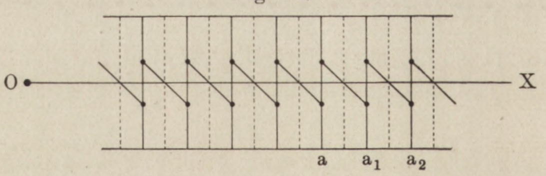
Setzt sich die Spule nach beiden Seiten in das Unendliche fort, so erhält man für das Potential Ω' in einem äusseren und inneren Punkt nach (13) und (14)

$$\Omega' = 0 \quad \text{und} \quad \Omega' = 2\pi i\left(\frac{\xi - a}{\sqrt{(\xi - a)^2}} - \frac{\xi - a}{h}\right).$$

Lässt man den Einheitspol innerhalb der Doppelfläche des Stromes a von der negativen zur positiven Grenzfläche wandern, so ist

$$\begin{array}{lll} \text{für } & \xi = a - h & \Omega' = 2\pi i(-1 + 1) = 0 \\ & \xi = a_{-0} & \Omega' = -2\pi i \\ & \xi = a_{+0} & \Omega' = +2\pi i \\ & \xi = a + h & \Omega' = 2\pi i(+1 - 1) = 0. \end{array}$$

Fig. 13.



Trägt man Ω' als Ordinate zu den Abscissen ξ graphisch auf, Fig. 13, so sieht man, dass das Potential von $\xi = a - h$ bis

$\xi = a$ längs einer geraden Linie von 0 bis $- 2\pi i$ abnimmt, an der Stelle $\xi = a$ eine sprungweise Aenderung von $- 2\pi i$ zu $+ 2\pi i$ erleidet und sodann von $\xi = a$ bis $\xi = a + h$ längs einer der vorigen parallelen Linie wieder von $+ 2\pi i$ bis auf 0 abnimmt. Dasselbe wiederholt sich, wenn der Einheitspol in das Gebiet des Stromes a_1, a_2 ... eintritt. Lässt man daher den Einheitspol parallel zur Achse der Spule in der Richtung vom negativen zum positiven Ende fortwandern, so erleidet das Potential bei jedem Durchgange durch eine Stromfläche einen Sprung von $4\pi i$. Bei dem Durchgang durch die Begrenzungsflächen der einzelnen Doppelflächen nimmt dagegen das Potential den Werth null an. Die Tangente des Winkels, unter welchem die Linien, welche die Aenderungen des Potentials darstellen, die Achse schneiden, ist constant und gleich $- \frac{2\pi i}{h}$ und hierin liegt der Grund, dass die zur Achse OX parallel gerichtete Kraft

$$X = - \frac{\partial \Omega'}{\partial \xi} = 4\pi i v$$

für jede Abscisse ξ constant ist.