A. BRASILIER

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE COMMERCIALE

4e Edition

PARIS
MASSON & Cie

A. BRASILIER

Traité d'Arithmétique Commerciale

DU MÊME AUTEUR :

Théorie mathématique des placements et emprunts à long terme. 2 volumes gr. in-8 avec tableaux.

PREMIÈRE PARTIE. — Annuité de placement et d'amortissement. Emprunts publics. Service des titres. Établissements de crédit. 10 fr.

DEUXIÈME PARTIE. — Négociation des titres et des valeurs mobilières. Prix et parités mathématiques. Institutions de prévoyance. 10 fr.

10995-00. — CORBEIL. Imprimerie ED. CRÉTÉ.

TRAITÉ

D'ARITHMÉTIQUE

COMMERCIALE

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE
COMMERCIALE

PAR

A. BRASILIER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
PROFESSEUR A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE
ET A L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

Avec figures dans le texte

QUATRIÈME ÉDITION

PARIS
MASSON ET C^IE, ÉDITEURS
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1901

AVANT-PROPOS DE LA QUATRIÈME ÉDITION

Cette quatrième édition ne se distingue des précédentes que par quelques modifications, dont les principales sont relatives aux monnaies étrangères, à la négociation des rentes d'État, et aux cotes des changes.

Les valeurs intrinsèques des principales unités de monnaies étrangères sont établies d'après les lois monétaires actuellement en vigueur.

Par la réforme de la Valuta, l'Autriche a adopté l'étalon d'or et, pour unité monétaire, la couronne, qui se divise en 100 hellers. Les cours des changes qui se rapportaient au florin s'appliquent actuellement à la couronne.

A part les modifications nécessitées par les changements dans quelques systèmes monétaires, le plan de l'ouvrage est conservé. Nous continuons de faire appel au concours des maîtres et professeurs pour propager les méthodes de calcul rapide et de calcul mental.

A. B.

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE
COMMERCIALE

ADDITION

L'addition, la plus simple, en théorie, de toutes les opérations, ne laisse pas que de présenter quelque difficulté d'exécution, lorsqu'elle s'applique, comme il arrive fréquemment dans les comptes de la banque et du commerce, à de longues suites de nombres écrits avec beaucoup de chiffres, exprimant, parfois, depuis des millions jusqu'à des centimes, et se succédant suivant des colonnes qui occupent des pages entières des livres du négociant ou du comptable.

Quelques soins, d'un ordre tout matériel, sont d'abord indispensables ; la netteté de l'écriture, la formation régulière des chiffres, leur alignement correct, surtout suivant les colonnes verticales, sont les premières conditions requises pour le succès de ces longues opérations. Le calculateur qui veut aquérir les qualités exigées pour la tenue des livres doit se livrer à de nombreux exercices d'addition. Nous donnons ici, comme sujets d'exercices, des bilans de la Banque de France. Il est utile de noter, pour chaque addition du même genre, le temps employé ; de chercher, en même temps que la justesse, la rapidité d'exécution. « Time is money. »

BANQUE DE FRANCE

SITUATION

AU 2 NOV.

Actif

Encaisse de la Banque	2.247.206.372 27
Effets échus hier à recevoir ce jour	1.149.802 01
Portefeuille de Paris { Effets sur Paris	312.382.863 09
Portefeuille de Paris { Obligations du Trésor, à court terme	» »
Portefeuille des succursales	411.683.455 »
Avances sur lingots et monnaies à Paris	9.740.100 »
Avances sur lingots et monnaies dans les succursales	307.000 »
Avances sur titres à Paris	129.529.763 »
Avances sur titres dans les succursales	136.907.007 »
Avances à l'État (conventions des 10 juin 1857 et 29 mars 1878)	140.000.000 »
Rentes de la réserve :	
Loi du 17 mai 1834	10.000.000 »
Ex-banques départementales	2.980.750 14
Rentes disponibles	99.626.802 75
Rentes immobilisées (lois du 9 juin 1857) (compris 9 millions 125.000 de la réserve)	100.000.000 »
Hôtel et mobilier de la Banque	4.000.000 »
Immeubles des succursales	6.675.167 »
Dépenses d'administration de la Banque et des succursales	5.547.304 65
Emploi de la réserve spéciale	9 907.444 16
Divers	42.033.325 26
	3.672.676.656 33

ET SUCCURSALES

HEBDOMADAIRE

1888 (matin)

Passif.

Capital de la Banque	182.500.000 »
Bénéfices en addition au capital (art. 8, loi du 9 juin 1857)	8.002.313 54
Réserves mobilières :	
Loi du 17 mai 1834	10.000.000 »
Ex-banques départementales	2.980.750 14
Loi du 9 juin 1857	9.125.000 »
Réserve immobilière de la Banque	4.000.000 »
Réserve spéciale	9.907.444 16
Billets au porteur en circulation (Banque et succursales)	2.656.470.725 »
Arrérages de valeurs transférées ou déposées	9.784.128 73
Billets à ordre et récépissés payables à Paris et dans les succursales	30.764.082 05
Compte courant du Trésor, créditeur	395.173.774 96
Comptes courants de Paris	255.376.156 42
Comptes courants dans les succursales	57.563.005 »
Dividendes à payer	1.973.934 75
Escomptes et intérêts divers à Paris et dans les succursales	9.027.515 93
Réescompte du dernier semestre à Paris et dans les succursales	969.992 24
Divers	30.057.833 41
	3.672.676.656 33

Certifié conforme aux écritures :

Le Gouverneur de la Banque de France,

J. MAGNIN.

BANQUE DE FRANCE

SITUATION

Actif.		29 NOV. 1888 (matin)		22 NOV. 1888 (matin)
Encaisse de la Banque.........		2.149.496.745 18		2.256.646.727 14
Effets échus hier à recevoir ce jour.........................		58.910 38		38.372 74
Portefeuille de Paris — Effets sur Paris....		329.991.604 19		272.329.183 54
Portefeuille de Paris — Obligations du Trésor, à court terme		» »		» »
Portefeuille des succursales....		380.186.549 »		349.482.529 »
Avances sur lingots et monnaies à Paris......................		9.885.000 »		9.844.900 »
Avances sur lingots et monnaies dans les succursales.........		317.000 »		317.000 »
Avances sur titres à Paris......		120.535.053 16		120.873.668 41
Avances sur titres dans les succursales......................		139.217.078 »		142.527.899 »
Avances à l'État (conventions des 10 juin 1857, 29 mars 1878 et 30 mars 1888................		140.000.000 »		140.000.000 »
Rentes de la réserve :				
Loi du 17 mai 1834........	(*a*)	10.000.000 »	(*a*)	10.000.000 »
Ex-banques départementales	(*b*)	2.980.750 14	(*b*)	2.980.750 14
Rentes disponibles............		99.626.802 75		90.626.802 75
Rentes immobilisées (loi du 9 juin 1857 (compris 9.125.000 de la réserve).....................	(*c*)	100.000.000 »	(*c*)	100 000.000 »
Hôtel et mobilier de la Banque.	(*d*)	4.000.000 »	(*d*)	4.000.000 »
Immeubles des succursales....		9,601.899 »		9.619.439 »
Dépenses d'administration de la Banque et des succursales...		6.014.229 95		5.643.326 55
Emploi de la réserve spéciale..	(*e*)	9.907.444 16	(*e*)	9.907.444 16
Divers......................		44.033.511 24		45.332.154 95
		3.656.852.577 15		3.579.170.197 38

ET SUCCURSALES

HEBDOMADAIRE

Passif.		29 NOV. 1888 (matin)		22 NOV. 1888 (matin)
Capital de la Banque...........		182.500.000 »		182.500.000 »
Bénéfices en addition au capital (art. 3, loi du 9 juin 1857.....		6.002.313 54		8.002.313 54
Loi du 17 mai 1834........	(*a*)	10.000.000 »	(*a*)	100.000.000 »
Ex-banques départementales	(*b*)	2.980.750 14	(*b*)	2.980.750 14
Loi du 9 juin 1857.........	(*c*)	9.125.000 »	(*c*)	9.125.000 »
Réserves immobilières de la Banque....................	(*d*)	4.000.000 »	(*d*)	4.000.000 »
Réserve spéciale..............	(*e*)	9.907.444 10	(*e*)	9.907.444 16
Billets au porteur en circulation (Banque et succursales)......		2.623.128.610 »		2.594.572.075 »
Arrérages de valeurs transférées ou déposées.................		9.749.929 21		11.604.785 04
Billets à ordre et récépissés payables à Paris et dans les succursales.................		28.916.643 47		28.380.811 69
Compte courant du Trésor, créditeur......................		357.055.877 66		362.308.900 14
Comptes courants dans Paris...		310.515.503 75		267.367.734 21
Comptes courants dans les succursales..................		52.945.691 »		47.486.850 »
Dividendes à payer............		1.662.208 75		1.734.431 75
Escompte et intérêts divers à Paris et dans les succursales.		11.790.767.14		11.145.453 55
Réescompte du dernier semestre à Paris et dans les succursales.		969.992 24		969.992 24
Divers.........		32.601.846 15		27.083.655 92
		3.655.852.577 15		3.579.170.197 38

Certifié conforme aux écritures :

Le Gouverneur de la Banque de France,

J. MAGNIN.

Il n'est pas moins important de s'exercer à effectuer de tête l'addition de plusieurs nombres de deux ou trois chiffres. Il est bon, dans ces opérations de calcul mental, de porter l'attention d'abord sur les plus hautes unités, c'est-à-dire sur les dizaines ou les centaines. Ainsi on verra immédiatement que 73 et 85 font 158, en commençant par fixer l'attention sur 70 et 80, dont la somme est 150, et joignant vivement à ce premier résultat la somme des unités simples. Lorsqu'on aperçoit que la somme des unités simples atteint ou dépasse 10, on a soin de passer à la dizaine immédiatement supérieure : ainsi, pour faire l'addition de 78 et 87, on prononce immédiatement cent soixante, au lieu de cent cinquante, et l'on fera suivre de 5, chiffre des unités de la somme des unités simples : 165. Autre exemple : 158 et 165 ? 323.

En fixant l'attention sur 15 et 16 on voit pour somme 31 (dizaines) soit 310, mais à cause de 8 et 5, on passe vivement à 320, et finalement à 323.

Quelques nombres de dizaines offrent des facilités particulières : ainsi, 40 et 60 font cent ; tout nombre de deux chiffres commençant par quarante, additionné avec un nombre de deux chiffres commençant par soixante, donnera cent suivi de la somme des unités, exemple :

48 et 75 = 123
62 et 49 = 111

Après avoir acquis l'habitude d'additionner vivement des nombres de deux chiffres, on continue les exercices avec des nombres de 3 ou 4 chiffres, des nombres décimaux et des nombres fractionnaires.

Exemples :

657 et 843 = 1 500
442 et 769 = 1 211
1 248 et 725 = 1 973

$13^{fr},75$ et $28^{fr},35$ = $42^{fr},10$
67 ,25 et 97 ,80 = 165 ,05
156 95 et 98, 75 = 255 ,70

$$12\frac{1}{2} \text{ et } 25\frac{3}{4} = 38\frac{1}{4}$$

$$26\frac{2}{3} \text{ et } 47\frac{1}{4} = 73\frac{11}{12}$$

Abréviations et simplifications de l'Addition dans certains cas particuliers.

Somme des **n** *premiers nombres entiers consécutifs.*

La somme S des n premiers nombres entiers $1+2+3+4\ldots+n$, que l'on rencontre assez souvent dans les questions financières, est donnée par la formule :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour démontrer cette formule, imaginons que l'on dispose les nombres proposés, comme pour les additionner suivant la règle habituelle, et que l'on forme 2 colonnes égales comprenant chacune les nombres en question, l'une dans l'ordre croissant, de 1 à n, l'autre dans l'ordre décroissant, de n à 1 ; on obtiendra le tableau suivant :

	1	n	1re ligne	$n+1$
	2	$n-1$	2e »	$n+1$
	3	$n-2$	3e »	$n+1$
	.	.	.	
	.	.	.	
	.	.	.	
	n	1	ne »	$n+1$
Totaux..	S	S		n fois $(n+1)$

Chaque colonne donne pour somme S ; les deux colonnes donnent 2 S ; mais au lieu d'additionner les éléments du tableau par colonne, on peut les grouper d'abord par lignes, et faire le total des sommes partielles. Chaque ligne donne $n+1$, et puisqu'il y a n lignes, le total est $n(n+1)$.

Ainsi $$2S = n(n+1)$$

donc $$S = \frac{n(n+1)}{2};$$

on peut encore écrire $$S = \frac{n^2+n}{2}$$

EXEMPLES :

Somme des 20 premiers nombres? $\frac{20 \times 21}{2} = 210$

des 43 $\frac{43 \times 44}{2} = 946$

des 1 000 $\frac{1\,000 \times 1\,001}{2} = 500\,500$

Application. — *Un négociant a, pendant 20 années consécutives, prélevé chaque année sur ses bénéfices une somme fixe de 2000 francs qu'il plaçait à 5 °/₀. Quel est le total des intérêts simples qu'il a recueillis jusqu'à la fin de l'année qui suit le 20ᵉ placement ?*

La rente annuelle, à 5 °/₀, du capital 2000, est 100 francs ; elle peut être représentée, pour simplifier, par 1 billet de cent francs. Si nous comprenons dans le total demandé les intérêts échus à la fin de l'année qui suit le 20ᵉ placement, nous pouvons détailler le compte comme il suit :

Le 1ᵉʳ placᵗ a donné	20 termes de rente	ou 20 billets	de 100 fr.
Le 2ᵉ	19	19	—
Le 3ᵉ	18	18	—
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
Le 19ᵉ	2	2	—
Le 20ᵉ	1	1	—

Nombre total des billets de 100 francs. $\frac{20 \times 21}{2} = 210$

Le total des intérêts a donc été $210 \times 100 = 21\,000$ francs.

Somme des **n** *premiers nombres impairs.*

La somme des n premiers nombres impairs est donnée par la formule $S = n^2$, c'est-à-dire qu'elle est égale au carré du nombre n qui indique combien de termes on prend dans la liste ordonnée des nombres impairs 1, 3, 5, etc.

Cherchons d'abord le n^e nombre impair. Considérons la suite de tous les nombres entiers consécutifs, et groupons les nombres deux par deux, 1, 2 | 3, 4 | 5, 6 |

Quand nous aurons formé n groupes de deux nombres, nous aurons $2n$ nombres, le dernier sera $2n$, l'avant-dernier sera $2n - 1$.

Le nombre impair $2n - 1$ commence le n^e groupe ; c'est le n^e nombre impair, puisqu'il y a un nombre impair au commencement de chaque groupe.

Ainsi le 1er nombre impair est 1, le n^e est $2n - 1$.

Cela posé, nous pourrons chercher à les additionner par un artifice analogue à celui qui nous a servi pour les nombres entiers consécutifs.

	1	$2n - 1$	1re ligne	$2n$
	3	$2n - 3$	2e	$2n$
	5	$2n - 5$	3e	$2n$
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	$2n - 1$	1	n^e	$2n$
TOTAUX. . .	S	S		n fois $2n$

$$2S = 2n \times n$$
$$S = n \times n = n^2$$

EXEMPLES :

Somme des	20	premiers	nombres	impairs ?	$20^2 = 400$
»	100	»	»	»	$100^2 = 10\,000$
»	213	»	»	»	$213^2 = 45\,369$

Somme des **n** *premiers nombres pairs.*

La somme des n premiers nombres pairs $2+4+6+\ldots+2n$ est donnée par la formule

$$S = n(n+1)$$

On pourrait l'établir directement, comme pour la somme des n premiers nombres. On peut encore remarquer que les n premiers nombres pairs sont les n premiers multiples de 2, c'est-à-dire encore les n premiers nombres doublés; chaque terme étant doublé, la somme des termes se trouve évidemment doublée.

La somme des n premiers nombres entiers étant $\frac{n(n+1)}{2}$, la somme des n premiers nombres pairs est $n(n+1)$.

Somme des **n** *premiers multiples d'un nombre* **a**.

La somme des n premiers nombres entiers est $\frac{n(n+1)}{2}$, c'est-à-dire que la collection de 1 unité $+$ 2 unités $+\ldots+$ n unités équivaut à la collection d'un nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ d'unités égales.

Si l'on prend pour unité le nombre a, on reconnaîtra que la somme $1a+2a+3a+\ldots+na$ équivaut à $\frac{n(n+1)}{2}.a$.

La somme des n premiers nombres pairs peut être considérée comme un cas particulier de cette proposition générale.

Somme des termes d'une progression arithmétique.

La somme S des termes d'une progression arithmétique s'obtient par l'application de la formule

$$S = \frac{(a+l).n}{2}$$

dans laquelle a désigne le 1er terme, l le dernier, n le nombre des termes.

On trouve cette formule en raisonnant comme nous l'avons fait pour trouver la somme des n premiers nombres. Si l'on dispose les nombres proposés sur deux colonnes qui ne diffèrent que par l'ordre, on aura le tableau suivant :

	a	l.	1re ligne	$a+l$
	b	k.	2e »	$a+l$
	c	h.	3e »	$a+l$
	.			
	.			
	.			
	h	c.	$(n-2)^e$	$a+l$
	k	b.	$(n-1)^e$	$a+l$
	l.	a.	n^e	$a+l$
Totaux	S	S		n fois $(a+l)$

Chaque ligne horizontale donne pour somme $(a+l)$, car dans la 1re colonne, à mesure que l'on passe d'une ligne à l'autre, on ajoute la raison r, et dans la 2e colonne on retranche la même quantité r; l'augmentation qui se produit d'un côté est exactement compensée par la diminution qui se produit de l'autre côté, de sorte que dans chaque ligne la somme des deux nombres reste constante, égale à celle des deux extrêmes $(a+l)$.

Par conséquent $2\,S = (a+l).n$

et
$$S = \frac{(a+l).n}{2}$$

Exemple. — Calculer la somme $100 + 107 + 114 + 121 + \ldots + 310$.

Chacun des nombres proposés surpasse le précédent de 7 unités; ces nombres forment donc une progression arithmétique, et leur somme peut être obtenue rapidement par l'application de la formule ci-dessus. Le dernier terme 310 est égal au premier 100, auquel on a ajouté 30 fois 7; on en conclut aisément que le nombre des termes est 31.

La somme est donc donnée par la formule numérique

$$S = \frac{410 \times 31}{2} = 6\,355$$

Problème. — *On donne à un ouvrier, pour creuser un puits de 41 mètres de profondeur :*

3 francs pour le 1^{er} mètre.
3 fr. 25 — 2^{e} —
3 fr. 50 — 3^{e} —

et ainsi de suite, en augmentant de 0,25 par mètre de profondeur. Quel est le prix de l'ouvrage entier?

Chaque nouveau mètre exécuté coûte 3 francs, plus autant de fois 0,25 qu'il y a de mètres au-dessus. Le 41^{e} mètre coûte 3 francs, plus $0,25 \times 40$, en tout 13 francs.

Le prix de l'ouvrage entier sera donc

$$\frac{(3 + 13) \times 41}{2} = 328 \text{ francs.}$$

Addition rapide de deux fractions.

Pour additionner rapidement 2 fractions, distinguons deux cas : 1° les deux dénominateurs sont premiers entre eux; 2° les deux dénominateurs admettent quelque facteur commun.

I. Les deux dénominateurs sont premiers entre eux.

Alors le dénominateur de la somme est le produit des deux dénominateurs proposés; le numérateur est la somme des deux produits obtenus en multipliant chacun des numérateurs par le dénominateur de l'autre fraction; il faut, autant que possible, effectuer et additionner ces deux produits sans écrire d'autre détail que le résultat de leur addition.

Exemples :

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6} \text{ ou } 1\frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12} \text{ ou } 1\frac{5}{12}$$

$$\frac{8}{11}+\frac{11}{12}=\frac{217}{132} \text{ ou } 1\frac{85}{132}$$

II. Les deux dénominateurs admettent quelque facteur commun. Si le plus grand est multiple du plus petit, c'est le plus grand que l'on prend pour dénominateur commun.

Exemples :

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{13}{8} \text{ ou } 1\frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

Dans le cas général, on prend pour dénominateur commun le plus petit multiple commun aux deux dénominateurs.

Exemples :

$$\frac{11}{12}+\frac{9}{10}=\frac{109}{60} \text{ ou } 1\frac{49}{60}$$

$$\frac{5}{14}+\frac{13}{21}=\frac{41}{42}$$

Pour additionner une longue suite de fractions ordinaires, le procédé le plus expéditif consistera à les convertir en fractions décimales.

Somme des inverses des 20 premiers nombres.

$$\frac{1}{1} = 1$$
$$\frac{1}{2} = 0,5$$
$$\frac{1}{3} = 0,333\ 333\ 3333$$
$$\frac{1}{4} = 0,25$$
$$\frac{1}{5} = 0,2$$
$$\frac{1}{6} = 0,166\ 666\ 6667$$
$$\frac{1}{7} = 0,142\ 857\ 1428$$
$$\frac{1}{8} = 0,125$$
$$\frac{1}{9} = 0,111\ 111\ 1111$$
$$\frac{1}{10} = 0,1$$
$$\frac{1}{11} = 0,090\ 909\ 0909$$
$$\frac{1}{12} = 0,083\ 333\ 3333$$
$$\frac{1}{13} = 0,076\ 923\ 0769$$
$$\frac{1}{14} = 0,071\ 428\ 5714$$
$$\frac{1}{15} = 0,066\ 666\ 6667$$
$$\frac{1}{16} = 0,062\ 5$$
$$\frac{1}{17} = 0,058\ 823\ 5294$$
$$\frac{1}{18} = 0,055\ 555\ 5555$$
$$\frac{1}{19} = 0,052\ 631\ 5789$$
$$\frac{1}{20} = 0,05$$

TOTAL............... 3,597 739 6569

SOUSTRACTION

La soustraction, ne s'appliquant en général qu'à deux nombres, n'est jamais une opération bien compliquée, et prête peu aux simplifications et abréviations.

Certaines soustractions sont facilitées par la considération des compléments.

Étant donnée une fraction décimale $f = 0,7385346$, on nomme complément de cette fraction à l'unité la fraction qu'il faut ajouter à la proposée pour obtenir une somme égale à 1. Pour écrire le complément d'une fraction, il suffit d'écrire pour chaque chiffre de la fraction donnée le chiffre complémentaire à 9, sauf pour le dernier dont on prend le complément à 10.

Fraction proposée $f = 0,7385346$
complément $1 - f = 0,2614654$.

En général, on nomme complément d'un nombre proposé le nombre qu'il faut y ajouter pour former une somme égale à l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres à la partie entière du nombre.

Ainsi le complément de	46,87	
c'est le nombre	53,13	
qui, avec le proposé, donne	100	pour somme.
Le complément de	45 857,635	
serait	54 142,365	
somme	100 000	

Dans ces différents exemples, on a pu former immédiatement le complément en écrivant pour chaque chiffre du nombre donné le complément à 9, sauf pour le dernier que l'on complète à 10.

De	10 000 000	
soustraire	54 657,823	
le résultat	9 945 342,177	s'écrit immédiatement

de gauche à droite, sans autre opération que la substitution des chiffres complémentaires au-dessous des chiffres du nombre à soustraire.

De	250 000 000
soustraire	34 663 825
résultat	215 336 175

Il suffit de retrancher, en commençant par la gauche, 3 de 24, ou ce qui revient au même, 4 de 25, et d'écrire à la suite du nombre 21 les chiffres complémentaires de ceux du nombre à soustraire.

On a parfois l'occasion de soustraire de la somme de plusieurs nombres la somme de plusieurs autres nombres. On peut, dans certains cas avec avantage, réduire ces diverses opérations à une seule addition. Remarquons d'abord que pour soustraire d'une quantité donnée un nombre décimal tel que 4,25 il suffit de soustraire d'abord 5 unités, et d'ajouter après coup 0,75, complément à l'unité de la partie décimale 0,25. Si le nombre 4,25 doit être soustrait de la somme de plusieurs nombres, on pourra ajouter à la collection des nombres proposés l'expression $\overline{5},75$ qui signifie que la somme des nombres donnés doit être augmentée de 0,75 et diminuée de 5 unités entières. Pour soustraire plusieurs nombres à la fois, il suffira de transformer chacun d'eux comme il vient d'être expliqué, et les opérations se réduiront à une seule addition.

Exemple :

De la somme des nombres :

$$\left.\begin{array}{r}14,325\\98,65\\7,856\end{array}\right\}\quad 120,831$$

soustraire la somme des nombres :

$$\left.\begin{array}{r}1,375\\4,827\\0,958\end{array}\right\}\quad 7,160$$

Résultat : 113,671

on pourra faire l'unique addition suivante :

$$\begin{array}{r} 14,325 \\ 98,65 \\ 7,856 \\ \bar{2},625 \\ \bar{5},173 \\ \bar{1},042 \\ \hline \end{array}$$

Résultat : $113,671$

AUTRE EXEMPLE :

De la somme des nombres :

$$\left.\begin{array}{r} 42\,874,85 \\ 597\,853,56 \end{array}\right\} \quad 640\,728,41$$

soustraire la somme des nombres :

$$\left.\begin{array}{r} 29\,584,75 \\ 4\,719,38 \\ 58,33 \end{array}\right\} \quad 34\,412,46$$

$$\overline{606\,315,95}$$

on peut faire l'unique addition :

$$\begin{array}{r} 42\,874,85 \\ 597\,853,56 \\ \bar{1}70\,415,25 \\ \bar{1}5\,230,62 \\ \bar{1}41,67 \\ \hline 606\,315,95 \end{array}$$

Lorsqu'il s'agit de soustraire d'un nombre unique la somme de plusieurs autres, on peut, indifféremment, soit effectuer la somme des termes soustractifs et la retrancher du premier nombre, sans écrire d'autres chiffres que ceux du résultat définitif, soit additionner les compléments avec le premier nombre.

De	654 873,25	654 873,25
soustraire	9 627,72	$\bar{1}0\,372{,}28$
	462,88	$\bar{1}\,536{,}12$
	2 579,43	$\bar{1}7\,420{,}57$
	85,75	$\bar{1}14{,}25$
	642 116,47	642 116,47

Soustraction de fractions et expressions fractionnaires.

La soustraction de deux fractions ordinaires s'effectue rapidement suivant les principes indiqués pour l'addition, en attribuant le signe *moins* au 2e terme au lieu du signe *plus*.

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{11}{12}-\frac{8}{13}=\frac{47}{156}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{3}{12}\text{ ou }\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{15}{16}-\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$$

$$\frac{7}{12}-\frac{3}{8}=\frac{5}{24}$$

Pour soustraire une expression composée d'un entier et d'une fraction, d'une autre quantité de même forme, distinguons deux cas :

1° La fraction du nombre à retrancher est inférieure à la fraction du premier nombre.

2° Elle est supérieure.

Dans le 1er cas, la soustraction s'effectue en retranchant la fraction du 2e terme de la fraction du 1er, et la partie entière du 2e de la partie entière du 1er.

Exemple : de $17\frac{2}{3}$

soustraire $9\frac{4}{7}$

Résultat : $8\frac{2}{21}$

Dans le 2ᵉ cas, on ajoute mentalement à la fraction du 1ᵉʳ terme de la soustraction une unité, et pour cela il suffit de substituer par la pensée au numérateur de la fraction un autre numérateur égal à la somme du numérateur et du dénominateur; ainsi à $\frac{3}{11}$ on substituerait $\frac{14}{11}$; et par compensation, on ajoute une unité à la partie entière du nombre à soustraire.

Exemple : de $23\frac{5}{11}$

soustraire $17\frac{7}{12}$

Résultat : $5\frac{115}{132}$

On pourrait encore soustraire 17 de 23 et retrancher de ce premier résultat l'excès de $\frac{7}{12}$ sur $\frac{5}{11}$; on aurait $6 - \frac{17}{132}$.

MULTIPLICATION

Définition. — La multiplication d'un nombre par un nombre entier a pour but de répéter le premier, nommé multiplicande, autant de fois qu'il y a d'unités dans le second, nommé multiplicateur. Les deux nombres proposés se nomment facteurs, et le résultat de l'opération se nomme produit. La multiplication par un nombre entier n'est ainsi qu'une addition abrégée, dans le cas particulier où tous les nombres à additionner sont égaux entre eux.

La multiplication d'un nombre par une fraction telle que $\frac{2}{3}$ a pour objet de trouver les $\frac{2}{3}$, d'évaluer 2 fois le tiers du multiplicande; en général, multiplier un nombre par une fraction $\frac{n}{d}$, c'est former la valeur de la fraction $\frac{n}{d}$ du multiplicande, ou encore répéter la fraction aliquote $\frac{1}{d}$ du multiplicande, indiquée par le dénominateur, autant de fois qu'il y a d'unités dans le numérateur n. Le numérateur n peut être inférieur, égal ou supérieur au dénominateur d. Le nombre donné comme multiplicateur peut être une fraction décimale ou un nombre décimal quelconque, c'est-à-dire un nombre entier de dixièmes, centièmes, millièmes, etc.

Multiplier un nombre par 0,23 c'est évaluer les 0,23 ou 23 fois la centième partie de ce nombre.

Multiplier par 1,04 c'est évaluer les 104 centièmes, ou 104 fois la centième partie du nombre; ou encore former un nombre comprenant 1 fois le multiplicande, plus les 4 centièmes du multiplicande.

Multiplier par un nombre fractionnaire tel que $2\frac{3}{4}$, c'est former un nombre comprenant 2 fois le multiplicande, plus les $\frac{3}{4}$ du même multiplicande.

Pour comprendre ces différents cas particuliers, on a donné de la multiplication la définition générale suivante :

La multiplication est une opération qui a pour objet de composer un nombre, appelé produit, avec un nombre appelé multiplicande, comme un autre nombre, appelé multiplicateur, est composé avec l'unité.

Cette définition peut être admise, à condition que l'on explique la signification précise du mot composer, qui lui-même exige une définition spéciale en matière d'arithmétique.

La définition indique-t-elle que, pour obtenir le produit de deux facteurs, il faut faire subir au multiplicande la même opération qu'il a fallu faire subir à l'unité pour avoir le multiplicateur?

Cette règle pourrait se trouver en défaut, ainsi que l'a justement observé M. Tarnier, inspecteur de l'instruction primaire à Paris, dans les « Erreurs scolaires. » S'agit-il, par exemple, de multiplier 25 par $\sqrt{4}$? Conviendrait-il de dire : pour former le multiplicateur $\sqrt{4}$, on a répété l'unité 4 fois, on a extrait la racine carrée du résultat ; pour former le produit demandé, répétons le multiplicande 4 fois, 25×4, et du résultat 100 extrayons la racine carrée, c'est 10? Résultat absolument faux.

Quel est donc le vrai sens de la multiplication par $\sqrt{A}$? Le nombre $\sqrt{4}$ équivaut à 2 ; et multiplier un nombre par $\sqrt{4}$, c'est le répéter 2 fois. Le produit de 25 par $\sqrt{4}$ est $25 \times 2 = 50$.

Multiplier un nombre par $\sqrt{\frac{9}{16}}$, c'est le multiplier par la fraction $\frac{3}{4}$, racine carrée de $\frac{9}{16}$.

La multiplication par le nombre $\sqrt{A}$ est ainsi bien définie quand A est le carré d'un nombre entier ou fractionnaire a.

Mais si le nombre A n'est le carré d'aucun nombre entier ni d'aucune fraction, comme le nombre 3, que faut-il entendre par l'opération de la multiplication d'un nombre donné par $\sqrt{A}$?

Qu'est-ce d'abord que $\sqrt{3}$? Il n'existe ni nombre entier ni nombre fractionnaire qui, élevé au carré, reproduise 3.

Mais on peut trouver deux nombres, n'ayant entre eux qu'une différence de 1 dixième, tels que le carré du premier est inférieur, le carré du second supérieur, au nombre donné 3; on trouve :

$$\left(\frac{17}{10}\right)^2 < 3 < \left(\frac{18}{10}\right)^2$$

On peut trouver ensuite deux nombres ayant entre eux une différence de 1 centième, dont les carrés comprennent entre eux le nombre 3.

$$\left(\frac{173}{100}\right)^2 < 3 < \left(\frac{174}{100}\right)^2$$

Puis deux nombres, ayant entre eux une différence aussi petite que l'on voudra, dont les carrés comprennent toujours entre eux le nombre 3, de façon à pouvoir poser les inégalités :

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 < 3 < \left(\frac{a+1}{n}\right)^2$$

n étant aussi grand que l'on voudra. Les deux nombres $\frac{a}{n}$ et $\frac{a+1}{n}$, ayant entre eux une différence $\frac{1}{n}$, aussi petite que l'on voudra, s'appellent, le 1[er] la racine carrée de 3 par défaut, le 2[e] la racine carrée de 3 par excès, à $\frac{1}{n}$ près.

Le symbole $\sqrt{3}$ sert à définir la limite commune vers laquelle convergent les nombres de la forme $\frac{a}{n}$, et $\frac{a+1}{n}$.

La multiplication d'un nombre déterminé M par $\sqrt{3}$ est la limite commune des produits que l'on obtiendrait en multipliant M par les nombres rationnels de la forme $\frac{a}{n}$, $\frac{a+1}{n}$.

Dans la pratique, on substitue à la vraie valeur de $\sqrt{3}$, qui n'est conçue que comme une limite de valeurs commensurables, des valeurs approchées, à un millième près, à un millionième près, etc., et l'opération de la multiplication par l'une de ces valeurs approchées du multiplicateur $\sqrt{3}$ donne le produit approché, avec une erreur moindre que la millième, ou la millionième partie de multiplicande.

Telle est l'idée que l'on doit se faire de la multiplication par $\sqrt{A}$. Elle ne conduit nullement à effectuer sur le multiplicande M les mêmes opérations que celles qu'il a fallu faire subir à l'unité pour former A et $\sqrt{A}$. Elle conduit à multiplier M par la fraction $\frac{a}{n}$, valeur commensurable aussi approchée que l'on veut de $\sqrt{A}$. Ces considérations s'appliquent non seulement aux nombres irrationnels de la forme $\sqrt{A}$, mais à des nombres irrationnels quelconques, par exemple le nombre π

Pour résumer, on peut définir la multiplication en distinguant deux cas :

1° *Le multiplicateur est rationnel.*

2° *Le multiplicateur est irrationnel.*

Dans le 1er cas, on pourra dire :

La multiplication a pour but de composer un nombre appelé produit, avec un nombre appelé multiplicande, comme un autre nombre, nommé multiplicateur, est composé avec un nombre entier d'unités ou de parties aliquotes de l'unité.

Si le multiplicateur est composé d'un nombre entier d'unités, le produit se compose du même nombre entier de fois le multiplicande. Si le multiplicateur, quelle que soit sa forme, se compose de n fois la fraction aliquote $\frac{1}{d}$ de l'unité, le produit se compose de n fois la fraction aliquote $\frac{1}{d}$ du multiplicande.

Dans le 2e cas, la multiplication par un nombre irrationnel a pour but de trouver, avec une approximation aussi grande que l'on veut, la limite des produits du multiplicande par les valeurs commensurables de plus en plus approchées de la vraie valeur du multiplicateur.

Et l'expression $M \times m$, m étant irrationnel, indique la limite des produits de la forme $M \times \frac{a}{n}$, lorsque le nombre rationnel $\frac{a}{n}$ tend vers sa limite m.

PRINCIPES, ABRÉVIATIONS ET SIMPLIFICATIONS.

Les règles générales et les simplifications pratiques de la multiplication sont basées sur différentes propositions qu'il nous semble nécessaire de rappeler ou de démontrer.

Théorème. — *Le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on change l'ordre des facteurs.*

Ce théorème est d'abord établi pour des facteurs entiers, par des raisonnements que nous supposons parfaitement connus; puis il est étendu aux facteurs fractionnaires comme conséquence de la règle établie pour la multiplication des fractions. On pourrait l'établir directement pour des facteurs fractionnaires.

Considérons en premier lieu le cas, extrêmement simple, d'un facteur entier tel que 2, par un facteur fractionnaire égal à une fraction aliquote de l'unité, telle que $\frac{1}{3}$. Démontrons l'égalité $2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 2$, c'est-à-dire, faisons voir que le tiers de 2 unités vaut 2 fois le tiers de l'unité. Écrivons la fraction $\frac{1}{3}$ 3 fois sur une ligne horizontale, et considérons 2 lignes identiques

$$\begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$$

Chaque ligne vaut 1 unité, les deux lignes valent 2 unités;

les fractions $\frac{1}{3}$ sont en même temps disposées sur trois colonnes identiques; chaque colonne, la première par exemple, est le tiers de la collection totale, c'est-à-dire de 2 unités; et cette colonne se compose de deux fractions égales chacune à $\frac{1}{3}$. Donc le tiers de 2 vaut 2 fois le tiers de l'unité. Ce premier principe posé, on démontre, comme pour des facteurs exclusivement entiers, que l'on peut intervertir l'ordre des facteurs quand ils sont entiers ou des fractions aliquotes de l'unité. Il devient alors aisé d'établir le théorème pour des fractions quelconques. Ainsi $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$,
car, d'après la remarque précédente, on peut poser l'égalité démontrée:

$$\frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{7} \times 5 = \frac{1}{7} \times 5 \times \frac{1}{3} \times 2$$

Théorème. — *Le produit d'un multiplicande composé de la somme de plusieurs quantités par un nombre déterminé est égal à la somme des produits obtenus en multipliant chacune des parties du multiplicande par le multiplicateur.*

Si nous désignons par $(a+b+c)$ le multiplicande et par m le multiplicateur, il s'agit de démontrer l'égalité

$$(a+b+c).m = a \times m + b \times m + c \times m$$

Nous distinguerons trois cas:

1° Le multiplicateur m est un nombre entier;

2° Le multiplicateur m est fractionnaire;

3° Le multiplicateur m est irrationnel.

1er *cas*. — Le nombre m est entier, soit 3.

La multiplication de la quantité $a+b+c$ par 3 équivaut à l'addition de 3 quantités égales au multiplicande, ce qui donne

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ a+b+c \\ \hline \end{array}$$

Résultat évident: $a \times 3 + b \times 3 + c \times 3$

2ᵉ *cas.* — Le nombre m est fractionnaire, soit $\frac{2}{3}$.

La multiplication de la quantité $(a+b+c)$ par $\frac{2}{3}$ consiste à prendre 2 fois le tiers du multiplicande.

Prenons d'abord $\frac{1}{3}$ du multiplicande, c'est

$$a\times\frac{1}{3}+b\times\frac{1}{3}+c\times\frac{1}{3}$$

car si l'on répète ce résultat 3 fois, on trouvera, en vertu du 1ᵉʳ cas,

$$a\times\frac{1}{3}\times 3+b\times\frac{1}{3}\times 3+c\times\frac{1}{3}\times 3$$

ou simplement $a+b+c$.

Une fois que l'on a le tiers du multiplicande,

$$a\times\frac{1}{3}+b\times\frac{1}{3}+c\times\frac{1}{3}$$

il suffit de le répéter 2 fois, ce qui donnera, toujours en vertu du 1ᵉʳ cas :

$$a\times\frac{1}{3}\times 2+b\times\frac{1}{3}\times 2+c\times\frac{1}{3}\times 2$$

ou $$a\times\frac{2}{3}+b\times\frac{2}{3}+c\times\frac{2}{3}$$

3ᵉ *cas.* — Le multiplicateur m est irrationnel, est conçu comme la limite commune de deux nombres variables de la forme $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$ qui se rapprochent indéfiniment à mesure que le dénominateur q augmente; les valeurs de la première forme croissent, ceux de la seconde décroissent.

Le produit du multiplicande $a+b+c$ par le nombre irrationnel m représente alors la limite commune des produits

$$(a+b+c)\times\frac{p}{q} \text{ et } (a+b+c)\times\frac{p+1}{q}$$

L'égalité $(a+b+c)\times m=a\times m+b\times m+c\times m$

est démontrée exacte pour toutes valeurs rationnelles de m, de la forme $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$.

En supposant m variable et se rapprochant indéfiniment de sa limite, les deux expressions considérées restent toujours équivalentes; elles ont donc des limites égales.

Cette proposition est habituellement démontrée dans les cours d'algèbre. On en fait cependant des applications fréquentes dans les éléments de l'arithmétique. C'est sur ce principe général qu'est fondée la règle de la multiplication relative à un multiplicande composé d'unités, dizaines, centaines, ou de dixièmes, centièmes, etc., ou composé d'un multiple d'un certain nombre plus un reste.

Ainsi : $100 = m9 + 1$

$$500 = m9 \times 5 + 1 \times 5 = M9 + 5$$

Théorème. — *Le produit d'un multiplicande quelconque par un multiplicateur composé de la somme de plusieurs nombres est égal à la somme des produits obtenus en multipliant le multiplicande proposé par chacun des termes du multiplicateur.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la définition de la multiplication. Multiplier un nombre M par le nombre $(a+b)$, c'est former avec M un nombre appelé produit, comme $a+b$ est composé avec des unités entières ou des parties aliquotes de l'unité. Pour composer a, on a pris soit un nombre entier d'unités, soit un nombre entier déterminé de parties aliquotes de cette unité, et l'on y a ajouté le nombre b formé par des moyens semblables. Pour composer le produit, on devra prendre M ou une fraction aliquote de M autant de fois que le nombre a l'indique, c'est-à-dire multiplier M par a, et de même prendre M ou telle fraction aliquote de M autant de fois que le nombre b l'indique, c'est-à-dire encore multiplier M par b, et enfin, comme le nombre $a+b$ est formé par l'addition des unités ou fractions d'unités contenues dans a et dans b, il faudra de même faire l'addition des multiples du multiplicande ou de fractions de multiplicande contenues dans $M \times a$ et $M \times b$, ce qui donnera bien $M \times a + M \times b$.

Autre raisonnement. — On pourrait remplacer le nombre $a+b$ par un nombre équivalent, résultat de l'addition $a+b=S$.

Quand on énonce des égalités, telles que

$$7+8=15$$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12}$$

$$2\frac{1}{2}+3=5\frac{1}{2},$$

on énonce des faits généraux, des identités qui subsistent quelle que soit l'unité.

$$7 \text{ unités } M+8 \text{ unités } M=(7+8) \text{ unités } M.$$

M peut être une grandeur mesurable quelconque, et en particulier une collection d'unités, ou de fractions d'unités, c'est-à-dire un nombre; la réunion de 7 quantités égales à M, c'est $M\times 7$, la réunion de 8 quantités M, c'est $M\times 8$.

Donc $\quad M\times 7+M\times 8=M\times(7+8)$ ou $M\times 15$.

De même les $\frac{2}{3}$ d'une quantité et les $\frac{3}{4}$ de cette même quantité font toujours ensemble les $\frac{17}{12}$ de cette quantité. Mais les $\frac{2}{3}$ d'une quantité, c'est ce que l'on nomme le produit de cette quantité par $\frac{2}{3}$. On a donc bien toujours

$$M\times\frac{2}{3}+M\times\frac{3}{4}=M\times\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right), \text{ ou } M\times\frac{17}{12}.$$

Ainsi, que les nombres a et b soient entiers ou fractionnaires, on a toujours l'égalité

$$M\times a+M\times b=M\times(a+b)$$

ou

$$M\times(a+b)=M\times a+M\times b.$$

Tous les nombres sur lesquels nous opérons, quelle que soit leur forme primitive, peuvent toujours être, calculs effectués, mis sous la forme entière ou fractionnaire; le principe est général.

Il s'étend évidemment aux multiplicateurs ayant trois, quatre, etc., termes.

$$M(a+b+c+\ldots+l)=M.a+M.b+\ldots M.l.$$

Remarque. — Les théorèmes que nous venons d'expliquer relativement aux facteurs composés d'une somme de termes s'appliquent aux facteurs formés de la différence de deux nombres.

Ainsi les formules $(a-b)\,m$ et $am-bm$, dans lesquelles nous supposons $a>b$, sont équivalentes; on le ferait voir par des raisonnements analogues à ceux que nous venons de développer pour une somme $a+b$.

Théorème. — *Le produit d'un multiplicande somme de plusieurs termes, par un multiplicateur somme de plusieurs termes, est égal à la somme de tous les produits partiels obtenus en multipliant chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur.*

Ainsi le produit de $(a+b)$ pour $(c+d)$ équivaut à $a.c+b.c+a.d+b.d$; car $(a+b)$ peut être remplacé, addition effectuée, par un monome M; le produit demandé est alors $M\times(c+d)$, il équivaut, en vertu du principe démontré, à $M\times c+M\times d$; mais $M\times c$ équivaut aussi à $a\times c+b\times c$ et $M\times d$ équivaut à $a\times d+b\times d$; le produit total est donc bien égal à $a.c+b.c+a.d+b.d$.

C'est sur ce principe qu'est fondée la règle ordinaire de la multiplication de nombres de plusieurs chiffres. On multiplie successivement toutes les parties du multiplicande par les unités, dizaines, etc., du multiplicateur.

La démonstration de la preuve par 9, ou par 11, ou par un nombre quelconque, est une application de ce théorème.

C'est encore en s'appuyant sur cette proposition que l'on reconnait que pour obtenir le produit de deux nombres fractionnaires, tels que

$$2\frac{3}{7}\times5\frac{4}{11}$$

on pourrait faire quatre produits partiels :

$$1^\circ\ 2 \times 5$$

$$2^\circ\ \frac{3}{7} \times 5$$

$$3^\circ\ 2 \times \frac{4}{11}$$

$$4^\circ\ \frac{3}{7} \times \frac{4}{11},$$

et réunir ces quatre résultats partiels.

FACTEUR COMMUN.

Nous venons d'établir les deux principes exprimés par les formules

$$(a + b + c + \ldots + l) \times m = a.m + b,.m + \ldots + l.m$$

$$m \times (a + b + c + \ldots + l) = m \times a + m \times b + \ldots + m \times l,$$

en attribuant au facteur m, représenté par un nombre *unique*, un monôme, soit le rôle du multiplicande, soit le rôle du multiplicateur.

On pourrait se contenter d'une seule explication en invoquant le principe relatif au changement d'ordre des facteurs qui ne change pas le produit.

La première formule suffit, sans qu'il soit nécessaire de distinguer m comme multiplicande ou multiplicateur. Elle peut s'écrire

$$am + bm + m \ldots lm = m(a + b + c + \ldots + l.)$$

En langage ordinaire, elle peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — *La somme de plusieurs produits dont chacun renferme un facteur déterminé est égale au produit de ce facteur commun par la somme des autres facteurs.*

Opérer la transformation de la somme $am + bm + \ldots + lm$ en un produit équivalent $m(a + b + c + \ldots + l)$, s'appelle mettre

m en facteur commun. Cette opération a une grande importance pratique. Elle permet, dans beaucoup de questions, de simplifier considérablement les calculs et sert de base à la résolution des problèmes étudiés sous le nom de problèmes du premier degré à une inconnue. Nous donnerons quelques exemples.

Problème. — *Un ouvrier dépose à la caisse d'épargne 6 francs par semaine, au commencement de chacune des 52 semaines de l'année; les sommes déposées portent intérêts, à partir de la semaine qui suit la date du dépôt, d'après le taux de* $3\frac{1}{2}$ *°/₀ par an.*

Etablir le compte du déposant, en principal et intérêts à la fin de l'année.

Solution. — Le total des fonds déposés s'élève à $6 \times 52 = 312$ francs. Tel est le compte Capital; cherchons les intérêts. Le taux étant 3,5, le capital 100 francs donnerait en 1 an ou 52 semaines 3,5, soit pour 1 semaine $\frac{3,5}{52}$; 1 franc produirait 100 fois moins, et 6 francs 6 fois plus, soit $\frac{3,5 \times 6}{52 \times 100}$; tel est l'intérêt produit par un versement de 6 francs pendant 1 semaine.

Le 1er vers^t de 6 fr.	porte int.	pendant	51 sem.	$\frac{3,5 \times 6}{5\,200} \times 51$
le 2e	»	»	50	$\frac{3,5 \times 6}{5\,200} \times 50$
le 3e	»	»	49	$\frac{3,5 \times 6}{5\,200} \times 49$

. . . .

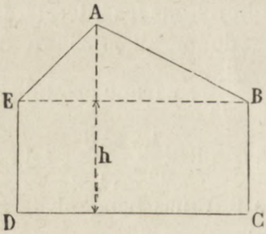
le 51e versement, fait 2 semaines avant la fin de l'année, porte intérêt pendant une semaine, $\frac{3,5 \times 6}{5\,200} \times 1$.

Le compte des intérêts est la somme de ces intérêts partiels.

On reconnaît que dans tous ces intérêts partiels figure comme facteur commun le même nombre $\frac{3,5 \times 6}{5\,200}$. D'après le principe qui vient d'être exposé, le total est égal au produit $\frac{3,5 \times 6}{5\,200} \times (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 51)$. La quantité entre parenthèses est la somme des 51 premiers nombres entiers consécutifs, elle équivaut au produit $\frac{51 \times 52}{2}$, et le total des intérêts est donné par l'expression $\frac{3,5 \times 6 \times 51 \times 52}{5\,200 \times 2} = \frac{3,5 \times 3 \times 51}{100} = 5^{\text{fr}},355$

Cette somme, ajoutée au principal	312
donne le compte définitif	$317^{\text{fr}},355$

Problème. — *Une propriété présente la forme d'un pentagone* ABCDE, *décomposable en un rectangle* EBCD *et un triangle* AEB.



On connaît la surface du pentagone, soit 10 000 *mètres carrés, la base* CD = 125.

On sait en outre que la hauteur du triangle est les $\frac{3}{4}$ *de la hauteur du rectangle. On demande la hauteur du rectangle.*

Solution. — Si l'on désigne par h la hauteur du rectangle, celle du triangle sera $\frac{3h}{4}$; la surface du rectangle a pour expression $125 \times h$, celle du triangle $\frac{125}{2} \times \frac{3h}{4}$.

La somme des deux surfaces a pour expression

1) $$125 \times h + \frac{375 \times h}{8} = 10000$$

Dans le premier membre, on peut mettre h en facteur commun.

$$2) \qquad \left(125+\frac{375}{8}\right)h=10\,000$$

L'expression primitive (1) contenant l'inconnue était une somme de deux termes inconnus ; la nouvelle expression (2) est un produit dont la valeur est connue, 10 000, ainsi que l'un des facteurs $\left(125+\frac{375}{8}\right)$ qu'il est facile de réduire à une seule expression fractionnaire ou à un nombre décimal ; et l'on se trouve ramené au problème usuel de la division.

$$h=\frac{10\,000}{125+\frac{375}{8}}=\frac{80\,000}{1375}=58^{m},18$$

Remarque. — Dans l'expression (1) on pouvait mettre en facteur commun le nombre $125 \times h$ et écrire

$$125\times h\times\left(1+\frac{3}{8}\right)=10\,000$$

ou

$$125\times\frac{11}{8}\times h=10\,000 \quad \text{d'où } h=\frac{80\,000}{1375}$$

TABLE DE MULTIPLICATION.

Pour effectuer les multiplications, le calculateur est tenu de connaître parfaitement la table de Pythagore, c'est-à-dire au moins les produits des neuf premiers nombres pris deux à deux. Il y a grand avantage à étendre la table le plus loin possible, au moins jusqu'à 20, de manière à pouvoir donner sans hésitation le produit de deux nombres quelconques, ne dépassant pas 20. On y parvient aisément à l'aide de quelques remarques et d'exercices répétés.

Soit d'abord à multiplier un nombre de 2 chiffres inférieur à 20, comme 17, par un nombre d'un seul chiffre, soit 6. Le produit des unités 7 du multiplicateur par 6 donne 42, le 2 s'inscrit comme le chiffre des unités du produit, et la retenue

4 jointe au multiplicateur d'un seul chiffre 6 donne le nombre des dizaines 10, de sorte que le produit $17 \times 6 = 102$

On trouvera de même. . . . . . . $17 \times 7 = 119$

$$17 \times 8 = 136$$
$$18 \times 7 = 126$$

dans ces deux derniers produits, le chiffre des unités 6 est le même, il est fourni par les deux mêmes facteurs, 7×8 ou 8×7; la retenue 5 s'ajoute au facteur d'un seul chiffre, à 8 pour faire 13 (dizaines), dans le produit de 17 par 8, à 7 pour faire 12 (dizaines), dans le produit de 18 par 7. On peut encore, pour aider la mémoire, observer que le produit 18×7 doit être multiple de 9; la somme des chiffres du nombre 126 est multiple de 9, c'est le caractère de la divisibilité par 9, expliquée plus loin.

Pour distinguer deux produits qui se terminent l'un et l'autre par le même chiffre, les chiffres des unités étant intervertis dans les 2 facteurs, tels que

$$19 \times 7 = 133$$
$$17 \times 9 = 153$$

ou

$$18 \times 9 = 162$$
$$19 \times 8 = 152$$

il peut être utile de se rappeler que le produit de 2 facteurs dont la somme est constante est d'autant plus grand que les facteurs sont plus rapprochés l'un de l'autre, et atteint son maximum quand ils deviennent égaux. La différence de 8 à 19 est plus grande que de 9 à 18, le produit 8×19 est plus petit que le produit de 9×18.

Le produit 9×18 est encore aperçu immédiatement comme le double de $9 \times 9 = 81$.

De même $16 \times 8 = 128$ double de 8 fois 8.
$18 \times 8 = 144$ double de 8 fois 9.
$16 \times 7 = 112$ double de 8 fois 7.
$14 \times 9 = 126$ double de 9 fois 7.

A l'aide de ces diverses remarques et avec quelques exercices, on voit qu'il est facile d'obtenir le produit d'un nombre de 2 chiffres par 1 facteur d'un seul chiffre. Et l'on peut aisément trouver, de tête, le produit d'un nombre quelconque de deux chiffres, même supérieur à 20, par un nombre d'un seul chiffre; par exemple

$$28 \times 6 = 168$$
$$32 \times 7 = 224$$

est-il nécessaire d'écrire les 2 facteurs, pour trouver le 4, provenant de $7 \times 2 = 14$ et le nombre des dizaines 22 ($3 \times 7 = 21 +$ la retenue 1)?

Considérons maintenant le produit de 2 nombres compris de 10 à 20, tels que 12×13.

$$12 \times 13 = 156$$

Le chiffre 6 des unités du produit est donné par le produit 2×3 des unités des deux facteurs.

Le chiffre 5 des dizaines est la somme $2 + 3$ des mêmes chiffres des unités des deux facteurs.

Le chiffre 1 des centaines est le produit de 1 dizaine du multiplicande par 1 dizaine du multiplicateur : on trouvera toujours, pour deux nombres compris de 10 à 19 inclusivement, ce produit 1 centaine, qui devra être augmenté de la retenue s'il y a lieu. Les mêmes remarques s'appliquent aux produits :

$$12 \times 12 = 144$$
$$13 \times 13 = 169$$
$$12 \times 14 = 168$$

le chiffre des unités du produit est le produit des unités des deux facteurs, le chiffre des dizaines en est la somme.

La règle s'étend à deux nombres quelconques, de 10 à 20, à la condition de tenir compte des retenues.

Ainsi $13 \times 14 = 182$

Le produit de 3 par 4 donne 12, le chiffre 2 s'inscrit aux unités du produit cherché, la somme $3 + 4$ donne 7, et la retenue 1, provenant du produit des unités, ajoutée à 7 donne 8 comme chiffre des dizaines. Les dizaines ne donnent pas de retenue sur les centaines, et le chiffre des centaines est 1.

Pour tous les produits de deux facteurs pris dans les limites considérées, il sera exact de dire que le chiffre des dizaines est donné par la somme des chiffres des unités des deux facteurs, plus la retenue s'il y en a ; les dizaines proviennent en effet de deux sommes, du produit de 1 dizaine du multiplicande par les unités du multiplicateur, et de 1 dizaine du multiplicateur par les unités du multiplicande ; ainsi dans 12×14, les dizaines du produit comprennent

$$\begin{array}{r} 1 \text{ dizaine} \times 4 \\ \text{et } 1 \text{ dizaine} \times 2 \end{array}$$

soit simplement $4 + 2$ dizaines.

Lorsqu'il y a une retenue provenant des dizaines, on y ajoute 1 pour obtenir les centaines, puisqu'il y a toujours le produit de la dizaine du multiplicande par la dizaine du multiplicateur, donnant 1 centaine.

Exemple : $17 \times 18 = 306$

le produit des unités donne $7 \times 8 = 56$

la retenue 5 s'ajoute à la somme $7 + 8$

$$\text{soit } 7 + 8 + 5 = 20$$

le 0 s'inscrit au rang des dizaines, 2 (retenue) et 1, 3 (centaines).

Par l'application de cette règle simplifiée, on obtient aisément, sans détail de produits partiels, le produit total écrit immédiatement ; puis, peu à peu, on arrive à pratiquer le mécanisme, de tête, sans rien écrire, et l'on ne tarde pas, sinon à savoir par cœur, du moins à retrouver très rapidement le produit de deux nombres de deux chiffres qui ne dépassent pas 20.

Il est utile d'exercer les élèves à dresser des factures qui donnent lieu à l'application de ces procédés abréviatifs.

Exemple :	12 mètres à	$1^{fr},80 =$	21,60
	14 à	1 ,90 =	26,60
	$1^{m},80$ à	1 ,40 =	2,52
	17 mètres à	13 =	221
	13 à	1 ,90 =	24,70
	140 à	1 ,60 =	224
Total			520,42
Escompte 4 o/o.			20,81
Net à payer.			499,60

TABLE DE MULTIPLICATION.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

REMARQUES SUR LA TABLE DE MULTIPLICATION.

Si l'on considère la somme des nombres de la 1re colonne, on reconnaît que c'est la somme des 20 premiers nombres entiers, si le plus grand facteur inscrit dans la table est 20. Cette somme est égale à $\frac{20 \times 21}{2} = 210$; les nombres de la

2^e^ colonne, additionnés, donneraient	210×2
ceux de la 3^e^ »	210×3
et ainsi de suite, etc.	... .
ceux de la 20^e^	210×20

Le total des nombres inscrits dans la table étendue jusqu'à 20 est ainsi $210\,[1 + 2 + 3 \ldots \quad + 20] = 210^2 = 44100$.

Cette somme est égale au carré de la somme des 20 premiers nombres. Elle donne en même temps la somme des cubes des 20 premiers nombres $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 20^3$.

Si l'on arrêtait la table au facteur 3, le total des nombres inscrits dans cette table réduite serait le carré de la somme des 3 premiers nombres, c'est-à-dire $6^2 = 36$,
et en même temps la somme des cubes des 3 premiers nombres $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$.

1	2	3
2	4	6
3	6	9

En général, si n désigne le plus grand facteur inscrit dans la table, la somme des nombres inscrits dans la 1^re^ colonne est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, la somme des nombres inscrits dans chacune des autres colonnes est un multiple de cette expression, et la somme des nombres de la table entière est $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, et égale en même temps à la somme des cubes des n premiers nombres, ainsi qu'on peut le vérifier, et le démontrer d'une manière générale par les procédés algébriques.

Produit d'un nombre qui ne dépasse pas 200, par un nombre qui ne dépasse pas 20.

La connaissance de la table de multiplication jusqu'à 20 permet de calculer aisément de tête le produit d'un nombre qui ne dépasse pas 200 par un des 20 premiers nombres.

Soit 83 à multiplier par 17

$$83 \times 17 = 1411$$

17 fois 3, 51, 1 et je retiens 5; 17 fois 8 136, et 5, 141.

$$195 \times 17 = 3315$$

17 fois 5, 85, 5 et je retiens 8; 17 fois 19, 323 et 8, 331.

On peut même obtenir avec la même facilité le produit d'un nombre de 4 chiffres dans lequel on trouve deux groupes successifs de deux chiffres formant un nombre inférieur à 20, par exemple 1812×14

$$1\,812 \times 14 = 25\,368$$

14 fois 12, 168, j'écris 68 et retiens 1 (centaine),
14 fois 18, 252 et 1, 253 (centaines).

Quand on a pris ensemble 2 chiffres au multiplicande, il faut avoir l'attention d'écrire 2 chiffres au produit et de ne retenir que le 3e de gauche s'il y a lieu, comme dans l'exemple ci-dessus; il est évident que les deux premiers chiffres de gauche du produit 168, de 12×14, ne seront pas modifiés par la suite des opérations, car la partie du multiplicande à gauche des deux premiers chiffres de droite ne peut donner que des centaines.

Certains facteurs offrent une facilité particulière.

MULTIPLICATION PAR 11.

Pour obtenir le produit d'un nombre de 2 chiffres par 11, il suffit de faire la somme des 2 chiffres et de l'intercaler entre eux, tant que cette somme s'écrit avec un seul chiffre.

Exemple : $52 \times 11 = 572$

il suffit d'additionner 5 et 2, et de placer le résultat 7 entre les deux chiffres 5 et 2.

Cette règle si simple est uniquement l'abréviation de la règle ordinaire :

le produit partiel par 1 (unité) donne 52
le produit par 1 (dizaine) donnerait 52

On voit que, pour avoir le produit total 572, il suffit d'écrire le chiffre des unités, puis la somme $5+2$, des deux chiffres, et enfin le chiffre 5.

Si la somme des 2 chiffres atteint ou dépasse 10, on intercale seulement le chiffre des unités de cette somme, et on augmente de 1 le chiffre de gauche du multiplicande.

Exemple : $28 \times 11 = 308$

la somme 2 et 8 donne 10, on intercale le zéro, et au lieu de 2 on écrit 3 à gauche. Le chiffre des unités n'est jamais altéré; celui des dizaines s'écrit au rang des centaines dans le produit, tel qu'il est si la somme des 2 chiffres n'atteint pas 10, augmenté d'une unité dans le cas contraire ; le chiffre des dizaines du produit est toujours trouvé par l'addition des 2 chiffres du nombre proposé, mais on n'écrit que le chiffre des unités de cette somme quand elle est égale ou supérieure à 10.

Exemples :

$$25 \times 11 = 275$$
$$27 \times 11 = 297$$
$$28 \times 11 = 308$$
$$36 \times 11 = 396$$
$$37 \times 11 = 407$$
$$45 \times 11 = 495$$
$$47 \times 11 = 517$$
$$62 \times 11 = 682$$
$$69 \times 11 = 759$$

Pour énoncer plus rapidement le dernier produit, on peut prononcer immédiatement 700, puisque l'on voit que la somme des 2 chiffres, $6 + 9$, est supérieure à 10, et pendant que l'on énonce 700 on fait l'addition $6+9=15$, ce qui donne le chiffre 5 des dizaines.

$$87 \times 11 = 957$$
$$91 \times 11 = 1001$$
$$99 \times 11 = 1089$$

Inversement, on reconnaîtra dans un nombre tel que 495 un multiple de 11 en constatant que le 9 des dizaines est la somme des deux autres chiffres, et en même temps que c'est 11 fois 45.

Dans 957, 9 et 7 16 moins $5 = 11$ c'est encore un multiple de 11, pour avoir l'autre facteur il faut diminuer le chiffre de gauche de 1, on trouve 87.

Produit d'un nombre écrit avec plus de 2 chiffres par 11.

Soit un nombre quelconque 53.897.624 à multiplier par 11. On indique l'opération en écrivant 11 à la droite du multiplicande

$$53.897.624 \times 11$$

et l'on écrit immédiatement le produit par 11 par le procédé suivant; on écrit le chiffre de droite 4 au-dessous de la place qu'il occupe dans le multiplicande, puis on le reprend avec le chiffre 2 placé à sa gauche, 4 et 2, puis 6 et 7, ensuite 7 et 9, et ainsi de suite, en ayant soin de prendre toujours dans le multiplicande le chiffre placé au-dessus de celui que l'on vient d'écrire au produit, pour l'additionner avec son voisin de gauche, jusqu'au dernier chiffre de gauche du multiplicande qui est repris seul, et augmenté seulement de la retenue s'il y a lieu.

$$53\,897\,624 \times 11$$

Produit: $592\,873\,864$

L'explication se trouve dans l'opération même faite en deux produits partiels.

$$\begin{array}{lr} & 53\,897\,624 \\ & 53\,897\,624 \\ \hline \text{Produit :} & 592\,873\,864 \end{array}$$

Lorsqu'il n'y a pas de retenues produites par les sommes de deux chiffres consécutifs, on obtient aisément le produit par 11 lors même que le multiplicande a plus de 2 chiffres, comme 121, 143, 254, 1225,

$$121 \times 11 = 1\,331 \qquad 254 \times 11 = 2\,794$$
$$143 \times 11 = 1\,573 \qquad 1\,225 \times 11 = 13\,475$$
$$1\,331 \times 11 = 14\,641$$

N. B. — Les 4 premières puissances de 11, c'est-à-dire les nombres $11, 11^2, 11^3, 11^4$ donnent par leurs chiffres les coefficients des 4 premières puissances d'un binôme de forme $x + a$

$11 = 11$	$(x+a)^1 = x + a$	coefficients	1,1
$11^2 = 121$	$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$		1,2,1
$11^3 = 1\,331$	$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$		1,3,3,1
$11^4 = 14641$	$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$		1,4,6,4,1

Nous ferons connaître, dans le calcul algébrique, la raison de cette concordance.

Le procédé rapide de multiplication par 11 s'applique à l'opération par laquelle on veut ajouter à un nombre donné les 10 °/₀ ou le dixième ; cela revient à multiplier par 1, 1.

Ainsi, une taxe qui s'élevait à 58 francs doit subir une augmentation de 10 °/₀ ; quelle sera la nouvelle taxe ?

On trouve immédiatement 63,80 en faisant simplement l'addition des deux chiffres 5 et 8,13.

49 augmenté de ses 10 °/₀	53,90
78 et ses 10 °/₀	85,80

MULTIPLICATION PAR 22, 33...

Le produit d'un nombre par 22 s'obtient rapidement en multipliant par 2, puis par 11.

EXEMPLE : $37 \times 22 = 74 \times 11 = 814$

Le produit par 33, 44, 55, s'obtient en multipliant par 3, 4, 5 puis par 11.

MULTIPLICATION PAR 12.

d'un nombre entier suivi des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ou des fractions décimales 0,25, 0,50, 0,75.

Le $\frac{1}{4}$ de 12 est 3

La moitié de 12 est 6

Les $\frac{3}{4}$ » 9

$11{,}25 \times 12 = 135 \qquad 132 + 3$

$13{,}50 \times 12 = 162 \qquad 156 + 6$

$14{,}75 \times 12 = 177 \qquad 168 + 9$

MULTIPLICATION PAR 15.

Le nombre 15 équivaut à $1\frac{1}{2}$ dizaine. Il suffit, pour multiplier un nombre par 15, d'y ajouter la moitié en multipliant le résultat par 10.

Si le nombre donné est pair, la moitié donne un nombre entier qui, joint au nombre lui-même, donne un nombre entier à la suite duquel s'inscrit un zéro.

EXEMPLE : $14 \times 15 = 210 \qquad 14 + 7 = 21$ (dizaines)

$16 \times 15 = 240 \qquad 15 + 8 = 24$

$18 \times 15 = 270 \qquad 18 + 9 = 27$

$24 \times 15 = 360 \qquad 24 + 12 = 36$

$36 \times 15 = 540 \qquad 36 + 18 = 54$

$84 \times 15 = 1260 \qquad 84 + 42 = 126$

$162 \times 15 = 2\,430 \qquad 162 + 81 = 2\,430$

$1\,024 \times 15 = 15\,360 \qquad 1\,024 + 512 = 1\,536$

Si le nombre à multiplier par 15 est impair, la moitié donne un nombre entier suivi de la fraction $\frac{1}{2}$ ou 0,5. Il suffit alors d'ajouter au nombre proposé la moitié prise par défaut, en faisant suivre le résultat d'un 5. Exemples :

$13 \times 15 = 195$	$13 + 6 = 19$	19 suivi de 5 195
$19 \times 15 = 285$	$19 + 9 = 28$	
$31 \times 15 = 465$	$31 + 15 = 46$	
$61 \times 15 = 915$	$61 + 30 = 91$	
$131 \times 15 = 1965$	$131 + 65 = 196$	

MULTIPLICATION PAR 25.

Le nombre 25 étant le quart de 100, on obtiendra le produit d'un nombre quelconque par 25 en prenant le quart du nombre proposé et multipliant par 100.

Pour appliquer cette règle avec avantage, il faut savoir trouver rapidement le quart d'un nombre. Considérons d'abord un nombre de la première centaine; il faut savoir à première vue si ce nombre est multiple de 4, ou s'il est égal à un multiple de 4, plus 1, ou plus 2, ou plus 3.

A cet effet, il convient de dresser une table des multiples de 4 et de l'apprendre par cœur de manière à pouvoir dire sans la moindre hésitation :

4 fois $17 = 68$
4 fois $19 = 76$
4 fois $23 = 92$

Dès que l'on possède bien la connaissance des multiples de 4, il est très facile de trouver le produit d'un nombre par 25. S'il est exactement multiple de 4, on prendra le quart qui exprimera un nombre exact de centaines.

Exemple 25 fois 36?

Le quart de 36 est 9, $36 \times 25 = 900$.

$48 \times 25 = 1\,200$
$44 \times 25 = 1\,100$
$72 \times 25 = 1\,800$
$92 \times 25 = 2\,300$
$96 \times 25 = 2\,400$

Si le nombre est multiple de 4, plus 1, on prend le quart du multiple de 4, c'est le nombre de centaines du produit, et l'on ajoute 25.

Si le nombre est multiple de 4, plus 2, on prend le quart du multiple de 4, il suffit de le faire suivre de 50.

Si le nombre est multiple de 4, plus 3, on fait suivre le quart du multiple exact, de 75. Exemples :

$$44 = 11 \times 4 \qquad 44 \times 25 = 1\,100$$
$$45 = 11 \times 4 + 1 \qquad 45 \times 25 = 1\,125$$
$$46 = 11 \times 4 + 2 \qquad 46 \times 25 = 1\,150$$
$$47 = 11 \times 4 + 3 \qquad 47 \times 25 = 1\,175$$

A partir de 48, le produit commencerait par 1200, et l'on aurait

1 200 pour	48×25
1 225	49×25
1 250	50×25
1 275	51×25

et ainsi de suite.

Dès que le nombre à multiplier par 25 est énoncé, il faut le classer immédiatement, reconnaître s'il est multiple de 4, et quel multiple, ou s'il surpasse le multiple de 4, de 1, 2, ou 3.

Soit par exemple 69×25. Le nombre 69 est supérieur de 1 unité à 68 qui est 17×4. Donc $69 \times 25 = 1\,725$.

$$59 \times 25 = 1\,475 \qquad 59 = 56 + 3 \qquad 56 = 14 \times 4$$
$$86 \times 25 = 2\,150 \qquad 86 = 84 + 2 \qquad 84 = 21 \times 4$$
$$87 \times 25 = 2\,175 \qquad 87 = 84 + 3$$
$$88 \times 25 = 2\,200$$

Après avoir acquis l'habitude de former avec aisance et rapidité le produit par 25 d'un nombre de la première centaine, on étend le procédé à un nombre de 3 chiffres.

Soit 457 à multiplier par 25. On considère mentalement le nombre 45 formé par les deux chiffres de gauche, on reconnaît que le quart de 45 donne, par défaut 11, pour 44, on prononce 11 mille, et faisant suivre le reste 1 du 7, on obtient le nombre 17 dont le produit par 25 est 425; de sorte que le produit demandé est 11 425.

Autre exemple : $974 \times 25 = 24\,350$.

Le nombre $97 = 96 + 1$, le quart de 96 est 24, c'est le nombre des mille du produit cherché; le reste 1 suivi du 4 de 974 donne 14, dont le produit par 25 est 350.

$$859 \times 25 = 21\,475$$
$$123 \times 25 = 3\,075$$
$$997 \times 25 = 24\,925$$

Le produit d'un nombre par 2,5 s'obtient par le même procédé, il est seulement 10 fois plus petit.

Ces opérations se présentent fréquemment. S'agit-il, par exemple, d'évaluer en francs le montant d'un nombre donné de billets de 25 francs, ou d'un nombre de pièces d'or espagnoles de 25 pesetas? de trouver la longueur réelle d'une ligne mesurée sur le plan cadastral, échelle $\frac{1}{2500}$, 1 millimètre représentant $2^{m},50$, 1 centimètre 25 mètres? d'évaluer le montant d'un nombre donné de coupons de 25 francs, d'obligations 500 fr. 5 o/o? De convertir en monnaie française un nombre donné de livres sterling, en prenant, pour première approximation du moins, la base de 25 francs par livre; ou encore un nombre de florins d'Autriche, estimés 2 fr. 50 le florin? On trouvera le résultat sans la moindre hésitation tant que le nombre ne s'écrira qu'avec 2 ou 3 chiffres. Exemples :

76 billets de 25 francs : 1 900 francs.
7 millimètres du cadastre représentent : $17^{m},50$ sur le terrain
£ 257 à 25 francs : 6 425 francs.
149 mètres de toile à $2^{fr},50$: $372^{fr},50$.
Fl^{45} 273 à 2,50 : 682,50.

Souvent la livre sterling est évaluée fr. 25,25 c. Dès que l'on sait trouver le produit par 25 unités, on voit en même temps le produit par 0,25 qui en est le centième. On ajoute donc au produit par 25 le centième.

EXEMPLE :	£ 48 à 25,25	$1\,212^{fr}$,
	£ 49 à 25,25	1 237 ,25

Le nombre 1 237,25 est trouvé par l'addition de 1 225 et de 112,25.

$$\text{£}\ 78 \text{ à } 25{,}25 = 1\,969^{\text{fr}},50$$
$$\text{£}\ 659 \text{ à } 25{,}25 = 16\,475 + 164{,}75 = 16\,639{,}75$$

Le produit d'un grand nombre par 25 ne peut sans doute être obtenu par une simple opération mentale, mais on abrège en prenant le $\frac{1}{4}$ et profitant des remarques et connaissances acquises sur les petits nombres.

Soit 54 875 639 à multiplier par 25
Produit 1 371 890 975

Le détail doit se faire ainsi :

Le quart de 54 est 13, de 28 est 7, de 75 est 18, de 36 est 9 et de 39 est 9,75; et comme il faut multiplier par 100 on écrit, pour terminer, 975 sans virgule.

Si le dernier nombre à droite dont on prend le quart est un multiple de 4 on écrit deux zéros à la suite du chiffre qui en exprime le quart.

S'il reste 1, on écrit 25 à la suite.

S'il reste 2, c'est 50 qui termine.

S'il reste 3, c'est 75, comme dans l'exemple ci-dessus.

	$37\,856 \times 25$
Produit	946 400
	$37\,857 \times 25$
Produit	946 425
	$37\,858 \times 25$
Produit	946 450
	$37\,859 \times 25$
Produit	946 475

EXERCICE

Convertir la somme de £ 97876. 17 *sh.* 6 *d. en monnaie française, en évaluant la livre sterling d'après différents cours variant par intervalles de* 2 *centimes* $\frac{1}{2}$ *à partir de* 25 *francs.*

Pour la commodité des calculs, nous écrirons la somme proposée sous la forme décimale, en multipliant le nombre 17 des shillings par 5, pour avoir des centièmes de livre, et ajoutant 2 centièmes $\frac{1}{2}$ pour les 6 pence.

		£ 97 876,875
à 25 francs		2 446 921 fr. 875
pour 0,025		2 446, 921 875
à 25,025	Fr.	2 449 368, 796 875
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,05 (0,002 du précéd.)		4 893, 843 75
à 25,05	Fr.	2 451 815, 718 75
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,075 (0,003 du précéd.)		7 340, 765 625
à 25,075	Fr.	2 454 262, 640 625
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,1 (0,1 du multiplicande).		9 787, 687 5
à 25,10	Fr.	2 456 709, 562 5
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,125 (1/2 p. 100 du précéd.)		12 234, 609 375
à 25,125	Fr.	2 459 156, 484 375
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,15 (0,006 du précéd.)		14 681, 531 05
à 25,15	Fr.	2 461 603, 406 05
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,175 (0,007 du précéd.		17 128, 453 125
à 25,175	Fr.	2 464 050, 328 125
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,2 (0,2 du multiplicande).		19 575, 375 0
à 25,20	Fr.	2 466 497, 25

pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,225 (0,009 du précéd.)		22 022, 296 875
à 25,225	Fr.	2 468 944, 171 875
à 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,25		24 469, 218 75
à 25,25	Fr.	2 471 391, 093 75
pour 25		2 446 921 fr. 875
0,25		24 469, 218 75
0,025		2 446, 921 875
à 25,275	Fr.	2 473 838, 015 625
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,3 (0,3 du multiplicande)		29 363, 062 5
à 25,30	Fr.	2 476 284, 937 5
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,325 (13 p. 1 000 du précéd.)		31 809, 984 375
à 25,325	Fr.	2 478 731, 859 375

Citons enfin, comme exemples, les multiplications par 25,375 et par 25,625

pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,25		24 469, 218 75
pour 0,125		12 234, 609 375
à 25,375	Fr.	2 483 625, 703 125
pour 25		2 446 921 fr. 875
pour 0,625 (1/4 du 10^e)		61 173, 046 875
à 25,625	Fr.	2 508 094, 921 875

Le produit par 0,625 est $\frac{1}{40}$ du produit par 25; car 6,25 est le quart de 25 et 0,625 est le quart du 10^e.

Lorsque le nombre 25 figure dans le multiplicateur, comme dans 256, on abrège un peu l'opération en multipliant par 25 comme dans le cas où ce nombre se trouve isolé ; il est bon de commencer l'opération par la gauche si 25 est à gauche, et de placer ensuite le produit par 6 en appuyant de 1 rang vers la droite.

EXEMPLE :	546,73
	256
produit par 25 (dizaines)	136 682 5
par 6 (unités)	3 280 38
produit total	139 962,88

On effectue les produits partiels sans se préoccuper de la virgule, mais uniquement des places relatives des produits partiels ; puis les chiffres du produit total étant écrits, on sépare autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les 2 facteurs, suivant la règle ordinaire.

AUTRE EXEMPLE :	546,73
	725
produit par 25	13668 25
par 7 (centaines)	382711
produit total	396379,25

AUTRE EXEMPLE :	546,73
	7 256
produit par 25	136682 5
par 6	3280 38
par 7	382711
produit total	3 967 072,88

MULTIPLICATION PAR 37 ET PAR 111.

Le nombre 37 est le tiers de 111. Pour multiplier un nombre donné par 37, il suffit d'en prendre le tiers et de le multiplier par 111. Si le tiers du multiplicande s'exprime exactement par un seul chiffre, le produit par 111 donne 3 chiffres identiques.

$$3 \times 37 = 111$$
$$6 \times 37 = 222$$
$$9 \times 37 = 333$$
$$27 \times 37 = 999$$

Si le multiplicande proposé est égal à un multiple de 3 plus 1, on en formera facilement le produit par 37 en multipliant d'abord le multiple de 3, puis ajoutant 37.

Ainsi $28 \times 37 = 999 + 37 = 1\,036$

Si le multiplicande est égal à un multiple de 3, plus 2, on ajoutera 2 fois 37, ou 74 au produit du multiple de 3 par 37 ; ou encore on retranchera 37 du produit correspondant au multiple de 3 supérieur au nombre donné.

Ainsi $26 \times 37 = 888 + 74 = 962$
ou $26 \times 37 = 999 - 37 = 962$

Si le tiers du nombre s'exprime exactement par un nombre de deux chiffres dont la somme ne dépasse pas 9, la multiplication par 111 donne un nombre de 4 chiffres dont les deux extrêmes sont ceux du multiplicande, et les deux moyens égaux chacun à la somme de ces 2 chiffres.

Ainsi :
$$54 \times 37 = 18 \times 111 = 1998$$
$$69 \times 37 = 23 \times 111 = 2553$$
$$78 \times 37 = 26 \times 111 = 2886$$
$$96 \times 37 = 32 \times 111 = 3552$$
$$108 \times 37 = 36 \times 111 = 3996$$

Si le tiers du nombre proposé s'exprime exactement par un nombre de deux chiffres dont la somme dépasse 9, on forme encore aisément le produit par 111, en écrivant le premier chiffre de droite du nombre à multiplier par 111, puis on fait la somme des deux chiffres, on inscrit seulement les unités de cette somme, on joint la retenue à la somme des deux chiffres faite une nouvelle fois, enfin on joint la retenue au chiffre de gauche du multiplicande.

Ainsi :
$$87 \times 37 = 29 \times 111 = 3219$$
$$144 \times 37 = 48 \times 111 = 5328$$

dans ce dernier exemple, on pose d'abord le 8 à droite, puis on fait la somme $8 + 4$, 12, on écrit 2, et à gauche le chiffre supérieur 3, enfin la retenue 1 s'ajoute au 4 et donne 5 pour chiffre des mille du produit.

MULTIPLICATION PAR 75.

Le nombre 75 est 3 fois 25, ou les $\frac{3}{4}$ de 100.

Pour obtenir le produit d'un nombre par 75, on peut donc procéder comme si l'on voulait le produit par 25, à condition de le multiplier par 3. Il suffira de prendre le quart du plus grand multiple de 4 contenu dans le nombre proposé, et de le multiplier par 3 en faisant suivre le résultat de deux zéros, ou de 25, ou de 150, ou de 225, suivant que l'on aura un nombre qui divisé par 4 donnera pour reste 0, 1, 2 ou 3.

$$56 \times 75 = 4200$$

$$\frac{56}{4} = 14 \quad 14 \times 3 = 42$$

$$57 \times 75 = 4275$$
$$58 \times 75 = 4350$$
$$59 \times 75 = 4425$$

On peut encore former le produit par 75, en multipliant d'abord par 100, et retranchant le produit par 25.

MULTIPLICATION PAR 125.

Pour multiplier un nombre donné par 125, on en prend le $\frac{1}{8}$ et l'on multiplie par 1000.

Si le nombre proposé est un multiple exact de 8, on trouve en prenant le $\frac{1}{8}$ un nombre entier que l'on fait suivre de 3 zéros. Si le nombre n'est pas exactement divisible par 8, la division par 8 donnera un quotient entier, et un reste qui pourra être un des 7 premiers nombres ; le quotient entier donnera toujours le nombre des mille du produit, et suivant la valeur du reste il faudra faire suivre du multiple de 125 correspondant, que l'on doit voir immédiatement en apprenant par cœur le tableau suivant, utile à plusieurs points de vue.

Restes de la division par 8.	Multiples de 8 correspondants.
1	125
2	250
3	375
4	500
5	625
6	750
7	875

Applications.

$72 \times 125 = 9\,000$ $\quad \frac{72}{8} = 9$, reste 0

$73 \times 125 = 9\,125$	la division par 8 laisse 1 pour reste
$74 \times 125 = 9\,250$	2
$75 \times 125 = 9\,375$	3
$76 \times 125 = 9\,500$	4
$77 \times 125 = 9\,625$	5
$78 \times 125 = 9\,750$	6
$79 \times 125 = 9\,875$	7

MULTIPLICATION PAR DES FACTEURS ÉCRITS AVEC PLUSIEURS CHIFFRES PARMI LESQUELS SE TROUVE LE CHIFFRE 1.

Pour multiplier un nombre donné par des nombres tels que 21, 31, 41....., ou 102, 103. ..., 109, il convient d'écrire le multiplicateur dans lequel on trouve le chiffre 1, à droite et non au-dessous du multiplicande, et de prendre immédiatement pour produit partiel correspondant à ce chiffre 1 du multiplicateur, le multiplicande lui-même ; il faut avoir l'attention de bien placer les produits partiels correspondant aux autres chiffres.

EXEMPLES :

28657×41	
114628	produit par 4 (dizaines).
1174937	produit total.

28657×104	produit par 1 (centaine)
114628	— 4 (unités).
2980328	produit total.

43829×417	produit par 1 (dizaine).
306803	— 7 (unités).
175316	— 5 (centaines).
18276693	produit total.

43829×714	produit par 1 (dizaine).
175316	— 4 (unités).
306803	— 7 (centaines).
31293906	produit total.

Théorème. — *Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés.*

Soit la somme de $10 + 3$ à multiplier par la différence $10 - 3$ on obtiendra le produit de $(10 + 3)$ par $(10 - 3)$ en répétant d'abord 10 fois le multiplicande et le soustrayant 3 fois.

	$10 + 3$
	$10 - 3$
1er produit par 10	$10^2 + 3 \times 10$
2e produit soustractif p. 3	$- 10 \times 3 - 3^2$
produit définitif	$10^2 - 3^2$

En généralisant ce raisonnement, qui est évidemment indépendant des deux nombres pris comme exemples, on a la formule

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Applications numériques.

$$17\times 23=(20-3)(20+3)=400-9=391$$

Il suffit, pour trouver immédiatement ce produit, de former le carré du nombre 20, qui est la moyenne entre 17 et 23, puis du carré de 20, qui est 400, soustraire le carré de 3 qui marque la différence des 2 facteurs au nombre rond 20.

$$28\times 32=30^2-2^2=900-4=896$$
$$56\times 64=60^2-4^2=3600-16=3584$$
$$73\times 87=80^2-7^2=6400-49=6351$$
$$98\times 102=100^2-2^2=10000-4=9996$$
$$127\times 133=130^2-3^2=16900-9=16891$$
$$154\times 166=160^2-6^2=25600-36=25564$$
$$197\times 203=200^2-3^2=40000-9=39991$$

Inversement, il sera avantageux, dans certains cas, de remplacer la différence des carrés de deux nombres par le produit de la différence des nombres multipliée par leur somme.

Supposons que l'on ait à calculer $83\,875^2-57\,625^2$ on substituera à cette différence des carrés le produit de la somme 141 500 par la différence 26 250 ; cette multiplication unique sera plus rapidement effectuée que la différence des carrés, qui, pour être formés, exigeraient deux multiplications.

Produit de deux nombres composés des mêmes dizaines et d'unités différentes dont la somme forme 10.

Soit 123×127

il suffit de multiplier le nombre commun des dizaines, ici 12, par le nombre entier immédiatement supérieur, 13 ; le produit donne les centaines, et de le faire suivre du produit des unités des deux facteurs, 3×7.

Ainsi $123\times 127=15\,621$

On peut en effet concevoir les deux facteurs comme composés le 1er de 12 dizaines $+$ 3, le 2e de 12 dizaines $+$ 7

$$
\begin{array}{lrr}
 & \text{12 dizaines} + 3 & \\
 & \text{12 dizaines} + 7 & \\
\hline
\text{1}^{\text{er}}\text{ prod. partiel, par 12 diz.} & (12\times 12)\text{ cent.} + (12\times 3)\text{ diz.} & \\
\text{2}^{\text{e}}\text{ prod. p. par 7 unités} & & (12\times 7)\text{ diz.} + 3\times 7 \\
\hline
\text{Produit total} & (12\times 12)\text{ cent.} + (12\times 10)\text{ diz.} + 21 & \\
 & = 12\text{ centaines} \times 13 + 21 &
\end{array}
$$

ce qui justifie la règle.

MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE QUI PRÉSENTE UN GROUPE DE CHIFFRES FORMANT UN MULTIPLE D'UN FACTEUR DÉJA EMPLOYÉ.

Soit un multiplicateur tel que 287; après avoir fait le produit du multiplicande par 7, on pourra former immédiatement le produit par 28, en multipliant le premier produit partiel par 4, et appuyant d'un rang vers la gauche pour faire exprimer à ce deuxième produit partiel des dizaines.

Si le multiplicateur était 728, on multiplierait d'abord par 7, puis ce premier produit partie par 4 en appuyant de 2 rangs vers la droite, afin de faire exprimer au premier des centaines, et au second des unités simples.

La connaissance de la table de multiplication étendue jusqu'à 20 permettra parfois d'obtenir ainsi de très notables abréviations. Si par exemple le multiplicateur proposé est 15612, on pourra former le produit total en ne calculant que deux produits partiels,

1° par 12
2° par $156 = 12 \times 13$

le 2e se tirera du 1er en le multipliant par 13 et appuyant de 2 rangs vers la gauche.

Pour multiplier par 16128, on multipliera d'abord par 16, ensuite par $128 = 16 \times 8$, en multipliant par 8 le premier produit partiel et appuyant de 3 rangs vers la droite.

Pour multiplier par 5 625, on observera que $625 = \frac{5}{8}$ de 1 000 ou $= \frac{1}{8}$ de 5 000; on commencera par multiplier par 5 et l'on prendra le 8^e^ du premier produit partiel exprimant des mille.

Des remarques analogues s'appliquent aux nombres 3 375 et 7 875.

$$375 = \frac{1}{8} . 3\,000$$

$$875 = \frac{1}{8} . 7\,000$$

Applications :

I. 684532×497875

4791724	par 7 (mille)
598965500	par 875 $\left(\frac{1}{8}\right.$ du 1^er^$\left.\right)$
33542068	par 49 (7 fois le 1^er^)
340811369500	Produit total.

II. 27645853×137839

359396089	par 13 (dizaines de mille)
1078188267	par ...$39 = 13 \times 3$ (unités)
2156376534	par $78 = 39 \times 2$ (centaines)
3810676731667	Produit total.

Des abréviations de ce genre se présentent fréquemment; mais on n'en profite que si l'on y est bien préparé. Nous voyons presque toujours les élèves multiplier par un nombre tel que 84, en multipliant d'abord par 4, puis le multiplicande par 8, lorsqu'il leur serait plus aisé de multiplier le premier produit partiel par 2.

Produit de deux nombres composés d'un entier et de la fraction $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

Soit 8,5 à multiplier par 6,5.

D'après le principe que nous avons démontré, le produit comprend :

1° le produit des deux entiers 8×6;
2° le produit de 8 du multiplicande par 0,5 du multiplicateur ;
3° le produit de 6 du multiplicande par 0,5 du multiplicande ;
4° le produit de 0,5 par 0,5.

Les 2e et 3e produits partiels donnent la moitié de la somme $6 + 8$ des deux entiers, ce que l'on nomme encore la moyenne arithmétique entre 6 et 8 ; enfin le produit des deux fractions donne 0,25 en fractions décimales ou $\frac{1}{4}$ en fraction ordinaire.

D'après cela, pour former le produit des deux nombres donnés, on fera mentalement le produit des entiers, on y joindra leur moyenne, et l'on fera suivre le résultat de 0,25. La moyenne des deux entiers donne un nombre entier quand ils sont de même parité, tous deux pairs ou tous deux impairs ; alors la moyenne ajoutée au produit des entiers donne un résultat entier et le produit complet est ce nombre entier suivi de 25 centièmes. La moyenne des deux entiers donne un nombre entier suivi de la fraction $\frac{1}{2}$ ou 0,5 lorsque les deux entiers sont de parités différentes ; la partie entière de la moyenne s'ajoute au produit des deux entiers ; la partie fractionnaire $\frac{1}{2}$ ou 0,5 jointe au produit 0,25 des parties décimales des deux fractions donne 75 centièmes.

Exemples :

$8,5 \times 6,5 = 55,25$ $\quad 55 = 8 \times 6 + 7$ (moyenne arithmétique)
$7,5 \times 8,5 = 63,75$ $\quad 63 = 7 \times 8 + 7$ (par défaut)
$3,5 \times 12,5 = 43,75$
$11,5 \times 13,5 = 155,25$
$16,5 \times 18,5 = 305,25$

MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE VOISIN D'UN NOMBRE ROND COMME 10, 100, 1000, ETC.

La multiplication par des nombres supérieurs de quelques unités au nombre rond s'obtient, comme nous l'avons déjà indiqué, en prenant le multiplicande comme produit partiel correspondant au chiffre 1 et calculant le produit partiel correspondant aux unités du multiplicateur, que l'on a l'attention de placer au rang qui convient.

	39867 × 1012
	478404
Produit	40345404

Si le multiplicateur est inférieur à un nombre rond de quelques unités on opère par soustraction. Ainsi 993 = 1 000 — 7

	43629 × 993	
	305403	produit par 7, soustractif.
Produit	43323597	

On abrège encore aisément les multiplications par des facteurs multiples de 99 ou 101, de 999 ou 1001, etc.

EXEMPLES :

I.	57843 × 297	297 = 300 — 3
	173529	produit par 300
	173529	» par 3, soustractif.
Produit	17179371	
II.	327698 × 5994	5994 = 6000 — 6
	1966188	produit par 6000
	1966188	produit par 6, soustractif.
Produit	1964221812	
III.	458976 × 69993	69993 = 70000 — 7
	3212832	produit par 70000
Produit	32125107168	produit par 69993

Dans ce dernier exemple, après avoir multiplié par 7 (dizaines de mille), nous avons écrit immédiatement le produit demandé, en observant que le produit par 7 (unités) donnerait les mêmes chiffres, appuyés de 4 rangs vers la droite; les 4 chiffres de droite 2 832, du produit déjà placé, seraient au-dessous, en dehors, vers la droite; et comme il faut les retrancher de 10 000, ils se trouvent remplacés dans le produit définitif par leur complément 7 168 que l'on peut écrire immédiatement; les 3 chiffres de gauche, 321, viendraient se placer sous 832; on peut faire la soustraction, sans les écrire de nouveau, en tenant compte de la retenue qui provient des chiffres de droite.

Toutes les abréviations et simplifications que nous venons d'exposer s'appliquent à des cas particuliers, assurément fort nombreux, et dont plusieurs se présentent fréquemment dans les applications commerciales et financières.

Il nous reste à signaler la méthode générale, que l'on peut suivre aisément lorsque le multiplicateur n'a que 2 chiffres et même souvent lorsqu'il en a 3, pour calculer le produit sans écrire les produits partiels qui correspondent aux différents chiffres du multiplicateur.

Calcul du produit de deux nombres sans détail écrit de produits partiels.

Considérons d'abord le cas de deux facteurs de 2 chiffres. Chacun d'eux comprend des dizaines et des unités, et le produit peut être considéré comme renfermant 4 termes :

1° Le produit des unités des deux fracteurs;

2° Le produit des dizaines du multiplicande par les unités du multiplicateur;

3° Le produit des unités du multiplicande par les dizaines du multiplicateur;

4° Le produit des dizaines des deux facteurs.

Le 2^e et le 3^e expriment des dizaines, et leur addition immédiate donnera, avec la retenue du produit des unités s'il y en a une, le nombre des dizaines du produit; on écrira en conséquence le chiffre des dizaines et l'on trouvera les centaines en multipliant les chiffres des dizaines des deux facteurs et tenant compte, s'il y a lieu, de la retenue provenant de l'opération précédente.

		Méthode détaillée ordinaire.
		48
Soit	48	23
	$\times$	144
à multiplier par	23	96
Produit	1104	1104

le détail de l'opération se fait ainsi :

3 fois $8 = 24$, je pose 4 et retiens 2

3 fois $4 = 12$, et 2 (de retenue), 14, plus $2 \times 8 = 16$, 30, 0 aux dizaines, et je retiens 3, 2 fois $4 = 8$, et 3 (de retenue), 11.

Dans la pratique, il est inutile de dire 3 fois 4, 2 fois 8; en regardant les chiffres on énonce les produits, et l'on additionne les produits, en croix, des dizaines de l'un des facteurs par les unités de l'autre.

Autres exemples :

37	68	79	97
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
26	54	23	89
962	3672	1817	8633

La remarque que nous avons faite sur les nombres compris entre 10 et 20 n'est qu'un cas particulier de cette méthode générale. Avec des nombres tels que 12×13, les produits en croix qui fournissent les dizaines sont 1×3 et 1×2, c'est-à-dire simplement $2 + 3$, somme des deux chiffres des unités.

Un calculateur excercé peut, tout en considérant mentalement le produit des unités, faire immédiatement les deux produits des dizaines qu'il additionne vivement avec la retenue provenant du produit des unités. Ainsi dans le produit de 97 par 89, tout en pensant à 63, produit de 7 par 9, on dit 56 et 81, 137 et 6, 143, 72 et 14, 86.

La méthode présente une abréviation lorsque les deux facteurs ont le même chiffre au même rang, comme 17×27, 18×28, etc. ou 43×63, 67×64, etc.

Dans un produit tel que 43×63, les produits des dizaines de l'un des facteurs par les unités de l'autre donnent $3 \times 6 + 4 \times 3$, soit $3 \times (6 + 4)$; il suffit de multiplier le chiffre commun aux deux facteurs par la somme des deux autres.

$$\begin{array}{r} 43 \\ 63 \\ \hline 2709 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67 \\ 64 \\ \hline 4288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 79 \\ 59 \\ \hline 4661 \end{array}$$

Si le chiffre commun est 1 au rang des unités, comme dans 21×31, les dizaines du produit sont marquées par la somme $2 + 3$ des deux chiffres des dizaines.

$$21 \times 31 = 651 \qquad 21 \times 41 = 861 \qquad 31 \times 51 = 1581$$
$$31 \times 91 = 2821$$

La connaissance de la table de multiplication jusqu'à 20 et même au delà, permettra d'appliquer parfois à des nombres de 3 chiffres la méthode de multiplication indiquée déjà pour des nombres de deux chiffres.

Soit par exemple 254 à multiplier par 127, on opérera sur les nombres 25 et 12 comme s'ils étaient écrits avec un seul chiffre.

$$\begin{array}{r} \overset{\frown}{25}4 \\ \overset{\frown}{12}7 \\ \hline 32258 \end{array}$$

Les dizaines du produit proviennent de 25×7 et de 12×4 et en outre de la retenue apportée par les unités.

Les centaines sont données pour le produit 25×12, augmenté de la retenue provenant des dizaines.

Autres exemples :

$$\begin{array}{r} \overset{\frown}{18}7 \\ \overset{\frown}{13}5 \\ \hline 25245 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{\frown}{16}9 \\ \overset{\frown}{15}6 \\ \hline 26364 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{\frown}{22}7 \\ \overset{\frown}{12}9 \\ \hline 29283 \end{array}$$

Les nombres représentés par des groupes de 2 chiffres sur lesquels on opère comme s'ils étaient écrits avec un seul chiffre, peuvent être à droite et exprimer des unités.

Exemples :

$$\begin{array}{r} 7\overset{\frown}{25} \\ 4\overset{\frown}{12} \\ \hline 298700 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\overset{\frown}{14} \\ 4\overset{\frown}{25} \\ \hline 345950 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\overset{\frown}{17} \\ 3\overset{\frown}{25} \\ \hline 298025 \end{array}$$

Dans ces dernières multiplications, il faut observer que les facteurs se trouvent décomposés en centaines et unités ; dans le produit de 725 par 412 le produit de 25 par 12 donne des unités, tandis que les produits 7×12 et 25×4 donnent des centaines, il faut donc écrire les deux premiers chiffres du produit de 25 par 12, et compter le 3^e^ comme retenue à reporter aux centaines, le produit de 7 par 4 exprime des dizaines de mille, il faut encore écrire 2 chiffres de la somme $25 \times 4 + 7 \times 12 + 3$, et reporter le 3^e^ à la colonne des dizaines de mille.

Dans certains cas, exceptionnels il est vrai, la méthode s'appliquera à des facteurs de 4 chiffres.

$$\begin{array}{r} \overset{\frown}{18}\overset{\frown}{25} \\ \overset{\frown}{17}\overset{\frown}{15} \\ \hline 3129875 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{\frown}{16}\overset{\frown}{75} \\ 3\overset{\frown}{12} \\ \hline 522600 \end{array}$$

Il faut s'exercer à appliquer la méthode, quelle que soit la disposition des deux facteurs, soit qu'on les écrive l'un au-dessous de l'autre, soit qu'on les écrive l'un à la suite de l'autre, sur la même ligne, comme pour la tenue des registres de commerce. Si l'on demande le produit

$$42 \times 67$$

on observera que les produits donnant les dizaines du résultat cherché sont ceux des deux moyens 2×6 et des deux extrêmes 4×7.

$$42 \times 67 = 2814$$
$$63 \times 54 = 3402$$
$$45 \times 28 = 1260$$
$$78 \times 96 = 7488$$
$$129 \times 43 = 5547$$
$$136 \times 147 = 19992$$
$$253 \times 258 = 65274$$
$$712 \times 816 = 580992$$
$$925 \times 512 = 473600$$

L'habitude de ces calculs permet d'écrire, sous la dictée, les divers détails d'une facture.

EXEMPLE :

62 mètres	à	7fr,80	=	483fr,60
11 »	à	8 ,75	=	96 ,25
25 »	à	12 ,30	=	307 ,50
75 »	à	5 ,60	=	420 ,00
14 »	à	18	=	252 ,00
36 »	à	9 ,7	=	349 ,20
13m,5	à	14	=	189 ,00
13 ,5	à	14 ,5	=	195 ,75
18 ,50	à	24	=	444 ,00
18 ,50	à	24 ,5	=	453 ,25
125 mètres	à	12 ,5	=	1562 ,50
TOTAL. . . .				4753 ,05
Escompte 4 °/₀				190 ,122
Net à payer. .				4562 ,928

Produit d'un nombre quelconque par un multiplicateur de 2 chiffres.

Le calcul direct du produit se fait encore aisément avec un multiplicande quelconque, lorsque le multiplicateur n'a que 2 chiffres.

Soit 4387 à multiplier par 54.

Les unités simples, ou de l'ordre le plus faible, sont données par le produit des unités des deux facteurs, et les unités de l'ordre le plus élevé par le produit des chiffres de gauche des 2 facteurs, en tenant compte en outre des retenues. Mais les unités des ordres intermédiaires proviennent, outre la retenue, de deux sources : ainsi les dizaines du produit proviennent de 8×4 et de 7×5; de même au produit 3×4 il faut joindre 8×5, ces deux produits donnent des centaines. On multiplie donc successivement chaque chiffre du multiplicande par le 4 du multiplicateur, en joignant la retenue, et le produit du chiffre précédent par le 5 du multiplicateur.

$$\begin{array}{r} 4387 \\ 54 \\ \hline 236898 \end{array}$$

Autres exemples :

$$\begin{array}{r} 8796 \\ 78 \\ \hline 686088 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 53625 \\ 46 \\ \hline 2466750 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9874 \\ \overset{\frown}{12}3 \\ \hline 1214502 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 72658 \\ \overset{\frown}{13}7 \\ \hline 9954146 \end{array}$$

Extension de la méthode au cas d'un multiplicateur de 3 chiffres.

Soit 532 à multiplier par 256

$$\begin{array}{r} 532 \\ 256 \\ \hline 136192 \end{array}$$

pour les unités, on fait le produit 2×6 2

pour les dizaines	$\left\{\begin{array}{l} 3 \times 6 \\ 2 \times 5 \end{array}\right.$	plus la retenue	$\begin{array}{c} 3\ 2 \\ \times \\ 5\ 6 \end{array}$
pour les centaines	$\left\{\begin{array}{l} 5 \times 6 \\ 3 \times 5 \\ 2 \times 2 \end{array}\right.$	plus la retenue	$\begin{array}{c} 532 \\ \times \\ 256 \end{array}$
pour les mille	$\left\{\begin{array}{l} 5 \times 5 \\ 3 \times 2 \end{array}\right.$	plus la retenue	$\begin{array}{c} 5\ 3 \\ \times \\ 2\ 5 \end{array}$

pour les dizaines de mille, 5×2, plus la retenue $\begin{array}{c} 5 \\ \mid \\ 2 \end{array}$

Autres exemples :

$$\begin{array}{r} 756 \\ 867 \\ \hline 655452 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 457 \\ 683 \\ \hline 312131 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 897 \\ 798 \\ \hline 715806 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2512 \\ 1922 \\ \hline 4828064 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1438 \\ 1254 \\ \hline 1803252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1579 \\ 1797 \\ \hline 2837463 \end{array}$$

PREUVE PAR 9.

Après une multiplication un peu longue ou rapidement effectuée, il est bon de faire la preuve par 9. Elle est fondée sur les caractères bien connus de la divisibilité d'un nombre par 9, et pour la multiplication, sur le principe de la composition du produit d'une somme par une somme.

Chaque facteur peut être considéré comme un multiple de 9, plus un reste, que l'on trouve aisément en commençant l'addition des chiffres significatifs, et effectuant l'addition des chiffres de toute somme partielle, dès qu'elle atteint ou dépasse 10; si, par exemple, les chiffres déjà additionnés donnent pour somme 11, on compte simplement 2, puisque 11 est multiple de 9, plus 2.

Le multiplicande peut être représenté par $m + r$
Le multiplicateur — par $m' + r'$
m et m' étant des multiples de 9, et r et r', les restes des divisions par 9.

Le produit de $m + r$ par $m' + r'$ est égal à la somme des 4 termes $mm' + mr' + m'r + rr'$.

Les trois premiers sont évidemment multiples de 9, et leur somme donne un multiple de 9, M; de sorte que le produit est égal à un multiple de 9, plus le produit des restes de la division des facteurs par 9. Ce produit que l'on aperçoit immédiatement, puisque les restes r et r' sont des nombres d'un seul chiffre, est lui-même égal à un multiple de 9, plus un reste R que l'on trouve par l'addition des chiffres. Le produit doit être égal à $M + R$. En appliquant au produit effectué la règle qui fait connaître le reste de la division par 9, on doit trouver le même reste R que celui qui vient d'être obtenu. Si la concordance a lieu, on dit que la preuve par 9 réussit; il y a probabilité que la multiplication a été bien effectuée. Sinon, il y a certitude que le produit est erroné.

Exemple :

$$\begin{array}{rl} 857 & = m9 + 2 \\ 49 & = m9 + 4 \qquad 2 \times 4 = 8 \\ \hline 41993 & = m9 + 8 \end{array}$$

La preuve par 9 ne peut donner la certitude de la composition exacte du produit; elle ne vérifie que l'exactitude du reste, mais nullement la valeur du multiple de 9 qui doit se trouver contenu dans le produit. L'erreur peut être nulle, ou un multiple de 9; la preuve réussira.

Si l'on commet une erreur dans la place relative attribuée à un produit partiel, cette faute qui altère la composition du produit n'est pas accusée par la preuve par 9.

Si, par exemple, nous effectuons la multiplication de 857 par 49 en deux produits partiels, et si nous plaçons le produit par 4 sans appuyer d'un rang vers la gauche, nous obtiendrons un produit très erroné ; la preuve par 9 n'en réussira pas moins, si les chiffres significatifs sont bien déterminés. Le faux produit 11141 donne bien pour reste 8. Voici pourquoi la preuve réussit. Le produit par 4 (dizaines) du multiplicateur devait être appuyé d'un rang vers la gauche, sa vraie valeur est 3428×10 ; la différence entre la vraie valeur 3428×10 et la valeur qu'on lui a attribuée 3428, est égale à 3428×9, elle est égale à un multiple de 9 ; et cette erreur ne modifie en rien le reste de la division par 9.

$$\begin{array}{r} 857 \\ 49 \\ \hline 7713 \\ 3428 \\ \hline 11141 \end{array}$$

La preuve par 11 peut se faire d'après les mêmes principes, en appliquant les règles spéciales pour trouver le reste de la division d'un nombre par 11. Elle n'accuserait pas une erreur qui serait multiple de 11.

Lorsque la preuve par 9 et la preuve par 11 réussissent l'une et l'autre, l'erreur ne peut être que nulle ou multiple de 99.

Méthode abrégée d'Oughtred pour la multiplication des nombres décimaux.

Dans la mesure et l'évaluation des quantités, on ne pousse généralement l'approximation que jusqu'à un certain degré au delà duquel l'erreur est considérée comme négligeable. Ainsi, dans un compte d'argent, on n'évalue habituellement la somme à payer qu'à 1 centime près, ou même à quelques centimes près. Dans l'évaluation des longueurs, on ne désire le plus souvent connaître la mesure qu'à 1 centimètre, 1 millimètre près, etc.

Or, il arrive fréquemment que les nombres soumis aux calculs sont écrits avec beaucoup de chiffres décimaux ; il paraît inutile de les conserver tous, et cependant il importe de fixer le nombre de ceux que l'on peut négliger sans nuire au degré d'exactitude que l'on désire.

Supposons que l'on demande, par exemple, le produit des deux nombres 52,793454325 et 3,643945378 à 0,001 près.

Si l'on effectuait le produit d'après la règle ordinaire, en conservant tous les chiffres décimaux des deux facteurs, on obtiendrait un produit ayant 18 chiffres décimaux, tandis que l'on ne désire connaître que les 3 premiers exactement. On peut observer que les deux facteurs étant respectivement inférieurs à 53 et 4, une errreur de 0,00001 sur chacun d'eux entraînerait dans le produit une erreur moindre que $53+4$ ou 57 cent millièmes, moindre *à fortiori* que 0,001. Et on aurait le degré de précision demandé en faisant le produit de

52,79345 par 3,64394

mais on y trouverait encore 10 chiffres décimaux.

Un auteur anglais, Oughtred, a indiqué une méthode abrégée qu'il est utile de connaître. Nous allons l'appliquer à l'exemple proposé en mettant en regard le produit des deux facteurs réduits par la suppression des chiffres au delà des cent-millièmes.

	Méthode d'Oughtred.
$52,79345\overline{4325}$	$52,79345\overline{4325}$
$3,64394\overline{5378}$	$3,64394\overline{5378}$
158 38035	158 38035
31 676070	31 67604
2 1117380	2 11172
15838035	15837
47514105	4743
21117380	208
	25
192,3761641930	192,37624

Pour l'application de la méthode d'Oughtred, nous avons conservé au multiplicande les chiffres jusqu'aux cent millièmes. Le multiplicateur n'ayant qu'un seul chiffre à sa partie entière, nous avons pris dans le multiplicande deux chiffres décimaux de plus que nous n'en voulons conserver au produit. La multiplication du multiplicande réduit a été commencée par le chiffre 3, le premier à gauche du multiplicateur; le premier produit partiel par 3 exprime des cent-millièmes; ce premier produit partiel effectué, le premier chiffre 5 à droite du multiplicande a été supprimé, et l'on a procédé au produit du nouveau multiplicande réduit et exprimant des dix-millièmes par le chiffre 6 des dixièmes du multiplicateur; ce produit partiel exprime encore des cent-millièmes; après le deuxième produit partiel effectué, le deuxième chiffre 4 du multiplicande a été supprimé, et le nouveau multiplicande réduit a été multiplié par le chiffre 4, des centièmes, du multiplicateur, et ainsi de suite. Tous les produits partiels ainsi formés expriment des cent-millièmes. Leur somme donne le produit total avec une erreur moindre que 0,001. C'est ce que nous allons démontrer.

La partie supprimée dans le multiplicande est moindre que 1 cent-millième. Donc le premier produit partiel par 3 unités diffère du vrai produit partiel d'une quantité moindre que 3 cent-millièmes; pour une raison semblable, le deuxième produit partiel par 6 diffère du vrai produit partiel correspondant d'une quantité moindre que 6 cent-millièmes, et ainsi de suite; les produits partiels formés par la méthode abrégée diffèrent ensemble des vrais produits partiels, d'une quantité moindre que $(3+6+4+3+9+4+5)$ cent-millièmes. La partie supprimée dans le multiplicateur est moindre que 1 millionième; le multiplicande étant inférieur à 6×10, les produits partiels supprimés forment un total inférieur à $0{,}000001\times 6\times 10$, ou à 6 cent-millièmes.

Le produit total obtenu par la méthode abrégée est donc inférieur au produit vrai d'une quantité moindre que

$$(3+6+4+3+9+4+5+6) \text{ cent-millièmes}$$

On voit immédiatement que le nombre de cent-millièmes étant inférieur à 100, l'erreur commise est plus petite que 0,001, et le produit est 192,376 à moins d'un millième près. Si au produit trouvé 192,37634, qui est approché par défaut, on ajoute les 40 cent-millièmes qui donnent une limite supérieure de l'erreur commise, on obtiendra un résultat approché par excès.

Ainsi le produit exact est compris entre

$$192,37624$$

et

$$192,37664$$

Le vrai produit est

$$192,376463876237859850$$

Il est bien compris entre les limites assignées.

En résumé, la méthode d'Oughtred consiste à calculer les produits partiels jusqu'aux unités de l'ordre décimal cent fois plus petit que l'ordre correspondant à l'approximation demandée, et l'on obtient en les additionnant le produit approché par défaut, avec une erreur plus petite qu'une unité de l'ordre décimal de la colonne de droite des produits partiels, multipliée par la somme des chiffres employés au multiplicateur et du chiffre des plus hautes unités du multiplicande plus 1.

La règle pourrait se trouver en défaut si la somme de tous ces chiffres dépassait 100. Mais c'est un cas tout à fait exceptionnel, pour lequel il serait encore possible d'appliquer la méthode d'Oughtred, en calculant les produits partiels jusqu'aux unités de l'ordre décimal 1000 fois plus petit que l'ordre de l'approximation demandée.

Ajoutons enfin, qu'en tenant compte des retenues, on peut écrire les produits partiels exprimant des unités de l'ordre décimal seulement 10 fois plus petit que celui de l'approximation. Ainsi pour la multiplication effectuée ci-dessus, au lieu de commencer le premier produit par le chiffre 5 des cent-millièmes du multiplicande, on pourrait commencer par le chiffre 4 des dix-millièmes, en tenant compte toutefois de la retenue provenant du 5.

$$
\begin{array}{r}
5\dot{2},79\dot{3}\dot{4}5 \\
3\ 643945 \\
\hline
158\ 3803 \\
31\ 6760 \\
2\ 1117 \\
1584 \\
474 \\
20 \\
2 \\
\hline
192,3760
\end{array}
$$

Il est alors utile de forcer la retenue d'une unité quand le produit est plus près du nombre approché par excès; ainsi le produit de 9 par 3 donne 27, nous avons compté 3 de retenue.

Pour obtenir 376 millièmes il a été nécessaire de tenir compte de la retenue 2 qui proviendrait du chiffre 5 du multiplicateur par le chiffre 5 à la gauche du multiplicande.

Quel que soit le procédé d'abréviation employé, il est toujours indispensable d'apprécier l'importance de l'erreur commise, en déterminant des limites de l'erreur. On peut généralement évaluer très facilement des limites supérieures des erreurs commises sur chacun des facteurs.

Soient M et M′ les valeurs approchées par défaut des deux facteurs, ε et ε' des limites supérieures des erreurs, de sorte que les facteurs sont respectivement plus petits que $M+\varepsilon$ et $M'+\varepsilon'$.

Le vrai produit P est compris entre $M \times M'$, valeur approchée par défaut et $(M+\varepsilon)(M'+\varepsilon')$, valeur approchée par excès.

$$M.M' < P < (M+\varepsilon)(M'+\varepsilon')$$

ou

$$MM' < P < MM' + M\varepsilon' + M'\varepsilon + \varepsilon\varepsilon$$

Souvent les limites ε et ε' seront égales; par exemple, chacun des 2 facteurs sera pris avec une erreur plus petite que 0,001. En faisant $\varepsilon = \varepsilon'$, les inégalités peuvent s'écrire

$$MM' < P < MM' + (M+M')\varepsilon + \varepsilon^2$$

La quantité ε^2 sera généralement très petite; si ε est de l'ordre des millièmes, ε^2 sera de l'ordre des millioniėmes, et la limite de l'erreur sera indiquée suffisamment par le terme $(M+M')\,\varepsilon$.

Si parfois, pour plus de commodité, on substitue à M et M′ des valeurs approchées par excès, on obtient *à fortiori* une limite supérieure de l'erreur commise. C'est ce que nous avons fait en disant que les facteurs (voir la multiplication précédente détaillée) étant inférieurs à 53 et 4, en les prenant avec une erreur plus petite que 0,00001, l'erreur dans le produit serait inférieure à 0,00057. En ajoutant au produit des deux facteurs pris par défaut 192,37616, ces 0,00057 on obtient 192,37673 et le vrai produit P est bien compris entre ces deux valeurs.

$$192{,}37616 < P < 192{,}37673$$

Exercices de calcul mental sur la multiplication.

Produits demandés.	Dizaines du produit	Résultat.
17×27	$7 \times (2+1) +$ retenue	459
18×28	$8 \times 3 +$ »	504
19×29	$9 \times 3 +$ »	551
23×33	$3 \times (2+3)$	759
24×34	$4 \times 5 +$ retenue	816
27×37	$7 \times 5 +$ »	999
28×38	$8 \times 5 +$ »	1064
29×39	$9 \times 5 +$ »	1131
31×51	$1 \times (3+5)$	1581
32×52	2×8	1664
33×53	3×8	1749
34×54	$4 \times 8 +$ retenue	1836
64×67	$6 \times (4+7) +$ retenue	4288
63×69	$6 \times (3+9) +$ »	4347
66×68	$6 \times (6+8) +$ »	4488
72×79	$7 \times (2+9) +$ »	5688
74×78	$7 \times (4+8) +$ »	5772
82×87	$8 \times (2+7) +$ »	7134
86×96	$6 \times (8+9) +$ »	8256
87×97	$7 \times (8+9) +$ »	8439

D. Valeur de 23 timbres-poste de $0^{fr},15$.		R.	$3^{fr},45$
» 57	»		8 ,55
» 86	»		12 ,90

D. Valeur de 17 coupons de 25 francs.	R.	425
» » (impôt 3 °/₀ à déduire).		412 ,25

D. Valeur de 26 coupons de $7^{fr},50$.	R.	195
» » (avec impôt de 3 °/₀).		189 ,15

D. Valeur de 264 florins d'Autriche de $2^{fr},50$.	R.	660
» 597		1492 ,50
» 683		1707 ,50

D. £ 48 à 25 francs.	R.	1200
» à $25^{fr},25$		1212
» à 25 ,125		1206
» à 25 ,1875		1209

D. £ 167 à 25 francs.	R.	4175
» à $25^{fr},25$		4216 ,75

D. Valeur de 68 coupons de $12^{fr},50$.		R.	850
» 69	»		862 ,50
» 70	»		875
» 71	»		887 ,50
» 72	»		900
» 73	»		912 ,50
» 74	»		925
» 75	»		937 ,50

D. Valeur de 147 litres à $0^{fr},95$. R. 139 ,65

à $0^{fr},95$ on substitue par la pensée $1 - 0^{fr},05$.

D. 340 volumes à $2^{fr},90$. R. 986

Il suffit de multiplier par 3 et de soustraire le $\frac{1}{10}$ du multiplicande.

D. Valeur de 23 florins de Hollande à $2^{fr},10$. R. $48^{fr},30$

D. Valeur de	14 mètres à	$3^{fr},25$	R.	$45^{fr},50$
»	17 »	4 ,50		76 ,50
»	18 »	5 ,75		103 ,50
»	21 »	1 ,75		36 ,75
»	17 »	12 ,95		220 ,15
»	18 »	13 ,90		250 ,20
»	28 »	5 ,30		148 ,40
»	36 »	5 ,20		187 ,20

D. Valeur de 17 shillings à $1^{fr},25$ — R. 21 ,25

» 14 sh. 6 d. à 1 ,25 — R. 18 ,125

D. Lorsque 100 roubles (papier) valent $252^{fr},50$
quelle est la valeur de 37 roubles? — R. 93 ,425
» de 168 » — R. 424 ,20
» de 2500 » — R. 6312 ,50

D. Lorsque 100 roubles (papier) sont cotés 255 francs,
quelle est la valeur de 34 roubles? — R. 86 ,70
» de 260 » — R. 663
» de 2500 » — R. 6375

Exercices de calcul mental sur la multiplication des fractions et expressions fractionnaires.

D. Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de 37 — R. $18\frac{1}{2}$

Les $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{6}$ de 40 — 25

Les $\frac{2}{3}$ de $18\frac{2}{3}$ — $12\frac{4}{9}$

Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{6}{7}$ de 91 — 26

La moitié de $15\frac{5}{7}$ — $7\frac{6}{7}$

» de $19\frac{11}{12}$ — $9\frac{23}{24}$

» de $127\frac{1}{3}$ — $63\frac{2}{3}$

Produit	de $11\frac{2}{3}$ par 48	560
»	de $11\frac{2}{3}$ par $48\frac{3}{4}$	$568\frac{3}{4}$
»	de la somme $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$ par 12	23
»	de la différence $\left(\frac{11}{12}-\frac{9}{10}\right)$ par 60	1
»	de la somme $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{9}\right)$ par 18	22

DIVISION

La division est, dans son acception générale, l'opération inverse de la multiplication. Deux nombres sont donnés, l'un nommé dividende, l'autre nommé diviseur; la division du premier par le second a pour but de trouver un nombre, appelé quotient, tel que le produit du quotient par le diviseur reproduise le dividende.

Si l'on désigne par D le dividende, par d le diviseur; le quotient de D par d est le nombre q qui satisfait à la condition $D = d \times q$.

Le dividende est considéré comme le produit de deux facteurs; le diviseur est l'un de ces facteurs; le quotient est l'autre facteur.

On reconnaît *à priori* que le quotient de deux nombres finis et déterminés existe toujours, est lui-même un nombre déterminé. Nous avons la notion des grandeurs continues, et par suite des nombres variant d'une manière continue, depuis 0 jusqu'à l'infini, c'est-à-dire jusqu'à un nombre aussi grand que l'on voudra. Le produit d'un nombre fixe, d, par un nombre variant d'une manière continue à partir de 0, variera lui-même d'une manière continue à partir de 0, et pourra passer successivement par tous les états de grandeur, de manière à dépasser toute limite assignée. Le produit du nombre fixe d (le diviseur proposé), par un facteur variant de 0 à ∞, commence par être plus petit que le nombre déterminé D (le dividende), et devient ensuite plus grand. Il y a donc eu, dans l'intervalle, une valeur particulière du facteur variable pour laquelle le produit était précisément égal au dividende; soit q cette valeur particulière, elle satisfait à l'égalité $D = d \times q$.

Le nombre q est dit le quotient de D par d, et l'on représente souvent par $\frac{D}{d}$ ce quotient, sauf à transformer, à simplifier cette expression; c'est ce que l'on nomme effectuer la division.

Cette définition générale de la division comprend diverses définitions particulières.

Le mot de division éveille l'idée de partage, et l'un des premiers problèmes qui ont conduit à l'opération dite Division a eu pour objet la division d'un nombre déterminé en un nombre fixé de parties égales, l'évaluation, la mesure de l'une de ces parties égales. Ainsi l'on veut partager 30 francs entre 5 personnes, en donnant à chacune la même somme; cette part individuelle est la cinquième partie de 30, se trouve par la division de 30 par 5. Et il nous paraît bien évident que la part individuelle répétée 5 fois, ou multipliée par 5, reproduit la somme 30 francs qu'il s'agissait de partager. Le résultat de la division, 6, est bien tel que $6 \times 5 = 30$.

On a encore appelé Division l'opération par laquelle on trouve combien de fois un nombre est contenu dans un autre. Par exemple, on désire connaître combien il y a de jours dans 720 heures, le jour étant de 24 heures; la question revient à trouver combien de fois le nombre 24 se trouve contenu dans 720; c'est de cette idée que vient le mot quotient (*quoties*, combien de fois). Le nombre 30 qui répond à la question est tel que

$$24 \times 30 = 720$$

et satisfait ainsi à la définition générale.

D'après le sens restreint attribué à la division par la définition précédente, il semble que le quotient ne s'exprime que par un nombre entier; or, il peut arriver que le dividende ne contienne pas exactement le diviseur un nombre entier de fois, et qu'après avoir retranché du dividende un certain nombre de fois le diviseur, on trouve un reste inférieur au diviseur. Le nombre qui indique le plus grand nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende, se nomme le quotient, approché par défaut, à moins d'une unité près, ou encore la partie entière du quotient. Entre le dividende D, le diviseur d, la partie entière e du quotient, et le reste r, il y a alors la relation

$$D = d \times e + r. \qquad r < d.$$

Tant que le reste r est différent de zéro, e n'est que la portion principale du quotient vrai, exact, lequel vérifie l'égalité $D = d \times q$.

Si l'on considère, par exemple, la division de 65 par 7, la partie entière du quotient est 9 et le reste 2.

$$65 = 7 \times 9 + 2$$

Le quotient exact est la fraction $\frac{65}{7}$ ou le nombre fractionnaire $9\frac{2}{7}$.

$$65 = 7 \times \frac{65}{7}$$

$$65 = 7 \times 9\frac{2}{7}$$

Il est, en effet, évident que les $\frac{65}{7}$ de 7 doivent donner 65.

Car en prenant le 7e de 7, on obtient une unité, et en répétant 65 fois ce résultat, on reproduit bien 65 unités, c'est-à-dire le dividende. Ainsi le quotient exact de deux nombres entiers peut toujours s'exprimer par une fraction ayant pour numérateur le dividende, et pour dénominateur le diviseur. Si le dividende est plus grand que le diviseur, on peut transformer la fraction en extrayant les entiers, dont le nombre est marqué par le plus grand multiple du dénominateur contenu dans le numérateur.

Voici encore une application fréquente de la division. On connaît le prix, la valeur, d'un certain nombre d'unités et l'on demande le prix de l'unité. Lorsque le nombre d'unités, est un nombre entier, on peut, suivant l'idée primitive de la division, dire que le prix de l'unité se trouvera en divisant le prix total donné en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le nombre donné. Par exemple, si 5 mètres coûtent 30 francs et que l'on demande le prix du mètre, on voit sans la moindre hésitation qu'il suffit de trouver un nombre 5 fois plus petit que 30, contenu 5 fois dans 30, la 5^e partie de 30, en un mot de diviser 30 en 5 parties égales. Mais si la longueur qui coûte 30 francs est mesurée par une fraction d'unité, telle que $\frac{5}{7}$, ou par un nombre fractionnaire, tel que $5\frac{2}{3}$, que devient l'idée de division en un certain nombre de parties égales? L'esprit qui s'est habitué à une notion incomplète, restreinte, de la division n'aperçoit plus l'opération d'arithmétique qui conduit au résultat demandé. Mais quand il s'est pénétré du caractère général de la division, il voit immédiatement que le prix total donné est un produit de deux facteurs, le prix de l'unité multiplié par le nombre donné, quel qu'il soit, entier ou factionnaire, d'unités, que par conséquent le prix de l'unité est ce que l'on est convenu de nommer le quotient de la division du prix total par le nombre d'unités, lors même que ce nombre est fractionnaire. Une bonne définition sert de base au raisonnement, et guide vers l'application des règles.

Nous venons de montrer que la plupart des problèmes particuliers que l'on cite dans les éléments de l'arithmétique comme conduisant à l'opération de la division sont compris dans le problème général auquel répond la Division, telle que nous l'avons définie. Souvent le problème se présente en conformité directe avec cette définition. Supposons que l'on donne la surface S d'un rectangle, dont la base b est également connue, et que l'on demande la hauteur h. La hauteur demandée h est le nombre qui multiplié par b donne pour produit S; elle est donc, d'après la définition, le quotient de S par b. Et l'on peut considérer comme équivalentes les relations

$$b \times h = S$$

$$h = \frac{S}{b}$$

Dans l'égalité $D = d \times q$, les deux nombres d et q figurent comme facteurs d'un produit connu, D. On peut permuter les deux nombres d et q;

Si d est pris pour diviseur, q est le quotient ;

Si q est pris pour diviseur, d sera le quotient.

Retournant le problème de la division, on peut demander par quel nombre il faut diviser un dividende donné, D, pour obtenir un quotient donné q. C'est évidemment, d'après la définition de la division, demander quel est le facteur qu'il faut multiplier par le facteur connu q pour obtenir le produit donné D. Ce facteur inconnu, quel que soit le nom sous lequel on le désigne, est le résultat de la division du produit D par le facteur connu, q. Et la réponse est $d = \frac{D}{q}$. Il suffit, pour la trouver, de réfléchir au sens précis de la division, et de considérer le caractère essentiel de l'opération, et non le mécanisme et les mots.

Il est encore utile de faire la remarque que la division de deux nombres équivaut à la multiplication du dividende par l'inverse du diviseur.

On appelle inverse d'un nombre le quotient de la division de l'unité par ce nombre. Ainsi l'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$, et en général l'inverse d'un nombre entier n est la fraction ordinaire $\frac{1}{n}$.

L'inverse d'une fraction ordinaire, telle que $\frac{2}{3}$, est la fraction renversée $\frac{3}{2}$, puisque d'après la règle de la multiplication

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

Les deux nombres $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont dits inverses ou réciproques, $\frac{3}{2}$ est l'inverse de $\frac{2}{3}$, et réciproquement $\frac{2}{3}$ est l'inverse de $\frac{3}{2}$.

Nous voulons démontrer l'identité

$$\frac{D}{d} = D \times \frac{1}{d}$$

dans laquelle D et d sont donnés, et $\frac{1}{d}$ exprime le quotient *effectué* de l'unité par le nombre d.

On a identiquement

$$1 = d \times \frac{1}{d}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par D, nous obtiendrons

$$D = d \times \frac{1}{d} \times D$$

ou

$$D = d \times \left(\frac{1}{d} \times D\right)$$

en représentant par $\left(\frac{1}{d} \times D\right)$ le produit effectué du dividende par l'inverse du diviseur.

Cette dernière égalité montre que le produit effectué $\left(\frac{1}{d} \times D\right)$ est bien le nombre qui multiplié par le diviseur d donne pour produit le dividende D, c'est donc bien le quotient de D par d.

Cette remarque donne la règle de la division d'un nombre quelconque D par une fraction telle que $\frac{2}{3}$, le quotient est égal au dividende D multiplié par la fraction diviseur renversée.

$$\frac{D}{\frac{2}{3}} = D \times \frac{3}{2}$$

Principes généraux.

L'opération même de la division est basée sur différents théorèmes dont nous allons rappeler les plus importants.

Théorème I. — *On peut multiplier les deux termes d'une Division, c'est-à-dire le Dividende et le Diviseur, par un même nombre déterminé, sans altérer le Quotient.*

Soit q le quotient de la division du nombre D par le nombre d, on a l'égalité

$$D = d \times q$$

multiplions les deux nombres de cette égalité par un nombre fini et déterminé m, nous obtiendrons une nouvelle égalité

$$D \times m = d \times q \times m$$

ce qui peut s'écrire

$$D . m = d . m \times q$$

puisque l'on a seulement interverti l'ordre des facteurs du 2ᵉ membre. Cette dernière égalité signifie que le nombre q, quotient de D par d, est aussi le quotient du nombre Dm par le nombre dm.

On pourrait dire que l'on peut aussi diviser les deux termes de la division par un même nombre ; mais la division par un nombre déterminé m étant équivalente à la multiplication par l'inverse $\frac{1}{m}$, l'énoncé, réduit à la multiplication, est suffisant.

Il est bien entendu qu'il s'agit, dans cette proposition, du vrai quotient, du quotient exact.

Si l'on réduisait la division à la recherche de la partie entière du quotient, la proposition correspondante devrait être énoncée ainsi :

Si l'on multiplie les deux termes d'une division par un même nombre, la partie entière du quotient ne change pas, mais le reste est multiplié par ce nombre.

Soit E la partie entière du quotient, r le reste.

On a la relation

$$D = d \times E + r$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par un nombre déterminé, nous obtenons

$$D \times m = d \times E \times m + r \times m$$

ou

$$D . m = d . m \times E + r \times m$$

Cette égalité fait voir que le nouveau dividende Dm contient le nouveau diviseur dm un nombre entier de fois E, plus la quantité $r \times m$.

Dans la 1re division, r est inférieur à d; donc, dans la 2e division, $r \times m$ est inférieur à $d \times m$, et E est bien le plus grand nombre de fois que le nombre dm se trouve contenu dans Dm. Le nombre E représente ainsi la partie entière du quotient, aussi bien dans la seconde division que dans la première ; mais le reste de la seconde est égal au reste de la première multiplié par m.

Théorème II. — *Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, on peut diviser le dividende par le premier facteur, puis le résultat par le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur.*

Soit D le dividende, d le diviseur tel que $d = a \times b \times c$.
Nous divisons D par a, soit q_1 le quotient

$$D = a \times q_1$$

Nous divisons q_1 par le 2e facteur b, soit q_2 le quotient

$$q_1 = b \times q_2$$

Enfin nous divisons q_2 par le 3e facteur c, soit q_3 le quotient

$$q_2 = c \times q_3$$

Multiplions ces égalités membre à membre, nous obtenons

$$D \times q_1 \times q_2 = (a \times q_1) \times (b \times q_2) \times (c \times q_3$$

ou, en appliquant les principes démontrés pour les produits de facteurs consécutifs,

$$D \times (q_1 \times q_2) = (a.b.c) \times q_3 \times (q_1 \times q_2)$$

et si nous divisons les deux membres de cette nouvelle égalité par le même nombre $(q_1 \times q_2)$, nous trouvons

$$D = (a.b.c) \times q_3$$

ou

$$D = d \times q_3$$

q_3, le résultat obtenu par la dernière des divisions successives, est donc bien le quotient de D par d.

Théorème III. — *Pour diviser une somme composée de plusieurs termes, par un nombre déterminé, il suffit de diviser chaque terme par ce nombre.*

Ainsi

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

car si l'on multiplie les deux expressions par m, on trouve $a+b+c$ de part et d'autre; puisque le quotient $\frac{a+b+c}{m}$ est, par définition, le nombre qui, multiplié par m, donne pour produit $a+b+c$, et qu'il a été démontré que pour multiplier la somme $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$ par m, il suffit de multiplier par m chacun des termes de la somme, ce qui donne bien $a+b+c$.

On voit, en même temps, que la somme des quotients $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$ peut être remplacée par le quotient unique de la somme des dividendes par le diviseur commun m.

On pouvait considérer ce théorème comme démontré à l'article de la multiplication, puisque la division par m équivaut à la multiplication par $\frac{1}{m}$.

Ces théorèmes justifient les diverses transformations et simplifications à l'aide desquelles on arrive à déterminer le quotient de deux nombres donnés.

S'agit-il de la division de deux nombres décimaux? On supprime la virgule au diviseur, on rend le diviseur entier, et l'on déplace la virgule dans le dividende d'autant de rangs vers la droite que l'on a supprimé de chiffres décimaux au diviseur. Le principe de cette transformation se trouve dans le théorème I. On a multiplié les deux termes de la division par un même nombre, tel que 10, ou 100, ou 1 000, etc., le quotient n'est nullement altéré. L'opération est devenue plus claire, plus facile. Soit, par exemple, à diviser 834,97625 par 0,012.

Le quotient de ces deux nombres est le même que celui des deux nombres

834 976,25 et 12

Le nouveau diviseur 12 étant un nombre entier, il est permis pour trouver le quotient, entendu dans son acception générale que nous avons suffisamment définie, de l'envisager sous un point de vue particulier, la 12ᵉ partie du dividende. Pour trouver la 12ᵉ partie du dividende, nous le décomposons en portions dont nous prenons le 12ᵉ, d'après le théorème III. Nous prenons d'abord le 12ᵉ du plus grand multiple de 12, 72, que nous apercevons comme contenu dans 83 (dizaines de mille), puis joignant le reste 11 (dizaines de mille) aux 4 (mille), nous prenons le 12ᵉ du plus grand nultiple de 12, 108, que nous voyons contenu dans 114, et ainsi de suite, nous pouvons évaluer le 12ᵉ de tout le dividende, soit exactement, soit avec une approximation aussi précise que l'on désire.

$$834\,976{,}25$$

$$\frac{1}{12} \qquad 69\,581{,}354166\ldots\ldots$$

$$\text{Quotient exact} \qquad 69\,581\,\frac{17}{48}$$

Pour trouver le quotient exact, nous avons pris le 12ᵉ des multiples de 12 que nous avons reconnus dans les portions successives du dividende, et après avoir ainsi déterminé la partie entière du quotient, nous avons reconnu que le reste était 4,25 ou $\frac{425}{100}$ dont le 12^e est $\frac{425}{1200}$ ou en simplifiant, toujours par l'application du théorème I,

$$\frac{17}{48}$$

Les principes restent exactement les mêmes, que le diviseur soit un petit nombre ou un grand nombre. Seulement, dès que le diviseur dépasse les limites de la table de multiplication connue du calculateur, celui-ci n'aperçoit plus aisément les multiples du diviseur, et les restes que l'on trouverait après avoir retranché du dividende ces multiples du diviseur. C'est pour faciliter cette recherche qu'a été imaginée la règle ordinaire de la division. Supposons, par exemple, que le diviseur soit 92 au lieu de 12

$$\begin{array}{l|l}
834976{,}25 & 92 \\ \cline{2-2}
\;697 & 9075{,}82\ldots \\
\;\;536 & \\
\;\;\;762 & \\
\;\;\;\;265 &
\end{array}$$

On prend d'abord dans le dividende 834 (mille), et l'on cherche le plus grand multiple de 92 contenu dans 834, le plus grand nombre de fois que 92 se trouve contenu dans 834, et l'on obtient facilement ce nombre en comparant seulement 83 du dividende à 9 du diviseur, on trouve 9, c'est le premier chiffre du quotient, il exprime des mille comme les 834 du dividende. Les 834 (mille) peuvent être considérés comme composés de 92×9 ou 828 (mille), dont la 92^e partie est 9 (mille), et d'un reste 6 (mille) que l'on reporte avec les autres parties du dividende d'ordres inférieurs aux mille, de sorte que le nombre des mille du reste étant inférieur à 92, on ne trouvera plus de mille au quotient, et il n'y a plus qu'à chercher les centaines, dizaines, successivement, d'après les mêmes principes et les mêmes moyens.

Nous avons dit dès le début que le quotient de la division de deux nombres s'indique par la notation $\frac{D}{d}$, adoptée pour les fractions ordinaires. Cela vient de ce que le quotient de deux nombres entiers, tels que 5 et 7, est effectivement égal à la fraction ordinaire $\frac{5}{7}$, ayant pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur.

Mais en écrivant le quotient sous la forme $\frac{D}{d}$, on n'entend nullement que le dividende et le diviseur soient des nombres entiers; les théorèmes sont établis pour des nombres quelconques, D et d peuvent être des nombres entiers, décimaux, fractionnaires, déterminés par des opérations plus ou moins compliquées; l'expression $\frac{D}{d}$ peut être conservée dans les calculs, on l'appelle quotient indiqué, ou fraction quelconque, ou encore rapport. Ces quotients indiqués, dont les termes sont de forme quelconque, sont soumises aux mêmes règles, présentent les mêmes propriétés que les fractions ordinaires à termes entiers.

Ainsi l'on peut multiplier les deux termes D et d par un même nombre, la valeur de la fraction $\frac{D}{d}$ ne change pas. Nous l'avons déjà démontré, la démonstration ne supposait aucune condition particulière restrictive imposée aux nombres D et d, elle est générale.

Si l'on considère deux fractions, on peut les réduire au même dénominateur, au même numérateur si l'on veut. C'est une conséquence du principe précédent.

On pourra donc opérer l'addition ou la soustraction de fractions quelconques, en les réduisant préalablement au même dénominateur.

$$\frac{D}{d}+\frac{D'}{d'}+\frac{D''}{d''}=\frac{D\,d'\,d''+D'\,d\,d''+D''\,d\,d'}{d.d'.d''}$$

$$\frac{D}{d}-\frac{D'}{d'}=\frac{D\,d'-D'd}{d.d'}$$

Théorème. — *Le produit de plusieurs fractions quelconques est égal à une fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs, et pour dénominateur le produit des dénominateurs des fractions proposées.*

Ainsi

$$\frac{D}{d} \times \frac{D'}{d'} \times \frac{D''}{d''} = \frac{D.D'.D''}{d.d'.d''}$$

Désignons respectivement par q, q', q'' les quotients effectués qui correspondent aux quotients indiqués $\frac{D}{d}, \frac{D'}{d'}, \frac{D''}{d''}$.

On a les relations

$$D = d.q$$
$$D = d'.q'$$
$$D = d''.q''$$

En multipliant ces égalités membre à membre on obtient

$$D.D'.D'' = d\,d'\,d''\,.\,q\,q'\,q'' \qquad (1)$$

Si l'on désigne par Q le quotient effectué du produit $D.D'.D''$ par le produit $d\,d'\,d''$, on aura

$$D.D'.D'' = d.d'.d''.Q \qquad (2)$$

En comparant les égalités (1) et (2), on reconnaît que nécessairement $Q = q.q'.q''$.

C'est-à-dire que la fraction $\frac{D.D'.D''}{d.d'.d''}$ donnera bien le même résultat que le produit des résultats définis par les fractions $\frac{D}{d}, \frac{D'}{d'}, \frac{D''}{d''}$.

La démonstration, faite pour des fractions quelconques, comprend le cas où quelques facteurs seraient des nombres entiers ou seulement présenteraient la forme entière, sans indication d'aucune division. Ce cas particulier est compris dans la démonstration générale, dans laquelle il suffit de faire le dénominateur égal à 1 pour avoir une expression entière.

Ainsi

$$\frac{D}{d} \times D' \times \frac{D''}{d''} = \frac{D.D'.D''}{d.d''}$$

Nous avons déjà fait observer que pour avoir l'inverse d'une fraction ordinaire à termes entiers, il suffit de renverser les termes de cette fraction.

Ainsi l'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$.

Cette règle s'applique aux fractions quelconques.

Toute expression de la forme $\frac{A}{B}$ a pour inverse $\frac{B}{A}$. car, d'après le théorème précédent, le produit de ces deux quantités équivaut à $\frac{A \times B}{B \times A}$, c'est-à-dire à 1.

Ainsi

$$\frac{D}{\frac{A}{B}} = D \times \frac{B}{A} \text{ ou } \frac{D \times B}{A}$$

Théorème. — *Le quotient d'un nombre par une fraction quelconque est égal au produit de ce nombre par la fraction renversée.*

Le quotient de D par $\frac{A}{B}$ est bien égal à $D \times \frac{B}{A}$,

car si l'on multiplie cette dernière expression par $\frac{A}{B}$, on obtient

$$D \times \frac{B}{A} \times \frac{A}{B} = D$$

L'expression $D \times \frac{B}{A}$ est d'ailleurs équivalente à $\frac{D \times B}{A}$ d'après la règle démontrée pour la multiplication.

Remarque. — Dans les explications précédentes, on s'appuie constamment sur les principes connus relativement aux produits des facteurs consécutifs : « On peut intervertir l'ordre des facteurs. » « On peut remplacer des facteurs successifs par leur produit effectué, et réciproquement. » Ces principes sont reconnus exacts, d'abord pour des facteurs entiers, ensuite pour des facteurs mis sous la forme de fractions ordinaires à termes entiers, et enfin pour des facteurs quelconques, même pour des facteurs incommensurables, que l'on peut remplacer, avec une approximation indéfinie, par des facteurs commensurables ayant la forme de fractions ordinaires.

PREUVE PAR 9 DE LA DIVISION.

Si l'opération conduit à un reste nul, le dividende doit être exactement le produit du diviseur par le quotient trouvé, et l'on fera la preuve par 9 absolument comme pour une multiplication, en considérant le diviseur et le quotient comme les facteurs, et le dividende comme le produit.

```
1.048.576   4 | 512    8
   24.57      |------
    4.096     | 2048   5
        0
```

Le diviseur est un multiple de 9, plus 8.

Le quotient trouvé est multiple de 9, plus 5.

Leur produit est un multiple de 9, plus 4.

On vérifie, en effet, que le dividende est un multiple de 9, plus 4.

Si l'opération conduit à un reste, il faut considérer le dividende comme égal au produit du diviseur par le quotient déjà formé, plus le reste.

```
467,253 | 68
 59 2   |------
  4 85  | 6,871
    93
    25
```

Le diviseur étant entier, ainsi qu'il convient pour l'exécution de l'opération, le quotient et le reste expriment des unités du même ordre décimal que le dividende.

On peut faire abstraction de la virgule, et poser comme conséquence des calculs effectués, l'égalité

$$467\,253 = 68 \times 6\,871 + 25$$

Le reste de la division par 9 du dividende, doit être égal au reste que donne la somme des restes du produit du diviseur par le quotient et du reste même de l'opération.

Le diviseur donne pour reste à 9	5
Le quotient	4
Leur produit	2
Le reste de la division	7

La somme des deux restes 2 + 7 donnant 9, le dividende doit être multiple exact de 9. C'est bien ce que l'on vérifie en faisant la somme des chiffres.

On peut faire la preuve par 9 après une division partielle, avant d'avoir abaissé successivement tous les chiffres du dividende. Mais alors il ne faut compter au dividende que les chiffres déjà employés.

Ainsi, dans l'opération précédente, on peut faire la preuve par 9 après avoir trouvé les 2 premiers chiffres du quotient et le reste correspondant au 2e chiffre.

	$4672 =$	68×68	$+ 48$
Restes de la division par 9	1	7	3

La somme des deux restes 7 et 3 donne 10, reste à 9, 1.

La portion, 4 672, le dividende déjà employé, donne bien 1.

Simplifications et abréviations.

DIVISION PAR 9.

La division par 9 équivaut à la multiplication par $\frac{1}{9}$.

$$\frac{1}{9} = 0{,}11111\ldots\ldots$$

$$\frac{2}{9} = 0{,}22222\ldots\ldots$$

etc.

Un nombre d'un seul chiffre divisé par 9 donne pour quotient une fraction décimale périodique simple, ayant pour période le nombre exprimé par le chiffre proposé. Cette remarque permet de donner immédiatement le quotient d'un nombre exprimé par un seul chiffre significatif suivi d'un nombre quelconque de zéros.

Ainsi :

$$\frac{40\,000\,000}{9} = 4\,444\,444{,}44\ldots.$$

Un nombre de 2 chiffres, divisé par 9, donne d'abord un quotient entier que l'on sait trouver immédiatement, suivi d'une fraction décimale périodique simple, ayant pour période le reste de la division du nombre par 9.

Ainsi :

$$\frac{12}{9} = 1{,}3333 \qquad \frac{1200}{9} = 133{,}33\ldots$$

$$\frac{73}{9} = 8{,}11111 \qquad \frac{73000}{9} = 8111{,}11\ldots$$

$$\frac{87}{9} = 9{,}6666 \qquad \frac{870000}{9} = 96666{,}66\ldots$$

La connaissance de la table de multiplication, étendue au delà des limites ordinaires, permet de former immédiatement le quotient de la division par 9 d'un nombre de 3 chiffres, au moins jusqu'à 200.

Ainsi :

$$\frac{177}{9} = 19{,}6666\ldots. \qquad \frac{17{,}7}{9} = 1{,}9666\ldots.$$

$$\frac{183}{9} = 20{,}3333\ldots. \qquad \frac{1{,}83}{9} = 0{,}20333\ldots$$

$$\frac{197}{9} = 21{,}888\ldots.. \qquad \frac{0{,}197}{9} = 0{,}021888\ldots$$

DIVISION PAR 99.

L'inverse de 99, c'est-à-dire le quotient de l'unité par 99, a pour valeur $\frac{1}{99} = 0{,}01010101\ldots$

On peut, d'après cela, former le quotient de la division d'un nombre par 99 en prenant le centième du nombre, puis le centième du centième et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on parvienne à un ordre décimal qui paraît négligeable.

Un nombre d'un seul chiffre donnera une période composée de zéro et du chiffre même. Ainsi $\frac{7}{99} = 0{,}070707\ldots$

Un nombre de deux chiffres donne une période composée du nombre lui-même.

$$\frac{52}{99} = 0{,}525252\ldots$$

Un nombre de trois chiffres, tel que 687, donnera d'abord un quotient entier, le chiffre des centaines, 6, et une fraction décimale périodique simple, dont la période est $87 + 6 = 93$

$$\frac{687}{99} = 6{,}939393\ldots$$
$$\frac{612}{99} = 6{,}181818\ldots$$

Cependant il peut arriver que la partie entière du quotient soit supérieure de 1 unité au chiffre des centaines. Ainsi, à partir de $693 = 700 - 7$, le quotient entier deviendra 7, et le reste serait exprimé par un seul chiffre, la période est alors composée de zéro et de ce chiffre.

$$\frac{695}{99} = 7{,}020202\ldots$$
$$\frac{696}{99} = 7{,}030303\ldots$$
$$\frac{697}{99} = 7{,}040404\ldots$$

Enfin, un nombre quelconque, écrit avec beaucoup de chiffres, divisé par 99, donnera un quotient dont la formation sera facile d'après la règle indiquée.

Soit 49657,65 à diviser par 99

Méthode rapide.		Division ordinaire.	
$\frac{1}{100}$	496,5765	49657,65	99
	4,9657	157	501,5924....
	0,0497	586	
	0,0005	915	
quotient	501,5924	240	
		420	
		24	

La règle que nous signalons est avantageuse dans les cas surtout où l'on ne tient pas à connaître le quotient avec beaucoup de chiffres décimaux. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, si l'on demandait seulement le quotient à 0,01 près, on pourrait écrire simplement

$\frac{1}{100}$	496,576
	4,966
	49
quotient	501,591 à 0,01 près.

Lorsqu'au contraire on désire une grande précision, il vaudra mieux effectuer la division suivant la règle ordinaire; dès que l'on arrive au reste, après avoir abaissé tous les chiffres du dividende, on voit la période qui va suivre, elle est marquée par le dernier reste, comme 24 dans l'exemple ci-dessus.

DIVISION PAR 198, 297, 396, ETC.

On divisera par 198, par 297, 396, etc., en divisant d'abord par 2, par 3, par 4, puis par 99.

Soit 57 825 à diviser par 396.

Méthode rapide.

$\frac{1}{400}$	144,5625
1 °/° du précédt	1,4456
	144
	1
quotient	146,0226 à moins de 0,001 près.

Division ordinaire.

```
57825 | 396
1822  |--------
 2385 | 146,0227
   900
   1080
    2880
```

Ces abréviations sont avantageuses dans les calculs qui ne comportent pas une très grande précision, comme les règlements de compte où l'on n'a besoin de connaître le résultat qu'à 1 centime près. Il nous arrivera, par exemple, dans les calculs relatifs aux obligations que nous nous proposons d'exposer dans la suite, d'avoir pour diviseur le nombre 0.0198 qui est l'intérêt semestriel de 1 franc, d'après le taux d'intérêt composé de 4 °/₀. En multipliant le dividende par 10 000, on a pour diviseur 198. On effectue très vite la division en divisant par 200, puis ajoutant le centième, et le centième du centième, etc., jusqu'à ce que l'on arrive à un ordre décimal que l'on puisse négliger.

Ainsi, quand on cherche la valeur des obligations de la ville de Paris 1855-60, au 1er septembre 1888, d'après le taux de 4 °/₀, abstraction faite des impôts, on est amené à diviser 103 714 par 198

Méthode abrégée.

	1037,14
$\frac{1}{2}$	518,57
+ 1 °/₀	5,185
+ 1 °/₀ du précédt	51
Résultat	523,80

Division ordinaire.

```
103714 | 198
  471  |--------
   754 | 523,80
   1600
    160
```

DIVISION PAR 5, 50, 500, OU 0,5 0,05, ETC.

A la division par 5, on substitue avec avantage la multiplication par 0,2, surtout pour le calcul mental; nous voyons plus rapidement le double que le cinquième d'un nombre.

Ainsi, pour trouver sans hésitation le $\frac{1}{5}$ du nombre 738, on double ce nombre, 1476, et l'on divise par 10, ce qui donne 147,6. La multiplication par $\frac{2}{5}$, qui contient la division par 5 et la multiplication par 2, peut être remplacée par la multiplication par 0,4.

A $\frac{3}{5}$ on substituera 0,6.

A $\frac{4}{5}$ 0,8.

Ainsi, dans la négociation de valeurs allemandes, on a souvent l'occasion de convertir des francs en reichsmarks et réciproquement, d'après la base de 4 reichsmarks pour 5 francs. D'après cela, si l'on demande la valeur de 700 francs en monnaie allemande, on pourra répondre immédiatement : reichsmarks 560.

On divise par 50 en divisant par 100 et multipliant par 2.

On divise par 500 en divisant par 1000 et multipliant par 2.

On trouve des applications de cette remarque dans diverses questions relatives au service des obligations d'un emprunt. La plupart des obligations des emprunts publics sont remboursables à 500 francs. Supposons qu'une compagnie de chemins de fer dispose d'une somme de 3 768 649 francs, pour le service de l'amortissement. Combien d'obligations de 500 francs pourra-t-elle rembourser?

Il suffit, pour donner la réponse, de doubler le nombre des mille, en ajoutant 1 au nombre doublé, pour tenir compte des 649 francs. La réponse est donc 7 537 obligations.

Autre exemple. — Combien faut-il émettre d'obligations de 500 francs pour un capital nominal de 23 500 000?

En doublant le nombre des mille, on trouve la réponse : 47 000.

Les divisions par 0,5, 0,05, 0,005 se changent en multiplications par 2, 20, 200.

DIVISION PAR 15.

Le nombre 15 étant égal à $10 \times \frac{3}{2}$, on divisera un nombre par 15 en divisant par 10 et prenant les $\frac{2}{3}$ du résultat. Cette règle est encore mise en évidence par l'égalité

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{30}, \text{ soit les } \frac{2}{3} \text{ du dixième.}$$

Soit 51 à diviser par 15.

Les $\frac{2}{3}$ de 51 donnent 34, donc $\frac{51}{15} = 3{,}4$.

Pour diviser un nombre par 1,5 il suffit de prendre les $\frac{2}{3}$ du nombre, ou de retrancher du nombre donné le tiers de sa valeur.

Pour diviser un nombre par 0,15, il suffit d'en prendre les $\frac{2}{3}$ en multipliant par 10.

Exemple : Combien faut-il de timbres de 0,15 pour faire une somme de $8^{fr},40$?

Les $\frac{2}{3}$ de 84 donnent 56 : c'est le nombre demandé.

DIVISION PAR 25 ET PAR DES MULTIPLES DE 25 TELS QUE 175, 225, 275.

Puisque le nombre 25 est égal à $\frac{100}{4}$, la division par 25 équivaut à la multiplication par $\frac{4}{100}$.

Exemple : $$\frac{762}{25} = 7{,}62 \times 4 = 30{,}48$$

Autre exemple. — Combien faut-il de livres sterling pour faire une somme de 83 250 francs, si la livre est évaluée à 25 francs ?

$$832{,}5 \times 4 = 3330$$

On sait que tout nombre terminé par 25, 50, 75, est exactement divisible par 25. On utilise cette remarque pour simplifier les divisions dont les deux termes présentent le caractère de divisibilité par 25.

Soit à effectuer la division de 93 275 par 4 625.

On substitue aux deux nombres proposés les produits de ces nombres par 4, divisés par 100.

Pour le dividende, on commence la multiplication par 4 au chiffre 2, en ajoutant au produit 8 la retenue 3, qui provient de $0{,}75 \times 4 = 3$

Pour le diviseur, on commence la multiplication par 4 au chiffre 6, en ajoutant au produit 24 la retenue 1, qui provient de $0{,}25 \times 4$. On obtient ainsi la simplification

$$\frac{93275}{4625} = \frac{3731}{185}$$

Pour diviser un nombre donné par des multiples de 25, tels que 175, 225, 275, on remarquera que

$$175 = 25 \times 7 = \frac{700}{4}$$

$$225 = 25 \times 9 = \frac{900}{4}$$

$$275 = 25 \times 11 = \frac{1100}{4}$$

Les divisions par 175, 225, 275 pourront donc s'effectuer en multipliant par 4 et divisant par 100 d'abord, puis par 7, par 9, par 11.

EXEMPLES : $\frac{72000}{175} = \frac{2880}{7} = 411\frac{3}{7}$

$\frac{83000}{225} = \frac{3320}{9} = 368\frac{8}{9}$

$\frac{92784}{275} = \frac{3711,36}{11} = 337,396363$

La division par 0,25 équivaut à la multiplication par 4.
La division par 2,50 équivaut à la multiplication par 0,4.
La division par 0,025 équivaut à la multiplication par 40.

DIVISION PAR 75 OU PAR 7,5 OU 0,75.

La division par 0,75 équivaut à la multiplication par $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire qu'il suffit d'ajouter au nombre proposé le $\frac{1}{3}$ de sa valeur. Ainsi : combien de bouteilles de 75 centilitres pourront être remplies avec le vin contenu dans un tonneau de 228 litres?

Au nombre 228 ajoutons le tiers de lui-même.

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{3} & \underline{76} \\ & 304 \end{array}$$ nombre des bouteilles.

La division par 7,5 se fera de la même façon; seulement, en ajoutant au dividende le tiers de sa valeur, on divisera par 10. Exemple : Combien faut-il de coupons de $7^{fr},50$ pour faire une somme de 840 francs?

Il suffit d'ajouter à 84 le $\frac{1}{3}$ de 84, c'est-à-dire 28 pour avoir la réponse, 112.

La division par 75 se fera en ajoutant au dividende $\frac{1}{3}$ de sa valeur et divisant par 100.

Exemple. — L'hectolitre de froment pèse 75 kilogr. Combien y a-t-il d'hectolitres dans un chargement de 14 400 kilg. ?

$\frac{14400}{75} = 144 + \frac{144}{3} = 192$ hectolitres.

DIVISION PAR 125
ET SES MULTIPLES OU SOUS-MULTIPLES, TELS QUE 375, 625, 875, OU 12,5; 37,5, ETC.

On sait que

$$125 = 1000 \times \frac{1}{8}$$

$$375 = 1000 \times \frac{3}{8}$$

$$625 = 1000 \times \frac{5}{8}$$

$$875 = 1000 \times \frac{7}{8}$$

Pour diviser un nombre donné par 125, il suffira de le diviser par 1000 et de multiplier par 8.

$$\frac{57849,64}{125} = 57,84964 \times 8 = 462,79712$$

Pour diviser un nombre par 375, il suffit de le diviser par 1000, multiplier par 8 et prendre le $\frac{1}{3}$ du produit.

$$\frac{49.373.856}{375} = \frac{49373,856 \times 8}{3} = 131663,616$$

Pour diviser un nombre par 625, il suffit de le diviser par 1000, multiplier par 8 et diviser par 5; la multiplication par $\frac{8}{5}$ équivaut à la multiplication par 1,6; donc, après avoir divisé le nombre par 1000, il suffira d'ajouter à ce résultat les 0,6 de sa valeur.

Soit le nombre 89.675.389 à diviser par 625.

$$\begin{array}{l} 89675,389 \quad \times 1,6 \\ 53805,2334 \\ \hline 143480,6224 \end{array}$$ quotient demandé.

Pour diviser par 875, il suffit de diviser par 1000, et d'ajouter au résultat $\frac{1}{7}$ de sa valeur.

Soit 46.495.867 à diviser par 875.

$$\begin{array}{rr} & 46495,867 \\ +\frac{1}{7} & 6642,2667 \\ \hline & 53138,1337 \end{array}$$

quotient demandé à moins de $\frac{1}{10000}$ près.

DIVISION PAR LE NOMBRE π.

On sait que la circonférence d'un cercle est égal au diamètre multiplié par le nombre fixe, constant, que l'on nomme le nombre π.

C'est un nombre incommensurable que l'on peut calculer avec une approximation indéfinie. On trouve

$$\pi = 3,14159265358 9\ldots$$

On substitue souvent à cette valeur de π la valeur approchée par excès 3,1416.

La division par le nombre π équivaut à la multiplication par l'inverse $\frac{1}{\pi}$

$$\frac{1}{\pi} = 0,318309886183$$

On peut se contenter de huit chiffres décimaux et prendre

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830989$$

(C'est un nombre que l'on retient aisément par cœur, en se rappelant les 3 journées de 1830, comme un nouveau 89.)

Le quotient d'un nombre rond, ou du moins écrit avec un petit nombre de chiffres significatifs, est très rapidement calculé en multipliant $\frac{1}{\pi}$ par le dividende proposé.

S'agit-il, par exemple, de calculer le rayon du globe terrestre supposé sphérique? Il a pour valeur en mètres :

$$\frac{20\,000\,000}{\pi} = \frac{1}{\pi} \times 20\,000\,000$$

ce qui donne : $3\,183\,098,9 \times 2 = 6\,366\,197^{m},8$.

Nous rencontrerons dans les exercices de géométrie pratique de nombreuses simplifications du même genre.

DIVISION PAR UN NOMBRE DE LA FORME $1 - \alpha$, α ÉTANT UNE FRACTION TRÈS PETITE.

Nous verrons dans la suite, lorsque nous étudierons les questions d'escompte et de change, que l'on est souvent conduit à des divisions dans lesquelles le diviseur est très rapproché de l'unité ou d'un nombre rond tel que 100 ou 1000.

Ainsi le diviseur peut être de la forme $1 - \alpha$, comme $1 - \frac{2}{300}$

ou de la forme $100 - \beta$, comme $100 - \frac{2}{3}$

ou de la forme $1000 - \gamma$, comme $1000 - \frac{7}{8}$.

Les formes $100 - \beta$, $1000 - \gamma$, peuvent être ramenées à $1 - \alpha$.

$$100 - \beta = 100\left(1 - \frac{\beta}{100}\right)$$

$$1000 - \gamma = 1000\left(1 - \frac{\gamma}{1000}\right)$$

Pour diviser par $100 - \beta$, il suffit de diviser d'abord par le facteur 100, ensuite le résultat par le 2e facteur $1 - \frac{\beta}{100}$ qui est bien de la forme $1 - \alpha$.

Il nous suffira donc d'étudier la division par $1 - \alpha$. Nous savons que pour diviser un nombre par $1 - \alpha$, il suffit de multiplier ce nombre par l'inverse de $1 - \alpha$. L'inverse de $1 - \alpha$, c'est-à-dire la valeur du quotient $\frac{1}{1 - \alpha}$ peut s'exprimer, avec une approximation indéfinie, par l'unité, plus la suite des puissances entières de α. On a la formule

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots + \alpha^{n-1} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

Pour prouver cette identité, il suffit de montrer que le 2e membre multiplié par $1 - \alpha$, reproduit bien l'unité.

Le 2e membre peut être considéré comme composé de 2 portions ; la première comprenant l'ensemble des termes de forme entière ; la deuxième consistant dans la fraction $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$.

Le produit de la 1re portion par $1 - \alpha$ peut s'obtenir en multipliant d'abord par 1, puis par α et retranchant le 2e produit du premier.

produit par 1	$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots\ldots + \alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}$	
produit par α	$\alpha + \alpha^2 + \ldots\ldots + \alpha^{n-2} + \alpha^{n-1} + \alpha^n$	
différence	1	$-\alpha^n$

Ainsi, la 1re portion du second membre, multipliée par $1 - \alpha$, donne un produit égal à $1 - \alpha^n$;

La 2e portion $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$, multipliée par $1 - \alpha$ donne α^n.

Le produit définitif est donc $1 - \alpha^n + \alpha^n$, ou simplement 1

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, α est une fraction très petite ; les puissances de α vont en décroissant, d'autant plus rapidement que α est plus petit, de sorte que dans les applications, on considérera comme négligeables les puissances de α supérieures à la 3e, ou même quelquefois à la seconde.

Exemple. — Calculer à 0,01 près le quotient de 45 867 par $99\frac{2}{3}$.

Nous remarquons que $99\frac{2}{3} = 100 - \frac{1}{3} = 100\left(1 - \frac{1}{300}\right)$

Nous divisons 45 867 par 100	458,67
nous ajoutons $\frac{1}{300}$ de cette valeur	1,5289
puis $\frac{1}{300}$ de la précédente	5
Quotient	460,20

La division ordinaire donnerait $\dfrac{45867}{99\frac{2}{3}} = \dfrac{45867 \times 3}{299}$

$$\begin{array}{r|l} 137601 & 299 \\ \cline{2-2} 1800 & 460{,}204 \text{ quotient.} \\ 610 & \\ 1200 & \\ ..4 & \end{array}$$

Les résultats concordent; mais la première méthode est plus expéditive que le mécanisme ordinaire de la division.

La division par un nombre de la forme $1 + \alpha$, qui surpasse l'unité d'une très petite quantité, donne lieu à des simplifications analogues, avec cette différence que les termes qui doivent se joindre au terme principal sont alternativement négatifs et positifs. L'inverse de nombre $1 + \alpha$ peut être développé suivant les puissances croissantes de α par la formule

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \ldots$$

Dans la plupart des applications, surtout pour les exercices de calcul mental où l'on ne demande pas une précision absolue, il suffira de prendre dans la série les trois premiers termes $1 - \alpha + \alpha^2$.

Exemple. — Trouver le quotient de 4 725 par 101.

Si l'on observe que

$$\frac{1}{101} = \frac{1}{100 \times 1{,}01} = \frac{1}{100} \times [1 - 0{,}01 + (0{,}01^2) -$$

on obtiendra rapidement le quotient en divisant le dividende proposé 4 725 d'abord par 100, puis retranchant le centième et ajoutant le centième du centième.

Dividende	4725
Centième	47,25
$-\frac{1}{100}$ du précéd[t]	$\overline{1},5275$
$+\frac{1}{100}$ du $\frac{1}{100}$	47
Quotient	46,7822

Division ordinaire.

4725	101
685	46,78217...
790	
830	
220	
180	
790	

approché, par excès, à moins de 0,0001 près.

DIVISION ABRÉGÉE.

A la méthode abrégée d'Oughtred pour la multiplication correspond un procédé qui permet d'abréger un peu la division lorsqu'on ne demande le quotient qu'avec une certaine approximation.

Proposons-nous, par exemple, de calculer à 0,01 près le quotient de 2 700 par 3,945684.

Division ordinaire.

2700000000	3945684
33258960	684,292
16934880	
11521440	
36300720	
.7895640	
...4272	

Division abrégée.

2700000	394568
332592	684,29
16944	
1164	
376	
25	

Le diviseur a été réduit à six chiffres. Sachant d'avance combien le quotient devait avoir de chiffres à la partie entière, nous avons fait abstraction des virgules, tant au diviseur qu'au dividende. Après le premier reste obtenu, au lieu d'écrire un zéro sur la droite, nous avons réduit le diviseur à 5 chiffres, en faisant abstraction du 8; puis après le deuxième reste nous l'avons réduit à 4 chiffres, en supprimant le 6, et ainsi de suite.

En opérant ainsi, nous n'avons pas retranché du dividende le vrai produit du diviseur proposé par le quotient trouvé, mais seulement le produit approché, suivant la méthode d'Oughtred; désignons par E l'écart entre le vrai produit et le produit approché tel qu'il a été effectué. Nous pourrons poser l'égalité

$$2700000 = 394568{,}4 \times 6{,}8429 - E + 25$$

d'où résulte

$$\frac{2.700.000}{394568{,}4} = 6{,}8429 - \frac{E}{394568{,}4} + \frac{25}{394568{,}4}$$

Le quotient 6,8429 est exact à 0,0001 près si la balance des 2 fractions

$$-\frac{E}{394568{,}4} \qquad \frac{25}{394568{,}4}$$

est inférieure à 0 0001.

La fraction $\frac{25}{394568{,}4}$ est inférieure à 7 cent-millièmes. Le maximum de E est $6+8+4+2+9=29$, d'après la théorie de la multiplication abrégée. E a une valeur comprise entre 0 et 29.

Pour $E=0$, la balance des 2 fractions donne

$$\frac{25}{394568{,}4} < 7 \text{ cent-millièmes.}$$

Pour $E=29$, la balance des 2 fractions donne

$$\frac{-29+25}{394568{,}4} = \frac{-4}{394568{,}4}$$

fraction dont la valeur absolue est un peu supérieure à 1 cent-millième, inférieure à 2 cent-millièmes.

On voit, sans s'appuyer sur la division effectuée suivant les règles ordinaires, que le quotient de 2 700 000 par 394568, 4 est bien 6,8429 à moins d'un dix-millième près. Par conséquent le quotient demandé de 2 700 par 3,945684 est 684,29 à moins d'un centième près.

Autre exemple. — Évaluer à 1 millimètre près la valeur de la toise en mesures nouvelles, sachant que 5 130 740 toises valent 10 000 000 mètres.

Division ordinaire.

1000000	513074
4869260	1,94903
2515940	
4636440	
.1877400	
338178	

Division abrégée.

100000	51307
48693	1,949
252	
48	
3	

Dans cette application numérique, le 2^e diviseur réduit 5 130 étant terminé par zéro, on a pu supprimer ce zéro et réduire le dividende partiel à ses 4 premiers chiffres.

Exercices de calcul mental sur la Division.

D. Combien faut-il de timbres-poste de $0^{fr},15$ pour faire la somme $7^{fr},20$?

R. 48.

Il suffit, pour trouver la réponse, de prendre les $\frac{2}{3}$ du nombre des décimes, 72.

D. Comment peut-on payer $5^{fr},65$ en timbres-poste, en employant autant que possible des timbres de $0^{fr},15$?

R. 37 timbres de $0^{fr},15$ et 1 de $0^{fr},10$.

D. Si 15 kilogrammes coûtent $5^{fr},25$, quel est le prix du kilogramme?

R. $0^{fr},35$.

D. 12 litres coûtent $4^{fr},50$. Quel est le prix du litre?

R. $0^{fr},375$.

D. Combien 187 francs valent-ils de florins d'Autriche, en comptant $2^{fr},50$ par florin?

R. florins 74,80.

D. Combien 20 000 francs valent-ils de livres sterling: 1° à raison de 25 francs la livre?

R. £. 800

2° à raison de $25^{fr},25$ la livre?

R. £ 792,08 à 1 centième près.

Ce dernier résultat 792,08 est obtenu rapidement par les remarques suivantes : $25,25 = 25 \times 1,01$. Il suffit alors de diviser d'abord par 25 et de diviser ce premier résultat par 1,01 ou ce qui revient au même de le multiplier par l'inverse de 1,01 qui donne $1 - 0,01 + (0,01)^2$.

D. Combien 10 000 francs valent-ils de roubles, en comptant $252^{fr},50$ pour 100 roubles?

R. 3960,4 roubles à très peu près.

Il a suffi de diviser d'abord par 2,5, ce qui a donné 4 000, de retrancher 40 et d'ajouter 0,40.

D. Quel est le quotient de 18 par la somme $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$?

R. $12 \frac{12}{17}$.

RÈGLE DE TANT POUR CENT

Les 3, 4, 5,... *n* pour 100 d'un nombre équivalent aux 3, 4, 5,... *n* centièmes de ce nombre. Il peut sembler puéril d'établir une règle spéciale pour le calcul de tant pour 100 d'un nombre. Mais si l'on observe que ces sortes de calcul se présentent fréquemment dans les opérations commerciales et qu'il importe de les effectuer avec aisance et rapidité, on reconnaîtra l'utilité de quelques remarques pratiques destinées à éviter dans les opérations des répétitions qui font perdre du temps.

Le tant pour 100 d'un nombre doit, souvent, être ajouté au nombre même, ou en être retranché. En même temps que l'on fait le calcul du tant pour 100, il faut placer les chiffres du résultat de manière à bien préparer l'addition ou la soustraction.

Règle. — On calcule les *n* pour 100 d'un nombre, en le multipliant par *n* et plaçant les chiffres du produit à deux rangs à droite du chiffre du multiplicande que l'on multiplie par *n*, afin d'effectuer en même temps la division par 100 et d'obtenir des nombres dont les chiffres se trouvent bien placés dans leurs colonnes respectives pour l'addition et la soustraction.

Exemple. — Des marchandises ont été achetées 365 847 francs; les frais accessoires augmentent les déboursés des 9 °/₀ du prix d'achat. Quel est le prix de revient?

Achat	365847
Frais 9 °/₀	32926,23
Prix de revient	398773,23

La division par 100 a été effectuée en même temps que la multiplication par 9, par les places relatives attribuées aux chiffres du produit par 9; le 1[er] chiffre de droite du produit par 9 étant écrit à 2 rangs sur la droite du multiplicande, exprime des centimes, les chiffres du produit par 9 expriment ainsi des unités cent fois plus petites que les chiffres du multiplicande.

Si le nombre qui exprime le tant pour 100 est un nombre décimal, tel que 9,85, on effectue d'abord le produit partiel par 9 comme précédemment, puis les autres produits partiels en appuyant d'un rang vers la droite pour chaque chiffre du multiplicateur qui exprime des unités d'un ordre 10 fois plus faible.

Nombre proposé	365847
	32926,23
	2926,776
	182,9235
Nombre augmenté de 9,85 °/₀	401882,9295

Si le nombre qui exprime le tant pour 100 est une fraction aliquote, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ °/₀, on prend la moitié, le quart, le huitième du nombre donné, et l'on divise en même temps par 100, en plaçant les chiffres à 2 rangs sur la droite relativement à ceux du nombre sur lesquels porte la division.

EXEMPLES : Des marchandises sont achetées	86376,85
au prix d'achat s'aioute une commission de $\frac{1}{2}$ °/₀	431,88425
TOTAL.	86808,73425

Des marchandises ont été vendues	137863
du prix de vente il faut déduire pour frais divers $\frac{1}{4}$ °/₀	344,6575
Prix net.	137518,3425

Un agent de change a négocié des fonds publics pour la somme de 292396,75; l'acheteur doit payer en outre un courtage de $\frac{1}{8}$ °/₀ 365,49

	292396,75
	365,49
Total à payer. . . .	292762,24

Si le tant pour cent est exprimé par un nombre fractionnaire tel que $3\frac{5}{8}$ °/₀, on peut procéder par parties successives, calculer ici d'abord 3 °/₀, puis $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$, et enfin $\frac{1}{8}$ °/₀.

Nombre primitif	87825,37
augmentation $3\frac{5}{8}$ °/₀	2634,7611
	439,12685
	109,7817125
TOTAL.	91009,0396625

Le tant pour 1 000 se calcule et se place d'après les mêmes principes, le premier chiffre du produit par le nombre entier de millièmes doit être placé à 3 rangs sur la droite du multiplicande.

EXEMPLE I. Le kilogramme d'or se vend 3437 francs.

plus une prime de 6 °/₀₀	20,622
TOTAL.	3457,622

II. Des marchandises sont assurées pour une

valeur de.	483925 fr.
remboursables en cas de sinistre, moins une prime de 5 °/₀₀.	2419,625
Prix net à recevoir.	481505,375

Il y a parfois avantage à substituer à l'expression du tant pour 100 ou pour 1000 une fraction ordinaire équivalente, mais plus simple. Ainsi, les $12\frac{1}{2}$ °/₀ d'une quantité équivalent à $\frac{1}{8}$ de cette quantité. Les $12\frac{1}{2}$ °/₀₀ seraient $\frac{1}{80}$. Les 5 °/₀ valent $\frac{1}{20}$, les $2\frac{1}{2}$ °/₀ $\frac{1}{40}$, etc.

Au lieu de $\frac{1}{8}$ °/₀ on dit 1,25 pour 1 000 et réciproquement.

0,20 pour 100, 0,40 pour 100 équivalent à 2 pour 1000, 4 pour 1000.

Questions diverses sur le tant pour cent.

Problème. — *Un négociant achète des marchandises pour la somme de 573 896fr,45. Il doit payer en outre une commission de $\frac{1}{2}$ %; les frais de transport augmentent ces premiers déboursés de 8 %. Il se propose de revendre les marchandises de manière à réaliser un bénéfice net de 15 %. Quel doit être le prix de vente?*

Achat		573896,45
Commission $\frac{1}{2}$ %		2869,48
Ensemble		576765,93
Frais de transport 8 %		46141,2744
Total des déboursés		622907,20
Bénéfice 15 %	10	62290,72
	5	31145,36
Prix de vente		716343,28

Problème. — *Un lingot, composé d'argent et de cuivre, pèse 13k,625. Le cuivre représente 12 $\frac{1}{2}$ % du poids total. L'argent pur se vend 218fr,89 le kilogramme, moins une perte de 267 ‰. Quelle est la valeur du lingot?*

$$
\begin{array}{r}
218,89 \times 11,922 \\
2407\ 79 \\
197\ 001 \\
4\ 81558 \\
\hline
2609,60658
\end{array}
$$

Poids total	13k,625
moins 12 $\frac{1}{2}$ % ou $\frac{1}{8}$	1 ,703
Poids d'argent pur	11k,922

Prix fort	$218,89 \times 11,922 = 2609^{fr},61$
moins 267 ‰	521 ,922
	156 ,5766
	18 ,26727
Prix net	1912fr,85

Problème. — *Un négociant achète des marchandises pour le prix de* 97 346 *francs. Les frais accessoires augmentent la dépense de* 11 %. *Il veut revendre les marchandises de manière à réaliser un bénéfice égal à* 17 % *du prix de vente. Quel doit être le prix de vente?*

Prix d'achat	97346
frais 11 %	10708,06
Déboursés effectifs	108054,06

Pour que le négociant gagne 17 % du prix de vente, il faut qu'il revende 100 francs ce qu'il a payé 83 francs.

Autrement dit, les déboursés effectifs représentent les 83 % (les 83 centièmes) du prix de vente, lequel doit donc être

$$\begin{array}{l|l} 10805406 & 83 \\ \cline{2-2} \ \ 250 & 130185,614 \\ \ \ \ \ 154 & \\ \ \ \ \ \ 710 & \\ \ \ \ \ \ \ 466 & \\ \ \ \ \ \ \ \ 510 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 120 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 37 & \end{array}$$

$$\frac{108054,06 \times 100}{83} = 130185,614$$

Problème. — *Lorsque le bénéfice est de* $22\frac{1}{2}$ % *du prix de vente, quel est le tant % du prix d'achat?*

Le prix de vente étant représenté par 100, le prix d'achat doit être $77\frac{1}{2}$ pour laisser un bénéfice de $22\frac{1}{2}$. La question revient donc à trouver combien de centièmes de $77\frac{1}{2}$ il faut prendre pour trouver $22\frac{1}{2}$.

$$77,5 \times \frac{x}{100} = 22,5$$

$$\begin{array}{l|l} 900 & 31 \\ \cline{2-2} 280 & 29,032 \\ \ .100 & \\ \ \ .70 & \end{array}$$

de là on tire $x = \dfrac{22,5 \times 100}{77,5}$

ou $x = \dfrac{9 \times 100}{31}$

$x = 29,032$ % du prix d'achat.

Problème. — *Assurance avec prime de la prime. — Un négociant expédie pour l'Amérique des marchandises vendues pour le prix de 395 000 francs. Il fait assurer les marchandises contre les risques du transport. La prime est 7 °/₀₀ des valeurs déclarées. Quelle somme doit-il déclarer à la compagnie d'assurance, pour qu'en cas de sinistre il recouvre le montant intégral du prix de vente malgré le payement de la prime due à la compagnie?*

La somme déclarée doit être telle que diminuée des 7 millièmes de sa valeur, en raison de la prime, elle donne comme valeur nette le prix de vente 395 000. Si l'on enlève d'une quantité les 7 millièmes, il reste les 993 millièmes de cette quantité. Donc les 993 millièmes de la valeur à déclarer seront égaux à 395 000, et la valeur à déclarer sera égale à

$$\frac{395000}{0,993} = 397784^{\text{fr}},491$$

VÉRIFICATION.

Valeur déclarée, remboursable en cas de sinistre		397784,491...
Prime à déduire 7 °/₀₀		2784,491
	Net.	395000

Remarque. — Pour trouver le quotient de 395 000 par 0,993 on peut prendre comme terme principal 395 000 et y ajouter le 7°/₀₀ de sa valeur, puis les 7 °/₀₀ du résultat précédent, etc., jusqu'à ce que l'on arrive à des fractions décimales d'un ordre négligeable.

PUISSANCES ET RACINES

On nomme puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.

Le nombre employé comme facteur constant pour la formation de ses puissances successives s'appelle quelquefois la base, et celui qui indique combien de facteurs égaux l'on a pris s'appelle exposant.

On écrit 7^3 pour représenter le produit de 3 facteurs égaux à 7. En général A^m représente le produit de m facteurs égaux à A, on peut l'appeler la m^e puissance du nombre A.

La 1^{re} puissance d'un nombre A, c'est le nombre lui-même.

$$A^1 = A.$$

La 2^e puissance $A^2 = A \times A$ s'appelle encore le carré de A.

La 3^e $\quad A^3 = A \times A \times A$ s'appelle encore le cube de A, etc.

Chaque puissance s'obtient en multipliant la précédente par le nombre base :

$$A^m \times A = A^{m+1}$$

Un des premiers exercices d'arithmétique qui conduisent à la considération des puissances et à la notation des exposants est la décomposition des nombres en facteurs premiers. Ainsi, quand on a trouvé que le nombre 360 est égal à $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, on écrit par abréviation

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

L'exposant semble ainsi avoir été employé d'abord comme signe d'abréviation. Mais cette notation, en appelant l'attention sur la formation et les propriétés des puissances, a provoqué d'utiles et importantes découvertes, telles que celles des Logarithmes, d'ingénieuses formules comme celle du binôme de Newton.

Théorème. — *Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre s'obtient en additionnant les exposants.*

Ainsi

$$7^3 \times 7^2 = 7^5.$$

En effet, pour multiplier 7^3, c'est-à-dire le produit effectué des 3 facteurs consécutifs $7 \times 7 \times 7$, par le produit effectué 7^2 de 2 facteurs, 7×7, il suffit, d'après les théorèmes démontrés relativement aux produits des facteurs consécutifs, de multiplier 7^3 d'abord par le premier facteur 7, ce qui donne par définition 7^4, ensuite par le deuxième facteur 7, ce qui donne par définition 7^5.

La règle reconnue exacte pour le produit de deux puissances s'étend à un nombre quelconque de puissances de la même base.

Ainsi

$$A^m \times A^n \times A^p \times A^q = A^{m+n+p+q}$$

car ce produit se forme en multipliant d'abord les deux premiers facteurs, dont le produit est A^{m+n}, puis ce nouveau nombre par A^p, ce qui donne A^{m+n+p} et enfin ce résultat par A^q, ce qui donne bien $A^{m+n+p+q}$.

Corollaire I. — Le quotient d'une puissance d'un nombre par une puissance, d'ordre inférieur, du même nombre, s'obtient en soustrayant l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende.

Ainsi

$$\frac{7^5}{7^3} = 7^2$$

puisqu'il est démontré que $7^2 \times 7^3 = 7^5$.

Généralement, m étant plus grand que n,

$$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$$

puisque

$$A^{m-n} \times A^n = A^m$$

Corollaire II. — On élève une puissance d'un nombre à une puissance déterminée, en faisant le produit des exposants.

Ainsi

$$(7^2)^3 = 7^{2\times 3} \text{ ou } 7^6$$

car

$$(7^2)^3 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2$$

ou, en remplaçant chacun des produits effectués 7^2 par les deux facteurs successifs 7×7,

$$(7^2)^3 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6$$

Et, géneralement,

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

Théorème. — *On élève un produit de facteurs à une puissance déterminée, en élevant chaque facteur à cette puissance.*

Ainsi

$$(abc)^m = a^m b^m c^m$$

car chacun des facteurs du produit proposé figure m fois dans la m^e puissance de ce produit; on peut grouper les m facteurs a et les remplacer par leur produit effectué a^m ; les m facteurs b, ce qui donne b^m, les m facteurs c, ce qui donne c^m, et le produit définitif est bien $a^m b^m c^m$.

Ce théorème s'applique à des facteurs quelconques, entiers ou fractionnaires, et l'on peut dire que pour élever une fraction quelconque à une puissance, il suffit d'élever à cette puissance chacun des facteurs du dividende et du diviseur.

Ainsi

$$\left(\frac{abc}{a'b'c'}\right)^m = \frac{a^m b^m c^m}{a'^m b'^m c'^m}$$

Remarques. — I. Les puissances successives d'un nombre supérieur à 1 sont plus grandes que 1 et vont en croissant avec l'exposant. Les puissances du nombre 1 sont toujours égales à 1. Les puissances d'un nombre inférieur à 1 sont plus petites que 1, et vont en décroissant à mesure que l'exposant augmente.

II. Non seulement les puissances d'un nombre fixe supérieur à 1 vont en croissant avec l'exposant, mais elles peuvent croître au delà de toute limite, dépasser toute grandeur assignée, pourvu qu'on prenne l'exposant suffisamment grand.

Soit en effet un nombre $1+a$

$$
\begin{array}{lll}
1^{e} \text{ puissance} & 1+a=1+a. & \\
2^{e} \quad » & (1+a)^2=(1+a)+(1+a)a > 1+2a. & \\
3^{e} \quad » & (1+a)^3 > (1+2a)(1+a) > 1+3a & \\
\dots & \dots & \\
m^{e} & (1+a)^m > \big(1+(m-1)a\big)(1+a) > 1+ma. &
\end{array}
$$

Ainsi la m^{e} puissance du nombre $1+a$ est plus grande que $1+ma$. Or on peut prendre m assez grand pour qu'il vérifie l'inégalité

$$1+ma > A$$

A étant un nombre assigné, quelque grand qu'il soit.

Il suffit de prendre

$$m > \frac{A-1}{a}$$

ce qui est toujours possible; les nombres A et a étant fixés, leur quotient a une valeur finie, on peut le calculer. Tout nombre entier m, supérieur à ce quotient, rendra l'expression $1+ma$ plus grande que A, et à fortiori la puissance $(1+a)^m$ plus grande que A.

III. Les puissances d'un nombre inférieur à 1 vont en décroissant à mesure que l'exposant augmente, et peuvent décroître indéfiniment.

Soit en effet b un nombre inférieur à 1, son inverse $\frac{1}{b}$ est supérieur à 1, et peut se représenter par $1+a$; de $\frac{1}{b}=1+a$, résulte $b=\frac{1}{1+a}$ b^m équivaut à $\frac{1}{(1+a)^m}$, expression dans laquelle le diviseur peut dépasser toute grandeur assignée. Le quotient peut donc devenir plus petit que toute fraction d'unité, si petite qu'elle soit.

CARRÉ ET RACINE CARRÉE

On a nommé carré d'un nombre le produit de 2 facteurs égaux à ce nombre par suite de considérations géométriques. Si l'on considère un carré ayant pour côté 5 mètres, et que l'on demande l'aire de ce carré en prenant pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur, ici le mètre, cette aire est exprimée par le produit de la base par la hauteur, c'est-à-dire par 5×5.

La table de multiplication, étendue jusqu'à 20, donne les carrés des 20 premiers nombres qu'il est indispensable de savoir par cœur. L'élévation au carré des nombres quelconques, entiers, décimaux, fractionnaires, s'effectue par les règles ordinaires de la multiplication. Bornons-nous à faire remarquer que le carré d'un nombre d de dizaines, $d \times 10$,

est $d^2 \times 10^2$ ou d^2 centaines.

Ainsi

$$80^2 = 6400 \qquad 64 = 8^2$$
$$170^2 = 28900 \quad 289 = 17^2$$

En général, un multiple de 10^p, c'est-à-dire un nombre de la forme $10^p \times m$, donne par l'élévation au carré, $10^{2p} \times m^2$.

Un nombre décimal de la forme $\frac{m}{10^p}$ donnera par l'élévation au carré $\frac{m^2}{10^{2p}}$.

Le carré d'un produit de facteurs peut se former en élevant chaque facteur au carré, soit en doublant les exposants.

Ainsi

$$(ab^2c^3)^2 = a^2b^4c^6$$

Le carré d'une fraction quelconque peut se former en élevant tous les facteurs du numérateur et du dénominateur au carré.

$$\left(\frac{A.B.C}{A'.B'.C'}\right)^2 = \frac{A^2.B^2.C^2}{A'^2.B'^2.C'^2}$$

Théorème. — *Le carré de la somme de deux nombres comprend :*

1° *Le carré du premier ;*
2° *Le double produit du premier par le second,*
3° *Le carré du second.*

Soit par exemple, le nombre formé de la somme $23 + 7$.

$$(23 + 7)^2 = 23^2 + 2.23.7 + 7^2$$

car si l'on détaille la composition du produit de $23 + 7$ par $23 + 7$ d'après les remarques faites dans la théorie de la multiplication, on trouve

multiplicande	$23 + 7$	
multiplicateur	$23 + 7$	
1er produit partiel	$23^2 + 7.23$	(23 fois le multiplicande)
2e produit partiel	$23.7 + 7^2$	(7 fois le multiplicande)
Produit total	$23^2 + 2.(23.7) + 7^2$	

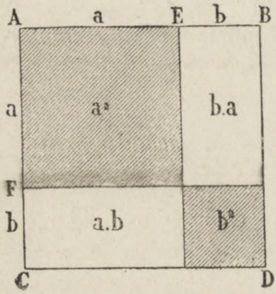
Les règles ayant été établies pour des termes fractionnaires aussi bien que pour des termes entiers, on peut représenter les deux termes de la somme par les lettres a et b, et l'opération se présente ainsi généralisée :

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ & a + b \\ \hline & a^2 + ab \\ & \quad + ab + b^2 \\ \hline (a+b)^2 = & a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Démonstration géométrique. — *Le carré d'un nombre représente l'aire du carré dont le côté est exprimé par ce nombre.*

Considérons donc un carré dont le côté a pour mesure $a + b$.

Si, sur chacun des deux côtés adjacents AB et AC, on porte des longueurs égales à a, à partir du sommet A, et que par les extrémités E et F on trace des parallèles aux autres côtés, on décompose le carré total en 4 parties :



1° Le carré ayant pour côté a, pour surface a^2;

2° Un rectangle ayant a et b pour dimensions, pour surface ab;

3° Un rectangle ayant b et a pour dimensions, pour surface ba;

4° Un carré ayant pour côté b, pour surface b^2.

La surface totale $(a+b)^2$ est donc bien égale à $a^2 + 2ab + b^2$.

Remarques. — I. Dans certaines questions, il paraît commode de décomposer un nombre plus grand que 10, en dizaines et unités.

Ainsi

$$73 = 70 + 3$$
$$123 = 120 + 3$$

Le théorème, qui est général, peut dans ce cas particulier s'énoncer ainsi :

Le carré d'un nombre composé de dizaines et d'unités comprend :

1° *Le carré des dizaines;*

2° *Le double produit des dizaines par les unités;*

3° *Le carré des unités.*

$$(D+u)^2 = D^2 + 2Du + u^2$$

II. Si l'on compare les carrés de deux nombres ayant entre eux une différence d'une unité, soient les nombres N et $N+1$, on voit que le carré de N étant représenté par N^2

le carré de $(N+1)$ est représenté par $N^2 + 2N + 1$

La différence des carrés est le double du plus petit des deux nombres plus 1. On dit encore que lorsqu'un nombre augmente de 1, son carré augmente de deux fois ce nombre plus 1.

Cette remarque est utilisée dans plusieurs occasions; elle peut servir à former une liste des carrés des nombres entiers successifs. Si l'on attribue, dans les formules précédentes, à la lettre N les diverses valeurs entières 0, 1, 2, 3,... l'expression $2N+1$ prend successivement les valeurs 1, 3, 5,... des nombres impairs. Si nous voulons former les carrés de nombres entiers consécutifs, à partir du carré du nombre 20 par exemple, il suffira d'ajouter successivement aux carrés formés les nombres impairs 41, 43, 45.

Accroissements.	Carrés.
	$20^2 = 400$
41	$21^2 = 441$
43	$22^2 = 484$
45	$23^2 = 529$
47	$24^2 = 576$
49	$25^2 = 625$
51	$26^2 = 676$
53	$27^2 = 729$
55	$28^2 = 784$
57	$29^2 = 841$
59	$30^2 = 900$

Théorème. — *Le carré de la somme de plusieurs nombres comprend :*

La somme des carrés de chaque terme et la somme des doubles produits des termes pris deux à deux.

La proposition se trouve bien vérifiée lorsque la somme est composée de deux nombres seulement. Montrons qu'étant vraie pour deux nombres, elle l'est encore pour trois.

Ainsi

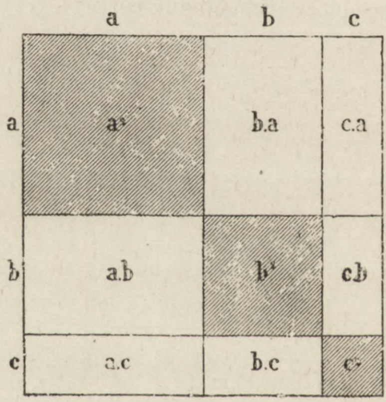
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

En effet, la somme $a+b+c$ peut être réduite à deux termes en remplaçant $a+b$ par leur somme effectuée.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2 &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 \\ &= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\end{aligned}$$

On ferait voir d'une manière analogue que la proposition reconnue exacte pour trois termes l'est encore pour quatre, et ainsi de suite. Elle est donc générale.

La figure ci-contre donne l'explication geométrique, d'après



les mêmes principes que pour le carré de la somme de deux termes.

Théorème. — *Le carré de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de chacun de ces nombres, moins le double produit de ces deux nombres.*

Soient a et b les deux nombres donnés; $(a-b)$, leur différence; a désignant le plus grand.

On a identiquement

$$(a-b)+b=a$$

Élevons les deux membres de cette égalité au carré en appliquant, pour le premier membre, la règle démontrée pour la composition du carré d'une somme, nous trouverons

$$(a-b)^2+2(a-b).b+b^2=a^2$$

ou

$$(a-b)^2+2\,ab-2b^2+b^2=a^2$$

soit, plus simplement

$$(a-b)^2+2ab-b^2=a^2$$

Aux deux membres de cette égalité ajoutons d'abord b^2; puis des deux membres de la nouvelle égalité qui en résulterait, retranchons $2ab$, nous obtiendrons

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

On écrit habituellement cette formule en suivant le même ordre que pour la composition du carré d'une somme, et l'on observe que les deux formules

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

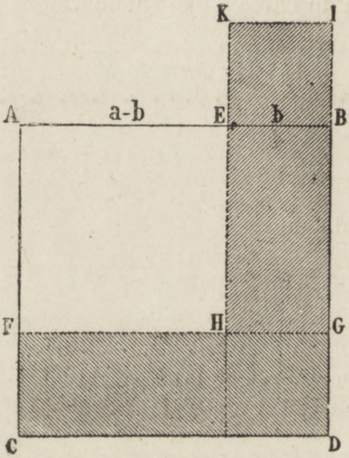
ne diffèrent que par le signe du terme où figure la première puissance de b.

Dans la 2e, le terme $2ab$ peut être plus petit que le 1er terme a^2, et il est indifférent de soustraire d'abord $2ab$ de a^2 pour ajouter ensuite b^2 ou d'ajouter b^2 à a^2, pour soustraire ensuite $2ab$.

Dans le cas où le produit $2ab$ serait plus grand que a^2, la formule peut être conservée en lui attribuant le même sens qu'à l'expression a^2+b^2-2ab.

Cette proposition peut être rendue sensible aux yeux par une construction géométrique.

Après avoir pris une longueur AB mesurée par le nombre a, nous portons suivant la direction BA une longueur BE mesu-



rée par le nombre b, de sorte que AE représente la différence $a - b$.

Construisons les carrés ayant pour côtés a, b (en dehors du premier) et $(a - b)$ dans l'intérieur du premier.

La figure totale AEKLDC comprend $a^2 + b^2$, et pour avoir le carré de $(a - b)$, il suffit de retrancher de la figure totale les deux rectangles CDFG et GHKL, qui ont l'un et l'autre pour dimensions a et b, et pour surface chacun ab.

On a donc bien

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Remarque. — Le nombre a est supposé ici plus grand que b; par conséquent $(a - b)^2$ est un nombre essentiellement positif. Ainsi l'expression $a^2 + b^2 - 2ab$ donne toujours, dans cette hypothèse de $a > b$, un résultat positif.

Si b était $> a$, on aurait encore des quantités positives en écrivant

$$(b - a)^2 = b^2 + a^2 - 2ab$$

Donc, dans tous les cas, quels que soient les nombres a et b, la somme de leurs carrés $a^2 + b^2$ est supérieure à leur double produit $2ab$, du moins tant qu'il y a quelque inégalité entre a et b.

$$\text{Si} \quad a = b$$
$$a^2 + b^2 = 2ab.$$

Applications numériques des théorèmes précédents.

Les carrés des nombres 21, 31, 41, 51, etc., se forment avec une grande facilité en ajoutant aux carrés des nombres 20, 30, 40, 50, le double de ces nombres eux-mêmes, $+1$.

$$\begin{aligned} 21^2 &= 441 \\ 31^2 &= 961 \\ 41^2 &= 1681 \\ 51^2 &= 2601 \\ 61^2 &= 3721 \\ 71^2 &= 5041 \\ 81^2 &= 6561 \\ 91^2 &= 8281 \end{aligned}$$

Les carrés des nombres 19, 29, 39, 49, etc., se formeront en retranchant des carrés des nombres 20, 30, 40, 50, etc., le double de ces nombres, et ajoutant 1.

$$\begin{aligned} 19^2 &= 361 = 400 - 40 + 1 \\ 29^2 &= 841 \\ 39^2 &= 1521 \\ 49^2 &= 2401 \\ 59^2 &= 3481 \\ 69^2 &= 4761 \\ 79^2 &= 6241 \\ 89^2 &= 7921 \\ 99^2 &= 9801 \end{aligned}$$

Il est, en général, aisé d'écrire immédiatement le carré d'un nombre quelconque de deux chiffres.

Soit à former le carré de 47.

On fait d'abord le carré des unités 7 fois 7, 49 (4 de retenue).

On fait le produit $4 \times 7 = 28$; on double, 56, et 4 de retenue 60 (6 de retenue).

Enfin le carré des dizaines, 4 fois 4, 16 et 6,22.

$$47^2 = 2209$$
$$89^2 = 7921$$
$$97^2 = 9409$$
$$56^2 = 3136$$

On peut effectuer d'après les mêmes moyens les carrés des nombres de trois chiffres, tels que 124, 132, 162, 197, etc., dans lesquels les nombres de dizaines 12, 13, 16, 19, etc., sont faciles à multiplier par le chiffre des unités :

$$124^2 = 15376$$

On fait successivement les produits, 4 fois 4, 16 (1 de retenue), puis 4 fois 12, 48 ; on double, 96 et 1 de retenue 97 (9 de retenue); enfin 12 fois 12, 144 et 9, 153.

$$136^2 = 18496$$
$$162^2 = 26244$$
$$197^2 = 38809$$
$$148^2 = 21904$$
$$159^2 = 25281$$

Les carrés des nombres 101, 102,..... 109, offrent une facilité particulière.

$$101^2 = 10201$$
$$102^2 = 10404$$
$$103^2 = 10609 \qquad (6 = 3 \times 2 \quad 9 = 3^2$$
$$104^2 = 10816 \qquad (8 = 4 \times 2 \quad 16 = 4^2$$
$$105^2 = 11025$$
$$106^2 = 11236$$
$$107^2 = 11449$$
$$108^2 = 11664$$
$$109^2 = 11881$$

Le carré contient 1 dizaine de mille, carré de 1 centaine, plus un nombre de centaines égal au double du chiffre des unités, plus enfin le carré du chiffre des unités.

En considérant les nombres 111, 112,..... 119, comme composés de $100+11$, $100+12$, etc., on formera les carrés d'après les mêmes moyens, en tenant compte des retenues.

$$
\begin{aligned}
111^2 &= 12321\\
112^2 &= 12544\\
113^2 &= 12769\\
114^2 &= 12996\\
115^2 &= 13225\\
116^2 &= 13456\\
117^2 &= 13689\\
118^2 &= 13924\\
119^2 &= 14161
\end{aligned}
$$

CARRÉ D'UN NOMBRE TERMINÉ PAR LE CHIFFRE 5.

Pour former le carré d'un nombre terminé par 5, il suffit de multiplier le nombre des dizaines par le nombre entier supérieur de 1, et de faire suivre ce produit de 25.

Ainsi, pour obtenir le carré de 75, il suffit de multiplier 7 par le nombre immédiatement supérieur 8, et d'écrire à la suite du produit 56 le nombre 25. Et l'on obtient ainsi

$$75^2 = 5625.$$

Cette règle est facile à expliquer. Le double produit des dizaines par les unités donne $70 \times (2 \times 5)$ ou 7 centaines; d'ailleurs le carré de 7 (dizaines) donne 7^2 centaines; le nombre des centaines est donc $7^2+7 = 7\times(7+1)$. A ce résultat, qui représente la somme des deux premiers termes du carré de la somme $70+5$, il ne reste qu'à ajouter le troisième terme 25, carré de 5 unités.

La connaissance de la table de multiplication jusqu'à 20 permet de former ainsi avec la plus grande aisance les carrés des nombres terminés par 5, jusqu'aux nombres 195, 205, 215.

$115^2 = 13225$	$132 = 11 \times 12$
$125^2 = 15625$	$156 = 12 \times 13$
$135^2 = 18225$	$182 = 13 \times 14$
$145^2 = 21025$	$210 = 14 \times 15$
$155^2 = 24025$	$240 = 15 \times 16$
$165^2 = 27225$	$272 = 16 \times 17$
$175^2 = 30625$	$306 = 17 \times 18$
$185^2 = 34225$	$342 = 18 \times 19$
$195^2 = 38025$	$380 = 19 \times 20$
$205^2 = 42025$	$420 = 20 \times 21$
$215^2 = 46225$	$462 = 21 \times 22$

Si le produit du nombre de dizaines par le nombre supérieur d'une unité n'est pas su par cœur, on peut du moins trouver les centaines du carré cherché, en opérant la multiplication, abstraction faite du 5, ce qui donne un produit partiel de moins.

Ainsi, pour former le carré de 675, il nous suffira de former d'abord le produit de 67 par 68, et nous écrirons 25 à la suite. Or, le produit de 67 par 68 est facile à trouver, les dizaines proviennent du facteur commun 6 par la somme $(7 + 8)$, et de la retenue qui provient du produit des unités.

$$67 \times 68 = 4556$$
$$675^2 = 455625$$

On trouvera d'après des moyens analogues.

$$895^2 = 801025$$
$$905^2 = 819025$$
$$915^2 = 837225$$
$$925^2 = 855625$$
$$13125^2 = 172265625$$

Nous avons écrit immédiatement ce dernier carré, en effectuant, sans détail écrit de produits partiels, le produit de 1312 par 1313, en faisant la multiplication par 12 et par 13 du nombre 13.

Il est à remarquer que tous les carrés des nombres terminés par 5 se terminent par 025, ou 225, ou 625; le produit de deux nombres entiers consécutifs est toujours terminé par un des chiffres 0, 2, 6.

$$1 \times 2 = 2 \qquad 6 \times 7 = 42$$
$$2 \times 3 = 6 \qquad 7 \times 8 = 56$$
$$3 \times 4 = 12 \qquad 8 \times 9 = 72$$
$$4 \times 5 = 20 \qquad 9 \times 10 = 90$$
$$5 \times 6 = 30$$

RACINE CARRÉE.

Un nombre étant proposé, on nomme racine carrée de ce nombre un nombre qui, élevé au carré, reproduit, s'il est possible, le nombre proposé.

Ainsi la racine carrée de 144 est 12, car $12^2 = 144$.

la racine carrée de 6,25 est 2,5 car $(2,5)^2 = 6,25$.

la racine carrée de $\frac{144}{289}$ est $\frac{12}{17}$, car $\left(\frac{12}{17}\right)^2 = \frac{144}{289}$.

la racine carrée du produit $2^6 \times 7^4 \times 11^2$ est $2^3 \times 7^2 \times 11$.

la racine carrée de $\frac{0,09 \times 2,25 \times 121}{4 \times (a^2 + 2ab + b^2)}$ est $\frac{0,3 \times 1,5 \times 11}{2\,(a + b)}$.

Il peut arriver que le nombre proposé ne soit le carré d'aucun nombre, entier ou fractionnaire.

Ainsi le nombre 43, que nous reconnaissons comme n'étant point le carré d'un nombre entier, ne peut être non plus le carré d'aucune fraction; puisque toute fraction $\frac{a}{b}$ que nous pouvons toujours supposer ou rendre irréductible (sans altérer la valeur) a pour carré une autre fraction irréductible $\frac{a^2}{b^2}$ qui ne saurait être un nombre entier.

La même observation s'applique à tout nombre entier qui n'est pas le carré d'un nombre entier, et à toute fraction qui, réduite à sa plus simple expression, n'a pas pour termes entiers des carrés de nombres entiers.

On nomme carré parfait un nombre qui est exactement le carré d'un nombre, soit entier, soit fractionnaire.

Ainsi les nombres 81, $\frac{81}{169}$, sont des carrés parfaits. Ils ont des racines carrées dites rationnelles.

Un nombre quelconque étant proposé, on nomme racine carrée de ce nombre, à 1 unité près, le plus grand nombre entier d'unités dont le carré soit contenu dans le nombre proposé; à un dixième près, le plus grand nombre entier de dixièmes dont le carré soit contenu dans le nombre proposé; à une fraction $\frac{1}{n}$ près, le plus grand nombre entier de $n$es dont le carré soit contenu dans le nombre proposé.

RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE A 1 UNITÉ PRÈS.

Pour trouver la racine carrée d'un nombre à 1 unité près, on peut distinguer 2 cas.

1° Le nombre proposé ne dépasse pas les limites de la table de multiplication, ou plutôt les limites des carrés consécutifs connus par cœur;

2° Le nombre est au-dessus de ces limites.

Dans le 1er cas, le calculateur aperçoit immédiatement les nombres entiers dont les carrés comprennent entre eux le nombre donné. Soit par exemple le nombre 43. On aperçoit immédiatement qu'il est compris entre 6^2 et 7^2; la racine carrée de 43 à une unité près est 6.

Soit le nombre 597. Le calculateur qui possède la connaissance des carrés des 30 ou 40 premiers nombres reconnaîtra immédiatement que le nombre 597 est compris entre $24^2 = 576$ et $25^2 = 625$, la racine carrée de 597 à 1 unité près est 24.

Prenons encore le nombre 892,75. Il est compris entre $29^2 = 841$ et $30^2 = 900$. La racine carrée de 892,75 à 1 unité près est 29.

Les remarques que nous avons faites sur les nombres composés d'un entier et de la fraction $\frac{1}{2}$ permettront souvent d'extraire la racine carrée à $\frac{1}{2}$ unité près. Soit le nombre 73,6; la racine carrée à $\frac{1}{2}$ près, par défaut, est $8\frac{1}{2}$; car nous savons que le carré de $8\frac{1}{2}$ est $72\frac{1}{4}$.

2^e^ cas. Le nombre proposé dépasse les limites des carrés connus par cœur.

Le nombre est dès lors supérieur au moins à 100, et sa racine, supérieure à 10, peut être considérée comme composée de dizaines et d'unités.

Pour trouver les dizaines de la racine, il suffit d'extraire, à 1 unité près, la racine du nombre des centaines qui figurent dans la composition du nombre donné.

Soit, par exemple, le nombre 4552.

La racine carrée du nombre 45 (des centaines) est 6 à 1 unité près

$$6^2 < 45 < 7^2$$

Multiplions par 100 ou 10^2, nous obtiendrons évidemment

$$(6 \times 10)^2 < 4500 < (7 \times 10)^2$$

Dans l'inégalité $45 < 7^2$, la différence est supérieure à 1.

Dans l'inégalité $4500 < (7 \times 10)^2$, la différence est supérieure à 100.

On peut donc ajouter à 4500 le nombre 52 sans que les inégalités cessent d'être vérifiées, et l'on trouve

$$(6 \times 10)^2 < 4552 < (7 \times 10)^2$$

ce qui montre que 6 est le plus grand nombre de dizaines dont le carré soit contenu dans le nombre 4552; c'est donc bien le nombre de dizaines de la racine cherchée.

Le raisonnement est facile à généraliser. La première inégalité pourra, dans certains cas particuliers, être remplacée par une égalité, mais la deuxième restera toujours une inégalité véritable, dans laquelle la différence des deux membres sera au moins 1, de sorte qu'après avoir multiplié par 10^2, la différence sera au moins 100 ; et l'on pourra, sans changer le sens de l'inégalité, ajouter aux centaines du nombre proposé toute la portion restante qui en aucun cas n'atteindra 100.

Reste à trouver le chiffre des unités, après celui des dizaines. Le nombre contient au moins : le carré des dizaines de la racine, plus le produit du double des dizaines par les unités, plus le carré des unités.

$$\begin{array}{r|l} 4552 & 67 \\ \cline{2-2} 952 & 127 \times 7 \\ 63 & \end{array}$$

Le chiffre 6 des dizaines étant connu, si l'on en forme le carré 36 qui représente des centaines, et que l'on retranche 36 centaines du nombre donné, on obtiendra un reste, 952, qui contient, au moins, le produit du double des dizaines par les unités, plus le carré des unités. Le chiffre des unités doit être tel que multipliant le double du nombre des dizaines, 12, il donne un produit au plus égal à 95, nombre des dizaines du reste; car, si l'on prenait pour les unités un nombre u satisfaisant à l'inégalité $12 \times u > 95$, l'excès de $12 \times u$ sur 95 serait au moins d'1 unité; on aurait, en multipliant par 10,

$$120 \times u > 950$$

l'excès de $120 \times u$ sur 950 serait au moins égal à 10, et en ajoutant à 950 le nombre d'unités qui est ici 2 et qui sera dans tous les cas inférieur à 10, on aurait

$$120 \times u > 952.$$

Or, le produit du double des dizaines par le vrai chiffre des unités ne saurait, en aucun cas, dépasser le reste 952. Le nombre supposé u serait trop fort. Donc le vrai chiffre des unités est tel que, multipliant 12, il donne un produit au plus égal à 95. Il est donc au plus égal au quotient de 95 par 12.

Ainsi, en divisant le nombre des dizaines du reste (ici 95) par le double du nombre 6 trouvé comme nombre de dizaines de la racine, on obtient une limite supérieure du nombre des unités. Le quotient de 95 par 12 est 7, et l'on vérifie ici que le produit de 127 par 7, qui comprend le carré de 7, plus le produit du double des dizaines par 7, peut se retrancher de 952. Le carré de 67 est ainsi inférieur à 4552, mais le carré de 68 serait supérieur d'après l'explication ci-dessus. 67 est donc la racine à 1 unité près, par défaut.

$$4552 = 67^2 + 63$$

Le raisonnement que nous venons de faire prouve que le chiffre des unités a pour limite supérieure le quotient du nombre de dizaines du reste par le double du nombre de dizaines de la racine; mais il peut rester au-dessous de cette limite supérieure. Ainsi cherchons la racine carrée de 300 par la méthode précédente. Le chiffre des dizaines est 1, et quand on a retranché 1^2 centaine du nombre, le résultat de la soustraction est 200. Le quotient de 20 par le double, 2, du premier nombre trouvé à la racine, est 10; c'est une valeur que l'on ne peut pas attribuer au chiffre des unités; mais non seulement ce quotient 10 est trop fort, le nombre inférieur 9, et même le nombre inférieur 8, est encore trop fort; on le reconnaît parce que les produits 29×9, 28×8 dépassent le reste 200, et l'on arrive à trouver que le vrai chiffre des unités est 7.

$$\begin{array}{r|l} 3\cdot 00 & 17 \\ \cline{2-2} 2\ 00 & 27 \times 7 \\ 11 & \end{array}$$

L'habitude du calcul évite les tâtonnements. Mais, en principe, on est averti que le chiffre essayé est trop fort s'il conduit à une soustraction impossible.

La crainte de prendre un chiffre trop fort peut parfois faire prendre un chiffre trop faible. Comment peut-on s'en apercevoir? C'est en comparant le reste de l'opération au nombre trouvé pour racine.

Maximum du reste. — Le reste ne peut dépasser le double de la racine; car si le reste dépassait le double de la racine a, il serait au moins égal à $2a + 1$, et l'on aurait, N désignant le nombre proposé, que nous supposons entier,

$$N - a^2 \geqq 2a + 1$$

d'où l'on conclurait $$N \geqq a^2 + 2a + 1$$

c'est-à-dire $$N \geqq (a + 1)^2$$

Donc la racine a, obtenue par le calcul, ne serait pas la racine à 1 unité près, puisque le carré du nombre supérieur $(a+1)$ serait contenu dans N.

Racine d'un grand nombre. — Il peut arriver que le nombre de centaines du nombre proposé soit lui-même un nombre trop grand pour qu'on puisse en extraire, à vue, la racine carrée à 1 unité près. On cherchera les dizaines de cette racine en considérant les centaines du nombre des centaines, c'est-à-dire les dizaines de mille du nombre donné. Si ce nombre de dizaines de mille est lui-même trop grand pour qu'on puisse découvrir immédiatement la racine, on cherchera les dizaines de cette racine en considérant les centaines du nombre des dizaines de mille, c'est-à-dire les millions du nombre proposé.

On est conduit par ces considérations à partager le nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la droite, jusqu'à ce que l'on arrive à séparer, sur la gauche, une tranche formant un nombre dont la racine se découvre immédiatement à l'aide de la connaissance des premiers carrés. La racine, à une unité près, de la tranche extrême de gauche, donne les dizaines de la racine du nombre formé par les deux premières tranches de gauche; on détermine le chiffre des unités ainsi qu'il a été expliqué. La racine du nombre formé par les deux premières tranches de gauche donne les dizaines de la racine du nombre formé par les trois premières tranches de gauche, on peut encore déterminer le chiffre des unités, et l'on connaît alors à 1 unité près la racine du nombre formé par les trois premières tranches à partir de la gauche. On peut continuer, d'après les mêmes principes, jusqu'à ce que l'on arrive aux unités simples du nombre donné.

La tranche extrême de gauche pourra toujours être réduite, si cela paraît nécessaire, à deux chiffres ou à un seul chiffre, mais, dans beaucoup de cas particuliers, le calculateur pourra la laisser composée de trois ou quatre chiffres formant un nombre dont la racine carrée, à 1 unité près, lui sera connue. Si, par exemple, après avoir commencé le partage en tranches de deux chiffres à partir de la droite, on arrive devant une tranche de gauche 148, il convient d'inscrire immédiatement 12 à la racine, sans perdre de temps à décomposer le nombre 148 en deux tranches dont la première serait 1 centaine, ayant pour racine 1 dizaine.

La tranche de gauche est-elle 692? La racine à 1 unité près est 26, car $26^2 = 676$. Est-elle 5673? La racine à 1 unité près de ce nombre et 75; puisque nous avons vu précédemment que $75^2 = 5625$, et le nombre 5673 ne dépasse pas 5625 d'une quantité supérieure au double de 75.

Exemple et disposition des calculs.

$$
\begin{array}{r|l}
265\cdot84\cdot36\cdot97 & 16304 \\ \cline{2-2}
9\;84 & 323 \times 3 \\
15\;36\;97 & \\
2\;32\;81 & 32604 \times 4
\end{array}
$$

$$265843697 = 16304^2 + 23281$$

preuve par 9 de l'extraction de la racine carrée.

Le nombre proposé contient le carré de sa racine à 1 unité près, plus le reste de l'opération.

Le reste à 9 du nombre est donc égal au reste à 9 qui résulte de la somme des restes, du produit de la racine multipliée par elle-même, et du reste de l'extraction de racine carrée.

Le nombre 16304, trouvé à la racine, donne pour reste à 9, 5.

Le carré de ce nombre donnera le même reste que 5^2, soit 7.

Le reste de l'opération 23281 donne pour reste 7.

Les deux restes réunis donnent le même reste à 9 que leur somme 14, soit 5.

Le nombre 265843697 donne aussi pour reste 5. La preuve réussit.

Autre exemple.

$$
\begin{array}{r|l}
34297\cdot6\;8 & 1851 \\ \cline{2-2}
72\;\;6\cdot8 & 3701 \times 1 \\
35\;\;6\;\;7 &
\end{array}
$$

La racine carrée de 34297 est 185, car nous savons que $185^2 = 34225$.

Preuve par 9. La racine donne pour reste à 9, 0; le reste de l'opération, 3. Le nombre proposé, 3.

Remarque. — La racine carrée, à 1 unité près, d'un nombre composé d'un entier N et d'une fraction f, est la même que celle du nombre entier N.

Soit a la racine carrée à 1 unité près de l'entier N, de sorte que

$$a^2 \leqq N < (a+1)^2$$

la 2e inégalité, entre 2 nombres entiers, implique que la différence entre N et $(a+1)^2$ est au moins 1. On peut donc ajouter à N une fraction f, plus petite que l'unité, sans que l'inégalité cesse d'avoir lieu dans le même sens. Et l'on aura les inégalités

$$a^2 < N+f < (a+1)^2$$

ce qui montre bien que la racine, à une unité près, du nombre $N+f$ est le nombre a, racine à 1 unité près de l'entier N.

RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE QUELCONQUE A $\frac{1}{n}$ PRÈS.

On nomme racine carrée à $\frac{1}{n}$ près, d'un nombre quelconque A, la valeur du plus grand nombre de n^{es}, le plus grand multiple de la fraction $\frac{1}{n}$, dont le carré soit contenu dans A; de sorte que si l'on désigne ce nombre entier de n^{es} par x, il doit satisfaire aux inégalités

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 \leqq A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$$

ou

$$x^2 \leqq A \times n^2 < (x+1)^2$$

ce qui montre que x est la racine carrée, à 1 unité près, du nombre $A \times n^2$, ou, ce qui revient au même, de la partie entière du nombre $A \times n^2$, obtenu en multipliant le nombre donné A par le carré du dénominateur qui marque l'approximation.

Les propositions qui précèdent guident dans la marche à suivre pour extraire la racine carrée d'un nombre entier ou décimal, à 1 unité près, à 1 dixième, 1 centième, 1 millième, etc., près.

Pour avoir la racine à 1 unité près, on extrait la racine à 1 unité près de la partie entière du nombre proposé; pour avoir la racine à 1 dixième près, il suffit d'extraire à 1 unité près celle du nombre total de centièmes contenus dans le nombre proposé ; et, à cet effet, on continue l'opération en abaissant à la droite du reste entier la tranche des deux premiers chiffres décimaux ou deux zéros, pour calculer le chiffre des dixièmes de la racine, comme s'il s'agissait du chiffre des unités; seulement la virgule, que l'on doit placer, indique qu'il exprime des dixièmes.

Pour avoir la racine du nombre à 1 centième près, il suffit d'extraire à 1 unité près la racine du nombre total des dix-millièmes, et pour trouver le chiffre des centièmes on abaisse la tranche suivante de deux chiffres, on substitue des zéros s'il n'y a pas de chiffres significatifs, et ainsi de suite.

Si le nombre proposé est entier, après avoir déterminé la partie entière de la racine, on écrit deux zéros à la suite de chaque reste pour continuer le calcul du chiffre décimal suivant. Si le nombre est décimal, on abaisse successivement les tranches des deux chiffres décimaux à partir de la virgule.

Si l'on veut, dès le début de l'opération, partager le nombre décimal en tranches de deux chiffres à partir de la droite, il faut prendre un nombre pair de chiffres décimaux, en ajoutant un zéro, si le nombre des chiffres significatifs se trouve impair. Mais il revient au même de se guider d'après la place de la virgule, en formant, de part et d'autre de la virgule, des tranches de deux chiffres, tant vers la gauche que vers la droite.

Exemple. — Calculer la racine carrée, à 1 cent-millième près, du nombre 2.

200	1,41421
40·0	2 81 × 1
11 90·0	2 824 × 4
60 40·0	2 8282 × 2
3 83 60·0	2 82841 × 1
1 00 75 9	

RACINE CARRÉE DES FRACTIONS.

Si la fraction a pour terme deux carrés parfaits, on obtient la racine exacte en extrayant la racine de chaque terme.

Ainsi

$$\sqrt{\frac{169}{625}}=\frac{13}{25}$$

Si le dénominateur seul est un carré parfait, on peut extraire à 1 unité près la racine du numérateur, et exactement celle du dénominateur; on obtient ainsi une racine approchée à $\frac{1}{d}$ près, d étant la racine exacte du dénominateur proposé.

Exemple. — Soit à extraire la racine de $\frac{173}{361}$

173 n'est pas un carré, 361 est le carré de 19.

La racine carrée de 173 à 1 unité près est 13.

La racine carrée, à $\frac{1}{19}$ près, de $\frac{173}{361}$, est $\frac{13}{19}$.

On a $$\left(\frac{13}{19}\right)^2 < \frac{173}{361} < \left(\frac{14}{19}\right)^2$$

On peut toujours rendre le dénominateur carré parfait, quand il ne l'est pas *à priori*, en multipliant les deux termes de la fraction par le dénominateur primitivement donné. Soit par exemple la fraction $\frac{5}{11}$, elle équivaut à $\frac{55}{121}$, dont la racine à $\frac{1}{11}$ près est $\frac{7}{11}$.

La racine carrée à $\frac{1}{n}$ près d'une fraction quelconque $\frac{A}{B}$ s'obtient, d'après la théorie générale, en multipliant cette fraction par n^2, ce qui donne le nombre $\frac{A\times n^2}{B}$, et extrayant à 1 unité près la racine de ce nombre, c'est-à-dire la racine à 1 unité près du nombre entier contenu dans le quotient $\frac{An^2}{B}$: ce sera le nombre entier de n^{es} demandé.

Ainsi la racine carrée à $\frac{1}{40}$ près de l'expression $3\frac{7}{12}$ ou $\frac{43}{12}$ s'obtiendra en extrayant à 1 unité près la racine de

$$\frac{43 \times 1600}{12} = \frac{68800}{12} = 5733\frac{1}{3}$$

ou simplement du nombre entier 5733, pour avoir le nombre de 40^{es} demandé. La racine de 5733 à 1 unité près est 75, la racine demandée est $\frac{75}{40}$ ou $1\frac{7}{8}$ à $\frac{1}{40}$ près, par défaut.

Remarque. — Si l'on demande la racine carrée d'une fraction quelconque à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, près, l'application de la règle générale conduit à convertir la fraction en décimales, et à extraire la racine du nombre des centièmes, des dix-millièmes, etc.

ABRÉVIATION DE L'EXTRACTION DE RACINE CARRÉE.

Lorsque, dans la recherche de la racine carrée, à 1 unité près, d'un nombre entier, on a obtenu au moins un chiffre de plus qu'il n'en reste à trouver, on peut calculer, avec un degré d'exactitude qui paraîtra souvent suffisant, la deuxième portion de la racine par une simple division.

Soit N le nombre entier proposé; a le nombre en vraie grandeur, qui représente la première portion déjà trouvée; b, la deuxième portion, comprenant 1 chiffre de moins que a. La racine de N est ainsi, à 1 unité près, $a+b$, de sorte que nous pouvons poser

$$N = a^2 + 2ab + b^2 + r$$

r désignant le reste, qui se réduit à zéro quand N est carré parfait. On sait, *à priori*, évaluer le nombre des chiffres de la racine; supposons qu'il soit impair, désignons-le par $2n+1$.

a représente la vraie valeur du nombre formé par les $(n+1)$ premiers chiffres d'après leurs rangs dans la racine; b est le nombre exprimé par les n derniers chiffres.

Après avoir trouvé a, formons le carré a^2, retranchons-le de N, et divisons la différence $N - a^2$ par $2a$. La partie entière du quotient de cette division donne la seconde portion de la racine, soit exactement, soit à une unité près, par excès. En effet, le quotient exact est d'après l'égalité ci-dessus

$$\frac{N-a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a} + \frac{r}{2a}$$

b est un nombre de n chiffres, par conséquent inférieur à 10^n, donc b^2 est inférieur à 10^{2n}.

Le nombre a, écrit avec $(n+1)$ chiffres, a une valeur absolue au moins égale à 10^n, et comme il exprime des unités de l'ordre de 10^n, il est, en vraie grandeur, au moins égal à 10^{2n}.

Le nombre b^2 est donc inférieur à a, et la fraction $\frac{b^2}{2a}$ inférieure à $\frac{1}{2}$.

Le reste r de l'extraction de la racine carrée du nombre entier N peut varier de 0 au double $2(a+b)$ de la racine.

Le quotient $\frac{r}{2a}$ peut donc varier de 0 à $1 + \frac{b}{a}$.

$\frac{b}{a}$ est, d'après ce que nous venons d'observer, une fraction toujours inférieure à $\frac{1}{10^n}$, par conséquent à $\frac{1}{2}$ dès que n est au moins égal à 1.

Donc la somme des termes $\frac{b^2}{2a} + \frac{r}{2a}$ n'atteindra jamais 2.

Ainsi le quotient exact $\frac{N-a^2}{2a}$ est au moins égal à b et n'atteint jamais la valeur $b+2$.

La partie entière de ce quotient est donc égale à b ou à $b+1$.

Si le nombre N est carré parfait, le reste r est nul, et le quotient entier est égal à b, puisque le quotient exact est $b + \frac{b^2}{2a}$, c'est-à-dire compris entre b et $b + \frac{1}{2}$. On voit que, dans ce cas, le reste de la division, après que la partie entière du quotient a été déterminée, se trouve égal à b^2; c'est à cette particularité que l'on reconnaît que le nombre N est carré parfait.

Si le nombre des chiffres de la racine est pair, et désigné par $2n$, la méthode s'appliquera en déterminant d'abord les $(n+1)$ premiers chiffres par la règle ordinaire d'extraction de racine, et les $(n-1)$ suivants par la division.

On démontrerait, comme précédemment, que le quotient entier de la division de $N - a^2$ par $2a$ donne b ou $b+1$.

L'abréviation expliquée pour la racine d'un nombre entier s'applique également à la recherche de la racine carrée d'un nombre quelconque à une unité près d'un ordre décimal donné, puisque cette recherche se ramène à celle de la racine d'un nombre entier.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Calculer la racine carrée à* 1 *unité près du nombre* 7 845 762 936.

Méthode ordinaire.		Méthode abrégée.	
78·4 5·7 6·2 9·36	88576	7845762 936	885·76
14 4·5	168×8	1445	168×8
1 0 1 7·6	1765×5	10176	1765×5
1 3 5 1 2·9	17707×7	13512·936	177
1 1 1 8 0 36	177146×6	1122	76
5 5 1 60		60	

II. **Problème.** — *On connaît la racine carrée de* 2 *à* 0,0001 *près*, 1,4142, *on demande la racine à* 0,00000001 *près, par défaut ou par excès.*

On forme aisément le carré de 1,4142, on trouve
1,99996164, lequel retranché de 2 donne
pour reste 3836 (unités du 8^e ordre décimal)

En effectuant le quotient de ce nombre par le double de la racine donnée, 2,8284 on trouve 1356 (unités du 8e ordre) de sorte que la racine demandée est : 1,41421356.

III. *Calculer la racine carrée, à* 1 *unité près, du nombre* 172 265 625.

172·2 6·5 6·25	131·25
3 2·6	261 × 1
6 5 5·6,25	262
1 3 1 6	25
. . 6,25	

Le reste 625 de la division de 655625 par 26200 est le carré du quotient 25, à ce signe on reconnaît que le nombre proposé est carré parfait, et sa racine exacte est 13125.

RACINES CARRÉES IRRATIONNELLES.

Nous avons défini la racine carrée à $\frac{1}{n}$ près, d'un nombre A qui n'est pas carré parfait.

Il nous reste à expliquer ce qu'il faut entendre par la racine carrée du nombre A, que l'on représente dans les calculs par le symbole $\sqrt{A}$, dans le cas où le nombre A n'est le carré d'aucun entier, ni d'aucune fraction.

Nous savons ce que signifient et comment se déterminent

la racine carrée x, à 1 unité près, du nombre A

la racine carrée $\frac{x_1}{10}$ à $\frac{1}{10}$ près

la racine carrée $\frac{x_2}{10^2}$ à $\frac{1}{10^2}$ près

la racine carrée $\frac{x_n}{10^n}$ à $\frac{1}{10^n}$ près

la racine carrée $\frac{x_{n+1}}{10^{n+1}}$ à $\frac{1}{10^{n+1}}$ près

Les nombres entiers x, x_1, x_2,... x_n, x_{n+1}, satisfont aux inégalités

$$x^2 \leqq A < (x+1)^2$$

$$\left(\frac{x_1}{10}\right)^2 \leqq A < \left(\frac{x_1+1}{10}\right)^2$$

$$\left(\frac{x_2}{10^2}\right)^2 \leqq A < \left(\frac{x_2+1}{10^2}\right)^2$$

. . . .

$$\left(\frac{x_n}{10^n}\right)^2 \leqq A < \left(\frac{x_n+1}{10^n}\right)^2$$

$$\left(\frac{x_{n+1}}{10^{n+1}}\right)^2 \leqq A < \left(\frac{x_{n+1}+1}{10^{n+1}}\right)^2$$

etc.

Les nombres de la 1re série x, $\frac{x_1}{10}$, $\frac{x_2}{10^2}$,... $\frac{x_n}{10^n}$, $\frac{x_{n+1}}{10^{n+1}}$, etc., vont en croissant, ou du moins ne présentent aucune décroissance, car le nombre x_n qui satisfait à l'inégalité

$$\left(\frac{x_n}{10^n}\right)^2 \leqq A$$

satisferait à l'inégalité équivalente

$$\left(\frac{10x_n}{10^{n+1}}\right)^2 \leqq A$$

donc x_{n+1}, le plus grand multiple de la fraction $\frac{1}{10^{n+1}}$, dont le carré soit contenu dans A, est au moins égal à $10\,x_n$, et le nombre $\frac{x_{n+1}}{10^{n+1}}$ est au moins égal à $\frac{x_n}{10^n}$; s'il lui est égal dans quelque cas particulier, il lui est le plus souvent supérieur

Ainsi quand on cherche la racine carrée de 3 à $\frac{1}{1000}$ près, on trouve $\frac{1732}{1000}$

quand on cherche la racine carrée de 3 à $\frac{1}{10000}$ près, on trouve $\frac{17320}{10000}$

il y a égalité entre ces deux termes de la série.

Mais quand on cherche la racine carrée de 3 à $\frac{1}{100000}$ près, on trouve $\frac{173205}{100000}$

ce terme est supérieur au précédent.

Le terme suivant serait $\frac{1732050}{1000000}$

égal au précédent.

Ensuite viennent les termes

$$\frac{17320508}{10000000}$$
$$\frac{173205080}{100000000}$$
$$\frac{1732050807}{1000000000}$$
$$\frac{17320508075}{10000000000}$$

Les termes de la 1re série présentent donc une marche générale croissante qui n'exclut pas la permanence de valeurs entre deux ou plusieurs termes consécutifs, mais qui exclut toute possibilité de décroissance.

Chaque terme $\frac{x_{n+1}}{10^{n+1}}$ ne peut surpasser le précédent $\frac{x_n}{10^n}$ que de $\frac{9}{10^{n+1}}$ au plus, car si l'on ajoutait à $\frac{x_n}{10^n}$ la fraction $\frac{10}{10^{n+1}}$ on obtiendrait $\frac{x_n+1}{10^n}$ dont le carré surpasse A, en vertu de l'inégalité précédente.

Ainsi, les termes de la 1re série présentent une marche généralement croissante, et l'accroissement d'un terme au suivant ne peut surpasser 9 unités du dernier ordre décimal qui marque l'approximation du second terme.

Il en résulte que les nombres de la 2e série vont en décroissant, ou du moins ne peuvent jamais présenter aucune croissance, car le terme $\frac{x_{n+1}+1}{10^{n+1}}$ surpasse celui qui lui correspond dans la 1re série de la quantité $\frac{1}{10^{n+1}}$, et comme celui de la 1re série est au plus égal à $\frac{10x_n+9}{10^{n+1}}$, ce terme de la 2e série est *au plus* égal à $\frac{10x_n+10}{10^{n+1}}$, par suite *au plus* égal à celui qui le précède $\frac{x_n+1}{10^n}$ dans la 2e série

A mesure que l'on augmente le dénominateur qui marque le degré d'approximation de la racine, les différences entre les deux valeurs approchées, par défaut et par excès, diminuent. Elles peuvent décroître indéfiniment à mesure que l'on fait croître l'exposant de 10.

Voilà donc deux séries de nombres qui vont, ceux de la 1re en croissant, ceux de la 2e en décroissant, de manière à se rapprocher indéfiniment, de façon que leur différence devienne plus petite que toute quantité assignée. N'est-il pas alors nécessaire de conclure que ces deux quantités variables qui se rapprochent l'une de l'autre, de façon que leur différence devienne aussi petite que l'on voudra, ont une limite commune?

C'est cette limite que nous appelons racine carrée du nombre A, le nombre $\sqrt{A}$. Il définit une grandeur bien déterminée, puisque nous pouvons en donner la mesure avec une approximation indéfinie.

On l'appelle incommensurable, parce que l'on ne peut trouver de fraction aliquote de l'unité, si petite qu'elle soit prise, qui puisse servir de commune mesure entre l'unité et le nombre $\sqrt{A}$

que nous ne pouvons concevoir que comme limite de nombres rationnels.

Les nombres variables $\frac{x_n}{10^n}$ et $\frac{x_n + 1}{10^n}$ qui comprennent toujours entre eux le nombre $\sqrt{A}$ ont des carrés comprenant toujours entre eux le nombre A, et s'en rapprochant indéfiniment. Les carrés $\left(\frac{x_n}{10^n}\right)^2$ et $\left(\frac{x_n + 1}{10^n}\right)^2$ ont pour limite le nombre A.

En effet, la différence de ces deux carrés a pour expression

$$\frac{2x_n + 1}{10^{2n}}$$

Or les nombres de la 1^re^ série $\frac{x_n}{10^n}$ vont en décroissant, mais restent toujours inférieurs à ceux de la 2^e^ série $\frac{x_n + 1}{10^n}$ qui vont en décroissant d'une ligne à l'autre.

Tout nombre $\frac{x_n}{10^n}$ est donc inférieur à un terme fixe que l'on peut prendre dans la 2^e^ série sur la même ligne ou sur une ligne supérieure, par exemple sur la 1^re^, où figure $x + 1$

de l'inégalité $\frac{x_n}{10^n} < x + 1$

on tire $x_n < 10^n x + 10^n$

et l'expression $\frac{2x_n + 1}{10^{2n}}$ est inférieure à $\frac{2(10^n x + 10^n) + 1}{10^{2n}}$

ou encore à $\frac{2(x + 1)}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}$

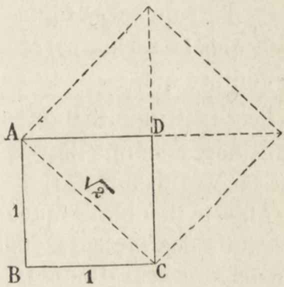
Chacune de ces deux fractions ayant un numérateur fixe, et un dénominateur qui croît indéfiniment, tend vers zéro. La somme des deux fractions tend donc aussi vers zéro. Et les carrés des nombres $\frac{x_n}{10^n}$ et $\frac{x_n + 1}{10^n}$ se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre.

Puisqu'ils comprennent toujours entre eux le nombre A, ces carrés ont pour limite commune le nombre A.

Ainsi le nombre $\sqrt{A}$ est la limite des nombres dont les carrés ont pour limite le nombre A.

Diverses considérations géométriques rendent sensible aux yeux la vraie valeur d'une racine carrée incommensurable telle que $\sqrt{2}$.

On démontre aisément que si l'on construit un carré ayant pour côté l'unité, par exemple 1 mètre, le carré construit sur la diagonale du carré a une surface double de celle du 1[er], contient exactement 2 mètres carrés.



La longueur AC est incommensurable avec la longueur AB prise pour unité, on ne peut exprimer AC par aucun nombre rationnel, car s'il en existait un pour mesure de AC, en l'élevant au carré on devrait trouver l'aire du carré qui a AC pour côté, et l'on sait qu'il n'y a pas de nombre rationnel dont le carré soit 2. Mais on peut porter, suivant la direction AC, les longueurs correspondantes aux racines carrées de 2, par défaut et par excès, à 1 dixième près, à 1 centième près, etc. Les longueurs mesurées par les racines carrées approchées par défaut étant les côtés de carrés inférieurs à 2, les extrémités de ces longueurs à partir de A suivant la direction AC aboutiront un peu avant le point C; les extrémités des longueurs mesurées par les racines approchées par excès se trouveront un peu après le point C. A mesure que l'on augmente le degré d'approximation des racines, les extrémités des longueurs, par défaut et par excès, des côtés des carrés qui ont pour limite le carré construit sur AC, se rapprochent de plus en plus du point C. La longueur AC est la limite commune des côtés de ces carrés qui tendent, les uns en croissant, les autres en décroissant vers le carré dont AC est le côté et dont l'aire est égale à 2. La longueur AC est représentée par le nombre $\sqrt{2}$. On peut dire que $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ donne pour produit 2 en considérant l'expression $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ comme la limite des produits obtenus quand on met à la place de $\sqrt{2}$ la valeur de la racine approchée à une unité près d'un ordre de plus en plus petit.

Ce n'est qu'après toutes ces notions acquises que l'on peut dire que la racine carrée d'un nombre quelconque donné est le nombre qui, élevé au carré, reproduit le proposé.

Les facteurs irrationnels, tels que $\sqrt{A}$, pouvant être considérés comme limites de facteurs rationnels, présentent les mêmes propriétés.

Ainsi le théorème fondamental et les corollaires relatifs aux produits des facteurs consécutifs s'appliquent à des facteurs quelconques, rationnels ou irrationnels. D'après cela on peut énoncer les propositions suivantes.

Pour extraire la racine carrée d'un produit de facteurs, il suffit d'extraire la racine carrée de chaque facteur.

Ainsi
$$\sqrt{A.B.C}=\sqrt{A}.\ \sqrt{B}.\ \sqrt{C}.$$

puisque le produit

$$(\sqrt{A}.\ \sqrt{B}.\ \sqrt{C})\times(\sqrt{A}.\ \sqrt{B}.\ \sqrt{C}) \text{ équivaut à}$$
$$(\sqrt{A}.\ \sqrt{A})\times(\sqrt{B}.\ \sqrt{B})\times(\sqrt{C}.\ \sqrt{C})=A.B.C$$

Pour extraire la racine carrée d'un quotient ou d'une fraction, il suffit d'extraire la racine carrée de chaque terme.

$$\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \text{ puisque } \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.\ \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\frac{A}{B}$$

D'après ces principes, si quelque facteur ou diviseur soumis au radical est un carré parfait, on peut le soumettre isolément à l'extraction de racine, et mettre à la place la racine effectuée; c'est ce qu'on appelle faire sortir le nombre du radical.

Ainsi $$\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Inversement, un facteur écrit en dehors d'un radical peut être remplacé par son carré écrit sous le radical. C'est ce qu'on appelle faire passer le nombre sous le radical.

Ainsi $$5.\sqrt{3} = \sqrt{5^2.3} = \sqrt{75}$$

Il peut arriver qu'un produit de facteurs incommensurables différents soit commensurable.

Ainsi $$\sqrt{75} \times \sqrt{3} = \sqrt{75 \times 3} = 15$$

Si l'on considère un nombre entier décomposé en facteurs premiers, on reconnaît qu'il est carré parfait si tous les exposants des facteurs premiers sont pairs.

DIVISION PAR UNE RACINE CARRÉE OU PAR UNE SOMME OU UNE DIFFÉRENCE COMPRENANT QUELQUE RACINE CARRÉE.

Dans les calculs de la géométrie pratique, on est souvent conduit à la division d'un nombre par un diviseur tel que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc.

Il y a grand avantage à transformer un quotient de la forme $\frac{D}{\sqrt{2}}$ en multipliant les deux termes par le même nombre $\sqrt{2}$

$$\frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{D \times \sqrt{2}}{2}$$

On remplace ainsi une division dans laquelle le diviseur ne serait exprimé qu'avec une certaine approximation, avec beaucoup de chiffres si l'on désire une grande précision, par une opération beaucoup plus commode, dont le degré d'approximation est facile à évaluer.

S'agit-il, par exemple, de calculer le côté d'un carré dont la diagonale mesure 1000 mètres?

On établit dans les cours de géométrie que le côté c d'un carré et la diagonale d sont liés par la relation

$$d = c \times \sqrt{2}$$

d'où résulte

$$c = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ ou mieux } \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

Si l'on connaît la valeur $\sqrt{2}$, soit 1,41421 à 0,00001 près, la formule $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ donnera, en y faisant $d = 1000$

$$c = \frac{1414,21}{2} = 707^{\text{m}},105$$

et l'on connaît le côté à moins d'un demi-centimètre près.

En général, on pourra substituer à un quotient de la forme $\frac{D}{\sqrt{A}}$ l'expression équivalente $\frac{D \times \sqrt{A}}{A}$.

Si le diviseur est de la forme $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, on multiplie les deux termes par l'expression dite conjuguée : $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, le diviseur transformé se trouve égal à $A - B$, et par suite rationnel.

Cette transformation est basée sur le théorème démontré : « le produit de la somme des deux nombres par leur différence est égal à la différence des carrés de ces nombres. »

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = A - B$$

Considérons le quotient $\frac{1000}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

en multipliant les deux termes par $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, nous obtenons l'expression équivalente $1000 \times [\sqrt{3} - \sqrt{2}]$; le diviseur nouveau est égal à $3 - 2$, c'est-à-dire à l'unité; il n'y a plus de division à effectuer, et le résultat peut être calculé avec beaucoup plus de facilité et avec autant de précision que l'on voudra.

Si le diviseur était de la forme $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, il suffirait de multiplier les deux termes par $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

Les mêmes principes s'appliquent naturellement lorsque l'un seulement des termes de la somme ou de la différence est une racine carrée.

Ainsi

$$\frac{1000}{\sqrt{17} - 4} = 1000 \times [\sqrt{17} + 4]$$

$$\frac{1000}{4 + \sqrt{17}} = 1000 [\sqrt{17} - 4]$$

$$\frac{1}{\sqrt{24} - 4} = \frac{\sqrt{24} + 4}{24 - 16} = \frac{\sqrt{24}}{8} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{100 - 4 \times 5} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{80} = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{5}}{40}$$

CUBE ET RACINE CUBIQUE

Le cube ou 3e puissance d'un nombre est le produit de 3 facteurs égaux à ce nombre, ou encore, le produit du carré du nombre par le nombre même.

Il est indispensable de savoir par cœur les cubes des 9 premiers nombres que nous rappelons dans le tableau suivant, en faisant exprimer à ces nombres soit des unités simples, soit des dizaines, soit des dixièmes.

Dizaines	Unités	Dixièmes
$10^3 = 1000$	$1^3 = 1$	$0,1^3 = 0,001$
$20^3 = 8000$	$2^3 = 8$	$0,2^3 = 0,008$
$30^3 = 27000$	$3^3 = 27$	$0,3^3 = 0,027$
$40^3 = 64000$	$4^3 = 64$	$0,4^3 = 0,064$
$50^3 = 125000$	$5^3 = 125$	$0,5^3 = 0,125$
$60^3 = 216000$	$6^3 = 216$	$0,6^3 = 0,216$
$70^3 = 343000$	$7^3 = 343$	$0,7^3 = 0,343$
$80^3 = 512000$	$8^3 = 512$	$0,8^3 = 0.512$
$90^3 = 729000$	$9^3 = 729$	$0,9^3 = 0,729$

Tout multiple de 10, de la forme $M \times 10$, a pour cube un nombre de mille, $M^3 \times 10^3$; et plus généralement tout multiple de 10^n, de la forme $M \times 10^n$, a pour cube un nombre M^3 d'unités de l'ordre de 10^{3n}.

Toute fraction $\frac{M}{10^n}$ a pour cube $\frac{M^3}{10^{3n}}$.

Ces remarques ne sont que des cas particuliers des principes généraux démontrés pour la formation des puissances d'un produit de facteurs ou d'une fraction.

Tandis que les carrés des nombres entiers ne peuvent être terminés que par les chiffres 0, 1, 4, 5, 6, 9; les cubes peuvent avoir aux unités un chiffre quelconque. Lorsque le dernier chiffre est un zéro, le nombre n'est carré parfait que s'il se termine par un nombre pair de zéros ; il n'est cube parfait que si le nombre des zéros est multiple de 3.

Théorème. — *Le cube de la somme de deux nombres comprend :*

1° *Le cube du premier ;*
2° *Le triple carré du premier, multiplié par le second ;*
3° *Le triple carré du second, multiplié par le premier ;*
4° *Le cube du second.*

Si l'on désigne les deux nombres par a et b, on a la formule

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2.b + 3\,ab^2 + b^3$$

Cette formule se démontre par l'application des règles établies pour la multiplication d'une somme de nombres par une autre somme. Le cube de $(a+b)$ peut se calculer en multipliant le carré de $(a+b)$ par le nombre $(a+b)$ même.

carré de $a+b$	$a^2 + 2\,ab + b^2$
multiplicateur	$a + b$
1er produit partiel, par a	$a^3 + 2\,a^2b + ab^3$
2e produit partiel, par b	$a^2b + 2\,ab^2 + b^3$
Produit total	$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$

I. Cette formule est générale, quels que soient les nombres a et b ; on en fait une application pour établir la règle de l'extraction de la racine cubique d'un nombre ; en considérant le cube d'un nombre formé de dizaines et d'unités. On fait remarquer, comme cas particulier, que le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités comprend :

1° Le cube des dizaines ;
2° Le triple carré des dizaines, multiplié par les unités ;
3° Le triple produit des dizaines, par le carré des unités ;
4° Le cube des unités.

$$(D+u)^3 = D^3 + 3\,D^2u + 3\,Du^2 + u^3$$

II. *La différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs est égal à trois fois le carré du plus petit, plus trois fois le plus petit, plus* 1.

Soit en effet N le plus petit des deux nombres, le cube est N^3

Le nombre $(N+1)$, immédiatement supérieur, a un cube égal à N^3+3N^2+3N+1.

L'accroissement est représenté par $3.N^2+3N+1$.

On énonce encore cette proposition, qui reste exacte quel que soit N, en disant que lorsqu'un nombre augmente d'une unité, le cube augmente de trois fois le carré de ce nombre, plus trois fois le nombre, plus 1.

III. Le théorème relatif à la composition du cube de la somme de deux nombres permet de former rapidement le cube des nombres compris de 10 à 20. Soit, par exemple, à former le cube de 12

$$12^3 = \left.\begin{array}{l} 1 \\ \;\;6 \\ \;12 \\ \;\;\;8 \end{array}\right\} = 1728$$

Explication.

$$\begin{array}{rrlr} 10^3 = & 1000 & & 1 \\ 10^2 \times 3.2 = & 600 & 3.2 = & 6 \\ 10 \times 3.2^2 = & 120 & 3.2^2 = & 12 \\ 2^3 = & 8 & 2^3 = & 8 \\ \hline (10+2)^3 = & 1728 & & 1728 \end{array}$$

$$15^3 = \left.\begin{array}{l} 1 \\ \;15 \\ \;\;75 \\ \;\;125 \end{array}\right\} = 3375$$

mille		1
centaines	$3.5 =$	15
dizaines	$3.5^2 =$	75
unités	$5^3 =$	125

$$16^3 = \left.\begin{array}{l} 1 \\ \;18 \\ \;108 \\ \;\;216 \end{array}\right\} = 4096$$

Les chiffres sont placés de façon que chaque terme déborde d'un rang vers la droite.

$$17^3 = \left.\begin{array}{l} 1 \\ \;21 \\ \;147 \\ \;\;343 \end{array}\right\} = 4913$$

$$18^3 = \left.\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ 192 \\ 512 \end{array}\right\} = 5832$$

$$19^3 = \left.\begin{array}{r} 1 \\ 27 \\ 243 \\ 729 \end{array}\right\} = 6859$$

La preuve par 9 de l'élévation au cube se fait en élevant au cube le reste à 9 du nombre base ; on vérifie que le reste à 9 de ce cube effectué est bien égal au reste à 9 que donne le résultat de l'opération. Ainsi 19 donne 1, dont le cube est 1. Le nombre 6859 donne bien 1.

Les cubes des nombres 21, 31, 41,... 91, se forment encore très facilement :

$$21^3 = \begin{array}{r} 8000 \\ 1200 \\ 60 \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 12 \\ 6 \\ 1 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$31^3 \qquad \begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ \cdot\cdot 9 \\ \cdot\cdot\cdot 1 \\ \hline 29791 \end{array}$$

$$41^3 \qquad \begin{array}{r} 64 \\ 48 \\ 12 \\ 1 \\ \hline 68921 \end{array}$$

$$91^3 \qquad \begin{array}{r} 729 \\ 243 \\ 27 \\ 1 \\ \hline 753571 \end{array}$$

Les cubes des nombres 101, 102, 103.... 109, sont aussi remarquables.

FORMULE GÉNÉRALE :

$$(100+u)^3 = 1000000 + 3u.10000 + 3u^2.100 + u^3.$$

$101^3 = 1030301$
$102^3 = 1061208$
$103^3 = 1092727$
$104^3 = 1124864 \quad 12 = 3.4 \quad 48 = 3.4^2 \quad 64 = 4^3$
$105^3 = 1157625$
$106^3 = 1191016$
$107^3 = 1225043$
$108^3 = 1259712$
$109^3 = 1295029$

RACINE CUBIQUE.

On nomme racine cubique d'un nombre donné, un nombre qui, élevé au cube, reproduit le nombre proposé.

La racine cubique de 343 est 7, puisque $7^3 = 343$.

La racine cubique de 729000 est 90, puisque $90^3 = 729000$.

La racine cubique de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$, puisque $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.

La racine cubique de $7^3 \times 2^6 \times 5^9$ est $7 \times 2^2 \times 5^3$.

La racine cubique de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ est $a + b$.

Si le nombre proposé A n'est le cube ni d'un nombre entier ni d'un nombre fractionnaire qu'on peut toujours supposer irréductible, la racine cubique de A est un nombre incommensurable, limite des nombres dont les cubes ont pour limite le nombre A. On acquiert la notion de la racine cubique incommensurable par les considérations analogues à celles qui conduisent à celle de la racine carrée.

La règle d'extraction de racine cubique a pour but de faire connaître la racine cubique d'un nombre proposé : exactement, s'il arrive que ce nombre soit un cube parfait ; avec telle approximation que l'on veut si le nombre n'est pas un cube parfait.

RACINE CUBIQUE D'UN NOMBRE ENTIER A 1 UNITÉ PRÈS

1er cas. Le nombre est inférieur à 1000.

La connaissance des cubes des 10 premiers nombres suffit pour donner la racine cubique à 1 unité près.

Ainsi la racine cubique, à 1 unité près, de 468, est 7 par défaut, 8 par excès.

Remarque. — La racine cubique de 468 mille, à 1 dizaine près, est 7 dizaines par défaut, 8 dizaines par excès.

La racine cubique de 468 millions, à 1 centaine près, est 7 centaines par défaut, 8 centaines par excès.

2e cas. Le nombre est supérieur à 1000.

La racine cubique est alors supérieure à 10 et peut être considérée comme composée de dizaines et d'unités.

Pour trouver le nombre des dizaines, il suffit d'extraire à 1 unité près la racine cubique du nombre des mille qui figure dans la composition du nombre donné. Soit en effet M ce nombre des mille, R sa racine cubique à 1 unité près. R satisfait aux inégalités

$$R^3 \leqq M < (R+1)^3$$

Si l'on multiplie ces quantités par 1000 ou 10^3, on obtient

$$(R \times 10)^3 \leqq M \times 1000 < [(R+1).10]^3$$

Dans l'inégalité $M < R+1$, la différence entre les deux nombres entiers M et R est au moins 1 ; par suite dans l'inégalité $M \times 1000 < [(R+1).10]^3$ la différence entre les deux membres est au moins 1000, de sorte qu'en ajoutant au nombre $M \times 1000$, la 2e portion du nombre proposé, nécessairement inférieure à 1000, l'inégalité subsiste dans le même sens.

Soit, par exemple, le nombre 684 523 dont on demande la racine cubique à 1 unité près. Après avoir séparé la tranche des trois premiers chiffres, on extrait la racine à 1 unité près du nombre 684. Ce nombre 684 étant compris entre $8^3 = 512$ et $9^3 = 729$, la racine cubique à 1 unité près, par défaut, est 8. C'est le chiffre des dizaines de la racine. Reste à trouver le chiffre des unités. En appelant D, les dizaines; *u*, les unités de la racine; r, le reste qui peut exister, on peut poser l'égalité

$$684523 = D^3 + 3D^2u + 3Du^2 + u^3 + r$$

D étant trouvé égal à 8×10, on peut former D^3, qui est un nombre de mille représenté par 8^3. Et si l'on retranche 8^3 ou 512 (mille) des 684 (mille) du nombre donné, on peut dire que le reste 172 (mille) suivi des 523 unités, c'est-à-dire le nombre 172 523 comprend au moins les trois termes $3D^2u + 3Du^2 + u^3$. Le terme $3D^2u$ qui exprime un multiple de 100 doit être contenu dans les 1725 (centaines) du nombre 172 523.

Pour plus de précision, nous allons démontrer que le quotient entier de la division de 1725 par le triple carré du nombre 8 donne une limite supérieure du chiffre des unités. Soit en effet u' un nombre d'unités simples satisfaisant à la condition

$$3.8^2.u' > 1725$$

la différence entre les deux membres de cette inégalité serait au moins égale à 1; en multipliant par 10^2 ou 100, on obtiendrait l'inégalité

$$3.80^2.u' > 172500$$

la différence entre les deux membres serait au moins égale à 100 et l'on pourrait ajouter au 2e membre le nombre 23, sans que le sens de l'inégalité fût changé, ce qui donnerait

$$3.80^2u' > 172523$$

Or, on doit avoir en désignant par u le vrai chiffre des unités

$$3.80^2.u \leqq 172\,523$$

Donc u' est $> u$.

Ainsi le nombre u des unités ne peut dépasser le quotient entier, par défaut, du nombre des centaines 1725 par le triple carré 192 du chiffre des dizaines.

Ce quotient est 8. Le chiffre des unités de la racine ne peut être que 8 ou un chiffre plus faible. On essaye le chiffre 8, soit en formant directement le cube de 88, par de simples multiplications, pour s'assurer s'il peut se retrancher du nombre proposé 684 523, soit en formant les trois termes

$3D^2u + 3Du^2 + u^3$, pour s'assurer si leur somme peut se retrancher de 172 523.

Le cube de 88 est 681 472, par conséquent inférieur au nombre proposé.

La racine cubique du nombre 684 523 est donc 88; il y a un reste 3051.

$$684\,523 = 88^3 + 3051$$

AUTRE EXEMPLE, DÉTAIL DES CALCULS

$$\begin{array}{r}
472\cdot8\ 59 \\
343 \\ \hline
129\ 8\cdot59 \\
113\ 5\ 33 \\ \hline
16\ 3\ 26
\end{array}$$

$$472859 = 77^3 + 16326$$

77

$7^2 \times 3 = 147$

chiffre présumé des unités 9

$$\left.\begin{array}{r}
70^2 \times 3 \times 9 = 132300 \\
70 \times 3 \times 9^2 = 17010 \\
9^3 = 729
\end{array}\right\} 150039$$

Le chiffre 9 est trop fort. On essaye 8.

$$\left.\begin{array}{r}
70^2 \times 3 \times 8 = 117600 \\
70 \times 3 \times 8^2 = 13440 \\
8^3 = 512
\end{array}\right\} 131552$$

Le chiffre 8 est trop fort. 7 est le chiffre des unités.

$$\left.\begin{array}{r}
70^2 \times 3 \times 7 = 102900 \\
70 \times 3 \times 7^2 = 10290 \\
7^3 = 343
\end{array}\right\} 113533$$

Maximum du reste. — Dans l'extraction de la racine cubique d'un nombre entier à 1 unité près, le reste ne doit pas dépasser le triple carré du nombre trouvé à la racine, plus le triple de ce nombre.

En effet, soit a la racine présumée, et un reste au moins égal à $3a^2 + 3a + 1$, le nombre proposé serait alors au moins égal à $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, c'est-à-dire à $(a + 1)^3$, et a ne serait pas la racine à 1 unité près.

PREUVE PAR 9 DE L'EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

On cherche le reste à 9 du nombre trouvé à la racine, ici 5, on l'élève au cube, 125, on prend le reste à 9, 8, que l'on ajoute aux chiffres du reste de l'opération. Reste définitif 8.

Le nombre proposé donne bien pour reste à 9 le nombre 8.

RACINE D'UN GRAND NOMBRE.

Nous venons de voir que pour trouver les dizaines de la racine cubique d'un nombre plus grand que 1000, il suffit d'extraire à 1 unité près la racine cubique du nombre des mille. Mais ce nombre peut être lui-même plus grand que 1000, et sa racine cubique, supérieure à 10, comprendra des dizaines et des unités. Pour trouver les dizaines, il suffira d'extraire la racine, à 1 unité près, du nombre des mille du nouveau nombre, c'est-à-dire du nombre des millions du nombre proposé. Le raisonnement conduit à partager le nombre donné en tranches de trois chiffres à partir de la droite jusqu'à ce que l'on arrive à une tranche extrême de gauche formant un nombre inférieur à 1000. La racine de la tranche extrême de gauche est le chiffre des dizaines de la racine du nombre formé par les deux premières tranches de gauche ; on détermine le chiffre des unités ainsi qu'il a été expliqué. On connaît dès lors le nombre de dizaines de la racine du nombre formé par les trois premières tranches de gauche, et l'on peut encore trouver le chiffre des unités, et ainsi de suite.

Proposons-nous, par exemple, d'extraire la racine cubique, à 1 unité près, du nombre 82 756 423.

82·756·423	435
64	$4^2 \times 3 = 48$ 187 : 48
187·56	quotient 3
$43^3 = 79507$	
32494·23	$43^2 \times 3 = 5547$ 32494 : 5547
	quotient 5
$435^3 = 82.312.875$	
Reste 443.548	

$$82.756.423 = 435^3 + 443.548$$

Preuve par 9

$$1 = 0 + 1$$

Des explications et exemples qui précèdent, on déduit la règle suivante :

Règle. — Pour extraire à 1 unité près la racine cubique d'un nombre entier supérieur à 1000, on partage le nombre en tranches de 3 chiffres à partir de la droite; la dernière tranche à gauche peut n'avoir que 2 chiffres, ou même un seul.

On extrait la racine cubique à 1 unité près du nombre représenté par la tranche de gauche; on obtient ainsi le premier chiffre de la racine; on en forme le cube que l'on soustrait de la tranche de gauche; à la droite du reste, on abaisse la tranche suivante, on sépare les deux chiffres sur la droite, pour ne considérer que les centaines du nouveau nombre, on évalue le quotient entier de ce nombre de centaines par le triple carré du nombre déjà obtenu à la racine; ce quotient est égal ou supérieur au deuxième chiffre de la racine; il faut essayer le deuxième chiffre présumé. On forme le cube de la racine supposée et l'on cherche à le soustraire du nombre représenté par l'ensemble des deux premières tranches de gauche. Si le deuxième chiffre essayé est trop fort, le cube de la racine supposée sera supérieur au nombre des 2 premières tranches. S'il était trop faible, on en serait averti par l'inspection du reste qui ne doit pas dépasser le triple carré du nombre trouvé à la racine, plus 3 fois ce nombre. Le deuxième chiffre étant déterminé, et le cube du nombre obtenu à la racine étant retranché du nombre représenté par les deux premières tranches de gauche, on abaisse à la droite du reste la troisième tranche, s'il y en a plus de deux; on sépare les deux chiffres sur la droite de ce nouveau nombre, on divise les centaines par le triple carré de la portion déjà obtenue à la racine; on détermine ainsi le troisième chiffre de la racine, comme on a trouvé le second, et l'on continne d'après les mêmes principes jusqu'à ce que l'on ait abaissé toutes les tranches du nombre et trouvé tous les chiffres de la racine demandée.

Remarque. — La racine cubique compte autant de chiffres qu'il y a de tranches de 3 chiffres dans le nombre proposé.

On le voit par la pratique même de l'opération, puisque chaque tranche fournit un chiffre à la racine.

On pourrait le démontrer *à priori*, abstraction faite de la règle suivie.

Désignons par n le nombre des tranches formées en séparant successivement trois chiffres à partir de la droite.

Le nombre proposé est au moins égal à l'unité ayant à sa droite $(n-1)$ tranches de 3 zéros, c'est-à-dire à $10^{3(n-1)}$; mais il est inférieur à l'unité suivie de n tranches de 3 zéros, c'est-à-dire à 10^{3n}.

La racine cubique est donc au moins égale à 10^{n-1}, mais inférieure à 10^n.

10^{n-1} est le plus petit nombre de n chiffres.

10^n est le plus petit nombre de $(n+1)$ chiffres.

La racine a donc bien n chiffres, puisque le raisonnement prouve qu'elle en a au moins n, et ne peut en avoir un de plus.

Remarque II. — Il arrive parfois que la division par laquelle on cherche à déterminer chacun des chiffres de la racine, après le premier, donne un quotient supérieur à 10; ce quotient est nécessairement trop fort, le chiffre cherché ne peut dépasser 9, on essaye donc 9 et au besoin 8, jusqu'à ce que l'on ait trouvé le chiffre exact. Quelquefois aussi le quotient est égal à zéro; alors le chiffre que l'on cherche à la racine est certainement zéro, et après l'avoir inscrit à la racine, on abaisse la tranche suivante pour continuer l'opération d'après les principes ordinaires.

Remarque III. — La racine cubique, à 1 unité près, d'un nombre composé d'un entier N et d'une fraction f, de forme quelconque et de valeur inférieure à 1, est la même que la racine du nombre entier N.

Soit en effet a, la racine cubique de N, de sorte que l'on a

$$a^3 \leqq N < (a+1)^3$$

la deuxième inégalité sera toujours une véritable inégalité, et le nombre entier N est nécessairement inférieur au nombre entier $(a+1)^3$ d'une unité au moins; par conséquent en ajoutant, à N une fraction f, plus petite que l'unité, l'inégalité subsistera dans le même sens, et l'on aura

$$a^3 < N + f < (a + 1)^3$$

ce qui prouve que a, racine cubique de N à 1 unité près, est en même temps la racine cubique du nombre $N + f$ à 1 unité près.

RACINE CUBIQUE D'UN NOMBRE A $\frac{1}{n}$ PRÈS.

On nomme racine cubique, à $\frac{1}{n}$ près, d'un nombre A, la valeur du plus grand nombre de n^{es}, le plus grand multiple de la fraction $\frac{1}{n}$ dont le cube soit contenu dans le nombre A.

En désignant par $\frac{x}{n}$, le plus grand multiple de $\frac{1}{n}$ dont le cube soit contenu dans A, on a les inégalités

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 \leqq A < \left(\frac{x + 1}{n}\right)^3$$

et si l'on multiplie par n^3

$$x^3 \leqq A \times n^3 < (x + 1)^3$$

ce qui montre que x est la racine cubique, à 1 unité près, du nombre $A \times n^3$, ou, ce qui revient au même, de la partie entière du nombre An^3, obtenu en multipliant le nombre donné A par le cube du dénominateur qui marque l'approximation.

Les propositions qui précèdent guident dans la marche à suivre pour extraire la racine cubique d'un nombre entier ou décimal à 1 unité, 1 dixième, 1 centième, 1 millième près, etc.

Pour avoir la racine à 1 unité près, on extrait la racine de la partie entière du nombre donné; pour avoir la racine à 1 dixième près, il suffit d'extraire la racine à 1 unité près du nombre total des millièmes contenus dans le nombre; et à cet effet, après avoir trouvé la racine entière, on continue l'opération en abaissant à la droite du reste entier la tranche des trois premiers chiffres décimaux que l'on complèterait par des zéros s'il y avait lieu, et l'on calcule le chiffre des dixièmes d'après les mêmes principes que le chiffre des unités; seulement la virgule placée, à la racine, à la droite des unités simples, fait exprimer au nouveau chiffre des dixièmes. Pour obtenir la racine du nombre à 1 centième près, on cherche la racine à 1 unité près du nombre total des millionièmes contenus dans le nombre proposé, et ainsi de suite.

Si le nombre présente plusieurs chiffres décimaux, on abaisse successivement à la droite de chaque reste une nouvelle tranche de 3 chiffres décimaux, en complétant par des zéros s'il y a lieu.

Si le nombre est entier, on écrit successivement à la droite de chaque reste trois zéros pour calculer un nouveau chiffre à la racine.

Si l'on veut, dès le début de l'opération, partager un nombre décimal en tranches de 3 chiffres à partir de la droite, il faut prendre un nombre de chiffres décimaux multiple de 3, en ajoutant un ou deux zéros s'il est nécessaire. Mais il revient au même de prendre pour point de départ la place de la virgule, et de former des tranches de trois chiffres de part et d'autre de la virgule; la tranche extrême de gauche seule peut avoir moins de 3 chiffres.

Exemple I. — Calculer la racine cubique de 10 à 0,001 près.

10	2,154	
20·00	$2^2 \times 3 = 12$	20 : 12 quotient entier 1
$21^3 = 9261$		
7390·00	$21^2 \times 3 = 1323$	7390 : 1323 quotient entier 5
$215^3 = 9.938.375$	$215^2 \times 3 = 138675$	quotient 4
..616250·00		
$2154^3 = 9993948264$		
Reste 6051736		

$$10 = 2,154^3 + 0,006051736$$

Preuve par 9

$$1 = 0 + 1$$

II. Calculer la racine de 2,95 à 0,001 près.

2950	1,434
$14^3 = 2744$	$14^2 \times 3 = 588$ quotient 3
2060 00	
$143^3 = 2.924207$	$143^2 \times 3 = 61347$ quotient 4
257930·00	
$1434^3 = 2.948\,814\,504$	
Reste 1185496	

$$2{,}95 = 1{,}434^3 + 0{,}001\ 185496$$

Preuve par 9.

$$7 = \quad 0 + \quad 7$$

Remarque. — La règle habituellement suivie pour arriver à une tranche extrême de gauche ayant 3 chiffres au plus n'est faite qu'en raison de nos connaissances restreintes de la liste des cubes que nous bornons le plus souvent à celle des 10 premiers nombres; mais évidemment elle n'a rien d'absolu, et s'il arrive que nous connaissions à 1 unité près la racine cubique d'une portion, à gauche, du nombre proposé, composée de plus de 3 chiffres, il y a avantage à l'inscrire immédiatement. C'est ainsi que nous avons pu dans l'exemple précédent, pour trouver la racine cubique à 0,001 près, du nombre 2,95 considérer immédiatement le nombre total des millièmes 2950 dont nous apercevions la racine cubique 14 (dixièmes), sachant que le cube de 14 est 2744 et le cube de 15, 3375.

RACINE CUBIQUE DES FRACTIONS ORDINAIRES.

Si les 2 termes de la fraction proposée sont des cubes parfaits, on obtient exactement la racine cubique en extrayant la racine de chaque terme.

Ainsi la racine cubique de $\frac{125}{343}$ est $\frac{5}{7}$.

Si le dénominateur seul est cube parfait n^3, on peut extraire à 1 unité près la racine cubique du numérateur; et la fraction qui a pour numérateur la racine ainsi obtenue, et pour dénominateur la racine exacte n du dénominateur proposé n^3, représente à $\frac{1}{n}$ près la racine de la fraction proposée.

Ainsi la racine cubique de $\frac{174}{343}$ est $\frac{5}{7}$ à $\frac{1}{7}$ près, par défaut

$\frac{6}{7}$ à $\frac{1}{7}$ près, par excès

puisque $\left(\frac{5}{7}\right)^3 < \frac{174}{343} < \left(\frac{6}{7}\right)^3$.

Lorsque le dénominateur de la fraction proposée n'est pas un cube parfait, on peut toujours le rendre cube parfait, en le multipliant par des facteurs convenablement choisis.

Pour qu'un nombre entier soit cube parfait, il suffit que tous les facteurs premiers soient affectés d'exposants multiples de 3.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{17}{45}$. Le dénominateur $45 = 3^2.5$, multiplié par $3.5^2 = 75$ deviendra cube parfait.

$$\frac{17}{45} = \frac{17 \times 75}{45 \times 75}$$

Le dénominateur 45×75 est égal à $3^3.5^3$, et par suite la racine cubique est $15 = 3.5$.

La racine cubique du numérateur 17×75 ou 1275, à 1 unité près, est 10.

La racine cubique de $\frac{17}{45}$ est donc $\frac{10}{15}$ à $\frac{1}{15}$ près, par défaut.

$\frac{11}{15}$ à $\frac{1}{15}$ près, par excès.

RACINE CUBIQUE D'UN NOMBRE FRACTIONNAIRE AVEC APPROXIMATION D'UN ORDRE DÉCIMAL.

Dans la plupart des applications, on préfère évaluer les racines cubiques à 1 centième, à 1 millième près, etc., et à cet effet on convertira d'abord la fraction ordinaire en fraction décimale, en calculant le quotient du numérateur par le dénominateur avee autant de tranches de 3 chiffres décimaux que l'on veut avoir de chiffres à la racine; toutefois on peut se dispenser de calculer les deux chiffres à droite qui compléteraient la dernière tranche de droite; le premier chiffre, celui des centaines, suffit, dans la plupart des cas du moins.

RACINES CUBIQUES INCOMMENSURABLES.

Lorsqu'un nombre A n'est le cube exact ni d'un entier, ni d'une fraction, que faut-il entendre par la racine cubique de A, que l'on représente par $\sqrt[3]{A}$?

Nous avons défini et appris à déterminer la racine cubique d'un nombre quelconque A avec une approximation fixée à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., près.

Ainsi que nous l'avons expliqué pour les racines carrées incommensurables, les racines cubiques approchées par défaut et les racines cubiques approchées par excès tendent, à mesure que le dénominateur de la fraction indiquant le degré d'approximation augmente, vers une limite commune. C'est cette limite qui est la racine cubique de A, le nombre $\sqrt[3]{A}$. Et l'on peut dire que c'est la limite des nombres rationnels dont les cubes ont pour limite A.

Des considérations géométriques aident dans la compréhension de ce nombre irrationnel $\sqrt[3]{A}$.

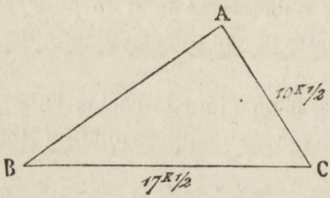
On démontre que le volume d'un cube a pour mesure le cube du nombre qui mesure la longueur du côté du cube.

Ainsi le volume d'un cube ayant 1 mètre de côté est 1 mètre cube; le volume d'un cube ayant 2 mètres de côté est $2^3 = 8$ mètres cubes, etc.

Entre 1 mètre et 2 mètres, nous pouvons concevoir une longueur variant d'une manière continue, et pour chaque valeur particulière, le cube dont cette longueur spéciale serait le côté; nous obtiendrons ainsi des cubes dont le volume va en croissant depuis 1 mètre cube jusqu'à 8 mètres cubes. Dans cette suite de cubes, qui se succèdent d'une manière continue, nous pouvons observer particulièrement celui qui a pour volume 2 mètres cubes, par exemple. Ce volume correspond à une valeur spéciale de la longueur du côté qui a varié de 1 à 2. C'est cette valeur spéciale qui nous représente $\sqrt[3]{2}$.

APPLICATIONS DE LA RACINE CARRÉE.

I. — *Trois localités* A, B, C *forment un triangle rectangle dont* A *est le sommet. On connaît les distances* BC $= 17^{k}\frac{1}{2}$ *et* AC $= 10^{k}\frac{1}{2}$. *On demande la distance* AB.



En vertu du théorème du carré de l'hypoténuse, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}^2 = (17\tfrac{1}{2})^2 - (10\tfrac{1}{2})^2$$

$$AB = \sqrt{(17\tfrac{1}{2})^2 - (10\tfrac{1}{2})^2}$$

ou encore $$AB = \sqrt{(17\tfrac{1}{2} + 10\tfrac{1}{2})\,(17\tfrac{1}{2} - 10\tfrac{1}{2})}$$

et enfin $$AB = \sqrt{28 \times 7} = 14 \text{ kilomètres.}$$

II. — *La hauteur de chute*, h, *et la durée de la chute*, t, *d'un corps pesant qui tombe, sous la seule action de la pesanteur, sont liées par la relation*

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

dans laquelle h *exprime la hauteur en nombre de mètres,* t *la durée de la chute en nombre de secondes;* g, *un coefficient numérique égal à* 9,8088.

On demande le temps qu'emploierait une pierre tombant du sommet de la tour Eiffel (300 *mètres*) *jusqu'au sol.*

L'application de la formule donne

$$300 = 4{,}9044 \times t^2$$

d'où l'on tire $$t = \sqrt{\frac{300}{4{,}9044}}$$

on trouve $$t = 7^s{,}82.$$

III. — *Un rectangle, dont la surface est de* 10000 *mètres carrés, a une longueur égale aux* $\frac{2}{3}$ *de la longueur.*

Quelles sont les deux dimensions?

Si nous désignons par x la longueur, la largeur sera $\frac{2}{3}x$, et la surface $x \times \frac{2}{3}x$ ou $\frac{2}{3}x^2$.

On a donc l'équation $\frac{2}{3}x^2 = 10000$

d'où l'on tire $$x^2 = \frac{10000 \times 3}{2} = 15000$$

et $$x = \sqrt{15000}$$

$$x = 122^m{,}47 \text{ à } \frac{1}{2} \text{ centimètre près.}$$

Ainsi les deux dimensions sont, à moins de 1 centimètre près,

longueur $122^m{,}47$
largeur $81^m{,}65$

IV. — *La durée de l'oscillation d'un pendule est liée à la longueur de ce pendule, par la relation*

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

t *représentant la durée en secondes,* l *la longueur en mètres.*

Calculer, d'après cette formule, 1° *la durée de l'oscillation du pendule de* 1 *mètre de longueur;* 2° *la longueur du pendule qui bat la seconde.*

1° Il suffit d'effectuer le calcul de t, en substituant aux lettres leur valeurs numériques :

$$t = 3{,}1416 \times \sqrt{\frac{1}{9{,}8088}}$$

ou $$t = \frac{3,1416 \times \sqrt{9,8088}}{9,8088}.$$

On trouve $t = 1^{s},0031$.

2° La longueur du pendule qui bat la seconde est donnée par la formule $l = \frac{g}{\pi^2}$. On trouve $l = 0^{m},9938$.

Exercices de calcul mental sur les carrés et racines carrées.

D. Quelle est la surface d'un carré de 175 mètres de côté?

R. 30625 mètres carrés.

D. La surface d'un carré de 307 mètres de côté?

R. 94249 mètres carrés.

D. Calculer de tête la racine carrée de 10, à 1 centième près.

R. 3,16.

On trouve immédiatement les deux premiers chiffres, en extrayant la racine de 1000 à 1 unité près, c'est 31 dont le carré est 961, le reste 39 suivi du premier zéro de la tranche suivante donne 390 à diviser par le double de la racine, 62; le quotient 6 est le chiffre des centièmes.

D. Racine carrée de 35,75 à 1 centième près.

R. 5,98 ou 5,979.

On voit immédiatement que les 2 premiers chiffres sont 5,9 parce que le nombre proposé est assez rapproché de 36. On élève rapidement 59 au carré, en le considérant comme (60-1), le carré est 3481, qui retranché de 3575 donne pour reste 94. Si l'on divise 940 par le double de 59, 118, on voit que 8 est un peu trop fort, mais l'excès est négligeable. Il convient de répondre 5,98 ou 5,979.

D. Racine carrée de $\sqrt{2}$, ou racine quatrième de 2, à 1 centième près?

R. 1,19 ou 1,189.

La racine carrée de 2 est 1,4142..., elle doit être connue par cœur : on trouve les deux premiers chiffres 11 en extrayant la racine carrée de 141 à 1 unité près, le reste est 20. Le quotient de 204 par 22 donne 9 (3e chiffre, par excès).

D. Quel est le quotient de 3 par $\sqrt{2}$?

R. 2,121...

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.\sqrt{2}$$

Les deux premières tranches de deux chiffres de $\sqrt{2} = 1{,}414$
donnent pour moitié 707

$$\frac{3}{2}\sqrt{2} = 2{,}121$$

D. Moyenne géométrique entre 13 et 20?

R. 16, 12..

$$m = \sqrt{13 \times 20} = \sqrt{260}$$

La racine carrée de 260 est 16 pour 256, le reste est 4. En divisant 40 par 32, on obtient 1 pour 3e chiffre; on peut même prendre les deux premiers chiffres du quotient de 40 par 32, lequel serait 1,25.

Exercices sur le cube et la racine cubique.

I. Calculer de tête la racine cubique de 127,698 à 0,01 près.

R. 5,03.

II. Cube de 2,5?

R. 15,625.

III. Cube de 2,08?

R. $1{,}124864 \times 8 = 8{,}998912$.

$$(2{,}08)^3 = (1{,}04)^3 \times 8$$

IV. Racine cubique de 300000 à 1 unité près?

R. 66 par défaut, 67 par excès.

RAPPORTS ET PROPORTIONS

On nomme rapport d'un nombre a à un autre nombre b, le quotient $\frac{a}{b}$ considéré comme exprimant la composition de a au moyen de b, soit que le nombre a contienne un nombre entier de fois b, ou un nombre entier de fois une partie aliquote déterminée de b, soit encore que le nombre a se trouve compris entre deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ de b, que l'on considère comme variables et se rapprochant indéfiniment du nombre a, leur limite commune.

Ainsi, le rapport de 12 à 4 est $\frac{12}{4}$ ou 3; cela veut dire que 12 est composé de 3 fois 4, est 3 fois plus grand que 4.

Le rapport de $\frac{2}{3}$ à $\frac{5}{7}$ est le quotient $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ ou $\frac{14}{15}$, indiquant que les $\frac{2}{3}$ de l'unité valent les $\frac{14}{15}$ des $\frac{5}{7}$ de l'unité.

Le rapport de 3 à $\sqrt{2}$ est la limite des rapports à termes rationnels, tels que $\frac{3}{1,4}$, $\frac{3}{1,41}$, $\frac{3}{1,414}$,... dans lesquels le diviseur se rapproche indéfiniment de la limite $\sqrt{2}$

Le rapport de 2 nombres a et b est obtenu par la division du premier par le second, mais le résultat que l'on peut toujours appeler quotient se nomme rapport dans un sens spécial. Dans la division en général, le dividende est un produit de 2 facteurs; le facteur connu s'appelle diviseur, l'autre est le quotient. Le rôle des facteurs n'est pas spécifié; il n'est pas nécessaire de dire quel est le multiplicande, quel est le multiplicateur. Quand on cherche le rapport de a à b, on cherche le multiplicateur par lequel il faut multiplier le multiplicande b pour composer le produit a.

Le rapport $\frac{a}{b}$ est un nombre composé avec l'unité comme a est composé avec b. Dans les applications, les deux nombres dont on demande le rapport exprimeront toujours des quantités de même nature, le rapport est un nombre abstrait.

Les deux nombres proposés a et b se nomment les deux termes du rapport. a et b se nomment dividende et diviseur, ou numérateur et dénominateur, parce que l'on écrit l'indication du rapport sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$.

Les nombres a et b peuvent être quelconques, résulter d'opérations plus ou moins compliquées, et seulement indiquées. Le rapport s'indiquera dans tous les cas par la notation $\frac{a}{b}$; en effectuant les opérations, les transformations, on pourra généralement mettre le résultat sous une forme simple comme celle d'un nombre entier, d'un nombre décimal, d'une fraction ordinaire, ou d'une quantité incommensurable. Il y a ainsi lieu de distinguer le rapport indiqué $\frac{a}{b}$ et le rapport effectué.

RAPPORT DE DEUX GRANDEURS.

On nomme rapport d'une grandeur A à une autre grandeur de même espèce B, le nombre qui indique la composition de A au moyen de B; le nombre qui exprime la mesure de la grandeur A, quand la grandeur B est prise pour unité. Pour faire la comparaison des deux grandeurs, pour étudier la composition de A à l'aide de B ou de parties de B, on cherche une commune mesure entre ces deux grandeurs, ou une commune mesure entre chacune d'elles et une grandeur de même espèce, bien connue, prise pour unité.

Supposons qu'on ait trouvé une commune mesure contenue, par exemple, 5 fois dans A, et 8 fois dans B; on pourra dire que le rapport de la quantité A à la quantité B, est le rapport de 5 à 8, soit $\frac{5}{8}$. Il est en effet évident que la commune mesure contenue 8 fois dans B, est $\frac{1}{8}$ de B, et que les 5 mesures égales contenues dans A, représentent les $\frac{5}{8}$ de B.

Supposons maintenant que l'on ait mesuré les deux grandeurs A et B à l'aide d'une même unité; comme on mesure, par exemple, deux longueurs à l'aide du mètre.

Les résultats de la comparaison de A et de B avec l'unité, s'expriment, en général, par des nombres, entiers ou fractionnaires, soient a et b ces deux nombres. Nous allons démontrer que le rapport de la grandeur A à la grandeur B est donné par le rapport des deux nombres a et b, ce qui veut dire que A est $B \times \frac{a}{b}$.

Si a et b sont des nombres entiers, la proposition est déjà démontrée; car l'unité choisie sert de commune mesure entre les deux grandeurs qui la contiennent exactement, des nombres entiers de fois.

Supposons donc a et b fractionnaires. Soit $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{7}$.

A est les $\frac{2}{3}$ de l'unité.

B est les $\frac{5}{7}$ de cette unité.

Si B est les $\frac{5}{7}$ de l'unité, cette unité contient les $\frac{7}{5}$ de B. La quantité A vaut donc les $\frac{2}{3}$ des $\frac{7}{5}$ de B; mais $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$. A est donc égal à la fraction de B indiquée par le quotient des deux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7}$.

On peut encore dire : comparons les deux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7}$, prenons et effectuons leur rapport $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{14}{15}$.

Cette égalité exprime une relation générale. Les $\frac{2}{3}$ de l'unité, quelle qu'elle soit, valent les $\frac{14}{15}$ des $\frac{5}{7}$ de la même unité.

Donc, la quantité A, qui représente les $\frac{2}{3}$ de l'unité, vaut les $\frac{14}{15}$ de la quantité B, qui contient les $\frac{5}{7}$ de l'unité.

On pourrait enfin ramener ce deuxième cas au premier, en réduisant les deux fractions au même dénominateur.

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21} \qquad \frac{5}{7} = \frac{15}{21}$$

La fraction aliquote $\frac{1}{21}$ de l'unité sert de commune mesure entre les grandeurs A et B. Cette commune mesure est contenue 15 fois dans B, elle est donc $\frac{1}{15}$ de B.

A contient 14 mesures égales, vaut donc $\frac{14}{15}$ de B.

Il peut enfin arriver qu'il n'y ait aucune commune mesure entre les grandeurs A et B, mais on pourra toujours trouver des grandeurs commensurables, ayant entre elles des rapports à termes rationnels, et différant aussi peu que l'on voudra de A et de B.

Pour toutes les valeurs approchées de A et B, on aura $A' = B' \times \frac{a'}{b'}$.

En passant aux limites, on doit conclure que $A = B \times \lim. \frac{a'}{b'}$.

La limite des rapports de la fraction $\frac{a'}{b'}$, à termes rationnels, sera le rapport de A à B.

Deux rapports sont dits inverses ou réciproques lorsque leur produit est égal à l'unité. Les termes de l'un sont les termes de l'autre avec un rôle inverse. L'inverse du rapport $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Le rapport effectué $\frac{a}{b}$ est un nombre qui sert de mesure à une grandeur. On peut dire qu'un nombre exprime le rapport de la grandeur qu'il représente à l'unité. Le rapport inverse, c'est le rapport de l'unité à cette grandeur. Ainsi $\frac{2}{3}$ de mètre, c'est une grandeur bien définie. Le mètre étant pris pour unité, elle est mesurée par le nombre $\frac{2}{3}$.

Réciproquement, la longueur $\frac{2}{3}$ de mètre peut être prise pour unité ; la longueur 1 mètre sera mesurée, avec cette nouvelle unité, par le nombre $\frac{3}{2}$.

Théorème. — *La valeur d'un rapport ne change pas quand on multiplie les deux termes par un même nombre fini et déterminé.*

$$\frac{a.m}{b.m}=\frac{a}{b}$$

Cette proposition n'est qu'un cas particulier de la proposition analogue déjà démontrée pour les fractions quelconques. Il y a cependant lieu de préciser la démonstration quand le quotient est entendu dans le sens spécial du rapport. Soit r le rapport effectué de a à b, r est le nombre entier ou le nombre fractionnaire qui indique combien de fois a contient b, ou combien de fois a contient une partie aliquote de b.

On peut poser l'identité

$$a=b\times r$$

d'où résulte évidemment

$$a\times m=b\times r\times m$$

Si r est un nombre entier tel que 2, il est démontré que le double de b multiplié par m équivaut au double du produit $b.m$, c'est-à-dire que

$$am = bm.2$$

alors le nombre 2, rapport de a à b, est aussi le rapport de am à bm.

Si $r = \frac{2}{3}$, il est également démontré que les $\frac{2}{3}$ de b, multipliés par m, équivalent aux $\frac{2}{3}$ de bm.

Ainsi quand $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

$$\frac{am}{bm} = \frac{2}{3}$$

ces rapports sont donc toujours égaux. La démonstration est contenue dans la généralisation du théorème démontré relativement à l'interversion de l'ordre des facteurs d'un produit.

RAPPORTS A TERMES VARIABLES.

On a souvent à étudier, dans les diverses branches des mathématiques, des rapports dont les termes varient d'après des conditions spécifiées.

Si le numérateur, seul tend vers zéro, le dénominateur conservant une valeur fixe, finie et déterminée, le rapport variable a pour limite zéro.

Si le numérateur, seul variable, augmente indéfiniment, le dénominateur conservant toujours la même valeur, finie et déterminée, le rapport augmente indéfiniment, tend vers l'infini.

Si le dénominateur seul tend vers zéro, le numérateur conservant une valeur fixe, finie et déterminée, le rapport augmente indéfiniment, et l'on dit que la forme limite $\frac{m}{0}$ est le symbole de l'infini.

Si le dénominateur, seul variable, augmente indéfiniment, le rapport tend vers zéro.

Si les deux termes du rapport sont variables à la fois, il y a lieu de distinguer plusieurs cas. Lorsque les deux termes variables tendent vers des limites finies et déterminées, le rapport a une limite, c'est le rapport des limites des deux termes. Lorsque les deux termes tendent à la fois vers zéro ou vers l'infini, le rapport a généralement une limite, que l'on découvre à l'aide de diverses transformations. Ainsi, considérons le rapport $\frac{n^2-1}{n-1}$, dans lequel n est supposé variable et se rapprochant indéfiniment de la valeur fixe 1, les deux termes du rapport ont pour limite commune zéro, mais leur rapport peut avoir, a réellement, une limite finie, déterminée. Pour toutes valeurs de n supérieures à 1, le rapport $\frac{n^2-1}{n-1}$ équivaut au nombre $n+1$. Lorsque n tend vers 1, le nombre $n+1$ tend évidemment vers la limite, bien déterminée, 2. L'expression $\frac{n^2-1}{n-1}$, toujours équivalente à $n+1$, a donc la même limite, 2.

PROPORTIONS.

On nomme proportion l'expression de l'égalité de deux rapports. Ainsi quand on exprime l'égalité des deux rapports $\frac{1}{8}$ et $\frac{125}{1000}$ en écrivant $\frac{1}{8}=\frac{125}{1000}$ on forme une proportion.

Une proportion comprend 4 nombres. Le 1er et le 4e, les nombres 1 et 1000, dans la proportion ci-dessus, s'appellent les extrêmes. Le 2e et le 3e, 8 et 125, s'appellent les moyens.

Théorème. — *Dans toute proportion, le produit des moyens est égal à celui des extrêmes.*

Soient a, b, c, d, les 4 termes d'une proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

il s'agit de démontrer que $b\times c=a\times d$.

En effet, nous pouvons, sans altérer la valeur de ces rapports, multiplier les deux termes du premier par le dénominateur d du second, les deux termes du second par le dénominateur b du 1^{er}.

On obtient ainsi deux nouveaux rapports respectivement égaux aux rapports proposés, et par suite égaux entre eux

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

les dénominateurs étant égaux, les numérateurs doivent l'être aussi.

Donc $$a \times d = b \times c.$$

Remarque. — Il peut arriver que les deux extrêmes ou les deux moyens soient les mêmes, comme dans les proportions

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{a'}$$

dans ces deux cas particuliers, le théorème général donne les égalités

$$b^2 = a.c$$

et $$a'^2 = b'c'$$

c'est-à-dire que le carré du nombre qui forme soit les moyens soit les extrêmes, est égal au produit des deux autres termes de la proportion. Le nombre qui forme les deux moyens d'une proportion a une valeur nécessairement comprise entre le plus grand et le plus petit des deux extrêmes, supposés différents. On l'appelle moyenne proportionnelle entre les deux nombres qui occupent les places extrêmes.

Ainsi, dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, la valeur de b est dite moyenne proportionnelle entre a et c. Et, d'après le théorème fondamental sur les proportions, la valeur de la moyenne proportionnelle est telle que son carré est égal au produit des des deux autres nombres. Il en résulte que la moyenne proportionnelle entre deux nombres est égale à la racine carrée de leur produit.

La moyenne proportionnelle s'appelle encore moyenne géométrique. Elle représente géométriquement le côté du carré équivalent à un rectangle dont les deux autres nombres expriment les dimensions.

Il ne faut pas la confondre avec la moyenne arithmétique. La moyenne arithmétique entre 2 nombres est égale à leur demi-somme. La moyenne arithmétique entre a et b, c'est $\frac{a+b}{2}$.

La différence entre a et $\frac{a+b}{2}$ est la même qu'entre $\frac{a+b}{2}$ et b, cette différence est $\frac{a-b}{2}$.

Deux nombres inégaux a et b étant proposés, la moyenne arithmétique, c'est le nombre qui pris 2 fois, par addition à lui-même, donne la même somme que les 2 nombres. La moyenne géométrique ou moyenne proportionnelle, c'est le nombre qui, pris 2 fois comme facteur donne le même produit que les deux facteurs a et b.

Théorème. — *Si deux produits de deux facteurs sont égaux entre eux, les 4 facteurs forment une proportion dans laquelle les facteurs de l'un des produits sont les extrêmes et les facteurs de l'autre, les moyens.*

Si l'on a l'égalité $a.d = b.c$ on peut en conclure l'égalité de rapports

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

En effet, divisons les deux produits donnés par le produit des deux facteurs d et b, nous obtiendrons

$$\frac{a.d}{b.d}=\frac{b.c}{b.d}$$

et en simplifiant

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Remarques. — Le raisonnement est applicable quels que soient les 2 facteurs par lesquels on divise les deux produits, pourvu qu'ils soient pris, un dans le premier produit, l'autre dans le second.

Ainsi on peut diviser par $d.c$, on obtient

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$$

on peut diviser par $a.b$, on trouve

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

enfin on peut diviser par $a.c$, ce qui donne

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

En particulier, si l'on a l'égalité de produits

$$a^2=b$$

on peut écrire, soit la proportion

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{c},$$

soit la proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{a}.$$

Il est encore utile de remarquer que de l'égalité de deux produits, tels que

$$a.d=b.c$$

on peut conclure la proportion

$$\frac{a}{\frac{1}{d}}=\frac{b}{\frac{1}{c}}$$

puisqu'il est démontré que le quotient $\frac{a}{\frac{1}{d}}$ est égal au produit $a \times d$.

Pour certaines questions que nous étudierons dans la suite, il y a avantage à faire la transformation de l'égalité de produits en égalité de quotients.

On peut écrire les termes d'une proportion en intervertissant leur ordre, pourvu que le produit des moyens reste égal à celui des extrêmes.

Un terme désigné, a par exemple, peut occuper quatre places successivement; pour chaque place attribuée à a, les deux facteurs du produit égal au produit de a par l'autre facteur qui lui est associé, peuvent être permutés, ce qui donne deux proportions ou plutôt 2 manières d'écrire la proportion pour chaque place attribuée à a, et par conséquent en tout huit manières différentes d'écrire la proportion composée de 4 termes proposés :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ ou } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c} \text{ ou } \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ ou } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

Théorème. — *Lorsque deux proportions ont les mêmes numérateurs, les dénominateurs forment une proportion.*

Si l'on considère les deux proportions

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b'} = \frac{c}{d'}$$

on peut en conclure la proportion $\frac{b}{d} = \frac{b'}{d'}$

en effet les deux proportions proposées peuvent être écrites sous la forme $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$ et $\frac{a}{c} = \frac{b'}{d'}$

Donc les deux rapports $\frac{b}{d}$ et $\frac{b'}{d'}$, égaux à un même troisième, sont égaux entre eux.

Théorème. — *Dans une proportion, on peut substituer aux termes de même nom les sommes ou les différences des deux termes de chaque rapport; on obtient une nouvelle proportion, à la condition de faire dans les deux rapports les transformations analogues.*

Ainsi, dans la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

on peut substituer aux numérateurs a et c les sommes $a + b$ et $c + d$, on obtient la nouvelle proportion

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

car si l'on ajoute 1 à chacun des rapports égaux $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on obtient

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

ou

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

On pourrait aussi bien remplacer les dénominateurs de chaque rapport par la somme des deux termes, et écrire la nouvelle proportion

$$\frac{a}{a + b} = \frac{c}{c + d}$$

en effet la proportion proposée peut être remplacée par la proportion

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

et en ajoutant 1 aux deux rapports égaux, on obtient

$$\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$$

d'où résulte

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

Au lieu de remplacer les termes correspondants dans chaque rapport par les sommes des deux termes du rapport, on peut substituer leurs différences.

Ainsi de la proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

on peut déduire

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

en supposant les rapports primitifs plus grands que l'unité, ce qui suppose $a > b$ et $c > d$.

Il suffit alors de retrancher 1 de chaque rapport, pour obtenir les deux rapports égaux

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

Dans le cas où les rapports primitifs seraient plus petits que l'unité, on les soustrairait de 1, et l'on obtiendrait la proportion

$$\frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{c}$$

Enfin de la proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, on peut déduire

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

on peut en effet, d'après ce qui précède, écrire d'abord la proportion

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

et ensuite
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

En divisant les deux égalités ci-dessus membre à membre, on obtient
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

La proposition peut encore se démontrer directement.

Soit r la valeur commune des deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on peut poser
$$a=br$$
$$c=dr$$
on en déduit $a+b=b(r+1)$ et $c+d=d(r+1)$
$$a-b=b(r-1) \qquad c-d=d(r-1).$$

En divisant ces égalités membre à membre, on obtient
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{r+1}{r-1} \qquad \frac{c+d}{c-d}=\frac{r+1}{r-1}$$
donc
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

RÉSOUDRE UNE PROPORTION.

Lorsqu'on connaît trois termes d'une proportion et que l'on veut trouver le quatrième terme inconnu, il suffit de résoudre la proportion en s'appuyant sur le théorème fondamental : le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

Si le terme inconnu est un des extrêmes, on le trouvera en divisant le produit des moyens par l'extrême connu.

Si le terme inconnu est un moyen, on le trouvera en divisant le produit des extrêmes par le moyen connu.

Exemples :

I. *Résoudre la proportion* $\dfrac{x}{13\frac{2}{3}}=\dfrac{17\frac{5}{7}}{25}$

On tire de cette proportion :

$$x = \frac{13\frac{2}{3} \times 17\frac{5}{7}}{25} = \frac{41 \times 124}{21 \times 25}$$

On trouve $$x = 9\,\frac{359}{525}$$

II. *Résoudre la proportion*

$$\frac{13,25}{4x} = \frac{264,48}{181,23}$$

On tire de là

$$x = \frac{13,25 \times 181,23}{4 \times 264,48} = \frac{2401,2975}{1057,92}$$

$$x = 2,269\ldots \text{ à 1 millième près.}$$

III. *Résoudre la proportion :*

$$\frac{104}{x} = \frac{x}{96}$$

La valeur de x est la moyenne proportionnelle entre les nombres 104 et 96.

$$x^2 = 104 \times 96$$

$$x = \sqrt{104 \times 96}$$

On trouve $$x = 99,919 \text{ à } 0,001 \text{ près.}$$

On voit que la moyenne proportionnelle entre les nombres donnés 104 et 96 est inférieure à leur moyenne arithmétique qui est 100. C'est un fait général.

Théorème. — *La moyenne géométrique entre deux nombres inégaux est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.*

Soient en effet deux nombres a et b, $a > b$.

La moyenne arithmétique est égale à $\frac{a+b}{2}$.

La moyenne géométrique est égale à $\sqrt{ab}$

Nous allons démontrer que l'on a

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

Cette inégalité équivaut à $\quad a+b > 2\sqrt{ab}$

ou $$a+b-2\sqrt{ab} > 0$$

Le premier membre de cette inégalité est le carré de la différence $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, que l'on peut effectuer, puisque $a > b$, et qui donne un nombre positif, nécessairement plus grand que zéro.

La dernière inégalité étant toujours vérifiée tant que $a > b$, les inégalités précédentes se trouvent également vérifiées.

Dans le cas limite où l'on supposerait $a = b$, les inégalités se changeraient en égalités, et la moyenne arithmétique se trouverait égale à la moyenne géométrique, à la valeur commune des deux nombres égaux.

APPLICATIONS DIVERSES.

Problème. — I. *Un lingot, composé d'argent et de cuivre, est au titre de 0,855 et contient 2ᵏ,750 gr. de cuivre.*

Quel poids de cuivre faut-il retirer pour qu'en ajoutant en même temps un poids d'argent pur égal aux $\frac{5}{11}$ du poids de cuivre retiré, on obtienne un lingot définitif au titre de $\frac{11}{12}$?

1re Solution. — Le titre d'un lingot est le rapport du poids de métal fin au poids total. D'après cette définition, on peut observer que :

Dans le lingot primitif l'argent pur représente les $\frac{855}{1000}$ du poids total, le cuivre en représente les $\frac{145}{1000}$. On en conclut que le rapport du poids de l'argent pur au poids du cuivre est égal à $\frac{855}{145}$ ou $\frac{171}{29}$.

Le poids d'argent pur est donc $\frac{2^k,75 \times 171}{29} = 16^k,215$

Le poids total est $16,215 + 2,750 = 18^k,965$.

Désignons maintenant par x le nombre de kilogrammes de cuivre qu'il faut retirer; le poids d'argent pur ajouté en même temps sera $\frac{5.x}{11}$.

Le nouveau poids d'argent pur sera $16,215 + \frac{5}{11}x$.

Le nouveau poids total sera $18,965 - x + \frac{5}{11}x = 18,965 - \frac{6}{11}x$.

Le nouveau titre sera exprimé par le rapport

$$\frac{16,215 + \frac{5}{11}x}{18,965 - \frac{6}{11}x}$$

et comme ce titre, ou ce rapport, doit être égal à celui de $\frac{11}{12}$, on peut poser la proportion

$$\frac{16,215 + \frac{5}{11}x}{18,965 - \frac{6}{11}x} = \frac{11}{12}$$

Pour résoudre cette proportion, commençons par simplifier le premier rapport, en multipliant les deux termes par 11, nous obtiendrons la proportion

$$\frac{178,365 + 5x}{208,615 - 6x} = \frac{11}{12}$$

Le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, on a

$$(178,365 + 5x) \times 12 = (208,615 - 6x) \times 11$$

et en se rappelant que pour multiplier une somme ou une différence par un nombre déterminé, il suffit de multiplier chacun des termes de la somme ou de la différence par le facteur indiqué, on trouvera

$$2140,38 + 60x = 2294,765 - 66x$$

Pour résoudre cette équation ajoutons aux deux membres la même quantité $66x$, et retranchons en même temps de part et d'autre le même nombre 2140,38, nous aurons

$$126x = 154,385$$

d'où

$$x = \frac{154,385}{126}$$

et, en effectuant la division,

$$x = 1^{k},225.$$

2ᵉ Solution. — Après avoir trouvé l'expression du nouveau poids d'argent pur, $16,215 + \frac{5}{11}x$, on peut remarquer que x désignant le poids du cuivre à retirer, le nouveau poids de cuivre sera $2^{k},750 - x$. Puisque l'argent pur représente les $\frac{11}{12}$ du poids total, le cuivre est donc $\frac{1}{12}$ de ce poids total, ce qui montre que l'argent pur a un poids 11 fois plus grand que le cuivre. On peut donc écrire l'équation

$$16,215 + \frac{5}{11}x = [2,750 - x] \times 11$$

en multipliant les deux membres par 11, on obtient

$$178,365 + 5x = [2,750 - x] \times 121$$

ou, en effectuant le produit indiqué dans le second membre,

$$178,365 + 5x = 332,750 - 121x$$

Si l'on ajoute $121\,x$ aux deux membres et que l'on retranche de part et d'autre $178,365$ on trouve

$$126\,x = 154,385$$

d'où

$$x = \frac{154,385}{126} = 1^{k}225$$

II. *Résoudre la proportion*

$$\frac{a^2 - x^2}{b^2} = \frac{x^2 - c^2}{d^2}$$

En écrivant que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes, on a

$$b^2(x^2 - c^2) = (a^2 - x^2)\,d^2$$

et, effectuant les produits indiqués,

$$b^2x^2 - b^2c^2 = a^2d^2 - d^2x^2$$

ajoutant d^2x^2 et b^2c^2 aux deux membres, on trouve

$$b^2x^2 + d^2x^2 = a^2d^2 + b^2c^2$$

ou, en mettant x^2 en facteur commun

$$(b^2 + d^2)\,x^2 = a^2d^2 + b^2c^2$$

d'où

$$x^2 = \frac{a^2d^2 + b^2c^2}{b^2 + d^2} \quad \text{et} \quad x = \sqrt{\frac{a^2d^2 + b^2c^2}{b^2 + d^2}}$$

III. *Résoudre la proportion*

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

a, représentant un nombre donné.

La valeur de x, évidemment inférieure à a et supérieure à $a - x$, peut être considérée comme une partie de a, l'autre partie, plus petite, étant $a - x$.

Cette partie x, du nombre a, dont la valeur est ainsi moyenne proportionnelle entre le nombre a tout entier et l'autre partie $a - x$, représente ce que l'on appelle le résultat de la division du nombre a *en moyenne et extrême raison.*

Cherchons la valeur de x. En faisant le produit des moyens égal à celui des extrêmes, on a

$$x^2 = a(a - x)$$

ou
$$x^2 = a^2 - ax$$

Ajoutons ax aux 2 membres

$$x^2 + ax = a^2$$

Comparons le premier membre au carré de $\left(x + \frac{a}{2}\right)$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$$

Si aux deux membres de l'égalité $x^2 + ax = a^2$, nous ajoutons $\frac{a^2}{4}$, nous pourrons écrire, en vertu de la relation ci-dessus

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

et, en extrayant les racines carrées

$$x + \frac{a}{2} = \frac{a.\sqrt{5}}{2}$$

d'où, en retranchant $\frac{a}{2}$ de chaque membre, on tire

$$x = \frac{a.\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$$

ou encore
$$x = a\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

On sait que $\sqrt{5} = 2{,}236$ à $0{,}001$ près

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1{,}236}{2} = 0{,}618.$$

Ainsi, quand une quantité est divisée en moyenne et extrême raison, la plus grande partie est environ les 0,618 de la quantité tout entière, la plus petite partie en est les 0,382.

C'est surtout dans des questions de géométrie que ce problème se présente.

NOMBRES PROPORTIONNELS.

Lorsque des nombres a, b, c, d sont tels que leurs rapports respectifs à d'autres nombres A, B, C, D se trouvent égaux, on dit que les premiers sont proportionnels aux seconds.

Ainsi, les nombres 4, 5, 7 sont respectivement proportionnels aux nombres 12, 15, 21, car on a les rapports égaux

$$\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\frac{7}{21}.$$

Les nombres 12, 15, 21 peuvent aussi bien être dits proportionnels aux nombres 4, 5, 7 puisque l'on aurait évidemment

$$\frac{12}{4}=\frac{15}{5}=\frac{21}{7}.$$

La valeur commune de ces trois derniers rapports est 3. On peut dire que les trois nombres 12, 15, 21 sont proportionnels aux nombres 4, 5, 7, vu qu'ils sont respectivement trois fois plus grands.

Généralement, si l'on considère des nombres déterminés a, b, c, d, les nombres proportionnels aux proposés seront de la forme am, bm, cm, dm, m désignant un facteur fini quelconque. Car on a bien les rapports égaux

$$\frac{am}{a}=\frac{bm}{b}=\frac{cm}{c}=\frac{dm}{d}$$

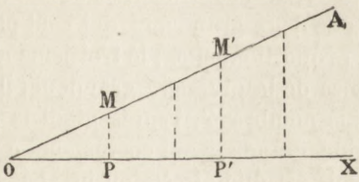
pour toute valeur, entière ou fractionnaire de m.

GRANDEURS PROPORTIONNELLES

RÈGLES DE TROIS.

On dit que deux quantités, qui peuvent passer respectivement par différents états de grandeur, sont proportionnelles, lorsque pour chaque valeur numérique a, de la première, il y a une valeur correspondante, $m.a$, de la seconde, m étant constant.

Considérons, par exemple, un mobile parcourant la droite indéfinie OA.



Pour chaque position M du mobile, on peut considérer la hauteur verticale MP au-dessus de l'axe horizontal OX, et la distance horizontale correspondante OP. Les hauteurs verticales MP, M'P' sont proportionnelles aux distances horizontales correspondantes OP, OP'.

Si l'on trouve $\quad OP = 2.MP$
On trouve de même $\quad OP' = 2.M'P'$.

Chaque longueur horizontale est égale à la longueur verticale correspondante multipliée par le facteur constant 2. Chaque verticale est égale à l'horizontale correspondante multipliée par le facteur constant $\frac{1}{2}$.

On dit que deux quantités sont inversement proportionnelles, lorsque pour toute valeur a de l'une il y a une valeur correspondante $m.\frac{1}{a}$ de l'autre, m étant constant.

Cela revient à dire que les valeurs de l'une sont proportionnelles aux inverses de l'autre; ou encore, que le produit de deux valeurs correspondantes, dans les deux quantités que l'on compare, a une valeur fixe, constante. Le produit $a \times m.\frac{1}{a}$ reste, en effet, constamment égal à m, qui est constant.

RÈGLES DE TROIS.

RÈGLE DE TROIS SIMPLE

Dans un problème qui donne lieu à une règle de trois simple, trois nombres sont donnés :

Les deux premiers, a, b, expriment deux valeurs particulières correspondantes de deux grandeurs, qui sont proportionnelles ou inversement proportionnelles; le troisième a' est une autre valeur particulière de la première grandeur; il s'agit de trouver un quatrième nombre b', représentant la valeur particulière de la seconde grandeur qui correspond à a'.

La règle de trois est dite directe ou inverse suivant que les deux grandeurs sont proportionnelles ou inversement proportionnelles.

Exemples.

I. a kilogrammes d'une marchandise coûtent b francs. Combien coûteront a' kilogrammes?

Les prix et les poids sont proportionnels, et il s'agit simplement de résoudre par rapport à b' la proportion $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

d'où l'on tire $$b' = \frac{b \times a'}{a}.$$

Méthode de réduction à l'unité. — On résout encore la question en cherchant d'abord ce que coûte l'unité, et l'on trouve alors facilement le prix d'un nombre donné d'unités. On tient le raisonnement suivant : si a kilogrammes coûtent b francs

1 seul kilogramme coûte a fois moins, $\frac{b}{a}$

a' kilogrammes coûtent a' fois plus, $\frac{b \times a'}{a}$

Ce langage, clair et correct lorsque les nombres a et a' sont entiers, peut être critiqué lorsque ces nombres sont fractionnaires. Si, par exemple, $a = \frac{3}{4}$, il serait peu sensé de dire que si $\frac{3}{4}$ de kilogramme coûtent b francs, 1 kilogramme coûte $\frac{3}{4}$ de fois moins. Mais on pourra dire que si $\frac{3}{4}$ de kilogramme coûtent b francs, le prix du kilogramme est le nombre dont les $\frac{3}{4}$ donnent b, c'est-à-dire le nombre que l'on nomme le quotient de b par $\frac{3}{4}$ et que l'on peut écrire $\frac{b}{\frac{3}{4}}$, ce qui rentre dans la forme générale $\frac{b}{a}$.

II. N ouvriers ont fait un ouvrage en n jours; combien N′ ouvriers auraient-ils employé de temps?

On dira : si N ouvriers ont employé n jours,

1 seul emploierait N fois plus, $n \times \mathrm{N}$

et N′, N′ fois moins, $\frac{n \times \mathrm{N}}{\mathrm{N}'}$.

Dans le 1^er^ exemple, la règle était une règle de trois directe. Dans le 2^e^, c'est une règle de trois inverse.

RÈGLE DE TROIS COMPOSÉE

Il a fallu 17 *jours à* 50 *ouvriers travaillant* 8 *heures par jour, pour creuser un fossé de* 360 *mètres de longueur; combien* *faudra-t-il de jours à 27 ouvriers travaillant 9 heures par jour pour creuser un fossé semblable de 475 mètres de longueur?*

On écrit immédiatement la solution, en appliquant la méthode de réduction à l'unité successivement aux nombres d'ouvriers, d'heures, de mètres, et en ayant l'attention de considérer si le temps varie en raison directe ou en raison inverse de chacune des autres quantités.

L'inconnue x du problème se calculera par la formule

$$x = \frac{17 \times 50 \times 8 \times 475}{27 \times 9 \times 360}.$$

Le nombre des jours varie en raison inverse du nombre des ouvriers, du nombre d'heures de travail par jour, et en raison directe de la longueur de l'ouvrage.

SUITES DE RAPPORTS

Théorème I. — *Si l'on a une suite de rapports égaux,*

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

la somme des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs donne un rapport égal à chacun des rapports proposés.

Soit, en effet, r la valeur commune de tous ces rapports. On peut poser les égalités :

$$\begin{aligned} a &= b.r \\ a_1 &= b_1.r \\ a_2 &= b_2.r \\ &\cdots\cdots \\ a_n &= b_n.r \end{aligned}$$

L'addition donne

$$(a + a_1 + a_2 + \cdots a_n) = (b + b_1 + b_2 + \cdots + b_n).r$$

ou

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_n}{b + b_1 + b_2 + b_n} = r = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Remarque I. — La suite proposée pourrait être remplacée par une nouvelle suite de rapports égaux obtenus en multipliant respectivement les deux termes des rapports primitifs par des facteurs arbitraires $m, m_1, m_2, \ldots m_n$. La valeur de chaque rapport resterait la même, la somme des nouveaux numérateurs aurait le même rapport avec la somme des dénominateurs, ce qui permet d'écrire la relation plus générale

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{ma+m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{mb+m_1b_1+m_2b_2+\cdots+m_nb_n}$$

Remarque II. — Au lieu d'additionner tous les numérateurs d'une part, tous les dénominateurs d'autre part, on peut, de la somme des premiers termes, soustraire un ou plusieurs des termes suivants, à la condition de faire la même opération pour les numérateurs et les dénominateurs. Si, par exemple, de la somme $a+a_1$, des deux premiers numérateurs, on retranche a_2, en supposant la soustraction possible, cela revient évidemment à soustraire b_2r, et l'on aura en combinant les inégalités par addition et par soustraction

$$\begin{aligned} a &= br \\ a_1 &= b_1r \\ a_2 &= b_2r \\ &\cdots\cdots \\ a_n &= br_n \end{aligned}$$

$$[a+a_1-a_2+\cdots+a_n]=[b+b_1-b_2+\cdots+b_n]r$$

d'où l'on tire

$$\frac{a+a_1-a_2+\cdots+a_n}{b+b_1-b_2+\cdots+b_n}=r=\frac{a}{b}$$

et plus généralement

$$\frac{ma+m_1a_1-m_2a_2+\cdots+m_na_n}{mb+m_1b_1-m_2b_2+\cdots+m_nb_n}=\frac{a}{b}.$$

Remarque III. — Les rapports proposés étant égaux, leurs carrés sont égaux et l'on a

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a_1^2}{b_1^2}=\frac{a_2^2}{b_2^2}=\cdots=\frac{a_n^2}{b_n^2}=\frac{a^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{b^2+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

en extrayant les racines carrées, on trouve

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\cdots=\frac{\sqrt{a^2+a_1^2+\cdots+a_n^2}}{\sqrt{b^2+b_1^2+\cdots+b_n^2}}$$

ainsi chacun des rapports égaux est égal au rapport de la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs à la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs.

Théorème II. — *Si l'on considère une suite de rapports inégaux, le rapport de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs a une valeur comprise entre le plus grand et le plus petit de ces rapports.*

Soient les rapports, rangés par ordre de grandeur croissante

$$\frac{a}{b}<\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_3}{b_3}$$

il s'agit de prouver que l'on a les inégalités

$$\frac{a}{b}<\frac{a+a_1+a_2+a_3}{b+b_1+b_2+b_3}<\frac{a_3}{b_3}.$$

Soit en effet r le rapport de a à b; r_3 celui de a_3 à b_3. On peut poser, puisque r est égal ou inférieur aux différents rapports

$$\begin{aligned} a &= br \\ a_1 &> b_1 r \\ a_2 &> b_2 r \\ a_3 &> b_3 r. \end{aligned}$$

Par addition $\quad a+a_1+a_2+a_3>(b+b_1+b_2+b_3)r$

c'est-à-dire $\quad \dfrac{a+a_1+a_2+a_3}{b+b_1+b_2+b_3}>\dfrac{a}{b}.$

Mais on aura les inégalités

$$\begin{aligned} a &< br_3 \\ a_1 &< b_1 r_3 \\ a_2 &< b_2 r_3 \\ a_3 &= b_3 r_3 \end{aligned}$$

d'où $a+a_1+a_2+a_3<(b+b_1+b_2+b_3)r_3$

ou $$\frac{a+a_1+a_2+a_3}{b+b_1+b_2+b_3}<\frac{a_3}{b_3}.$$

PARTAGES PROPORTIONNELS.

Diviser une quantité donnée A en parties proportionnelles à des nombres donnés m, n, p, q, c'est trouver des nombres x, y, z, u dont la somme soit égale à A et qui soient respectivement proportionnels aux nombres donnés m, n, p, q.

Les nombres cherchés doivent ainsi satisfaire aux conditions :

$$x+y+z+u=\text{A}$$

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{u}{q}$$

Or, d'après le théorème relatif à la suite des rapports égaux, on a

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{u}{q}=\frac{x+y+z+u}{m+n+p+q}=\frac{\text{A}}{m+n+p+q}$$

si l'on compare chacun des premiers rapports au dernier, on obtient en résolvant successivement pour x, y, z, u

$$x=\frac{\text{A}\times m}{m+n+p+q}$$

$$y=\frac{\text{A}\times n}{m+n+p+q}$$

$$z=\frac{\text{A}\times p}{m+n+p+q}$$

$$u=\frac{\text{A}\times q}{m+n+p+q}$$

Règle. — Pour diviser un nombre donné A en parties proportionnelles à des nombres déterminés m, n, p, q, on divise le nombre A par la somme des nombres proportionnels donnés, et l'on multiplie successivement ce résultat par chacun de ces nombres.

Au lieu de commencer par la division, on peut évidemment effectuer d'abord la multiplication indiquée et diviser ensuite par la somme des nombres proportionnels.

Souvent encore il paraîtra avantageux de calculer une des parts en fonction de A d'après la formule précédente, et de calculer ensuite les autres parts en fonction de celle qui est déjà trouvée, d'après les rapports qui doivent exister entre les inconnues.

Ainsi, supposons l'inconnue x déterminée, on pourra trouver y en utilisant la relation $y = x \times \frac{n}{m}\cdot$

Remarque. — Aux nombres déterminés m, n, p, q on peut substituer d'autres nombres m', n', p', q', respectivement proportionnels, c'est-à-dire tels que

$$\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q}$$

ou encore tels que

$$m' = mr \quad n' = nr \quad p' = pr \quad q' = qr.$$

Les rapports égaux $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{u}{q}$ qui doivent exister entraînent les égalités $\frac{x}{mr} = \frac{y}{nr} = \frac{z}{pr} = \frac{u}{qr}$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{m'} = \frac{y}{n'} = \frac{z}{p'} = \frac{u}{q'}.$$

On voit d'ailleurs directement, sur les formules qui donnent les valeurs des inconnues, que ces valeurs ne sont nullement altérées quand on substitue aux nombres m, n, p, q les nombres proportionnels mr, nr, pr, qr.

$$x = \frac{A \times m}{m+n+p+q} = \frac{A \times mr}{(m+n+p+q)r}$$

On utilise cette remarque pour simplifier, s'il y a lieu, les nombres proportionnels donnés. Si, par exemple, ces nombres ont la forme fractionnaire, on les réduira au même dénominateur et l'on partagera proportionnellement aux numérateurs des nouvelles fractions.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Partager le nombre* 100 000 *en trois parties proportionnelles aux nombres* 15, 16, 18.

En désignant les 3 parts cherchées par x, y, z, on a pour expression de leurs valeurs

$$x = \frac{100\,000 \times 15}{49}$$

$$y = \frac{100\,000 \times 16}{49}$$

$$z = \frac{100\,000 \times 18}{49}$$

Commençons par calculer la 3^e^ part. On trouve en effectuant la division $z = 36\,734\frac{34}{49}$ ou, en décimales, 36734,6938

la 2^e^ est les $\frac{16}{18}$ ou les $\frac{8}{9}$ de la 3^e^, retranchons $\frac{1}{9}$ de z 4081,6326

On obtient ainsi $y =$ 32653,0612

Pour former la 1^re^, nous retrancherons de la troisième $\frac{1}{6}$ de sa valeur $\frac{1}{6}z =$ 6122,4489

$x =$ 30612,2449

En additionnant les trois valeurs, on trouve 99999,9999

Les valeurs parfaitement exactes sont

$$x = 30612\frac{12}{49}$$

$$y = 32653\frac{3}{49}$$

$$z = 36734\frac{34}{49}$$

$$x + y + z = 100\,000$$

II. *Diviser la somme de* £ 3600 *en trois portions proportionnelles aux nombres* $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}$.

Les nombres $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}$ sont équivalents aux fractions :

$$\frac{5}{2},\quad \frac{10}{3},\quad \frac{17}{4}$$

ou

$$\frac{30}{12},\quad \frac{40}{12},\quad \frac{51}{12}$$

Les trois parts cherchées doivent être proportionnelles aux nombres 30, 40, 51.

Elles ont donc pour valeurs :

$$\begin{array}{r l|l}
180000 & & 121 \\ \cline{3-3}
1120 & & 892.11.2 \\
310 & & \\
68 & \times 20 & \\
1360 & & \\
150 & & \\
29 & \times 12 & \\
348 & & \\
106 & &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{3600 \times 30}{121} \\
y &= \frac{3600 \times 40}{121} \\
z &= \frac{3600 \times 51}{121}
\end{aligned}$$

Calculons la 1re part $\quad x = \dfrac{108000}{121}$

On trouve $\quad x = £\ 892 \,.\, 11 \,.\, 2\frac{5}{6}$ à très peu près.

Ajoutons $\dfrac{x}{3}$ $\quad 298 \,.\, 17 \,.\, \frac{17}{18}$

$$y = £\ 1190 \,.\, 8 \,.\, 3\frac{7}{9}$$

$$z = £\ 1517 \,.\, 0 \,.\, 5\frac{7}{18}$$

$$x + y + z = £\ 3600$$

III. *Diviser* 12 *en* 3 *parties dont les racines carrées soient proportionnelles aux nombres* 3, 5, 7.

On doit avoir les rapports égaux

$$\frac{\sqrt{x}}{3}=\frac{\sqrt{y}}{5}=\frac{\sqrt{z}}{7}$$

ou

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{25}=\frac{z}{49}$$

la question revient donc à diviser 12 en trois parties proportionnelles aux nombres 9, 25, 49, problème facile.

IV. *Diviser une somme donnée* A *en* 4 *parties telles que la* 1re *soit à la seconde dans le rapport de* 2 *à* 3, *la* 2^{e} *à la* 3^{e} *dans le rapport de* 7 *à* 9, *et la* 3^{e} *à la* 4^{e} *dans le rapport de* 11 *à* 13.

On peut multiplier les deux termes du 1er rapport par 7×11, les deux termes du second par 3×11, et ceux du 3^{e} par 3×9. On reconnaîtra alors que la 1re part est à la seconde dans le rapport de 154 à 231,

$$\frac{x}{y}=\frac{154}{231} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{154}=\frac{y}{231}$$

la seconde à la 3^{e} dans le rapport de 231 à 297,

$$\frac{y}{z}=\frac{231}{297} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{231}=\frac{z}{297}$$

la 3^{e} à la 4^{e} dans le rapport de 297 à 351

$$\frac{z}{u}=\frac{297}{351} \quad \text{ou} \quad \frac{z}{297}=\frac{u}{351}.$$

En comparant les 3 nouvelles proportions, on trouve les rapports égaux

$$\frac{x}{154}=\frac{y}{231}=\frac{z}{297}=\frac{u}{351}$$

ou

$$\frac{x}{2\times 7\times 11}=\frac{y}{3\times 7\times 11}=\frac{z}{3\times 9\times 11}=\frac{u}{3\times 9\times 13}$$

et l'on est ainsi ramené au problème ordinaire des partages proportionnels.

Autre solution. — On pourrait exprimer les 4 parts cherchées en fonction de l'une d'elles, d'après les rapports donnés et additionner les 4 valeurs en fonction de la même inconnue pour former la somme donnée A.

On aurait ainsi, la 1re part étant x

la 2e $\quad y=\frac{3}{2}x$

la 3e $\quad z=\frac{3}{2}\times\frac{9}{7}x$

la 4e $\quad u=\frac{3}{2}\times\frac{9}{7}\times\frac{13}{11}x$

La somme des 4 parts doit donner A. L'inconnue x doit donc satisfaire à la relation

$$x\left[1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{7}+\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{13}{11}\right]=\text{A}.$$

Si l'on réduit au même dénominateur, $2\times7\times11$, les termes entre parenthèses, on obtient

$$x\left[\frac{2\times7\times11+3\times7\times11+3\times9\times11+3\times9\times13}{2\times7\times11}\right]=\text{A}$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{\text{A}\times2\times7\times11}{2\times7\times11+3\times7\times11+3\times9\times11+3\times9\times13}$$

comme dans la 1re solution.

V. *Diviser une quantité donnée* A *en parties inversement proportionnelles à des nombres donnés* m, n, p.

C'est partager en parties directement proportionnelles aux inverses $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$, des nombres proposés.

On doit donc avoir les rapports égaux

$$\frac{x}{\frac{1}{m}}=\frac{y}{\frac{1}{n}}=\frac{z}{\frac{1}{p}}$$

on peut, sans altérer les égalités, multiplier tous les dénominateurs par le produit mnp, et l'on trouve

$$\frac{x}{np}=\frac{y}{mp}=\frac{z}{mn}.$$

Il s'agit donc de former des parts proportionnelles aux produits des nombres donnés 2 à 2 quand il y a 3 parts, 3 à 3 s'il y en avait 4.

Remarque. — Les rapports égaux

$$\frac{x}{\frac{1}{m}}=\frac{y}{\frac{1}{n}}=\frac{z}{\frac{1}{p}}$$

donnent les produits égaux

$$mx=ny=pz.$$

Ainsi les nombres x, y, z, inversement proportionnels aux nombres m, n, p, sont en même temps tels que leurs produits respectifs par les facteurs m, n, p se trouvent égaux.

Réciproquement, lorsqu'un problème établit entre des inconnues des relations telles que leurs produits par des facteurs connus se trouvent égaux, les inconnues sont proportionnelles aux inverses des facteurs respectifs, et la question se ramène à la règle des partages proportionnels. Le problème suivant en donne un exemple.

Problème. — *Une société financière contracte un emprunt par l'émission de* 20 000 *bons qu'elle s'engage à rembourser, par* 6 *tirages annuels, à raison de :*

105 fr.	par bon sortant au	1er	tirage
110	—	2e	—
115	—	3e	—
120	—	4e	—
125	—	5e	—
130	—	6e	—

On demande les nombres de bons qu'il faudra rembourser à la fin de chaque année pour que la dépense annuelle reste, autant que possible, constante.

Les bons sont supposés ne donner droit à aucun autre payement que celui du prix de remboursement.

Désignons par X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 les nombres de bons remboursables à chacun des 6 tirages successifs.

Le total de ces 6 nombres doit être égal au nombre des bons émis, c'est-à-dire à 20 000.

$$1)\qquad X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6=20\,000$$

La dépense de chaque année est donnée par le produit du prix de remboursement multiplié par le nombre des titres; et pour que les dépenses annuelles fussent égales, il faudrait que les nombres X_1, X_2, etc., pussent satisfaire aux conditions

$$2)\qquad 105.X_1=110.X_2=115.X_3=120.X_4=125.X_5=130.X_6.$$

Les nombres de bons remboursés devant être entiers ne pourront pas, en général, satisfaire rigoureusement à ces égalités; mais on peut du moins déterminer d'abord les nombres X_1, X_2, vérifiant les relations ci-dessus, sauf à ne prendre que les valeurs entières les plus approchées, soit par défaut, soit par excès; et, alors, les dépenses annuelles, au lieu d'être rigoureusement égales, auront seulement entre elles des différences aussi faibles que possible.

Les équations (2) peuvent s'écrire, par simplification, d'abord

$$21.X_1=22.X_2=23.X_3=24.X_4=25.X_5=26.X_6$$

et ensuite

$$\frac{X_1}{\frac{1}{21}} = \frac{X_2}{\frac{1}{22}} = \frac{X_3}{\frac{1}{23}} = \frac{X_4}{\frac{1}{24}} = \frac{X_5}{\frac{1}{25}} = \frac{X_6}{\frac{1}{26}}$$

et, d'après le théorème relatif à une suite de rapports **égaux,** chacun de ces rapports est égal à

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26}} \text{ ou } \frac{20\,000}{\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26}}$$

On en conclut que $X_1 = \dfrac{20\,000 \times \frac{1}{21}}{\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26}}$

Pour effectuer le calcul de X_1, on pourrait réduire les fractions au même dénominateur; il paraît plus expéditif de les convertir en fractions décimales.

$$\frac{1}{21} = 0,047619$$

$$\frac{1}{22} = 0,045455$$

$$\frac{1}{23} = 0,043478$$

$$\frac{1}{24} = 0,041667$$

$$\frac{1}{25} = 0,04$$

$$\frac{1}{26} = 0,038461$$

Total. . . . 0,256680

$$X_1 = \frac{20\,000 \times 4761,9}{25\,668} = 3710 \text{ à } \frac{1}{2} \text{ unité près.}$$

$$X_2 = X_1 \times \frac{21}{22} = 3542 \quad —$$

$$X_3 = X_2 \times \frac{22}{23} = 3388 \quad —$$

$$X_4 = X_3 \times \frac{23}{24} = 3246 \quad —$$

$$X_5 = X_4 \times \frac{24}{25} = 3117 \quad —$$

$$X_6 = X_5 \times \frac{25}{26} = 2997 \quad —$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 20000$$

Ces nombres sont les nombres entiers les plus rapprochés, soit par défaut, soit par excès, des valeurs numériques inversement proportionnelles aux prix de remboursement. Les produits de ces nombres par les prix de remboursement sont peu différents, comme le montre le tableau suivant :

Tableau du remboursement de 20 000 bons par 6 tirages annuels.

NUMÉROS des TIRAGES.	NOMBRE DE BONS À REMBOURSER.	PRIX de REMBOURSEMENT.	DÉPENSES ANNUELLES.
1er	3 710	105	389 550
2e	3 542	110	389 620
3e	3 388	115	389 620
4e	3 246	120	389 520
5e	3 117	125	389 625
6e	2 997	130	389 610
	20 000		2 337 545

RÈGLE CONJOINTE OU RÈGLE DE CHAINE

La règle conjointe a pour objet de faciliter, d'abréger la solution des problèmes dans lesquels on propose de trouver le nombre d'unités d'une espèce déterminée A, correspondant à un nombre donné d'unités d'une autre espèce B, lorsque l'on connaît les rapports successifs entre les grandeurs de l'espèce B et les grandeurs proportionnelles d'une autre espèce C, et ainsi de suite, jusqu'au rapport entre la dernière espèce énoncée et l'espèce A à laquelle se rapporte l'inconnue du problème.

La règle conjointe n'est, au fond, qu'une réunion de règles de trois simples, dont la chaîne forme un cas particulier de la règle de trois composée. Depuis longtemps vulgarisée en Allemagne et en Angleterre sous les dénominations analogues de *Kettenregel* et de *Chainrule*, elle ne doit pas être moins familière, en France, à tous les calculateurs de la banque et du commerce; elle offre un procédé commode pour résoudre sans hésitation, sans perte de temps, des questions plus ou moins compliquées telles que les négociations de lettres de change, arbitrages de valeurs, entre places de différents pays.

Le mécanisme de la règle de chaîne comprend la position et la résolution de la règle.

La position consiste dans l'écriture, sous forme abrégée et méthodique, des données numériques.

On dispose habituellement les nombres d'unités des diverses espèces que l'on compare deux à deux, par lignes horizontales successives. La première ligne indique la question à résoudre; les lignes suivantes expriment les rapports des deux grandeurs que l'on compare, en ayant soin de commencer chaque ligne par des unités de même nature que celles qui terminent la ligne précédente, et l'on ne s'arrête qu'après avoir été ramené aux unités de même espèce que l'inconnue. Un exemple fera mieux comprendre ces explications.

Problème I. — *Une minoterie reçoit une commande de* 20 000 *quintaux de farine : combien coûtera la provision de froment nécessaire pour l'exécution de cette commande si* 312 *hectolitres de froment donnent* 157 *quintaux de farine, et si le froment coûte* 28 *francs les* 100 *kilogrammes ; l'hectolitre pesant* 75 *kilogrammes ?*

On disposera les données numériques de la question, sous forme abrégée, comme il suit :

x francs	20 000 quintaux farine.
157 quintaux farine...	312 hectolitres froment.
1 hectolitre.......	75 kilogr.
100 kilogr..........	28 francs.

La 1re ligne met en regard le nombre de francs cherché qui correspond à l'achat du froment nécessaire à la préparation des 20 000 quintaux.

La 2e ligne établit le rapport donné entre le nombre de quintaux de farine et le nombre d'hectolitres de froment ; la 3e la relation entre les hectolitres et les kilogrammes de froment ; enfin la dernière ligne met en regard le nombre de kilogrammes de froment et le nombre de francs correspondant.

Lorsque les nombres se trouvent ainsi disposés suivant un enchaînement régulier, on obtient la solution par la règle suivante :

Règle. — L'inconnue de la conjointe est égale au produit de tous les nombres placés dans la colonne opposée, divisé par le produit de tous les nombres placés dans la même colonne que l'inconnue.

Ainsi, l'inconnue x du problème actuel sera donnée par la formule

$$x = \frac{20\,000 \times 312 \times 75 \times 28}{157 \times 100}.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$x = 834\,649^{\text{fr}},68.$$

Tel est le mécanisme de la règle de chaîne. Il importe de le justifier par le raisonnement.

1re Démonstration. — D'après la ligne inférieure de la règle conjointe, 100 kilogrammes de froment coûtent 28 francs, 1 kilogramme coûte donc

$$\frac{28}{100}$$

et 75 kilogrammes, 75 fois plus

$$\frac{28 \times 75}{100}$$

C'est, d'après la 2e ligne en remontant, le prix de 1 hectolitre.

Le prix de 312 hectolitres sera

$$\frac{28 \times 75 \times 312}{100}$$

C'est le prix de la provision de froment nécessaire pour fournir 157 quintaux de farine.

Le prix du froment correspondant à 1 quintal sera donc

$$\frac{28 \times 75 \times 312}{100 \times 157}$$

et le prix du froment correspondant à 20 000 quintaux sera

$$\frac{28 \times 75 \times 312 \times 20\,000}{100 \times 157}$$

C'est le résultat cherché, tel que le fournit le raisonnement par la méthode claire de réduction à l'unité.

En comparant le résultat à celui que donne le mécanisme énoncé, on reconnaît qu'il y a identité.

2e Démonstration. — Désignons par y le prix de la quantité de froment qui donne 1 quintal de farine, par z le prix de l'hectolitre, u le prix du kilogramme de froment; nous pourrons poser les égalités suivantes:

$$x = 20\,000 . y$$
$$157 . y = 312 . z$$
$$1 . z = 75 . u$$
$$100 . u = 28$$

Tous les nombres expriment des francs ou fractions de franc, les inconnues auxiliaires y, z, u désignant le prix de l'unité de chacune des grandeurs énoncées, et dans chaque ligne on trouve l'égalité réelle entre les valeurs numériques des deux membres. Multiplions ces égalités entre elles membre à membre, nous obtiendrons

$$x \times 157 . y \times 1 . z \times 100 . u = 20\,000\, y \times 312 . z \times 75 . u \times 28$$

En divisant les deux membres de cette égalité par les mêmes nombres y, z, u, on obtient

$$x \times 157 \times 1 \times 100 = 20\,000 \times 312 \times 75 \times 28$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{20\,000 \times 312 \times 75 \times 28}{157 \times 1 \times 100}$$

Ce qui justifie la règle.

Remarques. — Si l'on imagine la lettre x remplacée par sa valeur numérique, on peut dire que le produit de tous les nombres de l'une des colonnes de la conjointe est égal au produit de tous les nombres de l'autre colonne. Un des nombres est égal au produit des facteurs de la colonne opposée, divisé par les nombres de la même colonne. L'usage est de placer l'inconnue en tête de la conjointe, dans la colonne de gauche, c'est l'arrangement le plus naturel; mais on pourrait déroger à cette habitude et placer l'inconnue à un rang quelconque, pourvu que les rapports successifs exprimés dans les différentes lignes horizontales fussent bien ordonnés, les deux nombres, qui relient les unités de chaque espèce aux deux autres espèces auxquelles on la compare, se trouvant toujours, l'un dans la colonne de gauche, l'autre dans la colonne de droite. La formation régulière de la chaîne n'est pas indispensable; on pourrait, à la rigueur, permuter deux lignes, ce qui romprait la chaîne; mais cette permutation ne nuirait pas à la justesse de la solution, elle ne changerait que l'ordre des facteurs dans chaque colonne, et ne changerait pas les produits dont dépend l'inconnue. Mais il ne serait évidemment pas permis de changer de colonne deux nombres de la même ligne, en mettant le nombre de gauche à droite, et réciproquement; cette interversion, sans changer la relation entre les deux quantités comparées, rendrait impossible le raisonnement qui justifie le mécanisme de la règle; et le mécanisme, faussé dans son principe, ne donnerait qu'un résultat erroné. Ainsi dans le problème I, si l'on écrivait dans la 3e ligne 75 kilogrammes à gauche, et 1 hectolitre à droite, le rapport entre les hectolitres et les kilogrammes, considéré isolément, ne serait, sans doute, nullement altéré; mais les nouvelles places attribuées aux nombres 75 et 1 ne permettraient plus l'application de la règle, consistant à diviser le produit des nombres de la colonne de droite par les nombres connus de la colonne de gauche où se trouve l'inconnue.

Puisque la valeur de l'inconnue ne dépend que des produits des nombres de chaque colonne, on peut supprimer, dans les deux colonnes à la fois, tous les facteurs communs qui peuvent s'y trouver. Cette suppression, qui simplifie les calculs, peut se faire sur la conjointe même, ou sur la formule de l'inconnue.

Ainsi, dans le problème I, la 4e ligne

100 kilogrammes, 28 francs

pourrait être remplacée par 25 kilogrammes, 7 francs.

Le facteur 25 de la colonne de gauche étant 3 fois dans le nombre de droite 75, pourrait être supprimé de part et d'autre, et l'on aurait

$$x = \frac{20\,000 \times 312 \times 3 \times 7}{157}$$

On obtiendrait le même résultat en simplifiant le quotient qui exprime la valeur de x d'après les nombres primitifs de la conjointe

$$x=\frac{20\,000\times 312\times 75\times 28}{157\times 100}$$

on peut observer que $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, que $\frac{75}{100}\times 28=\frac{3}{4}$ de $28=21$ ce qui donne

$$x=\frac{20\,000\times 312\times 21}{157}.$$

Problème II. — *Les lingots d'or se négocient à Paris d'après le cours de* 3 437 *francs par kilogramme d'or pur. Ils sont cotés à Londres* $77\frac{1}{2}$ *shillings l'once au titre standard* $\frac{11}{12}$. *L'once est la* 12^e *partie de la livre troy qui vaut* 373 *grammes,* 2 419. *La livre sterling valant* 25^{fr},22, *on demande dans laquelle des deux places l'or est le moins cher.*

Solution. — Il suffit de chercher le prix de 1 kilogr. d'or pur, à Londres, pour le comparer au prix donné 3 437 de la place de Paris. Nous poserons la conjointe :

x fr.	1 000 grammes or pur.
373,2419 gr.	1 livre troy.
1 livre troy.	12 onces.
11 onces d'or pur. . .	12 onces au titre standard.
1 once au titre standard.	77 $^1/_2$ shillings.
20 shillings	£ 1.
£ 1.	Fr. 25,22.

d'où l'on tire

$$x=\frac{1000\times 12\times 12\times 77{,}5\times 25{,}22}{373{,}2419\times 11\times 20}$$

soit, en effectuant les opérations,

$$x=3427^{fr},64.$$

C'est donc à Londres que l'or est le moins cher, il y a une différence de 9^{fr},36 par kilogr. d'or pur.

On pourrait aussi bien chercher le nombre de shillings à débourser à Londres pour l'achat de 1 once au titre standard $\frac{11}{12}$ sur la place de Paris.

La conjointe serait

x' shillings.	1 once au titre standard.
12 onces au titre standard.	11 onces or pur.
12 onces.	1 livre troy.
1 livre troy.	373,2419 grammes.
1 000 gr. or pur. . . .	3437 francs.
25,22 francs	1 £.
1 £.	20 shillings.

$$x' = \frac{11 \times 373,2419 \times 3437 \times 20}{12 \times 12 \times 1000 \times 25,22}$$

$$x' = 77,71\ldots$$

Observons que cette valeur de x' pouvait se déduire immédiatement de la 1re conjointe en y remplaçant la lettre x par le nombre donné 3437, et le nombre connu de shillings $77\frac{1}{2}$ par l'inconnue nouvelle x'.

Notons encore que si l'on fait le produit des deux valeurs des inconnues x et x', on obtient

$$x.x' = 77\frac{1}{2} \times 3437$$

Le produit des deux inconnues est égal au produit des deux cotes.

On peut encore écrire

$$\frac{x'}{77\frac{1}{2}} = \frac{3437}{x}$$

Les prix pour le négociant anglais, dans les deux places de Paris et Londres, sont proportionnels aux prix que devrait payer le négociant français : cette conséquence pouvait être prévue, elle est évidente.

La même conjointe, sans changement d'ordre dans la disposition des anneaux de la chaîne, pourrait servir à résoudre tout problème exigeant la détermination de l'un des termes, tous les autres étant donnés. Veut-on, par exemple, savoir quel doit être le cours de la livre sterling, c'est-à-dire le nombre de francs donnés en échange de 1 livre sterling, pour que les cours de l'or, à Paris et à Londres, se trouvent en parité, c'est-à-dire entraînent pour l'acheteur de Paris ou de Londres les mêmes déboursés, que l'achat soit fait dans l'une ou l'autre des deux places? Il suffit de placer dans la 1re conjointe 3437 fr. (à payer pour l'achat à Londres) sur la 1re ligne en regard de 1 000 kilog., et d'écrire à la place de 25,22 dans la dernière ligne la lettre qui désigne l'inconnue, soit z. On pourrait écrire immédiatement

$$z = \frac{3437 \times 373,2419 \times 11 \times 20}{1000 \times 12 \times 12 \times 77,5}$$

ce qui donnerait

$$z = 25,29.$$

N. B. Dans la pratique, il sera généralement nécessaire de tenir compte des commissions à payer pour achats sur places étrangères. Si l'on suppose que l'acheteur français ait à payer, pour négociation à Londres, $\frac{1}{4}$ °/₀, il faudra ajouter au prix précédemment trouvé

		3427,64
	$\frac{1}{4}$ °/₀	8,56
ce qui donne pour prix de revient		3436fr,20

Si l'on voulait introduire cette condition dans la conjointe, il suffirait d'exprimer dans une nouvelle ligne que 400 fr. deviennent 401 quand on y a joint la commission de $\frac{1}{4}$ °/₀.

Dans la plupart des applications, tous les éléments numériques de la conjointe sont fournis par l'énoncé, et pour la position de la règle, il suffit de la disposer suivant l'enchaînement prescrit. Il peut arriver cependant que les données soient insuffisantes pour compléter la chaîne ; le calculateur doit alors suppléer à l'insuffisance des renseignements exprimés, en introduisant les rapports que lui fournissent ses connaissances spéciales ou les déductions logiques qui découlent des conditions exprimées. Supposons, par exemple, que l'on pose la question suivante :

Problème III. — *Déterminer la valeur intrinsèque du florin d'Autriche, ou florin au pied de 45, sachant que l'on peut tailler 45 pièces avec 500 grammes d'argent fin.*

Nous pourrons résoudre la question en posant la conjointe :

x francs.	1 florin.
45 florins.	500 gr. argent fin
9 grammes argent fin.	2 francs.

$$x = \frac{500 \times 2}{45 \times 9} = \frac{200}{81} = 2,4691...$$

Nous avons complété la chaîne en écrivant, d'après la définition du franc, unité de compte, que 9 grammes d'argent pur représentent une valeur de 2 francs.

N. B. Il s'agit ici du florin en argent. Dans les pièces d'or frappées en Autriche, le florin correspond à $2^{fr},50$ et les pièces de 4 et 8 florins circulent comme pièces de 10 francs et de 20 francs.

Problème IV. — *On demande le prix de revient, dans la place de Boulogne-sur-Mer, de 7500 kilog. d'essence de térébenthine, provenant de Rotterdam, d'après les données suivantes : le vendeur accorde une tare de 11 °/₀ sur le poids brut, puis une première remise de* $1\frac{1}{2}$ °/₀ *sur le poids réduit, et une deuxième remise de 1 °/₀ sur le nouveau poids réduit en raison de l'importance de la livraison ; le prix de vente est* *de 23 fl. les 50 kilog. de poids net, moins un escompte de 1 °/₀ pour le payement au comptant; les frais de transport augmentent le prix d'achat de* $1\frac{1}{2}$ *°/₀, et l'acheteur doit payer sur le total une commission de* $1\frac{1}{4}$ *°/₀; enfin le change entre la Hollande et la France est au cours de 210 francs pour 100 florins courants.*

Les différentes conditions de l'énoncé sont résumées par la conjointe suivante :

Fr. x. . . .	7 500	kilog. poids brut.
100	89	en raison de la tare.
100	$98\frac{1}{2}$	1re remise.
100	99	2e remise.
50	23	florins.
100	99	pour l'escompte.
100	$101\frac{1}{2}$	après le transport.
100	$101\frac{1}{4}$	avec la commission.
100 florins. .	210	francs.

$$x = \frac{7500 \times 89 \times 197 \times 99 \times 23 \times 99 \times 203 \times 405 \times 210}{100 \times 100 \times 2 \times 100 \times 50 \times 100 \times 100 \times 2 \times 100 \times 4 \times 100}$$

Les multiplications indiquées dans la formule, par des nombres tels que $\frac{89}{100}$, $\frac{90}{100}$, se feront en retranchant 11 °/₀, 1 °/₀, et le calcul de la valeur de l'inconnue se fera par les opérations successives qui seraient amenées naturellement par les conditions de l'énoncé, sans qu'il parût nécessaire ni même utile de recourir au mécanisme de la règle de chaîne. Il faut cependant reconnaître qu'il est avantageux d'acquérir l'habitude de représenter avec précision par deux termes, tels que 100 et $98\frac{1}{2}$, ou 100 et $101\frac{1}{2}$, les rapports entre des quantités primitives et les quantités nouvelles qui en proviennent par une diminution ou une augmentation exprimée en tant %. Et si, pour la solution du problème précédent, la règle de chaîne paraît sans utilité, il n'en serait assurément pas de même pour le problème inverse, dans lequel le négociant de Boulogne rechercherait le poids brut qu'il peut se procurer à Rotterdam, pour une somme donnée, soit 10 000 francs, toutes les autres conditions restant les mêmes. On poserait avec avantage la conjointe suivante :

x kg. poids brut. . . . . . fr.	10.000
fr. 210. . . . . fl.	100
$101\frac{1}{4}$ après commission. .	100 avant commission
$101\frac{1}{2}$ apr. frais de transport.	100 av. frais de transport
99 après escompte.	100 avant escompte
fl. 23	50 kg. poids brut
99 après 2^e remise.	100 avant 2^e remise
$98\frac{1}{2}$ après 1^{re} remise. . .	100 avant 1^{re} remise
89 après la tare.	100 avant la tare

$$x = \frac{10000 \times 100 \times 400 \times 200 \times 100 \times 10 \times 100 \times 200 \times 100}{210 \times 81 \times 203 \times 99 \times 23 \times 99 \times 197 \times 89}$$

Comme application de la règle conjointe, nous traiterons encore la question suivante.

Problème V. — *Trouver le compte définitif auquel s'élève après un certain nombre d'années, le placement d'un capital portant intérêts d'après un taux déterminé 5%, avec la condition que les intérêts produits à la fin de chaque année se joignent au capital pour former une somme portant intérêts pendant l'année suivante ; c'est le cas des intérêts composés.*

Supposons un capital primitif a placé à 5 % et cherchons la valeur acquise au bout de 10 ans. En observant que 100 francs inscrits au compte au commencement de chaque année deviennent 105 francs à la fin de l'année, nous poserons la conjointe suivante :

x fr. au bout de 10 ans pour	a fr. au comptant
100 fr. au comptant.	105 fin 1^re^ année
100 fr. au comm^t^ 2^e^ année.	105 fin 2^e^ année
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
100 fr. comm^t^ 9^e^ année. . .	105 fin 9^e^ année
100 fr. comm^t^ 10^e^ année. .	105 fin 10^e^ année.

$$x = \frac{a \times 105 \times 105 \times 105 \times \ldots\ldots \times 105}{100 \times 100 \times 100 \times \ldots\ldots \times 100}$$

ou
$$x = a \times \left(\frac{105}{100}\right)^{10} = a \times (1{,}05)^{10}$$

On voit que la règle s'appliquera de même à un taux quelconque T, pour un nombre entier quelconque d'années, n; et le capital définitif aura pour expression générale

$$x = a\left(\frac{100+\mathrm{T}}{100}\right)^n = a\left(1 + \frac{\mathrm{T}}{100}\right)^n$$

ou, en posant $\frac{\mathrm{T}}{100} = r \qquad x = a(1+r)^n$

En traitant cette question, nous n'avons pas spécialement en vue la formule des intérêts composés; nous nous proposons plutôt de faire ressortir, par une courte discussion, les caractères essentiels que doivent présenter les quantités soumises au mécanisme de la règle de chaîne.

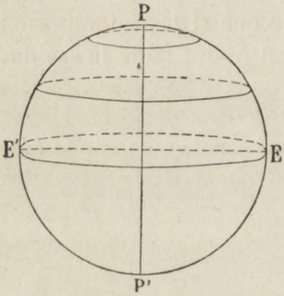
Si l'on considère chaque ligne isolément, il semble que le rapport de 100 à 105 s'applique aussi bien au placement à intérêts simples qu'au placement à intérêts composés, et dès lors, ne pourrait-on pas se demander pourquoi la règle est juste dans un cas et non dans l'autre? L'explication est facile. Pour que les raisonnements qui justifient le mécanisme de la règle conjointe soient fondés, il faut que les unités de même nom, placées à gauche et à droite, soient identiques dans leur nature et leurs propriétés; il faut, par exemple, que chacune des 105 unités placées à droite dans la 9e ligne soit identique à chacune des 100 unités placées à gauche dans la 10e ligne; cette condition se trouve bien remplie dans le cas des intérêts composés; les 105 francs produits à la fin de la 9e année portent tous intérêt; chacun de ces 105 francs a les mêmes propriétés que chacun des 100 francs que l'on imagine formés au commencement de la 10e année, et le résultat acquis par 1 unité doit être multiplié par 105 quand il y a 105 unités identiques. Dans le cas des intérêts simples, au contraire, pour 100 francs de capital primitif, il y a bien 105 francs au bout d'une année, mais sur les 105 francs il y en a 5 qui, comptés comme intérêts, ne portent pas eux-mêmes intérêt, et ne sont pas identiques aux 100 autres. La règle n'est exacte que si les intérêts sont absolument assimilés au capital, c'est-à-dire dans le cas des intérêts composés.

SYSTÈME MÉTRIQUE

MESURES DE LONGUEUR.

La longueur du *mètre* se rattache aux dimensions de la terre.

La terre a la forme d'un globe sensiblement sphérique.



Cette *sphère* tourne, dans son mouvement diurne, autour d'un de ses diamètres que l'on nomme *axe terrestre* ou ligne des *pôles*. Les extrémités P et P′ de cet axe s'appellent *pôles;* on les distingue par les dénominations de *pôle Nord* et de *pôle Sud*.

Tout grand cercle de la *sphère terrestre* passant par la ligne des pôles coupe la surface sphérique suivant une circonférence que l'on appelle un *méridien terrestre*.

Le grand cercle EE′ perpendiculaire à la ligne des pôles se nomme *équateur*. Il divise le globe en 2 parties que l'on nomme *hémisphère boréal* et *hémisphère austral*.

Les autres cercles perpendiculaires à la ligne des pôles, et par conséquent parallèles à l'équateur, s'appellent des *parallèles*. L'expression de parallèle s'emploie d'ailleurs pour désigner soit le cercle même, soit seulement la circonférence suivant laquelle le plan du petit cercle coupe la surface sphérique. Les parallèles vont en décroissant de l'équateur vers les pôles.

La position d'un point sur la surface de la terre se détermine à l'aide de la *latitude* et de la *longitude*.

La *latitude* d'un point est la mesure, la graduation de l'arc du méridien compris entre le point et l'équateur. Suivant que le point est situé dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral, on précise sa position relativement à l'équateur par les expression de *latitude nord* ou *latitude sud*.

Tous les points d'un parallèle ont évidemment la même latitude.

La *longitude* d'un point est la mesure, la graduation de l'arc intercepté, sur la circonférence de l'équateur, entre le méridien qui passe par le point considéré et un méridien principal, auquel on compare les autres. En France, le méridien principal, à partir duquel se comptent les longitudes, est le méridien de l'*Observatoire de Paris*. En Angleterre, c'est le méridien de *Greenwich*. Pour d'autres peuples, c'est le méridien de l'*Ile de Fer*.

Suivant que le point se trouve à l'est ou à l'ouest du méridien principal, on dit que la longitude est orientale ou occidentale, ou encore, que le point est à tant de degrés de *longitude est*, ou tant de degrés de *longitude ouest*.

Tous les points d'un méridien ont la même longitude.

La mesure de la latitude varie de 0° à 90°, et la mesure de la longitude de 0° à 180°.

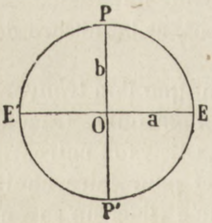
Après avoir rappelé ces premières notions que l'on trouvera plus développées dans les cours de cosmographie, traçons une courte notice historique des principaux travaux entrepris pour mesurer les dimensions de la terre et pour faire choix d'une nouvelle unité de longueur. Dès l'année 1669, un savant géomètre français, *Picard*, avait mesuré l'arc du méridien compris entre Malvoisine et Amiens, et avait trouvé pour la longueur de l'arc de 1°, 57 060 toises, ce qui donnerait pour le quart du méridien 5 135 400 toises, si la terre était vraiment sphérique. Quelques années plus tard, les frères *Cassini* mesurèrent diverses portions du méridien d'Amiens et leurs travaux confirmèrent l'exactitude des résultats donnés par Picard, dont le principal est la mesure de l'arc de 1°, 57 060 toises, dans la région de la Picardie; mais ils avaient constaté quelques légères différences dans les longueurs des arcs de

1° mesurés dans le midi et le nord de la France sur le même méridien d'Amiens.

Bientôt *Huyghens* et *Newton* établissaient que la terre devait avoir la forme d'un *ellipsoïde de révolution*, présenter un léger aplatissement aux pôles et un léger renflement à l'équateur. L'*Académie des sciences* en France prit, en l'année 1734, le parti de faire mesurer un arc de méridien près de l'équateur et un autre près du pôle. Les mesures exécutées au Pérou par *La Condamine* et *Bouguer*, en Laponie par *Maupertuis* et *Clairaut*, en France par *Cassini de Thury* et *Lacaille*, donnèrent pour longueur de l'arc de 1 degré :

Au Pérou	56 750 toises
En France	57 060
En Laponie	57 422

De ces mesures résulte que la longueur de l'arc de 1° va en croissant légèrement de l'équateur vers le pôle; le rayon de courbure est par conséquent plus grand aux pôles qu'à l'équateur, comme il arriverait dans une ellipse ayant pour grand axe le diamètre de l'équateur et pour petit axe la ligne des pôles.



Ainsi le méridien terrestre, c'est-à-dire la ligne d'intersection d'un plan conduit suivant la ligne des pôles, et de la surface du globe terrestre, n'est pas vraiment une circonférence; il est une ellipse; et le globe, au lieu d'être vraiment une sphère, est un ellipsoïde. Le rayon b, qui va du pôle au centre O de l'ellipsoïde, et qu'il ne faut pas confondre avec le rayon de courbure, est un peu plus court que le rayon a qui va d'un point de l'équateur au centre de l'ellipsoïde. La différence, $a - b$, des deux rayons, est environ $\frac{1}{300}$ du rayon équatorial a.

Le rapport $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{300}$ donne la mesure de ce que l'on est convenu d'appeler l'aplatissement. On voit qu'il n'y a pas d'inconvénient sérieux à considérer, dans une première approximation, la terre comme une sphère.

Un décret de l'*Assemblée constituante*, en date du 8 mai 1790, chargea l'*Académie des sciences* d'établir un *nouveau système de poids et mesures*. La commission nommée par l'Académie résolut de rattacher l'unité de longueur aux dimensions du globe terrestre, et chargea *Delambre* et *Méchain* de mesurer l'arc de méridien de Dunkerque à Barcelone.

D'après leurs travaux et les mesures effectuées antérieurement, *Delambre* et *Méchain* évaluèrent la longueur du quart du méridien terrestre à 5 130 740 toises.

La dix-millionième partie de cette longueur, c'est-à-dire

$$0^{\mathrm{T}},513\,074$$

fut adopée, sous le nom de *mètre*, pour nouvelle unité de longueur.

Ainsi le **mètre** *est égal à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.*

L'étalon prototype, en platine, qui donne la longueur légale du mètre, à la température zéro, a été présenté le 4 messidor an VII (22 juin 1799) au Corps Législatif et déposé aux Archives de l'État.

Des travaux ultérieurs entrepris par *M. Puissant*, par *MM. Biot* et *Arago*, par M. *Bessel*, établirent que l'évaluation de la longueur du méridien terrestre par *Delambre* et *Méchain* était un peu trop faible. Le nombre de toises du quart du méridien devrait être à très peu près de 5 131 180 toises, ce qui donnerait pour la longueur du mètre

$$0^{\mathrm{T}},513\,118$$

La différence entre cette valeur rectifiée et la valeur primitive attribuée à l'étalon prototype est insignifiante. Une augmentation, dans la température, de quelques degrés suffirait pour donner au mètre étalon la longueur modifiée.

On comprend que, d'après cela, il n'y a pas lieu de revenir sur les termes de la loi qui a institué le système métrique.

D'après la définition du mètre, la distance du pôle à l'équateur, suivant l'arc de méridien, est de 10 000 000 mètres ou 10 000 kilomètres, ou 1 000 myriamètres.

Le méridien entier compte 40 000 000 mètres ou 40 000 kilomètres, ou 4 000 myriamètres.

Le quart du méridien comprend 90 degrés. La longueur de l'arc de 1° est donc $\frac{10\,000\,000}{90} = 111\,111^{m},11$.

Ce nombre ne donne qu'une valeur moyenne, obtenue en supposant tous les arcs de 1° égaux entre eux, ce qui n'a pas lieu tout à fait.

Exercices. — I. *Paris-Panthéon se trouve à la latitude nord de 48° 50′ 39″. Quelle est la distance de Paris à l'Équateur? au pôle Nord? au pôle Sud?*

L'arc de 48° a pour longueur $\frac{1\,000\,000 \times 48}{9} =$	$5\,333\,333^{m},333$
48′ $\left(\frac{1}{60}\text{ du précédent}\right)$	88 888, 888
2′ $\left(\frac{1}{24}\text{ du précédent}\right)$	3 703, 703
30″ $\left(\frac{1}{4}\text{ du précédent}\right)$	925, 925
6″ $\left(\frac{1}{5}\text{ de l'arc de } 30''\right)$	185, 185
3″ $\left(\frac{1}{10}\text{ de l'arc de } 30''\right)$	92, 592
Total :	$5\,427\,129^{m},626$

Ainsi la distance de Paris à l'Équateur est de 5 427 kilomètres.
La distance de Paris au pôle Nord, 4 573 kilomètres
La distance de Paris au pôle Sud, 15 427 kilomètres.

II. *Calculer le diamètre et le rayon de la Terre supposée sphérique.*

Le diamètre se trouve en divisant la circonférence par le nombre π, ou mieux en multipliant l'inverse du nombre π par le nombre qui exprime la circonférence.

Le diamètre a ainsi pour valeur en mètres :

$$0,31\,830\,989 \times 40\,000\,000 = 12\,732\,395^{m},6$$

et par suite le rayon terrestre vaut $6\,366\,197^{m},8$.

Ces nombres n'expriment que des valeurs moyennes, obtenues en considérant la terre comme sphérique.

Des mesures plus précises ont donné :

Pour le rayon de l'équateur,	6 376 821 mètres.
Pour le rayon du pôle,	6 355 565
Différence :	21 256

Le rapport de la différence 21 526 au rayon équatorial 6 376 821 donne la mesure de l'aplatissement.

Ce rapport $\frac{21\,526}{6\,376\,821}$ diffère peu de $\frac{1}{300}$.

III. *Exprimer les anciennes mesures de longueur en unités du nouveau système métrique.*

L'ancienne mesure de longueur en France était la toise, elle se divisait en 6 pieds, et le pied en 12 pouces.

D'après ce que nous avons rappelé sur la mesure du méridien terrestre,

5 130 740 toises valent 10 000 000 mètres.

1 toise vaut donc $\frac{1\,000\,000}{513\,074} = 1^{m},94904$

1 pied vaut $\frac{1}{6}$ de toise, ou $0^{m},32484$

1 pouce vaut $\frac{1}{12}$ de pied, ou $0^{m},02707$

L'*Annuaire du Bureau des longitudes* donne des tables pour la conversion des anciennes mesures de longueur en nouvelles mesures, et réciproquement.

MESURES EFFECTIVES POUR LES LONGUEURS

Les mesures effectives sont des mesures qui existent réellement, qui sont réalisées en diverses substances telles que bois ou métal. La nature des mesures effectives est fixée par la loi; les mesures employées dans le commerce doivent porter la marque de la *vérification des poids et mesures*.

Pour les longueurs, les mesures effectives sont :

Le décimètre;
Le double décimètre;
Le demi-mètre;
Le mètre;
Le double mètre;
Le demi-décamètre;
Le décamètre;
Le double décamètre.

Le décamètre effectif est employé principalement, pour la mesure des distances sur le terrain, dans les opérations d'arpentage et de lever des plans; en raison de cet usage, il prend habituellement le nom de *chaîne d'arpenteur*.

L'instrument est composé de 50 chaînons de $0^m,2$, ce qui donne bien une longueur totale de 10 mètres; toutefois on lui donne quelques millimètres de plus, pour compenser le défaut de tension absolue.

Les chaînons sont réunis par des anneaux en fer; mais de cinq en cinq chaînons l'anneau de fer est remplacé par un anneau de cuivre, afin de marquer les mètres. Le milieu de la chaîne est marqué par une petite tige en cuivre. La chaîne se termine par deux poignées dont la longueur est prise sur les chaînons extrêmes.

DIVERSES MESURES

Signalons encore, d'après l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, certaines mesures de longueurs ou de distances spécialement usitées dans la marine ou la géographie.

Les principales sont :

L'*ancienne lieue* de 25 au degré, qui vaut 4 445 mètres.

La *lieue marine ou géographique* de 20 au degré, 5 557 mètres.

Le *mille marin* de 60 au degré, correspondant à l'arc de méridien d'une minute, égal au tiers de la lieue marine, par conséquent à 1 852 mètres.

Dans la marine on indique la vitesse des navires par le nombre de *nœuds* filés en un temps déterminé.

Le *nœud* est $\frac{1}{120}$ du mille marin et correspond à une longueur de $15^{m},435$.

1 *nœud* filé en 30 secondes ou $\frac{1}{120}$ d'heure correspond à un mille marin parcouru par heure ; 9 nœuds filés en 30 secondes correspondent à 9 milles, ou 3 lieues marines par heure.

SURFACES

La *surface*, l'étendue superficielle d'une figure, c'est une chose que l'on comprend sans qu'il soit facile de l'expliquer plus clairement par d'autres mots.

La géométrie classique définit la surface d'un corps : *la limite qui le sépare de l'espace environnant.*

La *surface plane* est une surface telle que si l'on prend deux points à volonté sur cette surface, la droite joignant ces deux points se trouve comprise tout entière dans la surface. Toute surface qui n'est ni plane ni composée de surfaces planes est dite *surface courbe;* exemple : la surface d'un *cylindre*, d'une *sphère*, etc.

L'unité principale des mesures de surface est le *mètre carré*. C'est un carré dont le côté est de 1 mètre. Le rapport de la surface d'une figure à l'unité de surface s'appelle l'aire de cette figure.

Des figures qui ont la même aire sont dites équivalentes. Dans le langage géométrique, on appelle figures égales des figures qui peuvent être superposées, qui appliquées l'une sur l'autre coïncident en tous leurs points.

Deux figures égales sont nécessairement équivalentes; mais deux figures peuvent être équivalentes sans être égales, sans être semblables. Un cercle peut être équivalent à un carré, un triangle peut être équivalent à un quadrilatère, etc.

A chaque unité de longueur, mètre, décamètre, hectomètre, etc., ou décimètre, centimètre, millimètre, etc., on peut faire correspondre une unité de surface.

Le *décamètre carré* est un carré qui a pour côté 1 décamètre.

L'*hectomètre carré* est un carré qui a pour côté 1 hectomètre.

Le *décimètre carré* est un carré qui a pour côté 1 décimètre.

Si l'on considère les unités de longueur de 10 en 10 fois plus grandes ou plus petites, les unités de surfaces correspondantes sont de 100 en 100 fois plus grandes ou plus petites.

Ainsi, le mètre carré vaut 100 décimètres carrés, le décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, et ainsi de suite.

Pour évaluer les surfaces des terrains, des champs, des propriétés, on emploie habituellement l'*are*, l'*hectare*, le *centiare*.

L'*are* vaut 100 mètres carrés, équivaut par conséquent à 1 décamètre carré. L'*hectare* vaut 100 ares ou 10 000 mètres carrés, ou 1 hectomètre carré. Le *centiare*, centième partie de l'are, équivaut au mètre carré.

Pour évaluer les grandes surfaces, telles que les surfaces des départements, des États, on emploie souvent les kilomètres carrés, les myriamètres carrés. On dira, par exemple, avec l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, que la surface de la France est de 528,401 kilomètres carrés; la surface de l'Europe de 9,980,843 kilomètres carrés, ou 99,808 myriamètres carrés environ.

Il n'existe pas de mesures effectives de surface. On parvient à trouver l'aire des figures à l'aide des mesures de longueur, des dimensions linéaires et des principes de la géométrie.

S'agit-il, par exemple, de trouver l'aire d'un *rectangle?* On mesure les deux dimensions, la longueur et la largeur, que l'on nomme encore la base et la hauteur. Le produit de ces deux dimensions indique le rapport de la surface du rectangle à la surface du carré construit sur l'unité de longueur comme côté. Si l'unité de longueur est le mètre, le produit de la base par la hauteur exprime l'aire du rectangle en mètres carrés. Si les dimensions linéaires sont évaluées en toises, le produit de la base par la hauteur représentera la surface en toises carrées.

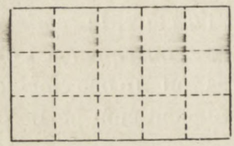
MESURE DES SURFACES.

Les formules qui permettent de calculer les mesures des surfaces en fonction des dimensions linéaires ont pour point de départ l'expression de la mesure du *rectangle*.

Un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Cette proposition se démontre aisément lorsque les dimensions du rectangle sont exprimées par des nombres entiers. Considérons un rectangle dont la base a 5 mètres, la hauteur 3 mètres. La base peut être divisée en 5 parties égales, ayant chacune 1 mètre; si par les points de division on mène des parallèles à la hauteur, on décompose le rectangle total en 5 rectangles partiels égaux, ayant chacun 1 mètre de base et 3 de hauteur. Si par les points de division de la hauteur, divisée en 3 parties égales, on trace des parallèles à la base, on décompose chacun des 5 rectangles partiels précédemment obtenus en 3 carrés, ayant 1 mètre de côté. Le nombre des mètres carrés contenus dans le rectangle est donc bien donné par le produit 5×3, des deux dimensions.

3



5

C'est par ce raisonnement très simple que l'on montre que le mètre carré contient 100 décimètres carrés, le décimètre carré 100 centimètres carrés, etc...

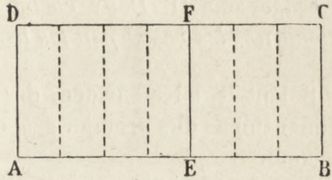
Mais les dimensions peuvent se trouver exprimées par des nombres quelconques, entiers, fractionnaires, incommensurables. La meilleure méthode pour généraliser la proposition relative à la mesure du rectangle nous semble être celle de la géométrie classique.

On démontre d'abord le théorème suivant :

Théorème I. *Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

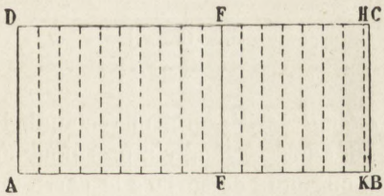
Soient ABCD, AEFD deux rectangles qui ont pour hauteur commune AD; je dis qu'ils sont entre eux comme leurs bases AB, AE.

Supposons d'abord que les bases AB, AE, soient commensurables entre elles, et qu'elles soient, par exemple, comme les nombres 7 et 4; si l'on divise AB en 7 parties égales, AE contiendra 4 de ces parties; élevez à chaque point de division une perpendiculaire à la base, vous formerez ainsi 7 rectangles partiels qui seront égaux entre eux, puisqu'ils auront même base et même hauteur. Le rectangle ABCD contiendra 7 rectangles partiels, tandis que AEFD en contiendra 4; donc le rectangle ABCD est au rectangle AEFD comme 7 est à 4, ou comme AB est à AE.



Si les bases AB, AE sont incommensurables, divisons la base AE en 10 parties égales, par exemple, et supposons que la base AB contienne 17 de ces parties avec un reste KB plus petit que l'une d'elles, le rapport des bases est plus grand que $\frac{17}{10}$ et plus petit que $\frac{18}{10}$.

Si l'on élève par chaque point de division une perpendiculaire sur la base, on forme dans le rectangle AEFD 10 rec-



tangles partiels égaux; le rectangle ABCD contient 17 de ces rectangles partiels égaux, et un 18ᵉ rectangle KBCH plus petit que les précédents; le rapport du rectangle ABCD au rectangle AEFD est donc plus grand que $\frac{17}{10}$ et plus petit que $\frac{18}{10}$. Donc les rapports des rectangles et de leurs bases sont compris tous deux entre $\frac{17}{10}$ et $\frac{18}{10}$. Or, en divisant la base AE en 100, 1000,... parties égales, on prouverait semblablement que ces rapports sont compris entre deux nombres consécutifs de centièmes, millièmes, etc., donc ces rapports sont égaux, car on vient de prouver qu'ils sont compris entre des nombres dont la différence peut devenir aussi petite que l'on voudra.

Théorème II. *Deux rectangles sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*

Soient R, r les surfaces des deux rectangles; B, H les deux dimensions du premier; b et h les deux dimensions du second.

Imaginons un 3[e] rectangle R′ qui ait même base B que le premier, et même hauteur h que le second. On aura, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{R}{R'}=\frac{H}{h}$$

$$\frac{R'}{r}=\frac{B}{b}$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, et simplifiant, on trouve

$$\frac{R}{r}=\frac{B\times H}{b\times h}$$

Mesure du rectangle. — Mesurer un rectangle R, c'est trouver son rapport à un autre rectangle r pris pour unité. On prend généralement pour unité de surface le carré qui a pour côté l'unité de longueur; alors les deux nombres b et h se réduisent à l'unité, et la proportion devient

$$\frac{R}{r}=B\times H$$

On voit donc que le rapport d'un rectangle au carré construit sur l'unité de longueur est égal au produit des nombres qui expriment les mesures de la base et de la hauteur en fonction de cette unité linéaire; et c'est ce qu'on exprime d'une manière abrégée en disant qu'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Après avoir établi la formule de l'aire du *rectangle*, on trouve aisément les aires des autres figures par les considérations suivantes :

Un *parallélogramme* est équivalent au rectangle de même base et de même hauteur.

Un *triangle* est la moitié du parallélogramme de même base et de même hauteur, et par suite équivalent à la moitié du rectangle de même base et de même hauteur.

Un *trapèze* est équivalent à un triangle qui aurait pour hauteur la hauteur même du trapèze, et pour base la somme des deux bases du trapèze.

Un *polygone régulier* se décompose en autant de triangles égaux que le polygone a de côtés, en joignant les sommets au centre.

Tous ces triangles ont pour hauteur l'apothème du polygone, c'est-à-dire la perpendiculaire abaissée du centre sur le côté du polygone. Chaque triangle ayant pour mesure la moitié de la base par la hauteur, la surface de tous les triangles réunis est égale à la $1/2$ somme des bases multipliée par la hauteur, c'est-à-dire à la moitié du produit du périmètre par l'apothème.

Le *cercle* est la limite des polygones réguliers inscrits, lorsque l'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés. A la limite, le périmètre du polygone inscrit devient la *circonférence*, l'apothème devient le rayon. Et la surface du cercle apparaît comme exprimée par le produit de la *circonférence* par la moitié du rayon, ou la moitié de la circonférence par le rayon, $\pi R \times R = \pi R^2$.

La surface convexe d'un *cylindre* peut être développée sur un plan, elle donne un rectangle ayant pour base la longueur rectifiée de la circonférence de base, et pour hauteur la hauteur même du cylindre.

La surface d'un *cône* est également une surface développable ; elle donne, appliquée sur un plan, un secteur circulaire, dont l'arc a la longueur de la circonférence de base, et dont le rayon est la génératrice du cône.

Principales formules relatives à la mesure des surfaces.

Rectangle	$b\,h$	b, base ; h hauteur.
Carré	c^2 ou $\frac{d^2}{2}$	c, côté ; d, diagonale.
Parallélogramme	$b\,h$	
Losange	$\frac{d.d'}{2}$	d,d', diagonales.
Triangle quelconque	$\frac{b.h}{2}$ ou $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	a,b,c côtés du triangle $p=\frac{a+b+c}{2}$
Triangle équilatéral	$\frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}$,	a côté du triangle.
Trapèze	$\frac{B+b}{2}.h$	B, grande base ; b petite base, h hauteur.
	$\frac{a+b}{a-b}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}$	a,b grande et petite base. c,d, côtés non parallèles.

Polygone quelconque, se décompose en triangles et trapèzes.

Polygone régulier $\frac{P\times A}{2}$, P, périmètre, A apothème.

Cercle	πR^2	R, rayon.
	$\frac{\pi D^2}{4}$	D, diamètre.
	$\frac{C^2}{4\pi}$	C, circonférence.
	$\left(\frac{C}{2}\right)^2\times\frac{1}{\pi}$ ou encore $C\times\frac{R}{2}$	

Polygones réguliers inscrits dans un cercle de rayon R	Carré	$2R^2$	
	Triangle équilatéral	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	
	Hexagone régulier	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$	double du triangle équilatéral inscrit,
	Octogone régulier	$2R^2\sqrt{2}$	
	Dodécagone régulier	$3R^2$	

Ellipse $\pi a b$ $a, \frac{1}{2}$ grand axe ; $b, \frac{1}{2}$ petit axe.

Surface d'un polyèdre, somme de surfaces planes.

EXEMPLE. Surface totale d'un parallélipipède rectangle :

$2(ab + bc + ca)$ a,b,c trois arêtes issues d'un même sommet.

Surface convexe d'un cylindre $2\pi R H$ R, rayon de base H, hauteur.

» totale » $2\pi R(R + H)$

Surface convexe d'un cône $\pi R a$ R, rayon de base ; a, arête ou génératrice.

» totale » $\pi R(R + a)$

Surface convexe du tronc de cône $\pi(R+r)a$, R, ray. de la gr. base ; r, de la petite.

» totale $\pi[R^2 + r^2 + (R + r)a]$ a, côté ou apothème.

Surface de la sphère $4\pi R^2$ ou πD^2 R, rayon ; D, diamètre.

Surface de la zone sphérique $2\pi R.H$ R, ray. d'un grand cercle. H, hauteur de la zone.

N. B. — Dans l'étude des surfaces il est souvent utile de se rappeler un des théorèmes importants de la géométrie :

Les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

(On nomme triangles semblables et généralement polygones semblables, ceux qui ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels.)

Les relations entre le kilomètre carré, l'hectomètre carré, etc., sont des cas particuliers de cette proportion générale.

Ainsi le rapport du kilomètre carré au mètre carré est égal au rapport $\frac{1000^2}{1^2}$, soit 1 000 000.

Exercices. — I. *La surface de la ville de Paris est de* 7 802 *hectares. Calculer le côte du carré, le côté du triangle* *équilatéral, le côté de l'hexagone régulier, le rayon du cercle qui auraient la même surface.*

1° 7802 hectares valent 78 020 000 mètres carrés. La longueur du côté du carré équivalent est en nombre de mètres,

$$C = \sqrt{78\,020\,000} = 8\,832^{m},9$$

2° Le côté a du triangle équilatéral équivalent doit satisfaire à l'équation

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 78\,020\,000$$

d'où

$$a = \sqrt{\frac{78\,020\,000 \times 4 \times \sqrt{3}}{3}} = 13433^{m}$$

3° Le côté C de l'hexagone régulier équivalent vérifie l'équation

$$\frac{3C^2\sqrt{3}}{2} = 78\,020\,000$$

d'où

$$C = \frac{1}{3}\sqrt{78\,020\,000 \times 2 \times \sqrt{3}} = 5479^{m},9$$

4° Le rayon R du cercle équivalent satisfait à la condition

$$\pi R^2 = 78\,020\,000$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi} \times 78\,020\,000} = 4983^{m},6$$

II. *Evaluer en myriamètres carrés la surface du globe terrestre, supposé sphérique, et comparer la surface de la France à celle de la Terre.*

La surface d'une sphère s'exprime en fonction de son diamètre par la formule πD^2.

D n'est pas donné, mais facile à trouver à l'aide de la relation entre la circonférence et le diamètre, $C = \pi D$; or la circonférence du méridien est de 4 000 myriamètres. Donc

$$D = \frac{1}{\pi} \times 4\,000 \text{ et } D^2 = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \times 16\,000\,000$$

$$S = \pi D^2 = \frac{1}{\pi} \times 16\,000\,000 = 0{,}31\,830\,989 \times 16\,000\,000$$

On trouve $S = 5\,092\,958$ myriamètres carrés. C'est la surface de la sphère terrestre.

La surface de la France est de 528 401 kilomètres carrés, ou 5 284 myriamètres carrés environ. Le rapport de la surface de la France à celle de la terre est ainsi

$$\frac{5.284}{5.092.958} = \frac{1}{\frac{5.092.958}{5284}} = \frac{1}{964} \text{ environ.}$$

III. *Une salle rectangulaire a $12^m,75$ de long sur $8^m,45$ de large : on se propose de la carreler avec des pavés ayant la forme d'hexagones réguliers de 12 centimètres de côté. Combien faudra-t-il se procurer d'hexagones, en supposant un déchet de 4 °/₀ ; et quelle sera la dépense, si le prix des pavés est de 158 francs le mille ?*

La surface de la salle s'obtient en multipliant la longueur par la largeur.

$$12{,}75 \times 8{,}45 = 107^{mq},7375$$
$$1.077.375 \text{ centimètres carrés}$$

La surface d'un pavé hexagonal de 12 centimètres de côté est, en centimètres carrés,

$$\frac{3 \times 12^2 \times \sqrt{3}}{2}$$

Le nombre de pavés nécessaires pour recouvrir la surface de la salle est

$$\frac{1.077.275 \times 2}{3 \times 12^2 \times \sqrt{3}} = \frac{1.077.375 \times 2 \times \sqrt{3}}{9 \times 144}$$

Le nombre de pavés qu'il faut acheter est

$$\frac{1.077.375 \times 2 \times \sqrt{3} \times 100}{9 \times 144 \times 96}$$

En effectuant ces calculs, on trouve pour résultat 2999,7. Il convient ici de prendre le nombre entier approché par excès, soit 3 000.

La dépense sera $158 \times 3 = 474$ francs.

IV. *Dans un jardin public se remarque une pelouse elliptique qui présente une longueur de* 65 *mètres et une largeur de* 48 *mètres. Quelle est la surface?*

Les demi-axes de l'ellipse ont pour valeur $a = 32^{m},5$
$b = 24$

Il suffit d'appliquer la formule $S = \pi . a . b$

$$S = \pi \times 32,5 \times 24$$

En effectuant le calcul avec $\pi = 3,1416$ on trouve

$$S = 2450^{mq},44^{dq},80^{cq}$$

le 6 de 3,1416 étant pris par excès, il convient de prendre pour résultat $2450^{mq},44$.

V. *Une personne qui fait* 104 *pas par minute, et qui sait qu'elle fait en moyenne* 117 *pas pour* 1 *hectomètre, a employé* $4^{m},52^{s}\frac{1}{2}$ *à traverser, suivant la diagonale, une place publique carrée. Quelle est la surface de ce carré? Quel est le côté?*

En 4 minutes et $52\frac{1}{2}$ secondes, cette personne a dû faire $104 \times 4\frac{7}{8} = 507$ pas, qui valent $\frac{507 \times 100}{117}$ mètres, ou, plus simplement, $\frac{16900}{39}$, ou encore $\frac{1300}{3}$ mètres.

La diagonale du carré ayant une longueur de $\frac{1300}{3}$ mètres.

il suffit, par application de la formule $S=\frac{d^2}{2}$, de calculer le carré de $\frac{1300}{3}$, et d'en prendre la moitié, pour trouver la surface.

$$S=\left(\frac{1300}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1690000}{18}=93888^{mq},8888.$$

Le côté du carré, c, et le diagonale, d, sont liés par la relation

$$d=c\sqrt{2},\text{ d'où }c=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{d\sqrt{2}}{2}$$

Donc, ici,

$$c=\frac{1300\times\sqrt{2}}{6}=\frac{650\times\sqrt{2}}{3}$$

$$c=306^{m},412$$

Cette valeur de c doit être égale à la racine carrée du nombre 93888,8888... qui mesure la surface : c'est ce qu'il est facile de vérifier.

VI. *Trouver la surface d'un triangle dont les* 3 *côtés sont* 3 *mètres,* 4 *mètres,* 5 *mètres.*

Ce triangle est rectangle, car $5^2=3^2+4^2$

La surface est donc donnée par le produit $\frac{3\times 4}{2}=6$ mètres carrés.

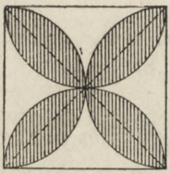
L'application de la formule générale

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donnerait $$S=\sqrt{6\times 1\times 2\times 3}=\sqrt{36}=6$$

VII. *Sur chacun des côtés d'un carré, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence dans l'intérieur du carré;*

les quatre demi-circonférences se coupant deux à deux interceptent, entre leurs arcs, des doubles segments qui forment ensemble une figure que l'on nomme rosace à 4 branches. On en demande la surface, en fonction du côté a *du carré.*



Il est facile de reconnaître que les 4 portions comprises dans l'intérieur des demi-circonférences appartiennent chacune à 2 demi-cercles ; si l'on évalue les surfaces des 4 demi-cercles, chaque branche de la rosace aura été comptée deux fois.

Les 4 demi-cercles comprennent la surface du carré, plus la surface de la rosace.

Donc la surface S de la rosace est équivalente à la différence entre la surface des 4 demi-cercles, ou de 2 cercles de diamètre a, et la surface du carré ayant a pour côté.

$$S = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

ou

$$S = a^2 \times 0{,}5707963\ldots$$

On pourrait encore considérer la rosace comme composée de 8 segments circulaires correspondant à l'arc de 90° dans des circonférences ayant pour rayon $\frac{a}{2}$.

Le secteur de 90° a pour surface $\frac{\pi a^2}{16}$.

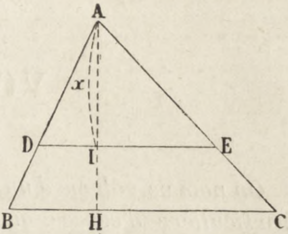
Le triangle correspondant a pour surface $\frac{a^2}{8}$

chaque segment de 90° a donc pour mesure $\frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}$

et comme il y en a 8 égaux, la surface de la rosace est

$$\left(\frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}\right) \times 8 = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

VIII. *Diviser un triangle* ABC, *dont la hauteur* AH *mesure* 1 *kilomètre, en* 2 *parties équivalentes par une parallèle*, DE, *à la base* BC.



Le triangle ADE et le triangle ABC sont semblables, et leurs surfaces sont entre elles comme les carrés des lignes homologues; par exemple, comme les carrés des hauteurs.

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{x^2}{1000^2},$$

x désignant la hauteur AI du triangle ADE. Mais ADE doit être la moitié de ABC, on a donc la proportion

$$\frac{x^2}{1000^2} = \frac{1}{2}$$

d'où l'on tire $$x^2 = \frac{1000^2}{2}$$

et $$x = \frac{1000}{\sqrt{2}} = \frac{1000.\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{1000 \times 1,41421}{2} = 707^{m},105.$$

Ainsi la parallèle DE doit être tracée à $707^{m},105$ du sommet ou à $292^{m},895$ de la base.

En général si l'on désigne par h la hauteur du triangle proposé, la parallèle DE doit être tracée à la distance $\frac{h.\sqrt{2}}{2}$ du sommet

ou à la distance $$h - \frac{h\sqrt{2}}{2} = \frac{h(2 - \sqrt{2})}{2}$$ de la base.

VOLUMES

On nomme volume d'un corps le lieu déterminé, la portion particulière d'espace que ce corps occupe dans l'espace indéfini.

L'unité principale de volume est le **mètre cube**.

Le mètre cube est un solide qui a 1 mètre de longueur, 1 mètre de largeur, 1 mètre de hauteur. Il présente six faces égales dont chacune représente 1 mètre carré.

Les autres unités sont : le décimètre cube, le centimètre cube, le millimètre cube ; ce sont des cubes dont les côtés ou arêtes ont respectivement pour longueur 1 décimètre, 1 centimètre, 1 millimètre.

Le mètre cube vaut 1000 décimètres cubes; le décimètre cube 1000 centimètres cubes, et ainsi de suite.

Pour mesurer les volumes, on applique soit les principes de la géométrie, soit certaines méthodes particulières exposées dans les cours de physique.

Il n'existe pas de mesures effectives pour les volumes, sauf pour les bois de chauffage et les matières sèches ou liquides.

Le **stère**, employé pour la mesure des bois de chauffage, se compose essentiellement d'une base horizontale, appelée sole, et de deux montants verticaux entre lesquels on empile les bûches de bois. Le stère équivaut à 1 mètre cube. On peut encore employer le double stère, qui vaut 2 stères, et le demi-décastère qui vaut 5 stères.

Mais aujourd'hui la mesure des bois de chauffage se fait généralement par le poids, plutôt que par le volume.

L'unité principale des mesures de capacité est le **litre**, qui vaut 1 décimètre cube.

Les mesures effectives sont l'hectolitre, le demi-hectolitre.

le double décalitre, le décalitre, le demi-décalitre, le double litre, le litre, le demi-litre, le double décilitre, le décilitre, le demi-décilitre, le double centilitre, le centilitre. Nous en donnerons plus loin les dimensions.

La mesure des volumes, par les principes de la géométrie, a pour point de départ la mesure du volume d'un parallélipipède rectangle.

Un **parallélipipède rectangle** est un solide limité par 6 faces planes qui sont égales deux à deux, et qui sont toutes des rectangles; les intersections des faces, ou arêtes du parallélipipède rectangle sont perpendiculaires sur les plans des rectangles entre lesquels elles se trouvent comprises.

Le **cube** n'est qu'un cas particulier du parallélipipède rectangle; c'est le cas où les rectangles des faces sont des carrés; les arêtes sont égales.

On établit successivement les propositions suivantes :

I. Deux *parallélipipèdes rectangles* qui ont la même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

II. Deux *parallélipipèdes rectangles* qui ont une dimension commune sont entre eux comme les produits de leurs deux autres dimensions; ou, autrement, deux parallélipipèdes rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

III. Deux *parallélipipèdes rectangles* sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, ou comme les produits de leurs trois dimensions.

IV. La mesure du volume du *parallélipipède rectangle* est égale au produit des trois dimensions, ou au produit de la base par la hauteur, en prenant pour unité de volume le cube dont le côté est égal à l'unité linéaire, pour unité de surface le carré construit sur cette même unité linéaire.

Le **cube** a pour mesure le produit de ses trois dimensions égales, c'est-à-dire la 3e puissance ou cube de l'une d'elles.

Un **parallélipipède** quelconque est équivalent à un parallélipipède rectangle de même hauteur et de base équivalente. Par suite le volume d'un parallélipipède quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

Un **prisme triangulaire** est la moitié du parallélipipède ayant même hauteur et une base double; la mesure du prisme triangulaire est, par suite, égale au produit de sa base, moitié de celle du parallélipipède, multipliée par sa hauteur.

Un **prisme** quelconque peut être partagé en autant de prismes triangulaires de même hauteur qu'on peut former de triangles dans le polygone qui lui sert de base. Chaque prisme triangulaire ayant pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, le prisme total a pour mesure le produit de la somme des triangles qui servent de bases aux prismes triangulaires partiels, multipliés par la hauteur, commune pour tous; la somme des triangles est égale au polygone de base. Donc la mesure d'un prisme polygonal quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Toute **pyramide** triangulaire est le tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur, et, généralement, toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

Un **prisme triangulaire tronqué** est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour base commune l'une des bases du prisme et pour sommets les 3 sommets de l'autre base.

Un **tronc de pyramide** est équivalent à la somme de 3 pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et ayant respectivement pour bases : la base inférieure, la base supérieure du tronc, et une moyenne proportionnelle entre les deux bases.

Le volume du **cylindre** est la limite de volume d'un prisme inscrit dont le nombre des faces croît indéfiniment.

Le volume du **cône** est la limite du volume d'une pyramide inscrite dont le nombre des faces croît indéfiniment.

Le volume du **tronc de cône** est la limite de volume d'un tronc de pyramide dont les bases seraient des polygones semblables inscrits dans les cercles des bases, et dont le nombre des côtés croît indéfiniment.

Le volume d'une **sphère** est la limite de la somme des volumes des pyramides qui auraient toutes pour sommet le centre de la sphère, et pour bases les faces d'un polyèdre inscrit, dont le nombre augmenterait indéfiniment.

PRINCIPALES FORMULES POUR LE CALCUL DES VOLUMES.

Parallélipipède rectangle	$a.b.c,$	a,b,c, 3 dimensions.
ou	$B \times h$	B, surface de base. h, hauteur.
Cube	$a^3,$	a, côté du cube.
Prisme, Parallélipipède	$B \times h,$	B, surface de base. h, hauteur.
Pyramide	$\frac{1}{3}B.h.$	
Tronc de pyramide	$\frac{1}{3}h\left[B+b+\sqrt{B.b}\right].$	
Tronc de prisme triangulaire	$S \times \frac{a+a'+a''}{3}$	S, section droite. a, a' a'' arêtes.
Ponton ou tas de sable	$\frac{h}{6}\left[b(2a+a')+b'(a+2a')\right].$	
Cylindre	$\pi R^2.H$ ou $\frac{\pi D^2.H}{4}.$	
Cône	$\frac{1}{3}\pi R^2 H.$	
Tronc de cône	$\frac{1}{3}\pi H[R^2+r^2+Rr].$	
Sphère	$\frac{4}{3}\pi R^3$ ou $\frac{1}{6}\pi D^3.$	
Ellipsoïde	$\frac{4}{3}\pi abc.$	
Ellipsoïde de révolution	$\frac{4}{3}\pi ab^2$ ellipsoïde allongé. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ ellipsoïde aplati.	

Les volumes de solides semblables sont entre eux comme les cubes des lignes homologues.

JAUGEAGE DES TONNEAUX.

Les principales formules dont on peut faire usage sont les suivantes :

Formule de Guilmin $V = D \times d \times l \times 0,82$
— Oughtred $V = (2D^2 + d^2) \times l \times 0,2618$
— Dez $V = \left[R - \frac{3}{8}(R - r)\right]^2 \times l \times \pi$

Dans ces formules, D représente le diamètre du bouge.
— d, le diamètre du jable.
— l, la longueur du tonneau.

Dans les octrois des villes, on applique quelquefois la formule approximative

$$V = d^3 \times 0,605$$

d est la distance mesurée suivant la diagonale du trou de bonde au point le plus bas de l'un des fonds, et exprimée en nombre de décimètres.

Exercices.

I. *Un bassin a la forme d'un prisme droit; la base est un octogone régulier de* 12 *mètres de côté; la hauteur est* $1^m,75$. *On demande le nombre d'hectolitres d'eau que ce bassin peut contenir.*

Le volume du bassin s'obtiendra en multipliant la surface de la base par la hauteur.

La surface d'un octogone régulier en fonction du rayon R, du cercle circonscrit est $2\ R^2\sqrt{2}$, et en fonction du côté C de l'octogone

$$2C^2(1 + \sqrt{2})$$

En faisant $C = 12$, on obtiendra pour la surface de l'octogone de base en mètres carrés

$$2 \times 12^2.(1 + \sqrt{2})$$

et pour volume du prisme, en mètres cubes,

$$2 \times 12^2 (1 + \sqrt{2}) \times 1,75$$

$= 3,5 \times 144 \times 2,414... = 1215^{mc}, 362^{dc}$, à 1 décim. cube près.

Le mètre cube vaut 10 hectolitres ; la capacité du bassin est donc de 12153 hectolitres 62 litres.

II. *Un chemin de fer traverse un terrain horizontal sur un remblai ayant* 6 *mètres de hauteur,* 8 *mètres de largeur au sommet, et des talus dont la pente descend de* 3 *mètres pour* 4 *mètres de base. On demande combien ce remblai, sur chaque kilomètre de longueur, a exigé de mètres cubes de terre.*

Le volume qu'il s'agit d'évaluer est celui d'un prisme droit dont la hauteur ou longueur est de 1 kilomètre, et dont la base est un trapèze, dont on connaît la hauteur, 6 mètres; la petite base 8 mètres; il est, en outre, facile de trouver la grande base; elle comprend, outre une longueur égale à la petite base, 8 mètres, les bases de deux triangles égaux ayant 6 mètres de hauteur et $6 \times \frac{4}{3}$ ou 8 mètres de base.

La grande base du trapèze est donc $8 \times 3 = 24$ mètres.

La surface du trapèze est $\frac{24 + 8}{2} \times 6 = 16 \times 6$ ou 96 mètres carrés.

Le volume en mètres cubes, pour 1 kilomètre de longueur, est $96 \times 1000 = 96\,000$ mètres cubes.

III. *Calculer le volume d'un cube dont la diagonale a* 1 *mètre de longueur.*

La diagonale, d, d'un cube est liée au côté a, par la relation

$$d = a\sqrt{3}$$

On en déduit

$$a = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

et

$$a^3 = \frac{d^3}{3.\sqrt{3}} = \frac{d^3.\sqrt{3}}{9}$$

En faisant $d = 1$ on trouvera pour le volume demandé

$$V = \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{1,73205}{9} = 0^{mc},19245$$

IV. *Trouver l'expression du volume du tétraèdre régulier en fonction de l'arête,* a, *du tétraèdre.*

Le tétraèdre régulier est une pyramide régulière ayant pour base un triangle équilatéral et pour faces des triangles équilatéraux égaux à celui de la base.

La surface du triangle de base est $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Il suffit, pour avoir le volume, de multiplier cette surface par le tiers de la hauteur. La hauteur du tétraèdre est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base; elle passe par le centre de cette base, qui se trouve au point de rencontre des 3 médianes, qui dans le triangle équilatéral se trouvent perpendiculaires sur les côtés et sont en même temps les 3 hauteurs. La hauteur du triangle équilatéral de côté a est $\frac{a.\sqrt{3}}{2}$; le point de rencontre est aux $\frac{2}{3}$ à partir du sommet, à une distance du sommet égale à $\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

La hauteur du tétraèdre est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est une arête du tétraèdre a, et l'autre côté de l'angle droit est la longueur $\frac{a}{\sqrt{3}}$ qui va d'un sommet au centre dans le plan de la base.

On a donc, en désignant par h la hauteur du tétraèdre régulier,

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} \text{ ou } h^2 = \frac{2a^2}{3}$$

et, en extrayant la racine carrée, $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

En faisant le produit de la surface de la base par le tiers de la hauteur, on trouve pour le volume

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a.\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

ou, en simplifiant,

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

V. *Diviser le volume d'une pyramide, dont la hauteur est donnée, en 2 parties équivalentes par un plan parallèle à la base.*

Le plan sécant laisse au-dessus de lui une pyramide semblable à la pyramide totale, et l'on sait que les volumes de deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des lignes homologues. Si donc on désigne par h la hauteur donnée de la pyramide totale, et par x la hauteur de la pyramide partielle supérieure qui n'est que la moitié de la pyramide totale, on aura

$$\frac{x^3}{h^3} = \frac{1}{2}$$

d'où l'on tire

$$x^3 = \frac{h^3}{2}$$

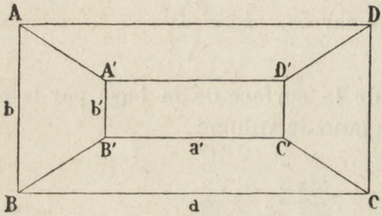
et

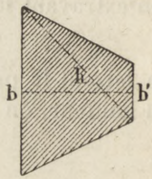
$$x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} = h \times 0{,}79369\ldots$$

x mesure la distance du sommet au plan sécant.

VI. *Trouver le volume d'un hexaèdre dont deux faces sont deux rectangles ayant leurs côtés parallèles deux à deux, et dont les autres faces sont des trapèzes.*

C'est ce que l'on nomme communément *ponton*, *tas de sable.*





Soient a, b et a', b' les dimensions des deux rectangles qui forment deux bases parallèles, et h la hauteur de l'hexaèdre ou distance des deux bases.

L'hexaèdre peut être décomposé en 2 prismes triangulaires tronqués, par un plan conduit suivant les arêtes parallèles AD, B'C', situées l'une dans la base inférieure, l'autre dans la base supérieure et dans deux faces différentes.

Le premier prisme triangulaire a pour volume le produit de la section droite $\frac{b.h}{2}$ par le tiers de la somme des 3 arêtes qui sont a, a, a'

$$V = \frac{b.h}{2} \; \frac{a + a + a'}{3} = \frac{b.h}{2} \; \frac{2a + a'}{3}$$

Le deuxième prisme triangulaire a pour volume le produit de la section droite $\frac{b'.h}{2}$ par le tiers de la somme des 3 arêtes qui sont a, a', a'

$$V' = \frac{b'.h}{2} \; \frac{a + 2a'}{3}$$

En additionnant les 2 volumes partiels, on obtient le volume V de l'hexaèdre

$$V = \frac{h}{6}\left[b(2a + a') + b'(a + 2a')\right]$$

Remarque. — On peut aussi bien conduire le plan sécant suivant les arêtes b et b', et qui donnerait

$$V = \frac{h}{6}[a(2b + b') + a'(b + 2b')]$$

Calcul des dimensions linéaires des mesures effectives de capacité.

MESURES RÉELLES POUR LES LIQUIDES.

Les mesures pour les liquides, au nombre de 13, se divisent en deux classes : 5 grandes, de l'hectolitre au demi-décalitre; 8 petites, du double litre au centilitre.

Les 5 grandes mesures sont construites, suivant leur destination, en cuivre, tôle, fonte.

Ce sont des cylindres dont la profondeur est égale au diamètre intérieur.

Proposons-nous de calculer *les dimensions linéaires de l'hectolitre.*

Le volume d'un cylindre, en fonction de sa hauteur et de son diamètre, est exprimé par la formule

$$\frac{\pi . D^2 . H}{4}$$

Dans le cas particulier de l'hectolitre, $H = D$, et le volume a pour expression

$$\frac{\pi . D^3}{4} = V$$

Si nous prenons pour unité de longueur le décimètre, et pour unité de volume le décimètre cube, nous pourrons poser l'équation

$$\frac{\pi . D^3}{4} = 100$$

d'où
$$D^3 = \frac{400}{\pi} = \frac{1}{\pi} \times 400$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} \times 400}$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830989$$

$$D = \sqrt[3]{127,323956}$$

On trouve $D = 5^{d},03$

En attribuant à la lettre V dans la formule

$$\frac{\pi . D^3}{4} = V$$

successivement les valeurs numériques 50, 20, 10, 5, on trouve par des calculs analogues la profondeur et le diamètre des autres mesures effectives.

Nous donnons ci-dessous les résultats.

Grandes mesures pour les liquides.	Profondeur et diamètre.
Hectolitre	503 millimètres.
Demi-hectolitre	$399\frac{1}{3}$
Double-décalitre	294
Décalitre	$233\frac{1}{2}$
Demi-décalitre	$185\frac{1}{3}$

Les 8 petites mesures pour les liquides, autres que le lait et l'huile, sont en étain (95 parties d'étain et 5 de plomb); ce sont des cylindres dont la profondeur est double du diamètre intérieur.

La hauteur H du cylindre étant égale à 2 fois le diamètre, 2.D, la formule du volume devient

$$\frac{2\pi D^3}{4} \text{ ou } \frac{\pi D^3}{2} = V$$

Mais il est préférable de prendre H pour inconnue, et d'exprimer D en fonction de H, parce que si H est calculée avec un degré d'approximation déterminé, *à fortiori* la valeur de D sera connue avec la précision demandée. Faisons donc dans la formule générale $\frac{\pi D^2.H}{4}$

$$D = \frac{H}{2} \text{ d'où } D^2 = \frac{H^2}{4}$$

nous aurons

$$\frac{\pi H^3}{16} = V$$

Appliquons cette formule au calcul *de la profondeur du litre.* En prenant pour unité de longueur le décimètre et pour unité de volume le décimètre cube, il faudra faire $V = 1$ et calculer H par la relation

$$\frac{\pi H^3}{16} = 1$$

d'où l'on tire

$$H = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} \times 16} = 1^{dm},72$$

Ainsi le litre pour les liquides, autres que le lait et l'huile, a pour profondeur 172 millimètres, et pour diamètre 86 millimètres.

On déterminerait par des calculs analogues les dimensions linéaires des autres mesures réelles de capacité.

Les 8 petites mesures destinées au lait et à l'huile sont en fer blanc ; elles ont la forme de cylindres dont la profondeur est égale au diamètre. Les dimensions du litre pour le lait et l'huile sont de 108 millimètres, celles du décilitre de 50 millimètres, celles du centilitre de 23 millimètres, tant pour la profondeur que pour le diamètre.

MESURES RÉELLES DE CAPACITÉ POUR LES GRAINES ET MATIÈRES SÈCHES.

Ces mesures sont au nombre de 11, depuis l'hectolitre jusqu'au demi-décilitre compris. Selon leur destination, on les trouve construites en bois, en cuivre, ou en tôle. Elles ont la forme de cylindres dont la profondeur est égale au diamètre intérieur.

Le calcul des dimensions linéaires est donc le même que pour les cinq grandes mesures destinées aux liquides et pour les six premières des petites mesures destinées au lait et à l'huile.

Ainsi l'hectolitre pour les matières sèches a 5o3 millimètres de profondeur et de diamètre, comme l'hectolitre pour les liquides.

POIDS

L'unité principale est le **gramme**.

Le *gramme* est le poids, dans le vide, d'un centimètre cube ou millilitre d'eau distillée, prise à son maximum de densité, à la température de 4 degrés centigrades au-dessus de zéro.

Les unités secondaires sont les multiples ou sous-multiples décimaux du gramme, depuis le *kilogramme* jusqu'au *milligramme*.

Le *kilogramme* est souvent pris dans le commerce pour l'unité principale de poids.

Les fortes pesées s'évaluent en tonnes et en quintaux.

La *tonne métrique* vaut 1000 kilogrammes.

Le *quintal métrique* vaut 100 kilogrammes.

Les mesures effectives de poids forment trois séries :

5 gros poids	50 kilogrammes.
	20 »
	10 »
	5 »
	2 »

9 poids moyens	1 kilogramme.
	5 hectogrammes.
	2 »
	1 »
	5 décagrammes.
	2 »
	1 »
	5 grammes.
	2 »

10 petits poids	1 gramme. 5 décigrammes. 2 » 1 » 5 centigrammes. 2 » 1 » 5 milligrammes. 2 » 1 »

Les dix premiers poids, depuis le poids de 50 kilogrammes jusqu'au poids de 5 décagrammes ou $\frac{1}{2}$ hectogramme inclusivement, sont en fonte de fer. Les poids de 50 et de 20 kilogrammes ont la forme des troncs de pyramides à bases rectangulaires.

Les poids suivants, de 10 kilogrammes à $\frac{1}{2}$ hectogramme, ont la forme de troncs de pyramides à bases hexagonales.

Les poids en fonte sont munis d'un anneau à la partie supérieure. Cet anneau, en fer forgé, ne doit pas dépasser l'arête des poids.

Les poids moyens sont en cuivre ou laiton. Ils ont la forme d'un cylindre surmonté d'un bouton. La hauteur du cylindre est égale au diamètre ; la hauteur du bouton en est la moitié.

Les 9 petits poids, à partir de $\frac{1}{2}$ gramme, sont formés de plaques minces, découpées suivant la forme d'un rectangle dont un des angles est relevé pour qu'on puisse les manier aisément.

Ils sont en cuivre, argent ou platine.

Relation entre le poids, le volume et la densité.

La densité *d'une substance est le rapport entre le poids de cette substance et le poids d'un égal volume d'eau.*

Soit P le poids de la substance proposée, P′ le poids d'un égal volume d'eau ; la densité D est, par définition, le rapport $\frac{P}{P'}$. Si l'on prend pour unité de poids le poids d'eau qui correspond à l'unité de volume, le poids P′ et le volume V, de l'eau, sont mesurés par le même nombre ; et le rapport des deux nombres P et P′ est égal au rapport des nombres P et V.

La densité D est donc liée aux nombres qui représentent le poids et le volume du corps proposé par la relation $D = \frac{P}{V}$.

De cette relation on tire

$$P = V . D$$

et

$$V = \frac{P}{D}$$

On nomme **poids spécifique** d'une substance le poids de l'unité de volume. On prend généralement, dans les questions de ce genre, pour unité de volume le décimètre cube, et pour unité de poids le kilogramme. Le poids spécifique de l'eau est 1. Quand on dit que le poids spécifique d'un métal, le fer par exemple, est 7,8, on entend par là que le décimètre cube de fer pèse $7^{k},8$.

Le poids spécifique et la densité s'expriment par le même nombre. Mais tandis que le poids spécifique peut être considéré comme un nombre concret, un nombre exprimant un poids, la densité est un nombre abstrait exprimant un rapport de deux poids.

Dans l'application des formules qui lient la densité, le poids et le volume, il est essentiel de bien faire concorder les unités de poids et de volumes ; le kilogramme correspond au décimètre cube ; le gramme au centimètre cube, etc...

Problème. — *Déterminer la densité d'un alliage composé de neuf parties, en poids, d'or et d'une partie de cuivre.*

La densité de l'or est 19,26 *et la densité du cuivre* 8,85.

Prenons un poids d'alliage de 10 kilogrammes, il y aura 9 kilogrammes d'or et 1 kilogramme de cuivre. Si nous désignons par V le volume en décimètres cubes qu'occupent les 10 kilogrammes de l'alliage proposé, la densité demandée sera donnée par le quotient $\frac{10}{V}$. Le volume V n'est pas donné, mais on peut le trouver à l'aide des données ; le volume total de l'alliage comprend le volume de l'or pur, plus le volume du cuivre.

Le volume de l'or est donné par le quotient $\frac{9}{19,26}$.

Le volume du cuivre est de même calculable par le quotient $\frac{1}{8,85}$.

Le volume V de l'alliage est donc

$$V = \frac{9}{19,26} + \frac{1}{8,85}$$

et la densité cherchée a pour expression

$$D = \frac{10}{\frac{9}{19,26} + \frac{1}{8,85}}$$

ou

$$D = \frac{10 \times 19,26 \times 8,85}{9 \times 8,85 + 19,26}$$

En effectuant les calculs on trouve $D = 17,23$.

Problème. *Calculer le prix de tuyaux de conduite en fonte présentant les dimensions suivantes :*

Diamètre intérieur	$0^m,245$
Épaisseur de la fonte	$0^m,014$
Longueur totale	4268 mètres.

La densité de la fonte est 7,2 et le prix est de 22 francs le quintal métrique.

Formule du volume d'un cylindre $V = \pi R^2 H$ ou $\dfrac{\pi D^2 . H}{4}$

Volume du cylindre intérieur $\dfrac{\pi . H}{4} . 0,245^2$

Diamètre du cylindre extérieur $0,245 + 0,028 = 0,273$

Volume du cylindre extérieur $\dfrac{\pi . H}{4} . 0,273^2$

Volume de la fonte $\dfrac{\pi . H}{4} (0,273^2 - 0,245^2)$

ou $\dfrac{3,1416 \times 4268}{4} [(0,273 + 0,245)(0,273 - 0,245)]$

On trouve $V = 48^{mc},618672$

Poids de la fonte $48618,672 \times 7,2$

Prix de la fonte $48618,67.2 \times 7,2 \times 0,22 =$ fr. 77011,97

MONNAIES

L'unité monétaire est le *franc*.

D'après la loi du 18 germinal an III (7 avril 1795) et la loi du 7 germinal an XI (28 mars 1803), l'unité monétaire est constituée par 5 grammes d'argent au titre de $\frac{9}{10}$.

Par une loi du 25 mai 1864, la fabrication des pièces de 50 et 20 centimes a été ordonnée au titre de 0,835.

Une autre loi, du 14 juillet 1866, ordonne la fabrication au même titre 0,835, des pièces de 20 centimes, de 50 centimes, de 1 franc et de 2 francs.

Une convention monétaire conclue le 23 décembre 1865, entre la *France*, la *Belgique*, la *Suisse* et l'*Ialie*, promulguée le 20 juillet 1866, et à laquelle la *Grèce* a adhéré en 1868, a reçu son exécution du 1er août 1866 au 31 décembre 1879.

Les principales dispositions de la convention de 1865 ont été confirmées par une nouvelle convention, conclue le 5 novembre 1878 entre les mêmes États, promulguée le 30 juillet 1879 et entrée en vigueur à dater du 1er janvier 1880.

Le système monétaire adopté comprend :

Des pièces d'or de 100, 50, 20, 10, 5 francs au titre de 0,900;

Des pièces d'argent de 5 francs au titre de 0,900;

Des pièces d'argent de 2 francs, 1 franc, 50 centimes, 20 centimes, au titre de 0,835.

Les pièces d'argent divisionnaires ont cours légal entre les particuliers de l'État qui les a émises jusqu'à concurrence de 50 francs pour chaque payement.

L'État qui les a mises en circulation les recevra de ses nationaux sans limitation de quantité.

Les caisses publiques de chacun des cinq pays accepteront les monnaies d'argent divisionnaires fabriquées par un ou plusieurs des autres États contractants, jusqu'à concurrence de 100 francs pour chaque payement fait auxdites caisses.

Lorsqu'il s'agit de l'évaluation des monnaies, des lingots d'or ou d'argent, il y a lieu de distinguer :

1° *La valeur intrinsèque ;*

2° *La valeur au tarif ;*

3° *La valeur commerciale.*

VALEUR INTRINSÈQUE.

On entend par valeur intrinsèque d'un lingot d'or ou d'argent la valeur du métal fin qu'il contient, en prenant pour base de l'évaluation, la valeur attribuée à ce métal dans les pièces de monnaie au titre de 0,9, c'est-à-dire, pour l'argent, 1 franc par $4^{gr},50$ d'argent pur, et, pour l'or, une valeur à poids égal 15 fois $\frac{1}{2}$ plus grande que pour l'argent.

D'après la définition primitive du franc, à laquelle correspond toujours la fabrication de la pièce de 5 francs, il faut 5 grammes au titre de 0,9 pour représenter une valeur réelle de 1 franc. Ces 5 grammes au titre de 0,9 contiennent $5 \times 0,9 = 4^{gr},50$ d'argent pur.

Ainsi $4^{gr},50$ d'argent pur valent 1 franc.
9 grammes — 2 francs.

Réciproquement, chaque gramme d'argent pur vaut $\frac{2}{9}$ de franc $= 0,2222\ldots$; chaque kilogramme d'argent pur vaut

$$\text{Fr. } \frac{2000}{9} = 222,222\ldots.$$

Puisque l'or est estimé 15,5 fois plus que l'argent, on reconnaît que 1 gramme d'or pur a pour valeur

$$\text{Fr. } \frac{2 \times 15,5}{9} = \frac{31}{9} = 3,444\ldots.$$

1 kilogramme d'or pur

$$\text{Fr. } \frac{2000 \times 15,5}{9} = \frac{31000}{9} = 3444,44\ldots.$$

D'après ces explications, pour calculer la valeur intrinsèque d'un lingot ou d'une pièce de monnaie, il suffira de déterminer d'abord le poids de métal fin, et de multiplier le nombre de grammes par $\frac{2}{9}$, s'il s'agit de l'argent;

par $\frac{31}{9}$, s'il s'agit de l'or.

Dans les monnaies d'or et les pièces de 5 francs en argent, du système monétaire de la France, de la Belgique, de la Suisse, de la Grèce et de l'Italie, la valeur intrinsèque est la même que la valeur nominale. Mais dans les pièces divisionnaires en argent, frappées au titre de 0,835, la valeur intrinsèque est inférieure à la valeur nominale.

Cherchons la *valeur intrinsèque de la pièce de* 1 *franc*.

La pièce de 1 franc pèse 5 grammes, et elle est au titre de 0,835; le poids d'argent pur qu'elle contient est donc $5 \times 0,835$ et en comptant $\frac{2}{9}$ de franc par gramme d'argent pur, nous obtenons pour

Valeur intrinsèque de la pièce de 1 *franc :*

$$\frac{5 \times 0,835 \times 2}{9} = 0,9277\ldots.$$

On trouverait de même que les *valeurs intrinsèques des autres pièces divisionnaires* sont :

Pièce de 2 francs	1,8555....
Pièce de $0^{fr},50$	0,4638....
Pièce de $0^{fr},20$	0,1855....

Dans l'étude et la fabrication des pièces de monnaie, on emploie l'expression de *taille* quand on indique combien de pièces peuvent être fabriquées avec l'unité de poids, le kilogramme, d'or ou d'argent. Ainsi on dira que la *taille* des pièces de 20 francs en or est de 155 au kilogramme.

1 kilogramme d'argent monnayé vaut 200 francs.

1 kilogramme d'or monnayé vaut $200 \times 15,5$ ou 20×155.

La *taille* des pièces de 5 francs en argent est de 40 au kilogramme.

VALEUR AU TARIF.

On entend par *valeur au tarif* des matières d'or et d'argent la valeur intrinsèque diminuée des frais de fabrication pour le monnayage.

La retenue à opérer pour frais de fabrication est, d'après le décret du 31 octobre 1879, de $6^{fr},70$ par kilogramme d'or au titre de 0.900 et de $1^{fr},50$ par kilogramme d'argent au même titre.

La retenue correspondante pour 1 kilogramme d'or pur est

$$\frac{6,70 \times 10}{9} = 7,444\ldots$$

et la valeur au tarif de 1 kilogramme d'or pur est

$$\text{Fr. } 3444,444\ldots - 7,444 = \text{Fr. } 3437$$

La retenue pour 1 kilogramme d'argent pur est

$$\frac{1,50 \times 10}{9} = 1,666\ldots$$

et la valeur au tarif de 1 kilogramme d'argent pur est

$$\text{Fr. } 222,22\ldots - 1,666\ldots = \text{Fr. } 220,555\ldots$$

ou, à moins de $\frac{1}{2}$ centime près, 220,56.

Il est utile de savoir par cœur les résultats suivants :

VALEURS DE 1 KILOGRAMME D'OR.

Titres.	Valeur intrinsèque.	Valeur au tarif.	
1 000 milliêmes	3 444,444...	3 437	or pur
900	3 100	3 093,30	or monnayé

VALEURS DE 1 KILOGRAMME D'ARGENT.

Titres.	Valeur intrinsèque.	Valeur au tarif.	
1 000 millièmes	222,222...	220,56	argent pur
900	200	198,50	argent monnayé

VALEUR COMMERCIALE DES MATIÈRES D'OR ET D'ARGENT.

Nous désignons ici par *valeur commerciale* la valeur, le prix de vente que l'on peut réaliser d'après les cours moyens du marché public. Chaque jour la *cote officielle de la Bourse* fait connaître les cours de négociation qui se sont établis d'après la loi de l'offre et de la demande. Voici, par exemple, la cote des matières d'or et d'argent, à la date du 29 novembre 1888 :

MATIÈRES D'OR, D'ARGENT, ETC.

Or en barre à 1000/1000, le kg. 3437 fr.	.4 à 5..0/00 pme
Argent en barre à 1000/1000, le kg. 218,89.	277. à 282..0/00 pte
Quadruples espagnols	80 50 à 81 ..
Quadruples colombiens et mexicains. . .	81 .. à 81 25
Piastres mexicaines.	3 82 à 3 87
Souverains anglais.	25 25 à 25 30
Banknotes.	25 26 à 25 31
Aigles des États-Unis.	25 90 à 26 ..
Guillaumes (20 mark).	24 75 à 24 85
Impériales (Russie), titre 916 millièmes. .	20 65 à 20 70
— nouv., titre 900 milliém.	40 02 à 40 10
— nouv., 1/2 imp. — .	20 .. à 20 05
Couronnes de Suède.	27 65 à 27 70

Calculer d'après la cote ci-dessus les valeurs commerciales des lingots suivants :

1er *lingot or,* *titre* 0,820 *poids total* $4^k,525$.
2e *lingot argent,* *titre* 0,672 *poids total* $12^k,425$.

Valeur du lingot d'or.

Le poids d'or pur est $4^k,525 \times 0,82 = 3^k,7105$.

La cote indique que le kilogramme d'or au titre de $\frac{1000}{1000}$ se négocie au prix de 3437 francs (terme fixe), plus une prime de 4 à 5 ‰; admettons que la prime soit $4\frac{1}{2}$ ‰. Nous calculerons d'abord la valeur de $3^k,7105$ d'or pur à raison de 3437 francs le kilogramme, et à ce premier résultat nous ajouterons $4\frac{1}{2}$ ‰.

$3437 \times 3,7105 =$ fr.	12752,99
$+ 4$ ‰	51,01
$+ \frac{1}{2}$ ‰	6,37
Valeur demandée fr.	12810,37

Valeur du lingot d'argent.

Le poids d'argent pur est $12^k,525 \times 0.672 = 8^k,4168$.

La cote indique que le kilogramme d'argent au titre $\frac{1000}{1000}$ se négocie au prix de fr. 218,89 (terme fixe), en subissant une perte de 277 à 282 ‰ ou 28 %. Nous calculerons d'abord le prix du lingot d'après le terme fixe 218,89 par kilogramme d'argent pur, et de ce premier résultat nous retrancherons 28 %.

$218,89 \times 8,4168 =$ fr.	1842,35
à déduire 28 %	515,85
Valeur demandée fr.	1326,50.

Problèmes sur les monnaies.

I. *Calculer la valeur commerciale d'une pièce de 5 leys (Roumanie) en argent, d'après le cours de* 218,89 *avec* 280 ‰ *de perte.*

La pièce de 5 *leys* a le même poids et la même composition que la pièce française de 5 francs. Sa valeur intrinsèque est 5 francs. Mais la pièce, n'ayant pas cours forcé, peut être négociée et estimée d'après la cote commerciale de l'argent.

Son poids est 25 grammes, et le titre 0,9

Le poids d'argent pur est donc $25 \times 0{,}9 = 22{,}5$.
Portons sur le poids la diminution de 28 % $\quad 6{,}3$
Poids réduit $\quad 16{,}2$.

Prix commercial de la pièce de 5 leys $0{,}21889 \times 16{,}2 =$ fr. 3,55.

Le même calcul s'applique à la pièce de 5 *dinars* (Serbie);
— 1 *peso* (Chili et Colombie);
— 1 *sol* (Pérou);
— 1 *venezolano* (Venezuela)
— 1 *gourde* (Haïti).

Ces différentes pièces, en argent au titre de 0,900, du poids de 25 grammes, ont pour valeur intrinsèque 5 francs, pour valeur au tarif $4^{fr},96$; mais leur valeur commerciale présente une dépréciation notable.

Problème. — II. *Calculer l'épaisseur de la pièce de 5 fr. en argent. On sait que le diamètre est de* 37 *millimètres; que la pièce est au titre de* $\frac{9}{10}$, *que la densité de l'argent est* 10,47 *et celle du cuivre* 8,85.

Solution. — D'après la définition même du franc, on connaît le poids de la pièce de 5 francs en argent; ce poids est de 25 grammes. D'après le titre $\frac{9}{10}$, on voit que le cuivre a un poids égal à $\frac{1}{10}$ du poids total; le poids du cuivre est donc $2^{gr},50$; et le poids de l'argent pur, $22^{gr},50$.

Le volume de la pièce est égal à la somme des volumes de l'argent et du cuivre qui la composent; le volume de chaque métal s'obtient en divisant le poids par la densité. Le volume de la pièce est donc en centimètres cubes

$$\frac{22{,}5}{10{,}47} + \frac{2{,}5}{8{,}85} = V$$

Ce volume est celui d'un cylindre dont on connaît le diamètre, 37 millimètres ou $3^c,7$ et dont la hauteur est l'inconnue que l'on cherche.

Le volume, en centimètres cubes, est le produit de la surface de base en centimètres carrés, par la hauteur ou épaisseur cherchée, en centimètres de longueur. Donc, cette épaisseur est égale au quotient du volume divisé par la surface de base. Nous venons d'obtenir l'expression du volume; celle de la base est $\pi \times 1,85^2 = \pi \times 3,4225$.

Si nous désignons par h l'épaisseur demandée, on aura

$$h = \frac{\frac{22,5}{10.47} + \frac{2,5}{8.85}}{\pi \times 3,4225}$$

ou en simplifiant

$$h = \frac{9 \times 8,85 + 10,47}{\pi \times 8,85 \times 10,47 \times 1,369}$$

En effectuant, on trouve

$$h = 0^c,226$$

ou

$$2^{mm},26$$

Systèmes monétaires des principaux États.

Le système monétaire de la *France* est en même temps celui de la *Belgique*, de la *Suisse*, de l'*Italie* et de la *Grèce*. On l'appelle quelquefois le système de l'*Union latine*.

D'autres pays ont adopté ce système, sans être engagés par aucune convention officielle avec les États précités. Ces pays sont :

La *Roumanie*, la *Serbie*, l'*Espagne*, les *républiques de l'Amérique du Sud :* la *Colombie*, l'*Equateur*, le *Venezuela*, le *Pérou*, la *Bolivie*.

La plupart des autres systèmes monétaires sont établis d'après la loi décimale.

L'*Allemagne* a pour unité de compte le *Reichsmark*, divisé en 100 *Pfennig*.

L'*Autriche-Hongrie* a pour unité de compte la *couronne*, qui se divise en 100 *hellers*.

La *Hollande* a pour unité de compte le *florin courant*, qui se divise en 100 *cents*.

Dans les *pays scandinaves*, *Danemark*, *Suède* et *Norvège*, l'unité de compte est la *krone* de 100 *ore*.

La *Russie* compte par *roubles* de 100 *kopecks*.

Le *grand-duché de Finlande* a un système analogue au système français.

Le *Portugal* a pour unité principale le *milreis*, avec des pièces divisionnaires de 500, 200, 100, 50 *reis*.

Les *États-Unis* ont pour unité de compte le *dollar*, qui se divise en 100 *cents*.

L'*Angleterre* a un système complexe : l'unité principale est la *livre sterling*, la *livre* se divise en 20 *shillings*, le *shilling* en 12 *pence*.

L'*empire ottoman* a pour unité de compte la *piastre*. Une des principales pièces de monnaie est la pièce d'or de 100 piastres ou 1 *livre turque*, qui vaut $22^{fr},78$.

La *régence de Tunis* a pour unité de compte la *piastre*, qui vaut $0^{fr},62$.

L'*Indo-Chine française* compte par *piastres de commerce* et *centièmes de piastre*. La *piastre de commerce* ou *trade-dollar* vaut $5^{fr},44$.

Valeurs intrinsèques des principales pièces de monnaies étrangères.

SOUVERAIN ANGLAIS

D'après la loi anglaise, il est taillé 1869 *souverains dans* 40 *livres troy d'or au titre monétaire* $\frac{11}{12}$.

La livre troy vaut en mesures métriques françaises $373^{gr},2419$.

40 livres troy au titre $\frac{11}{12}$ représentent en mesures françaises un poids de

$$\frac{373^{gr},2419 \times 10 \times 11}{3}$$

C'est le poids d'or pur contenu dans 1869 pièces.

Une seule pièce contient donc un nombre de grammes d'or pur représenté par

$$\frac{373{,}2419 \times 10 \times 11}{1869 \times 3}.$$

il suffit de multiplier ce nombre de grammes d'or pur par $\frac{31}{9}$, et l'on trouve pour valeur intrinsèque du souverain

$$\frac{373{,}2419 \times 10 \times 11 \times 31}{1869 \times 3 \times 9} = \text{Fr. } 25{,}2215$$

La question peut être résolue par la règle de chaîne :

Fr. x	1 souverain.
1869	40 livres troy.
1 livre troy	373,2419 grammes.
12 gr. au titre $\frac{11}{12}$	11 grammes or pur.
9 gr. or pur	31 francs.

$$x = \frac{10 \times 373{,}2419 \times 11 \times 31}{1869 \times 3 \times 9} = 25{,}2215$$

Ainsi £ 1 = Fr. 25,2215.

FLORIN DE HOLLANDE OU FLORIN COURANT

Le florin hollandais est représenté par une pièce d'argent dont le poids est 10 *grammes et le titre* 0,945.

Le florin contient donc $10 \times 0{,}945$ d'argent pur; la valeur intrinsèque s'obtient en multipliant ce dernier poids par $\frac{2}{9}$, ce qui donne $\frac{9{,}45 \times 2}{9} = 1{,}05 \times 2 = \text{Fr. } 2{,}10$.

Ainsi Fl. 1 = Fr. 2,10

COURONNE D'AUTRICHE-HONGRIE.

Par la loi du 2 *août* 1892, *l'Autriche a adopté l'étalon d'or, et, pour unité monétaire, la couronne de* 100 *hellers.*

Dans 1 kilogramme d'or fin il doit être taillé 164 pièces de 20 couronnes, ou 328 pièces de 10 couronnes.

La valeur intrinsèque de la pièce de 20 couronnes est

$$\frac{31000}{9 \times 164} = 21 \text{ francs.}$$

La couronne vaut 1 fr. 05.

N. B. — Les pièces d'or de 4 et de 8 florins continuent d'être admises en France comme pièces de 10 et de 20 francs.

REICHSMARK OU MARK DE L'EMPIRE D'ALLEMAGNE

D'après la loi du 4 *décembre* 1871, *il doit être taillé* 279 *pièces de* 10 *mark dans* 1 *kilogramme d'or pur.*

Une pièce de 10 mark contient un poids d'or pur représenté en grammes par $\frac{1000}{279}$. Le produit de ce nombre par $\frac{31}{9}$ donnera la valeur intrinsèque en monnaie française de la pièce de 10 mark. Cette valeur est $\frac{1000 \times 31}{279 \times 9}$ ou par simplification à cause de la relation $279 = 31 \times 9$

$$\frac{1000}{81} = 12^{\text{fr}},345679$$

Les pièces effectives en or sont les pièces de 20, 10, 5 reichsmark.

Quoique le mark (or) ne soit pas représenté par une monnaie réelle, il est la base du système monétaire allemand, il est l'unité de compte.

Ainsi Rm 1 = Fr. 1,2345679.

Remarques. Le nombre de francs qui représente la valeur intrinsèque du reichsmark est écrit avec les chiffres successifs dans leur ordre naturel de 1 jusqu'à 9, sauf le 8 qui manque à la liste.

Il est encore bon de noter la relation très simple qui existe entre les valeurs du mark (or) d'Allemagne, et du florin (argent) d'Autriche. La valeur intrinsèque de la pièce de 10 mark étant $\frac{1000}{81}$, le reichsmark a pour valeur $\frac{100}{81}$, tandis que le calcul de la valeur du florin (argent) nous donnait $\frac{200}{81}$.

Le florin (argent) d'Autriche avait donc une valeur double de celle du mark (or) d'Allemagne. L'Autriche a modifié son système monétaire.

Depuis la réforme de la Valuta, l'Autriche-Hongrie frappe des pièces de 10 et de 20 couronnes en or, valant $10^{fr},50$ et 21 francs.

Krona des États scandinaves (Danemark, Suède, Norwège).

D'après les lois monétaires du 23 *mai et du* 30 *mai* 1873, *il est taillé* 248 *pièces de* 10 *couronnes* (*Kronen, Kronor, ou Kroner*) *dans* 1 *kilogramme d'or fin.*

La valeur de la pièce de 10 couronnes est donc

$$\frac{1000 \times 31}{248 \times 9} = 13,888\ldots\ldots$$

Et la valeur de l'unité de compte est

$$\textit{Krona}\ 1 = \textit{Fr.}\ 1,3888\ldots\ldots$$

Rouble de Russie.

Le rouble, unité de compte, est représenté par une pièce d'argent dont le poids est 20 *grammes et le titre de* 0,9.

La valeur intrinsèque du rouble argent est donc

$$\frac{20 \times 0,9 \times 2}{9} = \text{Fr. } 4$$

mais la valeur au change du rouble argent serait à peine la moitié de sa valeur intrinsèque.

N. B. — Il est actuellement frappé, en Russie, des pièces d'or de 15 roubles et 7 roubles 50 kopecks qui valent exactement 40 francs et 20 francs. La pièce en or de 7 roubles 50 kopecks est identique pour le poids, le titre et la valeur, à notre pièce de 20 francs, la pièce de 15 roubles correspond à notre ancienne pièce de 40 francs.

Ces pièces russes sont admises en France.

Milreis du Portugal.

Le milreis, unité de compte en Portugal, est représenté par une pièce d'or dont le poids est $1^{gr},774$ *et le titre* $\frac{11}{12}$.

La valeur intrinsèque du milreis est donc

$$\frac{1,774 \times 11 \times 31}{12 \times 9} = \text{Fr. } 5,60$$

Ainsi

$$\text{Mlr } 1 = \text{Fr. } 5,60$$

Milreis du Brésil.

Il est frappé, au Brésil, des pièces d'or de 20, 10, 5 milreis. L'unité de compte est le milreis, $\frac{1}{10}$ *de la pièce de 10 milreis en or.*

La pièce de 10 milreis a pour poids $8^{gr},965$ *et pour titre* 0,917.

Sa valeur intrinsèque est donc

$$\frac{8,965 \times 0,917 \times 31}{9} = \text{Fr. } 28,316$$

Et 1 milreis de Brésil vaut Fr. 2,8316, c'est-à-dire un peu plus de la moitié du milreis portugais.

Dollar des États-Unis d'Amérique.

La pièce de \$ 1 en or a pour poids $1^{gr},6718$ *et pour titre* 0,9.

Sa valeur intrinsèque est donc

$$\frac{1,6718 \times 0,9 \times 31}{9} = 0,16718 \times 31 = \text{Fr. } 5,1825$$

Ainsi

$$\$\ 1 = \text{Fr. } 5,1825$$

PRINCIPALES MESURES ÉTRANGÈRES

ANGLETERRE.

Mesures de longueur.

L'unité est le *yard*, qui vaut $0^{m},914$.

Le yard se divise en trois pieds (3 feet).

Le pied (foot) se divise en 12 pouces (12 inches).

Les distances itinéraires s'évaluent en *miles*.

Le *mile* vaut 1760 yards, soit 1609 mètres environ.

Mesures de superficie.

L'unité est le *yard carré* (*square yard*) qui vaut 0^{mq}, 8361.

Pour les surfaces agraires, l'unité ordinaire est l'*acre*, qui vaut 40 ares environ.

Mesures de capacité.

Les principales mesures de capacité sont :

Le *gallon impérial*, qui vaut $4^{l},54$.

Le *bushel*, qui vaut 8 gallons ou $36^{l},34$.

Le *quarter*, qui vaut 8 bushels ou $2^{hl},91$.

Poids.

Il y a deux principales unités de poids : la *livre troy* et la *livre avoirdupois*.

La *livre troy*, employée pour les matières précieuses en or, argent, platine, et pour les monnaies, vaut en mesures françaises $373^{gr},2419$.

La *livre troy* se divise en 12 *ounces*, et l'ounce en 20 *pennyweights*.

La *livre avoirdupois*, employée dans le commerce des matières brutes, des denrées ordinaires, des métaux communs, vaut $453^{gr},5926$.

La *livre avoirdupois* se divise en 16 *ounces*, et l'ounce en 16 *drams*.

Pour les fortes pesées, on prend pour unité le quintal de 112 livres anglaises valant $50^k,8$ et la *ton* de 20 quintaux valant 1016 kilogrammes.

RUSSIE.

L'unité de longueur est le *pied anglais* ou *russe*, qui vaut $0^m,30479$; pour les distances itinéraires, on compte par *werst*, de 1067 mètres.

L'unité de poids de commerce est la *livre dorée*, qui vaut $409^{gr},5174$, les fortes pesées s'évaluent le plus souvent en *pouds*.

Le *poud* vaut 40 livres russes ou 16381 grammes.

HOLLANDE.

La plupart des mesures du système métrique français sont adoptées en Hollande, ainsi que dans les pays voisins.

Citons seulement comme unité de longueur le *pied du Rhin*, qui vaut $0^m,31382$, et le *pied d'Amsterdam*, qui vaut $0^m,28306$. L'unité de poids est la *livre d'Amsterdam*, qui vaut $494^{gr},090$, ou la livre troye de Hollande, qui vaut $492^{gr},168$.

SUÈDE ET NORWÈGE.

L'unité de longueur, en *Suède*, est le *pied suédois*, qui vaut $0^m,2969$ il se divise en 10 pouces; le pouce, en 10 lignes.

Les unités de surface sont les carrés construits sur les unités de longueur.

Les unités de volume sont les cubes construits sur les unités de longueur.

L'unité de poids est la livre dite *skalpund*, qui vaut $423^{gr},538$.

La *Norwège* a pour unité de longueur le *pied norwégien* de $0^m,3137$. Depuis 1879, le système métrique décimal est obligatoire dans les établissements publics, les douanes, les marchés, etc.

ALLEMAGNE.

Zusammenstellung der abgekürzten Mass-und Gewichtsbezeichnungen.

A. *Längenmasse.*

Kilometer	km
Meter.	m
Centimeter.	cm
Millimeter	mm

B. *Flächenmasse.*

Quadratkilometer . . .	qkm
Hectar	ha
Ar.	a
Quadratmeter	qm
Quadratcentimeter. . .	qcm
Quadratmillimeter. . .	qmm

C. *Körpermasse.*

Kubikmeter	cbm
Hectoliter	hl
Liter	l
Kubikcentimeter	ccm
Kubikmillimeter	cmm

D. *Gewichte.*

Tonne	t
Kilogramm.	kg
Gramm.	g
Milligramm.	mg

1. Den Buchstaben werden Schlusspunkte nicht beigefügt.

2. Die Buchstaben werden an das Ende der vollständigen Zahlenausdrücke-nicht über das Decimalkomma derselben-gesetzt, also 5,37m. nicht $5^{m},37$ und nicht $5^{m},37^{cm}$.

3. Zur Trennung der Einerstellen von den Decimalstellen dient das Komma-nicht der Punkt. Sonst ist das Komma bei Mass-und Gewichtszahlen nicht anzuwenden, insbesondere nicht zur Abtheilung mehrstelliger Zahlenausdrücke. Solche Abtheilung ist durch Anordnung der Zahlen in Gruppen zu je drei Ziffern, vom Komma aus gerechnet, mit angemessenem Zwischenraum zwischen den Gruppen zu bewirken.

NOMBRES COMPLEXES

Les *nombres complexes* sont des nombres concrets exprimant la mesure d'une grandeur au moyen d'unités différentes qui ne se succèdent pas suivant l'ordre décimal, c'est-à-dire qui ne sont pas telles que les plus petites expriment des dixièmes, centièmes, etc., des plus grandes.

La mesure du temps en années, mois, jours, heures, minutes, secondes, donne lieu à des nombres complexes.

La mesure des arcs et des angles, en géométrie, s'exprime aussi par des nombres complexes de degrés, minutes, secondes.

Les mesures anglaises sont d'ordres complexes, et se prêtent moins facilement aux calculs que les unités du système métrique français, qui ont entre elles des rapports décimaux.

ADDITION ET SOUSTRACTION DES NOMBRES COMPLEXES.

Pour l'addition, on dispose les nombres complexes les uns au-dessous des autres, en ayant soin de placer dans les mêmes colonnes verticales les unités de même espèce. On commence l'opération par les plus petites unités. Si le total de la première colonne donne un résultat inférieur à l'unité de l'espèce supérieure, on l'écrit tel qu'il a été obtenu. S'il dépasse la valeur de l'unité supérieure, on extrait les unités de l'ordre supérieur qu'il contient, et l'on inscrit seulement le reste dans la colonne des unités de l'ordre sur lequel on vient d'opérer.

Pour la soustraction, il peut se présenter deux cas. Le premier, le plus simple, est celui où les unités des diverses espèces se trouvent toutes plus petites dans le nombre à soustraire que dans le nombre dont il faut le retrancher.

Dans ce premier cas, la soustraction s'effectue, sans aucune difficulté, colonne par colonne. Dans le deuxième cas, un ou plusieurs des termes du nombre à soustraire se trouvent plus grands que ceux qui leur correspondent dans la même colonne. On ajoute alors au terme de la première ligne le nombre d'unités nécessaire pour former une unité de l'espèce immédiatement supérieure, et par compensation on ajoute une unité de cette espèce au terme de la deuxième ligne dans la colonne suivante vers la gauche.

Exercices sur la mesure du temps.

De la somme des nombres complexes suivants :

15 jours	8 heures	11 minutes	34 secondes
9	12	23	47
25	18	48	56
50 jours	15 heures	24 minutes	17 secondes

Soustraire la somme des nombres :

	3 jours	19 heures	45 minutes	38 secondes
	7	4	15	20
	8	22	43	54
	19 jours	22 heures	44 minutes	52 secondes
Résultat :	30 jours	16 heures	39 minutes	25 secondes

Dans la 1re addition, on arrive dans la colonne des dizaines de secondes au total 13, on retranche 12, on inscrit seulement 1 et l'on reporte 2 à la colonne des minutes, parce que 12 dizaines de secondes valent 2 minutes. On procède d'une façon analogue pour passer des minutes aux heures. Du total des heures on extrait 24, et en général un multiple de 24 quand il y a lieu.

Exercices sur l'addition de valeurs anglaises.

THE LONDON INSURANCE CORPORATION.

Established 1720.

QUINQUENNIAL VALUATION, 31ST DECEMBER 1870.

BALANCE SHEET, 31st December 1870.

LIABILITIES.

	£	s.	d.	£	s.	d.
Shareholders' Capital.				448,275	0	0
General Reserve Fund				270,592	2	3
Life Insurance Funds.				1,378,822	14	5
Fire Fund.				118,249	12	8
Marine Fund.				233,061	4	8
Profit and Loss				107,499	17	0
				2,556,500	11	0
Claims under Life Policies admitted but not yet paid.	32,128	2	0			
Outstanding Fire Losses. . .	661	14	4			
Do. Marine do . . .	2,998	10	2			
Do. Annuities. . . .	170	2	4			
Do. Abatement of Premium. .	7	9	10			
Do. Dividends to Shareholders	197	10	0			
Do. Income Tax . .	210	10	4			
Clerks' Savings' Fund. . . .	2,164	11	7			
				38,538	10	7
				2,595,039	1	7

ASSETS.

		£	s.	d.
Mortgages on property within the United Kingdom.		1,460,920	13	4
Mortgages on property out of the United Kingdom		Nil.		
Loans on the Corporation's Life Policies. .		35,128	0	5
Investments, viz. : —				
In British Government Securities.		447,241	10	10
» Indian and Colonial »		238,321	18	4
» Foreign do., viz. : Turkish Bonds 4 per Cent. Guaranteed.		24,800	0	0
» Railway and other Debentures. . . .		253,700	0	0
» Do. Shares.		Nil.		
» House Property		Nil.		
» Reversions.		16,861	17	7
» Government Life Annuities (£1,981. 3*s*. per annum).		8,307	0	0
Loans upon personal security.		Nil.		
Agents' balances.		28,460	3	10
Outstanding Premiums		16,166	5	9
Do. Interest		3,858	4	0
Cash, viz. : —				
On deposit	40,000 0 0			
In hand and on current account.	14,378 3 4			
		54,378	3	4
Bills receivable.		6,688	11	8
Policy Stamps (balance of account).		206	12	6
		2,595,039	1	7

Exercices sur l'évaluation des angles.

Problème I. — *Dans un quadrilatère* ABCD, *l'angle* B *surpasse l'angle* A *de* $4^\circ 48' 49''$;

L'angle C *est inférieur à* B *de* $2^\circ 58' 47''$;

L'angle C est égal à la demi-somme des angles B *et* C.

On demande la valeur de chacun des quatre angles du quadrilatère.

Soit x le nombre de degrés de l'angle A.

$$\begin{aligned} A &= x \\ B &= x + 4^\circ 48' 49'' \\ C &= x + 1^\circ 50' \ 2'' \\ D &= x + 3^\circ 19' 25'',5 \\ \hline 360^\circ &= 4x + 9^\circ 58' 16'',5 \end{aligned}$$

d'où

$$x = \frac{360^\circ - (9^\circ 58' 16'',5)}{4}$$

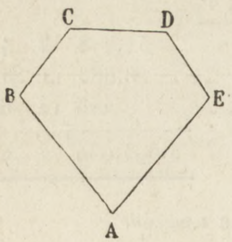
Soit $$x = 87^\circ 30' 25''875$$

Vérification :

$$\begin{aligned} A &= 87^\circ 30' 25'',875 \\ B &= 92^\circ 19' 14'',875 \\ C &= 89^\circ 20' 27'',875 \\ D &= 90^\circ 49' 51'', 375 \end{aligned}$$

Total $A + B + C + D = 360^\circ$

Problème II. — *Les angles* A,B,C,D,E *d'un pentagone convexe sont tels que chacun surpasse le précédent de* $1^\circ 57' 55''$.



On demande la valeur de chacun des cinq angles.

1re Solution. — D'après un théorème démontré en géométrie, la somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux droits que le polygone a de côtés, moins deux. La somme des angles du pentagone vaut donc 2 dr. $\times (5-2) = 6$ dr. ou, en degrés, $90^\circ \times 6 = 540^\circ$.

Si nous désignons par x le nombre qui exprime la graduation du plus petit des cinq angles, A, nous pourrons, d'après l'énoncé, poser les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A &= x \\ B &= x + 1\,(1^\circ\,57'\,55'') \\ C &= x + 2\,(1^\circ\,57'\,55'') \\ D &= x + 3\,(1^\circ\,57'\,55'') \\ E &= x + 4\,(1^\circ\,57'\,55'') \end{aligned}$$

En additionnant on trouve

$$A + B + C + D + E = 5x + 10\,(1^\circ\,57'\,55'').$$

Mais la somme des cinq angles vaut 540°. On peut donc écrire l'égalité

$$5x + 10\,(1^\circ\,57'\,55') = 540$$

ou, en simplifiant,

$$x + 2.\,(1^\circ\,57'\,55'') = 108^\circ$$

et, si l'on retranche des deux membres de cette égalité la même quantité $2.\,(1^\circ\,57'\,55'')$, on obtient

$$x = 108^\circ - 2.(1^\circ\,57'\,55'')$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$x = 104^\circ\,4'\,10''.$$

C'est la valeur du plus petit des cinq angles. On trouve aisément les autres en ajoutant successivement $1^\circ\,57'\,55''$ à chaque résultat obtenu.

2e Solution. — Prenons pour inconnue la valeur y du 3e angle, le 2e aura pour valeur $y - (1^\circ\,57'\,55'')$;

Le 4e $y + (1^\circ\,57'\,55'')$.

Le 2e et le 4e ensemble valent $2y$, le double du 3e.

Le 1er est égal au second diminué de $1^\circ\,57'\,55''$.

Le 5e est égal au 4e augmenté de $1^\circ\,57'\,55''$.

Le 1er et le 5e, ensemble, valent donc autant que le 2e et le 4e ensemble, soit $2y$.

La somme des cinq angles est donc égale à $5y$, et l'on a

$$5y = 540°$$

d'où

$$y = \frac{540°}{5} = 108°$$

L'un des angles étant connu, on trouve aisément tous les autres.

A	104° 4′ 10″
B	106° 2′ 5″
C	108°
D	109° 57′ 55″
E	111° 55′ 50″
TOTAL	540°

MULTIPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES.

La multiplication d'un nombre complexe de degrés, minutes, secondes, par un nombre entier, peut s'effectuer de diverses manières qu'il est utile de connaître afin d'appliquer à chaque cas particulier le procédé le plus expéditif.

Si le multiplicateur est un nombre assez petit, un nombre d'un seul chiffre par exemple, on peut multiplier les diverses parties du multiplicande, en commençant par les unités de l'ordre inférieur, les secondes ; on extrait immédiatement du produit des secondes et des minutes les multiples de 60, c'est-à-dire du nombre des dizaines, les multiples de 6, pour reporter la retenue correspondante au compte des minutes et des degrés.

Ex. : Multiplier 53° 28′ 47″ par 6
Produit 320° 52′ 42″

Le produit de 47″ par 6 donne 282″ ; après avoir écrit le 2 au rang des unités, on arrive à 28 dizaines, on retranche 24 de 28, reste 4, c'est le chiffre des dizaines du nombre des secondes, et pour les 24 dizaines de seconde on compte comme retenue 4 à reporter au produit des minutes.

On opère d'une manière analogue pour réduire le produit des minutes à un nombre inférieur à 60 et pour reporter la retenue au produit des degrés.

Preuve par 9. — On peut imaginer que les nombres de degrés et de minutes soient convertis en secondes ; il suffirait de multiplier le nombre des degrés par 3600, et le nombre des minutes par 60.

Le multiplicande équivaut à $(53 \times 3600 + 28 \times 60 + 47'')$ secondes.

Reste de la division par 9 $\quad 0 + 1 \times 6 + 2 = 8$.

Le multiplicateur étant 6, le produit donnera le même reste à 9 que le produit $8 \times 6 = 48$, le reste à 9 doit être 3.

Le produit équivaut à $(320 \times 3600 + 52 \times 60 + 42)$ secondes.

Reste à 9 $\quad 0. + 7 \times 6 + 6$, ou finalement 3.

La preuve par 9 réussit.

On voit qu'à cause du facteur 3600, le nombre de degrés converti en secondes donnera toujours zéro pour reste à 9, de sorte que le nombre des degrés échappe en quelque sorte au contrôle.

Lorsque le multiplicateur est un nombre de plusieurs chiffres, il est préférable d'employer la méthode des parties aliquotes ; on fait d'abord le produit des degrés par le facteur donné, puis on opère sur les minutes et les secondes en les décomposant en parties aliquotes de 60, ou des nombres déjà employés.

Ex. : *Produit de* $53° \, 28' \, 47''$

par	294		
	15582		
20′	98		
6	29	24	
2	9	48	
40″	3	16	
4		19	36
2		9	48
1		4	54
Produit	15723°	2′	18″

Explications. — Le produit de 53 par 294 se calcule aisément, sans détail de produits partiels, il exprime des degrés.

Le nombre de minutes, 28, se décompose en 20, 6 et 2.

Pour 20′, on compte $\frac{1}{3}$ de degré, ce qui donne $\frac{1}{3} \times 294 = 98$.

Pour 6′, $\frac{1}{10}$ de degré.

Pour 2′ on prend le tiers du produit partiel précédent.

Le nombre des secondes 47 se divise en $40 + 4 + 2 + 1$.

Le nombre 40 est le tiers du nombre 120, nombre de secondes équivalent à 2′.

On prend le tiers du produit précédent.

Pour 4″, le dixième du produit correspondant à 40 ; pour 2, la moitié du précédent, et pour 1, la moitié du produit correspondant à 2.

Autre exemple :

Multiplier	£ 223.	13.	8
par	247		
223×247	55 081		
10 sh. $= £\,\frac{1}{2}$	123	10	
2 $= £\,\frac{1}{10}$	24	14	
1 $= \frac{1}{2}\,\frac{1}{10}$	12	7	
$6^d = \frac{1}{2}$ shilling	6	3	6
2 $= \frac{1}{3}$ de 6	2	1	2
Produit	£ 55 249.	15.	8

DÉTAIL DU CALCUL.

Le produit de 223 par 247 peut se faire, sans écrire de produits partiels, en multipliant d'abord 3 par 7, pour trouver les unités ; puis, conservant la retenue, les produits 22×7 et 24×3 pour trouver les dizaines; et enfin 22 par 24, pour trouver les centaines, en tenant compte de la retenue.

Le nombre 13 des shillings a été décomposé en 10, 2, 1.

10 shillings valent $\frac{1}{2}$ livre, 247 fois 10 shillings valent 247 fois $\frac{1}{2}$ livre, ou la moitié de 247 livres, ce qui donne £ 123. 10 shillings.

247 fois 2 shillings valent 247 fois $\frac{1}{10}$ de £, ou $\frac{1}{10}$ de £ 247, soit £ 24.. 14 (le nombre des livres, 24, est le nombre des dizaines de 247, le nombre 14, des shillings, est le double du nombre 7 des unités de 247).

247 fois 1 shilling valent la moitié du produit précédent.

247 fois 6 pence valent la moitié de 247 fois 12 pence ou de 247 fois 1 shilling; enfin 247 fois 2 pence valent le tiers de 247 fois 6 pence.

PREUVE PAR 9.

$$[223 \times 240 + 13 \times 12 + 8] \times 247 = 55249 \times 240 + 15 \times 12 + 8$$

Cette égalité est obtenue en convertissant toutes les unités monétaires en pence.

$$\text{Restes à } 9 \quad [7 \times 6 + 4 \times 3 + 8] \times 4 \qquad 7 \times 6 + 6 \times 3 + 8$$
$$8 \times 4 \qquad 6 + 8$$
$$5 = 5$$

Problème I. — *Un commerçant anglais a acheté* 240 *yards de dentelles à raison de* £ 5. 19. 11 *le yard, Il revend*

60 *yards*	1 *f.*	*à*	£ 6.	2.	10
80 *y.*	2 *f.*	*à*	£ 6.	10.	9
25 *y.*	2 *f.*	*à*	£ 6.	18.	9
et le reste		*à*	£ 6.	19.	6

On demande le produit de chaque vente et le bénéfice total.

Calcul du prix d'achat.

	£		
	5.	19.	11
	240		
	1 200		
10	120		
5	60		
4	48		
8	8		
2	2		
1	1		
	£ 1 439 prix d'achat		

On obtiendrait plus rapidement le résultat, en remarquant que le prix du yard est égal à £ 6 moins 1 penny, le produit par 240 est donc £ 6×240 moins 240 pence $=$ £ $(1\,440 - 1) =$ £ 1 439

1re VENTE.

	£		
	6.	2.	10
	60	1	
	360		
	6		
8	2		
2	0	10	
1 f. $= \frac{1}{3}$ yard	2	0	$11\frac{1}{3}$
£	370	10	$11\frac{1}{3}$

2e VENTE.

£		
6.	10.	9
80y	2f	
480		
40		
3		
2	3	7
2	3	7
£ 527	7	2

3e VENTE.

	£	6.	18.	9
		25^y	2^f	
		150		
10		12	10	
4		5		
4		5		
6		0	12	6
3		0	6	3
		2	6	3
		2	6	3
	£	178	1	3

QUANTITÉS VENDUES.

	60^y	1^f
	80	2
	25	2
Total	166^y	2^f
Reste à vendre	73^y	1^f
	240^y	

4e VENTE.

	£	6.	19	6
		73^y	1^f	
		438		
10		36	10	
5		18	5	
4		14	12	
6		1	16	6
		2	6	6
	£	511	10	

RÉCAPITULATION DES PRODUITS DES VENTES.

1re vente	£	370.	10.	1. $\frac{1}{3}$
2e »		527	7	2
3e »		178	1	3
4e »		511	10	
Total	£	1587.	9.	$4\frac{1}{3}$
Achat	£	1439		
Bénéfice	£	148.	9.	$4\frac{1}{3}$

Problème II. — *Le yard de dentelle coûtant* £ 3. 17. 6, *combien coûteront* $37^y\ 2^f\ 8^{inches}$?

	£	3.	17.	6
		37^y	2^f	8
		111		
10		18	10	
5		9	5	
2		3	14	
6^d			18	6
1		1	5	10
1^f		1	5	10
$6^{inches} = \frac{1}{2}f$			12	11
$2 \quad = \frac{1}{3}.6$			4	$3\frac{2}{3}$
	£	146	16	$4\frac{2}{3}$

N. B. — Le nombre complexe £ 3. 17. 6 peut s'exprimer exactement dans le système décimal, £ 3,875 ; on peut trouver le prix d'achat en multipliant £ 3,875 par $37+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}$

$$
\begin{array}{lr}
£\ 3{,}875 \times 37 = £ & 143{,}375 \\
3{,}875 \times \frac{1}{3} & 1{,}291\frac{2}{3} \\
 & 1{,}291\frac{2}{3} \\
3{,}875 \times \frac{1}{9} & 0{,}430\frac{5}{9} \\
 & 0{,}430\frac{5}{9} \\
\hline
 & £\ 146{,}819\frac{4}{9} \\
 & £\ 146.\ 16.\ 4\frac{2}{3}
\end{array}
$$

Mais lorsque le nombre des pence ne s'exprime pas exactement en fraction décimale de livres, la méthode des parties aliquotes, en conservant les nombres complexes, est préférable.

Problème III. — *Un commerçant anglais achète* 250^{lb} *d'une marchandise à raison de* £ 1. 18. 10 *la livre avoirdupois. Il revend :*

50^{lb}	à	£ 1.	19.	11
175^{lb}	à	£ 2	1	8
et le reste	à	£ 2.	2.	10

Quel est le prix d'achat? Quel est le produit de chaque vente? Quel est son bénéfice?

Calcul du prix d'achat.

	£ 1	18	10	
	250			
	250			
10	125			
4	50			
4	50			
8	8	6	8	
2	2	1	8	
	£ 485	8	4	prix d'achat

1re VENTE.

Le prix de l'unité, £ 1. 19. 11 équivaut à £ 2 moins 1 penny, 50 livres avoirdupois donneront £ 2×50, moins 50 pence
ou £ 100 moins 4 shillings 2 pence,
ou encore £ 99. 15 10

2e VENTE.

£	2.	1.	8
	175		
	350		
	8	15	
	4	7	6
	1	9	2
£	364.	11.	8

3e VENTE.

	£	2.	2.	10
		25		
		50		
		2	10	
8		0	16	8
2		0	4	2
	£	53	10	10

RÉCAPITULATION.

1re VENTE.	£	99.	15.	10
2e »		364	11.	8
3e »		53	10	10
Produit des ventes	£	517.	18.	4
Achat	£	485.	8.	4
Bénéfice	£	32.	10	»

Exercices de calcul mental.

D. *Le yard d'étoffe coûtant* $12^{sh},6^{d}$, *combien coûteront* 25 *yards?*

R. £ 15. 12. 6

$12^{sh}.6^{d} = £\ 0{,}625 \quad £\ 0{,}625 \times 25 = £\ 15{,}625$ ou £ 15.12.6

D. *Un livre se vend* $2^{sh},6^{d}$. *Quel sera le produit de la vente de* 2000 *exemplaires?*

R. £ 250

D. *Exprimer en nombres complexes le tiers, les* $\frac{2}{3}$ *de la livre sterling.*

R. Le tiers est $6^{sh}.8^{d}$

Les $\frac{2}{3}$ $\quad 13^{sh}.4^{d}$

Problème IV. — $59^{lb}.14^{oz}.6^{dr}$ *de marchandise ont coûté* £ 1. *Quel poids doit-on obtenir pour la somme de* £ 3. 15. 10?

		59^{lb}	14^{oz}	6^{dr}	
	£	3	15	10	
$59^{lb} \times 3$		177			
$14^{oz} \times 3$	8	1	8		
	4	0	12		
	2	0	6		
$6^{dr} \times 3$	4	0	0	12	
	2	0	0	6	
Pour 15^{sh}	10	29	15	3	moitié du multiplicande.
	5	14	15	$9\frac{1}{2}$	moitié du résultat précédᵗ
Pour 10^{d}		2	7	$14\frac{11}{12}$,	$\frac{1}{6}$ du résultat précédent.
Poids demandé		227^{lb}	1^{oz}	$13^{dr}\frac{5}{12}$	

Exercices de calcul mental.

D. *Si la lb. coûte 15 sh. 6 pence combien coûteront 56 lb.?*

R. £ 43. 8^{sh}

15 sh. valent $\frac{3}{4}$ de livre, 6 pence font $\frac{1}{2}$ shilling.

$$56 \times \frac{3}{4} = 42 \qquad 56 \times \frac{1}{2} = 28$$

D. *Si l'once coûte 4 pence, combien coûteront 9 lb.?*

R. £ 2. 8^{sh}

$9^{lb} = 144^{oz}$ 4 pence $\times$ 144 = 48 $\times$ 12 pence = 48 sh. = £ 2. 8

D. *Pour 1 shilling on a 12^{oz}, combien devra-t-on avoir pour £ 3?*

R. 45^{lb}

12 oz $= \frac{3}{4}$ de livre avoirdupois $\frac{3}{4} \times 60 = 45$.

DIVISION DES NOMBRES COMPLEXES.

I. 73 *yards d'étoffe ont coûté* £ 137. 18. 10. *Quel est le prix du yard?*

137. 18. 10	73
64 × 20	£ 1. 17. $9\frac{37}{73}$
280 shillings	
+ 18	
1298	
568	
57 × 12	
684 pence	
+ 10	
694	
37	

R. Le prix du yard est £ 1. 17. $9\frac{37}{73}$

II. *Calculer le rapport de* $127^{lb}\ 13^{oz}\ 15^{dr}$ *à* $39^{lb}\ 8^{oz}\ 12^{dr}$.

L'once vaut $\frac{1}{16}$ de livre de poids, le dram vaut $\frac{1}{256}$ de la même unité. Le rapport demandé est donc égal aux rapports suivants :

$$\frac{127+\frac{13}{16}+\frac{15}{256}}{39+\frac{8}{16}+\frac{12}{256}}=\frac{127\times256+13\times16+15}{39\times256+8\times16+12}$$

ou

$$\frac{32735}{10124}=3\frac{2363}{10124}$$

INTÉRÊTS SIMPLES

L'*intérêt* est le bénéfice provenant d'un *capital placé ou prêté*. C'est, comme on l'a dit par assimilation, le *loyer de l'argent*.

Le *taux d'intérêt* est le nombre qui exprime le rapport entre l'intérêt, correspondant à l'année ou à une autre unité du temps, et le capital placé. Ce rapport s'évalue habituellement en tant pour cent. On dit, par exemple, que le taux est de 4 pour 100, 5 pour 100 par an, pour indiquer que l'intérêt doit être au capital dans le rapport de 4 à 100, de 5 à 100, c'est-à-dire que l'intérêt doit être les 4 centièmes, les 5 centièmes du capital, pour un an. On peut dire de même que le taux d'intérêt est de 2 pour 100, $2\frac{1}{2}$ pour 100 par semestre; pour indiquer que l'intérêt semestriel doit être les 2 centièmes, les 2 centièmes et demi du capital. Nous ferons voir dans la suite que, pour les placements à intérêts simples, il est indifférent de stipuler le taux de 4 °/₀ par an, ou de 2 °/₀ par semestre, ou 1 °/₀ pour trimestre, etc., mais qu'il n'en serait pas de même dans les placements à intérêts composés, pour lesquels l'intérêt s'ajoute au capital à la fin de chaque période de temps convenue.

Au lieu d'exprimer le taux en tant pour 100, soit par des rapports tels que $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{100}$ ayant pour dénominateur fixe 100, on peut souvent l'exprimer par des fractions simples. Ainsi $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$; au taux de 5 °/₀ par an, l'intérêt annuel est $\frac{1}{20}$ du capital. On exprimait autrefois ce rapport simplifié en disant que le placement ou le prêt était fait au *denier* 20.

De même
$$\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$
$$\frac{2,5}{100} = \frac{1}{40}$$
$$\frac{1,25}{100} = \frac{1}{80}$$

Les taux de 4 %, $2\frac{1}{2}$ %, $1\frac{1}{4}$ % correspondent à des placements faits au *denier* 25, au *denier* 40, au *denier* 80. Tout en attribuant au taux la signification d'un rapport, d'un nombre abstrait tel que $\frac{4}{100}$, nous pouvons observer que ce nombre, cette fraction, prise dans le sens concret de fraction de l'unité monétaire, représente l'intérêt produit par l'unité du capital pendant l'unité de temps; c'est souvent la signification attribuée au taux dans les questions d'intérêts composés. Mais dans les questions d'intérêts simples, on entend le plus souvent par le *taux*, non le rapport $\frac{t}{100}$ même, mais simplement le numérateur t de ce rapport dont le dénominateur est 100. Ainsi entendu, le taux représente, comme nombre concret, l'intérêt produit par le capital 100, comme $\frac{t}{100}$ représente l'intérêt du capital 1. Ainsi à 5 %, le nombre 5 est l'intérêt de 100 unités de capital; la fraction $\frac{5}{100}$ ou 0,05 représente l'intérêt de 1 unité. Des placements au taux de 5 % peuvent être faits dans des pays différents, aussi bien en Angleterre où l'on compte par livres sterling qu'en France où l'on compte par francs et centimes. Au taux dit de 5 pour 100 par an, en France, 100 francs produisent 5 francs d'intérêt en 1 an; en Angleterre, 100 £ produisent 5 £ d'intérêt en 1 an.

Les intérêts eux-mêmes 5 francs, et 5 £, sont bien loin d'être égaux. Cependant le taux est le même. En comparant les deux placements, on reconnaît qu'il n'y a égalité ni entre les capitaux, ni entre les intérêts, mais l'égalité existe dans les *rapports* des intérêts aux capitaux. Le rapport des 5 £ à 100 £ est le même que le rapport de 5 fr. à 100 fr. Il s'exprime par le nombre abstrait $\frac{5}{100}$. C'est bien ce *rapport* qui exprime le *taux*.

Ces remarques ont leur utilité; elles ont pour but de montrer la nécessité de bien définir les quantités représentées par des nombres ou des lettres dans les formules générales; et de rappeler que les règles établies par la considération de rapports indépendants du choix de l'unité s'appliquent à toutes les questions du même genre, malgré les différences des unités adoptées. Ainsi les formules générales que nous nous proposons d'établir conviendront aux calculs d'intérêts, quelle que soit l'unité monétaire, *franc*, ou *livre sterling*, ou *reichmark*, etc.

Pour établir les *formules générales exprimant les relations entre le capital*, *le taux*, *le temps et l'intérêt*, nous prendrons successivement pour unité de temps l'*année*, le *mois*, la *semaine*, le *jour*.

1° *Le temps est exprimé en années.*

Nous désignerons par a le *capital* portant intérêts.

Par t, ce que l'on nomme communément le *taux*, c'est-à-dire l'intérêt rapporté par 100 unités de capital.

Par n, le nombre d'années qui mesure la *durée* du placement.

Par i, l'intérêt correspondant.

Le nombre t exprimant l'intérêt produit par le capital 100, l'intérêt produit par le capital 1 sera 100 fois plus petit, c'est-à-dire $\frac{t}{100}$ et l'intérêt correspondant à un nombre quelconque a d'unités de capital sera $\frac{t}{100} \times a$ ou $\frac{a \times t}{100}$.

Telle est la formule de l'*intérêt annuel*.

On l'obtient encore immédiatement en observant que le taux énoncé fait connaître la fraction $\frac{t}{100}$ du capital qu'il faut évaluer pour avoir l'intérêt.

Si le nombre d'années n'est pas égal à 1, on trouve facilement ce qu'il faut faire en se fondant sur la convention admise dans les placements à intérêts simples, que les intérêts produits pendant des intervalles de temps égaux sont égaux, et par suite les intérêts varient proportionnellement aux temps. L'intérêt pour 2 ans, 3 ans, est 2 fois, 3 fois l'intérêt d'un an; l'intérêt pour $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ d'année est $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ de l'intérêt annuel. Donc pour un nombre quelconque, n, entier ou fractionnaire, d'années, l'intérêt total s'obtient en multipliant l'intérêt $\frac{a.t}{100}$, correspondant à l'unité de temps, l'année, par le nombre des unités, n. On obtient ainsi la formule

$$i = \frac{a.t.n}{100}$$

pour exprimer l'intérêt en fonction du capital, du taux et du nombre d'années.

Ce n'est point une formule nécessaire qui s'impose à notre esprit par le raisonnement, comme un théorème de géométrie. C'est une formule qui traduit la règle à suivre pour se conformer aux conventions admises; mais ces conventions pourraient être modifiées, on pourrait stipuler d'autres conditions pour régler le compte d'intérêts, et nous verrons dans la suite qu'il y a un autre mode de supputation, répondant à la notion de l'intérêt dit *composé*.

2° Le temps est exprimé en mois.

Les notations restant les mêmes, sauf pour la mesure du temps, on voit immédiatement que l'intérêt de l'unité de capital pour 1 an ou 12 mois étant représenté par $\frac{t}{100}$, l'intérêt pour 1 seul mois est 12 fois plus petit, soit $\frac{t}{1200}$.

L'intérêt de a unités de capital sera

$$\frac{at}{1200} \text{ pour 1 mois}$$

et $\dfrac{atn}{1200}$ pour n mois.

Cette formule se simplifiera toutes les fois que t sera diviseur de 1200. Elle équivaut à $\dfrac{an}{\frac{1200}{t}}$, formule obtenue en divisant les deux termes du rapport $\dfrac{atn}{1200}$ par le même nombre t.

$$\text{Si } t=6 \qquad \text{l'expression} \quad \frac{an}{\frac{1200}{t}} = \frac{an}{200}$$

$$t=5 \qquad \frac{an}{240}$$

$$t=4 \qquad \frac{an}{300}$$

$$t=3 \qquad \frac{an}{400}$$

$$t=2 \qquad \frac{an}{600}$$

3° *Le temps est exprimé en semaines*

Dans certains règlements de compte, notamment dans la comptabilité des *caisses d'épargne*, l'année est considérée comme comprenant 52 semaines exactement, et les intérêts des sommes déposées sont évalués pour des nombres entiers de semaines.

L'intérêt de l'unité de capital est pour 1 semaine $\dfrac{t}{5200}$.

L'intérêt du capital a pour n semaines sera $\dfrac{a.t.n}{5200}$.

4° *Le temps est exprimé en jours.*

L'usage en France est de compter l'année commerciale de 360 jours. L'intérêt de l'unité de capital pour 1 jour est, dans cette hypothèse, égal à $\dfrac{t}{36000}$.

L'intérêt d'un capital a pendant n jours est représenté par la formule

$$i = \frac{atn}{36000}$$

Dans plusieurs pays étrangers, notamment en Angleterre, on compte habituellement l'année de 365 jours, et la formule qui répond à cette convention est

$$i = \frac{atn}{36500}$$

Remarque. — Si l'on considère les formules qui expriment l'intérêt en fonction du capital, du taux et du temps,

$i = \dfrac{a.t.n}{100}$ lorsque n exprime des années

$i = \dfrac{atn}{1200}$ n mois

$i = \dfrac{atn}{5200}$ n semaines

$i = \dfrac{atn}{36000}$

$i = \dfrac{atn}{36500}$ n jours

On reconnaît qu'on peut les réduire à une seule, si l'on convient de représenter par une seule lettre, soit r, les fractions $\frac{t}{100}$, ou $\frac{t}{1200}$, ou $\frac{t}{5200}$, ou $\frac{t}{36000}$, ou $\frac{t}{36500}$, qui représentent l'intérêt de l'unité de capital pendant l'unité de temps suivant que l'on prend pour unité de temps l'année, le mois, la semaine, le jour.

Toutes formules particulières ci-dessus sont renfermées dans la formule générale

$$i = arn$$

qui conviendra à tous les cas, à condition que l'on fasse bien concorder les valeurs simultanées de r et de n. Si n exprime un nombre d'années, r doit être l'intérêt de l'unité de capital pour 1 an. Si n est un nombre de mois, r doit être l'intérêt pour 1 mois.

Méthodes de la Banque et du Commerce pour les calculs d'intérêts, lorsque le temps est exprimé en jours.

MÉTHODE DES DIVISEURS.

Revenons à la formule générale des intérêts pour un nombre déterminé n de jours

$$i = \frac{a.t.n}{36000}$$

l'année étant comptée de 360 jours.

Cette formule équivaut à la suivante

$$i = \frac{a.n}{\frac{36000}{t}}$$

obtenue en divisant les deux termes du rapport primitif par le même nombre t.

Cette transformation sera avantageuse et simplifiera les calculs toutes les fois que t sera diviseur de 36000; c'est ce qui arrive pour la plupart des taux usuels 6, 5, $4\frac{1}{2}$, 4, 3, $2\frac{1}{2}$, 2 %.

En effectuant, dans chacun de ces différents cas particuliers, la division de 36000 par le nombre t, on trouve un résultat exact, que l'on nomme le diviseur. En le désignant par d, la formule se réduit à $i = \frac{a.n}{d}$.

RÈGLE. *Pour trouver l'intérêt d'un capital donné pour un nombre de jours fixé, il suffit de multiplier le capital par le nombre de jours, et de diviser ce produit par le diviseur correspondant au taux de l'intérêt.*

Si $t=6$ $i=\frac{a.n}{6000}$

$t=5$ $i=\frac{a.n}{7200}$

$t=4\frac{1}{2}$ $i=\frac{a.n}{8000}$

$t=4$ $i=\frac{a.n}{9000}$

$t=3,60$ $i=\frac{a.n}{10000}$

$t=3$ $i=\frac{a.n}{12000}$

$t=2$ $i=\frac{a.n}{18000}$

Pour les applications, il est indispensable de savoir par cœur le diviseur correspondant à chaque taux.

Les calculs sont beaucoup plus rapides que ceux qui résulteraient de l'application de la formule générale sans simplification. Les divisions par des nombres tels que 6000, 8000, 9000 qui n'ont qu'un seul chiffre significatif, se font avec une grande aisance, en divisant d'abord par 1000, par le déplacement de la virgule, et prenant $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ du résultat.

Les nombres 6000, 7200, etc., que l'on nomme les *diviseurs*, sont dans ces formules des nombres abstraits. Mais on peut considérer ces mêmes nombres comme concrets et représentant par exemple 6 000 francs, 7 200 francs, etc., des capitaux, ou 6 000 livres, 7 200 livres, etc.

Ils offrent, à ce point de vue, une particularité remarquable; c'est qu'ils produisent une unité monétaire d'intérêt par jour, au taux correspondant. Ainsi le capital 6 000 francs, au taux de 6 °/₀, produit 1 franc d'intérêt par jour, par conséquent n francs en n jours. On le voit sur la formule en y faisant $a=6000$, elle se réduit à $i=n$.

Nous ferons de fréquentes applications de ces remarques dans les opérations de change, lorsqu'il s'agira de trouver les valeurs correspondantes, à deux dates différentes, d'un effet de commerce.

MÉTHODE DES PARTIES ALIQUOTES.

Le calcul des intérêts par la méthode des parties aliquotes est basé sur la connaissance du nombre de jours auquel correspond un intérêt égal à la 100ᵉ partie du capital

Ce nombre se trouve en divisant 360 par le taux t, intérêt du capital 100 pour un an ou 360 jours. Il a pour expression $\frac{360}{t}$

Il est aisé de constater sur la formule simplifiée que pour la valeur particulière attribuée à n, $\frac{360}{t}$, l'intérêt est bien la 100ᵉ partie du capital.

L'expression $$i = \frac{a . \frac{360}{t}}{\frac{36000}{t}} \text{ donne bien } \frac{a}{100}$$

On peut encore raisonner ainsi :

En imaginant un capital de 100 francs, placé au taux t °/ₒ, on sait qu'il faut 360 jours pour que ce capital produise un intérêt t; pour produire un intérêt de 1 franc, au lieu de t francs, il faudra un nombre de jours t fois plus petit, soit $\frac{360}{t}$.

Les nombres de jours auxquels correspond un intérêt égal à 1 °/ₒ du capital sont, aux différents taux usuels :

6 °/ₒ	$\frac{360}{6}$	$= 60$
5 °/ₒ	$\frac{360}{5}$	$= 72$
$4\frac{1}{2}$ °/ₒ	$\frac{360}{4,5}$	$= 80$
4 °/ₒ	$\frac{360}{4}$	$= 90$

$3{,}60\ \%$	$\dfrac{360}{3{,}60} =$	100
$3\ \%$	$\dfrac{360}{3} =$	120
$2\dfrac{1}{2}\ \%$	$\dfrac{360}{2{,}5} =$	144
$2\ \%$	$\dfrac{360}{2} =$	180

Ces nombres, qu'il est indispensable de savoir par cœur, sont égaux respectivement à la centième partie des diviseurs.

Supposons que l'on cherche l'intérêt d'un capital placé à 6 %.

Si le nombre de jours est 60, on trouve immédiatement l'intérêt en prenant 1 centième du capital.

Si le nombre de jours est 2 fois, 3 fois 60, l'intérêt sera 2 fois, 3 fois le centième du capital.

Si le nombre de jours est $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ de 60, l'intérêt sera $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ de la centième partie du capital.

Si le nombre de jours est quelconque, on le décompose en parties aliquotes du nombre 60, et, s'il y a lieu, en parties aliquotes des sous-multiples de 60 déjà employés.

Supposons, par exemple, 43 jours. Le nombre 43 se décomposera en 30 (moitié de 60), 10 (tiers de 30), et 3 (dixième de 30).

Les intérêts se calculent ainsi par portions successives obtenues à l'aide de divisions très faciles.

EXEMPLE : *Calculer l'intérêt de* 7863fr,75 *à* 6 % *pour* 43 *jours.*

On dispose habituellement l'opération comme il suit :

Jours	Intérêts
60	78,6375
30	39,31875
10	13,10625
3	3,931875
43	56,356875

Réponse : 56fr,35

Dans la pratique, on abrège encore en s'arrêtant aux centimes que l'on évalue à $\frac{1}{2}$ centime près, soit par défaut, soit par excès. Ainsi on écrira seulement

30............	39,32
10	13,11
3	3,93
	56,36

l'erreur n'atteint pas $\frac{1}{2}$ centime.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Une personne possède un capital de* 73 500 *francs. Quel revenu annuel, quel revenu semestriel pourra-t-elle en tirer en plaçant cette somme à* 5 °/₀ *par an?*

Capital	73 500
Intérêt annuel $\frac{1}{20}$	3 675
Intérêt semestriel $\frac{1}{40}$	1 837,50

II. *Le gouvernement français a contracté, en* 1871 *et* 1872, *des emprunts s'élevant en capital nominal à* 6 800 000 000 (*en nombre rond*). *Quel a été le total des intérêts payés d'après le taux de* 5 °/₀ *pendant* 11 *ans?*

L'intérêt pour un an est $\frac{6\,800\,000\,000}{20} = 340\,000\,000$.

L'intérêt pour 11 ans, $340\,000\,000 \times 11 = 3\,740\,000\,000$.

III. *La Hollande contracte un emprunt de fl.* 86 758 450 *en rentes* $2\frac{1}{2}$ °/₀. *Quelle sera la dépense annuelle?*

La dépense annuelle sera l'intérêt du capital nominal, au taux de $2\frac{1}{2}$ °/₀. Cet intérêt est $\frac{1}{40}$ du capital, soit fl. 2 168 961,25.

IV. *L'Italie ayant contracté une dette nominale de* 8 138 500 000 *lire, paye chaque année l'intérêt de ce capital d'après le taux de* 4,34 °/₀. *Quel est cet intérêt? quel est le total des intérêts payés pendant* 3 *ans* $\frac{1}{2}$?

L'intérêt annuel est $81\,385\,000 \times 4{,}34 = 353\,210\,900$.

L'intérêt pour 3 ans $\frac{1}{2}$ est $81\,385\,000 \times 4{,}34 \times 3{,}5 = 1\,236\,238\,150$

V. *Un négociant a déposé chez son banquier une somme de* 8 640 *francs, qui doit porter intérêts d'après le taux de* 2 $\frac{1}{2}$ °/° *par an. Quels sont les intérêts après* 7 *mois* $\frac{1}{2}$?

On peut appliquer la formule

$$i = \frac{a.t.n}{1200}$$

qui donne ici

$$i = \frac{8640 \times 2{,}5 \times 7{,}5}{1200}$$

soit, en simplifiant,

$$i = 216 \times 0{,}25 \times 2{,}5$$

ou encore

$$i = 54 \times 2{,}5 = 135 \text{ francs.}$$

On pourrait appliquer la méthode des parties aliquotes.

Pour 6 mois, l'intérêt est $\frac{1}{80}$ du capital, soit	108
Pour 1 mois $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{4}\text{ de 6 mois}\right)$	27
Pour 7 mois $\frac{1}{2}$	135 francs.

VI. *Un ouvrier dépose à la caisse d'épargne* 60 *francs* 42 *semaines avant la fin de l'année;* 75 *francs* 29 *semaines avant la fin de l'année;* 90 *francs* 16 *semaines avant la fin de l'année. Les sommes déposées portent intérêts à partir de*

la semaine qui suit la date du dépôt, d'après le taux de $3\frac{1}{2}$ %
par an. On demande le total des intérêts à la fin de l'année.

Le 1er dépôt porte intérêts pendant 41 semaines $\dfrac{60 \times 41 \times 3,5}{5200}$

2e 28 $\dfrac{75 \times 28 \times 3,5}{5200}$

3e 15 $\dfrac{90 \times 15 \times 3,5}{5200}$

Total $\dfrac{[60 \times 41 + 75 \times 28 + 90 \times 15] \times 3,5}{5200} = \text{Fr. } 3,97$

VII. *Intérêts du capital* 393625 *francs, pendant* 148 *jours, d'après les taux de* 6, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{8}$, 5, $4\frac{7}{8}$, $4\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{2}$, 4, $3\frac{1}{2}$, 3, $2\frac{1}{2}$, 2 *et* 1 %.

Méthode des parties aliquotes. — Méthode des diviseurs.

à 6 %

60 jours	3936,25	$\dfrac{393625 \times 148}{6000}$
60	3936,25	
20	1312,083	ou
6	393,625	$\dfrac{393625 \times 74}{3000} = \dfrac{393,625 \times 74}{3}$
2	131,208	
148	9709,416	$= 9709,4166.$

$5\frac{1}{2}$ %

Calculs auxiliaires d'après le taux de 5 %.

72 jours	3936,25	$\dfrac{393625 \times 147}{7200}$
72	3936,25	
4	218,68	ou
148 Intérêts à 5 %	8091,18	$\dfrac{3936,25 \times 37}{18}$
$+\dfrac{1}{10}$	809,118	$=$ 8091,18
		$+\dfrac{1}{10}$ 809,118
Intérêts à $5\frac{1}{2}$ %	8900,298	8900,298

$5\frac{1}{4}$ %

Calculs auxiliaires d'après le taux de 5 %, comme ci-dessus.

Intérêts à 5 %	8091,18
$+ \frac{1}{20}$	404,559
Intérêts à $5\frac{1}{4}$ %	8495,739

$5\frac{1}{8}$ %

Intérêts à 5 %	8091,18
$+ \frac{1}{40}$	202,279
Intérêts à $5\frac{1}{8}$ %	8293,459

à 5 %

Intérêts	8091,18

à $4\frac{7}{8}$ %

Intérêts à 5 %	8091,18
$- \frac{1}{40}$	202,279
Intérêts à $4\frac{7}{8}$ %	7888,901

$4\frac{3}{4}$ %

Intérêts à 5 %	8091,18
$- \frac{1}{20}$	404,559
Intérêts à $4\frac{3}{4}$ %	7686,621

$4\frac{1}{2}$ %

Parties aliquotes.		Diviseurs.
80 jours	3936,25	$\dfrac{393625 \times 148}{8000}$
40	1968,125	
20	984,0625	ou
8	393,625	$\dfrac{393{,}625 \times 37}{2} = 7282{,}0625$
148	7282,0625	

---

4 %

90 jours	3936,25	$\dfrac{393625 \times 148}{9000}$
45	1968,125	
9	393,625	ou
3	131,2083	$\dfrac{393{,}625 \times 148}{9} = \dfrac{58256{,}5}{9}$
1	43,7361	
148	6472,9444	$= 6472{,}9444.$

$3\frac{1}{2}$ %

Intérêts à 4 %	6472,944
$-\frac{1}{8}$	809,118
Intérêts à $3\frac{1}{2}$ %	5663,826

---

3 %

Parties aliquotes.		Diviseurs.
120 jours	3936,25	$\dfrac{393625 \times 148}{12000}$
20	656,0416	
4	131,2083	ou
4	131,2083	$\dfrac{393{,}625 \times 37}{3} = 4854{,}7082$
148	4854,7082	

$2\frac{1}{2}$ %

144 jours	3936,25	$\frac{393625 \times 148}{14400}$
$\boxed{16}$	$\boxed{437,361}$	ou
4	109,340	$\frac{3936,25 \times 37}{36} = 4045,59$
148	4045,59	

2 %

90 jours	1968,125	$\frac{393625 \times 148}{18000}$
45	984,0625	
9	196,8125	ou
3	65,6041	$\frac{393,625 \times 74}{9} = 3236,4722$
1	21,868	
148	3236,4721	

1 %

Parties aliquotes.		Diviseur.
90 jours	984,0625	$\frac{393625 \times 148}{36000}$
45	492,03125	
9	98,40625	ou
3	32,80208	$\frac{393,625 \times 37}{9} = 1618,236$
1	10,93402	
148	1618,23600	

La méthode des parties aliquotes s'applique au capital comme au temps.

On sait que les capitaux 6 000, 7 200, 8 000, 9 000, 12 000 produisent un franc d'intérêt par jour, d'après les taux respectifs de 6 %, 5 %, $4\frac{1}{2}$ %, 4 %, 3 %.

Cette remarque permet de calculer rapidement, au taux de 6 %, les intérêts de 6 000, des multiples et sous-multiples de 6 000. Ainsi le capital 12 000, au taux de 6 %, produit en

37 jours, $37 \times 2 = 74$ francs. Le capital 3 000 produirait $\frac{37}{2} = 18^{fr},50$.

Un capital quelconque, placé à 6 °/₀, pourra être décomposé en parties aliquotes de 6 000.

Soit le capital 8 264 *dont on demande l'intérêt à* 6 °/₀ *pendant* 47 *jours.*

Parties aliquotes du capital.		Parties aliquotes du temps.	
6 000	47	60 j.	82,64
2 000	15,667	30	41,32
200	1,566	15	20,66
60	0,47	1	1,377
4	0,031	1	1,377
8 264	64,734	47 j.	64,734

Intérêt demandé $64^{fr},73$.

AUTRES EXEMPLES.

I. *Intérêt de* 13 975 *francs, à* 4 °/₀, *pendant* 56 *jours.*

Parties aliquotes du capital.		Parties aliquotes du temps.	
9 000	56	90 j.	139,75
4 500	28	45	69,875
225	1,4	9	13,975
225	1,4	1	1,553
25	0,155	1	1,552
13 975	86,955	56 jours.	86,955

Intérêt 86,95

II. *Intérêt de* $ 6 600, *au taux de* 6 °/₀, *après* 3 *ans* 7 *mois* 27 *jours.*

On peut exprimer en jours la durée du placement.

$$360 \times 3 = 1\,080 \text{ jours}$$
$$30 \times 7 = 210$$

1 317 jours

Le capital 6 000 produirait \$ 1 317.
Le capital $6\,000 \times 1{,}1 = 6\,600$ produit \$ $1\,317 \times 1{,}1$
$= \$\ 1\,448{,}7$

III. *Intérêt de \$ 12 656, au taux de 7 %, après 5 ans 2 mois 9 jours.*

On peut faire le calcul d'abord pour le taux de 6 % et augmenter ce premier résultat de $\frac{1}{6}$ de sa valeur.

A 6 % l'intérêt pour 5 ans est $12\,656 \times 0{,}3 = 3\,796{,}8$

—	2 mois $\left(\frac{1}{100}\text{ du capital}\right)$	126,56
—	6 jours $\left(\frac{1}{1000}\text{ du capital}\right)$	12,656
—	3 jours $\left(\frac{1}{2}\text{ du précédent}\right)$	6,328
	Intérêt à 6 %	3 942,344
	$+\frac{1}{6}$	657,057
	Réponse, à 7 %, intérêt \$	4 599,401

IV. *Intérêt de Rbl.* 7 500, *d'après le taux de* $6\frac{3}{4}$ %, *pendant* 83 *jours.*

La fraction $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{8}$ de 6. Nous ferons le calcul pour le taux de 6 % et nous ajouterons à ce premier résultat $\frac{1}{8}$ de sa valeur.

pour 60 j.	75	
20	25	
3	3,75	
83 j.	103,75	intérêt à 6 %
$+\frac{1}{8}$	12,968	
	116,718	intérêt à $6\frac{3}{4}$ %

116 *Roubles* 72 *kopecks.*

Calculs d'intérêts sur valeurs étrangères et, spécialement, sur valeurs anglaises.

Comme on le voit par les exercices précédents, les calculs d'intérêts s'effectuent avec la même facilité sur des capitaux quelconques exprimés en valeurs étrangères, quand les fractions de l'unité monétaire suivent la loi des divisions décimales. Par exemple, en Allemagne, on compte par reichsmarks et pfennigs; en Russie par roubles et kopecks; aux États-Unis d'Amérique par dollars et cents. Les subdivisions pfennigs, kopecks, cents étant respectivement les centièmes des unités principales, les calculs s'effectuent absolument de la même façon que sur des francs et centimes. C'est en Angleterre seulement que l'on rencontre des unités de monnaie qui n'ont pas entre elles les relations décimales. L'unité principale est la livre sterling, elle se divise en 20 shillings, et le shilling se divise en 12 pence. Mais rien n'est plus facile que de convertir un nombre complexe de livres, shillings et pence en un nombre décimal de livre.

Le shilling vaut $\frac{1}{20}$ de livre ou $\frac{5}{100}$ de livre ; on convertira donc un nombre de shillings proposé en centièmes de livre en le multipliant par 5 ; c'est la même opération que pour convertir des sous en centimes.

13 shillings valent £ 0,65 comme 13 sous font 65 centimes.

La conversion des pence se fait aussi rapidement d'après les remarques suivantes :

12 pence valent 1 shilling ou, d'après ce qui vient d'être dit	£ 0,05
6 pence valent donc	£ 0,025
3 pence valent	£ 0,0125
1 penny vaut	£ 0,004 166
9 pence valent (6 + 3 pence)	£ 0,0 375

D'après ce tableau on voit que les nombres de pence 3, 6, 9 s'expriment en livres par des fractions décimales exactes qu'il est facile de retenir par cœur, et que 1 penny vaut environ £ 0,004 ; si donc le nombre de pence est 3, 6, 9 on mettra en livres la vraie valeur; pour un autre nombre de pence, on ajoutera ou l'on retranchera rapidement £ 0,004 suivant que le nombre proposé sera supérieur ou inférieur de 1 à l'un des multiples de 3 jusqu'à 12 inclusivement.

Dans la plupart des cas, toutes les fois que le nombre des jours n'est pas considérable, on pourra, dans les calculs d'intérêts, négliger les pence du capital.

EXEMPLE. — *Calculer l'intérêt de* £ $948.17^{sh}.6^{d}$, *au taux de* 4 °/₀ *pendant* 51 *jours.*

Le capital s'écrira sous la forme décimale £ 948,875.

Méthode des parties aliquotes.

Intérêt de 90 jours		£ 9,48875
» 45 j.	$\left(\frac{1}{2}\right.$ du précéd^t	4,745
» 5 j.	$\left(\frac{1}{9}\right.$ »	0,527
» 1 j.	$\left(\frac{1}{5}\right.$ »	0,105
résultat		£ 5,377

Méthode du diviseur.

$$\begin{array}{r} 948,875 \times 51 \\ 47.443\ 75 \\ \hline 48.392,625 \end{array}$$

$\left.\frac{1}{9000}\right)$ £ 5,3769 *résultat*

ou £ 5. 7. $6\frac{1}{2}$

Le nombre décimal £ 5,377 se remet sous la forme complexe du système monétaire anglais : on prend sur le nombre des centièmes, ici 37, le plus grand multiple de 5 qui s'y trouve contenu, soit 35, lequel correspond à 7 shillings ; le reste se compose de 27 millièmes de livre qui donnent à très peu près 6 pence $\frac{1}{2}$, à raison de 0,00416 de livre par penny.

REMARQUE. — Si l'on avait négligé les pence du capital, les opérations auraient porté sur le capital £ 948,85 dont l'intérêt pour 90 jours est 9,488 et il est facile de se convaincre que les chiffres négligés n'entraînent aucune erreur pratique. Il en sera de même tant que le nombre des jours ne sera pas presque égal ou supérieur au nombre de jours de l'année.

Il est encore utile de faire observer que souvent en Angleterre l'année commerciale est évaluée de 365 jours, au lieu de 360 comme en France. Les résultats, obtenus par les méthodes simplifiées qui reposent sur l'hypothèse de 360 jours, doivent alors être multipliés par $\frac{360}{365}$ ou $\frac{72}{73}$, c'est-à-dire diminués de $\frac{1}{73}$ de leur valeur. Mais on peut faire directement le calcul en comptant l'année de 365 jours.

Méthode anglaise pour les calculs d'intérêts pour un nombre déterminé de jours, l'année étant comptée de 365 jours.

Si l'on compte l'année de 365 jours, l'intérêt a pour expression générale

$$i = \frac{a.t.n}{36500}$$

Dans le cas particulier où $t = 5$, la formule se simplifie et se réduit à

$$i = \frac{a.n}{7300}$$

tandis que l'année étant comptée de 360 jonrs, la formule correspondante est

$$i = \frac{a.n}{7200}$$

Au premier abord, le diviseur 7300 peut paraître moins commode que 7200. Mais une remarque fort simple permet de trouver aisément le quotient d'un nombre par 73. La division par 73 équivaut à la multiplication par $\frac{1}{73}$; or la fraction

$$\frac{1}{73} = 0{,}0136986\,3\ldots$$

c'est-à-dire à peu près à $0{,}01\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right)$

$0{,}01$	$0{,}01$
$\frac{0{,}01}{3}$	$0{,}003333\ldots$
$\frac{0{,}01}{30}$	$0{,}000333\ldots$
$\frac{0{,}01}{300}$	$0{,}000033\ldots$
Total :	$0{,}013699\ldots$

On voit que la différence ne porte que sur les unités décimales d'un ordre négligeable dans la plupart des applications.

I. *Intérêt du capital* £ 859. 13. 6, *au taux de* 5 °/₀, *pendant* 27 *jours.*

Méthode exacte.

$$i = \frac{859{,}675 \times 87}{7300}.$$

```
747,91725 | 73
 179      |---------
  331     | 10,2454
   397
    322
     305
```

Intérêt £ 10,2454

ou £ 10. 4. 10 $\frac{29}{32}$

Méthode approximative.

Capital multiplié par le nombre de jours

£ $859{,}675 \times 87 = 74791{,}725$

$\frac{1}{100}$	$747{,}917$
$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{100}$	$249{,}305$
$\frac{1}{10}$ du précédent	$24{,}930$
$\frac{1}{10}$ du précédent	$2{,}493$
	$1024{,}645$

Intérêt £ 10,246

ou £. 10. 4. 11 à très peu près.

la différence des résultats n'est pas appréciable dans la pratique, elle ne s'élève pas à $\frac{1}{4}$ de penny.

II. *Intérêt du capital* £ 58. 18. 10, *d'après le taux* 4 °/₀, *pour* 120 *jours.*

On peut d'abord faire le calcul pour le taux de 5 %.

à 5 % $i = \dfrac{58,942 \times 120}{7300}$

$58,942 \times 12 = 707,304$

$$\begin{array}{r|l} 70,7304 & 73 \\ \cline{2-2} 5\ 03 & 0,9689 \\ 650 & \\ 664 & \\ \cdot 7 & \end{array}$$

Intérêt à 5 %	£ 0,9689
$\frac{1}{5}$ à retrancher	1938
Intérêt à 4 %	£ 0,7751
ou £ 0. 15. 6	

$58,942 \times 120 = 7073,04$

$\frac{1}{100}$	70,7304
$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{100}$	23,5768
$\frac{1}{10}$ du précédent	2,3576
$\frac{1}{10}$ du précédent	0,2357
	96,9005
Intérêt à 5 %	£ 0,9690
$\frac{1}{5}$ à retrancher	0,1938
Intérêt à 4 %	0,7752
ou £ 0. 15. 6	

La plupart des taux usuels tels que 6, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, $4\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{2}$, 4 pourront être provisoirement remplacés par le taux 5, et le résultat vrai s'en déduira par l'addition ou la soustraction d'une fraction très facile à calculer, comme $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$.

PROBLÈMES SUR LES INTÉRÊTS SIMPLES.

Les formules de l'intérêt simple $i = \dfrac{atn}{100}$ $i = \dfrac{atn}{1200}$ $i = \dfrac{atn}{36000}$, résumées par la formule générale $i = anr$ permettent de résoudre aisément toutes les questions relatives à la recherche de l'intérêt, ou du capital, ou du temps ou enfin du taux. L'application de ces formules donnera, le plus souvent, une solution plus rapide et plus sûre que la règle de trois composée par laquelle on peut aussi résoudre les mêmes problèmes.

Lorsque le taux est donné, et l'un des taux usuels auxquels correspondent des diviseurs entiers pour le calcul des intérêts par jour, on applique les relations de la forme générale $i = \frac{an}{d}$, d étant le quotient $\frac{36000}{t}$.

Nous avons déjà donné plusieurs exemples relatifs à la recherche de l'intérêt. Les recherches du capital et du temps se feraient avec la même facilité.

EXEMPLE I. — *Un capital, placé à 6 %, a produit, au bout de 73 jours, 219 fr. d'intérêt. Quel est ce capital?*

L'application de la formule donne immédiatement

$$a = \frac{219 \times 6000}{73} = 18000$$

EXEMPLE II. — *Au bout de combien de jours un capital à 4 % a-t il rapporté en intérêts $\frac{1}{60}$ de sa propre valeur?*

La question est rapidement résolue à l'aide de la proportion

$$\frac{x}{9000} = \frac{1}{60}$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{9000}{60} = 150 \text{ jours}$$

EXEMPLE III. — *Un capital, placé à intérêts simples depuis 48 jours, a rapporté les $\frac{3}{5}$ % de sa propre valeur. Quel est le taux?*

Le quotient $\frac{n}{i}$ donne ici

$$\frac{48 \times 500}{3} = 8000$$

8000 est le diviseur correspondant au taux de $4\frac{1}{2}$ %. On en conclut que le taux est $4\frac{1}{2}$ %.

Remarque. — La recherche du diviseur ne doit être substituée à la recherche directe du taux que dans les cas où l'on aperçoit une relation simple entre les nombres n et i. En toute autre circonstance, on appliquerait la formule générale.

PROBLÈMES SUR LES INTÉRÊTS.

1er **Problème.** — *Un capitaliste place sa fortune à 4 %; deux ans après, il retire* $\frac{1}{4}$ *du capital, et laisse le reste porter intérêts pendant 7 mois; après ce temps il retire encore le* $\frac{1}{4}$ *du capital qui restait alors placé, et laisse le capital ainsi diminué pendant 13 mois. Le total des intérêts simples s'est élevé depuis l'origine du placement à 24375 francs. Quel était le capital primitif?*

Solution. — Le capital entier reste d'abord placé pendant 2 ans; ensuite les $\frac{3}{4}$ pendant 7 mois donnent le même intérêt que le capital entier pendant les $\frac{3}{4}$ de 7 mois, soit 5 mois $\frac{1}{4}$; dans la 3e période de 13 mois, le capital portant intérêts est les $\frac{3}{4}$ des $\frac{3}{4}$, ou les $\frac{9}{16}$ du capital primitif; les intérêts sont les mêmes que ceux que produirait le capital entier pendant $\frac{9}{16}$ de 13 mois, ou $\frac{117}{16}$ soit 7 mois $\frac{5}{16}$.

Les intérêts peuvent ainsi être produits par le capital entier pendant 24 mois $+ 5\frac{1}{4} + 7\frac{5}{16} = 36\frac{9}{16}$.

Au taux de 4 %, l'intérêt du capital a placé pendant 36 mois $\frac{9}{16}$ a pour expression

$$\frac{a \times 36\,\frac{9}{16}}{300} \text{ ou } \frac{a \times 12\,\frac{3}{16}}{100}$$

On a donc la relation

$$\frac{a \times 12\,\frac{3}{16}}{100} = 24375$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{24375 \times 100}{12\,\frac{3}{16}}$$

ou
$$a = \frac{24375 \times 1600}{195}$$

En simplifiant et effectuant les calculs, on trouve

$$a = 200000$$

2ᵉ **Problème**. — *Un industriel, en Amérique, laisse un héritage de* \$ 500 000, *à partager entre cinq jeunes neveux, résidant en Angleterre, de façon que chacun d'eux ait à sa majorité, à l'âge de* 21 *ans, la même somme définitive provenant de sa part actuelle placée provisoirement en banque. Le capital* \$ 500 000 *est d'abord converti en valeurs anglaises d'après la base du change* £ 1 *pour* \$ 4,875. *Les fonds anglais résultant de cette opération sont déposés dans une banque de Londres, qui s'engage à payer sur les cinq parts actuelles les intérêts simples à* $2\frac{1}{2}$ °/₀ *l'an. Les cinq héritiers sont âgés respectivement de* 7 *ans,* 9 *ans* $\frac{1}{2}$, 11 *ans* 3 *mois,* 13 *ans,* 14 *ans* $\frac{1}{2}$.

Quelle est la somme que doit recevoir chaque héritier, à sa majorité?

Solution. — La transformation de $ 500 000 donne

$$£\,\frac{500\,000}{4\frac{7}{8}} = £\,102\,564.2^s.1^d$$

Soit x la somme que devra toucher chaque héritier, à l'âge de 21 ans; cette somme x est la valeur de la part actuelle augmentée de ses intérêts simples. Si par exemple nous désignons par y la part actuelle du plus jeune, x est la valeur acquise par le capital y, avec ses intérêts simples pendant 14 ans. On a donc la relation $x = y + \dfrac{y \times \frac{5}{2} \times 14}{100}$, ou en simplifiant, $x = \dfrac{27}{20} y$ et réciproquement $y = \dfrac{20}{27} x$. En désignant les autres parts actuelles par z, u, v, t, on obtiendra, par les mêmes considérations, des équations analogues et l'on aura les relations

$$(1) \qquad y + z + u + v + t = £\,102\,564\ 2^s\ 1^d$$

$$(2) \qquad y = \frac{20}{27} x \qquad \frac{20}{27} = 0{,}74074$$

$$(3) \qquad z = \frac{80}{103} x \qquad \frac{80}{103} = 0{,}77670$$

$$(4) \qquad u = \frac{80}{99\frac{1}{2}} x \qquad \frac{80}{99\frac{1}{2}} = 0{,}80402$$

$$(5) \qquad v = \frac{5}{6} x \qquad \frac{5}{6} = 0{,}83333$$

$$(6) \qquad t = \frac{80}{93} x \qquad \frac{80}{93} = 0{,}86021$$

$$4{,}015..$$

En remplaçant dans l'équation (1) les lettres y, z, u, v, t par leurs valeurs respectives en fonction de l'inconnue principale x, on obtient

$$x\left[\frac{20}{27} + \frac{80}{103} + \frac{80}{99\frac{1}{2}} + \frac{5}{6} + \frac{80}{93}\right] = £\,102\,564.2^s.1^d$$

ou bien

$$4{,}015\,x = £\,102\,564.2^s.1^d$$

Résultat demandé $$x = £\,\frac{102\,564.2.1}{4{,}015} = £\,25\,545.4^s.7^d$$

3[e] **Problème.** — *Un capital, placé à intérêts simples, d'après le taux de* 5 °/₀ *par année de* 365 *jours, a acquis comme valeur définitive, capital et intérêts réunis, après* 2 *ans* 7 *mois* 20 *jours*, £ 8073 17^s 6^d. *Quelle était la valeur acquise par le placement à la fin de la* 1[re] *année ? Dans combien de temps la valeur s'élèvera-t-elle à* £ 10 000 ?

Solution. — Le capital 7300 produit, d'après le taux de 5 °/₀ pour 365 jours, un intérêt 1 pour 1 jour, et le nombre de jours indique précisément le nombre des unités d'intérêt. Cela résulte de ce que l'intérêt de 7300 pour 1 jour, à 5 °/₀, serait fourni par la formule $\frac{7300 \times 5}{100 \times 365} = \frac{73}{73} = 1$.

D'après cette observation, on voit que le capital 7300 serait devenu, au bout de 2 ans 7 mois 20 jours, soit au bout de 933 jours, $7300 + 933 = 8233$.

Pour un même taux et une même durée, les intérêts de deux capitaux, et par suite les valeurs définitives, sont proportionnels aux capitaux primitifs. Donc le capital primitif qui est devenu, après 933 jours, £ 8073 17 6 ou £ 8073,875 a pour expression £ $\frac{8073{,}875 \times 7300}{8233}$; pour avoir la valeur acquise après 1 an, il suffit d'ajouter à ce nombre $\frac{1}{20}$ de sa valeur, ou de le multiplier par $\frac{21}{20}$. On obtient ainsi la formule

$$x = \frac{8073{,}875 \times 7300 \times 21}{8233 \times 20} = \frac{8073{,}875 \times 15330}{16466} = 7516{,}854$$

1[re] *réponse. — La valeur du placement à la fin de la* 1[re] *année s'élevait, capital et intérêts, à* £ 7 516. 17^s. 1^d.

Si l'on voulait avoir l'intérêt seul, il suffirait de prendre $\frac{1}{21}$ de ce nombre.

On demande en second lieu dans combien de temps la valeur du placement s'élèvera à £ 10 000. La valeur actuelle étant £ 8073,875 c'est demander dans combien de temps les intérêts s'élèveront à 1926,125 de plus qu'à l'époque actuelle. Comme les intérêts ne se capitalisent pas, ces intérêts additionnels 1926,125 proviennent du capital primitif $\frac{8073,875 \times 7300}{8233}$.

Pour avoir les intérêts de ce capital primitif pendant x jours, il suffit de le multiplier par x et de le diviser par 7 300, ce qui donne, pour déterminer x, l'équation

$$\frac{8073,875 \times x}{8233} = 1926,125$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{1926,125 \times 8233}{8073,875} = 1964 \text{ jours}$$

2^e^ *réponse. — La valeur du placement s'élèvera, capital et intérêts, à* £ 10000 *dans* 5 *ans* 139 *jours, à partir de l'époque actuelle.*

Exercices de calcul mental sur des questions d'intérêt.

1. *Quelle est la rente annuelle, à* 5 °/₀, *d'un emprunt de* 6 *milliards?*

R. 300 millions.

On prend rapidement $\frac{1}{20}$ du capital, c'est-à-dire d'abord la moitié, ensuite le dixième de la moitié.

2. *Quel est le capital nominal, remboursable, qui correspond à* 342 *millions de rente* 5 °/₀?

R. 6,840 millions, ou 6 milliards 840 millions.

On multiplie le nombre de francs de rente par 20, c'est-à-dire par 2 et par 10.

3. *Quel est le revenu annuel produit, à* 5 °/₀, *par le capital* 59 500 *francs?*

R. 2 975 francs.

On prend $\frac{1}{20}$ du capital, c'est-à-dire la moitié divisée par 10, et pour voir immédiatement la moitié, on se rappelle que la moitié d'un nombre impair tel que 59 suivi de 5 donne la moitié du nombre 59 prise par défaut, soit 29, suivie de 75.

4. *Quel est l'intérêt annuel, à* 5 °/₀ *du capital,* 9 750 *francs?*

R. 487,5.

Même procédé que pour le précédent.

5. *Quel est l'intérêt annuel à* 5 °/₀ *du capital* 39 750 *francs?*

R. 1 987,5.

Il suffit de se dire: la moitié de 39 est de 19, et de faire suivre de 875 parce que le nombre impair 39 est suivi de 75, la virgule se place d'ailleurs sans hésitation; la moitié de 39 (mille) donnerait 19 (mille), le 20e donne 19 cents.

6. *Quel est, à* 5 °/₀, *l'intérêt, pour* 6 *mois, de* 52 000 *francs?*

R. 1 300 (il suffit de prendre le quart divisé par 10).

7. *Quel est, à* 5 °/₀, *pour* 6 *mois, l'intérêt de* 7 540 *francs?*

R. 188,5.

Le quart de 75 est 18, reste 3; le quart de 34 est 8,5.

8. *Quel est, à* $5\frac{1}{2}$ °/₀, *l'intérêt annuel de* 23 000 *francs?*

R. 1 265.

L'intérêt à 5 °/₀ serait	1 150	1265
il faut ajouter le 10e	115	

9. *Quel est, à* $5\frac{1}{4}$ °/₀, *l'intérêt annuel de* 47 000 *francs?*

R. 2 467,50

L'intérêt à 5 °/₀ serait	2 350	2467,50
il faut ajouter $\frac{1}{20}$	117,50	

10. *Quel est, à* $5\frac{1}{8}$ °/₀, *l'intérêt annuel de* 28 000 *francs ?*

R. 1 435.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{L'intérêt à 5 \% serait} & 1\,400 \\ \text{il faut ajouter } \frac{1}{40} & 35 \end{array}\right\} 1\,435$$

11. *Quel est, à* $5\frac{1}{16}$ %, *l'intérêt annuel de* 72 000 *francs?*

R. 3645.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{L'intérêt à 5 \% serait} & 3\,600 \\ \text{il faut ajouter } \frac{1}{80} & 45 \end{array}\right\} 3\,645$$

12. *Quel est, à* $4\frac{3}{4}$ %, *l'intérêt annuel de* 8 600 *francs?*

R. 408,50.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{L'intérêt à 5 \% serait} & 430 \\ \text{il faut retrancher } \frac{1}{20} & 21,5 \end{array}\right\} 408,5$$

13. *Quel est, à* 4 %, *l'intérêt annuel de* 3 *milliards* $\frac{1}{2}$?

R. 140 millions.

$3\frac{1}{2} \times 4 = 14.$

14. *Quel est le capital nominal qui correspond à* 125 *millions de rente* 4 %?

R. 3 milliards 125 millions.

Le capital est 25 fois la rente et pour multiplier par 25 on prend le quart, multiplié par 100. Le quart de 12 est 3, le quart de 5 est 1,25.

15. *Quel est l'intérêt, à* 6 %, *pour* 3 *mois, de* 25 600 *francs?*

R. 384.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Pour 2 mois, } \frac{1}{100} \text{ du capital} & 256 \\ \text{1 \quad la moitié} & 128 \end{array}\right\} 384$$

16. *Quel est l'intérêt, à* 6 %, *de* 24 000 *fr. pendant* 27 *jours?*

R. 108.

6 000 francs en 27 jours, 27 francs.

$6\,000 \times 4 = 24\,000 \qquad 27 \times 4 = 108.$

17. *Quel est l'intérêt, à* 6 °/₀, *de* 8 000 *francs, pour* 57 *jours?*

R. 76 francs.

$$\left.\begin{array}{ll} 6\,000 \text{ francs donneraient} & 57 \\ 2\,000\left(\frac{1}{3}\right) & 19 \end{array}\right\} 76$$

18. *Quel est le capital qui, à* 6 °/₀ *en* 1 *mois, donne* 87 *francs d'intérêt?*

R. 17 400.

L'intérêt pour 60 jours ou 2 mois étant $\frac{1}{100}$ du capital, l'intérêt pour 1 mois est $\frac{1}{200}$, et réciproquement le capital est 200 fois l'intérêt.

19. *Quel est, à* 5 °/₀, *l'intérêt de* 18 000 *francs pendant* 63 *jours?*

R. 157,5.

L'intérêt de 72 000 serait 630 francs, puisque le capital 7 200 produit 1 franc par jour et donnerait 63 francs.

18 est le quart de 72. L'intérêt est le quart de 630.

20. *Quel est, à* $4\frac{1}{2}$ °/₀, *l'intérêt de* 1 600 *francs pour* 65 *jours?*

R. 13.

L'intérêt de 800 serait 6,5 puisque le capital 8000 à $4\frac{1}{2}$ °/₀ produit 1 franc par jour. L'intérêt de 1600 est $6{,}5 \times 2 = 13$.

21. *Quel est, à* $4\frac{1}{2}$ °/₀, *le capital qui a donné* 60 *francs d'intérêt pour* 48 *jours?*

R. 10 000.

Si l'intérêt pour 48 jours était 48 francs, le capital serait 8000.

60 c'est 48 augmenté de $\frac{1}{4}$ de 48; le capital est donc $8000 \times 1\frac{1}{4} = 10\,000$.

22. *Quel est, à 4 °/₀, l'intérêt de 963 francs pour 1 mois?*

R. 3,21.

L'intérêt pour 3 mois serait $\frac{1}{100}$ du capital 9,63.

Pour 1 mois, c'est le tiers de 9,63, soit 3,21.

23. *Une dette de 2540 francs porte intérêt à 4 °/₀. Quelle sera la somme à payer au bout de 3 mois?*

R. 2565,40.

Au bout de 3 mois l'intérêt à 4 °/₀ est $\frac{1}{100}$ du capital, soit ici 25,40, lesquels ajoutés au principal 2540 donnent la somme de 2565,40.

24. *Quel est l'intérêt, à 3 °/₀, de 4500 francs pour 5 mois?*

R. 56,25.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{L'intérêt pour 4 mois ou 120 jours serait} & 45^{\text{fr}} \\ \quad\text{pour 1 mois en plus, } \frac{1}{4} \text{ à ajouter} & 11{,}25 \end{array}\right\} 56{,}25$$

25. *Quel est, à* $2\frac{1}{2}$ °/₀, *pour 6 mois, l'intérêt de 19 000 fr.?*

R. 237,50.

L'intérêt à $2\frac{1}{2}$ °/₀ pour 1 an est $\frac{1}{40}$ du capital.

pour 6 mois $\frac{1}{80}$ du capital.

Le 8ᵉ de 19 est 2, reste 3, le quotient s'écrit 237,5.

COMPTES COURANTS

Les échanges de capitaux, de valeurs, entre un négociant et son banquier, donnent lieu à l'établissement de comptes courants, ou bordereaux détaillés, dans lesquels se trouvent inscrits tous les éléments nécessaires au règlement de compte, tant en capital qu'en intérêt.

Trois méthodes sont appliquées pour les comptes courants :

1° *La méthode hambourgeoise ou méthode des échelles.*

2° *La méthode directe.*

3° *La méthode indirecte ou rétrograde.*

Nous allons exposer sommairement le mécanisme et les principes de ces trois méthodes.

Méthode hambourgeoise.

On note pour chaque période le règlement de compte, et l'on calcule pour chaque période, c'est-à-dire d'une période à une autre, l'intérêt sur le solde établi au commencement de cet intervalle de temps.

Méthode directe.

Le règlement de compte se fait à une seule époque finale, époque de clôture. Les intérêts sont calculés sur chaque capital pour la durée du placement, suivant la marche naturelle, directe, du temps, depuis la date de l'opération jusqu'à la date de la clôture.

A cette dernière date, on règle le compte, en faisant la balance des capitaux et des intérêts.

Désignons par A_1, A_2, les capitaux placés par le négociant, par B_1, B_2 les capitaux payés par le banquier, n_1, n_2 et m_1, m_2 les nombres de jours comptés depuis chacune des opérations énoncées jusqu'à la date de clôture.

$A_1 + A_2 - B_1 - B_2$ exprime la balance des capitaux.

$\frac{A_1 n_1 + A_2 n_2 - B_1 m_1 - B_2 m_2}{D}$ est la balance des intérêts, D désignant le diviseur correspondant au taux d'intérêt.

Méthode indirecte.

La méthode indirecte est fondée sur cette remarque, fort simple, que pour trouver l'intérêt d'un capital depuis le 15 avril par exemple, jusqu'à la fin de l'année, on peut calculer l'intérêt pour l'année entière à condition d'en retrancher l'intérêt depuis le commencement de l'année jusqu'au 15 avril.

Soit N le nombre total des jours depuis la date de l'ouverture jusqu'à celle de la clôture du compte. Le capital A_1 est placé n_1 jours avant la date finale, n'_1 jours après la date initiale. En raison de la relation $n'_1 + n_1 = N$, le nombre $A_1 n_1$ qui sert à la détermination de l'intérêt dans la méthode directe peut être remplacé par le produit équivalent $A_1 (N - n'_1)$. Les nombres qui, dans la méthode directe, servent à établir la balance des intérêts

$$A_1 n_1 + A_2 n_2 - B_1 m_1 - B_2 m_2$$

peuvent être remplacés par

$$A_1 (N - n'_1) + A_2 (N - n'_2) - B_1 (N - m'_1) - B_2 (N - m'_2)$$

ou

$$[A_1 + A_2 - B_1 - B_2].\,N - A_1 n'_1 - A_2 n'_2 + B_1 m'_1 + B_2 m'_2.$$

Cette dernière formule indique le principe et la pratique de la *méthode indirecte ou rétrograde*.

Aux dates mêmes des versements A_1, A_2, B_1, B_2 on peut faire le calcul des produits $A_1 n'_1$, A_2, n'_2, $B_1 m'_1$, $B_2 m'_2$ qui correspondent à des intérêts rétrogrades, pour les nombres de jours depuis la date d'ouverture jusqu'aux dates des opérations successives; et, le calcul des intérêts étant ainsi préparé, il ne reste plus, à l'époque de la clôture, qu'à faire le calcul du premier terme $[A_1 + A_2 - B_1 - B_2]$. N, qui correspond à l'intérêt de la balance des capitaux pour la durée totale.

ESCOMPTE

Un capital, payable à une date fixée, peut être remplacé par un autre capital payable à une autre date, sous certaines conditions dont la principale est basée sur la considération des intérêts que le capital peut produire, d'une époque à une autre.

Par exemple, le payement d'une dette actuelle peut être remplacé par le payement, à une date ultérieure, d'une somme comprenant la dette actuelle et ses intérêts. Réciproquement, une dette payable à une échéance fixée peut être acquittée immédiatement par le versement d'une somme qui doit, selon l'équité, être inférieure au montant de la dette, pour tenir compte des intérêts que l'on peut tirer d'un capital immédiatement réalisable. C'est cette dernière opération, substitution d'un capital comptant à un capital payable à terme, qui constitue le fait d'*escompter*.

Nous allons étudier spécialement l'*escómpte* des effets de commerce.

Un *effet de commerce* est un engagement écrit, par lequel un négociant promet de payer à une personne désignée ou à son ordre, à une date fixée, une somme déterminée, pour marchandises reçues.

Le porteur de l'effet peut, avant l'échéance, le négocier, le transmettre, le vendre, le *faire escompter*.

Les banquiers *escomptent*, achètent les effets et donnent en échange de l'argent comptant.

Les opérations d'*escompte* sont journellement pratiquées, sur une vaste échelle, par nos principaux *établissements de crédit*, tels que la *Banque de France*, le *Comptoir d'escompte*, etc., qui rendent par là d'inappréciables services au commerce, en procurant aux négociants, en échange des effets présentés à l'escompte, des capitaux immédiatement disponibles.

Les *calculs d'escompte* ont pour objet principal de déterminer la somme qu'il convient de payer, par anticipation, en échange d'une somme déterminée à recouvrer à une date fixée.

Exposons d'abord la pratique de l'*escompte d'un effet de commerce.*

Supposons un effet de 100 000 *francs payable dans* 3 *mois.*

Le négociant, porteur de l'effet, le remet à un banquier qui donne, en échange, de l'argent comptant. Le banquier qui achète, qui escompte l'effet, n'en paye pas intégralement le montant nominal, 100 000 francs; car le service rendu resterait sans rémunération.

Il exerce sur la valeur nominale certaines retenues, dont la principale est égale à l'intérêt, d'après un taux convenu, du capital nominal, pour le nombre de jours depuis la négociation jusqu'à l'échéance de l'effet.

Cet intérêt soustractif s'appelle l'*escompte commercial proprement dit.*

Souvent les banquiers escompteurs exercent d'autres retenues à titre de commission, de change de place. Mais considérons exclusivement l'*escompte commercial proprement dit, calculé pour* 3 *mois d'après le taux de* 4 °/₀ *l'an, sur un effet de* 100 000 *francs.*

Les opérations donnent lieu au détail suivant :

Valeur nominale	Fr. 100 000
Escompte, pour 3 *mois, à* 4 °/₀ *l'an*	1 000
Valeur au comptant	99 000

Ce procédé, généralement appliqué pour l'escompte des effets de commerce, est-il absolument conforme à la notion qu'il convient de se former du capital, croissant avec le temps, portant intérêt à mesure que le temps s'écoule? Le capital nominal 100 000, qui n'est réalisable que dans 3 mois, peut-il être considéré comme portant dès maintenant intérêt? N'est-il pas plus logique, plus équitable, de prendre en considération l'intérêt du capital comptant qui peut être substitué au capital à terme? Mais si l'on adopte ce dernier principe, on reconnaîtra que la valeur au comptant, 99 000, fournie par la pratique de l'escompte commercial, n'est pas la vraie valeur actuelle du capital à terme dont il s'agit.

Présentons la vérification contradictoire, en ajoutant au capital payé comptant les intérêts qu'il peut produire pendant trois mois, au taux de l'escompte 4 °/₀.

Capital comptant,	Fr. 99 000
Intérêts, pour 3 *mois, à* 4 °/₀ *l'an,*	990
La *valeur à terme* (*capital et intérêts*),	Fr. 99 990

laisse ainsi, pour arriver à 100 000, un *déficit* de 10 francs, qui est précisément l'*intérêt de l'escompte commercial* 1 000.

Le banquier a déduit du montant de l'effet l'intérêt non seulement des 99 000 francs qu'il a versés, mais encore des 1 000 francs qu'il n'a point déboursés.

Quelle somme devrait-il donc verser comptant, pour se conformer à la vraie notion de l'intérêt de l'argent? Il devrait donner le capital qui, avec ses intérêts au bout de 3 mois, donnerait pour valeur définitive fr. 100 000. Le capital déterminé par cette condition se nomme la valeur actuelle du capital à terme. L'intérêt d'un capital, à 4 °/₀ l'an, étant pour 3 mois la centième partie du capital, la valeur actuelle v est telle que

$$v + \frac{1}{100} v = 100\,000$$

ou

$$\frac{101}{100} v = 100\,000$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{100\,000 \times 100}{101}$$

On trouve	$v = 99\,009 \frac{91}{101}$
Intérêt pour 3 mois	$990 \frac{10}{101}$
Valeur définitive	100 000

Ce deuxième mode d'escompte se nomme *escompte rationnel.*

Dans l'escompte commercial, la différence entre le capital à terme et le capital payé comptant est l'intérêt du capital à terme.

Dans l'escompte rationnel, la différence est l'intérêt de la valeur actuelle.

L'escompte *commercial* est encore appelé *escompte en dehors;* et l'*escompte rationnel*, *escompte en dedans.*

L'escompte commercial paraît avoir été adopté en raison de la facilité des calculs. Il est l'intérêt d'un capital immédiatement connu, tandis que l'escompte rationnel est l'intérêt d'un capital qui n'est pas directement donné. Pour le calcul de l'escompte commercial, on peut appliquer les méthodes exposées pour les calculs d'intérêts.

Exemple. — I. *Escompter, Paris* 2 *janvier* 1889, *un effet de fr.* 3684,75 *au* 19 *février, d'après le taux* 6 %.

Le nombre de jours depuis le 2 janvier exclusivement jusqu'au 19 février inclusivement est 48. Il suffit donc de calculer l'intérêt pour 48 jours à 6 %, du capital 3684,75 et de le retrancher du capital même.

Valeur nominale	3684,75
Escompte $\dfrac{3684,75 \times 48}{6000} = \dfrac{3684,75 \times 8}{1000} =$	29,478
Valeur au comptant, ou valeur effective	*Fr.* 3655,272

L'escompte a été calculé par la méthode du diviseur, qui donne lieu à une simplification pour le nombre de jours 48, lequel se trouve multiple de 6.

II. *Escompter,* 4 *février* 1889, *un effet de Fr.* 8563,45 *au* 19 *mars, d'après le taux de* $4\frac{1}{2}$ %.

Du 4 février au 19 mars, il y a 43 jours. Pour calculer l'intérêt à $4\frac{1}{2}$ % pour 43 jours, il est commode d'appliquer la méthode des parties aliquotes.

	Valeur nominale	Fr. 8563,45
Escompte	40 jours $\left(\frac{1}{2}\ ^{0}/_{0}\ \text{du capital}\right)$	42,817
	2 $\left(\frac{1}{20}\ \text{du précédent}\right)$	2,141
	1 $\left(\frac{1}{2}\ \text{du précédent}\right)$	1,07
	Valeur au comptant	*Fr.* 8517,422

N. B. — Il convient de faire en même temps l'addition des intérêts partiels et la soustraction de leur somme que l'on retranche de la valeur nominale.

Taux réel. — Le banquier qui escompte un effet de commerce achète en réalité cet effet moyennant un prix qu'il paye immédiatement, et il se trouve autorisé à recouvrer, à l'échéance marquée, le montant nominal de l'effet. L'excès du capital perçu en recouvrement sur le capital déboursé représente un bénéfice pour le banquier, et peut être considéré comme l'intérêt du capital primitivement déboursé. Si l'opération se faisait suivant les principes de l'escompte rationnel, il y aurait identité entre le taux d'escompte et le taux d'intérêt de l'argent déboursé par le banquier. Mais dans la pratique de l'escompte commercial se rencontre encore cette anomalie que le taux d'escompte énoncé n'est point du tout le taux de l'intérêt que le banquier retire de son argent. Proposons-nous, pour éclaircir la question, de résoudre le problème suivant :

D'après quels taux réels fait valoir son argent le banquier qui pratique l'escompte commercial, d'après le taux de 6 $^{0}/_{0}$, *sur des effets :* 1° *à* 1 *an de date;* 2° *à* 6 *mois;* 3° *à* 47 *jours?*

Dans le 1er *cas*, sur 100 francs de capital nominal, le banquier retient 6 francs et paye comptant $100 - 6 = 94$ francs. A la fin de l'année, il perçoit 100 francs; ce recouvrement lui rend les 94 francs qu'il a déboursés, et en outre 6 francs qui peuvent être regardés comme l'intérêt pour 1 an du capital 94.

Le taux d'intérêt est donc $\frac{6}{94}$, c'est-à-dire que l'intérêt de 100 francs serait

$$\frac{6 \times 100}{100 - 6} = 6,3829\ldots$$

Dans le 2ᵉ *cas*, sur 100 francs de capital nominal, le banquier retient 3 francs et paye comptant $100 - 3 = 97$ francs. Ces 97 francs lui procurent un recouvrement de 100 francs au bout de 6 mois; ils ont ainsi produit 3 francs d'intérêt en 6 mois, et, suivant la même proportion, ils produiraient 6 francs en 1 an. Le taux d'intérêt est donc $\frac{6}{97}$, c'est-à-dire que l'intérêt de 100 francs est

$$\frac{6 \times 100}{97} = 6,1855$$

Dans le 3ᵉ *cas*, le temps étant exprimé en jours, nous prendrons pour capital type 6000, qui d'après le taux de 6 °/ₒ produit 1 d'intérêt par jour. Sur un capital nominal de 6000 fr., le banquier retient 47 francs, et paye comptant $6000 - 47 = 5953$ fr. Ces 5953 francs donnent droit à un recouvrement de 6000 francs, au bout de 47 jours; ils ont ainsi rapporté 47 francs en 47 jours, soit 1 franc par jour, de sorte que pour l'année ou 360 jours, et pour le capital 100 francs, l'intérêt serait

$$\frac{360 \times 100}{5953} = 6,0473\ldots$$

On remarque que *plus l'échéance est éloignée, plus le taux de placement dépasse le taux de l'escompte.*

Il est facile d'établir *les formules générales qui expriment le taux réel de placement en fonction du taux de l'escompte.*

Si t désigne le taux de l'escompte, le banquier qui pratique l'escompte commercial sur un effet à 1 an de date, place son argent d'après le taux réel $\frac{t}{100-t}$, soit, pour rapporter à 100 francs, $\frac{t\times 100}{100-t}$.

Lorsque l'effet est à 6 mois, le taux réel est, pour 100 francs, $\frac{t\times 100}{100-\frac{1}{2}t}$; et, plus généralement, lorsque l'effet est payable après une fraction f d'année, le taux réel du placement a pour expression $\frac{t\times 100}{100-f.t}$.

Pour un effet à n jours de date, le taux de placement sera

$$\frac{t\times 36000}{36000-nt}$$

ou encore plus simplement

$$\frac{36000}{\mathrm{D}-n}$$

D désignant ce que l'on nomme dans les calculs d'intérêts le diviseur, nombre égal au quotient de 36000 par le taux.

Frais accessoires. — Souvent le banquier escompteur retient, outre l'escompte commercial proprement dit, une commission, un droit de change de place que l'on évalue en tant pour cent de la valeur nominale.

EXEMPLES :

I. — *Escompter,* 5 *janvier* 1889, *un effet de* 22 875 *fr. au* 1er *mars; taux d'escompte* 4 %, *commission* $\frac{1}{8}$ %; *change de place* $\frac{3}{16}$ %.

Du 5 janvier au 1er mars il y a 55 jours; l'escompte, égal à l'intérêt de 22 875 pour 55 jours à 4 %, se calculera aisément par la méthode des parties aliquotes. Voici le détail des calculs.

Valeur nominale		Fr. 22 875
Escompte	pour 45 jours $\left(\frac{1}{2}\ \%\ \text{du capital}\right)$	114,375
	5 $\left(\frac{1}{9}\ \text{du précédent}\right)$	12,708
	5 id.	12,708
Commission $\frac{1}{8}$ % du capital, ou $\frac{1}{4}$ de l'intérêt de 45 jours,		28,594
Change de place	$\frac{1}{8}$ %	28,594
	$\frac{1}{16}$ %	14,297
Valeur au comptant		*Fr.* 22663,724

Remarque. — Les banquiers comprennent assez souvent dans l'évaluation du nombre des jours d'intérêt le jour de la négociation et le jour de l'échéance, c'est-à-dire 1 jour de plus que le nombre exact.

Dans certains pays, tels que l'Angleterre et l'Amérique, la loi accorde au souscripteur de l'effet 3 jours de grâce, c'est-à-dire la facilité de ne payer que dans un délai de 3 jours à partir du jour fixé sur le billet. Aussi les banquiers ont-ils adopté comme règle de calculer l'escompte pour 3 jours de plus que le nombre exact depuis la négociation jusqu'à l'échéance. En Angleterre, on compte l'année de 365 jours pour les calculs d'intérêts et d'escompte.

II. — *Escompter, New-York,* 15 *décembre* 1888, *un effet de* \$ 4250 *au* 28 *janvier* 1889. *Taux d'escompte* 6 %; *change de place* $\frac{1}{4}$ %.

Le nombre exact de jours, du 15 décembre au 28 janvier, étant 44, l'intérêt soustractif devra être calculé pour 47 jours, afin de tenir compte des 3 jours de grâce.

	Valeur nominale	\$ 4250
Escompte $\frac{4250 \times 37}{6000}$		33,291
Change de place $\frac{1}{4}$ % du capital		10,625
	Valeur au comptant	\$ 4206,084

III. — *Escompter, Londres* 1er *février* 1889, *un effet de* £ 463. 17. 6 *au* 17 *mars. Taux d'escompte* 5 %*; commission* 4 *shillings pour* £ 100*; change de place* 5 *shillings pour* £ 100.

Pour la commodité des calculs, nous écrirons la valeur nominale sous la forme décimale £ 463,875.

Du 1er février au 17 mars, le nombre exact de jours est 44; nous compterons 47.

	Valeur nominale	£ 463,875
Escompte $\frac{463,875 \times 47}{7300} =$		2,9866
Commission, 4 sh. pour £ 100, soit 2 ‰		0,9277
Change de place, 5 sh. pour £ 100, soit $\frac{1}{4}$ %		1,1597
	Valeur au comptant	£ 458,801

ou £ 458. 16sh. 0d $\frac{1}{4}$

Exercices de calcul mental sur les escomptes.

Demande. *Valeurs escomptées d'effets de Fr.* 60, 600, 6 000, 60 000, *à* 90 *jours, taux d'escompte* 6 %.

Réponse. 59,10; 591; 5910; 59100.

Explication. Comme nous l'avons observé dans les calculs d'intérêts, le capital 6000 francs à 6 % donne 1 franc d'intérêt par jour; le capital 60 donne 0,01; le capital 600, 0,1, etc.

De 60 fr. il suffit de retrancher	0,90
De 600	9
De 6000	90
De 60000	900

D. *Valeurs escomptées d'effets de* Fr. 90, 900, 9 000, 90 000 *à* 30 *jours, taux d'escompte* 6 %.

R. 89,55 895,50 8955 89550.

Le capital $9000 = 6000 \times 1\frac{1}{2}$.

Le capital 9 000 produit alors 1,50 d'intérêt par jour; 90 fr. 1 centime $\frac{1}{2}$ par jour. Par conséquent, pour 30 jours, les escomptes des capitaux énoncés sont :

0,45 4,50 45 450

d'où résultent les valeurs escomptées ci-dessus.

D. *Valeur,* 7 *janvier* 1889, *d'un effet de* 180 *fr. au* 14 *mars, taux d'escompte* 6 %.

R. 178,02.

D'après le taux de 6 %, 60 francs donnent un centime d'intérêt ou d'escompte par jour. Le capital $180 = 60 \times 3$ produit trois fois plus; du 7 janvier au 14 mars, il y a 66 jours; l'escompte est donc $0,66 \times 3 = 1,98$.

D. *Valeur escomptée d'un effet de* 4 500 *francs, à* 75 *jours. Taux d'escompte* 4 %; *commission* $\frac{1}{4}$ %.

R. 4451,25.

D'après le taux de 4 %, le capital 9 000 donne lieu à un escompte de 1 franc par jour; le capital 4 500, qui en est la moitié, donne $\frac{1}{2}$ franc par jour, soit pour 75 jours 37,50

La commission est égale à $\frac{1}{4}$ de 45, soit 11,25

Les deux retenues forment le total de 48,75

Il suffit de retrancher 48,75 de 4 500; ce qui se fait en retranchant 100, et ajoutant après coup le complément à 100 du nombre 48,75.

D. *Valeur,* 2 *janvier, d'un effet de* 6000 *francs, au* 19 *février. Taux d'escompte* $5\frac{1}{2}$ %.

R. 5956.

Au taux de 6 °/₀, l'escompte de 6000 serait égal à autant de francs qu'il y a de jours du 2 janvier au 19 février, soit 48. De l'escompte 48, qui correspond au taux auxiliaire 6 °/₀, il faut retrancher $\frac{1}{12}$, c'est-à-dire 4, pour avoir l'escompte au taux de $5\frac{1}{2}$ °/₀. La valeur escomptée est donc $6000 - 44 = 5956$.

D. *Valeur,* 15 *decembre, d'un effet de* 8000 *francs au* 17 *janvier. Taux d'escompte* 6 °/₀; *commission et change* $\frac{1}{4}$ °/₀.

R. 7936.

Le capital $8000 = 6000 \times 1\frac{1}{3}$; le nombre de jours est $16 + 17 = 33$.

L'escompte commercial est donc $33 \times 1\frac{1}{3} =$	44
La commission $\frac{1}{4}$ de 80	20
Total des retenues	64

D. *Valeur,* 1er *mai, d'un effet de* 300 *francs, au* 15 *juin. Taux d'escompte* 4 °/₀; *frais accessoires* $\frac{1}{8}$ °/₀.

R. 298,125.

Le nombre de jours étant 45, l'escompte est $\frac{1}{2}$ °/₀ du capital nominal, c'est-à-dire 1,50

nominal, c'est-à-dire	1,50
La commission $\frac{1}{8}$ de 3 =	0,375
Total à déduire	1,875

On voit immédiatement que le résultat sera 298 plus une fraction décimale qui est le complément à l'unité de la fraction 0,875.

D. *Valeur,* 17 *mars, d'un effet de* 1800 *fr., au* 23 *mai. Taux d'escompte* 5 °/₀; *change de place* $\frac{1}{4}$ °/₀.

R. 1778,75.

Le capital proposé est le quart de 7200, qui produit 1 franc d'intérêt par jour; l'escompte commercial est donc marqué par le quart du nombre des jours du 17 mars au 23 mai, 67 jours.

Le quart de 67 est	16,75
Le quart de 18	4,50
Total	21,25

$1800 - 21{,}25 = 1778{,}75$.

D. *Valeur,* 18 *février, de deux effets de* 1000 *francs, le premier au* 20 *mars, le deuxième au* 10 *avril. Taux d'escompte* $4\frac{1}{2}$ °/₀; *commission et change* $\frac{1}{4}$ °/₀.

R. 1984,875.

Le nombre de jours est, pour le premier, 30, pour le deuxième $30 + 21 = 51$. L'escompte des deux effets est égal à l'escompte de l'un d'eux pour 81 jours; pour 80 jours à $4\frac{1}{2}$ °/₀ l'escompte est 10; pour 1 jour, $\frac{1}{80}$, 0,125. com^on^. 5 fr.

D. *Valeur escomptée d'un effet de Fr.* 4000 *à* 90 *jours. Taux* $5\frac{1}{4}$ °/₀; *change de place* $\frac{1}{8}$ °/₀.

R. 3942,50.

Si le taux était 5 °/₀, l'escompte pour 72 jours serait 40 fr et pour 90, $\frac{1}{4}$ en plus, c'est-à-dire 50 francs.

D'après le taux de $5\frac{1}{4}$, l'escompte sera	52,50
Le change de place est $\frac{1}{8}$ de 40, soit	5
Total	57,50

Valeur au comptant $4000 - 57{,}50 = 3942{,}50$.

Remarque. Le capital 400 donne, pour 3 mois, un intérêt ou escompte égal au taux même : l'intérêt est, en effet, d'après les formules établies, $\frac{400 \times 3 \times t}{1200} = t$.

Il est très facile de trouver, d'après cette remarque, l'intérêt ou l'escompte d'un capital égal à un multiple ou sous-multiple de 400.

D. *Escompte commercial, d'après le taux de* $4\frac{7}{8}$ °/₀, *d'un capital de* 2400 *francs payable dans* 3 *mois.*

R. 29,25.

Le capital proposé $2400 = 400 \times 6$, et d'après la remarque précédente, l'escompte est 6 fois le taux.

$$4\frac{7}{8} \times 6 = 24 + \frac{42}{8} = 24 + 5 + \frac{2}{8} = 29\frac{1}{4}$$

D. *Escompte commercial, d'après le taux de* $4\frac{3}{4}$, *d'un capital de* 6200 *francs payable dans* 72 *jours.*

R. 58,90.

A 5 °/₀ l'escompte serait 62 ; à $4\frac{3}{4}$, il est $62 - \frac{1}{20} . 62 = 62 - 3{,}10 = 58{,}9$.

D. *Escompte commercial et valeur escomptée d'un effet de* $ 7450 *à* 60 *jours. Taux* 6 °/₀.

R. 78,225 *escompte*, $ 7371,775 *valeur au comptant.*

L'effet étant à 60 jours, l'escompte doit être calculé pour 63 jours.

Pour 60 jours l'escompte est	$\frac{1}{10}$ du capital	74,50
3	$\frac{1}{20}$ du précédent	3,725
	Total	78,225

D. *Valeur*, 10 *mars, d'un effet de* $ 5647, *au* 6 *mai. Taux d'escompte* 6 °/₀.

R. $ 5590,53.

Du 10 mars au 6 mai, il y a 57 jours. L'escompte doit être calculé pour 60 jours; à 6 °/₀, il est 56,47. Pour avoir la valeur escomptée, on retranche 57 et l'on ajoute après coup 0,53 complément à l'unité de 0,47.

D. *Valeur*, 12 *avril, d'un effet de* £ 360 *au* 21 *juin. Taux d'escompte* 5 °/₀.

R. £ 356. 8^{sh}.

Du 12 avril au 21 juin il y a 70 jours; l'escompte doit être calculé pour 73 jours; et l'on sait qu'au taux de 5 °/₀, l'année étant comptée de 365 jours, l'intérêt pour 73 jours est $\frac{1}{100}$ du capital.

L'escompte commercial est donc ici £ 3,60 ou £ 3.12^{sh}

La valeur escomptée sera 360 — 3.12 = £ 356.8.

D. *Valeur au comptant d'un billet de* $ 100 *à* 90 *jours. Taux d'escompte* 6 °/₀.

R. $ 98,45.

L'intérêt du capital 100, à 6 °/₀, pour 90 jours est	1,50
pour 3 jours de grâce	0,05
	1,55

100 — 1,55 = 98,45.

D. *Un effet de Fr.* 100, *escompté d'après le taux de* 4 °/₀, *donne pour valeur effective* 99,50. *Dans combien de jours est-il payable ?*

R. 45 jours.

L'escompte étant égal à 1 p. 100 lorsque le nombre de jours est 90, doit être $\frac{1}{2}$ lorsque le nombre de jours est 45, et inversement le nombre de jours est 45 lorsque l'escompte commercial est $\frac{1}{2}$ °/₀.

D. *Un effet de* 12000 *francs, escompté d'après le taux de* 6 °/₀, *donne pour valeur effective* 11926. *Dans combien de jours est-il payable?*

R. 37 jours.

Le capital 12000, double de 6000, donne lieu à un escompte de 2 francs par jour. L'escompte étant 74, le nombre de jours est 37.

D. *Un effet de Fr.* 1000, *escompté à* 4 °/₀, *avec* $\frac{1}{2}$ °/₀ *de commission, est payé comptant Fr.* 986. *Dans combien de jours arrive son échéance?*

R. 81 jours.

La commission $\frac{1}{2}$ °/₀ sur 1000 donne 5 francs. L'escompte commercial proprement dit est donc 9; or on sait qu'il est 1 pour 1000 pour 9 jours; il est 9 °/₀₀ pour $9 \times 9 = 81$ jours.

D. *Quel est l'escompte commercial d'un billet de* 3 000 *fr., à* 58 *jours. Taux* $5\frac{1}{2}$ °/₀.

R. 26,58.

On fait d'abord le calcul d'après le taux auxiliaire 6 °/₀.

L'escompte pour 60 jours, à 6 °/₀, serait 30 francs; pour 58 jours il faut retrancher $\frac{2}{60}$ ou $\frac{1}{30}$ de ce résultat, c'est-à-dire 1 franc, et l'on a ainsi 29 francs pour l'escompte à 6 °/₀.

Il est encore plus simple de remarquer qu'au taux de 6 °/₀, le capital 3 000, moitié de 6 000, produit $\frac{1}{2}$ franc par jour, par conséquent donne, pour 58 jours, 29 francs.

De l'escompte à 6 °/₀ il faut retrancher $\frac{1}{12}$ pour avoir l'escompte à $5\frac{1}{2}$ °/₀.

Le douzième de 29 c'est $2\frac{5}{12}$ ou 2,4166

$29 - 2{,}4166... = 26{,}5833...$ c'est la réponse.

D. *Un effet de* £ 1 000, *escompté pour* 75 *jours, donne pour valeur effective* £ 992.10. *Quel est le taux d'escompte?*

R. 3,65 °/₀.

L'escompte est égal à £ $7\frac{1}{2}$. Si l'effet était de 100 au lieu de

1 000 l'escompte serait £ 0,75 pour 75 jours, soit alors £ 3,65 pour 365 jours.

D. *Un effet de Fr.* 100 *à* 3 *mois donne pour valeur escomptée* 99 $\frac{1}{8}$. *Quel est le taux d'escompte?*

R. $3 \frac{1}{2}$.

Si l'escompte était 1, le taux serait 4 °/₀. L'escompte est $\frac{7}{8}$, le taux est donc $4 \times \frac{7}{8} = 3 \frac{1}{2}$.

BORDEREAUX D'ESCOMPTE

Les opérations et calculs d'escompte peuvent s'appliquer à plusieurs capitaux proposés à la fois; il suffit de déterminer la valeur escomptée de chaque capital, et de faire la somme des résultats. Mais il se présente des simplifications notables quand on demande la valeur collective de tous les effets réunis.

L'escompte commercial de chaque effet est égal au produit de la valeur nominale par le nombre de jours, depuis la négociation jusqu'à l'échéance, divisé par le diviseur spécial qui convient à chaque taux.

Soient $a, a', a'' \ldots$ les valeurs nominales,
$n, n', n'' \ldots$ les nombres de jours.

les escomptes sont $\frac{an}{d}, \frac{a'n'}{d}, \frac{a''n''}{d} \ldots$

La somme de ces escomptes partiels

$$\frac{an}{d} + \frac{a'n'}{d} + \frac{a''n''}{d} + \ldots$$

est égale, d'après un théorème démontré, à la somme des dividendes divisée par le diviseur commun

$$\frac{an + a'n' + a''n'' + \ldots}{d}$$

Ainsi, pour connaître l'escompte total des effets proposés, il suffira de former les produits des valeurs nominales par les nombres de jours correspondants, d'additionner ces produits et de diviser le total par le diviseur qui convient au taux d'escompte.

Les détails des calculs sont résumés dans un tableau que l'on nomme *bordereau d'escompte*. Les données et les résultats sont disposés en plusieurs colonnes : valeurs nominales, dates des échéances, jours d'intérêts, *nombres* ou produits des valeurs nominales pour les jours, etc.

Dresser le bordereau d'escompte, Paris, 17 *novembre* 1888, *des effets suivants :*

Fr. 5992,75	*au*	27	*novembre*	1888
12854,25	*au*	29	*décembre*	
7500	*au*	7	*janvier*	1889
14862,50	*au*	7	*février*	
12875	*au*	7	*mars.*	

Taux d'escompte commercial $3\frac{3}{4}$ °/₀.

Commission $\frac{1}{4}$ °/₀.

Change de place $\frac{3}{16}$ °/₀.

Le montant effectif du bordereau d'escompte est égal à la somme des valeurs nominales diminuées des retenues opérées par le banquier escompteur, comprenant :

1° l'escompte commercial;

2° la commission;

3° le change de place.

L'escompte commercial se calculera en multipliant chaque valeur nominale par le nombre de jours comptés depuis la négociation jusqu'à l'échéance et divisant le total des produits ainsi obtenus par le diviseur correspondant au taux de l'intérêt.

Le diviseur serait, pour le taux de $3\frac{3}{4}$, 9600.

Il paraît plus commode de calculer d'abord les intérêts d'après le taux auxiliaire 4 °/₀, auquel correspond le diviseur 9000, et de retrancher $\frac{1}{16}$ de ce premier résultat.

Valeurs nominales.	Jours d'escompte.	Produits.
5992,75	10	59927,50
12854,25	42	539878,50
7500	51	382500
14862,50	82	1218725
12875	110	1416250
54084,50		3617281

	$\frac{1}{9000}$	401,92
376,80 esc$^{\text{te}}$ commercial	$-\frac{1}{16}$	25,12
135,21 commission	Int. à $3\frac{3}{4}$ %	376,80
$\frac{1}{2}$ 67,60 } ch. de place		
$\frac{1}{2}$ du précéd$^{\text{t}}$ 33,80 } ch. de place		
53471,09 *valeur effective, au comptant.*		

N. B. — Dans les *banques* et *établissements de crédit*, tels que le *Comptoir d'escompte*, le *Crédit Lyonnais*, etc., on a souvent l'occasion de dresser un bordereau des effets remis par un négociant qui les présente à l'escompte. Les effets peuvent être payables dans des places différentes, pour lesquelles les frais accessoires ne soient pas au même tarif.

En pareil cas, au lieu de calculer le change de place sur l'ensemble des capitaux, on doit le calculer séparément pour chaque effet, et additionner les résultats partiels. Mais toutes les fois que les commissions et changes de place sont au même tarif pour les effets présentés ensemble à l'escompte, il convient, pour simplifier et abréger les calculs, d'évaluer les frais accessoires sur le total des valeurs nominales.

Bordereau de la négociation, Paris, 15 janvier 1888, des effets ci-dessous détaillés. Taux d'escompte 4 °/°.

Commission $\frac{1}{2}$ °/₀.

VALEURS NOMINALES (a).	ÉCHÉANCES.	JOURS D'INTÉRÊT (n).	NOMBRES. (PRODUITS $\frac{a \times n}{1\,000}$).
47 000	16 mars.	61	2 867
39 000	10 avril.	86	3 354
85 000	1er mai.	107	9 095
171 000			15 316
			$\frac{1}{9}$ 1 701,777

1 701,777 escompte.
855 commission.
168 443,223 *valeur au comptant.*

Remarque. — Dans cet exemple, tous les produits de la forme $a \times n$ donnent des nombres, multiples de mille, et comme la somme doit être divisée par 9 000, il est naturel de ne faire figurer dans la colonne nombres que les nombres de mille, et de diviser la somme par 9.

Bordereau de la négociation, *à Paris*, 22 *décembre* 1888, *d'effets de commerce. Taux d'escompte* $4\frac{3}{4}$ °/₀; *commission* $\frac{1}{8}$ °/₀; *change de place* $\frac{3}{16}$ °/₀.

Valeur nominale, fr. 20 857,50. — **Valeur effective, fr.** 20 715,14.

VALEURS NOMINALES.	ÉCHÉANCES.	JOURS D'INTÉRÊT.	NOMBRES.	
8 753,80	8 janvier 1889.	17	148814,6	
4 597,35	17 — —	26	119531,1	
5 663,50	30 — —	39	220976,5	
1 842,85	12 février —	52	95828,2	
20 857,50			585 050,4	72
				81,257
			Intérêts ou escompte à 5 o/o...........	81,257
			— $\frac{1}{20}$	4,063
			Escompte à $4\frac{3}{4}$.....	77,194

77,19 escompte.

26,07 commission $\frac{1}{8}$ o/o.

26,07 }
13,03 } change de place $\frac{3}{16}$ °/₀.

20 715,14 *valeur au comptant.*

Le calcul de l'escompte a été effectué d'abord d'après le taux auxiliaire de 5 °/₀, et il a suffi de retrancher $\frac{1}{20}$ du résultat provisoire pour obtenir l'escompte d'après le taux donné $4\frac{3}{4}$.

Au lieu d'effectuer la division par 72 suivant les règles ordinaires de la division, il est plus expéditif de prendre d'abord $\frac{1}{8}$ du dividende, et $\frac{1}{9}$ de ce premier résultat.

Bordereau de la négociation, *à Londres, 1er décembre* 1888, *d'effets ci-dessous détaillés. Taux d'escompte* $4\frac{3}{4}$ %; *commission 5 shillings pour* £ 100; *change de place* 2 *shillings pour* £ 100.

Valeur nominale £ 10670.17.6 — **Valeur effective** £ 10541.8.11 $\frac{1}{2}$

VALEURS NOMINALES.	ÉCHÉANCES.	JOURS D'ESCOMPTE.	NOMBRES.	
£ sh d				
3 572. 8.6	14 janvier.	47	167 903,975	
2 450. 9	26 janvier.	59	144 577,55	
4 648	21 février.	85	395 080,	
10 670.17.6			707 561,525	
ou dans le système décimal.			7 075,615	73
			Intérêts à 5 o/o	96,926
10 670,875			— $\frac{1}{20}$	4,846
			Intérêts à $4\frac{3}{4}$ o/o	92,080

92,080 escompte.

26,677 commission $\frac{1}{4}$ %.

10,670 change de place 1 ‰.

10 541,448 *valeur au comptant.*

ou £ 10541. 8. 11 1/2.

Les calculs d'escompte et de commission s'effectuent de préférence dans le système décimal.

Le nombre de jours est, pour chaque effet, augmenté de 3.

L'escompte est calculé d'abord d'après le taux auxiliaire de 5 °/₀. Le diviseur est 73, l'année étant comptée de 365 jours.

Longs bordereaux d'escompte.

Dans les inventaires des grands établissements de crédit, lorsqu'il se présente une suite de capitaux escomptés jour par jour, il y a lieu de simplifier les calculs. Considérons, par exemple, une suite de capitaux présentés à l'escompte, payables à 1 jour d'intervalle, le premier dans 60 jours, le dernier dans 77 jours; le taux d'escompte est 6 °/₀. On pourra dresser le tableau suivant :

	CAPITAUX.	JOURS D'INTÉRÊT.	PRODUITS.
S_1.......	a..............	60	»
	b..............	$61 = 60 + 1$	b
	c..............	$62 = 60 + 2$	$2.c$
	d..............	$63 = 60 + 3$	$3.d$
	e..............	$64 = 60 + 4$	$4.e$
	f..............	$65 = 60 + 5$	$5.f$
S_2.......	g..............	66	»
	h..............	$67 = 66 + 1$	h
	i..............	$68 = 66 + 2$	$2.i$
	k..............	$69 = 66 + 3$	$3.k$
	l..............	$70 = 66 + 4$	$4.l$
	m..............	$71 = 66 + 5$	$5.m$
S_3.......	n..............	72	»
	p..............	$73 = 72 + 1$	p
	q..............	$74 = 72 + 2$	$2.q$
	r..............	$75 = 72 + 3$	$3.r$
	s..............	$76 = 72 + 4$	$4.s$
	t..............	$77 = 72 + 5$	$5.t$
T.......	T..............		P

Total des escomptes $\frac{T}{100} + \frac{S_2}{1000} + \frac{S_3 \times 2}{1000} + \frac{P}{6000}$

Le total des escomptes est bien donné par la formule

$$\frac{T}{100} + \frac{S_2}{1000} + \frac{S_3 \times 2}{1000} + \frac{P}{6000}$$

car tous les capitaux proposés, dont le total est T, produisent intérêt ensemble pendant les 60 premiers jours, et l'on sait que l'intérêt, à 6 %, pour 60 jours, est égal à la centième partie du capital ;

Les 6 capitaux dont la somme est S_2 produisent, en outre, intérêt pendant 6 jours de plus ; et l'on sait que l'intérêt pour 6 jours est égal à la 1000e partie du capital ;

Les six capitaux dont la somme est S_3 produisent intérêt pendant 12 jours de plus ; l'intérêt pour 6 jours étant $\frac{S_3}{1000}$, pour 12 jours il sera $\frac{S_3 \times 2}{1000}$;

Enfin le capital b produit intérêt pendant 1 jour qui n'a pas été compté, le capital c pendant 2 jours, etc... ; de sorte que les produits b, $2c$, $3d$, etc... doivent être divisés par 6000, suivant la méthode du diviseur.

On peut même, ainsi que la remarque en a été faite par Cauchy, se dispenser d'effectuer les multiplications, et obtenir le total des produits par de simples additions. Il suffit, pour les capitaux du premier groupe, de prendre d'abord le dernier

nier	f
d'y ajouter le précédent e, et d'écrire	$f + e$
on ajoute le précédent d	$f + e + d$
puis c	$f + e + d + c$
puis b	$f + e + d + c + b$
Le total de ces sommes partielles sera	$5f + 4e + 3d + 2c + b$

Dans la pratique, on disposera dans une colonne spéciale les sommes que nous venons d'indiquer, on écrira f sur la ligne du capital f, puis en remontant, la somme $f + e$ sur la ligne de e, et ainsi de suite. Même explication pour les autres groupes.

APPLICATION NUMÉRIQUE.

Bordereau de l'escompte de 18 effets payables successivement, à 1 jour d'intervalle, le 1er dans 60 jours.

	CAPITAUX.		JOURS.	SOMMES PARTIELLES.	
19 320	a	8 569	60	»	
	b	1 585	61	10 751	$f+e+d+c+b$
	c	3 903	62	9 166	$f+e+d+c$
	d	115	63	5 263	$f+e+d$
	e	4 308	64	5 148	$f+e$
	f	840	65	840	f
8 609	g	2 043	66	»	
	h	2 924	67	6 566	$m+l+k+i+h$
	i	1 307	68	3 642	$m+l+k+i$
	k	1 695	69	2 335	$m+l+k$
	l	337	70	640	$m+l$
	m	303	71	303	m
19 734	n	1 315	72	»	
	p	208	73	18 419	$t+s+r+q+p$
	q	9 217	74	18 211	$t+s+r+q$
	r	618	75	8 994	$t+s+r$
	s	3 000	76	8 376	$t+s$
	t	5 376	77	5 376	t
47 663		47 663		104 030	

Calcul de l'escompte par la formule.

	$\frac{T}{100}$	476,63
	$\frac{S_2}{1000}$	8,609
	$\frac{S_3 \times 2}{1000}$	39,468
	$\frac{P}{6000}$	17,338
Total des escomptes.		542,045

La valeur escomptée des 18 effets ensemble s'obtient comme il suit :

	47663	somme des valeurs nominales.
moins	542,05	escompte total.
	47120,95	*valeur escomptée.*

REMARQUES. — I. Lorsque le taux d'escompte n'est pas 6 %, on peut, soit calculer l'escompte total d'abord à 6 % et modifier le résultat suivant le rapport du taux donné au taux auxiliaire 6; soit faire directement le calcul de l'escompte d'après le taux proposé, en groupant convenablement les capitaux.

Si le taux est $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, 5, il paraît préférable d'employer le taux 6 comme taux auxiliaire.

Si le taux est $4\frac{1}{2}$, on pourra opérer directement, en groupant les capitaux par 8, chaque suite commençant par le capital pour lequel le nombre de jours d'escompte est multiple de 8; car à $4\frac{1}{2}$ % pour 8 jours, l'intérêt est $\frac{1}{1000}$ du capital

pour 80 jours $\frac{1}{100}$ du capital

Si le taux est 4 %, on groupera les capitaux par 9.
Si le taux est 3 %, on les rangera par groupes de 12.

II. Dans les explications que nous venons de donner, nous avons supposé une suite de capitaux se succédant régulièrement à 1 jour d'intervalle, de sorte que les nombres de jours d'escompte sont des nombres entiers consécutifs. Cette condition n'est nullement nécessaire, il peut y avoir des lacunes, des jours où il n'y ait pas de capital à escompter. La méthode n'en est pas moins applicable, car dans la théorie qui la justifie, on peut supposer un des nombres a, b, c... égal à zéro, cette hypothèse n'infirme en rien le raisonnement.

GÉNÉRALISATION ET COMPARAISON DES DEUX MODES D'ESCOMPTE.

I. *Escompte commercial.*

L'escompte commercial ou escompte en dehors d'un capital payable à terme est égal à l'intérêt de ce capital pour le temps compris entre la négociation et l'échéance. Il est facile d'exprimer par des formules générales les escomptes et les valeurs au comptant.

VALEUR NOMINALE.	UNITÉS DE TEMPS.	ESCOMPTES.	VALEURS AU COMPTANT.
A	n années.	$\frac{A.t.n.}{100}$	$A\left(1-\frac{tn}{100}\right)$
A	n mois.	$\frac{A.t.n.}{1\,200}$	$A\left(1-\frac{tn}{1\,200}\right)$
A	n jours.	$\frac{A.t.n.}{36\,000}$ ou $\frac{A.n}{d}$	$A\left(1-\frac{t.n}{36\,000}\right)$ ou $A\left(1-\frac{n}{d}\right)$

Dans la pratique des affaires, l'escompte commercial ne s'applique qu'à des effets de commerce ou autres effets similaires circulant dans les banques d'escompte; le temps est exprimé soit par un petit nombre de mois, soit le plus souvent par un nombre de jours qui ne dépasse guère 90. La vraie formule pratique de l'escompte commercial est $\frac{An}{d}$, dans laquelle $d=\frac{36\,000}{t}$; et celle de la valeur au comptant est $A\times\left(1-\frac{n}{d}\right)$ ou $A\times\frac{d-n}{d}$

II. *Escompte rationnel.*

Établissons les formules correspondantes en appliquant les principes de l'*escompte rationnel.*

Supposons le capital nominal A payable dans n années. La *valeur actuelle* est telle que, augmentée de ses intérêts d'après un taux donné t au bout de n années, elle procure une valeur définitive égale à A. Les intérêts qui proviennent de la valeur actuelle et comblent la différence entre la valeur actuelle et la valeur nominale payable à terme représentent l'*escompte rationnel*.

D'après ces définitions on peut exprimer et calculer soit la *valeur actuelle*, soit l'*escompte rationnel* même, par différents tours de raisonnement.

1re Solution. — Le capital nominal A peut être considéré comme la somme de deux quantités : la valeur actuelle et l'escompte; ces deux quantités sont respectivement proportionnelles à 100 et à $t.n$, car le capital 100 donnerait, dans les mêmes conditions de temps et de taux, pour intérêt nt, et l'on sait que, dans ces conditions, les capitaux et les intérêts sont respectivement proportionnels. La question revient donc à partager la valeur nominale A en deux parties proportionnelles à 100 et à $t.n$.

En appliquant la règle établie pour les partages proportionnels, on trouve

Pour *valeur actuelle* $\quad A \times \dfrac{100}{100 + tn}$

Pour *escompte rationnel* $A \times \dfrac{tn}{100 + tn}$

Ces deux quantités ont bien pour somme A, et la seconde est bien égale à l'intérêt de la première, car

$$A \times \frac{100}{100 + tn} \times \frac{tn}{100} = A \times \frac{tn}{100 + tn}$$

2e solution. — En observant que, dans les mêmes conditions de taux et de temps, les capitaux et les intérêts sont respectivement proportionnels, on peut prendre un capital type, soit 100 francs, comme capital primitif; il donnerait lieu à un intérêt tn et donnerait comme valeur définitive $100 + t.n$.

Réciproquement, un capital nominal, $100+tn$, payable dans n années, donnerait pour valeur actuelle 100, pour escompte tn. Si pour un capital nominal $100+tn$ la valeur actuelle est 100, pour un capital nominal 1, la valeur actuelle est $\frac{100}{100+tn}$ et pour un capital nominal A, elle est $A\times\frac{100}{100+tn}$.

En appliquant le même raisonnement, on trouvera pour expression de l'*escompte* $A\times\frac{tn}{100+tn}$

3e SOLUTION. — Sans recourir à des quantités auxiliaires, on peut, suivant la méthode algébrique, déterminer les inconnues en se basant sur les conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Veut-on la *valeur actuelle ?* Soit X cette valeur cherchée; elle doit être telle que, additionnée avec son intérêt calculé d'après le taux donné t pour n années, elle donne pour somme A.

$$X+\frac{X.tn}{100}=A$$

En multipliant les deux membres de cette équation par 100 et mettant X en facteur commun, on obtient

$$X(100+tn)=A\times 100$$

d'où l'on tire

$$X=A\times\frac{100}{100+tn}$$

C'est l'expression de la *valeur actuelle*.

L'*escompte* est égal à ce capital actuel multiplié par $\frac{tn}{100}$.

L'*escompte* est donc A $\frac{tn}{100+tn}$.

Veut-on trouver directement l'*escompte rationnel ?* Soit e l'escompte cherché; la valeur actuelle est $A-e$, et l'escompte e doit être l'intérêt de ce capital actuel, ce qui donne l'équation

$$e=\frac{(A-e)\times t.n}{100}$$

ou, en multipliant par 100 et effectuant la multiplication indiquée dans le second membre,

$$e \times 100 = A.t.n - e.t.n$$

Si l'on ajoute aux deux membres de cette équation la même quantité $e.t.n$ et que l'on mette e en facteur commun dans le 1[er] membre, on trouve

$$e\,(100 + t.n) = A.t.n$$

d'où l'on tire, par la division

$$e = \frac{A.t.n}{100 + tn}$$

Telle est l'expression de l'*escompte rationnel.*

Par des raisonnements analogues, on établirait les formules qui conviennent aux cas où le temps est exprimé en mois ou en jours.

Le nombre 100 sera remplacé par 1 200, lorsque le nombre n exprimera un nombre de mois.

Le nombre 100 sera remplacé par 36 000 lorsque n désignera un nombre de jours.

L'escompte rationnel, pour un capital A payable dans n jours, aura pour expression

$$\frac{A.t.n}{36\,000 + t.n}$$

La formule de l'escompte rationnel

$$\frac{A.t.n}{36\,000 + t.n}$$

peut être simplifiée. Si l'on divise les deux termes de cette fraction par le nombre t, on trouve

$$\frac{A.n}{d + n}$$

formule très simple que l'on pourrait obtenir directement. Il suffit d'exprimer que l'escompte rationnel *e* est égal à l'intérêt, calculable par la méthode du diviseur, de la valeur actuelle A — *e*, ce qui donne l'équation

$$e = \frac{(A-e).n}{d}$$

d'où l'on tire aisément

$$e = \frac{A.n}{d+n}$$

La valeur actuelle X se calculerait directement par la relation

$$X + \frac{X\ n}{d} = A$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{A \times d}{d+n}$$

Nous pouvons dresser le tableau des formules générales pour exprimer les escomptes et les valeurs au comptant suivant les principes de l'escompte rationnel ou escompte en dedans.

VALEUR NOMINALE.	UNITÉS DE TEMPS.	ESCOMPTES.	VALEURS ACTUELLES.
A	n années.	$\frac{A.t.n}{100 + t.n}$	$\frac{A \times 100}{100 + t.n}$
A	n mois	$\frac{A.t.n}{1\,200 + t.n}$	$\frac{A \times 1\,200}{1\,200 + t.n}$
A	n jours.	$\left\{ \begin{array}{c} \frac{A.t.n}{36\,000 + t.n} \\ \frac{A\ n}{d+n} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} \frac{A \times 36\,000}{36\,000 + t.n} \\ \frac{A \times d}{d+n} \end{array} \right.$

Comparons les formules, dans les deux modes d'escompte, particulièrement lorsque le temps est exprimé en jours.

Tandis que l'escompte commercial a pour expression $\frac{A.n}{d}$, l'escompte rationnel a pour expression $\frac{A.n}{d+n}$.

Le second est plus petit que le premier; c'est évident *à priori*, puisque l'escompte rationnel est l'intérêt de la valeur actuelle, inférieure à la valeur à terme. Les formules des deux escomptes sont deux fractions qui ont le même numérateur; c'est le produit du capital nominal par le nombre de jours; mais le dénominateur de la seconde est plus grand, et moins commode pour l'exécution des calculs, que le dénominateur de la première; le deuxième se trouve d'ailleurs immédiatement en ajoutant au diviseur d le nombre n des jours.

Les applications numériques de ces formules donneraient, pour un capital donné A, payable dans 43 jours, suivant les différents taux usuels de la Banque, les résultats suivants :

TAUX.	ESCOMPTE COMMERCIAL.	ESCOMPTE RATIONNEL.
3 o/o	$\frac{A \times 43}{12\,000}$	$\frac{A \times 43}{12\,043}$
4 o/o	$\frac{A \times 43}{9\,000}$	$\frac{A \times 43}{9\,043}$
$4\frac{1}{2}$ o/o	$\frac{A \times 43}{8\,000}$	$\frac{A \times 43}{8\,043}$
5 o/o	$\frac{A \times 43}{7\,200}$	$\frac{A \times 43}{7\,243}$
6 o/o	$\frac{A \times 43}{6\,000}$	$\frac{A \times 43}{6\,043}$

Si l'on compare les valeurs escomptées, on a :

Par la pratique commerciale A $\frac{d-n}{d}$

Par les principes de l'escompte rationnel $A.\dfrac{d}{d+n}$

Les deux rapports $\dfrac{d-n}{d}$ et $\dfrac{d}{d+n}$ n'ont pas tout à fait la même valeur; la différence des deux termes est, dans l'un comme dans l'autre, égale à n ; les deux termes du second rapport sont respectivement égaux à ceux du premier, augmentés du même nombre n. On sait que si l'on ajoute aux deux termes d'une fraction ou d'un rapport un même nombre, la valeur nouvelle se trouve plus près de l'unité. Le rapport $\dfrac{d}{d+n}$ est supérieur à $\dfrac{d-n}{d}$, la valeur actuelle est plus forte que la valeur au comptant donnée par la pratique commerciale, ce qui est évident *à priori*.

Théorème. — *L'excès de l'escompte commercial sur l'escompte rationnel est égal à l'intérêt de l'escompte rationnel*

La différence des deux escomptes est

$$\frac{A.n}{d}-\frac{A\ n}{d+n}=\frac{A.nd+A.n^2-A.nd}{d(d+n)}$$

Soit, en simplifiant

$$\frac{An^2}{d(d+n)}=\frac{A.n}{d+n}\times\frac{n}{d}.$$

L expression $\dfrac{A.n}{d+n}$ est l'escompte rationnel ; en multipliant cette quantité par le nombre de jours n et divisant par le diviseur d, on obtient l'intérêt, d'après le taux de l'escompte, pour le temps compris entre la négociation et l'échéance, d'un capital égal à l'escompte rationnel.

Cette conclusion peut d'ailleurs être obtenue sans aucun calcul. Le capital nominal peut être, par la pensée, divisé en deux parties : la valeur actuelle et l'escompte rationnel. L'escompte commercial est l'intérêt du capital tout entier; il comprend donc l'intérêt de la valeur actuelle, c'est-à-dire l'escompte rationnel, plus l'intérêt de la deuxième partie, c'est-à-dire l'intérêt de l'escompte rationnel même.

Remarque I. — La différence des deux escomptes est généralement assez faible ; elle va en croissant avec le temps et le taux; mais dans les limites de la pratique, elle est le plus souvent négligeable.

Ainsi pour un capital escompte pour 90 jours à 4 °/₀, la différence des deux escomptes n'atteint pas tout à fait $\frac{1}{10000}$ du capital nominal.

Car l'escompte commercial est alors $\frac{1}{100}$ du capital

et l'escompte rationnel $\frac{1}{101}$

La différence des deux escomptes est ainsi égale à

$$\frac{1}{100 \times 101} < \frac{1}{10000}$$

Remarque II. — On obtient une limite supérieure de l'écart entre les deux escomptes en calculant l'intérêt de l'escompte commercial; on obtient une valeur approchée par excès, mais généralement très appprochée, comme le montre l'exemple précédent.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Calculer d'après le taux de* 6 °/₀ *:*

1° *l'escompte commercial et la valeur au comptant ;*

2° *l'escompte rationnel et la valeur actuelle du capital Fr.* 37869,75 *payable dans* 73 *jours.*

Escompte commercial.	Escompte rationnel.
$\frac{37869,75 \times 73}{6000} = 460,75$	$\frac{37869,75 \times 73}{6073} = 455,11$
Valeur escomptée Fr. 37409	Valeur actuelle 37414,54

La différence entre les deux résultats est de Fr. 5,54, ce qui n'est qu'une fraction assez faible du capital nominal.

Si, après avoir obtenu rapidement l'escompte commercial, on voulait apprécier l'importance de l'écart entre les deux escomptes, on pourrait calculer par les procédés abréviatifs connus l'intérêt de l'escompte commercial 460,75.

L'intérêt, à 6 °/₀ et pour 73 jours, de ce nombre 460,75 est 5,56, ce qui donne une valeur bien approchée de la différence réelle 5,54.

Si les principes de l'escompte rationnel ne s'appliquent pas aux effets qui circulent dans les banques d'escompte, ils peuvent être suivis pour les règlements de comptes entre particuliers, pour fixer, par exemple, la somme à verser pour libérer d'avance une dette dont l'échéance est fixée. Dans plusieurs pays étrangers, notamment en Amérique, les payements effectués par anticipation se règlent habituellement par la considération de l'escompte vrai (*true Discount*) et de la valeur actuelle (*present Worth*).

II. *Déterminer, New-York,* 11 *janvier* 1889, *la valeur actuelle d'une dette de* \$ 24756,25 *exigible au* 15 *mars suivant. Taux d'escompte* 7 °/₀.

Le taux de 7 °/₀, qui a été longtemps le taux usuel aux États-Unis, donne lieu à une simplification des calculs d'intérêts et d'escomptes. L'année peut être considérée comme composée de 52 semaines ou 364 jours. La formule générale de l'intérêt pour n jours est alors $\dfrac{a.t.n}{364 \times 100}$

et dans le cas particulier où $t = 7$, $\dfrac{a.n}{5200}$.

La formule de l'escompte rationnel sera $\dfrac{\mathrm{A}.n}{5200 + n}$,

A désignant le capital payable dans n jours.

L'escompte du capital \$ 24756,25 exigible dans 63 jours sera donc

$$\frac{24756,25 \times 63}{5263} = \text{\$ } 296,34$$

Et la valeur actuelle demandée sera \$ 24459,91.

III. *La différence entre l'escompte commercial et l'escompte rationnel d'après le taux de 6 °/₀, d'une dette exigible dans* 90 *jours, est* £ $3.19.9\frac{2}{3}$. *Quel est le montant nominal de la dette?*

La différence donnée £ $3.19.9\frac{2}{3}$ est égale à l'intérêt de l'escompte rationnel, lequel a par conséquent pour valeur

$$\frac{£\ 3.19.9\frac{2}{3}\times 6000}{90}=£\ 266.\ 0.\ 2\frac{1}{3}$$

Si à l'escompte rationnel on ajoute $3.19.9\frac{2}{3}$ on trouvera, dans la somme, la valeur de l'escompte commercial £ 270.

Or l'escompte commercial est l'intérêt du capital nominal A demandé

$$270=\frac{A\times 90}{6000}$$

de cette équation résulte

$$A=£\ 18000$$

Théorème. — *Dans la pratique de l'escompte commercial, la valeur nominale est égale à la valeur escomptée, plus son intérêt, plus l'intérêt de cet intérêt, plus l'intérêt de ce nouvel intérêt, et ainsi de suite indéfiniment.*

En effet, la valeur au comptant V est liée à la valeur nominale A par la relation que nous avons signalée

$$V=A\times\left(1-\frac{n}{d}\right)$$

d'où l'on déduit

$$A=V\times\frac{1}{1-\frac{n}{d}}$$

On peut développer le quotient $\frac{1}{1-\frac{n}{d}}$ suivant les puissances croissantes de la fraction $\frac{n}{d}$, ainsi que nous l'avons expliqué au chapitre de la division. On trouve ainsi

$$A = V \times \left[1 + \frac{n}{d} + \left(\frac{n}{d}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^3 + \ldots\right]$$

Dans les cas où l'on pratique l'escompte commercial, la fraction $\frac{n}{d}$ est généralement assez petite, les puissances supérieures $\left(\frac{n}{d}\right)^2$, $\left(\frac{n}{d}\right)^3$ ... sont plus petites et vont en décroissant très rapidement.

La quantité entre parenthèses s'approche indéfiniment de la limite $\frac{1}{1-\frac{n}{d}}$; c'est ce que l'on nomme une série convergente.

On obtiendra une valeur approchée de A en prenant quelques termes du commencement de la série, et l'on obtiendrait des valeurs de plus en plus approchées à mesure que l'on prendrait un plus grand nombre de termes. On peut écrire la formule

$$A = V + V \times \frac{n}{d} + V \times \frac{n}{d} \times \frac{n}{d} + \ldots$$

Le 1^er terme V de la suite du second membre, c'est la valeur escomptée.

Le 2^e terme $V \times \frac{n}{d}$, c'est l'intérêt de cette valeur escomptée.

Le 3^e terme $V \times \frac{n}{d} \times \frac{n}{d}$, c'est l'intérêt de cet intérêt, et ainsi de suite.

ÉCHÉANCE OU ÉPOQUE COMMUNE

Plusieurs capitaux payables à diverses échéances futures peuvent être remplacés par un capital unique payable à l'époque actuelle. On pourrait choisir une autre époque, et se proposer alors de déterminer le capital unique, payable à la date fixée, dont le montant serait équivalent à l'ensemble des capitaux partiels proposés en tenant compte des intérêts. Cette date à laquelle on rapporte le règlement de plusieurs payements d'échéances diverses se nomme naturellement *échéance commune :* elle est choisie par les contractants, par les parties intéressées ; c'est une donnée du calcul ; l'inconnue est la somme payable. Pour la déterminer, il suffira de calculer la valeur acquise, ou la valeur escomptée de chaque capital, et de faire la somme des valeurs ainsi obtenues. Les conditions d'après lesquelles devront être supputés les intérêts et les escomptes devront être fixées par convention spéciale entre les contractants.

Pour des payements dont les échéances sont peu éloignées, l'usage est de considérer les intérêts simples et de pratiquer l'escompte commercial.

Exemple I. — *On propose de régler en un payement unique, dans* 1 *an, les dettes suivantes :* 15 000 *francs payables dans* 3 *mois :* 25 000 *francs payables dans* 6 *mois;* 12 500 *francs payables dans* 14 *mois et* 36 000 *francs payables dans* 19 *mois. Taux d'intérêt* 6 °/₀.

La 1re dette payable 9 mois avant l'époque commune devra être augmentée de ses intérêts pendant 9 mois.

La 2^{e}, exigible dans 6 mois, devra être augmentée de ses intérêts pendant 6 mois.

La 3^{e}, exigible 2 mois après l'époque commune, devra être diminuée de ses intérêts pour 2 mois.

La 4^e^, exigible 7 mois après l'époque commune, devra être diminuée de ses intérêts pour 7 mois.

	Valeurs nominales.	Intérêts à ajouter.	Escomptes à retrancher.
	15 000	675	
	25 000	750	
	12 500		125
	36 000		1 260
Totaux	88 500	1 425	1 385
Balance des intérêts +	40		
	88 540	*Somme à payer dans un an.*	

Lorsque les intervalles de temps entre les diverses échéances sont exprimés en jours, il se présente une simplification pour les calculs d'intérêts : au lieu de diviser séparément le produit de chaque capital multiplié par le nombre de jours correspondant, par le diviseur spécial, on fait la somme algébrique des nombres ainsi obtenus, en considérant comme positifs ceux qui correspondent aux intérêts à ajouter, et comme négatifs ceux qui correspondent aux escomptes à retrancher : le résultat de la balance des deux groupes de nombres est seul divisé par le diviseur spécial suivant le taux de l'intérêt.

EXEMPLE II. — *Régler en un seul payement au 1^er^ juillet les cinq dettes suivantes :* 25 600 *francs au* 14 *février* 1882 ; 31 845 *francs au* 12 *mars*, 48 000 *francs au* 4 *mai* ; 13 875 *francs au* 1^er^ *novembre* 1882 ; 50 000 *francs au* 15 *janvier* 1883. *Taux d'intérêt* 6 %.

	Valeurs nominales.	Jours d'intérêts.	Nombres positifs.	Nombres négatifs.
	25 600	137	3 507 200	
	31 845	111	3 534 795	
	48 000	58	2 784 000	
	13 875	— 123		— 1 706 625
	50 000	— 198		— 9 900 000
Totaux	169 320		9 825 995	— 11 606 625
Intérêts	— 296,77	Balance des nombres,	— 1 780 630	
		$\frac{1}{6000}$	— 296,77 (intérêts à retrancher)	
	169 023,23	*Somme à payer au* 1^er^ *juillet* 1882		

N. B. — Dans la comptabilité commerciale, on distingue les nombres positifs et les nombres négatifs en les écrivant avec des encres de couleurs différentes; les nombres négatifs sont, par exemple, écrits à l'encre rouge; on les nomme alors nombres rouges.

Discussion. — Cette manière d'établir le règlement de compte à l'époque commune offre les avantages et les défauts de l'escompte commercial. Le défaut consiste en ce que le créancier, recevant le 1er juillet, en bloc, les valeurs des 5 créances partielles, ne se trouve pas, au terme final, 15 janvier 1883, exactement en possession de la même valeur définitive que s'il avait perçu successivement les cinq capitaux à leurs échéances respectives. Ce serait pourtant la condition d'un compte parfaitement réglé, elle serait bien remplie si l'on appliquait les principes et formules des intérêts composés.

Autre exemple. — *Régler en un seul payement, Londres,* 10 *novembre* 1881, *les dettes dont détail suit :*

£	$3\,472.9^{s}.10^{d}$	*à la date du*	1er *avril* 1881
	5 097.13. 6	—	27 *mai*
	4 583.15. 4	—	31 *juillet*
	6 000		4 *janvier* 1882
	8 549.10		14 *février*

Le taux d'escompte est de 5 °/° *par année de* 365 *jours.*

Pour la commodité des calculs nous réduisons les shillings et pence en fractions décimales de livre sterling; nous faisons les calculs d'intérêts, en prenant pour diviseur 7 300. Les détails du calcul sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Valeurs nominales.	Jours d'intérêt.	Produits.	
£	3 472,491	223	774 365,493	
	5 097,675	167	851 311,725	2 093 221,35
	4 583,766	102	467 544,132	
	6 000	— 55	— 330 000	
	8 549,5	— 96	— 820 752	— 1 150 752
£	27 703,432		différence	942 469,35

Intérêts 129,1053 Balance des intérêts $\frac{942\,469,35}{7300} = 129,1053$

£ 27 832,5373 *Montant à payer*

soit £ $27\,832.10^{sh}.9^{d}$

ÉCHÉANCE MOYENNE.

Plusieurs capitaux, payables à diverses échéances, peuvent être remplacés par un capital unique, égal à la somme des capitaux proposés, et payable à une date telle que sa valeur escomptée soit égale à la somme des valeurs escomptées des capitaux partiels donnés. L'échéance attribuée au capital unique, de façon à satisfaire aux conditions énoncées, s'appelle *échéance moyenne*.

Dans le problème de l'*échéance commune*, on remplace aussi plusieurs capitaux par un seul ; mais la date du capital unique est donnée ; c'est la valeur du payement unique qu'il s'agit de trouver.

Dans le problème de l'*échéance moyenne*, la valeur nominale, l'importance numérique du capital unique, est connue, donnée ; c'est la somme des valeurs nominales proposées ; l'inconnue, c'est la date, l'*échéance* qu'il faut attribuer au capital unique, de façon que l'égalité existe non seulement entre les valeurs nominales, mais encore entre les valeurs escomptées. L'échéance moyenne, ainsi définie, peut être déterminée de la manière suivante :

Soient A, A′, A″..., des capitaux payables dans n, n', n''..., unités de temps ; à l'ensemble de ces capitaux, on veut substituer le capital unique $[A + A' + A'' + ...]$. Les valeurs nominales étant égales de part et d'autre, il suffit d'établir l'égalité entre les escomptes : on pourrait en établir le détail comme il suit :

Valeurs nominales.	Unités de temps d'intérêt.	Escomptes
A	n	Anr
A'	n'	$A'n'r$
A''	n''	$A''n''r$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$[A + A' + A'' + ...]$		$[An + A'n' + A''n'' + ...]r$

Désignons par x le nombre d'unités de temps depuis l'origine jusqu'à la date de l'échéance moyenne cherchée; on doit avoir, pour l'égalité des comptes,

$$[A + A' + A'' + \ldots].x.r = [An + A'n' + A''n'' + \ldots]\,r$$

d'où
$$x = \frac{An + A'n' + A''n'' + \ldots}{A + A' + A'' + \ldots}$$

On désigne souvent par le signe Σ la somme de quantités de même nature, et la valeur de x s'écrira

$$x = \frac{\Sigma.An}{\Sigma.A}$$

La somme des produits obtenus en multipliant chaque valeur nominale par le temps correspondant, divisée par la somme des valeurs nominales, donne le nombre d'unités de temps qui séparent l'époque prise pour origine de la date de l'échéance moyenne.

Cette date finale est indépendante de la date choisie pour origine des temps. Imaginons que l'on prenne une autre date, postérieure à la 1[re] de k unités de temps; tous les nombres primitifs n', n'', n... seront diminués de k, et l'on trouve une nouvelle solution

$$x' = \frac{\Sigma.A(n-k)}{\Sigma.A}$$

elle équivaut à

$$x' = \frac{\Sigma.An - \Sigma.Ak}{\Sigma.A}$$

ou encore, puisque le nombre k est le même pour tous les produits de la forme Ak,

$$x' = \frac{\Sigma.An}{\Sigma.A} - k$$

$$x' = x - k$$

Ainsi quand on porte l'origine des temps, de k unités en avant, on trouve aussi k unités de moins pour aller de la nouvelle origine à l'échéance moyenne. Donc la date finale est bien la même.

D'après cette observation, on prendra pour origine la date la plus commode, par exemple la date de l'un des capitaux donnés, ce qui supprime un des produits de la forme An. Dans la pratique, on prend pour point de départ la date du premier payement, en les supposant rangés d'après l'ordre naturel des échéances successives. On a l'avantage d'avoir un produit de moins à calculer, et des multiplicateurs plus petits pour les autres produits. Dans la formule $\Sigma.An$, les produits de la forme An peuvent être affectés de signes différents si l'origine des temps est placée entre les deux échéances extrêmes, et l'on trouvera pour x un quotient affecté de signe : le signe fera connaître dans quel sens, vers le futur ou vers le passé, la valeur absolue doit être comptée. Si l'on place l'origine à l'échéance moyenne même, les produits positifs et les produits négatifs doivent se balancer exactement, donner pour somme algébrique zéro, puisqu'alors l'escompte du capital unique, somme des capitaux partiels, se réduit à zéro. On peut donc définir l'*échéance moyenne* « *la date à laquelle il faut fixer le payement d'un capital unique égal à la somme des proposés pour qu'il y ait égalité entre les intérêts simples échus des capitaux payables avant, et les escomptes commerciaux des capitaux payables après cette date.* » Il n'y a en apparence ni bénéfice ni perte, tant pour le créancier que pour le débiteur; mais il n'y a pas compensation parfaite entre les intérêts échus, véritablement acquis, et les escomptes ou intérêts calculés par anticipation sur des capitaux que l'on ne possède pas encore.

On remarquera que la valeur du quotient $\frac{\Sigma.An}{\Sigma.A}$ qui sert à déterminer l'échéance moyenne est indépendante du taux d'intérêt.

On peut donner de l'échéance moyenne la définition suivante :

L'échéance moyenne de divers capitaux payables à différentes échéances, c'est la date à laquelle la valeur collective des capitaux proposés en tenant compte des intérêts courus *et des intérêts à courir est précisément égale à la somme des valeurs nominales.*

Il est évident qu'il y a une époque, comprise entre les deux échéances extrêmes, où cette condition est remplie. Car si l'on estime les valeurs des capitaux proposés à la date du 1er effet, la valeur collective est inférieure à la somme des valeurs nominales, puisque toutes étant payables à des échéances ultérieures donnent lieu à des escomptes ou intérêts soustractifs. Si l'on estime les valeurs à la date du dernier effet, on obtient une valeur collective plus forte que la somme des valeurs nominales, car, étant payables avant la date de l'évaluation, elles donnent lieu à des intérêts additifs. Ainsi quand on suit l'accroissement du temps de la 1re date à la dernière, la valeur collective des capitaux proposés va en croissant, d'une valeur plus petite à une valeur plus grande que la somme des valeurs nominales. Et comme cette quantité, la valeur collective, varie avec le temps d'une manière continue, elle passe nécessairement par un état de grandeur égal à la somme des valeurs nominales.

Prenons, pour fixer les idées, pour origine du temps une date antérieure aux échéances des capitaux proposés. Soit x le nombre d'unités de temps à courir depuis l'origine adoptée jusqu'à la date d'échéance moyenne. Tout capital C payable dans n unités de temps donnera lieu, si n est inférieur à x, à un intérêt additif représenté par $C(x-n).r$, en désignant par r l'intérêt du capital 1 pour le temps 1. Un capital C′ payable dans n' unités de temps donnera lieu, si n' est supérieur à x, à un escompte ou intérêt soustractif $C'(n'-x.)r$.

D'après la définition même de l'échéance moyenne, la somme des intérêts additifs doit être égale à la somme des valeurs absolues des intérêts soustractifs

$$\Sigma.C(x-n)=\Sigma C'(n'-x)$$

On obtient évidemment une équation équivalente en écrivant dans le premier nombre $C'(x-n')$ au lieu de $C'(n'-x)$ dans le second, et dès lors l'équation ne contiendra que des produits de la même forme $C(n-x)$, les uns positifs, les autres négatifs, dont la somme algébrique devra être nulle.

Ainsi, sans qu'il soit nécessaire de savoir *a priori* quels sont les capitaux payables avant, et les capitaux payables après l'échéance moyenne cherchée, on a, pour déterminer le nombre d'unités de temps à courir depuis l'origine choisie jusqu'à la date demandée, l'équation

$$C(x-n)+C'(x-n')+C''(x-n'')+\ldots=0$$

$C, C', C''\ldots$ désignant les capitaux proposés; n, n', n'', les temps à courir jusqu'à leurs échéances respectives. On peut écrire par abréviation

$$\Sigma.C(x-n)=0$$

ou

$$\Sigma.Cx-\Sigma.Cn=0$$

ou, en mettant x en facteur commun,

$$x\times\Sigma.C-\Sigma.Cn=0$$

d'où l'on réduit

$$x=\frac{\Sigma.Cn}{\Sigma.C}$$

Le quotient de la somme des produits des valeurs nominales multipliées par les temps correspondants, divisée par la somme des valeurs nominales, donne l'intervalle de temps depuis la date choisie pour origine jusqu'à la date de l'échéance moyenne.

Il est encore utile d'observer que la détermination de l'échéance moyenne ne dépend pas des valeurs nominales mêmes, mais des rapports qu'elles ont entre elles; on peut y substituer des nombres proportionnels, car cette substitution revient à multiplier chaque capital, et par conséquent leur somme, par un même facteur; tous les termes des deux membres de l'équation qui sert à fixer l'échéance moyenne se trouveront par là multipliés par un facteur commun, et la valeur de l'inconnue n'en sera nullement modifiée. On profitera, dans la pratique, de cette observation pour remplacer, quand on pourra le faire aisément, les valeurs nominales proposées par d'autres, proportionnelles, mais plus simples. Le choix de l'unité de temps n'est pas non plus indifférent pour la rapidité des calculs.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Déterminer l'échéance moyenne des cinq effets de commerce dont détail suit :*

24500fr,45	*à la date du*	1er *mai* 1882
17243, 75		27 *mai*
12968, 30		15 *juin*
49812, 75		15 *juillet*
34813, 25		1er *octobre*

Prenons pour origine des temps la date du premier effet, 1er mai : les détails des calculs sont expliqués par le tableau suivant :

Valeurs nominales.	Jours d'intérêts.	Nombres.
24500,45	0	
17243,75	26	448337,50
12968,30	45	583573,50
49812,75	75	3735956,25
34813,25	153	5326427,25
139338,50		10094294,50

Nombre de jours du 1er mai à l'échéance moyenne

$$\frac{100942945}{1393385} = 72\,\frac{619}{1393}$$

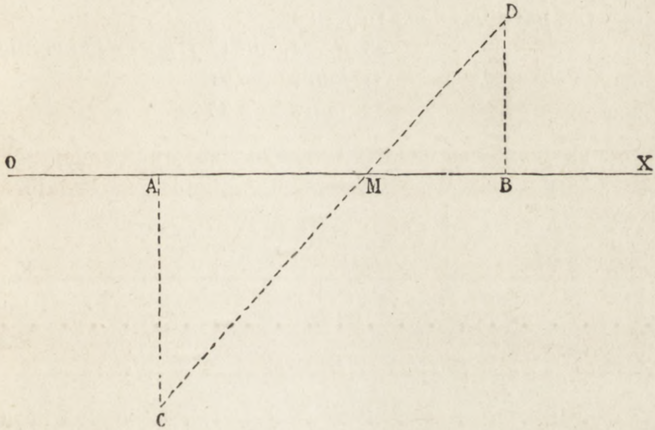
L'usage est de prendre un nombre entier de jours, le nombre entier approché par défaut si la fraction complémentaire est inférieure à $\frac{1}{2}$, le nombre entier approché par excès si cette fraction est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Dans l'exemple actuel, nous prendrons 72 jours et nous arriverons, en comptant 72 jours à partir du 1er mai, à la *date du* 12 *juillet, qui est la date de l'échéance moyenne.*

Solutions graphiques. — Les procédés graphiques peuvent être utilisés pour la détermination de l'échéance moyenne commerciale.

Supposons d'abord deux effets seulement, l'un de 5000 *fr. payable dans* 10 *jours, l'autre de* 8000 *payable dans* 33 *jours.*

L'intervalle qui les sépare doit être divisé en deux parties inversement proportionnelles aux nombres 5 et 8.

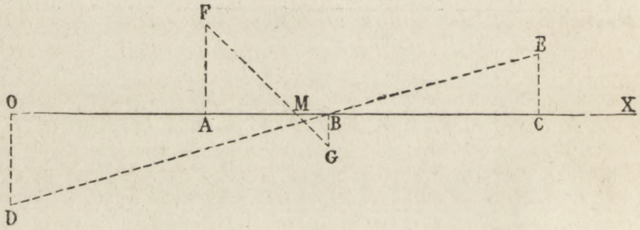


Sur un axe indéfini OX portons des longueurs $OA = 10$ $OB = 33$; il s'agit de diviser l'intervalle AB en deux parties inversement proportionnelles à 5 et 8, c'est-à-dire proportionnelles à 8 et 5. Pour cela, il suffit de tracer 2 perpendiculaires à l'axe par les points A et B, et de prendre sur l'une une longueur $AC = 8$, au-dessous de l'axe des temps, et sur l'autre une longueur $BD = 5$, au-dessus. La ligne CD qui joint les extrémités des deux ordonnées AC et BD coupe l'axe des temps en un point M, situé à 24 divisions environ de l'origine. On en conclut que l'échéance moyenne est à 24 jours. Le calcul exact donne $24 \frac{2}{13}$; le dessin correctement exécuté donne une valeur suffisamment approchée.

La méthode s'étend à un plus grand nombre d'effets séparés. On en considère d'abord deux que l'on peut remplacer par un effet unique, ayant pour valeur nominale la somme des deux effets partiels, et pour date leur échéance moyenne déterminée comme il vient d'être dit. On associe alors cet effet à l'un des autres proposés, on détermine l'échéance moyenne, et ainsi de suite; on arrive à deux effets seulement, dont l'échéance moyenne est celle de tous les effets ensemble.

Appliquons ce procédé aux effets suivants :

4000 *fr., payables dans*	10 *jours*	
3000	23 *jours, soit*	13 *j. après le premier*
5000	31 *jours*	21
6000	45 *jours*	35



Nous portons sur l'axe des temps des longueurs $OA = 13$, $OB = 21$, $OC = 35$.

Considérant alors le système des 2 effets de 4000 et de 6000, nous divisons l'intervalle OC en parties proportionnelles à 6 et 4, en joignant les extrémités D et E des deux ordonnées $OD = 6$, $CE = 4$.

La ligne DE coupe, dans notre cas particulier, l'axe des temps au point B qui correspond à la division 21, c'est-à-dire à l'échéance du troisième effet : profitant de cette rencontre accidentelle, nous considérons, à la date 21, un effet dont la valeur nominale est $4000 + 6000 + 5000 = 15000$; nous le combinons avec l'effet de 3000 qui correspond à la date 13. Pour déterminer l'échéance moyenne de ces deux effets, nous divisons l'intervalle AB en parties inversement proportionnelles à 3 et 15, ou 2 et 10; il suffit de joindre les extrémités F et G des deux ordonnées $AF = 10$ et $BG = 2$ pour avoir en M le point de division; le point M se trouve un peu avant la division 20; nous concluons que l'échéance moyenne cherchée arrive 20 jours après l'échéance du premier effet, soit 30 jours après la date actuelle. Le calcul précis donne 29 jours $\frac{2}{3}$.

Si la ligne DE n'avait pas coupé l'axe des temps à la division 21, qui marque l'échéance de l'un des effets, le tracé aurait exigé une composition de plus, mais aurait pu s'exécuter suivant les mêmes principes.

Ces procédés graphiques sont comparables a ceux qui servent, en mécanique, à la composition des forces parallèles.

Problème. — *Déterminer l'échéance moyenne de* 12 *effets de commerce dont les valeurs nominales sont* 1000, 2000, 3000............. 12000, *et dont les échéances se succèdent de* 15 *jours en* 15 *jours, le premier étant payable le* 3 *février* 1882. *Calculer la valeur escomptée des* 12 *effets à la date du* 19 *janvier* 1882, *d'après le taux de* 6 °/₀ *par an.*

Solution. — En prenant, dans un but de simplification, pour unité de capital mille francs, et pour unité de temps une période de 15 jours, nous aurons, par l'application des règles établies, le tableau suivant :

	Valeurs nominales.	Temps à partir du 19 janvier.	Nombres ou produits.
	1	1	1^2
	2	2	2^2
	3	3	3^2
	4	4	4^2
	⋮	⋮	⋮
	12	12	12^2
Total	$\frac{12 \times 13}{1 \times 2}$		$\frac{12 \times 13 \times 25}{1 \times 2 \times 3}$

Le nombre de périodes de 15 jours depuis la date prise pour origine, 19 janvier 1882, sera, suivant le principe démontré, fourni par le quotient du total des produits, $\frac{12 \times 13 \times 25}{1.2.3}$, divisé par le total des valeurs nominales, $\frac{12 \times 13}{1.2}$.

On obtient ainsi immédiatement $\frac{25}{3}$ périodes qui valent $\frac{25 \times 15}{3}$ $= 125$ jours.

L'échéance moyenne demandée arrive 125 *jours après le* 19 *janvier* 1882, *soit le* 24 *mai* 1882.

Un effet unique ayant pour valeur nominale $\frac{12 \times 13}{2} = 78$ (mille francs), et pour date le 24 mai 1882, donne à toute époque le même intérêt simple ou le même escompte commercial que les effets proposés ensemble.

Par conséquent, pour connaître les valeurs escomptées, il suffit d'opérer sur le capital unique 78000.

En considérant, suivant l'usage du commerce, l'année comme composée de 360 jours, ce qui donne 24 périodes de 15 jours, nous aurons, *pour l'escompte*, à 6 °/₀ :

$$\frac{78000 \times \frac{25}{3} \times 6}{24 \times 100} = 1625 \textit{ francs}$$

La valeur escomptée, à la date du 19 *janvier* 1882, *des* 12 *effets ensemble est donc*

$$78000 - 1625 = 76375.$$

Remarque. — La solution rapide du problème précédent est due principalement à l'application de deux formules bien connues donnant la somme des n premiers nombres entiers consécutifs et la somme des carrés de ces mêmes nombres. La première est $\frac{n(n+1)}{2}$; nous l'avons démontrée au chapitre de l'Addition

La *formule qui donne la somme des carrés* $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$ est

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

Une des manières les plus simples de l'établir est la suivante :

On sait que la formule du développement du cube d'un binome tel que $N + 1$ est

$$(N+1)^3 = N^3 + 3N^2 + 3N + 1.$$

L'application de cette formule, en y faisant successivement $N = 0$ $N = 1$ $N = 2$ ... $N = n$ donnera

$$\begin{aligned}
1^3 &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots 1 \\
2^3 &= 1^3 + 3\ 1^2 + 3.1 + 1 \\
3^3 &= 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1 \\
4^3 &= 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(n+1)^3 &= n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1
\end{aligned}$$

En additionnant, on trouve

$$(n+1)^3 = 3.S + 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

S désigne la somme des carrés des n premiers nombres entiers consécutifs.

En chassant le dénominateur 2, et réunissant dans un seul membre les termes où entre le facteur commun $(n+1)$, on obtient

$$6S = (n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2]$$

ou encore

$$6S = (n+1)[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2]$$

$$6S = n(n+1)(2n+1)$$

et enfin

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

Le rapport de la somme des carrés à la somme des nombres eux-mêmes est $\frac{2n+1}{3}$.

C'est ce rapport que nous avions à former dans le dernier problème d'échéance moyenne.

RÈGLES DE SOCIÉTÉ

Les règles de société ont généralement pour objet de répartir entre plusieurs associés les bénéfices ou les pertes résultant d'opérations faites par eux en commun.

Il peut se présenter, dans ces répartitions, des conditions plus ou moins complexes ; mais la règle habituelle est basée sur la considération des mises engagées par les associés et des temps pendant lesquels ces mises ont été engagées.

La règle est dite de société simple lorsque les mises seules, ou les temps seuls, diffèrent.

La règle est dite de société composée lorsque les mises et les temps diffèrent à la fois.

Dans le 1[er] cas, la répartition se fait proportionnellement aux mises, lorsque toutes ont été engagées pendant le même temps, ou proportionnellement aux temps, lorsque les mises sont toutes égales entre elles. La question se réduit à un problème ordinaire de partages proportionnels.

Dans le 2[e] cas, lorsque les mises différentes sont engagées pendant des temps différents, la répartition doit se faire proportionnellement *aux produits des mises par les temps*. On peut, en effet, pour apprécier les droits respectifs des associés au partage des bénefices, prendre pour commune mesure l'unité de capital engagée pendant l'unité de temps. Si, par exemple, deux associés ont engagé :

Le premier, 2 000 francs pendant 3 ans,

Le deuxième, 3 000 francs pendant 5 ans,

On pourra prendre, pour unité de droit au partage, 1 000 fr. engagés pendant 1 an.

Il est admis, sauf conventions exceptionnelles, que l'on attribue la même importance à la deuxième, troisième année qu'à la première ; en conséquence le 1[er] négociant comptera 2 unités chaque année, et 2×3 ou 6 unités pour les 3 années.

Le second comptera 3 unités chaque année, et $3 \times 5 = 15$ pour les 5 années. Leurs droits respectifs seront ainsi représentés par 2×3 et 3×5, c'est-à-dire par des nombres proportionnels aux produits des mises par les temps.

Ce raisonnement est facile à généraliser.

Si l'on désigne par A, A', A''... les mises des associés, ou mieux, les nombres qui expriment ces mises en fonction de leur plus grande commune mesure, et par n, n', n''... les temps correspondants, on pourra prendre comme unité de droit au partage l'unité de capital, précédemment définie, engagée pendant l'unité de temps. Le premier négociant comptera, en sa faveur, $A.n$ de ces unités, le second $A'.n'$, le troisième $A''n''$, etc...

B désignant le bénéfice à partager, correspondant à $An + A'n' + A''n'' + \ldots$ unités de même valeur, la fraction qui revient à 1 seule de ces unités est

$$\frac{B}{An + A'n' + A''n'' + \ldots}$$

Pour former les parts des associés, il suffira de multiplier cette fraction du bénéfice par les produits An, $A'n'$, $A''n''$, etc... et les parts seront respectivement

$$\frac{B \times An}{An + A'n' + A''n'' + \ldots}$$
$$\frac{B \times A'n'}{An + A'n' + A''n'' + \ldots}$$
$$\frac{B \times A''n''}{An + A'n' + A''n'' + \ldots}$$

C'est-à-dire *proportionnelles aux produits des mises par les temps*.

Problème I. — *Trois négociants anglais se sont associés.*
Le premier a engagé £ 340 *pendant* 7 *mois.*
Le deuxième » 560 » 11 *mois.*
Le troisième » 297 » 13 *mois.*
L'entreprise a rapporté un bénéfice de £ 48.9.9.

On demande la part de bénéfice que chacun doit recevoir, et le taux d'intérêt correspondant au bénéfice réalisé.

1° Le bénéfice total doit être réparti entre les trois associés proportionnellement aux produits des mises par les temps.

$$\begin{aligned} 340 \times 7 &= 2\,380 \\ 560 \times 11 &= 6\,160 \\ 297 \times 13 &= 3\,861 \end{aligned}$$

Sommes des nombres proportionnels 12 401

part du premier $£\ \dfrac{48{,}4875 \times 2380}{12\,401} = £\ 9.\ 6.\ 1\dfrac{1}{4}$

part du second $£\ \dfrac{48{,}4875 \times 6160}{12\,401} = £\ 24.\ 1.\ 8\dfrac{1}{4}$

part du troisième $£\ \dfrac{48{,}4875 \times 3861}{12\,401} = £\ 15.\ 1.\ 11\dfrac{1}{2}$

Total £ 48. 9. 9

2° Le bénéfice £ 48,4875 peut être considéré comme l'intérêt rapporté par un capital de 12 401 pendant 1 mois. Soit alors x le taux annuel, on doit avoir, d'après la formule des intérêts,

$$48{,}4875 = \frac{12401 \times x}{1\,200}$$

d'où $$x = \frac{48{,}4875 \times 1200}{12\,401} = 4{,}691 \text{ pour } 100$$

Problème II. — *Quatre négociants se sont associés pour l'exploitation d'un brevet. Le premier, qui est propriétaire du brevet, en a cédé la jouissance pour* 5 *ans, à la condition d'avoir* 30 °/₀ *dans les bénéfices. Le deuxième a mis* 36 000 *fr. et a, de plus, rempli les fonctions de gérant, moyennant une part de* 4 °/₀ *dans les bénéfices. Le troisième a mis* 30 000 *fr. Le quatrième a versé à la société* 15 000 *francs au commencement de chaque année.*

A la fin de la cinquième année, le capital net à l'actif de la société est de 328 860 *francs.*

On en demande la répartition entre les 4 associés.

Solution. — Déterminons d'abord le bénéfice. Il est égal à l'excès du capital définitif sur la somme des mises

soit $328\,860 - [36\,000 + 30\,000 + 15\,000 \times 5] = 187\,860$

Le propriétaire du brevet prélève 30 %, ce qui donne 56 358.
Le gérant prélève 4 % de 187 860, ce qui fait 7 514,4

Il reste ainsi $187\,860 - (56\,358 + 7\,514{,}4) = 123\,987{,}6$

à partager entre les associés, en raison de leurs mises et des temps correspondants.

Le 2e négociant a mis 36 mille fr. pendant 5 ans, $36 \times 5 = 180$
Le 3e a mis 30 mille francs pendant 5 ans, $30 \times 5 = 150$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Le 4e a pour son compte} & 15 \text{ pendant 5 ans,} & 15 \times 5 \\ \quad » & 15 \text{ pendant 4 ans,} & 15 \times 4 \\ \quad » & 15 \text{ pendant 3 ans,} & 15 \times 3 \\ \quad » & 15 \text{ pendant 2 ans,} & 15 \times 2 \\ \quad » & 15 \text{ pendant 1 an,} & 15 \times 1 \end{array}\right\} = 225$$

Ainsi les droits au partage des trois capitalistes sont proportionnels aux nombres 180, 150, 225 ou, plus simplement, 12, 10, 15.

Les parts de bénéfice qui reviennent aux trois capitalistes sont donc respectivement

$$\frac{123\,987{,}6 \times 12}{37} = 40\,212{,}194$$

$$\frac{123\,987{,}6 \times 10}{37} = 33\,510{,}163$$

$$\frac{123\,987{,}6 \times 15}{37} = 50\,265{,}243$$

Total des 3 parts de bénéfice 123 987,6

Récapitulation.

Le 1er doit recevoir		Fr.	56 358
Le 2e,	36 000 + 7 514.4 + 40 212,194	=	83 726,594
Le 3e,	30 000 + 33 510,163	=	63 510,163
Le 4e,	75 000 + 50 265,243	=	125 265,243
Total, actif de la société,		Fr.	328 860

PROBLÈME DE RÉPARTITIONS PROPORTIONNELLES.

Problème. — *Une manufacture se compose de 4 ateliers,*

le 1er atelier comprend	36 *ouvriers gagnant*	6sh	6d *par jour.*
le	47	5	9
le 3e	58	5	3
le 4e	123	4	6

Une gratification extraordinaire de £ 1000 *est allouée à cette manufacture, pour être répartie entre tous les ouvriers proportionnellement aux salaires journaliers.*

On demande la part qui doit être payée à un ouvrier de chacun des 4 ateliers.

Solution. — Les salaires journaliers peuvent être exprimés en nombres de pence, et l'on trouve aisément le nombre total de pence gagnés en 1 jour par l'ensemble des ouvriers.

1er atelier	$78 \times 36 =$	2808 pence
2e	$69 \times 47 =$	3243
3e	$63 \times 58 =$	3654
4e	$54 \times 123 =$	6642
		16347

Le nombre total des pence gagnés en 1 jour est 16 347 ; pour chaque penny il faut compter une part de gratification égale à £ $\frac{1000}{16347}$, et pour 78 pence, il faut compter 78 fois cette quantité.

La part qui revient à

1 *ouvrier du* 1er *atelier* est donc £ $\frac{1000 \times 78}{16347} =$ £ 4. 15. $5\frac{1}{4}$

1 *ouvrier du* 2e *atelier* est donc £ $\frac{1000 \times 69}{16347} = 4.\ 4.\ 5$

1 — 3e — $\frac{1000 \times 63}{16347} = 3.\ 17.\ 1$

1 — 4e — $\frac{1000 \times 54}{16347} = 3.\ 5.\ \frac{3}{4}$

CALCUL DES MOYENNES

Si l'on considère n quantités de même espèce $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$, on entend par moyenne arithmétique ou simplement moyenne de ces quantités la valeur unique a qui, répétée n fois, donnerait le même résultat que la somme des quantités proposées. On peut encore dire que la moyenne de ces n quantités est la valeur qui reviendrait à chacune d'elles si leur somme était également répartie entre elles. La moyenne a pour expression

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n}{n}$$

PRIX MOYEN.

Supposons n *unités d'une marchandise vendues au prix* a
n′ — — a′
n″ — — a″
on demande le prix moyen.

Le *prix moyen*, c'est le prix unique qui, attribué à chacune des unités vendues, conduirait à un résultat égal à la somme des prix de vente de toutes les unités.

La somme des prix de vente est évidemment

$$a.n + a'.n' + a''n'' + \ldots$$

la somme des unités vendues est

$$n + n' + n'' + \ldots$$

le *prix moyen* est

$$\frac{a.n + a'n' + a''.n'' + \ldots}{n + n' + n'' + .}$$

Dans le cas particulier où les nombres n, n', n''... sont tous égaux, mais dans ce cas seulement, le prix moyen se trouve égal à la moyenne des prix partiels proposés.

TITRE MOYEN.

Considérons un alliage composé de plusieurs lingots :

le 1er	ayant pour poids	p	et pour titre	θ
le 2e	—	p'	—	θ'
le 3e	—	p''	—	θ''

On entend par *titre moyen* de l'alliage le titre unique qui, attribué au poids total des lingots, donnerait le même poids de métal fin que l'ensemble des lingots partiels. Il revient au même de dire que le titre moyen est le rapport du poids de métal fin contenu dans les lingots réunis au poids total de ces lingots.

Le titre moyen a pour expression

$$\frac{p\theta + p'\theta' + p''\theta''}{p + p' + p''}$$

TAUX MOYEN.

Si l'on suppose plusieurs capitaux a, a', a''... placés respectivement à intérêts simples pendant le même temps d'après des taux r, r', r''... (pour 1 franc), le *taux moyen* de ces placements a pour expression

$$\frac{ar + a'r' + a''r'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}$$

ÉCHÉANCE MOYENNE.

Nous avons déjà étudié la question de l'*échéance moyenne;* nous citons ici pour mémoire la formule générale

$$\frac{a.n + a'n' + a''n'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}$$

afin de faire remarquer son analogie complète avec les autres formules des moyennes précédentes.

DENSITÉ MOYENNE.

Considérons un alliage composé de divers métaux de densités différentes, ayant pour poids respectifs p, p', p'' et pour densités d, d' d'', la densité de l'alliage, que l'on peut appeler *densité moyenne*, a pour expression

$$\frac{p+p'+p''+\dots}{\frac{p}{d}+\frac{p'}{d'}+\frac{p''}{d''}+\dots}$$

c'est-à-dire qu'elle est égale au quotient du poids total divisé par le volume total, en supposant toutefois que l'alliage ne modifie pas les volumes des métaux et que le volume définitif soit égal à la somme des volumes partiels. Cette condition n'est pas toujours rigoureusement remplie.

Si, au lieu de donner les poids des métaux qui composent l'alliage, on donnait les volumes, on pourrait déterminer le *poids spécifique moyen*, le poids de l'unité de volume dans l'hypothèse d'un alliage homogène. Le poids spécifique moyen serait

$$\frac{vd+v'd'+v''d''+\dots}{v+v'+v''+\dots}$$

v, v', v''... désignant les volumes des métaux qui composent l'alliage.

RÈGLE DE MÉLANGE ET D'ALLIAGE

On désigne habituellement sous le nom de *Règle de mélange ou d'alliage*, la règle par laquelle on détermine dans quelles proportions doit s'opérer le mélange de deux liquides ou de substances quelconques, ou l'alliage de deux métaux, pour réaliser un prix moyen fixé, ou un titre moyen déterminé.

Expliquons d'abord, sur un exemple, le mécanisme de la règle de mélange.

Quelles quantités de vin à 1fr,75 *le litre et de vin à* 0,88 *le litre, faut-il mélanger, pour obtenir du vin valant* 1,20 *le litre?*

On écrit les deux prix donnés, pour les deux espèces de vin qui doivent composer le mélange, dans une colonne verticale, et en dehors, vers le milieu de l'intervalle, le prix moyen visé.

1,75		0,32
	1,20	
0,88		0,55

On fait les différences entre les prix donnés et le prix moyen. On inscrit la différence entre le prix supérieur et le prix moyen sur la ligne horizontale du prix inférieur, la différence entre le prix inférieur et le prix moyn sur la ligne horizontale du prix supérieur. C'est ce que l'on appelle faire les différences en croix, ou en diagonale, comme l'indique le tableau ci-dessus.

Les nombres obtenus par les différences en croix, rapportés à la même unité, indiquent les quantités que l'on peut mélanger pour obtenir le prix moyen demandé. Les mélanges opérés d'après ces quantités, ou généralement, d'après des quantités proportionnelles, satisfont à la condition énoncée.

Ainsi, dans notre exemple, les différences sont 32 et 55 (centimes). Il suffira de mélanger 32 litres de la première qualité avec 55 litres de la seconde. En effet, 1 litre de la qualité supérieure donne, pour valeur, le prix moyen fixé, plus 55 centimes.

32 litres de la qualité supérieure donneront 32 fois le prix moyen, plus 32 fois 55 centimes.

1 litre de la qualité inférieure donne pour valeur le prix moyen, moins 32 centimes.

55 litres de la qualité inférieure donneront 55 fois le prix moyen, moins 55 fois 32 centimes.

Les $(32 + 55)$ litres mélangés donneront $(32 + 55)$ fois le prix moyen fixé, plus 32 fois 55 centimes, moins 55 fois 32 centimes.

Ces deux derniers termes se réduisent à zéro, puisque $55 \times 32 = 32 \times 55$. Et la valeur du mélange comprend autant de fois le prix moyen qu'il y a de litres mélangés. Donc chaque litre du mélange vaut le prix demandé.

Il est clair que dans les explications qui précèdent, on pourrait substituer aux nombres de litres 32 et 55, des nombres proportionnels, tels que $32.m$ et $55.m$, m étant un facteur arbitraire; les produits que l'on compare se trouveraient multipliés par ce même facteur m, et toutes les conclusions subsisteraient.

Donc enfin, les différences en croix indiquent bien suivant quelles proportions doit s'opérer le mélange.

La règle de mélange peut être établie d'une façon générale, ainsi qu'il suit :

Deux substances de même nature, mais de qualités différentes, sont proposées pour la composition d'un mélange. Dans la 1re, l'unité de volume ou de poids a pour prix a*; dans la 2e, l'unité a pour prix* c*. L'unité du mélange doit avoir un prix* b.

Nous supposons $a > b > c$.

Posons $a - b = d$ et $b - c = e$.

Le tableau de la règle de mélange se présentera comme il suit :

$$\begin{array}{ccc} a & & e \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & b & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ c & & a \end{array}$$

Nous allons démontrer *qu'en prenant* e *unités de la* 1[re] *espèce avec* d *unités de la* 2[e], *on obtiendra un mélange au prix moyen* b.

e unités, dont chacune vaut a ou $b+d$, valent	$eb+ed$
d unités, dont chacune vaut c ou $b-e$, valent	$db-de$
$(e+d)$ unités mélangées valent ensemble	$(e+d).b$
1 unité de mélange vaut donc	b

C'est la condition qu'il s'agissait de remplir.

Que l'on prenne $e.m$ unités de la 1[re] espèce avec $d.m$ de la 2[e], on trouvera que les $em+dm$, ou plus simplement les $(e+d).m$ unités mélangées valent ensemble $(e+d).m.b$.

1 unité de mélange vaut toujours b.

ALLIAGES.

Les questions d'alliage ne diffèrent point, pour le fond, des questions de mélange.

La règle d'alliage peut être généralisée par les considérations suivantes :

Deux lingots sont proposés, le premier au titre T, *le second au titre* t. *Qnels poids faut-il prendre sur les deux lingots pour former un alliage au titre* θ *?*

Disposons les données comme pour la règle ordinaire de mélange, et faisons les différences en croix.

$$\begin{array}{ccc} T & & \theta - t \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & \theta & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ t & & T - \theta \end{array}$$

Pour démontrer qu'un alliage composé de $(\theta - t)$ unités de poids du 1er lingot et de $(T - \theta)$ du 2e est bien au titre θ, il suffit de présenter la vérification dans le tableau suivant :

Poids	Titres	Poids de métal fin
$\theta - t$	T	$\theta.T - t.T$
$T - \theta$	t	$t.T - \theta.t$
$T - t$		$\theta(T - t)$

Titre de l'alliage ou rapport du poids de métal fin au poids total :

$$\frac{\theta(T - t)}{T - t} = \theta$$

Au lieu de prendre les poids $\theta - t$ et $T - \theta$, on peut prendre des poids proportionnels, $(\theta - t).m$ et $(T - \theta).m$; les poids correspondants de métal fin se trouveront multipliés par le même facteur m, lequel disparaîtra comme facteur commun aux deux termes du rapport qui exprime le titre, de sorte que le titre aura toujours pour valeur θ.

Les nombres qui dans la règle de mélange ou d'alliage expriment les prix ou les titres peuvent être remplacés par des nombres respectivement proportionnels. Les différences obtenues par l'application de la règle se trouveront modifiées dans le même rapport, et les nouvelles valeurs, proportionnelles aux valeurs primitives, feront connaître suivant quelles proportions le mélange ou l'alliage doit se faire.

On profite de cette observation pour faire disparaître, quand il y a lieu, les dénominateurs, si les données renferment des fractions.

Exemple. — *Avec un lingot au titre de* 0,925 *et un lingot au titre de* 0,900 *faire un alliage au titre de* $\frac{11}{12}$.

Les nombres 0,925 0,900 et $\frac{11}{12}$ peuvent être multipliés par 12, et l'on appliquera plus commodément le mécanisme de la règle sur des nombres entiers, respectivement proportionnels aux nombres primitifs

$$\begin{array}{ccccc} 111 & & & & 2 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & 110 & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ 108 & & & & 1 \end{array}$$

On voit immédiatement que l'alliage doit se composer de 2 parties en poids du 1^{er} lingot pour 1 du 2^{e}.

Le mécanisme de la règle de mélange ou d'alliage donne d'abord des nombres proportionnels aux quantités qu'il faut prendre. Souvent le problème à résoudre fixe, soit la quantité de l'un des éléments du mélange ou de l'alliage, soit la quantité totale qu'il s'agit d'obtenir. La question, préparée par la règle de mélange, s'achève aisément par une règle de trois ou une règle de partages proportionnels. Les problèmes suivants en fourniront des exemples.

Problème I. — *On veut frapper à la monnaie des pièces d'or de* 20 *francs. Quels poids faut-il prendre sur deux lingots aux titres de* 0,916 *et* 0,875 *pour faire* 1 860 *pièces.*

Le titre des pièces d'or étant de 0,900 on voit que les poids doivent être pris dans le rapport de 25 du premier lingot pour 16 du second.

Le poids total de 1 860 pièces se trouve aisément d'après la taille des pièces de 20 francs, qui est de 155 au kilogramme. Le poids de 1 860 pièces est $\frac{1\,000 \times 1\,860}{155} = 12\,000$ grammes ou 12 kilogrammes.

Il suffit maintenant de partager le poids total 12 kilogr. proportionnellement aux nombres 25 et 16.

Le poids à prendre sur le premier lingot sera

$$\frac{12 \times 25}{41} = 7^{k},317$$

Le poids à prendre sur le deuxième

$$\frac{12 \times 16}{41} = 4^{k},683$$

Poids total 12 kilogrammes.

On peut vérifier que 12 kilogrammes d'or au titre de 0,900 représentent une valeur de $3\,100 \times 12 = 37\,200$ francs. Cette valeur est bien celle de 1 860 pièces de 20 francs.

Problème II. — *Un épicier a 3 sortes de café, dont les prix sont de* 5,25; 4,50; 3,70 *le kilogramme. Il mélange* 20 *kilogrammes de la* 1re *qualité avec* 13 *kilogrammes de la* 2e; *quel poids doit-il prendre de la* 3e *qualité pour former un mélange, au prix moyen de* 4 *francs le kilogramme ?*

Le premier mélange donne

	$5,25 \times 20$	$=$	105 francs
	$4,50 \times 13$	$=$	58,5
Poids	33 kilogr.		163,5 valeur du 1er mélange.

Prix moyen du premier mélange $\dfrac{163,5}{33} = \dfrac{54,5}{11}$

Il suffit maintenant de chercher dans quelles proportions il faut mélanger du café au prix de $\dfrac{54,5}{11}$ et du café au prix de 3,70 pour obtenir le prix moyen de 4 francs

$$\begin{array}{ccccc} 545 & & & & 33 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & 440 & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ 407 & & & & 105 \end{array}$$

La règle nous montre immédiatement qu'avec les 33 kilogrammes du 1er mélange, il faut prendre 105 kilogrammes de la 3e qualité.

Problème III. — *On sait que l'on peut faire la longueur du mètre en plaçant en ligne, les unes à la suite des autres,* 40 *pièces d'or, de* 100 *francs et de* 10 *francs, dont les diamètres sont de* 35 *millimètres et de* 19 *millimètres. Combien faut-il prendre de pièces de chaque espèce ?*

Solution. — Le diamètre moyen de 40 pièces formant une longueur de 1000 millimètres est égal à $\frac{1000}{40} = 25$ millimètres. Appliquons la règle de mélange

$$\begin{array}{ccccc} 35 & & 6 & & 3 \\ & \diagdown \ \diagup & & & \\ & 25 & & & \\ & \diagup \ \diagdown & & & \\ 19 & & 10 & & 5 \end{array}$$

Les nombres des pièces de 100 francs et des pièces de 10 fr. sont proportionnels aux nombres 3 et 5.

Il suffit donc de partager le nombre total 40, en deux parties proportionnelles à 3 et 5.

Le nombre des pièces de 100 *francs est* $\frac{40 \times 3}{8} = 15.$

Le nombre des pièces de 10 *francs* $\frac{40 \times 5}{8} = 25.$

VÉRIFICATION

$35 \times 15 = 525$ millimètres.
$19 \times 25 = 475$ »

Longueur totale 1 *mètre.*

Remarques. — Si l'on réfléchit aux applications raisonnées qui justifient le mécanisme de la règle de mélange, on reconnaîtra sans peine que la règle s'applique non seulement à des questions de mélanges effectifs, mais à toutes les questions traduites par l'équation générale $ax + cy = b(x + y)$, dans laquelle les nombres a, b, c, sont donnés, b ayant une valeur comprise entre a et c. Cette équation ne détermine pas x et y, mais seulement leur rapport ; elle admet, si elle reste isolée, une infinité de solutions, dans lesquelles les valeurs simultanées d'x et d'y

doivent conserver le même rapport. Ce rapport constant est $\frac{y}{x} = \frac{a-b}{b-c}$, c'est-à-dire le rapport des différences que fournit la règle de mélange.

Le problème devient déterminé dès que l'on donne une des valeurs, soit de x, soit de y, ou encore la somme $(x+y)$.

Dans l'équation précédente, nous supposons, pour fixer les idées, $a > b > c$. Il peut se présenter des cas particuliers pour lesquels on ait $c = o$. Par exemple, dans les questions de mélanges de vins, on peut supposer que l'on mette de l'eau à la place du vin de qualité inférieure ; la règle de mélange reste applicable, il suffit de considérer l'eau comme un liquide de valeur zéro. La question suivante en montre une application.

Mouillage des vins. — *Combien faut-il mettre d'eau dans* 224 *litres de vin à* 1,20 *pour abaisser le prix du litre à* 0,70 ?

$$\begin{array}{ccccc} 12 & & 7 & & 224 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 7 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & 5 & & x \end{array}$$

La règle de mélange nous montre qu'il suffit de mettre 5 litres d'eau pour 7 litres de vin, par conséquent le nombre x de litres d'eau qu'il faut mettre dans 224 litres de vin est

$$x = \frac{224 \times 5}{7} = 160$$

La question peut d'ailleurs être résolue sans le mécanisme de la règle de mélange. Pour trouver quelle proportion d'eau il faut ajouter à du vin qui vaut $1^{\text{fr}},20$ ou 12 décimes le litre pour abaisser le prix du litre à $0^{\text{fr}},70$ ou 7 décimes, il suffit d'imaginer le litre de vin divisé en 12 parties égales, dont chacune vaut 1 décime ; si l'on substitue à $12 - 7$ ou à 5 de ces parties égales, 5 parties d'eau de même volume, on aura toujours 1 litre, mais qui contiendra seulement 7 parties de vin et qui ne vaudra que 7 décimes.

On trouve encore directement le nombre x de litres d'eau à ajouter aux 224 litres de vin en posant l'équation

$$(224+x)\times 0{,}7=224\times 1{,}2$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{224\,[1{,}2-0{,}7]}{0{,}7}=\frac{224\times 5}{7}=160$$

Le même cas particulier se présente dans les questions d'alliage lorsqu'au lieu du 2e lingot de titre inférieur, on propose du cuivre, que l'on peut considérer comme un lingot de titre 0.

La règle d'alliage reste applicable, même dans le cas où l'on cherche la proportion de cuivre qu'il faut *retirer* d'un lingot pour *élever* le titre. Exemple :

Quel poids de cuivre faut-il retirer d'un lingot pesant 12 *kilogrammes, au titre de* 0,900, *pour élever le titre à* 0,925?

Effectuons les différences, comme pour les cas ordinaires

$$\begin{array}{ccccc} 900 & & 925 & & 12 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 925 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 0 & & -25 & & -x \end{array}$$

La différence de 900 à 925 se trouve ici négative, et indique qu'il faut retrancher 25 parties de cuivre sur 925 parties au titre de 900. Le poids primitif proposé 12 kilogrammes, doit devenir $12-x$, x étant donné par la formule

$$x=\frac{25\times 12}{925}=\frac{12}{37}$$

Pour présenter la vérification, il suffit de faire voir que le poids de métal fin est resté le même, en le déterminant d'après le titre de chaque lingot.

Dans le lingot primitif, le poids de métal fin était $12\times 0{,}900$.

Dans le lingot transformé, le poids de métal fin est $12 \times \frac{36}{37} \times 0,925 = 12 \times 36 \times 0,025$, or, $36 \times 0,025 = 0,9$. La vérification réussit, comme on pouvait l'affirmer d'avance.

La règle d'alliage ne fait pas autre chose que de faire rentrer dans le mécanisme ordinaire les conditions exprimées par l'équation

$$(12 - x) \times 0,925 = 12, \times 0,900$$

d'où l'on tire immédiatement

$$x = \frac{12 \times 25}{925} = 12 \times \frac{1}{37}$$

QUESTIONS D'AFFINAGE.

L'*affinage* des lingots d'or ou d'argent a pour but d'augmenter la proportion du métal fin, en enlevant une partie du cuivre allié au métal précieux. Le problème suivant donne un exemple des principales questions à résoudre en pareille matière.

Problème. — *Un fondeur veut élever* 15 *kilogrammes d'argent du titre de* 835 *au titre* 900. *On demande :*

1° *La quantité de cuivre qu'il faut retirer ;*

2° *Le poids de la portion du lingot qu'il suffit de mettre au creuset pour extraire le poids de cuivre précédemment déterminé ;*

3° *La composition détaillée du lingot après l'affinage.*

SOLUTION. — 1° Soit x le poids de cuivre qu'il faut extraire du lingot au titre de 0,835 pour élever le titre à 0,900. Le poids d'argent pur restant constant, on peut poser l'équation

$$(15 - x) \times 900 = 15 \times 835$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{15 \times (900 - 835)}{900} = \frac{15 \times 65}{900} = \frac{13}{12}$$

Ainsi le poids de cuivre qui se trouve en excès, qui doit être retiré, est égal à $\frac{13}{12}$ de kilogramme, ou $1^k,0833$...

On peut obtenir ce résultat par les simples réflexions suivantes :

Le poids d'argent pur est $15 \times 0,835 = 12^k,525$. Il doit rester fixe.

Lorsque le lingot sera au titre de $\frac{9}{10}$, le poids du cuivre sera

$\frac{1}{9}$ du poids d'argent, soit $1^k,391\frac{2}{3}$

Le poids de cuivre actuel étant $2^k,475$

la quantité à retirer est la différence $1^k,083\frac{1}{3}$

2° Dans le lingot proposé, au titre de 0,835, le poids du lingot ou d'une portion du lingot est au poids de cuivre correspondant dans le rapport de 1000 à 165 ou de 200 à 33. Il suffira donc de prendre sur le lingot la portion qui a pour poids $\frac{13 \times 200}{12 \times 33} = \frac{650}{99}$ ou $6^k,566$ à moins d'un gramme près.

3° La portion du lingot mise au creuset permettra d'extraire le cuivre en excès, $1^k,0833$, et laissera $5^k,4823$ de métal pur, les $5^k,4823$ refondus avec les $8^k,4344$ restés au titre de 0,835 donneront un poids total de $13^k,9167$ renfermant toujours $15 \times 0,835 = 12^k,525$ de métal fin.

Ainsi, après l'affinage, le lingot se composera de

$12^k,525$ argent pur.
$1\ ,3917$ cuivre.

$13\ ,9167$ poids total.

$$\text{Titre} \quad \frac{12\ ,525}{13\ ,9167} = 0,900$$

PROBLÈME DE SONNET.

Problème. — *Un négociant a du vin à* $1^{fr},80$ *le litre, et du vin à* 0,72 *la bouteille de* $\frac{3}{4}$ *de litre; quelle quantité de vin de* *la deuxième qualité doit-il mélanger avec* 7 *hectolitres de la première, pour qu'en ajoutant à ce premier mélange* 17 *litres d'eau par hectolitre de vin mélangé, il obtienne un mélange définitif dont la valeur soit de* 1,20 *le litre?*

1re SOLUTION. — Supposons formé le mélange des deux vins, et considérons 1 hectolitre de ce premier mélange; on doit y ajouter 17 litres d'eau, ce qui donnera 117 litres valant ensemble $1,20 \times 117 = 140^{fr},40$. Cette valeur totale, de $140^{fr},40$, est la valeur des 100 litres de vin mélangé, les 17 litres d'eau étant considérés comme ayant une valeur nulle : le mélange des deux vins doit être effectué dans les proportions qui produisent un prix moyen de $1^{fr},404$ par litre; les proportions sont faciles à déterminer, à l'aide de la règle ordinaire de mélange;

le vin de la 1re qualité vaut $1^{fr},80$ le litre,

le vin de la 2e qualité vaut $0,72 \times \frac{4}{3} = 0^{fr},96$ le litre,

le litre du mélange doit valoir 1,404.

Appliquons le mécanisme de la règle de mélange

$$\begin{array}{ccccc} 1,80 & & & 444 & 37 \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & & 1,404 & & \\ & \swarrow & \searrow & & \\ 0,96 & & & 396 & 33 \end{array}$$

Les deux vins doivent être mélangés dans le rapport de 33 de la 2e qualité pour 37 de la 1re.

Pour 700 litres du premier, il faudra prendre $\frac{700 \times 33}{37}$ du 2e.

Soit $624^{l},324$.....

2e SOLUTION. — Désignons par x le nombre de litres qu'il faut prendre de la 2e qualité. Le nombre total des litres du mélange définitif sera $(700 + x) . 1,17$ et la valeur totale sera égale à $(700 + x) . 1,17 \times 1,20$. Cette valeur totale comprend la valeur des 700 litres de la 1re qualité, $1,8 \times 700$, plus la valeur des x litres de la 2e, soit $0,96\, x$.

Nous pouvons donc poser l'équation

$$(700+x).1,17\times 1,2=1,8\times 700+0,96\,x$$

En effectuant les multiplications indiquées, nous trouvons

$$982,8+1,404\,x=1260+0,96\,x$$

ou

$$1,404\,x-0,96\,x=1260-982,8$$

$$0,444\,x=277,2$$

et enfin

$$x=\frac{277200}{444}=\frac{23100}{37}$$

Cette valeur est bien égale à la précédente $x=\frac{700\times 33}{37}$.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut que le prix du mélange définitif soit compris entre certaines limites que nous allons déterminer. D'après les différentes valeurs données pour le prix moyen définitif, le nombre de litres de la 2e espèce prendra diverses valeurs correspondantes, pouvant varier de zéro à l'infini. Lorsque ce nombre devient zéro, le mélange définitif comprend 17 litres d'eau pour 100 litres de la 1re qualité. La valeur de ces 117 litres est 180 francs, et la valeur du litre est $\frac{180}{117}=\frac{20}{13}=1,538.....$ c'est la plus grande valeur que l'on puisse proposer pour le prix du mélange définitif.

Lorsque le nombre de litres de la 2e qualité tend vers l'infini, le prix du litre du vin mélangé tend vers le prix 0,96 de la 2e qualité, et la valeur de 117 litres du mélange définitif tend vers 96 francs, ce qui donne $\frac{96}{117}=0,8205...$ c'est la plus petite valeur possible.

MÉLANGES COMPOSÉS DE 3, 4,... ESPÈCES.

Lorsqu'au lieu de mélanger deux espèces seulement, on veut composer un mélange avec un plus grand nombre d'espèces différentes, on trouve souvent un nombre illimité de solutions.

Le problème suivant en donne un exemple.

Problème. — *Un marchand a du café à 7 francs, à 6 francs, à 4 francs le kilogramme : il veut composer un mélange dont la valeur soit de 5 francs le kilogramme. Suivant quelles proportions doit-il composer ce mélange?*

Il peut former un mélange de café à 7 francs, et de café à 4 francs, en prenant 1 kilogramme de la qualité supérieure pour 2 kilogrammes de la qualité inférieure, ou, plus généralement, des quantités proportionnelles, m de la 1re qualité pour $2.m$ de l'autre; m étant un nombre arbitrairement choisi. Le mélange ainsi formé aura pour prix moyen 5 francs par kilogramme.

Il peut mélanger, par parties égales, du café à 6 francs, et du café à 4 francs, en prenant n kilogrammes de chaque espèce. Ce deuxième mélange reviendra encore à 5 francs le kilogramme.

En réunissant les deux mélanges, on formera bien un mélange définitif, comprenant des cafés des trois espèces, et ayant pour prix moyen 5 francs. Ce mélange définitif comprendra :

	m	kilogrammes,	à 7 francs.
	n		à 6 francs.
	$2m+n$		à 4 francs.
ensemble	$3m+2n$	kilogrammes,	au prix moyen de 5 francs.

L'égalité $(3m+2n).5=m.7+2m.4+n.6+n.4$ se trouve vérifiée, quels que soient les nombres m et n. Il y a une infinité de solutions, le problème est indéterminé.

Mais le problème peut cesser d'être indéterminé, si aux conditions de l'énoncé on joint d'autres conditions spéciales. Supposons que le mélange définitif doive avoir un poids déterminé, 100 kilogrammes, et comprendre des poids égaux des deux premières qualités de café, à 7 francs et à 6 francs. Dès lors les nombres m et n deviennent égaux, et les quantités correspondantes aux trois qualités sont proportionnelles aux nombres 1, 1, 3; comme d'ailleurs le poids total est fixé, les trois quantités se trouvent bien déterminées, elles sont respectivement

$$\frac{100^k \times 1}{5} = 20 \text{ kilogr.} \quad 1^{re} \text{ qualité}$$

$$\frac{100^k \times 1}{5} = 20 \quad » \quad 2 \quad »$$

$$\frac{100 \times 3}{5} = 60 \quad » \quad 3^e \quad »$$

L'égalité $100 \times 5 = 20 \times 7 + 20 \times 6 + 60 \times 4$ se trouve bien vérifiée.

La question pourrait alors être résolue directement par la méthode algébrique. Si l'on désigne par x le nombre de kilogrammes à prendre sur la 1^{re} qualité, x sera aussi le nombre à prendre sur la 2^e; $100 - 2x$ sera le nombre de kilogrammes de la 3^e qualité; et l'on devra avoir :

$$7.x + 6.x + 4(100 - 2x) = 100 \times 5$$

ou

$$5x + 400 = 500$$

$$x = \frac{100}{5} = 20$$

PROBLÈME D'ARCHIMÈDE.

D'après Vitruve, Archimède constata que la couronne dorée de Hiéron, tyran de Syracuse, pesait 20 *livres dans l'air,* $18\frac{3}{4}$ *dans l'eau. En supposant qu'il n'y entrât que de l'or et de l'argent, dont les densités respectives sont* 19,26 *et* 10,47, *on demande quels étaient les poids de l'un et de l'autre de ces métaux.*

1^{re} Solution arithmétique. — D'après le principe d'Archimède et les conditions de l'énoncé, le volume de la couronne est $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$, en prenant pour unité le volume d'eau qui pèse 1 livre; et la densité de l'alliage d'or et d'argent est $\frac{20}{1\frac{1}{4}} = 16$.

Les principes et le mécanisme de la règle d'alliage peuvent s'appliquer à la détermination des volumes des deux métaux.

$$\begin{array}{ccc} 19{,}26 & & 5{,}53 \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & 16 & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ 10{,}47 & & 3{,}26 \end{array}$$

Volume de l'or $\dfrac{5 \times 5{,}53}{4 \times 8{,}79}$

Volume de l'argent $\dfrac{5 \times 3{,}26}{4 \times 8{,}79}$

Poids de l'or $\dfrac{5 \times 5{,}53 \times 19{,}26}{4 \times 8{,}79} = 15{,}146$

Poids de l'argent $\dfrac{5 \times 3{,}26 \times 10{,}47}{4 \times 8{,}79} = 4{,}854$

2^e Solution arithmétique. — On peut déterminer directement les poids, à l'aide de la règle d'alliage, en observant que le quotient $\dfrac{P}{D}$ équivaut au produit $P \times \dfrac{1}{D}$. On prend alors pour éléments du tableau les inverses des densités.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{19{,}26} & & \dfrac{1}{10{,}47} - \dfrac{1}{16} \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & \dfrac{1}{16} & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ \dfrac{1}{10{,}47} & & \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{19{,}26} \end{array}$$

Poids de l'or $\dfrac{20 \times \left[\dfrac{1}{10{,}47} - \dfrac{1}{16}\right]}{\dfrac{1}{10{,}47} - \dfrac{1}{19{,}26}} = \dfrac{20 \times 5{,}53 \times 19{,}26}{16 \times 8{,}79} = 15{,}146$

Par suite, le poids de l'argent est... 4,854

Solution algébrique. — Si l'on désigne par x le poids de l'or, par y le poids de l'argent, on posera les équations

$$x + y = 20$$

$$\frac{x}{19,26} + \frac{y}{10,47} = \frac{5}{4}$$

exprimant, la 1re, que le poids de l'or et le poids de l'argent réunis donnent le poids total 20, la 2e, que les volumes des deux métaux donnent ensemble le volume total $\frac{5}{4}$.

De ces équations on tire facilement :

$$x = 15,146$$
$$y = 4,854$$

PREMIÈRES NOTIONS

SUR LES FONDS PUBLICS

ET LES PRINCIPALES OPÉRATIONS DE BOURSE

FONDS PUBLICS FRANÇAIS.

L'État dispose de trois moyens principaux pour se procurer l'argent nécessaire au fonctionnement des services publics :

1° la perception des *impôts votés par le Parlement.*

2° l'émission de *Bons du Trésor ou obligations à court terme.*

3° la négociation d'*emprunts publics.*

La perception des impôts est la source ordinaire qui doit régulièrement alimenter les caisses de l'État. Mais la rentrée des impôts peut présenter des lenteurs et des délais ; le service de la Trésorerie ne saurait en admettre. L'émission des *Bons du Trésor* a pour but de pourvoir aux besoins urgents du trésor public.

Les *Bons du Trésor* sont des titres remboursables à courte échéance, délivrés, en échange d'argent comptant, à tout particulier qui en demande à la caisse centrale du ministère des finances; l'echéance en est fixée, dans les limites de 1 mois à 1 an, suivant la convenance des porteurs.

Les *Bons du Trésor* donnent droit non seulement au remboursement du capital versé, mais en outre à une bonification d'intérêt.

L'intérêt est variable; le ministre des finances en élève ou abaisse le taux, par avis inséré au *Jonrnal officiel*, selon qu'il veut activer ou modérer l'afflux de l'argent dans les caisses de l'État. L'avis officiel fixe habituellement trois taux : le premier, le plus faible, pour les échéances de 3 mois; le deuxième, pour celles de 4 à 7 mois; le troisième, le plus fort, pour les échéances de 1 année.

Le taux d'intérêt pour les Bons remboursables au bout d'une année était de 6 % en 1873, il s'est abaissé successivement à $5\frac{1}{2}$ % en 1872, à 5 % en 1874, à 4 % en 1875. Il est actuellement, en janvier 1895, de 2 %.

Les Bons du Trésor constituent, avec les comptes des Caisses d'épargne, et divers autres comptes courants, la portion de la *Dette publique* désignée sous le nom de *Dette flottante*.

EMPRUNTS D'ÉTAT.

L'aggravation des charges publiques a forcé plus d'une fois l'État à recourir à la voie des *emprunts*.

L'État emprunteur peut traiter avec une société financière, avec une banque spéciale, soit par exemple, la Banque de France. Mais le plus souvent il ouvre une souscription publique.

Les emprunts publics contractés jusqu'à ce jour par le gouvernement français peuvent se diviser en deux classes, suivant la nature des titres offerts, et remis aux souscripteurs en échange de l'argent versé au Trésor : 1° emprunts contractés par l'émission de *Titres de rentes perpétuelles*; 2° emprunts contractés par l'émission de *Titres à capital remboursable*, dans des délais fixés, sous les noms de *Titres de rentes amortissables*, *Bons à longue échéance*, *Obligations*, *Annuités dues par l'État*.

Nous étudierons en premier lieu les *Rentes perpétuelles*.

RENTES PERPÉTUELLES.

Lorsque l'État contracte un emprunt par l'émission de *rentes perpétuelles*, il remet aux souscripteurs, en échange des fonds versés par eux à la caisse du Trésor, *des certificats d'inscriptions* ou *titres de rente*. Ce sont des titres sur lesquels se trouve énoncé, non le capital versé par le souscripteur, mais l'intérêt, le nombre de francs de rente que l'État s'engage à lui servir.

Pour la négociation d'un emprunt, le gouvernement fixe la *nature de la rente* et le *prix d'émission*. Ainsi, l'emprunt du mois d'août 1870 a été contracté en *rentes* 3 % au prix *d'émission de* $60^{fr},60$.

L'emprunt de 3 milliards, de 1872, a été contracté en *rentes* 5 % au prix *d'émission de* $84^{fr},50$.

Dans le premier exemple, pour chaque versement de $60^{fr},60$ l'État s'engageait à payer 3 francs de rente par an; et cette rente est dite 3 % parce que l'État reconnaît devoir, par 3 fr. de rente, 100 francs de capital nominal, remboursable au gré du gouvernement débiteur, qui peut ajourner indéfiniment le payement du capital, à la condition d'en servir la rente.

Dans le deuxième exemple, le souscripteur en versant $84^{fr},50$ acquérait 5 francs de rente 5 %, c'est-à-dire 5 francs d'intérêt annuel correspondant à un capital de 100 francs que l'État reconnaît devoir.

Les titres de rentes peuvent être *nominatifs*, *au porteur*, ou *mixtes*. Les titres mixtes portent le nom du titulaire, comme les titres nominatifs, et sont munis de coupons analogues à ceux des titres au porteur.

Le minimum d'une première inscription est de 3 francs de rente.

Les titres expriment toujours des nombres entiers de francs.

ÉTAT DES RENTES PERPÉTUELLES EN 1882.

Taux nominal.	Rentes.	Capital nominal.
3 %	362.698.818	12.089.960.600
4 %	446.096	. . 11.152.400
$4\frac{1}{2}$ %	37.442.250	. 832.050.000
5 %	342.439.065	6.848.781.300
	743.026.229	19.781.944.300

En 1883, les rentes 5 % ont été converties en $4\frac{1}{2}$ %.

Vers la fin de l'année 1887, les titres de 4 °/₀ et de $4\frac{1}{2}$ °/₀ (ancien), sont convertis en 3 °/₀ ou remboursés.

Au commencement de l'année 1894, le $4\frac{1}{2}$ °/₀ (nouveau), provenant de la conversion de 1883, est à son tour converti en $3\frac{1}{2}$ °/₀.

Les types de rentes françaises perpétuelles sont maintenant :

Le 3 °/₀ ancien ou perpétuel, au capital nominal de 15 milliards environ.

Le $3\frac{1}{2}$ °/₀, provenant de la conversion de 1894, au capital de 6 milliards 800 millions environ.

Les arrérages des rentes perpétuelles 3 °/₀ se payent par quart et par trimestre, le 1er janvier, 1er avril, 1er juillet, 1er octobre. Les arrérages des rentes $3\frac{1}{2}$ °/₀ se payent aussi par trimestre aux dates suivantes : 16 février, 16 mai, 16 août, 16 novembre.

Les titres de rentes sont des valeurs négociables et transmissibles.

La *Bourse* est le grand marché public où s'opèrent d'importantes transactions sur les rentes et valeurs similaires.

Le *Cours de la rente*, donné par le *Bulletin officiel*, indique le prix à payer pour la quotité de rente qui correspond au taux nominal. Ainsi quand on dit que le *Cours du* 3 °/₀ *est* 102,75, cela signifie qu'il faut payer 102fr,75 sans compter les frais accessoires pour se procurer sur le marché public un titre de 3 francs de rente 3 °/₀, et, naturellement, qu'il faut débourser cette somme autant de fois que l'on veut acquérir de fois 3 francs de la dite rente. Le nombre qui indique le cours est suivi de la mention « *jouissance* 1er *janvier* », par exemple, pour indiquer l'époque à partir de laquelle courent les intérêts, la date à laquelle se rapporte l'échéance du dernier coupon, et par suite la jouissance des coupons à recevoir dans l'avenir.

Pour les négociations à la Bourse, on détache les coupons des Titres de rentes françaises quinze jours avant leur échéance.

La négociation des rentes ne peut se faire que par ministère d'agents de change. L'agent de change qui fait une opération pour le compte d'un client est autorisé à compter pour sa commission un droit de courtage de $\frac{1}{8}$ °/₀ du capital brut qui forme le montant de la négociation. Le bordereau d'achat ou de vente délivré par l'agent de change doit porter un timbre de $0^{fr},60$ lorsque le capital négocié est inférieur ou égal à 10000 francs, de $1^{fr},80$ lorsque le capital dépasse 10000 francs. On y voit encore figurer, outre le timbre des agents de change, un timbre ordinaire de 10 centimes. Les frais de timbres ont été abaissés depuis l'établissement de l'impôt.

L'impôt sur les opérations de Bourse, inauguré le 1er juin 1893, est, par 1000 francs, de 10 centimes pour l'État, 5 centimes à la charge de l'acheteur, 5 centimes à la charge du vendeur.

NÉGOCIATION DE RENTES, AU COMPTANT.

Les négociations de rentes, au comptant, donnent lieu à quelques problèmes très simples dont nous allons signaler la solution.

Problème I. — *Calculer le prix de revient d'un nombre donné* R *de francs de rente* T °/₀ *d'après un cours* C.

Le prix brut ou prix principal d'achat, c'est-à-dire encore la somme que l'agent de change de l'acheteur devra payer à l'agent de change du vendeur, se détermine par la simple règle de trois suivante :

T francs de rente du type T °/₀ coûtent C francs.

1 — — coûte $\frac{C}{T}$

R — — coûtent $\frac{C \times R}{T}$

Ainsi le prix brut est $\frac{C \times R}{T}$, c'est-à-dire le cours multiplié par le nombre de francs de vente et divisé par le taux nominal.

Au prix principal, $\frac{C \times R}{T}$, il faut ajouter :

pour le courtage $\frac{1}{800} \cdot \frac{C \times R}{T}$

pour l'impôt $\frac{1}{20000} \cdot \frac{C \times R}{T}$

pour les timbres t.

Nous obtenons ainsi pour expression du prix de revient P

$$P = \frac{C \times R}{T}\left[1 + \frac{1}{800} + \frac{1}{20000}\right] + t.$$

Les frais accessoires qui, pour l'acheteur, viennent en augmentation du prix principal, doivent être, pour le vendeur, comptés en diminution du produit brut de la rente. Le produit net, V, de la vente, aura pour expression

$$V = \frac{C \times R}{T}\left[1 - \frac{1}{800} - \frac{1}{20000}\right] - t.$$

Prenons, comme exemple, la négociation de 6000 francs de rente perpétuelle 3 %, au cours de 102,45. Les détails de l'opération sont indiqués par les bordereaux suivants :

ACHAT.

Acheté 6000 *fr. de* 3 % *à* 102,45		Fr. 204900
	Courtage $\frac{1}{8}$ %	256,125
	Impôt 0,05 *pour* 1000	10,25
	Timbres	0,50
	Prix de revient	205166,875

VENTE.

Vendu 6000 *fr. de* 3 °/₀ *à* 102,45	Fr. 204900
Courtage $\frac{1}{8}$ °/₀	256,125
Impôt 0,05 *pour* 1000	10,25
Timbres	0,50
Produit net de la vente	204633,125

Entre le prix de revient	205166,875
Et le produit net de la vente	204633,125
Il y a une différence de	533,75

que l'on peut détailler comme il suit :

Pour chaque agent de change 256,125, soit pour les deux	512,25
Pour l'État 0,10 pour 1000 sur 205000, soit	20,50
Pour les frais de timbres	1,00
Total égal	533,75

Problème II. — *Déterminer le nombre de francs de rente* T °/₀ *que l'on peut acquérir, d'après le cours* C, *avec un capital donné* A.

Soit x le plus grand nombre entier de francs de rente que le capitaliste pourra acquérir avec la somme A. Le prix de revient sera, d'après les explications du problème précédent,

$$\frac{C.x}{T}\left[1+\frac{1}{800}+\frac{1}{20000}\right]+t.$$

Les règlements prescrivent de ne pas dépasser le capital A versé à l'agent de change. Le nombre cherché doit satisfaire à la condition

$$\frac{C.x}{T}\left[1+\frac{1}{800}+\frac{1}{20000}\right]+t \leqq A$$

d'où l'on tire

$$x \leqslant \frac{(A-t)T}{C\left[1+\frac{1}{800}+\frac{1}{20000}\right]}$$

Le nombre x est le plus grand membre entier contenu dans le quotient qui forme le second nombre : il suffira d'effectuer ce quotient à 1 unité près par défaut.

Puisqu'il n'est pas nécessaire de calculer le quotient exact, mais seulement la partie entière du quotient, on pourra souvent dans la pratique admettre quelque simplification. Le diviseur, dans la formule du second membre, représente le cours donné, majoré des frais accessoires, courtage et impôt. Le cours ainsi rectifié, complété, s'exprimerait le plus souvent par un nombre décimal écrit avec beaucoup de chiffres, et la division en serait d'autant plus compliquée. Il paraîtra alors préférable de calculer, provisoirement du moins, les frais accessoires sur le capital $(A-t)$, ou même sur le capital A, l'influence du terme t paraissant négligeable. On trouvera donc, avec une approximation bien suffisante, le capital disponible, tous frais accessoires payés ; on pourra dire que le capital disponible sera au moins égal à :

$$A\left[1-\frac{1}{800}-\frac{1}{20000}\right]-t$$

ou, si l'on veut, à $(A-t)\left[1-\frac{1}{800}-\frac{1}{20000}\right]$.

La différence entre ces deux expressions, représentée par une très petite fraction de t, peut être considérée comme négligeable quand il s'agit de trouver le quotient à 1 unité près. Le cours publié C représente le nombre de francs qu'il faut payer, observation faite des frais accessoires, pour obtenir T francs de rente. Autant de fois ce nombre C sera contenu dans le capital disponible, autant de fois l'on pourra acheter T francs de rente. On sera ainsi conduit à effectuer le quotient

$$\frac{(A-t)\left[1-\frac{1}{800}-\frac{1}{20000}\right].T}{C}$$

ou, si l'on préfère,

$$\frac{\left[A\left(1-\frac{1}{800}-\frac{1}{20000}\right)-t\right].T}{C}$$

Dans les limites ordinaires de la pratique, ces formules conduiront au même quotient entier que la formule exacte. On sait en effet que la division par $1+\alpha$ équivaut sensiblement à la multiplication par $1-\alpha$, lorsque la fraction α est assez petite.

EXEMPLE NUMÉRIQUE : AVEC 100 000 FRANCS ACHETER DU 3 % PERPÉTUEL A 102,45.

En opérant immédiatement suivant la méthode simplifiée, nous prélevons sur les 100 000 francs, 125 francs pour le courtage, 5 francs pour l'impôt, 2 francs pour les timbres, ensemble 132 francs pour tous frais accessoires. Le capital disponible est ainsi 99 868 francs, et nous effectuons à 1 unité près le quotient

$$\frac{99\,868\times 3}{102,45} \quad \text{ou} \quad \frac{99\,868}{34,15}.$$

Nous trouvons 2924. C'est le nombre de francs de rente que le capitaliste pourra acquérir.

Le bordereau d'achat sera établi comme il suit :

Acheté 2924 *fr. de* 3 % *à* 102,45		99854,60
Courtage $\frac{1}{8}$ %		124,82
Impôt 0,05 *pour* 1000		5,00
Timbres		0,50
	Ensemble	99984,92

Capital déposé	100 000
— *employé*	99 984,92
A remettre en espèces	15,08 *avec les titres.*

En opérant d'après la méthode la plus régulière, nous prélevons sur 100000 francs le montant des timbres, soit 1,90 et nous divisons le capital 99998,10 par le prix complet de 1 franc de rente, soit 34,1944. Cette division donne pour quotient entier 2924 et pour reste 13,67.

Le quotient entier donne le nombre de francs de rente.

Le reste fait connaître le reliquat que l'agent de change remet en espèces, en faisant la livraison des titres.

Si au lieu de prendre pour diviseur le prix d'un franc de rente, on prenait le prix de 3 francs, le capital disponible étant en même temps multiplié par 3, le quotient entier resterait bien le même, mais le reste serait multiplié par 3 ; et le reliquat serait le tiers du nouveau reste.

Problème III. — *Déterminer le taux de placement correspondant à un achat de rente perpetuelle d'après un cours donné.*

Supposons un achat de rente 3 % au cours de 102. On se contente habituellement d'une solution approximative, en considérant la rente 3 francs comme l'intérêt annuel du capital représenté par le cours 102.

A 1 franc de capital correspondrait un intérêt $\frac{3}{102}$

et à 100 francs — $\frac{3 \times 100}{102} = 2,94.$

Le taux de placement serait ainsi de 2,94 %.

Généralement, T désignant le taux nominal de la rente, C le cours proposé, le taux de placement serait donné par la formule $\frac{T \times 100}{C}$.

Cette solution ne peut être considérée comme donnant une mesure exacte du taux cherché. Elle suppose que les 3 francs de rente représentent le revenu annuel du capital 102, comme si les 3 francs de rente étaient payés en une seule fois un an après l'acquisition de la vente. La réalité du fait ne répond pas à cette hypothèse. Le service des arrérages de la rente se fait par trimestre, et le rentier doit recevoir le premier terme trimestriel à une date plus ou moins rapprochée du jour de l'acquisition. Un titre acheté le 15 décembre donnera droit au coupon du 1er janvier ; acheté le 17 décembre, il ne porterait plus le coupon de janvier, et le premier terme trimestriel ne serait payable que 3 mois 1/2 après l'achat, au 1er avril.

Dans un calcul précis, il y a lieu de tenir compte de la périodicité trimestrielle des coupons, de la date précise de l'achat, et, autant que possible, des frais accessoires.

Nous distinguerons deux cas: 1° la date d'acquisition est le premier jour du trimestre; 2° elle est un jour quelconque du trimestre.

I. Supposons en premier lieu que le 3 % soit coté 102, au commencement du trimestre.

Pour étudier la question à un point de vue pratique, nous pouvons considérer l'achat de 3000 francs, au lieu du nombre type 3 francs, de rente, au cours de 102. Les déboursés comprendront alors:

Achat de 3000 *fr.* 3 % *à* 102	Fr. 102000
Courtage $\frac{1}{8}$ %	127,50
Impôt 0,05 *pour* 1000	5,10
Timbres	0,50
Prix de revient	102133,10

Pour un déboursé effectif de 102133,10 le rentier aura 3000 francs de rente par an, payables par quart et par trimestre, c'est-à-dire un revenu trimestriel de 750 francs à percevoir à la fin de chaque trimestre. Voilà la réalité des faits, et dans ces conditions il nous est facile de déterminer mathématiquement le taux de placement, c'est-à-dire l'intérêt trimestriel rapporté par 100 francs effectivement déboursés ou placés par le capitaliste. Ce taux trimestriel est évidemment donné par la simple formule

$$\frac{750 \times 100}{102\,133,1}.$$

Le taux trimestriel est trouvé égal à 0,73433 %.

Il ne conviendrait pas de dire que le taux annuel correspondant est 4 fois plus fort, c'est-à-dire 2,93732 %. Le placement, d'après un taux trimestriel t, n'est pas équivalent à un placement d'après un taux annuel égal à $4t$, ainsi que nous l'expliquons en détail dans notre ouvrage sur les *Placements et emprunts à long terme*. Le premier est un peu plus avantageux, parce que les coupons trimestriels peuvent être utilisés, replacés. On pourrait toutefois énoncer un taux par an, quadruple du taux trimestriel réel, à la condition formelle d'ajouter que l'intérêt est payable par trimestre. Ainsi l'on pourra admettre comme expression du taux, par exemple, 4 % par an, payable par trimestre, pour indiquer le taux de 1 % par trimestre. Le taux par an, suivi de la mention « payable par trimestre » peut alors s'obtenir en considérant la rente pour l'année, au lieu de la rente par trimestre.

Si T désigne le taux nominal de la rente, C le cours donné au commencement du trimestre, f les frais accessoires, on pourra calculer le taux de placement ainsi défini par la formule $\frac{T \times 100}{C + f}$.

II. Supposons en second lieu que le cours donné soit rapporté à un jour quelconque du trimestre courant. On peut concevoir que dans le cours proposé il y ait une part, proportionnelle au temps écoulé depuis le commencement du trimestre, représentant ce que l'on appelle la valeur acquise sur le coupon. Un titre de 3 francs de rente rapporte 0,75 à la fin de chaque trimestre. Ces 0,75 sont gagnés en 90 jours ou 3 mois; on peut admettre que chaque jour le titre gagne $\frac{0,75}{90}$ et par suite en 12 jours, $\frac{0,75 \times 12}{90}$; soit 0,25 par mois, et 0,125 par quinzaine.

En retranchant du cours donné la valeur acquise sur le coupon, on détermine le prix correspondant qu'il aurait fallu débourser au commencement du trimestre, et l'on se trouve ainsi ramené au premier cas.

Supposons, par exemple, le 3 % coté 103 à la date du

1er mars. Le cours de 103 à la date du 1er mars équivaut au cours du 1er janvier augmenté de 50 centimes gagnés en 2 mois sur le coupon. On peut alors dire que le cours équivalent au 1er janvier eût été 102,50 et l'on trouvera le taux comme il vient d'être expliqué pour le premier cas.

Les coupons se détachent, à la Bourse, 15 jours avant l'échéance. Si l'on donne le cours au milieu de mars, coupon détaché, on observera que le prix payable au milieu de mars, augmenté de l'intérêt de 15 jours, donne le prix équivalent payable à la date du 1er avril, qui est le commencement d'un nouveau trimestre. (Voir, pour la solution complète de ce problème, notre *Traité des Placements et Emprunts*.)

2^e CLASSE D'EMPRUNTS D'ÉTAT.

Nous rangeons dans la 2^e classe les emprunts d'État contractés par l'émission de *Titres remboursables dans le cours d'un nombre limité d'années*.

Les *Titres à capital remboursable* rapportent, comme les titres de Rentes, un intérêt périodique fixé; mais, tandis que pour les rentes dites perpétuelles l'État a la faculté de différer indéfiniment le remboursement du capital, pour les Titres de la 2^e classe, le remboursement est *obligatoire*, doit être effectué chaque année sur un certain nombre de titres que le sort désigne, de manière que tous les titres du même emprunt se trouvent amortis après un nombre fixé d'années ou de semestres.

Signalons les principaux titres de cette espèce.

OBLIGATIONS DU TRÉSOR 4 °/₀ 1877.

Ces obligations sont au capital de 500 francs, émises à 470 francs en juin 1877. Elles produisent un intérêt annuel de 20 francs, payables par moitié, 16 juin et 16 décembre. Elles sont remboursables par 61 tirages semestriels, du 16 décembre 1877 au 16 décembre 1907.

RENTES AMORTISSABLES 3 °/₀.

La première émission de *Rentes amortissables* 3 °/₀ remonte à l'année 1878.

Le service des Titres est fait par annuités, comprenant l'intérêt et l'amortissement, en 75 ans, à partir de 1878.

Les Titres de la première émission ont été divisés, classés, en 175 séries, remboursables annuellement, par tirages au sort, comme l'indique le tableau suivant :

de 1879	à 1907,	29 ans	1 série par an,	29 séries
1908	1925,	18	2	36
1926	1938,	13	3	39
1939	1945,	7	4	28
1946	1950,	5	5	25
1951	1953,	3	6	18
		75 ans		175 séries

Les tirages ont lieu le 1er mars de chaque année, le remboursement s'effectue au 16 avril suivant.

Les intérêts sont payables par trimestre, 16 janvier, 16 avril, 16 juillet, 16 octobre.

Les Titres sont de 15 francs de rente, ou de 30, 60, 150, 300, 600, 1 500 et 3 000.

Bien que les plus faibles inscriptions soient de 15 francs, les cours de la Bourse sont établis pour 3 francs, afin de rendre plus facile la comparaison *du* 3 °/₀ *perpétuel* et *du* 3 °/₀ *amortissable*. Tant que les cours sont au-dessous du pair, le remboursement au pair procure un bénéfice au rentier. Le cours du 3 °/₀ amortissable doit être supérieur à celui du 3 °/₀ perpétuel. Nous exposerons dans la suite (cours du 3e comptoir) les principes et les formules qui permettent d'établir les *parités* de ces deux fonds d'État.

OPÉRATIONS DE BOURSE A TERME.

Les opérations de bourse relatives aux négociations de rentes sur l'État se divisent en deux classes : *opérations au comptant* et *opérations à terme*.

Les *opérations au comptant* sont celles que nous avons étudiées jusqu'à présent, dans lesquelles le versement de l'argent de la part de l'acheteur, et la livraison des titres de la part du vendeur doivent se faire immédiatement ou du moins dans un délai très court.

Les *opérations à terme* sont celles dans lesquelles l'exécution des conditions du marché, versement de numéraire et livraison de titres, ne doit avoir lieu qu'à des époques ultérieures fixées.

Les opérations au comptant sont des transactions parfaitement régulières et correctes, offrant aux économies des particuliers toutes les garanties désirables pour la solidité du placement et la facilité des recouvrements.

Les opérations à terme peuvent également se faire dans des conditions conformes à toutes les règles, mais le plus souvent elles présentent le caractère aléatoire de la spéculation et du jeu. Il est utile d'en connaître les caractères, le mécanisme, non pour s'y livrer, mais pour éviter les surprises.

Les spéculateurs peuvent vendre ou acheter des valeurs qui, au lieu d'être livrables immédiatement, ne seront exigibles qu'à telle époque convenue : à l'époque *de la liquidation ; fin courant*, c'est-à-dire à la fin du mois : *fin prochain*, c'est-à-dire à la fin du mois prochain.

Les opérations à terme sur les rentes françaises ne peuvent pas, comme les négociations au comptant, s'appliquer à un nombre entier quelconque de francs de rente, mais seulement aux quotités suivantes, ou leurs multiples.

1 500 francs de rentes 3 %

1 750 francs de rentes $3\frac{1}{2}$ %

Les droits de courtage sont fixés à

20 francs par quotité de 1 500 francs de 3 %

ou 1 750 » de $3\frac{1}{2}$ %

Les frais de timbres et impôts sont aux mêmes tarifs que pour les opérations au comptant.

Nous laissons au lecteur le soin de compléter les calculs relatifs aux opérations à terme en tenant compte de l'impôt, comme nous venons d'en donner l'exemple pour le comptant.

Le *Bulletin officiel* de la Bourse donne, pour chaque type de rente, 2 cotes : l'une au comptant, l'autre à terme.

D'après les cotes, on aperçoit immédiatement les prix de 3 000 francs de rente 3 °/₀, ou de 4 500 de $4\frac{1}{2}$; pour les quotités de 1 500, et de 2 250, il suffit de prendre la moitié. Ainsi :

1 500 *francs de rente* 3 °/₀ *à* 83 *francs valent* 41 500 *francs.*

2 250 *francs de rente* $4\frac{1}{2}$ °/₀ *à* 104,60 *valent* 52 300 *francs.*

30 000 *francs de rente* 3 °/₀ *à* 83 *vaudraient* 830 000 *francs.*

45 000 *francs de rente* $4\frac{1}{2}$ °/₀ *à* 104,60 *vaudraient* 1 046 000 *fr.*

Il est encore utile de remarquer qu'une variation de 5 centimes dans le cours entraîne, abstraction faite des frais accessoires, un bénéfice ou une perte de 50 francs par 3 000 fr. de 3 °/₀ ou par 4 500 fr. de $4\frac{1}{2}$.

La cote à terme est, normalement, plus élevée que la cote au comptant. Ainsi, le 2 janvier 1889, les cotes étaient

3 °/₀	au comptant	82,80
	fin courant	82,95
$4\frac{1}{2}$ °/₀	au comptant	104,40
	à terme, fin c.	104,80

La différence entre les cours, à terme et au comptant, peut offrir au capitaliste un moyen d'augmenter son avoir d'une quantité déterminée, calculable à l'avance, sans risque à courir.

Supposons qu'un capitaliste achète le 2 *janvier* 3 500 *francs de rente* $3\frac{1}{2}$ °/₀ *à* 104,40 *et les revende immédiatement, livrables fin courant à* 104,80. *Détaillons les résultats de cette double opération.*

Les 3 500 francs de rente achetés à 104,40 coûtent		104 400
plus le courtage $\frac{1}{8}$ °/₀		130,50
plus les timbres		0,50
prix de revient	fr.	104 531,00

Les 3 500 fr. de rente revendus à 104,80 produiront		104 800
moins le courtage		40
et timbres		0,50
produit net	fr.	104 759,50

L'opération procure donc un bénéfice de fr. 228,50

Ce bénéfice peut être considéré comme l'intérêt du capital déboursé, pour 1 mois; le bénéfice proportionnel pour 12 mois serait 2 742 et l'on voit que le taux d'intérêt correspondant est très modéré, inférieur à 2,60.

Dans cet exemple, le courtage de l'opération au comptant absorbe une partie notable du bénéfice qui résulterait de la différence des cours; mais il n'y aura que le courtage de l'opération à terme si, comme il arrive souvent, le capitaliste revend, à terme, à la personne même qui lui vend les titres au comptant.

Le bénéfice du capitaliste serait, dans cette hypothèse, égal à 228,50 + 130,50, soit 359; le bénéfice, calculé pour 12 mois, serait 4 308; le taux d'intérêt serait environ 4,10 °/₀.

La plupart des opérations à terme, basées sur les probabilités de hausse ou de baisse, ne sont que de véritables jeux dont on ne peut mesurer avec certitude les chances et les risques.

Un marché à terme résulte, le plus souvent, des prévisions opposées de deux spéculateurs. L'*acheteur* croit à *la hausse*, il achète à l'avance des titres de rente, dans l'espoir de les revendre plus cher. Le *vendeur* croit à la *baisse;* il vend à l'avance des titres qu'il ne possède pas encore, dans l'espoir de les acheter à meilleur compte pour en faire la livraison à terme.

Entre la date de la conclusion du marché et le jour de la *liquidation*, l'acheteur a toujours le droit de se faire livrer, en payant le prix convenu, les titres de rente qui font l'objet du marché. C'est ce que l'on appelle, à la bourse, *escompter le vendeur*.

Les marchés à terme se distinguent en *marchés fermes* et *marchés à prime*.

MARCHÉS FERMES A TERME.

Dans les marchés fermes, les conditions de la négociation ont été arrêtées, il doit y avoir, régulièrement, livraison de titres par le vendeur, contre payement d'espèces par l'acheteur, suivant le prix convenu, à la date de la liquidation.

Dans la pratique, les choses ne se passent pas toujours ainsi. Le spéculateur, trompé dans ses prévisions, cherche généralement à maintenir sa situation jusqu'à la liquidation suivante, où il peut espérer des cours qui répondent mieux à ses engagements. Il se fait *reporter*.

Report. — Supposons d'abord que ce soit l'acheteur qui se trouve trompé dans ses prévisions; il achetait des titres dans l'espoir de les revendre à un cours supérieur au prix d'achat; mais au lieu d'un cours supérieur, la liquidation présente un cours inférieur, d'une quantité δ, au prix d'achat. Que fait alors l'acheteur? Il solde seulement la différence δ, par quotité de rente correspondante au cours, et pour lever les titres qu'il ne pourrait, généralement, pas payer, il se fait soutenir par un banquier, par un capitaliste qui répond du payement des titres, et les détient provisoirement pour les rendre au spéculateur à la liquidation suivante, en prélevant un bénéfice.

Le spéculateur s'est *fait reporter*. Il a, en quelque sorte, emprunté de l'argent à un banquier ou capitaliste, qui a pris les titres comme gage, et s'est ménagé un bénéfice que l'on désigne habituellement par *report*.

Le banquier est dit *reporteur*. Il est prêteur d'argent sur titres. Le *report* est le loyer de l'argent qu'il a prêté.

Supposons en second lieu que ce soit le vendeur qui se trouve trompé par les cours de la liquidation.

Le vendeur croyait à la baisse; il espérait pouvoir acheter, à un cours inférieur, les titres qu'il avait vendus d'avance; or, au lieu de la baisse qu'il attendait, c'est la hausse qui s'est produite; que fait le vendeur? Il cherche un détenteur de titres, il lui achète ses titres au comptant et les lui revend à terme pour la liquidation suivante où il espère trouver des cours plus bas, plus favorables pour acheter.

DÉPORT. — Il peut arriver, dans certains cas exceptionnels, que les vendeurs désirant se faire reporter soient en grand nombre et se trouvent obligés de s'adresser à des banquiers ou capitalistes ayant des titres en portefeuille. Les vendeurs surpris, pressés par les acheteurs qui réclament la livraison des titres, sont obligés d'allouer une rémunération, un bénéfice aux détenteurs de titres. Ils achètent au comptant les titres dont ils ont besoin pour satisfaire à leurs engagements, mais, pour maintenir leur situation de vendeur, ils les revendent à terme.

La vente à terme se fait alors à un prix moindre que l'achat au comptant. Le prêteur de titres, en ces circonstances, a double avantage : il tient à sa disposition, entre deux liquidations, l'argent versé en représentation de la valeur des titres, et de plus il perçoit un bénéfice pour le loyer de ces titres : le bénéfice, marqué par l'écart entre le prix au comptant et le prix à terme qui est plus faible, s'appelle *déport*.

MARCHÉS A PRIMES.

Dans les *marchés à primes*, l'acheteur se réserve le droit d'opter à l'époque de la liquidation, entre le versement d'un prix convenu pour prendre livraison des titres, ou la résiliation du contrat, moyennant un *droit de dédit*, une *prime* fixée, au profit du vendeur.

Supposons, par exemple, qu'un acheteur A *ait conclu avec un vendeur* B *un marché à prime sur le* 3 °/₀, *à* 83 *francs* dont 50 centimes ; *cela signifie que l'acheteur* A *se réserve le droit d'opter entre le maintien ferme du marché, en payant* 83 *fr. par* 3 *fr. de rente, et la résiliation du contrat moyennant une indemnité de* 50 *centimes, par* 3 *fr. de rente, payée au vendeur*

Arrive le jour de la réponse des primes, l'époque de la liquidation. Que doit faire l'acheteur A ?

Si le cours est inférieur à 82,50 il doit évidemment annuler le marché, il abandonne la prime.

Si le cours est 82,50 il est indifférent de lever ou d'abandonner ; la perte est de 50 centimes par 3 fr. de rente.

Si le cours est entre 82,50 et 83, il faut lever ; l'acheteur reste en perte, tant que le cours ne dépasse pas 83, mais il diminue sa perte en prenant livraison des titres pour les revendre au cours coté.

Si le cours est 83, il ne perd ni ne gagne en levant les titres pour les revendre au prix d'achat.

Si le cours est au-dessus de 83, il doit *a fortiori* lever, il peut réaliser un bénéfice.

Par les conditions du marché à prime, l'acheteur fixe une limite à sa perte possible, au lieu de rester exposé aux risques d'une baisse qui pourrait lui être trop préjudiciable.

Outre les primes en liquidation, il se fait tous les jours sur le marché libre de petites primes *dont* 10 *centimes,* pour la Bourse du lendemain 2 heures.

NÉGOCIATION, A LA BOURSE DE PARIS, DE FONDS D'ÉTATS ÉTRANGERS.

La plupart des fonds publics étrangers sont cotés à la Bourse de Paris.

Les cours et les taux de rentes, pour 100 unités de capital nominal, peuvent être considérés comme exprimés en monnaies du pays qui fait le service de la rente ou qui a fait l'émission des titres ; en monnaie anglaise, s'il s'agit de fonds anglais ; en monnaie autrichienne, s'il s'agit de fonds autrichiens. Mais le bulletin officiel de la Bourse joint à la cote en monnaie étrangère l'indication du change fixe d'après lequel le cours coté doit être converti en monnaie française. Ainsi, les Consolidés anglais $2\frac{3}{4}$ °/₀ (English Consols) sont, je suppose, au cours de $98\frac{5}{8}$, change fixe 25,20. Cela signifie que pour acquérir un titre de £ $2\frac{3}{4}$ de rente anglaise, il faut payer £ $98\frac{5}{8}$ en comptant $25^{fr},20$ par livre sterling; c'est-à-dire, en monnaie française, $98\frac{5}{8} \times 25,20$.

CHANGES FIXES.

Le *change fixe*, pour la négociation des fonds publics étrangers, c'est le nombre de francs qui, d'après des conventions arrêtées dès l'origine, à l'époque même de l'émission des titres, doit être pris pour base invariable de la conversion d'une unité étrangère en monnaie française.

Les *changes fixes* pour les principales valeurs étrangères sont, à Paris.

Fonds anglais, *argentins*, *brésiliens*, pour £ 1	Fr. 25,20
Fonds turcs, *péruviens*, *égyptiens*, pour £ 1	25
Fonds portugais, pour £ 1	25,25
Fonds hollandais, pour fl 1	2,10
Fonds autrichiens, *hongrois*, pour fl[45] 1	2,50
Fonds russes, pour Rbl. 1	4
Fonds américains, pour $ 1	5
Fonds allemands, pour Rm. 1	1,25

DROITS DE TIMBRE SUR FONDS ÉTRANGERS.

Tous les fonds d'État, en rentes perpétuelles ou amortissables, sont soumis à un droit de timbre établi dans les conditions ci-dessous :

Jusqu'à 500 fr. de capital nominal	timbre	Fr. 0,75
de 501 à 1000	»	1,50
de 1001 à 2000	»	3
de 2001 à 3000	»	4,50

et ainsi de suite, à raison de $1^{fr},50$ par chaque quotité de 1000 francs ou fraction de 1000 francs dépassant un nombre entier de mille. Ainsi pour un capital nominal compris entre 15 000 et 16 000 francs, le droit de timbre sera calculé sur 16 000 à raison de $1 \frac{1}{2}$ °/₀₀, ce qui fera 24 francs.

Exercices sur les fonds d'États étrangers.

Problème I. — *Un capitaliste achète, à la Bourse de Paris,* 2 500 *lire de rente italienne* 5 °/₀, *au cours de* 96,25. *Quel sera le montant des déboursés; quel sera le revenu réel par an?*

Pour les fonds italiens, la lire et le franc sont considérés comme équivalents.

Le prix principal d'achat de 2 500 lire à 96,25 est 48 125 fr.

il faut y ajouter le courtage $\frac{1}{8}$ °/₀	60,15
plus le droit de timbre	1,90
Prix de revient Fr.	48 187,05

La rente nominale de 2 500 lire sera, par le fait, réduite par les impôts établis en Italie, à 4,34 par 5 lire d'intérêt nominal. Le porteur du titre touchera au net $\frac{2\,500 \times 4,34}{5} = 2\,170$ lire. Les arrérages sont payables par semestre, aux échéances du 1^er^ janvier et 1^er^ juillet.

Problème II. — *Un capitaliste français se propose de placer* 18 000 *francs en consolidés anglais. On demande les détails de cette opération, le cours d'achat étant* $98 \frac{1}{2}$.

Le cours donné $98 \frac{1}{2}$, converti en monnaie française d'après le change fixe de 25,20, donne 2482^fr^,20; c'est le prix correspondant à 3 livres sterling de rente, qui vont être, dans le cours de l'année 1889, réduites à $2 \frac{3}{4}$.

Le prix correspondant à 1 livre de rente ancienne 3 °/₀ sera

$$\frac{2482,2}{3} = 827^{fr},40$$

Le nombre de livres que l'on pourra acheter avec 18 000 fr. se trouvera en divisant 18 000 par 827,40.

Le quotient entier est 21, et le reste est 624,6.

On pourra donc, avec 18 000 francs, acheter 21 livres de rente anglaise 3 °/₀, et payer les frais accessoires de courtage et de timbre.

Le *bordereau* de l'achat pourra se détailler ainsi :

Acheté 21 *livres de rente* 3 °/₀ à $98\frac{1}{2}$, ch. 25.20, Fr.	17375,40
Courtage $\frac{1}{8}$ °/₀	21,72
Timbre	1,90
Total à payer	17399,02
A remettre en espèces	600,98
Somme reçue en compte	18000

N. B. Les 21 livres de rente ancienne 3 °/₀ étant converties en $2\frac{3}{4}$ °/₀ se réduiront à 19 livres $\frac{1}{4}$, ou 19.5.

L'intérêt est payable par semestre, 5 janvier et 5 juillet, sous déduction de l'impôt connu sous le nom d'income tax.

Cet impôt est variable, à peu près de 3 pence par livre de rente. Le Crédit Lyonnais négocie les coupons au porteur d'après le cours commercial de la livre sterling, environ 25.25.

Problème III. — *Un banquier donne l'ordre de vendre, a la Bourse de Paris,* £ 300 *de rente anglaise* 3 °/₀, *et* 500 *lire de rente italienne* 5 °/₀, *pour acheter avec le produit net de la vente, du* 3 °/₀ *français amortissable.*

La rente anglaise est vendue au cours de $98\frac{1}{4}$.

La rente italienne 96,225.

et le 3 °/₀ *amortissable français acheté à* 87,20.

On demande le compte détaillé de cet arbitrage.

VENTE DE £ 300 RENTE ANGLAISE.

Prix de vente $\dfrac{98{,}25 \times 25{,}20 \times 300}{3}$ = Fr. 247.590

à déduire { Courtage $\frac{1}{8}$ °/₀ 309,50
Timbre $1\frac{1}{2}$ °/₀° du cap. nom. 378 }

Produit net de la vente Fr. 246.902,50

VENTE DE 5000 LIRE DE RENTE ITALIENNE.

Prix de vente $\dfrac{96{,}225 \times 5000}{5}$ = Fr. 96225

à déduire { Courtage $\frac{1}{8}$ °/₀ 120,28
Timbre $1\frac{1}{2}$ °/₀₀ 150 }

Produit net de la vente Fr. 95954,72

Le capital disponible pour l'achat de 3 °/₀ amortissable est la somme des produits nets des deux ventes, soit Fr. 342857,22.

Le cours coté 87,20 pour le 3°/₀ amortissable est rapporté, à 3 francs de rente, mais les titres sont de 15 francs et multiple de 15.

Le cours pour 15 francs de rente serait $87{,}2 \times 5 = 436$.

En divisant la somme disponible 342 867,72 par le prix 436 d'un titre de 15 fr. de rente, on trouve que l'on pourrait obtenir 786 titres de 15 francs, s'il n'y avait à couvrir les frais de courtage. Le reliquat serait insuffisant pour ces frais accessoires, il faudra acheter 785 titres de 15 francs, ou 11 775 fr. de rente amortissable.

Le bordereau d'achat se détaillera comme ci-dessous :

Acheté 11 775 fr. de 3 °/₀ amortissable	Fr.	342 260
Courtage $\frac{1}{8}$ °/₀		427,825
Timbres		1,90
Total des déboursés	Fr.	342 689,725
Reliquat à remettre en espèces		167,495
pour compléter l'emploi du produit des ventes		342 857,22

Comparons les intérêts annuels qui correspondent aux titres vendus et ceux que procurent les titres achetés.

Les £ 300 de rente anglaise, soumises en 1889 à la conversion, doivent se réduire à £ 275. Chaque livre de rente, au change de 25,20, se réduit, en raison de l'income tax, à 24,90.

La rente anglaise représenterait donc un intérêt annuel de $24{,}9 \times 275 =$	Fr.	6847,50
Les 5000 lire de rente italienne se réduiraient à		4340
Les titres vendus rapportaient, ensemble, par an	Fr.	11187,50
Les titres de 3 °/₀ amortissable, résultat de l'arbitrage, rapportent	Fr.	11775
il y a ainsi une augmentation d'intérêt, par an, de		587,50

La nouvelle rente présente encore d'autres avantages; les intérêts sont payables par trimestre, tandis que les rentes vendues étaient payables par semestre, et les titres de 3 °/₀ amortissable, achetés à 87,20, sont remboursables à 100 francs.

Problème IV. — *A la Bourse du 2 février 1889, le 3 °/₀ portugais est coté 64 $\frac{13}{16}$, change fixe 25.25 ; le 4 °/₀ hongrois est coté 85 $\frac{1}{4}$, change fixe 2,50. Quel est celui de ces deux fonds d'État qui coûte le plus cher?*

Pour résoudre la question, il suffit de déterminer, dans chaque type de rente, le prix correspondant à un intérêt déterminé, par exemple, à 1 franc. Le capital et l'intérêt, exprimés en monnaies étrangères, seraient convertis en monnaie française si l'on multipliait l'un et l'autre par le change fixe : mais cette multiplication ne changerait nullement le rapport des nombres qui représentent les valeurs correspondantes de l'intérêt et du capital ; il suffit de faire la comparaison du cours au taux nominal.

La cote du 3 °/₀ portugais signifie que £ $64 \frac{13}{16}$ rapportent un intérêt annuel de £ 3 ; par suite $64 \frac{13}{16}$ francs rapporteraient un intérêt annuel de 3 francs.

Pour trouver le prix de 1 franc de rente, il suffit de diviser le prix du cours par le taux nominal.

En rentes portuguaises, 1 unité de rente coûte $\dfrac{64 \frac{13}{16}}{3} = 21 \dfrac{29}{48}$

En rentes hongroises, 1 unité de rente coûte $\dfrac{85 \frac{1}{4}}{4} = 21 \dfrac{5}{16}$

On voit que le prix des rentes portugaises est un peu plus élevé que celui des rentes hongroises.

Il serait aisé de déterminer *la parité de 4 °/₀ hongrois, basée sur le cours donné du 3 °/₀ portugais.* Il suffirait d'augmenter la cote du 3 °/₀ portugais dans le rapport de 4 à 3, c'est-à-dire d'y ajouter $\frac{1}{3}$ de sa valeur.

Cours donné	$64 \frac{13}{16}$	pour le 3 °/₀
$\frac{1}{3}$	$21 \frac{29}{48}$	
Parité.	$86 \frac{5}{12}$	pour le 4 °/₀

Exercices de calcul mental.

D. *Lorsque le* 3 °/₀ *est coté* 82,50, *quel est le prix de* 1000 *francs de rente* 3 °/₀?

R. 27 500 *francs sans comprendre le courtage*,

27 536 *francs environ, en comptant les frais accessoires.*

On obtient ces résultats en remarquant que 3000 francs de rente coûteraient, d'après le cours donné, 82 500 francs.

1 000 francs coûtent $\frac{1}{3}$ de cette somme.

Le courtage est $\frac{1}{8}$ de 275 ou 34,375; les frais de timbres ajoutent encore 2 francs environ, de sorte que l'on peut compter 36 francs pour frais accessoires.

D. *Le* 4 $\frac{1}{2}$ °/₀ *est à* 104,25. *Combien coûteraient* 1000 *francs de rente* 4 $\frac{1}{2}$ °/₀?

R. 23 166,66

23 197 *environ avec les frais.*

Il est avantageux, pour le calcul, de doubler le cours du 4 $\frac{1}{2}$ °/₀; on obtient le prix de 9 francs de rente, et par suite de 90, 900, 9000, etc.

Pour 1000 francs, il suffit de prendre $\frac{1}{9}$ du prix correspondant à 9000.

D. *Le* 5 °/₀ *italien est à* 96,50. *Combien coûteraient* 1000 *lire de rente?*

R. 19 300 *francs.*

5000 lire coûteraient 96 500.

Pour 1000 lire, il faut doubler et diviser par 10.

D. *Combien de francs de rente* 3 °/₀ *peut-on se procurer, d'après le cours de* 83, *avec un capital disponible de* 65 000 *fr.?*

R. 2 350 *francs environ.*

Si le cours était au pair, 100 francs, le nombre de francs de rente serait, à peu près, $650 \times 3 = 1950$

C'est un premier résultat qui, même dans l'hypothèse du cours de 100 francs, ne serait qu'approché, à cause des frais de courtage, mais la différence est peu sensible.

Comme le cours est 83 au lieu de 100, il faut diviser ce premier résultat, 1950 par 0,83. Or $0,83 = 1 - 0,17$ et l'on sait que

$$\frac{1950}{1-0,17} = 1950 \times (1 + 0,17 + 0,17^2 + \ldots)$$

On sait que $0,17^2 = 0,0289$ presque 0,03.

Il suffit donc, dans un calcul approximatif, de compter $17 + 3$, c'est-à-dire 20 °/₀ ou $\frac{1}{5}$ d'augmentation sur 1950, soit 390, le total sera 2340.

Nous avons répondu 2350 en substituant 400 à 390, dans un calcul qui n'est qu'approximatif.

Le vrai nombre est 2346, qui ne diffère que de quelques francs des résultats approximatifs trouvés par de simples opérations mentales.

On pourrait encore remarquer que 83 000 francs de capital donneraient environ 3000 francs de rente, il suffirait de réduire le nombre 3000 dans la proportion de 65 à 83; on voit qu'il faut retrancher de 3000 environ de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$, on en conclut que le nombre demandé est compris entre 2250 et 2400.

D. *Le* 4 °/₀ *autrichien* (*or*) *est au cours de* 94, *change fixe* 2,50. *Combien coûteraient* 200 *florins de rente?*

R. 11 750 *francs, plus les frais.*

Le prix demandé serait donné par la formule

$$94 \times 50 \times 2,50 = \frac{94\,000}{8}$$

D. *Le* 4 °/₀ *autrichien est au cours de* 93,50. *Combien coûteraient* 200 *florins de capital?*

R. $467^{fr},50$.

Il est commode de substituer à 200 florins de capital 8 florins de rente. 8 florins de rente coûteraient $93,5 \times 2 \times 2,5$ ou $187 \times 2,5 = 467,50$.

D. *Le 4 °/₀ hongrois est au cours de* 86, *change fixe* 2,50. *Combien coûteraient* 100 *florins de capital?*

R. 215 *francs.*

A 100 florins de capital correspondent 4 florins de rente dont le prix est $86 \times 2,5 = 215$.

D. *Le* $2\frac{1}{2}$ °/₀ *hollandais est au cours de* 67, *change fixe* 2,10. *Combien coûteraient* 25 *florins de rente?*

R. 1407 *francs.*

Le 3 °/₀ *portugais est au cours de* 65, *change fixe* 25,25. *Combien coûteraient* £ 30 *de rente?*

R. $16\,412^{fr},5$.

ACTIONS ET OBLIGATIONS.

Les actions sont des titres émis en représentation des mises de fonds qui constituent le capital social d'une compagnie industrielle ou financière.

Les obligations sont les titres émis en représentation des emprunts contractés.

L'action représente une part dans le capital social ; elle donne droit à des dividendes qui peuvent varier, suivant les bénéfices réalisés.

L'obligation donne droit à un revenu fixe, et à un prix de remboursement déterminé. Ainsi les obligations de chemins de fer, du type 500 francs 3 °/₀, sont des titres remboursables à 500 francs, par voie de tirages au sort, et rapportant, jusqu'à l'époque du remboursement, un intérêt annuel de 15 francs, payable par semestre.

Les actions des grandes sociétés financières et industrielles sont cotées à la Bourse. La cote indique la valeur nominale de l'action, le prix de négociation, avec des mentions telles que : action 500 francs entièrement libérée ou tout payé.

Libérée de moitié, ou 250 francs payés.

Libérée du quart, ou 125 francs payés.

Ainsi, le *Bulletin officiel* de la Bourse du 12 février 1889 porte :

Valeurs.		Cours.
Banque de Paris et des Pays-Bas, action	500 fr. tout payé.	891,25
Crédit Lyonnais	250 fr. payés.	657,50
Dépôts et Comptes courants	125 fr. payés.	607,50

D'après ces cours.

Les actions Banque Paris et Pays-Bas coûtent effect[t]	891,25
Celles du Crédit Lyonnais 657,50 — 250 (à verser).	407,50
Celles des Dépôts et Comptes courants 607,50 — 375, c'est-à-dire	232,50

Les cours cotés comprennent le prix à payer comptant, plus le versement qui reste à faire pour libérer l'action entièrement. Le courtage est calculé d'après le cours coté, et non d'après le prix effectif déboursé.

L'action n'est négociable sur le marché public qu'après le versement effectué du quart au moins du montant nominal. Elle ne peut être mise au porteur qu'après sa libération de moitié. L'actionnaire ne peut devancer les appels de fonds. C'est en général le porteur définitif qui est directement obligé au payement des versements qui restent à faire pour une action non libérée; dans certains cas, la même obligation pèse sur les cessionnaires intermédiaires.

Les actions des établissement de crédit donnent en général des dividendes variables.

Ainsi l'action de la Banque de France a donné

en 1872,	un dividende de	320 francs,
en 1875	»	206,18
en 1880	»	154,63
en 1885	»	190,81
en 1886	»	159,78

Les actions des grandes compagnies de chemins de fer jouissent, en vertu des conventions de 1883, d'un revenu minimum garanti par l'État, conformément au tableau suivant :

Compagnies.	Dividende garanti.
Est	35,50
Ouest	38,50
Midi	50
Nord	54
Orléans	56
Paris-Lyon-Méditerranée	55

TAXES ÉTABLIES PAR LES LOIS DE FINANCES DE 1872 ET 1875 SUR LES VALEURS MOBILIÈRES.

Pour se rendre un compte exact du revenu réel que peut procurer un titre coté sur le marché public, il est nécessaire de connaître les taxes qui pèsent sur les actions et obligations et en général sur tous les titres négociables autres que les titres d'État.

Ces taxes sont au nombre de trois :

1° Une taxe périodique de 3 %, sur le revenu, frappant les coupons d'intérêt, les dividendes.

2° Une taxe périodique, de 0,20 pour 100 par an, calculée chaque année d'après le cours moyen de l'année précédente.

3° Une taxe unique de 3 % sur la prime de remboursement de chaque titre et sur chaque lot attribué à une obligation d'un emprunt loterie.

La taxe annuelle de 0,20 pour 100 du cours moyen est spéciale aux titres au porteur.

Les titres nominatifs en sont exonérés; mais ils subissent une taxe de 0,50 pour 100, pour toute mutation, transmission, conversion, transfert.

Dans le calcul de la taxe de 0,20 % du cours moyen, pour les titres au porteur, on ne tient pas compte des fractions des cours inférieures à 20 francs ; on prend les 0,2 % ou 2 ‰ du multiple de 20 immédiatement supérieur au cours moyen. Si le cours moyen est 393,75 la taxe sera calculée sur le nombre 400.

Ainsi une obligation 500 fr. 3 % qui aurait obtenu, en 1888, le cours moyen de 393,75 donnerait en 1889 un revenu de 15 francs, *diminué* des retenues suivantes :

1°	3 °/₀ sur le revenu 15 fr.	0,45
2°	0,2 °/₀ sur le cours 400	0,80
	Total à déduire	1,25

Le revenu net serait 13,75.

Depuis 1890, la taxe sur le revenu, sur la prime de remboursement et les lots, a été portée de 3 °/₀ à 4 °/₀.

Depuis le 1er juin 1893, les opérations de Bourse sont *soumises* à un impôt de 10 centimes par 1000 francs.

CHANGES ET ARBITRAGES

CHANGES DES EFFETS DE COMMERCE SUR PLACES ÉTRANGÈRES.

Les transactions commerciales entre négociants de différents pays, les règlements de compte entre banquiers de différentes places, donnent lieu à des calculs de change.

Ces calculs ont pour objet général de faire la conversion d'un nombre donné d'unités monétaires, payables dans telle place à une date fixée, en un nombre, considéré comme équivalent, d'unités monétaires payables dans telle autre place, à une date qui peut être différente de la première.

Entre les monnaies ou les unités de compte de deux pays, il y a une sorte de commune mesure : c'est le poids de métal précieux, or ou argent. Nous avons appris à estimer en monnaie française la valeur intrinsèque des pièces étrangères. Ainsi la valeur intrinsèque de la livre sterling est $25^{fr},22$. Une somme de 25 220 francs, en pièces d'or françaises, donnerait (à très peu près) le même poids d'or qu'une somme de £ 1000, en souverains anglais. Supposons une banque internationale ayant des établissements à Paris et à Londres; on conçoit qu'elle puisse servir d'intermédiaire entre les négociants français et anglais qui ont des comptes à régler. Un négociant français a expédié à un négociant anglais des articles de Paris d'une valeur vénale de 25 220 francs.

Le débiteur anglais verse à la banque £ 1 000, à Londres; la banque paye au créancier, à Paris, 25 220 francs. Le compte se trouve ainsi réglé entre l'acheteur et le vendeur, sans déplacement, sans transport d'espèces métalliques. La banque qui a opéré le change n'a pas altéré son capital; elle possède, avant comme après, le même poids d'or, ou des valeurs fiduciaires correspondant au même poids d'or; elle a d'ailleurs soin d'exiger de ses clients, en raison du service rendu, des commissions destinées à couvrir les frais de gestion, de correspondance, et même à ménager un bénéfice plus ou moins rémunérateur.

L'ordre des opérations pourrait être interverti : la banque pourrait faire au créancier français l'avance des 25 220 francs, à la condition d'acquérir le droit au recouvrement d'une somme équivalente, soit £ 1 000.

Dans le premier cas, le débiteur peut être considéré comme achetant une lettre de change sur Paris.

Dans le deuxième cas, le créancier négocie une traite sur Londres.

La banque de change reçoit dans une place, et paye dans l'autre; et, par l'exemple très simple que nous venons de citer, on voit que la principale condition de la balance de la recette et de la dépense, consiste dans l'égalité du poids de métal précieux. En d'autres termes, la principale considération qui doit guider dans le change des monnaies, comme dans la négociation des valeurs fiduciaires qui représentent des monnaies, c'est la considération de la valeur intrinsèque. Mais d'autres causes peuvent influer sur le cours du change. Le recouvrement à faire en pays étranger peut présenter plus ou moins de difficultés : les payements ne seront pas toujours effectués en numéraire, ou en billets de banque garantis par un stock métallique offrant pleine sécurité aux porteurs; dans plusieurs contrées étrangères circule du papier-monnaie qui ne peut pas être considéré comme un gage assuré correspondant à un poids d'or de même valeur nominale. L'unité de compte des contrées soumises au régime du papier-monnaie doit naturellement subir une certaine dépréciation relativement à la valeur intrinsèque du numéraire.

En outre, les comptes entre négociants doivent être réglés à telle date fixée. Le souscripteur d'un billet à ordre, d'un effet de commerce, s'engage à payer à une date déterminée. Le créancier peut faire escompter l'effet avant son échéance.

Il y a donc lieu, pour opérer la conversion d'un capital nominal donné en un capital d'un autre système monétaire, de prendre en considération, non seulement l'importance numérique, mais encore la date du payement. Les calculs de change sur l'Étranger, comprennent ainsi, non seulement un changement de système monétaire, mais, souvent en outre, un changement de date.

Chaque jour, les principaux établissements de change font connaître les bases, les conditions d'après lesquelles ils offrent d'effectuer la conversion d'un payement d'une place sur une autre, de négocier des lettres de change, traites, etc.

Ces conditions sont indiquées dans un bulletin spécial publié à la suite du bulletin des cours de la Bourse, sous le nom de *Cote de changes.*

La Cote des changes de Paris signale le nombre de francs demandés ou offerts en échange de 100 unités (ou d'une unité) du pays étranger, payables, sur effets de commerce, à des dates déterminées. On a adopté deux échéances types : à vue et à 3 mois. Voici d'ailleurs la Cote :

Cote des Changes de Paris, 1er **octobre** 1900.

ESCOMPTE à l'étranger.	DEVISES.	PAPIER COURT.	PAPIER LONG.	
0/0	*Valeurs se négociant à trois mois.*			
$3\frac{1}{2}$	Hollande...........	$205\frac{3}{8}$ à $205\frac{7}{8}$	$205\frac{1}{2}$ à 206	et 4 o/o
5	Allemagne..........	$121\frac{1}{2}$ à $121\frac{3}{4}$	$121\frac{3}{8}$ à $121\frac{5}{8}$	et 4 o/o
5	Espagne papier.....	» à »	» à »	et 4 o/o
	d° versement.	380 à 390	» à »	
6	Portugal............	389 à 399	389 à 399	et 4 o/o
$4\frac{1}{2}$	Vienne............	$102\frac{5}{8}$ à $102\frac{7}{8}$	$102\frac{1}{2}$ à $102\frac{3}{4}$	et 4 o/o
$5\frac{1}{2}$	Pétersbourg........	260 à 262	259 à 261	et 4 o/o
	d° versement.	$264\frac{5}{8}$ à $266\frac{5}{8}$	» à »	et 4 o/o
	Valeurs se négociant à vue.			
4	Londres............	25 09 à 25 12	25 09 à 25 12	moins 4 o/o
	d° Chèque.....	25 $11\frac{1}{2}$ à 25 $14\frac{1}{2}$	» à »	
4	Belgique......	5/16 p. à 3/16 p.	$\frac{1}{4}$ p. à $\frac{1}{8}$ p.	— 4 o/o
5	Suisse........... ...	$\frac{1}{2}$ p. à $\frac{3}{8}$ p.	7/16 p. à 5/16 p.	— 5 o/o
5	Italie (lire)...	$6\frac{3}{3}$ p. à $6\frac{1}{4}$ p.	$6\frac{5}{8}$ p. à $6\frac{1}{8}$ p.	— 5 o/o
4	New-York (en or)...	515 à 518	$513\frac{1}{2}$ à $516\frac{1}{2}$	— 4 o/o

Le lecteur appliquera facilement aux nombres de cette nouvelle cote les explications qui suivent, données sur une cote d'ancienne date.

Cote des Changes de Paris, 3 **novembre** 1888.

ESCOMPTE à l'étranger.	CHANGES.	PAPIER LONG.	PAPIER COURT.
	Valeurs se négociant à trois mois.		
o/o			
3	Amsterdam-Rotterdam......	207 $\frac{5}{8}$ à 207 $\frac{7}{8}$	207 $\frac{1}{8}$ à 207 $\frac{3}{8}$ et 4 o/o
4	Allemagne.....	123 à 123 $\frac{1}{4}$	122 $\frac{3}{4}$ à 123 et 4 o/o
5	Vienne et Trieste	206 à 207	206 à 207 et 4 o/o
5	Barcelone......	485 $\frac{1}{2}$ à 486 $\frac{1}{2}$	485 $\frac{1}{2}$ à 486 $\frac{1}{2}$ et 4 o/o
5	Madrid..	485 $\frac{1}{2}$ à 486 $\frac{1}{2}$	485 $\frac{1}{2}$ à 486 $\frac{1}{2}$ et 4 o/o
6	Lisbonne et Porto	557 à 558	557 à 558 et 4 o/o
6	St-Pétersbourg..	262 à 263	264 à 265 et 4 o/o
	Valeurs se négociant à vue.		
5	Londres.......	25 37 à 25 38	25 27 à 25 28 moins 5 o/o
	d° Chèque..		25 28 $\frac{1}{2}$ à 25 29 $\frac{1}{2}$ — —
3 $\frac{1}{2}$	New-York......	518 à 520	518 à 520 — 3 $\frac{1}{2}$ o/o
5	Belgique.......	$\frac{1}{8}$ p. à $\frac{1}{4}$ p.	$\frac{3}{16}$ p. à $\frac{7}{16}$ p. — 5 o/o
5 $\frac{1}{2}$	Italie..........	1 o/o p. à $\frac{1}{8}$ p.	1 $\frac{1}{8}$ p. à 1 $\frac{3}{8}$ p. — 5 $\frac{1}{2}$ o/o
3	Suisse.........	$\frac{3}{16}$ p. à $\frac{5}{16}$ p.	$\frac{3}{16}$ p. à $\frac{5}{16}$ p. — 3 o/o
5	Stockholm.....	137 à 138	137 à 138 — 5 o/o

Commençons l'explication du bulletin par les valeurs cotées à vue.

Le titre *Valeurs se négociant à vue* n'implique nullement que la négociation, l'opération de change ne porte que sur des effets payables à vue. On peut négocier à Paris des effets sur Londres à vue, à 1 mois, 2 mois, 3 mois, à une date quelconque. L'expression à vue indique plutôt que l'on prend pour type, pour terme fixe de comparaison la livre payable à vue, ou escomptée, ramenée au comptant, lorsqu'elle n'est pas à vue.

I. Les nombres qui figurent sur la ligne Londres sont des nombres de francs et centimes, susceptibles de varier un peu d'une époque à une autre, donnés ou demandés en échange d'une valeur nominale de £ 1, en papier de commerce, payable à Londres, ou en Angleterre. Il y a 2 colonnes : papier long, papier court. La base du change est inscrite dans la colonne *papier court* pour la négociation d'effets payables à vue, ou à courte échéance, dans 30 jours au plus.

Le cours du change est inscrit dans la colonne *papier long*, pour la négociation d'effets dont l'échéance est au delà d'un mois.

Quel est, par exemple, le prix d'une livre à vue?

Il est inscrit dans la colonne *papier court*, il est de $25^{fr},27$ à $25^{fr},28$; soit, en prenant la moyenne, 25,275.

Quel est le prix d'une livre à terme?

Si l'échéance est à moins de 30 jours, c'est 25,275 moins l'escompte à 5 °/₀, pour le nombre de jours compris entre la négociation et l'échéance. Si l'échéance est au delà de 30 jours c'est 25,375 moins l'escompte à 5 °/₀ pour le temps à courir jusqu'à l'échéance. Le chèque sur Londres a une cote spéciale; on voit que, le 3 novembre 1888, il se négociait au prix de $25^{fr},29$ par livre sterling.

Nous expliquerons plus loin les principales causes qui déterminent des différences entre les cotes du chèque, du papier court, du papier long.

II. A la suite des cotes de Londres, nous voyons

$$\textit{New-York} \quad 518 \ \textit{à} \ 520 \ \textit{moins} \ 3\frac{1}{2}\ \%.$$

Cela veut dire que \$ 100 payables à vue, à New-York ou aux États-Unis, sont changés pour 518, ou 520 francs; et si les dollars ne sont pas à vue, ils subissent un escompte, d'après le taux marqué $3\frac{1}{2}$ °/₀, pour le temps à courir, de la négociation à l'échéance.

III. $$\textit{Belgique} \ \frac{3}{16} \ \textit{à} \ \frac{5}{16} \ \textit{p. moins} \ 5\ \%$$

100 francs payables en Belgique sont changés à Paris pour

100 francs moins $\frac{3}{16}$, 100 francs moins $\frac{5}{16}$, quand l'effet sur la Belgique est à vue; mais s'il est à terme, il subit, en outre, un escompte d'après le taux de 5 °/₀, marqué sur la cote.

Les fractions $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{16}$ qui figurent dans la colonne papier court sont remplacées par $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ dans la colonne papier long.

A certaines époques, la mention, *p*, *perte* est remplacée par celle de *pair* ou *bénéfice*, *b*.

Ainsi, le 12 février 1889, la cote des changes porte :

Belgique P. L. pair à $\frac{1}{8}$ *b. P. C.* $\frac{1}{16}$ *p. à* $\frac{1}{16}$ *b. moins* $3\frac{1}{2}$ °/₀

100 francs payables en Belgique sont alors changés à Paris pour un nombre de francs, pouvant varier de $100 - \frac{1}{16}$ à $100 + \frac{1}{16}$ quand l'effet sur la Belgique est à vue, ou à courte échéance, à la condition, dans ce dernier cas, de retrancher, en outre, l'escompte commercial à $3\frac{1}{2}$ °/₀; pour un nombre de francs, variable de 100 (pair) à $100 + \frac{1}{8}$, quand l'effet est à longue échéance, à la condition de retrancher toujours l'escompte commercial pour le temps à courir de la négociation à l'échéance.

IV. Nous lisons sur la cote du 3 novembre 1888 :

Italie P. L. 1 *p. à* $1\frac{1}{8}$ *p. P. C.* $1\frac{1}{8}$ *p. à* $1\frac{3}{8}$ *p. moins* $5\frac{1}{2}$ °/₀

Suisse » $\frac{3}{16}$ *p. à* $\frac{5}{16}$ *p.* » $\frac{3}{16}$ *p. à* $\frac{5}{16}$ *p. moins* 3 °/₀

100 lire payables en Italie sont changées à Paris pour un nombre de francs, variant de $100 - 1\frac{1}{8}$ à $100 - 1\frac{3}{8}$, quand l'effet sur l'Italie est à vue; l'escompte doit, en outre, être retranché si l'effet est à terme.

L'explication de la cote de la Suisse est analogue ; le taux d'escompte est différent ; les fractions qui indiquent la perte, ou exceptionnellement, le bénéfice, peuvent également varier d'un pays à l'autre.

Actuellement, en 1900, la perte sur le papier d'Italie s'élève à 6 ou 7 °/₀, ce qui signifie que 100 lire en papier de commerce se payent à Paris 100 — 6, ou 100 — 7, c'est-à-dire 94 ou 92 francs, quand le papier est à vue ; s'il est à terme, il subit en outre l'escompte.

A l'appui de ces explications, donnons quelques exemples de conversions, en monnaie française, de valeurs nominales étrangères pour lesquelles la cote est à vue.

CONVERSION

DE VALEURS ÉTRANGÈRES EN MONNAIE FRANÇAISE.

I. *Négociation, à Paris*, 5 *octobre* 1888 *d'un effet sur Londres, à la date du* 26 *novembre suivant, d'une valeur nominale de* £ 973.17.6.

Cours du change 25,325 *à vue, moins* 5 °/₀.

1^er^ *procédé.* La valeur nominale peut s'écrire £ 973,875.

L'effet, étant payable 52 jours après la négociation, on transformera la valeur à terme en valeur correspondante à vue, en retranchant l'escompte pour 52 jours. Les livres à vue sont converties en francs d'après le cours de 25,325 par livre.

Valeur nominale	£ 973,875
Escompte à 5°/₀ p. 52 jours	7,033
Valeur à vue	£ 966,842 × 25,325
	24171,05
	314,22365
Valeur en monnaie française Fr.	24485,27

2^e *procédé.* On peut convertir les livres en monnaie française comme si elles étaient à vue, puis faire subir au produit un escompte pour 52 jours.

	973,875 × 25,325 = 24663,38
Escompte à 5 % pour 52 jours	178,11
Valeur de l'effet en monnaie française	Fr. 24485,27

3^e *procédé.* La cote fait connaître la valeur en monnaie française de la livre à vue; on peut en déduire la valeur de la livre à 52 jours en escomptant la cote elle-même.

Cours à vue	25,325
Escompte à 5 % p. 52 jours	0,1829
Valeur de la livre à 52 jours	25,1421

L'effet vaudra donc en monnaie française : 25,1421 × 973,875.

On trouve pour produit 24485,26, ce qui concorde bien avec les résultats précédents à 1 centime près. Cette légère différence, insignifiante au point de vue pratique, provient des chiffres décimaux négligés dans le calcul des intérêts du cours 25,325. C'est là un des inconvénients de ce procédé; une très légère erreur sur la cote modifiée, multipliée par un nombre un peu fort, peut entraîner une erreur appréciable dans le résultat. Cette troisième méthode ne devra donc être appliquée qu'avec la condition de calculer la cote modifiée avec un nombre suffisant de chiffres décimaux.

Remarque. — Il est facile de faire voir, avant tout calcul, que les trois procédés doivent conduire au même résultat. Le nombre obtenu en retranchant d'un capital l'intérêt à 5 % pour 52 jours, est égal au capital diminué de la fraction $\frac{52}{7200}$ de sa propre valeur; ce résultat peut encore se représenter par un produit, on a l'identité

$$C - \frac{52}{7200}.C = C \times \left(1 - \frac{52}{7200}\right)$$

Les trois produits

$$973,875 \times \left(1 - \frac{52}{7200}\right) \times 25,325$$

$$973,875 \times 25,325 \times \left(1 - \frac{52}{7200}\right)$$

$$25,325 \times \left(1 - \frac{52}{7200}\right) \times 973,875$$

sont composés des mêmes facteurs, et sont par conséquent égaux.

Les opérations qu'ils indiquent répondent respectivement aux trois méthodes indiquées.

4^e^ *procédé*. — Les questions de change sont habituellement traitées dans les banques par la règle de chaîne.

Fr. x	£ 973,875
7 200 à 52 jours	7 148 à vue.
£ 1 à vue	Fr. 25,325

$$x = \frac{973,875 \times 7148 \times 25,325}{7\,200}$$

En effectuant les opérations on trouve

$$x = \text{Fr. } 24\,485,27$$

Remarque. — Les nombres 7 200 et 7 148 ne figurent pas dans les données, ils ont été introduits dans la chaîne pour représenter des valeurs correspondantes payables à 52 jours et à vue. On imagine le capital 7 200 qui, d'après le taux de 5 %, a la propriété de produire 1 comme intérêt par jour ; de sorte qu'un effet de 7 200 payable dans 52 jours se réduit, par l'escompte à 5 %, à 7 200 — 52 = 7 148 au comptant. Ces deux nombres 7 200 et 7 148 font connaître le rapport entre la valeur nominale et la valeur escomptée d'un effet à 52 jours ; on peut les remplacer par des nombres proportionnels plus simples, par exemple en les divisant par 4,

par 1787 à la place de 7 148
et 1800 à la place de 7 200

Applications. — *Calculer, Paris, 5 novembre* 1888, *les valeurs, en monnaie française, des effets sur Londres dont détail suit :*

£	3 638. 17s 6d	*au* 14 *décembre* 1888,
	5 073. 10	*au* 21 *janvier* 1889.
	1 468	*au* 14 *février* 1889.

Cours du change : Londres, à vue, 25,275 *taux d'escompte* 5 %.

(*Les calculs sont effectués pour chaque effet séparément, puis pour les trois effets ensemble.*)

Le 1er effet dont la valeur nominale peut s'écrire £ 3 638,875 est d'abord converti en monnaie française, comme s'il était à vue, puis on retranche l'escompte à 5 %, pour 39 jours.

$$3\,638,875 \times 25,275 = 91\,972,59$$

$$\text{escompte} \quad \frac{91\,972,59 \times 39}{7\,200} = 498,18$$

Valeur au comptant du 1er effet $\quad 91\,474,41$

Pour le 2e effet, les calculs analogues donnent

$$5\,073,5 \times 25,275 = 128\,232,70$$

$$\text{escompte pour 77 jours} \quad \frac{128\,232,7 \times 77}{7\,200} = 1\,371,37$$

Valeur au comptant du 2e effet $\quad 126\,861,33$

Pour le 3e effet, on obtient par les mêmes procédés

$$1\,468 \times 25,275 = 37\,103,70$$

$$\text{escompte pour 101 jours} \quad \frac{37\,103,7 \times 101}{7\,200} = 520,48$$

Valeur au comptant du 3e effet $\quad 36\,583,22$

Si les 3 effets sont présentés au change en même temps, on peut abréger un peu les calculs en divisant par 7 200, dans une seule opération, les produits des valeurs nominales par les jours d'escompte.

Bordereau de la négociation, Paris, 5 *novembre* 1888, *d'effets sur Londres.*

Valeurs nominales.	Jours d'escompte.	Produits.
£ 3 638,875	39	141 916,125
5 073,5	77	390 659,5
1 468	101	148 268
£ 10 180,375		680 843,625
94,561	escompte $\frac{1}{7\,200}$	94,561
£ 10 085,814	$\times 25{,}275 =$ Fr. 254 918,95	Résultat

Vérification. — La somme des 3 effets séparés donne

$$91\,474{,}41 + 126\,861{,}33 + 36\,583{,}22 = 254\,918{,}96$$

Autres exemples. — I. *Bordereau de la négociation, Paris,* 5 *novembre* 1888, *des effets sur Naples ci-dessous détaillés : cours du change sur l'Italie* $2\frac{1}{8}$ *perte à vue, moins* 4 %.

Valeurs nominales.	Échéances.	Jours d'intérêts.	Produits.
25 000	31 déc. 1888	56	1.400.000
38 000	17 janvier 1889	73	2.774.000
29 500	28 février 1889	115	2.392.500
92 500			6.566.500
729,611 escompte	escompte $\frac{1}{9\,000}$		729,611
1 965,625	perte $2\frac{1}{8}$ % de la valeur nominale		
Fr. 89 804,764	*Valeur au comptant.*		

Remarque. — Il serait plus logique de procéder pour les effets sur l'Italie comme pour les effets sur l'Angleterre, de calculer la perte au change $2\frac{1}{8}$ % sur la valeur réduite, ramené au comptant, et non sur la valeur nominale. Car la cote $2\frac{1}{8}$ p. à vue revient à indiquer que 100 lire à vue sont échangées à Paris pour francs $97\frac{7}{8}$. On pouvait escompter d'abord les lire à terme, puis convertir en francs les lire à vue à à raison de $97\frac{7}{8}$ francs pour 100 lire; la perte $2\frac{1}{8}$ serait ainsi calculée sur la valeur au comptant.

L'usage est de calculer les deux réductions, escompte et perte, sur la valeur nominale.

Les effets sur l'Italie, la Belgique et la Suisse sont ainsi assimilés aux effets sur des places françaises.

II. *Négociation, Paris,* 5 *novembre* 1887, *d'un effet sur New-York, à la date du* 4 *janvier* 1888, *de* \$ 18 500.

Cours du change $518\frac{3}{4}$ *à vue, moins* 4 °/₀.

Les \$ 18 500 étant payables 60 jours après la date de la négociation pourraient être escomptés et transformés en dollars à vue; il suffirait alors de multiplier le nombre de dollars à vue par 5,1875, valeur en monnaie française de \$ 1 à vue, pour avoir le prix de la négociation. Mais il est préférable de convertir d'abord les \$ 18 500 en francs et centimes, comme s'ils étaient à vue, et de faire subir au résultat de cette conversion un escompte pour 60 jours.

$$518{,}75 \times 185 = 95\,968{,}75$$

Escompte pour 60 jours	$\frac{1}{3}$ °/₀	319,895
	$\frac{1}{3}$ °/₀	319,895
Valeur de l'effet	Fr.	95 328,96

SOLUTION PAR LA RÈGLE DE CHAÎNE.

Fr. x	\$ 18 500
9 000 au 4 janvier 88	8 940 à vue
\$ 100 à vue	518,75

$$x = \frac{185 \times 894 \times 518{,}75}{900} = 95\,328{,}96$$

Nous avons introduit, pour former la chaîne, le nombre 9 000 représentant un capital à 60 jours, et le nombre 8 940 qui représente la valeur escomptée des 9 000. Dans le cas particulier de 60 jours avec le taux de 4 °/₀, on peut prendre de préférence 300, que l'escompte réduit à 298. On retrouve d'ailleurs ces nombres en divisant par 3 les deux termes du rapport $\frac{894}{900}$.

Problème. — *Un banquier de Paris se trouve, à la date du* 31 *décembre* 1888, *débiteur à une banque franco-américaine de la somme de Fr.* 200 000. *Il remet en payement :*

1° 3 *effets sur New-York acceptés, au change de* $513\frac{1}{4}$ *à vue moins* 4 °/₀

$ 9 000 *au* 1er *février* 1889
$ 12 500 14 *février*
$ 12 500 16 *mars.*

2° *Le reste en espèces.*

Quelle est la somme qu'il doit verser en espèces?

Solution. — Les dollars payables à diverses échéances peuvent être escomptés et convertis en dollars à vue.

Le capital 9 000, payable 32 jours après la négociation, subit un escompte qui à 4 °/₀ se trouve précisément égal à 32, de sorte que la valeur au comptant est $9\,000 - 32 = 8\,968$.

Les deux capitaux de 12 500 donnent ensemble la même valeur au comptant que le capital 25 000, dont l'échéance serait au 1er mars, 15 jours après l'échéance du premier effet de 12 500, et 15 jours avant l'échéance du 2e. Le capital 25 000, à la date du 1er mars, doit subir un escompte, pour 60 jours, égal aux $\frac{2}{300}$ de la valeur nominale, soit $166\frac{2}{3}$, et la valeur au comptant est $25\,000 - 166\frac{2}{3} = 24\,833\frac{1}{3}$.

En additionnant les valeurs escomptées, 8 968 pour le premier effet, $24\,833\frac{1}{3}$ pour les deux autres effets réunis, on trouve pour valeur totale au comptant $ $33\,801\frac{1}{3}$.

Il suffit de multiplier ce nombre de dollars par $\frac{513\frac{1}{4}}{100}$ pour trouver la valeur correspondante en monnaie française.

Les 3 effets valent ainsi $\frac{33\,801\frac{1}{3} \times 513\frac{1}{4}}{100}$ = Fr. 173 485,35

Il reste donc à verser, en espèces 26 514,65

pour faire le total Fr. 200 000

Explications sur les cotes à trois mois.

	CHANGE.	PAPIER LONG.	PAPIER COURT.
	Valeurs se négociant à trois mois.		
3 o/o	Amsterdam	207 $\frac{5}{8}$ à 207 $\frac{7}{8}$	207 $\frac{1}{8}$ à 207 $\frac{3}{8}$ et 4 o/o
4 o/o	Allemagne..........	123 à 123 $\frac{1}{4}$	122 $\frac{3}{4}$ à 123 et 4 o/o
5 o/o	Vienne	206 à 207	206 à 207 et 4 o/o
5 o/o	Barcelone...........	485 $\frac{1}{2}$ à 486 $\frac{1}{2}$	485 $\frac{1}{2}$ à 486 $\frac{1}{2}$ et 4 o/o
5 o/o	Madrid	485 $\frac{1}{2}$ à 486 $\frac{1}{2}$	485 $\frac{1}{2}$ à 486 $\frac{1}{2}$ et 4 o/o
6 o/o	Lisbonne............	557 à 558	557 à 558 et 4 o/o
6 o/o	Saint-Pétersbourg....	262 à 263	264 à 265 et 4 o/o
.....			

Les nombres qui figurent dans le bulletin des changes de Paris pour les valeurs cotées à 3 mois sont des nombres de francs et fractions de francs, donnés ou demandés en échange de 100 unités étrangères. Ainsi quand on lit

Vienne, 3 *mois*, 206 *à* 207 *et* 4 °/₀

cela signifie que pour une valeur nominale de 100 florins d'Autriche, en papier de commerce, à l'échéance de 3 mois, on offre ou demande à Paris de 206 à 207 francs, de monnaie courante. Si l'effet est payable avant la fin des 3 mois à partir de la négociation, on ajoute l'intérêt calculé d'après le taux de 4 °/₀, pour le temps compris de l'échéance à la fin des 3 mois. Si nous prenons pour base du change le nombre 207 (fr.) nous obtiendrons les valeurs qui correspondent à 100 florins, payables à différentes dates, comme l'indique le tableau suivant :

Fl. 100	à 3 mois	Fr. 207
»	à 2 mois	207,69
»	à 1 mois	208,38
»	à vue	209,07

Nous avons trouvé la valeur de 100 florins à 2 mois, en *ajoutant* à 207 l'intérêt à 4 °/₀ pour 1 mois, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ °/₀ de 207.

Pour 100 florins à 1 mois, nous avons ajouté à 207 l'intérêt de 2 mois. Pour 100 florins à vue, nous avons ajouté à 207 l'intérêt de 3 mois, qui d'après le taux de 4 °/₀ est précisément égal à 1 °/₀ du capital. Pour un effet à n jours, on ajouterait l'intérêt pour $90 - n$ jours, n étant inférieur à 90.

Actuellement, la cote du Vienne est rapportée à 100 couronnes. (Voir la cote de 1900, page 443.)

L'interprétation de cotes d'Amsterdam, de l'Allemagne, de Barcelone, etc., se fait d'après des considérations semblables.

Pour la Hollande,	la cote est rapportée	à 100 florins courants.
Pour l'Allemagne,	—	à 100 reischmark.
Pour l'Espagne,	—	à 500 pesetas (autrefois 100 piastres)
Pour le Portugal,	—	à 100 milreis.
Pour la Russie,	—	à 100 roubles.
Pr les États Scandinaves,	—	à 100 kronor.

Si nous désignons par K la cote de 100 unités étrangères à 90 jours, la cote correspondante de 100 unités à n jours sera $K + \frac{K.(90-n)}{9000}$ ou $K\left(1 + \frac{90-n}{9000}\right)$.

La base K peut varier un peu, suivant la date de l'effet sur l'étranger. La valeur numérique de K est inscrite dans la colonne papier court ou dans la colonne papier long, suivant que l'effet est payable à courte ou à longue échéance.

Ainsi nous lisons sur la cote :

Saint-Pétersbourg P. L. 262 à 263 P. C. 264 à 265 et 4 %.

La conversion en monnaie française de 100 roubles à n jours pourra se faire, dans tous les cas, d'après la formule $K\left(1+\frac{90-n}{9000}\right)$, K ayant une valeur numérique de 264 à 265 si l'effet a moins de 30 jours à courir, et une valeur numérique de 262 à 263 si l'effet est payable au delà d'un mois.

Adoptons pour base du papier court 264,50, la moyenne entre les cours extrêmes 264 et 265. Dans cette hypothèse, la valeur de 100 roubles à vue sera 264,50 plus l'intérêt pour 3 mois, 2, 645, soit en définitive 267,145.

Adoptons pour base du papier long 262,50. Dans cette hypothèse, 100 roubles à 3 mois donneront au change fr. 262,50; 100 roubles à 2 mois, 262,50 + l'intérêt pour 1 mois, soit fr. 263,375; 100 roubles à 45 jours, 262,50 + l'intérêt pour 45 jours, soit fr. 263,8125.

Applications. — *Calculer, Paris,* 15 *novembre* 1882, *les valeurs au change, en monnaie française, des effets de commerce, souscrits à l'étranger, dont détail suit :*

Flc. 23912	*sur Amsterdam,*	*au* 27 *décembre* 1882.
Rm. 42500	*sur Francfort,*	3 *janvier* 1882.
Fl[4.5]. 36950	*sur Vienne,*	12 *janvier* 1883.
Rbs 15000	*sur Odessa,*	1[er] *mai* 1883.
Mls 19000	*sur Lisbonne,*	25 *décembre* 1882.

Cours des changes :

Amsterdam	$207\frac{1}{4}$	3 mois	et 4 %
Allemagne	$122\frac{3}{8}$	»	»
Vienne	213	»	»
St-Pétersbourg	265	»	»
Lisbonne	$551\frac{1}{2}$	»	»

I. — *Flc.* 23912 *au* 15 *décembre* 1882.

Si les 23912 florins étaient payables dans 3 mois, ils seraient convertis en francs et centimes à raison de $2^{fr},0725$ pour 1 florin, ce qui donnerait

$$23912 \times 2,0725 = 49557^{fr},61$$

Or, les florins négociés à Paris, 15 novembre, sont payables le 27 décembre, c'est-à-dire 42 jours après la date de la négociation, soit 48 jours avant la fin des 3 mois. Il faut augmenter le prix d'une quantité correspondante à l'intérêt du capital précédemment déterminé, pour 48 jours.

Calcul des intérêts à ajouter au capital			49557,62
90 jours	495,5762		
45 jours	247,7881	$\}$ =	264,3073
3	16,5192		
Valeur de l'effet		francs	49821,9273

II. — *Rm.* 42500 *au* 4 *janvier* 1882.

Les 42500 reischmark, payables à 3 mois, vaudraient en monnaie française

$$42500 \times 1,22375 = 52009,375$$

La négociation ayant lieu à Paris 15 novembre, il y a 50 jours de la date de la négociation à la date de l'effet, et par suite 40 jours de cette dernière à la fin des 3 mois. Il faut ajouter au résultat précédent les intérêts, pour 40 jours, du capital :

		52009,375
Intérêt	pour 30 jours	173,36458
	pour 10 jours	57,78819
Valeur du 2e effet	*francs*	52240,52777

III. — *Fl^{ns}* 36950 *au* 12 *janvier* 1882.

	$36950 \times 2,13 =$	78703,50
+ intérêts pour 32 jours	30 jours	262,345
	1	8,744
	1	8,745
Valeur au change du 3e effet	*francs*	78983,334

IV. — *Roubles* 15000 *au* 1[er] *mai* 1882.

La date de l'échéance de cet effet est postérieure de 77 jours à la fin des 3 mois comptés à partir du jour de la négociation. Il faudra donc retrancher les intérêts pour 77 jours. Ces intérêts peuvent être calculés soit sur le capital nominal 15000 roubles et déduits de la valeur nominale avant la conversion en monnaie française, soit sur le capital $15000 \times 2,65$ représentant la valeur en francs des 15000 roubles supposés à 3 mois.

$$\begin{array}{llll}
\text{Capital nominal.} & & \text{Roubles} & 15000 \\
\text{Escompte pour 77 jours} & \left\{\begin{array}{ll} \text{45 jours. R.} & 75 \\ 30 & 50 \\ 1 & 1\frac{2}{3} \\ 1 & 1\frac{2}{3} \end{array}\right\} & & 128\frac{1}{3}
\end{array}$$

Valeur escomptée, ramenée à 3 mois, roubles $14871\frac{2}{3}$.

Valeur en monnaie française $14871\frac{2}{3} \times 2,65 = \text{Fr. } 39409,92$, à 1 centime près.

N. B. — Le calcul est effectué en supposant la date de l'échéance fixée d'après le calendrier grégorien, suivi en France et dans la plupart des pays d'Europe, à l'exception de la Russie et de la Grèce. Les Russes et les chrétiens d'Orient suivent encore le calendrier julien, qui présente actuellement un retard de 12 jours sur le calendrier grégorien. Pour éviter toute erreur, il est bon de faire figurer sur les effets de commerce payables en Russie et dans les pays chrétiens de la religion grecque les deux dates du jour de l'échéance d'après les 2 calendriers.

V. — *Milreis* 19000 *au* 25 *décembre* 1882.

L'effet étant payable 40 jours après la négociation doit être augmenté des intérêts pendant les 50 jours, depuis son échéance jusqu'à la fin des 3 mois.

Valeur nominale, milreis		19000
intérêts pour 50 jours	45 jours	95
	5 jours	10,555....
Valeur en milreis à 3 mois		19105,555....

Valeur en monnaie française

$$19105,555\ldots \times 5,515 = Fr.\ 105367,14$$

Bordereau de la négociation, Paris, 17 *novembre* 1888, *des effets suivants sur Saint-Pétersbourg :*

Rbl.	4 569,85	*au* 15 *décembre* 1888
	12 856,75	*au* 29 *décembre* 1888
	9 680	*au* 8 *janvier* 1889
	13 500	*au* 1^er^ *février* 1889
	20 000	*au* 1^er^ *mars* 1889

Cours du change à Paris : Saint-Pétersbourg, 3 *mois,* $255\frac{1}{2}$ *et* 4 %.

Les valeurs nominales proposées peuvent être converties en roubles à 3 mois, en ajoutant des intérêts aux effets dont l'échéance arrive avant 90 jours, et retranchant l'escompte si l'effet est payable après 90 jours.

Les nombres de jours, comptés depuis la date de la négociation, 17 novembre 1888, jusqu'aux échéances respectives des différents effets, sont :

28, 42, 52, 76, 104

les différences à 90 sont

62, 48, 38, 14, — 14

pour les 4 premiers effets, il y a lieu d'ajouter des intérêts aux valeurs nominales; pour le dernier seulement, c'est un escompte qu'il faut retrancher.

Valeurs nominales.	Jours d'intérêt.	Produits.
4569,85	62	283330,70
12856,75	48	617124
9680	38	367840
13500	14	189000
20000	— 14	— 280000
60606,60		1177294,70
+ 130,81	intérêt $\frac{1}{9000}$	Rbl. 130,81
60737,41 roubles à 3 mois.		

Valeur en monnaie française

$$60\,737{,}41 \times 2{,}555 = \text{Fr. } 155\,184{,}08.$$

FRAIS DE TIMBRE ET DE COURTAGE.

Timbre. — Le droit de timbre sur effets de commerce, lettres de change, est, depuis le 1er janvier 1882, de $\frac{1}{2}$ °/₀₀ calculé sur le multiple de 100 francs égal ou immédiatement supérieur au montant nominal.

Ainsi, pour un effet de 675 francs, le timbre sera $\frac{1}{2}$ °/₀₀ de 700, soit 0fr,35.

Les effets venant de l'étranger, payables en France, sont soumis au timbre pour être endossés, acceptés.

Les effets tirés de l'étranger sur l'étranger sont soumis à un droit de timbre de transit, lorsqu'ils sont endossés en France. Le droit est de $\frac{1}{4}$ °/₀₀ établi sur le multiple de 2000 égal ou supérieur au montant nominal. Si les effets ont une valeur nominale énoncée en monnaie étrangère, on en fait l'évaluation d'après le cours du jour, pour fixer le droit de timbre.

Courtage. — Le courtage habituellement prélevé sur le produit de la négociation des effets sur l'étranger est $\frac{1}{8}$ °/₀, à la charge du vendeur. Ce tarif de $\frac{1}{8}$ °/₀ peut être considéré comme un maximum; il arrive assez souvent, surtout pour les effets sur Londres, que le courtage soit réduit à $\frac{1}{2}$ et même $\frac{1}{4}$ °/₀₀.

EXPLICATIONS COMPLÉMENTAIRES SUR LA COTE DES CHANGES DE PARIS.

Dans la négociation des valeurs cotées à 3 mois, on suit les principes de l'escompte rationnel lorsqu'on ajoute des intérêts au capital payable avant la fin des 3 mois.

Lorsque, par exemple, la cote de Vienne à 3 mois est 207, la valeur, au change, de 100 florins à vue est $207 + 2{,}07 = 209{,}07$, la valeur de 101 florins à 3 mois serait aussi $207 + 2{,}07 = 209{,}07$. Le mode de calcul adopté répond à cette idée, logique et rationnelle, que 100 unités, réalisables au comptant, deviennent au bout de 3 mois 101 unités, quand on tient compte des intérêts d'après le taux de 4 °/₀.

Dans la négociation des valeurs cotées à vue, c'est l'escompte commercial que l'on applique. Si l'on suppose un effet sur Londres de £ 100, à 3 mois, avec le taux de 4 °/₀, on pourra substituer aux £ 100 à 3 mois £ 99 à vue.

Dans l'exemple des florins, à 100 à vue correspondent 101 à 3 mois.

Dans celui des livres, à 99 à vue correspondent 100 à 3 mois. Dans le 1er cas, la différence 1 est l'intérêt de la valeur actuelle; dans le 2e, la différence 1 est l'escompte, l'intérêt de la valeur à terme.

TAUX D'ESCOMPTE.

Pour les valeurs cotées à vue, le taux d'escompte adopté est le taux de l'étranger, le taux de la Banque nationale du pays étranger où l'effet est payable. Cela paraît naturel, car c'est en dernier ressort, dans le pays où l'effet est payable, qu'il pourra être escompté si le porteur veut être payé avant l'échéance.

Pour les valeurs cotées à 3 mois, le taux d'après lequel se calculent les intérêts de compensation est invariablement, dans la place de Paris, 4 °/₀.

Ce taux uniforme de 4 °/₀ a été adopté en raison de la grande facilité qu'il offre pour le calcul des intérêts, notamment pour la transformation du cours à 3 mois en cours à vue.

Cette transformation se fait à la lecture de la cote, par une simple opération mentale, en ajoutant au cours à 3 mois 1 °/₀ de sa valeur. Si le Madrid à 3 mois est coté 486, le Madrid à vue sera coté 490,86.

Mais ce taux préféré de 4 °/₀ n'est pas toujours le taux de l'étranger. Une colonne spéciale du *Bulletin des changes* porte l'indication du taux d'escompte à l'étranger. Nous y lisons que le taux à Saint-Pétersbourg est 6 °/₀.

100 roubles au comptant deviennent $101\,\frac{1}{2}$ roubles à 3 mois.

Le taux de 4 °/₀ conduirait seulement à 101 roubles.

Que fait-on pour tout concilier? On élève le niveau de la base du change, on attribue au papier à vue et au papier court une cote plus élevée, pour compenser l'insuffisance des intérêts calculés d'après le taux de 4 °/₀ lorsqu'ils devraient être calculés d'après le taux de 6 °/₀. Telle est l'origine de l'adoption de 2 colonnes : papier long, papier court.

Si le taux de 4 °/₀ est inférieur au taux de l'étranger, les intérêts de compensation calculés à Paris sont trop faibles, la différence est d'autant plus sensible que le temps à courir jusqu'à la fin des 3 mois est plus long. La cote du papier court doit être alors plus élevée que celle du papier long. C'est bien ce que l'on vérifie sur la cote, pour le Saint-Pétersbourg.

6 °/₀ *Saint-Pétersbourg*, P. L. 262 à 263. P. C. 264 à 265 et 4 °/₀.

Si le taux de 4 °/₀ est supérieur au taux de l'étranger, les intérêts se trouvent trop forts ; la cote du papier court doit être abaissée, au-dessous de la cote du papier long. C'est ce que l'on voit pour l'Amsterdam.

3 °/₀ *Amsterdam*, P. L. $207\frac{5}{8}$ à $207\frac{7}{8}$. P. C. $207\frac{1}{8}$ à $207\frac{3}{8}$ et 4 °/₀.

Il faut reconnaître d'ailleurs que si l'écart entre le taux de 4 °/₀ et le taux de l'étranger est la principale cause qui fait attribuer deux cotes distinctes au papier long et au papier court, il y a d'autres considérations, variables et complexes, qui influent sur les bases du change, qui peuvent faire rechercher le papier long de préférence au papier court, ou inversement.

Pour le Londres, le taux adopté à Paris pour escompter les effets et lettres de change sur l'Angleterre est le taux officiel de la Banque d'Angleterre. On constate néanmoins, habituellement, des différences entre les cotes du papier long, du papier court, et du chèque ou du « versement ».

Le chèque, bon à vue payable dans une banque désignée, à très court délai, est un mode de payement fort employé par les négociants anglais. Le nombre des chèques sur Londres négociés chaque jour à Paris est considérable. Le chèque ne paye que des droits de timbre minimes, 20 centimes en France, 1 penny en Angleterre. Le cours du chèque sur Londres donne la vraie mesure de la base du change entre la France et l'Angleterre, puisque l'on peut comparer directement, sans avoir à tenir compte de frais accessoires, les deux payements effectués, presque à la même date, dans les deux pays.

La cote du chèque ne peut évidemment figurer que dans la colonne papier court. Quand nous lisons sur le bulletin des changes que le chèque sur Londres est à 25,29, nous apprenons par là que chaque livre sterling payable à Londres sur la présentation d'un chèque est changée à Paris pour $25^{fr},29$.

C'est en même temps la cote du « versement ».

On entend dans le langage des changes, par versement, une double opération faite le même jour, dans deux places différentes : versement fait par un débiteur, dans la première place, entraînant comme contre-partie un versement équivalent à faire dans l'autre place, pour le règlement de la dette.

Pour les « versements », l'ordre de payement est transmis par les banquiers à leurs correspondants par voie télégraphique. Les comptes se règlent ainsi immédiatement, sans frais de timbre. Quand on dit que le versement sur Francfort est au cours de $122\frac{7}{8}$ et 4 °/₀, cela veut dire qu'en versant à Paris $122,875 + 1,22875$, soit en tout $124^{fr},10375$ on obtient le payement de 100 reichsmark, le jour même à Francfort.

Le versement sur Londres est généralement au même cours que le chèque, les conditions étant presque les mêmes ; on remarque généralement une petite différence entre le cours du chèque et la cote du papier court. Ainsi, lorsque le chèque est à 25,29 le papier court est à 25,275. Ce n'est pas un cas fortuit, on peut consulter les cotes à différentes dates, on constatera comme un fait général une légère plus-value en faveur du chèque. Cela tient à ce que la lettre de change est exposée au délai des 3 jours de grâce que la loi accorde au tiré en Angleterre, et en outre soumise aux frais de timbre.

La cote du papier long est, au contraire, habituellement plus élevée que la cote du papier court. Ainsi, sur le bulletin du 3 novembre 1888, le papier long est à 25,375 lorsque le papier court ne fait que 25,275. Cet écart est, en grande partie du moins, dû à la différence entre le taux officiel de la Banque d'Angleterre et le taux des banquiers cambistes, que l'on appelle le taux hors banque. En novembre 1888, le taux officiel était 5 °/₀, le taux des banquiers à Londres était 4 °/₀. Les effets à longue échéance, par exemple, à 2 ou 3 mois, sont négociés à Londres d'après le taux hors banque 4 °/₀ ; les calculs de change et d'escompte, faits à Paris d'après le taux officiel 5 °/₀, conduiraient à un escompte, à un terme soustractif, trop fort. Pour corriger l'effet d'un escompte exagéré, il suffit d'élever en conséquence la base du change. Les mêmes raisons n'existent pas pour le papier court qui n'est pas d'ordinaire négociable dans les banques, mais seulement à la Banque d'Angleterre d'après le taux officiel, et qui dans tous les cas ne donnerait lieu qu'à un escompte relativement faible, puisque les effets sont à courte échéance.

Telles sont les principales causes qui déterminent les différences légères que l'on remarque habituellement entre les cours des valeurs sur Londres.

CONVERSION DE VALEURS FRANÇAISES EN VALEURS ÉTRANGÈRES.

L'interprétation correcte de la cote des changes permet aussi bien de convertir des valeurs françaises en valeurs étrangères que des valeurs étrangères en monnaie française. S'agit-il, par exemple, de déterminer la valeur nominale d'une lettre de change sur l'étranger, connaissant le prix payé à Paris pour la négociation de cette lettre de change? Il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que la lettre de change sur l'étranger est à l'échéance type, ou à une date différente.

Dans le premier cas, la lecture de la cote ou, si l'on veut, la connaissance de la base adoptée pour le change, donne le nombre de francs qui correspond à 100 unités, et par suite, à 1 unité étrangère, payable à l'échéance type, à vue pour certains pays, à 3 mois pour d'autres. Il est évident que pour trouver, dans ces conditions, le nombre d'unités étrangères correspondant à un nombre donné de francs, il suffira de diviser ce nombre donné par le nombre de francs considéré comme équivalent à 1 unité étrangère, c'est-à-dire par le cours ou par le centième du cours, suivant que la cote est rapportée à 1 ou à 100 unités étrangères.

Exemples : I. — *Convertir Fr.* 20000 *en valeurs anglaises à vue, d'après le cours de* 25,325 *à vue, moins* 3 °/₀.

La valeur nominale demandée en monnaie anglaise étant payable à vue, il n'y a lieu de faire aucune modification au cours qui est donné à vue, et qui signifie que pour Fr. 25,325 on obtient £ 1 à vue. On en conclut naturellement que pour Fr. 20000 on obtiendra, en valeurs anglaises

$$£\ \frac{20000}{25{,}325} = £\ 789.14.8$$

II. — *Convertir Fr.* 14862, 75 *en reichsmark à* 3 *mois, d'après le cours de* 123.

La cote donnée signifie que pour 123 francs versés à Paris, on obtient une valeur de Rm. 100 payables en Allemagne dans 3 mois. Chaque mark à 3 mois coûte ainsi $1^{fr},23$. Il est évident que l'on obtiendra autant de mark à 3 mois que le nombre 1,23 est contenu de fois dans la somme donnée 14 862,75. Ainsi, le résultat demandé est

$$\text{Rm. } \frac{14862,75}{1,23} = \text{Rm. } 12083,53$$

Dans le 2e cas, lorsque les valeurs étrangères sont payables à une date qui diffère de l'échéance type, on peut modifier la cote de manière à l'adapter à l'échéance donnée.

Pour convertir des francs en livres à 30 jours, on modifiera la cote, donnée à vue, en retranchant l'escompte pour 30 jours. Si la cote est 25,325 à vue moins 3 °/₀, on trouvera, par un calcul très facile, que la base adoptée donne pour valeur de la livre à 30 jours, 25,325 moins 0,0633125, soit 25,2616875. Connaissant le prix d'une livre à 30 jours, on trouvera le nombre de livres demandé en divisant la somme énoncée en francs par 25,2616875.

En général, K désignant la cote donnée à vue, on pourra représenter la valeur de la livre payable dans n jours par $K\left(1 - \frac{n}{d}\right)$ ou $K.\frac{d-n}{d}$. Il suffira de diviser la somme énoncée en monnaie française par cette expression.

Pour convertir des francs en reichsmark à 30 jours, on modifiera la cote donnée à 90 jours, en ajoutant l'intérêt pour 90 — 30, soit pour 60 jours.

Si la cote à 3 mois est $122\frac{1}{2}$, on trouvera facilement que, d'après cette base, 100 reichsmark à 30 jours ont pour valeur, en monnaie française, $122\frac{1}{2}$ plus l'intérêt à 4 °/₀ pendant 60 jours, soit au total 123,3166... La somme proposée en monnaie française donnera autant de mark à 30 jours que le prix du mark 1,23316... est contenu de fois dans le prix total donné.

En général, K désignant la cote donnée à 3 mois, on pourra représenter la valeur de 100 unités étrangères payables dans n jours par $K\left(1+\frac{90-n}{9000}\right)$. Il suffira de diviser la somme énoncée en monnaie française par le centième de cette expression.

Solution par la règle de chaîne. — Au lieu de modifier la base de change en raison de la date, on peut résoudre ces questions de change par la règle de chaîne. Les principaux éléments du calcul sont fournis par la question même et par la cote donnée; il y a seulement lieu d'introduire dans la chaîne les valeurs qui se correspondent à deux dates différentes. Un capital étant payable à une date fixée, on trouve la valeur correspondante à une autre date, en ajoutant ou retranchant des intérêts. Ce calcul d'intérêts s'effectue avec la plus grande facilité si l'on a soin de prendre pour capital type le nombre que l'on nomme, suivant le taux d'intérêt ou d'escompte, le diviseur. Par exemple, au taux de 4 %, on prendra 9 000. Dans les questions où les intérêts doivent être ajoutés, on pourra dire que 9 000 unités deviennent $9000+n$, au bout de n jours. S'il faut faire l'escompte pour n jours, on pourra dire que le capital 9000, payable à terme, donne $9000-n$, n jours auparavant.

Problème I. — *Convertir la somme de Fr.* 146 829,75 *payée à Paris, le* 27 *novembre* 1888, *en valeurs anglaises payables à Londres, le* 14 *février* 1889. *Cours du change : Londres* 25,275, *à vue, moins 5 %*

La livre sterling à vue étant cotée 25,275, la livre à terme a une valeur moindre, égale à 25,275 moins l'escompte à 5 % pour le temps à courir depuis la date de la négociation, 27 novembre, jusqu'à l'échéance, 14 février, soit pour 79 jours.

La valeur de la livre à 79 jours est

$$25,275\times\left(1-\frac{79}{7200}\right)$$

ou

$$\frac{25,275\times7121}{7200}$$

Le nombre de livres se trouvera en divisant la somme donnée par la valeur de la livre. Il est donné par la formule numérique

$$£\ \frac{146829{,}75 \times 7200}{25{,}275 \times 7121} = £\ 5873.\ 10.\ 9\frac{1}{2}$$

Solution par la règle de chaîne :

£ x au 14 février	Fr. 146 829,75 au 27 novembre.
Fr. 25,275	£ 1 à vue.
£ 7 121 à vue	£ 7 200 au 14 février.

$$x = \frac{146\,829{,}75 \times 7\,200}{25{,}275 \times 7121} = £\ 5873.\ 10.\ 9\frac{1}{2}$$

Problème II. — *Un négociant verse, Paris, 1er octobre 1888, à la Banque russe et française, la somme de Fr. 150000 pour prix d'une lettre de change sur Saint-Pétersbourg au 28 novembre. Quelle sera la valeur nominale de cette lettre de change, d'après le cours donné par la cote de Paris : Saint-Pétersbourg* 3 *mois* $267\frac{1}{2}$ *et* 4 %?

1re Solution. — Le nombre $267\frac{1}{2}$ représente le nombre de francs à payer pour 100 roubles à 3 mois ; le prix de 100 roubles au 28 novembre comprendra en plus les intérêts de 32 jours avant la fin des 3 mois.

$$\text{Prix de Rbl. 100 à 3 mois} \quad 267^{fr},50$$

$$+ \text{ intérêts pour 32 jours } \frac{267{,}5 \times 32}{9000} = \quad 0\ ,9511$$

$$\text{Cote modifiée, prix de Rbl. 100 au 28 novembre} \quad 268\ ,4511$$

Le prix du Rbl. étant connu en monnaie française, il suffit évidemment de diviser la somme versée 150000 par le prix de Rbl. 100 pour avoir le nombre de centaines de roubles. La valeur nominale demandée a donc pour expression

$$\frac{150\,000 \times 100}{268{,}4511} = \text{Rbl. } 55\,876{,}09$$

à moins d'un kopeck ou centième de rouble près.

2^e^ SOLUTION. — Par la règle conjointe :

Rbl. x	Fr. 150 000.
Fr. $267\frac{1}{2}$	Rbl. 100 à 3 mois.
Rbl. 9032 à 3 mois	Rbl. 9000 au 28 novembre.

$$x = \frac{150\,000 \times 100 \times 2 \times 9\,000}{535 \times 9\,032}$$

N. B. — Les deux nombres de la 2^e^ ligne ont été doublés, ce qui n'altère en rien la valeur de l'inconnue.

En effectuant, on trouve $x = 55\,876{,}095$.

Problème III. — *Un voyageur de commerce verse à une banque de Paris la somme de Fr.* 10 000 *et demande en échange deux lettres de crédit sur Londres, de même valeur nominale, la* 1^re^ *à* 1 *mois, la* 2^e^ *à* 2 *mois de date. Quelle sera la valeur nominale de chacune de ces lettres de crédit, d'après le cours du change à Paris : Londres* 25,325 *à vue moins* 5 %?

1^re^ SOLUTION. — Désignons par x le nombre de livres sterling représentant la valeur nominale de l'une des lettres.

La 1^re^, escomptée pour 1 mois, donne pour valeur au comptant en monnaie anglaise $x - \frac{x}{240}$.

La 2^e^, escomptée pour 2 mois $x - \frac{2x}{240}$.

Les 2 lettres donnent $2x - \frac{3x}{240}$ livres à vue.

ou $$2x - \frac{x}{80} = \frac{159x}{80}$$

Ce nombre de livres à vue, multipliant le prix 25,325 d'une livre, doit donner Fr. 10 000.

$$\frac{159x}{80} \times 25{,}325 = 10\,000$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{10\,000 \times 80}{159 \times 25{,}325}$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$x = £\,198.\ 13.\ 6$$

2e Solution. — Les valeurs escomptées des deux lettres de crédit équivalent à la valeur escomptée d'une lettre unique, de valeur nominale double, à 45 jours de date ; nous pouvons alors résoudre la question par la règle conjointe

Livres $2x$ à 45 jours		Fr. 10 000 au comptant
Fr. 25,325		£ 1 à vue
7 155 à vue		7 200 à 45 jours.

$$x = \frac{10\,000 \times 7\,200}{25{,}325 \times 7\,155 \times 2}$$

ou en simplifiant

$$x = \frac{10\,000 \times 800}{25{,}325 \times 795 \times 2} = \frac{10\,000 \times 80}{25{,}325 \times 159}$$

$$x = £\ 198.\ 13.\ 6$$

3e Solution. — D'après la valeur d'une livre à vue, donnée en monnaie française par la cote, on peut trouver la valeur d'une livre à 1 mois, et d'une livre à 2 mois, faire la somme de ces valeurs escomptées : cette somme est égale à 2 fois 25,325 moins l'escompte de 25,325 pour 3 mois à 5 %.
Valeur de £ 2, l'une à un mois, l'autre à 2 mois : Fr. 50,3334375

$$25{,}325 \times 2 = 50{,}65$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{escompte pour 72 jours} & 0.25325 \\ \text{pour 18 jours} & 0.0633125\end{array}\right\} = 0{,}3165625$$

Nombre de livres de chaque lettre de crédit

$$\frac{10\,000}{50{,}3334375} = £\ 198.\ 13.\ 6$$

Problème IV. — *Un négociant vend, à Paris 17 janvier, 1° un effet sur l'Italie de lire* 129 883 *au* 14 *février suivant, 2° un effet sur Londres de* £ 5 402. 14. 10 *au* 14 *mars, et avec le produit de la vente, achète une lettre de change sur Vienne au* 1er *mars. On demande la valeur nominale de cette lettre de change sur Vienne.*

Cours des changes à Paris :

Italie $2\frac{5}{8}$ *perte à vue, moins* 4 %

Londres 25,275 *à vue, moins* 5 %

Vienne $211\frac{3}{4}$, 3 *mois, et* 4 %

Cherchons d'abord le résultat de la vente de l'effet sur l'Italie.

Les 129 883 lire perdent d'abord $1\,298,83 \times 2\frac{5}{8} = 3\,409,43$

Elles perdent en outre, étant payables à terme, l'escompte commercial d'après le taux de 4 % pour 28 jours, soit $\dfrac{1\,298,83 \times 28}{90} = 404,08$

Perte totale $3\,813,51$

Le nombre de francs est ainsi

$$129\,883 - 3\,813,51 = \text{Fr. } 126\,069,49$$

Calculons le produit de la vente de l'effet sur Londres. Si l'effet était à vue, il donnerait

$$5\,402,742 \times 25,275 = 136\,554,30$$

L'effet n'étant payable que 56 jours après la date de la négociation, il faut retrancher de la somme précédente l'intérêt correspondant

$$\frac{136\,554,30 \times 56}{7\,200} = 1\,061,98$$

La vente de l'effet sur Londres donne ainsi

$$136\,554{,}30 - 1\,061{,}98 = \text{Fr. } 135\,492{,}32$$

La vente des deux effets donne le total de	Fr.	261 561,81
Il convient d'en déduire le courtage $\frac{1}{8}$ %		326,95
On obtient pour produit net des deux ventes	Fr.	261 234,86
Si nous tenons compte des frais de timbre $\frac{1}{2}$ ‰		130,61
Le capital disponible sera	Fr.	261 104,25

Telle est la somme qu'il s'agit de convertir en florins sur Vienne au 1^{er} mars, c'est-à-dire à 43 jours de date. La question sera résolue à l'aide de la règle de chaîne.

Fl^{45} x au 1er mars	Fr. 261 104,25 au comptant
Fr. 211,75 au comptant	Fl^{45} 100 à 3 mois
9 047 à 3 mois	9 000 au 1er mars

$$x = \frac{261\,104{,}25 \times 100 \times 9\,000}{211{,}75 \times 9\,047}$$

En effectuant les opérations, on trouve pour la valeur nominale de la lettre de change sur Vienne

Fl^{45} 122 667,20

RÈGLEMENT D'UNE DETTE SUR L'ÉTRANGER

AU MOYEN DE PAPIER A UNE ÉCHÉANCE DIFFÉRENTE.

Pour libérer une dette exigible à une date fixée, le débiteur peut faire parvenir à son créancier du papier payable à une autre date, à condition que la valeur de ce papier, au jour de l'échéance de la dette, soit précisément égale à la somme qu'il s'agit d'acquitter.

Pour libérer une dette exigible dans 1 mois, on peut payer avec du papier à 3 mois, par exemple, à condition que la valeur escomptée, pour 2 mois, donne, tous frais déduits, le montant de la dette qu'il faut solder.

Exemple. — *Un négociant de Paris se propose de libérer une dette de 25 000 pesetas, dont le payement est exigible à Barcelone dans 23 jours, au moyen de papier à 64 jours. Le taux d'escompte à Barcelone est 6 °/₀, et le cours du change est, à 3 mois, 477 et 4 °/₀.*

On demande le compte détaillé de l'opération.

Pour libérer 25 000 pesetas, exigibles dans 23 jours, avec du papier à 64 jours, dont l'échéance n'arrive que 41 jours après l'échéance de la dette, il faut que la valeur escomptée de l'effet, pour 41 jours et d'après le taux de la place de Barcelone où réside le créancier, soit égale à 25 000. Si donc nous désignons par x le nombre de pesetas à 64 jours qui ont une valeur libératoire de 25 000 dans 23 jours, nous pourrons poser l'équation

$$x - \frac{x \times 41}{6\,000} = 25\,000$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{25\,000 \times 6\,000}{5\,959}$$

Tel est le nombre de pesetas à 64 jours qu'il faut acheter à Paris.

D'après la cote des changes de Paris, 1 peseta à 3 mois coûte $\frac{477}{500}$ francs ; 1 peseta à 64 jours, payable 26 jours avant la fin des 3 mois, coûtera $\frac{477}{500} \times \left(1 + \frac{26}{9\,000}\right)$.

Le débiteur devra débourser à Paris

$$\text{Fr.} \quad \frac{25\,000 \times 6\,000}{5\,959} \times \frac{477}{500} \times \left(1 + \frac{26}{9\,000}\right)$$

plus les frais accessoires de courtage et de timbre.

Dans la pratique, on résoudra la question à l'aide de la règle de chaîne.

Fr. x au comptant	25 000 pesetas à 23 jours.
5 959 à 23 jours	6 000 à 64 jours (à Barcelone)
9 000 à 64 jours	9 026 à 90 jours (à Paris)
500 pesetas à 90 jours	477 francs au comptant.

$$x = \frac{25\,000 \times 6\,000 \times 9\,026 \times 477}{5\,959 \times 9\,000 \times 500}$$

En simplifiant et effectuant, on trouve

Fr. 24 083,47

Problème I. — *Un négociant de Paris doit à Stokholm* 60000 *kronor, exigibles dans* 15 *jours. Pour le règlement de cette dette, il achète à Paris une première lettre de change de* 25872 *kr. sur la Suède à* 50 *jours, et se propose de solder le reste à l'aide d'une autre lettre de change à* 72 *jours. Quel sera le total des déboursés?*

Le taux d'escompte en Suède est $5\frac{1}{2}$ °/₀.

Le cours du change, dans la place de Paris, indique : Stockholm 137 $\frac{1}{4}$ 3 *m. et* 4 °/₀.

Solution. — La 1re lettre de change, d'une valeur nominale de 25872 kronor, exigibles 35 jours après l'échéance de la dette, acquitte 25872 kronor moins l'escompte 138,35 de cette somme à $5\frac{1}{2}$ °/₀ pour 35 jours, soit 25733,65.

La 2e lettre de change doit acquitter le reste, soit 34266,35.

Cette deuxième lettre de change doit avoir pour valeur nominale le capital qui, diminué de son escompte à $5\frac{1}{2}$ °/₀ pour 72 — 15 ou 57 jours, donnera 34266,35. Ce capital nominal x doit satisfaire à l'équation

$$x - \frac{x \times 5,5 \times 57}{36000} = 34266,35$$

Cette équation donne

$$x = 34567,38$$

La question revient maintenant à calculer les prix d'achat, à Paris, de deux lettres de change sur Stockholm, l'une de 25872 kronor à 50 jours, l'autre de 34567,38 à 72 jours.

Il suffit de convertir la somme des valeurs nominales en monnaie française en multipliant par 1,3725 et d'augmenter ce produit de l'intérêt de la 1re lettre pour 40 jours, et de l'intérêt de la 2e pour 18 jours, d'après le taux de 4 %.

On trouve ainsi pour total des déboursés

Fr. 83205,75

Problème II. — *Pour acquitter une dette de Rbl. 20000, exigibles en Russie dans 1 mois, le débiteur, négociant à Paris, fait l'achat et la remise de trois effets sur la Russie :*

Le 1er de Rbl. 6000 à 2 mois;

Le 2e de Rbl. 7000 à 3 mois;

Et le 3e à 4 mois.

Le taux d'escompte est, en Russie, de 6 %.

Le cours du change à Paris porte :

St-Pétersbourg, 3 mois, 249 et 4 %.

On demande le montant des déboursés du débiteur ?

Le 1er effet, payable 1 mois après l'échéance de la dette, ne libère que $6000 - 30 = 5970$ roubles, à cause de l'escompte qu'il subira à 6 %.

Le 2e effet, payable 2 mois après l'échéance de la dette, ne libère que $7000 - 70 = 6930$ roubles.

Le 3e effet devra libérer 7100 roubles, pour parfaire la somme de 20000.

Ce 3e effet, payable 3 mois après l'échéance de la dette, devra présenter une valeur nominale x, telle que diminuée de son escompte à 6 % pour 3 mois, $x \times \frac{3}{200}$, elle donne pour résultat net 7100.

De l'équation

$$x - x \times \frac{3}{200} = 7100$$

on tire

$$197\,x = 1420000$$

et $$x = \frac{1420000}{197} = 7208,12$$

Les 3 effets remis en payement sont définis par leurs valeurs nominales et leurs dates respectives :

Rbl.	6000	à 2 mois
	7000	à 3 mois
	7208,12	à 4 mois

Pour la conversion en monnaie française, ces roubles peuvent être d'abord convertis en roubles à 3 mois, en tenant compte des intérêts à 4 %.

Rbl. 6000 à 2 mois donnent ainsi	6020 à 3 mois
7000 à 3 mois	7000 »
7208,12 à 4 mois	7184,09 »
Total, en roubles à 3 mois :	Rbl. 20204,09

L'acquisition de ces roubles coûtera à Paris, au change de 249, 3 mois,

$$\text{Fr. } 2.49 \times 20204,09 = 50308,18$$

Remarque. — Si le débiteur payait en papier à 1 mois, il devrait fournir une valeur nominale de Rbl. 20000 ; la cote du papier court étant 250 lorsque celle du papier long est 249, il aurait à débourser $20000 \times 2,5 + \frac{2}{3}$ % de cette somme, soit, au total, Fr. 50333,33.

Les deux modes de payement présentent peu de différence. Faire l'étude comparative des résultats des divers moyens qu'il est possible d'employer, et le choix judicieux du procédé qui paraît le plus avantageux, est ce que l'on appelle faire un arbitrage.

La plupart des arbitrages comprennent, outre des négociations sur place, des opérations de change, exécutées par les correspondants dans les places étrangères.

Il convient donc d'étudier les conditions du change dans les autres pays.

COTES DES CHANGES DANS LES PRINCIPALES PLACES ÉTRANGÈRES

Cote des Changes, à Londres, 1er octobre 1900.

TAUX D'ESCOMPTE à l'étranger.	DEVISES.	VERSEMENTS.	COURS A 3 MOIS.
	I. — Londres donne le certain.		
3 ½ o/o	Hollande............	12.10	12.25
5 o/o	Allemagne...........	20.40	20.65
3 o/o	Paris................	25.15	25.35
5 o/o	Italie................	26.30	26.75
4 ½ o/o	Autriche............	24.35	24.55
5 o/o	Danemark...........	18.30	18.55
	II. — Londres donne l'incertain.		
5 o/o	Espagne.............	39 ¼	38 ½
6 o/o	Portugal.............	40 ¼	39 ½
5 o/o	Russie...............	26 ¾	26 ¼

Les cours ci-dessus ne doivent être considérés que comme des cours moyens, cités à titre d'exemple ; en réalité, il n'y a pas à Londres de cote officielle. Les banquiers de la cité publient eux-mêmes leurs bulletins de change, qu'ils communiquent à leurs clients et correspondants.

EXPLICATIONS SUR LA COTE DES CHANGES DE LONDRES.

Nous classons les devises étrangères cotées dans la place de Londres en deux catégories : la première comprend les devises pour lesquelles Londres donne le certain, c'est-à-dire le terme fixe, invariable, qui reste sous-entendu, et qui est 1 livre sterling. Les nombres mis en évidence sur la cote sont des nombres d'unités étrangères échangeables contre 1 livre sterling comptant. Dans la colonne « Versements » figurent les nombres d'unités de la place étrangère payables immédiatement pour un versement de 1 livre à Londres ; un simple avis télégraphique suffit pour transmettre à la place étrangère l'ordre du paiement à faire en conséquence du versement effectué à Londres. Cette façon très simple d'opérer un règlement de compte entre deux places tend à se généraliser. Déjà dans la place de Paris les opérations de change avec l'Espagne et la Russie se font presque toutes par voie de versements, c'est-à-dire au comptant, sans création d'effets de commerce, sans négociation de lettres de change.

La deuxième catégorie des devises cotées à Londres comprend celles de l'Espagne, du Portugal et de la Russie ; le terme fixe sous-entendu est 1 unité étrangère, 1 piastre pour l'Espagne, 1 milreis pour le Portugal, 1 rouble pour la Russie. Les nombres qui figurent sur la cote sont des nombres de pence, susceptibles de varier.

Pour la négociation des effets à terme, on se guide sur le cours donné à l'échéance type de 3 mois.

Dans la 1re catégorie, la cote donnée à 3 mois se ramène à une date antérieure, en retranchant l'escompte.

Pour les devises de la deuxième catégorie, on ajoute les intérêts pour le temps compris entre l'échéance et la fin des 3 mois. Les calculs d'intérêt et d'escompte se font d'après le taux de la place étrangère.

Pour les places de Bombay, Calcutta, Madras, Hong-Kong, New-York, la cote exprime le nombre de shillings et pence correspondant :

A 1 roupie pour les Indes, à 30 jours.

A 1 piastre de commerce pour Hong-Kong, à 60 jours.

A 1 dollar pour les États-Unis, à 60 jours.

Les intérêts de compensation, destinés à tenir compte des différences de date, sont calculés d'après le taux de la place étrangère.

CALCULS DE CHANGE A LONDRES.

I. *Convertir*, *Londres*, 17 *avril*, *en monnaie anglaise*, *la somme de Fr.* 23 715 *sur Paris au* 6 *juin*, *d'après le cours :* 25,40, 3 *mois*, *escompte* 3 °/₀.

La cote signifie que pour obtenir, au change, £ 1 à Londres, il faut présenter $25^{fr},40$ à 90 jours, ou la valeur escomptée de 25,40 pour le nombre de jours depuis l'échéance jusqu'à la fin des 3 mois. Dans les mêmes conditions, le capital 12000 à 90 jours donnerait comme valeur au 6 juin, c'est-à-dire 40 jours plus tôt, 12000 — 40 ou 11960. La question se résoudra par la règle de chaîne :

£ x à vue	Fr. 23715 à 50 jours
11960 à 50 j.	12000 à 90 j.
25,40 à 3 mois	£ 1 à vue

$$x = \frac{23715 \times 12000}{11960 \times 25,40} = \frac{23715 \times 300}{299 \times 25,4}$$

En effectuant, on trouve pour résultat de la conversion

$$£\,936.\ 15.\ 8\frac{1}{4}$$

On pourrait encore modifier la base du change 25,40 en retranchant l'escompte pour 40 jours ; on trouverait ainsi le nombre de francs à la date du 6 juin, correspondant à £ 1 comptant. Il suffirait alors de diviser la somme donnée 23 715 par la cote modifiée.

II. *Convertir la somme de* £ 328. 17. 6, *en francs à* 60 *jours*, *d'après le cours* 25,40 3 *mois*, *escompte* 3 °/₀.

D après le cours donné, £ 1 se change pour Fr. 25,40 à 3 mois, ou pour 25,40 moins l'escompte pour 30 jours, lorsque les francs sont payables 60 jours après la négociation ou 30 jours avant la fin des 3 mois. On posera la règle de chaîne :

Fr. x à 60 jours	£ 328,875 au comptant
£ 1 au comptant	Fr. 25,40 à 3 mois
Fr. 400 à 3 mois	Fr. 399 à 60 jours.

$$x = \frac{328,875 \times 25,40 \times 399}{400}$$

On trouve pour résultat de la conversion en monnaie française Fr. 8 332,54

Les calculs de change entre Londres et les places de Hollande, Belgique, Allemagne, Italie, Autriche, Danemark, pour lesquelles le terme fixe de comparaison est 1 livre sterling, s'effectueraient d'après les mêmes principes.

Dans le langage des changes, on dit que Londres donne le certain, c'est-à-dire le terme fixe, aux places ci-dessus énoncées qui donnent l'incertain, le terme variable exprimé en monnaie du pays.

Donnons maintenant quelques exemples de conversion de valeurs sur les places de la Russie, de l'Espagne, de Portugal. États-Unis, auxquelles Londres donne l'incertain, en nombre de pence, ou de shillings et pence.

III. *Convertir en monnaie anglaise la somme de Rbl.* 5563 *sur Saint-Pétersbourg, à* 43 *jours, d'après le cours de* $24\frac{1}{4}$, 3 *mois*, 6 %.

£ x au comptant	Rbl. 5563 à 43 jours
Rbl. 6000 à 43 j.	Rbl. 6047 à 90 j.
Rbl. 1 à 90 j.	Pence $24\frac{1}{4}$ au comptant
Pence 240	£ 1

$$x = \frac{5563 \times 6047 \times 24\frac{1}{4}}{6000 \times 240}$$

IV. *Convertir la somme de £ 750. 15 en pesetas à 2 mois sur Barcelone, d'après le cours de* $46 \frac{1}{4}$, *3 mois,* 5 °/o.

Pesetas x à 2 mois	£ 750,75 au comptant
£ 1	pence 240 »
Pence $46 \frac{1}{4}$ à vue	pesetas 5 à 3 mois
7230 à 3 mois	7200 à 2 mois.

$$x = \frac{750{,}75 \times 240 \times 5 \times 720}{46\frac{1}{4} \times 723}$$

COTE DES CHANGES D'AMSTERDAM.

AMSTERDAMSCHE BANK.
N° 6. Amsterdam, 8 janvier 1889.

Coupons et titres remboursables.

Coupons d'Autriche, papier	20,90	Court. 1 °/oo argent.
» argent	$20{,}92 \frac{1}{2}$	» °/oo
Français, Belges	47,65	franco.
Reichsmark	$59{,}12 \frac{1}{2}$	»
Coupons espagnols	$47{,}77 \frac{1}{2}$	»
» portugais	$59{,}07 \frac{1}{2}$	»
Russes, roubles	$24 \frac{15}{16}$	»
» coupons douane	$191 \frac{7}{8}$	»
» Nic. petits coupons	$191 \frac{5}{8}$	»
Dollars	$2{,}46 \frac{1}{2}$	»

Coupons, chemins de fer méridionaux 3,00 $\frac{1}{4}$ franco.

» » russes 7,16 $\frac{1}{2}$ »

» Madrid 1,10 $\frac{1}{3}$ »

CHANGES.

Londres, chèque 12,08 $\frac{3}{4}$.

Paris, 2 mois 47,77 $\frac{1}{2}$. ; à vue, 48 à 48,10.

Allemagne, vue 59,20.

Belgique, » 47,75.

(Ces cours s'entendent franco courtage.)

Cote des changes de Gênes, 7 janvier 1889.

CHANGES (COURS A VUE)	CHÈQUES.		PAPIER COURT.		PAPIER LONG.		TAUX D'ESCOMPTE
	DEMANDE	OFFRE.	DEMANDE	OFFRE	DEMANDE.	OFFRE.	
Allemagne. .	125.00	125.25	124.90	125.15	125.30	125.45	4 $\frac{1}{2}$ o/o
Autriche....	211.25	212.50	211.00	212.50	211.00	212.50	4 $\frac{1}{2}$ o/o
Belgique....	100.75	100.95	100.70	100.90	100.85	101.05	5 o/o
Espagne	494.00	496.00	493.00	496.90	496.00	500.00	6 o/o
France......	100.90	101.05	100.85	101.00	100.90	101.15	4 $\frac{1}{2}$ o/o
Hollande....	210.50	211.20	210.25	211.50	210.50	211.50	2 $\frac{1}{2}$ o/o
Londres	25.53	25.56	25.51	25.55	25.60	25.66	5 o/o
Suisse......	100.60	100.80	100.60	100.80	100.65	100.85	4 $\frac{1}{2}$ o/o

Escompte : Taux officiel, 5 $\frac{1}{2}$ o/o.
Taux hors Banque, 4 $\frac{1}{2}$ à 5 o/o.

La place de Gènes donne l'incertain à toutes les places étrangères.

Les calculs de change s'effectuent comme à Paris.

OPÉRATIONS DE CHANGE DANS LES PLACES ALLEMANDES

BERLIN, den 4 Januar 1889.

WECHSEL.		NOT.	VOM 3 JANUAR	VOM 4 JANUAR.
Amsterdam............	100 fl.	8 Mt.	168.85 b.	
d°	d°	2 Mt.	168.45 b.	
Brüssel und Antw......	100 fr.	8 T.	80.55 b.	
d°	d°	2 Mt.	79.95 b.	
Skandinav. Plätze......	100 kr.	10 T.	112.00 b. G.	
Kopenhagen............	100 kr.	10 T.	112.00 b. G.	
London................	1 Lstrl.	8 T.	20.38 b.	
d°	d°	3 Mt.	20.24 b.	
Lissabon, Oporto.......	1 milreis.	14 T.	— —	
d°	d°	3 Mt.	— —	
Madrid u. Barcel.......	100 Pes.	14 T.	78.75 b.	
d°	d°	2 Mt.	78.50 G.	
New-York..........	100 Doll.	vista.	417.75 b.	
Paris..................	100 fr.	8 T.	80.60 b. G.	
d°	d°	2 Mt.	80.15 b.	
Pesth östr. W..........	100 fl.	8 T.	168.95 b.	— —
d°	d°	2 Mt.	— —	— —
Wien östr. W..........	100 fl.	8 T.	168.90 b.	168.90
d°	d°	2 Mt.	167.90 b.	167.75 b.
Schweizer Plätze.......	100 fr.	10 T.	80.45 b.	— —
Italien. Plätze..........	100 lire.	10 T.	79.80 b.	— —
d°	d°	2 Mt.	79.40 b.	— —
Petersburg.............	100 s.-r.	3 W.	210.25 b.	211.65 b.
d°	d°	3 Mt.	207.75 b.	209.95 b.
Warschau..............	100 s.-r.	8 T.	210.85 b.	212.25 b.

Bank-Disconto: Amsterd. 2 ½; Berlin 4 ½; (Lomb. 5 ½; Privatdisc. 2 ¾; b G) Brüssel 5; London 5; Paris 4 ½; Petersb. 6; Wien 4 ⅛; Ital. Pl. 5 ½; Schwiz 4 ½; Skandinav. Plätze 5; Kopenhagen 3 ⅛; Madrid 4; Lissabon 4.

GOLD. SILBER UND BANKNOTEN.

Duçaten p. St.	9.70 B.	Engl. Bankn.	20.37 G.
Sovereigns....	20.32 G.	Franz. d°	80.55 b.
Napoleon d'or.	16.14 b.	Holländ. Not.	168.85 b.
Dollars........	4.175 b.	Italien. d°	80 G.
Imperials.....	— —	Nordische d°	112 b.
» p. 500 Gr..	1394.50 b.	Oesterr. d°	169.15 b.
» neue.......	16.25 b.	Russ. Bankn.	212.90 b.
« d° p. 500 G.	1394.50 b.	d° ult. jan.	212.50 à 75 à 25 à 50 b.
Amer. Not. $\frac{1000}{500}$.	4.1625 G.	d° ult. febr.	212.25 à 50 à 12 à 12.
» Kleine.	4.1615 G.	d° Zollcoup.	324.60 b. G. 25 b.
» Coup. zb. N. Y	4.1675 b. G.	Schweiz. Not.	80.35 b.
Belg. Noten.	80.55 G.		

EXPLICATIONS.

Les nombres qui constituent les cours des changes à Berlin sont les nombres de reichsmark correspondant à 100 unités étrangères, sauf pour le Londres dont la cote correspond à £ 1, et le Lisbonne dont la cote correspond à 1 milreis.

Les intérêts de compensation sont comptés d'après le taux de l'étranger.

Les échéances adoptées pour types sont 8 ou 10 jours, 2 ou 3 mois; 3 semaines pour la Russie.

La lettre G (geld, argent) indique qu'il y a demande, au prix correspondant, de la part des acheteurs.

La lettre B (brief, lettre, papier) indique que le papier est offert, par les vendeurs, au prix marqué.

La lettre b (bezahlt, payé) indique le cours effectif des transactions accomplies.

Problème. — *Un banquier de Berlin qui vient de payer Rm* 12 000 *pour le compte d'un débiteur anglais doit prendre son remboursement sur Londres par une traite à* 2 *mois.*

Le cours du change, à Berlin, est pour le Londres à 3 *mois* 20,30 *escompte* 4 %.

Quelle doit être la valeur nominale de la traite sur Londres?

Le cours 20,30 représente le prix en monnaie allemande de £ 1 à 3 mois; le prix correspondant pour £ 1 à 2 mois doit être égal à 20,30, plus les intérêts pour 1 mois. D'après le taux de 4 %, le capital 300 à 2 mois devient 301 à 3 mois. On peut donc poser la règle de chaîne :

£ x à 2 mois	Rm 12 000 à vue,
Rm 20,30 à vue	£ 1 à 3 mois,
£ 301 à 3 mois	£ 300 à 2 mois.

$$x = \frac{12\,000 \times 300}{20{,}30 \times 301}.$$

En effectuant on trouve $x = 589{,}169$, ce qui donnerait pour valeur nominale £ 589. 3. $4\frac{3}{4}$. Mais il convient d'y ajouter le montant des frais accessoires, de commission, de timbre, etc... Si nous les évaluons à $\frac{1}{4}$ °/₀, le montant nominal de la traite sur Londres devra être de

£ 590. 12. 10.

Les cotes des places allemandes sont, pour la plupart, établies dans les mêmes conditions que celle de Berlin.

LEIPZIG, Freitag den 4 Januar 1889.

WECHSEL.

Amsterdam pr. 100 Ct. fl.	k. S. p. 8 T.	168.75 G
	l. S. p. 2 M.	167.70 G
Brüssel und Antwerpen pr. 100 Fr.	k. S. p. . T.	80.55 G
	l. S. p. 3 M.	79.60 G
* Ital. Plätze pr. 100 Lire	k. S. p. 10 T.	79.75 G
	l. S. p. 2 M.	—
** Schweizer Plätze pr. 100 Francs	k. S. p. 10 T.	80.40 G
London pr. 1 £strl	k. S. p. 8 T.	20.37 G
	l. S. p. 3 M.	20.23 G
Madrid und Barcelona pr. 100 Peset.	k. S. p. 14 T.	78.70 G
	l. S. p. 2 M.	—
Paris pr. 100 Francs	k. S. p. 8 T.	80.55 G
	l. S. p. 3 M.	79.75 G
Petersburg pr. 100 Silber-Rubel	k. S. p. 21 T.	—
	l. S. p. 3 M.	—
Warschau pr. 100 Silber-Rubel	k. S. p. 8 T.	—
Wien pr. 100 fl. Oe. W.	k. S. p. 8 T.	168.80 G
	l. S. p. 3 M.	167.00 G

* Florenz, Genua, Mailand, Neapel, Rom, Turin, Venedig.
** Basel, Bern, Genf, Winterthur, Zürich.

Quelques places présentent cependant diverses particularités. Voici une cote de Brême.

BREMEN, den 4 Januar 1889.

WECHSEL-COURSE.

		BRIEF.	GELD.	BEZAHLT.
Amsterdam für 100 Gulden......	k. S.	169.00	168.85	—
— —	2 M.	—	168.45	—
London für 100 £......	k. S.	2041.00	—	—
— —	3 M.	—	2024.00	—
Paris für 100 Francs............	k. S.	80.70	80.60	—
— —	2 M.	—	80.10	—
Belgische Bankplätze für 100 Fr..	k. S.	80.60	80.55	—
— — — ..	2 M.	—	79.95	—
Schweizer Bankplätze für 100 Fr..	k. S.	—	80.40	—
— — — ..	2 M.	—	79.80	—
Wien für 100 fl. österr. Währ....	2 M.	—	—	—
Newyork für 100 Dollars........	k. S.	418.00	416.00	—
Madrid......................	a vista	—	—	—
Portugal....................	—	—	452.50	—
Italien......................	—	—	79.75	—

Dans la place de Brême, la cote de Londres est rapportée à £ 100.

Les cotes des places d'Espagne, de Portugal et d'Italie sont à vue.

Cote des changes de Saint-Pétersbourg.

ESCOMPTE.	DEVISES.	COURS.	TERME FIXE.
3 %	Paris, 3 mois..............	36.80	100 Fr.
4 %	Londres, 3 mois...........	92.95	£ 10
5 %	Berlin, 3 mois.............	45.30	Rm. 100

Cote des changes de Vienne.

Wien, 7 Jänner 1900.

DEVISES.		COURS MOYEN.
Amsterdam	à vue.	202.50
Londres	—	242.50
Berlin	—	120
Paris	—	96.40
Saint-Pétersbourg	—	252.50

On remarque que, dans la place de Vienne, toutes les devises étrangères sont cotées à vue, en couronnes d'Autriche.

Vienne donne l'*incertain* à toutes les places.

Les intérêts de compensation sont calculés d'après le taux de l'étranger.

Tous les cours se rapportent à 100 unités étrangères, sauf le cours de Londres qui est donné pour £ 10.

Les calculs de change, à Vienne, s'effectuent d'après les principes exposés pour les devises cotées à vue dans la place de Paris.

ARBITRAGES.

Les arbitrages ont pour objet la recherche des moyens les plus avantageux soit pour acquitter une dette, soit pour recouvrer une créance, soit pour tirer profit du commerce des changes.

Supposons un négociant français, débiteur de la place de Londres. Il peut, pour le règlement de sa dette, acheter à Paris du papier sur Londres, qui aura force libératoire pour le créancier anglais. Mais il peut encore acheter à Paris du papier d'autres places, d'Amsterdam, de Berlin, etc., pour le faire revendre à Londres. Le produit de la vente à Londres pourra fournir les valeurs anglaises nécessaires pour l'acquittement de la dette, si la provision achetée à Paris est bien déterminée en vue de la somme à réaliser à Londres.

Prenons pour valeur numérique de la dette £ 1, et cherchons ce que coûterait la réalisation, dans la place de Londres, de £ 1, en employant, comme valeur intermédiaire, du papier d'Amsterdam, acheté à Paris, revendu à Londres. Nous consultons à la fois la cote de Paris et la cote de Londres. Nous voyons l'Amsterdam à 3 mois coté à Paris $207\frac{3}{4}$, à Londres 12,075.

La cote de Londres nous apprend qu'il faut donner à Londres fl. 12,075 pour obtenir £ 1. La cote de Paris nous montre que chaque florin coûte fr. 2,0775. Les 12,075 florins coûteront donc à Paris $2,0775 \times 12,075 =$ fr. 25,08.

Si la livre sterling achetée à Paris coûte plus de 25,08, il y aura peut-être avantage pour le débiteur à employer, comme valeur intermédiaire, le papier d'Amsterdam. Il est cependant essentiel de tenir compte des frais accessoires qui seront plus élevés dans le cas où l'on fait parvenir à Londres du papier étranger que dans le cas où l'on fournit du papier anglais. Mais, dans un premier calcul, on néglige habituellement les frais accessoires et l'on se borne à établir les parités brutes, c'est-à-dire les déboursés, abstraction faite des commissions, qu'il faut faire à Paris pour se procurer les moyens d'obtenir le résultat déterminé, £ 1 à Londres.

On voit que pour obtenir la parité brute de l'Amsterdam, il a suffi de faire le produit des deux cotes de cette même devise dans la place de Paris et dans la place de Londres, en divisant par 100 parce que la cote de Paris se rapporte à 100 unités étrangères.

La même règle s'applique à toutes les devises qui sont rapportées à £ 1 dans la place de Londres.

Si nous désignons par p le cours de Paris pour 1 unité étrangère, par l le cours à Londres, la parité s'obtiendra en faisant le produit

$$p \times l$$

Lorsque Londres donne l'incertain, le terme variable, en pence, comme il arrive pour les places de la Russie, de l'Espagne, du Portugal, la parité se calculera par la formule

$$\frac{p \times 240}{l}$$

car l désigne alors le nombre de pence que l'on obtient pour 1 unité étrangère, par exemple 1 rouble. Le nombre de roubles nécessaires pour obtenir 240 pence ou £ 1 sera $\frac{240}{l}$; chaque rouble acheté à Paris coûtera p, le nombre indiqué par la cote de Paris. Les $\frac{240}{l}$ roubles coûteront donc $p \times \frac{240}{l}$.

Par l'application de ces formules, on dressera rapidement le tableau des parités.

ARBITRAGES DIRECTS ENTRE PARIS ET LONDRES.

DEVISES.	COTE DE PARIS.	COTE DE LONDRES.	PARITÉS.
Londres..........	25.20	»	25.20
Amsterdam	207 $\frac{3}{4}$	12.075	25.08
Allemagne	123	20.50	25.215
Vienne	103	24,55	25.2865
Saint-Pétersbourg.	231 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{4}$	24.97
Madrid...........	486	46 $\frac{1}{4}$	25.219
Lisbonne	554	51 $\frac{3}{4}$	25.692

D'après le tableau précédent, un négociant français devra, s'il est débiteur, employer de préférence le papier de Saint-Pétersbourg; s'il est créancier, demander à Londres du papier de Lisbonne; s'il est spéculateur, acheter à Paris du Saint-Pétersbourg, le revendre à Londres pour y acheter du papier de Lisbonne, qu'il revendra à Paris.

Il ne faut pas prendre comme mesure du bénéfice possible, par livre sterling, la différence entre la parité la plus faible 24,97 et la parité la plus forte 25,69. Il faut tenir compte des frais accessoires de courtages et de timbres, qui augmentent le prix d'achat et diminuent le prix de vente.

Les calculs d'arbitrages directs entre Paris et Londres sont particulièrement faciles, en raison de l'échéance type de 3 mois adoptée dans les deux places pour les valeurs étrangères habituellement employées dans les arbitrages. Si l'arbitrage s'opère entre deux places n'ayant pas la même échéance type pour une devise étrangère, il faut rapporter les cours dans les deux places à la même date, en tenant compte des intérêts.

Les arbitrages dont nous venons de parler s'appellent arbitrages directs, parce qu'il n'y a de négociations effectives que dans les deux places proposées, telles que Paris et Londres.

D'autres arbitrages se composent d'opérations exécutées, non seulement entre les deux places directement intéressées, mais encore dans une ou plusieurs places étrangères. Ces sortes d'arbitrages s'appellent arbitrages indirects.

Problème. — *Un banquier de Paris emploie la somme de fr. 100 000 en achat de papier sur Saint-Pétersbourg, fait revendre le Saint-Pétersbourg à Londres, et demande en retour du papier sur Lisbonne qu'il revend à Paris.*

On demande le résultat de ces opérations.

COURS DES CHANGES.

	à Paris.	à Londres.
Saint-Pétersbourg, 3 m.	$231\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{4}$
Lisbonne, 3 m.	554	$51\frac{3}{4}$

On comptera, pour frais accessoires, $\frac{1}{8}$ °/₀ *à Paris,* $\frac{1}{4}$ °/₀ *à Londres pour chaque opération, vente ou achat.*

Les conditions du problème donnent lieu à la chaîne suivante :

Fr. x au retour.	Fr. 100 000 déboursés.
Fr. $231\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{800}\right)$	Rbl. 100 à 3 m.
Rbl. 1 à 3 m.	Pence $22\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{400}\right)$
Pence $51\frac{3}{4}\times\left(1+\frac{1}{400}\right)$	Mlr. 1 à 3 m.
Mlr. 100 à 3 m.	Fr. $554\times\left(1-\frac{1}{800}\right)$ au retour.

$$x=\frac{100\,000\times 22\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{400}\right)\times 554\times\left(1-\frac{1}{800}\right)}{231\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{800}\right)\times 51\frac{3}{4}\times\left(1+\frac{1}{400}\right)}$$

En simplifiant et effectuant, on trouve

$$x = 102\,122 \text{ francs environ}$$

Cette opération d'arbitrage direct entre Paris et Londres donnerait ainsi un bénéfice de 2 122 francs.

EXEMPLE D'ARBITRAGE INDIRECT ENTRE PARIS ET LONDRES.

Rechercher sur laquelle des 3 *places, Paris, Amsterdam, Berlin, il serait le plus économique pour un débiteur français d'acheter du Londres à l'effet d'acquitter une dette de* £ 10 000, *exigible dans* 45 *jours.*

COTE DES CHANGES A PARIS.

Londres 25,275 *à vue moins* 6 °/₀
Amsterdam 205 3 *mois et* 4 °/₀
Berlin $121\frac{1}{4}$ 3 *mois et* 4 °/₀.

COTE D'AMSTERDAM.

Londres 12,075, 2 *mois taux d'escompte à Londres* 6 %.

COTE DE BERLIN.

Londres 20,25, 3 *mois taux d'escompte à Londres* 6 %.

SOLUTION. — 1° Une lettre de change à 45 jours, de £ 1 0000, coûtera à Paris 252 750 francs diminués de l'escompte à 6 % pour 45 jours, soit francs 250 854,30.

2° Dans la place d'Amsterdam £ 10 000 à 45 jours, ou £ 10 025 à 60 jours coûteront 10025 × 12,075 florins au comptant. Or, d'après la cote de Paris 100 florins à 3 mois coûtant 205 francs, 100 florins à vue coûteront 207,05. Le prix de revient sera ainsi :

$$10025 \times 12{,}075 \times 2{,}0705 = 250\,637^{fr}{,}90$$

3° Dans la place de Berlin, £ 10 000 à 45 jours ou 10 075 à 90 jours coûteront 10 075 × 20,25 Reichsmark. Et ces reichsmark coûteront à Paris chacun 1,229675. Le prix de revient sera donc

$$10075 \times 20{,}25 \times 1{,}229675 = 250\,876^{fr}{,}75$$

Les calculs indiquent ainsi une légère économie résultant de l'achat dans la place d'Amsterdam, mais la différence pourrait être absorbée par les frais accessoires que l'on aurait à payer en plus. Les cours se trouvent sensiblement nivelés, et l'achat direct du Londres à Paris peut être la solution la plus simple.

NÉGOCIATIONS ET ARBITRAGES DE FONDS PUBLICS.

Pour l'étude des négociations et des calculs d'arbitrages de fonds publics dans les bourses étrangères, il est indispensable de connaître les usages particuliers de chaque place, et principalement les changes fixes.

On entend par changes fixes les bases invariables adoptées dans chaque place pour la conversion des valeurs des fonds d'Etats étrangers en monnaie du pays où ils sont négociables et cotés.

Commençons par faire connaître les changes fixes adoptés pour les principaux fonds d'États dans les places les plus importantes.

CHANGES FIXES A LONDRES.

Unités étrangères.		Valeur en monnaie anglaise.	
Francs	25	£	1
Lire	25	£	1
Rm	20	£	1
Fl. c.	1	Pence	20
Fl[45]	1	Pence	24 ou Shillings 2
Rbl	1	Pence	$37\frac{1}{2}$
Piastre forte d'Espagne	1	Shillings	$4\frac{1}{4}$
Mlr. portugais	1	Pence	54
$	1	Shillings	4

Le courtage varie de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{16}$ °/₀.

Droit de timbre $\frac{1}{8}$ °/₀ sur toutes valeurs étrangères.

Les cours publiés indiquent, comme à Paris, le prix à payer en y comprenant la jouissance du coupon d'intérêt en cours.

CHANGES FIXES A AMSTERDAM.

Valeurs étrangères.		Changes fixes en florins courants.
Francs ou lire	100	Fl. c. 50
£	1	12
Fl[45]	5	6
Rm	100	60
Rbl	1	2
$	10	25
Piastre espagnole	1	2,50
Mlr portugais	1	2,70

Le courtage est de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{8}$ %.

Les frais de timbre 0,7 ‰ environ.

Dans les bourses hollandaises, le cours publié ne comprend pas les intérêts courus depuis le payement du dernier coupon, il faut y ajouter les intérêts, calculés d'après le taux nominal, depuis l'époque de l'entrée en jouissance.

CHANGES FIXES A BERLIN.

Valeurs étrangères.		Changes fixes en reichsmark.		
Fl^{45}	1	Rm	2	(2,025 pour rente hongroise)
Fl. c.	1		1,70	
Francs	100		80	
£	1		20	
Rbl	1		3,20	
$	1		4,25	

Le courtage peut varier de $\frac{1}{4}$ à 1 ‰.

Les frais de timbre sont de $\frac{1}{2}$ ‰.

Les intérêts ne sont pas compris dans les cours publiés, et doivent, comme à Amsterdam, y être ajoutés.

Cette remarque s'applique à toutes les bourses allemandes.

CHANGES FIXES A VIENNE.

Valeurs étrangères.		Changes fixes en florins d'Autriche.	
Francs ou lire	2,50	Fl^{45}	1
Rm	2		1
£	1		10

Ces changes fixes ne servent que pour certaines valeurs spécialement désignées. La règle est d'exprimer tous les cours en monnaie autrichienne, il n'y a pas lieu de faire de conversion, par conséquent pas de changes fixes.

Le courtage est de $\frac{1}{2}$ ‰ sur le capital nominal.

Le timbre autrichien 0,7 ‰.

Le timbre hongrois $\frac{5}{6}$ ‰.

Les intérêts doivent être ajoutés aux cours, comme en Hollande et en Allemagne.

CHANGES FIXES A SAINT-PÉTERSBOURG.

Presque tous les cours sont exprimés en roubles. Pour certains fonds publics, cependant, ils sont énoncés en monnaie française ou en monnaie anglaise; les changes fixes sont alors

Francs	4	Rbl	1
£	20		125

Le courtage est $\frac{1}{8}$ % sur le capital nominal.

Le timbre est de rbl. 0,40 par titre, pour les effets publics émis en Russie.

Les intérêts doivent être ajoutés aux cours.

Problème I. — *Le* 3 % *français est coté, le* 2 *mars* 1889, *à Paris,* 85,10, *à Francfort,* 84,70.

Le « versement » sur l'Allemagne est coté 123 *et* 4 %. *Vaut-il mieux, pour un capitaliste français, acheter à Paris ou à Francfort?*

1° A Paris, 3 francs de rente coûteront 85,10 plus $\frac{1}{8}$ % pour le courtage, soit 85,21 à moins d'un centime près.

2° A Francfort, le cours publié 84,70 doit être augmenté des intérêts courus depuis le 1er janvier, c'est-à-dire de 0,50. Ce nombre, qui représente des francs, doit être converti en monnaie allemande d'après le change fixe, 80 reichsmark pour 100 francs. Le nombre de mark correspondant est $85,20 \times 0,8 = 68,16$; à ce nombre il convient d'ajouter les frais accessoires, commission, courtage, timbre, que nous évaluons ensemble à $\frac{1}{4}$ %. Nous obtenons ainsi Rm. 68,33. D'après la cote de Paris, Rm. 100 à vue coûtent $123 + 1{,}23 =$ Fr. 124,23. Les Rm. 58,33 dus à Francfort exigeront à Paris un versement de $1{,}2423 \times 68{,}33 =$ Fr. 84,89 à 1 centime près.

L'achat à Francfort offrira sur l'achat à Paris une économie marquée par la différence $85{,}21 - 84{,}89 = 0^{fr},32$ par 3 francs de rente.

REMARQUE. — Le prix de revient à Francfort est habituellement calculé par le mécanisme de la règle de chaîne.

Fr. x	3 Fr. de rente
3 Fr. de rente	85,20 (cours + intérêts)
Fr. 100	Rm. 80 (change fixe)
400	401 (pour les frais)
Rm. 100 à vue	Fr. 124,23 (change commercial)

$$x = \frac{85{,}20 \times 80 \times 401 \times 124{,}23}{100 \times 400 \times 100} = 84{,}89$$

Problème II. — *Le 4 °/₀ hongrois est coté,* 1^er^ *avril* 1888 :
A Paris, 86.
A Londres, 86,10.
A Amsterdam, 85,80.
A Francfort, 85,90.
A Vienne, 100,50.

Les cours des changes à Paris, sont, à la même date :
Londres, 25,30, *à vue, moins* 3 °/₀.
Amsterdam, 208, 3 *mois, et* 4 °/₀.
Allemagne, 123, 3 *mois, et* 4 °/₀.
Vienne 207, 3 *mois, et* 4 °/₀.
Dans quelle place un capitaliste français devra-t-il acheter de préférence?

1° A Paris, 4 florins de rente coûteront $86 \times 2{,}50 =$ Fr. 215

$+ \frac{1}{8}$ °/₀	0,27
Prix à Paris	F. 215,27

2° A Londres, le change fixe étant de £ 1 pour 10 florins, le prix brut sera £ 8,61

$$+\frac{1}{4}\ \%_0 \qquad 215$$

En tout : £ 8,6315

Prix en monnaie française $8,6315 \times 25,3 =$ Fr. 217,63.

3° A Amsterdam, le cours doit être complété par l'addition des intérêts courus depuis le 1[er] janvier, date de la jouissance de la rente hongroise; le cours complété est 86,80. Le nombre de florins courants, correspondant à ce nombre de florins d'Autriche, est $\frac{86,80 \times 6}{5} = 104,16$

Ajoutons pour les frais $\frac{1}{4}\ \%_0$ 26

En tout : Fl. c. 104,42

En monnaie française $104,42 \times 2,1008 =$ Fr. 219,37.

4° A Francfort, le cours complété est 86,90; le change fixe est de Rm. 2,025 pour 1 florin. Le nombre de reichsmark est donc

$$\text{Rm. } 2,025 \times 86,90 = \text{Rm. } 175,97$$

$$+\frac{1}{4}\ \%_0 \qquad 44$$

En tout : Rm. 176,41

En monnaie française $1,2423 \times 176,41 =$ Fr. 219,15.

5° A Vienne, le cours complété est 101,50

$$+\frac{1}{4}\ \%_0 \qquad 25$$

En tout Fl[45] : 101,75

En monnaie française $2,0907 \times 101,75 =$ Fr. 212,73.

Des calculs qui précèdent, il résulte que c'est à Vienne qu'il conviendrait d'acheter, à Amsterdam qu'il faudrait vendre.

ARBITRAGES SUR LES MATIÈRES D'OR ET D'ARGENT.

Dans les différentes places, on cote les métaux précieux et les pièces de monnaie les plus remarquables.

Ainsi, à Paris, on cote l'or en barres $\frac{1\,000}{1\,000}$, le kilogramme 3 437 plus une prime variable de tant pour 1 000.

On cote les Souverains anglais, les Guillaumes d'Allemagne les Aigles d'Amérique, etc...

De même, à Londres, on cote l'or en barres, les aigles d'Amérique, les pièces de 20 francs, les pièces de 20 mark, etc...

Les matières métalliques, lingots et monnaies, peuvent naturellement servir, au lieu de lettres de change, à régler les comptes entre négociants de différents pays.

Pour évaluer le prix de revient d'un envoi de matières précieuses à l'étranger, il faut ajouter au prix d'achat sur place les frais de transport et d'assurance, qui sont à peu près connus pour les principales places étrangères.

Ainsi, de Paris, les frais de transport et d'assurance sont à peu près :

Pour Londres, Amsterdam. Berlin	$2\frac{1}{2}$ pour 1 000
Pour Hambourg	$2\frac{1}{4}$
Pour Vienne	$2\frac{3}{4}$
Pour Saint-Pétersbourg	3

Lorsque le prix du papier, des lettres de change, effets de commerce, devient trop élevé, on peut de préférence libérer une dette à l'étranger par l'envoi d'espèces métalliques.

Supposons, par exemple, que le papier sur Londres soit au cours de 25,35 et qu'en même temps la cote des souverains anglais soit 25,28. Recherchons s'il est préférable de payer en or anglais.

Le prix de revient de la livre sterling sera $25{,}28 + \frac{1}{4}$ °/₀, soit 25,343.

Il y aurait alors une différence très faible entre les deux modes de payement.

Mais si l'écart entre le prix du papier de commerce et le prix des matières est plus accentué, on pourra trouver quelque avantage à employer un moyen de préférence à l'autre.

On peut également rechercher, par la combinaison des cours des changes et des cotes des métaux précieux, dans quelle place il conviendrait d'acheter, ou de vendre, des espèces métalliques. Le problème suivant donnera un exemple de ces arbitrages.

Problème. — *L'or en barres est coté à Paris* 3437 *et* 3 °/₀₀ *le kilogr.* $\frac{1000}{1000}$; *à Londres, sh.* $77\frac{3}{4}$ *l'once au titre* $\frac{11}{12}$; *à Amsterdam, fl.* 1 645 *le kilogr.*

La cote des changes de Paris porte :

Londres, 25,30 *à vue.*

Amsterdam, $207\frac{1}{2}$ 3 *mois et* 4 °/₀

Quel serait le prix, pour un négociant français, de 1 *kilogramme d'or dans chacune des places proposées?*

1° A Paris le kilogramme d'or fin coûtera		3437
Plus 3 °/₀₀		10,311
Soit, au total,	Fr.	3447,311

2° A Londres, le prix sera obtenu à l'aide de la chaîne qui suit :

Fr. x	1 000 gr. or pur
373,2419	12 oz
11 oz	12 oz, au titre standard
1 oz	£ 3,8875
£ 1	Fr. 25,30

$$x = \frac{1000 \times 12^2 \times 3{,}8875 \times 25.30}{373{,}2419 \times 11} = \text{Fr. } 3449{,}61$$

3° A Amsterdam, le prix sera trouvé par la chaîne :

Fr. x	1 kg. or pur
1 kg. or pur	Fl. 1645
Fl. 100 à vue	Fr. 209,575

$$x = \frac{1645 \times 209,575}{100} = \text{Fr. } 3447,50$$

Les calculs mettent en évidence des cours sensiblement nivelés, les prix d'achat diffèrent peu dans les trois places; et le moyen le plus simple pour un arbitragiste français, en quête d'espèces métalliques, serait d'acheter de l'or à Paris.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

10995-00. — Corbeil. Imprimerie Crété

MASSON & C^ie^, Éditeurs

120, boulevard Saint-Germain, Paris. (6^e^)

PP. n° 235. (Juin 1901.)

EXTRAIT DU CATALOGUE CLASSIQUE

(Rentrée Scolaire 1901)

Nouveau Cours de Grammaire Française

A l'usage de l'Enseignement secondaire classique et moderne

Par H. BRELET

Ancien élève de l'École normale supérieure, Agrégé de Grammaire
Professeur de Quatrième au lycée Janson-de-Sailly.

Par la publication de la **Grammaire française à l'usage de la classe de Quatrième et des classes supérieures de l'enseignement secondaire classique et moderne**, se trouve achevé le *Nouveau Cours de Grammaire française* de M. H. Brelet, dont les premiers volumes ont trouvé un accueil si favorable auprès des maîtres et des élèves. Ce dernier volume, fruit d'une longue expérience et d'un travail considérable, clôt dignement la série. L'auteur l'a mis en conformité avec les **réformes orthographiques** sorties de l'accord intervenu entre le Conseil supérieur de l'Instruction publique et l'Académie française. Nous en avons profité pour demander à M. Brelet d'en faire autant pour les volumes précédents dont nous donnons aujourd'hui une nouvelle édition. Notre cours de grammaire mérite donc à tous les points de vue le titre de **nouveau** ; il répond à un besoin de l'enseignement et est appelé à rendre de très réels services.

Ainsi se trouve rempli le programme de M. Brelet : il a publié également des cours parallèles de **Grammaire latine** et de **Grammaire grecque**. Est-il nécessaire de faire ressortir l'avantage de ces trois cours conçus sur le même plan et suivant la même méthode, formant un tout dont les différentes parties ont entre elles des liens de parenté grâce auxquels les débutants dans l'étude d'une nouvelle langue, loin de se trouver dépaysés, retrouvent la méthode avec laquelle ils sont déjà familiarisés.

I

Premières leçons de Grammaire française, à l'usage des Classes Préparatoires, par H. Brelet et Mathey, professeur de Huitième au lycée Janson-de-Sailly. *Nouvelle édition*, revue et corrigée. 1 vol. in-16, cartonné toile souple . . . . 2 fr.

Ce volume comprend à la fois les **leçons** et les **exercices** qui y correspondent.

II

Éléments de Grammaire française, à l'usage des classes de Huitième et de Septième, par H. Brelet. *Nouvelle édition*, revue et corrigée. 1 vol. in-16 cartonné toile souple 2 fr.

Exercices sur les Éléments de Grammaire française, à l'usage des classes de Huitième et de Septième, par V. Charpy, agrégé de Grammaire, professeur de Quatrième au lycée Janson-de-Sailly. 2e édition. 1 vol. in-16, cartonné toile souple . . . . 2 fr.

III

Abrégé de Grammaire française, à l'usage des classes de Sixième et de Cinquième de l'Enseignement classique et de l'Enseignement moderne, par H. Brelet. *Nouvelle édition*, revue et corrigée. 1 vol. in-16, cartonné toile souple . . . . 2 fr. 50

Exercices sur l'Abrégé de Grammaire française, à l'usage des classes de Sixième et de Cinquième de l'Enseignement classique et de l'Enseignement moderne, par H. Brelet et V. Charpy. 1 vol. in-16. (*Sous presse.*)

IV

Grammaire française, à l'usage de la classe de Quatrième et des Classes supérieures de l'Enseignement classique et de l'Enseignement moderne, par H. Brelet. 1 vol. in-16, cartonné toile souple . . . . 3 fr.

Exercices sur la Grammaire française, à l'usage de la classe de Quatrième et des Classes supérieures de l'Enseignement classique et de l'Enseignement moderne, par H. Brelet et V. Charpy. 1 vol. in-16. (*Sous presse.*)

NOUVEAU COURS
DE
Grammaire Latine
et de
Grammaire Grecque

PAR
H. BRELET

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AGRÉGÉ DE GRAMMAIRE
PROFESSEUR DE QUATRIÈME AU LYCÉE JANSON-DE-SAILLY

Volumes in-16, cartonnés toile anglaise.

Éléments de Grammaire latine (classes de Sixième et de Cinquième). 4e édition. . . . . 2 fr.
Éléments de Grammaire grecque (Cinquième) . 1 fr. 50
Grammaire latine (Quatrième et classes supérieures). 4e édition. . . . . 2 fr. 50
Grammaire grecque (classe de Quatrième et classes supérieures). 2e édition. . . . . 3 fr.

EXERCICES CORRESPONDANTS

Exercices latins (*Versions et thèmes*), à l'usage de la classe de **Sixième**, par M. V. Charpy, agrégé de grammaire, professeur de Quatrième au lycée Janson-de-Sailly. 3e édition. . . . . 2 fr
Exercices latins (*Versions et thèmes*), à l'usage de la classe de **Cinquième**, par MM. Brelet et V. Charpy. 2e édition. . . . . . . 2 fr. 50
Exercices grecs (*Versions et thèmes*), à l'usage de la classe de **Cinquième**, par MM. H. Brelet et V. Charpy. 2e édition. . . . . 1 fr. 50
Exercices latins (*Versions et thèmes*), à l'usage de la classe de **Quatrième**, par MM H. Brelet et P. Faure, professeur de Rhétorique au lycée Janson-de-Sailly. 2 fr. 50
Exercices grecs (*Versions et thèmes*), à l'usage de la classe de **Quatrième**, par MM. H. Brelet et V. Charpy. . . . . 2 fr. 50
Exercices latins (*Versions et thèmes*), à l'usage des classes **supérieures**, par MM. H. Brelet et P. Faure. . . . . 3 fr.

Exercices grecs (*Versions et thèmes*), à l'usage des **classes supérieures**, par MM. H. Brelet et P. Faure. . . . . 3 fr.
Tableau des exemples des grammaires grecque et latine, à l'usage de la classe de **Quatrième** et des **classes supérieures**. 1 vol. petit in-8°, cartonné. . . . . 80 c.
Chrestomathie grecque, ou Recueil de textes gradués, pour faire suite aux *Exercices grecs*, à l'usage de la classe de **Quatrième**, et comprenant les auteurs prescrits au programme. . . . . . 2 fr. 50
Epitome historiæ græcæ, à l'usage de la classe de **Sixième**, avec deux cartes en couleurs et figures dans le texte. . . . . . 2 fr.

Ouvrages de M. PETIT DE JULLEVILLE

Professeur à la Faculté des lettres de Paris.

HISTOIRE DE LA *Littérature Française*

Depuis les origines jusqu'à nos jours

Nouvelle édition, augmentée pour la période contemporaine. 1 vol. in-16. Broché. . 3 fr. 50, cart. toile. . 4 fr.

On peut se procurer séparément :

DES ORIGINES A CORNEILLE. 1 vol. in-16, cart. toile. . . . . 2 fr.
DE CORNEILLE A NOS JOURS. 1 vol. in-16, cart. toile. . . . . 2 fr.

MORCEAUX CHOISIS *des Auteurs français*

poètes et prosateurs

AVEC NOTES ET NOTICES

1 vol. in-6 cart. toile . . . . . . 5 fr.

Nouvelle édition. — Ce recueil renferme environ 400 extraits des principaux écrivains depuis le onzième siècle jusqu'à nos jours, avec de courtes notices d'histoire littéraire. Cette nouvelle édition a été augmentée d'un choix d'extraits des écrivains contemporains depuis Leconte de Lisle et Flaubert jusqu'à A. Daudet et Pierre Loti.

On vend séparément:

I. MOYEN AGE ET XVIe SIÈCLE. — II. XVIIe SIÈCLE. — III. XVIIIe ET XIXe SIÈCLES.
Chaque volume cart. toile verte, est vendu séparément. . . . . 2 fr.

E. BAUER ET DE SAINT-ÉTIENNE

Professeurs à l'École alsacienne

Premières Lectures littéraires. *9e édition revue et augmentée.* 1 vol. in-16, cartonné toile. 1 fr. 50

Ouvrage couronné par la Société pour l'Instruction élémentaire : lectures intéressantes, simples et familières, qui plaisent aux enfants et forment leur goût.

Des mêmes Auteurs

avec une Préface

Par M. PETIT DE JULLEVILLE

Nouvelles Lectures littéraires, avec notes et notices. 4e édit. 1 vol. in-16, cartonné toile. 2 fr. 50

Cet ouvrage, suite naturelle du précédent, est divisé en sept chapitres : *Contes et Légendes*; *Fables* ; *Anecdotes et Récits* ; *Études morales*; *Portraits et Caractères* ; *Scènes et Tableaux de la nature.* Il comprend 200 morceaux, prose et poésie, empruntés aux meilleurs auteurs, et renferme la matière de deux années d'études.

BRUNOT, maître de conférences à la Faculté des lettres de Paris.

Précis de Grammaire historique de la langue française, avec une introduction sur les origines et le développement de cette langue. *Ouvrage couronné par l'Académie française*, 4e édition augmentée d'indications bibliographiques et d'un index. 1 vol. in-18, cart. toile verte . . . . 6 fr.

CAUSSADE (De), Conservateur à la Bibliothèque Mazarine, membre des commissions d'examens de l'Hôtel de Ville.

Notions de Rhétorique et étude des genres littéraires. 9e édit. 1 vol. in-18, toile anglaise. . . . . 2 fr. 50

Littérature grecque. 6e édit. 1 vol. in-18, toile anglaise. . 3 fr.

Littérature latine. 4e édit. 1 vol. in-18, toile anglaise. 6 fr.

GRÉARD, de l'Institut, vice-recteur de l'Académie de Paris.

Précis de littérature. *Analyses des auteurs du baccalauréat.* 5e édit. 1 vol. in-18, cartonné . . . . 1 fr. 60

LE GOFFIC (Charles) et **THIEULIN (Édouard)**, professeurs agrégés de l'Université.

Nouveau traité de versification française, à l'usage des classes de l'enseignement classique et de l'enseignement spécial des lycées et des collèges, des écoles normales, du brevet supérieur et des classes de l'enseignement secondaire des jeunes filles. 3e édition revue et augmentée. 1 vol. in-16, cart. toile. 1 fr. 50

LIARD, directeur de l'enseignement supérieur au ministère de l'Instruction publique.

Logique (cours de Philosophie), 4e édition. 1 volume in-18, cartonné toile. . . . . 2 fr.

MORILLOT (Paul), professeur à la Faculté de Grenoble.

Le Roman en France depuis 1610 jusqu'à nos jours. *Lectures et Esquisses.* 1 vol. in-16. . . . . 5 fr.

CLÉDAT, professeur à la Faculté des lettres de Lyon, lauréat de l'Académie française.

Précis d'orthographe et de grammaire phonétiques pour l'enseignement du français à l'étranger. 1 vol. in-18. . 1 fr.

HANNEQUIN, chargé d'un cours complémentaire de Philosophie à la Faculté des lettres de Lyon.

Introduction à l'étude de la psychologie. 1 volume in-18. . . . . 1 fr. 50

OZENFANT, professeur au Lycée Louis-le-Grand, et **BENOIT**, professeur au lycée de Versailles.

Éléments de grammaire de la langue française (à l'usage des établissements où l'on enseigne les langues anciennes). 1 vol. in-12, cartonné. . . . . 2 fr.

Exercices correspondants, par M. Ozenfant. 1 vol. in-12, cartonné toile . . . . 1 fr. 20

COLLECTION LANTOINE

Livres de Lectures et d'Analyses

Classiques Grecs et Latins

CHOIX ET EXTRAITS

Traduits et publiés par une réunion de professeurs, sous la direction de M. **H. LANTOINE**, secrétaire de la Faculté des lettres de Paris.

Cette collection a été créée en vue de l'*Enseignement moderne et de celui des Jeunes filles*, qui, sans étudier les langues mortes, doivent être cependant à même de lire et d'analyser les chefs-d'œuvre de l'antiquité.

Confiées à des professeurs distingués, qui ont apporté au choix de ces extraits le soin le plus minutieux, qui ont soigneusement revu, quand ils ne les ont pas faites eux-mêmes, les traductions des auteurs publiés, ces éditions sont en outre accompagnées de notices historiques et littéraires qui en rendent la lecture facile et fructueuse.

Chaque volume est précédé d'une *Notice biographique et bibliographique*, de *commentaires*, et suivi d'un *Index* quand il a paru nécessaire à la lecture du texte.

Voici le détail des **Auteurs publiés**, avec le nom des collaborateurs qui ont bien voulu nous prêter leur concours :

Homère. *Odyssée* (Analyse et Extraits), par M. Allègre, professeur à la Faculté des lettres de Lyon. (6e Moderne.)

Plutarque. *Vies des Grecs illustres* (Choix), par M. Lemercier, maître de conférences à la Faculté des Lettres de Caen. (6e Moderne.)

Hérodote (Extraits), par M. Corréard, professeur au lycée Charlemagne. (6e Moderne.)

Homère. *Iliade* (Analyse et Extraits), par M. Allègre. (5e Moderne.)

Plutarque. *Vies des Romains illustres* (Choix), par M. Lemercier. (5e Moderne.)

César, Salluste, Tite-Live, Tacite. (Extraits), par M. H. Lantoine (5e, 4e, 3e Moderne.) 2 fr.

Virgile (Analyse et Extraits), par M. H. Lantoine. (5e Moderne.)

Xénophon (Analyse et Extraits), par M. Victor Glachant, professeur au lycée Buffon. (4e Moderne.)

Eschyle, Sophocle, Euripide (Extraits), par M. Puech, maître de conférences à la Faculté des lettres de Paris. (3e Moderne.)

Plaute, Térence (Extraits choisis), par M. Audollent, maître de conférences à la Faculté des lettres de Clermont. (3e Moderne.)

Eschyle, Sophocle, Euripide (Pièces choisies), par M. Puech, maître de conférences à la Faculté des lettres de Paris. (2e Moderne.)

Aristophane, pièces choisies par M. Ferté, professeur au lycée Charlemagne. (2e Moderne.)

Sénèque. Extraits par M. Legrand, professeur au lycée Buffon. (2e Moderne.)

Cicéron. Traités. Discours. Lettres par M. H. Lantoine. (2e Moderne.)

César, Salluste, Tite-Live, Tacite. (Extraits), par M. H. Lantoine, secrétaire de la Faculté des lettres de Paris (2e, 3e, 4e Moderne). . . . . 2 fr.

Chaque volume est vendu cartonné toile anglaise. 2 fr.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

(CLASSIQUE ET MODERNE)

COURS COMPLET DE GÉOGRAPHIE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE

M. MARCEL DUBOIS

Professeur de Géographie coloniale à la Faculté des lettres de Paris,
Maître de conférences à l'École normale de jeunes filles de Sèvres.

Un grand nombre de membres de l'Enseignement nous ont fait observer que les volumes composant ce cours étaient en général d'un niveau trop élevé pour les élèves de l'enseignement secondaire auxquels ils sont destinés, surtout pour les classes supérieures, et qu'ils contenaient trop de détails par rapport à la brièveté des classes consacrées à la géographie. Afin de répondre au désir de ces professeurs, M. Dubois et ses collaborateurs ont décidé de remanier profondément le **Cours de Géographie** et ont préparé une *nouvelle édition* considérablement abrégée, ce qui a permis d'en baisser sensiblement le prix. Nous avons fait paraître à la rentrée de 1900 la **Géographie de la France et de ses Colonies** (*Classes de Rhétorique et de Seconde moderne*), et l'accueil chaleureux qui a été fait à ce volume a prouvé que cette nouvelle édition répondait aux desiderata exprimés par MM. les professeurs de géographie. Pour la rentrée de 1901 nous faisons paraître les deux volumes suivants : **l'Europe** (*Seconde classique et Troisième moderne*) ; **l'Afrique**, **l'Asie et l'Océanie** (*Troisième classique et Quatrième moderne*). Ces deux volumes ont été complètement refondus sur le plan qui a servi à la Géographie de la France.

Nous sommes persuadés qu'ainsi remaniée et allégée, la nouvelle édition du **Cours de Géographie**, avec ses prix plus modiques, sera accueillie favorablement par les maîtres et les élèves.

Voir ci-contre la division du Cours :

DIVISION

du Cours complet de Géographie

Géographie élémentaire des cinq parties du monde, avec 90 figures, cartes et croquis, avec la collaboration de M. Thalamas, professeur au lycée d'Amiens (*Huitième classique*) . . . . . . 2 fr.

Géographie élémentaire de la France et de ses colonies. — *Cours élémentaire*, avec 59 figures, cartes et croquis, avec la collaboration de M. Thalamas, professeur au lycée d'Amiens (*Septième classique*) . . . . 2 fr.

Géographie générale du monde. — Géographie du bassin de la Méditerranée, avec 71 figures, cartes et croquis, avec la collaboration de M. A. Parmentier, professeur au collège Chaptal (*Sixième classique*) . . . . 2 fr.

Géographie de la France et de ses Colonies. — *Cours moyen*, avec 112 figures, cartes et croquis (*Cinquième classique et Sixième moderne*) . . . . 3 fr.

Géographie générale. — Étude du continent américain, avec 59 cartes et croquis, avec la collaboration de M. Aug. Bernard, professeur agrégé d'histoire et de géographie (*Quatrième classique et Cinquième moderne*). 2e édition, revue et corrigée . . . . . . 3 fr.

Afrique — Asie — Océanie, avec cartes et croquis (*Troisième classique et Quatrième moderne*), 3e édition entièrement refondue avec la collaboration de M. Camille Guy, agrégé de géographie, chef du service géographique au Ministère des Colonies . . . . . 3 fr.

Europe, avec la collaboration de MM. Durandin et Malet, professeurs agrégés d'histoire et de géographie (*Seconde classique et Troisième moderne*), 2e édition entièrement refondue . . . . 3 fr. 50

Géographie de la France et de ses Colonies. — *Cours supérieur*, avec la collaboration de M. F. Benoît, agrégé d'histoire et de géographie, chargé des cours à l'Université de Lille, 119 figures, cartes et croquis, 4e édition entièrement refondue (*Rhétorique et Seconde moderne*) . . . . 4 fr. 50

Précis de Géographie Économique

PAR MM.

MARCEL DUBOIS

Professeur de Géographie coloniale à la Faculté des lettres de Paris,
Maître de conférences à l'École normale supérieure de jeunes filles de Sèvres,

et J.-G. KERGOMARD

Professeur agrégé d'Histoire et Géographie au lycée de Tours.

Ouvrage destiné aux Écoles de commerce (Hautes Études commerciales, Écoles supérieures de commerce, Écoles commerciales, etc.)

1 volume in-8 de 844 pages. . . . . **8 fr.**

Ce *Précis* comprend les cinq parties du monde, avec des développements spéciaux en ce qui concerne la France. Sans négliger la géographie politique et la géographie physique, avec laquelle la géographie économique a les relations les plus étroites, les auteurs se sont attachés surtout à décrire les richesses agricoles (forêts, cultures alimentaires, cultures arborescentes, cultures industrielles, élevage, chasse, pêche, etc.), les diverses branches de l'industrie, les voies de communication, le commerce intérieur et extérieur. Leur œuvre fera époque dans l'enseignement de la géographie. Elle est la seule, à notre connaissance, en dehors des travaux suscités par la Société de géographie commerciale, qui traite d'une façon principale cette branche de la géographie.

(*Bulletin de la Chambre de Commerce de Paris.*)

On vend séparément (extrait de ce volume) :

La France et l'Europe. 1 vol. in-8°. . . . . 6 fr.
L'Asie, l'Océanie, l'Afrique, les Amériques. 1 vol. in-8° 4 fr.

PRÉPARATION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE DE SAINT-CYR

Précis de Géographie

PAR MM.

Marcel DUBOIS
Professeur de Géographie coloniale à la Faculté des lettres de Paris.

Camille GUY
Ancien élève de la Sorbonne, Professeur agrégé de Géographie et d'Histoire.

UN TRÈS FORT VOLUME IN-8

Avec nombreuses cartes, croquis et figures dans le texte.
Broché. . . **12 fr. 50** — Relié. . . **14 fr.**

Précis d'Histoire

MODERNE ET CONTEMPORAINE

Par F. CORRÉARD

Professeur au lycée Charlemagne

Un volume in-8 de 800 pages. . . . Broché, **10 fr. 50**. Relié, **12 fr.**

Cours normal de Géographie

A L'USAGE

DES ÉTABLISSEMENTS SECONDAIRES DE JEUNES FILLES ET DES ÉCOLES PRIMAIRES SUPÉRIEURES

PAR

MARCEL DUBOIS

Professeur de Géographie coloniale à la Faculté des lettres de Paris,
Maître de Conférences à l'Ecole normale supérieure de jeunes filles de Sèvres.

1re année. — NOTIONS GÉNÉRALES DE GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — L'OCÉANIE, L'AFRIQUE, L'AMÉRIQUE, avec la collaboration de Augustin Bernard et André Parmentier. — 1 volume in-16 cartonné percaline. 2e édition. . . . . **2** fr.

2e année. — EUROPE, ASIE, avec la collaboration pour l'Europe de Paul Durandin, et pour l'Asie de A. Parmentier. — 1 volume in-16 cartonné percaline. 2e édition. . . . . **2** fr.

3e année. — FRANCE ET COLONIES, avec la collaboration de F. Benoît. — 1 volume in-16 cartonné percaline. . . **2** fr.

Ce nouveau Cours de Géographie, nécessité par le changement de programme de Géographie dans l'enseignement secondaire des jeunes filles et celui de l'enseignement primaire supérieur, est mis en harmonie avec l'ordre des matières indiqué dans ces programmes, — ordre des matières qui est le même dans les deux enseignements ; — ainsi le volume de première année contient des notions générales sur les diverses parties du monde et l'étude de l'Océanie, de l'Amérique et de l'Afrique ; le deuxième volume est consacré à l'étude de l'Asie (qui a été distraite de la 1re année) et de l'Europe ; le troisième volume donne la France et ses Colonies.

La rédaction de ce Cours, tout en suivant avec soin les divisions détaillées des deux programmes, est combinée de telle manière qu'il pourra, comme notre ancien Cours vert, être employé aussi bien dans l'Enseignement secondaire des jeunes filles, que dans les Ecoles primaires supérieures.

Cartes d'Étude

pour servir

à l'Enseignement de la Géographie

Par MM.

MARCEL DUBOIS

Professeur de Géographie coloniale à la Faculté des Lettres de Paris
Maître de conférences
à l'École normale supérieure de jeunes filles de Sèvres,

et E. SIEURIN

Professeur au collège de Melun.

NOUVELLE ÉDITION

conforme aux récents programmes de l'Enseignement primaire supérieur et de l'Enseignement secondaire des jeunes filles.

Première Partie :

LA FRANCE

SIXIÈME ÉDITION

40 cartes et 200 cartons reliés en un volume in-4, 1 fr. 80

1. Situation de la France dans le monde. — 2. France géologique. — 3. France orographique. — 4. Les Alpes. — 5. Principaux passages des Alpes. — 6. Le Jura, les Vosges et le Morvan. — 7. Massif central. — 8. Les Pyrénées. — 9. Régions climatériques, pluies, lignes isothermes. — 10. France hydrographique. — 11. Tributaires de la mer du Nord, la Seine et ses affluents. Les fleuves normands. — 12. La Loire et ses affluents. Les fleuves bretons. — 13. La Garonne et ses affluents. L'Adour. — 14. Le Rhône et ses affluents. Les fleuves côtiers méditerranéens. — 15. France limnologique. — 16, 17, 18, 19. La côte française. — 20, 21. France économique. — 22. Chemins de fer. — 23. Canaux et voies navigables. — 24. France historique. — 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. France politique. — 32. France administrative. — 33. France universitaire. — 34 et 35. Défense du territoire. — 36. Algérie-Tunisie (carte physique). — 37. Possessions françaises en Afrique. — 38. Madagascar. — 39. Possessions françaises en Asie. — 40. Possessions françaises en Amérique et Océanie.

Deuxième Partie :

EUROPE-ASIE

CINQUIÈME ÉDITION

46 cartes et 180 cartons reliés en un volume in-4, 2 fr. 25

1. Situation de l'Europe dans le monde. — 2. Europe géologique (carte d'ensemble). — 3. Europe physique (carte d'ensemble). — 4. Europe climatérique. — 5. Europe ethnographique. — 6. Europe politique (carte d'ensemble). — 7. La Méditerranée. — 8. Les Alpes. — 9. Le Rhin. — 10. Le Danube. — 11. Iles Britanniques (carte physique). — 12. Iles Britanniques (carte politique). — 13. Belgique et Hollande (carte physique). — 14. Belgique et Hollande (carte politique). — 15 Scandinavie (carte physique). — 16. Scandinavie (carte politique). — 17. Russie physique. — 18. Russie économique. — 19. Russie politique. — 20. Canaux et voies navigables. — L'Empire russe. — 21. Autriche-Hongrie

(carte physique). — 22. Autriche-Hongrie (carte politique). — 23. Allemagne physique. — 24. Allemagne politique. — 25. Suisse physique. — 26. Suisse politique. — 27. Espagne et Portugal (carte physique). — 28. Espagne et Portugal (carte politique). — 29. Italie physique. — 30. Italie politique. — 31. Péninsule des Balkans (carte physique). — 32. Péninsule des Balkans (carte politique). — 33. La Grèce. — 34. Asie (carte physique). — 35. Asie (carte politique). — 36. Sibérie et Turkestan. — 37. Iran (carte physique et politique). — 38. Asie Mineure. — 39. Mésopotamie. — Syrie. — Arabie. — 40. Inde (carte physique). — 41. Inde (carte politique). — 42. Asie centrale. — 43. Chine. — 44. Indo-Chine. — 45. Indo-Chine française. — 46. Japon et Corée.

Troisième Partie :

Géographie générale, Océanie, Afrique, Amérique

CINQUIÈME ÉDITION

40 cartes et 210 cartons, reliés en un volume in-4, 2 fr. 25

1 et 2. Notions de cosmographie. — 3. Les mers. — 4. Les continents. — 5. Le relief terrestre. — 6. Les eaux courantes et les lacs. — 7. Les côtes. — 8 et 9. L'atmosphère. — 10. Productions du globe. — 11. Ethnographie. — 12. Océanie (carte d'ensemble). — 13. Australie. — 14. Indes néerlandaises. — Philippines. — 15. Polynésie. — 16. Afrique physique. — 17. Afrique politique. — 18. Maroc. — Algérie. — Tunisie. — 19. Côte tripolitaine. — Cyrénaïque. — Sahara. — 20. Égypte. — Nubie. — Abyssinie. — 21. Soudan. — 22 et 23. Afrique équatoriale. — 24. Afrique australe (carte physique). — 25. Afrique australe (carte politique) et Afrique insulaire. — 26. Amérique (carte physique). — 27. Amérique du Nord politique. — 28. Le Pôle nord. — 29. Canada (carte physique et politique). — 30. Etats-Unis (carte physique). — 31. Etats-Unis (carte politique). — 32. Mexique et Amérique centrale (carte physique). — 33. Mexique et Amérique centrale (carte politique). — 34. Les Antilles. — 35. Amérique du Sud (carte politique). — 36. Colombie. — Vénézuéla. — Guyanes. — 37. Équateur. — Pérou. — Bolivie. — 38. Brésil. — 39. Chili. — États de la Plata. — 40. Les grandes voies de communication.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Pour les établissements d'enseignement secondaire nous continuons à mettre en vente **LES CARTES D'ÉTUDE** ainsi divisées :

PREMIÈRE PARTIE : **La France** : 40 feuilles (240 cartes et cartons). 6e édition. 1 volume relié . . . . **1 fr. 80**

DEUXIÈME PARTIE : l'**Europe** : 31 feuilles (130 cartes et cartons). 4e édition. 1 volume relié. . . . . **1 fr. 80**

TROISIÈME PARTIE : **Géographie générale** : **Asie, Océanie, Afrique, Amérique** : 52 feuilles (250 cartes et cartons). 4e édition. 1 volume relié . . . . **2 fr. 50**

CARTES D'ÉTUDE

pour servir à l'Enseignement de l'Histoire

PAR

F. Corréard
Professeur au lycée Charlemagne.

E. Sieurin
Professeur au collège de Melun.

Fin du Moyen Age

Temps modernes et contemporains (1270-1901)

Deuxième édition, revue et augmentée de 9 cartes.

Un atlas in-4° comprenant 110 cartes et cartons, relié. 2 fr. 50

Ces cartes d'Étude pour l'enseignement de l'Histoire ont le même but que les cartes d'Etude pour l'enseignement de la Géographie. On s'est attaché à les simplifier autant que possible en n'inscrivant que les indications correspondantes à un cours normal d'histoire : de cette façon les élèves trouveront sans difficulté les noms mentionnés par leur professeur ou ceux cités dans leur manuel.

Dans cette deuxième édition on a fait figurer la période de fin du moyen âge qui s'étend de 1270 à 1610 de telle façon que cet atlas corresponde aux classes suivantes ; Enseignement classique : Philosophie, Rhétorique, Seconde. — Enseignement moderne : Première, lettres, Seconde, Troisième. — Enseignement primaire supérieur : 1re, 2e et 3e années. — Ecoles normales primaires : 2e et 3e années. — Enseignement secondaire des jeunes filles : 2e et 3e années.

Nouvelles Cartes d'Étude

à l'usage des CLASSES ÉLÉMENTAIRES

LES CINQ PARTIES DU MONDE. — LA FRANCE

Par MM. Marcel DUBOIS et E. SIEURIN

26 cartes avec texte explicatif en regard

Reliés en un volume in-4. . . . . 2 fr. 60

En écrivant cet ouvrage, les auteurs n'ont jamais oublié qu'ils s'adressaient à de jeunes enfants. Ils ont réduit la nomenclature au strict nécessaire, aux noms absolument indispensables ; néanmoins aucune chose essentielle n'a été oubliée. Le texte a été rigoureusement placé en regard de la carte ; il ne renferme aucun nom géographique qui ne se rencontre sur le croquis correspondant. Enfin, les cartes, peu chargées de noms et souvent en deux teintes, sont d'une lecture facile et d'une reproduction commode.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE CLASSIQUE ET MODERNE

Nouveau Cours d'Histoire

PAR F. CORRÉARD

Professeur d'Histoire au lycée Charlemagne.

4 VOLUMES IN-16, CARTONNÉS TOILE

Histoire de l'Europe et de la France depuis 395 jusqu'en 1270. 4e édition (3e classique et 4e moderne) . . . . . 2 fr. 50

Histoire de l'Europe et de la France depuis 1270 jusqu'en 1610. 4e édition (Seconde classique et 3e moderne). . . . 3 fr. 50

Histoire de l'Europe et de la France depuis 1610 jusqu'en 1789. 3e édition (Rhétorique classique et Seconde moderne). 3 fr. 50

Histoire de l'Europe et de la France depuis 1789 jusqu'en 1889. 3e édition (Philosophie classique et 1re moderne). . 6 fr. »

L'auteur s'est conformé dans ce volume à la circulaire ministérielle et n'a pas traité la politique intérieure après 1875.

Histoire de la Civilisation

PAR CH. SEIGNOBOS

Docteur ès lettres, Maître de conférences à la Faculté des lettres de Paris.

PREMIER COURS

3 VOLUMES IN-16, CARTONNÉS TOILE MARRON, AVEC FIGURES

Histoire de la civilisation ancienne (Orient, Grèce, Rome). 3e édition . . . . 3 fr. »

Histoire de la civilisation au moyen âge et dans les temps modernes. 2e édition. . . . . 3 fr. »

Histoire de la civilisation contemporaine. 2e édition. 3 fr. »

DEUXIÈME COURS

2 VOLUMES IN-16, CARTONNÉS TOILE VERTE, AVEC FIGURES

conforme aux programmes de l'enseignement secondaire des jeunes filles et de l'enseignement primaire supérieur.

Histoire de la civilisation. — *Histoire ancienne de l'Orient. — Histoire des Grecs. — Histoire des Romains. — Le Moyen âge jusqu'à Charlemagne.* 6e édition avec 105 figures. . . . . . **3** fr. **50**

Histoire de la civilisation. — *Moyen âge depuis Charlemagne. — Renaissance et temps modernes. — Période contemporaine.* 4e édition avec 72 figures . . . . **5** fr.

Ouvrages de M. E. FERNET

Inspecteur général de l'Instruction publique,
Ancien professeur de Physique au Lycée Saint-Louis.

Traité de Physique élémentaire, de Ch. Drion et E. Fernet. *Treizième édition, entièrement refondue*, par E. Fernet, avec la collaboration de J. Faivre-Dupaigre, professeur au lycée Saint-Louis. 1 volume in-8 avec 665 figures dans le texte. . . 8 fr.

Cette édition a été revue d'une manière complète, jusque dans les détails; elle a été modifiée, par rapport à la précédente, en un grand nombre de points. La suppression de développements qui ont perdu leur intérêt a permis de présenter, d'une manière plus complète ou plus rigoureuse, tout en restant élémentaire, diverses autres questions auxquelles les progrès de la science ou de l'industrie sont venus donner une importance particulière. Le nombre des problèmes a été considérablement accru par l'introduction de questions récemment données en composition pour les divers baccalauréats.

Précis de Physique. 27e édition, en collaboration avec J. Faivre-Dupaigre, professeur au lycée Saint-Louis. 1 volume in-18, avec 322 figures, cartonné. . . . . 3 fr.

Cours élémentaire de Physique. 4e édition. 1 volume in-16, avec 472 figures, cartonné toile anglaise. . . . 5 fr.

Notions de Physique et de Chimie. 5e édition. 1 volume in-18, avec 192 figures dans le texte, cartonné toile. 2 fr. 50

Cours de Physique pour la classe de Mathématiques spéciales. 4e édit. grand in-8, avec nombreuses figures. (*Sous presse*).

OUVRAGES DE M. JOUBERT

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Traité élémentaire d'Électricité. 4e édition revue et augmentée. 1 vol. petit in-8, avec 387 figures. . . . . 8 fr.

Cette quatrième édition a subi des remaniements assez nombreux, d'abord pour tenir compte des travaux récents, et aussi, et surtout, pour resserrer davantage les liens qui unissent les différentes parties de l'électricité. Les chapitres relatifs aux *Diélectriques*, à *l'Electrolyse*, aux *Courants alternatifs simples*, ou *polyphasés*, sont ceux qui ont reçu les modifications les plus importantes. Deux chapitres nouveaux ont été ajoutés, l'un sur la *théorie des ions*, l'autre sur les *rayons cathodiques*.

Cours élémentaire d'Électricité à l'usage des classes de l'Enseignement secondaire. 3e édit. 1 vol. in-16, avec 144 figures. 2 fr.

BERT (Paul), membre de l'Institut, et **BLANCHARD** (Raphaël), professeur à la Faculté de médecine de Paris, membre de l'Académie de médecine.

Éléments de Zoologie. 1 volume petit in-8, avec 613 figures. 7 fr.

BURAT, professeur au lycée Louis-le-Grand.

Précis de Mécanique. 8e édition. 1 volume in-18, avec 259 figures, cartonné toile . . . . 3 fr.

DUCATEL, professeur agrégé de Mathématiques au lycée Condorcet.

Leçons d'Arithmétique à l'usage des classes élémentaires des lycées et collèges de garçons et de jeunes filles et de l'Enseignement primaire. 2e édition, revue et corrigée. 1 volume in-18, avec des questionnaires, de nombreux exercices et les réponses aux exercices, cartonné toile. 2 fr. 50

LAPPARENT (A. de), membre de l'Institut, professeur à l'Institut catholique.

Abrégé de Géologie. 4e édition, entièrement refondue. 1 volume in-18, avec 134 gravures et 1 carte géologique de la France chromolithographiée, cartonné toile. 3 fr.

Précis de Minéralogie. 3e édition, revue et augmentée. 1 vol. in-18, avec 335 figures dans le texte et 1 planche chromolithographiée, cartonné toile. . . . . . . 5 fr.

Leçons de Géographie physique. 2e édition, entièrement refondue. 1 vol. grand in-8, avec 163 figures dans le texte et 1 planche en couleurs. . . . . 12 fr.

Notions générales sur l'écorce terrestre. 1 volume petit in-8 avec 33 figures dans le texte. . . . . 1 fr. 20

Traité de géologie. 4e édition entièrement refondue et considérablement augmentée. 3 vol. gr. in-8° avec nombreuses figures, cartes et croquis dans le texte. 35 fr.
(*Ouvrage couronné par l'Institut de France.*)

MARAGE, professeur à l'École Sainte-Geneviève.

Mémento d'Histoire naturelle. 1 volume in-12, avec 102 figures. . . . . 2 fr.

MAUDUIT, ancien professeur au lycée Saint-Louis.

Précis d'Algèbre. 10e édition. 1 vol. in-18, cart. 1 fr. 60

Précis d'Arithmétique. 8e édition. 1 volume in-18, cartonné toile. . . . . 1 fr. 40

MILNE-EDWARDS (Alph.), membre de l'Institut.

Histoire naturelle des animaux :

Zoologie méthodique et descriptive. 3e édition. 1 vol. in-18, avec 487 figures dans le texte, cartonné toile. . . 3 fr.

Anatomie et physiologie animales. 3e édition. 1 volume in-18, avec 241 figures dans le texte, cartonné toile. . . 3 fr.

MULLER (J.-A.), docteur ès sciences, professeur à l'Ecole supérieure des sciences d'Alger.

Précis de chimie analytique. Analyse qualitative, analyse quantitative par liqueurs titrées, analyse des gaz, analyse organique élémentaire, analyse et dosages relatifs à la chimie agricole, analyse des vins, essais des principaux minerais. 1 vol.in-12, broché. . . . . 3 fr.

PROUST, professeur à la Faculté de médecine de Paris.

Douze conférences d'Hygiène, rédigées conformément au plan d'études du 12 août 1890. Nouvelle édition. 1 volume in-18, cartonné toile. . . . . 2 fr. 50

ROUBAUDI, professeur de mathématiques au lycée Buffon et de géométrie descriptive au lycée Carnot.

Cours de Géométrie descriptive. 1 vol. in-8, avec 215 figures et une épure hors texte. . . . . 4 fr.

VÉLAIN (Ch.), chargé de cours à la Faculté des sciences de Paris.

Cours élémentaire de Géologie stratigraphique. 5e édition, revue et corrigée. 1 volume in-16, avec 435 gravures dans le texte et une étude détaillée de la France, accompagnée d'une carte géologique, imprimée en couleurs, cartonné toile. . . . . 5 fr.

WURTZ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences de Paris.

Leçons élémentaires de Chimie moderne. 6e édit. (Notation atomique). 1 volume in-18, avec 133 fig. 9 fr.

MÉMENTOS

à l'usage des Candidats aux Baccalauréats
de l'Enseignement classique et moderne
et aux Écoles du Gouvernement

Mémento de chimie, par M. A. Dybowski, agrégé des sciences physiques, professeur au lycée Louis-le-Grand.

Septième édition, entièrement remaniée, avec la *notation atomique*. 1 vol. in-12. . . . . **2** fr.

Guide pour les manipulations chimiques, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires et des candidats aux baccalauréats, par M. Knoll, préparateur au lycée Louis-le-Grand. *Deuxième édition*. 1 vol. in-12, avec figures dans le texte. . . . . **1** fr.

Questions de Physique. **Énoncés et Solutions**, par R. Cazo, docteur ès sciences. *Troisième édition*. 1 volume in-12. **2** fr.

Mémento d'Histoire naturelle, par M. Marage, docteur ès sciences, professeur à l'École Sainte-Geneviève. 1 vol. in-12, avec 102 figures. . . . . **2** fr.

Conseils pour la Composition française, la version, le thème et les épreuves orales, par A. Keller. 1 vol. in-12. . . . . **1** fr.

Résumé du Cours de Philosophie sous forme de plans, par A. Keller. 1 vol. in-12 . . . . **2** fr.

Histoire de la Philosophie, par A. Keller. 1 vol. in-12 . . . . **1** fr.

Grammaire Espagnole

Deuxième édition revue et augmentée

Par **I. GUADALUPE,** professeur d'espagnol au Collège Rollin et aux Cours de la Ville, professeur examinateur à l'Ecole supérieure de Commerce, professeur à la Société commerciale pour l'étude des langues étrangères et à la Société pour l'Instruction élémentaire, Officier d'Académie.

1 volume in-16, cartonné toile anglaise. . . . . 3 fr.

Dans cette deuxième édition, l'auteur a considérablement augmenté les notions de syntaxe et donné toutes les expressions se rapportant aux phrases des devoirs. Ces additions, qui font du nouveau livre une grammaire complète et en aplanissent les difficultés, n'ont exigé qu'un léger remaniement qui n'a changé ni la disposition générale, ni le caractère de l'ouvrage. Certaines leçons ont été développées et renferment des observations nouvelles. L'ouvrage est accompagné d'un lexique.

Lectures Historiques Allemandes

TIRÉES DES MEILLEURS ÉCRIVAINS

Par Paul DURANDIN

Agrégé de l'Université, Examinateur au Collège Stanislas.

Programmes des classes de St-Cyr, de Rhétorique et de Philosophie.

1 volume in-16, cartonné toile. . . . . 4 fr. 50

Ce qui a le plus nui jusqu'ici aux langues vivantes, c'est que rien ne les relie au reste des études. L'auteur a eu l'intention d'en faire un élément actif de l'instruction du lycéen, de la relier à l'étude de l'histoire et de la géographie, d'en doubler du même coup l'intérêt, la facilité et l'utilité, d'en faire un enseignement vivant, portant sur des idées et des faits que les élèves étudient volontiers et qu'ils ont intérêt à bien connaître pour leurs examens.

Cours d'Algèbre

Par **Henri NEVEU**
Agrégé de l'Université. Professeur de mathématiques à l'école Lavoisier.

A l'usage des classes de Mathématiques élémentaires de l'Enseignement moderne, des candidats à l'École de Saint-Cyr et au professorat des Écoles normales.

DEUXIÈME ÉDITION, conforme aux derniers programmes

1 vol. in-8, avec figures dans le texte. **8** fr.

Dans ce cours d'algèbre, M. Neveu s'est efforcé de suivre un ordre méthodique et a cherché, en débarrassant certaines questions de ce qu'elles ont d'aride, à mettre le plus de clarté possible dans les démonstrations, tout en maintenant leur rigueur mathématique. La *deuxième édition* que nous publions aujourd'hui est conforme aux nouveaux programmes. La théorie des nombres négatifs est traitée dès le début du cours, et les premiers chapitres ont été modifiés en ce sens.

Cours préparatoire au Certificat d'Études Physiques, Chimiques et Naturelles (P. C. N.)

Cours élémentaire de Zoologie, par Rémy Perrier, maître de conférences à la Faculté des sciences de Paris, chargé du cours de zoologie pour le certificat d'études P. C. N. 1 vol. in-8° avec 695 figures dans le texte, relié toile. **10** fr.

Ce livre a pour base le cours professé depuis cinq ans par l'auteur, devant les étudiants du P. C. N. C'est à ces mêmes étudiants qu'il s'adresse, mais aussi à tous ceux qu'intéresse l'étude des sciences naturelles et des lois de l'évolution des êtres vivants. Il donne un résumé précis de l'état actuel de la zoologie moderne, et convient à tous ceux qui ne peuvent aborder l'étude des grands traités de zoologie. — L'ouvrage est richement illustré; il ne comporte pas moins de 695 figures, comprenant ensemble plus de 1100 dessins.

Traité des Manipulations de Physique, par B. C. Damien, professeur de physique à la Faculté des sciences de Lille et R. Paillot, agrégé, chef des travaux pratiques de physique à la Faculté des sciences de Lille. 1 vol. in-8° avec 246 figures. . . . . 7 fr.

Ce Traité s'adresse à la fois aux candidats au certificat P. C. N. et aux candidats à la licence et à l'agrégation. Il se distingue des ouvrages du même genre qui existent déjà en France, en ce qu'il renferme un grand nombre de manipulations qui se font couramment dans les universités étrangères et qu'on néglige trop dans notre enseignement pratique. A ce titre, il comble une lacune regrettable.

Éléments de Botanique, par Ph. Van Tieghem, membre de l'Institut, professeur au Muséum d'histoire naturelle. *Troisième édition*, revue et augmentée. 2 vol. in-16 de 1170 pages avec 580 figures, cartonnés toile. . . **12** fr.

L'auteur a fait tous ses efforts pour mettre cette nouvelle édition au courant de tous les progrès accomplis en Botanique. De là, une augmentation de cent cinquante pages qui, jointe à de nombreuses corrections et modifications de détail, fait de cette édition un ouvrage véritablement nouveau.

Éléments de Chimie organique et de Chimie biologique, par W. Œchsner de Coninck, professeur à la Faculté des sciences de Montpellier. 1 vol. in-16 . . 2 fr.

Éléments de Chimie des métaux, par W. Œchsner de Coninck, professeur à la Faculté des sciences de Montpellier. 1 vol. in-16 . . . . 2 fr.

45539. — Imprimerie LAHURE, rue de Fleurus, 9, à Paris.