RAUSEN[illegible]GER

MECHANIK

1

LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

Dr. OTTO RAUSENBERGER.

ERSTER BAND.

MECHANIK DER MATERIELLEN PUNKTE.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

Vorwort.

In dem Werke, dessen ersten Teil ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, beabsichtige ich eine zusammenhängende, systematische und übersichtliche Darstellung des Gesamtgebietes der analytischen Mechanik vorzutragen. Durch die Bezeichnung „analytisch" sollen synthetische Betrachtungen da, wo sie zur Vereinfachung und Veranschaulichung der Untersuchung beitragen, keineswegs ausgeschlossen werden, wenn auch die analytische Behandlung vorherrscht; es soll nur durch diese seit Lagrange üblich gewordene Benennung die mathematisch-physikalische, theoretische Mechanik von der technischen und elementaren unterschieden werden.

Die Mechanik kann nach der rein mathematischen Seite hin (Kinematik oder Phoronomie) ausgebildet werden, wie dies in neueren Abhandlungen und Lehrbüchern mehrfach geschieht. Bei der noch unvollständigen systematischen Durchbildung und der immerhin nur sekundären Wichtigkeit dieses Wissenszweiges glaubte ich ihn mehr als Hilfsmittel, nicht als Selbstzweck behandeln zu sollen. Als eigentliche Aufgabe der Mechanik erscheint hiernach die mathematische Behandlung der Vorgänge in der Natur, soweit sie einer solchen zugänglich sind.

Die Aufgabe eines Lehrbuchs ist es meiner Ansicht nach nicht, das gesamte vorhandene, sehr umfangreiche Material dem Leser zugänglich zu machen. Ein Werk, welches in diesem Sinne angelegt ist, kann wohl als Nachschlagebuch für den Forscher von grofsem Werte sein, allein es wird nicht leicht vollständig durchgearbeitet werden. Andrerseits soll ein Lehrbuch auch kein Elementarwerk sein, welches dem Leser nur die ersten Anfangsgründe einer Wissenschaft vorführt. Vielmehr wird ein Lehrbuch im eigentlichen Sinne eine systematisch angeordnete, von den ersten Grundlagen bis zu den tieferen Forschungen fortschreitende, immer nur das Wesentliche ins Auge fassende Darstellung zu geben haben. Alles weniger Wichtige kann dem Spezialstudium überlassen bleiben, für welches gerade auf dem Gebiete der Mechanik vorzügliche Werke existieren.

Hiermit soll nicht gesagt sein, dafs ein Lehrbuch blofs allgemeine Untersuchungen zu geben habe. Es ist eine bekannte Erfahrung, dafs nichts das Studium so wenig fördert und namentlich den Anfänger so sehr abschreckt, wie die zu frühzeitige Beschäftigung mit allzu abstrakten Problemen. Was einmal an einem Beispiele klar durchdacht wurde, bietet auch in der Verallgemeinerung keine Schwierigkeit dar; ging doch auch die historische Entwicklung der Wissenschaft immer vom Speziellen aus, um dann zum Allgemeinen fortzuschreiten. Aus diesem Grunde stelle ich das d'Alembert'sche Prinzip und die daran anknüpfenden Untersuchungen über Differentialgleichungen nicht an den Anfang, sondern erläutere zuerst die sehr einfachen Grundbegriffe an spezielleren Beispielen. Wenn dabei einige Wiederholungen nötig werden, so dürfte dies für das Studium kein Nachteil sein.

Bei der Auswahl dieser Beispiele aus dem Gebiete der Physik, Astronomie und Geophysik wurde sorgfältig darauf geachtet, dafs nur wirklich wissenswerte Dinge zur Behandlung kamen; blofse Übungen im Integrieren wurden nicht aufgenommen. Dabei erwies es sich als wünschenswert, auch ältere Untersuchungen, welche in neueren Werken auf unverdiente Weise vernachlässigt werden, wieder an die richtige Stelle zu rücken. So wurde die planetarische Störungstheorie, welche durch die Astromechanik von Israël-Holtzwart bereits zugänglicher geworden ist, bis zu den merkwürdigen Laplace'schen Relationen durchgeführt; mufs es doch als ein bedenklicher Mangel empfunden werden, dafs gerade diese astromechanischen Untersuchungen, welche vielleicht die schönste und lohnendste Anwendung der Mathematik bilden, bisher einem grofsen Teile der Mathematiker unbekannt geblieben sind.

Ein Umstand, welcher das Studium vieler Werke sehr erschwert, besteht darin, dafs sie allzu viele Spezialkenntnisse voraussetzen. Selbstverständlich kann niemand an ein eingehenderes Studium der Mechanik herantreten, der sich nicht mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik ausgerüstet und im mathematischen Denken und Auffassen bereits einige Übung erworben hat. Aber es giebt doch eine Menge von Einzelheiten, wie bestimmte Integrale ganz besonderer Art, Reihenentwicklungen u. s. w., die selbst ein kenntnisreicher Mathematiker nicht immer gegenwärtig hat und die in anderen Werken oft nur schwierig aufzufinden sind. Aus diesem Grunde habe ich mich entschlossen, alle Hilfsresultate, besonders aber solche, die speziell zur Verwendung in der Mechanik bestimmt sind, vollständig zu entwickeln.

Für den Studierenden dürfte es vorteilhaft sein zu wissen, welche Vorkenntnisse er zum Studium der Mechanik mitbringen mufs, weshalb hierüber einige Andeutungen folgen mögen. In erster Linie steht die elementare Differential- und Integralrechnung, einschliefslich der Anfangsgründe der Differentialgleichungen. Von besonderer Wichtigkeit ist die Sicherheit im Operieren mit partiellen Differentialquotienten. Die Ausführung von Integralen und Differentialgleichungen habe ich meistens nur kurz angegeben; will man die oft etwas umständliche Durchrechnung vermeiden, so kann man sich durch Differentiation von der Richtigkeit überzeugen. Die weitergehenden Untersuchungen über totale und partielle Differentialgleichungen habe ich, soweit sie für die Mechanik in Betracht kommen, in die Darstellung aufgenommen. Von der analytischen

Geometrie sind namentlich die Sätze über Koordinatentransformation und die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen wichtig; von der Theorie der Kurven und Flächen zweiter Ordnung wird kaum mehr als die Kenntnis ihrer Gleichungen verlangt. Auch ist einige Kenntnis aus der Theorie der Tangenten und Normalen sowie der Krümmung bei Kurven und Flächen unerläſslich*). Aus der Lehre von den Gleichungen und den Determinanten sowie der Funktionentheorie gelangen auch nur die Anfangsgründe zur Verwendung. Elliptische Funktionen und Variationsrechnung sind nur für einige, allerdings wichtige Spezialprobleme notwendig; das Studium wird durch mangelnde Kenntnis dieser Gebiete nicht unmöglich gemacht. Überhaupt ist darauf Rücksicht genommen, daſs der Leser, welcher nur das Allerwichtigste aus der Mechanik kennen zu lernen wünscht, etwa behufs einer ersten Einführung, die komplizierteren Partieen überschlagen kann, ohne befürchten zu müssen, den Zusammenhang zu verlieren. So können z. B. §§ 4, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 23, 26—34, 38, 39, 46, 47, 48, 49 und noch manches Andere wohl ausgelassen werden.

Die naturgemäſseste Einteilung der Mechanik ist die schon von Euler angewandte: wir unterscheiden die Mechanik der materiellen Punkte und die der zusammenhängenden Körper. Kinematik, Statik und Dynamik können nur bei einzelnen Zweigen die Einteilung begründen. Eine Art Zwitterstellung nimmt die Potentialtheorie ein, insofern sie die Attraktion zusammenhängender Massen auf einzelne materielle Punkte behandelt; es schien mir zweckmäſsig, sie dem ersten Teile zuzuweisen.

Der zweite Teil wird enthalten: die Mechanik der starren Systeme, der elastisch festen Körper, die Hydro- und Aëromechanik; die drei letzten Abschnitte sollen sich, unter Rücksicht auf die vorhandenen ausgezeichneten Spezialwerke, auf die wesentlichsten Punkte beschränken.

Ausgeschlossen bleibt die Molekularmechanik, da dieselbe zur Zeit noch nicht diejenige Entwicklung erlangt hat, die sie zur Aufnahme in ein Lehrbuch geeignet machte. Im allgemeinen war ich bestrebt, dasjenige Material zusammenzubringen, welches dem Bedürfnisse des eigentlichen Mathematikers entspricht.

Bei der Behandlung einer Wissenschaft wie der Mechanik, welche in ihren wichtigsten Teilen als abgeschlossen anzusehen ist, wird der Verfasser mehr eine übersichtliche Darstellung des Vorhandenen, als neue Leistungen ins Auge zu fassen haben. Vor Allem muſste den Grundlagen eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden, da erfahrungsmäſsig gerade hier noch manche Unklarheit herrscht. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen wurde einer eingehenden Diskussion unterzogen und dann in möglichst einfacher Weise begründet.

Ältere und neuere Lehrbücher der Mechanik, wie diejenigen von Euler, Lagrange, Poisson, von Duhamel, Kirchhoff, Schell,

*) Die einfachsten Sätze in: Joachimsthal, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung“ genügen vollkommen.

Somoff und zahlreichen Anderen wurden neben Originalabhandlungen und spezielleren Werken selbstverständlich vielfach benutzt; auch den im Sommer 1874 gehörten Vorlesungen von Königsberger verdanke ich manche Anregung. Die Litteraturnachweise habe ich auf das Wichtigste beschränkt, da andere Werke hierin Wertvolles bieten.

Bei der Ausarbeitung des Werkes wurde ich durch meinen Bruder Julius wesentlich unterstützt; derselbe übernahm die Bearbeitung mehrerer Partien des vierten Abschnittes (das Meiste von §§ 35, 36, 37, 38, 40) und leistete mir auch sonst wichtige Hilfe.

Frankfurt a. M., im Januar 1888.

Dr. **Otto Rausenberger.**

Inhaltsverzeichnis des ersten Bandes.

Dritter Abschnitt.

Die Prinzipien der Mechanik und die Differentialgleichungen der Bewegung in allgemeiner Behandlung.

Vierter Abschnitt.

Das Potential.

Einleitung.

Die Formen der menschlichen Anschauung sind Raum und Zeit; der Raum erscheint als dreifach, die Zeit als einfach ausgedehnt. Beide können, von ihrem konkreten Inhalte losgelöst, zum Gegenstande wissenschaftlicher Untersuchung gemacht werden. Die Lehre vom Raume ist die Geometrie; die Zeit giebt bei ihrer einfachen Ausdehnung zu keiner besonderen Wissenschaft Veranlassung. Die Vereinigung von Raum und Zeit liefert die Mechanik.

Schon die Geometrie mufs der Anschauung die Vorstellung entnehmen, dafs ein Körper seinen Ort ändern kann, ohne selbst dabei eine Änderung zu erleiden; wir benutzen diese Vorstellung, dafs ein Teil des Raumes im Gesamtraume eine Ortsänderung erfahren, sich bewegen kann, fortwährend in der Mechanik. Da ein Körper als Inbegriff der in ihm enthaltenen Punkte anzusehen ist, so können wir die Fundamentalaufgabe der Mechanik dahin aussprechen: es soll angegeben werden, welchen Ort ein als beweglich gedachter Punkt zu einer bestimmten Zeit einnimmt. Bedienen wir uns insbesondere der Hilfsmittel der analytischen Geometrie, wobei wir fast immer die rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten anwenden wollen, so können wir die Bewegung eines Punktes dadurch vollständig beschreiben, dafs wir seine Koordinaten als Funktionen der Zeit ausdrücken. Wir bezeichnen durchgehends die Zeit, gemessen nach einer willkürlichen Einheit von einem willkürlichen Anfangspunkte aus, mit t; alsdann geben drei Gleichungen:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

oder in impliziter Form:

$$F_1(x, y, z, t) = 0, \quad F_2(x, y, z, t) = 0, \quad F_3(x, y, z, t) = 0$$

die Bewegung des Punktes vollständig an. Diese Behandlungsweise der Mechanik heifst die analytische. Man könnte nun, analog wie in der analytischen Geometrie vorgehend, die Bewegungen nach der analytischen Form der Funktionen f und F untersuchen; an die Spitze könnte etwa der Fall gesetzt werden, dafs die F oder f algebraische Funktionen sind und die algebraischen Bewegungen könnten dann weiter nach dem Grade der bestimmenden Gleichungen eingeteilt werden. Eine solche Mechanik wäre eine rein mathematische, der analytischen Geometrie durchaus äquivalente Disziplin. Aber thatsächlich hat die Mechanik, wenigstens in früherer Zeit, eine ganz andere Entwicklung genommen; aus der Naturwissenschaft und der technischen Praxis hervorgegangen, hat sie sich mehr praktischen Zielen zugewandt und sich in erster Linie die Aufgabe gestellt: die in der Natur vorkommenden Bewegungen genau oder wenigstens annäherungsweise zu beschreiben und aus möglichst einfachen Grundgesetzen abzuleiten. Doch sind hiermit rein theoretische Spekulationen, welche den Vorkommnissen in der Natur nicht entsprechen, keineswegs ausgeschlossen. Infolge dieser eingeschlagenen Richtung nimmt die Mechanik eine Zwitterstellung ein: sie gehört dem Inhalte nach zum gröfsten Teile der Physik, der Behandlungsweise nach der Mathematik an. Es wird in der Folge eine unserer wichtigsten Aufgaben sein, die physikalischen Grundlagen von den mathematischen Deduktionen scharf zu trennen und insbesondere die ersteren möglichst genau zu präzisieren.

Ergänzend mufs bemerkt werden, dafs der rein mathematische Teil der Mechanik, die sog. Kinematik oder Phoronomie, in neuerer Zeit zum Gegenstande zahlreicher Forschungen gemacht worden ist. Doch beziehen sich diese weniger auf solche systematisch-analytische Untersuchungen, wie die oben angedeutete, als auf die Betrachtung von Punktesystemen, welche wirklichen Vorkommnissen mehr oder weniger entsprechen.

Wir halten uns bei der Auswahl des Stoffes mehr an die ältere Auffassungsweise und bringen kinematische Untersuchungen nur als Einleitung zu den eigentlich mechanischen.

Erster Abschnitt.

Die freie Bewegung materieller Punkte.

§ 1.

Mathematische Fundamentalbegriffe.

1. Wir haben über die Funktionen:

$$x = f_1(t),\quad y = f_2(t),\quad z = f_3(t), \tag{1}$$

welche die Bewegung eines Punktes bestimmen, keinerlei Voraussetzungen gemacht. Es ist keineswegs nötig, dafs es analytische Functionen sind; es soll lediglich durch sie jedem t ein bestimmtes x, y, z zugeordnet sein. Falls die f formell mehrdeutige Funktionen sind, so mufs einer der Werte als der allein zulässige fixiert werden. Wir entnehmen nun der Anschauung die Thatsache, dafs ein Punkt, welcher sich vom Punkte A nach dem Punkte B bewegt, eine zusammenhängende Linie zwischen beiden beschreibt, nicht sprungweise von einer Stelle zur andern gelangt. Dieses Axiom trägt keinen physikalischen Charakter, es beruht in dem Wesen unserer Anschauung. Die Funktionen f ändern sich übrigens nicht allein nicht sprungweise, sondern dies gilt auch erfahrungsmäfsig für ihre Differentialquotienten, einzelne Punkte ausgenommen; wir betrachten f nebst seinen Differentialquotienten im Folgenden als stetig.

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) die Gröfse t, so erhält man zwei Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, z) = 0,\quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

welche die durchlaufene Bahn, auch Trajektorie genannt, darstellen. Wir bezeichnen in der Folge die Länge der durchlaufenen Strecke, von einem willkürlichen Anfangspunkte an gemessen, mit s und geben ihr den Namen Weg.

2. Ist die Bahn des bewegten Punktes eine Gerade und legt er in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück, so nennt man den in der Zeiteinheit von ihm zurückgelegten Weg seine Geschwindigkeit; dieselbe wird meistens durch v bezeichnet. Ist s der in der Zeit t zurückgelegte Weg, so folgt:

$$v = \frac{s}{t}. \tag{3}$$

Ist die Bahn nicht gerade, sind die in gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken nicht gleichbleibend, so verstehen wir unter der Geschwindigkeit zur Zeit t die unendlich kleine Wegstrecke ds, welche von diesem Zeitpunkte ab in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegt wird, dividiert durch die letztere; es ist also:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{4}$$

Infolge der vorausgesetzten Stetigkeit der Bewegung stellt $\frac{ds}{dt}$ einen ganz bestimmten Grenzwert dar, einzelne Punkte allenfalls ausgenommen. Da $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist, so haben wir:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt}} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{5}$$

Über das Vorzeichen der rechts stehenden Wurzelgröſse ist das Folgende zu bemerken. Jede einfache Kurve kann in doppeltem Sinne durchlaufen werden; den einen Sinn kann man willkürlich als den positiven festsetzen, so daſs s zunimmt, wenn man sich nach ihm in der Kurve bewegt. Hierdurch ist auch das Zeichen von $v = \frac{ds}{dt}$ eindeutig bestimmt und das Zeichen der rechten Seite von (5) ist dem entsprechend zu wählen.

Der Geschwindigkeit kommt in jedem Punkte der Bahn eine bestimmte Richtung zu, nämlich die der Tangente der Bahnkurve in dem fraglichen Punkte, in dem Sinne genommen, in welchem die Bewegung stattfindet. Wir bestimmen sie durch die Kosinus der Winkel (s, x), (s, y), (s, z), welche sie mit den positiv gerichteten Koordinatenachsen bildet. Es ist

$$\cos(s, x) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(s, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(s, z) = \frac{dz}{ds} \tag{6}$$

oder

$$\cos(s, x) = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \quad \text{u. s. w.,} \tag{7}$$

wo der Nenner dasselbe Zeichen hat, wie die rechte Seite von (5).

3. Sowie wir die Bewegung eines Punktes durch die Bewegung seiner Projektionen auf die Koordinatenachsen bestimmen, können wir auch seine Geschwindigkeit der Gröſse und Richtung nach durch die Geschwindigkeit der Projektionen des Punktes ausdrücken, also durch die Gröſsen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Es sind aber die Projektionen von $\frac{ds}{dt}$ auf die x, y, z-Achse:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{ds}{dt}\cos(s, x) = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} \cdot \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{dt}, \\ &\frac{ds}{dt}\cos(s, y) = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{ds}{dt}\cos(s, z) = \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

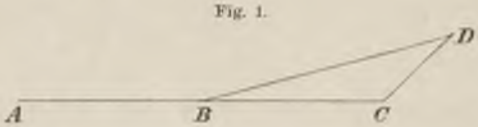
Die Projektionen der Geschwindigkeiten auf die Koordinatenachsen sind also identisch mit den Geschwindigkeiten der Projektionen auf die Koordinatenachsen. Man nennt dieselben die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Koordinatenachsen.

4. Ist die Bahn geradlinig, so bezeichnet man, falls die Geschwindigkeit ungleichförmig ist, deren Zuwachs in einem Zeitteilchen, dividiert durch dieses, als Beschleunigung; eine Verringerung der Geschwindigkeit wird als negative Beschleunigung aufgefafst. Wir haben für die Beschleunigung:

$$\frac{d\frac{ds}{dt}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{9}$$

5. Ist die Bahn krummlinig, so mufs der Begriff der Beschleunigung modifiziert werden. Befinde sich (Fig. 1) der bewegte Punkt zur Zeit t im Punkte A, zur Zeit $t + dt$ in B, so ist das als geradlinig zu betrachtende Bahnelement $AB = ds$. Wäre die Geschwindigkeit und ihre Richtung konstant, so würde der Punkt im nächsten Zeitmomente dt die Strecke $BC = AB$ in der Verlängerung von AB zurücklegen. In Wirklichkeit gelange aber der Punkt, infolge der Ungleichmäfsigkeit der Geschwindigkeit und ihrer Richtung, nach D. Dann bezeichnen wir den Quotienten aus der Strecke CD und dt^2 als die Beschleunigung des Punktes*), während die Richtung von CD die Richtung der Beschleunigung markiert. Die Quotienten der Projektionen von CD auf die Koordinatenachsen und dt^2 nennen wir die Komponenten der Beschleunigung. Die Komponente nach der x-Achse ist:

Fig. 1.



$$\frac{x + dx + dx + d^2x - (x + 2dx)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

die Komponenten nach der y-, resp. z-Achse sind:

$$\frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Die Komponenten der Beschleunigung sind also den Beschleunigungen der Projektionen des Punktes auf die Koordinatenachsen gleich. Die Gesamtbeschleunigung ist demnach ihrem absoluten Werte nach:

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}; \tag{10}$$

ihre Richtungskosinus sind:

---

*) Wenn BC von der ersten Ordnung unendlich klein ist, so wird die Abweichung CD bei stetiger Bewegung im allgemeinen unendlich klein von der zweiten Ordnung sein, wie dies auch die folgenden Ausdrücke für die Komponenten zeigen.

$$(11)\qquad \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},\quad \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},\quad \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}.$$

Es ist zu bemerken, dafs die Gröfsen

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\quad \text{und}\quad \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sind, wie aus ihrer Bedeutung hervorgeht, weshalb wir auf den leicht zu erbringenden analytischen Nachweis verzichten.

6. Die Änderung der Geschwindigkeit und ihrer Richtung läfst sich noch in anderer, sehr instruktiver Weise darstellen. Die drei unendlich benachbarten Punkte A, B, D der Bahnkurve bestimmen eine Ebene, die Krümmungs- oder Schmiegungsebene dieser Linie für Punkt A. Errichtet man auf der Kurve in B und D Normalen, welche in der Krümmungsebene liegen, so giebt deren (als gleich zu betrachtende) Länge bis zum Schnittpunkte den ersten Krümmungsradius ϱ für die Stelle A. Da die Bewegung während der in Betracht kommenden Momente in die Krümmungsebene fällt, so genügt es, die Projektionen (Komponenten) von DC auf die Tangente und die oben festgesetzte Normale der Kurve, dividiert durch dt^2, anzugeben, um die Änderung der Geschwindigkeit nach Gröfse und Richtung vollkommen zu bestimmen. Die Komponente nach der Tangente ist offenbar $\frac{d^2s}{dt^2}$; in der That haben wir:

$$(12)\qquad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}\cdot\left[\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\right.$$

$$\cdot\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}+\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}$$

$$\left.+\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}\right],$$

wo die Klammer den Kosinus des Winkels zwischen der Tangente und der Richtung der Beschleunigung bezeichnet*). $\frac{d^2 s}{dt^2}$ heifst die Tangentialbeschleunigung des Punktes. Um die Gröfse der Komponente nach der Normalen, die Normal- oder Zentripetalbeschleunigung, zu finden, müssen wir (Fig. 2) DE bestimmen und durch dt^2 dividieren. Es ist aber bei Vernachlässigung unendlich kleiner Gröfsen höherer Ordnung

Fig. 2.

$$DE = BC \sin DBC = BC \sin BOD,$$

und da

$$\sin BOD = \frac{BC}{\varrho}$$

ist,

$$DE = \frac{BC^2}{\varrho},$$

woraus die Zentripetalbeschleunigung

$$(13) \qquad = \frac{v^2}{\varrho}$$

folgt. Dieselbe hängt also nur von dem ersten Krümmungsradius und der Geschwindigkeit ab.

7. Die analytische Ableitung des gefundenen Resultates ist etwas umständlicher. Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser**) ist

$$(14) \qquad \varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{d s^2}\right)^2}},$$

während die Richtungskosinus desselben

$$(15) \qquad \varrho \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \varrho \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \varrho \frac{d^2 z}{ds^2}$$

sind. Für die Projektion der Gesamtbeschleunigung auf die Richtung des Krümmungshalbmessers haben wir demnach

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \cdot \frac{\varrho \frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \varrho \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \varrho \frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}$$
$$= \varrho\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

oder, da

---

*) Sind α_1, β_1, γ_2, und α_2, β_2, γ_2 die Richtungskosinus zweier Geraden, so ist der Kosinus des Winkels φ zwischen beiden Geraden bekanntlich:

$$\cos\varphi = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2.$$

**) S. z. B. Joachimsthal, a. a. O., p. 15 u. 16.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt},$$

also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$

ist,

$$= \varrho \left\{ \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \right] \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \left[\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right] \frac{d^2s}{dt^2} \right\}$$

oder, da aus

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \tag{16}$$

durch Differentiation

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0 \tag{17}$$

folgt,

$$= \frac{\varrho}{\varrho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{18}$$

8. Legt man durch einen festen Punkt O Halbgerade, welche den Geschwindigkeitsrichtungen eines bewegten Punktes P jeweilig parallel sind, und trägt auf ihnen von O aus den entsprechenden Geschwindigkeiten proportionale Strecken ab, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine Kurve, welche man mit ihrem Erfinder Hamilton den Hodographen der Bewegung nennt. Geht die Bewegung in einer Ebene vor sich, so ist auch der Hodograph eine ebene Curve. Einer Schmiegungsebene der Bahnkurve entspricht eine Tangentialebene des Kegels, welcher von den durch O gelegten Halbgeraden gebildet wird. Eine Tangente des Hodographen giebt die Richtung der Beschleunigung für den entsprechenden Punkt an u. s. w.

Wir gehen auf die Theorie des Hodographen nicht weiter ein.

9. Ähnliche Betrachtungen wie über die Änderung der Geschwindigkeit lassen sich über die Änderung der Beschleunigung anstellen u. s. w. Man gelangt so zu den Beschleunigungen höherer Ordnung, welche erst in neuerer Zeit untersucht wurden. Man sehe hierüber Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Bd. 1, p. 544. Aus später ersichtlichen Gründen spielen jedoch in der Mechanik, welche sich mit den in der Natur vorkommenden Bewegungen beschäftigt, nur die Geschwindigkeit und die erste Beschleunigung eine wichtige Rolle, weshalb wir auf eine Behandlung der Beschleunigungen höherer Ordnung verzichten.

§ 2.

Physikalische Grundlagen.

1. Die physikalischen Gesetze, nach denen sich die Welt bewegt, sind zur Zeit durchaus noch nicht erforscht; wir sehen uns bei der Beschreibung der wirklichen Bewegungen fortwährend genötigt, zu näherungsweise richtigen, der Beobachtung entlehnten Ansätzen unsere Zuflucht zu nehmen. Trotzdem giebt es einige einfache Thatsachen, die sich aus dem Chaos der Erscheinungswelt klar hervorheben und sich bei allen Beobachtungen so durchaus bewährt haben, dafs man sie mit einer Wahrscheinlichkeit, die an Gewifsheit grenzt, als allgemeine Wahrheiten bezeichnen kann. Dieselben liegen immerhin nicht so unmittelbar zu Tage, dafs sie dem forschenden Menschen nicht lange verborgen geblieben wären; so ist das klassische Altertum und das Mittelalter nie über sie ins Klare gekommen. Erst durch Galilei, Newton u. A. sind sie entwickelt worden*). Wir schlagen zu ihrer Aufsuchung einen Weg ein, der nicht gerade der historische ist, aber sich sehr wohl dazu eignet, die in Frage kommenden Begriffe klar werden zu lassen.

2. Jeder Mensch besitzt die Fähigkeit, mit Hilfe seiner Glieder, z. B. der Arme, Gegenstände, die bisher in Ruhe waren, in Bewegung zu versetzen. Wir bezeichnen diese Fähigkeit als Kraft. Jede Kraftäufserung ist mit einer gewissen, unmittelbar als Muskelgefühl wahrnehmbaren Anstrengung verbunden, die gröfser oder kleiner sein kann. Wir haben so ein unmittelbares, wenn auch ganz rohes Mafs der Kraftäufserung in unserem Gefühle. Untersuchen wir nun an einem geeigneten Beispiele, in welcher Weise eine solche Kraftäufserung sich bemerklich macht. Es befinde sich etwa auf einer ruhigen Wasserfläche in der Nähe des Ufers ein Boot in Ruhe, und wir suchen es durch die Kraft des Armes vom Ufer abzustofsen. Das Boot wird durch eine anhaltende, gleichmäfsige Kraftanwendung thatsächlich in Bewegung gebracht; wie verhält es sich aber mit der erzeugten Geschwindigkeit?**)

Am nächsten würde für den unbefangenen Beurteiler wohl die Annahme liegen, dafs die erteilte Geschwindigkeit der Anstrengung proportional und — bei gleichförmiger Anstrengung — gleichbleibend sei, dafs insbesondere bei Aufhören des Druckes das Boot sofort wieder zur Ruhe komme. Dies widerspricht aber den Thatsachen durchaus. Ein gleich-

---

*) Eingehenderes über die historische Entwicklung der Grundlagen der Mechanik findet man u. a. in Jolly, Prinzipien der Mechanik, Stuttgart 1852; Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1877 (2. Aufl.); Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig 1883; Streintz, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik, Leipzig 1883.

**) Um die Betrachtung nicht unnötig zu komplizieren, nehmen wir an, dafs die Kraft allen Punkten des Bootes die gleiche Geschwindigkeit erteile. Wie dies zuwege gebracht werden kann, mag hier unerörtert bleiben.

bleibender Druck ruft keine gleichförmige Geschwindigkeit hervor; vielmehr bewegt sich das Boot anfangs sehr langsam, um nach und nach in immer raschere Bewegung überzugehen. Hört der Druck auf, so bleibt das Boot nicht stehen, sondern bewegt sich weiter. Die Geschwindigkeit ist also der angewandten Kraft nicht proportional. Vielfache Beobachtungen dieser Art führen, wenn man die Wirkung von Einflüssen berücksichtigt, die sich erst später präzisieren lassen, zu der Annahme, dafs Körper, auf welche keine Kräfte wirken, die sich aber einmal in Bewegung befinden, sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit in derselben Richtung weiter bewegen; dafs ferner durch eine Kraft eine Beschleunigung oder Verzögerung der vorhandenen Geschwindigkeit hervorgerufen wird. Wenden wir bei unserem Versuche verschiedene Kraftanstrengungen an, so finden wir, dafs die Beschleunigung mit der Kraft wächst und bei gleicher Kraft die gleiche bleibt. Wenn auch eine direkte, genauere Messung der Muskelkraft unthunlich ist, so führen doch mannigfache Umstände zu der Annahme, dafs die Beschleunigung *ceteris paribus* der Kraft proportional gesetzt werden kann.

3. Führen wir unseren Versuch an einem kleinen Boote und einem gröfseren Schiffe aus, so bemerken wir alsbald, dafs durch die gleiche Kraftäufserung das Schiff eine weit geringere Beschleunigung erfährt, als das kleinere Boot. Sei etwa die Beschleunigung des letzteren zehnmal gröfser als die des ersteren. Variieren wir nun die Kraft oder bringen wir sie auf andere Weise hervor, so bemerken wir, dafs das Verhältnis der Wirkungen immer das gleiche bleibt. Die Beschleunigung hängt also nicht blos von der angewandten Kraft, sondern auch von einer inhärenten Eigentümlichkeit des bewegten Körpers ab, die sich allen Kräften gegenüber in gleicher Weise geltend macht. Wir schreiben daher jedem Körper eine gewisse Masse m zu und sagen, dass die Beschleunigungen, welche zwei Körpern durch dieselbe Kraft erteilt werden, ihren Massen umgekehrt proportional seien. Es stellt sich heraus, dafs diese Massen dem Gewichte (wie es auf der Wage durch Vergleichung bestimmt wird) proportional sind, sodafs man Gewicht und Masse ohne Nachteil als gleichbedeutend gebrauchen kann.

Anmerkung 1. Diese Identifizierung von Gewicht und Masse wird vielfach nicht vorgenommen, da angeblich das Gewicht eines Körpers von der Stärke der Attraktion der Erde abhänge. In der That würde ein Gegenstand auf einer Federwage gewogen am Pole und am Äquator der Erde verschiedenes Gewicht zeigen. Allein dies kommt hier für uns nicht in Betracht. Die gewöhnlichen Gewichtsangaben, z. B. nach Kilogrammen u. s. w., beruhen alle nur auf einer Vergleichung mit dem Gewichte anderer Körper. Wiegt aber ein gewisses Stück Eisen an einer Stelle der Erde das Sechsfache von einem Liter Wasser, so wird dies Verhältnis auch auf dem Monde oder irgendwo sonst statthaben. Die Gewichte sind ebenso wie die Massen Verhältnisgröfsen, und der Identifizierung, die in neuerer Zeit gebräuchlich wird, steht nichts im Wege.

Anmerkung 2. Die Masse ist, wie Physik und Chemie lehren, etwas der Materie als solcher inhärentes. Vereinigt man zwei materielle Körper zu einem einzigen, so ist dessen Masse der Summe der Massen der Einzelkörper gleich; zerlegt man einen Körper in beliebige Teile, so ist die Summe der Massen dieser der ursprünglichen Masse gleich. Physikalische und chemische Änderungen lassen die Masse einer bestimmten Materie ungeändert.

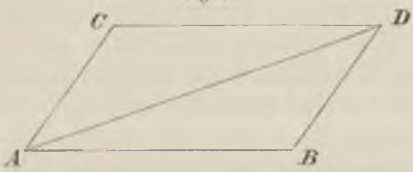
Die Erfahrung zeigt, dafs die Masse immer, wenn auch keineswegs ausschliefslich, von dem Volumen des Körpers abhängig ist; eine Masse ohne Ausdehnung lehrt sie uns nicht kennen. Trotzdem sehen wir uns in der theoretischen Mechanik immerfort genötigt, auch Punkten eine Masse beizulegen; wir werden sogar in den nächsten Abschnitten nur von der Bewegung solcher materiellen Punkte handeln. Möglicherweise ist diese Annahme blofs eine irreal hypothetische, die nur insofern praktische Bedeutung hat, als man bei vielen mechanischen Problemen sich die Masse mancher Körper genau oder näherungsweise in einen Punkt verlegt denken darf. Möglicherweise sind aber die Atome, aus welchen die moderne Naturwissenschaft sich die ganze Welt aufgebaut denkt, als wirkliche materielle Punkte anzunehmen.

4. Der Begriff der Kraft, wie wir ihn eingeführt haben, ist für jeden Menschen ein unmittelbar gegebener; er ist psycho-physiologischer Natur und kann auf unbelebte Gegenstände nicht ohne Weiteres übertragen werden. Die Beobachtung zeigt nun, dafs in der leblosen Natur Bewegungen statthaben, welche mit der durch die Kraft des Armes hervorgerufenen unleugbare Ähnlichkeit besitzen. Ein fallender Stein bewegt sich z. B. mit gleichmäfsig wachsender Geschwindigkeit ungefähr gegen den Mittelpunkt der Erde hin; er würde sich ganz ebenso bewegen, wenn ein unserem Arm analoger Mechanismus ihn mit gleichbleibender Kraft nach dem Erdmittelpunkte ziehen würde, und ähnliche Vorkommnisse beobachten wir überall. Wir gelangen zu dem für die gesamte Mechanik fundamentalen Resultate, dafs die Erklärung der Bewegungsvorgänge in der Natur am einfachsten gelingt, wenn man das Vorhandensein von Kräften, welche der besprochenen analog wirken, substituiert. So schreibt man der Erde eine Anziehungskraft zu, die sie auf alle an ihrer Oberfläche befindlichen Körper ausübt. Hierdurch soll in keiner Weise etwas über die metaphysische Natur dieser Kräfte ausgesagt werden; vielmehr handelt es sich lediglich um die Erlangung eines einfachen, durchsichtigen, mathematischen Ausdrucks für die Bewegungserscheinungen. Wenn wir z. B. sagen, dafs von einem Punkte eine Kraft ausgehe, welche nach ihm gerichtet und dem Kubus der Entfernung proportional sei, so heifst das, dafs sämtlichen materiellen Punkten eine Beschleunigung nach dem betreffenden Punkte hin erteilt wird, die der Masse derselben umgekehrt, dem Kubus der Entfernung von jenem Punkte direkt proportional ist.

5. Die gegebene Einführung der Kräfte bedarf noch einer wichtigen Ergänzung; es fragt sich, in welcher Weise sich ein Körper bewegt, wenn mehrere Kräfte, zu denen noch eine ursprüngliche Geschwindigkeit hinzukommen kann, zusammenwirken. Die Beantwortung dieser Frage liefert folgender Satz, der, durch zahlreiche Beobachtungen bewahrheitet, als vollkommen feststehend angesehen werden kann:

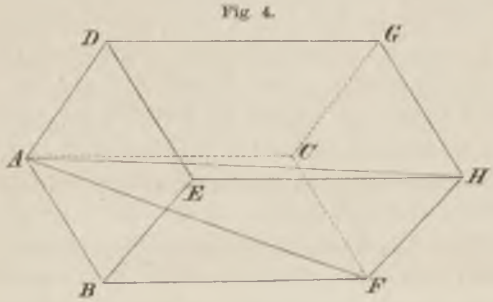
Wenn ein materieller Punkt A (Fig. 3) zwei Einflüssen ausgesetzt ist, von denen jeder einzelne ihn mit konstanter Geschwindigkeit in einer bestimmten Richtung fortführen würde, so daſs er in einer bestimmten Zeit durch den einen von A nach B, durch den andern von A nach C geführt würde, so durchläuft er in derselben Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Diagonale AD des durch A, B, C bestimmten Parallelogramms (Parallelogramm der Geschwindigkeiten). Wir nennen AD die Resultante der Geschwindigkeitskomponenten AC und AB, welche durch die ihnen proportionalen Strecken der Gröſse und Richtung nach repräsentiert werden. Sind die erteilten Geschwindigkeiten nicht gleichförmig, so darf der Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten doch auf unendlich kleine Teile der Bewegung angewandt werden. — Sind mehr als zwei Einflüsse vorhanden, so kann man sie nach und nach in derselben Weise vereinigen; daſs die Reihenfolge hierbei ohne Einfluſs bleibt, ist leicht einzusehen.

Fig. 3.



Hat man insbesondere drei nicht in einer Ebene gelegene Geschwindigkeiten AB, AC, AD (Fig. 4) zusammenzusetzen, so kann man zuerst AB und AC zu der Parallelogrammdiagonale AF, dann AF mit AD zu AH vereinigen. Der Punkt durchläuft also in der fraglichen Zeit die Diagonale des durch $ABCD$ bestimmten Parallelepipedons (Parallelepipedon der Geschwindigkeiten).

Fig. 4.



Wir brauchen kaum hervorzuheben, daſs man sich auch umgekehrt eine vorhandene Geschwindigkeit durch mehrere verschieden gerichtete (Komponenten) ersetzt denken kann. Die in § 1, 2 gegebene mathematische Darstellung einer Geschwindigkeit durch ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen gewinnt hierdurch eine physikalische Bedeutung: die drei Komponenten sind thatsächlich der einfachen Geschwindigkeit äquivalent. In einem unendlich kleinen Zeitteilchen gelangt ein materieller Punkt infolge mehrerer Einflüsse dahin, wohin er gelangt sein würde, wenn diese aufeinander gefolgt wären.

6. Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten überträgt sich unmittelbar auf Beschleunigungen, also auf Kräfte; nur müssen wir uns auf infinitesimale Wegteile beschränken. Würde die eine Kraft den materiellen Punkt in einer sehr kleinen Zeit von A nach B, die andere von A nach C führen, so gelangt er nach dem Diagonalpunkte D. Die Diagonale bestimmt also nicht nur die Richtung der resultierenden Kraft, sondern auch ihre Gröfse. Die Resultante verhält sich zu den beiden Einzelkräften wie $AD : AB : AC$. Die weitere Zusammensetzung und Zerlegung ist analog derjenigen der Geschwindigkeiten (Parallelogramm und Parallelepipedon der Kräfte). Die analytischen Komponenten der Beschleunigung (§ 1, 5) sind auch physikalisch betrachtet der Gesamtbeschleunigung äquivalent. Kräfte können genau wie Beschleunigungen zerlegt werden.

Fallen insbesondere die Richtungen zweier Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen in dieselbe Gerade, so summieren sie sich, falls sie den gleichen Richtungssinn haben; die kleinere ist von der gröfseren zu subtrahieren, falls sie entgegengesetzten Richtungssinn haben.

Man bezeichnet die Erfahrungsthatsache, dafs sich mehrere Geschwindigkeiten oder Kräfte in der besprochenen Weise vereinigen, ohne sich sonst zu modifizieren, auch als das Unabhängigkeitsprinzip.

7. Wir fassen die gewonnenen Resultate in die folgenden Sätze zusammen:

a) Ein materieller Punkt, auf den keine Kraft einwirkt, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in gerader Linie (Beharrungsgesetz).

b) Durch eine Kraft wird einem materiellen Punkte eine Beschleunigung erteilt, welche der Kraft direkt, der Masse des Punktes umgekehrt proportional ist.

c) Wirken mehrere Kräfte und eventuell das Beharrungsvermögen auf einen Punkt ein, so gelangt er innerhalb eines infinitesimalen Zeitteils dahin, wohin sie ihn (bei beliebiger Reihenfolge) nacheinander wirkend geführt hätten (Unabhängigkeitsprinzip).

Wirken auf einen materiellen Punkt x, y, z mit der Masse m Kräfte ein, deren Komponenten nach den Koordinatenachsen X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 u. s. w. sind, die wir uns resp. zu X, Y, Z vereinigt denken können, so genügt seine Bewegung den Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X_1 + X_2 + \cdots = X \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y_1 + Y_2 + \cdots = Y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z_1 + Z_2 + \cdots = Z. \end{cases}$$

Die Gröfsen X, Y, Z können von den jeweiligen Koordinaten des Punktes

(x, y, z), seinen Geschwindigkeitskomponenten, der Zeit und andern Variabeln abhängen.

8. Aus Vorstehendem gewinnen wir bereits einen Einblick in den mathematischen Charakter der mechanischen Untersuchungen. Da bei der Mehrzahl der Probleme die wirkenden Kräfte gegeben werden, diese aber Beschleunigungen hervorrufen, so erscheinen meistens die zu lösenden Aufgaben in Gestalt von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Von der Entwicklung der Theorie der letzteren hängt der mathematische Teil der Mechanik grofsenteils ab. Bei der Integration dieser Differentialgleichungen treten doppelt so viele Konstanten auf, als abhängige Variabeln vorhanden sind; diese sind zu bestimmen aus den sogenannten Anfangsbedingungen, d. h. aus der Lage und Geschwindigkeit der bewegten Punkte im Anfange der zu betrachtenden Bewegung oder ähnlichen Relationen.

9. Aufser den Gesetzen von 7., die wir durchgehends den folgenden Untersuchungen zu Grunde legen, existiert noch ein Weiteres, von dem wir mitunter abstrahieren werden. Schon bei unserem Fundamentalversuche, mit dem wir die Theorie der Kräfte einleiteten, können wir bemerken, dafs bei der Bemühung das Boot in Bewegung zu setzen auch unser Körper in Bewegung versetzt wird, aber in umgekehrter Richtung. Weitere Untersuchung des Gegenstandes führt zu dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung: Übt einer von zwei materiellen Punkten eine Kraftwirkung auf den andern aus, so geht von dem zweiten eine gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Wirkung auf den ersten aus *(actio par est reactioni)*. Die Beschleunigungen, welche sich die Körper gegenseitig erteilen, stehen daher im umgekehrten Verhältnis ihrer Massen.

10. Wir haben es bis hierher verschoben, einen der ersten Fundamentalbegriffe der Mechanik, die Zeit, einer eingehenderen Besprechung zu unterziehen, und ohne Weiteres angenommen, dafs die Zeit eine mefsbare Gröfse sei. Wie dies bei so vielen Fundamentalbegriffen der Fall ist, enthält auch dieser mehr Schwierigkeiten, als auf den ersten Blick erscheint. Wie gelangen wir zu einem sicheren und ursprünglichen Mafse der Zeit? Von einem direkten Zusammenlegen zweier Zeitteilchen, wie man zwei Strecken behufs Vergleichung aufeinanderlegt, kann keine Rede sein, und von irgend zwei Vorgängen kann man nicht behaupten, dafs sie gleiche Dauer besäfsen, wenn man nicht vorher schon ein Zeitmafs besitzt; es hat also den Anschein, dafs man sich bei den Versuchen der Zeitmessung immer im Zirkel bewegt und manche Gelehrte halten es für unmöglich, zu einer solchen mit Sicherheit zu gelangen.

In Wirklichkeit ist die Sache so verzweifelt nicht. Wir besitzen von Natur eine Empfindung für die Länge von Zeitteilen und haben hierdurch ein zwar ganz rohes, aber doch direktes Mafs der Zeit; auf keine andere Weise gelangen wir zu einem solchen. Es ist nur unsere Aufgabe, von dieser höchst unvollkommenen Messungsweise ausgehend zu genaueren fortzuschreiten. Hierzu giebt es nun freilich keinen direkten, unfehlbar sicheren

Weg. Allein dieser ist auch bei keiner andern Erkenntnis vorhanden; gewisse Gründe der Wahrscheinlichkeit müssen immer in Betracht gezogen werden.

Wir können etwa das folgende Verfahren wählen. Die unmittelbare Zeitempfindung genügt zur Erkenntnis, daſs ein Pendel, welches z. B. eine Uhr reguliert und durch den Mechanismus der letzteren in Gang erhalten wird, näherungsweise isochrone Schwingungen ausführt; auch gelangen wir auf demselben Wege zur Annahme, daſs ein Tag dem andern an Dauer ziemlich gleich sei. Es liegt nahe, beide Beobachtungen zu vergleichen. Finden wir nun, daſs während einer Reihe von Tagen das Pendel zwischen je zwei Kulminationen der Sonne nahezu die gleiche Zahl Schwingungen ausführt, so wird unsere Vermutung des Isochronismus von Pendelschwingungen und Tagen fast zur Gewiſsheit. Allerdings könnten die Pendelschwingungen und ebenso die Tage ganz verschiedene Dauer haben, während doch jeder Tag dieselbe Zahl von Pendelschwingungen aufwiese. Da aber kein innerer Zusammenhang zwischen Tageslänge und Schwingungsdauer des Pendels ersichtlich ist, wäre es ein höchst auffallendes und unwahrscheinliches Zusammentreffen, daſs bei unregelmäſsiger Dauer der Einzelvorgänge ein solches Zusammenstimmen stattfinden sollte. Beobachtungen dieser oder ähnlicher Art, welche fortgesetzt verfeinert werden können, führen zu der Annahme, verschiedene Vorgänge, wie die eben betrachteten, mit der höchsten Wahrscheinlichkeit als isochron anzunehmen. Hat man einmal die Überzeugung gewonnen, daſs gewisse kongruente Vorgänge, wie Pendelschwingungen, immer dieselbe Zeit in Anspruch nehmen, so bedarf es keiner weiteren Erörterung, wie man dieselben als Hilfsmittel zur Vergleichung von Zeitteilen benutzen kann*).

11. Auch der Begriff des Raumes kann zu mancherlei Schwierigkeiten Veranlassung geben; indessen dürfen wir von diesen meistens voraussetzen, daſs sie bereits in der Geometrie zur Besprechung gelangen. Nur ein Punkt bedarf hier einer eingehenderen Betrachtung, den wir bis jetzt auſser acht gelassen haben.

Alle Ortsveränderungen, welche wir betrachten, sind relativ, nicht absolut. Es existiert kein Punkt im Weltall, von dem wir mit Sicherheit oder nur mit einiger Wahrscheinlichkeit behaupten könnten, daſs er

*) Wenn Streintz in dem oben angeführten Buche, welches zur eingehenderen Orientierung über die Gegenstände dieses Paragraphen besonders geeignet ist, es mit d'Alembert und Poisson für selbstverständlich hält, daſs identische Bewegungen, wie z. B. Pendelschwingungen, auch isochron sind, wodurch unmittelbar ein Zeitmaſs gegeben wäre, so kann sich dem der Verfasser nicht anschlieſsen. Wäre z. B. die Attraktionskraft der Erde nicht konstant, sondern würde sie sich von Pendelschwingung zu Pendelschwingung sprungweise ändern, so würden geometrisch kongruente Schwingungen verschiedene Zeit in Anspruch nehmen. Ohne ein schon vorhandenes Zeitmaſs ist die Identität von zwei Bewegungen gar nicht zu erkennen; denn erst durch Benutzung eines Zeitmaſses läſst sich die Kraft, welche die Bewegung hervorbringt, als unabhängig von der Zeit nachweisen.

unbewegt sei; es ist nicht möglich, im Raume ein festes Koordinatensystem aufzustellen, auf das alle Bewegungen bezogen werden. Nur die gegenseitigen Ortsänderungen eines Systems von Punkten können wir konstatieren. Wir fragen nun: wie vertragen sich die aufgestellten physikalischen Grundgesetze mit der blofsen Relativität der Bewegung?

Nehmen wir an, ein Punkt A bewege sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit in einer Geraden, falls ein bestimmtes Koordinatensystem als fest gedacht wird. Nun möge dieses Koordinatensystem selbst sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit so bewegen, dafs sämtliche Punkte des mit ihm fest zusammenhängenden Raumteils geradlinige, untereinander parallele Bahnen beschreiben. Die doppelte Bewegung, welche so Punkt A erhält, setzt sich nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu einer einzigen, wieder geradlinigen und gleichförmigen Bewegung zusammen. Galt also das Beharrungsgesetz für die Ruhelage des Koordinatensystems, so bleibt es auch für die beschriebene Bewegung desselben bestehen. Damit erfahren aber auch die Gesetze über die Wirkungsweise der Kräfte keine Änderung.

Ganz anders wird die Sache, wenn wir dem Koordinatensystem eine andere Bewegung (z. B. eine ungleich schnelle und eine ungleich gerichtete Verschiebung oder eine Drehung) beilegen. Dann verlieren das Beharrungsgesetz und damit auch die übrigen Bewegungsgesetze ihre Gültigkeit vollkommen. Wollen wir also die aufgestellten physikalischen Bewegungsgesetze beibehalten, so müssen wir die Hypothese zufügen, dafs das als fest angenommene Raumsystem absolut betrachtet keine andere Bewegung besitzt, als eine gleichförmig schnelle Parallelverschiebung*).

12. Die mefsbaren Gröfsen, welche in der Mechanik auftreten, lassen sich alle auf drei Elementargröfsen reduzieren, welche untereinander nicht vergleichbar sind: Länge**), Zeit und Masse. Behufs Messung dieser Gröfsen müssen willkürliche Einheiten angenommen werden; je nach Wahl derselben kann ein und derselbe Ausdruck durch sehr verschiedene Zahlenwerte dargestellt werden. Die gebräuchlichsten Einheiten sind gegenwärtig: Zentimeter, Sekunde (mittlerer Sonnenzeit) und Grammmasse, oder auch Meter, Sekunde und Kilogrammmasse. Für unsere

---

*) In sehr anregender Weise werden die hier zuletzt erörterten Fragen in der Schrift von C. Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie, Leipzig 1870, behandelt. Streintz (a. a. O.) hält schon die Hypothese eines absolut festen Bezugssystems für unzulässig und spricht das Beharrungsgesetz nur für die gegenseitige Bewegung zweier materiellen Punkte aus, welche beide keiner Kraftwirkung unterliegen. Allein jene Hypothese wird von ihm doch schon implizite gemacht, wenn er die physikalische Nachweisbarkeit einer Drehung darthut; ohne festes Bezugssystem ist eine absolute Drehung kein mathematisch bestimmter Begriff.

**) Alle übrigen geometrischen Gröfsen lassen sich durch Längen darstellen.

theoretischen Untersuchungen kommen diese Festsetzungen nicht in Betracht; dagegen werden wir bei den Anwendungen die Einheiten immer angeben.

Wichtiger für uns ist die Frage: in welcher Art hängt ein Ausdruck von den drei Elementargröfsen ab, und wie ändert er sich demgemäfs, wenn die Einheiten geändert werden?

Wir sagen, ein Ausdruck sei in seinen Variabeln homogen und von der k^{ten} Dimension, wenn er nach Multiplikation sämtlicher Variabeln mit einer beliebigen Gröfse n in das n^k-fache seines früheren Wertes übergeht. Auf dem Gebiete der Mechanik können nur Ausdrücke, welche in den Längengröfsen, Zeitgröfsen und Massengröfsen einzeln genommen homogen und von gleicher Dimension sind, in derselben Gleichung auftreten. Andernfalls würden Änderungen der Einheiten den Inhalt der Gleichung beeinflussen.

Um anzugeben, dafs ein Ausdruck in den Längengröfsen, den Zeitgröfsen und den Massengröfsen resp. von den Dimensionen k_1, k_2, k_3 sei, legen wir ihm das Symbol

$$l^{k_1}\, t^{k_2}\, m^{k_3} \tag{2}$$

bei, indem wir Länge, Zeit und Masse durch l, t, m bezeichnen. Werden die drei Mafseinheiten resp. durch ihr n_1, n_2, n_3-faches ersetzt, so nimmt ein Ausdruck (2) den $n_1^{k_1}$, $n_2^{k_2}$, $n_3^{k_3\,\text{ten}}$ Teil seines früheren Wertes an.

Den bisher eingeführten zusammengesetzten Ausdrücken kommen folgende Dimensionen zu:

Geschwindigkeit: $l\,t^{-1}$,
Beschleunigung: $l\,t^{-2}$,
Kraft: $l\,t^{-2}\,m$.

Dies leuchtet ein, wenn man die Einheiten dieser drei Gröfsen folgendermafsen definiert:

Die Einheit der Geschwindigkeit ist diejenige Geschwindigkeit, bei welcher ein Punkt in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurücklegt.

Die Einheit der Beschleunigung ist diejenige Beschleunigung, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um die Geschwindigkeitseinheit zunimmt.

Die Einheit der Kraft ist diejenige Kraft, welche der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung erteilt.

13. Man kann zwei Bewegungsvorgänge als ähnlich bezeichnen, wenn die sie bestimmenden Gleichungen identisch werden, nachdem man die drei Einheiten für eine der Bewegungen geeignet geändert hat. Nimmt man z. B. entsprechende Zeiten und Massen bei beiden Bewegungen als übereinstimmend an, giebt aber der einen k-fach gröfsere Längendimensionen wie der anderen, so müssen Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte bei der ersteren k-mal so grofs genommen werden wie bei der zweiten.

14. Wenn sich die Kräfte, welche auf ein System materieller Punkte einwirken, gegenseitig zerstören, so sagt man, das System befinde sich im

Gleichgewicht; die Punkte bewegen sich dann lediglich nach dem Beharrungsgesetze geradlinig mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

Der Teil der Mechanik, welcher die Bewegungen rein mathematisch, ohne Rücksicht auf die verursachenden Kräfte behandelt, heifst Kinematik oder Phoronomie. Die Lehre vom Gleichgewicht heifst Statik; die Lehre von der Bewegung, welche durch Kräfte, die sich nicht zerstören, zu stande gebracht wird, heifst Dynamik. Wir werden nicht, wie dies oft geschieht, unsere Darstellung der Mechanik in diese drei Teile zerlegen, da hierdurch zu häufig Gleichartiges getrennt, Ungleichartiges vereinigt wird. Nur in einzelnen Abschnitten wird sich diese Einteilung geltend machen.

§ 3.

Bewegung eines materiellen Punktes infolge einer konstanten und gleichgerichteten Kraft.

1. Die einfachste Art einer Kraft ist die konstante, gleichgerichtete Kraft; die Bewegung materieller Punkte im luftleeren Raume infolge der Anziehungskraft der Erde bietet das nächstliegende, bekanntlich von Galilei behandelte Beispiel hierfür; es mufs nur vorausgesetzt werden, dafs die Bewegung auf einem so engen Raume vor sich geht, dafs innerhalb desselben die Attraktion als gleichgrofs und gleichgerichtet angesehen werden kann. Die Erde zieht nach dem später zu erörternden Newton'schen Attraktionsgesetze verschiedene Körper mit einer Kraft an, die ihrer Masse proportional ist; da indessen nach dem Vorhergehenden die Beschleunigung der Masse umgekehrt proportional ist, so hebt sich die Masse ganz heraus und die Bewegung erscheint von ihr vollständig unabhängig.

2. Die Bewegung geht offenbar in einer Ebene vor sich, nämlich in derjenigen, welche der Richtung der Attraktion parallel ist und in der ein willkürlich gegebenes Bahnelement liegt. Stellen wir die x-Achse vertikal, die positive Seite nach oben gerichtet, die y-Achse horizontal und bezeichnen wir die in Metern ausgedrückte Beschleunigung*), welche die Schwerkraft dem materiellen Punkte in einer Sekunde erteilt, mit g, so haben wir, weil die Schwere die Koordinate x zu verkleinern strebt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0. \tag{1}$$

Die erste Integration giebt:

$$\frac{dx}{dt} = -gt + c, \quad \frac{dy}{dt} = C; \tag{2}$$

die beiden Konstanten c und C sind die Komponenten der Geschwindigkeit, welche der materielle Punkt zur Zeit $t = 0$ besitzt, wie man durch Einsetzen dieses Wertes erkennt. Die zweite Integration liefert

*) Für Berlin ist $g = 9{,}81278$, für Paris $g = 9{,}80896$; g hat als Beschleunigung die Dimension lt^{-2}.

$$x = -\frac{gt^2}{2} + ct + c_1, \quad y = Ct + C_1; \tag{3}$$

die Konstanten c_1 und C_1 sind die Koordinaten des Punktes zur Zeit $t = 0$. Wir können also den Ort des Punktes, sowie Gröfse und Richtung der Geschwindigkeit für eine beliebige Zeit $t = 0$ willkürlich festsetzen.

3. Nehmen wir den Ausgangspunkt der Bewegung (zur Zeit $t = 0$) zum Anfangspunkt der Koordinaten und setzen fest, dafs zu dieser Zeit der Punkt sich in Ruhe befinde, dafs also

$$c = 0, \quad C = 0, \quad C_1 = 0$$

sei, so haben wir für den freien Fall

$$x = -\frac{gt^2}{2}, \quad \frac{dx}{dy} = v = -gt, \tag{4}$$

wo sich die Minuszeichen aus der Wahl der Anfangsrichtung erklären. Die Geschwindigkeit wächst also hier proportional der Zeit, der zurückgelegte Weg proportional dem Quadrate derselben. Durch Elimination von t aus den Gleichungen (4) finden wir noch:

$$x = -\frac{v^2}{2g} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{-2gx}. \tag{5}$$

Aus der ersten dieser Formeln können wir den Ort, an welchem eine gewisse Geschwindigkeit stattfindet, berechnen, aus der zweiten die Geschwindigkeit an jeder Stelle des Weges; da nur negative x auftreten, so bleibt der Wert von $\sqrt{-2gx}$ reell. Das Vorzeichen der Wurzel ist hier, wie aus der Natur der vorliegenden Bewegung hervorgeht, negativ zu nehmen.

4. Nehmen wir an, dafs eine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der x-Achse vorhanden sei, so haben wir

$$x = -\frac{gt^2}{2} + ct, \quad \frac{dx}{dt} = v = -gt + c. \tag{5a}$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit nach unten gerichtet, also $c < 0$, so geht die Bewegung immer abwärts. Im umgekehrten Falle, also für $c > 0$, ist die Geschwindigkeit positiv, bis $-gt + c = 0$ oder $t = \frac{c}{g}$ geworden ist; dann wird sie negativ. Der materielle Punkt steigt zuerst aufwärts, dann wieder abwärts. Man berechnet ferner durch Elimination von t

$$x = \frac{c^2 - v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v^2 = c^2 - 2gx; \tag{6}$$

der absolute Betrag von v ist also derselbe, wenn x dasselbe ist. Der materielle Punkt hat demnach bei dem Aufsteigen wie bei dem Absteigen in demselben Punkte gleiche absolute Geschwindigkeit.

Die höchste erreichte Höhe h für $c > 0$ erhält man, indem man in (6) $v = 0$ einsetzt; man findet

$$h = \frac{c^2}{2g} \quad \text{oder} \quad c^2 = 2gh, \tag{7}$$

2*

so dafs die Wurfhöhe dem Quadrate der Anfangsgeschwindigkeit proportional ist.

5. Wir wollen nun die Bewegung eines materiellen Punktes untersuchen, welcher bei Beginn derselben eine irgendwie gerichtete Anfangsgeschwindigkeit besitzt. Eine solche Bewegung tritt z. B. auf, wenn wir einen Stein in schräger Richtung in die Höhe werfen oder eine Kugel aus einem Geschütz in einer solchen Richtung abschiefsen*), vorausgesetzt, dafs dies im luftleeren Raume geschieht. Sei die erteilte Anfangsgeschwindigkeit v_0 und sei α der spitze Winkel zwischen ihrer Richtung und der positiven y-Achse (der Elevationswinkel), und gehe endlich die Bewegung wieder vom Anfangspunkte der Koordinaten aus, so hat man in (3)

$$c_1 = C_1 = 0, \quad c = v_0 \sin\alpha, \quad C = v_0 \cos\alpha$$

und man erhält

$$x = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha \, . \, t, \quad y = v_0 \cos\alpha \, . \, t. \tag{8}$$

Eliminirt man hieraus t, so ergiebt sich die Gleichung der Bahnkurve:

$$x = -\frac{gy^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + y \operatorname{tg}\alpha. \tag{9}$$

Die Bahn ist also eine Parabel, deren Hauptachse parallel der x-Achse ist. Den Scheitel der Parabel erreicht der Punkt in dem Augenblicke, in welchem die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit zu Null wird, d. h. für

$$v_0 \sin\alpha = gt,$$

also für

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}; \tag{10}$$

das entsprechende y ist

$$y = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}. \tag{11}$$

Für den Punkt, in welchem der materielle Punkt die y-Achse zum zweiten Male erreicht, haben wir aus (9)

$$y = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \tag{12}$$

Wir ersehen aus (11) und (12), dafs der höchste Punkt in der Mitte der Bahn erreicht wird.

Aus (10) folgt weiter, dafs wir den materiellen Punkt dann am weitesten wegschleudern können, wenn wir $\sin 2\alpha$ zu einem Maximum, d. h. $\alpha = 45^0$ machen.

---

*) Natürlich nur insoweit, als diese Körper durch einen materiellen Punkt ersetzt werden können.

Wir wollen endlich noch die folgende Aufgabe stellen: Welchen Elevationswinkel α müssen wir bei gegebenem v_0 einem Geschütze geben, um einen Punkt, dessen Koordinaten x, y sind, zu treffen? Wir lösen dazu einfach die Gleichung (9) nach α auf und erhalten:

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gy} \pm \frac{1}{gy} \sqrt{v_0^4 - 2gxv_0^2 - g^2y^2}.$$

Aus dem doppelten Vorzeichen der Wurzel ersehen wir, dafs zwei Winkel unseren Anforderungen genügen. Welche Punkte nur auf eine Weise, welche gar nicht erreicht werden können, läfst sich leicht aus (13) erkennen. — Ist speziell $x = 0$, d. h. liegen der Anfangs- und Endpunkt der Bahn in gleicher Höhe, so sind die beiden Werte von tg α zueinander reciprok, d. h. die beiden Werte von α sind komplementär. Man unterscheidet in der Ballistik den Kernschufs, welcher das Ziel unter Anwendung des kleineren Elevationswinkels erreicht, von dem Bombenschufs, bei welchem der gröfsere Elevationswinkel benutzt wird.

Wir haben die Bewegung unter dem Einflusse einer konstanten, gleichgerichteten Kraft an dem praktisch wichtigsten Beispiele erörtert; es braucht nicht angegeben zu werden, wie die gefundenen Resultate zu verallgemeinern sind.

§ 4.

Dieselbe Bewegung im widerstehenden Mittel.

1. Findet die Fall- und Wurfbewegung in einem widerstehenden Mittel, z. B. in der Luft statt, so tritt erfahrungsmäfsig aufser der Schwerkraft eine weitere Kraft in Wirkung, welche lediglich von der augenblicklichen Geschwindigkeit abhängt (wenn nicht auch noch auf die Gestalt des Körpers Rücksicht zu nehmen ist) und deren absoluten Betrag zu verringern strebt; man nennt sie den Luftwiderstand*). Die Berechnung desselben ist eigentlich ein Problem der Aërodynamik, doch begnügen wir uns hier mit erfahrungsmäfsigen Daten. Diesen gemäfs ist der Luftwiderstand ungefähr dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional; wir setzen für ihn kv^2, wo k eine positive Konstante ist, welche der Dichtigkeit der Luft direkt und der Masse des materiellen Punktes umgekehrt proportional ist. Denkt man sich an Stelle des Punktes eine Kugel, so ist k deren Oberfläche direkt proportional; im übrigen ist k durch Versuche zu bestimmen.

Wir betrachten zunächst den Fall, dafs keine seitliche Geschwindigkeit vorhanden ist; auch müssen wir die absteigende Bewegung von der aufsteigenden trennen, da der Luftwiderstand nicht eine Kraft von kon-

*) Mit dem Einflusse des Luftwiderstandes beschäftigt sich bereits Newton in den Philosophiae naturalis principia mathematica; weitere Untersuchungen über die hier behandelten Probleme verdankt man Joh. und Nic. Bernoulli, Euler, Legendre Coriolis, Jacobi u. A.

stanter Richtung, sondern immer der Richtung der Bewegung entgegengesetzt ist, so daſs in beiden Fällen die Gleichung eine andere wird.

2. Im Falle der absteigenden Bewegung haben wir

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -g + kv^2$$

oder, da

$$v = \frac{dx}{dt},$$

$$(2) \qquad \frac{dv}{dt} = -g + kv^2 \quad \text{oder} \quad dt = \frac{dv}{-g + kv^2},$$

also

$$(3) \qquad t + c = -\frac{1}{2\sqrt{gk}} \log \frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + v}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v} {}^{*)}.$$

Hieraus folgt

$$(4) \qquad \frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + v}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v} = e^{-2\sqrt{gk}(t+c)},$$

also

$$(5) \quad v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{k}} \, \frac{e^{-2\sqrt{gk}(t+c)} - 1}{e^{-2\sqrt{gk}(t+c)} + 1} = \sqrt{\frac{g}{k}} \, \frac{e^{-\sqrt{gk}(t+c)} - e^{\sqrt{gk}(t+c)}}{e^{-\sqrt{gk}(t+c)} + e^{\sqrt{gk}(t+c)}}.$$

Die weitere Integration giebt, wie durch Differentation zu verifizieren,

$$(6) \qquad x = -\frac{1}{k} \log \left[e^{-\sqrt{gk}(t+c)} + e^{\sqrt{gk}(t+c)}\right] + C.$$

3. Soll für $t = 0$ auch $x = 0$ und $v = 0$ sein, so hat man aus (5)

$$1 = e^{-2\sqrt{gk}.c},$$

also

$$c = 0$$

und aus (6)

$$C = \frac{1}{k} \log \left[e^{-\sqrt{gk}.c} + e^{\sqrt{gk}.c}\right] = \frac{1}{k} \log 2;$$

damit wird

$$(7) \qquad v = \sqrt{\frac{g}{k}} \, \frac{e^{-\sqrt{gk}.t} - e^{\sqrt{gk}.t}}{e^{-\sqrt{gk}.t} + e^{\sqrt{gk}.t}},$$

$$(8) \qquad x = -\frac{1}{k} \log \frac{e^{-\sqrt{gk}.t} + e^{\sqrt{gk}.t}}{2}.$$

---

*) Unter log verstehen wir überall den natürlichen Logarithmus. — Es ist stets $-g + kv^2 < 0$, da sonst eine nach aufwärts gehende Beschleunigung eintreten würde.

Ist dagegen eine abwärtsgehende Anfangsgeschwindigkeit v_0 vorhanden, so ist

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + v_0}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v_0} = e^{-2c\sqrt{gk}},$$

also

$$c = -\frac{1}{2\sqrt{gk}} \log \frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + v_0}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v_0} \tag{9}$$

und

$$C = \frac{1}{k} \log \left[\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + v_0}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v_0}} + \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{g}{k}} - v_0}{\sqrt{\frac{g}{k}} + v_0}} \right]. \tag{10}$$

Aus (5) ersieht man, daſs für ein ins Unendliche wachsendes t sich v einem Maximalwerte $-\sqrt{\frac{g}{k}}$ nähert, für welchen Schwerkraft und Luftwiderstand sich die Wage halten; die Beschleunigung wird dabei immer kleiner.

4. Ist eine aufwärts gerichtete Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, so hat man für den aufsteigenden Teil des Weges

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g - kv^2, \tag{11}$$

also

$$dt = -\frac{dv}{g + kv^2}, \tag{12}$$

woraus

$$t + c = -\frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v \tag{13}$$

oder

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tg}\left[\sqrt{gk}(t + c)\right] \tag{14}$$

folgt. Weiter ist

$$x + C = \frac{1}{k} \log \cos \left[\sqrt{gk}(t + c)\right]. \tag{15}$$

Ist für $t = 0$ $v = v_0$ und $x = 0$, so haben wir

$$c = -\frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0, \tag{16}$$

$$C = \frac{1}{k} \log \cos \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0 = \frac{1}{k} \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{g} v_0^2}} \tag{17}$$

$$= -\frac{1}{2k} \log \left(1 + \frac{k}{g} v_0^2\right).$$

Für den höchsten Punkt, bis zu welchem der Körper aufsteigt, haben wir $v = 0$ zu setzen; dann ist

$$t = -c = \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0,$$

woraus man für die Steighöhe h findet

$$h = -C = \frac{1}{2k} \log \left(1 + \frac{k v_0^2}{g}\right). \tag{18}$$

Fällt nun der Körper, nachdem er diese Höhe erreicht hat, wieder abwärts, bis er zur ursprünglichen Stelle zurückkommt, so ist die Zeit t_1, welche er dazu braucht, und die Geschwindigkeit v_1, welche er dabei erlangt, nach (8) und (7) durch

$$h = \frac{1}{k} \log \frac{e^{-\sqrt{gk}.t_1} + e^{\sqrt{gk}.t_1}}{2} \tag{19}$$

und

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{e^{-\sqrt{gk}.t_1} - e^{\sqrt{gk}.t_1}}{e^{-\sqrt{gk}.t_1} + e^{\sqrt{gk}.t_1}} \tag{20}$$

bestimmt. Durch Elimination von t_1 aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - e^{-2hk}},$$

und durch Einsetzen des Wertes für h aus (18)

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - e^{-\log\left(1 + \frac{k v_0^2}{g}\right)}} = -\sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{k v_0^2}{g}}} \tag{21}$$

$$= -v_0 \sqrt{\frac{g}{g + k v_0^2}}.$$

Es ist hiernach

$$-v_1 < v_0. \tag{22}$$

Während also der in die Höhe geworfene Körper auf dem Rückwege an jeder Stelle die gleiche Geschwindigkeit erreicht wie beim Hinwege, wenn kein Luftwiderstand stattfindet, wird infolge des letzteren die Geschwindigkeit bei der Rückkehr geringer als beim Aufsteigen.

5. Wir wollen bei dieser Gelegenheit die Bewegung untersuchen, die ein materieller Punkt, auf den keine Kraft wirkt, infolge des Luftwiderstandes ausführt. Ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Richtung der positiven x-Achse vorhanden, so haben wir:

(23) $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -kv^2, \quad dt = -\frac{dv}{kv^2},$$

woraus sich

$$t + c = \frac{1}{kv}$$

oder, da $v = v_0$ für $t = 0$ ist,

$$t = \frac{1}{kv} - \frac{1}{kv_0}$$

oder

(24) $$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}}$$

ergiebt. Hieraus folgt schliefslich, wenn $x = 0$ für $t = 0$ genommen wird,

(25) $$x = \frac{1}{k} \log\left(kt + \frac{1}{v_0}\right).$$

Der Körper kommt also nie zur Ruhe, obgleich seine Geschwindigkeit beständig und unter jede Grenze abnimmt; er legt mit der Zeit einen unendlich grofsen Weg zurück.

6. Wäre das Gesetz des Luftwiderstandes ein anderes, so würden sich die behandelten Aufgaben trotzdem durch blofse Quadraturen lösen lassen. In jedem Falle hätte man nämlich, wenn f irgend eine Funktion bezeichnet:

(26) $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = f(v),$$

also

(27) $$t = \int \frac{dv}{f(v)} = F(v).$$

Berechnet man hieraus $v = \frac{dx}{dt} = \varphi(t)$, so hat man

(28) $$x = \int \varphi(t)\,dt.$$

7. Geht die Bewegung durch die Schwere nicht in einer Geraden vor sich, so läfst sie sich leicht für den Fall verfolgen, dafs der Luftwiderstand der Geschwindigkeit proportional ist. Wir haben

(29) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - kv\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -kv\frac{dy}{ds}$$

und, da

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}\frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{1}{v}\frac{dy}{dt},$$

so folgen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - k\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt}, \tag{30}$$

zwei Gleichungen, die sich getrennt behandeln lassen. Sei $\frac{dx}{dt} = u$, so ist

$$\frac{du}{dt} = -g - ku, \quad \text{also} \quad dt = -\frac{du}{g+ku},$$

folglich

$$t + c = -\frac{1}{k}\log(g+ku),$$

woraus

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{e^{-k(t+c)} - g}{k}$$

und endlich

$$x = -\frac{1}{k^2}e^{-k(t+c)} - \frac{gt}{k} + C$$

folgt.

Nehmen wir $g = 0$, so geht die Differentialgleichung für x bis auf die Bezeichnung in diejenige für y über; daher haben wir

$$y = -\frac{1}{k^2}e^{-k(t+c_1)} + C_1.$$

Ist der Ausgangspunkt für $t = 0$ der Nullpunkt, die Anfangsgeschwindigkeit v_0, der Elevationswinkel α, so haben wir

$$c = -\frac{1}{k}\log(g + kv_0 \sin\alpha), \qquad C = \frac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha),$$

$$c_1 = -\frac{1}{k}\log(kv_0\cos\alpha), \qquad C_1 = \frac{v_0\cos\alpha}{k}.$$

Somit wird

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{g + kv_0\sin\alpha}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}, \\ y &= \frac{v_0\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Bemerkenswert ist, dafs hier y nicht wie bei widerstandsloser Bewegung ins Unendliche wachsen kann, sondern nur den Maximalwert $\frac{v_0\cos\alpha}{k}$ asymptotisch erreicht.

8. Um endlich auch dieselbe Bewegung unter der Voraussetzung zu behandeln, dafs der Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, zerlegen wir die wirkenden Kräfte in zwei Komponenten, von denen die eine der y-Achse parallel, also von der Schwerkraft frei ist, die andere in die Richtung der Normalen der Bahn fällt, also vom Luftwiderstande nicht abhängt. Ist α der Winkel, welchen die Bahnrichtung mit der positiv gerichteten y-Achse bildet, so haben wir

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -kv^2\cos\alpha. \tag{32}$$

Da ferner $\frac{dy}{dt} = v \cos \alpha$ ist, so wird aus (32)

$$\frac{d(v \cos \alpha)}{dt} = -kv^2 \cos \alpha$$

oder

$$(33) \qquad \frac{d(v \cos \alpha)}{v \cos \alpha} = -kvdt = -kds.$$

Die Komponente nach der Bahnnormalen ist $-g \cos \alpha$; dieselbe ist in der Richtung des Krümmungsradius, also offenbar immer nach der unteren Seite der Kurve gerichtet. Sie ist nach § 1, (13) der Gröfse $\frac{v^2}{\varrho}$, worin ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet, gleichzusetzen. Hiernach erhalten wir, wenn noch $\varrho = \frac{ds}{d\alpha}$ gesetzt wird*),

$$(34) \qquad g \cos \alpha = -v^2 \frac{d\alpha}{ds}.$$

Gleichung (33) giebt durch Integration

$$(35) \qquad \log(v \cos \alpha) = -ks + c.$$

Bezeichnen α_0 und v_0 die Anfangswerte von α und v für $t = 0$, $s = 0$, so folgt

$$\log(v_0 \cos \alpha_0) = c,$$

also

$$\log \frac{v \cos \alpha}{v_0 \cos \alpha_0} = -ks$$

oder

$$(36) \qquad v \cos \alpha = \frac{dy}{dt} = v_0 \cos \alpha_0 e^{-ks}.$$

Den hieraus folgenden Wert von v setzen wir in (34) ein und erhalten

$$g \cos \alpha = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0 e^{-2ks}}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{ds}$$

oder

$$(37) \qquad \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{ge^{2ks}}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} ds,$$

somit durch Integration

$$(38) \qquad \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{ge^{2ks}}{kv_0^2 \cos^2 \alpha_0} + C.$$

---

*) Man beachte, dafs wir die Winkel, wie allgemein in der höheren Mathematik üblich, durch den entsprechenden Bogen mit dem Radius 1 ersetzt denken. $d\alpha$ ist daher $\sin d\alpha$ gleichwertig, und die Richtigkeit der Gleichung

$$\varrho \sin d\alpha = ds$$

erhellt unmittelbar.

Die Konstante bestimmt sich durch Einsetzen von $s = 0$, $\alpha = \alpha_0$ in etwas umständlicher Form. Die Gleichung liefert den Bogen s, falls α gegeben ist.

Will man x und y in die Gleichung bringen, so benutzt man

$$dy = ds \cos\alpha$$

und erhält aus (37)

$$dy = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha_0 e^{-2ks}}{g \cos^2\alpha} d\alpha$$

oder, wenn man mittels (38) die Exponentialgröfse beseitigt,

$$(39) \qquad dy = \frac{d\alpha}{k\left[\sin\alpha + \cos^2\alpha \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - C\cos^2\alpha\right]}.$$

Da

$$(40) \qquad dx = \operatorname{tg}\alpha dy$$

ist, so erhalten wir

$$(41) \qquad dx = \frac{\operatorname{tg}\alpha\, d\alpha}{k\left[\sin\alpha + \cos^2\alpha \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - C\cos^2\alpha\right]}.$$

Durch Quadratur werden x und y gefunden.

Beide Koordinaten drücken sich als Funktionen von α aus; man kann demnach für beliebig viele α x und y berechnen und so die Bahnkurve Punkt für Punkt konstruieren. Man erhält eine Kurve, deren Kulminationspunkt jenseit der Mitte der Wurfweite liegt und welche eine zur x-Achse parallele Asymptote besitzt.

Die Berechnung der Geschwindigkeit für einen Punkt der Bahn bietet keine Schwierigkeit.

§ 5.

Arbeit und lebendige Kraft.

1. Die Resultate von § 3 setzen uns in den Stand einige Begriffe einzuführen, welche in der Folge eine grofse Rolle spielen werden: die Begriffe der Arbeit und der lebendigen Kraft. Trotz ihrer Einfachheit gaben dieselben von jeher zu grofser Verwirrung und Unklarheit Veranlassung, und es mufs ausgesprochen werden, dafs diese Mängel aus neueren Darstellungen noch keineswegs überall gewichen sind. Es ist sehr bedenklich, wenn man Begriffen, welchen das gewöhnliche Leben eine, wenn auch nicht gerade präzis formulierte, Bedeutung gegeben hat, bei wissenschaftlichen Untersuchungen willkürlich eine davon verschiedene beilegt; zum mindesten ist in einem solchen Falle zu verlangen, dafs die abweichende Auffassung klar ausgesprochen wird.

2. Unzweifelhaft verbindet auch der nicht mathematisch Gebildete mit dem Worte Arbeit einen gewissen Begriff. Um denselben zu erkennen, müssen wir auf die Betrachtung von § 2 über die Bethätigung der Muskelkraft zurückgreifen. Wenn ein Mensch eine körperliche Arbeit leistet, so mufs er eine gewisse Zeit hindurch eine gewisse Muskelanstrengung ausführen. Die Gröfse der Arbeit wird einerseits von der Zeitdauer, andrerseits von der Stärke der Muskelanstrengung abhängig sein; wir können sie, falls wir die letztere als konstant voraussetzen, beiden direkt proportional annehmen. Wird die Arbeit verwendet, um einem Körper (materiellen Punkte) von der Masse m eine gewisse Beschleunigung g zu erteilen, so ist die Muskelanstrengung dem Produkte mg, die geleistete Arbeit der Gröfse mgt proportional. Dieser Begriff läfst sich nun leicht auf jede andere Kraft übertragen.

Leider hat man in der Mechanik dem Worte Arbeit diese wohlpräzisierte Bedeutung, die sich mit der gewöhnlichen Auffassung vorzüglich deckt, nicht beigelegt*). Bewegt eine konstante Kraft k einen materiellen Punkt in ihrer eignen Richtung auf einer Strecke s, so sagt man, sie habe während dessen die Arbeit ks ausgeführt; ist k variabel, so mufs man denselben Ausdruck für jedes Wegteilchen ds bilden und summieren; man hat dann für die Arbeit $\int\limits_0^s k\,ds$. Dieselbe ist positiv, soweit die Bewegung in der Richtung der Kraftwirkung, negativ, soweit sie derselben entgegen geschieht; fällt die Richtung der Kraft nicht in die Bewegungsrichtung, so mufs an Stelle von k die Projektion der Kraft auf die Bewegungsrichtung gesetzt werden.

Um die Verwirrung nicht zu vermehren, wollen wir diese Definition der Arbeit beibehalten, konstatieren jedoch ausdrücklich, dafs sie sich mit dem Begriff der Arbeit im alltäglichen Sinne keineswegs immer deckt, wie doch so oft behauptet wird. Wenn jemand ein Gewicht eine Zeit lang in die Höhe hält, so hat er damit, im gewöhnlichen Sinne, gewifs eine Arbeit ausgeführt; allein im Sinne der Mechanik ist die Arbeit $= 0$, da der Weg des Gewichtes $= 0$ ist. Verwenden wir unsere Muskelkraft, um einen frei beweglichen Körper durch konstanten Druck in Bewegung zu setzen, so wissen wir, dafs derselbe in der ersten Sekunde einen geringeren Weg zurücklegt, als in der zweiten, so dafs auch in der ersten Sekunde eine geringere Arbeit geleistet wird, während doch die Anstrengung dieselbe ist. Nur in speziellen Fällen entspricht das Arbeitsmafs dem Sachverhalte, nämlich dann, wenn die zurückgelegte Strecke bei konstanter Kraft der Zeit proportional ist, z. B. wenn ein Wagen, der Reibung zu überwinden hat, mit konstanter Kraft

*) Man bezeichnet diese Gröfse nach Belanger als „Antrieb der Kraft". Ist die Kraft k variabel, so beträgt ihr Antrieb in dem Zeitintervall von t_0 bis t:

$$\int\limits_{t_0}^{t} k\,dt.$$

vorwärts geschoben wird; macht sich dabei auch anfänglich eine Beschleunigung bemerklich, so tritt doch bald infolge der Reibung nahezu eine gleichmäſsige Bewegung ein. Alles in Allem müssen wir sagen, daſs der rein mathematische Begriff ks oder $\int kds$ den Namen Arbeit mit Unrecht führt*).

3. In engem Zusammenhange mit der Arbeit steht der Begriff der lebendigen Kraft. Es ist eine alltägliche Erfahrung, daſs ein in Bewegung befindlicher Körper Wirkungen ausüben kann, wie man sie sonst einer Kraft zuschreibt. Eine abgeschossene Kanonenkugel vermag eine Mauer zu zertrümmern oder in einen Gegenstand einzudringen; sie vermag auch einen Gegenstand, den sie trifft, in Bewegung zu setzen. Man sagt daher, ein bewegter Körper besitze infolge seiner Bewegung eine lebendige Kraft, und es handelt sich darum, für letztere ein geeignetes Maſs ausfindig zu machen. Zu diesem Zwecke wollen wir uns denken, daſs der Körper (materielle Punkt) mit der Masse m sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v einer konstant wirkenden Kraft (der Krafteinheit), welche im stande ist, der Masse 1 die Einheit der Beschleunigung zu erteilen, entgegenbewege. Wir fragen: auf einer wie langen Strecke s bewegt sich dieser Körper der Kraft entgegen, bis seine Geschwindigkeit den Wert Null erreicht hat? Man kann sagen, die Kraft habe dann die negative Arbeit $-s$ ausgeführt, da die Bewegung ihr entgegen geht. Umgekehrt sagt man, durch die im Körper enthaltene lebendige Kraft sei die Arbeit s verrichtet worden. Die Strecke s läſst sich aber nach § 3 leicht berechnen; man muſs nur an Stelle von g die auf den Körper durch jene Krafteinheit ausgeübte Beschleunigung $\frac{1}{m}$ setzen. Wir erhalten $s = \frac{mv^2}{2}$ und diese Gröſse nehmen wir als das Maſs der lebendigen Kraft; ja wir nennen geradezu $\frac{mv^2}{2}$ die lebendige Kraft eines Körpers mit der Masse m und der Geschwindigkeit v. Sie ist identisch mit der Arbeitsmenge, welche der Körper infolge seiner Geschwindigkeit zu leisten im stande ist**).

---

*) Die Bezeichnung „Arbeit" für den erörterten Begriff wurde von Coriolis zuerst gebraucht, von Poncelet aber erst recht eingebürgert. S. z. B. dessen Introduction à la Mécanique industrielle, 2. éd. p. 55 ff. Seine Argumente für das Zutreffende der Bezeichnung gründen sich auf Beispiele von dem Charakter des letztangeführten.

Einsprache gegen die Definition der Arbeit erhebt A. R. Moon in: On the measure of work in the theory of energy (Philos. Mag. 1874) oder Sur la mesure du travail dans la théorie de l'énergie, Les Mondes (2) XXXV, p. 16—18.

**) Leibnitz bezeichnete die Gröſse mv^2, die er als den eigentlichen Ausdruck für die Kraft eines bewegten Körpers ansah, als lebendige Kraft. Er verwickelte sich mit den Anhängern des Descartes, welcher die „Bewegungsgröſse" mv als Maſs jener Kraft betrachtete, in einen lang andauernden Streit, der eigentlich gegenstandslos war, da es sich nur um willkürliche Festsetzungen

4. Wirkt umgekehrt auf den in Ruhe befindlichen Körper die Einheit der Kraft, so wird derselbe derart in Bewegung gesetzt, dafs er nach der Zeit t die Geschwindigkeit $v = \frac{t}{m}$ erreicht und den Weg $s = \frac{t^2}{2m}$ zurückgelegt hat; es ist also $s = \frac{mv^2}{2}$, und dies ist zugleich die Arbeit, welche von der Kraft geleistet wurde. Man kann daher sagen: Die Arbeit, welche nötig ist, um einem ruhenden Körper eine gewisse Geschwindigkeit (lebendige Kraft) zu geben, ist gleich der Arbeit, die er unter Aufzehrung dieser Geschwindigkeit (lebendigen Kraft) zu leisten im stande ist. Dieser Satz, welchen wir später verallgemeinert wiederfinden werden, ist die Grundlage des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kraft.

5. Bei den in die Höhe geworfenen Körpern bemerkten wir, dafs die Schwerkraft (das gleiche gilt natürlich für jede konstante Kraft) die lebendige Kraft derselben aufzehrt, dafs sie nachher aber eine umgekehrt gerichtete Geschwindigkeit hervorruft; ist der Körper in seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt, so ist die Geschwindigkeit, also auch die lebendige Kraft, wieder dieselbe. Anders verhält es sich, wenn der Luftwiderstand hinzutritt; die lebendige Kraft, welche der Körper bei seiner Rückkehr hat, ist geringer als die anfängliche. Wir bemerken bereits hier, was wir später weiter ausführen, dafs es einerseits Kräfte giebt, welche die von ihnen aufgezehrte lebendige Kraft wieder neu hervortreten lassen (wie die Schwerkraft), wenn der Körper an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt; dafs aber andrerseits solche vorhanden sind, welche lebendige Kraft konsumieren, ohne neue zu erzeugen (wie Luftwiderstand, Reibung u. s. w.); Kräfte, welche lebendige Kraft erzeugen, ohne solche aufzuzehren, existieren erfahrungsmäfsig nicht. Auch der zweite Fall wird später eingehender zu untersuchen sein.

6. Arbeit und lebendige Kraft besitzen, wie nach dem Vorhergehenden selbstverständlich, dieselbe Dimension:

$$l^2 t^{-2} m\,.$$

Man lasse sich nicht etwa dadurch irre machen, dafs die lebendige Kraft als ein Weg definiert wurde; es ist zu beachten, dafs bei der Definition auch die Krafteinheit eine Rolle spielt.

Ferner ist die Dimension der Bewegungsgröfse und des Antriebs der Kraft:

$$l t^{-1} m\,.$$

---

handelte. — Es wird gegenwärtig immer mehr gebräuchlich, die Gröfse $\frac{mv^2}{2}$, welche eine direkte mechanische Bedeutung besitzt, als lebendige Kraft zu bezeichnen.

Die Wichtigkeit, welche Arbeit und lebendige Kraft in der Mechanik gewonnen haben, beruht nicht in der Bedeutung dieser Begriffe, sondern lediglich in dem Umstande, dafs sie bei einem der allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen auftreten (§ 24).

§ 6.

Die Zentralbewegung.

1. Von einem festen Punkte (Zentrum), den wir in der Folge als Nullpunkt des Koordinatensystems annehmen wollen, werde auf einen beweglichen materiellen Punkt eine Kraft ausgeübt, welche der Masse des materiellen Punktes proportional ist, also eine von dieser Masse unabhängige Beschleunigung hervorruft, welche ferner, anziehend oder abstoſsend, in der Richtung der Verbindungslinie beider Punkte (des Radiusvektor) wirkt und im übrigen nur von der Entfernung r derselben abhängig ist. Wir nennen eine solche Kraft Zentralkraft, die hervorgerufene Bewegung Zentralbewegung. Die Annahme eines festen Punktes widerspricht allerdings dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung; doch werden wir zahlreiche Beispiele kennen lernen, welche den beschriebenen Verhältnissen näherungsweise entsprechen oder sich durch eine einfache Umformung auf den hier zu behandelnden Fall zurückführen lassen.

Die Lehre von den Zentralkräften beherrscht geradezu die Mechanik; die wichtigsten und am besten untersuchten Kräfte gehören hierher. Bemerkt möge werden, daſs die zweite Annahme, welche die Richtung der Kraft in die Verbindungslinie der beiden Punkte fallen läſst, nicht allen von der Physik gebotenen Beispielen, wenn auch den meisten, entspricht; die Wirkung der Elementarteile zweier elektrischen Ströme aufeinander bietet ein Beispiel des Gegenteils.

2. Die Zentralbewegung ist auſser von der Zentralkraft noch von der Lage, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung des bewegten materiellen Punktes zu einer bestimmten Zeit (etwa $t = 0$) abhängig. Legt man durch das Zentrum und die Richtung der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit eine Ebene, so wird der materielle Punkt durch keine Ursache veranlaſst, dieselbe zu verlassen; die Bewegung ist also eine ebene, weshalb wir mit zwei Koordinaten, x und y, ausreichen. Liegt insbesondere das Zentrum in der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit, so ist die Bewegung geradlinig, so daſs wir nur eine Koordinate gebrauchen.

3. Im Falle der geradlinigen Bewegung haben wir für den materiellen Punkt x

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = f(x),$$

worin $f(x)$ eine beliebige Funktion, welche das Gesetz der Anziehung oder Abstoſsung enthält, bedeutet; es findet Anziehung statt, wenn $f(x)$ für positive x stets negativ, für negative x stets positiv ist, Abstoſsung im entgegengesetzten Falle; in allen übrigen Fällen wechselt Anziehung und Abstoſsung. Es kann nötig werden, $f(x)$ für positive und negative

x verschieden zu nehmen und demnach die Bewegung in zwei getrennt zu behandelnde Teile zu zerlegen*).

Setzen wir

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \text{also} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

so wird aus (1)

$$v\frac{dv}{dx} = f(x)$$

oder

(2) $$vdv = f(x)dx,$$

woraus durch Integration

(3) $$\frac{v^2}{2} = \int f(x)dx = F(x)$$

folgt. Die in $F(x)$ eintretende Konstante bestimmt sich aus der Anfangsgeschwindigkeit. Wir haben hiernach

$$v = \sqrt{2F(x)}$$

oder

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2F(x)}},$$

(4) $$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2F(x)}},$$

wo eine durch die Anfangslage zu bestimmende Konstante hinzukommt. Die Zweideutigkeit der auftretenden Wurzel zeigt, dafs im allgemeinen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten dasselbe x und dieselbe Geschwindigkeit erreicht wird.

Das Problem ist also in jedem Falle durch zwei Quadraturen (Integrationen) lösbar; da dieselben, wenn nicht in geschlossener Form, doch durch Reihenentwicklung oder mechanische Quadratur ausgeführt werden können, so mufs die Aufgabe als allgemein lösbar bezeichnet werden.

4. Im allgemeineren Falle sei der materielle Punkt x, y, also $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; die Richtungskosinus von r nach den Koordinatenachsen sind $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$. Wir haben

*) Wenn $f(x)$ eine gerade Funktion von x, d. h. wenn $f(-x) = f(x)$ ist und $f(x)$ überall das gleiche Zeichen besitzt, so hat die Beschleunigung nach (1) auf beiden Seiten des Nullpunktes die gleiche Richtung, so dafs auf der einen Seite Anziehung, auf der anderen Abstofsung statthat. Soll auf beiden Seiten Anziehung oder Abstofsung in Wirksamkeit sein, so mufs $f(x)$ für positive und negative x verschiedene Zeichen erhalten. Bei einer ungeraden Funktion $f(x)$, für welche $f(-x) = -f(x)$ ist, kann in diesem Falle beiderseits das gleiche Zeichen angewandt werden. Andere Funktionen sind in einen geraden und einen ungeraden Teil zu zerlegen.

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f(r)\,\dfrac{x}{r}\,, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = f(r)\,\dfrac{y}{r}\,; \end{cases}$$

r ist hierin immer positiv zu nehmen. Ein positiver Wert von $f(r)$ entspricht der Abstofsung, ein negativer der Anziehung; die Umständlichkeiten in Beziehung auf das Vorzeichen wie beim letzten Falle treten hier nicht auf.

5. Subtrahieren wir von der mit x multiplizierten zweiten Gleichung (5) die mit y multiplizierte erste, so erhalten wir:

$$(6)\qquad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0\,,$$

woraus durch Integration — durch Differentiation ist das Resultat wieder leicht zu verifizieren —

$$(7)\qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c$$

folgt. Diese Gleichung ist von dem speziellen Gesetze der Attraktion vollkommen unabhängig.

6. Multiplizieren wir die Gleichungen (5) resp. mit $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ und addieren, so erhalten wir:

$$(8)\qquad \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = f(r)\,\frac{x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt}}{r} = f(r)\,\frac{dr}{dt}$$

und durch Integration:

$$(9)\qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \int f(r)\,dr\,.$$

7. Die Gleichungen (7) und (9) enthalten, wenn man r durch x und y ausdrückt, nur x, y, $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$; eliminiert man aus beiden dt, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$, also eine von der Zeit freie, daher nur die Bewegungsbahn bestimmende Differentialgleichung erster Ordnung, von deren Integration die Lösung unseres Problems abhängt. Wie in vielen Fällen, gelingt die Trennung der Variabeln durch Einführung eines neuen Koordinatensystems und zwar hier der Polarkoordinaten; ohne dieses Hilfsmittel müfste der integrierende Faktor bestimmt werden.

Wir setzen:

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = \cos\varphi\,\frac{dr}{dt} - r\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin\varphi\,\frac{dr}{dt} + r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\,,$$

wodurch aus (7) und (9)

(10) $$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c$$

und

(11) $$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \int f(r)\,dr$$

wird. Setzen wir in (11) den aus (10) folgenden Wert für dt ein, so finden wir:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}\right] = \int f(r)\,dr$$

oder

$$\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2r^4}{c^2}\int f(r)\,dr - r^2}$$

oder

(12) $$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2r^4}{c^2}\int f(r)\,dr - r^2}},$$

die Bahngleichung in Polarkoordinaten.

Ist hiernach $\varphi = F(r)$ oder $r = \psi(\varphi)$ gefunden, so folgt aus (10):

(13) $$t = \frac{1}{c}\int r^2 d\varphi = \frac{1}{c}\int \psi^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

So ist auch das allgemeine Problem der Zentralbewegung durch Quadraturen lösbar; die auftretenden vier Konstanten werden durch die Angaben von x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ für einen bestimmten Zeitpunkt, etwa $t = 0$, bestimmt*).

---

*) Es möge bemerkt werden, daſs bei jeder Art der Attraktion nach einem festen Zentrum die kreisförmige Bewegung um dasselbe als Mittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit möglich ist. Wir haben nämlich:

$$\varphi = kt + c\,, \quad r \text{ konstant},$$
$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -rk^2\cos\varphi\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -rk^2\sin\varphi\,,$$

und die Gleichungen (5) werden befriedigt, wenn

$$f(r) = -rk^2$$

oder

$$k^2 = -\frac{f(r)}{r}$$

gesetzt wird. Für k erhalten wir immer einen reellen Wert, wenn $f(r)$ negativ ist, d. h. wenn eine beständige Attraktion, keine Repulsion stattfindet. — Weitere Untersuchungen über Arten der Zentralbewegung, welche geschlossene Kurven u. s. w. liefern, wurden in neuerer Zeit mehrfach angestellt. Man sehe Bertrand, Darboux, Halphen, Comptes rendus, B. 77, 84, 85; Battaglini, Atti d. Accad. Reale dei Lincei, (3) B. 2; Imchenetsky, Mém. de Bordeaux (2) B. 4; Dainelli, Battaglini (Giorn. mat.), B. 18.

8. Die Gleichungen (7) oder (10) und (9) enthalten wichtige Gesetze der Bewegung. Für die Zeitpunkte t und $t + dt$ haben wir die Radienvektoren r und $r + dr$ und die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$; in der Zeit dt überstreicht der Radiusvektor ein unendlich schmales Dreieck mit den Seiten r und $r + dr$ und dem eingeschlossenen Winkel $d\varphi$ (der als Bogen mit dem Radius 1 gemessen wird); der Inhalt dieses Dreiecks ist unter Vernachlässigung von unendlich Kleinem höherer Ordnung:

$$\frac{r(r + dr)\sin d\varphi}{2} = \frac{r(r + dr)d\varphi}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2}.$$

Gleichung (10) sagt uns daher, daſs der Radiusvektor an allen Stellen der Bahn in der Zeit dt dasselbe unendlich schmale Dreieck

$$\frac{r^2 d\varphi}{2} = \frac{c\,dt}{2}$$

überstreicht. Dehnen wir dies Resultat auf endliche Zeiten aus, so haben wir für jede Zentralbewegung das Gesetz:

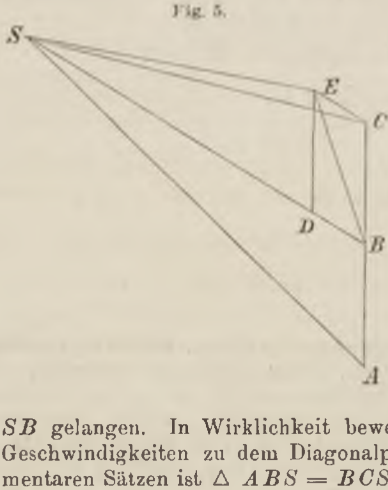
Der Radiusvektor, gezogen vom Sitze der Kraft nach dem bewegten Punkte, überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Man bezeichnet diesen Satz, den wir später erweitern werden, als den Flächensatz; bei der Planetenbewegung ist er unter dem Namen des zweiten (oder ersten) Kepler'schen Gesetzes wohlbekannt*). Auch aus der Gleichung (7) ist er unschwer direkt abzuleiten.

---

*) Bewegt sich ein Punkt ohne Einwirkung einer Kraft lediglich nach dem Beharrungsgesetze, so gilt der Flächensatz für die Radienvektoren, welche von ihm nach einem beliebigen Punkte gezogen werden; die elementarsten geometrischen Betrachtungen zeigen dies. — Da $\frac{d\varphi}{dt}$ die scheinbare Geschwindigkeit des Punktes, vom Zentrum aus betrachtet, ist, so kann man das Gesetz auch dahin aussprechen, daſs die scheinbare Geschwindigkeit dem Quadrate des Radiusvektor umgekehrt proportional sei. — In ganz elementar-anschaulicher Weise läſst sich der Flächensatz folgendermaſsen beweisen. Bewegt sich der materielle Punkt während eines verschwindend kleinen Zeitteils von (Fig. 5) A nach B in einer als gerade anzunehmenden Linie, so würde er, wenn er nur dem Beharrungsgesetze unterworfen wäre, im nächsten, gleichen Zeitteile in derselben Geraden um das gleiche Stück weiter bis C gelangen. Würde er lediglich irgend einer Attraktion nach dem Zentrum S unterworfen sein, so würde er in der gleichen Zeit bis D in der Geraden SB gelangen. In Wirklichkeit bewegt er sich nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu dem Diagonalpunkte E, wo $EC \mathrel{\hat{=}} DB$ ist. Nach elementaren Sätzen ist $\triangle\, ABS = BCS = BES$, woraus der Flächensatz zunächst für unendlich kleine, damit aber auch für beliebige Zeitteile hervorgeht.

Fig. 5.



9. Die linke Seite von (9) stellt die lebendige Kraft des bewegten Punktes dar, falls man ihm die Masse 1 beilegt; die rechte Seite ist, von einer durch die Anfangsbedingungen zu bestimmenden Konstanten abgesehen, die von einer beliebig zu fixierenden Anfangszeit t_0 bis zur Zeit t geleistete Arbeit der Kraft. Es ist nämlich $f(r)\frac{dr}{ds}$ die auf die Bewegungsrichtung ds projizierte Kraft, ds der Wegteil, also

$$\int f(r)\frac{dr}{ds}ds = \int f(r)dr$$

in der That die Arbeit. Da die Arbeit, welche durch die lebendige Kraft des materiellen Punktes geleistet wird, hiervon das Negative ist, so kann man das Gesetz aussprechen:

Bei der Zentralbewegung geben die lebendige Kraft des bewegten Punktes und die von ihm geleistete Arbeit eine konstante Summe; der Wert derselben hängt von den Anfangsbedingungen ab.

Die lebendige Kraft und damit auch die Geschwindigkeit ist nach (9) lediglich eine Funktion von r; kommt der Punkt im Laufe der Bewegung wiederholt in die gleiche Entfernung vom Zentrum, so ist jedesmal seine Geschwindigkeit die gleiche.

Wir werden dieses Gesetz in verallgemeinerter Form als Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft wiederfinden.

10. Die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (5), die wir, um die Kraftkomponenten zu erhalten, mit der Masse des bewegten Punktes multiplizieren wollen, haben die wichtige Eigenschaft, dafs sie die Differentialquotienten derselben Funktion nach x und y sind. Setzt man nämlich:

$$m\int f(r)dr = U, \tag{14}$$

so hat man

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dU}{dr}\frac{x}{r} = mf(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = mf(r)\frac{y}{r}.$$

Ist allgemein die Kraft, welche auf einen materiellen Punkt einwirkt, so beschaffen, dafs ihre Komponenten nach den Achsen der x, y, z durch die Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ einer Funktion U nach denselben Koordinaten ausgedrückt werden können, so nennt man U die Kräftefunktion oder das Potential der bewegenden Kraft auf den bewegten Punkt. Den letztgenannten Ausdruck reserviert man auch vielfach speziell für den Fall des später zu besprechenden Newton'schen Attraktionsgesetzes.

Bei jeder Zentralbewegung existiert also eine Kräftefunktion. Dieselbe ist, von einer Konstanten abgesehen, welche bei der Differentiation doch wegfällt, der *Arbeit* gleich, welche von der Zentralkraft von einem beliebigen Zeitpunkte ab bis zu dem Augenblicke der Wirkung geleistet worden ist. Man ersieht das letztere aus der Vergleichung des Wertes der Arbeit in (3) mit (14).

11. Sind x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ zwei unendlich benachbarte Punkte mit dem Abstande dn, gerechnet vom ersten zum zweiten Punkte als positiv, so finden wir die Komponente der durch die Kräftefunktion U bestimmten Kraft, welche in die Richtung dn fällt, indem wir die Komponenten nach den Koordinatenachsen auf dn projizieren und dann summieren. Dies geht aus dem Satze vom Parallelepipedon der Kräfte unmittelbar hervor. Die fragliche Komponente ist daher, weil die Richtungskosinus von dn nach den Koordinatenachsen $\frac{dx}{dn}, \frac{dy}{dn}, \frac{dz}{dn}$ sind,

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{dU}{dn}. \tag{15}$$

Man hat sich den Differentialquotienten nach dn so gebildet zu denken, dafs man in U einmal statt x, y, z die Gröfsen

$$x + dx,\ y + dy,\ z + dz$$

einsetzt, dann das U für x, y, z abzieht und durch dn dividiert.

Man erhält also die Kraftkomponente nach irgend einer Richtung, wenn man die Kräftefunktion nach dieser Richtung differentiiert. Die Kräftefunktion ist daher eine von der speziellen Wahl des Koordinatensystems ganz unabhängige Gröfse.

§ 7.

Gegenseitige Anziehung oder Abstofsung zweier materiellen Punkte.

1. Üben zwei materielle Punkte x, y, z und x_1, y_1, z_1 von den Massen m und m_1 eine in der Richtung der Verbindungslinie r wirkende Kraft, also eine Anziehung oder Abstofsung, aufeinander aus, deren Intensität nur von der Entfernung

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

und dem Produkte $m m_1$ der beiden Massen abhängt, so werden die Beschleunigungen, welche die Körper erhalten, entgegengesetzt sein und sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten, wie dies das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung verlangt*). Wir haben hiernach die Bewegungsgleichungen

*) Die Beschleunigungen jedes materiellen Punktes hängen nur von der Masse des andern ab, da $\pm\, m m_1 f(r)$ die Kraftwirkung auf jeden der Körper ist, diese aber durch die Masse desselben dividiert werden mufs, um die Beschleunigung zu liefern.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = m_1 f(r) \dfrac{x - x_1}{r}, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = m_1 f(r) \dfrac{y - y_1}{r}, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} = m_1 f(r) \dfrac{z - z_1}{r}, \\ \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = m f(r) \dfrac{x_1 - x}{r}, \\ \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = m f(r) \dfrac{y_1 - y}{r}, \\ \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = m f(r) \dfrac{z_1 - z}{r}. \end{cases}$$

2. Hier lassen sich die Kraftkomponenten für beide Punkte (also die mit der Masse des betreffenden Punktes multiplizierten Beschleunigungskomponenten) als Differentialquotienten einer Funktion

$$U = m m_1 \int f(r)\, dr$$

darstellen. Wir gelangen hierdurch zu der folgenden Erweiterung des Begriffes der Kräftefunktion:

Eine Funktion U heifst die Kräftefunktion eines Systems materieller Punkte $1, 2, \ldots n$ für gewisse Kräfte, wenn die auf die einzelnen Punkte wirkenden Kraftkomponenten durch

$$(2)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_i} \end{cases}$$

dargestellt werden.

Dafs diese Kräftefunktion von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, wird wie in § 6, 11 bewiesen. Die mechanische Bedeutung derselben erörtern wir später.

3. Wir bezeichnen den durch die Koordinaten

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{mx + m_1 x_1}{m + m_1}, \\ \eta = \dfrac{my + m_1 y_1}{m + m_1}, \\ \zeta = \dfrac{mz + m_1 z_1}{m + m_1} \end{cases}$$

bestimmten Punkt als den jeweiligen Schwerpunkt der beiden materiellen Punkte. Derselbe liegt mit den beiden Punkten auf derselben Geraden und zwar zwischen denselben derart, dafs seine Abstände von x, y, z und x_1, y_1, z_1 sich umgekehrt wie m und m_1 verhalten*).

Hiernach ist

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{m\frac{d^2x}{dt^2} + m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}}{m+m_1} \quad \text{u. s. w.}$$

oder, wenn man für $\frac{d^2x}{dt^2}$ u. s. w. die Werte aus den Gleichungen (1) einführt,

$$(4) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0\,.$$

Integriert man diese Gleichungen, so erhält man

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = c_1 t + C_1, \\ \eta = c_2 t + C_2, \\ \zeta = c_3 t + C_3, \end{cases}$$

aus denen durch Elimination von t folgt

$$(6) \qquad \frac{\xi - C_1}{c_1} = \frac{\eta - C_2}{c_2} = \frac{\zeta - C_3}{c_3}\,.$$

Der Schwerpunkt zweier Punkte, welche sich gegenseitig anziehen oder abstofsen, bewegt sich also mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer Geraden oder ist in Ruhe.

Der Schwerpunkt befindet sich also im Gleichgewicht.

Es ist dies ein Spezialfall eines viel allgemeineren Gesetzes.

4. Wir wollen jetzt den Schwerpunkt als in Ruhe befindlich ansehen und zum Nullpunkte des Koordinatensystems machen. Befindet sich der Schwerpunkt in Bewegung, so braucht man nur zu den unter der Annahme der Ruhe erhaltenen relativen Bewegungskomponenten der beiden Körper die betreffenden Bewegungskomponenten des Schwerpunktes zu addieren, um die absolute Bewegung zu erhalten. Da die beiden materiellen Punkte immer mit dem ruhenden Schwerpunkte in derselben Geraden liegen und ihre Abstände ϱ und ϱ_1 von ihm immer in demselben Verhältnisse $m_1 : m$ stehen, so sind die von beiden beschriebenen Kurven sowie ihre Bewegungen in denselben ähnlich; homologe Längen und Geschwindigkeiten stehen bei beiden Bewegungen im Verhältnisse $m_1 : m$. Da

$$\varrho : \varrho_1 = m_1 : m \quad \text{und} \quad \varrho + \varrho_1 = r$$

ist, so hat man

---

*) Sucht man nämlich die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes zu bestimmen, welcher den zuletzt angegebenen Bedingungen genügt, so mufs

$$(\xi - x) : (x_1 - \xi) = m_1 : m \quad \text{u. s. w.}$$

sein, woraus durch Umformung die Gleichungen (3) hervorgehen.

(7) $$r = \frac{\varrho(m+m_1)}{m_1} = \frac{\varrho_1(m+m_1)}{m}$$

und durch Eintragen des ersten und zweiten Wertes in die drei ersten, resp. drei letzten Gleichungen (1), wobei noch zu benutzen ist, dafs nach (3) bei der jetzigen Lage des Schwerpunktes ($\xi = \eta = \zeta = 0$)

(8) $$x_1 = -\frac{mx}{m_1}, \quad x = -\frac{m_1 x_1}{m}$$

ist,

(9) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = m_1 f\left(\dfrac{m+m_1}{m_1}\varrho\right)\dfrac{x}{\varrho} & \text{u. s. w.,} \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = m f\left(\dfrac{m+m_1}{m}\varrho_1\right)\dfrac{x_1}{\varrho_1} & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Man kann also an Stelle der untersuchten Bewegungen Zentralbewegungen setzen, deren Zentrum der Schwerpunkt des Systems ist und die durch die Gleichungen (9) definiert sind.

So ist also die gegenseitige Anziehung und Abstofsung zweier materiellen Punkte auf die Anziehung oder Abstofsung nach einem festen Zentrum zurückgeführt, weshalb wir nur noch die letztere Bewegung zu untersuchen haben.

Ist die Masse m_1 sehr grofs gegen m, so ist die Bewegung des Punktes x_1, y_1, z_1 sehr unbedeutend gegen diejenige des Punktes x, y, z; man darf daher in diesem Falle die Formeln von § 6 mit grofser Annäherung direkt zur Anwendung bringen, indem man x_1, y_1, z_1 als festes Zentrum betrachtet.

5. Man kann noch in anderer Art die relative Bewegung der beiden Punkte als einfache Zentralbewegung darstellen, indem man den einen Punkt x_1, y_1, z_1 als fest annimmt und die relative Bewegung von x, y, z aufsucht. Dieses Verfahren wird in der Astronomie bei der Planetenbewegung angewandt; man betrachtet den Mittelpunkt der Sonne als festes Zentrum und bestimmt die relative Bewegung des Planeten zu ihr; ist doch nicht die geringe Verschiebung, welche die Sonne unter den Fixsternen durch die Attraktion der Planeten erleidet, sondern nur die relative Stellung der Planeten gegenüber der Sonne von Wichtigkeit.

Man braucht zu diesem Zwecke nur die Differenzen der Verschiebungen von x, y, z und x_1, y_1, z_1 ins Auge zu fassen. Man hat nach (1)

$$\frac{d^2(x-x_1)}{dt^2} = (m_1+m)\,f(r)\,\frac{x-x_1}{r} \quad \text{u. s. w.}$$

oder, wenn man jetzt x_1, y_1, z_1 als Nullpunkt annimmt,

(10) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = (m+m_1)\,f(r)\,\dfrac{x}{r}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = (m+m_1)\,f(r)\,\dfrac{y}{r}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = (m+m_1)\,f(r)\,\dfrac{z}{r}. \end{cases}$$

Man kann also die relative Bewegung des Punktes x, y, z gegen x_1, y_1, z_1 als Zentralbewegung um den letzteren auffassen, wenn man nur diesem die Summe der beiden Massen als Masse zulegt.

Die relative Bewegung ist wiederum den beiden absoluten Bewegungen bei festliegendem Schwerpunkte ähnlich. — Bei beiden Auffassungen bleibt namentlich auch der Flächensatz ungeändert.

§ 8.

Die harmonische Bewegung ohne und mit Widerstand.

1. Die Integration der Zentralbewegungsgleichungen ist am einfachsten auszuführen, wenn eine Attraktion stattfindet, welche der Entfernung vom Zentrum proportional ist; die daraus resultierende Bewegung heifst die harmonische. Anscheinend ist diese Annahme eine unnatürliche, der Wirklichkeit wenig entsprechende; und in der That trifft sie bei einfachen Kräften nicht zu. Dagegen giebt es eine Anzahl komplizierterer Kraftwirkungen, welche sich mit grofser Näherung dem gegebenen Gesetze fügen. Wird z. B. ein Punkt eines elastischen Körpers in geeigneter Weise aus seiner Gleichgewichtslage verschoben, so strebt er diesem Gesetze gemäfs in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren. Ein nur kleine Schwingungen ausführendes Fadenpendel bewegt sich, wie wir später sehen werden, nahezu so, wie wenn sein materieller Punkt nach diesem Gesetze in die Ruhelage zurückgezogen würde. Bei schwingenden Saiten, bei oszillierenden Magnetnadeln, bei den Schwingungen von Körpern, welche bifilar oder an einem Drahte aufgehängt sind, welcher durch seine Torsion die Bewegung veranlafst, tritt die harmonische Bewegung auf. Dieselbe ist geradezu eine der wichtigsten in der gesamten Mechanik.

2. Die Bewegungsgleichungen sind hier, wo $f(r) = -k^2 r$ gesetzt werden kann,

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y. \end{cases}$$

Da die Variabeln x und y in diesen Gleichungen getrennt erscheinen, dürfen wir beide getrennt behandeln.

Dies kann nach § 6, 3 geschehen, doch gestaltet sich die Rechnung eleganter durch eine andere Methode, die auch bei komplizierteren Gleichungen, wie sie weiter unten vorkommen, anwendbar ist.

3. Sei die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung*) mit reellen Koeffizienten

---

*) Die allgemeinste Form einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{2}$$

vorgelegt. Man übersieht leicht, dafs $y = e^{\lambda x}$ bei geeigneter Bestimmung von λ der Gleichung (2) Genüge leisten wird. In der That erhalten wir durch Einsetzen dieses y und Weglassen des gemeinsamen Faktors $e^{\lambda x}$ die Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{3}$$

welche durch die beiden Werte

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \\ \lambda_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases} \tag{4}$$

befriedigt wird.

Aber nicht nur $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$, sondern auch jeder Ausdruck

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{5}$$

genügt der Gleichung (2), und da (5) zwei willkürliche Konstanten enthält, so ist es das vollständige Integral von (2); nur im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ oder $a^2 - 4b = 0$ ziehen sich die beiden Konstanten in einzige zusammen, so dafs wir nach einem allgemeineren Integrale zu suchen haben. Durch einen Grenzübergang kann man das Resultat für diesen Fall aus dem allgemeinen herleiten; es ist

$$y = e^{\lambda_1 x}(c + c_1 x). \tag{6}$$

Wir begnügen uns damit, die Richtigkeit desselben durch Einsetzen in (2) nachzuweisen; es wird

$$e^{\lambda_1 x}(c\lambda_1^2 + 2c_1\lambda_1 + c_1\lambda_1^2 x) + ae^{\lambda_1 x}(c\lambda_1 + c_1 + c_1\lambda_1 x)$$
$$+ be^{\lambda_1 x}(c + c_1 x) = 0$$

oder

$$c(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + c_1(2\lambda_1 + a) + c_1 x(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) = 0,$$

eine Gleichung, die thatsächlich befriedigt ist, da hier

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2}, \quad a^2 = 4b$$

zu setzen ist.

4. Während der Ausdruck (6) für reelle c und c_1 reell ist, bedarf

---

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + f_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + f_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_n(x)\, y = f(x);$$

alle linearen Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

lassen sich nach Analogie der obigen behandeln.

(5) noch der weiteren Diskussion. Ist $a^2 - 4b > 0$, sind also λ_1 und λ_2 reell, so erhalten wir aus (5) durch Einsetzen der Werte λ_1 und λ_2 den für reelle c_1 und c_2 reellen Ausdruck

$$(7)\qquad y = e^{-\frac{ax}{2}}\left(c_1 e^{\frac{x}{2}\sqrt{a^2-4b}} + c_2 e^{-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-4b}}\right).$$

Haben wir dagegen $a^2 - 4b < 0$, so ist

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}\left(c_1 e^{\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}} + c_2 e^{-\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}}\right)$$

oder

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}\left[\frac{c_1+c_2}{2}\left(e^{\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}} + e^{-\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{c_1-c_2}{2}\left(e^{\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}} - e^{-\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}}\right)\right]$$

oder bei Einführung neuer Konstanten

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}\left[C_1 \cos\frac{x\sqrt{4b-a^2}}{2} + C_2 \sin\frac{x\sqrt{4b-a^2}}{2}\right],$$

ein Ausdruck, der für reelle C_1 und C_2 reell ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir weiter

$$C_1 = C\sin\alpha,\quad C_2 = C\cos\alpha$$

setzen, worin C und α neue willkürliche Konstanten sind; man braucht zu diesem Zwecke nur $C^2 = C_1^2 + C_2^2$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$ zu nehmen. Dann erlangt der Ausdruck die einfache Gestalt

$$(8)\qquad y = Ce^{-\frac{ax}{2}}\sin\left(\frac{x\sqrt{4b-a^2}}{2} + \alpha\right).$$

5. Als Lösungen von (1) erhalten wir durch geeignete Spezialisierung, da hier $a^2 - 4b = -4k^2 < 0$ ist,

$$(9)\qquad \begin{cases} x = A\sin(kt+\alpha), \\ y = B\sin(kt+\beta), \end{cases}$$

worin A, B, α, β Konstanten sind, die von der Anfangslage und der Anfangsgeschwindigkeit nebst deren Richtung abhängen. A und B können ohne Beschränkung der Allgemeinheit als positiv angenommen werden.

6. Geht die Bewegung lediglich in der x-Achse vor sich, ist also $B = 0$, so besteht sie in einem periodischen Oszillieren um den Nullpunkt. Die Dauer einer ganzen Oszillation, d. h. eines Hin- und Hergangs zusammen, ist

$$(10) \qquad T = \frac{2\pi}{k};$$

Hin- und Hergang erfolgen in durchaus symmetrischer Weise. Die gröfsten Entfernungen vom Zentrum betragen $+A$ und $-A$; man bezeichnet A als die Amplitude der Oszillation. Die Schwingungsdauer ist von der Amplitude unabhängig. Die Geschwindigkeit in jedem Momente ist durch Differentiation von (9) zu finden. Beim Durchgang durch das Zentrum erreicht die Geschwindigkeit ihr Maximum.

7. Die allgemeine Bewegung nach den Gleichungen (9) können wir — es ist dies durch eine einfache Konstruktion ausführbar — uns aus zwei Oszillationen der beschriebenen Art mit verschiedener Amplitude und verschiedener Durchgangszeit durch das Zentrum zusammengesetzt denken; die eine geht in der x-Achse, die andere in der y-Achse vor sich. Eliminieren wir t aus den Gleichungen (9), indem wir zuerst die Sinus entwickeln, dann $\sin kt$ und $\cos kt$ berechnen und hierauf quadrieren und addieren, so erhalten wir die Bahngleichung

$$(Bx \sin\beta - Ay\sin\alpha)^2 + (Bx\cos\beta - Ay\cos\alpha)^2 = A^2B^2\sin^2(\alpha-\beta)$$

oder

$$(11) \qquad B^2x^2 - 2AB\cos(\alpha-\beta)xy + A^2y^2 = A^2B^2\sin^2(\alpha-\beta).$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, da

$$B^2A^2 + A^2B^2\cos^2(\alpha-\beta) > 0$$

ist. Die Bahn ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Zentrum der Attraktion ist.

Die Umlaufszeit ist der Dauer der beiden einzelnen Oszillationen $T = \frac{2\pi}{k}$ gleich; sie ist unabhängig von der Gestalt und Gröfse der Bahn*).

Sollen die x- und y-Achse die Hauptachsen der Ellipse werden, so mufs

$$(12) \qquad \cos(\alpha-\beta) = 0, \quad \text{also} \quad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + n\pi$$

sein, worin n eine ganze Zahl bedeutet. Die Oszillationen in der x- und y-Achse müssen um eine Vierteloszillation in der Schwingungsphase**) differieren.

Soll die Bahn ein Kreis werden, so mufs aufserdem noch $A = B$ sein.

---

*) Die Anziehung proportional der Entfernung ist das einzige Attraktionsgesetz, bei dem der bewegliche Punkt eine immer geschlossene Kurve in immer derselben Zeit beschreibt, wie auch die Anfangsbedingungen sein mögen. Dies wurde von Lespiault, Darboux (Bull. d. sc. math.), B. 4 und Chevilliet, Nouv. Ann. de Math., (2), B. 13 bewiesen.

**) D. h. die Zeiten, zu welchen der materielle Punkt infolge einer der Oszillationen durch das Zentrum gehen würde, müssen um jene Gröfse auseinander liegen.

8. Wir wollen die harmonische Bewegung auf einer Geraden noch für den Fall untersuchen, daſs die Bewegung einen von der Geschwindigkeit abhängigen Widerstand findet. Das Problem läſst sich leicht durchführen, wenn der Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist. Dies tritt wirklich mit ziemlicher Genauigkeit in mehreren Fällen ein, z. B. wenn die Bewegung durch Elastizität veranlaſst wird und sich sog. innere Reibung geltend macht, oder wenn die Schwingungen einer Magnetnadel durch einen umgebenden Metallring gedämpft werden*).

Wir haben für alle Phasen der Bewegung

$$(13)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x - 2l\frac{dx}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2l\frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

worin l eine durch die Beobachtung im einzelnen Falle zu bestimmende Konstante ist.

Die Formeln von 3. und 4. geben uns das Integral

a) für $l^2 > k^2$:

$$(14)\qquad x = e^{-lt}\left(c_1 e^{t\sqrt{l^2-k^2}} + c_2 e^{-t\sqrt{l^2-k^2}}\right);$$

b) für $l^2 = k^2$:

$$(15)\qquad x = e^{-lt}(c + c_1 t);$$

c) für $l^2 < k^2$:

$$(16)\qquad x = Ce^{-lt}\sin\left(t\sqrt{k^2-l^2} + \alpha\right).$$

Der auftretenden Wurzelgröſse wollen wir immer das positive Zeichen geben.

9. Bilden wir im Falle a) den Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ und setzen ihn gleich Null, so erhalten wir als Bedingung eines Maximums oder Minimums von x

$$(17)\qquad e^{2t\sqrt{l^2-k^2}} = \frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{\sqrt{l^2-k^2}+l}{\sqrt{l^2-k^2}-l},$$

der ein reeller Wert von t genügt, wenn c_1 und c_2 verschiedene Zeichen haben. Andrerseits muſs x für unendlich wachsende t sich der Null nähern, da dies beide Glieder der rechten Seite von (14) thun (man bemerke, daſs $l > \sqrt{l^2 - k^2}$ ist). Daher entfernt sich der materielle Punkt entweder zuerst vom Zentrum, um dann umzukehren und sich dem Zentrum asymptotisch zu nähern; oder er bewegt sich nach dem Zentrum hin und durch dasselbe hindurch, um dann umzukehren und sich dem Zentrum in gleicher Weise zu nähern; oder er bewegt sich ohne Umkehr asymptotisch gegen das Zentrum.

Im Falle b) wird die Bedingung für ein Maximum oder Minimum

$$(18)\qquad t = \frac{c_1 - lc}{lc_1};$$

die Bewegung verläuft in derselben Weise wie im ersten Falle.

---

*) Siehe z. B. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 4. Aufl., B. 4, pag. 1083.

Im Falle c) ist der Verlauf mit der Bewegung ohne Reibung zu vergleichen, wie sie durch die erste der Gleichungen (9) gegeben ist. Auch hier finden Oszillationen um das Zentrum statt, deren Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - l^2}}, \tag{19}$$

also größser als ohne Reibung ist. Die konstante Amplitude A in (9) wird aber durch die stets abnehmende Gröfse Ce^{-lt} ersetzt. Wir haben also in diesem Falle Oszillationen mit gleichbleibender Schwingungsdauer, aber immerfort asymptotisch gegen die Null abnehmender Amplitude. Der Logarithmus der Amplitude nimmt proportional der Zeit ab. Gaufs bezeichnete diese Abnahme als das logarithmische Dekrement.

§ 9.

Das Newton'sche Gravitationsgesetz und die Planetenbewegung.

1. Das von Newton entdeckte Gesetz der allgemeinen Gravitation lautet:

Je zwei materielle Teile (Punkte) ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft an, welche dem Produkte ihrer Massen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.

Dieses Gesetz, welches durch den Vergleich astronomischer Rechnungen und Beobachtungen immer aufs genaueste bestätigt worden ist*), welches auch bei irdischen Körpern nachgewiesen ist und gegen welches niemals eine widerstreitende Thatsache vorgebracht werden konnte, scheint allgemein giltig und einfach, d. h. auf keine anderen, einfacheren Naturgesetze zurückführbar zu sein. Ob es das einzige Gesetz ist, welches alle Bewegungen in der Welt leitet, ist in keiner Weise nachgewiesen; es stehen dem noch schwerwiegende Bedenken entgegen, deren Beseitigung jedoch nicht ausgeschlossen ist.

Gegen die Einfachheit des Gravitationsgesetzes sind vielfach Bedenken erhoben worden; es erscheint Vielen undenkbar, dafs eine Kraft durch den leeren Raum hindurch wirke. Demnach wäre eine Fortpflanzung der Schwerkraft nur durch ein vermittelndes Medium, ähnlich wie bei dem Lichte denkbar; es würde eine stetige Fortwirkung von einem Teilchen zum benachbarten, keine Fernwirkung statthaben. Freilich liegt eine Wirkung dieser Art der Anschauung näher, da wir solche Vorgänge fortwährend beobachten; aber eine Erklärung der kontinuierlichen Fortwirkung ist in keiner Weise leichter als die der Fernwirkung. Leitet doch gerade der Versuch, die Vorgänge in zusammenhängenden Körpern zu erklären, auf

*) Bei wenigen Rechnungen, welche nicht völlig mit der Beobachtung stimmen, ist das Vorhandensein nicht in Rechnung gezogener Einflüsse so gut wie sicher.

die allerdings rein hypothetische Annahme von diskreten Atomen. Auch wäre es sehr unwahrscheinlich, dafs bei einer Fortpflanzung der Schwerkraft durch ein vermittelndes Medium die verschiedenartige Natur des letzteren auf die Wirkung ohne Einflufs bleiben sollte; ein solcher Einflufs ist aber nirgends wahrgenommen worden. Die Hypothese von Atomen, welche eine endliche Ausdehnung besitzen und gegen einander stofsen, führt auf fundamentale Schwierigkeiten, die erst später erörtert werden können. Nehmen wir hinzu, dafs die gesamte Form der räumlichen Anschauung doch nur in der Beschaffenheit unseres Geistes wurzelt und dafs wir in keiner Weise etwas über die Beziehungen der Dinge an sich aussagen können, so gelangen wir zu dem Schlusse, dafs die Einwendungen gegen die Einfachheit des Gravitationsgesetzes nicht stichhaltig sind; wir betrachten dasselbe als einfach und allgemein giltig*).

Noch könnte ein Zweifel entstehen, ob das Gesetz nicht vielleicht für sehr kleine Distanzen modifiziert werden mufs, um die Molekularwirkungen zutreffend zu erklären; aber auch hierfür sind keine zwingenden Gründe vorhanden. Andrerseits ist die Abnahme der Attraktion mit dem Quadrate der Entfernung das einzige Gesetz, welches sich naturgemäfs erklärt. Denken wir uns nämlich den anziehenden Punkt mit konzentrischen Kugelflächen umgeben, so verhalten sich die Flächeninhalte zweier derselben wie die Quadrate der Radien; nehmen wir nun an, dafs die Punkte auf je einer Kugelfläche zusammen die gleiche Kraftwirkung erfahren, so verhalten sich die auf je zwei gleiche Teilchen entfallenden umgekehrt wie die Quadrate der Abstände vom Zentrum. Selbstverständlich kommt dieser Betrachtung keine Beweiskraft zu; sie dient nur dazu, das Gesetz a priori einleuchtend zu machen.

2. Wir werden später nachweisen, dafs Kugeln, welche aus homogenen konzentrischen Schichten zusammengesetzt sind, in Bezug auf die Gravitationswirkung ersetzt werden können durch ihre Mittelpunkte, in die man sich ihre Gesamtmasse verlegt denkt. Da nun die Sonne, soweit die Beobachtungen reichen, wirklich eine Kugel dieser Art ist, die Planeten aber dieser Gestalt so nahe kommen, dafs man die Abweichung wenigstens bei der Wirkung auf gröfsere Distanzen vernachlässigen kann, die Kometen endlich ihrer äufserst geringen Masse wegen gar nicht in Betracht zu ziehen sind**), so kann man mit sehr weitgehender Genauigkeit annehmen, dafs das Planetensystem aus einer Anzahl mate-

*) Über die mannigfachen Versuche, die *actio in distans* bei der Gravitation zu beseitigen, siehe: Isenkrahe, das Rätsel von der Schwerkraft (Braunschweig, 1879). — Tissérand untersuchte (Comptes rendus, B. 75) die Attraktion nach dem Weber'schen elektrodynamischen Gesetz:

$$f = \frac{cmm_1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{h^2}\, r\, \frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

**) Auch die Wirkung der Fixsterne kann wegen deren aufserordentlicher Entfernung vernachlässigt werden.

rieller Punkte besteht, die sich nach dem Gesetze der Gravitation anziehen. Nur bei der Bahnberechnung der Trabanten der Planeten muſs die Abweichung der letzteren von der Kugelgestalt korrekturweise in Rechnung gezogen werden. Aber auch in dieser vereinfachten Gestalt würde das Problem der Planetenbewegung das zur Zeit durch die Analysis zu Leistende übersteigen, wenn nicht weitere vereinfachende Annahmen gemacht werden dürften. Die Masse der Sonne überwiegt die Massen sämtlicher Planeten derart, daſs man bei der Berechnung der Bahn eines Planeten nur die Wirkung der Sonne auf ihn zu beachten braucht; die Einwirkung der übrigen Planeten kann dann nachträglich als ziemlich geringfügige Korrektur mit genügender Annäherung berücksichtigt werden. Man bezeichnet alle Einwirkungen, welche das Resultat des einfacheren Problems variieren, als Störungen oder Perturbationen.

3. Um die Bahn eines Planeten unter der Hypothese, daſs die Sonne allein auf ihn einwirkt, zu berechnen, betrachten wir § 7, 5 entsprechend den Sonnenmittelpunkt als festliegend; die Ortsänderungen, welche die Sonne durch die Attraktion der übrigen Planeten erleidet, werden bei den Störungen in Rechnung gebracht. Dem allgemeinen Gebrauche der Astronomen zufolge nehmen wir die Masse der Sonne*) als Masseneinheit; die Masse des Planeten sei m.

Bezeichnet noch f eine positive Konstante**), welche für sämtliche Planeten die gleiche ist, so haben wir nach § 7, (10) die Bewegungsgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -f(1+m)\dfrac{x}{r^3} = -\mu\dfrac{x}{r^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -f(1+m)\dfrac{y}{r^3} = -\mu\dfrac{y}{r^3}; \end{cases}$$

geht die Bewegung in einer Geraden vor sich, auf welcher der Sonnenmittelpunkt liegt, so gilt die einfachere Gleichung

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \mp\frac{f(1+m)}{x^2} = \mp\frac{\mu}{x^2},$$

wo das Minus- oder Pluszeichen zu benutzen ist, je nachdem der bewegte Punkt sich auf der positiven oder negativen Hälfte der x-Achse befindet.

4. Wir behandeln zuerst den letzten, einfacheren Fall nach § 6, 3. Bei der dort gewählten Bezeichnung erhalten wir

$$(3)\qquad \frac{v^2}{2} = F(x) = \pm\frac{\mu}{x} - c,$$

---

*) Oder überhaupt die Masse des angenommenen Zentralkörpers. In den Mittelpunkt desselben verlegen wir, § 7, 5 entsprechend, den Nullpunkt.

**) Die Konstante f besitzt, wie aus Vergleichung der rechten und linken Seiten der folgenden Gleichungen hervorgeht, die Dimension $l^3 t^{-2} m^{-1}$. Benutzt man Millimeter, Milligramm und Sekunde als Einheiten, so ist

$$f = 0{,}0000000657.$$

also, wenn c positiv ist,

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{-2c \pm \frac{2\mu}{x}}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x}}$$

$$= -\frac{1}{2c}\int \frac{(-2cx \pm \mu)\,dx}{\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x}} + \frac{\mu}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x}}$$

oder

$$(4) \quad t = -\frac{1}{2c}\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x} - \frac{\mu}{(2c)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\mu \mp 2cx}{\mu} + C.$$

Ist c negativ, so tritt an Stelle von Formel (4) die folgende:

$$(5) \quad t = -\frac{1}{2c}\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x}$$

$$\mp \frac{\mu}{(-2c)^{\frac{3}{2}}} \log\left[\pm \mu - 2cx + 2\sqrt{c^2x^2 \mp c\mu x}\right] + C.$$

Für $c = 0$ ergiebt sich

$$(6) \quad t = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mu}}(\pm x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

In welcher Weise die Doppelzeichen zu verwenden sind, wurde oben angegeben. Außerdem liefern Gleichung (5) und (6) infolge der Zweideutigkeit der Wurzelgrößen für jedes t zwei Werte, (4) aber doppelt unendlich viele. Im letzteren Falle entspricht, wie aus den vorhergehenden unausgeführten Integralen ersichtlich ist, dem Wechsel des Vorzeichens der Wurzel die Ersetzung von arcsin durch arccos.

Im Falle (4) besteht die Bewegung in einem periodischen Oszillieren des materiellen Punktes um das Zentrum. Die Geschwindigkeit verschwindet nach (3), wenn

$$x = \pm \frac{\mu}{c}$$

wird; der Punkt entfernt sich also beiderseits bis zu diesem Betrage vom Zentrum. Die Dauer einer ganzen Oszillation ist

$$T = \frac{\mu\pi}{c^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}.$$

In den Fällen (5) und (6) kommt der materielle Punkt aus dem Unendlichen*), um nach Passieren des Zentrums auf der entgegengesetzten Seite wieder ins Unendliche zu gehen. Bei (5) nähert sich die Geschwindigkeit im Unendlichen einem festen, endlichen Werte, bei (6) aber der Null.

Beim Passieren des Zentrums wird die Geschwindigkeit in jedem Falle unendlich.

---

*) Natürlich nur, wenn man sich die Bewegung über ihren wirklichen Anfang hinaus rückwärts fortgesetzt denkt.

5. Behandelt man die allgemeinen Gleichungen (1) nach den Vorschriften von § 6, so erhält man zunächst

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = c, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{r} + C. \tag{8}$$

Weiter findet man für Polarkoordinaten

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2r^4}{c^2}\left(\frac{\mu}{r} + C\right) - r^2}} = c\int \frac{dr}{\sqrt{2Cr^2 + 2\mu r - c^2}} \tag{9}$$

und durch Integration

$$\varphi = -\arccos\frac{\mu r - c^2}{r\sqrt{\mu^2 + 2c^2 C}} + \varphi_0 \tag{10}$$

oder, wenn wir das Koordinatensystem so wählen, dafs $\varphi_0 = \pi$ wird,

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2c^2C}{\mu^2}} \cdot \cos\varphi}. \tag{11}$$

6. Die Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes in Polarkoordinaten mit dem einen Brennpunkte als Nullpunkt lautet, wenn φ von dem kleineren, resp. endlichen Abschnitte der grofsen Achse aus gerechnet wird,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \tag{12}$$

worin p den Halbparameter, ε die numerische Exzentrizität bezeichnet. Bei der Ellipse und Hyperbel, deren Mittelpunktsgleichungen resp.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sind, ist $p = \frac{b^2}{a}$; bei der Parabel mit der Scheitelgleichung $y = 2px$ ist p die hierin vorkommende Gröfse. Bei der Ellipse und Hyperbel ist

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \text{resp.} \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

dagegen bei der Parabel $\varepsilon = 1$ zu nehmen.

Wir können daher sagen, dafs (12) eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel darstellt, je nachdem $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon > 1$ ist. Für den Kreis ist im Speziellen $\varepsilon = 0$ *).

---

*) Will man sich die Formel (12) entwickeln, so geht man am bequemsten von den bekannten Definitionen der Kegelschnitte als geometrische Örter aus. — Bei der Ellipse ist $a > b$ vorausgesetzt.

7. Die Gleichung (11) stellt hiernach einen Kegelschnitt dar, in dessen einem Brennpunkte die Sonne steht, und zwar entspricht $\varphi = 0$ das Perihel (der der Sonne nächste Punkt der Bahn). Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $C < 0$, $C = 0$ oder $C > 0$ ist; $C < -\frac{\mu^2}{2c^2}$ ist überhaupt ausgeschlossen; für $C = -\frac{\mu^2}{2c^2}$ wird die Kurve speziell ein Kreis.

Stellt man dies Resultat mit (8) zusammen, so gelangt man zu dem merkwürdigen Ergebnis, dafs man die Art des Kegelschnitts, in welchem sich der Planet bewegt, nach der Geschwindigkeit beurteilen kann, welche er in einer bestimmten Entfernung von der Sonne besitzt; die Bahn ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} < 0, \quad = 0 \quad \text{oder} \quad > 0$$

ist. Die Richtung dieser Geschwindigkeit ist hierfür ganz gleichgiltig.

Die Vorkommnisse von Nr. 4 ergeben sich nur teilweise als Degenerationen dieser drei Fälle.

Wir legen in Zukunft die Gleichung (12) der weiteren Rechnung zu Grunde, indem wir

$$(13) \qquad p = \frac{c^2}{\mu}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{c^2 C}{\mu^2}}$$

oder

$$(14) \qquad p = \frac{c^2}{f(1+m)}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{c^2 C}{f^2(1+m)^2}}$$

setzen; umgekehrt ist

$$(15) \qquad c = \sqrt{p f(1+m)}, \quad C = \frac{f(1+m)(\varepsilon^2 - 1)}{p},$$

so dafs die beiden Integrationskonstanten durch die Bestimmungsstücke p und ε der Planetenbahn, die Kraft f und die Masse m ausgedrückt sind.

8. Aus der Gleichung (7) wird durch Einsetzen des Wertes von r aus (12) und Integration

$$(16) \qquad t = \frac{p^2}{c} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

Diese Gleichung kann entweder direkt weiter behandelt oder durch Einführung einer neuen Variabeln auf eine einfachere Form gebracht werden. Wir führen das letztere zunächst für die elliptische Bewegung durch. Beschreiben wir (Fig. 6) über der grofsen Achse $2a$ der Bahnellipse einen Kreis, fällen vom Endpunkte B des Radiusvektor r eine Ordinate BA auf die grofse Achse, verlängern diese Gerade, bis sie den Kreis in C schneidet, und verbinden diesen Punkt mit dem Mittelpunkte O, so bezeichnen wir den Winkel AOC mit u. Dem astronomischen Sprachgebrauche folgend nennen wir die grofse Bahnachse die Apsidenlinie, ihre Endpunkte die Apsiden, den Winkel φ die wahre Anomalie und den Winkel u die exzentrische Anomalie (d. h. die vom Zentrum aus konstruierte A.). Wir erhalten, indem wir OA doppelt ausdrücken,

$$a \cos u = r \cos \varphi + a\varepsilon$$

oder nach Einfügung des Wertes von r aus (12)

$$a \cos u = \frac{p \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + a\varepsilon,$$

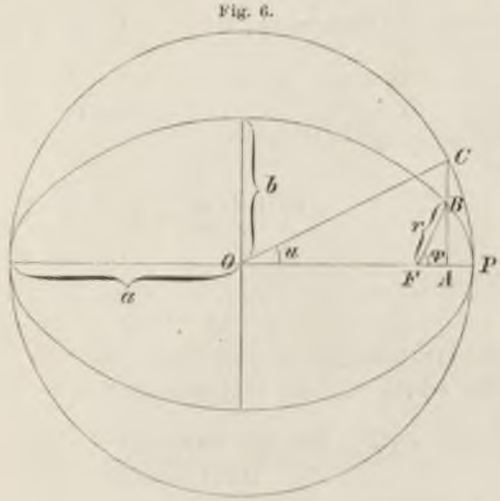
woraus*)

(17)
$$\cos \varphi = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u}$$

und

(18)
$$\cos u = \frac{\cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Fig. 6.



folgt. Aufserdem findet man, indem man

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}$$

berechnet, die zur Umrechnung bequemste Formel

(19)
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Für r erhält man mittels (12) und (17)

(20)
$$r = a(1 - \varepsilon \cos u).$$

---

*) Es ist

$$p + a\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a} = a.$$

Aus (17) folgt durch Differentiation

$$\sin\varphi d\varphi = \frac{(1-\varepsilon^2)\sin u}{(1-\varepsilon\cos u)^2}du$$

oder, wenn man $\sin\varphi$ aus (17) berechnet,

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos u}du.$$

Setzt man dies und $\cos\varphi$ aus (17) in (16) ein, so findet man unter Benutzung von (15)

$$t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(1+m)}(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_0^u (1-\varepsilon\cos u)\,du$$

$$= \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(1+m)}}\int_0^u (1-\varepsilon\cos u)\,du$$

und nach Ausführung der Integration, falls $t=0$ den Werten $\varphi = u = 0$ entspricht,

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(1+m)}}(u - \varepsilon\sin u)$$

oder, wenn man

(21) $$\frac{\sqrt{f(1+m)}}{a^{\frac{3}{2}}} = n$$

setzt,

(22) $$nt = u - \varepsilon\sin u,$$

die Kepler'sche Gleichung.

Für $u = 2\pi$ erhält man die Umlaufszeit

(23) $$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(1+m)}}.$$

Hiernach kann die Kepler'sche Gleichung weiter geschrieben werden*)

(24) $$\frac{2\pi t}{T} = u - \varepsilon\sin u.$$

Kennt man daher die leicht zu ermittelnde Umlaufszeit, so kann man nach (19) und (24) t zu einem gegebenen φ berechnen; die wichtigere umgekehrte Aufgabe, u und φ zu t zu berechnen, kann durch numerische Auflösung der transzendenten Gleichung (24) oder durch die folgende von Lagrange herrührende Reihenentwicklung gelöst werden.

*) $nt = \frac{2\pi t}{T}$ heißt die mittlere Anomalie. Sie ist die wahre Anomalie eines hypothetischen Planeten, welcher eine kreisförmige Bahn mit dem Radius a um die Sonne beschreibt, gerechnet von der Perihelrichtung des wirklichen Planeten aus.

9. Ist die Gleichung

$$x = z - \varepsilon f(z) \tag{25}$$

vorgelegt, in der x vorläufig als Konstante, ε als unabhängige, z als abhängige Variable betrachtet werde, so wird sich im allgemeinen für hinreichend kleine ε eine Entwickelung von z nach Potenzen von ε gemäfs der Maclaurin'schen Reihe herstellen lassen; die genaueren Bedingungen dafür mögen hier übergangen werden. Es wird

$$z = (z)_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)_0 \frac{\varepsilon}{1!} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 \frac{\varepsilon^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial \varepsilon^3}\right)_0 \frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots \tag{26}$$

sein, wo die an die Klammer beigesetzte Null bedeuten soll, dafs der eingeklammerte Ausdruck für $\varepsilon = 0$ zu nehmen ist. Es handelt sich nur darum, die Gröfsen $\left(\frac{\partial^n z}{\partial \varepsilon^n}\right)_0$ zu entwickeln.

Betrachten wir jetzt z als Funktion der beiden Variabeln ε und x, so haben wir durch Differentiation von (25) nach ε

$$0 = \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} - f(z) - \varepsilon f'(z) \frac{\partial z}{\partial \varepsilon},$$

also

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{f(z)}{1 - \varepsilon f'(z)}; \tag{27}$$

durch Differentiation nach x aber folgt

$$1 = \frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon f'(z) \frac{\partial z}{\partial x},$$

also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - \varepsilon f'(z)}, \tag{28}$$

somit

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = f(z) \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{29}$$

Durch weitere Differentiation von (29) nach ε und x ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial z}{\partial x} + f(z) \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial x} = f'(z) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(z) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

die Elimination von $\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial x}$ aus diesen Gleichungen liefert bei Benutzung von (29)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} = 2 f(z) f'(z) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(z)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \left[f(z)^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right]}{\partial x}. \tag{30}$$

Setzen wir $\varepsilon = 0$, also $z = x$, so haben wir zunächst nach (29) und (30)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)_0 = f(x), \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 = \frac{\partial [f(x)^2]}{\partial x}.$$

Um die weiteren Koeffizienten der Reihe (26) zu ermitteln, bezeichnen wir vorerst mit $\varphi(z)$ eine beliebige Funktion, während z noch durch die Gleichung (25) bestimmt ist; wir haben

$$(31) \qquad \frac{\partial\left[\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \varepsilon} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(z)\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon\,\partial x}$$

$$= \varphi'(z) f(z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \varphi(z) f'(z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \varphi(z) f(z)\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$$

$$= \frac{\partial\left[\varphi(z) f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x}.$$

Mittels (31) und (30) finden wir nun successive

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \varepsilon^3} = \frac{\partial\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f(z)^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(f(z)^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]}{\partial x} = \frac{\partial^2\left[f(z)^3\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial \varepsilon^4} = \frac{\partial^3\left[f(z)^4\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x^3} \quad \text{u. s. w.}$$

Setzen wir schliefslich $\varepsilon = 0$, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial \varepsilon^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}[f(x)^n]}{\partial x^{n-1}},$$

und die Reihenentwicklung lautet

$$(32) \qquad z = x + \frac{\varepsilon}{1} f(x) + \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}\frac{\partial[f(x)^2]}{\partial x} + \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial[f(x)^3]}{\partial x^2} + \cdots.$$

Wenden wir dieses Verfahren auf Gleichung (22) an, in der wir

$$nt = \frac{2\pi t}{T} = x$$

setzen u. s. w., so finden wir die Reihe

$$(33) \qquad u = nt + \frac{\varepsilon}{1}\sin nt + \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}\frac{\partial \sin^2 nt}{\partial(nt)} + \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^2 \sin^3 nt}{\partial^2(nt)} + \cdots,$$

oder nach Ausführung der Differentiationen und Umgestaltung der Ausdrücke

$$(34) \qquad u = nt + \varepsilon \sin nt + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2nt$$
$$+ \frac{1}{8}\varepsilon^3(3\sin 3nt - \sin nt)$$
$$+ \frac{1}{6}\varepsilon^4(2\sin 4nt - \sin 2nt)$$
$$+ \frac{1}{384}\varepsilon^5(125\sin 5nt - 81\sin 3nt + 2\sin nt)$$
$$+ \cdots.$$

Die Konvergenzbedingungen dieser Reihe, welche für die Planetenbahnen vollkommen genügt, wollen wir nicht weiter untersuchen. In vielen Fällen wird man mit der ersten Annäherung

$$u = nt + \varepsilon \sin nt \tag{35}$$

auskommen, da ε bei den meisten Planeten sehr klein ist.

Aus (35) folgt, wenn in gleicher Weise nur die erste Potenz von ε berücksichtigt wird,

$$\cos u = \cos nt \cos(\varepsilon \sin nt) - \sin nt \sin(\varepsilon \sin nt) = \cos nt - \varepsilon \sin^2 nt;$$

ferner nach (17), wenn $\frac{1}{1 - \varepsilon \cos u} = 1 + \varepsilon \cos u$ gesetzt wird*),

$$\begin{aligned}\cos\varphi = \cos u - \varepsilon + \varepsilon\cos^2 u &= \cos nt - \varepsilon\sin^2 nt - \varepsilon + \varepsilon\cos^2 nt\\ &= \cos nt - 2\varepsilon\sin^2 nt\end{aligned}$$

oder

$$\varphi = nt + 2\varepsilon \sin nt, \tag{35a}$$

wovon man sich dadurch überzeugt, dafs man von beiden Seiten den Kosinus nimmt.

Aus (20) folgt mit der gleichen Näherung

$$r = a(1 - \varepsilon \cos nt). \tag{35b}$$

10. Sind die Umlaufszeiten zweier Planeten mit den Massen m_1 und m_2 T_1 und T_2, während ihre mittleren Entfernungen von der Sonne, d. h. die grofsen Halbachsen ihrer Bahnen, welche das arithmetische Mittel ihrer gröfsten und kleinsten Entfernung darstellen, a_1 und a_2, so haben wir nach (23)

$$T_1^2 : T_2^2 = \frac{a_1^3}{1 + m_1} : \frac{a_2^3}{1 + m_2}. \tag{36}$$

Sind die Massen der beiden Planeten gleich oder so klein, dafs sie gegen die Sonnenmasse vernachlässigt werden dürfen, so erhalten wir die einfachere Proportion

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3. \tag{37}$$

Kepler stellte auf Grund eingehender Beobachtungen für die Planetenbewegungen die folgenden drei Gesetze auf:

a) Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht;

b) der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (§ 6, 8);

---

*) Es ist genau

$$\frac{1}{1 - \varepsilon \cos u} = 1 + \varepsilon \cos u + \varepsilon^2 \cos^2 u + \cdots$$

c) die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

Die beiden ersten Gesetze treffen, von den Störungen abgesehen, vollkommen zu; das dritte Gesetz ist nur näherungsweise richtig und mufs nach Gleichung (36) ergänzt werden.

Die drei Gesetze geben eine *vollständige* Beschreibung der störungsfreien Planetenbewegung; man kann aus ihnen umgekehrt das Gesetz der Gravitation ableiten.

11. Ist die Bahn eines Himmelskörpers parabolisch oder hyperbolisch, so gelangt derselbe aus dem Weltraum in den Attraktionsbereich der Sonne*) und verläfst denselben, falls seine Bahn keine Ablenkung durch die Planeten erfährt, für immer wieder. Bei einigen Kometen ist dies der Fall. Übrigens ist die parabolische Bahn ebenso wie die genau kreisförmige unendlich unwahrscheinlich, da Parabel und Kreis nur ganz spezielle Fälle unter unendlich vielen Möglichkeiten sind. Da indessen die Bahnen vieler Kometen, wenigstens in ihren der Sonne nahen Teilen, der Parabel sehr nahe kommen, so legt man ihrer Berechnung die Annahme der *parabolischen* Bahn zu Grunde.

Für die letztere wird aus (16)

$$(38) \qquad t = \frac{p^2}{c} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{f(1+m)}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}};$$

die Integration liefert, wenn $\varphi = 0$ für $t = 0$ ist,

$$(39) \qquad t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{f(1+m)}} \left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\right].$$

Die Berechnung der wahren Anomalie aus der mittleren (der Zeit) erfordert also hier die Lösung einer kubischen Gleichung.

12. Die *hyperbolische* Bewegung können wir aus der elliptischen ableiten. Die Ellipsengleichung geht in die Hyperbelgleichung über, wenn bi an Stelle von b gesetzt wird; soll $p = \frac{b^2}{a}$ positiv bleiben, so müssen wir a als *negativ* annehmen. Da die rechte Seite von (18) > 1 wird (es ist $\cos\varphi + \varepsilon - 1 - \varepsilon\cos\varphi = (\cos\varphi - 1)(\varepsilon - 1) > 0$), so wird $u = iu_1$ rein imaginär. Wir erhalten aus (18)

$$(40) \qquad \frac{e^{u_1} + e^{-u_1}}{2} = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi};$$

u_1 und φ können hiernach ohne Schwierigkeit durcheinander ausgedrückt werden. Aus (22) wird

*) D. h. in denjenigen Bereich, in welchem die Attraktion der Sonne eine stärkere Wirkung ausübt als die der anderen Himmelskörper.

$$\frac{\sqrt{f(1+m)}}{(-a)^{\frac{3}{2}}}\, t = u_1 - \varepsilon\, \frac{e^{u_1} - e^{-u_1}}{2}, \tag{41}$$

eine durch Näherung zu lösende transzendente Gleichung, wenn u_1 gesucht ist.

13. Nach den gefundenen Formeln kann man die Stellung der Planeten und Kometen zu jeder Zeit berechnen (ohne Beachtungen der Störungen), wenn man nur die bestimmenden Gröfsen, die sog. Elemente ihrer Bahnen kennt. Es sind deren bei elliptischen und hyperbolischen Bahnen sechs, bei parabolischen fünf. Zwei Elemente bestimmen nämlich die Gröfse und Gestalt der elliptischen oder hyperbolischen Bahn (etwa a und b oder a und ε u. s. w.), eine (p) die der parabolischen. Um die Lage der Bahn im Raume zu fixieren, betrachten wir die Ebene der Erdbahn, die Ebene der Ekliptik, als Fundamentalebene; die Bahn des Himmelskörpers schneidet sie in einer Geraden, welche durch die Sonne geht, der Knotenlinie, ihre Endpunkte auf der Bahn heifsen die Knotenpunkte. Man unterscheidet den aufsteigenden und absteigenden Knoten; im ersteren bewegt sich der Himmelskörper nach derjenigen Seite der Ekliptikebene, auf welcher der Nordpol der Erde liegt. Der Winkel i zwischen der Ekliptik- und Bahnebene, sowie die Länge des aufsteigenden Knotens (d. h. der Winkel, welchen die nach dem aufsteigenden Knoten und dem Frühlingspunkte der Erdbahn von der Sonne aus gezogenen Radienvektoren miteinander bilden, im Sinne der Erdbewegung gerechnet) bestimmen die Lage dieser Ebene. Legt man weiter das Perihel der Bahn fest, indem man den Winkel seines Radiusvektor mit dem des aufsteigenden Knotens angiebt, wozu man gewöhnlich noch die Länge des letzteren addiert (Länge des Perihels*)), so ist auch die Lage der Bahn völlig bestimmt. Man braucht nur noch die Zeit (Epoche) anzugeben, zu der sich der Himmelskörper an einer bestimmten Stelle seiner Bahn befindet.

Die Umrechnung der Bewegung in astronomische Koordinaten, sowie die Bestimmung der Elemente aus Beobachtungen gehören in die Astronomie.

§ 10.

System von n materiellen Punkten, welche sich gegenseitig anziehen oder abstofsen.

1. Wir wollen jetzt untersuchen, welche allgemeineren Sätze über ein System von n materiellen Punkten gelten, die nach irgend welchen Gesetzen sich paarweise in der Richtung der Verbindungslinie Beschleunigungen derart erteilen, dafs die zwischen zwei Punkten wirkende Kraft

*) Dieselbe ist also die Summe zweier Winkel, welche gar nicht in derselben Ebene liegen.

dem Produkte ihrer Massen proportional ist; die Beschleunigung, die der eine von beiden empfängt, hängt daher nur von der Masse des anderen ab. Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte mit x_α, y_α, z_α, ihre Massen mit m_α und setzen

$$r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha} = \sqrt{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 + (z_\alpha - z_\beta)^2},$$

und ist dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung entsprechend $f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$, so haben wir durch Zusammensetzung der einzelnen Kraftkomponenten die Bewegungsgleichungen:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= m_2 f_{12}(r_{12})\frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + m_3 f_{13}(r_{13})\frac{x_1 - x_3}{r_{13}} \\
&\qquad + \cdots + m_n f_{13}(r_{1n})\frac{x_1 - x_n}{r_{1n}}, \\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= m_2 f_{12}(r_{12})\frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + m_3 f_{13}(r_{13})\frac{y_1 - y_3}{r_{13}} \\
&\qquad + \cdots + m_n f_{1n}(r_{1n})\frac{y_1 - y_n}{r_{1n}}, \\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= m_2 f_{12}(r_{12})\frac{z_1 - z_2}{r_{12}} + m_3 f_{13}(r_{13})\frac{z_1 - z_3}{r_{13}} \\
&\qquad + \cdots + m_n f_{1n}(r_{1n})\frac{z_1 - z_n}{r_{1n}}; \\
\frac{d^2x_2}{dt^2} &= m_1 f_{21}(r_{21})\frac{x_2 - x_1}{r_{21}} + m_3 f_{23}(r_{23})\frac{x_2 - x_3}{r_{23}} \\
&\qquad + \cdots + m_n f_{2n}(r_{2n})\frac{x_2 - x_n}{r_{2n}} \qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right.$$

2. Multiplizieren wir die Gleichungen für $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2x_2}{dt^2}$ u. s. w. mit m_1, m_2 u. s. w. und addieren, und führen dieselben Operationen mit den beiden analogen Gruppen durch, so erhalten wir, da sich immer je zwei Glieder wegheben,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} + \cdots + m_n\frac{d^2x_n}{dt^2} &= 0, \\
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} + \cdots + m_n\frac{d^2y_n}{dt^2} &= 0, \\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2z_2}{dt^2} + \cdots + m_n\frac{d^2z_n}{dt^2} &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Setzen wir

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \\
\eta &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \\
\zeta &= \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + m + \cdots + m_n}
\end{aligned}\right.$$

und nennen den Punkt ξ, η, ζ den Schwerpunkt des Systems, so folgen aus (2) die Gleichungen

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0, \tag{4}$$

d. h. auf den Schwerpunkt des Systems wirkt keine Beschleunigung ein, er bewegt sich also in einer Geraden (vgl. § 7, 3).

3. Multiplizieren wir die Gleichungen (1) der Reihe nach mit

$$m_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad m_1 \frac{dy_1}{dt}, \quad m_1 \frac{dz_1}{dt}; \quad m_2 \frac{dx_2}{dt}, \quad m_2 \frac{dy_2}{dt}, \quad m_2 \frac{dz_2}{dt} \quad \text{u. s. w.}$$

und addieren, so folgt

$$\sum m_\alpha \left[\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{d^2x_\alpha}{dt^2} + \frac{dy_\alpha}{dt}\frac{d^2y_\alpha}{dt^2} + \frac{dz_\alpha}{dt}\frac{d^2z_\alpha}{dt^2}\right] = \sum m_\alpha m_\beta f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \times$$

$$\frac{(x_\alpha - x_\beta)\left(\frac{dx_\alpha}{dt} - \frac{dx_\beta}{dt}\right) + (y_\alpha - y_\beta)\left(\frac{dy_\alpha}{dt} - \frac{dy_\beta}{dt}\right) + (z_\alpha - z_\beta)\left(\frac{dz_\alpha}{dt} - \frac{\partial z_\beta}{dt}\right)}{r_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum m_\alpha m_\beta f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \frac{dr_{\alpha\beta}}{dt},$$

worin die Summation links über alle α, die Summation rechts über alle Kombinationen von α und β, unter Ausschlufs von $\alpha = \beta$, jedesmal von 1 bis n auszudehnen ist. Durch Integration der Gleichung folgt

$$\frac{1}{2}\sum m_\alpha \left[\left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2\right] \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = \sum m_\alpha m_\beta \int f(r_{\alpha\beta})\, dr_{\alpha\beta}.$$

Bezeichnen wir die Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Punkte des Systems als die lebendige Kraft des Systems, die Summe der Einzelarbeiten als die Gesamtarbeit desselben, so können wir das Gesetz § 6, 9 unmittelbar auf das vorliegende System übertragen.

4. Findet die Attraktion zwischen sämtlichen Punkten nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze statt, so ist

$$\frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = f \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}} + c. \tag{6}$$

Die linke Seite und das erste Glied der rechten sind ihrer Natur nach positive Gröfsen. Ist daher c negativ, so mufs

$$f \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}} > -c$$

sein, woraus folgt, dafs nicht alle $r_{\alpha\beta}$ gleichzeitig unendlich werden können. Das System ist insofern wenigstens teilweise stabil, als sich nicht alle Elemente in unendliche Fernen voneinander verlieren können.

5. Multipliziert man $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_2}{dt^2}$ u. s. w. mit $m_1 y_1$, $m_2 y_2$ u. s. w. und addiert sie; multipliziert man ferner $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_2}{dt^2}$ u. s. w. mit $m_1 z_1$, $m_2 z_2$ u. s. w. und subtrahiert ihre Summe von der vorigen, so erhält man nach (1)

$$\sum m_\alpha \left(y_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - z_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} \right) = 0; \tag{7}$$

denn es ist z. B., wenn rechts die Glieder mit $m_1 m_2$ zusammengefafst werden,

$$\frac{m_1 m_2 f_{12}(r_{12})}{r_{12}} [y_1(z_1 - z_2) + y_2(z_2 - z_1) - z_1(y_1 - y_2) - z_2(y_2 - y_1)] = 0.$$

Durch Integration von (7) und den beiden analogen Gleichungen erhalten wir die drei Flächensätze:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum m_\alpha \left(y_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} - z_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} \right) &= c_1, \\ \sum m_\alpha \left(z_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} - x_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} \right) &= c_2, \\ \sum m_\alpha \left(x_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} - y_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} \right) &= c_3. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Diese drei Formeln, in denen die speziellen Attraktionsgesetze nicht vorkommen, sind voneinander unabhängig. Durch Vergleichung mit § 6, 5 und 8 folgt, dafs z. B. $y_\alpha dz_\alpha - z_\alpha dy_\alpha$ das Doppelte des unendlich schmalen Dreiecks ist, welches der vom Nullpunkte nach der Projektion des Punktes α auf die yz-Ebene gezogene Radiusvektor in dem Zeitelemente dt überstreicht. Hiernach können wir die Formeln folgendermafsen in Worte kleiden:

Die Flächenräume, welche die Radienvektoren nach den Projektionen der n materiellen Punkte auf eine der Koordinatenebenen in einer bestimmten Zeit überstreichen, geben, mit den betreffenden Massen multipliziert, eine konstante Summe.

Dabei ist zu beachten, dafs der Nullpunkt und die Koordinatenebenen durchaus willkürlich sind; durch eine Änderung des Koordinatensystems werden nur die Werte der Konstanten geändert. Wir untersuchen dies genauer.

6. Zur Transformation eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein anderes mit demselben Nullpunkte dienen bekanntlich die Formeln

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= x \cos(x, \xi) + y \cos(y, \xi) + z \cos(z, \xi), \\ \eta &= x \cos(x, \eta) + y \cos(y, \eta) + z \cos(z, \eta), \\ \zeta &= x \cos(x, \zeta) + y \cos(y, \zeta) + z \cos(z, \zeta), \end{aligned} \right. \tag{9}$$

worin (x, ξ) der Winkel ist, welchen die x-Achse mit der ξ-Achse bildet u. s. w. Es gelten die Gleichungen*)

$$
(10)\qquad \begin{cases} \cos^2(x, \xi) + \cos^2(x, \eta) + \cos^2(x, \zeta) = 1 \\ \qquad\text{u. s. w.,} \\ \cos^2(x, \xi) + \cos^2(y, \xi) + \cos^2(z, \xi) = 1 \\ \qquad\text{u. s. w.;} \end{cases}
$$

$$
(11)\qquad \begin{cases} \cos(x, \xi)\cos(y, \xi) + \cos(x, \eta)\cos(y, \eta) + \cos(x, \zeta)\cos(y, \zeta) = 0 \\ \qquad\text{u. s. w.,} \\ \cos(x, \xi)\cos(x, \eta) + \cos(y, \xi)\cos(y, \eta) + \cos(z, \xi)\cos(z, \eta) = 0 \\ \qquad\text{u. s. w.} \end{cases}
$$

Die Umkehrungen von (9) sind

$$
(12)\qquad \begin{cases} x = \xi\cos(x, \xi) + \eta\cos(x, \eta) + \zeta\cos(x, \zeta), \\ y = \xi\cos(y, \xi) + \eta\cos(y, \eta) + \zeta\cos(y, \zeta), \\ z = \xi\cos(z, \xi) + \eta\cos(z, \eta) + \zeta\cos(z, \zeta). \end{cases}
$$

Löst man die Gleichungen (9) nach x, y, z auf, wobei

$$
(13)\qquad \begin{vmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(y, \xi) & \cos(z, \xi) \\ \cos(x, \eta) & \cos(y, \eta) & \cos(z, \eta) \\ \cos(x, \zeta) & \cos(y, \zeta) & \cos(z, \zeta) \end{vmatrix} = \Delta
$$

gesetzt werden möge, so erhält man Gleichungen, welche mit (12) identisch sein müssen und aus deren Vergleichung mit (12) die Relationen folgen

$$
(14)\qquad \begin{cases} \Delta\cos(x, \xi) = \cos(y, \eta)\cos(z, \zeta) - \cos(y, \zeta)\cos(z, \eta), \\ \Delta\cos(x, \eta) = \cos(y, \zeta)\cos(z, \xi) - \cos(y, \xi)\cos(z, \zeta), \\ \Delta\cos(x, \zeta) = \cos(y, \xi)\cos(z, \eta) - \cos(y, \eta)\cos(z, \xi) \\ \qquad\text{u. s. w.} \end{cases}
$$

Quadriert man die drei ersten Gleichungen (14) und addiert dann, so folgt mit Hilfe von (10) und (11)

$$
(15)\qquad \Delta^2 = 1, \quad \text{also} \quad \Delta = \pm 1.
$$

Sind die beiden Koordinatensysteme so beschaffen, dafs, wenn man die positiven Hälften der x- und y-Achse mit den positiven Hälften der ξ- und η-Achse zusammenlegt, auch die positive Hälfte der z-Achse in die-

*) Man kann die Gleichungen (10) und (11) dadurch herleiten, dafs man in der selbstverständlichen Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

das eine Mal ξ, η, ζ nach (9), das andere Mal x, y, z nach (12) ausdrückt und eine Koeffizientenvergleichung vornimmt. — Allgemein bezeichnen wir den Winkel zwischen zwei Richtungen m und n mit (m, n).

jenige der ξ-Achse fällt, so ist $\varDelta = +1$, im umgekehrten Falle $\varDelta = -1$, wie aus (13) oder (14) hervorgeht, wenn man

$$\cos(x,\xi) = \cos(y,\eta) = \cos(z,\zeta) = 1,$$

$$\cos(x,\eta) = \cos(y,\xi) = \cos(x,\zeta) = \cos(y,\zeta) = \cos(z,\xi) = \cos(z,\eta) = 0$$

setzt.

Nehmen wir in der Folge das Erste an, so haben wir nach (14) die neun Gleichungen

$$(16)\qquad \cos(x,\xi) = \cos(y,\eta)\cos(z,\zeta) - \cos(y,\zeta)\cos(z,\eta)$$

u. s. w.

7. Mit Benutzung der Gleichungen (16) findet man, indem man für η und ζ die Ausdrücke (9) einsetzt,

$$(17)\ \eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt} = \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\cos(x,\xi) + \left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\cos(y,\xi) + \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\cos(z,\xi)$$

und daher nach (8)

$$(18)\ \sum m_\alpha\left(\eta_\alpha\frac{d\zeta_\alpha}{dt} - \zeta_\alpha\frac{d\eta_\alpha}{dt}\right) = c_1\cos(x,\xi) + c_2\cos(y,\xi) + c_3\cos(z,\xi)$$

und zwei analoge Gleichungen.

Nun können wir eine Richtung l derart festsetzen, daſs wir

$$(19)\qquad \begin{cases} \cos(x,l) = \dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}, \\ \cos(y,l) = \dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}, \\ \cos(z,l) = \dfrac{c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \end{cases}$$

annehmen; denn die Summe der Quadrate dieser drei Gröſsen giebt 1. Daher ist

$$(20)\qquad \sum m_\alpha\left(\eta_\alpha\frac{d\zeta_\alpha}{dt} - \zeta_\alpha\frac{d\eta_\alpha}{dt}\right) =$$
$$\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}\,[\cos(x,l)\cos(x,\xi) + \cos(y,l)\cos(y,\xi) + \cos(z,l)\cos(z,\xi)]$$
$$= \sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}\cos(l,\xi).$$

Die rechtsstehende Gröſse wird ein Maximum, wenn $\cos(l,\xi) = 1$ wird, d. h. wenn die ξ-Achse mit der Richtung l zusammenfällt; bildet sie dagegen mit der Richtung l einen rechten Winkel, so wird die Konstante gleich Null.

Behält man also fortwährend denselben Nullpunkt bei, so existiert eine feste Ebene (die zur Richtung l senkrechte), für welche die Flächenkonstante einen Maximalwert erreicht, während sie für jede zu ihr senkrechte Ebene Null wird. Die feste Ebene heifst die Laplace'sche unveränderliche Ebene.

8. Sind die Achsen des Koordinatensystems ξ, η, ζ gleichgerichtet mit denen des Systems x, y, z, ist also

$$\xi = x + a, \quad \eta = y + b, \quad \zeta = z + c,$$

so ist

$$\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} + b \frac{dz}{dt} - c \frac{dy}{dt} \quad \text{u. s. w.,}$$

also, wenn die Koordinaten des Schwerpunktes im Systeme x, y, z jetzt mit x', y', z' bezeichnet werden,

$$(21) \quad \sum m_\alpha \left(\eta_\alpha \frac{d\zeta_\alpha}{dt} - \zeta_\alpha \frac{d\eta_\alpha}{dt} \right) = c_1 + \left(b \frac{dz'}{dt} - c \frac{dy'}{dt} \right) \sum m_\alpha \quad \text{u. s. w.}$$

Die Änderung, welche die Flächenkonstanten durch eine Verlegung des Nullpunktes erfahren, ist also abhängig von den Gröfsen $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, d. h. von den konstanten Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes.

Befindet sich der Schwerpunkt des Systems in Ruhe, so werden die Flächenkonstanten durch eine Verlegung des Nullpunktes nicht geändert. — Dafs die Flächensätze in Gültigkeit bleiben, wenn man sich das Koordinatensystem mit dem Schwerpunkte fest verbunden denkt, leuchtet unmittelbar ein.

9. Bei unserem Planetensysteme könnte man den als unbeweglich gedachten Schwerpunkt als Nullpunkt, die unveränderliche Ebene als Fundamentalebene für die Rechnung annehmen; doch empfiehlt es sich für die Praxis mehr, den Nullpunkt in den Mittelpunkt der Sonne zu legen, während die Ebene der Ekliptik als Fundamentalebene zu Grunde gelegt wird*). Übrigens fällt der Schwerpunkt des Systems noch innerhalb des Sonnenkörpers, wenn nicht gerade Jupiter und Saturn in demselben Quadranten stehen. Nach der Berechnung von Laplace bildet die unveränderliche Ebene mit der Ebene der Ekliptik von 1750 den Neigungswinkel $1^0\ 35',5$, während ihre Knotenlinie mit der Ekliptik zur gleichen Zeit die Länge $102^0\ 57',5$ besafs.

10. Die bisherigen Entwicklungen haben das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung mit zur Voraussetzung. Hebt man dasselbe durch die Annahme von mehreren festen Zentren auf, so werden die Flächensätze alle oder teilweise ungiltig. Dagegen behält das Prinzip der lebendigen Kraft seine Giltigkeit.

11. Ist ein System von nur drei materiellen Punkten vorgelegt, welche sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, so sind neun Gleichungen (1) vorhanden. Der Schwerpunktssatz, das Prinzip der lebendigen Kraft und die Flächensätze liefern zusammen sieben Integrale derselben, von denen vier noch Differentialgleichungen erster Ordnung sind Die Inte-

*) Auch unter dieser Annahme bestehen die Flächensätze, da man eine § 7, 5 entsprechende Transformation vornehmen kann.

gration allgemein weiter durchzuführen ist bis jetzt nicht gelungen*); das berühmte Problem der drei Körper harrt noch seiner Lösung. Umsomehr ist eine allgemeine Lösung des Problems für n Punkte zur Zeit ausgeschlossen.

Das Problem der Attraktion nach zwei festen Zentren ist allerdings lösbar, wie wir erst an späterer Stelle zeigen werden; doch ist dasselbe in der Natur nicht zu realisieren. Die praktische Lösung des Problems der n Körper, deren die Astronomie bedarf, beruht auf Näherungsmethoden; dieselben gründen sich auf die Thatsache, daſs in unserem Planetensysteme die Wirkungen der Planeten aufeinander, verglichen mit denen der Sonne, sehr gering sind.

12. Wir wollen hier ein interessantes und sehr allgemeines näherungsweise richtiges Gesetz anschlieſsen. Es mögen die materiellen Punkte mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ gegenseitig aufeinander den Gleichungen (1) gemäſs einwirken; auſserdem mögen alle von einem festen Zentrum aus, welches wir in den Nullpunkt verlegen, nach dem gleichen Gesetze beeinfluſst werden. Dabei wollen wir annehmen, daſs die Abstände sämtlicher Punkte des Systems voneinander sehr klein sind gegen ihre Abstände vom festen Zentrum, so daſs die Quadrate der ersteren Abstände und der Gröſsen, welche sie als Faktor enthalten, gegen die Entfernungen vom Nullpunkte vernachlässigt werden können. Bezeichnen $r_1, r_2, \ldots r_n$ die Abstände der materiellen Punkte vom Zentrum, so gehen die Gleichungen (1) in

$$(22)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= m_2 f_{12}(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + m_3 f_{13}(r_{13}) \frac{x_1 - x_3}{r_{13}} + \cdots \\ &\quad + m_n f_{1n}(x_{1n}) \frac{x_1 - x_n}{r_{1n}} + f(r_1) \frac{x_1}{r_1} \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

über; die Funktion f ist in allen Gleichungen dieselbe.

*) Die Hilfe, welche der „letzte Multiplikator" leistet, kann erst später besprochen werden. — Von den mannigfachen Versuchen, das Problem der drei Körper zu reduzieren oder umzuformen, seien die folgenden erwähnt: Lagrange, Essai sur le problème des trois corps. Jacobi, Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps nebst Zusatz, Ges. Werke, B. 4, p. 295. (Es handelt sich um die Bewegung der Schnittlinie der invariabeln Ebene mit der Ebene, welche die drei Punkte bestimmen, und um die Neigung der beiden Ebenen gegeneinander; das erzielte Resultat ist mit dem durch Anwendung des Prinzips des letzten Multiplikators zu erreichenden identisch.) Hauptsächlich mit demselben Gegenstande beschäftigen sich Weiler (Astron. Nachr. B. 74 u. 75; Liouv. J. (2), B. 14); Radau, Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. Liouv. J. (2), B. 14; Hesse, Über das Problem der drei Körper. Borch. J. B. 74. — Weiter kommen noch Arbeiten von Serret, Mathieu, Siacci, Allegret, Veltmann, Hill, Mayer, Poincaré u. A. in Betracht. Ziehen sich drei Körper, die sich auf einer Geraden bewegen, mit einer Kraft an, welche dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional ist, so lassen sich die Bewegungsgleichungen auf eine Quadratur reduzieren: Jacobi, Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium, Ges. Werke B. 4.

Nehmen wir nun mit den Gleichungen (22) dieselbe Operation vor, welche aus (1) die Gleichungen (2) herleitete, so erhalten wir mit Benutzung der letzteren und (3), indem jetzt wieder mit ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes bezeichnen,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m_1 f(r_1)\frac{x_1}{r_1} + m_2 f(r_2)\frac{x_2}{r_2} + \cdots + m_n f(r_n)\frac{x_n}{r_n} \tag{23}$$

u. s. w.

Bezeichnet r den Abstand des Schwerpunktes des Systems vom Zentrum und setzen wir

$$x_1 = \xi + \Delta\xi_1, \quad y_1 = \eta + \Delta\eta_1, \quad z_1 = \zeta + \Delta\zeta_1$$

u. s. w.,

so sind $\Delta\xi_1$, $\Delta\eta_1$, $\Delta\zeta_1$ u. s. w. als kleine Gröſsen gegenüber r, ξ, η, ζ anzusehen, deren Potenzen und Produkte von der zweiten Dimension ab vernachlässigt werden dürfen. Wir denken uns nun

$$\frac{f(r_1)}{r_1}x_1 = \frac{f\left[\sqrt{(\xi+\Delta\xi_1)^2 + (\eta+\Delta\eta_1)^2 + (\zeta+\Delta\zeta_1)^2}\right]}{\sqrt{(\xi+\Delta\xi_1)^2 + (\eta+\Delta\eta_2)^2 + (\zeta+\Delta\zeta_1)^2}}(\xi+\Delta\xi_1)$$

u. s. w.

nach dem Taylor'schen Satze für mehrere Variabeln entwickelt und ererhalten

$$\frac{f(r_1)}{r_1}x_1 = \frac{f(r)}{r}\xi + A\Delta\xi_1 + B\Delta\eta_1 + C\Delta\zeta_1 \tag{24}$$

u. s. w.,

worin A, B, C u. s. w. Funktionen von ξ, η, ζ, also für die verschiedenen Punkte des Systems dieselben sind.

Durch Einsetzung der Werte (24) in (23) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{f(r)}{r}\xi[m_1 + m_2 + \cdots + m_n] \\ + A[m_1\Delta\xi_1 + m_2\Delta\xi_2 + \cdots + m_n\Delta\xi_n] \\ + B[m_1\Delta\eta_1 + m_2\Delta\eta_2 + \cdots + m_n\Delta\eta_n] \\ + C[m_1\Delta\zeta_1 + m_2\Delta\zeta_2 + \cdots + m_n\Delta\zeta_n]\end{aligned} \tag{25}$$

u. s. w.

oder, da nach den Gleichungen (3), in welche man $x_1 = \xi + \Delta\xi_1$ u. s. w. eintragen muſs, die drei letzten Klammerinhalte verschwinden,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)f(r)\frac{\xi}{r} \tag{26}$$

u. s. w.,

worin nur Glieder vernachlässigt sind, welche $\Delta\xi_1$, $\Delta\eta_1$, $\Delta\zeta_1$ u. s. w. mindestens in der zweiten Dimension enthalten. Man kann das Resultat aussprechen:

Wirkt auf ein System von materiellen Punkten, unter denen beliebige Attraktions- oder Repulsionskräfte thätig sind, ein festes Zentrum ein, und zwar auf alle nach demselben Gesetze, und sind die Dimensionen des Systems klein gegen die Entfernungen der Punkte vom Zentrum, so bewegt sich der Schwerpunkt des Systems mit grofser Näherung so, als wenn in ihm sämtliche Massen des Systems vereinigt wären und das Zentrum nur auf ihn wirkte.

Setzt man an Stelle des festen Zentrums eine relativ grofse Masse, so bleibt der Satz ungeändert.

Hiernach bewegen sich Planeten mit Trabanten in der Weise um die Sonne, dafs der Schwerpunkt jedes Partialsystems nahezu eine Ellipse nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze durchläuft.

Auch aus den allgemeineren Untersuchungen über die Bewegung des Schwerpunktes eines Systems, die wir später anzustellen haben, läfst sich das gefundene Resultat ableiten.

§ 11.

Mathematische Hilfsmittel.

1. Haben zwei Punkte A und A_1 von einem dritten O die Entfernungen a und a_1, $a_1 > a$, und ist $\sphericalangle AOA_1 = \varphi$, so haben wir für $\varrho = AA_1$ den Ausdruck (Fig. 7)

Fig. 7.

$$(1)\quad \varrho = \sqrt{a_1^2 - 2aa_1\cos\varphi + a^2} = a_1\sqrt{1 - 2\frac{a}{a_1}\cos\varphi + \left(\frac{a}{a_1}\right)^2} = a_1\sqrt{1 - 2q\cos\varphi + q^2},$$

wenn $q = \frac{a}{a_1}$ gesetzt wird; es ist $q < 1$. Wir brauchen in der Folge Reihenentwicklungen für ϱ^{-1} und ϱ^{-3}, die wir jetzt herstellen wollen. Dieselben rühren von Laplace her.

2. Es ist allgemein bei Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$(2)\quad (1 - 2q\cos\varphi + q^2)^{-r} = [1 - q(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + q^2]^{-r}$$
$$= (1 - qe^{i\varphi})^{-r}(1 - qe^{-i\varphi})^{-r}$$
$$= \left[1 + \frac{r}{1} qe^{i\varphi} + \frac{r(r+1)}{1.2} q^2 e^{2i\varphi} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} q^3 e^{3i\varphi} + \cdots\right]$$
$$\times\left[1 + \frac{r}{1} qe^{-i\varphi} + \frac{r(r+1)}{1.2} q^2 e^{-2i\varphi} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} q^3 e^{-3i\varphi} + \cdots\right].$$

Da beide eingeklammerten Reihen unter der Voraussetzung $q < 1$ unbedingt konvergieren, dürfen wir sie Glied für Glied multiplizieren. Dabei erscheinen die Gröſsen $e^{ki\varphi}$ und $e^{-ki\varphi}$ infolge der Symmetrie beider Klammern mit demselben Coeffizienten behaftet, können also zu

$$e^{ki\varphi} + e^{-ki\varphi} = 2\cos k\varphi$$

zusammengefaſst werden. Wir erhalten eine Reihe von der Form

$$(3)\quad (1 - 2q\cos\varphi + q^2)^{-r} = \frac{1}{2}C_0 + C_1\cos\varphi + C_2\cos 2\varphi + \cdots,$$

worin, wie die wirkliche Ausführung eines Teiles der Multiplikation zeigt,

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}C_0 = 1 + \left(\frac{r}{1}\right)^2 q^2 + \left(\frac{r(r+1)}{1.2}\right)^2 q^4 + \left(\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}\right)^2 q^6 + \cdots, \\ \frac{1}{2}C_1 = \frac{r}{1}q + \frac{r}{1}\cdot\frac{r(r+1)}{1.2}q^3 + \frac{r(r+1)}{1.2}\cdot\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}q^5 + \cdots \end{cases}$$

ist.

Die weiteren Koeffizienten lassen sich ebenso leicht direkt angeben; für die wirkliche Berechnung ist es jedoch vorteilhafter, dieselben mittels einer Rekursionsformel aus C_0 und C_1 abzuleiten.

3. Durch Differentiation von (3) nach φ folgt

$$(5)\quad \begin{aligned} &- 2rq\sin\varphi(1 - 2q\cos\varphi + q^2)^{-r-1} \\ &= - C_1\sin\varphi - 2C_2\sin 2\varphi - \cdots - kC_k\sin k\varphi - \cdots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &- 2rq\sin\varphi\left(\frac{1}{2}C_0 + C_1\cos\varphi + C_2\cos 2\varphi + \cdots\right) \\ &= (1 - 2q\cos\varphi + q^2)(- C_1\sin\varphi - 2C_2\sin 2\varphi - \cdots \\ &- kC_k\sin k\varphi - \cdots). \end{aligned}$$

Führt man die Multiplikationen aus und setzt

$$(6)\quad \begin{cases} \sin k\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}[\sin(k+1)\varphi + \sin(k-1)\varphi], \\ \sin\varphi\cos k\varphi = \frac{1}{2}[\sin(k+1)\varphi - \sin(k-1)\varphi], \end{cases}$$

so findet man als Koeffizienten von $\sin k\varphi$

links: $\qquad - rqC_{k-1} + rqC_{k+1},$

rechts: $\qquad - (1 + q^2)kC_k + q(k-1)C_{k-1} + q(k+1)C_{k+1},$

durch deren Gleichsetzung man die Rekursionsformel

$$(7)\quad (k + 1 - r)qC_{k+1} = (1 + q^2)kC_k - (k - 1 + r)qC_{k-1}$$

erhält. Da man C_0 und C_1 kennt, so kann man mittels derselben der Reihe nach C_2, C_3 u. s. w. berechnen.

4. Für $r = \frac{1}{2}$ folgt hieraus, wenn wir

(8) $$(1 - 2q\cos\varphi + q^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi + \cdots$$

setzen,

(9) $$\begin{cases} A_0 = 2\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 q^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 q^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 q^6 + \cdots\right], \\ A_1 = 2\left[\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}q^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}q^5 + \cdots\right] \end{cases}$$

und

(10) $$\left(k + \frac{1}{2}\right)qA_{k+1} = (1 + q^2)kA_k - \left(k - \frac{1}{2}\right)qA_{k-1}.$$

Setzen wir wieder $q = \frac{a}{a_1}$ und $\mathfrak{A}_k = \frac{1}{a_1}A_k$, $\mathfrak{A}_{-k} = \mathfrak{A}_k$, so haben wir, da $\cos(-k\varphi) = \cos k\varphi$ ist,

(11) $$\varrho^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,\mathfrak{A}_k\cos k\varphi$$

und

(12) $$(2k+1)aa_1\mathfrak{A}_{k+1} = 2(a_1^2 + a^2)k\mathfrak{A}_k - (2k-1)aa_1\mathfrak{A}_{k-1},$$

während $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ mittels (9) zu berechnen sind.

5. Setzen wir:

(13) $$\frac{1}{\varrho^3} = \frac{1}{a_1^3}(1 - 2q\cos\varphi + q^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{2a_1^3}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,B_k\cos k\varphi = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,\mathfrak{B}_k\cos k\varphi,$$

also

$$\mathfrak{B}_k = \frac{1}{a_1^3}B_k,$$

so können wir die B_k oder $\mathfrak{B}_k$ entweder direkt aus (4) und (7) herleiten, oder, was der besseren Konvergenz wegen vorzuziehen ist, aus den A_k oder $\mathfrak{A}_k$ berechnen. Um das letztere zu bewerkstelligen, gehen wir von der Gleichung

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,A_k\cos k\varphi = (1 - 2q\cos\varphi + q^2)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,B_k\cos k\varphi$$

aus, welche durch Ausführung der Multiplikation auf der rechten Seite, Benutzung der Formel

$$\cos\varphi\cos k\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi\right]$$

und Koeffizientenvergleichung die Beziehung

(14) $$A_k = (1 + q^2)B_k - q(B_{k-1} + B_{k+1})$$

liefert, aus der weiter folgt:

(14a) $$A_{k+1} = (1+q^2)B_{k+1} - q(B_k + B_{k+2}).$$

Aus (7) wird

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)qB_{k+1} = (1+q^2)kB_k - \left(k+\frac{1}{2}\right)qB_{k-1},$$

woraus

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)qB_{k+2} = (1+q^2)(k+1)B_{k+1} - \left(k+\frac{3}{2}\right)qB_k$$

hervorgeht. Statt dieser beiden Gleichungen können wir auch schreiben:

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)q(B_{k-1}+B_{k+1}) = \quad qB_{k+1} + (1+q^2)kB_k,$$

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)q(B_k \quad + B_{k+2}) = -qB_k + (1+q^2)(k+1)B_{k+1}.$$

Aus (14) und (14a) wird infolge dieser Relationen:

$$A_k \left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+q^2)B_k - qB_{k+1},$$

$$A_{k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right) = qB_k - \frac{1}{2}(1+q^2)B_{k+1},$$

woraus durch Elimination von B_{k+1} die Gleichung

(15) $$(1-q^2)^2 B_k = (2k+1)\left[(1+q^2)A_k - 2qA_{k+1}\right]$$

oder

(16) $$(a_1^2 - a^2)^2 \mathfrak{B}_k = (2k+1)\left[(a_1^2 + a^2)\mathfrak{A}_k - 2aa_1\mathfrak{A}_{k+1}\right]$$

folgt.

Da die $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$ die Koeffizienten der Reihenentwicklungen von Ausdrücken sind, welche in Bezug auf a und a_1 vollkommene Symmetrie zeigen, so müssen sie selbst als symmetrische Funktionen dieser beiden Gröſsen angesehen werden; daher sind auch (12) und (16) in a und a_1 symmetrisch. Ist $a > a_1$, so muſs in den Berechnungen der $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$ a mit a_1 vertauscht werden. Der Fall $a = a_1$ kann überhaupt einfacher behandelt werden, kommt aber nicht weiter in Betracht. In der Folge brauchen wir auf das Gröſsenverhältnis von a und a_1 keine Rücksicht zu nehmen.

6. Um auch noch die Ausdrücke $\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}$, $\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1}$, $\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}$, von denen wir gleichfalls Gebrauch zu machen haben, darzustellen, bilden wir

$$\frac{d}{da}(a^2 - 2aa_1\cos\varphi + a_1^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -(a^2 - 2aa_1\cos\varphi + a_1^2)^{-\frac{3}{2}}(a - a_1\cos\varphi)$$

oder

$$(17)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\cos k\varphi = -(a - a_1\cos\varphi)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos k\varphi$$

$$= -a\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos k\varphi + \frac{1}{2}a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos(k+1)\varphi$$

$$+ \frac{1}{2}a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos(k-1)\varphi$$

$$= -a\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos k\varphi + \frac{1}{2}a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_{k-1}\cos k\varphi$$

$$+ \frac{1}{2}a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_{k+1}\cos k\varphi\,.$$

Die Koeffizientenvergleichung liefert:

$$(18)\qquad \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} = \frac{1}{2}a_1\mathfrak{B}_{k+1} - a\mathfrak{B}_k + \frac{1}{2}a_1\mathfrak{B}_{k-1}\,;$$

ebenso findet man:

$$(19)\qquad \frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} = \frac{1}{2}a\mathfrak{B}_{k+1} - a_1\mathfrak{B}_k + \frac{1}{2}a\mathfrak{B}_{k-1}\,,$$

worin man an Stelle der $\mathfrak{B}_k$ auch die $\mathfrak{A}_k$ einführen kann.

Differentiiert man die so transformierte Gleichung (18) nochmals nach a, so erhält man $\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}$ durch die $\mathfrak{A}$ und deren erste Differentialquotienten ausgedrückt, also mittels (18) durch die $\mathfrak{A}_k$ oder $\mathfrak{B}_k$ allein.

Ferner bemerken wir, dafs

$$a\frac{d\frac{1}{\varrho}}{da} + a_1\frac{d\frac{1}{\varrho}}{da_1} = -\frac{a(a-a_1\cos\varphi)+a_1(a_1-a\cos\varphi)}{\varrho^3} = -\frac{1}{\varrho}$$

ist, woraus durch Koeffizientenvergleichung folgt:

$$a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} = -\mathfrak{A}_k$$

oder

$$(19a)\qquad a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} = -\mathfrak{A}_k - a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\,.$$

Durch weitere Differentiationen von (19a) folgt:

$$(19b)\qquad a_1\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1} = -2\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} - a\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\,,$$

$$a_1\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da_1^2} + \frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} = -\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} - a\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1}$$

oder

$$(19c)\qquad a_1^2\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da_1^2} = 2\mathfrak{A}_k + 4a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a^2\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\,.$$

7. Wir haben uns weiter mit der linearen Differentialgleichung*)

$$(20) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y + A_0 + A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \cdots = 0$$

zu beschäftigen, welche als eine Erweiterung der in § 8 behandelten anzusehen ist. Wäre die spezielle Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0$$

vorgelegt, so hätten wir nach § 8, (8)

$$y = C \sin(nx + \alpha)$$

zu setzen, worin C und α willkürliche Konstanten sind. Die Vermutung liegt nahe, daſs durch Zufügung geeigneter Glieder die Lösung von (20) gefunden werden kann. Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$y = C \sin(nx + \alpha) + C_0 + C_1 \cos m_1 x + C_2 \cos m_2 x + \cdots$$

in (20) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
&- n^2 C \sin(nx + \alpha) - m_1^2 C_1 \cos m_1 x - m_2^2 C_2 \cos m_2 x - \cdots \\
&+ n^2 C \sin(nx + \alpha) + n^2 C_0 + n^2 C_1 \cos m_1 x + n^2 C_2 \cos m_2 x + \cdots \\
&+ A_0 + A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \cdots = 0,
\end{aligned}$$

eine Gleichung, die wirklich erfüllt wird, wenn

$$n^2 C_0 + A_0 = 0, \quad - m_1^2 C_1 + n^2 C_1 + A_1 = 0 \quad \text{u. s. w.},$$

also

$$C_0 = -\frac{A_0}{n^2}, \quad C_1 = \frac{A_1}{m_1^2 - n^2} \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird. Somit erhalten wir das zwei willkürliche Konstanten C und α in sich schlieſsende, also allgemeine Integral

$$(21) \qquad \begin{aligned} y = C \sin(nx + \alpha) - \frac{A_0}{n^2} &+ \frac{A_1}{m_1^2 - n^2} \cos m_1 x \\ &+ \frac{A_2}{m_2^2 - n^2} \cos m_2 x + \cdots. \end{aligned}$$

Dieses Resultat wird unbrauchbar, wenn etwa $m_1 = n$ wird. In diesem Falle setzen wir in y an Stelle von $C_1 \cos m_1 x$ den Ausdruck $C_1 x \sin nx$; wird dieses y in (20) eingeführt, so treten die Glieder

$$2nC_1 \cos nx - n^2 C_1 x \sin nx + n^2 C_1 x \sin nx + A_1 \cos nx$$

auf, welche sich zerstören müssen. Es ist daher

$$C_1 = -\frac{A_1}{2n}$$

*) Auch wenn $\cos(m_\alpha x + l_\alpha)$ an Stelle von $\cos m_\alpha x$ tritt, bleibt das Verfahren ungeändert.

zu setzen, so dafs

$$(22)\quad y = C\sin(nx+\alpha) - \frac{A_0}{n^2} - \frac{A_1}{2n}\,x\sin nx + \frac{A_2}{m_2{}^2 - n^2}\cos m_2 x + \cdots$$

wird.

§ 12.

Die planetarischen Störungen erster Ordnung und die Elemente der Mondtheorie.

1. Die Masse sämtlicher bekannten Planeten ist gegen die Sonnenmasse sehr gering; selbst die Jupitermasse beträgt nur $\frac{1}{1047{,}9}$ der letzteren. Infolge dessen kann man die Planetenbahnen zunächst unter der Voraussetzung berechnen, dafs nur die Sonne auf den fraglichen Planeten einwirke. An den so erhaltenen elliptischen Bahnen können dann wegen der Ablenkungen durch die übrigen Planeten wenig bedeutende Korrekturen angebracht werden; man bezeichnet diese, wie schon erwähnt, als Störungen oder Perturbationen.

Die Störungen können in doppelter Art in Berücksichtigung gezogen werden. Man kann die Stellung des Planeten nach der elliptischen Hypothese für irgend einen Zeitpunkt berechnen und dann nachträglich an den Koordinaten die nötigen Änderungen anbringen (Störung der Koordinaten). Man kann aber auch annehmen, dafs die Elemente der elliptischen Bahn fortwährenden Änderungen unterliegen, so dafs für jeden Moment eine etwas andere elliptische Bahn der Rechnung zu Grunde zu legen ist (Störung der Elemente). In der Folge werden wir manche Störungen durch Änderung der Elemente, andere durch Änderung der berechneten Koordinaten berücksichtigen.

Unter der Voraussetzung, dafs die Exzentrizitäten und die Neigungswinkel zwischen je zwei Bahnebenen bei den in Frage kommenden Planeten sehr klein sind, lassen sich für die Störungen allgemeinere Formeln aufstellen; dies trifft für die gröfseren Planeten in hinreichendem Mafse zu. Bei den Planetoiden und Kometen ist diese Voraussetzung nicht mehr zulässig; man mufs sich hier auf das stückweise Berechnen der störenden Wirkungen beschränken (spezielle Störungen). Nur der erste Fall soll hier in Betracht gezogen werden, da aus den Formeln, welche er liefert, die allgemeiner interessanten Resultate gefolgert werden können.

2. Setzt man wie bisher die Sonnenmasse gleich 1, so sind die Massen der Planeten kleine Brüche, deren Werte sämtlich unter 0,001 liegen. Denkt man sich die Gleichung der gestörten Bewegung eines Planeten nach Potenzen dieser Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ entwickelt, so wird es in den meisten Fällen genügen, nur die Glieder, welche die ersten Potenzen dieser Massen enthalten, in Berücksichtigung zu ziehen. Man bezeichnet die unter dieser Annahme berechneten Störungen als solche erster Ordnung; werden noch die zweiten Potenzen der Massen in Betracht gezogen, so erhält man die Störungen zweiter Ordnung u. s. w.

Wir beschäftigen uns hier nur mit den Störungen erster Ordnung*), welche eine relativ einfache Behandlung zulassen.

3. Denken wir uns die Bewegung des gestörten Planeten fertig entwickelt, so dafs seine Koordinaten x, y, z einzeln durch t ausdrückbar sind, und eine solche Gleichung nach den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ der störenden Planeten geordnet, so hat sie, falls nur die ersten Potenzen dieser Massen beachtet werden, die Gestalt

$$(1) \qquad x = f_0(t) + m_1 f_1(t) + m_2 f_2(t) + \cdots + m_n f_n(t)$$

und entsprechend für die beiden anderen Koordinaten. Wir setzen nun

$$(2) \qquad x_0 = f_0(t), \quad x_1 = m_1 f_1(t), \quad x_2 = m_2 f_2(t) \ldots x_n = m_n f_n(t),$$

also

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n .$$

Dann ist x_0 der Wert, welchen x ohne das Vorhandensein der störenden Planeten annehmen würde, x_α ist die Änderung, welche er erleidet, falls lediglich der Planet mit der Masse m_α störend wirkt; x_α ist von derselben Gröfsenordnung klein wie m_α. Man sieht, dass man die Störungen, welche durch jeden einzelnen Planeten hervorgerufen werden, gesondert berechnen kann und dann nur sämtliche Störungen zu summieren braucht, um die Gesamtstörung zu erhalten.

Diese Zerlegung kann jedoch noch weiter getrieben werden. Sind ε und ε_1 die Exzentrizitäten der Bahnen des noch ungestörten und des störenden Planeten und ist J die Neigung ihrer Bahnebenen, so werden wir wegen der vorausgesetzten Kleinheit dieser Gröfsen nur deren erste Potenzen berücksichtigen, soweit sie noch mit der störenden Planetenmasse m_1 multipliziert sind; es werden also $m_1 \varepsilon$, $m_1 \varepsilon_1$, $m_1 J$, aber nicht $m_1 \varepsilon^2$, $m_1 \varepsilon J$ u. s. w. in Rechnung gezogen. Ordnet man nun die Bewegungsgleichungen des gestörten Planeten nach Muster von (1) in der Weise

$$x = f_0(t) + m_1 f_1(t) + m_1 \varepsilon f_2(t) + m_1 \varepsilon_1 f_3(t) + m_1 J f_4(t)$$
$$\text{u. s. w.,}$$

so kann man

$$x_0 = f_0(t), \quad x_1 = m_1 f_1(t), \quad x_2 = m_1 \varepsilon f_2(t),$$
$$x_3 = m_1 \varepsilon_1 f_3(t), \quad x_4 = m_1 J f_4(t),$$
$$x = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

setzen und darf wieder, da jede der Gröfsen ε, ε_1, J einzeln gleich

*) Die Störungen erster Ordnung wurden von Laplace (Mécanique céleste, B. 1), diejenigen zweiter Ordnung von Poisson entwickelt. Einfache Darstellungen der Theorie der Störungen erster Ordnung findet man bei Möbius, die Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig 1843, und bei Israel-Holtzwart, Elemente der Astromechanik, Wiesbaden 1886. An das letztere Werk schliefst sich die folgende Behandlung im wesentlichen an; das erstere wurde namentlich bei der Theorie der Mondbewegung mehrfach benutzt.

Null gesetzt werden kann, die Gröfse x_0, welche ihre frühere Bedeutung hat, und x_1, x_2, x_3, x_4 gesondert berechnen. Die drei letzten Gröfsen sind gegen x_1 im allgemeinen ziemlich klein und können bei manchen Untersuchungen aufser Acht bleiben.

Durch diese weitgehenden Zerlegungen verliert das Störungsproblem viel von seiner Komplikation.

4. Wirken zwei Planeten mit den Massen m und m_1 aufeinander ein, so erfährt nicht allein der erste eine Störung, welche m_1 als Faktor enthält; auch der zweite Planet ist einer Störung ausgesetzt, welche der Masse m proportional ist. Diese Störung des zweiten Planeten mufs aber wieder seine Wirkung auf den ersten modifizieren und zwar um eine Gröfse, welche den Faktor m_1 hinzunimmt, also im ganzen mit dem Faktor mm_1 behaftet ist. Dieselbe ist somit von der zweiten Ordnung und kann hier vernachlässigt werden. Wir nehmen daher an, dafs der störende Körper sich in einer ungestörten elliptischen Bahn bewegt; die thatsächlichen Abweichungen hiervon verursachen nur Störungen zweiter Ordnung.

5. Wir bezeichnen die Koordinaten des gestörten und des störenden Planeten mit x, y, z und x_1, y_1, z_1, ihre Massen mit m und m_1 und unterscheiden überhaupt alle auf sie bezüglichen Gröfsen in analoger Weise. Der Sonnenmittelpunkt, den wir wie früher als fest betrachten, liege im Nullpunkt des Koordinatensystems, r und r_1 seien die Abstände der beiden Planeten von der Sonne, ϱ sei ihr Abstand voneinander, so dafs

$$(3) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_1 = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}, \\ \varrho = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \end{cases}$$

ist. Die Bahn des ersten Planeten möge im ungestörten Zustande eine Ellipse sein, welche in der xy-Ebene liegt; die Schnittlinie dieser Ebene und der Bahnebene des störenden Planeten (die Knotenlinie im weiteren Sinne) möge als x-Achse angenommen werden, und zwar sei ihre positive Hälfte nach dem aufsteigenden Knoten gerichtet*). J sei der Neigungswinkel dieser beiden Ebenen und werde auf der Seite der positiven y als positiv, auf der umgekehrten als negativ gerechnet.

Die Bewegung des Planeten m wird nun von drei in Rechnung zu ziehenden Beschleunigungen abhängen. Es wirkt auf ihn die Attraktion der Sonne, die wie früher in Rechnung zu stellen ist, und die direkte Attraktion des Planeten m_1. Aufserdem übt der letztere eine Attraktion auf die Sonne aus, wodurch diese ihre absolute Lage ändert; da aber der Sonnenmittelpunkt beständig als festes Zentrum der zu berechnenden

*) Als aufsteigenden Knoten wollen wir denjenigen Schnittpunkt der Bahn des störenden Planeten mit der Ebene des noch ungestörten anderen bezeichnen, in welchem sich jener auf die nördliche Seite dieser Ebene begiebt. Da die Neigungen der Hauptplanetenbahnen zueinander geringe sind, so ist der Begriff „nördliche Seite“ durch die Lage des Erdnordpols genügend bestimmt.

relativen Bewegung betrachtet wird, so müssen wir diese Beschleunigung in der Weise in Rechnung bringen, dafs wir dem Planeten m eine gleiche, aber entgegengesetzte Beschleunigung zulegen. So gelangen wir zu den drei Differentialgleichungen der gestörten Bewegung:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{f(1+m)}{r^2}\dfrac{x}{r} - \dfrac{fm_1}{\varrho^2}\dfrac{x-x_1}{\varrho} - \dfrac{fm_1}{r_1^{\,2}}\dfrac{x_1}{r_1}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{f(1+m)}{r^2}\dfrac{y}{r} - \dfrac{fm_1}{\varrho^2}\dfrac{y-y_1}{\varrho} - \dfrac{fm_1}{r_1^{\,2}}\dfrac{y_1}{r_1}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{f(1+m)}{r^2}\dfrac{z}{r} - \dfrac{fm_1}{\varrho^2}\dfrac{z-z_1}{\varrho} - \dfrac{fm_1}{r_1^{\,2}}\dfrac{z_1}{r_1}. \end{cases}$$

Zu diesen Gleichungen treten diejenigen hinzu, welche die elliptische Bewegung des störenden Planeten bestimmen, durch welche also x_1, y_1, z_1 als Funktionen der Zeit gegeben sind. Aufserdem wird die Bahn des Planeten m unter der Voraussetzung, dafs $m_1 = 0$ sei, d. h. seine ungestörte Bahn als bekannt angenommen.

6. Bei dem gewählten Koordinatensystem ist

$$z_1 = y_1 \operatorname{tg} J = y_1\left(J + \frac{J^3}{3} + \cdots\right);$$

da nun J^2 vernachlässigt werden soll, dürfen wir zwar nicht z_1 gegen x_1 und y_1, aber doch $z_1^{\,2}$ gegen $x_1^{\,2}$ und $y_1^{\,2}$ vernachlässigen. Da die Gröfse z erst ein Ergebnis der Störung, also mit dem Faktor m_1 behaftet ist, werden wir auch z weglassen dürfen. Hierdurch werden r, ϱ, r_1 von z und z_1, die beiden ersten Gleichungen (4) also von J unabhängig. Da ferner z für $J = 0$ verschwinden würde, dürfen wir annehmen, dafs z noch J als Faktor enthält, also von der Gröfsenordnung $m_1 J$ ist. Infolge dessen tritt in allen Gliedern der dritten Gleichung der Faktor $m_1 J$ auf, weshalb wir solche Posten, welche auch noch ε und ε_1 als Faktor aufweisen, vernachlässigen dürfen. Hierdurch gelangen wir zu einer neuen, sehr wichtigen Reduktion des Problems.

Setzen wir

$$x = r\cos l\cos b,\quad y = r\sin l\cos b,\quad z = r\sin b;$$
$$x_1 = r_1\cos l_1\cos b_1,\quad y_1 = r_1\sin l_1\cos b_1,\quad z_1 = r_1\sin b_1$$

und bezeichnen r und r_1 als die Radienvektoren, l und l_1 als die Längen, b und b_1 als die Breiten der beiden Planeten*), so dürfen wir in Gliedern, welche m_1 enthalten, $\cos b = 1$ annehmen, da $\sin b$ von der Gröfsenordnung J, also $\cos b = 1 - 2\sin^2\frac{b}{2}$ von 1 nur um eine Gröfse höherer Kleinheit verschieden ist. Ebenso ist $\cos b_1 = 1$ zu nehmen. Es ist also

*) b und b_1 sind die Neigungswinkel von r und r_1 gegen die xy-Ebene, l und l_1 sind die Winkel, welche die Projektionen von r und r_1 auf diese Ebene mit der Linie des aufsteigenden Knotens bilden.

$$(5) \qquad \begin{cases} x = r\cos l, & y = r\sin l, & z = r\sin b, \\ x_1 = r_1\cos l_1, & y_1 = r_1\sin l_1, & z_1 = r_1\sin b_1 \end{cases}$$

zu setzen.

Wir können nun nach den gemachten Vereinfachungen das Resultat aussprechen:

Die beiden ersten Gleichungen (4) bestimmen die Störungen des Radiusvektor und der Länge; sie sind von J, z, z_1 (oder b, b_1) unabhängig. Man kann diesen Teil der Aufgabe als ein planimetrisches Problem behandeln, indem man sich die Ebene der Bahn des störenden Planeten in die Ebene der x, y umgeklappt denkt.

Die dritte Gleichung (4) bestimmt die Störung der Breite; man braucht hier auf die Exzentrizitäten keine Rücksicht zu nehmen, kann sich also beide Bahnen als kreisförmige denken.

Wir werden beide Teile getrennt behandeln, bei dem ersten aber nach den früheren Auseinandersetzungen noch weitere Teilungen vornehmen.

7. Mit Hilfe der Gleichungen (5) führen wir jetzt in die beiden ersten Gleichungen (4) Polarkoordinaten ein; durch Differentiation folgt aus (5):

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \cos l\,\dfrac{d^2r}{dt^2} - 2\sin l\,\dfrac{dr}{dt}\,\dfrac{dl}{dt} - r\cos l\left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 - r\sin l\,\dfrac{d^2l}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \sin l\,\dfrac{d^2r}{dt^2} + 2\cos l\,\dfrac{dr}{dt}\,\dfrac{dl}{dt} - r\sin l\left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 + r\cos l\,\dfrac{d^2l}{dt^2}. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (6) mit $\cos l$ und $\sin l$ und addieren, dann mit $\sin l$ und $\cos l$ und subtrahieren, so folgt:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}\cos l + \dfrac{d^2y}{dt^2}\sin l = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}\sin l - \dfrac{d^2y}{dt^2}\cos l = -r\,\dfrac{d^2l}{dt^2} - 2\,\dfrac{dr}{dt}\,\dfrac{dl}{dt}. \end{cases}$$

Die gleiche Operation nehmen wir mit den beiden ersten Gleichungen (4) vor, nachdem wir rechts für x, y, x_1, y_1 die Polarkoordinaten eingesetzt haben; nach Ausführung dieser Rechnung setzen wir statt der linken Seiten die durch (7) gegebenen Ausdrücke ein. Es folgt:

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 = -\dfrac{f(1+m)}{r^2} - \dfrac{fm_1}{\varrho^3}\left[r - r_1\cos(l-l_1)\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{fm_1}{r_1^{\,2}}\cos(l-l_1), \\ -r\,\dfrac{d^2l}{dt^2} - 2\,\dfrac{dr}{dt}\,\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{fm_1}{\varrho^3}\,r_1\sin(l-l_1) - \dfrac{fm_1}{r_1^{\,2}}\sin(l-l_1). \end{cases}$$

8. Wir setzen jetzt

$$r = r_0 + \Delta r, \quad l = l_0 + \Delta l,$$

indem wir unter r_0 und l_0 diejenigen Teile der Koordinaten verstehen, welche übrig bleiben, wenn man $m_1 = 0$ setzt, d. h. die Koordinaten der ungestörten Planetenbahn. Δr und Δl sind also die Störungen der Polarkoordinaten und als solche mit dem Faktor m_1 behaftet zu denken. Aus diesem Grunde dürfen wir in Gliedern, welche außerdem m_1 enthalten, ohne weiteres $r = r_0$, $l = l_0$ setzen; insbesondere können wir diese Ersetzung in ϱ vorgenommen denken, ohne die Bezeichnung ändern zu müssen. Allgemein ist zu beachten, daß Δr^2, $\Delta r \Delta l$, Δl^2 u. s. w. zu vernachlässigen sind, weshalb z. B.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(r_0 + \Delta r)^2} = \frac{1}{r_0^2\left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^2} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 2\frac{\Delta r}{r_0}\right)$$

wird. Hiernach wird aus (8)

$$(9)\begin{cases} \frac{d^2 r_0}{dt^2} - r_0\left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\Delta r}{dt^2} - \Delta r\left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2 - 2r_0\frac{dl_0}{dt}\frac{d\Delta l}{dt} \\ = -\frac{f(1+m)}{r_0^2} + \frac{2f(1+m)\Delta r}{r_0^3} - \frac{fm_1}{\varrho^3}\left[r_0 - r_1\cos(l_0 - l_1)\right] \\ \quad -\frac{fm_1}{r_1^2}\cos(l_0 - l_1), \\ -r_0\frac{d^2 l_0}{dt^2} - 2\frac{dr_0}{dt}\frac{dl_0}{dt} - r_0\frac{d^2\Delta l}{dt^2} - \Delta r\frac{d^2 l_0}{dt^2} \\ -2\frac{d\Delta r}{dt}\frac{dl_0}{dt} - 2\frac{dr_0}{dt}\frac{d\Delta l}{dt} = \frac{fm_1}{\varrho^3}r_1\sin(l_0 - l_1) - \frac{fm_1}{r_1^2}\sin(l_0 - l_1). \end{cases}$$

Nach einer früheren Bemerkung müssen die Glieder, welche m_1 als Faktor enthalten, für sich und die übrigen für sich übereinstimmen. Die letzteren geben nichts anderes als die Differentialgleichungen der ungestörten Bahn in Polarkoordinaten, die wir nicht weiter zu behandeln brauchen. Die ersteren aber liefern die Differentialgleichungen der Störungen Δr und Δl:

$$(10)\begin{cases} \frac{d^2\Delta r}{dt^2} = \left[\frac{2f(1+m)}{r_0^3} + \left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2\right]\Delta r \\ \qquad + 2r_0\frac{dl_0}{dt}\frac{d\Delta l}{dt} + fm_1\left[\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)r_1\cos(l_0 - l_1) - \frac{r_0}{\varrho^3}\right], \\ r_0\frac{d^2\Delta l}{dt^2} = -\frac{d^2 l_0}{dt^2}\Delta r - 2\frac{dl_0}{dt}\frac{d\Delta r}{dt} \\ \qquad - 2\frac{dr_0}{dt}\frac{d\Delta l}{dt} - fm_1\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)r_1\sin(l_0 - l_1). \end{cases}$$

Die rechten Seiten von (10) enthalten jetzt außer Δr und Δl nur die Variabeln r_0, b_0, r_1, l_1; diese sind aber als die Koordinaten des ungestörten Planeten m und des störenden m_1 als bekannte Funktionen der Zeit anzusehen. Es wird unsere Aufgabe sein, sie durch die Zeit auszudrücken.

9. Zu diesem Zwecke benutzen wir die Formeln (35a) und (35b) von § 9, in denen bereits die Potenzen der Exzentrizität weggelassen sind. Bezeichnen wir die Längen der Perihelien beider Bahnen mit Π und Π_1 und setzen:

$$(11) \qquad \lambda = nt + \lambda', \quad \lambda_1 = n_1 t + \lambda_1',$$

worin λ' und λ_1' die Längen zur Zeit $t = 0$ bedeuten, so werden jene Formeln zu*)

$$(12) \quad \begin{cases} r_0 = a\left[1 - \varepsilon\cos(\lambda - \Pi)\right], \\ l_0 = \lambda + 2\varepsilon\sin(\lambda - \Pi), \\ r_1 = a_1\left[1 - \varepsilon_1\cos(\lambda_1 - \Pi_1)\right], \\ l_1 = \lambda_1 + 2\varepsilon_1\sin(\lambda_1 - \Pi_1). \end{cases}$$

Aus denselben folgt, da $\frac{d\lambda}{dt} = n$ ist,

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{1}{r_0} = \frac{1}{a}\left[1 + \varepsilon\cos(\lambda - \Pi)\right], \\ \frac{1}{r_0^2} = \frac{1}{a^2}\left[1 + 2\varepsilon\cos(\lambda - \Pi)\right], \\ \frac{1}{r_0^3} = \frac{1}{a^3}\left[1 + 3\varepsilon\cos(\lambda - \Pi)\right], \\ \frac{dr_0}{dt} = na\varepsilon\sin(\lambda - \Pi), \quad \frac{d^2r_0}{dt^2} = n^2a\varepsilon\cos(\lambda - \Pi), \\ \frac{dl_0}{dt} = n + 2n\varepsilon\cos(\lambda - \Pi), \quad \frac{d^2l_0}{dt^2} = -2n^2\varepsilon\sin(\lambda - \Pi), \\ \left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2 = n^2 + 4n^2\varepsilon\cos(\lambda - \Pi), \\ \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{a_1^2}\left[1 + 2\varepsilon_1\cos(\lambda_1 - \Pi_1)\right]. \end{cases}$$

Weiter ist ϱ eine Funktion von r_0, r_1 und $l_0 - l_1$, so daſs wir

$$\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos(l_0 - l_1) - \frac{r_0}{\varrho^3} = f(r_0, r_1, l_0, l_1)$$

$$= f\Big[a - a\varepsilon\cos(\lambda - \Pi),\ a_1 - a_1\varepsilon_1\cos(\lambda_1 - \Pi_1),\ \lambda + 2\varepsilon\sin(\lambda - \Pi),$$
$$\lambda_1 + 2\varepsilon_1\sin(\lambda_1 - \Pi)\Big]$$

$$= f(a, a_1, \lambda, \lambda_1) - f_1 a\varepsilon\cos(\lambda - \Pi) - f_2 a_1\varepsilon_1\cos(\lambda_1 - \Pi_1)$$
$$+ 2f_3\varepsilon\sin(\lambda - \Pi) + 2f_4\varepsilon_1\sin(\lambda_1 - \Pi_1)$$

setzen dürfen, worin f_1, f_2, f_3, f_4 die partiellen Differentialquotienten von f nach seinen vier Variabeln bezeichnen; es folgt dies aus dem Taylorschen Satze für mehrere Variabeln.

Nun ist

$$f(a, a_1, \lambda, \lambda_1) = \left(\frac{1}{\varrho_0^3} - \frac{1}{a_1^3}\right) a_1\cos(\lambda - \lambda_1) - \frac{a}{\varrho_0^3},$$

wenn

*) Man beachte, daſs in § 9 die Zeit $t = 0$ mit einem Periheldurchgang identifiziert wurde und daſs letzterem $\varphi = 0$ entsprach.

(13a) $$\varrho_0 = [a^2 - 2aa_1 \cos(\lambda - \lambda_1) + a_1^2]^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird. Nach § 11, (13) ist aber

$$\varrho_0^{-3} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^k \mathfrak{B}_k \cos k(\lambda - \lambda_1)$$

und nach § 11, (17)

$$\frac{a_1 \cos(\lambda - \lambda_1) - a}{\varrho_0^3} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

somit

$$f(a, a_1, \lambda, \lambda_1) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1) - \frac{1}{a_1^2} \cos(\lambda - \lambda_1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k\,\prime} \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

wenn in Σ' der Koeffizient $\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} = \frac{d\mathfrak{A}_{-1}}{da}$ durch $\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \frac{1}{a_1^2}$ ersetzt wird.

Man berechnet hieraus durch Differentationen

$$f_1 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k\,\prime} \frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2} \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k\,\prime} \frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1} \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

$$f_3 = -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k\,\prime} k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \sin k(\lambda - \lambda_1),$$

$$f_4 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k\,\prime} k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \sin k(\lambda - \lambda_1),$$

so daſs schlieſslich*)

(14) $$\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos(l_0 - l_1) - \frac{r_0}{\varrho^3} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k\,\prime} \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k\,\prime} \left[2k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} - a \frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\right] \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi]$$

$$- \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k\,\prime} \left[2k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a_1 \frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1}\right] \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1 - \Pi_1]$$

wird.

*) Man beachte, daſs z. B.

$$2 \cos k(\lambda - \lambda_1) \cos(\lambda - \Pi) = \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi] + \cos[-k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi]$$

ist; es kommt jedes Glied in der Summe doppelt vor, wodurch der Faktor 2 heraustritt.

Ferner folgt aus (13a)

$$\frac{d\varrho_0^{-1}}{d\lambda} = -\,a a_1 \sin(\lambda - \lambda_1)\,\varrho_0^{-3}$$

oder nach § 11, (11)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{k\mathfrak{A}_k}{a} \sin k(\lambda - \lambda_1) = a_1 \varrho_0^{-3} \sin(\lambda - \lambda_1),$$

also

$$(14\text{a})\quad \left(\frac{1}{\varrho_0^3} - \frac{1}{a_1^3}\right) a_1 \sin(\lambda - \lambda_1) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{k\mathfrak{A}_k}{a} \sin k(\lambda - \lambda_1) - \frac{\sin(\lambda - \lambda_1)}{a_1^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{k\mathfrak{A}_k}{a} \sin k(\lambda - \lambda_1),$$

wenn in Σ' statt $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_{-1}$ die Gröfse $\mathfrak{A}_1 - \frac{a}{a_1^2}$ gesetzt wird, was mit der oben angegebenen Bedeutung von Σ' vollkommen zusammenstimmt.

Nach der vorigen Methode wird

$$(15)\quad \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \sin(l_0 - l_1) = \frac{1}{2a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' k\mathfrak{A}_k \sin k(\lambda - \lambda_1)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k k\left[(2k+1)\mathfrak{A}_k - a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\right] \sin[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi]$$

$$- \frac{\varepsilon_1}{2a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k k\left[2k\mathfrak{A}_k + a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1}\right] \sin[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1 - \Pi_1].$$

10. Die sämtlichen Ausdrücke der vorigen Nummer führen wir in (10) ein und erhalten, da nach § 9, (21) $f(1+m) = n^2 a^3$ ist und

$$fm_1 = f(1+m)m_1 = n^2 a^3 m_1$$

gesetzt werden darf, weil mm_1 zu vernachlässigen ist,

$$(16)\quad \frac{d^2 \Delta r}{dt^2} = 3n^2 \Delta r + 2an\frac{d\Delta l}{dt} + \frac{a^3 n^2 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1)$$

$$+ \varepsilon\left\{10n^2 \cos(\lambda - \Pi)\Delta r + 2an\cos(\lambda - \Pi)\frac{d\Delta l}{dt}\right.$$

$$\left. + \frac{a^3 n^2 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left[2k\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} - a\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\right] \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi]\right\}$$

$$- \frac{\varepsilon_1 a^3 n^2 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left[2k\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a_1\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1}\right] \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1 - \Pi_1]$$

und, indem wir die zweite Gleichung vor der Umformung durch r_0 dividieren,

$$(17)\quad \frac{d^2\Delta l}{dt^2} = -\frac{2n}{a}\frac{d\Delta r}{dt} - \frac{an^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\mathfrak{A}_k \sin k(\lambda-\lambda_1)$$

$$+\varepsilon\left\{\frac{2n^2}{a}\sin(\lambda-\Pi)\Delta r - \frac{6n}{a}\cos(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta r}{dt} - 2n\sin(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta l}{dt}\right.$$

$$-\frac{an^2m_1}{2}\cos(\lambda-\Pi)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\mathfrak{A}_k\sin k(\lambda-\lambda_1)$$

$$\left.-\frac{an^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\left[(2k+1)\mathfrak{A}_k - a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\right]\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda-\Pi]\right\}$$

$$+\frac{\varepsilon_1 an^2m_1}{2}\sum_{+\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\left[2k\mathfrak{A}_k + a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1}\right]\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda_1-\Pi_1].$$

Wir können nun Δr_0 und Δl_0 in je zwei Teile zerlegen, welche von ε und ε_1 frei, resp. von ε und ε_1 abhängig sind. Nach (12) ist aber zu setzen, wenn wir den von ε und ε_1 abhängigen Teil durch den Index ε kenntlich machen,

$$r_0 = a + r_\varepsilon,\quad l_0 = \lambda + l_\varepsilon,$$

also

$$(18)\qquad \Delta r = \Delta a + \Delta r_\varepsilon,\quad \Delta l = \Delta\lambda + \Delta l_\varepsilon.$$

Wir könnten die Gleichungen (16) und (17) in je drei Teile zerfällen, begnügen uns jedoch damit, der eingeführten Bezeichnung entsprechend, einen von den Exzentrizitäten freien und einen von diesen abhängigen Teil aufzustellen. Für den ersten haben wir

$$(19)\quad \frac{d^2\Delta a}{dt^2} - 3n^2\Delta a - 2an\frac{d\Delta\lambda}{dt} - \frac{a^2n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\,\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\cos k(\lambda-\lambda_1) = 0,$$

$$(20)\quad \frac{d^2\Delta\lambda}{dt^2} + \frac{2n}{a}\frac{d\Delta a}{dt} + \frac{an^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\mathfrak{A}_k\sin k(\lambda-\lambda_1) = 0;$$

für den zweiten, wenn wir beachten, daſs in Gliedern mit dem Faktor ε oder ε_1 die Gröſsen Δr_ε und Δl_ε weggelassen werden dürfen,

$$(21)\quad \frac{d^2\Delta r_\varepsilon}{dt^2} - 3n^2\Delta r_\varepsilon - 2an\frac{d\Delta l_\varepsilon}{dt} - 10\varepsilon n^2\cos(\lambda-\Pi)\Delta a$$

$$-2\varepsilon an\cos(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta\lambda}{dt}$$

$$-\frac{\varepsilon a^2n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left[2k\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} - a\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\right]\cos[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda-\Pi]$$

$$+\frac{\varepsilon_1 a^2n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left[2k\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a_1\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1}\right]\cos[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda_1-\Pi_1] = 0,$$

$$(22)^*)\qquad \frac{d^2\Delta l_e}{dt^2}+\frac{2n}{a}\frac{d\Delta r_e}{dt}-\frac{2\varepsilon n^2}{a}\sin(\lambda-\Pi)\Delta a$$
$$+\frac{6\varepsilon n}{a}\cos(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta a}{dt}+2\varepsilon n\sin(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta\lambda}{dt}$$
$$+\frac{\varepsilon a n^2 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\left[(2k+2)\mathfrak{A}_k-a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\right]\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda-\Pi]$$
$$-\frac{\varepsilon_1 a n^2 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\left[2k\mathfrak{A}_k+a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\right]\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda_1-\Pi_1]=0.$$

11. Der Gang der Integration dieser Differentialgleichungen ist der folgende. Da a konstant ist, kann (20) direkt einmal integriert werden; wird der sich ergebende Wert für $\frac{d\Delta\lambda}{dt}$ in (19) substituiert, so gelingt die vollständige Integration dieser Gleichung nach § 11, (21). Das hierdurch gefundene Δa wird wieder in das Integral von (20) substituiert, wodurch dieses zum zweiten Male integrierbar wird. Führt man die erhaltenen Werte für Δa und $\Delta\lambda$ in (21) und (22) ein, so kann auf diese das gleiche Verfahren angewandt werden.

Wir haben zuerst aus (20)**)

$$(23)\qquad \frac{d\Delta\lambda}{dt}+\frac{2n}{a}\Delta a-\frac{an^2m_1}{2(n-n_1)}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k'\mathfrak{A}_k\cos k(\lambda-\lambda_1)=K,$$

dann durch Einsetzen in (19)

$$(24)\qquad \frac{d^2\Delta a}{dt^2}+n^2\Delta a-\frac{a^2n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k'\left[\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}+\frac{2n\mathfrak{A}_k}{(n-n_1)a}\right]\cos k(\lambda-\lambda_1)$$
$$-2anK=0$$

und durch Integration, wenn $\frac{n-n_1}{n}=q$ gesetzt wird,

---

*) Man bemerke, daſs

$$\cos(\lambda-\Pi)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\mathfrak{A}_k\sin k(\lambda-\lambda_1)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\mathfrak{A}_k\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda-\Pi]$$

ist, da sich die Glieder von

$$\sin(\lambda-\Pi)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\mathfrak{A}_k\cos k(\lambda-\lambda_1)$$

gegenseitig zerstören.

**) Es ist zu beachten, daſs nach (11) $\lambda-\lambda_1=(n-n_1)t+\lambda'-\lambda_1'$ ist. — Das Glied mit $k=0$, welches in (20) wegfällt, ist in (23) ebenfalls gleich Null zu setzen, was in der Folge immer zu berücksichtigen ist.

$$\Delta a = C \sin(nt + \alpha) + \frac{2aK}{n} + \frac{1}{2} a^3 m_1 \frac{d\mathfrak{A}_0}{da} - \frac{a^3 m_1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{k^2 q^2 - 1} \left[\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + \frac{2\mathfrak{A}_k}{qa}\right] \cos k(\lambda - \lambda_1), \tag{25}$$

worin $\mathfrak{A}_0 = 0$ zu nehmen ist, während $\frac{d\mathfrak{A}_0}{da}$ nicht verschwindet.

Setzen wir den erhaltenen Wert für Δa in (23) ein, so können wir integrieren und finden

$$\Delta\lambda = \frac{2C}{a} \cos(nt + \alpha) - \left(3K + a^2 n m_1 \frac{d\mathfrak{A}_0}{da}\right) t + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{2a^2 m_1 q \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a m_1 (k^2 q^2 + 3)\mathfrak{A}_k}{kq^2(k^2 q^2 - 1)} \sin k(\lambda - \lambda_1) + K_1. \tag{26}$$

12. Hier müssen wir eine Bemerkung über die Konstantenbestimmung einschalten. Bisher nahmen wir an, daſs die ungestörte Bahn gegeben und daſs die Störungen nur als Korrekturen an derselben anzubringen seien. Allein der ungestörte Zustand war in Wirklichkeit niemals vorhanden, und die Konstanten der hypothetischen ungestörten Bahn haben sich unter Mitwirkung der Störungen ausgebildet.

Als eine der Bahnkonstanten kann die Umlaufszeit oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Gröſse n angesehen werden. Denkt man sich die Umlaufszeit als Mittel von wirklichen direkten Beobachtungen bestimmt, so enthält dieselbe bereits die Einflüsse der Störungen mit Ausnahme der periodischen, welche sich bei wiederholten Beobachtungen ausgleichen. Da nun

$$l = nt + \lambda'$$

ist, so können wir uns das Glied von (26), welches t als Faktor enthält, bereits mit λ vereinigt, d. h. als bei der Bestimmung von n schon berücksichtigt denken und demgemäſs

$$3K + a^2 n m_1 \frac{d\mathfrak{A}_0}{da} = 0$$

oder

$$K = -\frac{a^2 n m_1 \frac{d\mathfrak{A}_0}{da}}{3}$$

setzen.

Auch die Exzentrizität der Bahn und die Lage ihres Perihels haben sich unter Einfluſs der Störungen ausgebildet. Man überzeugt sich nun leicht davon, daſs man durch eine geeignete Abänderung der Gröſsen ε und Π die ersten Glieder auf der rechten Seite von (25) und (26), welche die Umlaufszeit des gestörten Planeten zur Periode haben, überflüssig machen kann. Setzt man nämlich $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ und $\Pi + \Delta\Pi$ statt ε und Π, so gehen die beiden ersten Gleichungen (12) bei Vernachlässigung kleiner Gröfsen zweiter Ordnung in

$$\begin{aligned} r_0 &= a[1 - \varepsilon \cos(\lambda - \Pi) - \Delta\varepsilon \cos(\lambda - \Pi) - \varepsilon \sin(\lambda - \Pi)\, \Delta\Pi], \\ l_0 &= \lambda + 2\varepsilon \sin(\lambda - \Pi) + 2\Delta\varepsilon \sin(\lambda - \Pi) - 2\varepsilon \cos(\lambda - \Pi)\Delta\Pi] \end{aligned}$$

über, und man braucht nur

$$\begin{aligned} & - a\Delta\varepsilon \cos(\lambda - \Pi) - a\varepsilon \sin(\lambda - \Pi)\Delta\Pi = C \sin(nt + \alpha) \\ & = C \sin[\lambda - \Pi + (\alpha + \Pi - \lambda')] \\ & = C \sin(\alpha + \Pi - \lambda') \cos(\lambda - \Pi) + C \cos(\alpha + \Pi - \lambda') \sin(\lambda - \Pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\Delta\varepsilon \sin(\lambda - \Pi) - 2\varepsilon \cos(\lambda - \Pi)\Delta\Pi \\ & = -\frac{2C}{a} \sin(\alpha + \Pi - \lambda') \sin(\lambda - \Pi) + \frac{2C}{a} \cos(\alpha + \Pi - \lambda') \cos(\lambda - \Pi) \end{aligned}$$

zu setzen. Beide Gleichungen werden identisch befriedigt, wenn

$$\Delta\varepsilon = -\frac{C}{a} \sin(\alpha + \Pi - \lambda'),$$

$$\Delta\Pi = -\frac{C}{a\varepsilon} \cos(\alpha + \Pi - \lambda')$$

genommen wird.

Wir sind demnach berechtigt, in (25) und (26) rechts die ersten Glieder wegzulassen, wenn für die Gröfsen ε und Π die Werte benutzt werden, welche sich unter Einflufs der Störungen herausgebildet haben. In gleicher Weise verfahren wir späterhin.

Ebenso darf in (26)

$$K_1 = 0$$

gesetzt werden, da ein anderes K_1 durch Änderung von λ' berücksichtigt werden kann.

So vereinfachen sich die Gleichungen (25) und (26) in

$$(27)\quad \Delta a = -\frac{a^3 m_1}{6} \frac{d\mathfrak{A}_0}{da} - \frac{a^3 m_1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{k^2 q^2 - 1} \left[\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + \frac{2\mathfrak{A}_k}{qa}\right] \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

$$(27\text{a})\quad \Delta\lambda = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{2a^2 m_1 q \dfrac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a m_1 (k^2 q^2 + 3)\mathfrak{A}_k}{kq^2(k^2 q^2 - 1)} \sin k(\lambda - \lambda_1).$$

13. Die Formeln (27) und (27a) erfordern nach § 11, (22) eine Abänderung, falls

$$k(n - n_1) = n,$$

also

$$\frac{n}{n_1} = \frac{k}{k - 1}$$

wird; da die Umlaufszeiten beider Planeten

$$T = \frac{2\pi}{n}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$$

sind, so wird hieraus

$$\frac{T_1}{T} = \frac{k}{k-1}. \tag{28}$$

In diesem Falle würde ein nicht-periodisches Glied, d. h. ein Glied auftreten, welches t auch aufserhalb des Sinus und Kosinus enthielte. Während die periodischen Glieder immer zwischen gewissen Grenzwerten hin und her schwanken, würde das nicht-periodische Glied mit der Zeit ins Unendliche wachsen. Nennt man eine Störung säkular, wenn sie nicht periodisch ist, so findet eine säkulare Störung der mittleren Entfernung von der Sonne und damit der Umlaufszeit statt, falls (28) zutrifft. Sonst liefert (27) nur periodische Glieder, deren Werte zwischen gewissen Grenzen hin und her schwanken. Die Perioden derselben betragen

$$\frac{2\pi}{k(n-n_1)} = \frac{1}{k\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right)}.$$

Die sämtlichen Glieder gelangen bei der Wiederkehr der gleichen gegenseitigen Stellung beider Planeten zu ihren früheren Werten.

Von dem Nichtvorkommen säkularer Störungen des Radiusvektor hängt in erster Linie die Stabilität des Planetensystems ab. Wären solche Störungen vorhanden, so müfsten sich die Planetenbahnen mit der Zeit gänzlich ändern. Das Nichtzutreffen von (28) bietet für die Stabilität allein noch keine Garantie. Wenn nämlich in den von der Exzentrizität — auch deren höheren Potenzen — abhängigen Störungen des Radiusvektor nicht-periodische Glieder auftreten, wird die Stabilität ebenfalls vernichtet. Lagrange hat nun für beliebige Exzentrizitäten — bei Berücksichtigung nur der ersten Potenz werden wir das Resultat sogleich bestätigt finden —, aber bei Beachtung nur der ersten Potenz der Masse m_1, Poisson auch unter Rücksichtnahme auf die zweite Potenz von m_1 nachgewiesen, dafs säkulare Störungen des Radiusvektor nur eintreten können, wenn die Umlaufszeiten zweier Planeten in einem rationalen Verhältnis stehen*).

Da nun, wie an sich zu erwarten, die Verhältnisse der Umlaufszeiten

*) Bei Berücksichtigung der Potenzen der Exzentrizität lassen sich die Differentialgleichungen in ganz analoger Weise entwickeln wie hier. — Nach neuesten Untersuchungen von Gyldén, Acta mathematica, B. 9, p. 185, dürften säkulare Störungen des Radiusvektor überhaupt ausgeschlossen sein. Nach den Untersuchungen von Poisson u. A. treten säkulare Störungen bei Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung (in den Massen) auf, nach Mathieu (Borch. J. B. 80) jedoch erst bei Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung.

der Planeten sämtlich **irrational** sind, scheint die Stabilität des Planetensystems gesichert zu sein.

Wenn das Verhältnis der Umlaufszeiten zweier Planeten einem rationalen Werte sehr nahe kommt, welcher sich durch nicht allzu grofse Zahlen ausdrückt, so können einzelne Störungsglieder aufsergewöhnlich grofs werden. Dieser merkwürdige Fall trifft bei **Jupiter** und **Saturn** zu, deren Umlaufszeiten sich fast genau wie 60 : 149 und demnach sehr nahe wie 2 : 5 verhalten. Erst bei Berücksichtigung der dritten Potenz der Exzentrizitäten erhält man hierdurch ein Störungsglied von auffallender Gröfse, das gröfste, welches überhaupt im Planetensysteme vorkommt (die sog. **grofse Gleichung**). Die Periode dieser starken Störung beträgt circa 932 Jahre.

Aus § 10, (5) geht hervor, dafs die Verlangsamung der Bewegung des einen von zwei Planeten die Beschleunigung der Bewegung des andern zur Folge haben mufs. Eine säkulare Änderung der Umlaufszeit könnte nur (vgl. (27a)) bei einer säkularen Änderung des Radiusvektor eintreten.

14. Da die Integration der Gleichungen (21) und (23), wenn darin Δa und $\Delta\lambda$ durch die in (27) und (27a) gefundenen Werte ersetzt werden, in derselben Weise wie die soeben durchgeführte verläuft, können wir auf ihre detaillierte Ausführung verzichten. Es sind nur einige Transformationen nötig, um eine einheitliche Gestalt zu gewinnen. So ist z. B. die Transformation

$$k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1 - \Pi_1 = (k-1)(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi_1$$

vorzunehmen; ferner sind die Formeln (19a) und (19b) von § 11 anzuwenden.

Die Endresultate lauten

$$(29)\qquad \Delta r_s = m_1 a \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \Big\{ \varepsilon P_k \cos\left[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi\right] + \varepsilon_1 P_k' \cos\left[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi_1\right] \Big\},$$

$$(30)\qquad \Delta l_s = m_1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \Big\{ \varepsilon Q_k \sin\left[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi\right] + \varepsilon Q_k' \sin\left[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi_1\right] \Big\},$$

worin

$$(31)\left\{\begin{aligned}
P_k &= \frac{-\dfrac{3a}{q}\mathfrak{A}_k - \left[k^2 q(kq-1)+3\right]\dfrac{2a\mathfrak{A}_k + qa^2\dfrac{d\mathfrak{A}_k}{da}}{q(k^2q^2-1)} + \dfrac{1}{2}a^3\dfrac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}}{(kq+1)^2-1},\\
P_k' &= \frac{\dfrac{(k+1)(2k+1)}{kq+1}a\mathfrak{A}_{k+1} + \dfrac{k^2q-1}{kq+1}a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_{k+1}}{da} - \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_{k+1}}{da^2}}{(kq+1)^2-1},
\end{aligned}\right.$$

$$(31\,\mathrm{a})\begin{cases} Q_k = \dfrac{k+1}{q(kq+1)}\, a\mathfrak{A}_k - \dfrac{k(kq-1)-6}{2(kq+1)}\, \dfrac{2a\mathfrak{A}_k + qa^2\dfrac{d\mathfrak{A}_k}{da}}{q(k^2q^2-1)} - \dfrac{2}{kq+1}\, P_k, \\ Q_k' = -\dfrac{(k+1)a}{2(kq+1)^2}\left\{(2k+1)\mathfrak{A}_{k+1} - a\,\dfrac{d\mathfrak{A}_{k+1}}{da}\right\} - \dfrac{2}{kq+1}\, P_k' \end{cases}$$

gesetzt ist.

Für $k = 0$ ist statt $\dfrac{2a\mathfrak{A}_k + qa^2\dfrac{d\mathfrak{A}_k}{da}}{q(k^2q^2-1)}$ der Wert $\frac{1}{3}\, a^2\, \frac{d\mathfrak{A}_0}{da}$ einzufügen.

In diesen Ausdrücken sind jedoch diejenigen Glieder, welche unendlich werden, durch andere zu ersetzen. In (29) insbesondere werden die Glieder mit $k = 0$ unendlich; dieselben lauten, vom unendlich machenden Nenner abgesehen:

$$(32)\qquad \begin{cases} m_1 a\varepsilon\left[a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \dfrac{a^3}{2}\,\dfrac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right]\cos(\lambda - \Pi) \\ + m_1 a\varepsilon_1\left[a\mathfrak{A}_1 - a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \dfrac{a^3}{2}\,\dfrac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right]\cos(\lambda - \Pi_1). \end{cases}$$

Nach § 11, (22) ist an deren Stelle zu setzen*)

$$(33)\begin{cases} -\dfrac{m_1 n a\varepsilon t}{2}\left[a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \dfrac{a^3}{2}\,\dfrac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right]\sin(\lambda - \Pi) \\ -\dfrac{m_1 n a\varepsilon_1 t}{2}\left[a\mathfrak{A}_1 - a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \dfrac{a^3}{2}\,\dfrac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right]\sin(\lambda - \Pi_1) \\ = -\dfrac{m_1 n a t}{2}\left[\varepsilon\left(a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da^2} + \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right)\cos\Pi + \varepsilon_1\left(a\mathfrak{A}_1 - a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\cos\Pi_1\right]\sin\lambda \\ -\dfrac{m_1 n a t}{2}\left[-\varepsilon\left(a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right)\sin\Pi - \varepsilon_1\left(a\mathfrak{A}_1 - a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\sin\Pi_1\right]\cos\lambda. \end{cases}$$

Andere nicht-periodische Glieder können noch auftreten, wenn n und n_1 in rationalem Verhältnis stehen; doch wollen wir diesen Fall, weil thatsächlich nicht vorhanden, nicht weiter verfolgen.

15. Wir haben bisher die Störungen der Koordinaten betrachtet; nur bei der Störung des Radiusvektor wurde gleichzeitig die Störung der grofsen Halbachse als ein Teil der ersteren in Betracht gezogen. Es empfiehlt sich aber, alle säkularen Störungen, zu welchen die durch (33) dargestellte gehört, auf die Elemente zu übertragen, die periodischen Störungen dagegen bei den Koordinaten zu berücksichtigen. Um die Störung der Exzentrizität und der Perihellänge einzuführen, setzen wir, ähnlich wie in Nr. 12, in

$$r_0 = a - a\varepsilon\cos(\lambda - \Pi)$$

*) Dafs der Faktor n in den Zähler tritt, während er bei § 11, (22) im Nenner steht, erklärt sich daraus, dafs bei der zweimaligen Differentiation von (29), die ausgeführt werden mufs, um wieder zur Differentialgleichung zweiter Ordnung zu gelangen, der Faktor n^2 heraustritt.

$r_0 + \varDelta r$, $\varepsilon + \varDelta\varepsilon$ und $\Pi + \varDelta\Pi$ an Stelle von r_0, ε und Π; es folgt, da a keine säkulare Störung erleidet,

$$\begin{aligned}(34)\qquad \varDelta r = &-a(\sin \Pi \,.\, \varDelta\varepsilon + \varepsilon \cos \Pi \,.\, \varDelta\Pi)\sin\lambda\\ &-a(\cos \Pi \,.\, \varDelta\varepsilon - \varepsilon \sin \Pi \,.\, \varDelta\Pi)\cos\lambda \,.\end{aligned}$$

Soll sich die säkulare Störung (33) nun ungezwungen durch eine Störung der Exzentrizität und der Perihellänge erklären, so müssen die Faktoren von $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$ in der zweiten Form von (33) und in (34) identisch sein. Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{m_1 nt}{2}\left[\varepsilon\left(a^2\frac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \frac{a^3}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right)\cos\Pi + \varepsilon_1\left(a\mathfrak{A}_1 - a^2\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \frac{a^3}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\cos\Pi_1\right]&\\ = \sin\Pi \,.\, \varDelta\varepsilon + \varepsilon\cos\Pi \,.\, \varDelta\Pi\,,&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{m_1 nt}{2}\left[-\varepsilon\left(a^2\frac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \frac{a^3}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right)\sin\Pi - \varepsilon_1\left(a\mathfrak{A}_1 - a^2\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \frac{a^3}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\sin\Pi_1\right]&\\ = \cos\Pi \,.\, \varDelta\varepsilon - \varepsilon\sin\Pi \,.\, \varDelta\Pi&\end{aligned}$$

und hieraus

$$(35)\quad \varDelta\varepsilon = \frac{m_1 na\varepsilon_1 t}{4}\left(2\mathfrak{A}_1 - 2a\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - a^2\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\sin(\Pi - \Pi_1)\,,$$

$$\begin{aligned}(36)\quad \varDelta\Pi = \frac{m_1 na^2 t}{4}\left(2\frac{d\mathfrak{A}_0}{da} + a\frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\,\frac{m_1 na}{4}\left(2\mathfrak{A}_1 - 2a\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - a^2\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)&\\ \times\cos(\Pi - \Pi_1)\,.&\end{aligned}$$

Werden diese Korrekturen an Exzentrizität und Perihellänge angebracht, so brauchen bei r und l nur die periodischen Störungen berücksichtigt zu werden. Man überzeugt sich nämlich durch eine analoge Rechnung davon, daſs bei Berücksichtigung von (35) und (36) auch die säkularen Störungsglieder von (30) weggelassen werden können.

Die Gleichungen (35) und (36) sind nur von den Elementen beider Planetenbahnen, nicht von der augenblicklichen Stellung der Planeten abhängig. Wegen der sehr langsamen Änderung von Π und Π_1 können

$$\frac{\varDelta\varepsilon}{t} \quad \text{und} \quad \frac{\varDelta\Pi}{t}$$

für lange Zeit als konstant angesehen werden; beide können positiv oder negativ sein.

16. Die Gleichung (35) bildet die Grundlage für eine der merkwürdigen Relationen, welche Laplace in Bezug auf die Gesamtheit der Planeten, soweit die Exzentrizitäten und gegenseitigen Neigungen ihrer Bahnen gering sind*), aufgestellt hat.

Zunächst sei bemerkt, daſs die Gröſse n für alle Planeten dieser Art dasselbe Vorzeichen hat, falls sie ihre Bahnen, wie wirklich der Fall, in

*) Und falls keine rationalen Verhältnisse bei zwei Umlaufszeiten vorkommen.

gleicher Richtung durchlaufen. Setzen wir, was hier ausreichend genau ist,

$$n^2 a^3 = f, \quad \text{also} \quad n = \sqrt{\frac{f}{a^3}},$$

so ist die Quadratwurzel hier wie in analogen Ausdrücken durchgehends positiv zu nehmen.

Die Gröfse

$$M = \left(2\mathfrak{A}_1 - 2a\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - a^2\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)$$

bleibt ungeändert, wenn man den störenden und den gestörten Planeten, also a und a_1 vertauscht, wie mit Hilfe von § 11, (19a) und (19c) leicht zu verifizieren ist. Bezeichnet daher $\varDelta\varepsilon_1$ die Störung der Exzentrizität, welche der Planet m_1 durch m erfährt, so haben wir

$$\varDelta\varepsilon = \frac{m_1\sqrt{f}\,\varepsilon_1}{4\sqrt{a}}\,tM\sin(\Pi - \Pi_1),$$

$$\varDelta\varepsilon_1 = \frac{m\sqrt{f}\,\varepsilon}{4\sqrt{a_1}}\,tM\sin(\Pi_1 - \Pi),$$

also

$$(37) \qquad m\sqrt{a}\,\varepsilon\varDelta\varepsilon + m_1\sqrt{a_1}\,\varepsilon_1\varDelta\varepsilon_1 = 0.$$

Sind nun $m_1, m_2, \ldots m_n$ die Massen der n Planeten desselben Systems, welche alle den vorausgeschickten Anforderungen genügen — bei unserem Planetensystem trifft dies zu, wenn die kleineren, an Einflufs unbedeutenden Planeten aufser acht gelassen werden — und werden die Halbachsen und Exzentrizitäten ihrer Bahnen entsprechend bezeichnet, so gelten für die Exzentrizitätsstörungen, welche je zwei aufeinander ausüben, Gleichungen von der Form (37). Verstehen wir jetzt unter

$$\varDelta\varepsilon_1, \varDelta\varepsilon_2, \ldots \varDelta\varepsilon_n$$

die Exzentrizitätsstörungen, welche die betreffenden Planeten durch die Gesamtheit der übrigen erleiden, so ist

$$(38) \qquad m_1\sqrt{a_1}\,\varepsilon_1\varDelta\varepsilon_1 + m_2\sqrt{a_2}\,\varepsilon_2\varDelta\varepsilon_2 + \cdots + m_n\sqrt{a_n}\,\varepsilon_n\varDelta\varepsilon_n = 0;$$

denn löst man die Gröfsen $\varDelta\varepsilon$ in ihre Einzelbestandteile auf, so zerstören sich je zwei Glieder nach (37).

Die Gleichung (38) kann aber wie eine Differentialgleichung behandelt und integriert werden; wir erhalten

$$(39) \qquad m_1\sqrt{a_1}\,\varepsilon_1^2 + m_2\sqrt{a_2}\,\varepsilon_2^2 + \cdots + m_n\sqrt{a_n}\,\varepsilon_n^2 = \text{Const.}$$

Multipliziert man das Quadrat der Exzentrizität eines jeden Planeten mit der Masse und der Wurzel aus der mittleren Sonnenferne, so ist die Summe dieser Gröfsen, für das ganze System genommen, eine Konstante.

Da die Gröfsen $\sqrt{a_k}$ bei der Gleichläufigkeit aller Glieder des Systems positiv sind, so zieht die Vergrößerung eines Teils der Exzentrizitäten die Verkleinerung anderer nach sich. Wären die Exzentrizitäten alle anfänglich sehr klein, so können wenigstens die der größeren Planeten nicht über eine gewisse Grenze wachsen. Dieser Satz, der freilich unter Voraussetzungen bewiesen ist, die seinen Wert sehr einschränken, bildet ein neues Argument für die Stabilität des Planetensystems.

17. Es bleibt uns noch übrig, die dritte Gleichung (4), welche die Störung der Breite liefert, umzugestalten und zu integrieren. Wir können in dem zweiten Gliede der rechten Seite, welches schon m_1 enthält, die sehr kleine Größe z weglassen und dürfen die beiden Planetenbahnen als Kreise mit den Radien a und a_1 ansehen. Wir haben zu setzen

$$r = a,\ r_1 = a_1,\ z = a \sin b = ab,\ z_1 = a_1 \sin b_1 = a_1 \sin J \sin l_1$$
$$= a_1 J \sin l_1 = a_1 J \sin \lambda_1$$

und erhalten

$$a \frac{d^2 b}{dt^2} = -\frac{f(1+m)b}{a^2} + \frac{f m_1 a_1 J \sin \lambda_1}{\varrho^3} - \frac{f m_1 J \sin l_1}{a_1^{\,2}}$$

oder, wenn $f(1+m) = f = n^2 a^3$ gesetzt wird,

$$(40) \qquad \frac{d^2 b}{dt^2} + n^2 b - n^2 m_1 a^2 a_1 J \left[\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a_1^{\,3}}\right] \sin \lambda_1 = 0$$

oder nach § 11, (13)

$$(41) \quad \frac{d^2 b}{dt^2} + n^2 b - n^2 m_1 a^2 a_1 J \left[\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \mathfrak{B}_k \cos k(\lambda - \lambda_1) - a_1^{-3}\right] \sin \lambda_1 = 0$$

oder nach einer mehrfach angewandten Methode

$$(42) \quad \frac{d^2 b}{dt^2} + n^2 b - \frac{1}{2} n^2 m_1 a^2 a_1 J \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \mathfrak{B}_k \sin [k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1] = 0,$$

wenn $\mathfrak{B}_0 - \frac{2}{a_1^{\,3}}$ statt $\mathfrak{B}_0$ eingesetzt wird.

Diese Gleichung ist aber nach § 11, (21) sofort zu integrieren; wir erhalten

$$(43) \qquad b = -\frac{1}{2} n^2 m_1 a^2 a_1 J \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{\mathfrak{B}_k \sin [k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1]}{[k(n - n_1) + n_1]^2 - n^2},$$

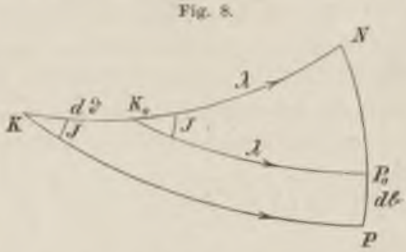
wenn sogleich ein Glied $C \sin (nt + \alpha)$ weggelassen wird, welches durch Verlegung der Knotenlinie und Änderung der Zeit, in welcher diese vom gestörten Planeten passiert wird, überflüssig gemacht werden kann (vgl. Nr. 12).

Einer Verbesserung bedarf wieder das Glied $k = 1$; wir haben es zu ersetzen durch

$$(44) \qquad -\frac{1}{4} n m_1 a^2 a_1 J \mathfrak{B}_1 t \cos \lambda.$$

18. Das säkulare Störungsglied kann wieder durch eine geeignete Änderung der Bahnelemente ersetzt werden; wir müssen annehmen, daſs sich die Bahnebene des gestörten Planeten so bewegt, daſs bei gleichbleibender Neigung J der aufsteigende Knoten auf der Bahnebene des störenden Planeten mit konstanter Geschwindigkeit *rückwärts* rückt. Stellen nämlich*) in Fig. 8 KK_0N die Ebene des störenden Planeten, K_0P_0 und KP die Ebenen des gestörten Planeten im Anfangszustande und nach der Zeit t dar, machen wir NP_0P auf K_0P_0 und KP senkrecht (was wegen der Kleinheit des Lagenunterschiedes der beiden letzten Ebenen näherungsweise möglich ist) und setzen wir

Fig. 8.



$$K_0N = K_0P_0 = \lambda, \quad KK_0 = d\vartheta, \quad P_0P = db,$$

so ist

$$db = \sin(\lambda + d\vartheta)\sin J - \sin\lambda \sin J = J\cos\lambda d\vartheta.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (44), so erkennen wir, daſs dieses Störungsglied weggelassen werden darf, wenn man den Knotenpunkt auf der Ebene des störenden Planeten bei ungeänderter gegenseitiger Neigung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{1}{4}\, n m_1 a^2 a_1 \mathfrak{B}_1 \tag{44b}$$

zurückgehen läſst.

Die Neigung J dürfen wir als unveränderlich annehmen.

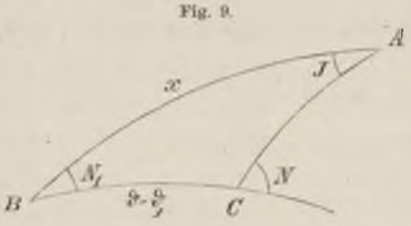
19. Es ist von Interesse, die Lagenänderung der Ebene des gestörten Planeten in Bezug auf eine feste, gegen die Ebene der in Betracht kommenden Planetenbahnen nur sehr wenig geneigte Ebene zu untersuchen. Man kann als solche — ohne daſs dies jedoch notwendig wäre — die Laplace'sche unveränderliche Ebene wählen.

Seien N und N_1 die Neigungen der gestörten und der störenden Bahn gegen die feste Ebene, J die unveränderliche Neigung der beiden Bahnebenen gegeneinander, ϑ und ϑ_1 die in der festen Ebene von einer bestimmten Anfangsrichtung aus gerechneten Längen der aufsteigenden Knoten beider Bahnen in Bezug auf die feste Ebene. Wir denken uns wieder der Anschaulichkeit halber (Fig. 9) an Stelle der durch die drei Ebenen gebildeten Ecke das sphärische Dreieck ABC gesetzt. BC stelle die feste Ebene, AB die Ebene des störenden, AC die des gestörten Planeten dar; die Seite AB bezeichnen wir mit x. Alle Gröſsen werden in der

*) Man denke sich zu diesem Zwecke das Ganze auf eine Kugel projiziert, deren Mittelpunkt mit demjenigen der Sonne zusammenfällt. — J^2 wird vernachlässigt, also $\cos J = 1$ gesetzt.

Richtung der Planetenbewegung, die wir bei allen in Betracht kommenden Gliedern des Sonnensystems als wesentlich gleichsinnig annehmen, als positiv gerechnet; der Neigungswinkel zwischen zwei Bogen (Ebenen) ist der Winkel zwischen ihren positiv gerichteten Teilen. Zwischen den angegebenen Gröfsen bestehen für zwei Zeitpunkte, die um t auseinander liegen — es möge unterdessen nur eine sehr kleine Änderung der Elemente stattgefunden haben — die folgenden Relationen:

Fig. 9.



$$\cos N = \cos N_1 \cos J - \sin N_1 \sin J \cos x,$$

$$\cos (N + \varDelta N) = \cos N_1 \cos J - \sin N_1 \sin J \cos (x + \varDelta x)$$

oder

$$\cos N - \sin N \varDelta N = \cos N_1 \cos J - \sin J [\cos x - \sin x \varDelta x],$$

aus denen folgt

$$\sin N \varDelta N = - \sin N_1 \sin J \sin x \varDelta x$$

oder, da

(45) $$\sin x = \frac{\sin N \sin (\vartheta - \vartheta_1)}{\sin J}$$

ist,

(45a) $$\varDelta N = - \sin N_1 \sin (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta x = - N_1 \sin (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta x,$$

worin $\varDelta x$ das Stück bezeichnet, um welches die Knotenlinie der beiden Planetenbahnen sich auf der störenden Bahn während der Zeit t verschoben hat.

Weiter folgt aus (45)

$$\sin J \cos x \varDelta x = \cos N \sin (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta N + \sin N \cos (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta \vartheta$$

oder wegen (45a)

$$\sin N \cos (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta \vartheta = [\sin J \cos x + \cos N \sin N_1 \sin^2 (\vartheta - \vartheta_1)] \varDelta x$$

Durch Berücksichtigung der Relationen

$$\cos x = \frac{\cos J \cos N_1 - \cos N}{\sin J \sin N_1}$$

und

$$\cos J = \cos N \cos N_1 + \sin N \sin N_1 \cos (\vartheta - \vartheta_1)$$

folgt hieraus

$$\sin N \varDelta \vartheta = - [\cos (\vartheta - \vartheta_1) \cos N \sin N_1 - \sin N \cos N_1] \varDelta x$$

oder, wenn

$$\sin N = N, \quad \cos N = 1 \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird,

(46) $$\varDelta \vartheta = \left[1 - \cos (\vartheta - \vartheta_1) \frac{N_1}{N}\right] \varDelta x.$$

Setzen wir gemäſs (44b)

$$\Delta x = -\frac{1}{4} m_1 n a^2 a_1 \mathfrak{B}_1 \,,$$

so haben wir nach (45a) für die Änderung der Neigung gegen die feste Ebene

$$\Delta N = \frac{1}{4} m_1 n a^2 a_1 \mathfrak{B}_1 N_1 \sin(\vartheta - \vartheta_1) \,.\, t \tag{47}$$

und nach (46) für die Bewegung des Knotens auf derselben

$$\Delta \vartheta = \frac{1}{4} m_1 n a^2 a_1 \mathfrak{B}_1 \left[\cos(\vartheta - \vartheta_1) \frac{N_1}{N} - 1\right] t \,. \tag{48}$$

Wann die Neigung der Ebene der gestörten Bahn gegen die feste Ebene zu-, wann abnimmt, wann die Knotenlinie auf ihr vor-, wann zurückrückt, ist aus (47) und (48) unmittelbar zu erkennen.

20. Für (47) können wir schreiben, da $f = n^2 a^3$ ist,

$$\Delta N = \frac{1}{4} m_1 a_1 \sqrt{a} \sqrt{f} \mathfrak{B}_1 N_1 \sin(\vartheta - \vartheta_1) \,.\, t;$$

bilden wir dieselbe Gleichung für ΔN_1 und addieren nach Multiplikation mit $m\sqrt{a}N$ und $m_1\sqrt{a_1}N_1$, so erhalten wir:

$$m\sqrt{a} N \Delta N + m_1 \sqrt{a_1} N_1 \Delta N_1 = 0 \,. \tag{49}$$

Bezeichnen wir jetzt mit N_1, N_2, N_n . . . die (kleinen) Neigungen der Bahnebenen der n Glieder eines Planetensystems gegen eine feste Ebene, so folgt durch Summation einer Reihe von Gleichungen der Form (49)

$$m_1\sqrt{a_1} N_1 \Delta N_1 + m_2 \sqrt{a_2} N_2 \Delta N_2 + \cdots + m_n \sqrt{a_n} N_n \Delta N_n = 0 \,, \tag{50}$$

aus der durch Integration die Laplace'sche Relation

$$m_1 \sqrt{a_1} N_1^2 + m_2 \sqrt{a_2} N_2^2 + \cdots + m_n \sqrt{a_n} N_n^2 = \text{Const.} \tag{51}$$

hervorgeht*).

21. Denkt man sich die Erde fest, Sonne und Mond aber sich um dieselbe bewegend, so kann man die Störungen, welche die elliptische Mondbahn durch die Attraktion der Sonne erleidet, in ähnlicher Weise berechnen, wie die Störungen der Planeten. Der wesentliche Unterschied gegen dieses Problem besteht darin, daſs die Masse der Sonne sehr groſs gegen die Erdmasse und nur wegen der bedeutenden Entfernung von verhältnismäſsig geringem Einfluſs ist.

Begnügt man sich mit einer ersten Näherung, so ist das Problem einfacher zu behandeln als dasjenige der Planetenstörungen; aus den Resultaten für die letzteren kann man übrigens, wie wir sogleich thun werden, durch Spezialisierung jene Näherungsformeln herleiten. Wenn besonders eine derselben sich von der Wirklichkeit ganz bedeutend entfernt, so beruht dies in dem von uns schon bemerkten Umstande, daſs anscheinend zu vernachlässigende Störungsglieder durch Kleinwerden des Nenners einen unverhältnismäſsig groſsen Wert erlangen. Die genaue

*) Laplace hat in der Gleichung die Gröſsen $\mathrm{tg}^2 N_1$ u. s. w., die wir bei der Kleinheit der Winkel durch $N_1{}^2$ u. s. w. ersetzen.

Mondrechnung, bei der u. a. auch Potenzen der Exzentrizität und Neigung, ferner die Störungen durch die Planeten und die Abplattung der Erde in Betracht zu ziehen sind, gehört zu den kompliziertesten Aufgaben der Astromechanik und mufs hier übergangen werden.

Jene erste Näherung der Mondrechnung erhalten wir einfach dadurch, dafs wir zu der Attraktion, welche der Mond durch die Erde erleidet, die Differenz der Attraktionen hinzufügen, welche von der Sonne auf Mond und Erde ausgeübt werden. Setzt man hier die Erdmasse gleich 1, die Mondmasse gleich m, die Sonnenmasse gleich m_1 und wählt im übrigen die Bezeichnung analog wie früher*), so gelangt man auch hier zu den Gleichungen (4), aus welchen (10) und (40) abgeleitet werden. Die weitere Entwicklung dieser Gleichungen geschieht nun in der Weise, dafs aufser den Potenzen von ε und J auch das Produkt von m_1 mit einer höheren als der dritten Potenz von $\frac{a}{a_1}$ vernachlässigt wird.

Die wirkliche Durchführung der Rechnung ist bei diesen Vernachlässigungen nicht schwierig und kann als Übung empfohlen werden; wir begnügen uns damit, die Formeln für die planetarischen Störungen dadurch zu vereinfachen, dafs wir in $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$ u. s. w. alle Potenzen von $\frac{a}{a_1}$ aufser der ersten und eventuell der zweiten unterdrücken. Beachtet man die Bildung der C_k in § 11, so erhellt, dafs man alle $\mathfrak{A}_k$ vernachlässigen darf mit Ausnahme von

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{2}{a_1}, \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{3}{4a_1} \left(\frac{a}{a_1}\right)^2, \tag{52}$$

ein Resultat, das freilich infolge der Werte der Koeffizienten der Wirklichkeit nicht ganz entspricht. Aus § 11, (16) geht hervor, dafs auch sämtliche $\mathfrak{B}_k$ mit Ausnahme von

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{2a_1}{(a_1^2 - a^2)^2} = \frac{2}{a_1^3}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{3}{a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1} \tag{53}$$

vernachlässigt werden dürfen.

Nach § 11, (18), (19), (19b) u. s. w. findet man noch

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\mathfrak{A}_0}{da} = \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \frac{d\mathfrak{A}_1}{da} = \frac{1}{a_1^2}, \quad \frac{d\mathfrak{A}_2}{da} = \frac{3}{2a_1^2} \cdot \frac{a}{a_1}, \\
&\frac{d\mathfrak{A}_0}{da_1} = -\frac{2}{a_1^2}, \quad \frac{d\mathfrak{A}_1}{da_1} = -\frac{2}{a_1^2} \cdot \frac{a}{a_1}, \\
&\frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2} = \frac{1}{a_1^3}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2} = \frac{9}{4a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_2}{da^2} = \frac{3}{2a_1^3}, \quad \frac{d^3\mathfrak{A}_3}{da^3} = \frac{15}{4a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1}, \text{**)} \\
&\frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da\,da_1} = -\frac{3}{a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da\,da_1} = -\frac{2}{a_1^3}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_2}{da\,da_1} = -\frac{9}{2a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1},
\end{aligned}\right. \tag{54}$$

während die übrigen Koeffizienten nicht beachtet zu werden brauchen.

---

*) Der Erdmittelpunkt bildet den Nullpunkt des Koordinatensystems.

**) Diese Werte findet man am einfachsten durch direktes Bilden der ersten Glieder in § 11, (2) und Differentiation.

In den Reihen Σ' ist übrigens nach Früherem statt $\mathfrak{A}_1$ und $\frac{d\mathfrak{A}_1}{da}$ resp. 0 zu setzen.

22. Nach diesen Vorbereitungen können wir unmittelbar die ersten Näherungswerte der Mondstörungen aus den Gleichungen (25), (26), (29), (30), (43) u. s. w. ableiten. Zur numerischen Berechnung mögen folgende Angaben dienen:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{79{,}667} = 0{,}012552\,, \\ m_1 &= 322\,800\,, \\ a &= 384\,415{,}5 \text{ km}, \\ a_1 &= 148\,670\,000 \text{ km}, \\ \frac{a}{a_1} &= 0{,}002586\,, \\ \varepsilon &= 0{,}054908\,, \\ \varepsilon_1 &= 0{,}016770\,, \\ J &= 5^0 8' 39''{,}96\,. \end{aligned}$$

Mittlere siderische Umlaufszeit*) des Mondes: $T = 27{,}32166\ t$,

mittlere siderische Umlaufszeit der Erde: $T_1 = 365{,}25636\ t$,

woraus

$$q = \frac{n - n_1}{n} = \frac{T_1 - T}{T_1} = 0{,}9252$$

folgt.

Die Störungen der Länge und Breite werden in Bogenteilen mit dem Radius 1 erhalten und müssen in das gewöhnliche Winkelmaſs umgesetzt werden.

Zunächst erhalten wir drei Störungen des Radiusvektor — der häufig durch die Parallaxe ersetzt wird — und der Länge, die resp. von den Exzentrizitäten unabhängig, von ε oder ε_1 abhängig sind; dieselben heiſsen die Variation, die Evektion und die jährliche Gleichung**).

Aus (27) und (27a) erhalten wir als Resultate der Variation:

$$(55) \quad \begin{cases} \Delta a = -\dfrac{3am_1(q+1)}{2q(4q^2-1)}\left(\dfrac{a}{a_1}\right)^2 \cos 2(\lambda - \lambda_1), \\ \Delta\lambda = -\dfrac{3m_1(4q^2+4q+3)}{8q^2(4q^2-1)}\left(\dfrac{a}{a_1}\right)^3 \sin 2(\lambda - \lambda_1) \end{cases}$$

oder

$$(56) \quad \begin{cases} \Delta a = -0{,}00718\,a \cos 2(\lambda - \lambda_1), \\ \Delta\lambda = 35'{,}115 \sin 2(\lambda - \lambda_1)\,. \end{cases}$$

*) In der Astronomie bezeichnet man die wirkliche Umlaufszeit eines Himmelskörpers als die siderische.

**) Die Mittelpunktsgleichung, welche öfters bei den Störungen der Mondbahn mit aufgeführt wird, gehört nicht hierher; sie ist die nach der Keplerschen Gleichung an der gleichmäſsigen Kreisbewegung anzubringende Korrektur.

Diese Werte sind von denjenigen, welche die ausführlichere Rechnung liefert, nicht sehr verschieden. Die genauere Formel für die Störung der Länge lautet, von höheren Gliedern abgesehen,

$$\Delta\lambda = -2' \sin(\lambda - \lambda_1) + 39',5 \sin 2(\lambda - \lambda_1). \tag{57}$$

Die Ausdrücke (56) haben den halben synodischen Monat*) zur Periode. Es rührt dies daher, daſs zur Zeit des Neumondes und des Vollmondes (der Syzygien) die Schwächung der Erdattraktion durch die Anziehung der Sonne nahezu die gleiche ist; der kleine Unterschied veranlaſst das erste Glied in (57), die sog. parallaktische Gleichung. Wir entnehmen (56) das Resultat:

Der Radiusvektor der Mondbahn wird am stärksten verkürzt zur Zeit der Syzygien (Voll- und Neumond), am stärksten vergröſsert zur Zeit der Quadraturen (erstes und letztes Viertel); zu diesen vier Zeitpunkten verschwindet die Variation der Länge. In den vier Zeitpunkten, welche in der Mitte zwischen je zwei der vier ebengenannten liegen, erhält der Radiusvektor seine normale Länge, während die Längendifferenz ihr Maximum von 35′, genauer 39′,5 erreicht. Zu beachten ist, daſs der Mond gerade dann der Erde am nächsten kommt, wenn deren Anziehung am meisten geschwächt erscheint.

In derselben Weise berechnet man aus (29) und (30) die Evektion und die jährliche Gleichung. Die Ausdrücke werden etwas umständlich, weshalb wir uns auf Angabe der (verbesserten) Zahlenwerte der Hauptglieder beschränken. Für die Evektion findet man die auffallend groſsen Werte — das Glied mit $k = -2$ erhält einen kleinen Nenner und soll allein in Betracht gezogen werden —

$$\left\{\begin{aligned} \Delta r_e &= -0,00961 \cos\left[2(\lambda - \lambda_1) - \lambda + \Pi\right], \\ \Delta l_e &= 76',5 \sin\left[2(\lambda - \lambda_1) - \lambda + \Pi)\right]. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Das Argument der periodischen Funktionen ist hier die Differenz zwischen dem doppelten mittleren Winkelabstande von Mond und Sonne und der mittleren Anomalie des ersteren. Die Periode der Evektion beträgt:

$$\frac{2\pi}{n - 2n_1} = \frac{TT_1}{T_1 - 2T} = 31,7 \text{ Tage},$$

also etwas mehr als ein synodischer Monat. Zur Zeit der Syzygien reduziert sich das Argument auf die mittlere Anomalie, und die Evektion vermischt sich dann mit der Mittelpunktsgleichung.

Für die jährliche Gleichung, die Störung, welche von ε_1 abhängt, kommt besonders das Glied $k = -1$ in (30) in Betracht; man erhält Werte, welche der genaueren Rechnung nach in

*) Der synodische Monat ist die Zeit, welche von einem Neumond bis zum andern verstreicht; er beträgt $29^t\ 12^h\ 44^m\ 2,9^s$.

$$(59)\qquad \begin{cases} \Delta r_{t_1} = a\,.\,0{,}000085 \cos(\lambda_1 - \Pi_1), \\ \Delta l_{t_1} = -\,11',22 \cos(\lambda_1 - \Pi_1) \end{cases}$$

zu berichtigen sind. Von dem Werte Δr_{t_1}, welcher überhaupt sehr geringfügig ist, wurde nicht einmal das gröfste, sondern nur das am einfachsten zu interpretierende Glied angegeben.

Das Argument der periodischen Funktionen in (59) ist die mittlere Anomalie der Sonne, die Periode der Störung also ein (anomalistisches*) Jahr.

Wenn die Erde sich am weitesten von der Sonne entfernt, kommt ihr der Mond am nächsten und umgekehrt. Dies geht schon unmittelbar daraus hervor, dafs mit der Entfernung der Erde von der Sonne die schwächende Wirkung der letzteren auf die Attraktion der Erde abnimmt.

Als periodische Störung der Breite des Mondes, die man wegen der Kleinheit des Neigungswinkels auf die Ekliptik beziehen kann, erhält man nach (43) unter Anbringung von Verbesserungen (Glied $k = -1$):

$$(60)\qquad \Delta b = 8',6 \sin(\lambda - 2\lambda_1),$$

wo die Längen von der Knotenlinie an gerechnet sind.

23. Aus (36) folgt für die Änderung des Perigäums (der Erdnähe) des Mondes der beträchtliche Wert:

$$(61)\qquad \Delta\Pi = \frac{3m_1 n t}{4}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3,$$

oder für das Jahr ein Vorrücken der Apsidenlinie um

$$20^0 9'.$$

Dieses Resultat stimmt mit der Beobachtung durchaus nicht; die letztere liefert $40^0 40'$. Der auffallende Unterschied liefs Clairaut zeitweilig vermuten, dafs das Newton'sche Attraktionsgesetz nicht in voller Strenge gelte; bei einer eingehenderen Berechnung fand er indessen Beobachtung und Theorie in Einklang. Gerade hier macht sich der Einflufs scheinbar unbedeutender Glieder in der stärksten Weise bemerklich.

Aus (35) folgt für $\Delta\varepsilon$ ein sehr geringer Wert; auch ist diese Störung wegen der raschen Änderung von Π als periodisch zu betrachten.

Aus (44) folgt für das Zurückgehen der Knotenlinie die Geschwindigkeit:

$$(62)\qquad \frac{3m_1 n}{4}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3,$$

woraus man ein jährliches Zurückgehen (über 20^0) dieser Linie berechnet, welches mit dem wahren Werte $19^0 20'$ nahe übereinstimmt.

---

*) Das anomalistische Jahr ist die Zeit, welche zwischen zwei Sonnennähen der Erde verstreicht; es beträgt im Mittel $365^t\ 6^h\ 13^m\ 48{,}5^s$.

7*

§ 13.

Die Planetenbewegung im widerstehenden Mittel.

1. Der Weltraum ist, wie schon die Fortpflanzung des Lichtes durch ihn lehrt, nicht völlig leer, sondern mit einem äufserst wenig dichten Stoffe ausgefüllt, den wir bei der absoluten Unbekanntheit seiner Natur als Weltäther bezeichnen. Der Äther mufs auf die Planetenbewegung einen hemmenden Einflufs ausüben; wir wollen annehmen, dafs dieser bei sonst gleichen Verhältnissen dem Quadrate der Geschwindigkeit des Himmelskörpers direkt proportional sei, da sich diese Annahme bei der Bewegung in der Luft als ziemlich zutreffend erweist. Wir können das Problem als ein planimetrisches behandeln, falls wir den Planeten nur von der Sonne angezogen denken; denn die seitliche Ablenkung, welche ein Himmelskörper von unsymmetrischer Gestalt durch den Ätherwiderstand erfahren kann, ist jedenfalls äufserst gering. Konnte doch überhaupt der gesamte Widerstand noch nicht durch Beobachtungen bei den Planeten nachgewiesen werden; nur an Kometen, insbesondere dem Encke'schen, wurde eine Verkürzung der Umlaufszeit konstatiert, welche vielleicht durch diesen Widerstand zu erklären ist (Encke).

Es ist bis jetzt nicht gelungen, die Differentialgleichungen der Planetenbewegung im widerstehenden Mittel allgemein zu integrieren. Nur wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit umgekehrt proportional wäre, liefse sich die Integration ausführen, doch ist diese Annahme mit den Thatsachen durchaus nicht im Einklang. Die Rechnungen, welche hierüber angestellt wurden, findet man bei Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, pag. 125 ff.; sie sollen wegen ihrer Resultatlosigkeit hier nicht reproduziert werden. Vielmehr wollen wir nach dem Vorgange von Laplace, Lagrange, Poisson u. A. die Aufgabe als ein Störungsproblem unter der Annahme, dafs der Widerstand sehr klein sei, behandeln.

2. Die Differentialgleichungen unseres Problems lauten:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{f(1+m)x}{r^3} - kv\dfrac{dx}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{f(1+m)y}{r^3} - kv\dfrac{dy}{dt}, \end{cases}$$

worin k eine sehr kleine Gröfse ist, welche von der Dichtigkeit des Äthers, der Gestalt und Gröfse der Oberfläche sowie der Masse des Planeten abhängt.

Wir setzen $x = r\cos l$, $y = r\sin l$, und finden nach Muster von § 12, (7), (8):

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 = -\dfrac{f(1+m)}{r^2} - kv\dfrac{dr}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d^2l}{dt^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dl}{dt} = -kv\dfrac{dl}{dt}. \end{cases}$$

3. Wir wollen die Untersuchung nur für den Fall durchführen, dafs die ungestörte Bewegung des Planeten eine kreisförmige ist; die Exzentrizität und die Perihellänge erleiden ohnehin nur periodische Störungen. Die genauere Durchführung findet man bei Lagrange, Mécanique analytique (2. Éd.), Poisson, Traité de mécanique.

Wir setzen

(2a) $$r = a + \varDelta a, \quad l = (n + \varDelta n)t + l',$$

worin $\varDelta a$ und $\varDelta n$ die Störungen des Radiusvektor und der Geschwindigkeit bedeuten. a und n sind der Radiusvektor und die Winkelgeschwindigkeit des ungestörten Planeten; sie sind von der Zeit unabhängig, während $\varDelta a$ und $\varDelta n$ von ihr abhängen. Aus (2) wird hiernach, wenn noch $f(1 + m) = a^3n^3$, $v = (a + \varDelta a)(n + \varDelta n)$ gesetzt wird und die zweiten Dimensionen der Gröfsen, welche von der Gröfsenordnung k sind, vernachlässigt werden*):

(3) $$\frac{d^2 \varDelta a}{dt^2} = 3n^2 \varDelta a + 2na \varDelta n,$$

(4) $$\frac{d\varDelta n}{dt} = -\frac{2n}{a}\frac{d\varDelta a}{dt} - kan^2.$$

Die Integration von (4) liefert

(5) $$\varDelta n = -\frac{2n}{a}\varDelta a - kan^2 t,$$

wo keine Konstante zuzufügen ist, wenn angenommen wird, dafs für $t = 0$ die Bewegung mit der ungestörten zusammenfällt. Durch Einsetzung des Wertes für $\varDelta n$ in (3) erhalten wir:

(6) $$\frac{d^2 \varDelta a}{dt^2} = -n^2 \varDelta a - 2ka^2n^3 t.$$

Nun ist aber, wie man leicht verifizieren kann, das allgemeine Integral der Differentialgleichung

(7) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y + ax = 0$$

der Ausdruck

(8) $$y = -\frac{ax}{n^2} + c\sin(nx + \alpha),$$

falls n von Null verschieden ist. Daher giebt (6) integriert:

(9) $$\varDelta a = -2ka^2nt + c\sin(nt + \alpha).$$

Soll für $t = 0$ die gestörte Bahn der Gröfse und Richtung nach in die ungestörte übergehen, soll also für $t = 0$

$$\varDelta a = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\varDelta a}{dt} = 0$$

sein, so wird

$$\alpha = 0, \quad c = 2ka^2,$$

das periodische Glied fällt also nicht weg**). Nimmt man dagegen an

*) Es ist $\frac{d(a + \varDelta a)}{dt} = \frac{d\varDelta a}{dt}$, $\frac{dl}{dt} = n + \varDelta n$, $\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{d\varDelta n}{dt}$ u. s. w.

**) Das periodische Glied kann weggelassen werden, wenn man die ursprüngliche kreisförmige Bahn durch eine elliptische ersetzt (vgl. § 12, 12).

— was der Wirklichkeit am besten entspricht —, dafs $\frac{d\Delta a}{dt}$ einen konstanten Wert erlangt habe, so ist einfach

$$\Delta a = -2ka^2nt \tag{10}$$

zu setzen. Im letzteren Falle folgt aus (5)

$$\Delta n = 3kan^2t\,. \tag{11}$$

Die Entfernung des Planeten von der Sonne nimmt also proportional mit der Zeit ab, während sich die Winkelgeschwindigkeit ebenso vergröfsert.

Die Änderung der (linearen) Geschwindigkeit wird durch

$$(a+\Delta a)(n+\Delta n) - an = a\Delta n + n\Delta a = kan^2t \tag{12}$$

dargestellt. Wir haben also die anscheinend paradoxe Thatsache, dafs durch den Ätherwiderstand die Geschwindigkeit des Planeten fortwährend zunimmt.

Zweiter Abschnitt.

Die unfreie Bewegung materieller Punkte.

§ 14.

Einführung der unfreien Bewegung.

1. Es wird nicht selten die Aufgabe gestellt, die Bewegung materieller Punkte zu entwickeln, welche nicht nur der Einwirkung gewisser Kräfte unterliegen, sondern über deren Bahnen noch anderweite Vorschriften gegeben werden. So kann z. B. verlangt werden, dafs ein materieller Punkt, welcher der Schwerkraft unterliegt, immer in derselben Ebene verbleibe; dies giebt das bekannte Beispiel des Falls auf der schiefen Ebene. Wird ein schwerer Körper, der als materieller Punkt gedacht werden möge, an einem unausdehnbaren und unbiegsamen, als massenlos anzunehmenden Faden aufgehängt, so wird hierdurch der Punkt genötigt, sich auf einer Kugelfläche zu bewegen (Pendel). Allgemeiner kann man einem durch Kräfte bewegten Punkte vorschreiben, auf einer Fläche $f(x, y, z) = 0$ zu bleiben; in derselben Weise kann man ihm auch eine beliebige Kurve $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ als Bahn vorzeichnen. Sind zwei materielle Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 vorhanden, so kann man sich dieselben durch einen starren, doch massenlosen Stab von der Länge r verbunden denken, so dafs die Bewegung fortwährend der Gleichung

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2$$

genügen mufs. Dabei kann dann noch der eine der Körper genötigt werden, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben u. s. w.

Auch von der Zeit können die Bedingungsgleichungen abhängig sein. So kann man beispielsweise die Bewegung des Fadenpendels untersuchen, falls der Aufhängungspunkt nach einem bestimmten Gesetze bewegt wird. Nur zweierlei möge in betreff der Bedingungen festgehalten werden:

a) sie sollen durch Gleichungen, nicht durch Ungleichheiten gegeben sein;

b) sie sollen aufser der Zeit t nur die Koordinaten der bewegten Punkte selbst, nicht aber Differentialquotienten derselben (also keine Geschwindigkeiten) enthalten.

Bedingungen wie die, dafs ein materieller Punkt in seiner Bewegung auf den inneren Hohlraum einer Kugel angewiesen ist, sollen also vorläufig nicht zur Behandlung kommen.

2. In welcher Weise sind nun diese Bedingungen in die Bewegungsgleichungen einzuführen? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns die physikalische Natur solcher Aufgaben klar machen. Bewegt sich etwa ein materieller Punkt auf der Oberfläche eines festen Körpers, so ist der letztere bei dieser Bewegung keineswegs so unthätig, wie man nach dem oberflächlichen Augenschein annehmen könnte. Kein fester Körper ist ohne Elastizität; der Punkt wird daher bei seiner Bewegung die Körperoberfläche etwas zusammendrücken, wogegen der Körper durch einen Gegendruck reagiert. Es wirken mithin auf den materiellen Punkt zahllose, höchst verwickelte und im Einzelnen nicht zu verfolgende Kräfte ein, deren Gesamtresultat, soweit es für die Bewegung des materiellen Punktes in Betracht kommt, dahin geht, dafs der letztere ungefähr an der nur wenig veränderlichen Oberfläche des Körpers gehalten wird. Ähnlich ist es bei dem Fadenpendel; die Molekularkräfte, welche in dem Faden thätig sind, verhindern eine merkliche Ausdehnung desselben und üben auf den materiellen Punkt des Pendels Kraftwirkungen aus, welche ihn nötigen, sich nahezu auf der Oberfläche einer Kugel zu bewegen. Ähnliches gilt für alle übrigen Fälle.

Diese Betrachtungen führen uns zu einem Resultate, welches nur zu oft unbeachtet gelassen wird:

Die Bewegung materieller Punkte nach gegebenen Bedingungsgleichungen läfst sich nicht a priori durch rein mathematische Betrachtungen ermitteln; auch läfst sich kein allgemeingiltiges physikalisches Gesetz für eine solche Bewegung aussprechen von der Art, wie die in § 2 behandelten sind. Die Bewegung nach vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen ist kein einfacher Vorgang; sie ist stets die Folge von zahllosen, verwickelten Kräften, welche nur näherungsweise in Rechnung gezogen werden.

3. Um der praktischen Lösung des Problems näher zu treten, denken wir uns zunächst als einfachstes Beispiel eine Ebene vorgelegt, auf welcher sich ein materieller Punkt infolge irgend welcher Kräfte bewegen soll.

Wir können uns die Geschwindigkeit des Punktes und die Resultante der wirkenden Kräfte in zwei Komponenten zerlegt denken, von denen die eine auf der Ebene senkrecht steht, die andere in die Ebene selbst fällt. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs die erste Komponente durch die von der festen Ebene ausgeübten Kräfte zerstört werden mufs, da sonst der Punkt die Ebene voraussetzungswidrig verlassen müfste. Aber was wird aus der anderen Komponente? Hierüber sagt die Fassung des Problems gar nichts. Die Komponente kann völlig unverändert bleiben, ohne dafs die Bedingung einen Widerspruch erfährt; aber eben-sowohl ist es denkbar, dafs die Kräfte, welche von der Ebene ausgehen, auch diese Komponente beeinflussen. Befragen wir die Erfahrung, so giebt sie keine einheitliche Antwort. Die Komponente wird wohl immer beeinflufst, und zwar stets in der Art, dafs die Geschwindigkeit eine Verminderung erfährt, aber dieser Einflufs ist je nach der physikalischen Natur der Unterlage*) ein sehr verschiedener, mitunter ein sehr geringer. Da sich aus der gestellten Bedingung keine Beeinflussung dieser Komponente als notwendig ergiebt und diese Beeinflussung, wenn sie vorhanden ist, von Faktoren abhängt, welche sich aus dieser Bedingung selbst nicht ableiten lassen, so nimmt man an, dafs die zweite Komponente überhaupt durch die Bedingung keine Änderung erleidet. Verlangt das Problem, dafs die wirklich vorhandene Beeinflussung nicht vernachlässigt wird, so schreibt man sie einer besonderen Kraft zu, die man in den meisten Fällen als Reibung bezeichnet, und bringt sie besonders in Rechnung. Die folgenden Aufgaben lassen die Reibung aufser acht.

4. Soll sich der materielle Punkt auf einer beliebigen, nach allen Richtungen hin stetig gekrümmten Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

unter dem Einflufs einer Kraft bewegen, deren Komponenten nach den Koordinatenachsen die Beschleunigungen X, Y, Z verursachen würden, wenn die Bedingungsgleichung nicht zu befriedigen wäre, so denken wir uns die Kraft in zwei andere Komponenten zerlegt, von denen die eine in die Normale der Fläche im Punkte x, y, z, die andere in die zugehörige Tangentialebene fällt. Die erste Komponente mufs annulliert werden, während die zweite, soweit man die Reibung aufser acht läfst, unverändert bleibt. Man kann sich die Zerstörung der ersten Komponente dadurch hervorgebracht denken, dafs man in der Normale eine ihr gleiche, entgegengesetzt gerichtete Kraft anbringt. Doch ist noch die Geschwindigkeit zu berücksichtigen, welche der bewegte Punkt besitzt.

Wenn die Bewegung nicht in einer Geraden vor sich geht, so ist eine Zentripetalbeschleunigung**) (§ 1, 6) in der Richtung des ersten Krümmungshalbmessers der Bahnkurve — also im allgemeinen nicht der Flächennormale — vorhanden. Diese Zentralbeschleunigung kann

*) Auch nach der Natur des bewegten Körpers, der ja nie ein materieller Punkt ist.

**) Bewegt sich ein Punkt auf einer Kurve, so erhält er infolge dieser Bewegung jene Zentripetalbeschleunigung, die durch eine entsprechende Kraftkomponente erzeugt gedacht werden mufs. Umgekehrt kann man sich aber auch vorstellen, dafs der bewegte Punkt infolge der Krümmung der Bahn und seiner Geschwindigkeit das Bestreben habe, die Bahn in der umgekehrten Richtung zu verlassen (um in der Richtung der Tangente weiter zu gehen). Man spricht daher von einer Zentrifugalkraft, welche auf den Punkt infolge seiner Bewegung einwirkt und die durch eine entgegengesetzt gleiche Zentripetalkraft aufgehoben werden mufs, wenn der Punkt die vorgeschriebene Bahn nicht verlassen soll.

man ebenfalls in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine zur Fläche normal steht, während die andere in sie fällt. Die letztere wird nur durch die wirkende Kraft hervorgerufen, während die erstere, nachdem die Normalkraftkomponente durch eine fingierte Gegenkraft annulliert wurde, zur Annahme einer zweiten Normalkraft führt, welche jener Komponente der Zentripetalbeschleunigung, multipliziert mit der Masse des bewegten materiellen Punktes, gleichzusetzen ist. Die beiden angenommenen Normalkräfte können dann zu einer einzigen vereinigt werden.

Nehmen wir Alles zusammen, so können wir sagen:

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Fläche kann als freie Bewegung dargestellt werden, wenn man den Kräften eine neue von geeigneter Gröſse zusetzt, welche in die Normale der Fläche in demjenigen Punkte fällt, an welchem sich der bewegte Punkt gerade befindet. Auch wenn die Fläche mit der Zeit veränderlich ist, wenn also ihre Gleichung $f(x, y, z, t) = 0$ lautet, gilt das Gleiche; in der Richtung der jeweiligen Normale ist eine Zusatzkraft anzubringen.

5. Die Bestimmung der zuzusetzenden Kraft kann folgendermaſsen geschehen. Da sie in die Normale n der Fläche im Punkte x, y, z fällt, die Richtungskosinus der Normalen aber bekanntlich

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos(n, x) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\[2ex] \cos(n, y) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\[2ex] \cos(n, z) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{cases}$$

sind, so verhalten sich die Komponenten der Kraft nach den Achsen wie

$$\frac{\partial f}{d x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Es sind daher die folgenden Gleichungen der Bewegung des materiellen Punktes auf der Fläche aufzustellen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}, \\[1ex] \dfrac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\[1ex] \dfrac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

worin λ eine noch zu bestimmende Gröſse ist.

Diese Bestimmung kann folgendermafsen ausgeführt werden. Nehmen wir im allgemeinsten Falle die Fläche als von der Zeit abhängig an, setzen ihre Gleichung also

(3) $$f(x, y, z, t) = f = 0,$$

so mufs, weil f im Laufe der Zeit den Wert 0 beständig beibehält*),

$$\frac{df}{dt} = 0$$

oder

(4) $$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

sein. Eine nochmalige Differentiation liefert:

(5) $$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2}\\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt}\\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\frac{dx}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}\frac{dy}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.\end{aligned}$$

Setzt man in (5) die Werte für $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ aus (2) ein, so erhält man eine Gleichung, aus welcher man λ, ausgedrückt durch $x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, X, Y, Z$, linear berechnen kann. Die Bestimmung von λ giebt uns die Gewähr, dafs durch seine Einsetzung in (2) diese Gleichungen wirklich eine Bahn bestimmen, welche in die Fläche $f = 0$ fällt.

6. Soll sich der materielle Punkt auf einer, eventuell veränderlichen, stetig gekrümmten Kurve bewegen, welche durch die Gleichungen

(6) $$f(x, y, z, t) = 0, \quad f_1(x, y, z, t) = 0$$

bestimmt ist, so kann man sich die Kurve als den Schnitt der beiden Flächen $f = 0$ und $f_1 = 0$ denken. Da sich der materielle Punkt auf $f = 0$ bewegen soll, fügen wir wieder die Kraftkomponenten

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

zu. Da nun noch die zweite Fläche $f_1 = 0$ beschränkend hinzutritt, setzen wir noch die Komponenten

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

einer Kraft zu, welche normal zu dieser Fläche ist.

*) Man beachte den Unterschied zwischen dem totalen Differentialquotienten $\frac{df}{dt}$ und dem partiellen, sich nur auf das explicite in f enthaltene t beziehenden, $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Wir haben hiernach zu setzen:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z}. \end{cases}$$

Differentiiert man die beiden Gleichungen (6) nach Art von (5) und setzt die Werte für $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ aus (7) darin ein, so erhält man zwei in λ und λ_1 lineare Gleichungen, welche diese Gröfsen zu bestimmen gestatten.

Andere Fälle der unfreien Bewegung verschieben wir auf später.

§ 15.

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Kurve oder Fläche infolge des Beharrungsgesetzes.

1. Soll sich ein materieller Punkt ohne äufsere Kraft, lediglich infolge des Beharrungsgesetzes auf einer vorgelegten Kurve bewegen, so erfährt seine Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente nirgends eine Änderung; der Punkt bewegt sich in dieser mit gleichbleibender Geschwindigkeit*).

2. Soll sich ein materieller Punkt unter gleichen Bedingungen auf einer Fläche

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0$$

bewegen, die wir als unveränderlich und unbeweglich annehmen, so wird seine Geschwindigkeit ebenfalls keine Änderung erfahren. Wir brauchen uns nur die Kurve, welche der Punkt thatsächlich durchläuft, als vorgeschriebene Bahn zu denken, um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen.

Es ist nur die Bahn des Punktes auf der Fläche zu ermitteln.

3. Zu diesem Zwecke setzen wir nach § 14, (2):

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

und eliminieren aus ihnen dt durch die Relation

$$(3)\qquad \frac{ds}{dt} = c,$$

*) Dies Resultat setzt voraus, dafs die Kurve ihre Richtung nur stetig ändert; findet eine plötzliche Richtungsänderung statt, so bleibt nur die Geschwindigkeitskomponente erhalten, welche in die neue Richtung fällt. Analoges gilt für die Bewegung auf nicht stetig gekrümmten Flächen und Kurven im allgemeinen.

worin c die konstante Geschwindigkeit bedeutet. Wir haben dann, wenn

$$\mu = \frac{\lambda}{c^2}$$

gesetzt wird,

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \mu \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mu \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \mu \frac{\partial f}{\partial z},$$

wo μ durch Einsetzen dieser Werte in die entsprechend transformierte Gleichung (5) in § 14 zu bestimmen ist. Die Gleichungen (4) und (1) zusammen bestimmen aber eine **geodätische** Linie der Fläche, d. h. eine Linie, welche die kürzeste Verbindungslinie je zweier unendlich benachbarter von ihren Punkten in der Fläche darstellt. Dies geht aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linie hervor, wie man sie z. B. bei Joachimsthal, a. a. O. pag. 162 findet.

4. Um dasselbe Resultat durch ganz einfache Schlüsse, ohne jede Rechnung zu erlangen, kann man folgende Betrachtung anstellen. Nach § 1, 6 erhält jeder Punkt, welcher sich in einer Kurve bewegt, in jedem Momente eine Zentripetalbeschleunigung, welche in die Richtung des betreffenden (ersten) Krümmungsradius der Kurve fällt. Da aber nach § 14 diese Zentripetalbeschleunigung nur von der Wirkung der Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

herrühren kann und diese Wirkung in die Normale der Fläche fällt, so folgt, daſs jener Krümmungsradius selbst in diese Normale zu liegen kommt. Es ist aber leicht nachzuweisen, daſs eine Kurve auf einer Fläche, deren sämtliche Krümmungsradien in die entsprechenden Normalen der Fläche fallen, eine geodätische Linie dieser Fläche ist. Betrachtet man nämlich zunächst zwei unendlich benachbarte Punkte A und B der Fläche, so kann man durch dieselben unendlich viele Ebenen legen, welche durch A und B begrenzte Kurvenbogen*) aus der Fläche ausschneiden, die man unter Vernachlässigung unendlich kleiner Gröſsen höherer Ordnung als Kreisbogen betrachten darf. Von zwei Kreisbogen, welche zwischen zwei festen Punkten gezogen sind, ist aber derjenige der kleinere, dessen Radius der gröſsere ist. Da nach dem bekannten Meusnier'schen Satze (Joachimsthal, pag. 65) der Krümmungsradius eines Normalschnittes gröſser ist wie derjenige eines durch denselben Punkt gelegten anderen ebenen Schnittes, so folgt, daſs unter jenen unendlich vielen Kurventeilen derjenige der kürzeste ist, dessen Ebene zwischen A und B normal zur Fläche steht, d. h. der Kurventeil, dessen Krümmungsradien zur Fläche normal sind. Eine Kurve, welche sich aus solchen kürzesten Elementen zusammensetzt, ist aber eine geodätische Linie.

5. Das gewonnene Resultat, daſs ein materieller Punkt sich auf einer stetigen Kurve mit **gleichbleibender** Geschwindigkeit bewegt,

*) Jeder unendlich kleine Teil einer stetigen Kurve kann als eben angesehen werden.

soweit keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken, gestattet uns die Bewegung auf einer Kurve einfacher zu behandeln. Wir brauchen nur beim Vorhandensein einer Kraft deren tangentiale Komponente in jedem Zeitpunkte zu berechnen und ihr die Tangentialbeschleunigung des bewegten Punktes, multipliziert mit dessen Masse, gleichzusetzen. Unter Hinzunahme der Gleichungen der vorgeschriebenen Kurve erhält man so die vollständigen Differentialgleichungen der Bewegung.

§ 16.

Unfreie Bewegung auf einer ebenen Kurve infolge der Schwerkraft.

1. Bewegt sich ein materieller Punkt infolge der Schwerkraft auf einer Geraden, welche mit der Horizontalebene den Winkel α bildet — wir legen die y-Achse in die Projektion dieser Geraden auf die Horizontalebene, die x-Achse aber vertikal, nach oben als positiv gerechnet, durch einen Punkt der Geraden —, so kommt allein die Komponente der Schwerkraft in Betracht, welche in die Richtung der Geraden fällt.

Wir haben

$$(1) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\alpha,$$

wenn s in aufsteigender Richtung als positiv angesehen wird,

$$(2) \qquad s = -\frac{g\sin\alpha}{2}t^2 + ct + c_1,$$

somit, wenn die Geschwindigkeit in der Anfangslage $s = 0$ Null ist:

$$(3) \qquad s = -\frac{g\sin\alpha}{2}t^2.$$

Der Punkt bewegt sich also in der Geraden ebenso, wie er sich beim senkrechten Fall in einer vertikalen Geraden bewegen würde, falls die Beschleunigung der Schwerkraft auf $g\sin\alpha$ reduziert wird.

Die nach der Zeit t erreichte Geschwindigkeit ist

$$v = -g\sin\alpha . t = \sqrt{-2gs\sin\alpha}$$

oder, da $x = s\sin\alpha$ ist,

$$(4) \qquad v = \sqrt{-2gx}.$$

Da x die vertikale Höhe des Ausgangspunktes über dem Endpunkte der Bahn ist, so kann man sagen (§ 3, (7)):

Die erreichte Geschwindigkeit ist dieselbe, wie wenn der Punkt die gleiche Höhe frei durchfallen hätte.

Aber auch umgekehrt wird der Punkt, wenn er sich in der schiefen Geraden mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 aufwärts bewegt, dieselbe vertikale Höhe über dem Ausgangspunkte erreichen, wie wenn er mit derselben Geschwindigkeit vertikal aufwärts gestiegen wäre. Dies folgt aus (2), wenn man $c_1 = 0$, $c = v_0$ setzt und untersucht, wann

$$\frac{ds}{dt} = -g \sin\alpha \, . \, t + v_0 = 0$$

wird. Es folgt

$$t = \frac{v_0}{g \sin\alpha}, \quad s = \frac{v_0^2}{g \sin\alpha}, \quad x = \frac{v_0^2}{g}.$$

2. Da jede beliebige Kurve als zusammengesetzt aus geradlinigen Elementen angesehen werden kann, für jedes Element aber die vorigen Resultate gelten, so kann man folgende Sätze aussprechen:

Bewegt sich ein Punkt von seiner Ruhelage infolge der Schwerkraft auf einer beliebigen Kurve abwärts, so ist in jedem Momente seine Geschwindigkeit dieselbe, wie wenn er die Höhendifferenz vom Ausgangspunkte bis zum Momentanpunkte frei durchfallen hätte; erstreckt sich die Kurve wieder aufwärts, so steigt der Punkt von seiner tiefsten Lage bis zu der Höhe seines Ausgangspunktes wieder an. In gleichen Höhen hat er gleiche Geschwindigkeit. Die Bewegung wiederholt sich bei geeigneter Gestaltung der Kurve periodisch.

Die Fallbewegung auf einer schiefen Ebene läfst sich, falls keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, unmittelbar auf die Bewegung in der geneigten Geraden zurückführen. Die allgemeine Bewegung auf der schiefen Ebene infolge der Schwerkraft ergiebt sich so einfach, dafs wir nicht darauf einzugehen brauchen.

3. Ist der materielle Punkt, der unter Einflufs der Schwerkraft steht, genötigt, sich in einer ebenen Kurve zu bewegen, deren Ebene vertikal ist, so haben wir, wenn α den Winkel des Wegelementes ds mit der positiv gerichteten Horizontalachse, der y-Achse, bezeichnet, auch hier

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin\alpha. \tag{5}$$

Wir wollen zeigen, dafs die Integration dieser Differentialgleichung immer auf eine Reihe von Quadraturen zurückgeführt werden kann.

Es ist

$$\sin\alpha = \frac{dx}{ds} \tag{6}$$

und, wenn $f(x, y) = 0$ oder $y = \varphi(x)$ die Gleichung der Kurve ist,

$$s = \int^x \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx,$$

so dafs sich x und $\frac{dx}{ds}$ nach Ausführung der Quadratur als Funktion von s darstellen lassen:

$$x = \psi(s), \quad \frac{dx}{ds} = \psi'(s).$$

Setzen wir den letzteren Wert in (6) ein, so ist $\sin\alpha$ als Funktion von s dargestellt, und (5) wird zu

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\psi'(s), \tag{7}$$

eine Gleichung, die nach Muster von § 6, 3 zu integrieren ist.

§ 17.

Die kreisförmige Pendelbewegung.

1. Der wichtigste Fall der besprochenen Bewegungen ist die Bewegung auf einer kreisförmigen Bahn unter Einfluſs der Schwerkraft. Denkt man sich einen materiellen Punkt am einen Ende eines unausdehnbaren, aber auch seine geradlinige Gestalt nie aufgebenden, masselosen Fadens von der Länge l befestigt, dessen anderer Endpunkt eine feste Lage hat, so bewegt sich der materielle Punkt auf einer Kugelfläche (konisches oder sphärisches Pendel). Fällt insbesondere die Anfangsgeschwindigkeit in eine Vertikalebene, welche durch den Kugelmittelpunkt geht, so wird die Bewegung eine kreisförmige (Kreispendel)*). Diesen Fall behandeln wir zuerst.

Der Kreismittelpunkt sei der Nullpunkt, die x-Achse gehe wie bisher senkrecht, die y-Achse wagerecht durch denselben; s werde vom Nullpunkt aus nach der positiven Seite der y-Achse zu als positiv gerechnet. Bezeichnet α den augenblicklichen Winkel zwischen dem Faden und der negativ, d. h. abwärts gerichteten x-Achse, von dieser nach der positiven Seite der y-Achse zu als positiv gerechnet, so ist in Übereinstimmung mit § 16, (5)

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\alpha \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{s}{l}, \tag{1}$$

also

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\frac{s}{l}. \tag{2}$$

2. Wir betrachten zunächst den besonderen Fall, daſs der Winkel α nur sehr kleine Werte annimmt; dann wird $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{gs}{l}$.

Die hier nahezu geradlinige Bewegung ist also dieselbe, wie wenn der materielle Punkt von dem tiefsten Punkte der Bahn mit einer Kraft angezogen würde, welche proportional der Entfernung zunimmt. Die Bewegung ist demgemäſs mit der harmonischen identisch; sie besteht nach § 8, 6 in Oszillationen um den tiefsten Punkt, deren Dauer

*) Im Gegensatz zu dem später zu betrachtenden physischen Pendel, welches durch einen in einem Punkte befestigten festen Körper gebildet wird, heiſst das hier besprochene ein einfaches oder mathematisches Pendel.

(3) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

von der Amplitude unabhängig, dagegen der Wurzel aus der Fadenlänge direkt, der Wurzel aus g indirekt proportional ist. Dieses Resultat wurde bereits von Huyghens gefunden.

3. Im allgemeinen Falle setzen wir wie früher

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = v\frac{dv}{ds}$$

und erhalten

$$v\frac{dv}{ds} = -g \sin\frac{s}{l},$$

$$\frac{v^2}{2} = gl\cos\frac{s}{l} + \frac{c}{2},$$

woraus

(4) $$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{c + 2gl\cos\frac{s}{l}},$$

(5) $$t = \int \frac{ds}{\sqrt{c + 2gl\cos\frac{s}{l}}}$$

folgt. Die Ausführung der Integration wird verschieden, je nachdem das Pendel nur Schwingungen um die Vertikallage oder Rotationen um den Aufhängepunkt ausführt.

4. Das erstere tritt ein, wenn für $s = s_0$, $\alpha = \alpha_0$ die Geschwindigkeit v Null ist. Die Zeit werde so gezählt, daſs für $t = 0$ auch $\alpha = 0$ und $s = 0$ sei. Dann ist

$$c = -2gl\cos\frac{s_0}{l} = -2gl\cos\alpha_0$$

und

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gl}\sqrt{\cos\frac{s}{l} - \cos\frac{s_0}{l}}}$$

oder, wenn wir α einführen, somit $ds = l\,d\alpha$ setzen,

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha_0}{2}}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha_0}{2}}\right)^2}}.$$

Wir setzen

$$\sin\frac{\alpha_0}{2} = k \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = ku, \; \alpha = 2 \arcsin ku, \; d\alpha = \frac{2k\,du}{\sqrt{1-k^2u^2}};$$

damit wird

$$(6) \qquad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Somit ergiebt sich für die Zeit ein elliptisches Integral erster Gattung, und wir haben durch Umkehrung:

$$u = \sin \operatorname{am}\left(k, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

oder

$$(7) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha_0}{2} \sin \operatorname{am}\left(\sin\frac{\alpha_0}{2}, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Für die Praxis ist es am wichtigsten, die Dauer T einer Schwingung zu ermitteln; die Zeit, welche das Pendel braucht, um von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_0$ zu gelangen, ist offenbar der vierte Teil derselben.

Wir entwickeln $(1 - k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satze, erhalten

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4u^4 + \cdots$$

und haben jetzt

$$(8) \qquad T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\left[1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \cdots\right]$$

auszuführen. Es ist aber

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)} \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - d\left[\varphi_n(u)\sqrt{1-u^2}\right],$$

wenn

$$(9) \qquad \varphi_n(u) = u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{2.4}{3.5}u^5 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}u^{2n-1}$$

ist; denn wir haben

$$d\left[\varphi_n(u)\sqrt{1-u^2}\right] = \varphi_n'(u)\sqrt{1-u^2} - \frac{u\varphi_n(u)}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\varphi_n'(u)(1-u^2) - u\varphi_n(u)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{2}{1}u^2 + \frac{2.4}{1.3}u^4 + \frac{2.4.6}{1.3.5}u^6 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-3)}u^{2n-2} \\ -u^2 - \frac{2}{1}u^4 + \frac{2.4}{1.3}u^6 + \frac{2.4.6}{1.3.5}u^8 - \cdots - \frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-3)}u^{2n} \\ -u^2 - \frac{2}{3}u^4 - \frac{2.4}{3.5}u^6 - \cdots \qquad\qquad - \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}u^{2n} \end{array}\right\} : \sqrt{1-}$$

$$= \frac{1 - \frac{2.4\ldots(2n-2)2n}{3.5\ldots(2n-1)}u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Daher ist

$$(10)\quad \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int\limits_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 - \Big[\varphi_n(u)\sqrt{1-u^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man dies in (8) ein und schreibt wieder $\sin\frac{\alpha_0}{2}$ statt k, so folgt

$$(11)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha_0}{2} + \cdots\right].$$

Diese aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannte Reihe konvergiert für kleine α_0, die meistens in Betracht kommen, sehr stark, so daſs schon (3) für kleinere α_0 der Wirklichkeit sehr nahe kommt. In der Praxis genügt es fast immer

$$(12)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16}\right)$$

zu setzen. Es sei ausdrücklich bemerkt, daſs Formel (11) noch gilt, wenn $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ wird.

5. Falls $\alpha_0 = \pi$, $k = 1$ wird, geht (6) über in

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^u \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^u \left[\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right] du$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\log\frac{1+u}{1-u};$$

die Umkehrung liefert

$$(13)\quad u = \frac{e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}}{e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}},$$

woraus α folgt. Die Annäherung an den höchsten Punkt ist eine asymptotische.

6. Im ersten betrachteten Falle ist $-2gl < -c < 2gl$, im zweiten $-c = -2gl$; es bleibt noch der Fall $-c < -2gl$, $c > 2gl$ zu untersuchen. Hier ist

$$t = \int\limits_0^\alpha \frac{l\,d\alpha}{\sqrt{c + 2gl\cos\alpha}} = \int\limits_0^\alpha \frac{l\,d\alpha}{\sqrt{c + 2gl - 4gl\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

oder, wenn $c + 2gl = v_0^2$ gesetzt wird, so daſs $v_0^2 > 4gl$ ist,

$$t = \frac{l}{v_0} \int\limits_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{4gl}{v_0^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Setzen wir hier

$$\frac{4gl}{v_0^2} = k^2, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = u, \quad d\alpha = \frac{2du}{\sqrt{1 - u^2}},$$

so wird

$$t = \frac{2l}{v_0} \int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}, \tag{14}$$

also

$$u = \sin \operatorname{am} \left(k, \frac{v_0 t}{2l}\right). \tag{15}$$

Der materielle Punkt führt in diesem Falle eine fortdauernde Rotation aus.

Um die Rotationsdauer zu finden, bemerken wir, dafs die Zeit des Aufsteigens derjenigen des Absteigens gleich ist. Wir erhalten

$$T = \frac{4l}{v_0} \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} \tag{16}$$

$$= \frac{2l\pi}{v_0} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4gl}{v_0^2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{(4gl)^2}{v_0^4} + \cdots\right].$$

Aus (4) geht hervor, dafs v_0 die Geschwindigkeit für $s = 0$, also im tiefsten Punkte der Bahn ist. Im höchsten Bahnpunkte beträgt die Geschwindigkeit

$$\sqrt{c - 2gl} = \sqrt{v_0^2 - 4gl},$$

für $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ aber $\sqrt{c} = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$.

7. Die Pendelbewegung bei Vorhandensein einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibung ist für kleine Schwingungen bereits durch die Untersuchungen von § 8 gegeben. Für eine Reibung, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, wird die Behandlung umständlich; siehe darüber Narr, a. a. O., p. 318.

§ 18.

Tautochrone und Brachistochrone.

1. Die Wahrnehmung, dafs ein materieller Punkt auf einem nicht zu grofsen Bogen eines Vertikalkreises Pendelschwingungen ausführt, deren Dauer von der Amplitude wenig abhängt, veranlafst uns, die Aufgabe zu stellen:

Eine ebene Kurve zu bestimmen, welche die Eigenschaft besitzt, dafs ein materieller Punkt infolge der Schwere von irgend zwei ihrer Punkte bis zu ihrem tiefsten Punkte in der gleichen Zeit gelangt. Diese Kurve heifst Tautochrone.

Ist dieses Mal der tiefste Punkt der Bahn der Nullpunkt, h die vertikale Höhe des Ausgangspunktes über demselben und setzen wir $s = \psi(x)$, wo ψ noch bestimmt werden soll, so ist bei sonst gleicher Bezeichnung wie früher

$$v = \sqrt{2g(h-x)},$$

also

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Die Fallzeit ist demnach

$$T = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}} = \int_0^h \frac{\psi'(x)dx}{\sqrt{2g(h-x)}}. \tag{1}$$

Substituieren wir $x = hu$, so wird

$$T = \int_0^1 \frac{h\psi'(hu)du}{\sqrt{2g(h-hu)}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{h}\,\psi'(hu)du}{\sqrt{2g(1-u)}},$$

so dafs jetzt h aus den Grenzen des Integrals weggeschafft ist. Soll dieser Ausdruck für beliebige h denselben Wert geben, so mufs $\sqrt{h}\psi'(hu)$ von h frei sein, d. h.

$$\psi'(hu) = \frac{k}{\sqrt{uh}}$$

sein. Wir haben also

$$\psi'(x) = \frac{k}{\sqrt{x}}$$

und, wenn $s = 0$ und $x = 0$ sich entsprechen sollen,

$$s = \psi(x) = 2k\sqrt{x}. \tag{2}$$

Ferner ist

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{ds}{dx} = \frac{k}{\sqrt{x}},$$

also

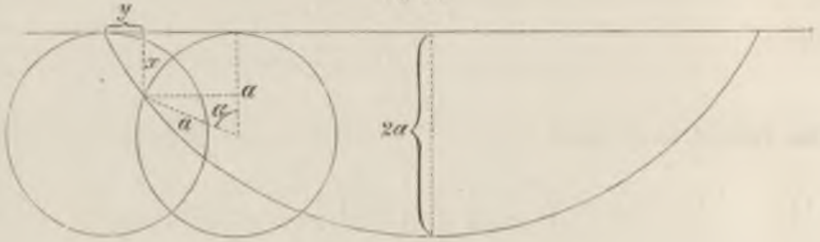
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k^2 - x}{x}}. \tag{3}$$

Hieraus folgt durch Integration, da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist,

$$y = \pm\sqrt{k^2x - x^2} \pm \frac{k^2}{2}\arccos\frac{k^2 - 2x}{k^2}. \tag{4}$$

Dies ist aber die Gleichung einer Cykloide. Diese Kurve stellt die Bahn eines Punktes der Peripherie eines Kreises dar, wenn dieser auf einer Geraden rollt, ohne zu gleiten. Nehmen wir diese Gerade als y-Achse, den Radius des rollenden Kreises gleich a, verlegen den Nullpunkt in einen der Punkte, in welchen der erzeugende Punkt die y-Achse berührt, und lassen sich den Kreis in der Halbebene der negativen x von dieser Anfangslage aus um den Winkel α (gemessen als Bogen mit dem Radius 1, beim Rollen nach der positiven Seite der y-Achse positiv gerechnet) drehen, so haben wir leicht (Fig. 10)

Fig. 10.



$$y = a\alpha - a \sin \alpha,$$
$$x = - a + a \cos \alpha,$$

also nach Elimination von α — man beachte, dafs α und $\sin \alpha$ dasselbe Zeichen haben müssen —

$$(5) \qquad y = \pm \sqrt{-2ax - x^2} \mp a \arccos \frac{a+x}{a}.$$

Verlegen wir jetzt den Nullpunkt in den tiefsten Punkt der Bahn, d. h. substituieren wir $x - 2a$ an Stelle von x, und setzen wieder fest, dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, so folgt

$$(6) \qquad y = \mp \sqrt{2ax - x^2} \pm a \arccos \frac{a-x}{a},$$

eine Gleichung, die für $k^2 = 2a$ mit (4) identisch wird.

Die Tautochrone ist also eine Cykloide, welche durch Rollen eines Kreises auf der unteren Seite einer horizontalen Geraden erzeugt wird*).

2. Das Cykloidenpendel kann, infolge einer bekannten Eigenschaft der Cykloide, auch in mechanisch brauchbarer Weise hergestellt werden. Nach Mafsgabe von Fig. 11 hängt man ein Fadenpendel zwischen zwei Cylindern von cykloidischer Basis auf; die Länge des Pendels mufs der Hälfte eines Cykloidenteils gleich sein**). Schwingt nun das Pendel in einer zu den Cylinderachsen senkrechten Ebene, so beschreibt der materielle Punkt desselben die Evolvente einer Cykloide, d. h. wieder eine mit der Evolute kongruente Cykloide; das Pendel schwingt also tautochron.

*) Zuerst von Huyghens gefunden.
**) D. h. gleich $4a$.

Die nähere Ausführung des benutzten geometrischen Satzes kann hier wohl übergangen werden.

Wie Newton zuerst zeigte, behält die Cykloide den Charakter des Tautochronismus bei, wenn sich der Bewegung auf ihr ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand entgegensetzt. Die Rechnung ist mittels der in § 8 gegebenen Hilfsmittel leicht durchzuführen. Ist der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, so erhält man als Tautochrone keine Cykloide mehr. Siehe hierüber Narr, Einleitung in die theoretische Mechanik, p. 329 ff.

Fig. 11.

Eine Verallgemeinerung des Tautochronenproblems behandelt Abel in seiner Abhandlung: Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, Oeuvres compl, T. I, p. 11. Weitere Litteratur siehe bei Narr, a. a. O. p. 333, Schell, a. a. O. I, p. 408.

3. Unter der Brachistochrone für zwei beliebig im Raume gegebene Punkte versteht man die Kurve, in welcher sich ein materieller Punkt von dem höher gelegenen Punkte in der kürzesten Zeit nach dem tiefer gelegenen infolge der Schwerkraft bewegt*).

Es leuchtet ein, dafs die Brachistochrone eine ebene Kurve ist, welche in der durch die beiden Punkte bestimmten Vertikalebene liegt. Wäre nämlich die Brachistochrone irgend eine andere Kurve, so könnten wir uns dieselbe auf jene Ebene orthogonal projiziert denken. Bei der Bewegung in dieser Projektionskurve würde der fallende materielle Punkt an jeder Stelle dieselbe Geschwindigkeit erreichen, wie in dem entsprechenden, gleich hoch gelegenen Punkte der Brachistochrone (§ 16, 2). Nun ist aber ein Element der Projektionskurve kleiner als das entsprechende der projizierten Kurve oder höchstens demselben gleich; dasselbe mufs also bei derselben Geschwindigkeit im allgemeinen in kürzerer Zeit zurückgelegt werden. In der Projektion der Brachistochrone würde also die Bewegung rascher vor sich gehen als in der Brachistochrone selbst, was einen Widerspruch involviert.

*) Das Problem der Brachistochrone wurde zuerst von Leibnitz gelöst. Weitere Litteratur s. bei Schell.

Wir behandeln demnach das Problem als ein ebenes. Legen wir das Koordinatensystem wie bei der Tautochrone, so haben wir wieder für die Fallzeit, falls die Anfangsgeschwindigkeit gleich 0 ist,

$$(7) \qquad T = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Hierin setzen wir

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

und erhalten

$$(8) \qquad T = \int_0^h \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-x)}}\, dx.$$

Um nun T für die gegebenen Endpunkte, welche mit Rücksicht auf die vorhin gemachten Festsetzungen

$$x = 0,\ y = 0 \quad \text{und} \quad x = h,\ y = y_1$$

sein mögen, zu einem Minimum zu machen, verfahren wir nach den Regeln der Variationsrechnung. Soll

$$(9) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

für die festen Grenzwerte x_0 und x_1 ein Minimum oder Maximum sein, so mufs bekanntlich die Gleichung

$$(10) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

erfüllt werden. Enthält f, wie in unserem Falle, y nicht explizite, so reduziert sich (10) auf

$$(11) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

woraus

$$(12) \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = c$$

folgt.

Wenden wir dies auf (8) an, so erhalten wir die Bedingung

$$(13) \qquad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{1}{\sqrt{2g(h-x)}} = c$$

oder

$$(14) \qquad y' = \sqrt{\frac{2c^2 g(h-x)}{1 - 2c^2 g(h-x)}}.$$

Es folgt

$$(15) \qquad y = \int \sqrt{\frac{2c^2 g(h-x)}{1-2c^2 g(h-x)}}\, dx = \pm \frac{1}{c\sqrt{2g}} \sqrt{(h-x) - 2c^2 g(h-x)^2}$$
$$\mp \frac{1}{4c^2 g} \arccos\left[1 - 4c^2 g(h-x)\right] + C.$$

Da für $x = h$ $y = y_1$ sein soll, so muſs

(16) $$C = y_1$$

gesetzt werden. Durch die Bemerkung, daſs für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, bestimmt sich c in komplizierter Form. (15) stellt wieder eine Cykloide dar, die durch einen auf der unteren Seite einer horizontalen Geraden rollenden Kreis erzeugt wird (der Unterschied im Zeichen gegen (6) erklärt sich durch eine Verlegung des Anfangspunktes der Koordinaten). Durch die Anfangs- und Endlage ist Gröſse und Lage dieser Cykloide vollkommen bestimmt.

§ 19.

Das konische oder sphärische Pendel.

1. Von Bewegungen auf Flächen infolge der Schwerkraft behandeln wir nur diejenige auf der Kugelfläche, da die Bewegung auf der schiefen Ebene bereits durch § 16 hinreichend klargestellt ist.

Ein Fadenpendel von der Länge l ist das zweckmäſsigste Beispiel für die Bewegung auf der Kugelfläche; man bezeichnet ein solches, wenn es nicht in einer Ebene schwingt, als konisches oder sphärisches Pendel.

Wir legen den Nullpunkt in den Mittelpunkt der Kugel, die x-Achse vertikal aufwärts gerichtet, die y- und z-Achse beliebig horizontal. Die Kugelgleichung ist

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

2. Wir behandeln die Bewegung zunächst für den Fall, daſs sich das Pendel nur unendlich wenig von der Gleichgewichtslage entfernt. Denkt man sich durch den Pendelfaden eine Vertikalebene gelegt, so ist es einleuchtend, daſs die wirksame Komponente der Schwere in diese Ebene fällt. Wir haben also dieselbe Art der Beschleunigung, wie in § 17, 2. Es findet daher nach § 8 harmonische Bewegung statt; der materielle Punkt bewegt sich im allgemeinen in einer unendlich kleinen Ellipse um den Gleichgewichtspunkt als Mittelpunkt. Die Umlaufszeit ist der Schwingungsdauer bei unendlich kleinen ebenen Schwingungen gleich.

3. Den allgemeinen Fall wollen wir nach § 14 behandeln, da ein direkter Ansatz schwieriger ist; wir erhalten so ein passendes Beispiel zu einer wichtigen allgemeinen Methode.

Wir setzen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

wobei

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - l^2$$

ist. Daher können wir unter Änderung der Gröſse λ schreiben

(2) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \lambda\frac{x}{l}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\frac{y}{l}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\frac{z}{l},$$

wo λ mit Hilfe von (1) zu bestimmen ist. Eliminiert man λ aus der zweiten und dritten Gleichung, so folgt

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \tag{3}$$

und hieraus

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c; \tag{4}$$

es gilt also der Flächensatz für die Projektion auf die yz-Ebene, jedoch nicht für andere Ebenen. Multipliziert man die Gleichungen (2) resp. mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und addiert, so folgt, da nach (1)

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0$$

ist,

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = -g\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

und durch Integration

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -gx + C \tag{6}$$

oder

$$\frac{v^2}{2} = -gx + C, \tag{7}$$

eine Gleichung, welche lediglich das Resultat von § 16, 2 enthält.

Wir führen nun Polarkoordinaten ein, indem wir

$$x = l\cos\alpha, \quad y = l\sin\alpha\cos\varphi, \quad z = l\sin\alpha\sin\varphi \tag{8}$$

setzen. Es ist dann

$$\frac{dx}{dt} = -l\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = l\cos\alpha\cos\varphi\frac{d\alpha}{dt} - l\sin\alpha\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \tag{9}$$
$$\frac{dz}{dt} = l\cos\alpha\sin\varphi\frac{d\alpha}{dt} + l\sin\alpha\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

so dafs aus (4)

$$l^2\sin^2\alpha\frac{d\varphi}{dt} = c \tag{10}$$

und aus (6)

$$l^2\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \sin^2\alpha\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = -2gl\cos\alpha + 2C \tag{11}$$

wird.

Eliminiert man aus (10) und (11) das eine Mal $\frac{d\varphi}{dt}$, das andere Mal dt, berechnet dann dt und $d\varphi$ und integriert, so erhält man

$$t = l^2\int\frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2l^2\sin^2\alpha\,(C - gl\cos\alpha) - c^2}}, \tag{12}$$

$$\varphi = c \int \frac{d\alpha}{\sin\alpha \sqrt{2l^2 \sin^2\alpha (C - gl\cos\alpha) - c^2}}. \tag{13}$$

Es sind dies elliptische Integrale, wie sich durch Beseitigung der trigonometrischen Funktionen leicht ergiebt (s. unten). Die beiden Integrationskonstanten hängen nur von der Wahl der y- und z-Achse und des Anfangspunktes der Zeit ab; c und C charakterisieren die spezielle Bewegung.

4. Die Methode, welche hier zur Integration der Bewegungsgleichungen benutzt wurde, verdient Aufmerksamkeit; wir werden sie später in allgemeinerer Form wiederfinden. Die Berechnung von λ nach § 14 wurde gänzlich vermieden. Wir führten neue Koordinaten α und φ ein, welche ausreichen, um den Ort eines Punktes auf der vorgeschriebenen Kugelfläche vollständig zu bestimmen. Infolge dieser zweckmäfsigen Wahl brauchen wir nur zwei Bewegungsgleichungen; eine dritte für die Bewegung in der Richtung des Radius würde ja doch nur Gröfsen ergeben, welche zu annullieren sind. Durch Elimination von λ aus (2) erhalten wir aber gerade zwei Gleichungen.

In derselben Weise können wir auf einer vorgeschriebenen Kurve jeden Punkt durch eine Angabe fixieren, etwa durch die Bogenlänge s; dann können wieder die beiden Gröfsen λ und λ_1 aus den Gleichungen eliminiert werden und die einzige übrigbleibende Gleichung ist zur Bestimmung ausreichend.

5. In die Formeln (12) und (13) können wir statt α wieder $x = l\cos\alpha$ einführen; wir erhalten

$$t = -l \int \frac{dx}{\sqrt{2(l^2 - x^2)(C - gx) - c^2}}, \tag{14}$$

$$\varphi = -cl \int \frac{dx}{(l^2 - x^2)\sqrt{2(l^2 - x^2)(C - gx) - c^2}}. \tag{15}$$

Um uns über den Verlauf der Bewegung einen Überblick zu verschaffen, suchen wir die höchsten und niedrigsten Punkte zu bestimmen, welche der materielle Punkt erreicht. Es mufs in ihnen x ein Maximum oder Minimum sein, also $\frac{dx}{dt} = 0$ oder

$$\psi(x) = 2(l^2 - x^2)(C - gx) - c^2 = 0. \tag{16}$$

Diese Gleichung dritten Grades hat drei reelle Lösungen. Für $x = \infty$ ist nämlich $\psi = \infty$, für $x = l$ aber $\psi = -c^2$, so dafs zwischen diesen beiden Werten ψ den Nullwert passiert, d. h. (16) eine negative Lösung oberhalb l besitzt. Dieser Wert kommt für uns nicht in Betracht, da bei der Pendelbewegung $x < l$ bleibt. Da es aber in der Natur der Sache liegt, dafs, wenn x nicht konstant ist, es mindestens ein Maximum und ein Minimum erreichen mufs, aber nur noch zwei Nullwerte von $\frac{dx}{dt}$ möglich sind, so mufs angenommen werden, dafs diesen eben ein Maximum und ein Minimum entspricht. Dieses Maximum und Minimum ist aus der Gleichung (16) zu berechnen. Wegen (7) mufs $C - gx$ immer positiv sein. Ist $C < 0$, so bleibt immer $x < 0$; ist aber $C = 0$, so wird x höchstens 0; für $C > 0$ genügen wohl positive, aber immer auch geeignete negative x der Gleichung (7). In Worten ausgedrückt: Der materielle Punkt begiebt sich immer in die untere Hälfte der Kugel, in der also stets das Minimum liegt; er gelangt bis in die Höhe des Aufhängepunktes, wenn $C = 0$, ist und steigt noch höher, wenn $C > 0$ ist.

Da die rechte Seite von (14) ein elliptisches Integral erster Gattung ist, also für denselben x-Wert unendlich viele t-Werte liefert, welche um die reelle Periode des Integrals voneinander abstehen, so erreicht der materielle Punkt denselben höchsten und niedrigsten Stand unendlich oft in gleichen Intervallen; ob dann aber auch derselbe φ-Wert erreicht wird, mufs noch untersucht werden.

6. Wir wollen zunächst die Schwingungsdauer, d. h. das doppelte Zeitintervall zwischen zwei höchsten oder niedersten Ständen untersuchen. Zu diesem Zwecke müssen wir (14) auf die Normalform reduzieren. Sind $x_1 = l \cos \alpha_1$ und $x_2 = l \cos \alpha_2$ der höchste, resp. niederste Stand, während x_0 den nicht in Betracht kommenden dritten Nullwert von $\frac{dx}{dt}$ bedeutet, so wird durch Zerlegung von $\psi(x)$ in Faktoren

$$(17) \qquad t = -\frac{l}{\sqrt{2g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}}.$$

Setzen wir zunächst

$$x_0 - x = u^2, \quad dx = -2u\,du,$$

so wird

$$t = \frac{l}{\sqrt{2g}} \int \frac{2du}{\sqrt{[u^2 - (x_0 - x_1)][u^2 - (x_0 - x_2)]}},$$

worin $x_0 - x_1$ und $x_0 - x_2$ sicher keine negativen Gröfsen sind, da $x_2 \leq x_1 \leq x_0$ ist.

Wir setzen

$$u = w\sqrt{x_0 - x_1}, \quad k^2 = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} < 1$$

und erhalten

$$(18) \qquad t = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{g}\,\sqrt{x_0 - x_2}} \int \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}.$$

Da für $x = x_1$ und $x = x_2$ $u = \sqrt{x_0 - x_1}$ und $u = \sqrt{x_0 - x_2}$, also $w = \pm 1$ und $w = \pm \frac{1}{k}$ wird, da ferner die Schwingungsdauer T das Doppelte der Zeit ist, welche zwischen zwei Maximis verläuft, so ist

$$(19)\quad T = \frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{x_0 - x_2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \frac{4l\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{x_0 - x_2}} \int_{0}^{1} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$$

$$= \frac{2l\pi\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{x_0 - x_2}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \cdots\right].$$

7. Der Ausdruck (15) für φ ist ein elliptisches Integral dritter Gattung mit derselben Irrationalität wie dasjenige für t. Kehrt x zu demselben Werte zurück, so hat sich φ um eine konstante Gröfse geändert, welche von c abhängt. Auf die eingehendere Untersuchung des Gegenstandes können wir uns hier nicht einlassen; man findet dieselbe vollständig durchgeführt in Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, 4. Aufl. p. 307. Das Endresultat lautet:

Das konische Pendel beschreibt eine sphärische Figur, welche näherungsweise mit einer Ellipse verglichen werden kann, deren grofse Achse sich mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung der Bewegung dreht. Wird die höchste Lage des Pendels als gegeben angenommen, so ist die Drehung desto stärker, je höher der niedrigste Punkt der beschriebenen Bahn liegt.

Ist $c = 0$, so geht die Bewegung in einer Ebene vor sich.

8. Fallen das Maximum und das Minimum von x zusammen, so mufs x konstant $= x_1$ sein; es mufs $\frac{dx}{dt} = 0$, also

$$2(l^2 - x_1^2)(C - gx_1) - c^2 = 0$$

sein. Das Pendel führt dann eine kreisförmige Bewegung mit gleichbleibender (nach (4)) Geschwindigkeit aus. Wenn man die Beschleunigung der Schwere g in Komponenten nach dem Radius dieses Kreises und dem der Kugel zerlegt, so mufs die erstere Komponente $-g \operatorname{tg} \alpha$ der Zentripetalbeschleunigung gleich sein; es ist also

$$-g \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{l \sin \alpha}$$

oder

$$(20)\qquad v = \sqrt{-gl \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}\,.$$

Die Umlaufszeit ist gleich dem Umfange des Kreises, dividiert durch die Geschwindigkeit, also

$$(21)\qquad T = \frac{2\pi l \sin \alpha}{\sqrt{-gl \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{-l \cos \alpha}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{-x_1}{g}}\,.$$

Die Rotationsdauer ist also gleich der Schwingungsdauer eines ebenen Pendels, welches $-x_1$ zur Länge hat und unendlich kleine Schwingungen ausführt.

x_1 mufs negativ sein; nur bei unendlich grofser Geschwindigkeit könnte das Pendel in einer horizontalen Ebene schwingen.

§ 20.

Bewegung auf der Oberfläche der rotierenden Erde.

1. Wir wollen hier mehrere Probleme einschalten, welche sich mit der relativen Bewegung auf der rotierenden Erde beschäftigen und die wenigstens zum Teil an diese Stelle gehören. Zuerst möge die rein horizontale Bewegung auf der Erdoberfläche untersucht werden. Wir wollen annehmen, daſs die letztere eine Kugelfläche sei. Die gleichförmige Rotation um die feste Achse gehe mit der Winkelgeschwindigkeit ω vor sich, d. h. in der Zeiteinheit beschreibe der Halbmesser irgend eines Parallelkreises den Winkel ω (der aber wieder als Bogen gemessen wird). Auf einen Punkt der Oberfläche, der die Bewegung der umgebenden Teile angenommen hat, wirkt auſser der Schwerkraft, die nach dem Erdmittelpunkte gerichtet sein möge, die durch die Umdrehung erzeugte Zentrifugalkraft ein, welche in der Richtung des betreffenden Parallelkreisradius thätig ist. Dieselbe bringt nicht nur eine Verminderung der Schwerkraft, sondern auch eine Richtungsänderung derselben zuwege, so daſs es scheinen könnte, daſs dem materiellen Punkte eine in die Kugelfläche fallende Beschleunigung erteilt werde. Allein die Erde ist keine genaue Kugel, sondern ihre Oberfläche hat, wie wir später begründen werden, wenigstens da, wo sie sich ohne Einwirkung anderer Kräfte frei entwickeln konnte (z. B. in der Meeresfläche), eine solche Gestalt angenommen, daſs die vereinigte Schwer- und Zentrifugalkraft auf jedem Punkte der Oberfläche senkrecht steht, eine seitliche Komponente also ausgeschlossen ist.

Wir wollen nun in der Folge zwar die Kugelgestalt der Erde annehmen, aber, um mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu bleiben, keine seitliche Kraftkomponente in Betracht ziehen. Die Schwerkraft und die Zentrifugalkraft kommen für uns hier gar nicht in Rechnung; die erstere dient nur dazu, den Punkt immer auf der Erdoberfläche festzuhalten. Befindet sich daher dieser in einem Momente in Ruhe, so wirkt keinerlei seitliche Kraft auf ihn ein.

2. Anders wird aber die Sache, wenn er sich in Bewegung befindet; es stellt sich dann eine Kraftwirkung ein, welche eine seitliche Verschiebung zur Folge hat. Am leichtesten erkennt man das Statthaben einer solchen bei der Bewegung im Meridian. Da sich ein Punkt in höheren Breiten infolge der Rotation mit geringerer Geschwindigkeit bewegt wie ein solcher in niederen Breiten, so gelangt ein Punkt, der sich in meridionaler Richtung bewegt, aus Gegenden mit geringerer Geschwindigkeit in solche mit gröſserer oder umgekehrt, was eine Seitenablenkung zur Folge haben muſs. v. Baer basierte hierauf sein bekanntes Gesetz von der Ablenkung der Fluſsläufe, übersah aber, daſs auch bei anderer Richtung der Bewegung wesentlich dieselbe Ablenkung statthat, wie aus der folgenden Betrachtung (nach Buff) hervorgeht.

Sei (Fig. 12) AB eine unendlich kleine Strecke auf der Erdoberfläche, welche der materielle Punkt in der Zeit dt in der Richtung von A nach B durchlaufen würde, falls die Erde stillstände. Infolge der Rotation ist aber AB an eine andere Stelle gelangt, etwa nach $A_1 B_1$. Legt man durch A_1 eine Parallele $A_1 B_2$ zu AB, welche mit dieser Strecke gleiche Länge hat, so ist B_2 der Punkt, an welchen nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten der materielle Punkt in der Zeit dt wirklich gelangt ist. $B_1 B_2$ giebt also die Ablenkung vom Wege an. $A_1 B_2$ liegt strenge genommen nicht in der Erdoberfläche, doch dürfen wir uns hier, wo es auf Komponenten, welche senkrecht zur Erdoberfläche wirken, nicht ankommt, $A_1 B_2$ auf diese projiziert denken; die hierdurch begründete Änderung der Ablenkung ist unendlich klein von der zweiten Ordnung. Ferner denken wir uns in A und A_1 Tangenten an den Meridian gelegt, die sich in O treffen und dort den sehr kleinen Winkel $d\beta$ bilden. Die Winkel α und α_1 zwischen diesen Meridianrichtungen (im Sinne von Norden nach Süden) einerseits und AB (oder $A_1 B_1$) und $A_1 B_2$ andrerseits geben, von Süden nach Westen zu gerechnet, das Azimut dieser Strecken an.

Fig. 12.

Verlängern wir $A_1 B_2$, bis es AO in D schneidet, was jedenfalls bei einer zu vernachlässigenden Änderung der Figur eintritt, so ist

$$\sphericalangle ADA_1 = \alpha \quad \text{und} \quad \sphericalangle \alpha_1 = \alpha + d\beta,$$

also

$$d\beta = \alpha_1 - \alpha = B_1 A_1 B_2. \tag{1}$$

Zur Bestimmung von $d\beta$ benutzen wir die Fig. 13, p. 128, welche einen Durchschnitt der Erde mittels einer Meridianebene zeigt. Ist φ die geographische Breite von A, r der Erdradius, so folgt

$$AO = r \operatorname{cotg} \varphi. \tag{2}$$

Der von A während dt zurückgelegte Bogen ist aber

$$AA_1 = r\omega \cos \varphi \, dt, \tag{3}$$

woraus

$$(4) \qquad d\beta = \frac{AA_1}{AO} = \omega \sin \varphi dt$$

folgt. Hiernach berechnet man, wenn

$$AB = A_1B_1 = A_1B_2 = ds, \quad B_1B_2 = d\sigma$$

gesetzt wird, aus $\triangle A_1B_1B_2$

$$(5) \qquad d\sigma = A_1B_1 d\beta = \omega \sin \varphi dt ds.$$

Aus der Figur geht hervor, daſs diese Ablenkung, die als normal zur Bahn angesehen werden kann, auf der nördlichen Halbkugel stets nach rechts, auf der südlichen stets nach links vor sich geht.

Fig. 13.

Diese Ablenkung kann aber durch eine seitliche Beschleunigung ersetzt werden. Nennen wir dieselbe k, so muſs, weil die Beschleunigung in dem kleinen Zeitelemente als gleichförmig angesehen werden darf,

$$d\sigma = \frac{kdt^2}{2}$$

sein, so daſs

$$(6) \qquad k = 2\omega \sin \varphi \frac{ds}{dt} = 2\omega v \sin \varphi$$

wird. Diese Beschleunigung ist vom Azimut unabhängig, sie ist nur durch die geographische Breite des Ortes und die Geschwindigkeit der Bewegung bedingt. Rechnet man die Zeit nach Sekunden, so ist, weil ein Sterntag 86 164 Sekunden beträgt, $\omega = \frac{2\pi}{86\,164}$ zu nehmen.

Diese seitliche Beschleunigung ist so gering, daſs sie sich bei Fluſsläufen kaum bemerklich machen dürfte, da hier bedeutendere Wirkungen in Betracht kommen. Die durch Krümmungen des Fluſslaufes erzeugte Zentrifugalkraft dürfte fast immer bedeutend überwiegen. Dagegen ist der Einfluſs der Erdrotation, wie wir sogleich durch Rechnung zeigen werden, bei der Bildung der Windrichtung von maſsgebendem Einfluſs.

3. Es ist leicht, die Bewegung während eines endlichen Zeitraumes zu verfolgen, wenn die beschränkende Voraussetzung gemacht wird, daſs sie sich während desselben nur über einen so kleinen Teil der Erdoberfläche erstreckt, daſs dieser als eine Ebene und die Breite als konstant angesehen werden kann. Da alsdann die seitliche, also in der Normale der Bahn wirkende Beschleunigung k konstant, eine Tangentialbeschleunigung aber nicht vorhanden ist, so wird die Bahnkurve eine konstante Krümmung aufweisen, also ein Kreis sein, der von dem bewegten, im Übrigen nur dem Beharrungsgesetze unterworfenen Punkte mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit durchlaufen wird. Unter Anwendung des bekannten Ausdrucks für die Zentripetalbeschleunigung und der Gleichung (6) haben wir

$$\frac{v^2}{\varrho} = 2\omega v \sin\varphi$$

zu setzen, woraus für den Radius des Kreises

$$\varrho = \frac{v}{2\omega\sin\varphi} = \frac{86\,164 v}{4\pi\sin\varphi} \tag{7}$$

folgt.

Für $\varphi = 50^0$, $v = 10$ m, was schon stärkeren Winden entspricht, erhalten wir z. B. $\varrho = 89\,508$ m. Hiernach erklärt sich die Entstehung der Wirbelwinde vollkommen, der Radius zeigt durchaus keine unmöglichen Dimensionen. Auch bei Geschossen, welche freilich weit bedeutendere Geschwindigkeiten erreichen, wird eine seitliche Ablenkung in Betracht kommen können.

4. Wir wollen bei dieser Gelegenheit auch die, eigentlich nicht an diese Stelle gehörige Aufgabe behandeln: Die Abweichung eines frei fallenden Körpers von der Lotlinie zu berechnen*). Da bei dem Falle der materielle Punkt von einer höheren Stelle, an welcher gröfsere Geschwindigkeit infolge der Rotation vorhanden ist, an eine solche mit geringerer gelangt, wird er immer nach Osten vom Lote abgelenkt werden. Von dem Umstande, dafs in der Höhe die Schwerkraft geringer, die Zentrifugalkraft aber gröfser ist, so dafs die Lotlinie in der Höhe eine andere Richtung hat wie in der Tiefe, wollen wir an dieser Stelle absehen. Wir legen die x-Achse in die Vertikale, die y-Achse von Westen nach Osten, den Nullpunkt in den Fufspunkt des Ausgangspunktes auf der Erdoberfläche. Befindet sich der fallende Körper zur Zeit t in dem Abstande $(r + x)$ vom Erdmittelpunkte, so ist die Rotationsgeschwindigkeit unter der Breite φ: $\omega(r + x)\cos\varphi$, nach der Zeit dt aber: $\omega(r + x + dx)\cos\varphi$, so dafs wir eine Ablenkung $- \omega dx dt \cos\varphi$ nach Osten haben, woraus wir wieder auf eine Beschleunigung $- 2\omega\cos\varphi\frac{dx}{dt}$ schliefsen. Da $\frac{dx}{dt} = - gt$ ist, so haben wir

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\cos\varphi . gt,$$

also, weil für den Ausgangspunkt x_0 $\frac{dy}{dt} = 0$, $y = 0$ ist,

$$y = \frac{1}{3}\omega\cos\varphi . gt^3. \tag{8}$$

*) Genauer wurde der Gegenstand von Hoppe behandelt (Freier Fall aus einem Punkte der Erdoberfläche, Grunert's Arch. B. 64).

Da die Fallhöhe $h = \frac{gt^2}{2}$, also $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ist, so wird daraus

$$y = \frac{2}{3}\,\omega \cos\varphi \sqrt{\frac{2h^3}{g}}. \tag{9}$$

5. Über den bekannten Foucault'schen Pendelversuch, dessen Theorie trotz neuerer Untersuchungen — die Litteratur*) darüber s. bei S. Günther, Lehrbuch der Geophysik u. s. w. — noch manche Dunkelheit zeigt, mögen hier nur wenige Bemerkungen Platz finden. Wir wollen zunächst den einfachen Fall in Betracht ziehen, daſs ein Pendel am Pole aufgehängt ist und daſs dasselbe seine Schwingungen beginnt, nachdem es in einer Ruhelage, in der sein Faden mit der Horizontalen den Winkel α bildete, festgehalten worden war.

Die gewöhnliche, in elementaren Büchern meistens vertretene Ansicht geht dahin, daſs dann das Pendel, absolut betrachtet, ebene Schwingungen ausführt, da keine Ursache vorhanden ist, eine seitliche Bewegung hervorzurufen. Relativ betrachtet führt dann die Schwingungsebene eine gleichmäſsige Drehung um die Vertikale aus, welche derjenigen der Erde gleich und entgegengesetzt ist**). Diese Betrachtung leidet aber, wie Becker nachgewiesen hat, an einem fundamentalen Fehler. Wenn nämlich das Pendel in schiefer Lage in Ruhe gebracht ist, so bezieht sich diese Ruhe nur relativ auf die Erdoberfläche. Absolut betrachtet wird dem Pendel in dieser scheinbaren Ruhelage eine seitliche Drehungsgeschwindigkeit erteilt, welche derjenigen der Erde gleich und entgegengesetzt ist. Diese Anfangsgeschwindigkeit muſs mit in Betracht gezogen werden.

Nehmen wir zunächst an, daſs die Schwingungen verschwindend klein sind, so sind dieselben nach den Untersuchungen von § 19 elliptisch mit absolut unverändert bleibender groſser Achse. Relativ führt also die groſse Achse dieser Bahn dieselbe Drehung aus, welche bei der gewöhnlichen Betrachtungsweise der angenommenen Bahnebene zugeschrieben wird. Es tritt also keine wesentliche Änderung des Resultates ein.

Anders wird aber doch die Sache bei gröſseren Schwingungen. Auſser der scheinbaren Drehung ist hier eine wirkliche vorhanden, welche aus den Formeln von § 19 hervorgeht. Da indessen bei wirklichen Versuchen die Amplitude der Schwingungen keine sehr groſse zu sein pflegt, so wird die Modifikation des einfacheren Resultates nicht allzusehr ins Gewicht fallen.

6. Um den Vorgang für einen Punkt A der Erdoberfläche, welcher unter der geographischen Breite φ liegt, zu erhalten, brauchen wir an

*) Die ausführlichste neuere Bearbeitung des Gegenstandes rührt von Onnes her (Over de betrekkelijke beweging, Nieuw Arch. v. wiskonde, B. V, Amsterdam).

**) Von der Bewegung der Erde um die Sonne wird dabei als unerheblich abgesehen.

Stelle der Drehung, welche am Pole eine vertikale Ebene um die Erdachse ausführt, nur die relative Drehung zu setzen, welche eine solche im Punkte A um eine vertikale Gerade ausführt. Wir legen zu diesem Zwecke an die Erdkugel im Punkte A eine Tangente an, welche die verlängerte Erdachse am Punkte B schneidet; es ist

$$AB = \frac{r}{\sin \varphi}. \tag{10}$$

Die relative Drehungsgeschwindigkeit der untersuchten Vertikalebene ist dann offenbar

$$\omega \frac{r}{AB} = \omega \sin \varphi .$$

Der Vorgang im Punkte A stimmt also mit demjenigen im Pole überein, wenn man nur die Rotationsgeschwindigkeit ω durch $\omega \sin \varphi$ ersetzt.

Auf eine allgemeinere Behandlung der relativen Bewegung verzichten wir an dieser Stelle; die gewählte speziellere Untersuchungsweise dürfte gröſsere Durchsichtigkeit gewähren, wenn sie auch durch eine strengere ersetzt werden könnte.

Dritter Abschnitt.

Die Prinzipien der Mechanik und die Differentialgleichungen der Bewegung in allgemeiner Behandlung.

§ 21.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und das d'Alembert'sche Prinzip.

1. Wir eröffneten den vorigen Abschnitt durch allgemeinere Betrachtungen über die unfreie Bewegung, untersuchten jedoch nur den Fall eingehender, daſs sich ein materieller Punkt auf einer festen Fläche oder Kurve bewegt. Es wurde uns schon dort klar, daſs von einer rein logischen Deduktion der Bewegungsgesetze für beliebige Bedingungsgleichungen keine Rede sein kann. Repräsentieren doch diese anscheinend so einfachen und mathematisch präzisen Bedingungen thatsächlich äuſserst komplizierte physikalische Vorgänge, die auf Grund der Erfahrung mittels Näherungsmethoden in Rechnung zu ziehen sind. Wir supponierten bei den behandelten Aufgaben Hilfskräfte, durch welche alle Bewegungen, die den Bedingungsgleichungen zuwiderlaufen, vernichtet werden, während wir alle Bewegungskomponenten, welche sich mit den mathematischen Bedingungsgleichungen nicht in Widerspruch befinden, ungeändert lieſsen. Dabei muſsten wir uns freilich eingestehen, dass die letztere, vereinfachende Annahme nur in einzelnen Fällen der Wirklichkeit nahe kommt.

Die Aufgabe, an die wir jetzt herantreten, ist die folgende ganz allgemeine:

Die Bewegungsgleichungen für n materielle Punkte aufzustellen, auf welche gegebene Kräfte einwirken und die auſserdem m Bedingungsgleichungen, in welchen nur die Koordinaten der Punkte vorkommen, zu genügen haben.

Das Auftreten von Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit, also z. B. der Geschwindigkeit der Punkte, in den Bedingungsgleichungen ist ausgeschlossen; auch lassen wir hier noch den Fall auſser acht, daſs an Stelle dieser Gleichungen *Ungleichungen* treten. Das explizite Vorkommen der Zeit in den Bedingungsgleichungen wollen wir gleichfalls nicht in den Bereich unserer Untersuchung ziehen.

Bei der rein empirischen Grundlage, welche dieses Problem hat, mag es a priori nicht scheinen, daſs wir besonders einfache, allgemeine Resultate erhalten werden; vielmehr müssen wir erwarten, dafs die Untersuchung nach den Einzelfällen zu trennen ist und dafs vielleicht eine verschiedene physikalisch-mechanische Verwirklichung derselben Bedingungen zu verschiedenen Resultaten führt. Wenn es nun trotzdem gelingt, den ganzen Komplex heterogen erscheinender Thatsachen, der hier zu bewältigen ist, in ein höchst einfaches Prinzip, d. h. ein nicht rein mathematisch deduziertes allgemeines Gesetz zusammenzufassen, so ist dies nur dadurch zu erklären, dafs wir uns nicht auf reine Empirie stützen. Die Ergebnisse der Beobachtungen sind allerdings kompliziert und nicht einheitlich; allein wir werden, wie wir dies bereits in den einfachsten Fällen thaten, an Stelle der direkten Erfahrung gewisse vereinfachende, mathematisch einfach darstellbare Annahmen setzen.

Das merkwürdige Prinzip, welches hier aufgestellt werden soll, trägt den Namen d'Alembert's, obgleich von diesem Mathematiker nur die letzte Erweiterung desselben herrührt. Die eigentliche Grundlage bildet ein Spezialfall des Gesetzes, welcher unter dem Namen des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten*) bekannt ist.

Wir wollen diese beiden Prinzipien zuerst formulieren, ehe wir zu ihrer Begründung übergehen.

2. Wir nennen jede unendlich kleine Verschiebung des materiellen Punktes x, y, z, welche mit den Bedingungsgleichungen des Problems vereinbar ist, eine virtuelle, d. h. mögliche Verrückung**). Wir bezeichnen die Komponenten dieser Verrückung mit δx, δy, δz, indem wir das Zeichen der Variation anwenden. Im Gegensatz hierzu stehen die aktuellen oder wirklichen Verrückungen dx, dy, dz, welche der Punkt im Verlaufe der Bewegung während eines verschwindend kleinen Zeitteiles thatsächlich erleidet; die aktuelle Verrückung ist ein Spezialfall der virtuellen.

Beim freien System ist jede willkürliche, unendlich kleine Verrückung eines Punktes eine virtuelle, beim konischen Pendel jede in der Kugelfläche, auf welcher sich der materielle Punkt des Pendels bewegt, vor sich gehende. Bei der Bewegung auf einer vorgezeichneten Kurve giebt es nur virtuelle Verrückungen, welche mit aktuellen (von der Richtung

---

*) Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, zu welchem Galilei die ersten Anregungen gab, wurde von Joh. Bernoulli allgemein als richtig erkannt.

**) Denken wir uns das ganze System während eines Zeitelementes auf irgend eine mit den Bedingungen verträgliche Weise verschoben, so verhalten sich die Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte während dieser Zeit wie die zurückgelegten Wege, d. h. wie die betreffenden virtuellen Verrückungen. Statt von virtuellen Verrückungen spricht man daher auch von virtuellen Geschwindigkeiten, die den ersteren proportional sind. Hieraus erklärt sich die Bezeichnung: Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. — Auch wenn die Bedingungsgleichungen von der Zeit abhängig sind, haben die virtuellen Verrückungen eine bestimmte Bedeutung. Man versteht dann darunter die Verrückungen, welche mit den Bedingungen verträglich sind, falls man darin die Zeit als unveränderlich betrachtet.

abgesehen) identisch sind, wenigstens wenn die Kurve wirklich ganz durchlaufen wird. Ist nun ein System von n materiellen Punkten x_α, y_α, z_α mit den Massen m_α vorgelegt und sind X_α, Y_α, Z_α die Komponenten der auf sie einwirkenden Gesamtkräfte, so lautet das d'Alembert'sche Prinzip

$$(1)\qquad \sum_1^n{}^\alpha \left[\left(m_\alpha \frac{d^2x_\alpha}{dt^2} - X_\alpha\right)\delta x_\alpha + \left(m_\alpha \frac{d^2y_\alpha}{dt^2} - Y_\alpha\right)\delta y_\alpha + \left(m_\alpha \frac{d^2z_\alpha}{dt^2} - Z_\alpha\right)\delta z_\alpha\right] = 0$$

oder

$$(2)\qquad \sum_1^n{}^\alpha m_\alpha\left(\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}\delta x_\alpha + \frac{d^2y_\alpha}{dt^2}\delta y_\alpha + \frac{d^2z_\alpha}{dt^2}\delta z_\alpha\right) = \sum_1^n{}^\alpha (X_\alpha\delta x_\alpha + Y_\alpha\delta y_\alpha + Z_\alpha\delta z_\alpha).$$

Soll Gleichgewicht stattfinden, d. h. sollen die Beschleunigungen sämtlich verschwinden, so muſs

$$(3)\qquad \sum_1^n{}^\alpha (X_\alpha\delta x_\alpha + Y_\alpha\delta y_\alpha + Z_\alpha\delta z_\alpha) = 0$$

sein. Dieser Spezialfall ist das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ist das System ein freies, so sind die δx_α, δy_α, δz_α vollständig willkürlich und voneinander unabhängig; man darf also auch alle bis auf eine einzige gleich Null annehmen und findet, daſs der Koeffizient derselben verschwinden muſs. Wiederholt man dies Verfahren für sämtliche Koeffizienten, so zerfällt (1) in die Einzelgleichungen

$$m_\alpha\frac{d^2x_\alpha}{dt^2} - X_\alpha = 0,\quad m_\alpha\frac{d^2y_\alpha}{dt^2} - Y_\alpha = 0,\quad m_\alpha\frac{d^2z_\alpha}{dt^2} - Z_\alpha = 0,$$

d. h. in die bekannten Differentialgleichungen der freien Bewegung. Das d'Alembert'sche Prinzip ist hier nur eine äuſserliche Zusammenfassung der $3n$ Bewegungsgleichungen in eine einzige. Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn Bedingungsgleichungen

$$(4)\qquad f_\beta(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots) = 0$$

hinzutreten. Dann sind die virtuellen Verrückungen nicht mehr voneinander unabhängig, sondern durch Relationen verbunden, die aus den Gleichungen (4) hervorgehen; es ist nämlich

$$(5)\qquad \frac{\partial f_\beta}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots = 0.$$

Ist, wie vorausgesetzt, die Zahl der Bedingungsgleichungen gleich m, so können mittels der Gleichungen (5) m der virtuellen Verrückungen durch die übrigen $3n - m$ ausgedrückt werden. Nachdem dies geschehen, dürfen die letzteren als willkürlich behandelt, d. h. ihre neuen Koeffizienten dürfen einzeln gleich Null gesetzt werden.

3. Es ist nun leicht einzusehen, dafs das d'Alembert'sche Prinzip aus dem von den virtuellen Geschwindigkeiten unmittelbar folgt, wenn man nur die Voraussetzung macht, dafs die Wirkung der Bedingungsgleichungen durch Zusatzkräfte ersetzt werden kann, eine Voraussetzung, welche schon durch die physikalische Natur der Bedingungen gerechtfertigt erscheint.

Nehmen wir an, dafs kein Gleichgewicht statthabe, so können wir uns die Kraftkomponenten X_α, Y_α, Z_α mit anderen, welche die Bedingungsgleichungen zu ersetzen haben, zu Komponenten Ξ_α, H_α, Z_α vereinigt denken; alsdann lauten die Gleichungen der Bewegung

$$(6) \quad m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - \Xi_\alpha = 0, \quad m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - H_\alpha = 0, \quad m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - Z_\alpha = 0.$$

Fügt man aber den Komponenten X_α, Y_α, Z_α die negativ genommenen Ξ_α, H_α, Z_α zu, so wird das Gleichgewicht unter Zuhilfenahme der Bedingungen hergestellt sein, da Ξ_α, H_α, Z_α aufser den Komponenten X_α, Y_α, Z_α nur Bestandteile enthalten, welche für sich allein keine Störung des Gleichgewichtes hervorrufen. Wir haben also unter Voraussetzung der Richtigkeit des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\sum_1^n \left[(X_\alpha - \Xi_\alpha)\delta x_\alpha + (Y_\alpha - H_\alpha)\delta y_\alpha + (Z_\alpha - Z_\alpha)\delta z_\alpha\right] = 0$$

oder bei Benutzung von (6)

$$\sum_1^n \left[\left(X_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}\right)\delta x_\alpha + \left(Y_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}\right)\delta y_\alpha + \left(Z_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}\right)\delta z_\alpha\right] = 0,$$

d. h. das d'Alembert'sche Prinzip.

Demnach brauchen wir uns in der Folge nur mit dem Richtigkeitsnachweise für das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu beschäftigen.

4. Behufs weiterer Diskussion setzen wir das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in eine noch etwas einfachere Form. Sind X_α, Y_α, Z_α die Komponenten der Kraft P_α, deren Richtung, im Sinne der Beschleunigung, welche sie erteilt, genommen, mit den positiv gerichteten Koordinatenachsen die Winkel

$$(P_\alpha, x_\alpha), \quad (P_\alpha, y_\alpha), \quad (P_\alpha, z_\alpha)$$

bildet, und sind δx_α, δy_α, δz_α die Komponenten der Verrückung δp_α, welche — wenn ihre Richtung im Sinne der Verschiebung genommen wird — mit den Koordinatenachsen die Winkel*)

*) Die P_α und δp_α werden als absolute Gröfsen behandelt.

$$(\delta p_\alpha, x_\alpha), \quad (\delta p_\alpha, y_\alpha), \quad (\delta p_\alpha, z_\alpha)$$

einschliefst, so ist

$$X_\alpha = P_\alpha \cos(P_\alpha, x_\alpha), \quad Y_\alpha = P_\alpha \cos(P_\alpha, y_\alpha), \quad Z_\alpha = P_\alpha \cos(P_\alpha, z_\alpha),$$
$$\delta x_\alpha = \delta p_\alpha \cos(\delta p_\alpha, x_\alpha), \; \delta y_\alpha = \delta p_\alpha \cos(\delta p_\alpha, y_\alpha), \; \delta z_\alpha = \delta p_\alpha \cos(\delta p_\alpha, z_\alpha),$$

also

$$(7) \qquad X_\alpha \delta x_\alpha + Y_\alpha \delta y_\alpha + Z_\alpha \delta z_\alpha$$
$$= P_\alpha \, \delta p_\alpha \Big[\cos(P_\alpha, x_\alpha)\cos(\delta p_\alpha, x_\alpha) + \cos(P_\alpha, y_\alpha)\cos(\delta p_\alpha, y_\alpha)$$
$$+ \cos(P_\alpha, z_\alpha)\cos(\delta p_\alpha, z_\alpha)\Big]$$
$$= P_\alpha \delta p_\alpha \cos(P_\alpha, \delta p_\alpha) = P_\alpha \delta p_\alpha \cos \lambda_\alpha,$$

wenn λ_α den Winkel zwischen der Wirkungsrichtung der Kraft und der Verschiebungsrichtung bezeichnet. Das Prinzip lautet hiernach

$$(8) \qquad \sum_1^n{}^\alpha P_\alpha \delta p_\alpha \cos \lambda_\alpha = 0 .$$

Bei der Verwendung desselben zum wirklichen Ansatz der getrennten Gleichgewichtsbedingungen müssen natürlich die δp_α wieder in ihre drei Bestandteile aufgelöst werden.

Wir wollen nun zunächst den Inhalt und die Anwendung des Prinzips für einige der einfachsten Spezialfälle darlegen, da hierdurch das Verständnis desselben erleichtert wird.

5. Ist nur ein materieller Punkt x, y, z vorhanden, der sich auf einer vorgeschriebenen Fläche $f(x, y, z) = 0$ im Gleichgewichte befinden soll, so müssen die Kraftkomponenten, welche in die Tangentialebene der Fläche fallen, verschwinden, während die Normalkomponente beliebig ist, da sie durch den Widerstand der Fläche doch annulliert wird. Da aber die virtuellen Verrückungen hier solche sind, die in die Fläche fallen, so besagt die Gleichung

$$P \delta p \cos \lambda = 0,$$

aus der

$$P \cos \lambda = 0$$

folgt, nichts Anderes, als dafs die Projektionen der Kraft P nach allen möglichen Bewegungsrichtungen in der Fläche verschwinden müssen, und dies ist eben die hinreichende und notwendige Bedingung des Gleichgewichtes.

Soll sich der Punkt in einer Kurve im Gleichgewichte befinden, so braucht nur die Tangentialkomponente Null zu sein, da die übrigen Komponenten von selbst vernichtet werden. δp fällt aber hier in die Tangentialrichtung und $P \cos \lambda$ ist daher die Projektion der Kraft nach dieser Richtung; $P \delta p \cos \lambda = 0$ giebt also auch hier die hinreichende und notwendige Bedingung des Gleichgewichtes.

Bewegen sich mehrere Punkte, ohne untereinander durch Bedingungsgleichungen verbunden zu sein, auf vorgeschriebenen Kurven oder Flächen, so gilt das Gleiche für (8); denn die δp_α sind untereinander vollkommen unabhängig, können also auch alle bis auf eine Null gesetzt werden u. s. w.

6. Die einfachste Art der Verbindung zweier materiellen Punkte, x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2, untereinander ist die durch eine massenlose, unbiegsame und unausdehnbare Stange. Dieselbe verkörpert die Bedingung, dafs beide Punkte fortwährend denselben Abstand voneinander haben sollen, also die Bedingungsgleichung

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 .$$

Diese Verbindung hindert keinen der Punkte, einem Bewegungsantriebe, der senkrecht zur Stange gerichtet ist, Folge zu leisten. Man beachte wohl, dafs es sich um einen Antrieb im ersten Momente handelt, nicht um die weitere Fortsetzung der Bewegung; in der That kann eine unendlich kleine Strecke, welche Punkt 1 bei Festhaltung des Punktes 2 zurücklegt, als senkrecht zur Stange angesehen werden. Findet dagegen eine Bewegung von 1 in der Richtung der Stange statt, so mufs 2 eine gleichgrofse und gleichgerichtete Bewegung ausführen. — Sollen 1 und 2 im Gleichgewicht sein, so müssen die Kraftkomponenten senkrecht zur Stange verschwinden, die in der Richtung der Stange auf 1 und 2 ausgeübten Kräfte dagegen entgegengesetzt gleich sein. Diese Thatsachen können als durch elementare Versuche konstatiert gelten, mit ähnlichen Einschränkungen, wie sie bei der Bewegung auf Flächen oder Kurven nötig waren.

Wir wollen nun voraussetzen, dafs wirklich Gleichgewicht stattfindet. Stehen die virtuellen Verrückungen senkrecht auf der Stange, so müssen die Komponenten der Kräfte nach ihnen, also $P_1 \cos \lambda_1$ und $P_2 \cos \lambda_2$ einzeln verschwinden, da diese Komponenten durch die Verbindung nicht alteriert würden. Fallen δp_1 und δp_2 aber in die Richtung der Stange, so sind sie notwendigerweise gleich. Das Prinzip nimmt dann die Gestalt an

$$(P_1 \cos \lambda_1 + P_2 \cos \lambda_2)\, \delta p_1 = 0$$

oder

$$P_1 \cos \lambda_1 + P_2 \cos \lambda_2 = 0,$$

was nichts Anderes sagt, als dafs die Kräftekomponenten nach der Richtung der Stange entgegengesetzt gleich sein müssen, und das ist in der That eine Bedingung des Gleichgewichtes. Haben δp_1 und δp_2 andere Richtungen, so können beide in zwei Komponenten, eine nach der Richtung der Stange (δq_1 und δq_2), eine senkrecht zu derselben (δr_1 und δr_2) zerlegt werden. Die Komponenten der Kräfte nach diesen Richtungen mögen durch

$$P_1 \cos \mu_1 ,\ P_2 \cos \mu_2 ; \quad P_1 \cos \nu_1 ,\ P_2 \cos \nu_2$$

dargestellt sein. Dann ist im Falle des Gleichgewichtes

$$P_1 \cos \nu_1 = P_2 \cos \nu_2 = 0, \quad \delta r_1 \text{ und } \delta r_2 \text{ beliebig,}$$

$$P_1 \cos \mu_1 + P_2 \cos \mu_2 = 0, \quad \delta q_1 = \delta q_2,$$

also immer

$$P_1 (\cos \nu_1 \delta r_1 + \cos \mu_1 \delta q_1) + P_2 (\cos \nu_2 \delta r_2 + \cos \mu_2 \delta q_2) = 0,$$

d. h.*)

$$P_1 \cos \lambda_1 \delta p_1 + P_2 \cos \lambda_2 \delta p_2 = 0.$$

Das Gleichgewicht verlangt also die Erfüllung des Prinzips.

Aber die Gleichung

$$P_1 \cos \lambda_1 \delta p_1 + \delta_2 \cos \lambda_2 \delta p_2 = 0$$

ist auch die hinreichende Bedingung für das Statthaben des Gleichgewichtes. Da nämlich diese Gleichung für beliebige δp_1 und δp_2 gilt, welche senkrecht zur Stange stehen, so müssen alle Projektionen der Kräfte P_1 und P_2 nach diesen Richtungen verschwinden, d. h. die beiden Kräfte müssen in der Richtung der Stange wirken. Da aber für die letztere Richtung infolge der Bedingung $\delta p_1 = \delta p_2$ und nach dem eben Bewiesenen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ist, so folgt $P_1 = - P_2$, also wirklich die noch fehlende Bedingung des Gleichgewichtes.

7. Nachdem wir den Inhalt des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten für einige Spezialfälle erprobt haben, gehen wir zum allgemeinen Nachweis seiner Richtigkeit über. Dafs es sich um keinen mathematisch-logischen Beweis handelt, ist schon öfters betont worden. Aber man kann auch nicht behaupten, dafs das Prinzip auf einer rein empirischen Grundlage ruht. Hätten wir z. B. bei der Bewegung auf einer Fläche die Bewegungsgleichungen aus der unmittelbaren Erfahrung ableiten wollen, so würden sie nicht mit den früher aufgestellten zusammenfallen, sondern ihnen nur mehr oder weniger nahe kommen. Wir haben schon erkannt, dafs die Annahme von Bedingungsgleichungen der Bewegung der Wirklichkeit durchaus nicht völlig entspricht; in der Natur sind nur freie Kräfte thätig, und die Bedingungsgleichungen haben blofs den Zweck, komplizierte Vorgänge näherungsweise richtig zu erklären. Die Einführung der Bedingungsgleichungen ist also an sich nur eine Fiktion, die wir weiter dadurch ergänzen müssen, dafs wir präzisieren, in welcher Art wir uns die Wirkung dieser Bedingungsgleichungen denken wollen. Dann werden wir erst an der Hand der Erfahrung prüfen müssen, wie weit diese Fiktionen, bei deren Aufstellung lediglich eine gewisse Plausibilität leitend war, mit der Erfahrung in Einklang sind, wie weit sie im konkreten Falle noch der Ergänzung bedürfen. Man kann, wie dies häufig geschieht, alle möglichen Bedingungsgleichungen durch einen Mechanismus verwirklichen, der sich aus den schon besprochenen einfachen

---

*) Es ist etwa

$$\delta r_1 = \cos \alpha_1 \delta p_1, \quad \delta q_1 = \cos \beta_1 \delta p_1,$$

also $\cos \nu_1 \delta r_1 + \cos \mu_1 \delta q_1 = (\cos \nu_1 \cos \alpha_1 + \cos \mu_1 \cos \beta_1) \delta p_1 = \cos \lambda_1 \delta p_1$, nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie.

Bestandteilen zusammensetzt: Flächen oder Kurven, auf denen sich Punkte bewegen sollen, und Stangen, welche zwei Punkte verbinden; dabei wird es freilich notwendig, Hilfspunkte einzuführen, welche mit den wirklichen gleichfalls durch Stangen verbunden sind und sich auf festzusetzenden Kurven bewegen. Es ist dann nicht schwer, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches bei Anwendung einzelner Teile dieses Mechanismus besteht, auch auf die gesamte Anordnung zu übertragen. Doch wollen wir diesen Weg nicht einschlagen, da er uns nicht zur klaren Erkenntnis des Grundgedankens des Prinzips führt und es auch nicht ohne weiteres einleuchtend ist, ob das Prinzip, welches für eine bestimmte Anordnung des Mechanismus gilt, auch bei einer anderen, die jedoch denselben Bedingungsgleichungen entspricht, bestehen bleibt. Wir wollen uns vielmehr von dem speziellen Arrangement ganz unabhängig machen und das Prinzip in mehr abstrakter Weise untersuchen.

8. Um eine gleichmäſsigere Behandlung zu ermöglichen, wollen wir unseren Vorstellungen von der Bewegung eines Systems eine etwas andere Form geben. Wir hatten bisher bei einem System von n Punkten $3n$ Variabeln, von denen je drei als Koordinaten desselben Punktes zusammengehören, in Rechnung zu bringen; hierdurch erlangen Gleichungen, welche zwischen Koordinaten desselben Punktes und solchen verschiedener Punkte bestehen, einen ungleichartigen Charakter. Von diesem Miſsstande können wir uns aber frei machen. Statt die Bewegung eines Punktes im Raume zu untersuchen, können wir auch die Bewegung von drei Punkten auf je einer Geraden in Betracht ziehen, nämlich die Bewegung der Projektionen jenes Punktes auf die drei Koordinatenachsen eben in diesen. Bei freier Bewegung können diese Projektionen wie völlig isolierte Punkte behandelt werden; nur ist ihnen die gleiche Masse beizulegen. Wird dem ursprünglichen materiellen Punkte die Bewegung auf einer Fläche oder Kurve vorgeschrieben, so sind die Bewegungen der drei Projektionspunkte durch eine oder zwei Bedingungsgleichungen verknüpft. Handelt es sich z. B. um die Bewegung auf der ebenen Kurve $y = f(x)$, so denken wir uns zwei Punkte x und y auf Geraden durch Kräfte, welche in der Richtung dieser Geraden wirken (die Komponenten X und Y) bewegt, während x und y durch die angegebene Relation, oder die Inkremente beider durch die Beziehung $dy = f'(x)dx$ verknüpft sind. Während wir früher annahmen, daſs durch das Vorschreiben der Bahn alle Komponenten der Bewegung zerstört werden, welche nicht in die Richtung der Tangente der Bahnkurve fallen, woraus weiter hervorgeht, daſs sich die Komponenten der wirklichen Bewegung nach der y- und x-Achse wie $dy : dx = f'(x)$ verhalten, setzen wir jetzt dieselbe Relation zwischen den Verrückungen der beiden isolierten Punkte x und y fest.

Auf diese Art gelingt es, die Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes und denen verschiedener Punkte vollkommen gleichartig zu machen. Wir werden daher von jetzt an (bei dieser Untersuchung) nur noch von n (was an Stelle des früheren $3n$ treten mag)

Punkten $x_1, x_2, \ldots x_n$ sprechen, welche sich in ebensovielen Geraden — die gegenseitigen Lagen derselben bleiben für uns aufser Betracht — unter dem Einflufs von Kräften $X_1, X_2, \ldots X_n$ bewegen, deren Richtungen mit eben diesen Geraden zusammenfallen. Dabei sollen die Ortsbestimmungen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch Gleichungen untereinander verbunden sein, in denen die Zeit t nicht auftritt.

9. Wäre die Zahl der Bedingungsgleichungen n, so würden die Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch diese völlig bestimmt und es könnte überhaupt keine Bewegung stattfinden; die gröfste zulässige Zahl von Bedingungsgleichungen ist daher $n - 1$. Wir wollen vorerst die Untersuchung für den Fall führen, dafs diese Maximalzahl von Bedingungen wirklich vorhanden ist*). Durch geeignete Eliminationen können wir diese Gleichungen so umgestalten, dafs die Gröfsen $x_2, x_3, \ldots x_n$ als Funktionen von x_1 erscheinen:

$$(9) \qquad x_2 = f_2(x_1), \quad x_3 = f_3(x_1), \ldots\ldots \quad x_n = f_n(x_1)\,.$$

Ist die Bewegung von x_1 bekannt, so ist damit auch diejenige aller übrigen Punkte bestimmt; und ebenso determiniert die Bewegung eines beliebigen Punktes diejenige aller übrigen. Sind die Funktionen (9) formell mehrdeutig, so mufs eine Festsetzung getroffen sein, welcher Wert in jedem Falle zu wählen ist. Ist x_1 im Gleichgewicht, d. h. in Ruhe — es ist ausreichend, diesen Spezialfall ins Auge zu fassen — so sind es auch die übrigen Punkte und umgekehrt. Es genügt daher, die Bedingung für das Gleichgewicht von x_1 aufzusuchen. Dabei möge nochmals darauf aufmerksam gemacht werden, dafs in unserem Falle die virtuellen Verrückungen (von der Richtung abgesehen) stets auch aktuelle sind. Denn x_1 kann irgendwie in seiner Geraden verschoben werden, während die Verschiebungen der übrigen Punkte dann völlig bestimmte sind. Wir dürfen daher die Bezeichnung d an die Stelle von δ treten lassen.

Mögen nun auf die Punkte $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Kräfte $X_1, X_2, \ldots X_n$ in der Richtung ihrer Geraden wirken, wobei die Kräfte als positiv betrachtet werden, wenn sie die x zu vergröfsern suchen. Es ist klar, dafs jede Bewegung, welche z. B. x_2 durch X_2 erteilt wird, eine ganz bestimmte Bewegung von x_1 nach sich zieht. Ist nämlich dx_2 die während dt hervorgerufene Verrückung von x_2 — von einer Anfangsgeschwindigkeit sehen wir wieder ab —, so ist die zugehörige Verrückung dx_1 von x_1 durch

$$dx_2 = f'(x_1)dx_1$$

vollkommen determiniert. Dabei möge zunächst die Kraft X_2 allein in Thätigkeit sein. Diese Kraft kann man nun durch eine andere, X_2', ersetzt denken, welche auf x_1 in der Richtung seiner Geraden einwirkt, und es fragt sich nur, welches Gröfsenverhältnis zwischen X_2 und X_2' aufzustellen

*) Jede Maschine im gewöhnlichen Sinne ist ein Mechanismus, bei welchem der Bewegung nur noch ein Grad der Freiheit gelassen ist.

ist, damit der Effekt beider Kräfte für die Bewegung des Systems der gleiche ist. Vor allen Dingen ist hervorzuheben, daſs die Masse der einzelnen Punkte bei dieser Vergleichung keine Rolle spielt, da ja doch jede Kraft, welche einen Punkt bewegt, die übrigen in ganz bestimmter Weise mitbewegt, so daſs jede Kraft die Gesamtmasse des ganzen Systems in Bewegung zu setzen hat*). Zwei Kräfte verhalten sich nun *ceteris paribus* wie die Beschleunigungen, welche sie einem materiellen Punkte erteilen; diese sind wieder, falls anfangs Ruhe herrschte, den Wegen proportional, welche von diesem Punkte in der gleichen unendlich kleinen Zeit dt, während deren die Kräfte als konstant betrachtet werden können, unter ihrer Einwirkung zurückgelegt werden, wie aus der Formel $\frac{g\,dt^2}{2}$ für den unter Einfluſs der Kraft g zurückgelegten Weg ersichtlich ist. X_2 muſs sich daher zu X_2' verhalten wie dx_2 zu dx_1, da letzteres die Wege sind, welche die Punkte x_2 und x_1 unter dem Einfluſs von X_2, resp. X_2' durchlaufen; es ist also

$$(10) \qquad X_2' = X_2 \frac{dx_2}{dx_1}.$$

In gleicher Weise ersetzen wir die auf $x_3, x_4, \ldots x_n$ einwirkenden Kräfte $X_3, X_4, \ldots X_n$ durch neue

$$(11) \qquad X_3' = X_3 \frac{dx_3}{dx_1}, \quad X_4' = X_4 \frac{dx_4}{dx_1}, \quad \cdots \quad X_n' = X_n \frac{dx_n}{dx_1},$$

welche den Punkt x_1 angreifen. Soll Gleichgewicht stattfinden, so müssen sämtliche den Punkt x_1 angreifenden Kräfte sich gegenseitig zerstören, d. h. es muſs

$$X_1 + X_2 \frac{dx_2}{dx_1} + X_3 \frac{dx_3}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{dx_n}{dx_1} = 0$$

oder

$$(12) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \cdots + X_n dx_n = 0$$

sein. Infolge der Identität von dx_α mit δx_α stimmt aber diese Gleichung, welche die notwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes enthält, mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten überein.

Dieser Betrachtung liegt nur die eine Voraussetzung zu Grunde, daſs sich die Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, eben in der angegebenen Weise auf die mit ihm verbundenen Punkte übertragen, daſs insbesondere durch die Mechanismen, welche die Bedingungen verkörpern, keine Kraftwirkungen auſser den durch jene Übertragung implizite involvierten hervorgebracht werden. Diese Voraussetzung hat den Vorzug der Einfachheit und Plausibilität für sich; sie stimmt in den einfacheren,

*) Es ist zu bemerken, daſs bei allen Gleichgewichtsproblemen die Masse keine Rolle spielt; es handelt sich hier nur darum, daſs sich eine Anzahl von Kräften gegenseitig zerstört.

bereits abgehandelten Fällen mit der Erfahrung leidlich überein. Wir tragen daher kein Bedenken, sie als allgemein gültig hinzustellen, ohne dabei zu vergessen, daſs in jedem konkreten Falle Korrekturen, die man auf Rechnung der Reibung zu setzen pflegt und über die sich nichts Allgemeines angeben läſst, anzubringen sind*). Kurz, wir sind berechtigt, die gemachte Voraussetzung als eine Fiktion hinzustellen, welche der gesamten Behandlung der Bedingungsgleichungen einen gleichartigen, präzisen Charakter verleiht und dabei von den Beobachtungen, wie sie bei Maschinen u. s. w. angestellt werden können, sich nicht allzuweit entfernt. Mehr kann bei dem an sich fiktiven Charakter der Annahme von Bedingungsgleichungen nicht gefordert werden. Auch die erwähnte Zurückführung auf einfache mechanische Elemente leistet nicht mehr. Das Gleiche gilt für die Lagrange'sche Darstellung, welche das Prinzip durch Benutzung der Gesetze des Flaschenzugs begründet.

10. Ohne Schwierigkeit führen wir den Richtigkeitsnachweis des Prinzips jetzt noch für den Fall, daſs weniger als $n-1$, z. B. $n-2$ Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Nehmen wir an, daſs thatsächlich Gleichgewicht statthat, so können wir zu den vorhandenen Bedingungen eine beliebige neue, nur diesen nicht widersprechende hinzufügen, ohne das Gleichgewicht zu alterieren. Nach dieser Zufügung muſs aber gemäſs dem Vorigen die Gleichung:

$$X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 + \cdots + X_n \delta x_n = 0 \tag{13}$$

befriedigt sein. Infolge der Willkürlichkeit dieser letzten Bedingung kann man dieselbe derart variieren, daſs die δx_α nach und nach alle Werte annehmen, die ihnen bei den ursprünglichen Bedingungen zugänglich waren. Umgekehrt folgt auch aus (1) das Statthaben des Gleichgewichts. Wäre dies nämlich nicht vorhanden, würde also Bewegung stattfinden (von der Anfangsbewegung dürfen wir hier, wo es sich doch nur um das gegenseitige sich Aufheben von Kräften handelt, wieder absehen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen), so könnte man abermals eine $(n-1)^{\text{te}}$ Bedingung zufügen, jedoch so, daſs sie mit der thatsächlichen Bewegung im Einklang wäre. Handelte es sich beispielsweise — um zu der ursprünglichen Anschauungsweise zurückzukehren — um die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, so könnte man bestimmen, daſs er die Kurve auf dieser durchlaufen soll, welche er ohnehin zum Wege nimmt. Dann könnte aber (13) nicht befriedigt sein, da diese Gleichung bei $n-1$ Bedingungsgleichungen das Vorhandensein des Gleichgewichtes involviert.

In gleicher Weise kann man bei einer geringeren Zahl von Be-

*) Auf die Theorie der Reibung brauchen wir an dieser Stelle nicht weiter einzugehen. Wie früher öfters geschehen ist, kann man in jedem Falle die Reibung als eine Kraft einführen, welche der jeweiligen Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt und eine Funktion der Geschwindigkeit ist.

dingungsgleichungen weiter schliefsen; (13) oder (3) bildet also allgemein die notwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichts.

Damit ist denn auch das d'Alembert'sche Prinzip nachgewiesen, falls man die oben gemachte Voraussetzung über die Wirkungsweise der Bedingungsgleichungen anerkennt.

11. Der Ausdruck

$$\sum_1^n (X_\alpha \delta x_\alpha + Y_\alpha \delta y_\alpha + Z_\alpha \delta z_\alpha)$$

heifst die virtuelle Arbeit der wirkenden Kräfte*); er bezeichnet offenbar die Arbeit, welche die Kräfte P_α leisten würden, falls sie die virtuellen Verrückungen wirklich zu stande brächten.

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist also die, dafs für jedes mögliche System von Verrückungen die virtuelle Arbeit verschwindet.

Haben sämtliche Kräfte des Systems eine gemeinsame Kräftefunktion U, so dafs

$$X_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad Y_\alpha = \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \quad Z_\alpha = \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}$$

ist, so geht (3) über in

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}\delta y_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\delta z_\alpha\right) = 0$$

oder

$$\delta U = 0. \tag{14}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn U ein Maximum oder Minimum, verglichen mit seinen Werten für Nachbarpunkte, ist; doch dürfen wir, wie aus den Elementen der Variationsrechnung bekannt ist, nicht den umgekehrten Schlufs ziehen. Wir kommen auf diesen Gegenstand später zurück.

§ 22.

Die Lagrange'sche Form des d'Alembert'schen Prinzips.

1. Wirken auf n materielle Punkte x_α, y_α, z_α mit den Massen m_α die Kraftkomponenten X_α, Y_α, Z_α ein, während k Bedingungsgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots) = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

bestehen, so liefert das d'Alembert'sche Prinzip die Bewegungsgleichungen in der Form

*) Man bezeichnet auch die einzelnen Gröfsen $X_\alpha \delta x_\alpha$ oder $P_\alpha \delta p_\alpha$ als virtuelle Momente.

$$\sum_1^n \left[\left(m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - X_\alpha\right)\delta x_\alpha + \left(m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - Y_\alpha\right)\delta y_\alpha + \left(m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - Z_\alpha\right)\delta z_\alpha\right] = 0, \tag{2}$$

worin die $3n$ Gröſsen δx_α, δy_α, δz_α mit Hilfe der Gleichungen (1) durch $(3n - k)$ von ihnen ausgedrückt werden können. Zu letzterem Zwecke leiten wir aus (1) durch Differentiation die Relationen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z_2}\delta z_2 + \cdots = 0 \tag{3}$$

u. s. w.

her, durch welche jene Reduktion ermöglicht wird. Die $(3n - k)$ übrig bleibenden Variationen sind als vollkommen willkürlich zu erachten, ihre Koeffizienten also identisch Null zu setzen. Dieses Verfahren wird im allgemeinen ziemlich umständlich und wenig übersichtlich, weshalb es wünschenswert ist, dasselbe durch die auch sonst öfters angewandte Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren zu ersetzen.

2. Wir multiplizieren die Gleichungen (3) der Reihe nach mit den vorläufig willkürlichen Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ und subtrahieren sie von (2); dies giebt

$$\begin{aligned}\sum_1^n \Big[&\left(m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - X_\alpha - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}\right)\delta x_\alpha \\ &+ \left(m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - Y_\alpha - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_\alpha} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}\right)\delta y_\alpha \\ &+ \left(m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - Z_\alpha - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_\alpha} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_\alpha} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}\right)\delta z_\alpha\Big] = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

eine Gleichung, die noch mit (1) oder (3) zu verbinden ist. Nun können wir die k willkürlichen Gröſsen λ so bestimmen, daſs k der Ausdrücke, welche als Faktoren der Variationen auftreten, identisch verschwinden. Die $(3n - k)$ Variationen, welche mit den übrigen multipliziert sind, können wir als die unabhängigen betrachten und müssen dann ihre Koeffizienten ebenfalls gleich Null setzen. Dies giebt die übersichtliche und elegante Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} &= X_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}, \\ m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} &= Y_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_\alpha} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}, \\ m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} &= Z_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_\alpha} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_\alpha} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Zur Bestimmung der Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ sind die k Gleichungen

(1) in der Art zu verwenden, wie dies § 14, 5 und 6 für Spezialfälle auseinandergesetzt wurde. Die Gleichungen (1) sind zweimal nach der Zeit zu differentiieren, worauf für die Gröfsen

$$\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}$$

die sich aus (5) ergebenden Werte einzusetzen sind; aus den erhaltenen n Gleichungen sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ zu berechnen.

3. Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen sind mit dem d'Alembert'schen Prinzip vollkommen äquivalent; man kann auch das letztere aus den ersteren ableiten. Man braucht nur die mit δx_α, δy_α, δz_α multiplizierten Gleichungen (5) zu addieren und die mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ multiplizierten Gleichungen (3) hinzuzufügen, um wieder zum d'Alembert'schen Prinzip zu gelangen.

Die Bedingungsgleichungen können in unendlich viele Formen gebracht werden; in jedem Falle behalten die Lagrange'schen Gleichungen ihre Gültigkeit, da sie mit dem d'Alembert'schen Prinzip, in welchem die Form der Bedingungsgleichungen keine Rolle spielt, äquivalent sind. Übrigens läfst sich dies auch direkt durch eine einfache Transformation nachweisen.

4. Der Wert der Lagrange'schen Gleichungen beruht weniger in der Erleichterung der Rechnung, als in dem klaren Einblick, welchen sie in die Natur der Bewegung bei vorhandenen Bedingungsgleichungen gestatten. Man sieht, dafs ganz entsprechend den Entwicklungen von § 14, 5 und 6 den freien Kräften so viele Hilfskräfte zuzufügen sind, als Bedingungsgleichungen vorliegen. Diese Hilfskräfte stehen untereinander so in Beziehungen, dafs bei jeder Komponente dieselbe Kraft λ auftritt, jeweilig multipliziert mit der Gröfse $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ u. s. w. Enthält ein f nur die Koordinaten eines Punktes x, y, z, so steht die entsprechende Zusatzkraft nach dem angeführten Paragraphen normal zur Fläche $f(x, y, z) = 0$. Dagegen wird es weniger klar, wie sich die Hilfskräfte auf die verschiedenen Punkte verteilen; aus diesem Grunde benutzten wir nicht die Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen zu deren Herleitung.

Auch im allgemeinen Falle können wir uns unter

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots) = 0$$

eine Fläche vorstellen, wenn wir nur alle Variabeln aufser x_1, y_1, z_1 für den Augenblick als konstant annehmen. Die Hilfskraft, welche für den Punkt m_1 zuzufügen ist, steht dann auf dieser Fläche, die sich in jedem Momente ändert, senkrecht. Ebenso können wir aber in $f = 0$ auch x_2, y_2, z_2 allein als variabel betrachten und erhalten so eine analoge Beziehung für den Punkt x_2, y_2, z_2 u. s. w.

5. Schreiben wir für (5) abkürzungsweise

$$
(6) \qquad \begin{cases} m_\alpha \dfrac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = X_\alpha + L_\alpha, \\ m_\alpha \dfrac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = Y_\alpha + M_\alpha, \\ m_\alpha \dfrac{d^2 z_\alpha}{dt^2} = Z_\alpha + N_\alpha \end{cases}
$$

und setzen wir diese Gröfsen, welche als Komponenten der Kräfte bei einer freien Bewegung betrachtet werden können, in die Gleichung (2) des d'Alembert'schen Prinzips ein, so erhalten wir

$$
(7) \qquad \sum [L_\alpha \delta x_\alpha + M_\alpha \delta y_\alpha + N_\alpha \delta z_\alpha] = 0.
$$

Die durch die Bedingungen indizierten Kräfte halten sich also untereinander das Gleichgewicht.

Man bezeichnet $-L_\alpha$, $-M_\alpha$, $-N_\alpha$ als die Komponenten der verlorenen Kräfte und kann daher auch sagen: Bei der unfreien Bewegung befinden sich die verlorenen Kräfte untereinander im Gleichgewicht.

Hiernach bezeichnet man auch das d'Alembert'sche Prinzip als den Satz von den verlorenen Kräften.

§ 23.

Das Fourier'sche Prinzip.

1. Eine interessante, wenn auch praktisch kaum verwendbare Erweiterung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten hat Fourier*) gegeben. Es handelt sich darum, das Princip auch auf den Fall auszudehnen, dafs die Bedingungen alle oder teilweise in Gestalt von Ungleichheiten gegeben sind. So kann z. B. vorgeschrieben werden, dafs ein materieller Punkt sich immer aufserhalb einer Kugel bewegen soll. Seine Bewegung ist dann eine vollkommen freie, so lange er nicht mit der Kugel in Berührung kommt; im letzteren Falle jedoch steht es ihm frei, sich auf der Kugeloberfläche weiter zu bewegen oder sich wieder in den äufseren Raum zu begeben, während ihm ein Eindringen in den inneren Kugelraum versagt bleibt. Ein zweites Beispiel bieten zwei mate-

*) Dieses Prinzip wird von Gauss ohne Beweis in der Abhandlung: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, Ges. Werke, B. 5, p. 23 mitgeteilt; Fourier begründete es jedoch bereits früher ausführlich in der Abhandlung: Sur la statique, Journ. de l'école polyt., Cah. 5, An 6. Russische Autoren schreiben es ihrem Landsmann Ostrogradsky zu. Der Verfasser verdankt die Kenntnis des Prinzips, welches ziemlich wenig bekannt zu sein scheint und in der Litteratur selten Erwähnung findet, den Vorlesungen von Koenigsberger. In Schell's Werk (B. II, p. 175) wird das Prinzip nur sehr kurz erörtert.

rielle Punkte, welche durch einen massenlosen unausdehnbaren, aber biegsamen Faden verbunden sind.

Das Fourier'sche Prinzip lautet, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden:

Die notwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes eines Systems von n materiellen Punkten, welches gegebenen Ungleichheiten, zu denen auch Gleichungen treten können, Genüge leisten soll, ist

$$(1) \qquad \sum_1^n (X_\alpha \delta x_\alpha + Y_\alpha \delta y_\alpha + Z_\alpha \delta z_\alpha) \leqq 0 .$$

Die Verschiebungen δx_α, δy_α, δz_α müssen den Bedingungen genügen, sind aber sonst willkürlich.

Die Bedingungen sollen sich nur auf die Koordinaten der Systempunkte beziehen.

Wir wollen das Prinzip zuerst an Beispielen eingehend erproben, dann allgemein begründen.

2. Möge — um das erste vorhin erwähnte Beispiel sogleich zu verallgemeinern — eine Fläche vorgelegt sein, welche den Gesamtraum in zwei getrennte Teile zerlegt; der eine derselben möge als der äufsere bezeichnet werden, eine Bezeichnung, die willkürlich wird, falls beide Teile unendlich sind. Wir setzen fest, dafs sich der materielle Punkt in dem äufseren Teile bewegen möge; die Umkehrung der Festsetzung bringt auch bei geschlossenen Flächen keine Änderung der Verhältnisse hervor. So lange sich der Punkt nicht an der Grenze selbst befindet, ist er völlig frei; soll Gleichgewicht statthaben, so mufs bei Innehaltung der früheren Bezeichnung $P = 0$, also auch

$$P \cos \lambda \, \delta p = 0$$

sein. An der Grenze selbst tritt aber Gleichgewicht ein, falls entweder $P = 0$ ist, oder falls die Richtung dieser Kraft normal zur Grenzfläche steht und nach innen geht. Da andrerseits eine virtuelle Verrückung entweder in der Fläche oder nach der Aufsenseite unter irgend einem Winkel statthat, so ist der Winkel λ zwischen P und δp ein rechter oder stumpfer, also $\cos \lambda \leqq 0$. Infolge dessen ist in allen Fällen

$$(2) \qquad P \cos \lambda \, \delta p \leqq 0.$$

Umgekehrt folgt aus (2) das Statthaben des Gleichgewichtes. Befindet sich nämlich der Punkt im freien Raume, so finden sich unter den ganz willkürlichen δp unendlich viele, die mit der Kraftrichtung einen spitzen Winkel einschliefsen, also $\cos \lambda > 0$ machen. Daher ist für diese Lage (2) nur durch die Annahme $P = 0$ allgemein zu befriedigen. Ist aber der Punkt an die Grenzfläche gelangt, so fordert (2), dafs die Kraftrichtung mit keiner der möglichen Verrückungen einen spitzen Winkel bildet. Diese Bedingung befriedigt aber nur eine Kraft, welche normal zur Fläche nach innen geht, deren Wirkung also durch den Widerstand der Fläche aufgehoben wird. So ist (2) auch die hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes.

3. Für das zweite angeführte Beispiel der beiden durch einen unausdehnbaren Faden verbundenen materiellen Punkte lautet die Bedingung

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 \leq r^2. \tag{3}$$

So lange die beiden Punkte m und m_1 ihren Maximalabstand r nicht erreicht haben, befinden sie sich in freiem Zustande; das Vorhandensein des Gleichgewichtes fordert hier das Verschwinden der beiden Kräfte P und P_1, welche auf m und m_1 einwirken. Befinden sich aber die Punkte im Abstande r, ist also der Faden gespannt, so mufs $P_1 = P$ sein und beide Kräfte müssen in der Richtung des Fadens derart wirken, dafs sie m und m_1 voneinander zu entfernen streben*). Die virtuellen Verrückungen δp und δp_1 müssen in dieser Lage so gerichtet sein, dafs sie keine Vergröfserung des Abstandes $m m_1$ nach sich ziehen. Dies liefert die Bedingung

$$\cos\lambda\,\delta p + \cos\lambda_1\,\delta p_1 \leq 0. \tag{4}$$

Der linksstehende Ausdruck giebt nämlich die Vergröfserung an, welche die Projektion des Abstandes der beiden materiellen Punkte auf die ursprüngliche Lage des Fadens erfährt; da diese Projektion offenbar von dem Abstande selbst nur um unendlich kleine Gröfsen höherer Ordnung verschieden ist, kann die Vergröfserung nach Erreichung des Maximalabstandes nur eine negative oder verschwindende sein. Wegen $P = P_1$ können wir für (4) schreiben

$$P\cos\lambda\,\delta p + P_1\cos\lambda_1\,\delta p_1 \leq 0, \tag{5}$$

und es ist nach dem Gesagten klar, dafs diese Relation bei stattfindendem Gleichgewicht für jede Lage der Punkte gilt.

Auch die Umkehrung ist unschwer zu erweisen. Ist der Abstand der Punkte geringer als r, so ist es nicht zu vermeiden, dafs für geeignete Richtungen der willkürlichen Verschiebungen δp und δp_1 $\cos\lambda$ und $\cos\lambda_1$ positiv werden; daher kann (5) nur unter der Voraussetzung $P = P_1 = 0$ bestehen. In der Grenzlage ist erforderlich, dafs nicht λ und λ_1 gleichzeitig spitze Winkel, also $\cos\lambda$ und $\cos\lambda_1$ positiv sind; die Anschauung zeigt, dafs dies für sämtliche zulässigen δp und δp_1 nur möglich ist, wenn P und P_1 entgegengesetzt sind und m und m_1 zu entfernen suchen. Legt man aber δp und δp_1 in die Richtung des Fadens, so wird

$$\delta p = \delta p_1 \quad \text{und} \quad \cos\lambda = -\cos\lambda_1 = \pm 1,$$

woraus einmal $P \leq P_1$, einmal $P \geq P_1$, d. h. $P = P_1$ folgt. (5) ist also auch die hinreichende Gleichgewichtsbedingung.

---

*) λ und λ_1 sind daher hier die Winkel, welche δp und δp_1 mit dem gespannten Faden bilden, jedoch in entgegengesetztem Sinne gerechnet.

4. Im allgemeinen Falle können wir, den in § 22, 4 gewonnenen Anschauungen entsprechend, die Bedingungen, soweit sie als Gleichungen in Geltung treten, durch Normalkräfte N_α ersetzen, durch welche das System in ein freies verwandelt wird; es mufs daher, wenn durch ν_α der Winkel von N und δp_α bezeichnet wird,

$$\sum_1^n{}^\alpha [P_\alpha \cos\lambda_\alpha + N_\alpha \cos\nu_\alpha]\,\delta p_\alpha = 0 \tag{6}$$

sein. Solange die Grenzbedingungen nicht in Geltung treten, solange also die materiellen Punkte des Systems nicht an die vorgeschriebenen Flächen gelangen u. s. w., ist $N_\alpha = 0$, so dafs

$$\sum_1^n{}^\alpha P_\alpha \cos\lambda_\alpha\,\delta p_\alpha = 0 \tag{7}$$

die Gleichgewichtsbedingung darstellt. Im andern Falle müssen aber die Verrückungen solche Richtungen haben, dafs sie mit den Normalkräften spitze oder rechte Winkel bilden*). Daher wird

$$\sum_1^n{}^\alpha N_\alpha \cos\nu_\alpha\,\delta p_\alpha \geqq 0,$$

somit

$$\sum_1^n{}^\alpha P_\alpha \cos\lambda_\alpha\,\delta p_\alpha \leqq 0, \tag{8}$$

und diese Relation oder die äquivalente (1) ist die notwendige Bedingung des Gleichgewichtes. — Die Umkehrung wird nach Analogie der behandelten Spezialfälle dargethan.

Das Fourier'sche Prinzip beruht genau auf denselben Grundvoraussetzungen wie dasjenige der virtuellen Geschwindigkeiten. Auf den Zustand der Bewegung übertragen liefert es jedoch im allgemeinen keine bestimmten Gleichungen.

§ 24.

Die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung.

1. In § 10 gelang es uns, sieben Integrale der Bewegungsgleichungen eines Systems von materiellen Punkten, welche sich gegenseitig anziehen oder abstofsen, anzugeben. Auch in dem allgemeinen Falle, wo die Differentialgleichungen der Bewegung durch das d'Alembert'sche Prinzip bestimmt sind, können unter genau zu präzisierenden beschränkenden Voraussetzungen dieselben Integrale hergeleitet werden. Diese Integrale liefern

*) Wie bei Konstruktion der in § 22, 4 angenommenen Flächen unmittelbar klar ist.

uns drei Sätze, welche in wenig zweckmäfsiger Weise gleichfalls als Prinzipien der Mechanik bezeichnet werden: die Prinzipien von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, von der Erhaltung der lebendigen Kraft und von der Erhaltung der Flächen. Korrekter wäre es, nur solche Sätze als Prinzipien zu benennen, welche nicht das Resultat einer mathematischen Entwicklung geben, sondern Abstraktionen von Erfahrungsthatsachen in eine allgemeine Formel zusammenfassen; solcher Art sind die bisher behandelten Prinzipien*). Die hier zu besprechenden sind nur Ableitungen aus dem d'Alembert'schen Prinzip. Späterhin werden wir endlich noch Prinzipien kennen lernen, welche Umformungen des d'Alembert'schen Prinzipes unter einschränkenden Annahmen sind.

2. Summiert man von den Gleichungen (5) in § 22 immer diejenigen, welche die Differentialquotienten der entsprechenden Koordinaten enthalten, so ergiebt sich — von jetzt ab möge die Summationsbezeichnung etwas vereinfacht werden —

$$(1)\quad\begin{cases} \sum m_\alpha \dfrac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = \sum X_\alpha + \lambda_1 \sum \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \dfrac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}, \\ \sum m_\alpha \dfrac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = \sum Y_\alpha + \lambda_1 \sum \dfrac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \dfrac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}, \\ \sum m_\alpha \dfrac{d^2 z_\alpha}{dt^2} = \sum Z_\alpha + \lambda_1 \sum \dfrac{\partial f_1}{\partial z_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \dfrac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}. \end{cases}$$

Definieren wir wie früher den Schwerpunkt ξ, η, ζ des Systems durch die Gleichungen (§ 10, (3))

$$(2)\quad\begin{cases} M = \sum m_\alpha, \\ M\xi = \sum m_\alpha x_\alpha, \quad M\eta = \sum m_\alpha y_\alpha, \quad M\zeta = \sum m_\alpha z_\alpha, \end{cases}$$

so können wir statt (1) schreiben

$$(3)\quad\begin{cases} M \dfrac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X_\alpha + \lambda_1 \sum \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \dfrac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}, \\ M \dfrac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum Y_\alpha + \lambda_1 \sum \dfrac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \dfrac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}, \\ M \dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} = \sum Z_\alpha + \lambda_1 \sum \dfrac{\partial f_1}{\partial z_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \dfrac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}. \end{cases}$$

Der Schwerpunkt eines beliebigen Systems, welches dem d'Alembert'schen Prinzip genügt, bewegt sich also so, wie

*) Der weite Gebrauch des Wortes Prinzip erklärt sich aus der geschichtlichen Entwicklung. Das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft wurde z. B. von Huyghens als Grundlage mechanischer Herleitungen benutzt.

wenn in ihm die Gesamtmasse des Systems vereinigt wäre und zugleich in ihm die sämtlichen Kräfte des letzteren, einschliefslich die Zusatzkräfte, welche der Bedingungsgleichungen wegen zugefügt werden, parallel zu ihrer wirklichen Richtung angriffen.

3. Die Gleichungen (3) vereinfachen sich sehr bedeutend, wenn die Bedingungsgleichungen nur von den Differenzen je zweier x-Koordinaten, je zweier y-Koordinaten und je zweier z-Koordinaten abhängen. Da nämlich $x_\alpha - x_\beta = (x_\alpha - x_1) - (x_\beta - x_1)$ ist, so kann man sich dann die Funktionen f als Funktionen der Gröfsen (β möge die Werte $2, 3, \ldots n$ annehmen)

$$u_\beta = x_\beta - x_1, \quad v_\beta = y_\beta - y_1, \quad w_\beta = z_\beta - z_1$$

allein denken. Demgemäfs ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f}{\partial u_\beta}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial f}{\partial u_3} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial u_n}$$

u. s. w.,

also

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

u. s. w.

Hierdurch wird aus den Gleichungen (3)

$$(5) \qquad \begin{cases} M \dfrac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X_\alpha, \\ M \dfrac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum Y_\alpha, \\ M \dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} = \sum Z_\alpha. \end{cases}$$

In diesem Falle, der immer eintritt, wenn die Bedingungen sich nur auf den gegenseitigen Abstand der materiellen Punkte beziehen, kommen also die Bedingungsgleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes gar nicht in Betracht; derselbe bewegt sich, wie wenn die Gesamtmasse des Systems in ihm vereinigt wäre und alle Kräfte (ohne Zusatzkräfte), parallel zu ihrer wirklichen Richtung, in ihm angriffen*).

Sind keine Bedingungsgleichungen vorhanden, so trifft (5) natürlich immer zu.

4. Wir setzen jetzt weiter voraus, dafs sämtliche Kräfte des Systems eine Kräftefunktion U besitzen, welche ebenfalls nur von jenen Differenzen $x_\alpha - x_\beta$ u. s. w. abhängig sei; es ist dann

*) Der Satz von § 10, 12 ergiebt sich aus diesem Resultate leicht durch Vernachlässigung unendlich kleiner Gröfsen zweiter Ordnung.

$$X_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad Y_\alpha = \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \quad Z_\alpha = \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}$$

und infolge derselben Entwicklung, welche zu (4) führte,

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0$$

u. s. w.,

so daſs (5) die Gestalt

$$(6) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$$

annimmt. Die Integration liefert

$$(7) \qquad \xi = a_1 t + a_2, \quad \eta = b_1 t + b_2, \quad \zeta = c_1 t + c_2,$$

woraus durch Elimination von t

$$(8) \qquad \frac{\xi - a_2}{a_1} = \frac{\eta - b_2}{b_1} = \frac{\zeta - c_2}{c_1}$$

folgt.

Auch wenn keine Kräftefunktion vorhanden ist, die Kräfte aber nur zwischen je zwei Punkten des Systems thätig sind und dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung genügen, werden die rechten Seiten von (5) der Null gleich, da sich die X_α u. s. w. aus einzelnen Teilen zusammensetzen, welche entgegengesetzt gleich sind; es gelten also die gleichen Resultate. Nennen wir Kräfte dieser Art innere, so haben wir den Satz:

Der Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte, welche nur inneren Kräften ausgesetzt sind und auch nur Bedingungen zu befriedigen haben, welche sich lediglich auf ihre gegenseitige Lage beziehen, bewegt sich in einer Geraden mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

Huyghens und Newton sind als die Entdecker dieses Gesetzes anzusehen.

Setzt man in (7) die aus (2) folgenden Werte für ξ, η, ζ ein, so erkennt man, daſs (7) wirklich drei vollständige Integrale der Bewegungsgleichungen repräsentiert. In den übrigen Fällen sind diese nicht zu erhalten.

Es gelten nur die Gleichungen (5), wenn auſser den gegenseitigen noch Einwirkungen von anderen Punkten her stattfinden. Auf die Gleichungen (3) bleiben wir beschränkt, wenn den Punkten teilweise feste Flächen oder Kurven als Örter der Bewegung zuerteilt werden.

Die Resultate (5) und (6) und speziell (7) werden als das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes bezeichnet.

5. Da die aktuellen Verrückungen zugleich virtuelle sind, wenn die Zeit in den Bedingungsgleichungen nicht vorkommt, so dürfen wir in der d'Alembert'schen Gleichung (§ 21, (2)) die Variationen δx_α, δy_α, δz_α

durch die aktuellen Verrückungen dx_α, dy_α, dz_α ersetzen. Wir erhalten, wenn wir durch dt dividieren,

$$(9)\qquad \sum m_\alpha \left[\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}\frac{dx_\alpha}{dt} + \frac{d^2y_\alpha}{dt^2}\frac{dy_\alpha}{dt} + \frac{d^2z_\alpha}{dt^2}\frac{dz_\alpha}{dt}\right] = \sum \left[X_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} + Y_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} + Z_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt}\right].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein vollständiger Differentialquotient; die rechte Seite wird ebenfalls zu einem solchen, wenn **die Kräfte eine von der Zeit unabhängige Kräftefunktion U besitzen.** Die rechte Seite nimmt nämlich dann die Gestalt an

$$(10)\qquad \sum \left[\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\alpha}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}\frac{dy_\alpha}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\frac{dz_\alpha}{dt}\right] = \frac{dU}{dt}.$$

Durch Integration finden wir

$$(11)\qquad \frac{1}{2}\sum m_\alpha \left[\left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2\right] = U + c$$

oder

$$(12)\qquad \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = U + c,$$

die bekannte Gleichung, welche das **Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft** ausspricht.

Dasselbe hat lediglich die Existenz einer gemeinsamen, von der Zeit unabhängigen Kräftefunktion der sämtlichen wirkenden Kräfte zur Grundlage. Die Bedingungsgleichungen stören die Gültigkeit des Prinzips in keiner Weise, allerdings nur unter der Voraussetzung, daſs sie keinen anderen Einfluſs ausüben, als den bei der Herleitung des d'**Alembert**schen Prinzips angenommenen.

Bei stattfindender Reibung in dem die Verbindungen vermittelnden Mechanismus verliert das Prinzip seine Gültigkeit.

Die Gröſse

$$(13)\qquad \int_{t_0}^{t} \sum (X_\alpha dx_\alpha + Y_\alpha dy_\alpha + Z_\alpha dz_\alpha) = \sum \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} dy_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} dz_\alpha\right) = U - U_0$$

können wir nach Früherem als **die von den Kräften während der Zeit $t = t_0$ bis $t = t$ geleistete Arbeit** betrachten (für $t = t_0$ möge $U = U_0$ werden)*).

*) Es kann auch vorkommen, daſs das Integral auf der linken Seite von (13) ausführbar ist, ohne daſs eine Kräftefunktion existiert. Sind die Koordinaten sämtlicher Punkte als Funktionen der Zeit bekannt, so lassen sich auch X_α, Y_α, Z_α der gegebenen Bewegung entsprechend als Funktionen von t be-

6. Die Bewegung eines Systems hängt bekanntlich nicht allein von den wirkenden Kräften und den eventuell vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen ab, sondern auch von den gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Elemente. Wären uns z. B. die Kräfte vollkommen bekannt, welche die gesamte Welt bewegen — und es ist nicht unwahrscheinlich, daſs diese Erkenntnis über lang oder kurz erreicht werden wird —, so wäre der Weltlauf hiermit noch keineswegs bestimmt. Vielmehr könnte die Welt ein von dem wirklichen gänzlich verschiedenes Aussehen zeigen, wenn die Konstanten anders bestimmt wären. Während es nun sehr leicht ist, die Wirkung bekannter Kräfte durch Differentialgleichungen auszudrücken, ist die Berücksichtigung der Geschwindigkeiten, wie sie für einen bestimmten Moment willkürlich vorgeschrieben werden können, durch die Ausführung der Integration dieser Differentialgleichungen bedingt, eine Aufgabe, deren Lösung nur in den einfachsten Fällen vollständig gelingt. Es ist daher nicht zu verwundern, daſs die wenigen allgemeineren Integralgleichungen, welche sich herstellen lassen und die einen, wenn auch nur sehr unvollständigen Einblick in das Zusammenwirken von Kräften und Geschwindigkeiten gestatten, die gröſste Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben. Dies gilt insbesondere von der Gleichung, welche das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft ausdrückt. Aber gerade wegen des allgemeinen Interesses an diesem Prinzipe muſs davor gewarnt werden, ihm eine allzuweit gehende Tragweite beizulegen. Vor allen Dingen beachte man, daſs das Prinzip bei einem System von n Elementen weniger aussagt als bei einem einzelnen Elemente; es liefert eben immer nur eine von mehr oder weniger zahlreichen Gleichungen. Auch ist nicht zu vergessen, daſs die Arbeit und die lebendige Kraft nach unseren früheren Erörterungen keineswegs so einfach zu interpretierende Begriffe sind, wie man gewöhnlich annimmt. Im Grunde genommen verdanken sie ihre Bedeutung eben nur dem Umstande, daſs sie in der allgemeinen Integralgleichung auftreten.

Der (nach des Verfassers Ansicht nicht ganz sachentsprechenden) Ausdrucksweise von Rankine folgend bezeichnet man häufig die lebendige Kraft eines Systems als dessen aktuelle oder kinetische Energie, die Gröſse $-U$ dagegen (die noch eine willkürliche Konstante enthält) als die potentielle Energie desselben. Die Gesamtenergie des Systems ist dann, wenn (12) gilt, konstant. Das System wird in diesem Falle als konservativ bezeichnet.

Die Gültigkeit des Satzes von der lebendigen Kraft (im engeren Sinne) hängt ab von dem Vorhandensein einer Kräftefunktion; wir haben deren Existenz für beliebige Zentralkräfte, welche zwischen den n materiellen Punkten wirken, nachgewiesen; doch dürfen auſserdem auch

---

stimmen, und die Integration kann ausgeführt werden. Es gilt dann eine (12) analoge Gleichung, auf die jedoch die folgenden Betrachtungen keine Anwendung zu finden brauchen.

Kräfte auftreten, welche nach festen Zentren gerichtet sind. Charakteristisch ist, daſs diese Kräfte nur von den Koordinaten der sämtlichen Elemente des Systems, also von der gegenseitigen Gruppierung der Elemente und der festen Zentren, abhängen. Die Kräfte dürfen sich nicht mit der Zeit ändern, soweit dies nicht durch die mit der Zeit vor sich gehende Ortsänderung bedingt ist, d. h. die Kräftefunktion darf t nicht *explizite* enthalten. Ferner dürfen im allgemeinen die Kräfte nicht von den Differentialquotienten der Koordinaten, also insbesondere nicht von den Geschwindigkeiten abhängen; bei Reibung, Luftwiderstand u. s. w. gilt der Satz von der lebendigen Kraft nicht.

Der Schwerpunkt der berühmten Untersuchungen von v. Helmholtz „Über die Erhaltung der Kraft"*) liegt darin, daſs der Verfasser nach den verschiedensten Richtungen hin wahrscheinlich macht, daſs in der Natur überhaupt nur solche Kräfte existieren, welche eine Kräftefunktion besitzen. Die Begriffe Reibung, Luftwiderstand u. s. w. sind hiernach nur als ein unvollkommener Ersatz komplizierter Vorgänge in der Wirklichkeit anzusehen. Der Verlust an lebendiger Kraft ist ein scheinbarer; der verlorene Teil wird in Wärmebewegung umgesetzt.

Die angeführten Bedingungen für das Bestehen des Prinzips von der Erhaltung der lebendigen Kraft sind, wie schon aus der Anmerkung zu 5. hervorgeht, nur hinreichende, keine notwendigen. Bedenkt man, daſs die Bedingungsgleichungen, welche das Prinzip nicht beeinträchtigen, durch Kräfte ersetzt werden können, welche von den Geschwindigkeiten nicht frei sind, so gelangt man zu der Einsicht, daſs das Prinzip (modifiziert) unter Umständen bei Kräften erhalten bleibt, welche von den Geschwindigkeiten abhängig sind. Und in der That haben neuere Untersuchungen gezeigt, daſs auch sonst Kräfte möglich sind, welche von der Geschwindigkeit, eventuell auch von der Zeit abhängig sind und doch eine Kräftefunktion zulassen und dem Prinzipe der Erhaltung der lebendigen Kraft Genüge leisten. Das Weber'sche elektrodynamische Gesetz gehört hierher**).

Der Satz von der lebendigen Kraft sagt, wenn man von Erweiterungen der letztbesprochenen Art absieht, in erster Linie aus, daſs die lebendige Kraft in jedem Momente nur von den Koordinaten der bewegten Punkte abhängt. Kehren daher sämtliche Elemente im Verlaufe der Bewegung in eine frühere Stellung zurück, so wird dann die lebendige Kraft wieder dieselbe. Bei einem einzigen materiellen Punkte sagt dies, daſs seine Geschwindigkeit wieder dieselbe geworden ist, was

*) Gesammelte Werke B. I, pag. 12—75.

**) Siehe hierüber Holzmüller, Über die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem elektrodynamischen Gesetze von Weber, Schlöm. Zeitschr. B. 15, pag. 69. Vgl. ferner Simony, Über eine Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik, Wiener Berichte, B. I; Michaelis, Over het beginsel van het behoud der energie, Nieuw Arch., Amsterdam, B. VI, pag. 1.

für mehrere Elemente nicht gilt*). Diese Folgerung erklärt den Namen des Prinzipes, welcher von der Erhaltung der lebendigen Kraft spricht. Es ist durchaus nicht unmöglich, daſs im besonderen Falle sich die lebendige Kraft, und weil der Ausdruck für dieselbe nur positive Glieder enthält, auch die einzelnen Geschwindigkeiten für die Dauer der Null nähern; die parabolische Kometenbewegung liefert hierfür ein Beispiel. Ein fortwährendes, stets gleichbleibendes Oszillieren ist durch den Satz von der lebendigen Kraft nur in einzelnen Fällen bedingt.

7. Der Satz über die lebendige Kraft enthält die absoluten Geschwindigkeiten der Elemente; er läſst sich aber leicht so umwandeln, daſs die relativen Geschwindigkeiten in Bezug auf den Schwerpunkt darin vorkommen, wenn nur die Relation (6) erfüllt ist. Bezeichnen x'_α, y'_α, z'_α die Koordinaten des Punktes x_α, y_α, z_α, falls der Schwerpunkt zum Nullpunkt genommen wird, v'_α die relative Geschwindigkeit dieses Punktes gegen den Schwerpunkt, so ist

$$v_\alpha^2 = \left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{dx'_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} + \frac{dy'_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{dz'_\alpha}{dt}\right)^2$$

oder nach (7)

$$v_\alpha^2 = \left(a_1 + \frac{dx'_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(b_1 + \frac{dy'_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(c_1 + \frac{dz'_\alpha}{dt}\right)^2$$

$$= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2a_1\frac{dx'_\alpha}{dt} + 2b_1\frac{dy'_\alpha}{dt} + 2c_1\frac{dz'_\alpha}{dt} + v'^2_\alpha.$$

Hiernach wird, wenn man (2) berücksichtigt,

$$(14) \qquad \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}M(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + \frac{1}{2}\sum m_\alpha v'^2_\alpha.$$

Da die lebendige Kraft des Schwerpunktes, in den man sich wieder die Gesamtmasse des Systems verlegt denkt, eine konstante, positive Gröſse ist, so gilt auch für die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. An Stelle von c in (11) tritt nur

$$c - \frac{1}{2}M(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

Zugleich ist ersichtlich, daſs die absolute lebendige Kraft des Systems im allgemeinen gröſser (nie kleiner) ist als die relative in Bezug auf den Schwerpunkt.

8. Aus § 22, (5) erhält man durch geeignete Multiplikation und Zusammenfügung

---

*) Die Pendelbewegung führte Huyghens zuerst auf die Erkenntnis des Prinzips im speziellen Falle.

$$(15)\qquad \sum m_\alpha\left(y_\alpha\frac{d^2z_\alpha}{dt^2}-z_\alpha\frac{d^2y_\alpha}{dt^2}\right)=\sum(y_\alpha Z_\alpha-z_\alpha Y_\alpha)$$
$$+\lambda_1\sum\left(y_\alpha\frac{\partial f_1}{\partial z_\alpha}-z_\alpha\frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha}\right)+\cdots+\lambda_k\sum\left(y_\alpha\frac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}-z_\alpha\frac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}\right).$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich unter der Voraussetzung, daſs erstens eine Kräftefunktion U für sämtliche Kräfte des Systems vorhanden ist und daſs zweitens sowohl diese wie sämtliche Bedingungsgleichungen ungeändert bleiben*), wenn das System eine beliebige Drehung um die x-Achse ausführt.

Setzen wir nämlich

$$y=r\cos\vartheta,\quad z=r\sin\vartheta,$$

so ist ersichtlich, daſs eine Funktion

$$\varphi(y,z)=\varphi(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)$$

dann und nur dann bei einer Drehung um die x-Achse, d. h. bei einer beliebigen Änderung von ϑ, ungeändert bleibt, wenn ϑ ganz aus der Funktion herausfällt, dieselbe also y und z nur in der Verbindung $r=\sqrt{y^2+z^2}$ enthält. Ist aber φ eine Funktion von y^2+z^2, so folgt, wenn φ' den nach y^2+z^2 genommenen Differentialquotienten bedeutet,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y\varphi',\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2z\varphi',$$

somit

$$(16)\qquad y\frac{\partial\varphi}{\partial z}-z\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Führt man daher die angegebene Beschränkung in (15) ein und beachtet, daſs das erste Glied der rechten Seite in

$$\sum\left(y_\alpha\frac{\partial U}{\partial z_\alpha}-z_\alpha\frac{\partial U}{\partial y_\alpha}\right)$$

übergeht, so wird die Gleichung mit Rücksicht auf (16) zu

$$(17)\qquad \sum m_\alpha\left(y_\alpha\frac{d^2z_\alpha}{dt^2}-z_\alpha\frac{d^2y_\alpha}{dt^2}\right)=0.$$

Die Integration von (17) liefert

$$(18)\qquad \sum m_\alpha\left(y_\alpha\frac{dz_\alpha}{dt}-z_\alpha\frac{dy_\alpha}{dt}\right)=c_1.$$

Läſst auch eine Drehung um die y-, resp. z-Achse die Kräftefunktion und die Bedingungsgleichungen ungeändert, so erhalten wir die analogen Gleichungen

$$(19)\qquad \sum m_\alpha\left(z_\alpha\frac{dx_\alpha}{dt}-x_\alpha\frac{dz_\alpha}{dt}\right)=c_2,$$

*) D. h. nach einer solchen Drehung sollen sich Kräftekomponenten und Bedingungsgleichungen noch durch dieselben analytischen Ausdrücke darstellen wie vorher.

$$\sum m_\alpha \left(x_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} - y_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} \right) = c_3. \tag{20}$$

Diese drei Gleichungen enthalten das Prinzip der Erhaltung der Flächen oder die Flächensätze*). Eine nähere Erörterung ist nach den eingehenden früheren Untersuchungen nicht nötig.

Die Flächensätze treten alle drei in Geltung bei einem freien System mit einer Kräftefunktion, in welchem die Elemente nur gegenseitigen Einwirkungen unterliegen; auch Verbindungen derselben untereinander stören nicht. Ist ein festes Zentrum vorhanden, so gelten die Flächensätze, falls dieses zum Nullpunkte des Koordinatensystems genommen wird. Sind zwei oder mehrere feste Zentren vorhanden, welche in einer Geraden liegen, so gilt ein Flächensatz für die zu der Geraden senkrechten Ebene. Bei anderen Gruppierungen fester Zentren sind keine Flächensätze möglich. Auch bei der Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche ist ein Flächensatz vorhanden, nämlich für die Ebene, welche auf der Rotationsachse senkrecht steht (vgl. § 19, (4)) u. s. w.

Bemerkt möge noch werden, dafs auch ohne Vorhandensein einer Kräftefunktion Flächensätze möglich sind, wenn nur

$$\sum (y_\alpha Z_\alpha - z_\alpha Y_\alpha) \quad \text{u. s. w.}$$

identisch verschwinden**).

9. Falls die drei Flächensätze gelten, lassen sich die Betrachtungen von § 10, 6, 7, 8 wiederholen, zum Teil natürlich nur, wenn auch (7) gilt; insbesondere läfst sich auch die unveränderliche Ebene aufstellen. Es erscheint unnötig, die ganze Entwicklung nochmals vorzutragen.

10. Die Flächensätze geben, wo sie gültig sind, über den Verlauf der Bewegung nicht minder interessanten Aufschlufs, wie der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft; sie liefern nur Resultate, welche von der Wirkungsweise der speziellen auftretenden Kräfte ganz unabhängig sind. Wird in einem Momente von den Radienvektoren, welche vom Nullpunkte ausgehen, eine bestimmte Flächensumme (d. h. eine Summe von Flächen, welche mit Massen multipliziert sind) beschrieben, so bleibt dieselbe konstant, was eine Garantie für die ewige Fortdauer der Bewegung bietet. Nur wenn einzelne Elemente sich ins Unendliche

*) Das Flächenprinzip wurde im speziellen Falle bei der Planetenbewegung durch Newton als eine Folge des Gravitationsgesetzes nachgewiesen, nachdem es durch Kepler aus Beobachtungen abgeleitet worden war. Seine allgemeinere Geltung wurde von Euler, Dan. Bernoulli und d'Arcy erkannt.

**) Die Bedingungen, wann Flächensätze und der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes in Kraft treten, wurden näher untersucht von Weyr, Bemerkungen in betreff zweier Sätze der Dynamik, Prager Berichte, 1878, pag. 133. Siehe ferner Lévy, Sur une extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité, Compt. rend., B. 95, pag. 772.

entfernen, können sie in endlicher Zeit eine unendlich kleine Strecke zurücklegen, kann ihre Geschwindigkeit sich der Null nähern.

11. Die drei in diesem Paragraphen entwickelten Prinzipien liefern, wenn sämtlich gültig, sieben Integrale der Bewegungsgleichungen. Hiervon sind die drei durch den Schwerpunktssatz gelieferten vollständig integrierte Gleichungen, während die vier übrigen noch Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen. Es sind also im ganzen zehn einfache Integrationen geleistet.

12. Zum Schlusse möge noch aus der Gleichung (12) eine merkwürdige Folgerung für den Fall des Gleichgewichtes gezogen werden. Wenn eine Kräftefunktion vorhanden ist, die wir jetzt als von der Zeit unabhängig annehmen, ist nach § 21, (14) die Bedingung des Gleichgewichtes durch

$$\delta U = 0$$

dargestellt. Bei ihrem Stattfinden kann U ein Maximum sein; in diesem Falle hat das Gleichgewicht, gegenüber den andern Fällen, eine besondere Eigentümlichkeit, welche zuerst wohl von Lagrange, Mécanique analytique, 1788, pag. 38, dann von Dirichlet (Crelle, B. 32, pag. 85) hervorgehoben wurde. Nehmen wir nämlich an, dafs gleichzeitig sämtliche Geschwindigkeiten für diese Lage verschwindend klein seien, so folgt aus (12), dafs $U + c$ verschwindend klein ist. Da nun

$$\frac{1}{2} \sum m_\alpha v_\alpha^2$$

immer positiv ist, U aber in der Nachbarschaft des Maximums nur kleinere Werte annehmen kann, so folgt, dafs U in dieser ganzen Nachbarschaft im Laufe der Bewegung sich nur unendlich wenig von seinem Maximalwerte entfernt; andernfalls würde die linke Seite von (12) negativ werden. Nun mufs aber U, da es keine Konstante ist, bei endlichen Ortsänderungen auch endliche Änderungen erleiden. Hieraus folgt, dafs im Falle jenes Maximums die vorhandenen unendlich kleinen Geschwindigkeiten den Punkt nur unendlich wenig von seiner Anfangslage zu entfernen vermögen; er wird also, wenn er sich überhaupt bewegt, eine Art Oszillation um diese Lage ausführen. Man nennt ein solches Gleichgewicht, bei welchem die Erteilung einer unendlich kleinen Geschwindigkeit auch in endloser Zeit keine endliche Ortsveränderung veranlafst, ein stabiles.

§ 25.

Weitere Prinzipien der Mechanik.

1. Das d'Alembert'sche Prinzip läfst unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen Umformungen zu, die gleichfalls als Prinzipien der Mechanik bezeichnet werden; es gehören hierher das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung, das von Maupertuis aufgestellte Prinzip der kleinsten Wirkung*) und das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges. Das erstgenannte werden wir in der Folge zum Ausgangspunkte weiterer Untersuchungen nehmen, während wir das zweite mehr seines historischen Interesses wegen herleiten.

2. Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung**), kurzweg oft nur das Hamilton'sche Prinzip genannt, gilt unter der Voraussetzung, dafs eine Kräftefunktion U existiert, die jedoch von der Zeit nicht unabhängig zu sein braucht; es wird daher nicht vorausgesetzt, dafs das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft in Gültigkeit tritt. Bezeichnen wir mit

$$T = \frac{1}{2} \sum m_a v_a^2 \tag{1}$$

die lebendige Kraft, so lautet das Prinzip:

Sind die Koordinaten der einzelnen Elemente des Systems für die Zeitpunkte t_0 und t_1 fest gegeben, so sind die Bewegungsgleichungen in dem Ausdrucke

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0 \tag{2}$$

enthalten.

Hierbei bezieht sich die Variation auf die Koordinaten der Elemente, nicht auf die Zeit t; es wird also das Integral, genommen für die wirklich durchlaufenen Wege zwischen den festen Endpositionen, verglichen mit den Werten, die es für unendlich benachbarte Wege annimmt***). Obgleich (2) die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums oder Maximums des Integrals darstellt, so folgt aus der Erfüllung von (2) doch nicht das Vorhandensein eines solchen.

3. Um die Richtigkeit des Hamilton'schen Prinzips nachzuweisen, führen wir die angedeutete Variation wirklich aus; es ist

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta (T + U) dt ,$$

da die Integrationsgrenzen als unveränderlich zu betrachten sind. Nun ist, wenn $\frac{dx_a}{dt} = x_a'$ u. s. w. gesetzt wird,

---

*) Es ist dies eine nicht recht zutreffende Übersetzung des französischen „principe de la moindre action"; richtiger würde es das Prinzip der kleinsten Bewegungsgröfse genannt.

**) Hamilton, On a general method of dynamics etc.; Phil. Trans. von 1834 und 1835.

***) Zur Bestimmung der Bewegung eines Punktes ist aufser den drei Differentialgleichungen noch die Angabe von sechs Konstanten nötig. Man kann über diese so disponieren, dafs man den Ort des Punktes für zwei Zeitpunkte angiebt.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum m_\alpha (x'_\alpha \delta x'_\alpha + y'_\alpha \delta y'_\alpha + z'_\alpha \delta z'_\alpha) dt .$$

Wir haben aber

$$(3) \qquad \delta x' = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d(x + \delta x)}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}$$

und bei Benutzung dieser bekannten Relation

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum m_\alpha \left(x'_\alpha \frac{d\delta x_\alpha}{dt} + y'_\alpha \frac{d\delta y_\alpha}{dt} + z'_\alpha \frac{d\delta z_\alpha}{dt} \right) dt .$$

Auf das rechtsstehende Integral kann das Verfahren der partiellen Integration angewandt werden; es liefert

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \Big[\sum m_\alpha (x'_\alpha \delta x_\alpha + y'_\alpha \delta y_\alpha + z'_\alpha \delta z_\alpha) \Big]_{t_0}^{t_1}$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \sum m_\alpha (x''_\alpha \delta x_\alpha + y''_\alpha \delta y_\alpha + z''_\alpha \delta z_\alpha) dt .$$

Da die Endlagen sämtlicher Systemspunkte als fest vorausgesetzt werden, so müssen die Gröfsen δx_α, δy_α, δz_α für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden; somit erhalten wir den einfacheren Ausdruck:

$$(4) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum m_\alpha (x''_\alpha \delta x_\alpha + y''_\alpha \delta y_\alpha + z''_\alpha \delta z_\alpha) dt .$$

Aufserdem haben wir

$$(5) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \delta z_\alpha \right) dt .$$

Hiernach geht (2) über in

$$(6) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\left(m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \right) \delta x_\alpha + \left(m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} \right) \delta y_\alpha \right.$$
$$\left. + \left(m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \right) \delta z_\alpha \right] dt = 0 .$$

Soll (6) für alle zulässigen δx_α, δy_α, δz_α identisch befriedigt sein, so mufs der Ausdruck unter dem Integralzeichen verschwinden. Dies giebt aber nichts Anderes als die Gleichung des d'Alembert'schen Prinzips, mit dem sich beim Vorhandensein einer Kräftefunktion das Hamilton'sche Prinzip als äquivalent erweist, da man auch ebenso aus dem d'Alembert'schen Prinzip die Gleichung (6) folgern kann, worauf nur noch identische Transformationen vorzunehmen sind.

4. Obgleich das Hamilton'sche Prinzip ein beschränkteres Gültigkeitsgebiet besitzt wie das d'Alembert'sche, so erweist es sich doch in vielen Fällen als nützlich. Sein Vorzug besteht darin, daſs in den Funktionen T und U, die bei Änderung der Koordinaten ungeändert bleiben, viel leichter andere Koordinaten, z. B. Polarkoordinaten u. s. w., eingeführt werden können, als in den Ausdrücken $\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}$, X_α u. s. w., die im d'Alembert'schen Prinzip auftreten. Hat diese Transformation stattgefunden, so braucht man nur analog wie soeben die Variation auszuführen, das Integralzeichen wegzuwerfen u. s. w., um die fertigen Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten zu erhalten.

5. Ähnlich dem Hamilton'schen Prinzipe, doch nicht von dessen Wichtigkeit, ist das weit früher aufgestellte Prinzip der kleinsten Wirkung*). Dasselbe hat nicht nur die Existenz der Kräftefunktion U, sondern auch die Gültigkeit des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kraft zur Voraussetzung; es verlangt also, daſs die Zeit t in U nicht explizite vorkommt. In diesem Falle liefert der Ausdruck**)

$$\delta\int\sum m_\alpha v_\alpha ds_\alpha = 0 \tag{7}$$

die Bewegungsgleichungen, wenn vorher die Zeit aus ihm mittels des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft eliminiert worden ist. Das Integral soll sich von einer festen Anfangslage der Punkte des Systems bis zu einer festen Endlage erstrecken.

Der Satz von der lebendigen Kraft liefert aber

$$\frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = U + c$$

oder

$$\frac{1}{dt^2}\sum m_\alpha ds_\alpha^2 = 2(U + c),$$

woraus

$$dt = \frac{\sqrt{\Sigma m_\alpha ds_\alpha^2}}{\sqrt{2(U+c)}} \tag{8}$$

folgt. Setzt man in (7) $\frac{ds_\alpha}{dt}$ statt v_α und eliminiert dt mittels (8), so erhält man die endgültige Form des Prinzips:

*) Das Hamilton'sche Prinzip, welches nicht selten mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung gleich bezeichnet wird, ist als eine Erweiterung desselben zu betrachten.

**) Man kann nach Belieben mit Maupertuis das Integral als eine Summation über die Bewegungsgröſsen, d. h. die Produkte von Masse, Geschwindigkeit und Weg, für den angegebenen Verlauf betrachten, oder mit Euler, der ungefähr gleichzeitig wenigstens im speziellen Falle auf das Prinzip kam, als Summation über die doppelte lebendige Kraft während desselben. Es ist nämlich

$$m_\alpha v_\alpha ds_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2 dt\,.$$

$$(9) \qquad \delta\int\sqrt{2(U+c)}\sqrt{\sum m_\alpha ds_\alpha^2}=0\,.$$

Damit diese Gleichung einen bestimmten Sinn annimmt, müssen wir voraussetzen, dafs nach vollständiger Integration der Bewegungsgleichungen die Zeit eliminiert und hierauf sämtliche Gröfsen x_α, y_α, z_α durch eine derselben, z. B. x_1 ausgedrückt wurden. Dann geht (9) über in

$$\delta\int\sqrt{2(U+c)}\sqrt{\sum m_\alpha\left[\left(\frac{dx_\alpha}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dy_\alpha}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_\alpha}{dx_1}\right)^2\right]}\,dx_1=0$$

oder, wenn jetzt

$$x_\alpha'=\frac{dx_\alpha}{dx_1} \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird,

$$(10) \qquad \delta\int\sqrt{2(U+c)}\sqrt{\sum m_\alpha(x_\alpha'^2+y_\alpha'^2+z_\alpha'^2)}\,dx_1=0\,.$$

6. Von dieser letzten Form gehen wir aus, um die Äquivalenz der Gleichung mit der d'Alembert'schen darzuthun. Setzen wir vorläufig

$$\sqrt{2(U+c)}\sqrt{\sum m_\alpha(x_\alpha'^2+y_\alpha'^2+z_\alpha'^2)}=P\,,$$

so haben wir die Gleichung

$$\delta\int P dx_1=0$$

weiter auszuführen. Da U von x_α, y_α, z_α explizite abhängt, aufserdem aber in P noch x_α', y_α', z_α' vorkommen und die Grenzen unveränderlich sind, so haben wir

$$\int\sum\left[\frac{\partial P}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha+\frac{\partial P}{\partial y_\alpha}\delta y_\alpha+\frac{\partial P}{\partial z_\alpha}\delta z_\alpha+\frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}\delta x_\alpha'+\frac{\partial P}{\partial y_\alpha'}\delta y_\alpha'\right.$$
$$\left.+\frac{\partial P}{\partial z_\alpha'}\delta z_\alpha'\right]dx_1=0$$

zu setzen. Nun ist aber z. B.

$$\int\frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}\delta x_\alpha' dx_1=\int\frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}\frac{d\delta x_\alpha}{dx_1}dx_1=\left[\frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}\delta x_\alpha\right]-\int\frac{d\frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}}{dx_1}\delta x_\alpha dx_1$$
$$=-\int\frac{d\frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}}{dx_1}\delta x_\alpha dx_1\,;$$

daher geht (10) über in

$$(11) \qquad \int\sum\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_\alpha}-\frac{d\frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}}{dx_1}\right)\delta x_\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial y_\alpha}-\frac{d\frac{\partial P}{\partial y_\alpha'}}{dx_1}\right)\delta y_\alpha\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z_\alpha}-\frac{d\frac{\partial P}{\partial z_\alpha'}}{dx_1}\right)\delta z_\alpha\right]dx_1=0\,.$$

Auch hier können wir das Integralzeichen weglassen und haben nur noch die einzelnen Glieder vollständig zu entwickeln. Es ist z. B.:

$$\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial x'_\alpha}}{dx_1} = \frac{\sqrt{\Sigma m_\alpha (x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha)}}{\sqrt{2(U+c)}} \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}$$
$$- \frac{d}{dx_1}\left[\frac{m_\alpha \sqrt{2(U+c)}}{\sqrt{\Sigma m_\alpha (x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha)}} x'_\alpha\right]$$

oder, wenn wir wieder die Zeit durch (8) einführen, d. h.

$$dx_1 = \frac{\sqrt{2(U+c)}}{\sqrt{\Sigma m_\alpha (x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha)}} dt$$

setzen*):

$$(12) \quad \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial x'_\alpha}}{dx_1} = \frac{\sqrt{\Sigma m_\alpha (x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha)}}{\sqrt{2(U+c)}} \left[\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}\right].$$

Dafs aber die Einsetzung von (12) und den analogen Gröfsen in (11) nach Weglassung des Integralzeichens zu der d'Alembert'schen Gleichung führt, ist unmittelbar ersichtlich.

7. Die Gleichung (7) hat in den meisten Fällen zur Folge, dafs

$$\int \sum m_\alpha v_\alpha ds_\alpha = \int \sum m_\alpha v_\alpha^2 dt$$

ein Minimum wird, dafs also diese Gröfse für die wirklich eingeschlagenen Wege kleiner wird als für die benachbarten; doch trifft dies nicht immer zu. Der geringeren Wichtigkeit des Prinzips wegen gehen wir nicht ausführlicher auf den Gegenstand ein. Derselbe ist sehr gründlich behandelt in Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, pag. 43 ff.

8. Dem Prinzipe der kleinsten Wirkung liegt der Gedanke zu Grunde, die Bewegungsgleichungen auf eine Minimumsbetrachtung zurückzuführen; freilich ist der Erfolg ein geringer, schon deshalb, weil der unter das Integralzeichen tretende Ausdruck nach der nötigen Transformation keine einfache Bedeutung mehr hat. Es ist Maupertuis nicht gelungen, die aus teleologischen Betrachtungen entsprungene Ansicht, dafs die Natur ihre Zwecke stets durch die einfachsten Mittel erreiche, zu einem Prinzipe der Mechanik auszubilden.

Interessanter und erfolgreicher ist der Gedankengang, welchem Gauss**) in seinem Prinzipe des kleinsten Zwanges Ausdruck verlieh. Dasselbe hat den noch näher zu präzisierenden Inhalt, dafs die Wege, welche die materiellen Punkte eines Systems, das Bedingungsgleichungen unter-

*) Der Klammerinhalt geht zunächst in $m_\alpha \dfrac{dx_1}{dt}\dfrac{dx_\alpha}{dx_1} = m_\alpha \dfrac{dx_\alpha}{dt}$ über, worauf das Weitere einfach ist.

**) Gesammelte Werke, B. V, pag. 23: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, oder Crelle, B. IV, 1829.

worfen ist, wirklich einschlagen, denjenigen, welche sie ohne Vorhandensein von Bedingungsgleichungen wählen würden, so nahe kommen, als dies bei den gegebenen Bedingungen möglich ist.

Bezeichnen $A_1, A_2, \ldots$ die Orte der materiellen Punkte des Systems zu Anfang des unendlich kleinen Zeitelementes dt, $B_1, B_2, \ldots$ die Orte, welche die Punkte zu Ende von dt erreicht haben würden, falls keine Bedingungsgleichungen vorhanden wären, Kräfte und vorhandene Geschwindigkeiten*) aber ungeändert blieben, endlich $C_1, C_2, \ldots$ die Orte, welche die materiellen Punkte thatsächlich nach dt unter Einfluſs der Bedingungen erreichen, so geben die unendlich kleinen Strecken $B_\alpha C_\alpha$ der Richtung und, falls sie mit m_α multipliziert werden, dem Gröſsenverhältnisse nach die Zusatzkräfte an, welche den X_α, Y_α, Z_α zugefügt werden müssen, um die Wirkung der Bedingungen zu berücksichtigen. Nach § 22, (7) ist aber auf diese Zusatzkräfte das Prinzip der virtuellen Verrückungen anwendbar. Ist daher $C_\alpha D_\alpha$ eine solche mit den Bedingungen verträgliche Verrückung, $\sphericalangle \vartheta_\alpha = B_\alpha C_\alpha D_\alpha$, so muſs nach § 22, (7), wenn dieses in die Form von § 21, (8) gesetzt wird,

$$\sum m_\alpha \,.\, B_\alpha C_\alpha \,.\, C_\alpha D_\alpha \,.\, \cos \vartheta_\alpha = 0 \tag{13}$$

sein. Andrerseits ist aber

$$2 \,.\, B_\alpha C_\alpha \,.\, C_\alpha D_\alpha \,.\, \cos \vartheta_\alpha = -(B_\alpha D_\alpha)^2 + (B_\alpha C_\alpha)^2 + (C_\alpha D_\alpha)^2 \tag{14}$$

und, wenn dies in (13) eingeführt wird,

$$\sum m_\alpha \left[(B_\alpha D_\alpha)^2 - (B_\alpha C_\alpha)^2 - (C_\alpha D_\alpha)^2\right] = 0, \tag{15}$$

woraus

$$\sum m_\alpha (B_\alpha D_\alpha)^2 > \sum m_\alpha (B_\alpha C_\alpha)^2 \tag{16}$$

folgt.

Dasselbe Resultat ist auch herzuleiten, wenn nur das Fourier'sche Prinzip gilt.

Nun ist $B_\alpha C_\alpha$ die wirkliche Ablenkung, welche m_α durch die Bedingungen erfährt, von dem Orte, welche es ohne Bedingungen erreicht hätte, $B_\alpha D_\alpha$ dagegen eine beliebige andere, den Bedingungsgleichungen nach mögliche Ablenkung von demselben Orte. Für die wirklichen Ablenkungen ist also

$$\sum m_\alpha (B_\alpha C_\alpha)^2 \tag{17}$$

ein Minimum gegenüber der gleichen Funktion der übrigen möglichen Ablenkungen.

Hiernach lautet das Prinzip des kleinsten Zwanges:

Bewegt sich ein System von materiellen Punkten unter dem Einfluſs von Bedingungsgleichungen während einer un-

*) Diese Anfangsgeschwindigkeiten müssen also mit den Bedingungsgleichungen in Einklang sein.

endlich kurzen Zeit, so ist die Summe der mit der jeweiligen Masse multiplizierten Quadrate der Ablenkungen von denjenigen Orten, welche die Punkte bei freier Bewegung erreicht hätten, für die wirkliche Bewegung ein Minimum gegenüber allen andern Bewegungen, welche sich ebenfalls mit den Bedingungsgleichungen vertragen.

9. Der Ausdruck $\Sigma m_\alpha (B_\alpha C_\alpha)^2$ läfst sich auch leicht analytisch darstellen*). Die wirkliche Verschiebung, welche m_α vom Punkte $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ aus nach der x-Achse in der Zeit dt erleidet, ist bis auf unendlich kleine Gröfsen zweiter Ordnung nach dem Taylor'schen Satze durch

$$\frac{dx_\alpha}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}dt^2$$

dargestellt. Die Verschiebung, welche m_α in der gleichen Richtung ohne Vorhandensein der Bedingungsgleichungen bei derselben Anfangsgeschwindigkeit erleiden würde, ist

$$\frac{dx_\alpha}{dt}dt + \frac{1}{2m_\alpha}X_\alpha dt^2;$$

X_α kann nämlich während dt als konstant angesehen werden. Die Differenz beider Verschiebungen ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x_\alpha}{dt^2} - \frac{X_\alpha}{m_\alpha}\right)dt^2,$$

und wir haben daher

$$(B_\alpha C_\alpha)^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{d^2x_\alpha}{dt^2} - \frac{X_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^2y_\alpha}{dt^2} - \frac{Y_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^2z_\alpha}{dt^2} - \frac{Z_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\right]dt^2.$$

Das Prinzip des kleinsten Zwanges sagt daher aus, dafs

$$(18) \qquad \sum m_\alpha\left[\left(\frac{d^2x_\alpha}{dt^2} - \frac{X_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^2y_\alpha}{dt^2} - \frac{Y_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^2z_\alpha}{dt^2} - \frac{Z_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\right]$$

für die wirkliche Bewegung ein Minimum ist gegenüber jeder möglichen Bewegung.

§ 26.

Untersuchungen über Systeme totaler Differentialgleichungen; der letzte Multiplikator**).

1. Die allgemeineren Untersuchungen über die Differentialgleichungen der Bewegung, denen wir uns nunmehr zuzuwenden haben, setzen die Be-

---

*) Lipschitz, Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges, Borch. Journ., B. 82, p. 316.

**) Bei diesen und dem gröfsten Teile der weiteren Untersuchungen dieses Abschnittes folgen wir den Vorlesungen über Dynamik von Jacobi, herkanntschaft mit der Theorie der Differentialgleichungen überhaupt voraus und zwar in weiterem Umfange, als sie in elementaren Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung gegeben zu werden pflegt; es mag daher das Wichtigste aus dieser Theorie hier seinen Platz finden.

Sind die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sämtlich Funktionen einer einzigen Variabeln x, so kann man nur totale Differentialquotienten von ihnen nach der Variabeln x bilden; eine Gleichung zwischen diesen totalen Differentialquotienten heifst eine totale Differentialgleichung. Dabei ist zu bemerken, dafs Ausdrücke wie $\frac{dx_2}{dx}$, $\frac{d^2x_2}{dx_1^2}$ u. s. w., die man erhält, wenn man x_1 als die unabhängige, $x, x_2, \ldots x_n$ als die abhängigen Variabeln betrachtet, mit Leichtigkeit nach elementaren Methoden auf die Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{d^2x_1}{dx^2}, \quad \ldots \quad \frac{dx_2}{dx} \quad \text{u. s. w.}$$

zurückgeführt werden können. So ist z. B.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx} : \frac{dx_1}{dx},$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{d\frac{dx_2}{dx}}{dx_1} = \frac{d\left[\frac{dx_2}{dx} : \frac{dx_1}{dx}\right]}{dx} \frac{dx}{dx_1} \quad \text{u. s. w.}$$

Da n Gleichungen nötig sind, um $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Funktionen von x zu bestimmen, so mufs ein vollständiges System von totalen Differentialgleichungen mit $(n+1)$ Variabeln aus n Gleichungen bestehen.

Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Funktionen mehrerer Variabeln $x, y, z, \ldots$ gegeben, so können nur partielle Differentialquotienten nach letzteren gebildet werden; eine Gleichung zwischen solchen heifst eine partielle Differentialgleichung. Sind n abhängige, k unabhängige Variabeln vorhanden, so ist ein System von n partiellen Differentialgleichungen als vollständig zu bezeichnen.

Man nennt eine Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung, wenn der höchste vorkommende Differentialquotient von dieser Ordnung ist.

2. Um einen Einblick in die Natur der Differentialgleichungen, zunächst der totalen, zu gewinnen, gehen wir am besten von den Funktionalbeziehungen zwischen den Variabeln selbst, den sog. Integralgleichungen aus. Dabei richten wir von vornherein unser Augenmerk auf die Konstanten, d. h. willkürliche Gröfsen, welche aufser den untersuchten Variabeln in den Integralgleichungen vorkommen können, bei Bildung der Differentialgleichungen aber herausfallen.

---

ausgegeben von Clebsch, revidiert von Lottner. Von den Originalabhandlungen Jacobi's kommen hier in Betracht: De determinantibus functionalibus, Ges. W. B. 3; Sur un nouveau principe de la mécanique analytique (Letzter Multiplikator), und andere Abhandlungen im 4. B. der Ges. W.

Besteht zwischen zwei Variabeln x, x_1 und einer Konstanten c eine Funktionalbeziehung, so können wir uns mittels derselben c ausgerechnet denken; es sei

$$f(x_1, x) = c. \tag{1}$$

Dann folgt durch Differentiation:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{dx_1}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \tag{2}$$

eine totale Differentialgleichung erster Ordnung in $\frac{dx_1}{dx}$.

Um allen Mifsverständnissen vorzubeugen, sei bemerkt, dafs $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x}$ ganz bestimmte, ausgerechnete Funktionen von x_1 und x sind. Haben wir z. B.

$$x_1^2 + x_1 x + x^2 = c,$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = x_1 + 2x,$$

also

$$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{x_1 + 2x}{2x_1 + x}.$$

Diese Entstehungsweise der totalen Differentialgleichung erster Ordnung ist eine vollkommen bestimmte; sie ist wesentlich bedingt durch die Stellung, welche der Konstanten zugewiesen wurde.

Will man nun umgekehrt eine vorgelegte Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{dx} = \varphi(x_1, x) \tag{3}$$

integrieren*), d. h. auf eine Gleichung (1) zurückführen, so mufs man

$$\varphi(x_1, x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$$

setzen. Hier tritt nun die eigentlich fundamentale Schwierigkeit der ganzen Theorie der Differentialgleichungen ein. Die Ausdrücke $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ können einen gemeinsamen Faktor besitzen, welcher herausgehoben wird, oder es können auch beide mit einem gleichen Faktor multipliziert werden, ohne dafs die Differentialgleichung eine Änderung erfährt. Stellen wir $\varphi(x_1, x)$ irgendwie als Quotienten zweier Gröfsen dar, z. B.

---

*) Die Untersuchung, ob (3) immer eine Integralgleichung besitzt, mag hier übergangen werden, da sie für uns nicht weiter in Betracht kommt.

$$\varphi(x_1, x) = -\frac{\varphi_1(x_1, x)}{\varphi_2(x_1, x)},$$

so können wir nur sagen, dafs

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= M\varphi_1(x_1, x), \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= M\varphi_2(x_1, x) \end{aligned}$$

zu setzen ist, wo der sog. Multiplikator oder integrierende Faktor M eine Funktion von x_1 und x bezeichnet. Ist dieser Multiplikator gefunden, so ist:

$$f = \int M\varphi_1(x_1, x)\,dx = \int M\varphi_2(x_1, x)\,dx_1,$$

worin während der Integration x_1, resp. x wie Konstanten zu behandeln sind. Das eine Mal kann die zuzufügende Integrationskonstante noch eine Funktion von x_1, das andere Mal von x sein; erst die Zusammenstellung beider Resultate beseitigt die vorhandene Unbestimmtheit. Von der Auffindung des Multiplikators, für die es keine allgemeine Regel giebt, hängt also die Integration der Gleichung (3) ab.

Differentiiert man die erste der Gleichungen (4) nach x_1, die zweite nach x und setzt die rechten Seiten einander gleich, so erhält man für den Multiplikator die partielle Differentialgleichung

$$(5) \qquad \frac{\partial(M\varphi_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial(M\varphi_2)}{\partial x}.$$

Auch ist umgekehrt ersichtlich, dafs jede Gröfse M, welche (5) genügt, als integrierender Faktor benutzt werden kann; denn (5) sagt eben nur aus, dafs $M\varphi_1$ und $M\varphi_2$ Differentialquotienten derselben Funktion nach x und x_1 sind, was zur Integration ausreicht.

Anm. Unsere Untersuchung nimmt nur Rücksicht auf das allgemeine, nicht das singuläre Integral, da letzteres aus dem allgemeinen immer leicht abgeleitet werden kann. Dasselbe gilt für die weiteren Betrachtungen.

3. Sind n Integralgleichungen zwischen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und n Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ vorgelegt, so können wir sie zunächst durch Auflösung nach den c auf die folgende Normalform bringen:

$$(6) \qquad \begin{cases} f_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1, \\ f_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = c_2, \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ f_n(x, x_1, x_2, \cdots x_n) = c_n. \end{cases}$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt

$$
(7) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dx} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dx} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 0\,, \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dx} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx} + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dx} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0\,, \\
\vdots \\
\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dx} + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx} + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dx} + \dfrac{\partial f_n}{\partial x} = 0\,.
\end{cases}
$$

Man kann dieses Gleichungssystem nach den Unbekannten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \quad \cdots \quad \frac{dx_n}{dx}$$

auflösen und findet nach bekannten Regeln

$$(8) \qquad \frac{dx_\alpha}{dx} = \frac{\varDelta_\alpha}{\varDelta},$$

worin

$$(9) \qquad \varDelta = \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\
 & \vdots & & \\
\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix}$$

ist, während $\varDelta_\alpha$ aus $\varDelta$ dadurch hervorgeht, dafs man die Elemente der α^{ten} Vertikalreihe

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}, \quad \cdots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_\alpha}$$

resp. durch

$$-\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \cdots \quad -\frac{\partial f_n}{\partial x}$$

ersetzt. $\varDelta$ heifst die Funktionaldeterminante der Funktionen f_1, $f_2, \ldots f_n$, falls man dieselben lediglich als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ betrachtet.

Sind die Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ nicht voneinander unabhängig, so dafs z. B.

$$F(f_1, f_2, \ldots f_n) = 0$$

ist, so genügen die Gleichungen (6) nicht, um die Gröfsen

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

als Funktionen von x zu bestimmen; denn irgend eine dieser Gleichungen wäre nur eine Folge der übrigen. Daher sind auch

$$\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \dots \frac{dx_n}{dx}$$

nicht als Funktionen von x bestimmt. Es mufs demnach (8) eine unbestimmte Form annehmen, d. h. es mufs

$$(10) \qquad \Delta = 0$$

sein*).

Sind also die Funktionen $f_1, f_2, \dots f_n$ voneinander nicht unabhängig, so verschwindet die Funktionaldeterminante. Die Umkehrung dieses Satzes soll später bewiesen werden.

Die Gesamtheit der Gleichungen (8) können wir in die Form

$$(11) \qquad dx : dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n = \Delta : \Delta_1 : \Delta_2 : \dots : \Delta_n$$

setzen.

4. Sind umgekehrt n totale Differentialgleichungen erster Ordnung vorgelegt, so wird man annehmen müssen — was hier nicht weiter begründet werden soll — dafs ihnen n Integralgleichungen von der Form (6) entsprechen, die n willkürliche und nicht auf eine geringere Zahl reduzierbare Konstanten enthalten. Man kann sich aus den Differentialgleichungen durch Elimination die Gröfsen

$$\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \dots \frac{dx_n}{dx}$$

als Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ ausgerechnet denken; es sei

$$(12) \qquad \frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \quad \dots \quad \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X}.$$

Der gemeinsame Nenner X ist nur der Symmetrie wegen beigefügt; man kann ihm bei der Willkürlichkeit der X_α einen beliebigen Wert beilegen. Die Gleichungen (12) können wir in die Form

$$(13) \qquad dx : dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \dots : X_n$$

setzen. Soll dieser Ausdruck mit (11) identisch werden, so mufs

$$(14) \qquad \Delta = MX, \quad \Delta_1 = MX_1, \quad \dots \quad \Delta_n = MX_n$$

sein. Die Gröfsen $X, X_1, \dots X_n$ stimmen also mit den $\Delta, \Delta_1, \dots \Delta_n$ bis auf einen Faktor M überein, welcher der Gröfse M in 2. vollkommen entspricht. Doch sind wir nicht berechtigt zu schliefsen, dafs die Kenntnis dieses Faktors auch die Integration der Gleichungen (13) liefert; denn aus (11) lassen sich die Gleichungen (6) nicht durch ein einfaches, allgemeines Verfahren herleiten. Wir werden erst weiter unten sehen, welchen Nutzen die Kenntnis von M, des Multiplikators des Systems (13), gewährt.

---

*) Im Allgemeinen wird auch $\Delta_\alpha = 0$ sein, so dafs (8) zu $\frac{0}{0}$ wird.

5. Ehe wir die Theorie der Systeme von totalen Differentialgleichungen erster Ordnung weiter verfolgen, wollen wir uns davon überzeugen, daſs durch dieselbe zugleich die Theorie beliebiger Systeme von irgend welcher Ordnung geliefert wird.

Haben wir eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{15}$$

so können wir setzen:

$$x_1 = \frac{dy}{dx}, \quad x_2 = \frac{dx_1}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad x_3 = \frac{dx_2}{dx}, \quad \dots x_{n-1} = \frac{dx_{n-2}}{dx}. \tag{16}$$

Die Gleichung (15) geht dann über in

$$f\left(x, y, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, \frac{dx_{n-1}}{dx}\right) = 0 \tag{17}$$

und liefert mit (16) zusammen ein System von n totalen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Genau in gleicher Weise zeigt man, daſs ein System von totalen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung immer durch ein System von Differentialgleichungen *erster Ordnung* mit einer gröſseren Zahl von Variabeln ersetzt werden kann.

Andrerseits kann man aus einem beliebigen System totaler Differentialgleichungen durch Elimination Differentialgleichungen ableiten, welche auſser der unabhängigen nur noch eine einzige abhängige Variable enthalten. Um dies einzusehen, genügt es, aus zwei Differentialgleichungen $(m \geq n)$

$$f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0, \tag{18}$$

$$f_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{19}$$

in denen die (nicht bezeichneten) Koefficienten beliebige andere abhängige Variabeln und deren Differentialquotienten enthalten, die Variable y nebst ihren Differentialquotienten eliminieren zu können.

Um diese Operation auszuführen, leiten wir aus (19), falls $m > n$ ist, durch $(m - n)$fache totale Differentiation, die sich natürlich auch auf die Koeffizienten erstreckt, ebenfalls eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung her und eliminieren aus ihr und (18) $\frac{d^my}{dx^m}$. Falls $m = n$ ist, kann diese Elimination sofort ausgeführt werden. Wir erhalten so eine Differentialgleichung $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung; falls $m > n$ ist, haben wir zwei Differentialgleichungen (nämlich die neue und (19)) erlangt, welche höchstens von der $(m - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind. Ist aber $m = n$, so liefert die Wiederholung des gleichen Verfahrens mit der neuen Gleichung und

(18) oder (19) zwei solche Differentialgleichungen, welche höchstens bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ansteigen. Bei wiederholter Anwendung dieser Methode — welche analog ist einem bei Gleichungen höheren Grades angewandten Eliminationsverfahren — reduzieren wir die Ordnung immer mehr, bis wir endlich zwei Gleichungen gewinnen, welche nur noch y ohne Differentialquotienten enthalten und aus denen diese Variable eliminiert werden kann.

Es leuchtet ein, daſs man aus n Differentialgleichungen mit n abhängigen Variabeln durch geeignete Elimination schlieſslich eine mit einer abhänigen Variabeln ableiten kann.

Im Hinblick auf diese Resultate beschäftigen wir uns weiterhin nur mit Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

6. Nach dieser Digression kehren wir zu dem Systeme (13) zurück und suchen eine partielle Differentialgleichung aufzustellen, welcher der Multiplikator M genügen muſs. Zu diesem Zwecke beweisen wir die merkwürdige Relation

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial x} + \frac{\partial \varDelta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varDelta_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varDelta_n}{\partial x_n} = 0. \tag{20}$$

Beweis. Aus der Definition von $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\ldots \varDelta_n$ u. s. w. geht hervor, daſs $\frac{\partial \varDelta}{\partial x}$, $\frac{\partial \varDelta_1}{\partial x_1}$ u. s. w. nur erste und zweite partielle Differentialquotienten der f_α enthalten und zwar die letzteren nur linear, d. h. so, daſs in jedem einzelnen Gliede nur ein solcher als Faktor auftritt*). Da ferner $\varDelta$ keine Differentialquotienten nach x, $\varDelta_\alpha$ keine nach x_α enthält, so werden Differentialquotienten von der Form

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha^2}$$

überhaupt nicht vorkommen. Dabei mögen x und $\varDelta$ der Gleichmäſsigkeit wegen durch x_0 und $\varDelta_0$ ersetzt gedacht werden. Die Glieder von (20) haben somit alle die Form

$$F_{\alpha,\beta}^{(\gamma)} \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

wo α von β verschieden ist, und es handelt sich darum, den Wert von

$$F_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$$

zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke bedenken wir, daſs der Faktor

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \tag{21}$$

---

*) Man denke sich z. B. den Ausdruck (9) für $\varDelta$ in ein Aggregat von Produkten erster partieller Differentialquotienten aufgelöst und nun die Differentiation vorgenommen; jedes der entstehenden Glieder enthält nur einen zweiten Differentialquotienten als Faktor.

nur in Gliedern auftreten kann, welche bei der Entwicklung von

$$\frac{\partial \varDelta_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varDelta_\beta}{\partial x_\beta}$$

entstehen. Nun ist aber, wenn wir $\varDelta_\alpha$ und $\varDelta_\beta$ durch Unterdeterminanten darstellen,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \varDelta_\alpha &= \frac{\partial \varDelta_\alpha}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_\beta}} \frac{\partial f_1}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \varDelta_\alpha}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_\beta}} \frac{\partial f_2}{\partial x_\beta} + \cdots + \frac{\partial \varDelta_\alpha}{\partial \frac{\partial f_n}{\partial x_\beta}} \frac{\partial f_n}{\partial x_\beta}, \\ \varDelta_\beta &= \frac{\partial \varDelta_\beta}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}} \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \varDelta_\beta}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}} \frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} + \cdots + \frac{\partial \varDelta_\beta}{\partial \frac{\partial f_n}{\partial x_\alpha}} \frac{\partial f_n}{\partial x_\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, daſs die Differentiationen von $\varDelta_\alpha$ und $\varDelta_\beta$ resp. nach x_α und x_β nur die Glieder

$$\frac{\partial \varDelta_\alpha}{\partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\beta}} \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varDelta_\beta}{\partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\alpha}} \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

liefern, welche den Faktor (21) enthalten.

Eine Beziehung zwischen diesen beiden Gliedern erhalten wir leicht, wenn wir von einer Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(23) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

ausgehen, in der f eine willkürlich eingeführte Hilfsgröſse ist; wir haben dann

$$(24) \qquad \varDelta = \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}, \quad \varDelta_\alpha = \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}}.$$

Nun*) ist aber

*) Ist

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_\beta}} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, \partial \dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_\beta}},$$

$$\frac{\partial \Delta_\beta}{\partial \dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_\alpha}} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_\beta}\, \partial \dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_\alpha}},$$

und beide Gröſsen sind nur durch das Vorzeichen verschieden. Somit haben wir

(25) $$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_\beta}} + \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial \dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_\alpha}} = 0.$$

Entwickelt man daher die linke Seite von (20) nach den Gröſsen

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

so verschwinden die einzelnen Glieder, und die Richtigkeit von (20) ist dargethan.

7. Setzen wir die Werte (14) in (20) ein, so erhalten wir die gesuchte partielle Differentialgleichung für den Multiplikator

(26) $$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (MX_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0$$

oder

(27) $$X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n} + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdot + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Hierfür kann man noch weiter schreiben

$$X\left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{X_1}{X} + \cdots + \frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{X_n}{X}\right] + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

oder unter Berücksichtigung von (12)

$$X\left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial M}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}\right] + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

oder

---

so werden z. B. $\dfrac{\partial R}{\partial a_{11}\partial a_{22}}$ und $\dfrac{\partial R}{\partial a_{12}\partial a_{21}}$ durch die Gröſse

$$\pm \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dargestellt; doch haben beide Ausdrücke, wie unmittelbar zu sehen, entgegengesetztes Zeichen.

$$X\frac{dM}{dx}+M\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)=0$$

oder endlich

(28) $$X\frac{d\log M}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0.$$

Diese Gleichung ermöglicht in besonderen Fällen die Bestimmung des Multiplikators. Ist z. B.

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0,$$

so findet man

$$M=\text{Const.};$$

stellt ferner

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

einen vollständigen Differentialquotienten nach x dar, so ist (28) integrierbar.

8. Wenn M_1 eine zweite Lösung von (28) vorstellt, so daſs auch

$$X\frac{d\log M_1}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0$$

ist, so folgt durch Zusammenstellung mit (28)

$$\frac{d\log M_1}{dx}-\frac{d\log M}{dx}=0$$

oder

$$\frac{d\log\frac{M_1}{M}}{dx}=0,$$

d. h.

(29) $$M_1=M\,.\,\text{Const.}$$

Zu diesem Resultate ist jedoch zu bemerken, daſs die Herleitung der Differentialgleichung für M von dem Bestehen der Integralgleichungen (6) ausging. Unter Anwendung derselben ist eine beliebige Funktion der f_α, z. B.

(30) $$F(f_1, f_2, \ldots f_n)$$

eine Konstante. Es kann daher an Stelle der Konstanten in (29) auch der Faktor (30) treten, der vor Herleitung der Integrale nicht als Konstante erscheint. Auch ist leicht ersichtlich, daſs die Konstante durch keine andere Funktion $\psi(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Variabeln ersetzt werden kann. Aus ψ kann man nämlich mittels der voneinander unabhängigen Gleichungen (6) die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ eliminieren, so daſs ψ in

$\psi_1(x, c_1, c_2, \ldots c_n)$ übergeht. Soll (29) durch die Integralgleichungen richtig gemacht werden, so mufs x aus ψ_1 wegfallen, d. h. ψ_1 mufs die Form

$$\psi_2(c_1, c_2, \ldots c_n) = \psi_2(f_1, f_2, \ldots f_n)$$

besitzen.

Bezeichnet daher jetzt M_1 eine der Lösungen von (28), die nicht gerade diejenige zu sein braucht, welche (14) genügt, so ist jedenfalls

$$(31) \qquad M_1 X = F(f_1, f_2, \ldots f_n) \Delta.$$

9. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt zu untersuchen, inwiefern die Bestimmung von M_1, falls sie irgendwie gelungen ist, bei der Integration der Gleichungen (13) von Nutzen ist.

Es möge aufser M_1 auch ein Integral dieser Gleichungen, etwa

$$(32) \qquad f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_n$$

bekannt sein; die Variable x_n möge in demselben vorkommen (andernfalls wäre sie durch eine andere Variable zu ersetzen). Alsdann läfst sich x_n durch (32) als Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und c_n darstellen; für c_n können wir f_n setzen und daher sagen, dafs x_n durch $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und f_n ausgedrückt sei*). Dann erscheint f_α in der Form

$$f_\alpha = F_\alpha(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, f_n),$$

so dafs

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_1}$$

ist, oder, wenn wir statt F_α wieder f_α schreiben, aber die Differentialquotienten von f_α, die unter der Hypothese jener Ersetzung von x_n gebildet sind, durch Einklammern kenntlich machen,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1}.$$

Hiernach nimmt der Ausdruck (9) die folgende Gestalt an

$$(33) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

*) Hat man z. B. die Variabeln x, y, z und die Beziehung

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = c_1,$$

Bekanntlich bleibt eine Determinante ungeändert, wenn man die Elemente einer beliebigen Horizontalreihe mit demselben Faktor multipliziert und diese Produkte zu den Gliedern einer andern Reihe addiert. Multipliziert man nun in (33) die Elemente der letzten Horizontalreihe mit $-\left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)$ und addiert sie zur ersten Horizontalreihe, dann mit $-\left(\frac{\partial f_2}{\partial f_n}\right)$ und addiert sie zur zweiten Horizontalreihe u. s. w., so nimmt (33) die vereinfachte Gestalt an

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right) & 0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}}\right) & 0 \\ & & \vdots & & \\ \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) & 0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

oder

$$(34) \qquad \Delta = \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right) \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}}\right) \\ & & \vdots & \\ \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \end{vmatrix} = \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Delta'.$$

Weiter möge x_n aus (13) eliminiert werden, so daſs noch die Differentialgleichung

$$(35) \qquad dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_{n-1}$$

zu integrieren bleibt; in derselben denken wir uns natürlich X, X_1 u. s. w. entsprechend transformiert. Bezeichnet nun μ den Multiplikator dieses Systems, μ_1 aber den Multiplikator im weiteren Sinne, d. h. eine Gröſse, welche der (28) entsprechenden partiellen Differentialgleichung genügt, so ist

$$(36) \qquad \begin{cases} \mu X = \Delta', \\ \mu_1 X = F(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, c_n) \Delta', \end{cases}$$

---

so kann man auch

$$z = \sqrt{c_1 - x^2 - y^2} = \sqrt{f_1 - x^2 - y^2}$$

setzen, wo jetzt f_1 gewissermaſsen als neue Unbekannte auftritt.

wie infolge der Willkürlichkeit von F geschrieben werden kann. Aus (31), (34) und (36) folgt

$$(37)\qquad \mu_1 = \frac{M_1}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}},$$

wenn man die Vieldeutigkeit von μ_1 und M_1 berücksichtigt.

Kennt man also aufser einem Multiplikator des Systems (13) noch ein Integral $f_n = c_n$ desselben, und eliminiert man mittels des letzteren x_n aus (13), so kennt man auch einen Multiplikator*) des reduzierten Systems.

Aus der Herleitung ist ersichtlich, dafs es nicht genügt, ein Integral zu kennen, in welchem die Konstante c_n einen speziellen Wert besitzt; nur wenn man das Integral mit der allgemeinen Konstanten kennt, läfst es sich in die Form (32) setzen.

10. Kennt man k vollständige Integrale des Systems (13), so kann man dieselben in die Form setzen

$$(38)\qquad \begin{cases} f_n(x, x_1, \ldots x_n) = c_n, \\ f_{n-1}(x, x_1, \ldots x_{n-1}, c_n) = c_{n-1}, \\ f_{n-2}(x, x_1, \ldots x_{n-2}, c_n, c_{n-1}) = c_{n-2} \\ \quad\vdots \\ f_{n-k+1}(x, x_1, \ldots x_{n-k+1}, c_n, c_{n-1}, \ldots c_{n-k+2}) = c_{n-k+1}; \end{cases}$$

man braucht eben nur aus dem zweiten mit Hilfe des ersten x_n, aus dem dritten mit Hilfe der beiden ersten x_n und x_{n-1} zu eliminieren u. s. w. Die Differentialquotienten, welche von den f_α unter Voraussetzung dieser Umformung gebildet werden, wollen wir wieder einklammern.

Eliminieren wir nun aus (35) mit Hilfe von $f_{n-1} = c_{n-1}$ die Variable x_{n-1}, so erhalten wir nach (37) für einen Multiplikator des neuen Systems

$$(39)\qquad \mu_1' = \frac{\mu_1}{\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)} = \frac{M_1}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)}.$$

Fahren wir in analoger Weise fort, so erhalten wir als Multiplikator des Systems, welches aus (13) durch Elimination von $x_n, x_{n-1}, \ldots x_{n-k+1}$ mittels (38) hervorgeht, den Ausdruck

$$(40)\qquad \mu_1^{(k-1)} = \frac{M_1}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_{n-k+1}}{\partial x_{n-k+1}}\right)}.$$

Kennt man demnach $(n-1)$ vollständige Integrale des Systems (13) und aufserdem einen Multiplikator desselben, so

*) Im weiteren Sinne.

reduziert sich die Aufgabe auf die Integration *einer* Differentialgleichung

$$dx : dx_1 = X : X_1, \tag{41}$$

welche nur noch *eine* abhängige Variable enthält und von der ein Multiplikator (der *„letzte Multiplikator“*) bekannt ist. Die Differentialgleichung (41) ist aber infolge dessen nach 2. integrierbar.

Die Kenntnis eines Multiplikators des Systems liefert also, wenn $(n - 1)$ Integrale desselben bekannt sind, das n^{te} Integral.

Übrigens kann der Ausdruck (40) in eine elegantere Form gesetzt werden, welche von dem successiven Eliminieren nicht beeinflufst ist. Es ist nämlich

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{42}$$

Dies geht aus der Gleichung (34) hervor; denn man braucht in der rechten Seite von (42) nur die Umformung vorzunehmen, welche zu (34) führte, um zu einem Produkte von $\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$ in eine neue Determinante mit $(n - 2)^2$ eingeklammerten Differentialquotienten zu gelangen, und die Fortsetzung dieses Verfahrens führt successive die rechte Seite von (42) in die linke über.

§ 27.

Elemente der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere der linearen.

1. Unsere Betrachtungen über Systeme von totalen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche wir sofort auf beliebige Systeme totaler Differentialgleichungen ausdehnen konnten, würden unvollständig sein, wenn wir sie nicht mit der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in Zusammenhang brächten; denn thatsächlich fällt die Theorie dieser speziellen Art partieller Differentialgleichungen mit der allgemeinen der Systeme von totalen Differentialgleichungen (teilweise) zusammen*).

*) Man findet den gröfsten Teil des hier vorgetragenen Gegenstandes ausführlicher behandelt in Mansion, Théorie des équations aux dérivées

Wir geben zuerst einige allgemeinere Bemerkungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt; Systeme solcher Gleichungen, bei welchen mehrere abhängige Variabeln auftreten, schliefsen wir aus. Dann behandeln wir die linearen Gleichungen dieser Art weiter, d. h. diejenigen, welche die partiellen Differentialquotienten nur in der ersten Potenz enthalten. Um verständlicher zu werden, betrachten wir für den Anfang partielle Differentialgleichungen, welche nur zwei unabhängige Variabeln besitzen.

2. Ist die Gleichung

$$y = f(x_1, x_2, a_1, a_2) \tag{1}$$

vorgelegt, in der x_1 und x_2 die unabhängigen Variabeln, y die abhängige, a_1 und a_2 aber zwei willkürliche Konstanten bedeuten, so können wir aus (1) und den beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \tag{2}$$

die beiden Konstanten a_1 und a_2 eliminieren und so eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\psi\left(x_1, x_2, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{3}$$

erzielen.

Beispiel 1. Ist

$$y = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2,$$

so folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2a_1 x_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2a_2 x_2,$$

$$a_1 = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{2x_1}, \quad a_2 = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_2}}{2x_2},$$

also

$$y = \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2}.$$

Hiernach mufs man erwarten, dafs jeder partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (3) eine*) Integralgleichung (1) entspricht, welche zwei willkürliche Konstanten enthält. Dieselbe soll ein vollständiges Integral der Differentialgleichung heifsen.

3. Aber noch ein ganz anderer Weg führt zu Differentialgleichungen dieser Art. Es sei

$$y = F[x_1, x_2, \varphi(f(x_1, x_2))], \tag{4}$$

---

partielles du premier ordre; Graindorge, Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres, Mémoires de la soc. roy. des sciences de Liége, (2), B. 5.

*) In Wirklichkeit existieren unendlich viele Integrale dieser Art.

worin F und f zwei bestimmt vorgelegte, φ aber eine ganz willkürliche Funktion bezeichne.

Die partiellen Differentiationen liefern

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}; \end{cases}$$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ bezeichnen hierin die Ableitungen von F, welche nach den außerhalb φ vorkommenden x_1 und x_2 genommen sind. Aus den beiden Gleichungen (5) läßt sich zunächst

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial f}$$

eliminieren, worauf aus der resultierenden Gleichung die Größe

$$\varphi(f(x_1, x_2)),$$

welche noch in $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ unverändert vorkommt, mittels (4) beseitigt werden kann. So erhält man wieder eine Gleichung von der Form (3).

Beispiel 2.

$$y = x_1^2 + x_2^2 + \varphi(x_1 x_2),$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 + \varphi' x_2,$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 + \varphi' x_1,$$

also nach Elimination von φ'

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} - 2x_1^2 + 2x_2^2 = 0.$$

Die Gleichung (4), welche eine willkürliche Funktion enthält, heißt das allgemeine Integral der zugehörigen partiellen Differentialgleichung.

Wir gelangen also auf zwei ganz verschiedenen Wegen zu der partiellen Differentialgleichung und umgekehrt von dieser zu zwei Integralen von scheinbar ganz verschiedenem Charakter; wir wollen zeigen, daß das allgemeine Integral aus einem vollständigen in einfacher Weise abgeleitet werden kann.

Andrerseits ist klar, daß eine Spezialisierung der willkürlichen Funktion des allgemeinen Integrals beliebig viele vollständige Integrale liefert.

4. Die Herleitung der partiellen Differentialgleichung (3) aus der Integralgleichung (1) bleibt unter gewissen Bedingungen noch richtig, wenn die Größen a_1 und a_2 nicht mehr als Konstanten, sondern als Funktionen von x_1 und x_2 angesehen werden. In diesem Falle ist

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Sollen diese Gleichungen mit (2) identisch werden, wodurch die Herleitung der Gleichung (3) ungeändert bleibt, so mufs

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

sein. Betrachten wir hierin $\dfrac{\partial f}{\partial a_1}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial a_2}$ als Unbekannte und setzen

$$(8)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

so erhalten wir nach den bekannten Eliminationsregeln

$$(9)\qquad \Delta \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \qquad \Delta \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0.$$

Die Gleichungen können befriedigt werden durch die Annahmen:

$$\text{a) (10)}\qquad \frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0,$$

$$\text{b) (11)}\qquad \Delta = 0.$$

Eliminiert man unter Annahme der Gleichungen (10) mittels dieser a_1 und a_2 aus (1), so entsteht eine neue, von Konstanten freie Integralgleichung der Differentialgleichung (3); man nennt sie ein singuläres Integral von (3). Dieselbe ist den singulären Integralen totaler Differentialgleichungen durchaus analog.

Das Bestehen der Gleichung (11) wird nach § 26, 3 durch die Annahme ermöglicht, dafs a_2 eine beliebige Funktion von a_1 ist*); es sei

$$(12)\qquad a_2 = \varphi(a_1).$$

Alsdann gehen die Gleichungen (7) in die einzige Relation

$$(13)\qquad \frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial a_1} = 0$$

über, welche mit (12) eine Elimination von a_1 und a_2 aus (1) möglich macht. Hierdurch wird eine Integralgleichung mit einer willkürlichen Funktion, also ein allgemeines Integral erlangt.

*) Dafs umgekehrt (11) eine Relation (12) als notwendige Folge nach sich zieht, wird weiter unten nachgewiesen.

Die Kenntnis eines vollständigen Integrals liefert zugleich das allgemeine und eventuell auch ein singuläres Integral.

Beispiel. Für das Beispiel 1 wird (13)

$$x_1^2 + \varphi'(a_1) x_2^2 = 0,$$

also

$$a_1 = \chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right),$$

wenn χ die Umkehrung von φ' bezeichnet; ferner ist

$$a_2 = \varphi\left[\chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\right],$$

wo φ durch χ bestimmt ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= \chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right) x_1^2 + \varphi\left[\chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\right] x_2^2 \\ &= x_2^2 \left\{\chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right) \frac{x_1^2}{x_2^2} + \varphi\left[\chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

wofür wir kürzer unter Einführung einer neuen willkürlichen Funktion ψ

$$y = x_2^2 \psi\left(\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)$$

schreiben dürfen.

Setzen wir

$$\psi(x) = a_1 x + a_2,$$

so geht das Integral in

$$y = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$$

über, also in das uns bekannte vollständige Integral.

5. Die Behandlung der allgemeineren partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher n unabhängige Variabeln auftreten, können wir nach dem gegebenen Muster leicht erledigen.

Aus einer Gleichung

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n), \tag{14}$$

welche n willkürliche Konstanten enthält, folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}; \tag{15}$$

eliminieren wir aus (14) und (15) die n Konstanten, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\psi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{16}$$

Umgekehrt müssen wir erwarten, daſs einer Gleichung (16) ein vollständiges Integral mit n Konstanten entspricht.

Setzen wir in (14) an Stelle der Konstanten Funktionen der

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

so gelangen wir zu derselben Gleichung (16), wenn

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial x_1} = 0, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

ist. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn

$$(18)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial x_2} \\ & \vdots & & \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird und man $\dfrac{\partial f}{\partial a_1}, \dfrac{\partial f}{\partial a_2}, \ldots \dfrac{\partial f}{\partial a_n}$ als Unbekannte ansieht,

$$(19)\qquad \Delta \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0,\ \Delta \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \ldots \Delta \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0.$$

Diese Relationen können dadurch befriedigt sein, dafs

$$(20)\qquad \frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

wird. Aus (20) und (14) lassen sich dann die Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ eliminieren, wodurch man zu dem singulären Integrale gelangt.

Andrerseits kann den Gleichungen (10) durch

$$(21)\qquad \Delta = 0$$

genüge geleistet werden; dies trifft zu, wenn zwischen $a_1, a_2, \ldots a_n$ eine Relation besteht, so dafs z. B.

$$(22)\qquad a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$$

ist. Durch Einführung dieser Beziehung gehen die Gleichungen (17) über in

$$(23)\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_1}\right)\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{n-1}} + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right)\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \\ \quad\vdots \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_1}\right)\dfrac{\partial a_1}{\partial x_n} + \cdots + \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{n-1}} + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right)\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Dieselben werden, wenn zwischen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ keine weiteren Beziehungen bestehen*), nur durch die Annahme

$$(24) \qquad \frac{\partial f}{\partial a_1}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial a_2}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_2}=0,\ \ldots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}=0$$

befriedigt. Diese Gleichungen gestatten es, mit Benutzung von (22) in (14) die Gröſsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ durch Funktionen von $x_1, x_n, \ldots x_n$ zu ersetzen, wobei eine willkürliche Funktion von n Variabeln, φ, auftritt. So erhält man das allgemeine Integral.

Es ist möglich, daſs auſser (22) noch andere Funktionalbeziehungen zwischen den a stattfinden; dies trifft ein, wenn auch die Unterdeterminanten von Δ verschwinden u. s. w. Wir wollen auf die hieraus folgenden Integrale nicht weiter eingehen.

Im Übrigen hat es keine Schwierigkeit, aus einem allgemeinen Integral mit einer willkürlichen Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ umgekehrt die partielle Differentialgleichung abzuleiten.

6. Wir können auch zeigen, daſs (14) und die daraus abgeleiteten Integrale die einzigen Integrale der Differentialgleichung (16) sind. Genügt nämlich

$$(25) \qquad y=f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

der Gleichung (16), so können wir uns in

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n)$$

die Konstanten durch solche Funktionen der unabhängigen Variabeln ersetzt denken, daſs

$$(26) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f_1}{\partial x_2},\ \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}=\frac{\partial f_1}{\partial x_n}$$

wird; wir brauchen nämlich nur in (26) die Ausdrücke für f und f_1 aus (14) und (25) einzuführen und dann $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus diesen Gleichungen zu berechnen. Es ist nun

$$\frac{\partial(f-f_1)}{\partial x_1}=\frac{\partial(f-f_1)}{\partial x_2}=\ldots=\frac{\partial(f-f_1)}{\partial x_n}=0,$$

also

$$(27) \qquad f-f_1=C,$$

worin C eine von $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängige Konstante ist. Führt man aber einmal $y=f$, dann $y=f_1$ in (16) ein, so ergiebt sich durch Vergleich $C=0$, falls nicht eine additive Konstante in (14) auftritt.

---

*) Man bemerke, daſs n Gleichungen vorhanden sind, in welchen auſserhalb der Klammern nur die Differentialquotienten von $(n-1)$ Gröſsen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ auftreten.

Die Auffindung eines vollständigen Integrals liefert also sämtliche Integrale der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

7. Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wobei wir uns auf diejenigen einschränken wollen, deren sämtliche Glieder einen partiellen Differentialquotienten zum Faktor haben und welche y selbst nicht enthalten. Um bequemer an die Untersuchungen des vorigen Paragraphen anknüpfen zu können, nehmen wir $(n+1)$ unabhängige Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ an; es sei

$$X\frac{\partial y}{\partial x} + X_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial y}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial y}{\partial x_n} = 0 \tag{28}$$

die partielle Differentialgleichung, in der X, X_1 u. s. w. beliebige Funktionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen. Wir denken uns andrerseits die Gleichung § 26, (13) willkürlich aufgestellt, welche die Integrale § 26, (6) besitzen mag. Dann sind offenbar $y = f_1$, $y = f_2$, $\ldots$ $y = f_n$ Integrale*) von (28). Setzen wir nämlich in den aus (6) folgenden Gleichungen (7) von § 26 nach § 26, (12)

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \ldots \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X},$$

so gehen dieselben in die Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} X + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} X_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} X_n = 0 \tag{29}$$

u. s. w.

über, die mit (28) für $y = f_1$, $y = f_2$ u. s. w. übereinstimmen.

Aber auch jede Funktion von $f_1, f_2, \ldots f_n$, z. B.

$$F(f_1, f_2, \ldots f_n), \tag{30}$$

befriedigt die Gleichung (28). Es folgt nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x}$$

u. s. w.,

was in (28) eingesetzt liefert:

$$\frac{\partial F}{\partial f_1}\left(X\frac{\partial f_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial f_n}\left(X\frac{\partial f_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \cdots + X\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Nach (29) ist aber diese Gleichung befriedigt.

*) Selbstverständlich sind f_1 u. s. w. nicht als Konstanten c_1 u. s. w., sondern eben als Funktionen von $x, x_1, \ldots x_n$ zu denken.

Durch (30) ist, falls $f_1, f_2, \ldots f_n$ voneinander unabhängig sind, so dafs keine dieser Funktionen als Funktion der übrigen darstellbar ist, das allgemeinste Integral von (28) gegeben.

Ist nämlich

$$y = f(x, x_1, x_2 \ldots x_n)$$

ein Integral von (28), so kann man zu den n Gleichungen (29) die $(n+1)^{\text{te}}$

$$(31) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} X_n = 0$$

hinzufügen. Die $(n+1)$ Gleichungen zwischen

$$\frac{X_1}{X}, \frac{X_2}{X}, \ldots \frac{X_n}{X}$$

können nur zusammen bestehen, ohne dafs $X = X_1 = \cdots = X_n = 0$ wird, wenn die Funktionaldeterminante

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Das Verschwinden der Funktionaldeterminante zeigt aber, wie wir an dieser Stelle begründen wollen, an, dafs f sich als Funktion von $f_1, f_2, \ldots f_n$ darstellen läfst.

Betrachten wir nämlich die Ausdrücke $f_1, f_2, \ldots f_n$ als neue Variable*), so können wir uns durch sie und x die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt denken; diese Werte führen wir dann statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ in $f(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein. Nach dieser Umformung sind in (32) an Stelle der Gröfsen, welche die erste Horizontalreihe bilden, die folgenden einzusetzen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_1},$$

u. s. w.

---

*) Man setze, falls diese Darstellungsweise unklar sein sollte,

$$y_1 = f_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ u. s. w.}$$

und denke sich nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ ausgedrückt. An Stelle von y_1 schreiben wir dann f_1 u. s. w.

Multipliziert man aber die zweite, dritte, ... $(n+1)^{\text{te}}$ Horizontalreihe mit

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}, \frac{\partial f}{\partial f_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial f_n}$$

und subtrahiert sie von der ersten, wodurch keine Wertänderung der Determinante veranlafst wird, so geht (32) in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \varDelta \frac{\partial f}{\partial x} \tag{33}$$

über*). Falls nun die Determinante $\varDelta$ nicht verschwindet, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

d. h. f ist in seiner neuen Form von x unabhängig, also lediglich eine Funktion von $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Das Verschwinden von $\varDelta$ würde in gleicher Weise darthun, dafs f_1 eine Funktion von $f_2, \ldots f_n$ ist, falls nicht wiederum eine Unterdeterminante von $\varDelta$, z. B.

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_1}},$$

verschwindet u. s. w. Durch Fortsetzung dieser Schlufsweise gelangt man zu dem Resultat, dafs das Bestehen von (32) eine Funktionalbeziehung zwischen den Gröfsen $f, f_1, f_2, \ldots f_n$ involviert**).

Wir schliefsen hiernach, dafs die Gleichungen (29) und (31) nur dann zusammen bestehen können, wenn $f, f_1, f_2, \ldots f_n$ nicht alle voneinander unabhängig sind. (30) liefert also das allgemeinste Integral der

*) $\varDelta$ wird hier in demselben Sinne wie in § 26 gebraucht.

**) Die letzte Unterdeterminante, zu welcher man gelangt, lautet nämlich $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$.

partiellen Differentialgleichung (28). Durch Spezialisieren der ganz willkürlichen Funktion F kann man auf unendlich viele Arten zu einem vollständigen Integral gelangen.

8. Jede nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer abhängigen Variabeln läfst sich auf eine lineare zurückführen. Wir wollen diese Untersuchung nur für den Fall zweier unabhängigen Variabeln, der schon von Lagrange behandelt wurde, durchführen.

Ist

$$\psi(y,\ x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2) = 0 \tag{34}$$

die fragliche Differentialgleichung, in der

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = p_1,\quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = p_2 \tag{35}$$

gesetzt ist, so dafs

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \tag{36}$$

wird, so läuft die Integration von (34) offenbar darauf hinaus, einen Wert

$$p_1 = \varphi_1(y,\ x_1,\ x_2,\ a) \tag{37}$$

zu finden, welcher in (36) substituiert die rechte Seite dieser Gleichung in ein vollständiges Differential verwandelt. (37) mufs die willkürliche Konstante a enthalten, damit nach Ausführung der Integration von (36) ein vollständiges Integral mit zwei willkürlichen Konstanten erhalten wird. Damit aber (36) integrierbar wird, braucht man nur eine Differentialgleichung aufzustellen, welche aus der Bemerkung hervorgeht, dafs

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{38}$$

ist. Denken wir uns also p_2 aus (34) in der Form

$$p_2 = \varphi_2(y,\ x_1,\ x_2,\ p_1) \tag{39}$$

berechnet, so mufs

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}$$

oder

$$p_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = p_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}$$

oder

$$\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \varphi_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \tag{40}$$

sein. Da aber φ_2 und seine Differentialquotienten hinschreibbare Ausdrücke sind, so haben wir hierdurch für φ_1 eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung erlangt, von der ein einziges Integral mit einer willkürlichen Konstanten genügt, um die Integration von (34) auf eine einfache totale Differentialgleichung erster Ordnung zu reduzieren.

Enthält ψ die abhängige Variable y nicht explizite, so reduziert sich (40) auf

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}. \tag{41}$$

Nun ist aber, wenn man auf (34) zurückgeht, in diesem Falle

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial p_2}},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial p_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial p_2}},$$

wodurch (41) in

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \tag{42}$$

übergeht. Denken wir uns ferner (37) nach a aufgelöst, so daſs

$$a = \varphi(x_1, x_2, p_1) \tag{43}$$

wird, so ist

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}},$$

und (42) verwandelt sich in

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0. \tag{44}$$

Dies ist für φ eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit drei unabhängigen Variabeln und zwar eine der früher behandelten Art, welche sich auf ein System totaler Differentialgleichungen zurückführen läſst. Kennt man eines ihrer Integrale mit nur einer willkürlichen Variabeln, so wird (36), in dessen rechter Seite jetzt y nicht vorkommt, direkt integrabel und wir erhalten somit das vollständige Integral von (34) mit zwei willkürlichen Konstanten. (Siehe auch die Zusätze.)

§ 28.

Anwendung der Theorie des letzten Multiplikators auf das freie System materieller Punkte.

1. Die Theorie des letzten Multiplikators ist deshalb für die Mechanik von Bedeutung, weil sie gerade bei den wichtigsten Fällen der Bewegungsgleichungen zur Anwendung gebracht werden kann. Wenn die Kräftekomponenten X_α, Y_α, Z_α nur von den Koordinaten und der Zeit abhängen, wenn also insbesondere die Geschwindigkeiten nicht in den Kräftekomponenten auftreten, so läſst sich ein Multiplikator des Systems immer angeben.

In § 24 konnten wir günstigsten Falls sieben allgemeine Integrale der $3n$ Bewegungsgleichungen aufstellen; von denselben waren drei vollständig integrierte Gleichungen, vier Differentialgleichungen erster Ordnung. Denkt man sich das System von $3n$ Bewegungsgleichungen in ein System von $6n$ Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert, so kann man sagen, dafs zehn Integrale dieses Systems mit zehn willkürlichen Konstanten als bekannt anzusehen sind; denn die drei vollständigen Integrale sind doppelt zu rechnen. Zu diesen zehn direkt angebbaren Integralen tritt jetzt ein elftes hinzu, welches hingeschrieben werden kann, wenn die übrigen $6n - 11$ Integrale gefunden sind.

Freilich hat diese ganze Untersuchung bis jetzt nur einen theoretischen Wert geboten; denn in Praxis hat das Prinzip des letzten Multiplikators nur in solchen Fällen Resultate geliefert, in denen auch elementarere Methoden zum Ziele führten.

An dieser Stelle wollen wir uns auf die Behandlung freier Systeme beschränken. Bei beliebigen Bedingungsgleichungen bleibt das Verfahren, angewandt auf die Lagrange'schen Ausdrücke der Kräftecomponenten, durchführbar; doch ist die Rechnung eine etwas umständliche, während sie bei Anwendung der Hamilton'schen Form der Bewegungsgleichungen eine ungleich einfachere wird. Die allgemeine Behandlung mag daher bis nach Einführung dieser verschoben werden.

2. Die Differentialgleichungen der freien Bewegung seien wieder

$$(1) \qquad \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = X_\alpha, \quad \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = Y_\alpha, \quad \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} = Z_\alpha;$$

die X_α, Y_α, Z_α seien Funktionen der Zeit und der Koordinaten, nicht aber der Differentialquotienten der letzteren. Wir setzen dann

$$(2) \qquad \frac{dx_\alpha}{dt} = x_\alpha', \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = y_\alpha', \quad \frac{dz_\alpha}{dt} = z_\alpha'$$

und betrachten diese Gröfsen als neue Variabeln, durch deren Einführung das System (1) von $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in ein System von $6n$ Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt wird. Wir haben

$$(3) \qquad \frac{dx_\alpha'}{dt} = X_\alpha, \quad \frac{dy_\alpha'}{dt} = Y_\alpha, \quad \frac{dz_\alpha'}{dt} = Z_\alpha;$$

(2) und (3) können wir zusammen in die Form setzen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} & dt : dx_1 : dy_1 : dz_1 : \ldots\ldots : dx_1' : dy_1' : dz_1' : \ldots \\ & = 1 : x_1' : y_1' : z_1' : \ldots\ldots : X_1 : Y_1 : Z_1 : \ldots\ldots \end{aligned}$$

Für den Multiplikator M des Systems haben wir nach § 26, (28) die partielle Differentialgleichung

$$(5) \frac{d \log M}{dt} = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1'}{\partial y_1} + \frac{\partial z_1'}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial X_1}{\partial x_1'} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1'} + \frac{\partial Z_1}{\partial z_1'} + \cdots.$$

Da aber voraussetzungsmäfsig X_α, Y_α, Z_α von den Differentialquotienten X_α', Y_α', Z_α' unabhängig sind, ferner selbstverständlich x_1' nicht x_1 enthält (rein formell aufgefafst) u. s. w., so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung; es ist

$$\frac{d \log M}{dt} = 0,$$

also

(6) $$M = \text{Const.}$$

3. Sind die Komponenten X_α, Y_α, Z_α von t unabhängig, wie dies der Wirklichkeit fast immer entspricht, so kann man in (4) links dt, rechts 1 einfach weglassen. Auch für das übrigbleibende System ist der Multiplikator wieder eine Konstante. Hat man dasselbe integriert, also alle Koordinaten durch eine, z. B. x_1, ausgedrückt, so folgt t aus der Relation

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1'$$

oder

(7) $$t = \int \frac{dx_1}{x_1'}.$$

Hier sind also die *beiden* letzten Integrationen ausführbar.

4. Bei der Attraktion eines materiellen Punktes nach einem festen Zentrum hatten wir die Differentialgleichungen (vgl. § 6)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(r)\,\frac{x}{r},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(r)\,\frac{y}{r},$$

die wir unter Weglassung von dt in die Form

(8) $$dx : dy : dx' : dy' = x' : y' : f(r)\,\frac{x}{r} : f(r)\,\frac{y}{r}$$

setzen. Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Flächensatz liefern zwei Integrale dieses Systems von drei Differentialgleichungen, nämlich

$$\frac{1}{2}\left[x'^2 + y'^2\right] = \int f(r)\,dr = F(r) + C$$

oder

(9) $$\frac{1}{2}\left[x'^2 + y'^2\right] - F(r) = C$$

und

(10) $$xy' - yx' = C.$$

Nehmen wir den konstanten Systemsmultiplikator $= 1$, so liefern § 26, (40) und (42), indem die linken Seiten von (9) und (10) als f_2 und f_3 angesehen und x, y, x', y' an Stelle von x, x_1, x_2, x_3 gesetzt werden, den letzten Multiplikator

(11) $$\mu = \frac{1}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x'}\,\dfrac{\partial f_3}{\partial y'} - \dfrac{\partial f_2}{\partial y'}\,\dfrac{\partial f_3}{\partial x'}} = \frac{1}{xx' + yy'}.$$

Die Differentialgleichung aber, welche zu integrieren übrig bleibt, ist

$$dx : dy = x' : y'$$

oder

$$x'dy - y'dx = 0\,; \tag{12}$$

es mufs daher der Ausdruck

$$\frac{x'dy - y'dx}{xx' + yy'} \tag{13}$$

bei Benutzung von (9) und (10) sich als ein vollständiges Differential erweisen. Durch eine etwas unbequeme Rechnung, bei welcher x' und y' mittels (9) und (10) aus (13) eliminiert werden, ist dies in der That nachzuweisen. Man gelangt so zu dem Integrale, zu welchem in § 6 die Anwendung von Polarkoordinaten in bequemerer Weise führte.

§ 29.

Die Lagrange-Hamilton'schen Differentialgleichungen der Bewegung.

1. In § 25 hoben wir als Hauptvorteil des Hamilton'schen Prinzips die bequeme Koordinatentransformation hervor, welche es ermöglicht; wir wollen diesen Punkt jetzt eingehender untersuchen*). Dabei wollen wir den Begriff „Koordinaten" sofort in seiner weitesten Bedeutung nehmen: irgend welche $3n$ Gröfsen, welche die Lage der n bewegten Punkte bestimmen, mögen als Koordinaten derselben angesehen werden. Sind $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ irgend welche Funktionen der $3n$ Koordinaten $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, so können diese q als neue Koordinaten des Punktesystems benutzt werden. Ist nämlich z. B.

$$q_\alpha = f_\alpha(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots)\,, \tag{1}$$

so lassen sich mittels dieser $3n$ Gleichungen die x, y, z als Funktionen — eventuell mehrdeutige — der q darstellen. Zu jedem Wertesystem der q gehört also ein Wertesystem der x, y, z, wodurch die Lage der n Punkte, wenn vielleicht auch nur mit endlicher Vieldeutigkeit, bestimmt ist. Diese Vieldeutigkeit ist ohne wesentlichen Nachteil; denn infolge der Stetigkeit der Bewegungen folgt auf eine einmal fixierte Konfiguration im nächsten Momente doch eine ganz bestimmte andere, einzelne Stellen möglicherweise ausgenommen.

2. Das Hamilton'sche Prinzip hat die Form

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt = 0\,, \tag{2}$$

---

*) Die Hamilton'schen Untersuchungen finden sich in den bereits § 25 citierten Abhandlungen; sie wurden von Jacobi so wesentlich vereinfacht, dafs derselbe als Mitbegründer dieser Theorie angesehen werden mufs. — Die zweite Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen wird bereits in der Mécanique analytique hergeleitet.

wobei die Anfangs- und Endlage des Systems für $t = t_0$ und $t = t_1$ als fest angenommen wird, die Variation sich also auf die Wege bezieht, welche die Punkte des Systems zwischen ihrer Anfangs- und Endlage zurücklegen können. T bezeichnet die lebendige Kraft, es ist also

$$(3) \qquad T = \frac{1}{2} \sum m_\alpha (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2),$$

wenn, wie in der Folge, der Strich bei einer Variabeln deren Differentialquotienten nach der Zeit bezeichnet. U ist die Kräftefunktion, welche auch die Zeit explicite enthalten darf; sonst enthält sie nur die Koordinaten x_α, y_α, z_α, weshalb auch nach der Koordinatentransformation aufser t nur die q_α, nicht etwa deren Differentialquotienten eintreten. T enthält t und die Koordinaten x_α, y_α, z_α selbst nicht, sondern nur die Differentialquotienten x_α', y_α', z_α'; doch gestaltet sich die Zusammensetzung des Ausdrucks T nach Einführung der neuen Koordinaten etwas anders. Es ist nämlich

$$(4) \qquad x_\alpha' = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_2} q_2' + \cdots$$

u. s. w.,

worin die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1}$ u. s. w. als Funktionen der q zu betrachten sind. Man braucht nämlich nur aus den Gleichungen (1) die x_α, y_α, z_α durch die q_α auszudrücken und dann zu differentiieren, um $\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1}$ u. s. w. zu erhalten.

Führt man die Werte (4) in T ein, so erhält man einen Ausdruck, welcher eine homogene Funktion zweiten Grades in den q_α' ist; die Koeffizienten der q_α', q_β' sind Funktionen der q_α. Wir müssen also für die Folge immer festhalten, dafs U eine Funktion der q_α und der Zeit t, T aber eine Funktion der q_α und q_α' ist. Die q_α und q_α' sind selbstverständlich wieder als Funktionen der Zeit zu denken, so dafs T implizite von der Zeit abhängt.

3. Um nach Einführung der q_α und q_α' aus (2) die Bewegungsgleichungen in entwickelter Form herzuleiten, führen wir die Variation analog wie in § 25, 3 aus.

Es ist

$$(5) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} U dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha dt$$

und zunächst

$$(6) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha' \right] dt.$$

Weiter ist aber

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha' dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \frac{d\delta q_\alpha}{dt} dt$$

$$= \left[\sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{d \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt} \delta q_\alpha dt$$

oder, weil die Variationen für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha' dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{d \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt} \delta q_\alpha dt. \tag{7}$$

Somit wird

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha dt. \tag{8}$$

Die δq_α sind zwar wegen der Bedingungsgleichungen, welche gleichfalls in den q_α ausgedrückt werden müssen, voneinander nicht unabhängig; doch ist wenigstens eines derselben vollkommen willkürlich, weshalb das rechts stehende Integral von (8) nur dann für alle möglichen δq_α verschwindet, wenn dies mit dem Ausdrucke unter dem Integralzeichen der Fall ist. Wir erhalten somit die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\sum \left[\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0, \tag{9}$$

worin die δq_α den Bedingungsgleichungen entsprechend zu bestimmen sind. Diese Gleichung stellt das d'Alembert'sche Prinzip für die q-Koordinaten unter der beschränkenden Voraussetzung dar, daſs eine Kräftefunktion existiert. Setzt man für die q_α die x_α, y_α, z_α, so fällt $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ weg, während z. B. $\frac{d \frac{\partial T}{\partial x_1'}}{dt} = \frac{dx_1'}{dt} = \frac{d^2 x_1}{dt^2}$ wird. Die Gleichung (1) geht also dann in das d'Alembert'sche Prinzip über.

Setzen wir abkürzungsweise:

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} = p_\alpha, \tag{10}$$

so geht (9) über in

$$\sum \left[\frac{\partial (T + U)}{\partial q_\alpha} - \frac{dp_\alpha}{dt} \right] \delta q_\alpha = 0. \tag{11}$$

Die p_α sind homogene, lineare Funktionen der q_α', wie aus der Form von T unmittelbar hervorgeht; die Koeffizienten der q_α' hierin sind Funktionen der q_α.

(11) giebt die zweite Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen.

4. Die Gleichung (11) läfst sich mit besonderer Leichtigkeit in die einzelnen Bewegungsgleichungen zerlegen, wenn die q_α derart gewählt sind, dafs die Bedingungsgleichungen von selbst befriedigt werden. Einige Beispiele werden diese Wahl der q_α klarer machen. Soll sich ein materieller Punkt auf einer Ebene bewegen, etwa infolge der Schwerkraft, so kann man die xy-Ebene mit dieser Ebene identifizieren und dann die Komponenten der Kraft und der Geschwindigkeit nach der x- oder y-Achse vollständig in Rechnung bringen, die z-Komponenten aber einfach weglassen. Soll sich der Punkt auf einer Kugel, etwa der Erdkugel, bewegen, so kann man seinen jeweiligen Ort durch seine geographische Länge und Breite bestimmen, während man den Radius r als konstant annimmt*). Ist einem Punkte die Fläche eines Ellipsoids zur Bewegung zugewiesen, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, so wird die letztere durch die Werte

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \cos \psi, \quad z = c \sin \varphi \sin \psi$$

identisch befriedigt, so dafs φ und ψ als Koordinaten auf jener Oberfläche gelten können. Allgemeinere Untersuchungen über Koordinatensysteme auf einer Fläche hat bekanntlich Gauss angestellt.

Aber auch wenn die Bedingungsgleichungen die Koordinaten mehrerer Punkte enthalten, können ohne Schwierigkeit Koordinatensysteme, d. h. Systeme von Bestimmungsstücken, welche die Bedingungsgleichungen identisch befriedigen, in unendlicher Zahl hergestellt werden. Wir setzen nämlich ganz willkürlich, wenn m Bedingungsgleichungen gegeben sind,

$$q_\alpha = f_\alpha(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots),$$

worin jetzt α nur die Werte $1, 2, \ldots (3n - m)$ annehmen mag; hierzu fügen wir die m Bedingungsgleichungen

$$F_\beta(x_1, y_1, z_1, x_2, y_1, z_2, \ldots) = 0.$$

Wir haben dann $3n$ Gleichungen, welche es gestatten, die x_α, y_α, z_α durch die $3n - m = k$ Gröfsen-q_α auszudrücken.

Führen wir diese Koordinaten in (11) ein, so sind jetzt die δq_α ganz willkürlich, so dafs wir die $2k$ Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial(T + U)}{\partial q_\alpha}, \quad p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \tag{12}$$

erhalten.

5. Auch wenn keine Kräftefunktion vorhanden ist, die Kräftekomponenten jedoch wieder nur Funktionen der Koordinaten und der Zeit

*) Vgl. hiermit insbesondere die Bemerkungen in § 19, 4.

sind, lassen sich die Bewegungsgleichungen in eine (12) ähnliche Form bringen. Da bei vorhandener Kräftefunktion

$$\delta U = \sum \left[\frac{\partial U}{\partial x_\beta} \delta x_\beta + \frac{\partial U}{\partial y_\beta} \delta y_\beta + \frac{\partial U}{\partial z_\beta} \delta z_\beta\right]$$
$$= \sum [X_\beta \delta x_\beta + Y_\beta \delta y_\beta + Z_\beta \delta z_\beta]$$

ist, so muſs, wenn keine Kräftefunktion existiert, die rechtsstehende Gröſse an Stelle von δU in das Hamilton'sche Prinzip eingeführt werden. Da

$$\delta x_\beta = \sum^\alpha \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

u. s. w.

ist, so haben wir

$$\sum^\beta [X_\beta \delta x_\beta + Y_\beta \delta y_\beta + Z_\beta \delta z_\beta]$$
$$= \sum^\beta \sum^\alpha \left[X_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha} + Y_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} + Z_\beta \frac{\partial z_\beta}{\partial q_\alpha}\right] \delta q_\alpha ,$$

weshalb in (11) an Stelle von

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

$$(13) \qquad Q_\alpha = \sum^\beta \left[X_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha} + Y_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} + Z_\beta \frac{\partial z_\beta}{\partial q_\alpha}\right]$$

tritt. Bei Benutzung des zuletzt betrachteten Koordinatensystems gelten daher für diesen Fall die Bewegungsgleichungen

$$(14) \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha , \quad p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} .$$

6. Die Bewegungsgleichungen (12) hat Hamilton in höchst merkwürdiger Weise umgeformt. Wir haben bereits bemerkt, daſs T in den q_α' eine homogene Funktion zweiten Grades ist und daſs infolge dessen die

$$(15) \qquad p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}$$

homogene Funktionen erster Ordnung in den q_α' sind. Haben wir etwa

$$(16) \qquad p_\alpha = a_{\alpha 1} q_1' + a_{\alpha 2} q_2' + \cdots + a_{\alpha k} q_k' ,$$

so können wir umgekehrt mit Hilfe der k Gleichungen (16) die q_α' als lineare homogene Funktionen der p_α darstellen; es sei etwa

$$(17) \qquad q_\alpha' = b_{\alpha 1} p_1 + b_{\alpha 2} p_2 + \cdots + b_{\alpha k} p_k .$$

Führen wir aber die Werte (17) für die q_α' in T ein, so wird dieses eine homogene Funktion zweiten Grades in den p_α, während die Koeffizienten wieder Funktionen der q_α sind. Die unter

Voraussetzung der neuen Gestalt von T gebildeten Differentialquotienten wollen wir durch Einklammern auszeichnen.

Durch totales Differentiieren von T, einmal in der alten, einmal in der neuen Form, erhalten wir zwei Ausdrücke, deren Gleichsetzung sehr merkwürdige Relationen liefert. Da in der alten Form T eine homogene Funktion zweiten Grades in den q_α' ist, so können wir*)

$$(18) \qquad 2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k'} q_k'$$

oder

$$(18a) \qquad T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} q_\alpha' - T$$

setzen. Die totale Differentiation liefert jetzt

$$dT = \sum q_\alpha' d\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} dq_\alpha' - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} dq_\alpha' - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$$

oder bei Benutzung von (15)

$$(19) \qquad dT = \sum q_\alpha' dp_\alpha - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dq_\alpha .$$

Andrerseits folgt durch totale Differentiation von T in der neuen Form

$$(20) \qquad dT = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\right) dp_\alpha + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) dq_\alpha .$$

Sollen (19) und (20) identisch gleich sein, so mufs

$$(21) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\right) = q_\alpha',$$

$$(22) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

sein; denn die p_α und q_α treten hier als voneinander unabhängige Variabeln auf, ihre Differentiale können also voneinander unabhängige Werte annehmen.

7. Da U von den q_α', also auch von den p_α nicht abhängt, so dafs

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

ist, so folgt aus (21) und (22)

---

*) Haben wir nämlich (α und β mögen die Werte 1, 2, ... n annehmen)

$$X = \sum a_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta ,$$

so ist

$$\frac{\partial X}{\partial x_\alpha} = 2a_{\alpha 1} x_1 + 2a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + 2a_{\alpha n} x_n ,$$

also, wie die Summation leicht zeigt,

$$\frac{\partial X}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial X}{\partial x_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial X}{\partial x_n} x_n = 2X .$$

(23) $$\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial p_\alpha}\right)=\left(\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\right)=q_\alpha'$$

und

$$\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial q_\alpha}\right)=-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}$$

oder mit Benutzung von (12)

(24) $$\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial q_\alpha}\right)=-\frac{dp_\alpha}{dt}.$$

Hamilton setzt nun:

(25) $$T-U=H;$$

es ist dies dieselbe Funktion, welche bei dem Prinzip der lebendigen Kraft einer Konstanten gleich gesetzt wird; hier dürfen wir dies nicht im allgemeinen, da U die Zeit enthalten kann, also jenes Prinzip nicht gültig zu sein braucht. Aber auch wenn dieses der Fall ist, tritt natürlich H hier als Funktion, nicht als Konstante auf; seine partiellen Differentialquotienten sind nämlich nicht konstant.

Indem wir festsetzen, daſs H immer als Funktion der p_α und q_α, nicht der q_α und q_α' dargestellt sein soll, dürfen wir jetzt die Klammern bei den Differentialquotienten weglassen. (23) und (24) liefern uns die Bewegungsgleichungen in der wichtigen Gestalt:

(26) $$\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},$$

(27) $$\frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

Die Differentialquotienten der neuen Variabeln q_α und p_α nach der Zeit werden also den positiv, resp. negativ genommenen partiellen Differentialquotienten derselben Funktion H nach p_α und q_α gleichgesetzt.

8. Ist keine Kräftefunktion vorhanden, so muſs an Stelle von $\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ der Ausdruck (13) gesetzt werden. Die Bewegungsgleichungen werden daher

(28) $$\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p_\alpha},$$

(29) $$\frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha.$$

9. Sind keine Bedingungsgleichungen gegeben, so gehen die q_α in die x_α, y_α, z_α über. Ist etwa $q_1=x_1$, so wird

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial q_1'}=\frac{\partial T}{\partial x_1'}=m_1x_1'.$$

Hiernach wird aus (26)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial (m_1 x_1')} = x_1' \quad \text{u. s. w.},$$

also eine Identität, während aus (27)

$$m_1 \frac{dx_1'}{dt} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \quad \text{u. s. w.},$$

also die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen hervorgehen.

10. Auf die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen — wir wollen sie in der allgemeineren Form (28) und (29) annehmen — läfst sich überaus leicht die Methode des letzten Multiplikators anwenden. Wir müssen hierbei die ständige Voraussetzung festhalten, dafs die X_α, Y_α, Z_α, auch wenn keine Kräftefunktion existiert, nur die Koordinaten und die Zeit, nicht die Geschwindigkeiten enthalten; die Q_α sind daher nur von den q_α, nicht von den p_α abhängig.

Die Gleichungen (28) und (29) lassen sich auch in die Form

$$(30) \qquad dt : dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_k : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_k$$
$$= 1 : \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial T}{\partial p_k} : \left(-\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1\right) : \cdots : \left(-\frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k\right)$$

setzen, so dafs die Differentialgleichung für den Multiplikator des Systems [§ 26, (28)] die Gestalt annimmt

$$\frac{d \log M}{dt} + \sum \frac{\partial \dfrac{\partial T}{\partial p_\alpha}}{\partial q_\alpha} + \sum \frac{\partial \left(-\dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha\right)}{\partial p_\alpha} = 0$$

oder, da $\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\alpha} = 0$ ist,

$$\frac{d \log M}{dt} + \sum \frac{\partial^2 T}{\partial p_\alpha \partial q_\alpha} - \sum \frac{\partial^2 T}{\partial q_\alpha \partial p_\alpha} = 0$$

oder

$$\frac{d \log M}{dt} = 0,$$

somit

$$(31) \qquad M = \text{Const.}$$

Der Multiplikator des Hamilton'schen Gleichungssystems ist also, wie derjenige der Gleichungen der freien Bewegung, eine *Konstante.*

§ 30.

Das Hamilton'sche Prinzip der variierenden Wirkung und seine Verwendung zur Umformung der Bewegungsgleichungen.

1. Die weitere Theorie der Hamilton'schen Gleichungen ist enge verknüpft mit einem Prinzipe, welches Hamilton im Gegensatz zu dem früheren, dem der stationären Wirkung, als dasjenige der variierenden Wirkung bezeichnet.

Bei dem ersten Hamilton'schen Prinzipe wurde der Wert des Ausdrucks $\int_{t_0}^{t_1}(T+U)dt$ unter Festhaltung der Anfangs- und Endpositionen verglichen für den wirklich infolge der Kräfte eingeschlagenen Weg und für irgend welche anderen Wege. Jetzt wollen wir die Annahme fester Anfangs- und Endpositionen aufgeben, dafür aber denselben Ausdruck nur für solche Wege vergleichen, welche bei den verschiedenen Anfangs- und Endpositionen und den gegebenen Kräften und Bedingungen wirklich möglich sind. Um die Sache klar zu machen, bemerken wir, daſs infolge der gegebenen Kräfte sich ein Punktesystem von gegebenen Anfangspositionen aus auf unendlich vielen Wegen weiterbewegen kann, je nach der Richtung und Gröſse der Anfangsgeschwindigkeit. Sind Anfangs- und Endpositionen gegeben, so werden in jedem einzelnen Falle die letztgenannten Gröſsen in geeigneter Weise bestimmt werden müssen, damit wirklich die richtigen Endpositionen bei den vorgeschriebenen Kräften erreicht werden. Diese Anfangs- und Endpositionen nun denken wir uns um unendlich kleine Strecken verschoben, jedoch natürlich nur so, daſs die Verschiebungen keinen Widerspruch gegen die Bedingungsgleichungen involvieren; hierdurch erleiden auch die notwendigen Anfangsgeschwindigkeiten und ihre Richtungen Variationen, während nach Festsetzung dieser Gröſsen die jeweiligen Wege durch die Kräfte nebst den Bedingungsgleichungen völlig bestimmt sind. Für diese nur infolge der Variation der Anfangs- und Endpositionen oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Bewegungskonstanten, verschiedenen Wege sollen die Werte der Gröſse

$$V=\int_{t_0}^{t}(T+U)dt \tag{1}$$

verglichen werden. Hamilton bezeichnet diese Gröſse V als die charakteristische Funktion der Bewegungsgleichungen*).

2. Da die Anfangs- und Endzeit der Bewegung konstant beibehalten wird, so ist, wenn wir die q_α und q'_α als abhängige Variabeln ansehen,

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t}(T+U)dt &= \int_{t_0}^{t}\delta(T+U)dt = \int_{t_0}^{t}\sum\left[\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\delta q'_\alpha + \frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right]dt \\ &= \int_{t_0}^{t}\sum\left[\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\frac{d\delta q_\alpha}{dt} + \frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right]dt \\ &= \left[\sum\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\delta q_\alpha\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t}\sum\left[\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha} - \frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}}{dt}\right]\delta q_\alpha dt.\end{aligned}$$

*) Auch für die früher eingeführte Funktion H wird dieselbe Bezeichnung gebraucht. — Die Endzeit und die Endpositionen werden späterhin als Variabeln angesehen, was wir jetzt schon durch die Bezeichnung andeuten.

Die Variationen für t_0 und t dürfen diesmal nicht vernachlässigt werden; wir unterscheiden die Anfangs- und Endwerte der Koordinaten als q_α^0 und q_α u. s. w. Die Summe unter dem Integralzeichen verschwindet nach § 29, (9); denn die Bewegungsgleichungen stehen hier in Geltung, weil nur wirkliche Bewegungen in Betracht gezogen werden. Setzen wir endlich wieder

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} = p_\alpha,$$

so erhalten wir das Prinzip der variierenden Wirkung in der Gleichung

$$(2) \qquad \delta V = \delta \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt = \sum p_\alpha \delta q_\alpha - \sum p_\alpha^0 \delta q_\alpha^0 .$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Bedingungsgleichungen, auch wenn die Koordinaten nicht so gewählt sind, daſs sie die Bedingungen von selbst befriedigen; doch werden wir das letztere in Zukunft annehmen.

Es sei noch bemerkt, daſs die Variation nur dann vollständig ist, wenn t als unabhängige, nicht variierte Variable angesehen wird.

3. In der Gleichung (2) sind die Gröſsen T, U, p_α vor der Integration der Bewegungsgleichungen nicht als Funktionen von t allein anzusehen; es ist also V nicht als bekannte Funktion zu betrachten, da erst nach Darstellung von $T + U$ durch t die Integration möglich wird. Denken wir uns indessen für den Augenblick die Integration der Bewegungsgleichungen ausgeführt, was durch $2k$ Integrale geschieht, so sind q_α und p_α sowohl wie auch V als Funktionen von t ausgedrückt. Auſser der additiven Konstanten, welche durch Ausführung der Integration $\int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt$ veranlaſst wird, sind $2k$ Integrationskonstanten vorhanden, als welche wir die Werte q_α^0 und p_α^0 benutzen können. Diese $2k$ Konstanten q_α^0 und p_α^0 bilden mit t, q_α und p_α zusammen ein System von $4k + 1$ Gröſsen, welche durch $2k$ Relationen — die $2k$ Integrale — verbunden sind. Wir können uns daher die p_α und p_α^0 durch t, q_α und q_α^0 ausgedrückt denken. Auf dieser Darstellungsweise beruhen die folgenden Untersuchungen.

Vor allen Dingen führen wir in V, welches nach vollzogen gedachter Integration auſser t nur noch die Konstanten q_α^0 und p_α^0 enthält, mittels jener Beziehungen statt der p_α^0 die q_α und q_α^0 ein. Wir betrachten daher in der Folge V als Funktion von t, q_α und q_α^0.

4. Unter dieser Hypothese variieren wir V nach den q_α und q_α^0, lassen aber wie oben t ungeändert. Wir erhalten

$$(3) \qquad \delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0} \delta q_\alpha^0$$

und durch Zusammenstellung mit (2)

(4) $$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = p_\alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0} = - p_\alpha^0.$$

Ferner ist nach (1)

(5) $$\frac{dV}{dt} = T + U$$

oder, da V die Zeit t sowohl explizite als auch implizite durch die q_α enthält*),

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} = T + U$$

oder mit Benutzung von (4)

(6) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} - (T + U) = 0$$

Nun ist aber

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}, \quad \frac{dq_\alpha}{dt} = q_\alpha'$$

und daher unter Benutzung von § 29, (18)

(7) $$\sum p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} = \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} q_\alpha' = 2T,$$

wodurch (6), wenn wieder

$$H = T - U$$

gesetzt wird, in die einfache Gleichung

(8) $$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

übergeht.

Hierin kann H als Funktion von t, q_α und p_α, also nach (4) auch von t, q_α und $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$ angesehen werden. Bezeichnen wir bei H die Argumente durch eine beigesetzte Klammer, so ist statt (8) zu schreiben

(9) $$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \ldots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0.$$

Da H bekannt ist**), so haben wir für V eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den $(k+1)$ unabhängigen Variabeln t und q_α.

Die Integration von (9) liefert ein vollständiges Integral mit $(k+1)$ willkürlichen Konstanten, als welche die q_α^0 und die erwähnte additive Konstante betrachtet werden können.

5. Ist die Integration von (9) gelungen, hat man also V als Funktion

*) Nicht etwa durch die als konstant gedachten Gröfsen q_α^0.

**) U ist die bekannte Kräftefunktion, T aber ein Ausdruck von stets gleichbleibender Form.

von t, q_α, q_α^0 dargestellt, so hat man damit sofort die vollständig wie auch die einfach integrierten Bewegungsgleichungen. Man braucht zu diesem Zwecke nur die Gleichungen (4) zu bilden, indem man V nach den q_α und q_α^0 partiell differentiiert und die erhaltenen Werte p_α, resp. $-p_\alpha^0$ gleichsetzt. Die k letzten Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0} = -p_\alpha^0 \tag{10}$$

sind die vollständigen Integrale; sie enthalten nämlich, da die additive Konstante von V durch die Differentiation wegfällt, die $2k$ Konstanten q_α^0 und p_α^0 und die Variabeln t und q_α, also die Zeit und die Koordinaten. Die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \tag{11}$$

entsprechen nur einer einfachen Integration der Bewegungsgleichungen; denn sie enthalten noch die q_α', von welchen die p_α Funktionen sind; auch kommen in ihnen nur die k Konstanten q_α^0 vor*). Immerhin können diese Gleichungen auch von Nutzen sein.

Das Hauptergebnis der Hamilton'schen Untersuchungen ist also das folgende:

Die Integration der k Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung, welche nach Beseitigung der überflüssigen Variabeln mittels der Bedingungsgleichungen übrig geblieben sind, läſst sich auf die Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (9), welche die Zeit und die Koordinaten als unabhängige Variable enthält, zurückführen. Ist die abhängige Variable V dieser Gleichung durch Integration gefunden, so braucht man nur ihre partiellen Differentialquotienten nach den konstanten Anfangskoordinaten neuen Konstanten gleichzusetzen, um die integrierten Bewegungsgleichungen zu erhalten.

Umgekehrt liefert auch, wie unschwer nachzuweisen ist, die Integration der Bewegungsgleichungen ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (9).

6. Um diese etwas abstrakten Untersuchungen anschaulicher zu machen, wollen wir für den Fall der freien Bewegung die q_α durch die Kartesischen Koordinaten x_α, y_α, z_α ersetzen. Wie in § 29, 9 haben wir

$$p_1 = m_1 x_1' \quad \text{u. s. w.};$$

weiter ist $p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}$ u. s. w. zu setzen, wodurch T in

$$T = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{m_\alpha}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_\alpha}\right)^2\right]$$

*) Weil V nach Obigem als Funktion von t, q_α und q_α^0 anzusehen ist.

übergeht. Die partielle Differentialgleichung (9) wird daher

$$(13)\quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{m_\alpha}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_\alpha}\right)^2\right] - U = 0.$$

Ist V durch Integration gefunden, so sind die einfachen Integrale nach (11)

$$(14)\quad \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} = m_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} \text{ u. s. w.,}$$

die vollständigen Integralgleichungen aber, falls die Konstanten x_α^0, y_α^0, z_α^0 sind, nach (10)

$$(15)\quad \frac{\partial V}{\partial x_\alpha^0} = c_\alpha \text{ u. s. w.,}$$

worin die c_α u. s. w. neue Konstanten bedeuten.

7. Wir haben bis jetzt angenommen, dafs die Konstanten, nach welchen V differentiiert werden mufs, um die linken Seiten der integrierten Bewegungsgleichungen zu liefern, die Anfangswerte q_α^0 sind. Indessen kann man statt dieser irgend welche andere k nicht additive, willkürliche Konstanten a_α, welche in dem Integrale vorkommen und natürlich Funktionen der q_α^0 sind, hierzu benutzen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial q_1^0}\frac{\partial q_1^0}{\partial a_0} + \frac{\partial V}{\partial q_2^0}\frac{\partial q_2^0}{\partial a_\alpha} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial q_k^0}\frac{\partial q_k^0}{\partial a_\alpha},$$

und wenn man diese k Ausdrücke k beliebigen Konstanten gleichsetzt und beachtet, dafs die Koeffizienten $\frac{\partial q_\beta^0}{\partial a_\alpha}$ eben auch nur Konstanten (aus den a_α oder q_β^0 zusammengesetzt) sind, so folgen durch Auflösung der k Gleichungen auch für die $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0}$ konstante Werte. Die Systeme

$$(15\text{a})\quad \frac{\partial V}{\partial a_\alpha} = C_\alpha \quad\text{und}\quad \frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0} = c_\alpha$$

können daher bei der völligen Willkürlichkeit der C_α und c_α als gleichbedeutend mit (11) und (10) angesehen werden.

Hat man also V aus (9) bestimmt, so liefern die partiellen Differentialquotienten nach irgend einem System von k nicht additiven Integrationskonstanten, neuen Konstanten gleichgesetzt, die fertigen Integrale der Bewegungsgleichungen.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dafs die Zurückführung der Integration der Bewegungsgleichungen auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung im allgemeinen nicht als eine Reduktion, sondern nur als eine Transformation angesehen werden darf. Doch kann unter Umständen, wie dies auch sonst der Fall ist, durch die Transformation die Auffindung des Integrals erleichtert werden. Der allgemeinen Integration der Bewegungsgleichungen kommen wir durch die Hamilton'schen Untersuchungen um keinen Schritt näher.

8. Wenn in U, also auch in H, die Zeit nicht explizite vorkommt, läſst sich die partielle Differentialgleichung (9) auf eine andere zurückführen, welche eine unabhängige Variable weniger enthält.

In diesem Falle setzen wir

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \tag{16}$$

und denken uns mittels dieser Gleichung (in der es nach Ausführung der Integration vorkommt) t als Funktion der neuen Variabeln a, der q_α und der Integrationskonstanten, für welche wir jetzt allgemein a_α schreiben wollen, ausgedrückt. Hiernach definieren wir eine neue Gröſse durch die Gleichung

$$W = V - at, \tag{17}$$

worin wir t in der angegebenen Weise ausgedrückt denken. W ist also eine Funktion der Gröſsen q_α, a_α und a.

Behandeln wir nun V nach wie vor noch als Funktion von t, so ist bei Benutzung von (16)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a} &= \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial a} - a\frac{\partial t}{\partial a} - t = -t, \\ \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} &= \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_\alpha} - a\frac{\partial t}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \\ \frac{\partial W}{\partial a_\alpha} &= \frac{\partial V}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial a_\alpha} - a\frac{\partial t}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial a_\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Durch (16) und (18) wird aus (9), da t in H nicht explizite enthalten ist,

$$a + H\left(q_1, q_2, \ldots q_k, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{19}$$

eine Differentialgleichung, welche keinen Differentialquotienten nach a enthält, so daſs a in ihr die Rolle einer Konstanten spielt.

Hat man für (19) ein vollständiges Integral mit k Konstanten gefunden, so erhält man V mittels (17) und (18) in der Form

$$V = W + at = W - a\frac{\partial W}{\partial a}, \tag{20}$$

worin jedoch a wieder mittels der ersten Gleichung (18) durch t zu ersetzen ist. Hiernach würde V statt $(k + 1)$ nur k Konstanten enthalten; da indessen die Entwicklungen in keiner Weise geändert werden, wenn $t - t_0$ an Stelle von t tritt, so kann durch t_0 die fehlende Konstante ersetzt werden.

Übrigens braucht man, um die fertigen Integrale der Bewegungsgleichungen hinzuschreiben, nicht auf V zurückzugehen. Bezeichnen $b_1, b_2, \ldots b_{k-1}$ willkürliche Konstanten, so kann man nach (18) für (10) und (11) schreiben: (W enthält außer einer additiven nur $(k-1)$ Konstanten)

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \; \dfrac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \; \ldots \; \dfrac{\partial W}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial a} = t_0 - t, \\ \dfrac{\partial W}{\partial q_\alpha} = p_\alpha . \end{cases}$$

Beachtet man noch, daſs (19) für $a =$ Const., da $H = T - U$ ist, die Gleichung der lebendigen Kraft darstellt, so kann man das Schluſsresultat, welches für die wichtigsten in der Praxis vorkommenden Fälle anwendbar ist, folgendermaſsen in Worte fassen:

Enthält die Kräftefunktion U die Zeit nicht explizite, so kann man in der Gleichung der lebendigen Kraft, welche hier stets gültig ist,

$$a + T - U = 0,$$

zunächst die q_α und p_α einführen, dann aber p_α durch $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ersetzen. Hat man für die so erhaltene partielle Differentialgleichung mit der abhängigen Variabeln W ein vollständiges Integral gefunden, welches die nicht additiven Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ enthält, so sind die Integrale der Bewegungsgleichungen durch die Gleichungen (21) gegeben.

9. Im Falle eines freien Systems geht die partielle Differentialgleichung (19), analog (13), in

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_\alpha} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_\alpha} \right)^2 \right] = U - a$$

über.

Den Fall, daſs keine Kräftefunktion vorhanden ist, wollen wir nicht weiter verfolgen.

Ehe wir zu der schönsten Anwendung der Hamilton'schen Methode, der Integration der Bewegungsgleichungen für die Attraktion eines materiellen Punktes nach zwei festen Zentren, übergehen, müssen wir eine Hilfsuntersuchung über elliptische Koordinaten vorherschicken, die auch sonst von Nutzen ist.

§ 31.

Elliptische Koordinaten.

1. Die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

in welcher

$$a^2 > b^2 > c^2$$

sein soll, stellt ein dreiachsiges Ellipsoid dar, dessen Halbachsen a, b und c sind. Die Hauptschnitte desselben, d. h. seine Schnitte mit den Koordinatenebenen, sind Ellipsen, deren Gleichungen man aus (1) durch Nullsetzen von x, y, z erhält; sie lauten

$$(2) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Entfernungen der Brennpunkte vom Mittelpunkte, also die linearen Exzentrizitäten dieser Ellipsen, werden durch die Gröſsen

$$(3) \qquad \sqrt{b^2 - c^2}, \quad \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \sqrt{a^2 - b^2}$$

dargestellt. Die groſse Achse fällt bei der ersten Ellipse in die y-Achse, bei den beiden andern in die x-Achse.

2. Man nennt zwei zentrische (d. h. ein Zentrum besitzende) Kegelschnitte konfokal, wenn sie dieselben Brennpunkte haben; zwei zentrische Flächen zweiter Ordnung heiſsen konfokal, wenn ihre Hauptschnitte dieselben Brennpunkte besitzen.

Will man eine Fläche zweiter Ordnung aufstellen, welche mit (1) konfokal ist, so muſs man die Halbachsen a^2, b^2, c^2 derart ändern, daſs die Gröſsen (3) ungeändert bleiben. Dies ist aber offenbar dann und nur dann der Fall, wenn an Stelle von a^2, b^2, c^2 die Werte

$$a^2 + \lambda, \quad b^2 + \lambda, \quad c^2 + \lambda$$

treten, worin λ ganz willkürlich ist.

Die Gleichung einer mit (1) konfokalen Fläche zweiter Ordnung lautet daher

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

Da λ auch negativ werden kann, braucht (4) nicht notwendig ein Ellipsoid darzustellen; es sind vielmehr folgende Fälle zu unterscheiden:

a) $a^2 + \lambda > 0$, $b^2 + \lambda > 0$, $c^2 + \lambda > 0$: Ellipsoid.
b) $a^2 + \lambda > 0$, $b^2 + \lambda > 0$, $c^2 + \lambda < 0$: einschaliges Hyperboloid.
c) $a^2 + \lambda > 0$, $b^2 + \lambda < 0$, $c^2 + \lambda < 0$: zweischaliges Hyperboloid.

Im zweiten und dritten Falle sind zwei Hauptschnitte Hyperbeln.

Werden alle drei Nenner negativ, so erhält man keine reelle Fläche.

Wird einer der Nenner, z. B. $c^2 + \lambda$, gleich Null, so reduziert sich die Gleichung auf die Form

$$z^2 = 0,$$

d. h. sie geht in die Gleichung der xy-Ebene über, und Analoges gilt für die beiden andern Fälle.

3. Sei nun ein bestimmter Punkt x, y, z fest vorgelegt. Wir fragen: wie viele der konfokalen Flächen (4) gehen durch x, y, z, und welcher Art sind sie?

Wie man durch Wegschaffen der Nenner von (4) erkennt, ist diese Gleichung in λ vom dritten Grade. Um uns zu überzeugen, ob die Lösungen derselben alle reell sind, lassen wir λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. So lange $\lambda < -a^2$ ist, hat die linke Seite von (4) einen negativen Wert; für $\lambda = -a^2$ wird sie unendlich.

Ist λ unendlich wenig gröfser als $-a^2$, so ist die linke Seite unendlich grofs im Positiven; denn gegen das erste unendlich grofse positive Glied kommen die andern nicht in Betracht. Nimmt aber λ zu, bis es unendlich wenig unterhalb $-b$ liegt, so wird die linke Seite unendlich grofs im Negativen; daher mufs dieselbe, während λ das Intervall von $-a^2$ bis $-b^2$ durchläuft, alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchlaufen, also auch einmal den Wert 1, den der rechten Seite, annehmen. Es liegt daher eine Lösung, sie heifse λ_3, zwischen $-a^2$ und $-b^2$. Wird λ unendlich wenig gröfser als $-b^2$, so wird die linke Seite wieder positiv unendlich, um bei der Annäherung von λ an $-c^2$ wieder ins negativ Unendliche überzugehen. Daher liegt auch eine Lösung $\lambda = \lambda_2$ zwischen $-b^2$ und $-c^2$. Überschreitet λ den Wert $-c^2$, so ist die linke Seite anfänglich positiv unendlich, um für $\lambda = +\infty$ sich der Null zu nähern. Dazwischen wird sie abermals gleich 1, d. h. ein $\lambda = \lambda_1$ ist gröfser als $-c^2$.

Die Gleichung (4), in der für x, y, z bestimmte Werte angenommen werden, liefert also für λ immer drei reelle Werte λ_1, λ_2, λ_3, und zwar ist

$$\lambda_1 > -c^2$$
$$-c^2 > \lambda_2 > -b^2$$
$$-b^2 > \lambda_3 > -a^2.$$

Daher stellt (4), wenn jetzt x, y, z wieder als variabel angenommen werden, für $\lambda = \lambda_1$ ein Ellipsoid, für $\lambda = \lambda_2$ ein einschaliges Hyperboloid und für $\lambda = \lambda_3$ ein zweischaliges Hyperboloid dar. Also:

Durch jeden Punkt x, y, z gehen drei Flächen des Systems (4), von denen eine ein Ellipsoid, eine ein einschaliges und eine ein zweischaliges Hyperboloid ist*).

4. Drei beliebige abgebraische Flächen schneiden sich im allgemeinen in einer endlichen Anzahl von Punkten; man kann daher sagen, dafs die Lage eines Punktes durch drei abgebraische Flächen, welche durch ihn gehen, mit endlicher Vieldeutigkeit bestimmt sei, singuläre Fälle abgerechnet. Sind drei Systeme solcher Flächen gegeben, in denen jedes Individuum durch einen Spezialwert eines Parameters fixiert wird, so

*) Das zweischalige Hyperboloid hat mit der yz-Ebene keine reelle Schnittlinie gemein; trotzdem kann man der imaginären Schnittlinie die beiden reellen Brennpunkte zuschreiben, welche der Schnitt des Ellipsoids (1) mit dieser Ebene besitzt.

kann man diese Parameter als Koordinaten zur Bestimmung beliebiger Punkte ansehen. Denn ist durch Festsetzung je eines Parameters in jedem der drei Systeme je eine Fläche fixiert, so schneiden sich diese drei Flächen in gewissen Punkten, bestimmen also die Lage eines Punktes als Schnittpunkt mit endlicher Vieldeutigkeit.

So wird durch das Kartesische Koordinatensystem ein Punkt in der Weise festgelegt, dafs man ihn als Schnittpunkt dreier Ebenen denkt, welche den drei Koordinatenebenen parallel sind und durch ihren Abstand von letzteren fixiert werden. Die räumlichen Polarkoordinaten kann man durch ein System konzentrischer Kugeln und durch zwei Ebenensysteme, welche durch den Mittelpunkt des ersteren gehen, repräsentieren u. s. w.

Die Gleichung (4) stellt ein System von Ellipsoiden, eines von einschaligen und eines von zweischaligen Hyperboloiden dar, wenn man λ zwischen den angegebenen Grenzen variiert. Geben wir je ein λ_1, λ_2, λ_3 bestimmt an, so ist hierdurch je eine Fläche dieser drei Gattungen eindeutig festgesetzt, und diese drei Flächen schneiden sich im allgemeinen in acht Punkten, welche hierdurch als bestimmt anzusehen sind. Wir können also die λ_1, λ_2, λ_3 als ein elliptisches Koordinatensystem betrachten. Die Lage jedes Punktes wird — freilich achtdeutig — dadurch angegeben, dafs man die Parameter λ_1, λ_2, λ_3 für ihn festsetzt; diese bestimmen drei Flächen der genannten Gattungen, die sich in dem Punkte schneiden.

Die Vieldeutigkeit der Bestimmung durch elliptische Koordinaten bringt nach den Bemerkungen von § 29, 1 bei mechanischen Problemen keine besonderen Nachteile mit sich.

5. Läfst man a^2 ins Unendliche wachsen, so geht (4) in

$$\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{5}$$

über. Es ist dies ein System von konfokalen elliptischen und hyperbolischen Cylindern, welche aus der yz-Ebene ein System von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln ausschneiden, wodurch wir auch für die Ebene ein elliptisches Koordinatensystem erhalten. Einem bestimmten Punkte y, z entspricht ein $\lambda=\lambda_1$ und $\lambda=\lambda_2$, so dafs

$$\lambda_1>-c^2, \quad -b^2<\lambda_2<-c^2$$

ist. λ_1 bestimmt das System von Ellipsen, λ_2 dasjenige von Hyperbeln. Durch die Schnittpunkte beider Systeme sind die Punkte der Ebene vierdeutig bestimmt.

Nimmt man $-\lambda_3$ als unendlich und von a^2 nur um eine endliche Gröfse verschieden an, so erhält man zu den Cylindersystemen noch ein System von Ebenenpaaren, welche der yz-Ebene parallel sind.

6. Will man die drei elliptischen Koordinaten eines räumlichen Punktes x, y, z bestimmen, so mufs man die kubische Gleichung (4) nach λ auflösen; die Lösungen λ_1, λ_2, λ_3 sind die elliptischen Koordinaten

Ebenso hat man zur Bestimmung der elliptischen Koordinaten eines Punktes y, z in der Ebene die quadratische Gleichung (5) nach λ zu lösen.

Sind umgekehrt die elliptischen Koordinaten bekannt und werden die Kartesischen gesucht, so hat man bei drei Koordinaten x, y, z aus den drei Gleichungen

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_1}&=1,\\ \frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_2}&=1,\\ \frac{x^2}{a^2+\lambda_3}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_3}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_3}&=1\end{aligned}\right.$$

durch Elimination zu bestimmen. Man erhält für x^2, y^2, z^2 nur je einen Wert, während x, y, z positiv oder negativ genommen werden können, so daſs sich im ganzen acht Punkte ergeben; dieselben liegen symmetrisch in den acht Teilen des Raumes, in welche dieser durch die drei Koordinatenebenen geteilt wird.

Die Elimination selbst führt man am besten allmählich durch. Multipliziert man die Gleichungen mit $c^2+\lambda_1$, $c^2+\lambda_2$, $c^2+\lambda_3$ und subtrahiert dann die zweite und dritte jeweilig von der ersten, so erhält man

$$\left(\frac{c^2+\lambda_1}{a^2+\lambda_1}-\frac{c^2+\lambda_2}{a^2+\lambda_2}\right)x^2+\left(\frac{c^2+\lambda_1}{b^2+\lambda_1}-\frac{c^2+\lambda_2}{b^2+\lambda_2}\right)y^2=\lambda_1-\lambda_2,$$
$$\left(\frac{c^2+\lambda_1}{a^2+\lambda_1}-\frac{c^2+\lambda_3}{a^2+\lambda_3}\right)x^2+\left(\frac{c^2+\lambda_1}{b^2+\lambda_1}-\frac{c^2+\lambda_3}{b^2+\lambda_3}\right)y^2=\lambda_1-\lambda_3$$

oder, wenn man die Identitäten

$$(7)\quad \frac{c^2+\lambda_1}{a^2+\lambda_1}-\frac{c^2+\lambda_2}{a^2+\lambda_2}=\frac{(a^2-c^2)(\lambda_1-\lambda_2)}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}\quad \text{u. s. w.}$$

beachtet und die gemeinsamen Faktoren $\lambda_1-\lambda_2$ und $\lambda_1-\lambda_3$ wegdividiert,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{(a^2-c^2)x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{(b^2-c^2)y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}&=1,\\ \frac{(a^2-c^2)x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_3)}+\frac{(b^2-c^2)y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_3)}&=1.\end{aligned}\right.$$

Um auch y^2 zu eliminieren, multipliziert man die erste Gleichung (7) mit $b^2+\lambda_2$, die zweite mit $b^2+\lambda_3$ und erhält durch Subtraktion

$$\frac{a^2-c^2}{a^2+\lambda_1}\left[\frac{b^2+\lambda_2}{a^2+\lambda_2}-\frac{b^2+\lambda_3}{a^2+\lambda_3}\right]x^2=\lambda_2-\lambda_3$$

oder

$$\frac{(a^2-c^2)(a^2-b^2)x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}=1$$

oder endlich, wenn die analogen Gleichungen zugefügt werden,

$$(9)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}, \\ y^2 = \dfrac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \\ z^2 = \dfrac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}. \end{cases}$$

Daſs die rechten Seiten dieser Gleichungen, wie notwendig, stets positiv sind, ist leicht nachzuweisen. In dem Ausdrucke für x^2 sind alle Faktoren positiv, in demjenigen für y^2 sind $b^2+\lambda_3$ und b^2-a^2 negativ, in demjenigen für z^2 sind alle Faktoren auſser dem ersten des Zählers negativ.

Für die planimetrische Aufgabe erhält man entweder durch Anwendung des gleichen Verfahrens auf die Relationen, welche für $\lambda=\lambda_1$ und $\lambda=\lambda_2$ aus (5) hervorgehen, oder durch Unendlichsetzen von a^2 und $-\lambda_3$ in (9) die Gleichungen

$$(9\text{a})\quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{b^2-c^2}, \\ z^2 = \dfrac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{c^2-b^2}. \end{cases}$$

Durch die Relationen (9) und (9a) ist der Übergang von elliptischen Koordinaten zu Kartesischen ermöglicht.

7. Aus (9) folgen

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}$$
$$= \frac{a^2+\lambda_3}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)} - \frac{b^2+\lambda_3}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} + \frac{c^2+\lambda_3}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}$$

oder, wenn man rechts Alles auf denselben Nenner bringt,

$$(10)\quad \frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)} = 0$$

und zwei analoge Gleichungen.

8. Je zwei konfokale Flächen stehen aufeinander senkrecht, d. h. ihre Normalen bilden längs ihrer Schnittlinie rechte Winkel miteinander.

Bei einer beliebigen Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

stehen bekanntlich die Richtungskosinus der Normalen im Punkte x, y, z im Verhältnisse

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die Bedingung dafür, daſs die Normalen zweier Flächen

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad f_1(x, y, z) = 0$$

längs ihrer Schnittlinie rechte Winkel miteinander bilden, dafs also die Kosinus dieser Winkel verschwinden, ist daher

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial z}=0. \tag{11}$$

Für eine Fläche (4) ist aber

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2+\lambda},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2+\lambda},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{c^2+\lambda};$$

die Gleichung (11) für zwei dieser Flächen wird daher mit einer der Gleichungen (10) identisch.

Schneiden sich aber je zwei verschiedenen Systemen angehörige Flächen — demselben Systeme angehörige Flächen schneiden sich überhaupt nicht — rechtwinklig, so stehen auch die drei Schnittlinien von drei durch einen Punkt gehenden Flächen paarweise aufeinander senkrecht. Die elliptischen Koordinaten sind orthogonal.

Zugleich geht hieraus hervor, dafs auch die ebenen elliptischen Koordinaten orthogonal sind.

Durch unendlich viele, jeweilig unendlich benachbarte Flächen der drei räumlichen Systeme wird also der ganze Raum in unendlich viele unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda zerlegt.

Beiläufig möge bemerkt werden, dafs die Kurven, in welchen eine Fläche des einen Systems durch diejenigen der beiden andern geschnitten werden, die Krümmungslinien dieser Fläche sind.

9. Infolge der Orthogonalität des elliptischen Koordinatensystems erhalten manche Differentialrelationen, insbesondere auch der Ausdruck für das Geschwindigkeitsquadrat, in diesen Koordinaten eine einfache Gestalt.

Nimmt man von den Ausdrücken (9) die Logarithmen und differentiiert dann, so folgt

$$\left\{\begin{aligned}\frac{2dx}{x}&=\frac{d\lambda_1}{a^2+\lambda_1}+\frac{d\lambda_2}{a^2+\lambda_2}+\frac{d\lambda_3}{a^2+\lambda_3},\\ \frac{2dy}{y}&=\frac{d\lambda_1}{b^2+\lambda_1}+\frac{d\lambda_2}{b^2+\lambda_2}+\frac{d\lambda_3}{b^2+\lambda_3},\\ \frac{2dz}{z}&=\frac{d\lambda_1}{c^2+\lambda_1}+\frac{d\lambda_2}{c^2+\lambda_2}+\frac{d\lambda_3}{c^2+\lambda_3}\end{aligned}\right. \tag{12}$$

und hieraus

$$4(dx^2+dy^2+dz^2)=\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)^2}\right]d\lambda_1{}^2 + \cdots \tag{13}$$

$$+2\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}\right]d\lambda_1 d\lambda_2 + \cdots.$$

Nun ist aber nach (9)

$$L = \frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)^2}$$
$$= \frac{(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2+\lambda_1)(a^2-c^2)(a^2-b^2)} + \frac{(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2+\lambda_1)(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$
$$+ \frac{(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2+\lambda_1)(c^2-b^2)(c^2-a^2)}.$$

Die etwas umständliche Umrechnung dieses Ausdrucks kann man vermeiden, wenn man beachtet, daſs L für $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_1 = \lambda_3$ verschwindet, da es dann mit den Ausdrücken (10) übereinstimmt; daſs ferner der Zähler, nachdem Alles auf denselben Nenner gebracht ist, auch für

$$a^2 - b^2 = 0, \quad a^2 - c^2 = 0, \quad b^2 - c^2 = 0$$

verschwinden muſs, da dies mit dem Nenner der Fall ist, ohne daſs L hierfür unendlich wird, weil sich je zwei Glieder mit dem Nenner alsdann wegheben. Der Zähler muſs daher den Faktor

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$$

besitzen, oder er muſs vielmehr ganz damit übereinstimmen, da z. B. das Glied $\lambda_1{}^2 a^4 (b^2 - c^2)$ in diesem Faktor und zugleich in dem entwickelten Zähler vorkommt. Daher wird

$$(14) \qquad L = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}.$$

Die beiden analogen Ausdrücke bezeichnen wir mit M und N.

Da ferner in (13) die Glieder mit $d\lambda_1\, d\lambda_2$ u. s. w. nach (10) verschwinden, so wird

$$(15) \qquad 4(dx^2 + dy^2 + dz^2) = L d\lambda_1{}^2 + M d\lambda_2{}^2 + N d\lambda_3{}^2$$

oder, wenn T wieder die lebendige Kraft eines Punktes mit der Masse m und ein Strich die Differentiation nach t bezeichnet,

$$(16) \quad 8T = 4m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = m[L\lambda_1'^2 + M\lambda_2'^2 + N\lambda_3'^2].$$

Für das ebene System folgt aus (14)

$$(17) \qquad L = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}, \quad M = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)},$$

während man für T einen analogen Ausdruck erhält.

10. Aus (15) ist noch ersichtlich, daſs ein Linienelement einer der Schnittkurven, welches zwischen zwei benachbarten Flächen des orthogonalen Systems liegt, durch

$$(18) \qquad \sqrt{L}\,d\lambda_1, \quad \sqrt{M}\,d\lambda_2, \quad \sqrt{N}\,d\lambda_3$$

dargestellt ist. Ein solches Element muſs nämlich mit dem Streckenelement $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ zusammenfallen, wenn man zwei der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ungeändert läſst, das dritte aber um $d\lambda_\alpha$ ändert.

Analoges gilt für das ebene System.

11. Wir wollen nun noch die partielle Differentialgleichung für die

Hamilton'sche Funktion W in elliptischen Koordinaten aufstellen. Nach § 30, 19 lautet dieselbe

$$a + T - U = 0,$$

wenn in T nach Einführung der q_α und p_α die letzteren Gröfsen, d. h. die $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}$, durch $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ersetzt werden. Nun ist aber nach (16), wenn wir uns auf einen Punkt beschränken,

$$4\frac{\partial T}{\partial \lambda_1'} = mL\lambda_1', \quad 4\frac{\partial T}{\partial \lambda_2'} = mM\lambda_2', \quad 4\frac{\partial T}{\partial \lambda_3'} = mN\lambda_3',$$

wofür

$$4\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}, \quad 4\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \quad 4\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}$$

einzuführen sind. Es ist hiernach

$$\lambda_1' = \frac{4\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}}{mL} \text{ u. s. w.}$$

zu setzen, so dafs die Differentialgleichung schliefslich lautet:

$$(19) \quad a + \frac{2}{m}\left[\frac{1}{L}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{1}{M}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2\right] - U = 0.$$

Entsprechend drückt sich die Differentialgleichung beim ebenen System aus.

§ 32.

Die Attraktion nach zwei festen Zentren.

1. Während das Problem der drei Körper, welche sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze anziehen, noch ungelöst ist, läfst sich die Aufgabe, die Bewegung eines materiellen Punktes zu bestimmen, welcher von zwei festen Zentren aus nach demselben Gesetze angezogen wird, ohne sonderliche Schwierigkeit behandeln. Für die Astronomie ist das Resultat freilich nicht zu verwerten; denn die Voraussetzung zweier attrahierenden Körper, welche einen dritten in Bewegung setzen, sich aber gegenseitig gar nicht oder nur verschwindend wenig aus ihrer Lage bringen, läfst sich in der Natur in keiner Weise realisieren. Für die Störungstheorie ist das Problem also ohne Wert.

Die Differentialgleichungen der Attraktion nach zwei festen Zentren wurden von Euler für den Fall der Bewegung in einer Ebene, von Lagrange und Legendre allgemein integriert. Jacobi gab die Lösung nach dem Hamilton'schen Verfahren, die im folgenden vorgetragen wird. Koenigsberger stellte in seiner Dissertation: De motu puncti versus duo fixa centra attracti, 1860, das allgemeine Integral durch Thetafunktionen dar. Weitere Angaben findet man in einer Abhandlung von Perlewitz, Schlömilch's Zeitschrift, B. 18, in welcher spezielle Fälle untersucht werden. Die Bewegung kann unter Umständen in einer Ellipse oder Hyperbel verlaufen.

2. Zuerst wollen wir den Fall betrachten, dafs die Bewegung in einer Ebene vor sich geht; dies mufs immer eintreten, wenn die Geschwindigkeitsrichtung in einem Momente mit der Verbindungslinie der beiden Attraktionszentren in einer Ebene liegt. Wir wählen dieselbe zur yz-Ebene, die Verbindungslinie der Zentren zur y-Achse; der Nullpunkt möge in der Mitte zwischen beiden Zentren liegen, so dafs beide um e von ihm abstehen. Sind k und k_1 die Beschleunigungen, welche die Zentren dem bewegten Punkte in der Einheit der Entfernung erteilen, und sind r und r_1 die Entfernungen des Punktes von den Zentren, so ist die Kräftefunktion

$$(1) \qquad U = \frac{k}{r} + \frac{k_1}{r_1},$$

und der Satz von der lebendigen Kraft lautet

$$(2) \qquad T = \frac{k}{r} + \frac{k_1}{r_1} + h,$$

wo h an die Stelle des früheren $-a$ gesetzt ist.

Für die yz-Ebene gilt kein Flächensatz (§ 24, 8).

3. Wir wollen nun elliptische Koordinaten, die sich hier als die zweckmäfsigsten erweisen, einführen und dabei die beiden Zentren zu gemeinsamen Brennpunkten nehmen; die Gleichungen der Ellipsen und Hyperbeln beider Systeme sind in der Form

$$(3) \qquad \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

enthalten, worin

$$(4) \qquad b^2 - c^2 = e^2$$

sein mufs.

Nach § 31, (19) und (17) haben wir die Funktion W, welche sämtliche Integrale der Bewegung liefert, durch die partielle Differentialgleichung (wir nehmen $m = 1$)

$$(5) \qquad \frac{(b^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 = \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} h$$

zu bestimmen. Es sind nur noch in U die elliptischen Koordinaten einzuführen.

Nun ist

$$r^2 = (y - e)^2 + z^2, \quad r_1^2 = (y + e)^2 + z^2$$

oder

$$(6) \qquad r^2 = y^2 + z^2 - 2ey + e^2, \quad r_1^2 = y^2 + z^2 + 2ey + e^2.$$

Nach § 31, (9a) ist aber

$$(7) \quad y^2 + z^2 = \frac{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2) - (c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)}{b^2 - c^2} = b^2 + c^2 + \lambda_1 + \lambda_2,$$

während e^2 aus (4) zu entnehmen ist.

Hiernach und durch weitere Benutzung von § 31, (9a) erhalten wir

$$r^2 = 2b^2 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\sqrt{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} = [\sqrt{b^2+\lambda_1} - \sqrt{b^2+\lambda_2}]^2$$

$$r_1{}^2 = 2b^2 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} = [\sqrt{b^2+\lambda_1} + \sqrt{b^2+\lambda_2}]^2$$

oder

$$(8) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{b^2+\lambda_1} - \sqrt{b^2+\lambda_2}\,, \\ r_1 = \sqrt{b^2+\lambda_1} + \sqrt{b^2+\lambda_2}\,, \end{cases}$$

also

$$(9) \qquad U = \frac{(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + (k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Die Gleichung (5) geht daher über in

$$(10) \qquad (b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2 - (b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2$$
$$= (k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + \frac{1}{2}h\lambda_1 + (k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2} - \frac{1}{2}h\lambda_2.$$

Die Betrachtung dieser Gleichung zeigt, daſs ein Teil ihrer Glieder nur λ_1 und $\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}$, ein Teil nur λ_2 und $\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}$ enthält. Man kann daher ein Integral von (10) finden, indem man die Gleichung, unter gleichzeitiger additiver und subtraktiver Zufügung einer willkürlichen Konstanten β, in zwei Teile zerlegt, welche nur je eine unabhängige Variable enthalten. Wir setzen also

$$(11) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2 = \frac{(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + \frac{1}{2}h\lambda_1 + \beta}{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}\,, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2 = \frac{(k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2} - \frac{1}{2}h\lambda_2 - \beta}{(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}\,, \end{cases}$$

und erhalten nach ausgeführter Integration dieser totalen Differentialgleichungen*)

$$(12) \qquad W = \int\sqrt{\frac{(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + \frac{1}{2}h\lambda_1 + \beta}{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}}\,d\lambda_1$$
$$+ \int\sqrt{\frac{(k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2} - \frac{1}{2}h\lambda_2 - \beta}{(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}}\,d\lambda_2.$$

Die beiden Integrale erweisen sich, nach Wegschaffung der Wurzeln

*) Integriert man die erste Gleichung, so kann die Integrationskonstante noch von λ_2 abhängen; integriert man die zweite, so kann in der Konstanten λ_2 vorkommen. Es ist daher $W = f_1(\lambda_1) + f_2(\lambda_2)$, wo f_1 und f_2 die einzelnen Integrale sind.

unter dem Wurzelzeichen, als elliptische. W enthält aufser der additiven Integrationskonstanten zwei willkürliche Konstanten h und β, ist also ein vollständiges Integral. Nach § 30, (21) sind die fertigen Bewegungsgleichungen*)

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0, \tag{13}$$

worin β_1 eine neue willkürliche Konstante bezeichnet.

4. Geht die Bewegung im Raume vor sich, so dafs der materielle Punkt eine Kurve doppelter Krümmung beschreibt, so denken wir uns durch ihn und die beiden Zentren eine bewegliche Ebene gelegt. Wir können uns dann vorstellen, dafs der Punkt sich in dieser Ebene bewegt, während letztere selbst um die Achse der Zentren eine Rotation ausführt. Beide Teile der Bewegung können getrennt aufgestellt werden. Wenn insbesondere die Bewegung in der rotierenden Ebene bekannt ist, so läfst sich das Gesetz der Rotation dieser Ebene sofort mittels des Flächensatzes angeben, der für eine Ebene gilt, welche senkrecht zur Achse der Zentren steht. Doch erhält man so die letztere Bewegungsgleichung in impliziter Form, so dafs es vorteilhafter erscheint, direkt nach der Hamilton'schen Theorie vorzugehen.

Die Achse der Zentren möge wieder die y-Achse sein und der Nullpunkt wie früher liegen; über die x- und z-Achse ist keine besondere Festsetzung zu machen. Dagegen wollen wir das ebene elliptische Koordinatensystem λ_1 und λ_2 immer in der rotierenden Ebene gelegen denken.

Ist ϱ der senkrechte Abstand des beweglichen Punktes von der y-Achse, φ der Winkel, welchen ϱ mit der positiv gerichteten x-Achse bildet, so haben wir

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad z = \varrho \sin \varphi. \tag{14}$$

Die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung ist hier

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = 2U + 2h, \tag{15}$$

worin wir durch (14) ϱ und φ statt x und z einführen wollen. Es ist

$$\varrho = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \frac{z}{\varrho}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{z}{x^2 + z^2} = -\frac{z}{\varrho^2}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \frac{x}{\varrho^2},$$

also

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{x}{\varrho} - \frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{z}{\varrho^2},$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{z}{\varrho} + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{x}{\varrho^2},$$

*) Dafs h mit $-a$ zu identifizieren ist, erhellt aus der Vergleichung von (2) mit § 30, (19) (s. oben).

so daſs aus (15)

$$(16) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = 2U + 2h$$

wird.

Die Kräftefunktion U hängt nur von den Abständen des materiellen Punktes von den Zentren, also nicht vom Rotationswinkel φ ab. Daher können wir mit (16) eine ähnliche Transformation in bezug auf φ vornehmen, wie § 30, 8 in bezug auf t. Wir setzen, eine neue Variable α einführend,

$$(17) \qquad W_1 = W - \alpha\varphi,$$

indem wir

$$(18) \qquad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \alpha$$

annehmen und φ hieraus berechnet und in (17) eingesetzt denken; W_1 ist dann von φ unabhängig. Da nun, wenn α als neue, von den übrigen Koordinaten unabhängige Variable betrachtet wird,

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

oder wegen (18)

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{und direkt} \quad \frac{\partial W_1}{\partial \varrho} = \frac{\partial W}{\partial \varrho}$$

ist, so wird (16) zu der von φ freien Gleichung

$$(19) \qquad \left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial \varrho}\right)^2 = 2U - \frac{\alpha^2}{\varrho^2} + 2h.$$

Beachten wir, daſs in der rotierenden Ebene y und ϱ dieselbe Rolle spielen wie beim ebenen Problem y und z, so können wir wie dort zu elliptischen Koordinaten übergehen, wenn wir noch für ϱ^2, welches dem z^2 in § 31, (9a) entspricht, setzen

$$\varrho^2 = -\frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{b^2-c^2},$$

und so

$$(20) \qquad \frac{\alpha^2}{\varrho^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{c^2+\lambda_1} - \frac{1}{c^2+\lambda_2}\right]$$

erhalten. Für U benutzen wir (9), während wir die linke Seite von (19) derjenigen von (5) entsprechend nach § 31, (19) u. s. w. umgestalten; wir gelangen zu der Gleichung

$$(21) \qquad \begin{aligned} &\frac{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{(b^2+\lambda_2)(c_2+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1}+(k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2} \\ &\quad - \frac{\alpha^2 e^2}{4(\lambda_1-\lambda_2)}\left[\frac{1}{c^2+\lambda_1}+\frac{1}{c^2+\lambda_2}\right] + \frac{1}{2}h. \end{aligned}$$

Nachdem der Nenner $\lambda_1 - \lambda_2$ beseitigt ist, kann wie oben eine Zerlegung in zwei totale Differentialgleichungen mit den Variabeln λ_1 und λ_2 vorgenommen werden. Wir erhalten schließlich

$$(22)\quad W_1 = \int \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2 e^2}{c^2+\lambda_1} + \frac{1}{2}h\lambda_1 + \beta}{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}}\, d\lambda_1$$

$$+ \int \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}(k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2 e^2}{c^2+\lambda_2} + \frac{1}{2}h\lambda_2 + \beta}{(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}}\, d\lambda_2 .$$

Um die drei fertigen Integralgleichungen zu erhalten, müssen wir

$$W = W_1 + \alpha\varphi$$

nach β und α differentiiert zwei Konstanten, nach h differentiiert aber $t - t_0$ gleichsetzen. Die Bewegung ist also durch die drei Gleichungen

$$(23)\qquad \frac{\partial W_1}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} = \alpha' - \varphi, \quad \frac{\partial W_1}{\partial h} = t - t_0$$

dargestellt, die sich leicht entwickeln lassen.

Die erste liefert eine Gleichung zwischen λ_1 und λ_2, also die Bahnkurve in der rotierenden Ebene; die zweite liefert den Rotationswinkel, die dritte die Zeit für jeden Punkt der Bahnkurve, in welchem sich gerade der bewegte Punkt befindet.

§ 33.

Herleitung neuer Integrale der Bewegungsgleichungen aus zwei gefundenen.

1. In § 29, (26) und (27) setzten wir bei vorhandener Kräftefunktion die Bewegungsgleichungen in die Form

$$(1)\qquad \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

Sind zwei Integrale dieser Gleichungen in der Form

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k, t) = a, \\ \psi(q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k, t) = b \end{cases}$$

gefunden, so ist

$$(3)\qquad (\varphi, \psi) = c$$

ein neues Integral, wenn

$$(4) \qquad (\varphi, \psi) = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}$$

gesetzt wird (Poisson-Jacobi'scher Satz)*).

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes ist dargethan, wenn die Relation

$$(5) \qquad \frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = 0$$

mittels der Gleichungen (1) erwiesen wird; denn durch Integration von (5) folgt (3). Selbstverständlich sind die q_α und p_α hierbei als Funktionen von t anzusehen.

Es ist

$$(6) \qquad \frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\right).$$

Um diese Gleichung umzugestalten, differentiieren wir φ partiell nach t, dann weiter nach q_β und p_β; wir finden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt}\right) = 0$$

oder mit Benutzung von (1)

$$(7) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = 0$$

und weiter

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial q_\beta} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\alpha \partial q_\beta} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = 0,$$

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial p_\beta} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial p_\beta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = 0.$$

Andrerseits folgt direkt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\beta}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial q_\beta} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\alpha \partial q_\beta} \frac{dp_\alpha}{dt}\right)$$

oder

*) Die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft, welche hier immer gilt und eine Vorbedingung der Existenz der Gleichungen (1) ist, darf nicht unter den Integralen (2) vorkommen. — Der Satz wurde von Poisson zuerst erwiesen, blieb jedoch lange unverstanden, bis Jacobi ihn erst recht eigentlich in die Mechanik einführte. Eine Erweiterung desselben wurde von Laurent in der Abhandlung: Sur un théorème de Poisson, Liouville J. (2), B. 17, p. 422 gegeben; doch werden hierdurch keine weitergehenden Resultate erzielt.

$$(10)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial q_\beta}+\sum^\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\,\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_\alpha\partial q_\beta}\,\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)$$

und ebenso

$$(11)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\beta}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p_\beta}+\sum^\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha\partial p_\beta}\,\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\,\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right).$$

Aus (8) und (10), (9) und (11) eliminieren wir

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial q_\beta}\quad\text{und}\quad\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial p_\beta},$$

wodurch wir zu den Gleichungen

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta}\right)=-\sum^\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial q_\beta}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right),$$

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\beta}\right)=-\sum^\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\partial p_\beta}\right)$$

gelangen. Ganz analoge Relationen finden wir für ψ.

Durch Benutzung dieser Ausdrücke geht (6) über in

$$(14)\qquad \frac{d(\varphi,\psi)}{dt}=0.$$

Bei teilweiser Änderung der Summationsindices ist nämlich z. B. der Koeffizient von $\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}$

$$(15)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial\psi}{\partial p_\beta}-\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_\beta};$$

beachtet man aber, dafs α und β beide sämtliche Werte von 1 bis k durchlaufen, so müssen sich je zwei dieser Gröfsen, bei denen α und β vertauscht erscheinen, wegheben, während für $\alpha=\beta$ (15) selbst verschwindet. Dasselbe gilt für die übrigen Koeffizienten.

Somit ist der Satz bewiesen.

2. Bei einem freien System haben wir wieder für die p_α

$$m_\alpha x_\alpha',\ m_\alpha y_\alpha',\ m_\alpha z_\alpha',$$

während die q_α die Koordinaten selbst sind. Nun sind zwei Integrale des Systems durch die beiden Flächensätze

$$\sum m_\alpha(y_\alpha z_\alpha'-z_\alpha y_\alpha')=a,$$
$$\sum m_\alpha(z_\alpha x_\alpha'-x_\alpha z_\alpha')=b$$

gegeben. Verfährt man nach (4) und (3), so erhält man als neues Integral

$$\sum m_\alpha(y_\alpha x_\alpha'-x_\alpha y_\alpha')=c,$$

also den dritten Flächensatz, der in der That ein neues Integral repräsentiert.

3. Da man auf das neue Integral (φ, ψ) in Verbindung mit einem der beiden andern dieselbe Methode anwenden und in dieser Art beliebig lange fortfahren kann, so lassen sich aus zwei gefundenen Integralen beliebig viele andere herleiten, vorausgesetzt, daſs man nicht wieder auf frühere Integrale oder auf eine Identität kommt. Aus zwei der Flächensätze ergiebt sich immer der dritte, so daſs man weiterhin aus ihnen nichts Neues erhält. Jacobi glaubt, daſs sich aus solchen Integralen, welche für das spezielle Theorem charakteristisch sind — dies ist bei den Flächensätzen, die einer groſsen Zahl von Theoremen gemeinsam zukommen, nicht der Fall — thatsächlich eine gröſsere Zahl von Integralen, vielleicht sogar alle herleiten lassen. Doch ist kein Fall bekannt, wo die Integration wirklich durch dieses Hilfsmittel gelungen wäre.

§ 34.

Das allgemeine Störungsproblem.

1. In den §§ 12 und 13 haben wir bereits den Begriff der Störungen für spezielle Fälle kennen gelernt. Wir können nun den Gegenstand zu der Aufgabe verallgemeinern: Es ist die Bewegung eines Systems materieller Punkte unter dem Einflusse gewisser Kräfte bekannt, d. h. die Bewegungsgleichungen sind für diesen Fall vollständig integriert. Nun treten zu den vorhandenen Kräften neue hinzu, welche gegen die alten verhältnismäſsig geringfügig sind; es soll eine Methode angegeben werden, die neue Bewegung aus der alten, nötigenfalls durch Näherung, herzuleiten.

Die integrierten Bewegungsgleichungen enthalten auſser den Variabeln eine Anzahl von Konstanten, die man in der Planetentheorie als Bahnelemente bezeichnet. Wir sahen bereits in § 12, daſs man zwei Wege zur Berücksichtigung der Störungen einschlagen kann. Man kann erstens annehmen, daſs die materiellen Punkte infolge der störenden Kräfte nur wenig von dem Orte entfernt werden, an dem sie sich ohne Störung befinden würden, und kann hiernach an den Koordinaten, die für das ungestörte System berechnet sind, Korrekturen anbringen (Störung der Koordinaten). Zweitens kann man annehmen, daſs sich die Gleichungen der gestörten Bahn in wesentlich derselben Form darstellen wie diejenigen der ungestörten, nur daſs an Stelle der Konstanten (der Elemente) jetzt Funktionen der Zeit eintreten (Störung der Elemente). Bei den planetarischen Störungen gingen wir von den Störungen der Koordinaten aus, um nachträglich einen Teil der Störungen auf die Elemente zu übertragen. Bei der allgemeinen Aufgabe wollen wir uns nur mit der Störung der Elemente beschäftigen; in der Praxis wird diese Methode besonders bei der Berechnung der speziellen Störungen angewandt, welche bei Planetenbahnen gebraucht werden muſs, die starke Exzentrizitäten und bedeutende Neigungen gegen die Bahnen der störenden Planeten aufweisen. Wir wollen dieses spezielle Problem hier nicht verfolgen, über das man bei Israel-Holtzwart, „Elemente der Astromechanik“ Auskunft erhält (p. 123 ff.)*); man möge mit den dort gegebenen speziellen Formeln die hier herzuleitenden allgemeinen vergleichen.

2. Die Gleichung

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + H = 0 \tag{1}$$

möge die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung für das ungestörte Punktesystem darstellen; H denken wir uns wie in § 30, (9) als Funktion von t, q_α, $\frac{\partial V_0}{\partial q_\alpha}$. Durch die Substitution von (§ 30, (17))

$$W = V_0 + at \tag{2}$$

führen wir dieselbe auf

$$H = a \tag{3}$$

zurück, wo jetzt H als Funktion der q_α und $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ anzusehen ist**).

Die Integrale der ungestörten Bewegung sind dann (§ 30, (21))

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1}, \\ &\frac{\partial W}{\partial a} = t - t_0, \quad \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = p_\alpha; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

hierin ist W als Funktion der q_α und der Konstanten a, a_1, a_2, $\ldots a_{k-1}$ anzusehen.

3. Treten nun störende Kräfte auf, so müssen wir H durch $H + \Omega$ ersetzen, worin Ω als die „Störungsfunktion“ bezeichnet wird; es leuchtet ein, dafs hierbei keinerlei besondere Voraussetzung zu machen ist, da man Ω immer so bestimmen kann, dafs $H + \Omega$ der Gröfse $T - U$ für die neue Bewegung gleich wird. Nennen wir die neue charakteristische Funktion V, so geht Gleichung (1) für das gestörte Problem über in

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H + \Omega = 0; \tag{5}$$

hierin sind H und Ω zunächst als Funktionen von t, q_α, $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$ zu denken.

Diese partielle Differentialgleichung läfst sich durch eine totale ersetzen. Da

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt}$$

ist, worin wie früher (§ 30, (4))

*) Ausführliches über das Problem der Störungen der Elemente findet man auch in Lagrange's Mécanique analytique, 2. Auflage, an welche sich die Übersetzung von Servus anschliefst. In Jacobi's Vorlesungen über Dynamik ist das allgemeine Problem weiter durchgeführt.

**) Wir haben hier nur $-a$ an Stelle des früheren a gesetzt.

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = p_\alpha$$

gesetzt wurde, so kann man statt (5)

$$(6) \qquad dV = -(H + \Omega)dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_k dq_k$$

schreiben.

Der Ausdruck W ist im ungestörten Problem nach ausgeführter Integration als Funktion der q_α und der Konstanten $a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ anzusehen. Nach früherer Auseinandersetzung wollen wir aber das gestörte Problem dadurch aus dem ungestörten herleiten, dafs wir die Konstanten des letzteren zu Funktionen der Zeit werden lassen. Daher müssen wir bei Betrachtung der gestörten Bewegung die $a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$, wie auch die übrigen Konstanten, als Funktionen von t behandeln. Demnach ist

$$dW = \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k$$
$$+ \frac{\partial W}{\partial a} da + \frac{\partial W}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial W}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} da_{k-1}$$

oder unter Benutzung von (4)

$$(7) \qquad dW = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_k dq_k + (t - t_0)da$$
$$+ b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_{k-1} da_{k-1}\,.$$

Diese Gleichung mufs durch die Integrale des Störungsproblems zu einer identischen gemacht werden.

Die Zusammenstellung von (6) und (7) liefert

$$(8) \qquad d(W - V) = (H + \Omega)dt + (t - t_0)da$$
$$+ b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_{k-1} da_{k-1}\,.$$

Aus der Gleichung (3) folgt aber

$$(9) \qquad Hdt + tda = adt + tda = d(at),$$

wodurch (8) in

$$(10) \qquad d(W - at - V) = \Omega dt - t_0 da$$
$$+ b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_{k-1} da_{k-1}$$

übergeht oder, wenn

$$(11) \qquad W - at - V = V_0 - V = S$$

gesetzt wird, in

$$(12) \qquad dS = \Omega dt - t_0 da + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_{k-1} da_{k-1}\,.$$

Die Funktionen S und Ω können wir uns durch Elimination der q_α mittels (4) als Funktionen von $t, a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, t_0, b_1, b_2, \cdots b_{k-1}$ dargestellt denken. Ein Vergleich von (5) und (6) zeigt, dafs wir die totale Differentialgleichung (12) durch die partielle

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \Omega = 0 \tag{13}$$

ersetzen können, wenn in Ω an Stelle der b_α die Werte $\frac{\partial S}{\partial a_\alpha}$, an Stelle von t_0 aber $-\frac{\partial S}{\partial a}$ treten. Die Gleichung (13) entspricht genau der Hamilton'schen Gleichung (1) für das ungestörte Problem. Aber es sind hier nicht mehr die ursprünglichen Variabeln q_α die gesuchten Gröfsen, sondern vielmehr die Konstanten des ungestörten Problems, welche jetzt in veränderliche, von der Zeit abhängige Gröfsen übergegangen sind.

So wie § 30, (9) gleichwertig ist mit dem Systeme totaler Differentialgleichungen § 29, (26) und (27), so kann auch (13) durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{da}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t_0}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_1}, \quad \ldots \frac{da_{k-1}}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_{k-1}}, \\ &\frac{dt_0}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a}, \quad \frac{\partial b_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_1}, \quad \ldots \frac{db_{k-1}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_{k-1}} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

ersetzt werden.

Suchen wir uns nun das erhaltene Resultat und seinen Wert klar zu machen. Die Funktion Ω läfst sich mittels der Gleichung der lebendigen Kraft für das Störungsproblem unmittelbar aufstellen, und zwar als Funktion der q_α, p_α und t. Sind aber die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung integriert, so kann man mit ihrer Hilfe aus Ω die ursprünglichen Variabeln q_α und p_α eliminieren und an ihre Stelle die Konstanten des ungestörten Problems setzen, die, nunmehr als variabel betrachtet, die Unbekannten des Störungsproblems sind.

Hiermit ist freilich für die Integration von (14) noch gar nichts geleistet. Allein man kann jetzt, falls die störenden Kräfte gering sind, eine erste Näherung dadurch erreichen, dafs man in den rechten Seiten der Gleichungen (14) den Gröfsen $a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, t_0, b_1, b_2, \ldots b_{k-1}$ die konstanten Werte, welche sie im ungestörten Problem besitzen, beilegt, so dafs die rechten Seiten nur noch Funktionen der Zeit sind. Dann werden die Gleichungen (14) unmittelbar integrabel, wenn auch oft nur auf mechanischem Wege.

In der Theorie der speziellen Störungen werden in der That zunächst die Differentialquotienten der gestörten Elemente nach der Zeit als Funktionen der Zeit dargestellt.

Weitere Annäherungen führen zu grofsen Komplikationen.

Vierter Abschnitt.

Das Potential.

§ 35.

Die Kräftefunktion eines zusammenhängenden Körpers.

1. Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten die Bewegungen materieller Punkte verfolgt, auf welche Kräfte wirken, teilweise ohne Rücksicht auf den Ursprung dieser Kräfte, teilweise unter der Annahme, daſs von einzelnen materiellen Punkten eine Anziehung ausgehe. Wir wollen jetzt die Kräfte untersuchen, welche von einer zusammenhängenden Masse auf einen materiellen Punkt ausgeübt werden.

Wie schon früher gesagt wurde, lassen sich fast alle in der Natur vorkommenden Kräfte zwischen Körpern so auffassen, als ob jedes kleinste Teilchen des einen Körpers auf jedes Teilchen des andern Körpers eine Kraft ausübe, die nur eine Funktion der betreffenden Massen und der Entfernung der beiden Teilchen ist. Um demnach die Wirkung eines Körpers auf einen materiellen Punkt zu finden, müssen wir uns ersteren auf irgend eine Weise in unendlich kleine Elemente zerlegt denken (die wir wie materielle Punkte behandeln), die Kraft bestimmen, welche jedes dieser Elemente auf den materiellen Punkt ausübt und die Resultante dieser sämtlichen Kräfte suchen. Seien x, y, z die Koordinaten des materiellen Punktes, m seine Masse, seien ferner ξ, η, ζ die Koordinaten eines Punktes des Körpers und $d\mu$ die Masse des unendlich kleinen Elementes, das wir uns um jenen Punkt abgegrenzt denken, so ist zunächst

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \tag{1}$$

die Entfernung der beiden Punkte. Wir haben dann für die Kraft, welche das Körperelement auf den materiellen Punkt ausübt,

$$mf(r)\, d\mu\,. \tag{2}$$

Da die Kräfte, welche so von den einzelnen Körperelementen auf den materiellen Punkt wirken, verschiedene Richtungen besitzen, so müssen wir, um ihre Resultierende zu bestimmen, sie in Komponenten nach den Koordinatenachsen zerlegen und diese summieren. So erhalten wir für die Komponenten der Kraft

$$(3) \qquad \begin{cases} f(r)\,\dfrac{x-\xi}{r}\,m\,d\mu\,, \\ f(r)\,\dfrac{y-\eta}{r}\,m\,d\mu\,, \\ f(r)\,\dfrac{z-\zeta}{r}\,m\,d\mu \end{cases}$$

und, wenn wir über alle Elemente $d\mu$ summieren, also die Integrale über den ganzen Körper ausdehnen,

$$(4) \qquad \begin{cases} X = m\displaystyle\int f(r)\,\frac{x-\xi}{r}\,d\mu\,, \\ Y = m\displaystyle\int f(r)\,\frac{y-\eta}{r}\,d\mu\,, \\ Z = m\displaystyle\int f(r)\,\frac{z-\zeta}{r}\,d\mu \end{cases}$$

als Komponenten der Gesamtkraft. Diese selbst ist

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,,$$

und ihre Richtungskosinus sind

$$\frac{X}{P}\,,\quad \frac{Y}{P}\,,\quad \frac{Z}{P}\,.$$

P, X, Y, Z sind Funktionen von x, y, z.

2. So wie man die Komponenten der Einzelkraft (2) als Differentialquotienten einer Kräftefunktion darstellen kann, läfst sich dieselbe Darstellung auch für (4) geben. Setzen wir nämlich

$$(5) \qquad F(r) = \int f(r)\,dr\,,$$

worin zunächst noch eine willkürliche Konstante auftritt, so stellt

$$(6) \qquad U = m\int F(r)\,d\mu$$

die Kräftefunktion der Gesamtkraft dar. In (6) ist das Integral wieder über den ganzen Körper auszudehnen.

Um nachzuweisen, dafs U wirklich den Charakter der Kräftefunktion trägt, bilden wir z. B. $\frac{\partial U}{\partial x}\cdot$ Da die Integrationsgrenzen von der Lage des Punktes x, y, z unabhängig sind, so dürfen wir einfach unter dem Integralzeichen differentiieren und erhalten

$$(7) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = m\int F'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x}\,d\mu = m\int f(r)\,\frac{x-\xi}{r}\,d\mu\,.$$

Es ist also in der That

$$(8) \qquad X = \frac{\partial U}{\partial x}\,,\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}\,,\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}\,\cdot$$

3. Wir können das oben gefundene Resultat folgendermafsen in Worten ausdrücken: Um die Kraftkomponente in der Richtung der x-

(resp. y-, z-)Achse zu finden, denken wir uns den angezogenen Punkt in dieser Richtung um ein unendlich kleines Stück verschoben, berechnen die dabei eintretende Änderung der Kräftefunktion und dividieren diese Änderung durch die Gröfse der Verschiebung, so ist der Quotient die gesuchte Kraftkomponente.

Dieser Satz läfst sich nun auch auf die Kraftkomponenten in beliebiger Richtung übertragen. Die Kraftkomponente in der Richtung n ist

$$P_n = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

wo α, β, γ die Winkel zwischen n und den positiv gerichteten Koordinatenachsen sind. Denken wir uns aber den angezogenen Punkt in der Richtung n um das unendlich kleine Stück dn verschoben, so ist

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dn}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{dn}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{dn},$$

es wird also

$$P_n = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn}.$$

Der Ausdruck rechts ist aber gleich $\frac{dU}{dn}$ (vgl. § 6, (15)).

4. Hieraus ergiebt sich die mechanische Bedeutung von U. Lassen wir den angezogenen Punkt sich auf einer beliebigen Bahn s vom Punkte s_0 bis zum Punkte s_1 bewegen, so ist $\frac{dU}{ds}ds$ die in jedem Momente und

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{dU}{ds}\,ds = U_1 - U_0$$

die im ganzen geleistete Arbeit; dabei ist diese Arbeit nur von der Anfangs- und Endlage des Punktes abhängig, nicht aber von dem zurückgelegten Wege, ein Resultat, das wir auch schon früher für anziehende Punkte und Punktsysteme erhalten haben. Bei Gültigkeit des Newton'schen Attraktionsgesetzes werden wir später U für einen unendlich fernen Punkt $= 0$ setzen; dann stellt also U die Arbeit dar, welche geleistet werden mufs, um den angezogenen materiellen Punkt aus unendlicher Entfernung nach dem Punkte (x, y, z) hinzuziehen.

5. Die Kräftefunktion ist geeignet, uns ein aufserordentlich anschauliches Bild der Wirkung des Körpers an jedem Punkte des Raumes zu geben. Angenommen, wir kennen U für jeden Punkt des Raumes (wir setzen voraus, dafs U eine eindeutige Funktion ist), so werden alle Punkte, in welchen U einen konstanten Wert a annimmt, auf einer durch die Gleichung $U = a$ bestimmten Fläche liegen; wir nennen eine solche Fläche Niveaufläche. Da U in der Fläche konstant ist, so mufs der partielle Differentialquotient von U nach einer in der Niveaufläche gelegenen Richtung Null sein, damit aber auch die in die Niveaufläche fallende Kraftkomponente, d. h. die Kraftrichtung steht in jedem Punkte senkrecht auf der durch ihn gehenden Niveaufläche.

Konstruieren wir uns nun noch eine zweite, unendlich benachbarte Niveaufläche, für welche $U = a + da$ sein möge, und ist dn an einer Stelle der Normalabstand*) beider Flächen, so ist $\frac{da}{dn}$ die Kraft, welche an jener Stelle wirksam ist. Der Sinn der Kraft ist der vom kleineren zum gröſseren U.

Die Kraft an einer Stelle des Raumes ist also umgekehrt proportional dem Abstande der benachbarten Niveauflächen, ihre Richtung ist normal zur Niveaufläche und zwar vom kleineren zum gröſseren U hin.

Bilden wir in gleichen Differenzen Δa die Niveauflächen, so geben diese uns in ähnlicher Weise ein Bild von der Wirksamkeit der Kräfte, wie es uns die Kurven gleicher Höhe (Isohypsen) auf Landkarten von der gröſseren oder geringeren Steilheit der dargestellten Berge gewähren. Wo an einem Punkte die Niveauflächen einander sehr nahe rücken, wird eine starke Kraftwirkung vorhanden sein und umgekehrt, und zugleich ergeben sich die Richtungen der Kräfte als Tangenten der senkrechten Trajektorien der Niveauflächen.

Diese Trajektorien sind durch die Differentialgleichungen

$$(9) \qquad dx : dy : dz = \frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z}$$

bestimmt, da sich die Richtungskosinus eines Kurvenelementes wie die links, diejenigen einer Flächennormale wie die rechts stehenden Gröſsen verhalten.

6. Die Dimension der Kräftefunktion wird, wie nach § 5 selbstverständlich ist, durch $l^2 t^{-2} m$ dargestellt. Der Differentialquotient, genommen nach irgend einer Richtung, muſs daher die Dimension $l t^{-2} m$ aufweisen, was zu Früherem stimmt. Hiernach bestimmt sich die Dimension der in $F(r)$ auftretenden Konstanten.

Um Irrtümer zu verhüten, sei hier noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daſs die Niveauflächen nicht etwa Flächen gleicher Kraftwirkung sind. Nur in dem Falle, daſs zwei aufeinanderfolgende Niveauflächen überall äquidistant sind, sind sie auch Flächen gleicher Anziehung.

§ 36.

Spezialisierung für das Newton'sche Gesetz: das Potential.

1. Bisher haben wir über die besondere Art des Gesetzes der Anziehung nichts vorausgesetzt, als daſs dieselbe eine Funktion des Ab-

*) Die Normalen benachbarter Elemente zweier Flächen, welche durch infinitesimale Änderung eines Parameters aus derselben Gleichung hervorgegangen sind, können bis auf unendlich kleine Unterschiede als gleichgerichtet angesehen werden, einzelne Punkte etwa ausgenommen.

standes sei; im folgenden wollen wir unsere Betrachtungen auf Kräfte beschränken, deren Wirkung dem reziproken Werte des Quadrats der Entfernung proportional ist. Wir haben in diesem Falle für die Kraft, welche von $d\mu$ auf m ausgeübt wird,

$$-\frac{k m d\mu}{r^2},$$

so dafs also

$$f'(r) = -\frac{k}{r^2},$$

mithin

$$f(r) = \int f'(r) dr = \frac{k}{r} + \text{Const.}$$

ist. Die Integrationskonstante setzen wir gleich Null, da wir sie ja für unsere Zwecke beliebig nehmen können; dann wird die Kräftefunktion, welche hier Potential genannt wird und mit V bezeichnet werden soll,

$$V = \int \frac{k m d\mu}{r},$$

wobei die Integration über alle Elemente $d\mu$ auszudehnen ist. Da das Produkt km konstant ist, so werden wir es bei den folgenden Untersuchungen einfach abwerfen, resp. gleich 1 setzen; wir verwenden also im folgenden für das Potential die Formel:

$$V = \int \frac{d\mu}{r}. \tag{1}$$

Bezeichnet σ die Masse, welche in einer Volumeinheit vorhanden ist (die sogenannte Dichte des Körpers) und $d\tau$ ein Raumelement, so ist $d\mu = \sigma d\tau$. Im rechtwinkligen Koordinatensysteme ist $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$, hier nimmt das Potential also die Form an:

$$V = \iiint \frac{\sigma d\xi d\eta d\zeta}{r}. \tag{2}$$

Für die Kraftkomponenten erhalten wir:

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\partial V}{\partial x} = -\iiint \frac{\sigma}{r^2} \, \frac{x-\xi}{r} \, d\xi d\eta d\zeta, \\ Y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -\iiint \frac{\sigma}{r^2} \, \frac{y-\eta}{r} \, d\xi d\eta d\zeta, \\ Z &= \frac{\partial V}{\partial z} = -\iiint \frac{\sigma}{r^2} \, \frac{z-\zeta}{r} \, d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \right.$$

Genau dieselben Ausdrücke würden wir durch direkte Bildung der Kraftkomponenten erhalten haben.

2. Rückt der angezogene Punkt in unendliche Entfernung, während der anziehende Körper endlich ist, so werden sowohl V wie seine ersten Derivierten zu Null und zwar so, dafs rV,

$r^2 \frac{\partial V}{\partial x}$, $r^2 \frac{\partial V}{\partial y}$, $r^2 \frac{\partial V}{\partial z}$ und ebenso xV, yV, zV, $x^2 \frac{\partial V}{\partial x}$, $y^2 \frac{\partial V}{\partial y}$, $z^2 \frac{\partial V}{\partial z}$ endliche Werte erhalten; rV ist immer von Null verschieden, die übrigen Gröſsen nur im allgemeinen.

Bei unendlicher Entfernung des Punktes x, y, z kann nämlich r für alle Punkte ξ, η, ζ des Körpers als konstant angesehen werden, so daſs

$$(4) \qquad V = \frac{1}{r}\int d\mu = \frac{M}{r}$$

wird, wenn M die Gesamtmasse des Körpers bezeichnet. Ebenso wird

$$(5) \qquad X = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\int\int\int \sigma\frac{x-\xi}{r}\,d\xi d\eta d\zeta \quad \text{u. s. w.},$$

worin $\frac{x-\xi}{r}$ endlich ist, wenn es nicht verschwindet. Nimmt man noch hinzu, daſs x, y, z von derselben Gröſsendimension wie r sind — wenn nicht das eine oder andere gegen r verschwindet —, so ergiebt sich der behauptete Satz unmittelbar.

Wollte man dem Potential V eine Integrationskonstante zufügen, so würde natürlich für unendlich ferne Punkte V der Konstanten gleich werden.

3. Ehe wir nun das Potential für spezielle Körper entwickeln, müssen wir noch ein Bedenken beseitigen. Es ist klar, daſs V für Punkte auſserhalb des anziehenden Körpers überall endlich ist, da ja dort alle $\frac{\sigma}{r^2}$ ganz bestimmte, endliche Werte besitzen. Dasselbe gilt für die Derivierten von V; es ist deshalb V auſserhalb des anziehenden Körpers auch eine stetige Funktion. Wie verhält sich aber die Sache für Punkte, die innerhalb des anziehenden Körpers liegen? Hier wird $\frac{1}{r}$ für einzelne Punkte unendlich. Wir wollen nun nachweisen, daſs erstens V und seine ersten Derivierten auch hier endliche Werte besitzen und zweitens auch hier stetige Funktionen sind.

Zu diesem Zwecke führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir

$$(6) \qquad \xi = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \eta = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \zeta = \varrho \cos\vartheta$$

setzen. ϑ bezeichnet den Winkel, welchen der Radiusvektor mit der positiv gerichteten z-Achse, φ den Winkel, welchen die Ebene des Winkels ϑ mit der positiv gerichteten x-Achse bildet.

Ein Körperelement wird dann durch

$$\varrho^2 \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta d\varrho$$

dargestellt, und wir erhalten für das Potential, bezogen auf den Nullpunkt des Koordinatensystems, den wir mit jedem beliebigen Punkte des Körpers identifizieren können,

$$(7) \qquad V = \int\int\int \frac{\sigma\varrho^2 \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta d\varrho}{\varrho} = \int\int\int \sigma\varrho \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta d\varrho.$$

Wir sehen daraus, daſs die Beiträge, welche von den Körperelementen in der Nachbarschaft des angezogenen Punktes herrühren, nicht nur nicht unendlich, sondern sogar Null sind, da ein ϱ im Zähler übrig bleibt. Die übrigen Teile können ein Unendlichwerden überhaupt nicht veranlassen. Mithin ist V auch für innere Punkte endlich.

Um auch für die Kraftkomponenten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ den entsprechenden Nachweis zu führen, setzen wir jetzt

(8) $\xi = x + \varrho \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \eta = y + \varrho \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \zeta = z + \varrho \cos\vartheta.$

Dann wird

(9) $$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{1}{\varrho^2} \frac{\xi - x}{\varrho} d\mu = \int \frac{\sin\vartheta \cos\varphi \, d\mu}{\varrho^2}$$
$$= \int\int\int \sigma \sin^2\vartheta \cos\varphi \, d\varphi d\vartheta d\varrho,$$

und ähnliche Resultate erhält man für die beiden andern Komponenten. Auch hier ist kein Faktor vorhanden, der ein Unendlichwerden verursachen könnte.

Aus der Endlichkeit seiner Derivierten können wir sofort auf die Stetigkeit von V schliefsen. V ist also eine im ganzen Raume endliche und stetige Funktion.

4. Um die Stetigkeit der Derivierten von V nachzuweisen, denken wir uns um den angezogenen Punkt eine Kugelfläche vom Radius δ abgegrenzt. Wir können uns dann V aus zwei Teilen bestehend denken, von denen der eine V_1 von den Elementen jener Kugel, der zweite V_2 von den aufserhalb der Kugel gelegenen Teilen des anziehenden Körpers herrührt. Es ist also

(10) $$V = V_1 + V_2$$

und

(11) $$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x};$$

$\frac{\partial V_2}{\partial x}$ ist jedenfalls stetig, da der angezogene Punkt für dasselbe ein äufserer ist. Wir zeigen nun, dafs $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ für abnehmende δ verschwindet; damit ist dann die Stetigkeit von $\frac{\partial V}{\partial x}$ nachgewiesen.

Bezeichnet $d\Sigma$ ein Element der Kugelfläche mit dem Radius 1, welche um den untersuchten Punkt beschrieben ist, so können wir, indem wir uns die abgegrenzte Kugel zuerst in konzentrische Kugelschichten, dann durch Pyramidenflächen, welche in dem Mittelpunkte ihre Spitze haben, weiter zerlegt denken,

(12) $$d\mu = \sigma\varrho^2 d\Sigma d\varrho$$

setzen. Dann wird

(13) $$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int\int \sigma \frac{\xi - x}{\varrho} d\Sigma d\varrho.$$

$\frac{\xi - x}{\varrho}$ ist jedenfalls ein echter Bruch von positivem oder negativem Werte, höchstens ± 1. Den gröfsten, sicher endlichen Wert, welchen der absolute Betrag von

$$\sigma \frac{\xi - x}{\varrho}$$

in der ganzen Kugel erreicht, wollen wir mit A bezeichnen. Dabei ist nicht auszuschliefsen, dafs σ seinen Wert unstetig ändert; die Grenze des Körpers kann z. B. durch die Kugel hindurchgehen. In allen Fällen ist, wenn wir den absoluten Betrag einer Gröfse in bekannter Weise bezeichnen,

$$\left|\frac{\partial V_1}{\partial x}\right| \leq A \int\int d\Sigma d\varrho$$

oder, da

$$\int_0^\delta d\varrho = \delta, \quad \int d\Sigma = 4\pi$$

ist,

(14) $$\left|\frac{\partial V_1}{\partial x}\right| < 4 A \pi \delta.$$

Für verschwindende δ verschwindet also $\frac{\partial V_1}{\partial x}$. Hiermit ist die Stetigkeit von $\frac{\partial V}{\partial x}$ dargethan; $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ lassen sich in gleicher Weise behandeln.

Das Potential V ist nebst seinen ersten Derivierten eine stetige Funktion von x, y, z.

Für die zweiten Differentialquotienten gilt nicht das Gleiche; wir werden dieselben später noch zu untersuchen haben.

§ 37.

Das Potential einer Kugelschale und einer Vollkugel.

1. Wir bestimmen das Potential einer Kugelschale, bei welcher die Dichtigkeit σ nur eine Funktion des Radius ist, welche also aus konzentrischen, einzeln gleichmäfsig dichten Schalen besteht. Wir wählen Polarkoordinaten wie in § 36, deren Anfangspunkt wir in den Mittelpunkt der Kugel verlegen. Die z-Achse möge durch den angezogenen Punkt hindurchgehen. Der Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkte der Kugel sei l, der äufsere Kugelradius P, der innere P_0.

Für den Abstand r eines Körperelements an der Stelle $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ vom angezogenen Punkte finden wir

(1) $$r = \sqrt{l^2 + \varrho^2 - 2 l \varrho \cos\vartheta},$$

für die Masse des Elementes

(2) $$d\mu = \sigma \varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Demnach ist das Potential

$$(3) \qquad V = \int\int\int \frac{\sigma \varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi}{\sqrt{l^2 + \varrho^2 - 2l\varrho\cos\vartheta}}.$$

Die Integrationen sind auszudehnen über φ von 0 bis 2π, über ϑ von 0 bis π, über ϱ von P_0 bis P, so daſs für (3) vollständiger

$$(4) \qquad V = \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho^2 d\varrho \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{l^2 + \varrho^2 - 2l\varrho\cos\vartheta}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

zu schreiben ist.

Indem wir nun die Integrationen der Reihe nach ausführen, erhalten wir zunächst

$$V = 2\pi \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho^2 d\varrho \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{l^2 + \varrho^2 - 2l\varrho\cos\vartheta}},$$

dann, weil

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx}} = -\frac{2}{b}\sqrt{a - bx}$$

ist,

$$(5) \qquad V = \frac{2\pi}{l} \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho d\varrho \left[\sqrt{l^2 + \varrho^2 + 2l\varrho} - \sqrt{l^2 + \varrho^2 - 2l\varrho}\right].$$

Die Wurzelgröſsen sind hier nicht etwa doppeldeutig, da sie die absolute Gröſse spezieller Werte von r vorstellen und somit positive Werte haben müssen.

Hiernach ist der Wert der ersten Wurzel $= l + \varrho$, derjenige der zweiten aber:

$$l - \varrho \text{ für } l \geqq \varrho, \quad \varrho - l \text{ für } l < \varrho.$$

Der Klammerausdruck wird

$$\text{für } l \geqq \varrho \text{ zu } 2\varrho,$$
$$\text{für } l \leqq \varrho \text{ zu } 2l.$$

2. Wir haben nun bei der Integration nach ϱ drei Fälle zu unterscheiden:

a) der angezogene Punkt liegt auſserhalb der Hohlkugel; dann ist für alle ϱ: $l \geqq \varrho$;

b) der angezogene Punkt liegt innerhalb des Hohlraumes; dann ist für alle ϱ: $l < \varrho$;

c) der angezogene Punkt liegt im Innern der Kugelmasse; dann ist für einen Teil $l > \varrho$, für den andern $l < \varrho$.

1. Fall: $l \geqq P$. Hier haben wir:

$$(6) \qquad V_a = \frac{4\pi}{l} \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho^2 d\varrho.$$

Nun ist aber $\sigma \cdot 4\pi\varrho^2 d\varrho$ die Masse einer Kugelschale vom Radius ϱ und der Dicke $d\varrho$, und integrieren wir von P_0 bis P, so erhalten wir die Masse M der ganzen Hohlkugel. Demnach wird

$$V_a = \frac{M}{l} \tag{7}$$

d. h. wir erhalten dasselbe Potential, wie wenn wir uns die Masse im Mittelpunkte der Hohlkugel vereinigt denken. Dies Resultat gilt selbstverständlich auch für die Vollkugel, da wir ja hier nur $P_0 = 0$ zu setzen haben. Dadurch sind die Probleme über die Anziehung von kugelförmigen Körpern nach aufsen auf die Anziehung materieller Punkte zurückgeführt.

2. Fall: $l < P_0$. Wir haben hier

$$V_i = 4\pi \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho\, d\varrho\,. \tag{8}$$

Wir ersehen hieraus, dafs V_i nicht mehr von l abhängt, also für alle Punkte im inneren Hohlraume konstant ist. Die Derivierten nach den Koordinaten des angezogenen Punktes sind also Null, es findet gar keine Anziehung statt. Ist σ konstant, so läfst sich die Integration ausführen, und wir erhalten

$$V_i = 2\pi\sigma(P^2 - P_0^2)\,. \tag{9}$$

3. Fall: $P_0 < l < P$. Wir zerlegen die Hohlkugel in zwei Teile durch eine Kugelfläche vom Radius l. Für den inneren Teil ist der angezogene Punkt ein äufserer, für den äufseren Teil ein innerer Punkt. Demnach setzt sich das Potential V_m aus einem V_a und einem V_i zusammen:

$$V_m = \frac{4\pi}{l} \int_{P_0}^{l} \sigma\varrho^2 d\varrho + 4\pi \int_{l}^{P} \sigma\varrho\, d\varrho\,. \tag{10}$$

Da die äufsere Hohlkugel keine Anziehung ausübt, so ist die Gesamtanziehung die gleiche, wie wenn nur die innere Hohlkugel mit den Radien P_0 und l vorhanden wäre.

Für konstante Dichte σ und für eine Vollkugel (d. h. $P_0 = 0$) erhalten wir

$$V_m = 2\pi\sigma\left(P^2 - \frac{l^2}{3}\right). \tag{11}$$

Die Attraktion im Inneren der homogenen Vollkugel ist durch

$$\frac{dV_m}{dl} = -\frac{4\pi\sigma l}{3} \tag{12}$$

gegeben; sie ist dem Abstande vom Mittelpunkte direkt proportional.

3. Es fällt uns auf, dafs die Funktion V in den drei verschiedenen

Teilen des Raumes ganz verschiedene Formen annimmt. Man sieht aber aus der Form von V_m, daſs an den Grenzen die Werte der verschiedenen V dieselben sind, indem in V_m für $l = P_0$ das erste, für $l = P$ das zweite Integral verschwindet. V geht also stetig von einem Raume in den andern über, wie wir es nach dem vorigen Paragraphen erwarten muſsten.

Auch für die Derivierte von V nach l könnten wir leicht direkt zeigen, daſs sie an den Grenzflächen beiderseits dieselben Werte erhält.

4. Da in allen Fällen V nur eine Funktion von l ist, so sind die Niveauflächen mit der Hohlkugel konzentrische Kugelflächen; die Attraktion ist immer nach dem gemeinsamen Mittelpunkte gerichtet. Natürlich kann im inneren Hohlraume von Niveauflächen nicht die Rede sein.

§ 38.

Das Potential eines homogenen Ellipsoids.

1. Das Potential eines homogenen Ellipsoids zu bestimmen ist eine der interessantesten Aufgaben aus der Lehre von der Anziehung. Schon Newton hatte sie zu lösen gesucht und auch wichtige Sätze über die Anziehung innerer Punkte gefunden. Vergeblich aber bemühten sich bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts die Mathematiker, die allgemeine Lösung der Aufgabe zu finden. Besonders war es die Anziehung eines auſserhalb des Ellipsoids gelegenen Punktes, welcher groſse Schwierigkeiten bereitete. Maclaurin zeigte, wenigstens für gewisse einfache Fälle, wie sich diese Aufgabe auf diejenige der Anziehung eines inneren Punktes zurückführen läſst. D'Alembert und Lagrange verallgemeinerten den Maclaurin'schen Satz, der noch jetzt die Grundlage für die vorliegende Aufgabe bildet. Endlich gelang es Laplace, die Attraktion eines homogenen Ellipsoids allgemein zu berechnen. Dieser Lösung folgten bald eine Reihe anderer, die sehr verschiedene Wege einschlugen. (Über genauere Angaben der einschlägigen Litteratur siehe Bacharach, Geschichte der Potentialtheorie, pag. 61.) Wir werden hier der Methode folgen, welche zuerst von Gauss angegeben wurde und zwar in der etwas vereinfachten von Somoff herrührenden Form*). Um den Gang der Rechnung später nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir einen Hilfssatz voraus.

2. Hilfssatz von Gauss. Es sei S eine beliebige geschlossene Fläche, P ein beliebiger Punkt des Raumes. Wir denken uns durch P nach allen Richtungen hin Halbgerade gezogen, welche die Fläche S ein oder mehrere Male schneiden. Wir betrachten einen unendlich dünnen Halbstrahlenkegel, welcher von P ausgehend die Fläche S zunächst in der Entfernung r_1 trifft, ein zweites Mal in der Entfernung r_2, dann in der

*) Gauss, Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata; Ges. Werke, B.5, pag. 1. — Somoff, Theoretische Mechanik, übersetzt von Ziwet.

Entfernung r_3 u. s. w.; abwechselnd wird er dabei ein- und austreten. Dieser Kegel schneide aus S das erste Mal das Element dS_1, das zweite Mal dS_2 u. s. w. aus; wir berechnen zunächst die Projektionen dieser Elemente auf Kugelflächen von den resp. Radien r_1, r_2, r_3 u. s. f. und finden $dS_1 \cos(r, n_1)$, $dS_2 \cos(r, n_2) \ldots$, wenn (r, n_1) den Winkel zwischen einem der Halbstrahlen des Elementarkegels, wobei die Richtung nach dem Punkte P zu als die positive angesehen wird, und der nach aufsen gerichteten Normalen in dS bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dafs die Winkel (r, n_1), $(r, n_2) \ldots$ abwechselnd spitz und stumpf sind, ihre Kosinus also abwechselnd positiv und negativ, ersteres für Eintrittsstellen, letzteres für Austrittsstellen. Wir berechnen weiter das Flächenelement $d\Sigma$, welches ein solcher Kegel aus einer mit dem Radius 1 um P beschriebenen Kugelfläche ausschneidet und finden

$$d\Sigma = \pm \frac{dS_1 \cos(r, n_1)}{r_1^{\,2}} = \mp \frac{dS_2 \cos(r, n_2)}{r_2^{\,2}} = \pm \cdots.$$

Wir summieren nun die $d\Sigma$ für die ganze Fläche S, wobei wir unterscheiden müssen, ob P aufserhalb oder innerhalb des von S abgeschlossenen Raumes liegt oder etwa auf S selbst. Im ersten Falle tritt jeder Strahl so oft ein wie aus, die Elemente heben sich alle weg und wir erhalten

$$(1) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\,dS}{r^2} = 0.$$

Im zweiten Falle bleibt auf jedem Strahle ein Element übrig, bei welchem ein Austritt stattfindet; es ist daher

$$(2) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\,dS}{r^2} = -\int d\Sigma = -4\pi.$$

Liegt P auf S selbst und zwar an einem Punkte stetiger Krümmung, so werden blofs auf der einen Hälfte der Kugel vom Radius 1 Elemente abgebildet, und wir erhalten

$$(3) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\,dS}{r^2} = -2\pi.$$

Liegt P auf einer Kante oder Spitze von S, so ist die Integration über den Teil der Kugel auszudehnen, welcher durch den P umgebenden Tangentenkegel ausgeschnitten wird. Ist z. B. S die Oberfläche eines Parallelepipedes und liegt P auf einer Kante, so ist die Integration über $\frac{1}{4}$ der Kugelfläche auszudehnen; es wird

$$(4) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\,dS}{r^2} = -\pi;$$

liegt P in einer Ecke des Parallelepipedes, so ist

$$(5) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\,dS}{r^2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{u. s. f.}$$

3. Der Weg, welchen wir einschlagen, um das Potenti l eines homogenen Ellipsoids zu berechnen, ist der folgende. Wie schon oben erwähnt wurde, ist ein Satz von Maclaurin die Grundlage der Lehre von der Anziehung der Ellipsoide. Dieser Satz bezieht sich auf die Anziehung zweier konfokalen Ellipsoide auf einen äufseren Punkt. Um zu diesem Satze zu gelangen, berechnen wir nicht direkt das Potential des gegebenen Ellipsoids

$$\frac{\xi^2}{a_1^{\,2}} + \frac{\eta^2}{b_1^{\,2}} + \frac{\zeta^2}{c_1^{\,2}} = 1, \tag{6}$$

sondern zunächst dasjenige eines zu jenem konfokalen Ellipsoids

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1, \tag{7}$$

wo

$$a^2 = a_1^{\,2} + \lambda, \quad b^2 = b_1^{\,2} + \lambda, \quad c^2 = c_1^{\,2} + \lambda. \tag{8}$$

Das Potential von (6) können wir ja daraus leicht erhalten, indem wir $\lambda = 0$ setzen. Wir untersuchen dann, was aus dem Potentiale wird, wenn wir λ als variabel betrachten. Dabei wird sich leicht der Maclaurin'sche Lehrsatz und dann das Potential des Ellipsoids (6) ergeben.

Ein wichtiger Kunstgriff bei der Berechnung eines Potentials besteht darin, den anziehenden Körper auf eine passende Weise in Elemente zu zerlegen. Wir verfahren folgendermafsen:

Wir zerlegen uns das Ellipsoid (8) durch Ellipsoidflächen, welche mit der gegebenen ähnlich und ähnlich liegend sind. Die Gleichung einer solchen ist:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \theta^2, \tag{9}$$

wobei θ eine zwischen 0 und 1 variable Gröfse ist; für die nächstfolgende Fläche müssen wir $\theta + d\theta$ statt θ setzen u. s. w. Ist nun V das Potential des ganzen Ellipsoids, so ist das Potential einer Schicht, welche zwischen zwei aufeinander folgenden Ellipsoidenflächen liegt, das Differential von V nach θ: $d_\theta V$. Ist dS ein Flächenelement von (9), ε der Abstand der beiden benachbarten Ellipsoide an der Stelle von dS, r die Entfernung des angezogenen Punktes (x, y, z) von dS, so folgt

$$d_\theta V = \sigma \int \frac{\varepsilon\, dS}{r}, \tag{10}$$

wo die Integration über die ganze Oberfläche auszudehnen ist.

Der bequemeren Bearbeitung dieses Ausdrucks wegen führen wir neue Koordinaten ein, indem wir setzen:

$$u = \frac{\xi}{a}, \quad v = \frac{\eta}{b}, \quad w = \frac{\zeta}{c}. \tag{11}$$

Hierdurch wird das Ellipsoid (2) als Kugel abgebildet, deren Gleichung ist:

$$u^2 + v^2 + w^2 = \theta^2. \tag{12}$$

Betrachten wir das Verhältnis eines Körperteils des ursprünglichen

Systems zu dem entsprechenden im transformierten Systeme, so finden wir, dafs dasselbe konstant gleich abc ist; denn wir haben

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = abc\, du\, dv\, dw. \tag{13}$$

Dem Elemente dS der Ellipsoidfläche entspricht ein Element der Kugelfläche (12), dessen Gröfse $\theta^2 d\Sigma$ ist, wenn $d\Sigma$ ein ähnliches, ähnlich gelegenes Element einer konzentrischen Kugel vom Radius 1 ist. Dem Körperelemente εdS entspricht das Element $\theta^2 d\theta d\Sigma$ einer Kugelschicht, die von Kugeln mit den Radien θ, resp. $\theta + d\theta$ eingeschlossen wird. Wegen (13) ist dann aber

$$\varepsilon dS = abc\, d\Sigma\, \theta^2 d\theta \tag{14}$$

und folglich

$$d_0 V = \sigma abc\theta^2 d\theta \int \frac{d\Sigma}{r}. \tag{15}$$

Nun betrachten wir diesen Ausdruck als Funktion von λ. Wir differentiieren die Gröfse $\frac{d_0 V}{abc}$ nach λ. Dabei ist zu beachten, dafs λ nur in r enthalten ist. r ist nämlich eine Funktion der ξ, η, ζ und diese sind nach (11) Funktionen von a, b, c und damit von λ; dagegen hängen die u, v, w nicht von λ ab*), ebensowenig $d\Sigma$, das Element der Kugel vom Radius 1.

Es ist also

$$d_\lambda \left(\frac{d_0 V}{abc}\right) = -\sigma\theta^2 d\theta \int \frac{d\Sigma\, d_\lambda r}{r^2}; \tag{16}$$

ferner ist

$$r d_\lambda r = (\xi - x) d_\lambda \xi + (\eta - y) d_\lambda \eta + (\zeta - z) d_\lambda \zeta \tag{17}$$

und

$$d_\lambda \xi = d_\lambda (u\sqrt{a_1^2 + \lambda}) = \frac{1}{2} \frac{u\, d\lambda}{\sqrt{a_1^2 + \lambda}} = \frac{\xi}{2a^2} d\lambda \tag{18}$$

und ebenso

$$d_\lambda \eta = \frac{\eta}{2b^2} d\lambda, \quad d_\lambda \zeta = \frac{\zeta}{2c^2} d\lambda.$$

4. Diese Gleichungen formen wir um mit Hilfe einer neu einzuführenden Gröfse p, welche Lamé und nach ihm Somoff als Differentialparameter (erster Ordnung) bezeichnen. Sei ξ, η, ζ ein Punkt des durch Gleichung (9) bestimmten Ellipsoids. Gehen wir vom Punkte ξ, η, ζ aus in der Richtung der äufseren Normale des Ellipsoids um eine unendlich kleine Strecke dn weiter und legen durch deren Endpunkt ein ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid, so mag dieses durch die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \theta^2 + d(\theta^2)$$

dargestellt sein. Dann definieren wir p durch die Gleichung

*) Wir denken uns nämlich hier alles in die Koordinaten u, v, w transformiert.

$$p = \frac{1}{2}\frac{d(\theta^2)}{dn}. \tag{19}$$

Bezeichnet $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die Gleichung einer Fläche, so sind bekanntlich die Richtungskosinus ihrer Normalen im Punkte ξ, η, ζ

$$\cos(n, x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2}} \quad \text{u. s. w.;}$$

für das Ellipsoid (9) haben wir daher

$$\frac{d\xi}{dn} = \cos(n, x) = \frac{\frac{\xi}{a^2}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}} \quad \text{u. s. w.} \tag{20}$$

Daher ist unter Benutzung von (9) und (20)

$$\begin{aligned}\frac{d(\theta^2)}{dn} &= \frac{\partial(\theta^2)}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dn} + \frac{\partial(\theta^2)}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dn} + \frac{\partial(\theta^2)}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dn} \\ &= \frac{2\xi}{a^2}\frac{d\xi}{dn} + \frac{2\eta}{b^2}\frac{d\eta}{dn} + \frac{2\zeta}{c^2}\frac{d\zeta}{dn} \\ &= 2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}},\end{aligned}$$

also

$$p = \sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}} \tag{21}$$

und aufserdem

$$\frac{\xi}{a^2} = p\cos(n, x), \quad \frac{\eta}{b^2} = p\cos(n, y), \quad \frac{\zeta}{c^2} = p\cos(n, z). \tag{22}$$

5. Wir haben ferner nach $(18)_1$ und (22)

$$d_\lambda \xi = \frac{1}{2} p\cos(n, x) d\lambda, \quad d_\lambda \eta = \frac{1}{2} p\cos(n, y) d\lambda, \tag{23}$$

$$d_\lambda \zeta = \frac{1}{2} p\cos(n, z) d\lambda,$$

woraus für $d_\lambda r$ folgt

$$\begin{aligned} d_\lambda r &= \frac{1}{2} p\left[\frac{\xi - x}{r}\cos(n, x) + \frac{\eta - y}{r}\cos(n, y) + \frac{\zeta - z}{r}\cos(n, z)\right] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2} p\left[\cos(r, x)\cos(n, x) + \cos(r, y)\cos(n, y) + \cos(r, z)\cos(n, z)\right] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2} p\cos(n, r) d\lambda. \end{aligned} \tag{24}$$

Setzen wir dies in (16) ein, so wird

$$d_\lambda\left(\frac{d_0 V}{abc}\right) = \sigma\theta^2 d\theta \int \frac{p\, d\Sigma \cos(n, r) d\lambda}{2r^2}. \tag{25}$$

Nun kann ferner statt (19) $\theta d\theta = p\varepsilon$ geschrieben werden, da $\varepsilon = dn$ ist; verbinden wir dies mit (14), so ergiebt sich

$$(26) \qquad p\,d\Sigma = \frac{dS}{abc\theta},$$

und dadurch verwandelt sich (25) in

$$(27) \qquad d_\lambda\left(\frac{d_\theta V}{abc}\right) = \frac{\sigma\theta\,d\theta\,d\lambda}{2abc}\int \frac{\cos(n,r)\,dS}{r^2}.$$

Das rechtsstehende Integral ist aber nach dem Hilfssatze von Gauss, Gleichung (1) und (2), gleich 0 oder -4π, je nachdem der angezogene Punkt (x, y, z) aufserhalb oder innerhalb der Fläche (9) liegt.

Für einen äufseren Punkt wird also

$$(28) \qquad d_\lambda\left(\frac{d\,V}{abc}\right) = 0.$$

Die Bedingung dafür, dafs (x, y, z) ein äufserer Punkt ist, lautet aber

$$(29) \qquad \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} + \frac{z^2}{c_1^2+\lambda} \gtreqless 1;$$

wird λ dieser Bedingung gemäfs gewählt, so ist für jedes θ zwischen 0 und 1 die Gleichung (28) erfüllt.

Mithin ist auch

$$(30) \qquad d_\lambda\left(\frac{\int_0^1 d_\theta V}{abc}\right) = d_\lambda\left(\frac{V}{abc}\right) = 0,$$

d. h. der Quotient $\frac{V}{abc}$ ist für alle λ, welche (29) genügen, konstant.

Die Potentiale zweier konfokalen Ellipsoide von gleicher Dichtigkeit für einen äufseren Punkt sind den Produkten der drei Halbachsen, also auch dem Volumen der Ellipsoide proportional. Ist die Dichtigkeit beider (homogenen) Ellipsoide verschieden, so verhalten sich die Potentiale wie die Massen.

Sind V_1 und V_2 zwei solche Potentiale, so hat in allen Punkten, für welchen V_1 einen konstanten Wert besitzt, auch V_2 einen konstanten Wert; demnach müssen beide dieselben Niveauflächen besitzen. Daraus folgt aber nach den in § 35 angestellten Betrachtungen, dafs die in einem Punkte von beiden Körpern aus wirkenden Kräfte dieselbe Richtung besitzen.

Nimmt V_1 um die Gröfse dV_1 zu, so wächst V_2 um $dV_1\frac{M_2}{M_1}$, wenn M_1 und M_2 die Massen der beiden Ellipsoide sind.

Die Zunahmen von einer Niveaufläche zu der benachbarten, und damit auch die anziehenden Kräfte, sind also den Massen proportional. Dies giebt den Satz von Maclaurin:

Die Anziehungskräfte, welche von zwei homogenen konfokalen Ellipsoiden auf denselben äufseren Punkt ausgeübt werden, haben dieselbe Richtung und sind den Massen der Ellipsoide proportional.

6. Wir kehren zur Gleichung (27) zurück und betrachten nunmehr den Fall eines innerhalb (9) gelegenen Punktes. Es ist dann:

$$d_\lambda\left(\frac{d_0 V}{abc}\right) = -\frac{2\pi\sigma\vartheta d\vartheta d\lambda}{abc}. \tag{31}$$

Bei der Integration dieser Differentialgleichung ist folgendes zu beachten. Die Gleichung (9) repräsentiert einen doppelten Komplex von Ellipsoiden, falls wir a^2, b^2, c^2 durch ihre Werte (8) ersetzt denken. Variieren wir ϑ bei festem λ, so erhalten wir eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide. Durch die Variation von λ allein wird dagegen eine Schar konfokaler Ellipsoide erzeugt.

Wir wollen nun zunächst ein bestimmtes λ festhalten und (31) nach ϑ von 0 bis 1 integrieren. Der Sinn dieses Verfahrens ist einfach der, dafs wir uns ein Ellipsoid (8) mit festem λ in unendlich dünne, von ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoidflächen begrenzte Schalen zerlegt denken und die Anteile, welche diese Schalen zu der Gröfse

$$d_\lambda\left(\frac{V}{abc}\right)$$

liefern, summieren. Hierbei ist zu bemerken, dafs die Gleichung (31) nur dann in Kraft tritt, wenn x, y, z zu der betreffenden Ellipsoidfläche mit veränderlichem ϑ ein innerer Punkt ist. Der Anteil von allen Schalen, für welche x, y, z ein äufserer Punkt wird, verschwindet nach (30).

Damit überhaupt (31) auf einen Teil der Schalen Anwendung findet, mufs x, y, z innerhalb des Ellipsoids (7) liegen, d. h. es mufs

$$\frac{x^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} + \frac{z^2}{c_1^2+\lambda} < 1 \tag{32}$$

sein. Durch den Punkt x, y, z denken wir uns ein zu (7) ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid (9) konstruiert, für welches $\vartheta = \vartheta_1$ sein möge; es ist dann ϑ_1 durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} + \frac{z^2}{c_1^2+\lambda} = \vartheta_1^2 \tag{33}$$

bestimmt. Alle Anteile von Ellipsoidschalen, welche innerhalb dieses Ellipsoides liegen, sind gleich Null zu setzen; für die übrigen ist (31) zu benutzen. Hiernach finden wir

$$d_\lambda\left(\frac{V}{abc}\right) = d_\lambda\left(\frac{\int_0^1 d_0 V}{abc}\right) = d_\lambda\left(\frac{\int_{\vartheta_1}^1 d_0 V}{abc}\right) = -\pi\sigma(1-\vartheta_1^2)\frac{d\lambda}{abc}. \tag{34}$$

Setzen wir für ϑ_1^2 seinen Wert aus (33) ein und integrieren nach λ von λ bis unendlich, so wird

$$\left(\frac{V}{abc}\right)_\infty - \left(\frac{V}{abc}\right)_\lambda \tag{35}$$

$$= -\pi\sigma \int_\lambda^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}}.$$

7. Es ist nun unschwer zu beweisen, dafs

$$\left(\frac{V}{abc}\right)_\infty = \left(\frac{V}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}}\right)_\infty = 0 \tag{36}$$

ist. Wir dürfen dies nicht etwa direkt aus § 36, 2 folgern, da für $\lambda = \infty$ V das Potential eines unendlich grofsen Ellipsoides wird.

Wählen wir den angezogenen Punkt zum Mittelpunkte, so ist ein Körperelement bei entsprechender Bezeichnung wie in § 36, 4

$$\sigma\varrho^2 d\Sigma d\varrho,$$

das Potential also

$$V = \int\int \frac{\sigma\varrho^2 d\Sigma d\varrho}{\varrho} = \sigma \int d\Sigma \int \varrho d\varrho. \tag{37}$$

Ist R gröfser als der gröfste Wert, welchen ϱ annimmt, so ist das Doppelintegral auf der rechten Seite seiner Bedeutung wegen kleiner wie

$$\int d\Sigma \int \varrho d\varrho,$$

ausgedehnt über die Oberfläche einer Kugel, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte und R zum Radius hat, d. h. es ist

$$V < 2\pi\sigma R^2. \tag{38}$$

Nun ist R jedenfalls*) von derselben Gröfsenordnung wie die Halbachsen des Ellipsoids, also wie a, b, c. Wächst λ ins Unendliche, so wird auch R unendlich, also V von der zweiten Ordnung unendlich; aber

$$\frac{V}{abc}$$

verschwindet, da der Nenner von der dritten Ordnung unendlich wird.

Wir haben also

$$\left(\frac{V}{abc}\right) = \pi\sigma \int_\lambda^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}\right) \tag{39}$$

$$\times \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}}.$$

*) Wenn es nur um Endliches gröfser als der gröfste Wert von ϱ angenommen wird.

Wollen wir daraus das Potential des ursprünglichen Ellipsoids (1)

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2} = 1$$

für einen inneren Punkt erhalten, so müssen wir in der unteren Grenze des Integrals $\lambda = 0$ setzen; wir finden

$$(40) \qquad V = \pi \sigma a_1 b_1 c_1 \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b_1^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c_1^2 + \lambda}\right) \times \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2 + \lambda)(b_1^2 + \lambda)(c_1^2 + \lambda)}}.$$

8. Mit Hilfe des Maclaurin'schen Satzes können wir endlich hieraus auch das Potential des Ellipsoids (6) für einen äußseren Punkt ableiten. Wir legen zu diesem Zwecke durch (x, y, z) ein zu (6) konfokales Ellipsoid. Für dieses ist dann (x, y, z) ein Punkt der Oberfläche, der gleichzeitig als innerer und als äußserer Punkt behandelt werden darf, da das Potential an der Grenzfläche stetig ist (§ 36); wir können daher das Potential V_1 des konfokalen Ellipsoids nach (39) berechnen. Das zu diesem Ellipsoid gehörige $\lambda = \lambda_1$ ist aus der Gleichung

$$(41) \qquad \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b_1^2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{c_1^2 + \lambda_1} = 1$$

zu berechnen. Diese kubische Gleichung giebt für λ_1 nach § 31 nur einen Wert, welchem ein Ellipsoid entspricht.

Die Halbachsen des so erhaltenen Ellipsoids sind

$$(42) \qquad a_2 = \sqrt{a_1^2 + \lambda_1}, \quad b_2 = \sqrt{b_1^2 + \lambda_1}, \quad c_2 = \sqrt{c_1^2 + \lambda_1}.$$

Die Gleichung (39) liefert dann

$$(43) \qquad \frac{V_1}{a_2 b_2 c_2} = \pi \sigma \int_{\lambda_1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b_1^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c_1^2 + \lambda}\right) \times \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2 + \lambda)(b_1^2 + \lambda)(c_1^2 + \lambda)}}.$$

Nach dem Maclaurin'schen Satze ist aber

$$\frac{V}{a_1 b_1 c_1} = \frac{V_1}{a_2 b_2 c_2},$$

folglich wird

$$(44) \qquad V = \pi \sigma a_1 b_1 c_1 \int_{\lambda_1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b_1^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c_1^2 + \lambda}\right) \times \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2 + \lambda)(b_1^2 + \lambda)(c_1^2 + \lambda)}},$$

womit wir die gestellte Aufgabe vollständig gelöst haben.

9. Für die weitere Untersuchung wollen wir zur Abkürzung die Gröfse

(45) $$\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)} = D$$

setzen und

(46) $$\frac{4}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \sigma = M,$$

wo M die Masse des Ellipsoids bedeutet; wir können dann für (40) auch schreiben

(47) $$V = \frac{3}{4} M \left[\int_0^\infty \frac{d\lambda}{D} - x^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)D} - y^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b_1^2+\lambda)D} - z^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_1^2+\lambda)D} \right].$$

Da die Integrale $\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)D}$ u. s. w. nicht von x, y, z abhängen, so sehen wir aus (47), daſs die Niveauflächen für einen inneren Punkt Flächen zweiter Ordnung sind. Ferner haben die Integralwerte, wie aus ihrer Form hervorgeht, alle dasselbe Vorzeichen, die Niveauflächen sind also zu dem gegebenen koaxiale Ellipsoide.

Die Niveauflächen für äuſsere Punkte sind dagegen transcendente Flächen, da hier x, y, z auch in der Grenze λ_1 vorkommen.

10. Für die Komponenten der Anziehung eines inneren Punktes erhalten wir durch Differentiation von (47)

(48) $$\frac{\partial V}{\partial x} = X = -\frac{3}{2} Mx \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)D},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y = -\frac{3}{2} My \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b_1^2+\lambda)D}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z = -\frac{3}{2} Mz \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_1^2+\lambda)D}.$$

Sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines zweiten inneren Punktes, X_1, Y_1, Z_1 die auf ihn wirkenden Attraktionskomponenten, so folgt aus (48)

(49) $$\frac{X}{x} = \frac{X_1}{x_1}, \quad \frac{Y}{y} = \frac{Y_1}{y_1}, \quad \frac{Z}{z} = \frac{Z_1}{z_1}.$$

Liegen beide Punkte auf einer durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden Geraden und sind r und r_1 ihre Abstände vom Mittelpunkte, so hat man

$$x : x_1 = y : y_1 = z : z_1 = r : r_1$$

und demzufolge

$$X : X_1 = Y : Y_1 = Z : Z_1 = r : r_1,$$

also auch

(50) $$P : P_1 = r : r_1$$

wenn P und P_1 die Gesamtkräfte in (x, y, z), resp. $(x_1\ y_1, z_1)$ bedeuten. Endlich findet sich

$$\frac{X}{P} = \frac{X_1}{P_1}, \quad \frac{Y}{P} = \frac{Y_1}{P_1}, \quad \frac{Z}{P} = \frac{Z_1}{P_1};$$

dies sind aber die Richtungskosinus der Kräfte P und P_1. Wir haben also das Resultat:

Zwei innere Punkte, welche auf einer durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden Geraden liegen, werden mit Kräften angezogen, welche der Entfernung vom Mittelpunkte proportional und einander parallel sind.

11. Hat man innerhalb des gegebenen Ellipsoids ein zweites ähnliches und ähnlich liegendes

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2} = \theta^2,$$

so findet man dessen Anziehungskomponenten für einen inneren Punkt X_1, Y_1, Z_1, indem man in (48) statt a_1^2 setzt $a_1^2\theta^2$ u. s. w.; führt man zugleich statt λ eine neue Variable λ' ein, so dafs $\lambda = \theta^2\lambda'$ ist, und bedenkt, dafs $M_1 = M\theta^3$ ist, so findet man

$$(51)\quad X_1 = -\frac{3}{2} M\theta^3 \int_0^\infty \frac{\theta^2 d\lambda'}{\theta^2(a_1^2+\lambda')\theta^3 D} = -\frac{3}{2} M \int_0^\infty \frac{d\lambda'}{(a_1^2+\lambda')D} = X$$

u. s. w.

Zwei ähnliche und ähnlich liegende homogene Ellipsoide von gleicher Dichte ziehen einen (für beide) inneren Punkt mit gleichen und gleich gerichteten Kräften an.

Ohne weiteres folgert man hieraus:

Eine ellipsoidische Schale, welche von ähnlichen, ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzt wird, übt auf einen Punkt des inneren Hohlraums keine Anziehung aus.

Der letzte Satz wurde schon von Newton auf synthetischem Wege gefunden.

Die Integrale, welche in den Kraftkomponenten vorkommen, sowie diejenigen des Potentials, lassen sich auf ein einziges Integral und seine partiellen Derivierten zurückführen. Setzt man nämlich

$$(52)\quad A = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}},$$

so ist

$$(53)\quad \frac{\partial A}{\partial(a_1^2)} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty [(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)]^{-\frac{3}{2}}(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)\,d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)D} \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist also

$$(54)\quad \begin{cases} V = \frac{3}{4} M \left(A + 2 \frac{\partial A}{\partial (a_1^2)} x^2 + 2 \frac{\partial A}{\partial (b_1^2)} y^2 + 2 \frac{\partial A}{\partial (c_1^2)} z^2 \right), \\ X = 3 M x \frac{\partial A}{\partial (a_1^2)}, \quad Y = 3 M y \frac{\partial A}{\partial (b_1^2)}, \quad Z = 3 M z \frac{\partial A}{\partial (c_1^2)}. \end{cases}$$

Das Integral A ist ein elliptisches erster Gattung.

12. Suchen wir nun die Anziehungskomponenten für einen äufseren Punkt. Es ist dabei zu beachten, dafs die Integrationsgrenze λ eine Funktion von x, y, z ist.

Wir erhalten

$$(55)\quad X = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{3}{2} M x \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda) D}$$
$$- \frac{3}{4} \frac{M \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda_1} - \frac{y^2}{b_1^2 + \lambda_1} - \frac{z^2}{c_1^2 + \lambda_1} \right)}{D} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}.$$

Der vom Integralzeichen freie Ausdruck ist aber wegen (41) gleich Null. Es ist also

$$(56)\quad \begin{cases} X = -\frac{3}{2} M x \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda) D}, \\ Y = -\frac{3}{2} M y \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b_1^2 + \lambda) D}, \\ Z = -\frac{3}{2} M z \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c_1^2 + \lambda) D}. \end{cases}$$

Auch die Integrale in X, Y, Z lassen sich wieder auf einziges Integral A zurückführen; man mufs nur wieder bei der Differentiation die Gleichung (41) beachten. Es ist hier

$$(57)\quad A = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{D}$$

zu setzen; für V, X, Y, Z erhält man dann genau dieselben Resultate wie bei einem inneren Punkte.

13. Ist x, y, z ein Punkt auf dem Ellipsoide

$$(58)\quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

so ist

$$\frac{x a_2}{a_1}, \quad \frac{y b_2}{b_1}, \quad \frac{z c_2}{c_1}$$

ein Punkt auf einem zweiten Ellipsoide

$$(59) \qquad \frac{\xi^2}{a_2^2} + \frac{\eta^2}{b_2^2} + \frac{\zeta^2}{c_2^2} = 1,$$

wie unmittelbar zu verifizieren ist; wir bezeichnen beide Punkte, deren Beziehung eine reciproke ist, als entsprechende.

Wir wollen nun annehmen, daſs (58) und (59) konfokal sind und daſs das Ellipsoid (59) das kleinere ist; beide denken wir uns mit Masse von gleicher Dichtigkeit erfüllt. Es ist

$$(60) \qquad a_1^2 = a_2^2 + \lambda_1, \quad b_1^2 = b_2^2 + \lambda_1, \quad c_1^2 = c_2^2 + \lambda_1$$

und λ_1 positiv.

Die Attraktionskomponenten des Ellipsoids (59) auf den äuſseren Punkt x, y, z sind

$$(61) \quad X_2 = -2\pi\sigma a_2 b_2 c_2 x \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_2^2+\lambda)\sqrt{(a_2^2+\lambda)(b_2^2+\lambda)(c_2^2+\lambda)}} \quad \text{u. s. w.},$$

worin λ_1 aus (60) zu entnehmen ist. Substituieren wir

$$\lambda = \lambda' + a_1^2 - a_2^2 = \lambda' + b_1^2 - b_2^2 = \lambda' + c_1^2 - c_2^2$$

und schreiben wieder λ statt λ', so wird aus (61)

$$(62) \quad X_2 = -2\pi\sigma a_2 b_2 c_2 x \int_{0}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Attraktion des Ellipsoides (58) auf den inneren Punkt

$$\frac{x a_2}{a_1}, \quad \frac{y b_2}{b_1}, \quad \frac{z c_2}{c_1}$$

besitzt die Komponenten

$$(63) \quad X_1 = -2\pi\sigma a_1 b_1 c_1 \frac{x a_2}{a_1} \int_{0}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}} \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist also

$$(64) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_2 : X_1 &= b_2 c_2 : b_1 c_1, \\ Y_2 : Y_1 &= c_2 a_2 : c_1 a_1, \\ Z_2 : Z_1 &= a_2 b_2 : a_1 b_1. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen enthalten den Ivory'schen Satz, welcher die Attraktion eines homogenen Ellipsoids auf einen äuſseren Punkt zurückführt auf die Attraktion eines anderen Ellipsoids auf einen inneren Punkt, also ein kompliziertes Problem auf ein einfacheres reduziert (besonders im Sinne eines früheren Standes der Wissenschaft). In Worte gekleidet lautet der Satz, wenn man die Verhältnisse der Produkte je zweier Halbachsen durch diejenigen der Flächeninhalte der Hauptschnitte ersetzt, welche durch diese Halbachsen gelegt sind:

Bestimmt man auf zwei konfokalen, koaxialen Ellipsoiden, welche mit homogener Masse von gleicher Dichtigkeit erfüllt zu denken sind, zwei entsprechende Punkte, so verhalten sich die Attraktionskomponenten nach den Hauptachsen, welche jedes Ellipsoid auf den festgesetzten Punkt des anderen ausübt, wie die Flächeninhalte ihrer Hauptschnitte, welche auf der Richtung der Komponenten senkrecht stehen.

Nach einer Untersuchung von Poisson behält dieser Satz bei einem beliebigen Attraktionsgesetze seine Giltigkeit.

14. Die gefundenen Formeln vereinfachen sich wesentlich im Falle eines Rotationsellipsoids; die elliptischen Integrale gehen alsdann in logarithmisch-cyklometrische über. Wir wollen die Resultate nur für das Ellipsoid, welches durch Rotation einer Ellipse um die kleine Achse entstanden ist, und auch hier nur für innere Punkte und Oberflächenpunkte herleiten. Wir setzen $a_1 = b_1 = a$, $c_1 = b$ und haben (48)

$$(65)\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mx}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{b^2+\lambda}}, \\ Y = -\dfrac{3My}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{b^2+\lambda}}, \\ Z = -\dfrac{3Mz}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\int \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{b^2+\lambda}} = \frac{\sqrt{b^2+\lambda}}{(a^2-b^2)(a^2+\lambda)} + \frac{1}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2-b^2}}$$

und

$$\int \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{(a^2-b^2)\sqrt{b^2+\lambda}} - \frac{2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2-b^2}},$$

also, wenn man noch beachtet, daſs

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \operatorname{arccotg}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \arccos\frac{b}{a}$$

ist,

$$(66)\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mx}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\arccos\dfrac{b}{a} - \dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\right], \\ Y = -\dfrac{3My}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\arccos\dfrac{b}{a} - \dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\right], \\ Z = -\dfrac{3Mz}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[-\arccos\dfrac{b}{a} + \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]. \end{cases}$$

Da $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \varepsilon$, d. h. gleich der numerischen Exzentrizität ist, so kann auch noch

$$\arccos \frac{b}{a} = \arcsin \varepsilon$$

gesetzt werden.

15. Wir wollen jetzt das Rotationsellipsoid mit der Erde identifizieren, so daſs die xy-Ebene zur Äquatorebene wird. Bezeichnet ϱ den Abstand des Punktes x, y, z von der Rotationsachse, ist also

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und ist P die Kraft, welche in dieser Richtung (von der Achse weg) wirkt, so haben wir für die Erdoberfläche

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= -\frac{3M\varrho}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin \varepsilon - \frac{b}{a}\varepsilon\right],\\ Z &= -\frac{3Mz}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[-\arcsin \varepsilon + \frac{a}{b}\varepsilon\right].\end{aligned}\right.$$

Nehmen wir weiter an, daſs die Erde mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse rotiert, so daſs also die lineare Geschwindigkeit von x, y, z gleich $\varrho\omega$ ist, so haben wir für die Zentrifugalkraft in Bezug auf diesen Punkt (wobei die Einheiten entsprechend zu wählen sind)

$$\frac{v^2}{\varrho} = \varrho\omega^2;$$

dieselbe ist der Komponente P zuzufügen. Es wird also

$$(68)\qquad P = -\frac{3M\varrho}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin \varepsilon - \frac{b}{a}\varepsilon - \frac{2\omega^2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3M}\right].$$

Die Normale des Ellipsoids im Punkte x, y, z bildet mit der Äquatorebene einen Winkel φ (die geographische Breite), für welchen*)

$$(69)\qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{d\varrho}{dz} = \frac{z}{\varrho}\,\frac{a^2}{b^2}$$

ist. Soll nun die Richtung der vereinigten Schwere und Zentrifugalkraft normal auf der Erdoberfläche stehen, so muſs

$$\frac{Z}{P} = \operatorname{tg}\varphi,$$

also

$$2\,\frac{-a\arcsin \varepsilon + \frac{a}{b}\varepsilon}{\arcsin \varepsilon - \frac{b}{a}\varepsilon - \frac{2\omega^2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3M}} = \frac{a^2}{b^2}$$

oder, wenn

---

*) Es ist

$$\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2} \quad \text{u. s. w.}$$

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad M = \frac{4a^2b\sigma}{3}$$

eingesetzt wird,

(70) $$\omega^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon^3}\Big[2(3-2\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}\arcsin\varepsilon - 6\varepsilon(1-\varepsilon^2)\Big]$$

sein, eine Gleichung, die durch geeignete Werte von ω befriedigt wird.

Wir werden später sehen, dafs eine Flüssigkeitsmasse, welche unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte steht, nur dann sich im Gleichgewichte befinden kann, wenn die Gesamtkraftrichtung in jedem Oberflächenpunkte normal zur Oberfläche steht. Aus dem eben Gefundenen ist ersichtlich, dafs ein abgeplattetes Rotationsellipsoid eine mögliche Gleichgewichtsgestalt einer rotierenden, schweren, homogenen Flüssigkeitsmasse ist.

Die landläufige Annahme, dafs die Erde ein Rotationsellipsoid sei, auf dessen Oberfläche die Richtung der Gesamtschwere normal steht, ist also unter der Hypothese gleichmäfsiger Massenverteilung im Erdinnern mechanisch zulässig.

§ 39.

Das Potential des rechtwinkligen Parallelepipedons und eines beliebigen Polyeders.

1. Wir suchen das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedons*) mit der Dichtigkeit 1, dessen Seitenlängen $2a$, $2b$, $2c$ sind. Der Mittelpunkt dieses Körpers sei der Nullpunkt des Koordinatensystems; die x, y, z-Achsen mögen den Seiten von der Länge $2a$, $2b$, $2c$ parallel laufen. Ist wieder x, y, z der angezogene Punkt, ξ, η, ζ ein Punkt des attrahierenden Körpers, so haben wir für das Potential V den Ausdruck

(1) $$V = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} = \varphi(a, b, c, x, y, z),$$

worin

(2) $$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

ist.

Zunächst wollen wir durch geeignete Reduktionen den Ausdruck (1) auf etwas einfachere Ausdrücke zurückführen.

2. Setzen wir $\xi = \xi_1 + x$, lassen dann aber den Index der Einfachheit halber wieder weg, so ist

*) Die Aufgabe wurde gelöst von Bessel, Zach's monatl. Korrespondenz B. 27, p. 82, und Röthig, Borch. J. B. 58, p. 249. Wir folgen der Darstellung in der letzteren Abhandlung.

$$\int\limits_{-a}^{+a} \frac{d\xi}{r} = \int\limits_{-(a+x)}^{a-x} \frac{d\xi}{r}, \tag{3}$$

wo jetzt

$$r^2 = \xi^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \tag{4}$$

zu setzen ist.

Da r nunmehr ξ nur als Quadrat enthält, das Integral auf der rechten Seite von (3) also für $+\xi$ und $-\xi$ entgegengesetzte Werte annimmt, so ist weiter

$$\int\limits_{-(a+x)}^{a-x} \frac{d\xi}{r} = \int\limits_{-(a+x)}^{0} \frac{d\xi}{r} + \int\limits_{0}^{a-x} \frac{d\xi}{r} = \frac{1}{2}\int\limits_{-(a+x)}^{a+x} \frac{d\xi}{r} + \frac{1}{2}\int\limits_{-(a-x)}^{a-x} \frac{d\xi}{r}. \tag{5}$$

Führt man dieses Resultat in (1) ein, wobei man die Reihenfolge der Integrationen beliebig vertauschen kann, so erhält man

$$2V = \varphi(a+x, b, c, 0, y, z) + \varphi(a-x, b, c, 0, y, z)$$

oder

$$V = \frac{1}{2}\sum \varphi(a+\varepsilon x, b, c, 0, y, z), \tag{6}$$

wenn ε die Werte $+1$ und -1 annimmt.

Führt man auf der rechten Seite von (6) dieselbe Transformation in Bezug auf b und y, dann in Bezug auf c und z aus, so erhält man schliefslich

$$V = \frac{1}{8}\sum \varphi(a+\varepsilon x, b+\varepsilon_1 y, c+\varepsilon_2 z, 0, 0, 0), \tag{7}$$

wo $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ die Werte $+1$ und -1 beizulegen sind, so dafs die Summe aus acht Gliedern besteht.

Die Aufgabe ist hierdurch auf die einfachere zurückgeführt, das Integral

$$V_0 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\int\limits_{-\beta}^{+\beta}\int\limits_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} \tag{8}$$

zu berechnen, wo jetzt

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \tag{9}$$

zu nehmen ist. Diese Integration läfst sich direkt ausführen; wegen der komplizierten Rechnung gehen wir jedoch auf indirektem Wege vor.

3. Der Ausdruck $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ ist als eine homogene Funktion zweiter Ordnung seiner Variabeln α, β, γ anzusehen. Setzen wir nämlich in (8) $\lambda\xi, \lambda\eta, \lambda\zeta$ an Stelle von ξ, η, ζ, also auch in $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma$ an die Stelle von α, β, γ, so tritt $\lambda^3 d\xi\, d\eta\, d\zeta$ an Stelle von $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, λr an Stelle von r, so dafs

$$\varphi(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda^2 \int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\int\limits_{-\beta}^{+\beta}\int\limits_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

oder

$$\varphi(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda^2 \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \tag{10}$$

wird. Differentiieren wir diese Gleichung nach λ und setzen dann $\lambda = 1$, so folgt (vgl. auch die speziellere Herleitung § 29, 6, Anm.)

$$2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}. \tag{11}$$

Die Berechnung von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ ist daher auf die einfachere der drei Gröſsen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$$

zurückgeführt.

Durch Differentiation von (11) nach α erhalten wir ferner

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma}, \tag{12}$$

so daſs $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ bekannt ist, wenn

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma}$$

gefunden sind. Analoges gilt für $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$.

4. Aus (8) folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 2 \int\limits_{-\beta}^{+\beta}\int\limits_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\eta d\zeta}{\sqrt{\alpha^2 + \eta^2 + \zeta^2}}; \tag{13}$$

denn α kommt nur in den Grenzen des Integrals vor*).

Durch weitere Differentiation nach β erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = 4 \int\limits_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2}}. \tag{14}$$

Da aber

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2} + \zeta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2} - \zeta} \tag{15}$$

---

*) Es ist $\frac{\partial}{\partial b} \int\limits_a^b f(x) dx = f(b)$, $\frac{\partial}{\partial a} \int\limits_a^b f(x) dx = -f(a)$.

ist, so wird nach Einsetzen der Grenzwerte

(16) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = 4 \log \frac{\varrho + \gamma}{\varrho - \gamma},$$

wenn

(17) $$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

ist.

In gleicher Weise finden wir

(18) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} = 4 \log \frac{\varrho + \beta}{\varrho - \beta}.$$

5. Weiter folgt aus (19)

(19) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -2\alpha \int_{-\beta}^{+\beta} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\eta\, d\zeta}{(\alpha^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da

(20) $$\int \frac{d\zeta}{(a + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\zeta}{a\sqrt{a + \zeta^2}}$$

ist, so wird

(21) $$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\zeta}{(\alpha^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\gamma}{(\alpha^2 + \eta^2)\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}},$$

also

(22) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -4\alpha\gamma \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\eta}{(\alpha^2 + \eta^2)\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}}$$

und, da

(23) $$\int \frac{d\eta}{(\alpha^2 + \eta^2)\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}} = \frac{1}{\alpha\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\gamma\eta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}}$$

ist,

(24) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -8 \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho}.$$

6. Somit wird aus (12)

(25) $$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -8\alpha \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho} + 4\beta \log \frac{\varrho + \gamma}{\varrho - \gamma} + 4\gamma \log \frac{\varrho + \beta}{\varrho - \beta},$$

und analoge Ausdrücke findet man für $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$. Aus (11) wird also

(26) $$V_0 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = -4\alpha^2 \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho} - 4\beta^2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha\gamma}{\beta\varrho} - 4\gamma^2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha\beta}{\gamma\varrho}$$
$$+ 4\beta\gamma \log \frac{\varrho + \alpha}{\varrho - \alpha} + 4\alpha\gamma \log \frac{\varrho + \beta}{\varrho - \beta} + 4\alpha\beta \log \frac{\varrho + \gamma}{\varrho - \gamma}.$$

Hieraus folgt nach (7) der Wert von V in etwas weitläufiger Form.

7. Haben wir schon bei dem für die Rechnung einfachsten ebenflächigen Körper einen recht komplizierten Potentialausdruck gefunden, so dürfen wir umsomehr für das Potential eines beliebigen homogenen Polyeders recht verwickelte Verhältnisse erwarten. Trotzdem ist die Möglichkeit der elementaren Berechnung dieses Potentials mehrfach nachgewiesen worden*). Die Lösung der Aufgabe kann auf die der einfacheren reduziert werden: das Potential eines homogenen Tetraeders in Bezug auf einen seiner Eckpunkte zu finden.

Soll nämlich das Potential eines homogenen Polyeders für einen beliebigen, äußeren oder inneren Punkt O bestimmt werden, so denke man sich über sämtlichen Flächen des Polyeders Pyramiden errichtet, welche den Punkt O zur Spitze haben; Inhalt und Masse der Pyramide mögen als positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem sich die Pyramide an die innere oder äußere Seite der Polyederfläche anlegt. Der Inhalt des Polyeders ist dann gleich der algebraischen Summe der Inhalte dieser Pyramiden. Ebenso ist auch das Potential des homogenen Polyeders gleich der algebraischen Summe der Potentiale dieser Pyramiden, welche mit Masse von der gleichen Dichtigkeit, aber positivem oder negativem Zeichen nach der obigen Festsetzung ausgefüllt zu denken sind. Da sich diese Pyramiden in dreiseitige (Tetraeder) zerlegen lassen, die alle eine Ecke in O haben, so ist die Möglichkeit jener Reduktion ersichtlich.

Die Grundfläche eines solchen Tetraeders, d. h. die dem angezogenen Eckpunkte gegenüberliegende Fläche, kann in zwei rechtwinklige Dreiecke, das Tetraeder also in zwei andere, welche die rechtwinkligen Dreiecke zu Grundflächen haben, zerlegt werden. Auf Tetraeder der letzteren Art werden wir nachher die Rechnung anwenden.

8. Die Attraktion des Tetraeders auf einen seiner Eckpunkte läßt sich aber wiederum auf eine viel einfachere Aufgabe zurückführen. Grenzen wir irgend eine Ecke durch zwei parallele Ebenen ab, so entstehen zwei ähnliche Pyramiden, deren Grundflächeninhalte sich verhalten wie die Quadrate ihrer Höhen (H und h); legt man dagegen durch den Scheitelpunkt der Ecke irgend welche Strahlen, so verhalten sich die durch die beiden Parallelebenen und den Scheitelpunkt auf ihnen abgegrenzten Strecken wie die Höhen selbst. Denkt man sich nun die beiden Grundflächen mit Massen von gleicher Dichtigkeit und derselben unendlich kleinen Dicke belegt, so üben sie auf den Scheitelpunkt die gleiche Anziehung aus. Zerlegt man nämlich beide Pyramiden durch unendlich viele durch den Scheitelpunkt gehende Ebenen in unendlich schmale Pyramiden, so werden jene beiden Schichten in unendlich viele Elementarteile zerlegt. Die Massen zweier entsprechenden Elementarteile verhalten sich wie die von ihnen bedeckten Flächen, also wie $h^2 : H^2$; die Quadrate der Abstände vom Scheitelpunkte verhalten

*) Von Mehler, Mertens, Cayley, Betti, Günther, Hoppe. — Selbstverständlich werden wir nur Polyeder betrachten, welche Körper im gewöhnlichen Sinne darstellen, keine solchen, deren Flächen sich selbst durchschneiden u. s. w.

sich ebenso. Hieraus folgt, dafs bei Voraussetzung des Newton'schen Attraktionsgesetzes beide Elementarteile und damit auch beide Schichten dieselbe Attraktion auf den Scheitelpunkt ausüben, sowohl der Gröfse als auch der Richtung nach. Zerlegt man daher eine homogene Pyramide durch Parallelebenen zur Grundfläche in unendlich viele Schichten von gleicher Höhe, so ist die Attraktion aller Schichten auf den Scheitelpunkt die gleiche, sowohl der Gröfse als auch der Richtung nach. Man braucht daher, um die Attraktion der Pyramide auf ihre Spitze zu ermitteln, nur die Attraktion zu berechnen, welche ihre Grundfläche, falls in einer Flächeneinheit derselben die der Raumeinheit zukommende Masse konzentriert wird, auf sie ausübt, und mit der Höhe zu multiplizieren.

Aus der Gleichheit der Attraktion zweier Punkte in Bezug auf denselben Punkt folgt nicht die Gleichheit ihrer Potentiale für den letzteren. Seien M und m zwei entsprechende Massenelemente zweier Pyramidengrundflächen, deren Höhen H und h betragen, während M und m um R und r von der Spitze entfernt sind; dann sind die Potentiale beider Teile in Bezug auf die Spitze

$$\frac{M}{R} \quad \text{und} \quad \frac{m}{r} = \left(M\,\frac{h^2}{H^2}\right) : \left(R\,\frac{h}{H}\right) = \frac{M}{R}\,\frac{h}{H}.$$

Bezeichnet man daher die Gesamtpotentiale jener beiden Grundflächen, wenn sie in der vorhin angegebenen Weise belegt sind, mit W und w, so folgt

$$w = W\,\frac{h}{H}. \tag{27}$$

Für das Potential V der ganzen Pyramide in Bezug auf die Spitze erhalten wir daher

$$V = \int_0^H W\,\frac{h}{H}\,dh = \frac{WH}{2}. \tag{28}$$

Um also das Potential einer homogenen Pyramide in Bezug auf ihre Spitze zu ermitteln, genügt es, das Potential ihrer gleichmäfsig mit Masse belegten Grundfläche in Bezug auf die Spitze aufzusuchen.

9. Stellen wir dieses Resultat mit den vorhergehenden Reduktionen zusammen, so ist die ganze Aufgabe auf die folgende zurückgeführt: Das Potential eines gleichmäfsig mit Masse belegten rechtwinkligen Dreiecks in Bezug auf irgend einen Punkt zu ermitteln.

Das rechtwinklige Dreieck möge in der xy-Ebene liegen, der Scheitel des rechten Winkels sei der Nullpunkt und die Katheten von der Länge a und b mögen in die positiv gerichtete x- und y-Achse fallen; ein laufender Punkt der Dreiecksfläche werde mit ξ, η, der angezogene Punkt mit x, y, z bezeichnet. Das Dreieck denke man sich dann in unendlich schmale, zur x-Achse parallele Streifen zerlegt, deren Potentiale zuerst berechnet werden sollen; die Länge des Streifens, welcher von der x-Achse die Entfernung η hat, ist dann $\frac{\eta a}{b}$. Hiernach findet man für das Gesamtpotential V das Doppelintegral

$$V = \sigma \int_0^b d\eta \int_0^{\frac{a\eta}{b}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}. \tag{29}$$

Die Integration nach ξ liefert

$$\begin{aligned} V = \sigma \int_0^b \Big\{ &\log\Big[\frac{a\eta}{b} - x + \sqrt{\Big(\frac{a\eta}{b} - x\Big)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}\Big] \\ &- \log\big[- x + \sqrt{x^2 + (\eta - y)^2 + z^2}\big]\Big\} d\eta. \end{aligned} \tag{30}$$

Auch die zweite Integration läſst sich in geschlossener Form ausführen; man hat nämlich allgemein durch partielle Integration

$$\begin{aligned} &\int \log\big[A\eta + B + \sqrt{C\eta^2 + D\eta + E}\big] d\eta \\ &= \eta \log\big[A\eta + B + \sqrt{C\eta^2 + D\eta + E}\big] \\ &- \int \frac{\eta\Big[A + \frac{2C\eta + D}{2\sqrt{C\eta^2 + D\eta + E}}\Big]}{A\eta + B + \sqrt{C\eta^2 + D\eta + E}} d\eta. \end{aligned} \tag{31}$$

Das rechts stehende Integral ist elementar ausführbar, da es nur eine Quadratwurzel aus einem Ausdrucke zweiten Grades als Irrationalität enthält. Wir schreiben das fertige Resultat nicht hin, da es wegen seiner Kompliziertheit eine praktische Verwendung doch kaum gestattet. Das Problem der Attraktion eines homogenen Polyeders ist aber hiermit, prinzipiell betrachtet, vollkommen gelöst; es erfordert die Anwendung keiner transcendenten Funktionen mit Ausnahme von logarithmisch-cyklometrischen.

§ 40.

Die Laplace-Poisson'sche Gleichung.

1. Für unsere weitere Untersuchungen über die Theorie des Potentials müssen wir auch die zweiten partiellen Derivierten von V in Betracht ziehen. Wir werden zwischen ihnen eine Relation aufstellen, die für die Potentialtheorie von fundamentaler Bedeutung ist. Durch Differentiation der Ausdrücke für $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ in § 36, (3) finden wir

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\iiint \sigma d\xi d\eta d\zeta \left(\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{(x-\xi)^2}{r^5}\right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\iiint \sigma d\xi d\eta d\zeta \left(\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{(y-\eta)^2}{r^5}\right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\iiint \sigma d\xi d\eta d\zeta \left(\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{(z-\zeta)^2}{r^5}\right). \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Addieren wir diese drei Differentialquotienten, so erhalten wir für einen äufseren Punkt

(2)
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Diese merkwürdige Beziehung wurde von Laplace entdeckt und führt seinen Namen.

Liegt der angezogene Punkt im Innern des anziehenden Körpers, so verlieren die Integrale der Gleichung (1) jede Bedeutung, was man durch Einführung von Polarkoordinaten wie in § 36, 3 leicht nachweisen kann. Es bleibt hier r im Nenner übrig, wodurch die Integrale einen unbestimmten Wert erhalten.

Damit ist nun nicht gesagt, dafs die zweiten Derivierten von V ihre Bedeutung in diesem Falle verlieren, vielmehr behalten diese und auch ihre Summen endliche Werte, nur werden sie nicht mehr durch (1) dargestellt.

2. Wir wollen zunächst in einem speziellen Falle die partiellen Derivierten von V für einen inneren Punkt entwickeln. Wir wählen die Kugel. Im § 37, (11) erhielten wir als Potential einer homogenen Kugel für einen inneren Punkt

$$V = 2\pi\sigma\left(P^2 - \frac{l^2}{3}\right).$$

Wir haben hier $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und finden für die ersten Derivierten:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi\sigma x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4}{3}\pi\sigma y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi\sigma z,$$

demnach für die zweiten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi\sigma, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{4}{3}\pi\sigma, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi\sigma,$$

also

(3)
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\sigma.$$

3. Ist nun V das Potential eines beliebigen Körpers in Bezug auf einen inneren Punkt x, y, z und ändert sich die Dichtigkeit σ in der Umgebung des letzteren nur stetig, so kann man sich aus dem Körper eine unendlich kleine Kugel mit dem Mittelpunkte x, y, z ausgeschnitten denken. Es sei $V = V_1 + V_2$; V_1 sei der Anteil, welchen die unendlich kleine Kugel liefert, V_2 der Anteil des übrigen Körpers. Da x, y, z in Bezug auf letzteren ein äufserer Punkt ist, so ist nach (2)

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = 0.$$

Innerhalb der unendlich kleinen Kugel kann man die Dichtigkeit σ wegen ihrer Stetigkeit als konstant ansehen, so dafs nach (3)

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial^2 z} = -4\pi\sigma$$

ist. Durch Addition beider Gleichungen folgt

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\sigma,$$

die Poisson'sche Gleichung.

Die hier vorgetragene Ableitung von (4) ist die erste von Poisson selbst gegebene. Da ihre Strenge nicht unanfechtbar ist, wurden vielfache Versuche einer strengeren Begründung gemacht*). Wir wollen noch den Beweis reproduzieren, welchen Riemann (Schwere, Elektricität und Magnetismus; bearbeitet von Hattendorff) auf Grundlage eines Satzes von Gauss gegeben hat.

4. Hilfssatz von Gauss. Gegeben seien eine vollständig geschlossene Fläche S und innerhalb oder aufserhalb derselben ein anziehender Körper. Wir teilen die Fläche in unendlich kleine Elemente, errichten in jedem derselben die nach aufsen gerichtete Normale und berechnen die Komponente der von dem Körper auf einen Punkt des Elements ausgeübten Anziehungskraft, welche in jene Normale fällt, multiplizieren diese Komponente mit der Gröfse des Flächenelements und summieren über die ganze Fläche. Wir werden sehen, dafs die so erhaltene Summe N einen ganz bestimmten, sehr einfachen Wert besitzt.

Zunächst sei nur ein anziehender Punkt Π mit der Masse 1 vorhanden; dann ist die Anziehung, welche er auf einen Punkt des Elements dS ausübt $=-\frac{1}{r^2}$, wenn r den Abstand der beiden Punkte bezeichnet. Sei nun n die Richtung der Normalen von dS, so ist die Komponente der Anziehung nach der Normalen $=-\frac{1}{r^2}\cos(r, n)$. Wir multiplizieren mit dS, summieren und erhalten

$$N=-\int\frac{1}{r^2}\cos(r, n)\,dS,$$

wobei die Integration über die ganze Fläche S zu erstrecken ist.

Nun haben wir aber in § 38, 2 gezeigt, dafs

$$\int\frac{1}{r^2}\cos(r, n)\,dS=0, \quad -4\pi, \quad -2\pi$$

ist, je nachdem der Punkt aufserhalb, innerhalb oder auf der Fläche S liegt. Es ist demnach

$$N=0,\ \ 4\pi,\ \ 2\pi,$$

wenn Π aufserhalb, innerhalb oder auf S liegt.

Ist die Masse im Punkte Π nicht 1, sondern dm, so müssen wir das gefundene Integral damit multiplizieren; sind mehrere Punkte Π, Π_1, Π_2

*) Über die ausgedehnte Litteratur dieses Gegenstandes, der so recht im Mittelpunkte der ganzen Potentialtheorie steht, siehe bei Bacharach, Abrifs der Geschichte der Potentialtheorie, p. 7 ff.

u. s. w. vorhanden, so können wir die von ihnen ausgehenden Wirkungen ohne weiteres addieren, da ja in jedem dS die von Π, Π_1 u. s. w. hervorgebrachten Kraftkomponenten dieselbe Richtung, nämlich diejenige der Normalen haben. Ist ein zusammenhängender Körper vorhanden, so zerlegen wir ihn in Elemente dm, die wir als materielle Punkte behandeln. Wir erhalten so

$$(5) \qquad N = -\int dm \int \frac{\cos(r, n)\, dS}{r^2} = 4\pi \int dm = 4\pi M,$$

falls die Masse M innerhalb des von S abgeschlossenen Raumes sich befindet;

$$(6) \qquad N = 0,$$

wenn die ganze Masse aufserhalb S sich befindet, also innerhalb S keine Masse vorhanden ist;

$$(7) \qquad N = 2\pi M,$$

wenn eine endliche Masse auf der Oberfläche S sich befindet;

$$(8) \qquad N = 4\pi M\varepsilon,$$

wenn eine endliche Masse sich in einer Kante oder Spitze von S befindet; ε ist dabei ein echter Bruch und giebt an, über den wievielten Teil der Kugelfläche vom Radius 1 sich die erste Integration (s. § 38, 2) erstreckt.

5. Beweis der Poisson'schen Gleichung. Wir wenden den eben gefundenen Satz auf ein unendlich kleines Parallelepipedon an. Die sechs Flächen desselben sind paarweise $dydz$, normal zur x-Achse, $dxdz$, normal zur y-Achse, $dxdy$, normal zur z-Achse. Nehmen wir zuerst die beiden Flächen, welche zur x-Achse normal stehen. Die Kraftkomponente für die erste derselben ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x},$$

für die gegenüberliegende

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x+dx} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\, dx;$$

mit der Grösse $dydz$ der Flächen multipliziert, liefern sie zusammen zu N den Beitrag

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\, dxdydz.$$

Ebenso liefern die beiden andern Flächenpaare die Beiträge

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\, dxdydz$$

und

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\, dxdydz.$$

Daraus findet sich

$$N = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dxdydz = 4\pi\sigma\, dxdydz,$$

wenn innerhalb des Elementes Masse von der Dichte σ vorhanden ist. Dividieren wir mit $dx dy dz$, so ergiebt sich die Poisson'sche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\sigma.$$

Liegt der Punkt (x, y, z) aufserhalb der anziehenden Masse, so ist $N = 0$, also auch:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Die Laplace'sche Gleichung ist ein Spezialfall der Gleichung von Poisson; man braucht in letzterer nur $\sigma = 0$ zu nehmen.

6. Falls der angezogene Punkt x, y, z gerade auf der Oberfläche des Körpers oder auch in einer Stelle desselben liegt, wo sich die Dichtigkeit σ unstetig ändert, so kommt dem Ausdrucke

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

überhaupt kein bestimmter Wert zu; er führt hier einen Stetigkeitssprung aus. Die früher manchmal gemachte Annahme, dafs hier für jenen Ausdruck $-2\pi\sigma$ zu setzen sei, entbehrt der Begründung.

7. Wir wollen hier sogleich die Poisson'sche Formel auch für Polarkoordinaten (wie in § 36) ableiten. Wir wenden wieder den Gauss-schen Hilfssatz auf ein Körperelement an, dessen Inhalt bekanntlich $r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$, dessen Masse also $\sigma r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$ ist. Wir haben auch hier sechs Flächenelemente. Zunächst zwei, welche auf r senkrecht sind; ihr Inhalt ist $r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ und $(r + dr)^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$, die auf ihnen normalen Kraftkomponenten sind

$$\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{und} \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r+dr}.$$

Diese beiden Flächen liefern also zu N den Beitrag:

$$\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} - \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r+dr}\right) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$= -\frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = -r \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Ein zweites Flächenpaar, welches auch auf den durch die Achse $\vartheta = 0$ gelegten Ebenen senkrecht steht, besitzt die Flächeninhalte

$$r \sin\vartheta dr d\varphi \quad \text{und} \quad r \sin(\vartheta + d\vartheta) dr d\varphi.$$

Um die ihm entsprechenden Kraftkomponenten aufzustellen, beachten wir, dafs durch Verwandlung von ϑ in $\vartheta + d\vartheta$ ein Punkt r, ϑ, φ die Verschiebung $r d\vartheta$ normal zu jenen Flächen erleidet. Hiernach ist die Kraftkomponente für die erste Fläche

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \vartheta} d\vartheta}{r d\vartheta}$$

oder

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta},$$

diejenige für die zweite Fläche also

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}\,d\vartheta.$$

Zu N liefern beide zusammen den Beitrag

$$-\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\cos\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi-\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$
$$=-\frac{\partial\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta}\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Endlich haben wir noch zwei Flächen, deren Ebenen durch die Achse $\vartheta = 0$ gehen und deren Flächeninhalt $r\,dr\,d\vartheta$ beträgt. Ihre Kraftkomponenten sind

$$\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\quad\text{und}\quad-\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\,d\varphi\right),$$

ihre Beiträge zu N also zusammen

$$-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Summieren wir, so wird

$$N=-\left[r\frac{\partial(rV)}{\partial r}\sin\vartheta+\frac{\partial\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right]$$
$$=4\pi\sigma r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi,$$

mithin

$$(9)\quad \frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial(rV)}{\partial r}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right]=-4\pi\sigma,$$

die Form der Poisson'schen Gleichung für Polarkoordinaten. Die Gleichung von Laplace lautet hier

$$(10)\quad r\frac{\partial(rV)}{\partial r}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0.$$

Die direkte Umformung von (4) in (9) ist sehr weitläufig.

§ 41.

Das Flächenpotential.

1. Während wir bisher annahmen, daſs jede anziehende Masse einen Raum erfülle, wollen wir jetzt die Hypothese untersuchen, daſs sich eine solche Masse auf einer Fläche ausbreite derart, daſs einem endlichen Flächenstücke eine endliche Masse zukommt. Die Gravitationstheorie bietet uns hierfür allerdings kein vollkommen zutreffendes Beispiel, während die

Elektrizitätslehre von Elektrizitätsmengen ausgeht, welche auf einer Oberfläche ausgebreitet sind. Trotzdem ist auch für die reine Mechanik die Untersuchung des Potentials einer über eine Fläche verteilten Masse von der gröfsten Wichtigkeit, schon deshalb, weil häufig — wie später ausführlich erörtert werden soll — das Potential einer räumlich ausgedehnten Masse durch ein hypothetisches Flächenpotential ersetzt werden kann.

Ist wieder x, y, z der angezogene, ξ, η, ζ einer der anziehenden Punkte und σ die Dichtigkeit in dem letzteren, r der Abstand von x, y, z und ξ, η, ζ, und ds ein Element der mit Masse bedeckten Fläche, so haben wir für das Flächenpotential den Ausdruck

$$(1)\qquad V = \int \frac{\sigma\, ds}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

wo die Integration über die ganze Fläche auszudehnen ist.

2. Wir untersuchen das Potential V in Bezug auf seine Stetigkeit unter der Voraussetzung, dafs σ nirgends unendlich wird und sich nur stetig ändert und dafs ferner die Fläche keine Singularitäten, wie Spitzen, aufweist, welche mit unendlich starker Krümmung verbunden sind.

Es ist wieder einleuchtend, dafs V nebst seinen Differentialquotienten für alle Punkte x, y, z endlich und stetig ist, für welche kein r unendlich klein wird, d. h. für solche Punkte, welche der Fläche nicht unendlich nahe kommen.

Um das Verhalten des Potentials in letzteren zu untersuchen, lassen wir x, y, z sich einem Punkte ξ, η, ζ der Fläche auf der Normalen in diesem Punkte unendlich nähern; den unendlich kleinen Teil der Fläche, welcher möglicherweise Unstetigkeiten hervorruft, dürfen wir als eben betrachten. Um die Rechnung zu vereinfachen, führen wir ein neues Koordinatensystem ein. Die Ebene jenes unendlich kleinen Flächenteils möge die xy-Ebene, der frühere Punkt ξ, η, ζ der neue Nullpunkt sein; die Normale fällt mit der z-Achse zusammen. Um den Nullpunkt denken wir uns mit dem sehr kleinen Radius δ auf der Fläche einen Kreis beschrieben, und wir werden nun lediglich die Masse, welche auf dieser Kreisfläche mit der hier als konstant anzusehenden Dichtigkeit σ verteilt ist, berücksichtigen, da die übrigen Teile der Fläche zu Unstetigkeiten keine Veranlassung bieten. Das Potential V_0 dieser Kreisfläche, genommen für einen Punkt, der auf der z-Achse vom Nullpunkte um den Abstand z entfernt ist, lautet, wenn für die xy-Ebene Polarkoordinaten durch

$$\xi = \varrho \cos\varphi, \qquad \eta = \varrho \sin\varphi$$

eingeführt werden,

$$(2)\qquad V_0 = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}.$$

Die Ausführung beider Integrationen liefert

$$(3)\qquad V_0 = 2\sigma\pi\left[\sqrt{\delta^2 + z^2} - \sqrt{z^2}\right];$$

hierin sind die beiden Quadratwurzeln als positiv zu betrachten beim Durchgang durch die Fläche. Man sieht sofort, dafs die Gröfse V_0 und damit auch V keine Stetigkeitsunterbrechung erleidet.

3. Anders gestaltet sich die Sache für die Differentialquotienten von V_0 und V. Aus (3) folgt nämlich

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = 2\sigma\pi \left[\frac{z}{\sqrt{\delta^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right]. \tag{4}$$

Dieser Ausdruck, in dem die Wurzeln wieder als positiv anzusehen sind, nimmt für verschwindende z verschiedene Werte an, je nachdem z positiv oder negativ ist. Beachtet man, dafs z auch gegen δ unendlich klein gemacht wird, so erhält man im ersten Falle

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -2\sigma\pi, \tag{5}$$

im zweiten

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = 2\sigma\pi. \tag{6}$$

Nimmt man die eine Seite der Fläche willkürlich als die äufsere, die andere als die innere an und bezeichnet man jetzt, um sich von der speziellen Wahl des Koordinatensystems wieder frei zu machen, die Richtung der Normalen nach der äufseren und der inneren Seite mit n_a und n_i, so folgt aus den beiden letzten Gleichungen, wenn z bisher die Richtung nach der äufseren Normalen hatte,

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_a} + \frac{\partial V_0}{\partial n_i} = -4\sigma\pi$$

oder, da der übrige Teil von V keine Unstetigkeit verursacht,

$$\frac{\partial V}{\partial n_a} + \frac{\partial V}{\partial n_i} = -4\sigma\pi. \tag{7}$$

$\frac{\partial V}{\partial n}$ führt also beim Durchgang durch die Fläche von der inneren nach der äuseren Seite einen Sprung um $-4\sigma\pi$ aus*).

Die seitlichen Attraktionskomponenten zeigen an der Fläche selbst keinerlei Stetigkeitsunterbrechung; die Wirkung der unendlich benachbarten Teile hebt sich hier auf und die Wirkung der übrigen bietet nichts Besonderes.

4. Die Laplace'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{8}$$

besteht selbstverständlich auch beim Flächenpotential, welches ja nur ein Spezialfall des räumlichen Potentials ist, für jeden Punkt x, y, z, der nicht auf der Fläche selbst liegt.

*) Vertauscht man die äufsere und die innere Seite, so wird an diesem Resultate nichts geändert, da nach einer Umkehrung der Fortschreitungsrichtung auch die Gröfse der Normalkraft in umgekehrtem Sinne zu rechnen ist.

§ 42.

Das Potential der Doppelfläche.

1. Auf einer beliebigen Fläche sei wie im vorigen Paragraphen eine attrahierende Masse ausgebreitet; in sämtlichen Punkten der Fläche errichten wir Normalen und denken uns auf diesen unendlich kleine Strecken dn — positiv gerechnet nach der Seite der Fläche, welche als innere angenommen wird — abgetragen, die übrigens für verschiedene Stellen verschieden sein können. Wir konstituieren so eine zweite, der ersten unendlich benachbarte Fläche, die jener Punkt für Punkt zugeordnet ist. Auf ihr möge eine Masse ausgebreitet sein, welche in derselben Weise abstofsend wirkt wie die erste anziehend; je zwei entsprechende Teilchen beider Flächen mögen gleiche Massen enthalten. Wir können das verschiedene Verhalten beider Massenarten so in Rechnung bringen, dafs wir die erste als positiv, die zweite als negativ nehmen. Ist also ein Massenteilchen der ersten Fläche σds, so ist das entsprechende der anderen $-\sigma ds$.

Verhältnisse der beschriebenen Art treten näherungsweise in der Elektrizitätstheorie auf, wenn auf Belegungen, welche durch dünne Glasscheiben getrennt sind, sich entgegengesetzt gleiche Elektrizitäten ansammeln (Franklin'sche Tafel, Leydener Flasche). Auch in der Lehre von den elektrischen Strömen und dem Magnetismus spielt die Doppelfläche eine wichtige Rolle. In der spezielleren Mechanik haben wir sie als eine Art hypothetischer Hilfsgröfse zu verwenden.

2. Das Potential der Doppelfläche wird offenbar, wenn r die Entfernung des angezogenen Punktes x, y, z von einem Punkte ξ, η, ζ der ersten, positiv belegten Fläche bezeichnet, durch

$$(1)\qquad W = \int \sigma \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \frac{\partial r}{\partial n} dn}\right] ds$$

$$= \int \sigma \frac{\frac{\partial r}{\partial n} dn}{r^2} ds = -\int \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dn\, ds$$

dargestellt, wo die Integration über die ganze Fläche auszudehnen ist. Für nicht unendliche σ ist W verschwindend klein; daher wollen wir jetzt immer voraussetzen, dafs

$$(2)\qquad \varepsilon = -\sigma dn$$

eine endliche, übrigens mit dem Orte veränderliche Gröfse sei. Hiernach geht (1) in die endgültige Form

$$(3)\qquad W = \int \varepsilon \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds$$

über; die Differentiation nach n ist in der mehrfach erörterten Weise zu verstehen (§ 6, 11).

Wir behandeln jetzt, da wir uns dn als verschwindend denken, die Doppelfläche wie eine einfache.

3. Die Stetigkeit von W steht für Punkte, welche von der Doppelfläche einen endlichen Abstand haben, aufser Frage. Um das Verhalten von W beim Durchgange durch die Fläche selbst zu untersuchen, wenden wir genau dasselbe Verfahren wie in § 41, 2 an; W_0 möge das Potential eines als eben und kreisförmig anzusehenden Teilchens der Doppelfläche sein. Bei derselben Bezeichnung*) wie an der angeführten Stelle ist

$$(4)\qquad W = -\varepsilon\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta} \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\varrho^2+z^2}}}{\partial z}\varrho\, d\varrho = \varepsilon\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\delta}\varrho z(\varrho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}d\varrho$$

oder nach Ausführung der Integrationen

$$(5)\qquad W_0 = 2\varepsilon\pi z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2+z^2}}\right].$$

Die Wurzeln sind als positiv zu betrachten. Lassen wir z auch gegen δ verschwindend klein werden, so verschwindet das zweite Glied gegen das erste und es wird

$$(6)\qquad \begin{aligned} W_0 &= 2\varepsilon\pi \quad \text{für positive } z,\\ W_0 &= -2\varepsilon\pi \quad \text{für negative } z. \end{aligned}$$

W_0, mithin auch W, erleidet also beim Übergange von der inneren nach der äufseren Seite der Doppelfläche einen Sprung um $4\varepsilon\pi$.

4. Aus (5) folgt durch Differentiation

$$(7)\qquad \frac{\partial W_0}{\partial z} = -\frac{2\varepsilon\pi\delta^2}{(\delta^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder bei verschwindendem z

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial W_0}{\partial z}\right)_0 = -\frac{2\varepsilon\pi}{\delta}.$$

Dieser Ausdruck hängt zwar nicht von z, aber von der ganz willkürlichen, sehr kleinen Gröfse δ ab; besonders auffällig erscheint es, dafs $\left(\frac{\partial W_0}{\partial z}\right)_0$ desto gröfser werden soll, je kleiner δ genommen wird. Zur Klarstellung der Sachlage dient die folgende Überlegung. Die endliche Gröfse ε ist das negative Produkt der unendlich kleinen Strecke dn und der unendlich grofsen Dichtigkeit σ. Bei endlicher Entfernung des Punktes x, y, z von der Doppelfläche kann diese als einfache Fläche behandelt

*) z wird nach der äufseren Seite zu als positiv gerechnet.

werden, indem man nicht dn selbst, sondern nur den Wert von ε in Rechnung bringt. Wird aber die Distanz des Punktes x, y, z von der Doppelfläche eine unendlich kleine Gröfse derselben oder höherer Ordnung wie dn, so ist diese Entfernung in Betracht zu ziehen. Die Gröfse δ spielt hierbei insofern eine Rolle, als z kleiner sein soll als δ, durch den Wert von δ also demjenigen von z eine Grenze gezogen wird.

Kommt x, y, z der attrahierenden Seite so nahe, dafs $\frac{dz}{dn}$ nicht unendlich grofs wird, so mufs die Attraktion die Repulsion durch die entferntere, negative Seite um ein endliches Vielfaches überwiegen, bei der unendlich grofsen Dichtigkeit also unendlich sein; ebenso mufs auf der entgegengesetzten Seite eine unendlich starke Repulsion stattfinden. In der Doppelfläche selbst ist die Kraftwirkung, wenn nicht dn ein ganz bestimmter sehr kleiner, aber doch endlicher Wert beigelegt wird, schlechterdings unbestimmt.

Die Gröfse

$$\frac{\partial W_0}{\partial z}, \quad \text{also auch} \quad \frac{\partial W}{\partial z},$$

hat in der Doppelfläche selbst keinen endlich bestimmten Wert.

Läfst man x, y, z der positiven Seite nahe kommen, ohne dafs jedoch $\frac{dz}{dn}$ endlich wird, so erkennt man auch ohne Rechnung, dafs hier die Attraktion durch eine abgegrenzte unendlich benachbarte unendlich kleine Kreisfläche ebenso stark ist wie in dem symmetrisch auf der anderen Seite gelegenen Punkte die Repulsion. Beide Kräfte wirken aber in dem gleichen Sinne. Die Wirkung der übrigen Teile der Doppelfläche ist beiderseits die gleiche. So gelangen wir zu dem Resultate:

Der nach der Normalrichtung genommene Differentialquotient des Potentials einer Doppelfläche wird für einen Punkt in unendlicher Nachbarschaft dieser unstetig; die Werte, zu welchen man nach Passieren der Doppelfläche gelangt, reihen sich jedoch, wenn man nur die unendlich nahe an dieser gelegenen Punkte ausschliefst, an die vorher durchlaufenen stetig an.

Durch diese eingehendere Betrachtung beseitigen wir das öfters ausgesprochene, paradoxe Resultat, dafs W selbst, nicht aber $\frac{\partial W}{\partial n}$, an der Doppelfläche unstetig sei.

Auch die Differentialquotienten nach seitlichen Richtungen sind an der Doppelfläche im allgemeinen nicht stetig.

5. Das Potential einer Doppelfläche läfst auch eine sehr einfache geometrische Veranschaulichung zu. Da

$$(9) \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\cos(r, n)$$

ist, wenn (r, n) den Winkel zwischen r und der positiven Richtung der Normalen n bezeichnet, und die Projektion des Flächenteils ds auf eine Kugel mit dem Radius 1, welche um x, y, z als Zentrum der Projektion beschrieben ist, die Gröfse

$$(10) \qquad dK = \pm \frac{ds \cos(r, n)}{r^2}$$

besitzt, so wird aus (3)

$$(11) \qquad W = \mp \int \varepsilon dK.$$

In (10) und (11) gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $\cos(r, n)$ positiv oder negativ ist. Wechselt $\cos(r, n)$ auf der belegten Fläche sein Zeichen, so mufs das Integral für die einzelnen Teile besonders ausgeführt werden, auf denen kein Zeichenwechsel vorkommt.

§ 43.

Der Green'sche Satz.

1. Es sei $F(x, y, z)$ eine beliebige Funktion von x, y, z, welche nebst ihrer partiellen Ableitung nach x innerhalb eines Raumes, der durch eine nirgends sich selbst durchschneidende Fläche S vollständig begrenzt wird, stetig und eindeutig ist. Die Eindeutigkeit ist so zu verstehen, dafs sich bei einem an sich mehrdeutigen F ein Zweig dieser Funktion innerhalb dieser Fläche vollständig von den übrigen isolieren läfst, d. h. dafs daselbst kein Verzweigungspunkt von F liegt. Nach diesen Festsetzungen wollen wir das dreifache Integral

$$(1) \qquad \int\int\int \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz$$

untersuchen, welches über den ganzen von S umgrenzten Raum auszudehnen ist. Durch Ausführung einer Integration erhalten wir

$$(2) \qquad \int\int [F(x, y, z)] dy dz,$$

wo die Einklammerung von $F(x, y, z)$ bedeutet, dafs die Differenz der Grenzwerte dieser Funktion genommen werden soll.

Wir können uns das dreifache Integral (1) als eine Summation dreifach unendlich vieler rechtwinkligen Parallelepipeda $dxdydz$, multipliziert mit der Gröfse $\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}$, vorstellen. Durch Ausführung der einen Integration ist je eine Reihe dieser Elementarteile, welche der x-Achse parallel läuft, als summiert anzusehen; diese Reihe, deren senkrechter Durchschnitt $dydz$ ist, wird an ihren beiden Enden durch Elemente der Fläche S begrenzt, die wir als ds_1*) und ds_2 bezeichnen wollen. Sollte die Reihe mehr als zweimal durch die Fläche S geschnitten werden, so

*) ds_1 gehöre zu einem kleineren x als ds_2.

wollen wir sie in Teile zerlegt denken, welche nur von zwei Flächenstücken begrenzt werden. Sind n_1 und n_2 die nach innen gerichteten Normalen der Fläche in ds_1 und ds_2, so ist bei bekannter Bezeichnungsweise nach den Gesetzen der Projektion von Flächen

$$(3) \qquad ds_1 = \frac{dydz}{\cos(n_1, x)}, \quad ds_2 = -\frac{dydz}{\cos(n_2, x)}.$$

Der Gegensatz der Zeichen hat darin seinen Grund, daſs die Richtung der Normalen in ds_2 in umgekehrtem Sinne wie in ds_1 (bei parallelen Flächenteilen) zu rechnen ist; eine Richtungsumkehrung entspricht aber der Ersetzung eines Winkels durch seinen Nebenwinkel. Durch diese Zeichenfestsetzung wird es möglich, ds_1 und ds_2 als positive Gröſsen zu erhalten.

Durch Benutzung von (3) wird aus (2), wenn nur noch ein Integralzeichen geschrieben wird,

$$-\int [F(x, y_1, z_1)\cos(n_1, x)\,ds_1 + F(x, y_2, z_2)\cos(n_2, x)\,ds_2]$$

oder, wenn jetzt ds überhaupt ein Element von S bezeichnet,

$$-\int F(x, y, z)\cos(n, x)\,ds,$$

wo nunmehr über die ganze Fläche S zu integrieren ist.

Bezeichnen wir der Kürze wegen das Raumelement $dxdydz$ mit $d\tau$ und schreiben wir statt der drei Integralzeichen in (1) nur eines, so erhalten wir

$$(4) \qquad \int \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}\,d\tau = -\int F(x, y, z)\cos(n, x)\,ds.$$

Das zweite Integral ist über die Fläche S, das erste über den von S eingeschlossenen Raum auszudehnen.

2. Wir machen von diesem Resultate aus der Theorie der mehrfachen Integrale Anwendung auf das folgende über den Raum S auszudehnende Integral

$$(5) \qquad \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) d\tau,$$

in welchem zunächst φ und ψ beliebige, innerhalb S einwertige und nebst ihren Ableitungen stetige Funktionen von x, y, z sein mögen.

Alsdann sind wir zur partiellen Integration der einzelnen Glieder von (5) berechtigt; es ist z. B.

$$(6) \qquad \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\,d\tau = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dxdydz$$

$$= \int\!\!\int \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] dydz - \int\!\!\int\!\!\int \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\,dxdydz$$

$$= -\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\cos(n, x)\,ds - \int \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\,d\tau.$$

Hiernach wird aus (5), wenn wir die häufig gebrauchte Abkürzung

(7) $$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

benutzen,

(8) $$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau$$
$$= -\int\varphi\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(n,z)\right]ds$$
$$-\int\varphi\Delta\psi\, d\tau.$$

Nun ist aber

(9) $$\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(n,z)$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{\partial\psi}{\partial n},$$

wo dn wieder nach innen gerichtet ist. Hiernach wird schliefslich

(10) $$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau$$
$$= -\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds - \int\varphi\Delta\psi\, d\tau.$$

Diese Gleichung, welche die Zerlegung eines Raumintegrals in ein Flächen- und ein Raumintegral zeigt, heifst der Green'sche Satz im weiteren Sinne.

3. Die Gleichung (10) vereinfacht sich, wenn ψ die Eigenschaft besitzt, innerhalb des Raumes φ der Laplace'schen Gleichung

(11) $$\Delta\psi = 0$$

zu genügen. Es wird dann

(12) $$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau = -\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds,$$

so dafs hier ein Raumintegral vollständig auf ein Flächenintegral reduziert wird.

Vertauschen φ und ψ ihre Rolle, so ergiebt sich eine (10) analoge Gleichung, welche mit (10) zusammengestellt

(13) $$\int\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds = -\int(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,d\tau$$

liefert.

Genügen φ und ψ beide innerhalb S der Gleichung (11), so wird

(14) $$\int\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds = 0.$$

Gleichung (13) enthält den Green'schen Satz im engeren Sinne.

4. Die Wichtigkeit des zunächst rein mathematischen Green'schen Satzes beruht in seiner weitgehenden Anwendbarkeit auf die Potentialtheorie; durch Spezialisierung liefert er mehrere sehr bemerkenswerte Resultate. Setzen wir z. B. ψ einer Konstanten, φ aber einem Potential V gleich, welches innerhalb S und auf der Fläche von S der Gleichung (11) genügt, welches also einer Masse zugehört, die ganz aufserhalb dieses Gebietes liegt, so wird aus (14)

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds = 0. \tag{15}$$

Da $\frac{\partial V}{\partial n}$ die senkrecht zu S auf einen Punkt von S ausgeübte Attraktion mifst, so kann man sagen, dafs die algebraische Summe dieser Anziehungen gleich Null ist, wenn man die nach dem Inneren von S gehende Kraftwirkung als positiv, die umgekehrte als negativ rechnet.

Derselbe Satz folgt übrigens aus ganz elementaren geometrischen Betrachtungen. In erweiterter Form findet man ihn bei Gauss, Ges. W., B. V, p. 9.

§ 44.

Allgemeine Untersuchungen über die Bestimmung eines Potentials.

1. Um das Potential einer attrahierenden räumlichen Masse zu entwickeln, schlugen wir bisher nur einen einzigen Weg ein: wir stellten den Ausdruck für das Potential eines unendlich kleinen Teils der Masse auf und summierten über die ganze Masse. Doch treten häufig Fälle ein, in denen eine solche Summation nicht thunlich ist, während die Herleitung des Potentials auf indirektem Wege gelingt. Dies kann entweder die Folge von analytischen Schwierigkeiten sein, welche bei indirekten Methoden leichter zu überwinden sind, oder durch die Natur des Problems begründet werden. Nehmen wir z. B. an, es solle das Potential der Attraktion der Erde bestimmt werden, ohne dafs über die Massenverteilung im Innern beschränkende Voraussetzungen gemacht werden. Eine direkte Beobachtung der Massenverteilung im Erdinnern ist natürlich ausgeschlossen; es können nur Beobachtungen über die Intensität und Richtung der Schwerkraft in Punkten der Erdoberfläche angestellt werden. In der Folge werden wir sehen, dafs aus diesen Beobachtungen das Potential der Erde für alle äufseren Punkte abgeleitet werden kann. Ganz analog verhält es sich mit dem Erdmagnetismus; man kann an möglichst zahlreichen Punkten der Erdoberfläche Intensität und Richtung des Erdmagnetismus beobachten und daraus sein Potential für äufsere Punkte herleiten. — Wir geben mehrere Sätze über indirekte Bestimmungen des Potentials, an die sich verschiedene anderweitige Sätze eng anschliefsen.

2. Wenn von einer Funktion V von x, y, z verlangt wird, dafs sie für alle Punkte des Raumes, etwa einzelne Punkte, Linien und Flächen, aber keine Raumteile ausgenommen, der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Delta V = -4\pi\sigma$$

genügt, worin σ als Funktion von x, y, z für jeden Punkt des Raumes gegeben ist, dabei nebst ihren Differentialquotienten

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

überall endlich und stetig ist und im Unendlichen nebst diesen derart unendlich klein wird, dafs

$$(2) \qquad xV, \quad yV, \quad zV, \quad x^2\frac{\partial V}{\partial x}, \quad y^2\frac{\partial V}{\partial y}, \quad z^2\frac{\partial V}{\partial z}$$

nicht unendlich grofs werden, so ist sie *eindeutig* als Potential einer Masse bestimmt, welche in jedem Punkte x, y, z die Dichtigkeit σ besitzt. Selbstverständlich kann σ in einem Teile des Raumes, der dann von Masse frei ist, verschwinden.

Die Freiheit, dafs V stellenweise (1) nicht genügt, mufs schon deshalb eingeräumt werden, weil diese Gleichung an der Oberfläche eines begrenzten Massenteils ihre Gültigkeit verliert.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir in der Gleichung (10) von § 43

$$\varphi = \psi = U$$

und erhalten

$$(3) \quad \int U \Delta U d\tau = -\int U \frac{\partial U}{\partial n} ds - \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

wo die Integrale sich teils auf eine geschlossene Fläche S, teils auf den Inhalt derselben beziehen.

Nehmen wir nun an, ein V, welches den angegebenen Bedingungen genügt, sei nicht das Potential der Masse, welche durch Angabe der Dichtigkeit σ für jeden Punkt des Raumes bestimmt ist; das Potential sei vielmehr eine Funktion V', welche nach Früherem denselben Bedingungen genügt. Dann befriedigt $V - V' = U$, einzelne Punkte, Linien oder Flächen ausgenommen, die Gleichung

$$(4) \qquad \Delta U = \Delta V - \Delta V' = 0,$$

da sowohl ΔV als auch $\Delta V'$ im allgemeinen der Gröfse $-4\pi\sigma$ gleich ist; im Übrigen befriedigt U dieselben Bedingungen wie V und V' selbst. Identifizieren wir nun, wozu wir berechtigt sind, dieses U mit demjenigen der Gleichung (3), so wird die linke Seite von (3) gleich Null. Denn im allgemeinen ist $\Delta U = 0$, und die einzelnen nicht räumlichen, sondern höchstens zweidimensionalen Punktekomplexe, welche sich singulär verhalten, können bei dem Raumintegrale keinen endlichen Bestandteil erzeugen. Daher haben wir

$$(5)\qquad \int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=-\int U\frac{\partial U}{\partial n}\,ds.$$

Als Fläche S wollen wir jetzt eine Kugelfläche annehmen, deren Mittelpunkt der Nullpunkt und deren Radius unendlich grofs ist, so dafs jedenfalls alle in Betracht kommenden Massenteile von der Kugel eingeschlossen werden. Dann wird nach den Bedingungen (2) $U\frac{\partial U}{\partial n}$ unendlich klein von der dritten Ordnung, wenn der Kugelradius unendlich grofs von der ersten Ordnung und demnach die Oberfläche der Kugel unendlich grofs von der zweiten Ordnung wird. Auch ohne weitere Rechnung ist hieraus ersichtlich, dafs das Integral auf der rechten Seite von (5) verschwindet; sein absoluter Betrag ist nämlich kleiner als das Produkt des absoluten Maximalwertes von $U\frac{\partial U}{\partial n}$ mit der Oberfläche der Kugel, d. h. als eine unendlich kleine Gröfse erster Ordnung. Somit wird

$$(6)\qquad \int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=0.$$

Die linke Seite von (6) kann als eine Summe von lauter wesentlich positiven Gröfsen betrachtet werden; sie kann daher nur verschwinden, wenn ihre sämtlichen Glieder verschwinden. Daher mufs für beliebige x, y, z, einzelne Punkte, Linien oder Flächen, die für den Wert des Integrals ohne Belang sind, etwa ausgenommen,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial z}=0,$$

also

$$U=\text{Const.}$$

sein. Da aber U im Unendlichen verschwinden soll, so mufs überall $U=0$, also $V=V'$ sein. Der behauptete Satz ist mithin bewiesen.

3. Wichtiger als der bewiesene Satz ist die folgende Untersuchung, welche zeigt, dafs ein Potential V innerhalb eines durch eine Fläche S eingeschlossenen Raumes bestimmt ist, falls V innerhalb desselben der Gleichung

$$(7)\qquad \varDelta V=0$$

genügt und die Werte von V auf der Fläche S gegeben sind. Ist $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf dieser Fläche gegeben, so ist bei Zuziehung von (7) das Potential bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Die Fläche S kann aus mehreren getrennten Teilen bestehen. Die unendlich fernen Punkte dürfen nicht in den begrenzten Flächenraum zu liegen kommen; sie sind nötigenfalls durch eine unendlich grofse Kugel (oder eine andere, überall im Unendlichen liegende geschlossene Fläche), welche als ein

Teil von S betrachtet wird, auszuschliefsen. V mufs auf dieser Kugel derart verschwinden, dafs xV, yV, zV nicht unendlich werden*). Weifs man im voraus, dafs V die Eigenschaften eines Potentials besitzt, so kann man von der Zufügung dieser Bedingung absehen.

Um diese Sätze zu erweisen, nehmen wir an, dafs zwei verschiedene Funktionen V und V' existieren, welche (7) innerhalb S befriedigen und auf S die gleichen Werte annehmen. Dann besitzt $V - V' = U$ auf der ganzen Fläche S den Wert 0. Auf U, welches ebenfalls (7) innerhalb S befriedigt, ist aber die Gleichung (5) anwendbar, bei welcher die Fläche S und der von ihr umgrenzte Raum die Ausdehnung der Integration bezeichnet. Da aber die rechte Seite von (5) nur solche U-Werte enthält, welche sich auf die Fläche S beziehen, also verschwinden, so erhalten wir wieder die Gleichung (6), aus der wir

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

und somit $U = \text{Const.}$ herleiten. V stimmt also mit V' bis auf eine Konstante überein; da beide für S identisch werden sollen, so mufs diese Konstante gleich Null sein.

Ist $\frac{\partial V}{\partial n}$ statt V auf S gegeben, so sind wesentlich dieselben Schlüsse anwendbar, da die rechte Seite von (5) auch den für S verschwindenden Faktor $\frac{\partial U}{\partial n}$ enthält. Nur können wir nicht den Schlufs ziehen, dafs die Konstante, welche V und V' unterscheidet, verschwinden mufs, da auf S nur $\frac{\partial V}{\partial n}$ und $\frac{\partial V'}{\partial n}$, nicht aber V und V' identisch zu werden brauchen. Enthält S eine unendlich ferne Fläche, so mufs die Konstante verschwinden, da hier V und V' beide der Null gleich werden.

Auch wenn V für einen Teil von S, $\frac{\partial V}{\partial n}$ aber für den anderen Teil gegeben ist, ist mit Hilfe der nämlichen Schlüsse nachzuweisen, dafs V für den ganzen Raum S, in welchem $\Delta V = 0$ ist, vollständig bestimmt ist.

Die Bedingung $\Delta V = 0$ sagt natürlich für den Raum S nichts anderes aus, als dafs kein Teil der anziehenden Masse in ihn zu liegen kommt.

Das gefundene Resultat ist deshalb von so fundamentaler Wichtigkeit, weil die supponierten Bedingungen, dafs V oder $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf einer Oberfläche S bekannte Werte annehmen, in der Wirklichkeit vorkommen. Bei dem eingangs erwähnten Beispiele des Potentials der attrahierenden Erdmasse läfst sich zwar nicht für alle, aber doch für sehr viele Punkte der Erd-

*) Hieraus folgt von selbst, dafs auch $x^2 \frac{\partial V}{\partial x}$ u. s. w. im Unendlichen nicht unendlich werden; denn die unendliche Kleinheit eines analytischen Ausdrucks im Unendlichen erhöht sich durch Differentiation um einen Grad.

oberfläche die gegen die Oberfläche gerichtete Komponente der Schwerkraft — wir wollen dahingestellt sein lassen, ob die Schwerkraft normal zur Erdoberfläche ist — bestimmen; diese ist aber nichts Anderes als $\frac{\partial V}{\partial n}$.

Hiermit ist freilich über die wirkliche Ausführung der Potentialbestimmung noch gar nichts gesagt; auch ist diese Aufgabe bis jetzt nur für spezielle Fälle gelöst, von denen uns der wichtigste später noch eingehend beschäftigen soll. Ferner wissen wir noch nicht, ob die Werte von V oder $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf S ganz willkürlich vorgelegt werden dürfen.

4. Setzen wir $\varphi = V$, welches für einen Raum S der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, und $\psi = \frac{1}{r}$, wenn

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ist und ξ, η, ζ einen Punkt innerhalb des Raumes S bezeichnet, so dürfen wir die Formel (14) von § 43 zur Anwendung bringen, wobei wir nur den Punkt $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, für den $\frac{1}{r}$ unendlich wird, durch eine um ihn als Mittelpunkt beschriebene verschwindend kleine Kugel mit dem Radius R auszuschliefsen haben. Die Grenze des nunmehr in Betracht kommenden Raumes, innerhalb dessen φ und ψ nebst ihren Ableitungen endlich und stetig sind, besteht aus der ursprünglichen Fläche S, von der ein Element ds sein möge, und jener unendlich kleinen Kugelfläche, von der ein Element mit ds' bezeichnet werde. Dann geht jene Relation, wenn die Integrationen sich auf die durch die Differentiale angedeuteten Flächen beziehen*), in

$$(8)\qquad \int \frac{V ds'}{r^2} + \int \frac{\partial V}{\partial r}\frac{ds'}{r} = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds - \int \frac{\partial V}{\partial n}\frac{ds}{r}$$

über. Auf der linken Seite ist $r = R$ zu nehmen, da sich die beiden Integrale hierselbst nur auf die Kugeloberfläche beziehen.

Da V und $\frac{\partial V}{\partial r}$ in ξ, η, ζ und dessen Umgebung endlich und stetig sind, so kann man diese beiden Gröfsen für den Bereich der beiden linksstehenden Integrale als konstant annehmen. Bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ und φ, durch welche ds' in $r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ übergeht, wird

$$\int \frac{V ds'}{r^2} + \int \frac{\partial V}{\partial r}\frac{ds'}{r} = V\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta + \frac{\partial V}{\partial r}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= 4\pi V + 4\pi r \frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi V,$$

*) Es ist auf der kleinen Kugel z. B. $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r}$, da hier die nach innen gerichtete Normale in die Richtung des wachsenden r fällt.

da $r = R$ als verschwindend anzusehen ist; in V sind die Koordinaten ξ, η, ζ einzuführen. Denkt man sich nun ξ, η, ζ durch x, y, z ersetzt, so geht (8) für beliebige Punkte x, y, z des Raumes S in

$$(9) \qquad V = \frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n}\frac{ds}{r}$$

über.

In dieser Gleichung wird das Potential V für jeden Punkt des Raumes S durch die Werte von V und $\frac{\partial V}{\partial n}$, welche diese auf der Fläche S besitzen, ausgedrückt. Doch löst dieses Ergebnis die durch die vorige Nummer postulierte Aufgabe, V im Raume S zu bestimmen, wenn V oder $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf der Fläche S gegeben sind, keineswegs; es müssen hier V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ gleichzeitig gegeben sein.

Nur wenn S eine Niveaufläche von V ist, so daſs auf ihr V einer Konstanten V_0 gleich wird, läſst (9) das allgemeinere V durch $\frac{\partial V}{\partial n}$ allein auf der Oberfläche bestimmen. Denn alsdann geht das erste Integral in einen Ausdruck über, der lediglich von der Lage des angezogenen Punktes x, y, z und der Gestalt von φ, aber nicht von der Massenverteilung abhängt. Das mehrerwähnte Problem von der Attraktion der Erde könnte hiernach behandelt werden.

Das erste Integral auf der rechten Seite von (9) kann als das Potential der Doppelfläche S, für welche in jedem einzelnen Punkte $\varepsilon = \frac{V}{4\pi}$ ist, das zweite aber als das Potential der einfachen Fläche S mit der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ angesehen werden.

5. Nehmen wir jetzt speziell an, daſs S eine Kugelfläche mit dem beliebigen (im allgemeinen endlichen) Radius R sei, in deren Mittelpunkt sich x, y, z befindet, so wird

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{r^2},$$

worin dann, wie auch in dem zweiten Integrale von (9), für r der konstante Wert R einzusetzen ist. Das letztere Integral verschwindet nach § 43, (15) und aus (9) wird

$$(10) \qquad V = \frac{1}{4\pi R^2}\int V ds.$$

Da $4\pi R^2$ den Flächeninhalt der Kugelfläche darstellt, $\int V ds$ aber als Summe von unendlich vielen, auf der Kugelfläche ausgebreiteten V-Werten, multipliziert mit dem zugeordneten Flächenstücke, betrachtet werden kann, so sagt (10) aus, dafs der Wert, welchen V im Mittelpunkte einer Kugel besitzt, welche keine attrahierenden Massen enthält, als das arithmetische Mittel der Werte angesehen werden kann, welche V auf der Kugelfläche annimmt. Dies ist der Gauss'sche Mittelwertsatz*).

Wir ziehen aus dem gefundenen Resultate den einfachen Schlufs, dafs V im Mittelpunkte der Kugel einen Wert besitzt, der zwischen dem gröfsten und kleinsten Werte liegt, welchen es auf deren Oberfläche annimmt. Da die Kugel beliebig klein angenommen, ihr Mittelpunkt nach jedem Punkte des Raumes S verlegt werden kann, so folgt, dafs V in keinem Punkte von S ein Minimum oder Maximum sein kann. Denn wenn es nicht gerade konstant ist, finden sich in seiner Umgebung sowohl gröfsere als auch kleinere Werte. Wir können mit C. Neumann sagen, dafs im ganzen Raume S das Potential V nur Durchgangswerte, keine extremen Werte erlangt. Die letzteren können sich nur auf der Grenzfläche des anziehenden Körpers selbst oder im Unendlichen befinden.

Dieser Satz läfst sich dahin interpretieren, dafs kein im Endlichen, aber aufserhalb der attrahierenden Massenteile gelegener Punkt existiert, von dem aus scheinbar eine Attraktion oder Repulsion auf alle umgebenden Punkte ausgeübt wird.

Dafs V im ganzen Raume S konstant wird, wenn dies für einen noch so kleinen endlichen Teil desselben der Fall ist, geht schon daraus hervor, dafs V für irgend einen nicht in der anziehenden Masse gelegenen Punkt eine stetige, wohl immer als analytisch anzusehende Funktion ist, also konstant sein mufs, wenn dies für jenen Raum der Fall ist.

Ein Beispiel hierfür bietet der innere Hohlraum einer Kugelschale.

6. Wir können noch weiter zeigen, dafs auch die *Kraftwirkung* der anziehenden Masse in keinem Punkte aufserhalb von ihr ein Maximum wird, während sie ein Minimum sein kann. Dafs letzteres nicht ausgeschlossen ist, geht schon daraus hervor, dafs zwischen zwei anziehenden Körpern in der Regel ein Punkt vorhanden ist, in welchem sich die beiderseitigen Anziehungen aufheben.

Um die Richtigkeit des Satzes zu beweisen, brauchen wir nur darzuthun, dafs nicht für alle Punkte x, y, z, welche einen Punkt x_0, y_0, z_0 auf einer unendlich kleinen Kugelfläche umgeben,

$$(11)\qquad \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)^2>\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

ist, wenn V_0 und V den Punkten x_0, y_0, z_0 und x, y, z entsprechen. An Stelle der links stehenden Gröfse können wir lediglich

*) Man findet den Satz in erweiterter Form bei Gauss, Ges. W. B. V, p. 222.

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2$$

setzen, wenn die Koordinatenachsen so gewählt werden, daſs die x-Achse in die Richtung der Kraftwirkung in x_0, y_0, z_0 fällt.

Nun folgt aber durch Differentiation von (7) nach x, daſs $\frac{\partial V}{\partial x}$ derselben Differentialgleichung genügt, wie V selbst; auch die übrigen Eigenschaften von V, welche zur Herleitung der Resultate der vorigen Nummern nötig sind, kommen $\frac{\partial V}{\partial x}$ zu. Hiernach können wir durch das gleiche Verfahren wie dort beweisen, daſs es Punkte x, y, z in der Umgebung von x_0, y_0, z_0 giebt, für welche

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 > \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2$$

ist.

Hiermit ist dargethan, daſs (11) nicht für alle Punkte x, y, z richtig sein kann.

§ 45.

Das Dirichlet'sche Prinzip.

1. Nachdem wir uns überzeugt haben, daſs nur eine Funktion V von x, y, z existieren kann, welche der Differentialgleichung

(1) $$\Delta V = 0$$

genügt, innerhalb eines durch eine Fläche S begrenzten Raumes eindeutig und stetig ist und auf dieser Fläche vorgeschriebene Werte annimmt, wollen wir den Dirichlet'schen Nachweis vortragen, daſs die Werte auf der Fläche beliebig festgesetzt werden dürfen*). Man nennt den hierdurch begründeten Satz das Dirichlet'sche Prinzip.

Es liegt in der unbestimmten Natur des Problems, daſs auch dieser Nachweis sich auf ziemlich vage Annahmen stützt. Die Beweiskraft desselben ist daher eine recht zweifelhafte. In der Praxis werden für eine Fläche immer nur solche Werte vorgelegt sein, welche wirklich einem Potential angehören, wie dies z. B. bei der Attraktion der Erde u. s. w. der Fall ist; hier ist also von Bedenken keine Rede. Immerhin scheint es schon des historischen Interesses wegen erforderlich, die Dirichlet'sche Untersuchung vorzuführen.

2. Dirichlet geht von der als selbstverständlich betrachteten Annahme aus, daſs jedenfalls reelle Funktionen U möglich sind, welche auf S die vorgeschriebenen Werte annehmen und die Bedingung der Eindeu-

*) Dabei ist wieder zu beachten, daſs die unendlich fernen Punkte durch eine unendliche Kugel ausgeschlossen werden müssen, die mit zu S gerechnet wird.

tigkeit und Stetigkeit innerhalb S erfüllen, ohne daſs sie der Gleichung $\Delta U = 0$ zu genügen brauchen. In dieser sehr unbestimmten Annahme liegt hauptsächlich das Bedenkliche des ganzen Nachweises.

Unter der gemachten Voraussetzung wollen wir den Ausdruck

$$W = \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau \tag{2}$$

bilden, worin die Integration wie immer über den von S begrenzten Raum auszudehnen ist. Da das Integral die Summe lauter positiver Gröſsen darstellt, also selbst positiv ist, muſs es für irgend ein U einen kleinsten Wert annehmen. Konstanz für beliebige U kann bei der Willkürlichkeit derselben ausgeschlossen werden. Wir werden nun nachweisen, daſs für den notwendig vorhandenen kleinsten Wert von W (mehrere gleiche kleinste Werte werden sich von selbst ausschlieſsen) die Gröſse U der Gleichung $\Delta U = 0$ genügt, wodurch die Existenz einer Funktion dargethan ist, welche alle eingangs aufgestellten Bedingungen befriedigt.

Wir wollen jetzt das spezielle U, welches (2) zu einem Minimum macht, mit V bezeichnen. Dann kann man irgend ein anderes U gleich

$$V + V'$$

setzen. Alsdann genügt aber auch

$$U = V + hV', \tag{3}$$

worin h eine willkürliche Konstante ist, den Bedingungen, welche wir U vorschrieben; denn V' muſs für alle Punkte von S gleich Null werden, um das erstbetrachtete U mit V auf S zu identifizieren, während die Eindeutigkeit und Stetigkeit selbstverständlich ist.

Aus (3) folgt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + h\frac{\partial V'}{\partial x},$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + h\frac{\partial V'}{\partial y},$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} + h\frac{\partial V'}{\partial z},$$

so daſs aus (2) wird

$$\begin{aligned} W = &\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau \\ &+ 2h \int \left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V'}{\partial z} \right] d\tau \\ &+ h^2 \int \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Soll nun W für $U = 0$ ein Minimum werden, so muſs die Summe der beiden letzten Integrale für beliebige h positiv sein. Da aber für geeignete kleine h das vorletzte Glied negativ und absolut gröſser als das letzte gemacht werden kann, wenn nicht der Faktor von h verschwindet, so mufs

$$\int \left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V'}{\partial z}\right] d\tau = 0 \tag{5}$$

sein. Nach § 43, (10) können wir hierfür setzen

$$-\int V' \frac{\partial V}{\partial n} ds - \int V' \varDelta V d\tau = 0$$

oder, weil V' auf der Fläche S verschwindet,

$$\int V' \varDelta V d\tau = 0. \tag{6}$$

Falls nun $\varDelta V$ von Null verschieden wäre, so könnten wir — was freilich auch recht unsicher ist — V' infolge seiner Willkürlichkeit im inneren Raume von S so annehmen, dafs es im ganzen Raume das gleiche Zeichen wie $\varDelta V$ besäfse, was sich mit (6) nicht verträgt, da sich in diesem Falle die Summanden des Integrals nicht gegenseitig zerstören. Daher bleibt nur die Annahme

$$\varDelta V = 0$$

für den ganzen Innenraum von S übrig. Allerdings würde (6) auch bestehen, wenn in einzelnen, höchstens zweidimensionalen Teilen des Raumes die letzte Relation nicht erfüllt würde; allein solche Singularitäten vertragen sich mit der vorausgesetzten Stetigkeit von V nicht.

Hiermit ist der Nachweis der Existenz eines V, welches die geforderten Bedingungen erfüllt, in einer freilich höchst unsicheren Weise erbracht.

3. Wir wollen nun noch darthun, dafs das Potential beliebiger räumlichen Massen, welche *innerhalb* einer geschlossenen Fläche S liegen, ohne dafs der Innenraum durch sie vollständig erfüllt zu sein brauchte, in Bezug auf die *aufserhalb* von S gelegenen Punkte durch das Potential einer Massenbelegung ersetzt werden kann, welche sich auf der Fläche S ausbreitet, und zwar nur auf eine einzige Art.

Von einer Ausschliefsung der unendlich fernen Punkte kann hier abgesehen werden, wenn keine Massen in unendlicher Ferne liegen; das Potential erfüllt von selbst die Bedingung für unendlich ferne Punkte. Wir können demnach die beiden Raumteile, in welche die endliche Fläche S (die auch aus mehreren getrennten Teilen bestehen kann) den Gesamtraum zerlegt, ganz gleichartig behandeln.

Wir sahen im vorigen Paragraphen, dafs irgend ein Potential, dessen Werte für eine Fläche S gegeben sind, für den einen oder andern der beiden Raumteile eindeutig bestimmt ist, wenn nur in demselben $\varDelta V = 0$ ist. Rührt das Potential von räumlichen Massen her, so kann diese Bedingung nur für einen der beiden Raumteile, möglicherweise auch für keinen zutreffen. Geht dagegen die Attraktion von einer Massenbelegung der Fläche S aus, so ist das entsprechende Flächenpotential V durch seine Werte auf S für den inneren und den äufseren Raum eindeutig bestimmt.

Kennt man nun die Werte des Potentials V von Massen, welche im Innern von S liegen, für die Fläche S, so ist V nach dem Vorhergehenden für den ganzen Aufsenraum bestimmt; dafs wir es nicht allgemein angeben können, ist hier, wo es sich nur um einen Existenzbeweis handelt, irrelevant. Hiernach ist auch $\frac{\partial V}{\partial n_a}$ als bekannt anzunehmen, wo n_a die Richtung der äufseren Normale von S bezeichnet. Nach § 41, (5) ist bei geänderter Bezeichnung

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial n_a} \tag{7}$$

die Dichtigkeit der Masse, welche in jedem Punkte von S aufzutragen ist, um eine Massenverteilung zu erhalten, deren Potential mit dem der inneren Massen für S selbst, also auch im äufseren Raume übereinstimmt (§ 44, 3).

Insbesondere kann man das Potential einer räumlichen Masse auf eine einzige Art für äufsere Punkte durch das Potential einer Belegung ersetzen, welche die Oberfläche dieser Masse bedeckt.

Die wirkliche Ersetzung von Potentialen räumlicher Massen durch Flächenpotentiale und ihre Entwicklung unter der Voraussetzung, dafs ihre Werte auf einer geschlossenen Fläche bekannt sind, ist unter Zugrundelegung eines speziellen Falles die Aufgabe der folgenden Untersuchungen.

§ 46.

Theorie der Kugelfunktionen einer Variabeln*).

1. Jedes Potential kann als eine Summe unendlich vieler, mit einem Faktor multiplizierten Gröfsen

$$\frac{1}{\varrho}$$

angesehen werden, wenn ϱ der Abstand des angezogenen Punktes x, y, z von einem Punkte ξ, η, ζ des anziehenden Körpers ist, also

*) Eine umfassende Behandlung des Gegenstandes nebst Angabe der reichhaltigen Litteratur findet man in Heine, „Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen“, einem Werke, dem wir in einem Teile der Darstellung folgen. Eine Entwicklung aus ganz anderen Gesichtspunkten geben Thomson und Tait in ihrem „Handbuch der theoretischen Physik“, deutsche Übersetzung, B. I, p. 156 ff. — Vgl. ferner Dirichlet-Grube,

(1) $$\varrho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta^2)}$$

gesetzt wird. Führen wir Polarkoordinaten durch die Substitution

(2) $$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi, & \xi = r_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1, \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi, & \eta = r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1, \\ z = r\cos\vartheta, & \zeta = r_1 \cos\vartheta_1 \end{cases}$$

ein, so wird

(3) $$\varrho = \sqrt{r^2 - 2rr_1 [\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)] + r_1^2}.$$

Nennen wir andrerseits den Winkel, welchen die Radienvektoren r und r_1 miteinander bilden, γ, so haben wir direkt

(4) $$\varrho = \sqrt{r^2 - 2rr_1\cos\gamma + r_1^2}.$$

Durch Vergleichung von (3) und (4) folgt, was auch durch direkte sphärisch-trigonometrische Betrachtung leicht herzuleiten wäre,

(5) $$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1).$$

Nehmen wir an, dafs $r < r_1$ sei, und setzen

(6) $$\frac{r}{r_1} = \alpha, \quad \cos\gamma = x,$$

so wird aus (4)

(7) $$\varrho = r_1\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2},$$

und wir stellen uns die Aufgabe,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

in eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Bereits in § 11 hatten wir uns mit der Entwicklung desselben Ausdrucks zu beschäftigen; doch war es uns damals darum zu thun, eine nach $\cos k\gamma$ fortschreitende Reihe zu erhalten, während hier nach Potenzen von α geordnet wird.

2. Nach dem binomischen Satze erhalten wir, wenn α und x beliebige komplexe Gröfsen sind, welche nur der Bedingung*)

Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte; C. Neumann, Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwickelungen u. s. w. — Die Einführung der Kugelfunktionen verdankt man Legendre und Laplace.

*) Wir bezeichnen, wie in der Funktionentheorie üblich, mit $|a+bi|$ den absoluten Betrag von $a+bi$, also $\sqrt{a^2+b^2}$. — Die nach Potenzen von α geordnete Reihe (9) konvergiert für $|\alpha| < 1$, falls $x = \cos\gamma$ gesetzt und γ als reell angenommen wird. Nach einem funktionaltheoretischen Satze mufs

(8) $$|2\alpha x - \alpha^2| < 1$$

zu genügen haben — für hinreichend kleine α ist dieselbe immer erfüllt —,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = [1 - \alpha(2x - \alpha)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\alpha(2x - \alpha) + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2(2x - \alpha)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3(2x - \alpha)^3 + \cdots$$

oder, wenn die Klammern gleichfalls nach dem binomischen Satze entwickelt werden,

(9) $$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = P^0(x) + \alpha P^{(1)}(x) + \alpha^2 P^{(2)}(x) + \alpha^3 P^{(3)}(x) + \cdots,$$

worin (wie sich nach einigen Vereinfachungen leicht ergiebt) für $n > 0$

(10) $$P^{(n)}(x) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right],$$

$$P^0(x) = 1$$

ist.

Die ganze Funktion n^{ten} Grades $P^{(n)}(x)$ heifst die n^{te} Kugelfunktion von x (im engeren Sinne).

Es ist

(11) $$P^{(n)}(-x) = (-1)^n P^{(n)}(x),$$

d. h. für gerade n ist $P^{(n)}$ eine gerade, für ungerade eine ungerade Funktion von x. Speziell haben wir

$$P^{(1)}(x) = x,$$

$$P^{(2)}(x) = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right),$$

$$P^{(3)}(x) = \frac{5}{2}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right),$$

$$P^{(4)}(x) = \frac{35}{8}\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right)$$

u. s. w.

3. Nimmt man wieder $x = \cos\gamma$, so kann man (10) durch die $\cos k\gamma$ ausdrücken. Zu diesem Zwecke setzt man am einfachsten wie in § 11

---

nämlich die Konvergenz bis zu dem 0 nächstgelegenen Unstetigkeitspunkte von $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$ reichen. Aus $1 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$ folgt aber

$$\alpha = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \cos\gamma \pm i \sin\gamma,$$

ein Wert, dessen absoluter Betrag 1 ist.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha e^{i\gamma})(1-\alpha e^{-i\gamma})}}$$
$$= \left[1+\frac{1}{2}\alpha e^{i\gamma}+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2 e^{2i\gamma}+\cdots\right]$$
$$\times\left[1+\frac{1}{2}\alpha e^{-i\gamma}+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2 e^{-2i\gamma}+\cdots\right];$$

multipliziert man aus und führt dann wieder

$$2\cos k\gamma = e^{ki\gamma}+e^{-ki\gamma}$$

ein, so erhält man als Koeffizienten von α^n:

$$(12)\qquad P^{(n)}(\cos\gamma) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{4.6\ldots(2n)}\Bigg[\cos n\gamma$$
$$+\frac{1n}{1(2n-1)}\cos(n-2)\gamma+\frac{1.3n(n-1)}{1.2(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\gamma+\cdots\Bigg].$$

Aus dieser Darstellung läfst sich der wichtige Schlufs ziehen, dafs $P^{(n)}(\cos\gamma)$ für reelle γ innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ liegt. Da nämlich in (12) die Koeffizienten sämtlicher Glieder der rechten Seite positiv sind, so nimmt $P^{(n)}(\cos\gamma)$ seinen gröfsten absoluten Wert für $\gamma=0$ an, wodurch sämtliche Kosinus 1 werden. In diesem Falle sind aber die $P^{(n)}$ die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha+\alpha^2}} = \frac{1}{1-\alpha} = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots,$$

d. h. die positive Einheit. Für beliebige reelle Werte von γ wird der absolute Betrag von $P^{(n)}(\cos\gamma)$ nie über 1 steigen können, d. h. $P^{(n)}(\cos\gamma)$ ist auf den Spielraum von -1 bis $+1$ angewiesen.

4. Die Kugelfunktionen lassen sich noch in manche andere Formen setzen, von denen die folgende besonders übersichtlich ist:

$$(13)\qquad P^{(n)}(x) = \frac{1}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Um die Richtigkeit dieser Formel nachzuweisen, entwickeln wir $(x^2-1)^n$ nach dem binomischen Satze:

$$(x^2-1)^n = x^{2n}-\frac{n}{1}x^{2n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{2n-4}-\cdots.$$

Die $n$malige Differentiation dieses Ausdrucks liefert

$$2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)x^n-\frac{n}{1}(2n-2)(2n-3)\ldots(n-1)x^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}(2n-4)(2n-5)\ldots(n-3)x^{n-4}-\cdots.$$

Bemerkt man, dafs

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{2.4.6\ldots(2n)}$$

$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}{2.4.6\ldots(2n).1.2.3\ldots n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3.1}{1.2.3\ldots n}$$

u. s. w.

ist, so erkennt man unschwer die Identität von (13) und (10).

5. Es ist allgemein, auch für komplexe a und b, $a^2=b^2$ ausgenommen,

$$\int\frac{d\psi}{a-b\cos\psi}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{(a+b)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}},\tag{14}$$

worin rechts die Wurzel beidemale dasselbe Zeichen zu erhalten hat. Hieraus folgt, sobald nicht $a^2=b^2$ oder $\frac{b}{a}$ reell und absolut gröfser als 1 ist*),

$$\int_0^\pi\frac{d\psi}{a-b\cos\psi}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},\tag{15}$$

wo wir uns die Bestimmung des Vorzeichens der Wurzel für den speziellen Fall vorbehalten. Nehmen wir nun

$$a=1-\alpha x,\quad b=\alpha i\sqrt{1-x^2},$$

so wird aus (15)

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=\int_0^\pi\frac{d\psi}{1-\alpha\left[x+i\cos\psi\sqrt{1-x^2}\right]}.\tag{16}$$

Es ist einleuchtend, dafs auf der linken Seite das Vorzeichen so zu bestimmen ist, dafs dieselbe für verschwindende α in π übergeht.

Für hinreichend kleine α kann man rechts nach Potenzen von α entwickeln; man erhält, wenn man links die Entwicklung (9) einsetzt, durch Koeffizientenvergleichung die Laplace'sche Relation

$$P^n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[x+i\cos\psi\sqrt{1-x^2}\right]^n d\psi.\tag{17}$$

Da die linke Seite für reelle x reell ist, müssen sich rechts nach ausgeführter Entwicklung die Glieder mit i zerstören; es ist daher ohne Einflufs, welches Zeichen $\sqrt{1-x^2}$ beigelegt wird.

Die Gleichung (17) ist deshalb wichtig, weil man sie zu einer Er-

*) Im letzteren Falle wird $\frac{1}{a-b\cos\psi}$ für $\cos\psi=\frac{a}{b}$ unendlich.

weiterung des Begriffes des Kugelfunktionen benutzen kann; sie dient nämlich zur Definition der n^{ten} Kugelfunktion für beliebige gebrochene, negative und komplexe n. Im übrigen kommen diese erweiterten Kugelfunktionen für uns hier nicht in Betracht.

6. Wir beschäftigen uns jetzt mit dem für das Folgende wichtigen Integrale

$$(18)\qquad \int_{-1}^{+1} P^{(n)}(x)\, P^{(m)}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\,.\,4\,...\,(2n)\,.\,2\,.\,4\,...\,(2m)} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}\,dx.$$

Durch partielle Integration folgt

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}\,dx$$

$$= \left[\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)}{dx^{n-1}}\,\frac{d^{m+1}(x^2-1)^m}{dx^{m+1}}\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)}{dx^{n-1}}\,\frac{d^{m+1}(x^2-1)^m}{dx^{m+1}}\,dx.$$

Da nämlich die Gleichung $(x^2-1)^n = 0$ die Lösungen $+1$ und -1 $n$fach enthält, so sind dieselben auch noch Lösungen von

$$\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} = 0,$$

wodurch das Verschwinden des Klammerinhaltes erklärt wird.

Ist $n > m$, so können wir dieses Verfahren $m$mal anwenden; wir erhalten

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m} = (-1)^m \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\,\frac{d^{2m}(x^2-1)^n}{dx^{2m}}\,dx.$$

Nun ist aber $(x^2-1)^m$ eine ganze Funktion vom m^{ten} Grade mit dem höchsten Gliede x^{2m}; ihr $2m^{\text{ter}}$ Differentialquotient reduziert sich also auf die Konstante

$$1\;2\,.\,3\,...\,(2m).$$

Daher wird das Integral rechts zu

$$(-1)^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2m) \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\, dx.$$

Ist $n > m$, so wird

$$(19) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\, dx = \left[\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\right]_{-1}^{+1} = 0;$$

ist aber $n = m$, so wird derselbe Ausdruck zu

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n\, dx.$$

Nun hat man einerseits durch partielle Integration

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx = \Big[x(x^2-1)^n\Big]_{-1}^{+1} - 2n \int_{-1}^{+1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx$$

$$= -2n \int_{-1}^{+1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx,$$

andrerseits durch Zerlegung

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx = \int_{-1}^{+1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx - \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{n-1} dx,$$

also durch Elimination von

$$\int_{-1}^{+1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx$$

aus beiden Relationen

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx = -\frac{2n}{2n+1} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{n-1} dx.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man, da

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^0 dx = 2$$

ist, zu

$$(20) \qquad \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx = (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \cdot 2.$$

Wegen

$$(-1)^{n+n} \cdot 2 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1) \cdot [2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)]^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n)}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} = \frac{2}{2n+1}$$

erhält man schliesslich für $n \gtrless m$

$$(21) \qquad \int_{-1}^{+1} P^{(n)}(x) P^{(m)}(x) dx = 0,$$

dagegen

$$(22) \qquad \int_{-1}^{+1} [P^{(n)}(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

7. Aus (10) geht hervor, dafs sich x^{2n} als lineare, ganze Funktion von

$$P^{(2)}(x),\ P^{(4)}(x),\ \ldots\ P^{(2n)}(x),$$

dagegen x^{2n+1} als ebensolche Funktion von

$$P^{(1)}(x),\ P^{(3)}(x),\ \ldots\ P^{(2n+1)}(x)$$

darstellen läfst. Um das erstere auszuführen, braucht man nur zuerst x^2 durch $P^{(2)}(x)$, dann x^4 durch $P^{(4)}(x)$ und $P^{(2)}(x)$ u. s. w. der Reihe nach darzustellen, und analog verfährt man im andern Falle.

In dieser Weise läfst sich jede ganze Funktion n^{ten} Grades von x als lineare Funktion von

$$P^{(1)}(x),\ P^{(2)}(x),\ \ldots\ P^{(n)}(x)$$

darstellen. Auch bei einer Potenzreihe von x kann man in ähnlicher Weise verfahren und so eine Funktion $f(x)$, welche sich in der Umgebung des Nullpunktes in eine Potenzreihe nach x entwickeln läfst, in die Form

$$(23) \qquad f(x) = a_0 P^{(0)}(x) + a_1 P^{(1)}(x) + a_2 P^{(2)}(x) + \cdots$$

u. s. w. setzen; doch ist die Konvergenz dieser Reihe hiermit nicht aufser Frage gestellt.

Wissen wir aber von einer Funktion $f(x)$, dafs sie in eine für $|x| \leq 1$ konvergente, nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe (23) entwickelt werden kann, so lassen sich die Koeffizienten a_n derselben leicht durch bestimmte Integrale darstellen.

Multiplizieren wir nämlich (23) mit $P^{(n)}(x)$ und integrieren nach x von -1 bis $+1$, so erhalten wir nach (21) und (22)

$$(24) \qquad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P^{(n)}(x) dx.$$

Aus der Herleitung von a_n geht hervor, dafs $f(x)$ nur auf *eine* Art nach Kugelfunktionen entwickelt werden kann.

8. Wie schon früher bewiesen, genügt $V = \frac{1}{\varrho}$, genommen in dem Sinne von (1), der Differentialgleichung (vgl. § 40)

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

oder, wenn mittels (2) Polarkoordinaten eingeführt werden (§ 40, (10)),

$$(26)\qquad r\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Nun haben wir, wenn $r < r_1$ ist, nach (9), (7) und (6)

$$(27)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_1}P^{(0)}(\cos\gamma) + \frac{r}{r_1^2}P^{(1)}(\cos\gamma) + \frac{r^2}{r_1^3}P^{(2)}(\cos\gamma) + \cdots,$$

eine Reihe, welche für die gegebene Bedingung $r < r_1$ sicher konvergiert (s. 2., Anm.). Für $\cos\gamma$ denken wir uns dann wieder mittels (5) die Koordinaten ϑ und φ nebst den hier als konstant anzusehenden Gröfsen ϑ_1 und φ_1 eingeführt.

Da $\frac{1}{\varrho}$ der Gleichung (26) für beliebige r Genüge leistet, so mufs dies mit den einzelnen Gliedern von (27) der Fall sein. Läfst man nämlich r gegen die Null abnehmen, so wird jedes Glied verschwindend klein gegen das vorhergehende; man schliefst daher der Reihe nach, dafs das erste, zweite, dritte u. s. w. Glied einzeln die Gleichung (26) befriedigen mufs. Nehmen wir daher

$$V = r^n P^{(n)}(\cos\gamma),$$

so folgt aus (26) unter Berücksichtigung, dafs $P^{(n)}$ von r unabhängig ist, für die n^{te} Kugelfunktion die wichtige partielle Differentialgleichung

$$(28)\qquad n(n+1)P^{(n)} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial P^{(n)}}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Ist $r > r_1$, so geht (27) über in

$$(28\text{a})\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r}P^{(0)}(\cos\gamma) + \frac{r_1}{r^2}P^{(1)}(\cos\gamma) + \frac{r_1^2}{r^3}P^{(2)}(\cos\gamma) + \cdots;$$

setzt man nun

$$V = \frac{P^{(n)}}{r^{n+1}},$$

so gelangt man wieder zu der Gleichung (28). Zugleich halten wir als wesentliches Resultat fest, dafs

$$r^n P^{(n)} \quad \text{und} \quad \frac{P^{(n)}}{r^{n+1}}$$

der Differentialgleichung (26) oder (25) genügen.

9. Wir nehmen nun an, dafs wir irgend eine Funktion $f(\cos\gamma)$ für alle reellen γ nach Kugelfunktionen entwickelt haben:

$$(29) \qquad f(\cos\gamma) = a_0 P^{(0)}(\cos\gamma) + a_1 P^{(1)}(\cos\gamma) + \cdots;$$

aus dem letzten Resultate folgt dann, dafs nach Ersetzung von $\cos\gamma$ durch (5) die beiden Reihen, für $r < 1$

$$(30) \qquad W = a_0 P^{(0)} + a_1 r P^{(1)} + a_2 r^2 P^{(2)} + \cdots,$$

für $r > 1$

$$(31) \qquad W' = \frac{a_0 P^{(0)}}{r} + \frac{a_1 P^{(1)}}{r^2} + \frac{a_2 P^{(2)}}{r^3} + \cdots$$

der Gleichung (25) Genüge leisten, da es ihre einzelnen Glieder thun. Die Konvergenz dieser Reihen kann als selbstverständlich betrachtet werden, wenn (29) convergiert; denn wenn eine Potenzreihe nach der positiven Gröfse r für $r = 1$ konvergiert, so konvergiert sie auch für $r < 1$.

Auf diesem Resultate beruht die Wichtigkeit der Kugelfunktionen für mechanische Probleme. Wir sahen bereits früher, dafs ein Potential V eindeutig bestimmt ist, wenn seine Werte V_0 für die Punkte einer geschlossenen Fläche und die Befriedigung der Gleichung (25) innerhalb eines gewissen Raumes vorgeschrieben sind. Sei nun die geschlossene Fläche die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1; der Mittelpunkt sei der Nullpunkt des Koordinatensystems, während r, ϑ und φ als Polarkoordinaten benutzt werden. Die Punkte der Kugelfläche sind dann durch die verschiedenen Werte von ϑ und φ vollkommen bestimmt.

Wir wollen ferner annehmen, dafs das Potential V für alle Punkte der Kugelfläche, welche von einem bestimmten ϑ_1, φ_1 die gleiche sphärische Entfernung γ haben, denselben Wert besitzt. Dann ist, wie aus Vergleich mit dem Früheren hervorgeht, γ durch (5) bestimmt. Falls sich nun V_0 für die Kugeloberfläche nach (29) in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende, konvergierende Reihe entwickeln läfst, so ist der allgemeine Wert von V für einen beliebigen Punkt des Raumes, innerhalb dessen (25) gilt, durch die Reihen von (30) oder (31) gegeben, je nachdem der Punkt innerhalb oder aufserhalb der Kugel liegt; denn diese Ausdrücke gehen für $r = 1$ in (29) über und genügen (25), während aufserdem die zweite Reihe für $r = \infty$ derart verschwindet, dafs rW' endlich bleibt.

Die Kugelfunktionen dienen also dazu, ein Potential allgemein darzustellen, wenn seine Werte auf einer Kugelfläche bekannt sind, freilich unter der sehr beschränkenden Voraussetzung, dafs das Potential auf der Kugelfläche für alle Punkte gleich ist, welche von einem festen Punkte gleichen sphärischen Abstand haben (also auf der Erdoberfläche etwa die Orte gleicher Breite).

Durch eine Erweiterung der Untersuchung kann man sich von dieser Bedingung unabhängig machen und Entwicklungen für ein Potential aufstellen, dessen sich stetig aneinander schliefsende Werte für die Punkte einer Kugelfläche beliebig gegeben sind.

Die Bedeutung des Wortes „Kugelfunktion" bedarf übrigens nach dem Gefundenen keiner weiteren Erklärung mehr.

Die Frage, wann (29) konvergiert, soll hier nicht erledigt werden; wir kommen jedoch auf den Gegenstand in § 47 zurück.

§ 47.

Die Kugelfunktionen zweier Variabeln.

1. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

kann ohne Schwierigkeit direkt integriert werden. Denken wir uns*) zunächst V als Funktion lediglich von x und y, so dafs (1) in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

übergeht, so können wir analog wie bei einer etwas allgemeineren Gleichung, die wir später zu behandeln haben werden,

$$V = \varphi(x + ay)$$

setzen. Die Allgemeinheit wird nicht dadurch beeinträchtigt, dafs man x den Koeffizienten 1 erteilt, da φ eine ganz willkürliche Funktion ist, in die man den einen Koeffizienten eingehen lassen kann. Substituieren wir diesen Ausdruck für V in (2), so erhalten wir

$$\varphi'' + a^2\varphi'' = 0$$

oder

$$a^2 = -1,$$

also

$$a = \pm i.$$

Da ferner die Summe zweier Lösungen von (2) offenbar wieder eine Lösung ist, so finden wir die allgemeine**) Lösung von (2) in der Form

$$V = \varphi_1(x + iy) + \varphi_2(x - iy); \tag{3}$$

dieselbe enthält zwei willkürliche Funktionen.

Will man nur reelle Lösungen von (2) haben, so kann man für φ_1 und φ_2 dieselbe reelle Funktion φ nehmen; aus

---

*) Wir werden in § 48 diese Annahme in einem bestimmten Falle verwirklicht finden.

**) Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung kann ein allgemeines Integral besitzen, welches zwei willkürliche Funktionen der unabhängigen Variabeln in sich schliefst. Doch werden wir sogleich ein Beispiel kennen lernen, wo — bei drei unabhängigen Variabeln — das allgemeine Integral unendlich viele willkürliche Funktionen enthält. Es ist nicht unsere Absicht, diesen Gegenstand hier weiter zu verfolgen.

$$V = \varphi(x + iy) + \varphi(x - iy) \tag{4}$$

hebt sich alsdann alles Imaginäre heraus. Auch

$$V = \frac{1}{i}\left[\varphi(x + iy) - \varphi(x - iy)\right] \tag{5}$$

liefert eine reelle Lösung der Differentialgleichung.

Aus den Elementen der Funktionentheorie ist bekannt, dafs der reelle und der imaginäre Teil einer analytischen Funktion einer Variabeln $z = x + iy$ der Gleichung (2) Genüge leisten. In (4) und (5) finden wir dieses Resultat, wenn auch etwas eingeschränkt, wieder. (4) stellt nämlich den reellen, (5) den durch i dividierten rein imaginären Teil der Funktion $\varphi(x + iy)$ dar. Wir werden auf diese bemerkenswerte Beziehung zwischen Potentiallehre und Funktionentheorie in der Hydromechanik zurückkommen, wo sie uns wichtige Dienste leisten wird.

2. Die allgemeine Gleichung (1) läfst sich ganz analog behandeln. Wir setzen

$$V = \varphi(ax + by + z)$$

und finden durch Einführung in (1) nach Wegheben des Faktors φ'' die Beziehung

$$a^2 + b^2 + 1 = 0.$$

Setzen wir

$$a = c\cos\alpha, \quad b = c\sin\alpha,$$

worin α für reelle a^2 und b^2 reell ist, so wird daraus

$$c^2 + 1 = 0,$$

also

$$c = \pm i.$$

Bilden wir wieder eine Summe von Lösungen der Gleichung (1), so ist dieselbe ebenfalls eine Lösung; daher erhalten wir

$$V = \sum^k \varphi_k[z + i(x\cos\alpha_k + y\sin\alpha_k)]. \tag{6}$$

Hierin sind die φ_k, deren Zahl unbeschränkt ist, ganz willkürliche Funktionen, während für α_k verschiedene Winkelwerte zu nehmen sind. Den zweiten Wert $c = -i$ brauchen wir wegen der Willkürlichkeit von α_k nicht zu berücksichtigen.

Will man reelle Lösungen von (1), so braucht man nur für reelle φ_k

$$V = \sum^k \left\{\varphi_k[z + i(x\cos\alpha_k + y\sin\alpha_k)] + \varphi_k[z - i(x\cos\alpha_k + y\sin\alpha_k)]\right\} \tag{7}$$

zu bilden.

3. Führen wir Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta \tag{8}$$

ein, so wird aus (6)

$$V = \sum^k \varphi_k[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k))]. \tag{9}$$

Dieser Ausdruck soll die Grundlage der Theorie der allgemeineren Kugelfunktionen bilden.

4. Ist V das Potential von Massen, welche aufserhalb der Kugel liegen, die mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben ist — bei der Willkürlichkeit des Nullpunktes und der Masseinheit kann diese Kugel natürlich mit jeder beliebigen identifiziert werden —, so wird V innerhalb der Kugel eine durchaus stetige, als analytisch anzusehende Funktion von r sein, sich also in eine Reihe nach steigenden Potenzen von r entwickeln lassen, die von $r = 0$ bis $r = 1$ konvergiert. Es folgt dies aus einem elementaren funktionaltheoretischen Satze*).

Rührt V von Massen her, die innerhalb derselben Kugel liegen, so mufs sich V in eine für alle $r > 1$ konvergente Potenzreihe nach $\frac{1}{r}$ entwickeln lassen. Ist V das Potential von Massen, welche auf der Oberfläche der Kugel ausgebreitet sind, so gelten beide Entwicklungen und gehen für $r = 1$ ineinander über.

Wendet man dies auf ein Potential an, welches sich in der Form (9) darstellt, so erhält man die Entwicklungen

$$V = \sum_0^{\infty n} a_n r^n \sum^k b_k[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k)]^n \tag{10}$$

und

$$V = \sum_0^{\infty n} a_{-n} r^{-n} \sum^k b_k[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k)]^{-n}, \tag{11}$$

worin die a_n konstante Koeffizienten bedeuten.

5. Wie in § 46, 8 schliefsen wir, dafs die einzelnen Glieder dieser Reihe die mit (1) äquivalente partielle Differentialgleichung (26) von § 46 befriedigen müssen. Hieraus folgt genau wie an der angeführten Stelle, dafs der Ausdruck

$$X_n = \sum^k b_k[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k)]^n \tag{12}$$

der Differentialgleichung

$$n(n+1)X_n + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{13}$$

Genüge leistet.

Aus den weiteren Untersuchungen an der angeführten Stelle ist ferner ersichtlich, dafs (13) auch für negative n gilt; man vergleiche nur die

*) Siehe hierüber des Verfassers „Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen“, pag. 97.

an § 46, (28) angeknüpften Folgerungen unter Beachtung, dafs hier X_{-n-1} an Stelle von $P^{(n)}$ tritt und dafs

$$n(n+1) = (-n-1)(-n-1+1)$$

ist.

Da also die X_n dieselbe partielle Differentialgleichung wie die $P^{(n)}$ befriedigen, so bezeichnen wir sie als allgemeine Kugelfunktionen*).

Unsere weiteren Untersuchungen knüpfen an die Reihe (10) an. Es wird sich zunächst darum handeln, einen Ausdruck

$$[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k)]^n$$

nach den Gröfsen $\cos m(\varphi - \alpha_k)$ zu entwickeln. Wir setzen

$$\cos\vartheta = x, \quad \varphi - \alpha_k = \psi,$$

so dafs der untersuchte Ausdruck in**)

$$(14) \qquad [x + i\cos\psi\sqrt{1-x^2}]^n$$

übergeht. Durch Ausführung dieses Ausdrucks gelangen wir zu den sogenannten abgeleiteten oder zugeordneten Kugelfunktionen, welche als Koeffizienten auftreten.

6. Die verlangte Entwicklung könnte mittels Benutzung des binomischen Satzes und nachheriger Ersetzung von $\cos^m\psi$ durch die Kosinus der Vielfachen von ψ geschehen; doch gelangen wir auf folgende Weise zu einem übersichtlicheren Resultate.

Nach Heine setzen wir

$$(15) \qquad z = ie^{i\psi}\sqrt{1-x^2},$$

also

$$e^{i\psi} = -\frac{iz}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{2}(e^{i\psi} + e^{-i\psi}) = \frac{i(1-x^2-z^2)}{2z\sqrt{1-x^2}}$$

und daher

$$(16) \qquad x + i\cos\psi\sqrt{1-x^2} = \frac{(x+z)^2 - 1}{2z}.$$

Wir entwickeln nun

$$f(x+z) = [(x+z)^2 - 1]^n$$

gemäfs dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von z, beachtend, dafs

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

ist und dafs wir mithin, anstatt nach z zu differentiieren und dann $z = 0$

---

*) Der Zusammenhang der Kugelfunktion einer Variabeln mit den allgemeineren geht aus § 46, (17) besonders deutlich hervor. $P^{(n)}(\cos\vartheta)$ ist als der Mittelwert von $[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\psi]^n$ für alle möglichen ψ anzusehen.

**) Es ist für die Folge immer festzuhalten, dafs $\sqrt{1-x^2} = \sin\vartheta$, $\sqrt{x^2-1} = i\sin\vartheta$ ist, so dafs über das Zeichen der Wurzel kein Zweifel entsteht.

zu setzen, auch von vornherein $z = 0$ setzen und dann nach x differentiieren dürfen. Es wird hiernach

$$(17)\quad [(x+z)^2-1]^n = (x^2-1)^n + \frac{z}{1}\frac{\partial (x^2-1)^n}{\partial x} + \frac{z^2}{1.2}\frac{\partial^2 (x^2-1)^n}{\partial x^2} + \cdots + \frac{z^{2n}}{1.2\ldots(2n)}\frac{\partial^{2n}(x^2-1)^n}{\partial x^{2n}}.$$

Diesen Ausdruck führen wir mittels (16) in (14) ein und geben dann z wieder seinen durch (15) dargestellten Wert. Da die Entwicklung nur Glieder mit $\cos k\psi$, keine mit $\sin k\psi$ enthält, so müssen die Koeffizienten von $e^{ik\psi}$ und $e^{-ik\psi}$ gleich werden, was eine interessante Identität liefert. Wir erhalten schliefslich die Entwicklunng

$$(18)\ [x + i\cos\psi\sqrt{1-x^2}]^n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_0^n{}'_r \frac{(x^2-1)^{\frac{r}{2}}}{(n+r)!}\frac{d^{n+r}(x^2-1)^n}{dx^{n+r}}\cos r\psi\text{*)}$$

oder, wenn wir durch die Gleichung

$$(19)\qquad P_r^{(n)}(x) = \frac{(n-r)!}{(2n)!}(x^2-1)^{\frac{r}{2}}\frac{d^{n+r}(x^2-1)^n}{dx^{n+r}},\quad r \leqq n,$$

die abgeleiteten oder zugeordneten Kugelfunktionen definieren,

$$(20)\qquad [x + i\cos\psi\sqrt{1-x^2}]^n = \frac{(2n)!}{2n-1}\sum_0^n{}'_r \frac{P_r^{(n)}(x)}{(n+r)!(n-r)!}\cos r\psi.$$

Mit Berücksichtigung von (13) können wir statt (19) auch schreiben

$$(21)\qquad P_r^{(n)}(x) = \frac{(n-r)!}{1.3.5\ldots(2n-1)}(x^2-1)^{\frac{r}{2}}\frac{d^r P^{(n)}(x)}{dx^r}.$$

Ehe wir die allgemeinere Untersuchung fortsetzen, wollen wir zunächst die früheren Kugelfunktionen einer Variabeln nach den Gröfsen $\cos m(\varphi - \varphi_1)$ entwickeln, wobei die neu eingeführten abgeleiteten Funktionen eine wesentliche Rolle spielen.

7. Der Ausdruck

$$P^{(n)}(z) = P^{(n)}[\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)]$$

kann als Funktion von $\cos(\varphi - \varphi_1)$ betrachtet und nach Potenzen dieser Gröfse entwickelt werden, und diese Potenzen lassen sich dann durch die Gröfsen $\cos k(\varphi - \varphi_1)$ ausdrücken. Da $P^{(n)}(x)$ in x vom n^{ten} Grade ist, steigt die Entwicklung bis zu einem Gliede mit $\cos n(\varphi - \varphi_1)$.

Um die fertige Form dieser Reihe herzuleiten, gehen wir von einer Erweiterung des Integrales (14) von § 46 aus. Es ist

*) Das Summationszeichen Σ' drückt aus, dafs der Koeffizient, welcher $r = 0$ entspricht, durch 2 zu dividieren ist.

$$(22)\quad \int \frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi} = \frac{2}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{C+(A-B)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}},$$

also

$$(23)\quad \int_0^\pi \frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}.$$

Setzen wir nun

$$\cos\vartheta = x,\quad \cos\vartheta_1 = x_1,$$

also

$$(24)\qquad z = xx_1 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1),$$

so haben wir die Identität

$$(x-\alpha x_1)^2 + \left[\sqrt{1-x^2}\cos\varphi - \alpha\sqrt{1-x_1^2}\cos\varphi_1\right]^2$$
$$+\left[\sqrt{1-x^2}\sin\varphi - \alpha\sqrt{1-x_1^2}\sin\varphi_1\right]^2 = 1-2\alpha z+\alpha^2.$$

Nehmen wir

$$A = x-\alpha x_1,\quad B = i\left[\sqrt{1-x^2}\cos\varphi - \alpha\sqrt{1-x_1^2}\cos\varphi_1\right],$$
$$C = i\left[\sqrt{1-x^2}\sin\varphi - \alpha\sqrt{1-x_1^2}\sin\varphi_1\right],$$

so folgt aus (23)

$$(25)\quad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+\alpha^2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\psi}{x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\varphi-\psi)-\alpha\left[x_1+i\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi_1-\psi)\right]}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung können wir bei hinreichend kleinem α nach Potenzen dieser Gröſse entwickeln; die Koeffizientenvergleichung liefert

$$(26)\qquad P^{(n)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left[x_1+i\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi_1-\psi)\right]^n}{\left[x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\varphi-\psi)\right]^{n+1}}\,d\psi.$$

Den Zähler des Bruches unter dem Integralzeichen können wir nach (20) in eine Reihe

$$(27)\quad \left[x_1+i\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi_1-\psi)\right]^n = \frac{(2n)!}{2^{n-1}}\sum_0^n{}_r{}' \frac{P_r^{(n)}(x_1)}{(n+r)!(n-r)!}\cos r(\varphi_1-\psi)$$

entwickeln. Die Entwicklung von

$$\frac{1}{\left[x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\varphi-\psi)\right]^{n+1}}$$

mag die Form*)

---

*) Die Entwicklung gilt allerdings nur für $\sqrt{1-x^2}<|x|$ oder $x^2>\frac{1}{2}$; allein infolge der sich ergebenden Symmetrie von (26) in x und x_1 können die weiteren Resultate unmittelbar auf beliebige x übertragen werden.

$$\sum_{r'} c_{r'} \cos r'(\varphi_1 - \psi)$$

annehmen, worin die $c_{r'}$ von x abhängig sind. Nun ist aber

$$\int_0^\pi \cos r(\varphi_1 - \psi) \cos r'(\varphi - \psi) d\psi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos[r\varphi_1 + r'\varphi - (r + r')\psi] + \cos[r\varphi_1 - r'\varphi - (r - r')\psi] d\psi,$$

und die Ausführung der Integration nebst Einsetzung der Grenzwerte liefert den Wert Null, wenn nicht $r = r'$ ist. In diesem letzteren Falle wird der zweite Kosinus von ψ unabhängig und das Integral geht in

$$\frac{\pi}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi)$$

über.

Da ferner $P^{(n)}(z)$ in x, φ und x_1, φ_1 symmetrisch ist, so folgt nach dem Gefundenen aus (26)

$$(28) \qquad P^{(n)}(z) = \sum_0^n{}' a_r^{(n)} P_r^{(n)}(x) P_r^{(n)}(x_1) \cos r(\varphi_1 - \varphi),$$

worin die $a_r^{(n)}$ noch zu bestimmende Konstanten bezeichnen.

Dividiert man (19), worin x_1 statt x geschrieben wird, durch x_1^n und setzt dann $x_1 = \infty$, so wird daraus, weil von den Potenzen der Binome immer nur das höchste Glied in Betracht kommt*),

$$(28\text{a}) \left[\frac{P_r^{(n)}(x_1)}{x_1^n}\right]_{x=\infty} = (-1)^r \frac{(n-r)!\, 2n(2n-1)\ldots(n-r+1)}{(2n)!} = (-1)^r.$$

Durch dasselbe Verfahren geht $P^{(n)}(z)$, worin z durch (24) dargestellt ist, mit Zuhilfenahme von § 46, (10) in*)

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \left[x + i\sqrt{1-x^2} \cos(\varphi_1 - \varphi)\right]^n$$

über, wofür nach (27)

$$(28\text{b}) \; [P^{(n)}(z)]_{x_1=\infty} = 2[1.3.5\ldots(2n-1)]^2 \sum_0^n{}' \frac{P_r^{(n)}(x)}{(n+r)!(n-r)!} \cos r(\varphi_1 - \varphi)$$

gesetzt werden kann.

---

*) Da

$$\cos\vartheta_1 = \frac{e^{i\vartheta_1} + e^{-i\vartheta_1}}{2}, \quad \sin\vartheta_1 = \frac{e^{i\vartheta_1} - e^{-i\vartheta_1}}{2i}$$

ist, so wird $x_1 = \cos\vartheta_1$ unendlich, wenn $\vartheta_1 = \pm i\infty$ genommen wird; dann ist aber $\sin\vartheta_1 = \pm i\infty$. Wir benutzen hier und in der Folge das untere Zeichen.

Dividiert man (28) durch x_1^n, setzt dann $x_1 = \infty$ und benutzt die Resultate (28a) und (28b), so erhält man durch Koeffizientenvergleichung

$$a_r^{(n)} = (-1)^r \cdot 2 \frac{[1 \cdot 3 \ldots (2n-1)]^2}{(n+r)!(n-r)!}.$$

Wir haben hierdurch die merkwürdige Reihenentwicklung

$$(29) \qquad P^{(n)}\left[xx_1 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi_1 - \varphi)\right]$$
$$= 2[1 \cdot 3 \ldots (2n-1)]^2 \sum_0^n{}'_r (-1)^r \frac{P_r^{(n)}(x) P_r^{(n)}(x_1)}{(n+r)!(n-r)!} \cos r(\varphi_1 - \varphi).$$

Dieselbe wurde von Heine als das Additionstheorem der Kugelfunktionen bezeichnet; sie wurde zuerst von Laplace aufgestellt.

8. Wir kehren jetzt zu unserer Hauptuntersuchung, der Entwicklung von (9) in die Reihe (10) und dieser nach den Kosinus der Vielfachen von $\varphi - \alpha_k$ zurück. Anscheinend ist nach Ausführung dieser Entwicklung, d. h. nach Einsetzung der Reihen (18) in (10), jedes Glied mit beliebig vielen Konstanten behaftet; allein wir werden sofort sehen, daſs eine Fortsetzung der Entwicklung eine wesentliche Reduktion dieser Konstanten liefert.

Bezeichnet $f_r(\vartheta)$ eine Funktion, deren Bedeutung aus (18) erhellt (worin wieder $x = \cos\vartheta$ gesetzt wird), so ist nach (12) und (18)

$$(30) \qquad X_n = \sum^k b_k \sum_0^n{}'_r f_r(\vartheta) \cos r(\varphi - \alpha_k),$$

wobei zu bemerken, daſs $f_r(\vartheta)$ für alle k das gleiche bleibt. Setzt man daher

$$\cos r(\varphi - \alpha_k) = \cos r\varphi \cos r\alpha_k + \sin r\varphi \sin r\alpha_k,$$

so reduziert sich (30) auf die Form

$$(31) \qquad X_n = \sum_0^n{}_r A_r f_r(\vartheta) \cos r\varphi + \sum_0^n{}_r B_r f_r(\vartheta) \sin r\varphi,$$

wo die $\cos r\alpha_k$ und $\sin r\alpha_k$ bereits in die Konstanten aufgenommen sind.

Die allgemeine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung enthält daher nur $(2n+1)$ voneinander unabhängige Konstanten.

9. Es sei nun V eine ganz beliebige Funktion von x, y, z, welche der Gleichung (1) innerhalb einer Kugel mit dem Radius 1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt Genüge leistet, ohne daſs vorausgesetzt würde, daſs ihr die Form (6) zukommt, deren Allgemeinheit wir ja nicht erwiesen haben. Wir wollen weiter annehmen, daſs sich diese Funktion innerhalb der Kugel nach Potenzen von x, y, z entwickeln läſst*). Aus

*) Ist V ein Potential, so dürfen wir dies wegen seiner Stetigkeit wohl annehmen, wenn auch kein strenger Beweis der Entwickelbarkeit erbracht ist.

den Gliedern n^{ter} Ordnung kann dann nach (8) der Faktor r^n herausgesetzt werden, während eine Funktion von ϑ und φ in die Klammer tritt; wir erhalten so eine nach Potenzen von r fortschreitende Entwicklung. Die Glieder n^{ter} Ordnung bilden zusammen eine homogene ganze Funktion n^{ter} Ordnung der drei Variabeln x, y, z. Die Gliederzahl dieser homogenen Funktion ist gleich derjenigen einer nicht homogenen Funktion n^{ter} Ordnung von zwei Variabeln. Da letztere ein Glied nullter Ordnung, zwei Glieder erster Ordnung, drei Glieder zweiter Ordnung u. s. w., endlich $n + 1$ Glieder n^{ter} Ordnung enthält, so beträgt die Gliederzahl

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dies ist also auch die Zahl der willkürlichen Konstanten, welche in der allgemeinsten homogenen Funktion $F_n(x, y, z)$ n^{ter} Ordnung von x, y, z auftreten.

Bildet man nun die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2} = 0,$$

so ist die linke Seite offenbar eine homogene, ganze Funktion $(n - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Soll F_n diese Gleichung identisch befriedigen, so müssen die Koeffizienten ihrer einzelnen Glieder der Null gleich sein. Die Zahl dieser Koeffizienten ist aber

$$\frac{(n-1)n}{2},$$

und so viele Bedingungsgleichungen erhalten wir für die Koeffizienten von F_n. Demnach bleiben noch

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n + 1$$

Koeffizienten von F_n willkürlich.

Die allgemeinste homogene, ganze Funktion n^{ter} Ordnung von x, y, z, welche die Gleichung (1) befriedigt, enthält also $(2n + 1)$ willkürliche Konstanten.

Da nun die allgemeine n^{te} Kugelfunktion, multipliziert mit r^n, alle diese Eigenschaften zeigt*), so kann man sagen, dafs sie die allgemeinste homogene ganze Funktion n^{ter} Ordnung ist, welche der Gleichung (1) Genüge leistet.

Hierdurch gewinnen wir die Überzeugung, dafs uns unser Verfahren die vollständigste, für uns in Betracht kommende Lösung von (1) liefert.

10. Wir hielten uns bisher nur an die Entwicklung der Reihe (10), während wir diejenige von (11) noch bei Seite liefsen. Nunmehr ist leicht zu erkennen, dafs mit der Reihenentwicklung von (10) diejenige von (11) gegeben ist. Aus (13) geht hervor, dafs X_n und X_{-n-1} der-

*) Dafs dieser Ausdruck eine homogene Funktion n^{ter} Ordnung von x, y, z ist, zeigt der Vergleich von (7) und (9).

selben Differentialgleichung genügen. Setzt man daher in (11) n an Stelle von $-(n+1)$, so konvergiert die neue Reihe für $r \leqq 1$ und ihre Koeffizienten zeigen dieselben Eigenschaften wie diejenigen von (10); man erhält also eine Entwicklung von der gleichen Art wie bei (10), in die man dann wieder $-(n+1)$ an Stelle von n einzufügen hat.

Das Gesammtresultat lautet:

Wenn eine Funktion V, welche das Potential irgend welcher Massen darstellt, die ganz innerhalb oder aufserhalb einer Kugel mit dem Radius 1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt liegen, oder auf der Kugelfläche selbst ausgebreitet sind, so läfst sich die Funktion V für $r = 1$ als eine Reihe allgemeiner Kugelfunktionen darstellen, wofür hier der Beweis nicht erbracht werden soll; multipliziert man im ersten Falle jeweilig das n^{te} Glied mit r^{-n-1}, im zweiten mit r^n, im dritten mit einer dieser beiden Gröfsen, so hat man Reihen, welche V aufserhalb oder innerhalb der Kugel oder in beiden Räumen darstellen.

Die n^{te} allgemeine Kugelfunktion enthält $2n+1$ willkürliche Konstanten, welche den Oberflächenbedingungen entsprechend zu bestimmen sind.

11. Eine der Hauptfragen ist nun die: läfst sich jede Funktion von ϑ und φ, $f(\vartheta, \varphi)$, nach Kugelfunktionen entwickeln, so dafs es also möglich ist, ein Potential aufzustellen, welches für die Kugeloberfläche in $f(\vartheta, \varphi)$ übergeht? Gewisse Bedingungen, welchen $f(\vartheta, \varphi)$ zu unterwerfen ist, liegen auf der Hand. Da jedem Punkte der Kugelfläche nur ein $f(\vartheta, \varphi)$ entsprechen soll, so müssen ϑ und φ in f nur als periodische Funktionen auftreten; denn andernfalls würden den Argumenten $\vartheta + 2k\pi$, $\varphi + 2k_1\pi$ für verschiedene k und k_1 verschiedene Funktionalwerte entsprechen, während sie doch demselben Punkte zugehören.

Auch bei der Vertauschung von ϑ und φ mit $-\vartheta$ und $\varphi + \pi$ darf keine Änderung eintreten; für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ (Nordpol und Südpol, wenn ϑ und φ als geographische Polardistanz und Länge interpretiert werden) mufs die Funktion von φ unabhängig sein.

Dirichlet bemühte sich nun darzuthun, dafs jede Funktion der beschriebenen Art, welche aufserdem in keinem Punkte unendlich wird und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, stets in eine nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitende, konvergente Reihe entwickelbar ist. Wir glauben auf eine Reproduktion dieses Beweises, dem immerhin noch manche Unsicherheiten anhaften, verzichten zu dürfen.

Der Dirichlet'sche Beweis findet sich in der Abhandlung: Sur les séries dont le terme général dépend des deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données, Crelle, B. 17; ferner in den „Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte“ von S. G. Lejeune-Dirichlet, herausgegeben von Grube, p. 165 ff.

Fassen wir die Resultate der letzten Nummer zusammen, so wird

$$f(\vartheta, \varphi) = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots \tag{32}$$

zu setzen sein, wo sich X_n weiter in der Form*)

$$\begin{aligned} X_n = a_0 P_0^{(n)}(\cos\vartheta) &+ [a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi]\, P_1^{(n)}(\cos\vartheta) \\ &+ [a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi]\, P_2^{(n)}(\cos\vartheta) \\ &+ \cdots + [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi]\, P_n^{(n)}(\cos\vartheta) \end{aligned} \tag{33}$$

darstellt.

Die Konstanten a und b, welche in den X_n vorkommen, können, falls man die Reihe bei irgend einem Gliede abbricht — Gauss thut dies bei seiner Berechnung des Erdmagnetismus nach dem vierten —, mittels einer hinreichenden Zahl von Beobachtungen an verschiedenen Punkten aus linearen Gleichungen berechnet werden. Obgleich dieses Verfahren schwerfällig, mühsam und unsicher ist, wird sich doch in solchen Fällen, wo $f(\vartheta, \varphi)$ nur für einzelne Punkte, nicht als analytischer Ausdruck bekannt ist, kaum eine wesentliche Vereinfachung anbringen lassen.

So läfst sich das Potential der Erdattraktion für äufsere Punkte aus einer genügenden Zahl von Pendelbeobachtungen bestimmen, deren Resultate man nur auf eine fiktive Kugelfläche, welche die Erde im Äquator berührt, zu reduzieren braucht.

12. Die Entwicklung eines Potentials, welches auf der Kugeloberfläche in $f(\vartheta, \varphi)$ übergeht, läfst sich übrigens auch in Gestalt einer Reihe von Integralen hinschreiben. Denken wir uns eine Masse auf der Kugelfläche selbst so verteilt, dafs die Dichtigkeit an jeder Stelle

$$\sigma = f(\vartheta, \varphi)$$

ist, wo wir also für den Augenblick mit f einen ganz anderen Begriff verbinden, wie vorher, so gilt das Potential

$$V = \int \frac{\sigma\, ds}{\varrho},$$

worin

$$\varrho = \sqrt{1 - 2r\cos\gamma + r^2}$$

ist und r und γ die frühere Bedeutung haben. Durch Entwicklung von $\frac{1}{\varrho}$ nach Kugelfunktionen einer Variabeln erhalten wir

$$V = \int \sigma \sum_0^\infty r^n P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds \tag{34}$$

für innere Punkte und

$$V = \int \sigma \sum_0^\infty r^{-(n+1)} P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds \tag{35}$$

für äufsere Punkte.

*) Dafs die zugeordneten Kugelfunktionen teilweise imaginär sind, hat nichts zu sagen, da durch passende Wahl der Koeffizienten die Entwicklung reell zu machen ist.

Nun ist aber nach § 41, (7)

$$(36)\quad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial V}{\partial n_a} + \frac{\partial V}{\partial n_i}\right] = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_+ - \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_-\right],$$

wo das angefügte $+$ und $-$ bedeutet, dafs der Differentialquotient das eine Mal aus der Reihe (35), das andere Mal aus (34) zu entnehmen und dafs dann $r = 1$ zu setzen ist. Die Differentialquotienten der konvergenten Reihen (34) und (35) sind für $r < 1$, resp. $r > 1$ wieder konvergent. Für $r = 1$ wird die Sache zweifelhaft; doch ist nach einem funktionaltheoretischen Satze sicher, dafs, wenn Konvergenz für $r = 1$ stattfindet, sich die Werte der Reihe in diesem Falle an diejenigen für $r < 1$, resp. $r > 1$ stetig anschliefsen. Den umständlichen Konvergenzbeweis für unsere Reihen, falls $r = 1$ wird, der von Dirichlet gegeben wurde, findet man in den schon angeführten Publikationen.

Es folgt aus (35) und (34)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_+ = -\int \sigma \sum_0^\infty (n+1) P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_- = \int \sigma \sum_1^\infty n P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds,$$

also nach (36)

$$(37)\qquad \sigma = \frac{1}{4\pi}\int \sigma \sum_0^\infty (2n+1) P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds.$$

Wir führen jetzt die Darstellung durch Polarkoordinaten vollständig aus, wobei wir die laufenden Koordinaten unter dem Integral mit ϑ_1 und φ_1, diejenigen des Punktes, für welche $\sigma = f(\vartheta, \varphi)$ gesucht wird, mit ϑ und φ bezeichnen. Es ist

$$ds = \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1,$$

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi_1 - \varphi),$$

also

$$(38)\quad f(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta_1,\varphi_1)\sum_0^\infty (2n+1) P^{(n)}(\cos\gamma)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1$$

$$= X_0 + X_1 + X_2 + \cdots,$$

wenn

$$(39)\qquad X_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta_1,\varphi_1) P^{(n)}(\cos\gamma)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1$$

gesetzt wird.

Um darzuthun, dafs X_n eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung mit zwei Variabeln ist, genüge hier die Bemerkung, dafs es die Gleichung (13) befriedigt. Um dies nachzuweisen, braucht man die Differentiationen nach ϑ und φ nur unter dem Integralzeichen, bei $P^{(n)}(\cos\gamma)$, auszuführen. Setzt man dann

Alles in (13) ein, so erhält man, weil $P^{(n)}(\cos\gamma)$ derselben Gleichung genügt, unter den Integralzeichen den Faktor Null.

Will man die Integration in (38) ausführen, so mufs man $P^{(n)}(\cos\gamma)$ mittels (28) nach den Kosinus der Vielfachen von $(\varphi_1 - \varphi)$, dann die $P_r^{(n)}(x_1)$ nach Potenzen von x_1 entwickeln und die Reihe durch Einführung der Kosinus der Vielfachen von ϑ_1 transformieren. Die einzelnen Posten, welche noch mit $f(\vartheta_1, \varphi_1)\sin\vartheta_1$ zu multiplizieren sind, lassen eine weitere Transformation der gleichen Art zu, da sich $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ durch periodische Funktionen von ϑ_1 und φ_1 darstellen läfst. Schliefslich ist die Integration der einzelnen Glieder auszuführen.

Die Entwicklung (38) zeigt, wie man eine beliebige Funktion $f(\vartheta, \varphi)$, mit bereits erwähnten Einschränkungen, durch eine Reihe von Kugelfunktionen ausdrücken kann. Geben wir nun in dieser Entwicklung dem Gliede X_n den Faktor r^n oder r^{-n-1}, so erhalten wir eine Reihe, welche der Differentialgleichung (1) Genüge leistet. Legen wir daher jetzt $f(\vartheta, \varphi)$ wieder seine frühere Bedeutung bei, so dafs es die Werte eines Potentials V für die Kugeloberfläche darstellt, so liefern, nachdem die Entwicklung (38) vorgenommen worden ist, die Reihen

$$V = X_0 + rX_1 + r^2X_2 + \cdots \tag{40}$$

und

$$V = \frac{X_0}{r} + \frac{X_1}{r^2} + \frac{X_2}{r^3} + \cdots \tag{41}$$

die Werte von V für den inneren, resp. den äufseren Kugelraum.

Wir beschliefsen hiermit die Theorie der Kugelfunktionen.

13. Die Theorie der Kugelfunktionen löst die Aufgabe vollständig: Ein Potential für beliebige Punkte, welche keine Masse enthalten, zu bestimmen, wenn seine Werte für sämtliche Punkte einer Kugelfläche bekannt sind. Es liegt nahe, mit Hilfe anderer, analoger Funktionen die gleiche Aufgabe für andere einfache Flächen zu lösen.

Für die Kugel gelangten wir in der Weise zum Ziele, dafs wir in dem Integral (6) der Differentialgleichung (1) Polarkoordinaten einführten und dann nach einer derselben, r, die einer Konstanten gleichgesetzt eine Kugel bestimmt, entwickelten. Führt man in (6) elliptische Koordinaten ein, so gelangt man in analoger Weise zu den Laméschen Funktionen, welche in Bezug auf das Ellipsoid dieselbe Rolle spielen, wie die Kugelfunktionen in Bezug auf die Kugel.

Setzt man

$$z = z, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so bestimmt

$$r = \text{Const.}$$

eine Kreiscylinderfläche, deren Achse die z-Achse ist Die Funktionen, zu welchen man hiervon ausgehend gelangt, heifsen Cylinderfunktionen oder Bessel'sche Funktionen.

In ähnlicher Weise gelangt man zu den von Mehler entwickelten Kegelfunktionen.

Alle diese Funktionengattungen sollen hier nicht untersucht werden, da dies einen unverhältnismäfsigen Raum erfordern würde.

Bemerkt möge noch werden, dafs für zwei Koordinaten die gewöhnlichen trigonometrischen Kreisfunktionen in Bezug auf den Kreis dieselbe Rolle spielen, wie die Kugelfunktionen in Bezug auf die Kugel. Die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Kreisfunktionen wird uns an späterer Stelle noch eingehend zu beschäftigen haben.

§ 48.

Das logarithmische Potential.

1. Wir denken uns eine Masse in gleichmäfsiger Dichtigkeit längs einer beiderseits ins Unendliche fortlaufenden Geraden, welche die z-Achse sein möge, verteilt, so dafs einem endlichen Stücke dieser Geraden eine endliche Masse zukommt. Es leuchtet ein, dafs von dieser linearen Masse aus auf jeden Punkt x, y, z die gleiche Attraktion ausgeübt wird wie auf den Punkt x, y, 0; es genügt daher, die Attraktion der Masse auf Punkte, welche in der xy-Ebene liegen, zu untersuchen. Eine Kraftwirkung in der Richtung der z-Achse findet nicht statt, sondern nur eine solche in der xy-Ebene nach dem Nullpunkte zu. Setzen wir

$$(1) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so ist die auf x, y, 0 in der Richtung des wachsenden r ausgeübte Kraft

$$(2) \qquad R = -\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{r^2 + z^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = -\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

worin σ die in der Längeneinheit enthaltene Masse (die Dichtigkeit) bezeichnet; $\sqrt{r^2 + z^2}$ ist wie r positiv. Da

$$\int \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{r^2(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ist, so folgt

$$(3) \qquad R = -\frac{2\sigma}{r}.$$

Die Newton'sche Anziehung der mit Masse von der Dichtigkeit σ belegten z-Achse auf einen Punkt der xy-Ebene ist also einer von dem Nullpunkte, in dem man sich die Masse 2σ konzentriert denkt, ausgehenden, proportional der ersten Potenz der Entfernung abnehmenden Anziehung gleich.

2. Ist ein unendlich langer Cylinder mit beliebigem Durchschnitte $f(x, y) = 0$ vorgelegt, dessen erzeugende Geraden der z-Achse parallel laufen und der so mit Masse angefüllt ist, dafs in Punkten, welche sich nur durch ihr z unterscheiden, die Dichtigkeit σ die gleiche ist, so läfst sich dessen Attraktion auf einen Punkt der xy-Ebene nach dem Newton'schen Gesetze durch eine Attraktion, welche mit der ersten Potenz der Entfernung abnimmt und von der in jedem Punkte mit der Masse 2σ belegten Fläche $f(x, y) = 0$ in der xy-Ebene ausgeht, ersetzen.

Hierdurch wird man veranlafst, die Kräftefunktion mit Masse belegter ebener Figuren zu untersuchen, welche nach dem letztgenannten Gesetze Punkte derselben Ebene (der xy-Ebene) anziehen. Bezeichnet jetzt σ die Dichtigkeit der Belegung in einem Punkte der Fläche S, r dessen Abstand von dem angezogenen Punkte x, y, so ist diese Kräftefunktion

$$\Omega = \int \sigma \log r \, ds, \tag{4}$$

wo die Integration über die Fläche S auszudehnen ist. Man nennt diese Kräftefunktion das logarithmische Potential*) der Fläche S. Die Untersuchung desselben verdankt man hauptsächlich C. Neumann. Ausführliches darüber findet man in dessen: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Leipzig 1877.

Der gegebenen Herleitungsweise entsprechend untersucht man das logarithmische Potential nur für Punkte derselben Ebene.

3. Da

$$\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}$$

ist, so folgt, wenn $r = 0$ ausgeschlossen wird,

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

und allgemein für einen aufserhalb der Masse gelegenen Punkt

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0, \tag{6}$$

so dafs Ω hier derselben partiellen Differentialgleichung genügt, wie das Newton'sche Potential V.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs bei Ausdehnung der Theorie auf drei Variable diese Analogie aufhören würde.

Auch die Poisson'sche Gleichung mufs für das logarithmische Potential ihre Gültigkeit behalten; nur ist zu beachten, dafs nach (3) der

*) Das gewöhnliche Potential wird im Gegensatze hierzu das Newton'sche genannt.

Dichtigkeit σ der räumlichen Masse bei der Flächenbelegung die Dichtigkeit 2σ entspricht. Daher haben wir für einen Punkt im Innern der anziehenden Masse

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = -2\sigma\pi. \tag{7}$$

Ein wichtiger Unterschied zwischen dem logarithmischen und Newton'schen Potential ist der, daſs ersteres im Unendlichen unendlich wird, während letzteres verschwindet.

In betreff weiterer Eigenschaften des logarithmischen Potentials möge auf das citierte Werk von Neumann verwiesen sein. Es sei nur darauf aufmerksam gemacht, daſs das logarithmische Potential eines Flächenstücks, resp. einer geschlossenen Linie nach der Einführung auch als das Newton'sche Potential eines Körpers, resp. einer geschlossenen Fläche betrachtet werden kann und daſs dem entsprechende Relationen statthaben.

Wegen der Gleichung (6) steht gerade das logarithmische Potential in enger Beziehung zu funktionaltheoretischen Untersuchungen, auf die jedoch hier noch nicht eingegangen werden soll.

§ 49.

Die Abbildung durch reciproke radii vectores.

1. Es sei eine Kugel mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r vorgelegt. Von O aus sei irgend ein Halbstrahl gezogen und auf demselben seien zwei Punkte A und A_1 derart festgesetzt, daſs

$$OA \, . \, OA_1 = r^2 \tag{1}$$

wird; der eine dieser Punkte liegt innerhalb, der andere auſserhalb der Kugel, wenn nicht beide auf der Kugelfläche zusammenfallen.

Wir wollen nun zwei Punkte A und A_1 als korrespondierend oder zugeordnet (konjugiert) bezeichnen, wenn sie auf demselben durch O gehenden Halbstrahle liegen und der Relation (1) Genüge leisten. Auf diese Weise ist jedem Punkte des Raumes ein anderer eindeutig zugeordnet. Einem auſserhalb der Kugel gelegenen Punkte entspricht ein innerer, einem inneren ein äuſserer; Punkte auf der Kugeloberfläche entsprechen sich selbst.

Man nennt diese Beziehung von je zwei Punkten des Raumes die Zuordnung durch reciproke radii vectores oder durch sphärische Spiegelung; dieselbe ist eine durchaus reciproke, so daſs A und A_1 vertauscht werden können*).

*) Diese Zuordnung wurde zuerst von W. Thomson in der Potentialtheorie zur Anwendung gebracht.

Irgend ein räumliches Gebilde kann durch sphärische Spiegelung in ein anderes transformiert werden, indem man jedem Punkte des einen nach dem angegebenen Gesetze einen korrespondierenden zuweist.

2. Korrespondieren die Punkte A und B mit A_1 und B_1, so folgt aus (1)

$$OA \,.\, OA_1 = OB \,.\, OB_1$$

oder

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB_1}{OA_1}. \tag{2}$$

Da die beiden Dreiecke AOB und B_1OA_1 aufserdem den Winkel AOB gemeinsam haben, so folgt hieraus

$$\triangle AOB \sim B_1OA_1, \tag{3}$$

also

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OB_1} = \frac{OB}{OA_1} \tag{4}$$

oder auch

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \sqrt{\frac{OA \,.\, OB}{OA_1 \,.\, OB_1}}. \tag{5}$$

Nehmen wir drei korrespondierende Punktepaare A und A_1, B und B_1, C und C_1 an, so haben wir aufser (5) noch

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \sqrt{\frac{OA \,.\, OC}{OA_1 \,.\, OC_1}}, \quad \frac{BC}{B_1C_1} = \sqrt{\frac{OB \,.\, OC}{OB_1 \,.\, OC_1}}. \tag{6}$$

Lassen wir das Dreieck ABC unendlich klein werden, so ist das gleiche mit $A_1B_1C_1$ der Fall*); wir dürfen dann

$$OA = OB = OC, \quad OA_1 = OB_1 = OC_1$$

setzen und erhalten aus (5) und (6)

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1}. \tag{7}$$

Korrespondierende unendlich kleine Dreiecke sind daher einander ähnlich; ihre Dimensionen verhalten sich wie ihre Abstände vom Nullpunkte.

Wir schliefsen hieraus, dafs korrespondierende Gebilde in den kleinsten Teilen ähnlich sind. Entsprechende Winkel sind gleich, entsprechende, von demselben Punkte ausgehende unendlich kleine Strecken sind proportional. Es dürfte unnötig sein, auf den Begriff der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen hier weiter einzugehen, da derselbe dem Leser

*) Wenn nicht gerade Punkt O im Dreieck ABC liegt.

aus der Theorie der konformen Abbildung mittels Funktionen einer komplexen Variabeln hinreichend bekannt ist. Wir brauchen kaum zu erwähnen, daſs die Abbildung durch reciproke radii vectores auf die Ebene beschränkt in die Abbildung mittels der Funktion

$$y = \frac{r^2}{x}$$

übergeht.

Aus der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen folgt weiter, daſs sich unendlich kleine Flächen und Körper beider Systeme wie die Quadrate und Kuben ihrer Abstände vom Nullpunkte verhalten.

3. Denkt man sich in (4) die Punkte A und A_1 fest, die Punkte B und B_1 aber variabel, so entspricht wegen

$$AB = OA \cdot \frac{A_1 B_1}{OB_1}$$

einem konstanten AB ein konstantes Verhältnis $\frac{A_1 B_1}{OB_1}$. Nun ist aber

$$AB = \text{Const.}$$

die Gleichung einer Kugel, während

$$\frac{A_1 B_1}{OB_1} = \text{Const.}$$

eine Fläche darstellt, deren Punkte B_1 von zwei festen Punkten A_1 und O Abstände haben, die in konstantem Verhältnis stehen; dies ist aber bekanntlich auch eine Kugel.

Durch sphärische Spiegelung wird also jede Kugel wieder in eine Kugel transformiert*).

Geht die eine Kugel durch den Nullpunkt, so geht ihr Abbild durch den unendlich fernen Punkt; es ist also eine Kugel mit unendlich groſsem Radius, d. h. eine Ebene. Im speziellen Falle werden also auch Kugeln als Ebenen, Ebenen aber immer als Kugeln oder wieder als Ebenen abgebildet.

4. Will man die sphärische Spiegelung analytisch verfolgen, so bemerke man, daſs den Koordinaten des Punktes A, wenn der Mittelpunkt der abbildenden Kugel zum Nullpunkte genommen wird:

$$x = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi\,, \quad y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi\,, \quad z = \varrho \cos \vartheta$$

die Koordinaten

$$x_1 = \varrho_1 \sin \vartheta \cos \varphi\,, \quad y_1 = \varrho_1 \sin \vartheta \sin \varphi\,, \quad z_1 = \varrho_1 \cos \vartheta$$

*) Die Mittelpunkte zweier entsprechenden Kugeln entsprechen sich im allgemeinen nicht.

entsprechen, wo

$$\varrho\varrho_1 = r^2$$

ist. Hieraus folgt

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r^2 \sin\vartheta \cos\varphi}{\varrho} = \dfrac{r^2 x}{\varrho^2} = \dfrac{r^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \\ y_1 = \dfrac{r^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \qquad z_1 = \dfrac{r^2 z}{x^2+y^2+z^2}. \end{cases}$$

5. Wir wollen zwei Massenelemente m und m_1 der korrespondierenden Systeme so einander zuordnen, dafs wir ihnen korrespondierende Punkte M und M_1 als Ort zuweisen und aufserdem zwischen ihren Massen die Beziehung

$$(9)\qquad \frac{m}{\sqrt{OM}} = c^2 \frac{m_1}{\sqrt{OM_1}}$$

festsetzen, in der c eine beliebige Konstante bedeutet.

Ist A und A_1 ein beliebiges entsprechendes Punktepaar, so folgt aus (6)

$$(10)\qquad \frac{MA}{\sqrt{OM\,.\,OA}} = \frac{M_1A_1}{\sqrt{OM_1\,.\,OA_1}}$$

und durch Division von (9) durch (10)

$$(11)\qquad \frac{m}{MA}\sqrt{OA} = c^2 \frac{m_1}{M_1A_1}\sqrt{OA_1}.$$

Da $\frac{m}{MA}$ und $\frac{m_1}{M_1A_1}$ die Newton'schen Potentiale der Massenelemente m und m_1 in Bezug auf die Punkte A und A_1 sind, so ist hierdurch für die Potentiale korrespondierender Massenelemente in Bezug auf korrespondierende Punkte eine einfache Beziehung festgesetzt.

Da wir die Potentiale V und V_1 entsprechender Massen von endlicher Ausdehnung durch Summation der Potentiale entsprechender Massenelemente erhalten, so folgt aus (11) unmittelbar, wenn V und V_1 auf entsprechende Punkte A bezogen werden,

$$(12)\qquad V\sqrt{OA} = c^2 V_1 \sqrt{OA_1}.$$

Dies giebt den Satz:

Ist zwischen entsprechenden Massen korrespondierender Systeme die Gleichung (9) festgesetzt, so sind entsprechende Potentiale, bezogen auf entsprechende Punkte, durch die Relation (12) verbunden.

Mittels dieses Satzes, der noch manchen Umgestaltungen zugänglich ist, läfst sich aus jedem gefundenen Potentiale ein weiteres herleiten.

Genaueres über diesen Gegenstand findet man in dem im vorigen Paragraphen citierten Werke von C. Neumann.

Wir schliefsen mit dieser Untersuchung die Theorie des Potentials vorläufig ab; doch werden wir dieselbe in der Folge wieder aufzunehmen haben.

Alphabetisches Namen- und Sachregister.

Berichtigungen und Zusätze.

Zusatz zu § 1, 2, p. 3. Die hier gegebene, oft benutzte Definition der Geschwindigkeit ist insofern nicht ganz korrekt, als sie die Geschwindigkeit als Längengröfse erscheinen läfst, während diese der Quotient einer Längengröfse und einer Zeitgröfse ist. Indessen dürften die Erörterungen in § 2, 12 alle Zweifel hierüber beseitigen.

P. 4, Z. 10 lies: $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$ statt $\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt}}$.

P. 105 u. 107 lies in den Überschriften § 14 statt § 1.

Zusatz zu § 21, p. 132 ff.: Das d'Alembert'sche Prinzip kann auch auf den Fall ausgedehnt werden, dafs die Bedingungsgleichungen die Zeit explizite enthalten. Die virtuellen Verrückungen sind dann, p. 133 Anm. entsprechend, unter Festhaltung eines bestimmten t zu bilden; um die Beziehungen zwischen ihren Werten zu finden, sind die Bedingungsgleichungen nur nach den Koordinaten, nicht nach der Zeit zu differentiieren. Vgl. hiermit die Resultate in § 14. Auf eine weitere Behandlung des Gegenstandes, der noch gründlicher Untersuchung bedürftig ist, soll hier nicht eingegangen werden.

Zusatz zu § 43, p. 270 ff.: An die Resultate dieses und der vorhergehenden Paragraphen kann leicht eine Untersuchung des Verhaltens der zweiten Differentialquotienten eines Potentials V räumlicher Massen an der Grenzfläche der letzteren angeschlossen werden. Wir haben

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int^{\bullet} \frac{\sigma\, d\tau}{r} = \int^{\bullet} \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\tau$$

oder, da r eine Funktion von $x - \xi$ ist, während σ von x nicht abhängt,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int^{\bullet} \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\, d\tau = -\int^{\bullet} \frac{\partial \frac{\sigma}{r}}{\partial \xi}\, d\tau + \int^{\bullet} \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}\, d\tau .$$

Durch Anwendung von § 43, (4) wird hieraus

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int^{\bullet} \frac{\sigma}{r}\cos(n, x)\, ds + \int^{\bullet} \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}\, d\tau .$$

Der Differentialquotient von V nach x kann also als die Summe zweier Potentiale betrachtet werden, von denen das eine von einer Masse herrührt, welche die Oberfläche des bisher betrachteten massenerfüllten Raumes mit der Dichtigkeit $\sigma \cos(n, x)$ bedeckt, während das zweite einer räumlichen Masse mit der Dichtigkeit $\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}$ entspricht.

Da nun die ersten Differentialquotienten des Potentials räumlicher Massen an der Grenzfläche stetig sind, die eines Flächenpotentials aber nicht, so brauchen wir, um die Stetigkeitssprünge von

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$$

an der Grenzfläche zu ermitteln, nur diejenigen von

$$\int \frac{\sigma}{r} \cos(n, x)\, ds$$

ins Auge zu fassen. Nach § 41, 3 führt der nach der Richtung der inneren Normalen genommene Differentialquotient dieses Flächenpotentials beim Übergang von der inneren nach der äufseren Seite einen Sprung um

$$-4\pi\sigma \cos(n, x)$$

aus. Durch Projektion dieses Sprunges auf die Koordinatenachsen erhalten wir die Stetigkeitssprünge der zweiten Differentialquotienten von V. So haben wir als Stetigkeitssprung

$$\text{von } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}: \quad -4\pi\sigma \cos^2(n, x),$$

$$\text{von } \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}: -4\pi\sigma \cos(n, x) \cos(n, y)$$

u. s. w.

Ebenso können wir die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n_a \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial x} = -4\pi\sigma \cos(n_i, x)$$

u. s. w.

aufstellen.

Zusatz zu § 45, p. 280. Eingehende und strenge Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand giebt C. Neumann in dem Werke: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.

Kirchhoff, Dr. **Gustav,** Professor der Physik an der Universität zu Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Dritte Auflage. [VIII u. 465 S.] gr. 8. 1883. geh. n. *M.* 13.—

Auch diese dritte Auflage ist ein im wesentlichen unveränderter Abdruck der zweiten unbeschadet einzelner Berichtigungen und Verbesserungen. Das Buch behandelt das ganze Gebiet der reinen Mechanik, d. h. die Lehre von denjenigen Erscheinungen, bei welchen ausschliefslich Bewegungen ins Auge zu fassen sind, insoweit, als die Körper als kontinuierlich aufgefafst werden dürfen, die Annahme von Molekülen also nicht nötig ist.

Schell, Dr. **Wilhelm,** Geh. Hofrath und Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik mit besonderer Rücksicht auf das Bedürfniss technischer Hochschulen. Zweite, umgearbeitete Auflage. I. Band. 1. Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen. 2. Geometrie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände (Kinematik). Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. [XVI u. 580 S.] gr. 8. 1879. geh. n. *M.* 10.—

——— ——— II. Band. 3. Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz (Dynamik im weiteren Sinne, einschl. Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne). Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. [XII u. 618 S.] gr. 8. 1880. geh. n. *M.* 10.—

Die neue Auflage des Werkes behandelt die theoretische Mechanik in vier Teilen, von denen die beiden ersten den ersten Band, die beiden letzten den zweiten Band füllen und die Titel führen: 1) Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen, 2) Geometrie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände (Kinematik), 3) Theorie der Kräfte und ihrer Äquivalenz (Dynamik im ursprünglichen Sinne und Statik) und 4) Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne).

Der zweite Band nimmt in der Theorie der Kräfte auf die neueren Forschungen, insbesondere auf die von Ball, Darboux u. a. alle wünschenswerte Rücksicht und giebt ebenso in der Kinetik manchen wichtigen Untersuchungen Raum, die in der ersten Auflage fehlen, sucht dagegen andere Theorieen mehr physikalischen Charakters mit Hilfe heutiger Darstellungsmittel kürzer zu fassen.

Den beiden Hauptzielen des Werkes, die theoretische Mechanik als eine rein mathematische Disziplin von vorwiegend geometrischem Charakter darzustellen und durch Klarheit und Präzision der Begriffe, sowie durch sorgfältige Angabe der Litteratur das Interesse für diese Wissenschaft zu beleben und deren Studium zu erleichtern, glaubt der Verfasser mit der neuen Auflage, welche als eine vollständige Umarbeitung der ersten Auflage anzusehen ist, um einen nicht unbedeutenden Schritt näher gerückt zu sein.