BORNSTEIN * PROLEGOMENA FILOZOFICZNE DO GEOMETRYI

L.H.M.

Inw

Kat

WYDANIE Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWEM IMIENIA D-ra JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

BENEDYKT BORNSTEIN.

PROLEGOMENA FILOZOFICZNE

DO

GEOMETRYI.

WARSZAWA.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDE i S-ka (T. HIŻ i A. TURKUŁ).

1912.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

CZĘŚĆ I.

Przestrzeń geometryczna.

ROZDZIAŁ I.

Istota przestrzeni geometrycznej.

Wszelką rozciągłość (przestrzenność) możemy wyobrazić sobie, t. j. konkretnie przedstawić, tylko jako barwną. Czy to będzie rozciągłość jakiegokolwiek ciała fizycznego, czy też t. zw. próżnej przestrzeni między ciałami, zawsze jednak bezpośrednie, niepoddane analizie, konkretne przedstawienie tej rozciągłości, t. j. jej wyobrażenie, będzie zawierało czucia barwne. Jeżeli chcemy wznieść się do rozciągłości czystej, pozbawionej jakości zmysłowych, to wyobrażenie nasze musimy poddać analizie, musimy odróżnić w niem rozciągłość od barwy i tę ostatnią w myśli usunąć. Mówimy „w myśli“, gdyż w rzeczywistości usunąć jej nie możemy, bo barwa zawsze i wszędzie towarzyszy rozciągłości, jest jakby z nią zrosła. Nie możemy więc z przekonaniem twierdzić, że nasze wyobrażenie rozciągłości jest pozbawione barwy; sąd taki możemy sobie tylko wyobrazić. W ten sposób dochodzimy do przedstawienia sobie czystej rozciągłości (ograniczonej): wyobrażamy sobie mianowicie barwną rozciągłość (możemy wyobrazić ją sobie tylko jako ograniczoną) oraz sąd zaprzeczający przedmiotowi tego wyobrażenia podkładowego cechy barwności. Takie przedstawienie sobie przedmiotu nie jest bezpośrednie, konkretne, lecz jest rezultatem analizy i abstrakcyi — nie jest wyobrażeniem, lecz pojęciem *). Możemy posunąć się jeszcze o krok dalej i naszemu podkładowemu wyobrażeniu odmówić w sądzie wyobrażonym nie tylko barwności, lecz i ograniczoności. Wtedy otrzymamy pojęcie, którego przedmiotem będzie czysta nieograniczona rozciągłość lub, co na jedno wychodzi, czysta nieograniczona przestrzenność. Ta czysta nieograniczona przestrzenność — to przestrzeń geometryczna. Jeżeli porównamy teraz tę przestrzeń geometryczną z przestrzenią, będącą przedmiotem naszych wyobrażeń, z tą przestrzennością ograniczoną i nacechowaną jakościami zmysłowemi, to zobaczymy, że przestrzenność jest tem, co mają one ze sobą wspólnego, czystość zaś i nieograniczoność — to cechy, wyróżniające przestrzeń geometryczną od przestrzeni naszych wyobrażeń.

Rozpatrzmy nasamprzód tę cechę przestrzeni geometrycznej, którą nazwaliśmy jej czystością.

a) Czystość przestrzeni geometrycznej.

Czystość przestrzeni geometrycznej oznacza brak w niej wszelkich jakości zmysłowych, wszelkiej intensywności, wszystkiego tego, co znamionuje materyę, jako podścielisko sił. Przypisać przestrzeni czystość, to znaczy ją zdemateryalizować, pozbawić elementów czynnych, uczynić bezwzględnie bierną w stosunku do znajdujących się w niej utworów. W przestrzeni takiej formy geometryczne, zajmując inne miejsce, nie zmieniają kształtu ani wielkości, gdyż niema w niej czynników, które zmianę taką mogłyby spowodować. Wyrażając się matematycznie, mówimy, że przestrzeń geometryczna posiada stałą krzywiznę, t. j. że panują w niej stosunki, pod pewnym względem analogiczne do istniejących na po-

*) Teorya wyobrażeń i pojęć, na której się tu opieramy, wyłożona została przez K. Twardowskiego w pracy: Wyobrażenia i pojęcia. 1898.

wierzchniach o stałej krzywiznie: na takich powierzchniach (n. p. na kuli) figury mogą zmieniać położenie, nie zmieniając przytem kształtu ani wielkości. Oznacza to, że w przestrzeni geometrycznej figura, możliwa w jednem miejscu, jest również możliwa i w innem, że panują w niej wszędzie te same stosunki, że przestrzeń geometryczna jest jednorodna. I rzeczywiście: to, co czyni przestrzeń naszych wyobrażeń niejednorodną, nie jest niczem innem, jak rozmaitością jakości zmysłowych. Jeżeli te jakości zmysłowe wyeliminujemy, jeżeli przestrzeń uczynimy czystą, to uczynimy ją nie tylko bierną, lecz i jednorodną. Części przestrzeni geometrycznej będą różniły się tylko swem wzajemnem położeniem, a nie własnościami wewnętrznemi, odmiennemi od własności wewnętrznych, charakteryzujących inne części tej przestrzeni. Wyrażamy to krótko, mówiąc, że przestrzeń geometryczna jest względna, t. j. że miejsca w niej nie mają wewnętrznych charakterystyk, a tylko zewnętrzne, są charakteryzowane względnie do innych miejsc. Widzimy więc, że bierność przestrzeni geometrycznej (stałość krzywizny, możliwość wolnego w niej ruchu), jednorodność i względność — to tylko proste konsekwencye jej czystości, wyniki tego, że przestrzeń naszych wyobrażeń pozbawiliśmy wszelkiego materyalnego pierwiastku. Ten postulat czystości przestrzeni geometrycznej, nie zmieniający w niczem własności geometrycznych przestrzeni doświadczalnej, gdyż dotyczący jedynie jej własności fizycznych, jest zasadniczy dla geometryi czystej w jej przeciwstawienu do fizycznej, tak jak ją n. p. pojmował Helmholtz *). Dzięki temu postulatowi odgradzamy ściśle

*) Por. Helmholtz: Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, oraz Die Thatsachen in der Wahrnehmung (Vorträge und Reden, t. II, 1896, str. 29, 30 oraz 394—406).

dziedzinę geometryi od dziedziny fizyki, odróżniamy własności geometryczne ciał od ich własności fizycznych, stronę bierną świata przestrzennego od jego strony czynnej.

Rozpatrzmy z kolei

b) Nieograniczoność przestrzeni geometrycznej.

Wszelka przestrzenność, będąca przedmiotem naszych wyobrażeń, jest ograniczona. Lecz z tego nie wynika jeszcze, że przestrzenność jako całość jest rzeczywiście ograniczona. Byłoby to tak wtedy tylko, gdyby całość przestrzenności mogła zostać przedmiotem naszych spostrzeżeń i okazała się ograniczona. Gdy mamy jednak wyobrażenie przestrzenności, która jak gdyby jest ową całością, gdy mamy wyobrażenie przestrzenności, ciągnącej się wzdłuż do krańców widnokręgu, a wzwyż do sklepienia niebieskiego, wtedy wiemy jednak doskonale, że te granice przestrzenności w rzeczywistości nie istnieją, że są tylko złudzeniem optycznem. Tak więc kwestya przedmiotowej ograniczoności przestrzeni naszych wyobrażeń pozostaje otwarta. Jeżeli przeto przedmiot pojęcia przestrzeni geometrycznej uważamy za nieograniczony, to doświadczeniu nie przeczymy, lecz tylko decydujemy się na wybór jednej z dwóch możliwości. Wybór nasz jest usprawiedliwiony przedewszystkiem już dlatego, że może być podstawą geometryi, której twierdzenia w każdym razie będą ważne pod omawianym względem dla przestrzeni naszego doświadczenia. Albowiem, gdy nawet przypuścimy, że przestrzeń ta jest ograniczona, to, jeżeli pewne linie lub powierzchnie zachowują się w sposób, podany w twierdzeniu geometrycznem, na przestrzeni nieograniczonej, to wszak oznacza to, że się w ten sposób zachowują i na ograniczonej części tej przestrzeni. Tak n. p. 27-e twierdzenie I ks. Euklidesa, głoszące, że jeżeli prosta tworzy z dwiema innemi prostemi kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, to te dwie proste nie spotykają się, choćby były przedłużane nieograniczenie, pozostanie tem bardziej prawdziwe dla przestrzeni ograniczonej, gdzie przedłużanie to miałoby swe granice: jeżeli proste nie spotkają się przy nieograniczonem przedłużaniu, to napewno się nie spotkają na krótszej odległości. Oczywiście wniosek odwrotny — z własności figur w przestrzeni ograniczonej o własnościach ich w przestrzeni nieograniczonej — byłby tu błędny. Dlatego właśnie bez wahania zakładamy nieograniczoność przestrzeni geometrycznej, gdyż postulat ten, choć nie streszczający danych doświadczalnych, nigdy nie prowadzi do wyników, które mogłyby być z doświadczeniem sprzeczne.

W definicyi tedy przestrzeni geometrycznej, jako przestrzenności (rozciągłości) czystej i nieograniczonej, mamy ukryte dwa postulaty racyonalne: postulat czystości i nieograniczoności przestrzeni geometrycznej. Jeżeli teraz poddamy analizie przestrzenność, o której mówi nasza definicya, to zobaczymy, że charakteryzują ją zawsze dwie własności, trójwymiarowość i ciągłość, że więc te dwie własności są charakterystyczne również i dlá przestrzeni geometrycznej.

c) Trójwymiarowość przestrzeni geometrycznej.

Dotychczas bliżej nie określiliśmy do jakiego rodzaju wyobrażeń należyć ma wyobrażenie podkładowe pojęcia przestrzeni, wyobrażenie ograniczonej barwnej przestrzenności. Może ono być wytwórcze, odtwórcze, lub spostrzegawcze, a będąc spostrzegawczem, może posiadać przedmiot istniejący lub nieistniejący. Jeżeli jednak przestrzeń geometryczna ma utrzymać kontakt z rzeczywistością, z tą rzeczywistością, od której się już i tak oddaliła, przybierając cechę czystości, jeżeli nie ma stać się przedmiotem obcym całkowicie naszemu doświadczeniu, to kwestya, jakiem musi być nasze wyobrażenie podkładowe, rozstrzyga się sama przez się: wyobrażenie to musi być wyobrażeniem, którego przedmiot istnieje, musi być spostrzeżeniem w ścisłem tego słowa znaczeniu. Jeżeli takie wyobrażenie założymy u podstawy pojęcia przestrzeni geometrycznej, wtedy będziemy pewni, że wspólne cechy przedmiotu tego pojęcia i przedmiotu wyobrażenia podkładowego — a taką wspólną cechą jest przestrzenność przedmiotów obydwóch przedstawień — będą ugruntowane w rzeczywistości doświadczalnej, w świecie przedmiotów istniejących, a nie będą tylko dotyczyły świata wyobrażeń podmiotowych.

Szukane wyobrażenie nie może być ani odtwórczem, ani wytwórczem, gdyż takie wyobrażenie przestrzenności nie posiada przedmiotu rzeczywiście istniejącego. Treść tego wyobrażenia istnieje w świadomości, wyobraża ona pewien przedmiot, lecz przedmiot ten jest tylko wyobrażany, a nie istniejący *). Przypuśćmy, — za Poincaré'm **) — że człowiek, który poświęciłby temu całe swe życie, mógłby dojść do wytworzenia sobie wyobrażenia czwartego wymiaru i że na wyobrażeniu tem oparłby swe pojęcie przestrzeni geometrycznej. Takie pojęcie byłoby na wskroś podmiotowe, nieugruntowane w świecie przedmiotowym, a tylko w anormalnej wyobraźni owego człowieka, nie miałoby żadnego realnego znaczenia i nie mogłoby służyć za podstawę nauki, roszczą-

*) Co do odróżniania treści i przedmiotu przedstawień por. Twardowskiego: Zur Lehre vom Inhalt und Gegenstand der Vorstellungen. 1894, oraz Meinonga: Ueber die Erfahrungsgrundlagen unseres Wissens. 1906, str. 54—57.

**) Poincaré. Nauka i hipoteza (tł. polsk. 1908, str. 48).

cej sobie pretensye do stosowalności w świecie doświadczalnym. Gdybyśmy zaś chcieli oprzeć pojęcie przestrzeni geometrycznej na wyobrażeniu odtwórczem, to oparcie to mogłoby mieć znaczenie przedmiotowe tylko wtedy, gdybyśmy sięgnęli do źródła tego odtwórczego wyobrażenia, do wyobrażenia spostrzegawczego, przez nie odtwarzanego. Jeżeli więc pojęcie przestrzeni geometrycznej ma posiadać wartość przedmiotową, musi się ono opierać na wyobrażeniu spostrzegawczem, przytem takiem, którego przedmiot istnieje, a więc na spostrzeżeniu. Sam fakt, że wyobrażenie jest spostrzegawcze, że zawiera w sobie czucia bezpośrednie — nie wystarcza. Przypuśćmy n. p., że jako wyobrażenie podkładowe naszego pojęcia wybraliśmy jakąś powierzchnię, powiedzmy część sklepienia niebieskiego. Wyobrażając sobie o tem wyobrażeniu, że jest pozbawione jakości zmysłowych i ograniczoności — doszlibyśmy do pojęcia przestrzeni geometrycznej dwuwymiarowej, gdyż dwuwymiarowem jest sklepienie niebieskie w naszem wyobrażeniu. Czy takie pojęcie przestrzeni geometrycznej miałoby pod tym względem ważność przedmiotową? Nie; gdyż samo wyobrażenie spostrzegawcze powierzchni dwuwymiarowej ważności takiej nie posiada. Posiada ono wprawdzie, jak każde wyobrażenie, swój przedmiot, lecz przedmiot ten nie istnieje rzeczywiście, a jest tylko wyobrażany przez nas; w rzeczywistości powierzchnie, przedmioty dwuwymiarowe, samodzielnie nie istnieją; ich wyobrażeniom żaden istniejący przedmiot nie odpowiada. Wyobrażenia więc spostrzegawcze powierzchni nie są spostrzeżeniami, nie są doświadczeniami w ścisłem tego słowa znaczeniu, nie docierają do przedmiotów rzeczywiście istniejących, lecz pozostają w dziedzinie podmiotowej. Na takich więc wyobrażeniach opierać pojęcia przestrzeni geometrycznej również nie możemy. Wyobrażeniem podkładowem tego pojęcia musi być wyobrażenie spostrzegawcze, którego przedmiot jako przestrzenność istnieje niezaprzeczalnie, a nie jest tylko naszem wyobrażeniem, któremu błędnie przypisujemy istnienie. Jeżeli zanalizujemy takie wyobrażenie pod względem jego przestrzenności, przekonamy się zawsze, że przedmiot jego jest trójwymiarowy, t. j. że posiada długość, szerokość i wysokość (względnie głębokość), że w każdym jego punkcie można poprowadzić trzy prostopadłe linie, należące na pewnej przestrzeni do danego przedmiotu. Ta przestrzenność przedmiotowa, którą charakteryzuje trójwymiarowość, jest cechą wspólną przedmiotu naszego wyobrażenia podkładowego i przedmiotu pojęcia przestrzeni geometrycznej, opartego na tem wyobrażeniu. Zwykle jednak, gdy mówimy, że przestrzeń geometryczna ma trzy wymiary, nie rozumiemy tego w tak ścisłem znaczeniu, jak to tutaj zostało wyłożone, nie pojmujemy przez to, że wszelka rzeczywiście istniejąca przestrzenność ma trzy wymiary, a tylko że nie może ich posiadać więcej nad trzy, a więc że będąc nieograniczoną, t. j. przestrzenią geometryczną, posiada tę maksymalną liczbę wymiarów. Tak pojmowana trójwymiarowość przestrzeni geometrycznej zupełnie wystarcza do ugruntowania geometryi; sama bowiem geometrya stwarza utwory przestrzenne o mniejszej niż trzy liczbie wymiarów, i gdyby w świecie doświadczalnym istniały przedmioty dwu lub jednowymiarowe, to dla przedmiotowości czystej geometryi mogłoby to być tylko okolicznością pożądaną, usuwającą możliwe wątpliwości. Jeżeli mimo to podkreśliliśmy ten fakt, że cecha trójwymiarowości, którą przypisujemy przestrzeni geometrycznej, jest cechą wspólną wszystkich istniejących przestrzenności, to chcieliśmy przez to jeszcze silniej zaznaczyć, że trójwymiarowość przestrzeni geometrycznej nie jest rezultatem naszej konstrukcyi, lecz jest nam dana w doświadczeniu, jest przez to doświadczenie jednoznacznie wyznaczona.

Trzeba jednak porozumieć się, co rozumiemy tu przez „konstrukcyę". Oczywiście zupełnie nie idzie nam o kwestyę psychologiczną, czy trzeci wymiar ujmiemy bezpośrednio, czy też dzięki rozmaitym assocyacyom, czy ma racyę psychologiczny natywizm, czy genetyzm; nie idzie nam o to, czy w znaczeniu psychologicznem trójwymiarowość jest dana lub skonstruowana. Czy trójwymiarowość jest w tem znaczeniu dana, czy skonstruowana — dla filozofii geometryi jest to rzeczą obojętną. Dla niej jest ważne tylko to, czy pojęcie przestrzeni geometrycznej jest co do swej cechy trójwymiarowości ugruntowane w doświadczeniu, czy też przez nas tylko w ten sposób zbudowane; nie zaś to, w jaki sposób doszliśmy do wyobrażenia przestrzenności trójwymiarowej, czy jest ono nam bezpośrednio dane, czy też dane pośrednio. Pierwsza kwestya należy do teoryi poznania — i ona jedynie obchodzi filozofię geometryi; druga jest psychofizyologiczna i leży całkowicie poza jej obrębem. Do tego stopnia są to kwestye różne, że mogą być bez sprzeczności rozstrzygnięte wręcz przeciwnie. Można przypuścić — jak tego chce genetyzm — że trójwymiarowość przestrzenności jest konstrukcyą psychofizyologiczną, a mimo to twierdzić, że pojęcie przestrzeni geometrycznej nie jest co do swej cechy trójwymiarowości logicznie skonstruowane, lecz jest oparte pod tym względem na danych doświadczenia, choćby te przedmiotowe dane miały być rezultatem podmiotowej konstrukcyi. Nieodróżnianie tych tak zasadniczo odmiennych kwestyi, połączone zazwyczaj z przecenianiem przedmiotowej wartości wyobrażeń, t. j.

przypisywaniem im charakteru spostrzeżeń, prowadzi do tego, że trójwymiarowość przestrzeni geometrycznej, jej cechę jednoznacznie wyznaczoną przez doświadczenie, niektórzy filozofowie matematyki błędnie uważają za samorzutną do pewnego stopnia konstrukcyę myślową *).

Pozostaje jeszcze do rozstrzygnięcia kwestya pewności sądu, orzekającego trójwymiarowość przestrzeni geometrycznej. Wydaje się na pierwszy rzut oka, że rozstrzygnięcie to w ostatniej instancyi zależy od tego, czy zajmiemy stanowisko apriorystyczne, czy empiryczne, t. j. czy zgodzimy się na to, że trójwymiarowa przestrzenność wyobrażeń jest dziełem naszego ducha, jest włożona przez nas w wyobrażenie, jako synteza czuć je składających, czy też jest cechą już samych czuć. W pierwszym wypadku — wydaje się — moglibyśmy być pewni, że zawsze i wszędzie trójwymiarowość w doświadczeniu odnajdziemy; w drugim — sprawa nie wydaje się nam tak jasną. W rzeczywistości jednak rzecz przedstawia się inaczej: aprioryzm ani o jotę nie zwiększa naszej pewności. Czy trójwymiarowa przestrzenność jest cechą czuć, czy też jest dziełem naszej apriorycznej syntezy — w każdym razie o tej trójwymiarowości możemy przekonać się tylko doświadczalnie, możemy ją sobie uświadomić tylko a posteriori, gdy jest nam dana w doświadczeniu. Dalej co do tego, czy trójwymiarowość będzie zawsze cechą nieodłączną od przestrzenności, czy wszelka bezwzględnie przestrzenność będzie trójwymiarowa — i co do tego aprioryzm nie udziela nam większej pewności, niż empiryzm. Nie mamy bezwzględnej pewności, czy charakter naszej apriorycznej syntezy nie ulegnie zmianie, czy może jutro nasza aprioryczna synteza nie stwo-

*) Por. Poincaré. Nauka i hipoteza, str. 62, oraz Enriques. Probleme der Wissenschaft (tł. niem. 1910, str. 314, 333).

rzy przestrzenności czterowymiarowej. Pod żadnym więc względem aprioryzm nie powiększa naszej pewności; może on dać pewność bezwzględną tylko przy założeniu 1) ścisłości skonstatowania ilości wymiarów, 2) stałości naszej apriorycznej syntezy. Lecz przy podobnych założeniach pewność taką daje również empiryzm; nieistotna różnica w założeniach na tem tylko polega, że zamiast stałości apriorycznej syntezy przyjmujemy stałość własności czuć. Widzimy więc, że rozwiązanie kwestyi pewności sądu, orzekającego trójwymiarowość przestrzeni geometrycznej, zupełnie nie zależy od tego, czy jesteśmy apriorystami, czy empirykami, podobnie jak rozwiązanie kwestyi, dotyczącej tego, że trójwymiarowość ta jest nam dana w doświadczeniu, nie jest zależne od tego, czy jesteśmy natywistami, czy genetykami. Dla filozofii geometryi nie mają znaczenia nie tylko kwestye psychologiczno-fizyologiczne, lecz i psychologiczno-transcendentalne.

Jaką jednak odpowiedź damy na pytanie, dotyczące pewności twierdzenia o trójwymiarowości przestrzeni geometrycznej? Oczywiście, czy przedmioty naszych doświadczeń pozostaną zawsze, tak jak dotychczas, trójwymiarowe — tego z bezwzględną pewnością twierdzić nie możemy, natomiast jest pewną bezwzględnie ścisłość, z jaką stwierdzamy trójwymiarowość przedmiotów przestrzennych. Ścisłość ta — naogół obca danym doświadczalnym — w tym przypadku jest bezsprzeczna dlatego, że ilość wymiarów może być tylko liczbą całą, to zaś wyklucza możliwość małych błędów; błędy zaś, polegające n. p. na przypisywaniu przedmiotom dwuwymiarowości, polegają na nieodróżnianiu wyobrażeń od spostrzeżeń (doświadczeń) i znikają po porozumieniu się co do znaczenia wyrazu „przedmiot“. Ścisłość, z jaką stwierdzamy trójwymiarowość przedmiotów danych w doświadczeniu, sądy — to pewniki doświadczalne, przypisujące przedmiotowi naszego pojęcia niezaprzeczone cechy przedmiotu wyobrażenia podkładowego. Włączając te cechy do definicyi przestrzeni geometrycznej, otrzymamy następujące określenie tego pojęcia: przestrzeń geometryczna jest przestrzennością (rozciągłością) trójwymiarową, ciągłą, nieograniczoną i czystą*)

Chcemy tu jeszcze uprzedzić jeden możliwy zarzut. Trójwymiarowość i ciągłość przestrzenności stwierdzić oczywiście mogliśmy tylko na przestrzenności, danej w doświadczeniu, t. j. barwnej i ograniczonej, a jednak te cechy przypisaliśmy przestrzenności czystej i nieograniczonej. Mógłby kto zarzucić, że, postępując w ten sposób, oddalamy się od doświadczenia. Od doświadczenia jednak oddalamy się tylko w tem znaczeniu, że zajęci jesteśmy konstrukcyą pojęcia przestrzeni geometrycznej — co oczywiście nie jest zarzutem dla nikogo, kto chce oprzeć geometryę na ściślejszej podstawie, niż ta, jaką może jej dać przestrzeń fizyczna. Wogóle zaś nie tylko nie oddalamy się tu od doświadczenia, lecz przeciwnie, przypisując czystej nieograniczonej przestrzeni trójwymiarowość i ciągłość, zbliżamy tę idealną przestrzenność do rzeczywistości, do doświadczenia. Widzimy więc, że zarzut ten w zależności od tego, jak go pojmować będziemy, albo nas nie dotyczy wcale, albo jest zgoła niesłuszny. Rozpatrzenie tego możliwego zarzutu było dla nas ważne dlatego, że staramy się tu specyalnie odróżnić i ściśle oddzielić cechy doświadczalne od cech racyonalnych przestrzeni geometrycznej. Rozpatrzeniu wzajemnego stosunku tych cech poświęcamy następny rozdział.

---

*) Czystość obejmuje tu w sobie: bierność, jednorodność, względność (por. str. 3).

ROZDZIAŁ II.

Przestrzeń geometryczna a przestrzenność.

Przedmiot pojęcia przestrzeni geometrycznej posiada, jak widzieliśmy, cechy dwojakiego rodzaju: doświadczalne i racyonalne. Cechami doświadczalnemi, t. j. takiemi, które posiada on wspólnie z przedmiotem swego wyobrażenia podkładowego, danego w doświadczeniu, są: przestrzenność, trójwymiarowość, ciągłość—prościej: trójwymiarowa ciągła przestrzenność; cechami racyonalnemi, t. j. takiemi, których nie posiada dany w doświadczeniu przedmiot wyobrażenia podkładowego, a które mimo to przypisujemy przedmiotowi pojęcia przestrzeni geometrycznej — czystość i nieograniczoność. Przestrzenność charakteryzuje wszystkie nasze wyobrażenia (ściślej spostrzeżenia) świata zewnętrznego i dlatego też może się wydawać, że sama przestrzeń geometryczna jest wyobrażeniem, a nie pojęciem. Jeżeli jednak zwrócimy uwagę na to, że ta trójwymiarowa ciągła przestrzenność jest, jako przestrzeń geometryczna, czysta (i nieograniczona) i że taka czysta przestrzenność nie może być przez nas ujmowana bezpośrednio i konkretnie, to dojdziemy ostatecznie do jedynie możliwego logicznie wniosku, że przestrzeń geometryczna jest jednakże pojęciem, a nie wyobrażeniem, mimo to że przedmiot tego pojęcia jest przestrzenny. Wniosku pojęciem, gdyż jest jedyna. Istnieje wprawdzie ogólne pojęcie o przestrzeniach wogóle, lecz pojęcie to dotyczy poszczególnych części tej jedynej przestrzeni, dotyczy wielu cząstkowych przestrzeni, a nie przestrzeni jedynej, wszechobejmującej. Z tego jednak wynika nie to, że przestrzeń geometryczna — jak chce Kant — jest wyobrażeniem, a tylko to, że nie jest pojęciem ogólnem (o przestrzeniach wogóle). Może być jednak pojęciem nie ogólnem, lecz jednostkowem—i takiem, jak widzieliśmy, jest w istocie rzeczy. Dla Kanta jednak ta możliwość była wykluczona, gdyż wszystkie pojęcia uważał on za ogólne. Wyobrażenia i pojęcia przeciwstawiał on i pod tym również względem: wyobrażenia dotyczą poszczególnych przedmiotów, są jednostkowe — pojęcia poszczególnych przedmiotów dotyczyć nie mogą, muszą być zawsze ogólnemi, muszą zawierać w sobie cechy wspólne wielu przedmiotom; pojęć jednostkowych być nie może. A że przestrzeń geometryczna nie jest pojęciem ogólnem, więc—wnioskował Kant—nie jest wogóle pojęciem, lecz wyobrażeniem—i przez to wpadł w sprzeczność ze swem własnem słusznem twierdzeniem, że czystej przestrzeni wyobrazić sobie nie możemy, że jest więc ona pojęciem.

Podobny błąd znajdujemy i w drugim argumencie Kanta na korzyść wyobrażeniowej natury przestrzeni geometrycznej. Twierdzi tu Kant, że przestrzeń geometryczna dlatego tylko jest nieskończona, że jest wyobrażeniem; bo gdyby była pojęciem ogólnem, to byłaby co do wielkości nieokreślona, gdyż, jako pojęcie o przestrzeniach wogóle, musiałaby zawierać cechy wspólne przestrzeniom rozmaitych rozmiarów. I tutaj twierdzenie Kanta byłoby słuszne, gdyby nie to, że przestrzeń geometryczna może nie być—i w istocie rzeczy nie jest — ani pojęciem ogólnem, ani wyobrażeniem;

jest zaś pojęciem jednostkowem. Tę jednak możliwość Kant, jak widzieliśmy, z góry wykluczył, kierując się swem przeciwstawieniem wyobrażeń i pojęć.

Przeciwstawianie to występuje najsilniej i jest najgłębsze w trzecim argumencie Kanta, sztucznie tylko związanym z kwestyą nieskończoności przestrzeni geometrycznej. Istota tego argumentu jest następująca: przestrzeń geometryczna jest wyobrażeniem, a nie pojęciem dlatego, że swe poszczególne specyfikacye (części przestrzeni) zawiera w sobie, wszelkie zaś pojęcie obejmuje swe specyfikacye pod sobą. Innemi słowy: części przestrzeni wszystkie są jednoczesne, obokległe i w ten właśnie sposób zawarte we wszechobejmującej przestrzeni, gdy tymczasem wyobrażenia, z których pewna cecha jest oderwana, jako pojęcie, są w zupełnie innym stosunku do tego pojęcia, niż części przestrzeni do całej przestrzeni. A więc, wnioskuje Kant, przestrzeń nie może być pojęciem, a tylko wyobrażeniem.

Argument ten jest tylko pozornie podobny do poprzednich, w rzeczywistości zaś uwydatnia się w nim o wiele głębsze przeciwstawienie wyobrażeń i pojęć, niż w tamtych. Poprzednie argumenty traciły natychmiast swą siłę, gdy tylko zwróciliśmy uwagę na możliwość pojęć jednostkowych; ten zaś daje się z nieznaczną odmianą zastosować i do tych pojęć, głosi bowiem, „że żadne jednak pojęcie, jako takie, nie może być pomyślane w ten sposób, jakoby zawierało w sobie nieskończoną mnogość przedstawień“, a całkowity nacisk leży tu na słowach „w sobie“. Idzie tu o to, że wszelkiemu pojęciu, jako takiemu, obce jest wszystko, co jest przestrzenne, obokległe, co więc części swe *w sobie* zawiera, że żadne pojęcie nie może być w ten sposób pomyślane. Taki jest pogląd Kanta na istotę pojęć, i pogląd ten przeprowadza on konsekwentnie, zawsze uważając pojęcie za całkowicie oddzielone od wszelkiego wyobrażeniowego pierwiastku, za „czystą myśl", która może się odnosić do wyobrażeń, lecz sama w sobie, t. j. poza tym stosunkiem, niema z niemi nic wspólnego. Ta myśl leży u podstawy ostatniego argumentu, ta właśnie myśl o dualizmie pojęć i wyobrażeń nie pozwala przedewszystkiem Kantowi uznać przestrzeni geometrycznej za pojęcie: jakim sposobem pojęciem mogłoby być to, co części swe zawiera w sobie, co jest więc obokległością, przestrzennością, charakteryzującą wszak wszystkie wyobrażenia świata zewnętrznego; jakim sposobem mogłoby być pojęciem coś, co już z natury swej jest intuicyjne, oglądowe? *). A jednak przestrzeń geometryczna jest pojęciem, a nie wyobrażeniem, gdyż czystej przestrzenności nie możemy ująć bezpośrednio, i Kant, uważając przestrzeń za wyobrażenie, przeczy, jak widzieliśmy, samemu sobie. Wprowadza go w błąd to, że uważa pojęcia i wyobrażenia za zupełnie różnorodne pod każdym względem, że nie zdaje sobie sprawy, że przedmiot przestrzenny może być przedmiotem zarówno wyobrażeń jak i pojęć, i że to nie oznacza, żeby samo wyobrażenie lub samo pojęcie, jako akt psychiczny, było przestrzenne. Przy odróżnieniu przedmiotu pojęcia od jego treści i aktu—wszelka paradoksalność znika i ten tylko może twierdzić, że przestrzenność nie może być pojęciem (przedmiotem pojęcia), kto uwa-

*) Oglądowość (naoczność, intuicyjność) jest dla nas jednoznaczna z obokległością, rozciągłością, przestrzennością; uważamy ją nie za cechę wszystkich wyobrażeń i tylko wyobrażeń, za cechę, jednoznaczną z ich konkretnością, lecz za cechę 1) przedmiotów wyobrażeń, dotyczących świata zewnętrznego, 2) przedmiotów niektórych pojęć, dotyczących tego świata. (Por. zdanie przeciwne u Twardowskiego: Wyobrażenia i pojęcia, str. 43, 44).

ża pojęcie za coś zupełnie pozbawionego wszelkiego wyobrażeniowego pierwiastku, za „czystą myśl“, za „czyste pojęcie“, za coś, co samo w sobie nie ma nic wspólnego z rzeczywistością i doświadczeniem. Ten błędny i szkodliwy pogląd, rozpowszechniony bardzo w naszych czasach wśród matematyków, znajduje coraz więcej zwolenników. Zatrzymaliśmy się dłużej nad analizą wywodów Kanta dlatego właśnie, że chcieliśmy wykazać, do jakich sprzeczności pogląd ten go doprowadził, jak go zmusił do twierdzenia, że wyobrażeniem jest coś, co się nie daje jednak ująć bezpośrednio, co więc nie jest wyobrażeniem. Widzimy, jak błędny musi być ten pogląd, jeżeli do takich twierdzeń doprowadza.

Mimo wszystko wielką jest zasługą Kanta, że uwydatnił te cechy przestrzeni geometrycznej, jakie ona posiada wspólnie ze spostrzeżeniami, dotyczącemi świata zewnętrznego — jej przestrzenność, a z nią trójwymiarowość i ciągłość. Uznał on również i racyonalną cechę przestrzeni geometrycznej — czystość, tylko jej przy zakwalifikowaniu przestrzeni, jako przedstawienia, nie uwzględnił dostatecznie, a wysunąwszy na pierwszy plan przestrzenność (oglądowość) przestrzeni zakwalifikował i czystą przestrzenność (czystą oglądowość) jako czyste wyobrażenie (czysty ogląd), a nie jako pojęcie.

W odwrotny znów błąd wpadają ci, u których wysuwają się na pierwszy plan racyonalne cechy przestrzeni geometrycznej, przedewszystkiem jej czystość. Zdarza się wtedy, że, dążąc do tej czystości, usuwają z konkretnej przestrzenności wraz z jakościami zmysłowemi i samą przestrzenność, i czysta przestrzeń staje się wtedy pojęciem, którego przedmiot pozbawiony jest wszelkiego przestrzennego pierwiastku, staje się czystem pojęciem, nie posiadającem żadnego kontaktu z rzeczywistością.

Błąd taki spotykamy n. p. u Wundta.

Według Wundta przestrzeń geometryczna*) powstaje wtedy, gdy z konkretnego wyobrażenia przestrzeni wyeliminujemy przedewszystkiem wszelkie empiryczne składniki, wszelką daną treść przestrzenną, wszelki czynnik przedmiotowy, a pozostawimy tylko podmiotową formę apercepcyi **). Przytem eliminując czynnik przedmiotowy, Wundt nie chce nadać rozciągłości (przestrzenności) wyjątkowego stanowiska i eliminuje ją wraz z jakościami zmysłowemi. Uważa on, że nierozciągłość punktu objaśnia się w takim razie łatwo, „gdyż rozciągłość właściwa jest zawsze tylko przedmiotowym środkom określania miejsc w przestrzeni“ ***), gdy je więc z naszego wyobrażenia punktu wyeliminujemy, to otrzymamy nierozciągły punkt geometryczny. Jednakże ta niechęć do rozerwania konkretnego związku rozciągłości z jakościami zmysłowemi, nieszkodliwa, gdy chodzi o punkt geometryczny, jest bardzo szkodliwa, gdy chodzi o linie, powierzchnie i ca-

---

*) Przestrzeń geometryczną nazywa Wundt, za przykładem Kanta, bardzo niefortunnie „reine Anschauung“, uznając jednocześnie, że jest ona pojęciem, a nie wyobrażeniem. Jeżeli przez „reine Anschauung“ rozumieć będziemy „czyste wyobrażenie“, to wpadniemy w sprzeczność, gdyż będzie to w takim razie takie wyobrażenie, które—według Wundta—nie jest wyobrażeniem, lecz pojęciem. (Wundt. Logik, t. II, 1907, str. 141). Tę „reine Anschauung“ Wundt identyfikuje z próżną przestrzenią, (Logik, t. I, 1906, str. 491), rozumie więc może przez pierwszy termin czystą oglądowość, czystą przestrzenność, czystą rozciągłość. W takim razie byłaby to taka przestrzenność, której Wundt odmawia wszelkiego przestrzennego pierwiastku, podobnie jak w pierwszym wypadku przestrzeń geometryczna byłaby takiem wyobrażeniem, które nie jest wcale wyobrażeniem.

**) Wundt. Logik, t. II, 1907, str. 141.

***) Wundt. Logik, t. II, str. 140.

łość przestrzeni, gdyż prowadzi do tego, że wszelkie utwory geometryczne i sama przestrzeń geometryczna stają się przy eliminacyi jakości zmysłowych nieprzestrzennymi; pozostaje wtedy tylko oderwana czynność myśli i przestrzeń geometryczna staje się czystem pojęciem. Lecz takie czyste pojęcie zupełnie nie jest w stanie stanowić podstawy sądów geometryi. Jeżeli, jak chce Wundt, zadanie geometryi polega na badaniu możliwych utworów przestrzeni geometrycznej *), to skąd możliwość tych idealnie ścisłych utworów da się wydedukować, skąd ich własności będziemy mogli poznać, gdy przestrzeń geometryczna będzie czystem pojęciem bez wszelkiego przedmiotu, czczem „ens rationis“. Chyba te własności dowolnie założymy, nie roszcząc sobie pretensyi do ich przedmiotowości, chyba to pojęcie przestrzeni geometrycznej określimy właśnie przez dowolnie przyjęte własności jej punktów, prostych i płaszczyzn, pojętych jako nieokreślone utwory logiczne. Lecz Wundt takiego konwencyonalizmu, i słusznie, nie uznaje. Może więc konkretna treść przestrzenna, zastępująca, według Wundta, w naszej świadomości ową bezpłodną próżną przestrzeń geometryczną, będzie źródłem, skąd płyną pojęcia i sądy geometryczne; lecz wtedy nie byłyby one ścisłe, gdyż polegałyby na indukcyach z doświadczenia, gdy tymczasem Wundt przypisuje pojęciom i sądom geometrycznym ścisłość, uważa je bowiem nie za indukcye z doświadczenia, lecz za indukcye z abstrakcyi, otrzymanych z doświadczenia. Lecz jeżeli idzie o przestrzeń geometryczną, to widzieliśmy, że jako abstrakcya z doświadczenia przedstawia ona u Wundta czyste i w czystości swej bezpłodne pojęcie, nie mogące być podstawą żadnych pojęć i sądów

*) Wundt. Logik, t. II, str. 102.

geometrycznych; jeżeli zaś o poszczególne utwory geometryczne, to przez wyeliminowanie z nich przedmiotowych czynników staną się one tylko nieprzestrzenne, lecz nie staną się ścisłe. Ścisłość może zapewnić im tylko idealizacya, przyczem, jeżeli idealizacya ta ma mieć własność przedmiotową, trzeba, jak to bliżej wyjaśnimy w drugiej części naszej pracy, by zachowywała ona przestrzenny pierwiastek utworów geometrycznych, by przestrzeń geometryczna posiadała naturę przestrzenną, czego właśnie nie posiada w systemie Wundta. Widzimy, że Wundt, dążąc do czystości przestrzeni geometrycznej, racyonalizacyę jej posunął zbyt daleko i, usunąwszy jej przestrzenność, uczynił ją czystem pojęciem zupełnie nieprzydatnem do ugruntowania geometryi. Czysta przestrzeń, która u Kanta była czystem wyobrażeniem, jest u Wundta, nosząc tę samą co u Kanta nazwę — czystem pojęciem. Kant nie uwzględnił dostatecznie w przestrzeni geometrycznej cech racyonalnych, Wundt przy określaniu istoty tej przestrzeni nie uwzględnił jej cech doświadczalnych*). W naszem pojmowaniu istoty przestrzeni geometrycznej staraliśmy się uwzględnić równomiernie zarówno jej cechy doświadczalne, jak i racyonalne, i dlatego przestrzeń geometryczna nie jest u nas ani czystem wyobrażeniem, ani czystem pojęciem, a tylko pojęciem, którego przedmiot jest czy-

---

*) Wprawdzie Wundt twierdzi, że czas i przestrzeń są to fakty pierwotnie dane, stanowiące stałe składniki doświadczalne (Logik, t. I, str. 502), lecz przestrzeń może tu oznaczać oczywiście tylko konkretną, fizyczną przestrzeń, a nie geometryczną, gdyż przestrzeń geometryczna, jak widzieliśmy, jest u Wundta pozbawioną wszelkiej przestrzenności abstrakcyą z doświadczenia, a nie jego składnikiem. Między tymi dwoma rodzajami przestrzeni istnieje u Wundta zupełna przepaść.

stą przestrzennością, jest przedewszystkiem przestrzenny, a więc posiada wspólne cechy z wyobrażeniami, dotyczącemi świata zewnętrznego. Tak pojęta przestrzeń geometryczna stanowi podstawę, na której daje się ugruntować geometrya zarówno ścisła, jak i przedmiotowa. Lecz zanim do tego ugruntowania geometryi przejdziemy, musimy przedewszystkiem bliżej rozpatrzyć pogląd, naszemu przeciwny, a zdobywający sobie w ostatnich czasach coraz więcej zwolenników, pogląd, według którego opieranie się na cechach doświadczalno-przestrzennych przynosi ścisłości i pewności geometryi szkodę, dającą się usunąć tylko przez całkowicie racyonalne jej ugruntowanie.

ROZDZIAŁ III.

Ustrój wewnętrzny przestrzeni geometrycznej.

Mówi się zwykle, że przestrzeń geometryczna składa się z nierozciągłych punktów. Jak to pojmować? Jeżeli to rozumieć będziemy w ten sposób, że punkty geometryczne, zera rozciągłości, tworzą same przez się ciągłą i rzeczywiście rozciągłą przestrzeń, to otrzymamy koncepcyę tak dla myśli naszej odpychającą i sprzeczną z sobą, że do przyjęcia wprost niemożliwą. Jakim sposobem nierozciągłe punkty geometryczne mogłyby same przez się tworzyć rozciągłość, przestrzenność, jakim sposobem agregat zer może dać coś innego niż zero, jakim sposobem te nierozciągłe punkty mogą graniczyć z sobą, jakim sposobem można tu mówić o tworzeniu przez punkty te przestrzeni, gdy potrzebne do tego grupowanie się punktów wymaga już uprzedniej przestrzeni, możliwe jest tylko w danej przestrzeni geometrycznej.

Ta pełna sprzeczności koncepcya nabierze jednak innego znaczenia, jeżeli kto zrezygnuje z nadawania słowu „rozciągłość“ lub „przestrzenność“ zmysłowo - wyobrażeniowego znaczenia, przez punkty zaś geometryczne nie będzie pojmował nic innego niż liczby. Tak czynią zwolennicy czysto racyonalnego ugruntowania geometryi, czysto racyonalnego pojmowania przestrzeni geometrycznej. Continuum geometryczne zastępują oni continuum liczb rzeczywistych, wymiernych i niewymiernych*). Wtedy oczywiście nie może już być u nich mowy o rzeczywistej rozciągłości (przestrzenności), i jeżeli wyraz ten spotykamy u nich, to wtedy jest on, i zawsze być powinien, identyczny z ciągłością: rozciągły = ciągły**) = określony przez ogół liczb rzeczywistych. Odpadają też wtedy sprzeczności, o których wspominaliśmy przed chwilą, gdyż niema tu, w dziedzinie liczb, ani prawdziwej obokległości, ani rzeczywistej rozciągłości, niema przestrzennego z sobą graniczenia. Jak nieprzestrzenna jest liczba, podobnie nieprzestrzenne są owe utwory pseudogeometryczne, które przez te punkty-liczby są określone, podobnie nieprzestrzenna sama „przestrzeń" geometryczna. Niema więc tu sprzeczności, które występowały przy rozpatrywaniu rzeczywistej, przestrzennej (trójwymiarowej i ciągłej) przestrzeni geometrycznej, lecz niema tu także i tej przestrzeni. To, co ją zastąpiło, to rozmaitość liczbowa, której każdy element jest zespołem trzech liczb rzeczywistych, w określonym wziętych porządku***). Można nazwać rozmaitość tę „rozciągłą", lecz nie będzie to nasza rozciągłość doświadczalna, ta obokległość i oglądowość, a będzie to tylko równoznaczne z przypisaniem jej ciągłości; można nazwać ją „ciągłą", lecz nie będzie to

*) Por. Couturat: Les principes des mathématiques, 1905, rozdział IV, specyalnie str. 97, oraz Natorp: Die logischen Grundlagen der exakten Wissenchaften, 1910, str. 200—266.

**) Natorp. loc. cit., str. 204.

***) Por. Weber und Wellstein: Encyklopädie der Elementar-Mathematik, t. II, 1907, str. 83, 84.

oznaczało braku przerw w przestrzenności, a tylko to, że składa się ona z ogółu liczb wymiernych i niewymiernych; możemy ją nazwać „trójwymiarową“, lecz nie będzie to wyrazem tego, że w każdym jej punkcie można poprowadzić trzy wzajemnie prostopadłe proste, a będzie tylko znaczyło, że każdy jej „punkt“ to system trzech liczb i nic nad to. Utwory tej rozmaitości liczbowej nie mają też, oczywiście, charakteru przestrzennego; utwór, określony przez formułę $Ax + By + C = o$, nie oznacza tu przestrzennej linii prostej, lecz tylko ogół dwójek liczbowych, czyniących zadość powyższemu równaniu. Nie jesteśmy więc w dziedzinie descartesowskiej geometryi analitycznej, lecz w dziedzine czysto pojęciowej, w dziedzinie czystej analizy. Określenia, które tu spotykamy, muszą być całkowicie dowolne i konwencyonalne, gdyż nie mogą się na niczem oprzeć, i zupełnie nie wiemy, czy przetłomaczone na język przestrzenny będą oznaczały utwory, mogące istnieć w naszej przestrzeni geometrycznej. Dedukcye z tych określeń mogą być wzorem ścisłości, mimo to system tej pseudogeometryi będzie pozbawiony wszelkiego przedmiotowego znaczenia, gdyż zasadnicze jego definicye są konwencyonalne*). Jeżeli zaś chcemy wrócić do geometryi, jeżeli chcemy tym utworom czysto pojęciowym nadać przestrzenne a wraz z tem i przedmiotowe znaczenie, to znowu zachodzi pytanie: jak jednak mamy przedstawiać sobie ustrój

*) Są konwencyonalne wtedy, gdy utrzymany jest do końca charakter liczbowo-nieprzestrzenny utworów; przełamać ten konwencyonalizm może tu tylko niedozwolone w czysto logicznym systemie przejście do dziedziny wyobrażeniowej. Zachodzi to n. p. u Natorpa przez wprowadzenie pojęcia kierunku i wymiarów, mimo wszystkie zapewnienia Natorpa, w znaczeniu wyraźnie wyobrażeniowem. (Natorp, loc. cit., str. 300—309).

przestrzeni geometrycznej i co mamy rozumieć przez punkt geometryczny, jeżeli chcemy z jednej strony uniknąć sprzeczności, o których wspominaliśmy na początku niniejszego rozdziału, a z drugiej — pozostać w dziedzinie rzeczywiście przestrzennej i geometrycznej?

Jeżeli dla uniknięcia wspomnianych sprzeczności chcielibyśmy za element przestrzeni geometrycznej przyjąć zamiast nierozciągłego punktu wielkość rozciągłą, a skończoną, n. p. dowolnie mały odcinek prostej (gdy chodzi o samą przestrzeń geometryczną, lepiej: sześcian z tego odcinka), to element taki byłby zupełnie nieprzydatny dla ugruntowania geometryi już z tej przyczyny, że zapomocą niego nie możnaby ściśle przedstawić żadnej linii krzywej. Odcinek ten mógłby być dowolnie mały, mimo to linia nie byłaby krzywa, lecz łamana; jeżelibyśmy n. p. chcieli pojmować koło jako składające się z takich dowolnie małych odcinków, to zawsze byłoby to jednak nie koło, a wielobok o bardzo małych i bardzo wielu bokach, i zasadnicza własność koła, równoległość jego elementów od środka, w wieloboku tym nie miałaby miejsca — nie byłoby to więc idealne geometryczne koło. Jeżeli więc chcemy, by element nasz mógł służyć do ugruntowania geometryi, jeżeli chcemy, by za jego pomocą można było ściśle przedstawiać krzywe linie i krzywe powierzchnie, to nie możemy uważać go za wielkość skończoną, lecz musimy przyznać mu wielkość nieskończenie małą, przytem nieskończenie małą aktualną, więc wielkość stałą, a nie zmienną. Wielkość nieskończenie mała w znaczeniu zwykłem, jako wielkość zmienna, czyli właściwie wielkość nieograniczenie mała, zupełnie się tu nie nadaje; nie jest ona bowiem czemś istniejącem w właściwem tego słowa znaczeniu, lecz czemś, co się staje tylko, i dlatego nie może zupełnie służyć jako element krzywych, istniejących aktualnie w przestrzeni geometrycznej.

Do wielkości zaś nieskończenie małej aktualnej dochodzimy w sposób następujący. Jeżeli odcinek prostej wielkości $=1$ będziemy dzielili na coraz większą liczbę równych części i przedstawimy sobie, żeśmy podział ten wykonali nieskończoną ilość razy, to odcinki, które otrzymamy jako rezultat tego podziału, będziemy musieli uważać za wielkości rozciągłe, lecz o rozciągłości nie skończonej, a nieskończenie małej. Te wielkości nieskończenie małe aktualne nie są zmiennemi, jak zwykle nieskończenie małe, lecz stałemi; są granicami, a nie dążącemi do granic. Jeżeli granice naszego odcinka, równego jednostce, oznaczymy przez liczby 0 i 1, wtedy po podzieleniu go na dwie równe części otrzymamy na granicy tych części liczbę $\frac{1}{2}$, po podziale na cztery części na granicach tych części — liczby: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ i t. d., i t. d. Jeżeli podział ten przeprowadzać będziemy choćby największą, lecz skończoną liczbę razy, to zawsze, jak wiadomo będziemy otrzymywali, jako granice odcinków, tylko liczby wymierne. Jeżeli jednak pomyślimy sobie, że podział ten jest doprowadzony do końca, t. j. że wykonany został nieskończoną liczbę razy, wtedy, jako granice tych ostatecznych odcinków, otrzymamy wszystkie liczby rzeczywiste, zarówno wymierne jak i niewymierne*). Te jednak ostateczne odcinki to właśnie nieskończenie małe aktualne; a więc jeżeli nasz odcinek prostej pomyślimy sobie, jako składający się z wielkości nieskończenie małych aktualnych, to granice tych nieskończenie

*) Albowiem formuła $N = \lim_{n=\infty}\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots \frac{\alpha_n}{2^n}\right)$, gdzie α jest 0 lub 1, przedstawia, jak wiadomo, ogół liczb wymiernych i niewymiernych między 0 i 1.

małych będą mogły być oznaczone przez ogół liczb rzeczywistych, wymiernych i niewymiernych, zawartych między zerem a jednostką. Taką nieskończenie małą aktualną wielkość przyjęliśmy prowizorycznie za element przestrzeni geometrycznej i utworów goometrycznych. Będzie jednak naogół wygodniej dla nas, gdy za element taki przyjmiemy nie samą nieskończenie małą, lecz jej granice — nierozciągłe punkty, z tem jednak zastrzeżeniem, że gdy mówić będziemy: przestrzeń geometryczna składa się z nierozciągłych punktów, zawsze będziemy sobie jasno uświadamiali, że punkty te nie istnieją same przez się, a są tylko granicami nieskończenie małych odcinków, że nie tworzą przestrzeni geometrycznej same przez się, a tylko dzięki temu, że są połączone z sobą temi nieskończenie małemi prostemi. Rozumiemy, że w istocie rzeczy wychodzi to zupełnie na jedno i to samo, czy przyjmiemy za element nieskończenie małą, czy jej granice z powyższem jednak zastrzeżeniem: i w jednym i drugim wypadku przestrzeń geometryczną składają w istocie rzeczy wielkości nieskończenie małe rozciągłe (przestrzenne), tylko że w drugim wypadku wyrażamy to w inny sposób. Sposób ten jest dla nas wygodniejszy już dlatego, że geometrya przywykła do operowania nierozciągłymi punktami, i bez koniecznej potrzeby niema racyi odzwyczajać jej od tego, o ile tylko uświadamiamy sobie właściwe znaczenie tych nierozciągłych punktów. Poza tem przyjęcie za element utworów geometrycznych nierozciągłego punktu w znaczeniu tu wyłożonem jest jeszcze z tego względu bardzo dogodne, że pozwala na przedstawienie geometryczne różniczki. Jeżeli, mianowicie, mamy jakie x i przechodzimy do $x+dx$, to geometrycznie nie może to znaczyć nic innego, jak to, że od punktu naszego prostolinijnego odcinka, odpowiadającego x, przechodzimy do następnego punktu tego odcinka. W ten więc sposób, odległość dwóch najbliższych punktów prostej, nieskończenie mała aktualna, odpowiada geometrycznie różniczce zmiennej niezależnej. Odpowiedniość ta oczywiście zatraciłaby się, gdybyśmy nieskończenie małą przyjęli za element, odpowiadający analitycznemu punktowi. Z tych już względów wygodniej dla nas za elementy przestrzeni geometrycznej przyjąć nierozciągłe punkty, połączone z sobą nieskończenie małemi prostemi. To omówienie układu wzajemnego punktów jest zasadnicze, gdyż bez niego wpadlibyśmy znowu w tę pełną sprzeczności koncepcyę nieprzestrzennych punktów, tworzących same przez się przestrzenną przestrzeń geometryczną.

Zanim posuniemy się dalej, musimy tu jeszcze rozpatrzyć ważną kwestyę metodologiczną, w obliczu której znaleźliśmy się teraz. Na jakiej zasadzie przypisaliśmy przestrzeni powyższy ustrój, na jakiej zasadzie mówimy o nieprzestrzennych punktach i wielkościach nieskończenie małych, podskończonych, gdy w doświadczeniu zawsze przestrzenność składa się z wielkości po pierwsze przestrzennych, po drugie — skończonych? Co nas doprowadziło do takiej koncepcyi przestrzeni geometrycznej; w jaki sposób wybiegliśmy tu poza obręb doświadczenia; czy może ono zaprzeczyć wyłożonym tu poglądom? Oto pytania, na które musimy odpowiedzieć, jeżeli chcemy zdawać sobie sprawę z każdego kroku, który czynimy przy ugruntowywaniu geometryi.

W doświadczeniu oczywiście nie mamy ani nieprzestrzennych punktów, ani nieskończenie małych, lecz wszak zajmowaliśmy się tutaj konstytucyą nie przestrzeni fizycznej, lecz geometrycznej. Bezpośredniej więc i wyłącznej roli doświadczenie grać tu nie mogło, grało jednak rolę pośrednią;

poza doświadczeniem zaś tem kierowaliśmy się, by elementy przestrzeni geometrycznej mogły być również elementami utworów geometrycznych, utworów zarówno syntetycznej, jak i analitycznej geometryi. Z tego drugiego względu wynika, jak widzieliśmy, niemożliwość przyjęcia elementów skończonych i konieczność założenia nieskończenie małych, przytem aktualnych. Widzieliśmy dalej, że zamiast przyjęcia za elementy tych nieskończenie małych możemy, jako zupełnie równoważne i tylko w wysłowieniu się odmienne, przyjąć za elementy ich granice, nierozciągłe punkty, ze znanem nam omówieniem. Jeżeli teraz przestrzeń geometryczną przedstawimy sobie, jako składającą się z nieskończenie małych aktualnych sześcianów, jeżeli w pewnym punkcie tej przestrzeni poprowadzimy trzy wzajemnie prostopadłe proste, to wszystkie wierzchołki tych sześcianów — elementy przestrzeni—będą mogły być oznaczone przez trzy liczby, wyrażające w przyjętej jednostce odległość każdego z nich od trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, przechodzących przez nasze osie współrzędnych. Liczby te będą przedstawiały rozmaitość wszystkich liczb rzeczywistych, wymiernych i niewymiernych, i w ten sposób uzyskana będzie ścisła odpowiedniość między continuum analityczno-liczbowem a geometryczno-przestrzennem. Gdybyśmy chcieli dzielić jeszcze owe nieskończenie małe odcinki między punktami, gdybyśmy chcieli otrzymać nieskończenie małe rzędu drugiego, to dla oznaczenia ich granic nie znaleźlibyśmy już liczb: ogół liczb rzeczywistych już wyczerpaliśmy uprzednio. Pozostajemy więc przy nieskończenie małych aktualnych rzędu pierwszego, jako elementach przestrzeni geometrycznej.

Jaka jednak jest w tem wszystkiem rola doświadczenia? Zaznaczyliśmy już, że jest ona pośrednia, choć przez to niemniej ważna: ustrój przestrzeni geometrycznej musi być zgodny z naturą przestrzeni geometrycznej, a przedewszystkiem z jej cechami doświadczalnemi, musi odpowiadać nie tylko jej czystości i nieograniczoności, lecz i jej przestrzenności, ciągłości, trójwymiarowości; innemi słowy: ustrój wewnętrzny przestrzeni geometrycznej musi odpowiadać jej ustrojowi zewnętrznemu. I rzeczywiście odpowiada. Mówimy wprawdzie, że przestrzeń nasza składa się z nierozciągłych punktów, lecz punkty te nie istnieją same przez się, a są tylko granicami nieskończenie małych, lecz przestrzennych odcinków, tworzących właściwie przestrzeń geometryczną: jest więc ona przestrzenna. Również jest ciągła, gdyż przerw między punktami w rzeczywistości niema, są one bowiem połączone owymi nieskończenie małymi odcinkami. Biorąc zaś sześciany z tych odcinków, składamy z nich przestrzeń trójwymiarową. Widzimy więc, że ustrój wewnętrzny przestrzeni geometrycznej najzupełniej odpowiada jej cechom doświadczalnym, doświadczenie zaś, oczywiście, nigdy nie będzie mogło wykazać, że nie jest on taki, jakim go sobie przedstawiamy, gdyż dziedzina nieskończenie małych leży całkowicie poza jego obrębem. Co do tej dziedziny, nie może ono dać nam żadnych wskazówek; lecz wskazówki te zaczerpnęliśmy z innego źródła, ze źródła czystych, idealnych utworów geometrycznych.

W ten sposób, opierając się na pojmowaniu nieskończenie małych, jako wielkości aktualnych, można wyrobić sobie pogląd na ustrój wewnętrzny przestrzeni geometrycznej, najzupełniej przydatny do ścisłego uzasadnienia geometryi z jednej strony, z drugiej zaś — nie lekceważący przestrzennej natury przestrzeni geometrycznej i nie doprowadzający do pojmowania rozciągłej przestrzeni, jako złożonej jedynie z nierozciągłych punktów, do pojmowania, sprzeczność w sobie zawierającego.

Widzimy, że wymagania czysto racyonalnego pojmowania przestrzeni geometrycznej w imię ścisłości, mającej stąd płynąć, są bezzasadne, widzimy, że można stworzyć ścisłą podwalinę dla geometryi, nie wyeliminowując z przestrzeni geometrycznej pierwiastku rozciągłościowego, który jedynie może zapewnić jej ważność przedmiotową i wyprowadzić ze świata dowolnych założeń. Co więcej, niżej zobaczymy, że tylko uwzględnianie tego pierwiastku może rzucić prawdziwe światło na tak ważną dla uzasadnienia geometryi kwestyę istnienia „krzywych" bez stycznych, linii, które stanowić mają jeden z najbardziej ważkich argumentów przeciw uznawaniu w geometryi elementów przestrzennościowych (intuicyjnych).

Argument ten przeciwko intuicyi w geometryi wydaje się tak przekonywającym, że wytacza go nawet taki pisarz, jak Poincaré, który jednak nawet arytmetykę chce oprzeć na intuicyi liczby całej i jest naogół wyraźnym, choć niekonsekwentnym przeciwnikiem wyłącznego panowania logiki w matematyce. „Trzeba już być bardzo uczonym — mówi Poincaré—żeby nie uważać za oczywiste, że każda krzywa posiada styczną: istotnie, skoro wyobrazimy sobie tę krzywą oraz prostą, jako dwie wązkie wstęgi, zawsze będziemy ją mogli ułożyć tak, by miały, nie przecinając się, część wspólną. Każmy następnie szerokości każdej z tych wstęg nieograniczenie się zmniejszać, a owa wspólna część będzie nadal istniała, i w granicy obie linie będą posiadały nie przecinając się punkt wspólny—to znaczy będą się stykały. Geometra, któryby w ten sposób rozumował świadomie lub nieświadomie, nie robiłby nic innego, jak to, cośmy uczynili wyżej, aby dowieść, że dwie przecinające się linie posiadają punkt wspólny, a intuicya jego miałaby to samo uprawnienie, co w tamtym wypadku. A przecież wprowadziłaby go ona w błąd. Można dowieść, że istnieją krzywe, nie posiadające stycznej, o ile krzywe te są określone jako continua analityczne drugiego rzędu“ *) (t. j. jako zbiór elementów, utworzony według tego samego prawa, co drabina liczb rzeczywistych). Twierdzi dalej Poincaré, że sprzeczność ta dałaby się usunąć przez stworzenie continuum wyższego rzędu, lecz wobec tego, że zdarza się tylko w wypadkach wyjątkowych, matematycy nie dbają o jej usunięcie. „Zamiast postarać się o pogodzenie intuicyi z analizą woleli poświęcić jedną z nich, a że analiza musi być bez zarzutu, odmówili poprostu słuszności intuicyi“.

Już na pierwszy rzut oka uderza nas tu szereg sprzeczności. Intuicya ma wprowadzać nas w błąd przy przejściu do granicy, przy zamianie krzywej i stycznej wyobrażeniowej na krzywą i styczną idealną. Błąd ten ma mieć źródło w tem, że to, co jest słuszne dla pierwszych utworów, uważamy za słuszne i dla drugich. Bliższego zbadania tego rzekomego błędu Poincaré nie daje, bezpośrednich argumentów na korzyść swego twierdzenia nie przytacza, choć zupełnie nie rozumiemy, jakim sposobem błąd ten mógłby mieć wskazane przez Poincarégo źródło: możemy na podkładzie krzywej wyobrażeniowej przedstawić sobie krzywą idealną, przyczem nie mamy żadnych danych do przypuszczenia, że przedmiot naszego pojęcia (krzywej idealnej) mógłby się pod względem stosunków ciągłości, decydujących w kwestyi stycznych, różnić od przedmiotu naszego wyobrażenia krzywej, choćby już dlatego, że ciągłość przestrzeni geometrycz-

*) Poincaré. Nauka i hipoteza, str. 31.

nej uważamy za równą ciągłości konkretnej, wyobrażeniowej przestrzenności. Dziwi nas brak bliższego wejrzenia w możliwość owego błędu tem bardziej, iż Poincaré sprzecznie twierdzi, że intuicya miałaby tu to samo uprawnienie, jakie ma w wypadkach, gdy nas w błąd nie wprowadza, mimo to jednak tutaj jest przyczyną błędu; jest jakoby przyczyną błędu, gdyż analiza, pod względem ścisłości bez zarzutu, dowodzi, że istnieją krzywe, jako continua drugiego rzędu, nie posiadające stycznych. Z tego jednak tak zasadniczego przed chwilą błędu Poincaré wydaje się przecież być skłonnym usprawiedliwić intuicyę i przypisać go raczej analizie, która nie stworzyła dostatecznie zagęszczonego continuum. Takie wyższe continuum mogłoby, według Poincarégo, usunąć sprzeczność między analizą a geometryą, mogłoby więc przywrócić godność teraz już nie tylko chyba intuicyi, lecz i analizie.

Pojmowanie kwestyi tej przez Poincarégo jest tak pełne sprzeczności, że już z góry nie wydaje się słuszne i wzbudza podejrzenie, że jest oparte na jakimś zasadniczym błędzie. Postaramy się wykazać, że tak jest w istocie rzeczy, że wszystkie punkty kwestyi, poruszone przez Poincarégo, są przez niego rozstrzygnięte w sposób błędny. A więc postaramy się wykazać:

1) że niema krzywych bez stycznych, choć są funkcye ciągłe bez pochodnych,

2) że niema tu sprzeczności między temi twierdzeniami, i że każde z tych twierdzeń jest prawdziwe w swej dziedzinie.

Wszelką krzywą geometryczną w właściwem tego słowa znaczeniu, a więc utwór czysto-przestrzenny, jednowymiarowo-spójny, istniejący jako całość aktualna w przestrzeni geometrycznej, przedstawić sobie możemy jako składającą się z nieskończenie małych (aktualnych) odcinków; każdy z tych odcinków łączyć będzie dwa następujące po sobie punkty krzywej. Styczną zaś do krzywej w danym punkcie określimy jako linię prostą, przechodzącą przez punkt dany i punkt z nim sąsiadujący *). Jeżeli teraz zestawimy to określenie stycznej do krzywej z pojmowaniem samej linii krzywej, jako utworu geometrycznego, składającego się z nieskończenie małych odcinków prostolinijnych, łączących kolejne punkty, należące do tej krzywej **)—to na zasadzie już samego prawa tożsamości powiedzieć będziemy mogli, że wszelka krzywa geometryczna posiada w każdym punkcie styczną. Kierunek tej stycznej będzie kierunkiem nieskończenie małego elementu krzywej, łączącego dany punkt z punktem sąsiednim. Rozumiemy jednak, iż z powyższego nie wynika, że styczna z prawa będzie zawsze identyczna ze styczną z lewa—tak że istnienie krzywych, dla których styczne z prawej są odmienne od stycznych z lewej strony, zupełnie nie przeczy powyższemu twierdzeniu, podobnie jak nie przeczy intuicyi geometrycznej, która zupełnie nie wymaga identyczności wspomnianych dwóch stycznych, gdyż sama pozwala kreślić linie krzywe, nie posiadające dla poszczególnych punktów z obydwóch ich stron tych samych stycznych.

*) Z określenia tego bezpośrednio wynika przy uwzględnieniu wyżej przedstawionego pojmowania różniczki formuła geometryi analitycznej dla stycznej w punkcie x_0, y_0 krzywej, określonej przez równanie $y = f(x)$:

$$\frac{X - x_0}{dx} = \frac{Y - y_0}{dy}.$$

**) A takie pojmowanie jest jedynie możliwe w stosunku do właściwej, aktualnej krzywej geometrycznej, posiadającej byt ciągły i rozciągły w przestrzeni geometrycznej.

Jakże jednak z naszem twierdzeniem pogodzić da się ten fakt, że istnieją funkcye ciągłe, których pochodne z prawej czy lewej strony są nieokreślone, gdyż wahają się w pewnych nie zbiegających się z sobą granicach (D^+ nie $= D_+$, D^- nie $= D_-$); wszak takim funkcyom powinny, wydaje się, odpowiadać krzywe z nieokreślonemi stycznemi, przed chwilą jednak widzieliśmy, że każda styczna jest jednoznacznie określona przez dwa następujące po sobie punkty krzywej, jest w równym stopniu określona, jak sama krzywa?

Kwestya stanie się zrozumiałą, jeżeli odróżnimy nieokreśloność podmiotową od przedmiotowej. Nieokreśloność pochodnych pewnych funkcyi ciągłych jest natury podmiotowej, to znaczy, że my, posiłkując się zasadami rachunku różniczkowego, nie możemy pochodnych tych jednoznacznie określić, a więc równocześnie nie umiemy określić jednoznacznie stycznych do krzywych, odpowiadających odnośnym funkcyom. Lecz nie znaczy to zupełnie, że styczne owe są przedmiotowo nieokreślone. Są one dla każdego punktu jednoznacznie wyznaczone przez prostą, przechodzącą przez x, y i $x + dx$, $y + dy$ tylko że nie zawsze udaje się nam wyliczyć ich kierunek (pochodną odnośnej funkcyi). Jeżeli pozostajemy przytem w dziedzinie czysto pojęciowej, jeżeli rozpatrujemy tylko funkcye, jako takie, t. j. utwory czysto myślowe bez ich zobjektywizowania w przestrzeni rozciągłej, wtedy podmiotowa nieokreśloność pochodnych wysuwa się na plan pierwszy i wskutek niebrania pod uwagę dziedziny przedmiotowej staje się równoznaczna z nieistnieniem pochodnych. Jeżeli natomiast przechodzimy do funkcyi zobjektywizowanych, do linii krzywych im odpowiadających, wtedy podmiotowa nieokreśloność stycznych w tej przedmiotowej dziedzinie nie jest już równoznaczna z nieistnieniem stycznych, a tylko z niemożnością ich określenia: styczne istnieją (gdyż kierunek ich jest kierunkiem elementów krzywej), lecz nie mogą być przez nas jednoznacznie wyznaczone.

Dzięki odróżnieniu dziedziny czysto pojęciowej od dziedziny rozciągłej, dzięki ustanowieniu różnicy między nieokreślonością podmiotową a przedmiotową przekonywamy się, że twierdzenie analizy o istnieniu funkcyi bez pochodnych zupełnie nie przeczy intuicyjnemu twierdzeniu o nieistnieniu krzywych bez stycznych. Co więcej, to twierdzenie analizy jest tak zgodne z intuicyą geometryczną, tak dobrze rozumiemy, kierując się tą intuicyą, że możliwe są wypadki podmiotowej nieokreśloności stycznych (n. p. przy nieskończonej ilości maximów i minimów w dowolnie małym odstępie), że raczej skłonni jesteśmy — jak to zdarzyło się Pawłowi du Bois-Reymond *) — nieokreśloność tę, a z nią istnienie funkcyi bez pochodnych, uważać za zjawisko bardziej pospolite, niż jest w istocie rzeczy **), aniżeli uznać ją za coś z intuicyą geometryczną sprzecznego.

Tak więc między intuicyą a analizą niema bezwzględnie żadnej sprzeczności. O sprzeczności mówić tu może ten tylko, kto identyfikuje krzywą geometryczną z funkcyą ciągłą, przestrzeń geometryczną z rozmaitością liczbową, kto uważa, że krzywa może być określona jako continuum analityczne, że jest tworem czysto pojęciowym, mimo to wszystko jednak uznaje, że takie właśnie krzywe są przedmiotem intuicyi

*) P. du Bois-Reymond. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. Journal für die reine und angewandte Mathematik Tom 79 (r. 1875), str. 32.

**) Por. Köpcke. Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen. Mathematische Annalen. Tom 29 (r. 1887).

i sądów na niej opartych, że są to więc krzywe geometryczne—ten więc, kto sam, jak Poincaré, popełnia sprzeczność. Jeżelibyśmy wyrazowi „krzywa“ zdecydowali się już nadać znaczenie czysto pojęciowe, a więc pojmować przez „krzywą“ ciągłą funkcyę analityczną, specyfikacyę continuum analitycznego, to wtedy ta „krzywa“ pojęciowa nie miałaby wprawdzie „stycznych“, lecz o takiej „krzywej“ wszak nigdy żadna intuicya nie twierdzi, że posiada ona styczne, już z tej prostej przyczyny, że „krzywa“ taka leży w dziedzinie całkiem niedostępnej dla wszelkiej intuicyi, t. j. dla wszelkiego zidealizowanego wyobrażenia lub na wyobrażeniu opartego pojęcia, którego przedmiot jest przestrzenny. Byłaby to „krzywa“ czysto pojęciowa, nie krzywa więc prawdziwa, geometryczna, a funkcya analityczna, i nie o takiej „krzywej“ intuicya twierdzi, że musi ona styczną posiadać, lecz sąd jej dotyczy—i może dotyczyć — tylko krzywej geometrycznej, czystej, choć przestrzennej. Taka krzywa zawsze posiada styczną; w przejściu do granicy idealnej nie mylimy się, jak to przypuszczał Poincaré, krzywych bez stycznych istotnie niema, choć są funkcye ciągłe bez pochodnych. Każde z tych twierdzeń jest najzupełniej prawdziwe w swej dziedzinie: pierwsze — w dziedzinie przestrzennej, drugie — w dziedzinie czysto pojęciowej. Sprzeczności między niemi niema żadnej, gdyż analiza nie twierdzi wbrew intuicyi, że istnieją krzywe geometryczne bez stycznych, intuicya zaś nie twierdzi wbrew analizie, że nie istnieją ciągłe funkcye analityczne bez pochodnych, a tylko każda wypowiada sąd o przedmiocie swej dziedziny.

Zasadniczy błąd Poincarégo, który doprowadził go do wskazanych przez nas niesłusznych wniosków, polega na niedostatecznem odróżnianiu przez niego dziedziny przestrzennej od dziedziny czysto pojęciowej i na niedozwolonem bez uprzedniej krytyki przenoszeniu twierdzeń z jednej dziedziny do drugiej. Błąd ten jest wspólny wszystkim prawie racyonalistycznym lub racyonalizującym filozofom geometryi. I gdy ci pozostają w czysto pojęciowej dziedzinie, wtedy system ich może być pod względem logicznym bez zarzutu, jest jednakże wyzbyty wszelkiego bezwzględnie przedmiotowego znaczenia; gdy jednak, jak to wkońcu zawsze prawie bywa, opuszczają oni świadomie lub nieświadomie swe czysto pojęciowe posterunki i przechodzą do dziedziny przestrzennej, nie zdając sobie często sprawy ze swej dezercyi, wtedy napotykają na swej drodze zjawiska, które im wydają się paradoksalne, gdyż ich zrozumieć nie mogą dlatego właśnie, że nie zdają sobie sprawy z odrębności dziedziny, w której się znaleźli. Podobnie zdarza się i tym wśród nich, którzy pas neutralny między światem konkretnie przestrzennym a czysto pojęciowym przekraczają, bez należytej świadomości tego faktu, w odwrotnym kierunku, wychodząc z dziedziny konkretnej przestrzenności i kierując się w stronę pojęciową. Aby się ustrzedz tych i tym podobnych błędnych kroków, trzeba zawsze należycie sobie uświadamiać:

1) że idealizacya utworów konkretnie przestrzennych jest czemś różnem od ich czysto pojęciowego ujęcia zapomocą formuł analitycznych lub wogóle jakichkolwiek „czystych pojęć"; że pozostaje ona w dziedzinie przestrzennej, choć nie wyobrażeniowej—w dziedzinie czystej przestrzenności,

2) że uprzestrzennościowienie utworów czysto logicznych wogóle, a formuł analitycznych w szczególności, musi podlegać uprzedniej krytyce, gdyż rozciągła przestrzeń geometryczna jest dziedziną zasadniczo różną od czysto pojęciowej dziedziny logiki i analizy, i wyraz „istnieć" nie może

z tego powodu w geometryi znaczyć tylko „być wolnym od sprzeczności".

By oba te punkty należycie sobie uświadomić, potrzeba przedewszystkiem zdać sobie sprawę z rzeczywistej natury przestrzeni geometrycznej, trzeba ją uznać za czystą przestrzenność. Lecz poza tem ważnem jest jeszcze bliższe wniknięcie w ustrój wewnętrzny tej przestrzeni. Gdybyśmy przyjęli sprzeczność zawierające twierdzenie, że przestrzeń rozciągła składa się z samych tylko punktów nierozciągłych, to wpadlibyśmy wnet w sprzeczności, podobne do tych, które widzieliśmy u Poincarégo. I nie byłoby w tem nic dziwnego, gdyż, przyjmując ustrój przestrzeni za odpowiadający temu twierdzeniu, nie mielibyśmy w rzeczywistości przestrzeni istotnie rozciągłej, a tylko byśmy jej tę rozciągłość wmawiali, sama zaś „przestrzeń" pozostawałaby wciąż rozmaitością liczbową, nęcącą jednak przez przypisywaną jej nieprawnie rozciągłość do przestrzennego pojmowania jej utworów, i gdybyśmy pokusie tej ulegli, wpadlibyśmy w omawiane wyżej sprzeczności, będące już teraz prostemi konsekwencyami sprzecznego w sobie założenia. Natomiast wszelkie sprzeczności znikają, i źródło ich staje się jasne, gdy pomyślimy sobie ustrój przestrzeni, rzeczywiście odpowiadający jej przestrzennej naturze, jeżeli przyjmiemy, że przestrzeń geometryczna składa się z nierozciągłych punktów, połączonych nieskończenie małymi rozciągłymi odcinkami lub, co na jedno wychodzi, z nieskończenie małych rozciągłych odcinków, których wspólnemi granicami są nierozciągłe punkty.

Przekonywamy się coraz bardziej, do jakiego stopnia czysta przestrzenność jest nieodzownie potrzebna do ugruntowania geometryi bez sprzeczności i paradoksów, przytem takiej, którąby posiadać mogła znaczenie przedmiotowe.

Lecz może geometrya taka nie byłaby ścisła, może ten pierwiastek pochodzenia doświadczalnego pozbawiłby ją precyzyi? Bynajmniej. Pamiętamy przecież, że nasza przestrzeń geometryczna granicami swych nieskończenie małych odcinków przedstawia najściślejszy odpowiednik „trójwymiarowej“ rozciągłości liczbowej. Wszelka więc funkcya analityczna znajdzie w naszej rozciągłej przestrzeni geometrycznej najdoskonalsze swe przedstawienie, o ile do geometrycznego przedstawienia wogóle się nadaje.

ROZDZIAŁ IV.

Utwory przestrzenne i ich poznanie.

Widzieliśmy w poprzednim rozdziale, jak konieczną jest rzeczą dla uniknięcia sprzeczności i paradoksów w geometryi uznawanie przestrzennej natury przestrzeni geometrycznej, odróżnianie czystej przestrzenności od czystej myśli, dziedziny geometryi od dziedziny logiki i analizy. Jest to jednak rzeczą tylko konieczną, lecz nie dostateczną. Gdybyśmy bowiem uznali zasadniczą odmienność przestrzeni geometrycznej w stosunku do czystej myśli, lecz odmienność tę uważali za przeciwstawność przestrzeni i myśli wogóle, gdybyśmy nie umieli dokładnie określić istoty tej różnicy i przypuścili, że wyklucza ona n. p. możliwość pojęciowego ujęcia utworów przestrzennych, jako przestrzennych; wtedy przez przecenianie tej różnicy wpadlibyśmy w paradoksy podobne do tych, do których doprowadza różnicy tej niedocenianie. Rzecz tak ciekawa, że warta bliższego rozpatrzenia. Mamy tu na myśli paradoks figur symetrycznych Kanta. Polega on, według Kanta, na tem, że „n. p. dwa sferyczne trójkąty obu półkul, mające łuk równika za wspólną podstawę, mogą być całkowicie równe, tak ze względu na boki, jako też i na kąty, tak, że jeżeli z osobna i dokładnie opiszemy jeden trójkąt, nie napotkamy nic takiego, czegobyśmy nie znaleźli w opisie drugiego; pomimo to nie da się jeden trójkąt przenieść na miejsce drugiego (mianowicie, na przeciwległą półkulę); tutaj uwydatnia się tedy różnica wewnętrzna obu trójkątów, której żaden rozsądek jako wewnętrznej wykazać nie może, a która się tylko ujawnia przez zewnętrzny stosunek w przestrzeni" *). Dziwi nas z początku, że myśliciel, z pod którego pióra wyszedł rozdział „O amfibolii pojęć refleksyjnych", może tu widzieć jakikolwiek paradoks; przecież nikt lepiej od niego nie zdawał sobie sprawy z zasadniczej różnicy między dziedziną przestrzenną, a dziedziną czystej myśli, nikt lepiej od niego nie rozumiał, że w przestrzeni geometrycznej obowiązują inne prawa, niż w świecie czysto myślowym. Zdawałoby się, że nie może tu być dla Kanta nic paradoksalnego, że wszystko musi tu być dla niego w zupełnym porządku. I rzeczywiście jest tu z punktu widzenia Kanta wszystko w porządku, lecz tylko dopóty, dopóki nie rozpatrujemy kwestyi poznania geometrycznego, kwestyi geometryi, a tylko kwestyę przestrzeni geometrycznej. Gdy jednak przechodzimy do rozpatrzenia kwestyi poznawczej, to, stojąc na stanowisku Kanta, natrafiamy na rzeczywistą sprzeczność, zagrażającą całemu systematowi krytycznego racyonalizmu, napotykamy fakt irracyonalny „różnicę wewnętrzną obu trójkątów, której żaden rozsądek jako wewnętrznej wykazać nie może", coś, „co może być wprawdzie dane w wyobrażeniu, lecz nie może być zupełnie sprowadzone do pojęć wyraźnych, a więc objaśnione zrozumiale (dari, non intelligi) **). Wyciąga wprawdzie Kant z tego

*) Kant. Prolegomena do wszelkiej przyszłej metafizyki... Tł. polskie, str. 39.

**) Kant. Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften, wyd. Rosenkranza i Schuberta, t. V, str. 326.

paradoksu wnioski, potwierdzać mające jego naukę o idealności przestrzeni, twierdzi mianowicie, iż niemożliwość ujęcia pojęciowego tej wewnętrznej różnicy objaśnia się właśnie przez to, że różnica ta dotyczy przedmiotów przestrzennych, będących zjawiskami, a nie rzeczami samemi w sobie, dającemi się ująć czystym rozsądkiem, lecz mimo wszystko fakt pozostaje faktem, i Kant zmuszony jest przyznać, że utwory przestrzenne nie zawsze mogą być ujęte racyonalnie, że pojęcia geometryi nie zawsze odpowiadają jej przedmiotom. Objaśnienie Kanta nie znosi więc zupełnie paradoksu figur symetrycznych, jako utworów irracyonalnych, niedostępnych poznaniu geometrycznemu, nie wykazuje możliwości głoszonego przezeń immanentnego racyonalizmu.

Czy jednak rzeczywiście jest tak, jak sądził Kant; czy rzeczywiście figury symetryczne są to utwory przestrzenne, nie dające się ująć pojęciowo; czy rzeczywiście stoimy tu wobec paradoksu? Musimy na to pytanie odpowiedzieć przecząco; lecz zanim przejdziemy do uzasadnienia tego, chcemy przedewszystkiem wykryć źródło błędu Kanta, gdyż tylko przez wykrycie istotnej przyczyny błędu można się na przyszłość ustrzedz popełniania jemu podobnych. Źródło to, podobnie jak źródło większości błędnych zapatrywań Kanta, tkwi w przeciwstawianiu przez niego dziedziny wyobrażeń i pojęć, w przeciwstawianiu tak bezwzględnem, że wykluczającem możliwość dziedziny pojęciowej, a mimo to mającej za przedmiot przestrzenność. Widzieliśmy, do jakich sprzeczności pogląd ten doprowadził Kanta, jak zmusił go wbrew logice do uznania przestrzeni geometrycznej za czyste wyobrażenie, zamiast, jak być powinno, do uznawania jej za pojęcie, którego przedmiotem jest czysta przestrzenność. Rzecz ma się teraz podobnie, tylko że z dziedziny przedmiotu przesunęła się w dziedzinę ujęcia przedmiotu. Wprzód Kant nie mógł dopuścić możliwości pojęcia, którego przedmiot jest przestrzenny, teraz nie dopuszcza możliwości pojęcia, ujmującego przedmiot przestrzenny, jako przestrzenny. Wskutek bezwzględnego przeciwstawiania dziedziny przestrzennej i pojęciowej wydaje się Kantowi, że ująć pojęciowo utwór przestrzenny to znaczy pozbawić go przestrzenności, wydaje mu się, że ująć pojęciowo to znaczy ująć *jako czyste pojęcie*, a nie *za pomocą pojęcia*; że myśl, ujmując przedmiot przestrzenny, musi pozostać czystą, a przedmiot, wstępując do tej idealnej dziedziny, musi porzucić wszystko, co przypomina świat zmysłowy, a więc i swą przestrzenność. Przy takiem pojmowaniu nie dziw, że natrafiamy na sprzeczności i paradoksy, gdy chcemy ująć dziedzinę przestrzenną; wszak pojmowanie takie, jak to sam Kant przyznaje, wyklucza możliwość pojęciowego „wyrównania" dziedziny przestrzennej, jako takiej, gdyż dziedzina ta, by zostać poznaną, musi — według tego pojmowania — utracić swe charakterystyczne cechy. Chcemy n. p. ująć pojęciowo dwa symetryczne sferyczne trójkąty. Dla Kanta „ująć pojęciowo" te trójkąty znaczy ująć je, jako czyste pojęcia, czyste wielkości; znaczy to napisać równanie $A=A^1$, $B=B^1$, $C=C^1$; $a=a^1$, $b=b^1$, $c=c^1$, gdzie A, A^1 i t. d. oznaczają wielkość odpowiadających sobie kątów; a, a^1 i t. d. — wielkość odpowiadających sobie boków symetrycznych trójkątów. Wtedy, oczywiście, symetrya, jako taka, ginie; mamy tylko równość i nie możemy zrozumieć, czem to się dzieje, że dwa równe trójkąty jednak nie mogą być przesunięte w ten sposób, by przystały do siebie.

Mógłby tu jednak kto zarzucić, że trójkąty symetryczne ujęte zostały przez Kanta wprawdzie jako czyste pojęcia, lecz że ujęcie to, choć zasadniczo słuszne, było niezupełne;

można bowiem było również i kierunek boków trójkąta ująć, jako cechę czysto pojęciową, a wtedy trójkąty symetryczne różniłyby się już jako czyste pojęcia i nie byłoby nic dziwnego, że różnią się również i przestrzennie. Takie jednak uznanie kierunku za czyste pojęcie, za cechę czysto pojęciową*), dowodziłoby zupełnego nieodróżniania dziedziny przestrzennej od myślowej i zupełnie słusznie byłoby odrzucone nie tylko przez Kanta, lecz i przez każdego, uświadamiającego sobie zasadniczą odmienność tych dwóch dziedzin. Jeżeli przeto, jak chce Kant, ująć pojęciowo trójkąty symetryczne ma znaczyć ująć je jako czyste pojęcia, to w takim razie wyjścia ze sprzeczności niema: trójkąty tylko symetryczne będą ujmowane zawsze jako równe.

A jednak geometrya analityczna ujmuje je przecież jako symetryczne tylko i, opierając się na geometryi tej, unikamy — według słusznej uwagi Milhaud'a**) — wszelkiego paradoksu. W jaki sposób nie zauważył tego taki myśliciel, jak Kant, który oryentował się zupełnie dobrze w tej gałęzi matematyki? Dlatego — odpowiadamy — że dla Kanta ująć pojęciowo mogło znaczyć tylko: ująć jako pojęcie; a że kierunku (elementów trójkątów naszych) ująć, jako pojęcia, nie można, gdyż kierunek w przestrzeni jest czemś wybitnie pozamyślowem, więc Kant ujęcia geometryi analitycznej nie mógł uznać za ujęcie rzeczywiście pojęciowe, mogące służyć za objaśnienie paradoksu. Lechalas***), który zajmuje tu stanowisko kantowskie, twierdzi, że mamy tu tylko tłomacze-

*) Jest to pogląd Natorpa, por. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, str. 300.

**) Milhaud. La connaissance mathématique et l'idéalisme transcendental, Revue de métaphysique et de morale, 1904.

***) Lechalas. Etude sur l'espace et le temps, 1910, str. 129.

nie (traduction) faktu przestrzennego, a nie jego objaśnienie (explication). Teraz doszliśmy do źródła błędu zarówno Kanta, jak i Lechalas. Dla Kanta ujęcie figur symetrycznych przez formuły geometryi analitycznej rzeczywiście mogło oznaczać tylko przetłomaczenie faktów przestrzennych na język, w którym przestrzenność tych faktów, specyalnie wyrażająca się w kierunku ich elementów, została zachowana. Uznanie jednak takiego tłomaczenia za ujęcie pojęciowe oznaczałoby uznanie możliwości pojęć, ujmujących przedmiot przestrzenny, jako przestrzenny, a nie jako czyste pojęcie. Lecz dla Kanta przeciwstawność pojęć i przestrzenności była zbyt wielka, by mógł przypuścić możliwość takich pojęć; wołał się narazić na sprzeczności i paradoksy, niż czyste pojęcie przystosować do świata przestrzennego, poddać je obcej mu i nie chcącej wyzbyć się swej natury przestrzenności *).

A jednak tylko wtedy możemy uwolnić się od sprzeczności i paradoksów **), możemy usunąć irracyonalny pier-

*) W książce p. t. „Zasadniczy problemat teoryi poznania Kanta" starałem się przeprowadzić myśl, że przeciwstawianie zmysłów i rozsądku uniemożliwiło Kantowi uzasadnienie immanentnego racyonalizmu. Paradoks figur symetrycznych Kanta jest wymownem potwierdzeniem słuszności tego poglądu.

**) Wszelkie „objaśnienia" paradoksu figur symetrycznych, oparte na uznawaniu niedostosowania naszej przestrzeni i jej utworów do czystych pojęć geometrycznych, są transcendentne i pozostawiają paradoks irracyonalności utworów naszej geometryi niezmienionym. Takiem jest objaśnienie Kanta przez odwołanie się do rzeczy samych w sobie, takiem objaśnienie Delboeufa i Lechalas, odwołujące się do czwartego wymiaru, który ma umożliwić przystanie do siebie sferycznych trójkątów symetrycznych (por. Lechalas, loc. cit., str. 129). Przytem trzeba tu zauważyć, że doprowadzenie figur symetrycznych do przystania przez obrót około wspólnego boku zupełnie nie znosi istoty paradoksu, gdyż polega on w zasadzie na tem, że dwie symetryczne figury, znajdujące wiastek z geometryi, jeżeli jasno uświadomimy sobie, że ująć utwory przestrzenne pojęciowo to znaczy ująć je *zapomocą pojęć*, a nie *jako czyste pojęcia*, że ująć je pojęciowo to nie znaczy pozbawić je przestrzenności. Paradoks trójkątów symetrycznych zniknie, gdy boki tych trójkątów (a raczej rzuty ich na osie współrzędnych) ujmiemy jako wielkości przestrzenne, posiadające kierunek w przestrzeni, ujmiemy zapomocą liczb opatrzonych odpowiednimi znakami, a więc zapomocą czegoś czysto pojęciowego*); gdyż liczby dodatnie i ujemne służyć wprawdzie mogą do ujęcia wielkości kierunkowych, same w sobie jednak nie mają nic wspólnego z jakimkolwiek kierunkiem, z jakąkolwiek cechą przestrzenną. Jeżeli elementy trójkątów naszych ujmiemy w sposób taki lub podobny, wtedy elementy jednego trójkąta będą się różniły od elementów odpowiednich drugiego, i nie będzie już nic dziwnego w tem, że te trójkąty nie mogą być przesunięte po powierzchni, na której się znajdują, w ten sposób, by zajęły tę samą przestrzeń. Paradoks będzie usunięty.

Powiedzieliśmy na początku niniejszego rozdziału, że przecenianie różnicy między przestrzennością a czystą myślą doprowadza do paradoksów geometrycznych, podobnych do tych, do których dochodzimy przy niedocenianiu tej różnicy.

---

się na pewnej powierzchni, bez opuszczenia tej powierzchni nie mogą być doprowadzone do przystawania. Czy po opuszczeniu tej powierzchni przez obrót w przestrzeni będą mogły one być doprowadzone do kongruencyi, czy nie — jest to rzecz drugorzędna. Dlatego w istocie rzeczy i dwa płaskie trójkąty symetryczne mogłyby być również uważane za utwory paradoksalne.

*) Nazywając utwory jakie czysto pojęciowymi chcemy tu tylko uwydatnić ich nieprzestrzenną naturę, chcemy powiedzieć, że są to pojęcia, których przedmioty nie są przestrzenne; nie chcemy jednak bynajmniej przez to wyrazić tego, że są one pochodzenia niedoświadczalnego.

Jeżeli bliżej rozpatrzymy tę kwestyę, to zrozumiemy źródło tego dziwnego zjawiska i zdamy sobie dokładnie sprawę z tego, na czem się zasadza i jak daleko sięga różnica między myślą a przestrzennością.

Na czem polega, przedewszystkiem zapytamy, podobieństwo paradoksu figur symetrycznych do rozpatrzonego przez nas uprzednio paradoksu krzywych bez stycznych? Na tem, że w obydwóch wypadkach paradoksalność polega na niezgodności danych w przestrzeni z pojęciami, mającemi dotyczyć tych danych. Lecz jeżeli istnieje między tymi paradoksami tak zasadnicze podobieństwo, to jakim sposobem zdarzyć się może, że powstają one naskutek popełniania, jakby się zdawało, wręcz przeciwnych błędów: raz niedoceniania, drugi raz przeceniania różnicy między przestrzennością a czystą myślą? Ten nowy paradoks zniknie, gdy w kwestyi stosunku przestrzenności do czystej myśli rozróżnimy dwie strony: kwestyę natury przedmiotu geometrycznego i kwestyę poznania tego przedmiotu. Pierwszy paradoks powstaje wskutek podwójnego błędu: 1) przez uznanie pojęciowego ujęcia przedmiotu geometrycznego za identyczne z ujęciem tego przedmiotu jako czyste pojęcie i 2) przez uznanie czysto pojęciowej, nieprzestrzennej natury przedmiotu geometrycznego. Drugi paradoks zachodzi naskutek popełnienia pierwszego błędu przy jednoczesnem niepopełnianiu drugiego.

Ci, co widzą sprzeczność między danemi analizy i intuicyi w kwestyi istnienia krzywych bez stycznych, uważają, że przedmiot geometryczny powstaje dopiero w chwili, gdy go ujmujemy pojęciowo, co dla nich jest równoznaczne: w chwili, gdy go ujmujemy jako czyste pojęcie. Przedtem przedmiot geometryczny dla nich nie istnieje; to, co wprzód istnieje, jest przedmiotem fizycznym. Idealizacya tego przedmiotu, czyniąca go przedmiotem geometrycznym, zachodzi w chwili, gdy go ujmujemy jako pojęcie. Wtedy przedmiot geometryczny zaczyna dopiero istnieć; istnieć oczywiście jako czyste pojęcie, a nie jako utwór przestrzenny, nawet nie jako utwór czysto przestrzenny i idealnie dokładny. Mamy tu panlogizm geometryczny, który nie uznaje w dziedzinie geometryi nic ponad czyste pojęcia, żadnej przestrzenności, dla którego przedmiot geometryczny powstaje w chwili poznania pojęciowego. Lecz taki panlogizm unicestwia geometryę, jako taką, i zastępuje ją przez analizę i logikę. Nie ma on przedmiotowego znaczenia, lecz i nie doprowadza do sprzeczności, dopóki chroni się od zetknięcia ze światem przestrzennym. Gdy jednak z nim się zetknie, wnet napotyka na swej drodze sprzeczności i paradoksy, które przypisuje nic tu niewinnej intuicyi zamiast swemu nieuwzględnianiu pierwiastku przestrzennego, podsuwaniu funkcyi na miejsce krzywych przestrzennych, analizy na miejsce geometryi.

Co dotyczy znów paradoksu figur symetrycznych, to powstaje on wtedy, gdy ujęcie przedmiotu geometrycznego będziemy uważali za równoznaczne z ujęciem go jako czyste pojęcie, przytem jednak będziemy się strzegli popełnienia drugiego błędu panlogizmu, nieuznawania przestrzennej natury przedmiotów geometrycznych. Odróżnimy tu wprawdzie przestrzenny przedmiot geometryczny od poznania tego przedmiotu, nie będziemy twierdzili za skrajnym idealizmem, że powstaje on dopiero w chwili poznania pojęciowego, lecz to nie wystarczy do uniknięcia paradoksu, bo jesteśmy obarczeni pierwszym błędem panlogizmu, bo nie uznajemy innego poznania przedmiotu poza poznaniem go jako czyste pojęcie, jako utwór czysto pojęciowy. Będziemy więc mieli z jednej strony przestrzenne przedmioty geometryczne, z drugiej ich poznanie pojęciowe, nie uwzględniające natury przestrzennej tych przedmiotów, gdyż przeciwstawianie przestrzennego pierwiastku pierwiastkowi pojęciowemu czyni niemożliwem uznanie tego, że istnieje pojęciowe poznanie przedmiotu przestrzennego (jako przestrzennego, a nie jako czystego pojęcia). Przestrzenny więc pierwiastek przedmiotów geometrycznych nigdy, przy takich założeniach, nie może być pojęciowo poznany; zawsze przedstawiać będzie resztę, nie poddającą się poznaniu pojęciowemu. Przeciwstawianie więc przestrzenności i pojęciowości przy rozpatrywaniu kwestyi poznania przedmiotów geometrycznych, połączone z odróżnianiem czystej przestrzenności od czystej pojęciowości przy decydowaniu o naturze przestrzennej przedmiotów geometrycznych — prowadzi do irracyonalizmu. Paradoks figur symetrycznych jest paradoksem irracyonalizmu, podobnie jak paradoks krzywych bez stycznych jest paradoksem panlogizmu geometrycznego.

Jeżeli teraz zapytamy, jakim sposobem paradoks irracyonalizmu może być tak zasadniczo podobny do paradoksu panlogizmu geometrycznego, to odpowiedź nie będzie już trudna. Widzieliśmy bowiem, że oba paradoksy mają wspólne źródło w utożsamianiu poznania pojęciowego przedmiotów, z poznaniem ich jako czyste pojęcia, a nie tylko zapomocą pojęć, w utożsamianiu, z którego bezpośrednio wynika nieuwzględnianie w poznaniu geometrycznem przestrzenności przedmiotów geometrycznych. Jeżeli teraz z takiem poznaniem, nie uwzględniającem przestrzennych własności przedmiotów geometrycznych, zwracamy się do przestrzennych przedmiotów, to w każdym razie natrafimy na zjawiska paradoksalne tej samej natury, bez względu oczywiście na to, czy przedmioty geometryczne uznajemy za przestrzenne, czy też ich za takie nie uznajemy, w żadnym bowiem razie faktycznie nie uwzględniamy tej przestrzenności. Odróżnienie kwestyi natury przedmiotu geometrycznego od kwestyi ujęcia tego przedmiotu pozwala nam teraz zrozumieć również, w jakiem znaczeniu mówiliśmy przy paradoksie panlogizmu o niedocenianiu, przy paradoksie irracyonalizmu — o przecenianiu różnicy między czystą przestrzennością a czystą myślą. W pierwszym przypadku dotyczyło to kwestyi natury przedmiotu geometrycznego, w drugim — kwestyi ujęcia tego przedmiotu. Ponieważ jednak okazało się, że w kwestyi ujęcia przedmiotu geometrycznego różnicę w mowie będącą przecenia również i panlogizm, przeto będzie ściślej, jeżeli nie będziemy naszych paradoksów odróżniali zapomocą tego, że jeden powstaje przy niedocenianiu, drugi przy przecenianiu tej różnicy, lecz, rozróżniwszy kwestyę natury przedmiotu geometrycznego i kwestyę ujęcia tego przedmiotu, powiemy, że przyczyną pierwszego paradoksu było nieuznawanie przestrzennej natury przedmiotów geometrycznych (połączone z bezpośrednio wynikającem z tego utożsamianiem pojęciowego ujęcia przedmiotów geometrycznych z ujęciem ich jako czyste pojęcia), przyczyna zaś drugiego paradoksu tkwiła w utożsamianiu pojęciowego ujęcia przedmiotów geometrycznych z ujęciem ich jako czyste pojęcia przy równoczesnem uznawaniu ich przestrzennej natury.

Jeżeli chce się uniknąć paradoksu irracyonalizmu, trzeba tylko odrzucić uznawanie przestrzennej natury przestrzeni geometrycznej i przedmiotów geometrycznych, trzeba je uznać za czyste pojęcia. Wtedy jednak wpadniemy w panlogizm geometryczny, różniący się od irracyonalizmu geometrycznego wyłącznie tylko sposobem rozwiązania kwestyi natury przedmiotów geometrycznych. To leibnitzowskie wyeliminowanie z geometryi elementów przestrzennych — dla uniknięcia nieporozumień powiedzmy: przestrzennościowych — elementów pozamyślowych, przy pewnych założeniach prowadzących do irracyonalizmu, zostało w ostatnich czasach dokonane między innymi przez transcendentalistów, którzy w ten sposób przeszli od Kanta do Leibnitza. Pozbawiając jednak geometryę pierwiastku rzeczywiście przestrzennego, czynimy z niej logikę wogóle lub specyalnie analizę; jeżeli zaś tej analizie chcemy nadać przedmiotowe znaczenie, musimy jej utwory pojmować geometrycznie, przestrzennie, jej funkcye n. p. uważać za krzywe, a to znów doprowadza, jak widzieliśmy, do paradoksów i sprzeczności, które w stopniu niemniejszym, niż to czynią paradoksy irracyonalizmu, zdradzają błędne pod względem filozoficznym ugruntowanie geometryi.

Jedyne logicznie możliwe wyjście z paradoksów irracyonalizmu i panlogizmu przedstawia, jak widzieliśmy, teorya, 1) uznająca przestrzenną naturę przedmiotów geometrycznych, 2) nie uznająca, że poznanie pojęciowe tych przedmiotów polega na poznaniu ich jako czystych pojęć, orzekająca natomiast, że poznanie to polega na poznaniu ich jako przestrzennych (czysto przestrzennych i idealnych) zapomocą czystych pojęć; przedmioty geometryczne w ten sposób poznane będą pojęciami, lecz już nie czystemi, a mającemi przedmiot przestrzenny (naturę przestrzenną). Punkt drugi daje się tu zastosować (dowód patrz niżej) do punktu pierwszego, dotyczącego samych przedmiotów geometrycznych. Jeżeli mianowicie w sformułowaniu punktu drugiego wyraz „poznanie“ zastąpimy przez wyraz „konstrukcya“, wtedy otrzymamy bliższe określenie punktu pierwszego, tego mianowicie, na czem polega natura przedmiotów geometrycznych, jak rozumieć należy ich powstawanie. Teorya, którą tu wykładamy, będzie wtedy scharakteryzowana przez następujące dwa punkty, przez to:

1) iż nie uznaje *(contra Leibnitz)*, że konstrukcya pojęciowa przedmiotów geometrycznych polega na konstrukcyi ich jako czystych pojęć — orzeka natomiast, że konstrukcya ta polega na konstrukcyi ich jako przestrzennych (czysto przestrzennych i idèalnych) zapomocą czystych pojęć; przedmioty geometryczne w ten sposób skonstruowane będą pojęciami, lecz już nie czystemi, a mającemi przedmiot przestrzenny (naturę przestrzenną);

2) iż nie uznaje *(contra Kant)*, że poznanie pojęciowe przedmiotów geometrycznych polega na poznaniu ich jako czystych pojęć—orzeka natomiast, że poznanie to polega na poznaniu ich jako przestrzennych (czysto przestrzennych i idealnych) zapomocą czystych pojęć; przedmioty geometryczne w ten sposób poznane będą pojęciami, lecz już nie czystemi, a mającemi przedmiot przestrzenny (naturę przestrzenną).

Możemy treść obydwóch tych punktów, wzajemnie sobie odpowiadających, sformułować krócej, ekonomiczniej, jeżeli terminy: „konstrukcya“ i „poznanie“ obejmiemy jedną wspólną nazwą: „ujęcie“. Wtedy, zadowalając się sformułowaniem pozytywnem, otrzymamy następujące zasadnicze twierdzenie:

Ujęcie pojęciowe przedmiotów geometrycznych polega na ujęciu ich jako przestrzennych (czysto przestrzennych i idealnych) zapomocą czystych pojęć; przedmioty geometryczne w ten sposób ujęte będą pojęciami, lecz już nie czystemi, a mającemi przedmiot przestrzenny (naturę przestrzenną).

Twierdzenie to dotyczy zarówno dziedziny przedmiotów geometrycznych, jak i dziedziny samej geometryi:

w pierwszym wypadku „ujęcie“ = „konstrukcya“, w drugim „ujęcie“ = „poznanie“. W pierwszej dziedzinie zwraca się ono przeciw Leibnitzowi, w drugiej — przeciw Kantowi.

Ażeby twierdzenie to mogło być należycie zrozumiane, trzeba uświadomić sobie, co rozumiemy tu przez czyste pojęcia. Równocześnie z tem dowieść należy, że gdy była mowa o przedmiotach geometrycznych, o ich konstrukcyi, mogliśmy twierdzić, że są one konstruowane zapomocą czystych pojęć, zamiast powiedzieć — jak się tego można było po wywodach pierwszego rozdziału spodziewać — że konstrukcya ich dokonywa się zapomocą sądów wyobrażonych.

Według przyjętej przez nas teoryi pojęć Twardowskiego każde pojęcie składa się z wyobrażenia podkładowego i jednego lub kilku sądów wyobrażonych, odniesionych do przedmiotu tego wyobrażenia. Czem jest jednak ten sąd wyobrażony, który odnosimy do wyobrażenia podkładowego? Nie tylko nie jest on sądem, wydanym o przedmiocie wyobrażenia podkładowego, lecz, właściwie mówiąc, nie jest on również wyobrażeniem sądu, rzeczywiście o pewnym przedmiocie wydanego, gdyż pełne wyobrażenie takiego sądu zawierałoby w sobie również przedmiot, którego dotyczył ten rzeczywisty, aktualny sąd, będący rzeczywistym właśnie dlatego, że posiadał przedmiot. Gdybyśmy jednak takie wyobrażenie sądu odnieśli do naszego wyobrażenia podkładowego, to wtedy mielibyśmy poza przedmiotem naszego wyobrażenia podkładowego jeszcze wyobrażenie przedmiotu, podobnego do przedmiotu naszego wyobrażenia podkładowego, mianowicie przedmiotu dawnego aktualnego sądu. Mielibyśmy wtedy zupełnie zbyteczne zdwojenie przedmiotów (którego w rzeczywistości niema *)): właściwie więc trzeba

*) Czy zdwojenie to rzeczywiście istnieje, czy nie istnieje — jest

przyjąć, że odnosimy do nowego wyobrażenia podkładowego wyobrażenie sądu bez jego przedmiotu, bez dawnego podkładowego wyobrażenia. Takie niezupełne, zredukowane wyobrażenie sądu nazwiemy sądem wynaturzonym, gdyż, utraciwszy przedmiot—podłoże, utracił on z nim zarazem i swą właściwą naturę logiczną; tę jednak naturę odzyskuje natychmiast, gdy zostaje odniesiony do nowego wyobrażenia podkładowego. Z tem nowem wyobrażeniem podkładowem sąd wynaturzony tworzy pojęcie; jest on więc identyczny z pojęciem bez wyobrażenia podkładowego. Takie pojęcie, pozbawione zupełnie wyobrażeniowego podkładu, nazwać można, zgodnie z przekazaną nam przez wieki tradycyą, pojęciem czystem*). Mamy więc tożsamość: sąd wyobrażony = wyobrażenie niezupełne sądu = sąd wynaturzony = pojęcie czyste. Takie czyste pojęcie, pozbawione całkowicie wyobrażenia podkładowego, jest pojęciem w takim samym stopniu logicznie wynaturzonem, jak wynaturzonym jest pod tym względem sąd wyobrażony: nasze pojęcie czyste nie jest właściwem pojęciem, sąd wyobrażony nie jest właściwym sądem. Ta okoliczność objaśnia właśnie, że między nimi może istnieć znak równości. Czem jednak jest to czyste pojęcie, czem jest ten sąd wynaturzony, jeżeli nie są to ani pojęcia, ani sądy? Są to wyobrażenia wyrazów owego odtwarzanego sądu (na tem właśnie polega tego sądu wynaturzenie, że została z niego tylko szata zewnętrzna, istotna zaś natura zanikła). Wyra-

---

to zresztą kwestya psychologiczna, dla teoryi poznania bezwzględnie obojętna.

*) Poza tą grupą pojęć czystych istnieje jeszcze druga, obejmująca pojęcia, dotyczące świata zewnętrznego i mające wprawdzie wyobrażenia podkładowe, lecz nie mające przestrzennych przedmiotów—jest to dziedzina liczb.

zy te same przez się, bez przedmiotu oznaczonego przez wyobrażenie podkładowe, nie mają żadnego znaczenia, są bezmyślnemi wyobrażeniami wzrokowemi lub słuchowemi (flatus vocis). Powstają one jednak z powodu jakiegoś wyobrażenia podkładowego, do którego się mają odnosić i które im nadaje znaczenie, tak że ich bezmyślność w zasadzie się nie uwydatnia i wszystko zazwyczaj przebiega w ten sposób, jak gdybyśmy mieli do czynienia z utworami samymi przez się logicznymi. Jeżeli jednak tak jest, to poco, może kto zapytać, wybierać wypadki psychologicznie trudne do uchwycenia, wypadki graniczne, poco podkreślać nielogiczną z punktu widzenia teoryi poznania naturę sądów wyobrażonych i czystych pojęć, poco twierdzić, że sąd wyobrażony = pojęcie czyste = bezmyślne wyobrażenie wyrazów zdania, wyrażającego sąd odtwarzany, jeżeli w zasadzie dzieje się tak, jak gdyby to wszystko były utwory myślowe? Napewno nie będzie to przedstawiciel nauk ścisłych, kto w sposób podobny zapyta, gdyż ten potrafi ocenić poznawczą wartość twierdzeń, opartych na przejściu do granic, na rozpatrywaniu wypadków granicznych, pozwalających na sformułowanie twierdzeń ścisłych i ogólnych. Tutaj teorya poznania zajęła w stosunku do psychologii stanowisko identyczne z tem, jakie n. p. fizyka matematyczna zajmuje względem fizyki doświadczalnej, lub geometrya ścisła w stosunku do geometryi fizycznej, przybliżonej. I jak geometrya ścisła nie zaprzecza prawdziwości przybliżonym twierdzeniom geometryi fizycznej w dziedzinie fizycznej, choć sama, dążąc do ścisłości, wybiega poza tę dziedzinę przez rozpatrywanie wypadków granicznych, tak i teorya poznania, nie przecząc psychologii w jej dziedzinie, wybiega poza nią i przez oparcie się na wypadkach granicznych osiąga ścisłość i ogólność swych twierdzeń. To oparcie się na wypadkach granicznych pozwala nam tu 1) przez wykazanie, że sąd wyobrażony = czystemu pojęciu, sformułować dla konstrukcyi i poznania przedmiotów geometrycznych twierdzenia wzajemnie sobie odpowiadające i ująć je następnie w jedno ogólne twierdzenie, 2) przez zachowanie terminu „czyste pojęcie“ utrzymać kontakt formalny z kantowskim i leibnitzowskim kierunkiem w filozofii geometryi, kontakt, pozwalający na ścisłe sformułowanie zasadniczych różnic między tymi kierunkami a kierunkiem przez nas reprezentowanym, 3) przez zdanie sobie sprawy z istotnej natury „czystego pojęcia“ zrozumieć niemożność uzasadnienia geometryi na filozoficznych zasadach Kanta lub Leibnitza — i każe nam szukać innego dla niej ugruntowania.

Dwa pierwsze punkty zostały już przez nas rozpatrzone; pozostaje do zbadania punkt trzeci, kwestya uzasadnienia geometryi. Kwestya ta w rzeczywistości składa się z dwóch zagadnień: 1) zagadnienia konstrukcyi zasadniczych utworów geometrycznych (elementów geometrycznych); 2) zagadnienia ich poznania. Krócej się wyrażając, mamy tu kwestyę: elementów geometrycznych i pewników geometrycznych. Rozpatrzenie tych kwestyi będzie stanowiło przedmiot drugiej części niniejszej pracy, tu chcemy tylko zaznaczyć najogólniejsze zasady, jakiemi kierować się będziemy przy uzasadnianiu geometryi, i wskazać na zależność tych zasad od naszego pojmowania istoty czystych pojęć. Dla geometry typu leibnitzowskiego czyste pojęcie jest zasadą ontologiczną, logiczno-metodologiczną i gnozeologiczną, to znaczy będzie on uważał, że utwór geometryczny istnieje jako czyste pojęcie, jest ujmowany zapomocą czystych pojęć i że te czyste pojęcia zapewniają same przez się wartość poznawczą utworom i poznaniom geometrycznym, w które się skrystalizowały. Ten platonizm nie znika również u geometry-kantysty, choć ulega u niego poważnym ograniczeniom; mimo te ograniczenia jednak czyste idee posiadają tu ważność wewnętrzną, posiadają same przez się pewne logiczno-metodologiczne znaczenie. U nas natomiast są to resztki sądów, pozbawione same w sobie wszelkiego myślowego pierwiastku, wszelkiej natury logicznej, bezmyślne wyobrażenia wyrazów, którym trzeba nadać dopiero znaczenie logiczno-metodologiczne i gnozeologiczne. Jeżeli taka jest natura tych pojęć, to oczywiście same przez się zasadami poznawczemi być one nie mogą; trzeba dla ugruntowania nauki wyjść poza nie, inne znaleźć zasady; trzeba przedewszystkiem nadać im, a raczej przywrócić sens, znaczenie logiczne. To znaczenie logiczne odzyskują one—jak wiemy—przez to, że odniesione zostają do wyobrażenia podkładowego; równocześnie zaś otrzymują znaczenie metodologiczne, gdyż stają się sądami potencyalnymi, wiedzą potencyalną o przedmiocie nowo skonstruowanego pojęcia geometrycznego. Mamy tu więc w wyobrażeniach (podkładowych) nową zasadę naszej nauki, nowy element pojęć geometrycznych; element, którego niema ani u Leibnitza, ani u Kanta: według pierwszego bowiem czyste pojęcia wystarczać mają dla uzasadnienia geometryi, drugi w tym celu dodaje do nich tylko czystą, pozbawioną jakości zmysłowych przestrzenność. Lecz, co najważniejsza, ani Kant, ani Leibnitz, ani ich następcy nie podają rzeczywistej zasady gnozeologicznej, zasady, która, gdy chodzi n. p. o konstrukcyę elementów geometrycznych, mogłaby możliwość tej konstrukcyi zapewnić, konstrukcyi tej nadać wartość poznawczą. Leibnitz z góry uważa za możliwą wszelką konstrukcyę elementów geometrycznych, która nie zawiera w sobie sprzeczności logicznej, Kant zaś przypuszcza, że aprioryzm formalny przestrzeni geometrycznej, objaśniający stosowalność czystej geometryi do świata przedmiotów, objaśnia równocześnie możliwość konstrukcyi elementów czystej geometryi, jako takiej — co, oczywiście, tak nie jest*). Taką zasadę gnozeologiczną widzimy w przestrzeni geometrycznej, w jej zasadniczych własnościach, sformułowanych w pierwszym rozdziale niniejszej pracy. Posiłkując się czystemi pojęciami (sądami wyobrażonymi) i danemi wyobrażeniowemi, postaramy się zapomocą tej nowej zasady wyprowadzić elementy i pewniki geometryi euklidesowej, wykazać jej ścisłość i przedmiotową ważność.

*) Por. Bornstein. Krytyka immanentna filozofii geometryi Kanta. Przegląd filozoficzny, 1911, str. 321, 322.

CZĘŚĆ II.

Wywód geometryi euklidesowej.

ROZDZIAŁ V.

Wywód elementów geometryi euklidesowej.

Przedmiot geometryi stanowią możliwe wyznaczenia przestrzeni geometrycznej. Samą przestrzenią geometryczną nie zajmuje się geometrya i oddaje ją, jako przedmiot badań, filozofii geometryi, t. j. teoryi poznania geometrycznego. Jako wyznaczenia elementarne przestrzeni geometrycznej (elementy geometryi) przyjmowane są zazwyczaj: punkt, linia prosta, płaszczyzna. Przez punkt rozumiemy utwór (wyznaczenie) przestrzeni geometrycznej, posiadający rozciągłość $= 0$; przez prostą — utwór jednowymiarowy (linię), posiadający stały kierunek; przez płaszczyznę — utwór dwuwymiarowy (powierzchnię), zawierający wszelką prostą, łączącą dwa jego punkty. Elementy te nie posiadają jednak dla ugruntowania geometryi jednakowej wartości i ważności; pierwsze wśród nich miejsce zajmuje linia prosta, ona jest zasadniczym elementem geometryi. Zaznacza się to przedewszystkiem w tem, że jest to najprostszy utwór rzeczywiście przestrzenny; płaszczyzna pod względem przestrzenności nie ustępuje prostej, jest jednak utworem bardziej od niej skomplikowanym, punkt zaś jest tylko w przestrzeni, lecz nie jest rzeczywiście przestrzenny. Jeżeli więc chcemy zająć stanowisko, odpowiadające naszemu pojmowaniu przestrzeni geometrycznej, jeżeli chcemy uwydatnić przestrzenną naturę téj przestrzeni, musimy punkt geometryczny pozbawić samodzielnego znaczenia i uważać go w istocie rzeczy tylko za element wtórny, otrzymany jako granica między częściami zasadniczego elementu geometryi — rozciągłej linii prostej. Ponieważ stosunkiem punktu do prostej zajmowaliśmy się już w trzecim rozdziale niniejszej pracy, stosunek zaś prostej do płaszczyzny nie ma specyalnego filozoficznego znaczenia*), więc badanie elementów geometrycznych sprowadza się tu samo przez się do bliższego rozpatrzenia istoty linii prostej.

Przedewszystkiem musimy odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób otrzymujemy utwór, zwany geometryczną linią prostą. Jako geometryczna — linia ta jest pozbawiona jakości zmysłowych, jako linia — przedstawia jednowymiarową rozciągłość, jako prosta — posiada bezwzględnie stały kierunek. Nigdzie w doświadczeniu linii takiej nie znajdziemy, nie zna jej fizyka ani psychologia — musimy ją dopiero stworzyć, skonstruować w sposób już nam wiadomy: zapomocą czystych pojęć (sądów wyobrażonych) jako czysto przestrzenną, jednowymiarową i idealnie prostą. Musimy więc oprzeć się na wyobrażeniu (podkładowem) prostej konkretnej, a więc nie idealnej, i przedmiot tego wyobrażenia zapomocą sądu wyobrażonego zidealizować, t. j. przypisać mu nieposiadane przezeń cechy czystości, jednowymiarowości i bezwzględnej stałości kierunku. Wtedy skonstruujemy pojęcie, którego przedmiot przedstawiać będzie prostą geometryczną.

Teraz występuje najważniejsza kwestya: czy przedmiot takiego pojęcia istnieje? Jeżeli przez istnienie rozumiemy

*) Co do strony matematycznej tego stosunku por. Killing: Einführung in die Grundlagen der Geometrie, t. II, 1898, str. 181—186.

byt w świecie fizycznym lub psychicznym, to oczywiście przedmiot ten w tem rozumieniu nie istnieje; jeżeli zaś do istnienia przedmiotu pojęcia wystarczać ma prawidłowość logiczna pojęcia, to przedmiot ten oczywiście istnieje — lecz ani pierwsze nieistnienie, ani drugie istnienie nic nie ma wspólnego z „istnieniem geometrycznem“. „Istnieć“ w znaczeniu geometrycznem nie znaczy to ani być przedmotem fizycznym lub psychicznym, ani też nie znaczy być pozbawionym sprzeczności, t. j. posiadać istnienie logiczne — lecz znaczy: być możliwym w przestrzeni geometrycznej, być jej możliwem wyznaczeniem. Kwestya więc nasza sprowadza się do następującej: czy prosta geometryczna, jako linia o stałym kierunku, jest możliwa w naszej przestrzeni geometrycznej? Że możliwy jest w niej utwór pozbawiony jakości zmysłowych, utwór przytem, który wraz z temi jakościami wyzbył się związanej z niemi wielowymiarowości — to staje się jasnem natychmiast, gdy uświadomimy sobie czystość przestrzeni geometrycznej. Pozostaje tylko do rozstrzygnięcia kwestya stałości kierunku prostej geometrycznej. Sprawa ta wydaje się jednak tak jasną, że bywamy skłonni rozstrzygnąć ją bez rozpatrzenia należytego, wprost przez aksyomatyczne uznanie istnienia takiej prostej, przez zawierzenie fantazyi geometrycznej i przez przyjęcie za jej gwarancyą linii prostej, jako „przedmiotu aksyomatycznego*)“. Lecz postępując w ten sposób, z góry uniemożliwiamy uzasadnienie geometryi euklidesowej, gdyż cała kwestya polega tu na tem, czy prosta o stałym kierunku rzeczywiście może istnieć w naszej przestrzeni geometrycznej i czy, przyjmując właśnie jej istnienie jako

*) Por. Zindler: Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntniss. Sitzungsberichte der phil.-hist. Classe der Akad. der Wissenschaften zu Wien, t. 118, rok 1889.

pewnik wyobraźni nie popełniamy błędu, polegającego n. p. na tem, że uważamy za linię o stałym kierunku łuk koła o bardzo wielkim promieniu. Kwestya więc stałości kierunku linii prostej musi być rozpatrzona, jeżeli chcemy ściśle ugruntować geometryę euklidesową i zabezpieczyć ją przed wszelkiemi napaściami metageometrów — musimy możliwość linii o stałym kierunku wydedukować, a nie przyjąć z góry, jako pewnik. Wywód ten linii prostej będzie przedewszystkiem polegał na uprzytomnieniu sobie właściwości przestrzeni geometrycznej, w której konstrukcya zachodzi, skąd już bezpośrednio widnieć będzie możliwość w naszej przestrzeni linii o stałym kierunku.

Przyczyna, któraby była w stanie uniemożliwić istnienie geometrycznej linii prostej, przedewszystkiem mogłaby polegać na tem, że przestrzeń, w której konstrukcya ta ma mieć miejsce, stawiałaby tego rodzaju konstrukcyi opór. Lecz taki wypadek jest bezwzględnie wykluczony w przestrzeni geometrycznej, której jako cechę zasadniczą, równoważną jej czystości, przypisujemy bierność. Nie może wiec być mowy o oporze przestrzeni geometrycznej przeciw konstrukcyi linii o stałym kierunku. Lecz może linia taka jest niemożliwa w przestrzeni geometrycznej dlatego, że przestrzeń ta posiada luki prostolinijne (o stałym kierunku), uniemożliwiające przeprowadzenie w niej prostych. Lecz i to fantastyczne przypuszczenie musi być zasadniczo odrzucone w imię ciągłości przestrzeni geometrycznej. A więc miejsce dla utworu jednowymiarowego o stałym kierunku trójwymiarowa przestrzeń geometryczna posiada, przeciw konstrukcyi takiej linii oporu żadnego nie stawia — przeto linia prosta, jako linia o stałym kierunku, w naszej przestrzeni geometrycznej jest możliwa, t. j. istnieje geometrycznie. Jeżeli poza tem uświadomimy sobie nieograniczoność przestrzeni geometrycznej, to stanie się oczywiste, że linia prosta może być nieograniczoną, a jako linia o stałym kierunku, a więc linia otwarta, może być tem samem nieskończoną, t. j. posiadać nieskończoną długość. I tak też bywa pojmowana, jeżeli mowa o niej, jako o całości.

Już dzięki temu wywodowi prostej geometrycznej staje się oczywistem, że nasza przestrzeń geometryczna nie jest przestrzenią riemannowską ani typu sferycznego, ani też eliptycznego. Wiadomo, że te obydwa typy przestrzeni riemannowskiej, różniące się między sobą długością swych prostych i, co z tego wynika, przecinaniem się tych prostych w dwóch, względnie jednym punkcie, posiadają jako wspólną charakterystykę tę cechę, że proste ich są zamknięte i posiadają długość skończoną. Tymczasem okazało się, że w naszej przestrzeni geometrycznej istnieją linie proste, jako linie o stałym kierunku, otwarte i nieskończone. Nasza więc przestrzeń geometryczna nie jest przestrzenią riemannowską. Do kwestyi tej będziemy mieli sposobność wrócić jeszcze niejednokrotnie, teraz zaś zajmiemy się bliższem rozpatrzeniem istoty konstrukcyi prostej linii.

Nasza konstrukcya linii prostej jest wręcz odmienna od czysto pojęciowej konstrukcyi racyonalistów typu leibnitzowskiego: u nas linia prosta jest utworem przestrzennym, u nich czysto pojęciowym. Jaka jednak zachodzi różnica między podaną tu konstrukcyą linii prostej a konstrukcyą, zalecaną przez filozofię Kanta? Pozornie wydają się one bardzo podobne, gdyż zarówno tu, jak i tam prosta geometryczna jest utworem czysto przestrzennym i idealnym. W istocie jednak istnieje między niemi zasadnicza różnica, polegająca przedewszystkiem na tem, że konstrukcya kantowska nie opiera się zupełnie na elemencie empirycznym i z tego powodu jest, jak zaraz zobaczymy, w rzeczywistości niewykonalna. Według Kanta skonstruować pojęcie znaczy przedstawić odpowiadający mu ogląd aprioryczny bezwzględnie ścisły, znaczy unaocznić, uzmysłowić w nim to pojęcie. Czem jest jednak dla Kanta pojęcie linii prostej, co pojęcie to w sobie zawiera? Jest to pojęcie o tem, co proste („Krytyka czystego rozumu", polski przekład, str. 50), a więc pojęcie o stałości kierunku linii; przytem pojęcie to przed uzmysłowieniem nie zawiera w sobie żadnego elementu zmysłowego (przestrzennego), gdyby go bowiem zawierało, nie trzebaby pojęcia było dopiero uzmysławiać, unaoczniać, konstruować, aby otrzymać element prawdziwie geometryczny. Jakież to jednak może być pojęcie o prostolinijności, o stałości kierunku, o czemś więc wybitnie przestrzennem, w którem niema jednak żadnego elementu przestrzennego, które samo w sobie nie ma żadnego przestrzennego podłoża? Może to być, oczywiście, tylko nasze pojęcie graniczne, czyste, bezmyślne pojęcie, przy którem nic sobie nie wyobrażamy, a które, jak widzieliśmy, jest identyczne z wynaturzonym sądem bez przedmiotu, z sądem, który również można nazwać czystym, gdyż jest pozbawiony podłoża wyobrażeniowego. Takie czyste pojęcia, takie czyste sądy—to kantowskie sądy analityczne; za ich to pomocą mamy konstruować prostą, by o niej módz wypowiedzieć pewniki, sądy syntetyczne. Lecz taki sąd czysty nie ma żadnego znaczenia, o ile nie podłożymy podeń wyobrażenia podkładowego, które mu dopiero znaczenie to nada. A wyobrażenie to nie może być przecież, nawet z punktu widzenia Kanta, idealnem, gdyż dopiero naskutek konstrukcyi czystego pojęcia wyobrażenie takie może stać się idealnie ścisłem, geometrycznem. Jeżeli więc się nie chce—idąc za Kantem—podłożyć pod to pojęcie wyobrażenia empirycznego, to dla urzeczywistnienia konstrukcyi kantowskiej trzeba mimo wszystko, by pod czyste pojęcie podłożone zostało wyobrażenie, które dopiero może być otrzymane przez urzeczywistnienie tej konstrukcyi. To błędne koło jest wymownym dowodem niemożliwości urzeczywistnienia konstrukcyi pojęć geometrycznych w systemie Kanta.

Żeby konstrukcya zasadniczego elementu geometrycznego mogła być urzeczywistniona, trzeba koniecznie czyste pojęcie odnieść od utworu skądinąd nam danego, do konkretnej, empirycznej prostej, trzeba wyjść poza sferę czystych pojęć i niezróżniczkowanego wyobrażenia przestrzenności, nie mogącego nadać znaczenia pojęciom, odnoszącym się do jego wyznaczeń, do jego specyfikacyi. Niemożliwa do urzeczywistnienia, gdyż w błędnem obracająca się kole, konstrukcya kantowska, mająca polegać na uzmysłowieniu pojęcia, musi ustąpić miejsca konstrukcyi, zasadzającej się na zidealizowaniu wyobrażenia, na upojęciowieniu elementu empiryczno-zmysłowego. Jako rezultat tej myślowej konstrukcyi otrzymamy idealną prostą geometryczną, nie ustępującą pod względem określoności prostej czysto pojęciowej, mającą jednak nad tą ostatnią tę nieocenioną wyższość, że co do niej mogliśmy wykazać jej charakter przedmiotowy, jej możliwość w naszej przestrzeni geometrycznej, z czego trzeba zupełnie zrezygnować, gdy idzie o prostą czysto pojęciową, określoną w sposób konwencyonalny. Mając teraz zapewnione istnienie geometryczne linii prostej, zajmiemy się elementarnemi twierdzeniami, dotyczącemi tej linii.

ROZDZIAŁ VI.

Wywód pewników geometryi euklidesowej.

Ażeby zbudować geometryę, trzeba przedewszystkiem poznać elementarne stosunki, zachodzące między jej elementami. Twierdzenia, formułujące te elementarne stosunki, zwą się pewnikami. Podobnie jednak jak w kwestyi możliwości linii prostej w naszej przestrzeni geometrycznej nie zadowoliliśmy się prostem przyjęciem tej możliwości, lecz możliwość tę staraliśmy się wyprowadzić z własności przestrzeni geometrycznej, tak również i pewników geometrycznych nie możemy wprost przyjąć, jako przedmiotowo pewne, lecz musimy je dopiero jako takie wyprowadzić. Dla uniknięcia nieporozumień trzeba tu ściśle odróżniać dwie kwestye: kwestyę podmiotowej pewności i kwestyę pewności przedmiotowej. Z pierwszego punktu widzenia pewniki, dotyczące naszych elementów geometrycznych, są to sądy bezpośrednio pewne, to znaczy sądy, których pewność nie polega na wywodzie logicznym z innych sądów; natomiast z drugiego punktu widzenia są to sądy, których pewność przedmiotowa musi być dopiero wyprowadzona, a więc poznana pośrednio zapomocą wywodu, charakterystycznego dla teoryi poznania. W tem właśnie znaczeniu mówimy tu o wywodzie pewników, w tem również znaczeniu mówiliśmy o wywodzie elementów geometrycznych. Zanim jednak przejdziemy do tego przedmiotowego wywodu pewników, rozpatrzymy nasamprzód ich podmiotową pewność, przyczem zajmiemy się tymi z pośród nich, które mają bezpośrednie znaczenie dla ugruntowania geometryi euklidesowej.

Przedewszystkiem rozpatrzmy pewnik, głoszący, że między dwoma punktami istnieje jedna tylko prosta. Jeżeli przedstawimy sobie linię prostą, t. j. linię o stałym kierunku, i jeżeli weźmiemy na niej dwa jakiekolwiek punkty, to już przez to samo pewni będziemy, że przez dwa punkty przechodzi linia prosta. Lecz czy tylko jedna? Żeby na to pytanie odpowiedzieć z bezwzględną pewnością, trzeba tylko uświadomić sobie istotę idealnej linii prostej, jej bezwzględną prostolinijność, absolutną stałość jej kierunku. Jeżeli to sobie uświadomimy, to posiądziemy pewność bezwzględną*), że linia prosta między dwoma punktami = jedyna linia prosta między tymi punktami. Dzięki ustanowieniu tej tożsamości zdobywamy pewnik o prostej, wykazujący (przy antycypacyi rezultatu wywodu przedmiotowego) niesferyczny charakter naszej przestrzeni; w przestrzeni bowiem sferycznej istnieją punkty, prostej jednoznacznie nie wyznaczające. Lecz może kto zapytać, skąd wiemy, że w naszej przestrzeni geometrycznej punktów takich niema; może istnieją, a tylko my o ich istnieniu nie wiemy. Uznanie takich punktów byłoby równoznaczne z twierdzeniem, że dwie proste przecinają się w dwóch punktach. Jeżeli jednak uświadomimy sobie bezwzględnie stały kierunek prostej, to twierdzenie to okaże

*) Pewność bezwzględną dla nas, ludzi, t. j. równą pewności zasady tożsamości.

się dla nas niemniej sprzeczne, niż twierdzenie równocześnie przyznające i zaprzeczające prostej jej prostolinijny charakter, stałość jej kierunku. Przytem powinniśmy uświadomić sobie jasno, że niemożliwość uznania przez nas pary prostych, przecinających się w dwóch punktach, ma swe źródło wyłącznie w samej naturze tych prostych, w ich bezwzględnej prostolinijności, i zupełnie nie zależy od rozpatrzenia rozmaitych stosunków, w jakich te dwie proste znajdują się względem siebie, n. p. ich wzajemnego nachylenia. Że tak jest w istocie rzeczy, że więc możemy zdobyć bezwzględną pewność o nieprzecinaniu się dwóch linii o stałym kierunku więcej niż w jednym punkcie bez rozpatrywania niezliczonych wypadków dwóch linii prostych o rozmaitym kącie nachylenia, stanie się rzeczą oczywistą, gdy sobie przypomnimy, żeśmy tę pewność pośrednio już zdobyli przez rozpatrzenie jednej jedynej tylko prostej. Było to wtedy, gdyśmy wywód przedmiotowy linii prostej zastosowali do wykazania nieriemannowskiego charakteru naszej przestrzeni. Posiłkowaliśmy się wtedy następującem bezpośrednio i bezwzględnie pewnem twierdzeniem: linia nieograniczona o stałym kierunku = linia nieograniczona otwarta (= linia nieskończona). Tożsamość ta widnieje bezpośrednio, jeżeli tylko przedstawimy sobie linię o stałym kierunku. Wiedząc jednak, że prosta linia jest linią nieskończoną, wiemy także, że nie jest prostą riemannowską, a co nas teraz bezpośrednio interesuje, że nie jest prostą riemannowską typu sferycznego. To zaś jest równoznaczne z twierdzeniem, że nie jest prostą, która drugą prostą przecina w dwóch punktach. Przekonywamy się tedy, że pewność pewnika o linii prostej ma swe źródło ostateczne w przedstawieniu sobie stałości kierunku linii prostej, a nie w uwzględnianiu najrozmaitszych położeń dwóch przecinających się prostych. Uwaga ta z odpowiedniemi zmianami dotyczy wszystkich wogóle pewników: pewność ich nie polega — jak przypuszcza n. p. Kroman *) — na niezliczonej ilości obserwacyi w najrozmaitszy sposób zmodyfikowanych, nie polega na indukcyi, która nigdy bezwzględnej pewności dać nie jest w stanie, lecz zasadza się na bezpośredniem stwierdzeniu pewnej tożsamości lub sprzeczności, na stwierdzeniu, które posiada pewność bezwzględną, gdyż dotyczy utworów najprostszych, przytem idealnych, i ma swe źródło tylko w samej naturze utworów geometrycznych, a nie w ich przypadkowem ugrupowaniu. Że zaś takie bezpośrednie stwierdzenie pewnych elementarnych własności utworów przestrzennych ma znaczenie nie tylko bezwzględnie konieczne, lecz i powszechne, to znaczy posiada ważność dla wszystkich utworów tego rodzaju w przestrzeni geometrycznej — to mamy zapewnione przez jednorodność przestrzeni geometrycznej, będącą wyrazem niezmienności utworów przestrzennych, tożsamości ich własności pomimo zajmowania przez nie rozmaitych miejsc w przestrzeni geometrycznej. Zarówno więc konieczność, jak i powszechność pewników geometrycznych nie jest pochodzenia indukcyjnego. Trzeba jednak pamiętać, że o ile ta powszechność ma już tu bezpośrednio charakter przedmiotowy, gdyż oparta jest na zasadniczej własności przestrzeni geometrycznej, to konieczność (pewność) pewników tymczasem jest jeszcze z punktu widzenia teoryi poznania natury podmiotowej, co zupełnie nie przeczy bezwzględnej pewności pewników z punktu widzenia psychologicznego. Zanim podamy ogólną zasadę przedmiotowego wywodu pewników, rozpatrzymy

---

*) Kroman. Unsere Naturerkenntniss (tł. niem., 1883), str. 87.

jeszcze pod względem pewności podmiotowej (psychologicznej) pewnik o prostych równoległych.

Wiemy, że pewnik 11-ty (postulat V-ty) Euklidesa, dotyczący linii równoległych, jest równoważny bezwzględnie (to znaczy bez względu na przyjęcie lub nieprzyjęcie pewnika Archimedesa) z pewnikiem, orzekającym: dwie proste równoległe są równoodległe *), t. j.: dwie proste tej samej płaszczyzny, które, przedłużone do nieskończoności, nie spotykają się, zachowują zawsze jednakową między sobą odległość. To zaś oznacza, że jeżeli do danej prostej przez punkt zewnątrz niej położony poprowadzimy prostą równoległą (a możemy ją poprowadzić na zasadzie twierdzenia 27-go Euklidesa, niezależnego od pewnika o równoległych), to prosta ta zachowywać będzie na całej swej długości jednakową odległość od danej prostej, t. j. nie będzie linią asymptotyczną, czyli linią nie przecinającą danej prostej, choć zbliżającą się do niej na odległość nieograniczenie małą. Ażeby przekonać się o bezwzględnej prawdzie tego pewnika, wystarczy przedstawić sobie daną prostą, punkt pozewnątrz niej i dowolną linię przez punkt ten przeprowadzoną, a asymptotyczną do danej prostej. Jeżeli teraz uświadomimy sobie idealną stałość kierunku linii prostej, to z bezwzględną pewnością stwierdzimy niemożliwość, by linia asymptotyczna do danej prostej mogła być linią prostą. To zaś jest logicznie równoznaczne ze stwierdzeniem pewnika, że linia równoległa do danej prostej nie jest asymptotyczna, t. j. zachowuje wszędzie jednakową od niej odległość. W ten lub podobny sposób z bezwzględną pewnością możemy przekonać się o prawdzie pewnika o równoległych.

---

*) Por. Bonola: Die Nichteuklidische Geometrie (tł. niem., 1908), str. 126, 127.

Uświadamiamy sobie przytem, że pewności jego nie przynosi najmniejszego uszczerbku ta okoliczność, że został stwierdzony zapomocą dowolnej linii asymptotycznej, przeprowadzonej przez dowolny punkt, gdyż zdajemy sobie sprawę, że pewnik ten jest wyłącznie ugruntowany w naturze linii prostej, w stałości jej kierunku, jako cesze niemożliwej w żadnej linii asymptotycznej. Jeżeli linia prosta jest linią prostą, to nie jest asymptotą prostej.

Przeciwko zawierzaniu jednak tej podmiotowej pewności, płynącej z rozważania utworów przestrzennych, wciąż występują racyonaliści najrozmaitszych typów, a specyalnie matematycy — analitycy, powołując się na rzekome błędy, w które jakobyśmy wpadali wtedy, gdy czerpiemy prawdy geometryczne z przedstawień przedmiotów przestrzennych. Jako najbardziej przekonywający przykład takiego rodzaju błędów wytaczana bywa zazwyczaj znana nam kwestya krzywych bez stycznych. Widzieliśmy jednak, czem jest w istocie swej ten sceptycyzm, skierowany przeciwko prawdom oczywistym pochodzenia przestrzennego. Z danych analizy, że istnieją funkcye ciągłe bez pochodnych, wyprowadza on błędny wniosek, że istnieją krzywe bez stycznych, co, jak wykazaliśmy, jest pozbawione słuszności. Nie odróżnia ten dogmatyzm racyonalistyczny dziedziny czysto przestrzennej od dziedziny czysto pojęciowej, przez co popada w sprzeczności z bezsprzecznemi danemi przestrzennemi i jedyne wyjście z tego położenia znajduje w pozbawionym wszelkiej podstawy sceptycyzmie, skierowanym przeciwko prawdom elementarnym pochodzenia przestrzennego. Pewność podmiotowa tych prawd jest jednak dla nas tak wielka, jak pewność prawa tożsamości, gdyż odkrycie tych prawd nie polega na niczem innem, jak na odwołaniu się równoczesnem do pierwiastku przestrzennego i do prawa tożsamości, to znaczy na oparciu się na definicyi przedstawienia przestrzennego. Jeżelibyśmy chcieli oddać w sformułowaniu pewników moment psychologiczny, charakteryzujący ich genezę, to formułowalibyśmy je w sposób następujący. „Jeżeli prosta jest prostą, to dwie proste przecinają się w jednym tylko punkcie; gdzie prosta = linia o stałym kierunku“ i t. p. W ten sposób wyrazilibyśmy ten fakt psychologiczny, że stwierdzenie stosunków, zachodzących między elementami geometrycznymi, zasadza się na dokładnem uświadomieniu sobie istoty tych elementów, wyrażonej w odnośnych definicyach, i że zaprzeczenie prawdziwości pewnika, n. p. o przecinaniu się dwóch prostych, jest dla nas równoważne z zaprzeczeniem prawa tożsamości. Jeżeli jednak tak wielka jest dla nas pewność twierdzeń elementarnych, opartych na rozważaniu ściśle określonego pierwiastku przestrzennego, to trzeba argumentów zupełnie innego rodzaju, niż przytaczanie nie istniejących krzywych bez stycznych, by nas przekonać o możliwej tu złudzie.

A złuda ta mimo wszystko jest w zasadzie możliwa. Najbardziej pewne przedstawienia i sądy na nich oparte mogą nas przy niekrytycznej interpretacyi ich znaczenia wprowadzić w błąd. Wszak patrząc na pręt, zanurzony w pewien sposób w wodzie, posiadamy bezwzględną pewność, że jest on złamany, mimo to jednak jest on prostolinijny. Cóż tu zachodzi? czy nasz sąd, oparty na wyobrażeniu złamanego pręta, jest błędem? Lecz to jest niemożliwe, nie może być nic pewniejszego nad to, że pręt, który widzimy, jest złamany. A więc pręt jest złamany? Oczywiście — lecz tylko w naszem wyobrażeniu. Jako treść naszego wyobrażenia jest on złamany, i gdyby przedmiot tego wyobrażenia istniał w świecie fizycznym, to byłby to pręt zanurzony w wodzie i złamany.

Lecz w danym wypadku nie istnieje on w świecie zewnętrznym, a tylko w naszem wyobrażeniu, jako jego treść, i jeżeli przedmiotowi naszego wyobrażenia, bezwzględnie pewnego, jako wyobrażenie, przypisujemy zbyt pośpiesznie istnienie w świecie fizycznym, a nie tylko psychicznym, to popełniamy błąd, który niesłusznie przypisujemy zmysłom, gdyż polega on na niekrytycznem przekroczeniu dziedziny psychicznej, wyrażającem się w naszym sądzie o istnieniu fizycznem przedmiotu zanurzonego w wodzie i złamanego. — Podobnie mogłoby się zdarzyć i w dziedzinie, która nas teraz interesuje. Sąd, orzekający, że dwie proste przecinają się w jednym tylko punkcie, mógłby posiadać dla nas bezwzględną pewność, a mimo to mógłby być błędny, jeżelibyśmy przedmioty tego sądu uważali bez uprzedniego wywodu za przedmioty przestrzeni geometrycznej; sąd ten jednak o dwóch przecinających się prostych, odniesiony do tych prostych, jako treści psychicznych (pojęć), a nie jako przedmiotów geometrycznych, jest równie bezwzględnie pewny, jak nasz sąd o złamanym pręcie, odniesiony do tego prętu, jako treści psychicznej (wyobrażenia), a nie jako przedmiotu fizycznego. Widzimy więc, że pewność podmiotowa, choćby bezwzględna, nie gwarantuje nam pewności przedmiotowej, i że pewniki geometryczne podmiotowo bezwzględnie pewne mogłyby być przedmiotowo błędne, gdyby się okazało, że ich przedmioty nie są właściwymi przedmiotami geometrycznymi, a tylko przez nas za takie niekrytycznie są poczytywane. Trzeba więc dla ugruntowania geometryi wykazać, że przedstawienia, których dotyczą pewniki, są nie tylko treściami psychicznemi, lecz że ich przedmioty posiadają prawdziwe istnienie geometryczne, są prawdziwymi elementami geometrycznymi. A że geometrycznie istnieć znaczy być możliwym w przestrzeni geometrycznej, trzeba więc wykazać, że linie o stałym kierunku i nierozciągły punkt (ograniczamy się tu do geometryi płaskiej) są możliwe w przestrzeni geometrycznej. Słowem, by wykazać przedmiotową konieczność (pewność) pewników geometrycznych, trzeba wykazać możliwość linii o stałym kierunku i nierozciągłego punktu w przestrzeni geometrycznej, czyli że wywód (przedmiotowej konieczności) pewników geometrycznych sprowadza się do wywodu elementów geometrycznych. Ten zaś wywód został przez nas dla linii prostej przeprowadzony w poprzednim rozdziale, a dla punktu geometrycznego w rozdziale trzecim niniejszej pracy. Zabezpiecza on nas tu ostatecznie od możliwości jakichkolwiek „złudzeń geometrycznych“ i zapewnia przedmiotową konieczność podmiotowo bezwzględnie pewnym pewnikom geometryi euklidesowej. To znaczy: *pewniki geometryi Euklidesa są bezwzględnie ścisłem sformułowaniem stosunków, zachodzących w przestrzeni geometrycznej.*

Lecz jeżeli jest tak, jak mówimy, to stąd wypływa wniosek, że z istotą przestrzeni geometrycznej nie zgadzają się ani pewniki, charakterystyczne dla geometryi riemannowskiej, ani też te, które charakteryzują geometryę Łobaczewskiego (a więc nie zgadza się ani pewnik, głoszący, że do danej prostej nie można przeprowadzić żadnej równoległej, ani też pewnik, orzekający możliwość dwóch prostych, przechodzących przez punkt zewnątrz danej prostej i do prostej tej równoległych). To zaś znaczy, że *jeżeli przestrzeń geometryczną określimy jako nieograniczoną trójwymiarową rozciągłość ciągłą i jednorodną, to geometrya nieeuklidesowa, jako geometrya takiej przestrzeni, będzie logicznie niemożliwa, będzie sprzeczna z własnościami tej przestrzeni.* Wbrew temu metageometrya twierdzi, że geometrya nieeuklidesowa może być geometryą takiej przestrzeni, i jako dowód przytacza, że po zastąpieniu pewnika o równoległych przez odpowiednie pewniki Riemanna lub Łobaczewskiego system pewników, w ten sposób otrzymany, nie będzie zawierał w sobie żadnej sprzeczności i będzie mógł przeto służyć za podstawę dla dedukcyi geometryi nieeuklidesowych. Lecz dowód ten oznacza to tylko, że pewnik o równoległych nie wypływa logicznie z innych pewników, że więc po odpowiedniem zastąpieniu go otrzymamy nie zawierający sprzeczności logicznej system sądów i z niego będziemy mogli wysnuwać wnioski logiczne, zupełnie jednak nie mówi o tem, czy ten nowy pewnik, choć zgodny z pozostałymi pewnikami, jest zgodny również z zasadniczemi własnościami przestrzeni, której ma dotyczyć. Jeżeliby geometrya nieeuklidesowa chciała przedstawić tylko system sądów, nie zawierających sprzeczności, lecz nie roszczących sobie pretensyi do tego, by przedstawiały stosunki logicznie możliwe w przestrzeni geometrycznej, posiadającej określone własności, to pod względem logicznym byłaby bez zarzutu, lecz oczywiście nie byłaby geometryą, a logiką lub analizą; jeżeli jednak ma ona przedstawiać stosunki możliwe w jednorodnej i ciągłej przestrzeni trójwymiarowej, to dla jej logicznej możliwości nie wystarcza wzajemna zgodność jej pewników, lecz wymagana jest jeszcze zgodność tych pewników z zasadniczemi własnościami przestrzeni geometrycznej. Bo gdyby ta ostatnia zgodność miejsca nie miała, to geometrya nieeuklidesowa nie mogłaby przedstawiać stosunków logicznie możliwych w wyżej określonej przestrzeni, a więc, jako geometrya tej przestrzeni, byłaby logicznie niemożliwa, choć, jako system sądów samych w sobie, nie przedstawiałaby sprzeczności. Można tego dowieść równie ściśle, jak logicznej niemożliwości krzywej przestrzennej bez stycznych. Dowód ten jednocześnie będzie dowodem tego, że elementem przestrzeni, o której mowa, jest prosta, czyniąca zadość pewnikom euklidesowym o wyznaczalności prostej przez dwa jej punkty i o równoległych prostych. Dowieść logicznie nie można tego tylko, że ta prosta jest linią o stałym kierunku, oczywiście dlatego, że wchodzi tu w grę kierunek, element przestrzenny ostateczny, nieprzywiedlny *). Lecz pomijając już to, że jest to rzeczą dla nas bezpośrednio i bezwzględnie pewną, trzeba pamiętać o tem, że kwestya ta jest kwestyą domową geometryi euklidesowej i przy decydowaniu o możliwości logicznej geometryi nieeuklidesowych w grę zupełnie nie wchodzi. O tej możliwości, względnie niemożliwości rozstrzyga tylko zgodność, względnie niezgodność założeń tych geometryi z własnościami zasadniczemi przestrzeni geometrycznej. Zanim jeszcze bliżej zajmiemy się kwestyami metageometrycznemi, chcemy też teraz nasz wywód przedmiotowej ważności geometryi euklidesowej potwierdzić ostatecznie przez wyłożenie sprzeczności logicznej, tkwiącej w geometryi nieeuklidesowej, jako geometryi trójwymiarowej jednorodnej przestrzeni geometrycznej.

Wywody Riemanna, dotyczące geometryi nieeuklidesowych, uchodzą dotychczas wśród zwolenników metageometryi za jedne z najbardziej przekonywających o logicznej poprawności tych geometryi. Jednakże ich sprzeczność z jednorodnością przestrzeni geometrycznej widnieje już bezpo-

---

*) Można jednak dowieść analitycznie, posiłkując się wyższemi przekształceniami, że w przestrzeni *ciągłej* (bez przerw) istnieje jeden tylko system linii, czyniących zadość pewnikom Euklidesa o prostej i o równoległych (por. Weber und Wellstein: Encyklopädie der Elementar-Mathematik, t. II, 1907, str. 117).

średnio—według słusznej uwagi Pietzkera *) — z zasadniczej formuły, którą Riemann ustanawia dla elementu liniowego przestrzeni o stałej krzywiznie, t. j. przestrzeni jednorodnych. Formuła ta jest następująca:

$$ds = \frac{\sqrt{\Sigma\, dx^2}}{1 + \frac{\alpha}{4}\,\Sigma\, x^2},$$

gdzie α oznacza stałą krzywiznę przestrzenną, większą od zera, równą mu lub mniejszą od niego, w zależności od tego, czy dana przestrzeń jest sferyczna, euklidesowa lub Łobaczewskiego. Dla dwóch wymiarów przybiera ona formę:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 + \frac{\alpha}{4}\,(x^2 + y^2)}.$$

Dla jednego:

$$ds = \frac{dx}{1 + \frac{\alpha}{4}\,x^2}.$$

Jeżeli $\alpha = 0$, wtedy mamy dla dwóch wymiarów: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, dla jednego zaś: $ds = dx$. Znaczy to, że przestrzeń euklidesowa jest jednorodna, gdyż element przestrzenny ds nie jest w niej zależny od położenia w przestrzeni, t. j. od wartości x, y dla dwóch, od wartości zaś x dla jednego wymiaru. Poza tem formuła $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ oznacza, że przestrzeń euklidesową charakteryzują pewniki o prostej i o równoległych, tutaj uwydatnione pod postacią wzoru Pytagorasa. Jeżeli jednak α jest nierówne zeru, t. j. jeżeli mamy przestrzeń sferyczną lub Łobaczewskiego, wtedy element długości zależny jest w nich od położenia w prze-

*) Pietzker. Die Gestaltung des Raumes, 1891, str. 35-37.

strzeni (od x, y), a więc przestrzenie te nie są jednorodne, gdyż ostateczna jednostka długości nie utrzymuje w nich swej stałej długości, nie pozostaje równa samej sobie. I tak w przestrzeni sferycznej, gdzie $\alpha > 0$, *ds* jest maximum dla $x = 0$ (ograniczamy się do jednego wymiaru), poczem w miarę oddalania się od początku współrzędnych wciąż się zmniejsza; w przestrzeni zaś Łobaczewskiego, gdzie $\alpha < 0$, *ds* jest minimum dla $x = 0$, poczem w miarę oddalania się od początku współrzędnych wciąż wzrasta. W obydwóch wypadkach geometryi nieeuklidesowej element długości nie pozostaje równym samemu sobie, co jest równoznaczne z niejednorodnością przestrzeni geometrycznej, którą ma charakteryzować. A więc: „geometrye" nieeuklidesowe, choć logicznie możliwe, jako formuły czysto analityczne, nie są jednak logicznie możliwe, jako geometrye jednorodnej trójwymiarowej przestrzeni geometrycznej. Sprzeczność logiczna istnieje w samych formułach Riemanna, gdzie α = constans oznacza jednorodność przestrzeni, zależność zaś *ds* od współrzędnych—jej niejednorodność, staje się jednak widoczna dopiero przy interpretacyi znaczenia, jakie tu posiada α, analitycznie zaś formuły te do sprzeczności nie prowadzą, gdyż dla analizy α jest tylko wielkością stałą i niczem więcej. Tak więc i zapomocą dedukcyi logiczno-matematycznych przekonywamy się o tem, że przestrzeń geometryczna, jako nieograniczona trójwymiarowa rozciągłość ciągła i jednorodna, może być tylko przestrzenią euklidesową. Teraz już łatwo będzie nam rozstrzygnąć kwestyę stosunku geometryi euklidesowej do doświadczenia, przeprowadzić dowód jej ważności empirycznej. Lecz zanim do tego przejdziemy, powróćmy jeszcze na chwilę do pojęcia linii prostej.

Pojęcie to zostało skonstruowane (właściwie: zrekonstruowane) w ten sposób, że do wyobrażenia prostej odnieśliśmy sąd wyobrażony (pojęcie czyste), przypisujący jej cechy czystości, jednowymiarowości i stałości kierunku. Na zasadzie tego pojęcia w każdej chwili możemy podać definicyę prostej, jako linii geometrycznej, posiadającej stały kierunek. Lecz możemy otrzymać jak gdyby wyższe, pełniejsze pojęcie prostej geometrycznej, jeżeli do pojęcia pierwotnego tej linii odniesiemy jej własności sformułowane w sądach wyobrażonych, odtwarzających n. p. pewniki o prostej i o równoległych. Przedstawieniem podkładowem tego nowego pojęcia będzie już nie wyobrażenie konkretnej prostej, a pojęcie prostej idealnej, lecz to zasadniczej różnicy nie stanowi, ponieważ pojęcie prostej idealnej zawiera przecież w sobie wyobrażenie prostej konkretnej, tak że w każdym razie to nowe pojęcie będzie miało podkład wyobrażeniowy. Na zasadzie tego pojęcia w każdej chwili będziemy mogli podać definicyę prostej geometrycznej oraz jej własności, polegające na tem, że jest ona jednoznacznie wyznaczona przez dwa punkty, jak również że przez punkt zewnątrz niej położony można poprowadzić do niej tylko jedną równoległą. Chcemy tu zwrócić uwagę na zasadniczą różnicę, jaka istnieje między pojęciem czystem, zapomocą którego skonstruowaliśmy pierwotne pojęcie prostej geometrycznej, a pojęciami czystemi, konstruującemi pojęcie pochodne tej linii. Pierwsze pojęcie czyste (sąd wyobrażony: prosta linia jest utworem geometrycznym jednowymiarowym o stałym kierunku) może otrzymać znaczenie logiczne tylko przez odniesienie do utworu przestrzennego, gdyż orzekać ma ono własność wyłącznie przestrzenną (stałość kierunku jednowymiarowego utworu geometrycznego); natomiast pojęcia czyste, odpowiadające pewnikom geometrycznym, mogą stać się utworami logicznymi wtedy również, gdy podłożone pod nie zostaną utwory nieprzestrzenne. Ma zaś to miejsce dlatego, że te pojęcia czyste drugiej kategoryi formułować mają nie własności przestrzenne, lecz pewne stosunki, mogące zachodzić również między utworami nieprzestrzennymi, n. p. stosunek dwóch elementów tej samej klasy do elementu innej klasy, polegający na tem, że o ile są dane pierwsze dwa elementy, to dany jest i drugi. Uwaga ta, podkreślająca różnicę między pojęciami czystemi obydwóch kategoryi, będzie dla nas specyalnie ważna, gdy zajmiemy się t. zw. geometryą abstrakcyjną. Teraz zaś przejdziemy do rozpatrzenia stosunku geometryi euklidesowej do doświadczenia.

ROZDZIAŁ VII.

Geometrya euklidesowa a doświadczenie.

Przy rozpatrywaniu stosunku geometryi euklidesowej do doświadczenia specyalnie uwydatnia się dobroczynny wpływ, jaki wywiera na zoryentowanie się w istocie i znaczeniu geometryi uwzględnianie elementu przestrzennościowego przestrzeni geometrycznej i jej zasadniczych utworów. Ażeby się o tem przekonać, najlepiej będzie, jeżeli nasamprzód zobaczymy, w jakiem położeniu przy decydowaniu o przedmiotowo doświadczalnej wartości geometryi euklidesowej znajdują się ci, którym brak sprzeczności w formułach analitycznych wystarcza, by widzieć w nich geometryę nieeuklidesową, a następnie porównamy z tem te rezultaty, do których dochodzi się, wychodząc ze stanowiska, przez nas zajętego.

Z punktu widzenia czysto logicznego lub czysto analitycznego twierdzenia lub formuły geometryi nieeuklidesowej nie zawierają sprzeczności, są logicznie możliwe, są równie uprawnione, jak twierdzenia i formuły geometryi euklidesowej. Jeżeli teraz zwolennicy czysto logicznego lub czysto analitycznego pojmowania geometryi zwrócą się do doświadczenia z pytaniem, który z trzech logicznie możliwych systemów twierdzeń jest ważny dla doświadczenia i znajduje w niem potwierdzenie, to muszą być przygotowani na to, że odpowiedzi na to pytanie nie otrzymają. Bo choć pomiary trójkątów ziemskich i niebieskich dotychczas zawsze wykazywały sumę ich kątów jako równą dwóm prostym, to jednak wobec zajęcia błędnego stanowiska czysto logicznego wciąż pozostawałoby niewiadomem, czy osiągniętoby ten sam rezultat, gdyby boki tych trójkątów były idealnemi prostemi i gdyby idealnymi były nasze instrumenty. Ponieważ jednak instrumenty nasze nie są idealne, a bezwzględna prostolinijność również nie może być w doświadczeniu zagwarantowana, więc zawsze pozostawałoby możliwem, że w trójkątach o bokach ściśle prostolinijnych suma kątów byłaby nieco mniejsza lub większa od dwóch prostych — innemi słowy, że byłyby one nieeuklidesowe; to zaś, że pomiary trójkątów wykazują ich sumę jako równą dwóm prostym, przypisaćby wtedy należało w pierwszym rzędzie niedoskonałości naszych pomiarów, w drugim — możliwej nieprostolinijności boków rozpatrywanych trójkątów. Gdyby zaś kiedyś nowe pomiary trójkątów ziemskich czy niebieskich wykazały odstępstwo sumy ich kątów od $2\,d$, wtedy znów trudno byłoby się analitykom zdecydować, skąd pochodzi ta różnica, czy z nieścisłości naszych instrumentów lub boków tych fizyczno-astronomicznych trójkątów, czy też rzeczywiście z ich nieeuklidesowej natury. Słowem, gdy zwracamy się do doświadczenia, by nam wskazało, który z możliwych logicznie systemów znajduje w niem potwierdzenie, który jest prawdziwy, to doświadczenie na to pytanie nigdy nie będzie mogło dać nam odpowiedzi, gdyż jego dane będą przedstawiały wielkość stałą w równaniu z dwiema niewiadomemi (jedną geometryczną, drugą fizyczną), a więc będą niedostateczne do ścisłego rozwiązania tego równania co do niewiadomej geometrycznej.

Jeżeli chodzi o sumę kątów w trójkącie fizycznym, to ogólny wzór, zapomocą którego można przedstawić zależność danych doświadczalnych od czynników geometrycznych i fizycznych, $k = f(x, y)$, sprowadzić się daje do równania liniowego $x + y = k$, gdzie x będzie wielkością, wyrażającą sumę kątów w trójkącie o bokach idealnie prostych, y—błędem, wynikającym z nieidealności linii i nieścisłości pomiarów, k zaś będzie oznaczało daną przez doświadczenie sumę kątów w trójkącie. Jeżeli mimo dwie niewiadome tego równania chce się jednak wyprowadzić z niego jakieś wnioski, to można to uczynić w dwojaki sposób, z których jeden będzie charakterystyczny dla empiryzmu, drugi — dla konwencyonalizmu. Mianowicie: 1) opierając się na tem, że y jest wielkością znikomo małą, można powiedzieć, że dotychczasowe doświadczenia potwierdzają w granicach ścisłości pomiarów słuszność hipotezy euklidesowej, lecz że może być ona obaloną przez doświadczenia przyszłe, o ile dadzą one dla k wielkości inne, niż dotychczas przez nas otrzymywane — jest to stanowisko, zajmowane przez wszystkich metageometrów - empiryków, poczynając od Gaussa, kończąc na Enriques'ie*); lub 2) można umówić się, że z pośród logicznie możliwych i równouprawnionych systemów wybieramy system Euklidesa, jako najprostszy i najdogodniejszy, a więc x kładziemy $= 2\,d$, y zaś określamy (posiłkując się odpowiedniemi hipotezami fizycznemi) w ten sposób, by zawsze $2\,d + y = k$, a więc żeby danym doświadczalnym zawsze stawało się zadość; jest to stanowisko, zajmowane przez metageometrów - konwencyonalistów, przedewszystkiem przez Poincarégo**).

*) Enriques. Probleme der Wissenschaft (tł. niem., 1910), str. 275.

**) Poincaré. Nauka i hipoteza, str. 47, 65.

poznaliśmy bezwzględnie ściśle a jednoznacznie, tak samo poznajemy w sposób identyczny naturę geometryczną przestrzeni fizycznej, stosunki geometryczne w niej panujące— gdyż poznania te są w istocie rzeczy jednem i tem samem poznaniem, w dwojaki sformułowanem sposób. A więc z bezwzględną pewnością twierdzić możemy, że trójwymiarowa i ciągła przestrzeń fizyczna, przestrzeń naszego doświadczenia, jest pod względem geometrycznym natury euklidesowej, posiada krzywiznę równą zeru, możemy to twierdzić, nie odwołując się bezpośrednio do doświadczenia, nie zapytując w tej kwestyi nauk doświadczalnych, które ściśłej odpowiedzi na to pytanie dać zupełnie nie mogą. Wszelka nieokreśloność geometryczna przestrzeni naszego doświadczenia znika tedy zupełnie, i w formule $k = f(x, y)$ (gdzie przez k oznaczamy dane doświadczalne, x—czynnik geometryczny, y—czynnik fizyczny zjawiska), x okazuje się wielkością określoną ($= a$). I jeżeli kiedykolwiek zdarzyłoby się, że suma kątów w jakim trójkącie okazałaby się nierówną $2d$, to nie mielibyśmy już wątpliwości, czemu przypisać tę różnicę, wiedzielibyśmy, że przyczyna jej leży w nieprostolinijności boków trójkąta lub niedokładności naszego instrumentu mierniczego, a nie w nieeuklidesowej naturze przestrzeni naszego doświadczenia. Jakimże jednak sposobem, zapytamy, można przepisywać prawa przyrodzie na ciąg całej przyszłości, skąd wiemy, że natura geometryczna naszej przestrzeni fizycznej nie ulegnie zmianie? Ażeby na to pytanie odpowiedzieć, rozpatrzmy nieco bliżej przesłanki syllogizmu, prowadzące do uznania euklidesowej natury naszej przestrzeni fizycznej.

Nasza przestrzeń fizyczna (A) jest przestrzennością trójwymiarową i ciągłą (B), ta przestrzenność trójwymiarowa i ciągła jest identyczna pod względem geometrycznym z czystą, nieograniczoną, trójwymiarową i ciągłą przestrzennością (C), ta zaś ze swej strony może posiadać, jak widzieliśmy, naturę tylko euklidesową (D). Mamy więc szereg przesłanek: $A=B, B=C, C=D$, z których wynika $A=D$, czyli euklidesowy charakter przestrzeni naszego doświadczenia. Kwestya więc, czy przestrzeń naszego doświadczenia zawsze będzie euklidesowa, sprowadza się do tego, czy zawsze będzie $A=B$, $B=C$, $C=D$. Że teraz $A=B$, jest to dla nas pewnikiem (doświadczalnym), twierdzeniem, w którem możliwość błędu jest wykluczona; lecz czy zawsze tak będzie, czy zawsze przestrzeń fizyczna będzie przestrzennością trójwymiarową i ciągłą, tego nie można twierdzić z bezwzględną pewnością, gdyż prawo tożsamości nie może nam zagwarantować niezmienności elementów realnych. Możemy natomiast z bezwzględną pewnością twierdzić, że zawsze B będzie równe C, C zaś D. Albowiem C jest w ten sposób właśnie skonstruowane, by odtwarzało B pod względem geometrycznym, D zaś jest logicznym wynikiem C, obie więc przesłanki są od doświadczenia niezależne. Także możemy powiedzieć: jeżeli przestrzeń fizyczna pozostanie przestrzennością trójwymiarową i ciągłą, to tem samem zachowa swój charakter euklidesowy, swą obecną naturę geometryczną; jeżeli nasza przestrzeń fizyczna pozostanie, jaką jest i jaką była, to pozostanie jak była euklidesową. I jeżeli wpierw to przepisywanie praw geometrycznych przyrodzie wydawało się czemś bardzo zuchwałem i nieprawdopodobnem, to po powyższych roztrząsaniach zda się posiadać charakter niezwykle skromny, prawie tautologiczny. Tak jednak nie jest. Nie dane nam jest wprawdzie wypowiadać o przyszłości świata sądów, ważnych bez wszelkich ograniczających warunków, możemy jednak w niektórych dziedzinach wiedzy ścisłej ilość tych warunków sprowadzić do minimum, same zaś warunki wybrać w ten sposób, by przedstawiały dane doświadczalne najelementarniejsze, najstalsze, najbardziej pewne. To właśnie zachodzi w geometryi: ważność empiryczna twierdzeń geometryi euklidesowej ograniczona jest jednym jedynym warunkiem doświadczalnym, tym mianowicie, by najelementarniejszy, najstalszy i najbardziej pewny składnik naszego doświadczenia, trójwymiarowa ciągła przestrzenność, pozostał bez zmiany składnikiem tego doświadczenia. Jeżeli warunek ten jest wypełniony, to ważność geometryi euklidesowej dla przedmiotów naszego doświadczenia jest bezsprzeczna, przytem oparta nie na umowie, lecz na poznaniu własności geometrycznych świata fizycznego. Trzeba jednak pamiętać, że te własności geometryczne, aby mogły być poznane, muszą nasamprzód być przedstawione w czystej postaci, jako własności idealnych utworów, nie istniejących w świecie naszego doświadczenia; trzeba pamiętać, że gdy mówimy o geometrycznych własnościach utworów fizycznych, to mamy właściwie na myśli własności utworów geometrycznych, których niedoskonałymi przedstawicielami są odnośne fizyczne utwory. Dziedzina więc geometryi jest odmienna od dziedziny fizyki, jej elementy nie są elementami nauki doświadczalnej, lecz powstają przez idealizacyę elementów konkretnych. Jest przytem rzeczą zasadniczą, by idealizacya ta nie była za daleko posunięta, by, eliminując z utworów fizycznych i fizycznej przestrzeni pierwiastek materyalno-dynamiczny, nie usuwała zarazem pierwiastku przestrzennego, wyróżniającego geometryę od analizy i logiki. Nie mówimy o tem, że bez elementów przestrzennych nie możnaby w geometryi kroku naprzód uczynić, że nie możnaby tem bardziej dojść do twierdzeń, umożliwiających zastosowanie analizy do geometryi, by w ten sposób choćby pozornie uwolnić się od pierwiastku przestrzennego, nie mówimy tu o tem, gdyż mimo wszystkie protesty filozofów geometrya operowała i operuje elementami przestrzennymi i tylko dlatego mogła zostać nauką. Zbyt daleko posunięta idealizacya groźna jest nie dla geometryi, która jej nie uznaje, lecz dla filozofii geometryi, dla pojmowania właściwego nauki geometrycznej i dla właściwej oceny jej wartości, jako poznania stosunków geometrycznych, panujących w naszej przestrzeni. Jeżeli bowiem wyeliminujemy pierwiastek przestrzenny z przestrzeni geometrycznej, to utraci ona właściwą sobie określoność i jako czyste pojęcie dopuszczać będzie rozmaite logiczne możliwości, z pośród których doświadczenie nie będzie w stanie dokonać wyboru. Determinacya naszej przestrzeni geometrycznej na zawsze zostanie utracona, a wraz z nią i determinacya geometryczna przestrzeni fizycznej; geometrya euklidesowa zostanie pozbawiona godności nauki ścisłej i zdegradowana do stopnia prawdopodobnej hipotezy lub nic wspólnego z prawdą nie mającej konwencyi, wygodnej wprawdzie dla geometrów, lecz może zabójczej dla fizyków.

Inaczej jednak zupełnie rzecz się przedstawiać będzie, jeżeli zachowamy właściwy geometryi pierwiastek przestrzenny i przestrzeń geometryczną oraz jej utwory pojmować będziemy jako pojęcia, których przedmiot jest czystą przestrzennością. Wtedy przestrzeń geometryczna nie będzie już utworem czysto logicznym, dopuszczającym, jako pojęcie ogólne, rozmaitość specyfikacyi, których własności formułować ma właśnie geometrya ogólna, lecz jako czysta i ciągła trójwymiarowa przestrzenność będzie przedmiotem o charakterze ściśle określonym, o charakterze, jak się okazało, euklidesowym. I trzeba wtedy będzie uświadomić sobie tylko, że przestrzeń geometryczna, jako czysta i ciągła trójwymiarowa przestrzenność, nie jest niczem innem, jak geometrycznem odbiciem przestrzeni fizycznej (różnica bowiem między niemi dotyczy tylko dziedziny fizycznej, a nie geometrycznej), żeby wyprowadzić nieomylny wniosek o bezwarunkowej ważności geometryi euklidesowej dla naszego doświadczenia, dla naszego fizycznego świata. W ten sposób przy zachowaniu pierwiastku przestrzennego geometrya zostanie ugruntowana jako nauka ścisła i przedmiotowa: dzięki temu, że jej czysto-przestrzenne utwory są przestrzenne, jest ona przedmiotowa, dzięki zaś temu, że są czyste, jest ścisła. Czystość zaś elementów przestrzennych (i samej przestrzeni geometrycznej) jest oznaką ich pojęciowej natury, tego, że nie są one wyobrażeniami tylko, lecz pojęciami, zbudowanemi na podkładzie wyobrażeń, pojęciami, których przedmiot jest przestrzenny. Elementy geometryi nie są jednak — jak widzieliśmy — czystemi pojęciami, jak również przestrzeń geometryczna nie jest czystem pojęciem, sama więc geometrya nie jest nauką czysto pojęciową, lecz tylko pojęciową, a więc u swej podstawy mającą pierwiastek empiryczno-wyobrażeniowy. Widzieliśmy już jednak, jak do dziedziny geometryi usiłowały wślizgnąć się i stoczyć walkę z elementem przestrzennym utwory czysto pojęciowe: widzieliśmy to wtedy mianowicie, gdyśmy się zetknęli z „geometryą" nieeuklidesową. Większe jeszcze bez porównania niebezpieczeństwo grozi geometryi, a właściwie filozofii geometryi, z innej strony, ze strony t. zw. geometryi abstrakcyjnej (euklidesowej). Tu już idzie nie o wślizgnięcie się utworów czysto pojęciowych do dziedziny geometrycznej, lecz o całkowite opanowanie jej przez te utwory, o przekształcenie geometryi euklidesowej na naukę czysto pojęciową. Ażeby ostatecznie ugruntować geometryę euklidesową jako naukę pojęciową o elementach przestrzennych, musimy bliżej jeszcze rozpatrzeć i wykazać błędność poglądów metageometrów, nie liczących się w sposób dostateczny z danemi przestrzennemi, natomiast zbyt łatwo dających posłuch logicznym możliwościom i zbyt ufnych w potęgę czystych bezprzedmiotowych pojęć. Będzie to przedmiotem następnej części, w której nasamprzód zajmiemy się geometryą nieeuklidesową, następnie zaś przejdziemy do rozpatrzenia geometryi abstrakcyjnej.

CZĘŚĆ III.

Metageometrya.

ROZDZIAŁ VIII.

Geometrya nieeuklidesowa.

Widzieliśmy w rozdziale szóstym niniejszej pracy, że podane przez Riemanna wzory dla geometryi nieeuklidesowej zawierają w sobie sprzeczność, która wprawdzie nie uwydatnia się przy analitycznem ich traktowaniu, występuje jednak natychmiast na jaw, jeżeli tylko zdamy sobie sprawę z właściwej natury zawartej w tych wzorach stałej riemannowskiej, mającej oznaczać jednorodność przestrzeni—jednorodność, której całkowitem zaprzeczeniem są właśnie owe wzory. Sprzeczność ta zniknie jednak zupełnie, jeżeli proste nieeuklidesowe będziemy pojmowali nie jako linie proste płaszczyzny nieeuklidesowej, a jako linie geodezyjne (najprostsze) pewnych (krzywych) powierzchni euklidesowych. Myśl takiej interpretacyi wzorów Riemanna nasuwa się sama przez się, jeżeli wziąć pod uwagę wzór, podany przez niego nie dla elementu liniowego przestrzeni o stałej krzywiznie, lecz wzór ogólniejszy dla elementu liniowego przestrzeni wogóle. Wzór ten ma postać formy różniczkowej kwadratowej:

$$ds^2 = \Sigma a_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

gdzie a_{ij} — funkcye ciągłe współrzędnych; rozwinięty dla płaszczyzny, przybiera on formę:

$$ds^2 = A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$

gdzie A, B, C — funkcye ciągłe x i y. Jeżeli teraz z wzorem tym porównamy formułę geometryi euklidesowej dla elementu liniowego powierzchni:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

gdzie E, F, G — funkcye ciągłe u i v, to najbliższe pokrewieństwo obu wzorów bezpośrednio nas uderzy. Pozwala nam ono mieć nadzieję, że na powierzchniach euklidesowych, wśród ich linii geodezyjnych odnajdziemy stosunki, które metageometrya chciała ustanowić między liniami prostemi płaszczyzn nieeuklidesowych. W ten sposób stosunki te przestaną być wprawdzie sprzeczne z jednorodnością przestrzeni, gdyż dla płaszczyzny euklidesowej będą ważne zwykłe formuły euklidesowe, lecz równocześnie przestaną także posiadać samodzielne znaczenie geometryczne, znaczenie stosunków w przestrzeni nieeuklidesowej.

I rzeczywiście na powierzchniach o stałej krzywiznie odnajdujemy w pewnej mierze stosunki, które miały charakteryzować przestrzenie nieeuklidesowe. Na powierzchni o stałej dodatniej krzywiznie, na kuli, spotykamy stosunki charakterystyczne dla geometryi Riemanna, na powierzchni o stałej ujemnej krzywiznie, na pseudosferze — związki geometryi Łobaczewskiego. Linie geodezyjne kuli, wielkie koła, mają długość skończoną i nigdy nie są do siebie równoległe; linie geodezyjne pseudosfery, traktorye, biegną w nieskończoność, zbliżając się do siebie asymptotycznie. Podobnie trójkąty, utworzone z linii geodezyjnych kuli, posiadają sumę kątów większą od dwóch prostych — własność charakterystyczna dla geometryi Riemanna; trójkąty zaś pseudosfery wykazują sumę kątów mniejszą od dwóch prostych, co jest znów cechą właściwą trójkątów Łobaczewskiego. Rozumiemy jednak, że te i tym podobne „uzmysłowienia“ geometryi nieeuklidesowych uzmysławiają tylko stosunki, któreby zachodziły między prostemi nieeuklidesowemi, gdyby te istnieć mogły w przestrzeni geometrycznej: takie jednak proste istnieć nie mogą, i dlatego właśnie stosunki, o których mowa, są charakterystyczne w naszej przestrzeni nie dla linii prostych płaszczyzny, lecz dla linii geodezyjnych powierzchni krzywych — to zaś jest uzmysłowieniem nie tyle geometryi nieeuklidesowych, ile raczej tego, że proste nieeuklidesowe w przestrzeni geometrycznej nie istnieją i istnieć nie mogą. Dlaczego jednak, spytamy, metageometrya wciąż z dumą przytacza takie „uzmysłowienia“ na powierzchniach euklidesowych lub najrozmaitsze odwzorowania przestrzeni nieeuklidesowych w przestrzeni euklidesowej lub w dziedzinie arytmetycznej? Oto dlatego, że są one rzeczywistym dowodem logicznej poprawności tych systemów, tego, że nie zawierają one sprzeczności w takim samym stopniu, jak nie zawiera jej geometrya euklidesowa, a nawet arytmetyka. Przypuszczają przytem metageometrzy, że okoliczność ta wystarcza już do tego, by geometrye nieeuklidesowe mogły być uważane za systemy, wyrażające geometryczne stosunki, możliwe w naszej trójwymiarowej jednorodnej przestrzeni. Widzieliśmy jednak, że wniosek z poprawności logiczno-analitycznej formuł „geometryi“ nieeuklidesowej o ich znaczeniu jako systemów geometryi, wyrażającej możliwe własności utworów w trójwymiarowej jednorodnej przestrzeni, nie jest niczem usprawiedliwiony. Stwierdzenie tej poprawności logicznej może prowadzić jedynie do wniosku, że pewnik o równoległych jest logicznie niezależny od pozostałych pewników Euklidesa, gdyby bowiem był od nich zależny, to jego odwrotnik w połączeniu z tymi pewnikami tworzyłby system w sobie sprzeczny; nie upoważnia nas jednak zupełnie do wyprowadzenia wniosku o zgodności pewników, charakterystycznych dla nieeuklidesowych geometryi, z istotą przestrzeni geometrycznej. I rzeczywiście, jak się okazało i jak się jeszcze niejednokrotnie okaże, pewniki te nie są w zgodzie z istotnemi własnościami tej przestrzeni, to zaś oznacza, że charakterystyka przestrzeni geometrycznej, jako trójwymiarowej rozciągłości ciągłej a czystej, determinuje jednoznacznie własności tej przestrzeni i nie pozostawia już pola dla logicznych możliwości.

Widzieliśmy dawniej, że geometrya nieeuklidesowa przeczy jednorodności przestrzeni, teraz zobaczymy, że przeczy ona również bezpośrednio bierności przestrzeni geometrycznej. Rzecz się tak mianowicie przedstawia. Geometrye nieeuklidesowe uznają wartość pewników Euklidesa w dziedzinie wielkości nieskończenie małych tej przestrzeni, której dotyczą, a więc uznają „płaskość" tych nieskończenie małych elementów. Tak n. p. zgadzają się na to, że w nieskończenie małym trójkącie przestrzeni Riemanna lub Łobaczewskiego suma kątów równa się $2d$. Jest to więc nasz zwykły trójkąt euklidesowy, którego boki są prostemi euklidesowemi, którego płaszczyzna jest płaszczyzną euklidesową. Lecz jeżeli w przestrzeni Riemanna lub Łobaczewskiego mogą istnieć nieskończenie małe odcinki euklidesowe oraz nieskończenie małe „płaskie" elementy powierzchniowe, to cóż może przeszkodzić, by istniały w tej przestrzeni również skończone odcinki prostej euklidesowej lub płaszczyzny euklidesowe o wielkości skończonej, a więc by przestrzeń ta była w istocie swej euklidesową? Jeżeli nie chcemy przeczyć bierności przestrzeni, wynikającej bezpośrednio z jej czystości, musimy odpowiedzieć: nic temu na przeszkodzie w biernej przestrzeni stanąć nie może; w biernej przestrzeni, w której istnieją nieskończenie małe odcinki prostych euklidesowych i nieskończenie małe elementy powierzchniowe euklidesowe, istnieć muszą również skończone (i nieskończone) proste i płaszczyzny euklidesowe, przestrzeń ta musi być euklidesową.

Czy sprzeczność ta z założeniem bierności przestrzeni uwydatnia się w formułach analitycznych geometryi nieeuklidesowej? Bezpośrednio nie uwydatnia się, gdyż bierność przestrzeni, która jest tylko innym wyrazem dla jej jednorodności i czystości, możemy analitycznie wyrazić tylko zapomocą pewnej stałej, ta zaś znów analitycznie nie oznacza nic ponad stałą wielkość i może być w zewnętrznej zgodzie z formułą, która w istocie rzeczy przeczy jej wewnętrznemu znaczeniu. Jeżeli jednak zwrócimy uwagę na to, w jaki sposób wyprowadza geometrya nieeuklidesowa swe formuły, uznając wartość geometryi euklidesowej w dziedzinie nieskończenie małej, to sprzeczność wewnętrzna geometryi nieeuklidesowej stanie się oczywistą. Tak n. p. Killing*) posiłkuje się w tym celu trójkątem prostokątnym o kącie nieskończenie małym. Trójkąt ten uważa on za euklidesowy, t. j. sumę jego kątów za równą $2d$, a więc drugi kąt jego również za prosty. Posiada przeto ten trójkąt dwa równe boki (y), ograniczające kąt nieskończenie mały ($d\varphi$) — i przeciwległy temu kątowi nieskończenie mały bok powinien być uważany za nieskończenie mały odcinek koła, a więc wielkość jego wobec euklidesowego charakteru trójkąta za równą $yd\varphi$. Tymczasem

*) Killing. Einführung in die Grundlagen der Geometrie, t. I, 1893, str. 82, oraz jego: Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, 1885, str. 5—8.

Killing trójkątowi, który uważa za euklidesowy, przypisuje równocześnie ogólną, nieokreśloną naturę geometryczną, i wielkość nieskończenie małego boku podaje jako równą nie $y d\varphi$ lecz $f(y)\, d\varphi$, gdzie $f(y) = y$ tylko w wypadku euklidesowej geometryi — i w ten sposób kładzie podwalinę dla dedukcyi formuł geometryi ogólnej. Widzimy więc, że dedukcya geometryi nieeuklidesowej, ustanawiającej inne prawa dla dziedziny nieskończenie małej, inne zaś dla skończonej dziedziny przestrzeni geometrycznej, zostaje zdobyta kosztem sprzeczności logicznej, wyrażającej się w pogwałceniu prawa tożsamości. Sprzeczność ta jednak uwydatnia się tylko in statu nascendi geometryi nieeuklidesowej, później natomiast, w ukształtowanym już systemie, nie jest widoczna bezpośrednio, gdyż porzuca on dziedzinę nieskończenie małą i dąży do formuł dla wielkości skończonych.

Lecz nie tylko metryczne sformułowanie geometryi nieeuklidesowych grzeszy przeciw kardynalnym zasadom geometryi, przeciw zasadom jednorodności i bierności przestrzeni—ten zasadniczy błąd ujawnia się widoczniej jeszcze w rzutowem uzasadnieniu tych geometryi. Rozpatrując wzór Riemanna dla przestrzeni o stałej krzywiznie, widzieliśmy, że element liniowy nie zachowuje w nieeuklidesowych przestrzeniach stałej długości, że ostateczna jednostka długości przeczy tam jedynie możliwemu w stosunku do jednorodnej przestrzeni pojmowaniu wielkości przestrzennej, jako zawsze i wszędzie równej sobie — i tem zdradza swą nieprzestrzenną naturę. Analogiczne zjawisko widzimy w t. zw. metryce rzutowej, wprowadzającej rzutowe pojęcie odległości i na tem konwencyonalnem pojęciu budującej teoryę geometryi nieeuklidesowej: tu również jednostka przestrzenna nie jest wielkością stałą, i odległość n. p. między punktem zero a punktem jednością nie równa się w rzeczywistości odległości między punktem jednością a punktem oznaczonym przez dwójkę. Jest to zależne od sposobu, w jaki geometrya rzutowa wprowadza swoje współrzędne. Czyni ona to zapomocą t. zw. czworoboku Staudta, pozwalającego do trzech dowolnych danych punktów linii prostej (euklidesowej) skonstruować jednoznacznie czwarty harmoniczny. Te trzy dane punkty oznaczamy przez 0, 1 i ∞ (punkt 1 leży między punktem 0 a punktem ∞), czwartemu zaś do nich harmonicznemu (t. j. harmonicznie sprzężonemu z punktem 0 względem punktów 1 i ∞) dajemy jako charakterystykę znak 2 (będzie on położony między punktem 1 a punktem ∞). Następnie konstruujemy czwarty harmoniczny względem punktów 1, 2 i ∞ oznaczamy go jako 3 (będzie on położony między punktami 2 i ∞) i t. d., i t. d. W podobny sposób możemy ogół punktów prostej oznaczyć zapomocą ogółu liczb rzeczywistych, które geometrya rzutowa uważa za współrzędne (rzutowe) odpowiednich punktów*). Lecz przy tego rodzaju oznaczaniu punktów zapomocą liczb tylko w jednym wypadku, tym mianowicie, który odpowiada geometryi euklidesowej, liczby te będą mogły służyć do mierzenia odległości między punktami, gdyż tylko w tym wypadku odległość, oznaczona przez jednostkę, będzie miała stałą wartość. Przypadek ten będzie miał wtedy miejsce, gdy punkt o współrzędnej $= \infty$ wybierzemy rzeczywiście w nieskończoności. Wtedy punkt 2 będzie rzeczywiście położony dwa razy dalej od punktu 0, niż punkt 1, i podobny stosunek zachodzić będzie między wszystkimi punktami. Lecz jest to tylko wy-

*) Por. Killing: Einführung in die Grundlagen der Geometrie, t. I, str. 96—117.

jątkowy wypadek w metryce rzutowej. W zasadzie wybór punktu o współrzędnej $= \infty$ jest tu dowolny, a dowolność ta prowadzi do tego, że wielkości przestrzenne nierówne, t. j. nie mogące być nałożonemi na siebie, są oznaczane i uważane za równe, co doszczętnie niszczy jednorodność przestrzeni geometrycznej. Dlatego też geometryi nieeuklidesowej, opartej na tego rodzaju podstawie, albo trzeba odmówić całkowicie wszelkiego przestrzennego znaczenia i odległości między punktami uważać w niej tylko za liczby konwencyonalnie odniesione do innych liczb, uważanych za punkty, albo też, o ile chcemy mimo wszystko przypisać jej to znaczenie, musimy stwierdzić w niej pogwałcenie prawa tożsamości, wyrażające się w uważaniu za równe wielkości przestrzennych nierównych. Oczywiście przy analitycznem traktowaniu formuł metryki rzutowej sprzeczność ta się nie ujawni, gdyż pod względem czysto analitycznym są one bez zarzutu, lecz zato wystąpi natychmiast na jaw, jeżeli tym formułom zechcemy nadać znaczenie geometryczne.

Mamy tu stosunki zupełnie analogiczne do tych, które napotkaliśmy przy analizie geometryi nieeuklidesowej, opartej na założeniach metrycznych. Samo w sobie ugruntowanie rzutowe geometryi nieeuklidesowej nie jest zupełnie mniej wartościowe, niż ugruntowanie metryczne — pozwala nam ono nie gorzej od tamtego odróżnić trzy rodzaje systemów analitycznych. Jest ono jednak dla geometryi nieeuklidesowej bardziej od tamtego niebezpieczne, gdyż pierwiastek konwencyonalno - nieprzestrzenny tej geometryi bardziej tu uderza, niż przy jej uzasadnieniu metrycznem. I rzeczywiście niektórzy metageometrzy, a w pierwszym rzędzie Russel*),

*) Russel. Essai sur les fondements de la géométrie (tł. franc., 1901), str. 36—50.

chcąc ratować charakter przestrzenny geometryi nieeuklidesowej, a więc jej „geometryczność“, odrzucają jej uzasadnienie rzutowe, jako czysto konwencyonalne i pozbawiające ją przestrzennego znaczenia, nie zdając sobie jednak sprawy z tego, że to geometryi nieeuklidesowej uratować nie jest w stanie, gdyż w jej ugruntowaniu metrycznem dają się odkryć te same zupełnie zasadnicze braki. I jest to zupełnie zrozumiałe, jeżeli zważymy, że formuły geometryi nieeuklidesowej rzutowej są tylko co do formy odmienne od analogicznych formuł geometryi miarowej i że te ostatnie można otrzymać, wychodząc z zasadniczego wzoru metryki rzutowej.

Wzór ten określa odległość między dwoma punktami jako pomnożony przez pewną stałą logarytm stosunku podwójnego tych punktów i punktów przecięcia łączącej ich linii z absolutem płaszczyzny (stożkową położoną w nieskończoności). Jeżeli współrzędne rzutowe danych punktów będą x_1 i x_2, współrzędna zaś punktów odnośnego przecięcia ξ_1 i ξ_2, to wzór ten przedstawi się w sposób następujący:

$$D = c \log \left(\frac{x_1\,\xi_1}{x_1\,\xi_2} : \frac{x_2\,\xi_1}{x_2\,\xi_2} \right),$$

gdzie c wielkość stała, charakteryzująca daną przestrzeń, jako euklidesową (paraboliczną), riemannowską (eliptyczną) lub Łobaczewskiego (hiperboliczną); lub jeżeli $\frac{x_1\,\xi_1}{x_1\,\xi_2}$ oznaczymy przez x', zaś $\frac{x_2\,\xi_1}{x_2\,\xi_2}$ przez x'', to przybierze on formę:

$$D = c \lg \frac{x'}{x''}.$$

Otóż wzór ten, a właściwie jego odpowiednik w współrzędnych jednorodnych daje się, jak można przekonać się u Killinga *), przekształcić na wzór dla odległości dwóch punktów w współrzędnych weierstrassowskich:

$$k^2 \cos \frac{e}{k} = k^2 x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

(gdzie $x_1 x_2 x_3$ i $y_1 y_2 y_3$ współrzędne weierstrassowskie dwóch punktów, e — ich odległość, $\frac{1}{k^2}$ stała riemannowska, połączona ze stałą c wzoru rzutowego zapomocą równania $k = c \cdot 2i$), który znów nie jest niczem innem, jak wzorem całkowym dla formuły:

$$ds^2 = k^2 dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

przedstawiającej element liniowy w współrzędnych weierstrassowskich. Formuła ta zdradza niejednorodność przestrzeni, której dotyczy, przez specyalne stanowisko, jakie wyznacza jednej z współrzędnych. Daje się ona zresztą przekształcić na rozpatrzony przez nas dawniej wzór Riemanna, dotyczący przestrzeni o stałej krzywiznie, co do którego widzieliśmy, że jest zaprzeczeniem niezmienności elementu liniowego, a więc jednorodności przestrzeni. Widzimy więc, że niegeometryczność albo też sprzeczność wewnętrzna geometryi nieeuklidesowej nie ma swego źródła specyalnie w rzutowem jej uzasadnieniu, gdyż to uzasadnienie tylko formalnie różni się od metrycznego. Tkwi ona w jej istocie, w jej najgłębszej niezgodności z naturą jednorodnej przestrzeni geometrycznej: w jednorodnej przestrzeni geometrycznej jednostka przestrzenna musi zawsze pozostawać równą sobie, w przestrzeniach geometryi nieeuklidesowych jednostka ta jest wielkością zmienną, choć dla ratowania pozorów uważana jest za stałą.

---

*) Killing, loc. cit., t. I, str. 154—157.

To przyjmowanie wielkości zmiennych za stałe, nierównych za równe uważa Poincaré za zupełnie niewinną konwencyę, którą stawia w jednym rzędzie z umową, jaką czynimy co do mierzenia temperatury według Réaumura lub Fahrenheita. „W pierwotnie bezpostaciowem continuum — czytamy w książce jego „Wartość nauki“—można sobie wyobrazić sieć linii i powierzchni, można następnie zgodzić się na to, aby uważano oka tej sieci jako równe między sobą, a wówczas jedynie, stając się wymierzalnem, continuum to staje się przestrzenią euklidesową lub nieeuklidesową“ *). A parę stronic dalej: „Na tle tem (na tle continuum bezpostaciowego) możemy otrzymać bądź to przestrzeń euklidesową, bądź też przestrzeń Łobaczewskiego, podobnie jak możemy termometr nie podzielony jeszcze przekształcić zapomocą odpowiedniej podziałki bądź to na termometr Fahrenheita, bądź też na termometr Réaumura“. Łatwo nam teraz będzie ocenić nietrafność tego porównania. Czy podajemy temperaturę według Fahrenheita czy Réaumura, w każdym razie mierzymy ją zapomocą stopni między sobą równych; podziałki zarówno jednego, jak i drugiego termometru są między sobą rzeczywiście równe, a nie tylko są za takie przez nas przyjmowane; użycie więc każdego z tych dwóch termometrów w równym stopniu odpowiada ich wspólnemu celowi i w równym stopniu ma przedmiotowe znaczenie. Zupełnie innym jest jednak stosunek geometryi euklidesowej do nieeuklidesowej. W geometryi euklidesowej oka przestrzeni (wielkości jednostek przestrzennych) są między sobą rzeczywiście równe, natomiast w nieeuklidesowej nie posiadają one—jak widzieliśmy—wielkości stałej i są funkcyami poło-

*) Poincaré. Wartość nauki (tł. polskie, 1908), str. 37.

żenia, które zajmują w przestrzeni geometrycznej, tak że stosunek, w jakim się znajdują pomiary w przestrzeni Euklidesa i przestrzeni Łobaczewskiego, jest zupełnie różny od stosunku, zachodzącego między mierzeniem temperatury według wzoru Réaumura i Fahrenheita. O ile oba sposoby mierzenia temperatury mają równe uprawnienie i wybór jednego z nich zależy tylko od zupełnie pod tym względem dozwolonej konwencyi, o tyle znów euklidesowa i nieeuklidesowa metryka różnią się zasadniczo co do swej ważności przedmiotowej, i wybór miary przestrzennej według wzoru geometryi hiperbolicznej nie jest już dozwoloną konwencyą, lecz prowadzi do sprzeczności logicznej, do uważania wielkości nierównych za równe, do pogwałcenia prawa tożsamości. I jeden tylko pozostaje sposób, by wzorom analitycznym „geometryi“ nieeuklidesowej przywrócić ich prawidłowość logiczną; polega on na tem, by elementy w nich występujące uwolnić od przypisywanego im niesłusznie przestrzennego znaczenia i pojmować jako twory czysto pojęciowe, żeby liczby uważać tylko za liczby, a nie za reprezentantów elementów przestrzennych. Wtedy dopiero, gdy systemy nieeuklidesowe przestają podawać się za geometryę, wtedy dopiero i tylko wtedy stają się one jako systemy sądów lub formuł analitycznych, pozbawionych wszelkiego przestrzennego znaczenia, ważne z punktu widzenia logicznego, gdyż wszelka sprzeczność z jednorodnością przestrzeni geometrycznej znika w chwili, gdy sama przestrzeń geometryczna zastąpiona zostaje przez rozmaitość liczbową, w której mowy być już nie może o zachowaniu stałej wielkości (n. p. długości) jej utworów. Uratować ważność sądów lub wzorów systemów nieeuklidesowych można w ten tylko sposób, że przywróci się im prawidłowość logiczną, którą utraciły przez kontakt z elementem przestrzennym; tego zaś można dokonać zapomocą umowy, przeciw ważności której nikt chyba nie zaoponuje, zapomocą mianowicie umowy, by elementy systemów nieeuklidesowych uważać za to, czem są w istocie rzeczy, t. j. za elementy natury nieprzestrzennej, niegeometrycznej.

Czy nie można jednak, zapytamy, elementów tych uważać mimo wszystko za elementy przestrzenne, nazywając, jak chce Poincaré, n. p. koła wielkie kul naszych lub linie geodezyjne pseudosfery liniami prostemi? czy w ten sposób, zapomocą takiej umowy nie możemy mimo wszystko zapewnić geometryi nieeuklidesowej znaczenia przestrzennego i zarazem wartości przedmiotowej?

Posłuchajmy, co w tej kwestyi mówi Poincaré. „W przestrzeni—twierdzi on—znamy trójkąty prostolinijne, których suma kątów równa się dwóm kątom prostym; lecz znamy również trójkąty krzywolinijne o sumie kątów mniejszej od dwóch prostych. Istnienie jednych nie jest bardziej wątpliwe niż istnienie drugich. Nazwać boki jednych prostemi—znaczy: przyjąć geometryę euklidesową, nazwać boki drugich prostemi — znaczy: przyjąć geometryę nieeuklidesową, tak iż pytanie, którą należy przyjąć geometryę, jest to samo, co pytanie, jakiej linii należy nadać miano prostej“ *). Na to twierdzenie jednak nie zgodzi się żaden prawdziwy metageometra, który w przyjęciu nieeuklidesowej geometryi widzi przecież coś więcej, niż zmianę zwykłej terminologii na niezwykłą. Twierdzenie to będzie on uważał za honorową kapitulacyę geometryi nieeuklidesowej przed euklidesową i odrzuci je, twierdząc, że przeczy ono rzeczywistemu znaczeniu

*) Poincaré. Wartość nauki, str. 37.

idei nieeuklidesowych, polegającemu na ustanowieniu ścisłej wyłączności między systemem euklidesowym i nieeuklidesowym, na uznaniu niemożliwości istnienia w tej samej przestrzeni prostej euklidesowej i nieeuklidesowej *). I rzeczywiście będzie on miał słuszność, widząc w twierdzeniu Poincarégo kapitulacyę geometryi nieeuklidesowej: wszak Poincaré uznaje tu najzupełniej euklidesowy charakter naszej przestrzeni, a za nieeuklidesową geometryę uważa geometryę euklidesową, w której utwór, dotychczas zwany linią krzywą, będzie nosił miano linii prostej, utwór zaś, zwany dotychczas linią prostą, będzie nazwany linią krzywą. Lecz, oczywiście, geometrya euklidesowa przez tę zmianę terminologii nie stanie się nieeuklidesową, a pozostanie nadal euklidesową geometryą, otrzymawszy tylko niezwykłą **), nieeuklidesową terminologię. O nadaniu więc geometryi nieeuklidesowej zapomocą tego rodzaju konwencyi przestrzennego znaczenia i ważności przedmiotowej nie może tu być mowy wprost już dlatego, że z istotną geometryą nieeuklidesową nie zetknęliśmy się tu zupełnie, kwestya bowiem istotnej geometryi nieeuklidesowej dotyczy jej prawdziwości i przedmiotowości, leży więc zupełnie poza dziedziną konwencyi terminologicznych. Streszczając zaś rezultaty, do których nas doprowadził rozbiór rzeczowy tej kwestyi, musimy powiedzieć: tak zwana geometrya nieeuklidesowa nie ma żadnego przestrzen-

---

*) Russel. Essai sur les fondements de la géométrie, tł. franc., str. 110, 111.

**) Terminologia ta będzie przytem niezwykłą nie tylko dlatego, że pozbawia miana linii prostych linie, odbiegające nieznacznie tylko „od pewnych godnych uwagi przedmiotów naturalnych", lecz głównie dlatego, że pozbawia tego miana linie najkrótsze między dwoma punktami naszej przestrzeni geometrycznej.

nego znaczenia, nie jest geometryą, lecz metageometryą, a właściwie pseudogeometryą, pseudogeometryczną analizą lub logiką; elementy jej nie są utworami geometrycznymi, przestrzennymi, pojęciowymi, lecz pseudogeometrycznymi, pseudoprzestrzennymi, czysto pojęciowymi.

ROZDZIAŁ IX.

Geometrya abstrakcyjna.

Przejdziemy z kolei do rozpatrzenia geometryi abstrakcyjnej, zwanej inaczej geometryą czystą *) lub czysto pojęciową **). Czem są w tej geometryi punkty, linie proste, płaszczyzny? Są to czyste pojęcia, pozbawione wszelkiego przestrzennego pierwiastku, a określone przez system postulatów (pewników), formułujących ich własności; nie są to określone przedmioty, lecz pojęcia abstrakcyjne, wyrażające tylko stosunki między nieokreślonemi rzeczami i same przez się zupełnie przedmiotów nie posiadające ***). Przedmioty te muszą być dopiero dane im z zewnątrz, muszą dopiero być znalezione i pod nie podłożone. Widzimy więc, że elementy geometryi abstrakcyjnej są to czyste pojęcia, które otrzymaliśmy jako wypadki graniczne sądów, odniesionych do wyobrażeń podkładowych. I podobnie jak tam czyste pojęcia nie

*) Por. Couturat: Les principes des mathématiques, 1905, str. 204—211.

**) Por. Weber und Wellstein: Encyklopädie der Elementar-Mathematik, t. II, 1907, str. 28—30.

***) Por. Couturat, loc. cit., str. 207, oraz Weber und Wellstein, loc. cit., str. 26.

były niczem innem, jak czystymi sądami, t. j. sądami bez przedmiotów, tak samo i tu elementy geometryi abstrakcyjnej, będąc czystemi pojęciami, nie są niczem innem, jak systemem takich czystych sądów-definicyi*). Przypominamy sobie jednak, jaką okazała się właściwa natura tych czystych sądów-pojęć, przypominamy sobie, iż się okazało, że nie są to utwory logiczne, lecz rozpatrywane same w sobie przedstawiają tylko wyobrażenie bezmyślne wyrazów, są czemś wybitnie irracyonalnem. Jako takie więc, czyste sądy-pojęcia, rozpatrywane same w sobie, nie mogą posiadać „istnienia logicznego“. Czyż jednak geometrya abstrakcyjna uznaje taką naturę swych zasadniczych twierdzeń-elementów? czy rzeczywiście uznaje, że jej pojęcia zasadnicze, określone przez postulaty, same przez się logicznie nie istnieją? Najzupełniej, i pierwszą jej rzeczą jest przeprowadzenie dowodu tego istnienia**) przez odniesienie czystych pojęć do przedmiotów, gdyż to, jak wiemy, może jedynie zapewnić tym pojęciom logiczne znaczenie. Geometrya abstrakcyjna najzupełniej więc uznaje nielogiczną naturę swych pojęć zasadniczych, tylko że nad tym faktem, tak dziwnie sprzecznym z całym jej charakterem, zbyt pospiesznie przechodzi do porządku dziennego. My natomiast zatrzymamy się nad nim nieco dłużej.

Geometrya abstrakcyjna, chcąc ukonstytuować się jako system czysto logiczny, pozbawia swe elementy wszelkiej wyobrażeniowej treści i każe je uważać za czyste pojęcia, posiadające te tylko własności, jakie im przepisują postulaty-definicye. Definicye zaś te nie określają elementów geometrycznych jako przedmioty przestrzenne, lecz właśnie jako

*) Couturat, loc. cit., str. 217.

**) Couturat, loc. cit., str. 39, 40.

czyste pojęcia, czyste stosunki między nieokreślonymi przedmiotami, gdyż definicye te nie są czemś innem, niż czyste pojęcia przez nie określane, lecz są właśnie temi pojęciami, przybranemi w formę sądów. Geometrya więc abstrakcyjna nie ma zupełnie do czynienia z przedmiotami, i ta okoliczność, która zapewnia jej czystość, która stanowi o jej czysto pojęciowym charakterze, jednocześnie pozbawia system jej postulatów wszelkiego logicznego znaczenia. Najsurowszy racyonalizm geometryczny, najskrajniejszy panlogizm, najczystszy platonizm okazują się same w sobie systemami irracyonalnymi. Pierwiastek logiczny może do nich wpłynąć tylko przez zetknięcie się ze światem określonych przedmiotów, choćby nieprzestrzennych, n. p. ze światem liczb. Dlatego też geometrya abstrakcyjna, by wyjść ze stadyum irracyonalności, stara się dowieść istnienia logicznego swych pojęć zasadniczych lub, co na jedno wychodzi, zgodności logicznej swych postulatów przez odwzorowanie ich w „trójwymiarowej“ rozmaitości liczbowej, przez odniesienie ich do określonych przedmiotów, mianowicie liczb *).

Przez to, że czyste stosunki odniesione tu zostają do liczb, a więc przedmiotów nieprzestrzennych, przez to geometrya abstrakcyjna pozornie zachowuje swą niezależność od pierwiastku przestrzennego. Mówimy pozornie, gdyż w rzeczywistości tak nie jest. Przedewszystkiem dlatego, że same liczby nie są niezależne od pierwiastku przestrzennego, gdyż choć przedmiot ich nie jest przestrzenny, to jednak są to pojęcia, u których podstawy znajduje się element przestrzenny. Można je wprawdzie nazwać czystemi przez wzgląd na to, że przedmiot ich nie posiada charakteru przestrzenne-

*) Por. Weber und Wellstein, loc. cit., str. 83 i nast.

go, lecz z drugiej strony, jako treści psychiczne, posiadają one w swem wyobrażeniu podkładowem element przestrzenny. Ta ich podwójna natura czyni z nich właśnie naturalnych pośredników między irracyonalnym światem czystych pojęć i światem przestrzennych utworów, od którego wiodą swe pochodzenie. Widzimy więc, że już przez samo zetknięcie się z dziedziną liczb geometrya abstrakcyjna równocześnie styka się pośrednio ze światem przestrzennym. Lecz poza tem istnieje jeszcze ważniejsza przyczyna, pozwalająca nam twierdzić, że odwzorowanie pojęć geometryi abstrakcyjnej w rozmaitości liczbowej uzależnia tę geometryę od pierwiastku przestrzennego, tutaj mianowicie od pierwiastku przestrzenno-geometrycznego. Rzecz się przedstawia w sposób następujący. Odwzorowanie wspomniane geometryi abstrakcyjnej polega na tem, że za „punkt“ przyjmuje się system trzech liczb rzeczywistych x, y, z, w określonym wziętych porządku, za „płaszczyznę“ ogół trójek liczbowych, czyniących zadość równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$, za „prostą“ ogół trójek liczbowych, czyniących równocześnie zadość dwóm równaniom: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Z punktu widzenia analitycznego wybór $Ax + By + Cz + D = 0$ jako „płaszczyzny“ i odpowiedni wybór „prostej“, choć już w zasadzie opiera się na elemencie przestrzennym (trójwymiarowości), jest jeszcze zrozumiały, gdyż polega na uwzględnieniu najprostszych funkcyi analitycznych. Zupełnie jednak inaczej sprawa się przedstawia, jeżeli przechodzimy do odwzorowania kątów, i jako „kąt“ między dwoma odcinkami d_2 i d_3, wychodzącymi z punktu $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$ i kończącymi się w punktach $P_2 = (a_2, b_2, c_2)$ i $P_3 = (a_3, b_3, c_3)$, przyjmujemy liczbę φ_1, określoną przez równanie:

$$d_2\, d_3 \cos \varphi_1 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(b_3 - b_1) + \\ + (c_2 - c_1)(c_3 - c_1).$$

Z punktu widzenia czysto analitycznego wybór ten jest zupełnie niezrozumiały; nie pojmujemy zupełnie, jakim sposobem czysta analiza mogłaby dojść do tego rodzaju formuły; i rzeczywiście jest to formuła nie czystej analizy, lecz geometryi analitycznej, która dochodzi do niej zapomocą rozważań, opartych wyłącznie na elemencie przestrzennym, na przedstawieniu kąta przestrzennego. Okazuje się więc, że geometrya abstrakcyjna, zakładając konwencyonalnie czy też hipotetycznie system sądów czystych i chcąc sądom tym zapewnić logiczne znaczenie, musi oprzeć się ostatecznie na pierwiastku przestrzennym, musi przyjąć twierdzenia geometryi zwykłej. Bez geometryi zwykłej geometrya abstrakcyjna nie tylko nie mogłaby ustanowić swego konwencyonalno - hipotetycznego systemu sądów czystych, lecz system ten nie mógłby również bez pomocy geometryi zwykłej wyzbyć się swej irracyonalności i otrzymać znaczenie logiczne.

Na założonym w ten sposób systemie postulatów geometrya abstrakcyjna chce następnie zapomocą jedynie praw logiki wznieść gmach twierdzeń geometrycznych, wyprowadzić go, jako wniosek logiczny, z przyjętych twierdzeń zasadniczych. Lecz nie wmawia sobie ona tego, żeby mogła sama przez się twierdzenia te odkryć, i zadowolić się chce tylko logicznym dowodem twierdzeń geometryi zwykłej zapomocą przyjętych przesłanek*). Lecz to zadanie przechodzi jej siły w równym stopniu, jak i poprzednie, od którego się słusznie uchyla. Zarówno bowiem przy dowodzie, jak i przy odkryciu twierdzeń geometrycznych musimy sobie przedstawiać

---

*) Por. Couturat, loc. cit., str. 34, 35.

elementy idealne, których twierdzenia te dotyczą, i to właśnie przedstawianie sobie tych elementów wskazuje nam drogę, którą mamy kroczyć. Natomiast geometrya abstrakcyjna, operująca czystemi bezprzedmiotowemi pojęciami, nie zawierającemi w sobie konkretnego pierwiastku, jest zupełnie pozbawiona wszelkiego przewodnika i z miejsca ruszyć nie może, gdyż nie znając drogi, wiodącej od podstaw dowodu do twierdzeń, mających być dowiedzionemi, straciłaby tylko czas na bezcelowem jej szukaniu, tem bardziej że drogę tę często przekładać dopiero potrzeba zapomocą pomocniczych konstrukcyi, trzeba ją odkrywać w sposób podobny, w jaki się odkrywa nowe twierdzenie. A geometrya abstrakcyjna, jako dalszy ciąg logiki czystej, nic nie może odkryć, nic nie widzi dokoła siebie, jest najzupełniej niewidoma i kroku nie może postąpić bez obdarzonego wzrokiem przewodnika; przedstawia ona najdoskonalszy przykład tego, że czyste pojęcia nie tylko są — jak chciał Kant — czcze, lecz zarazem i ślepe.

Nie tylko więc przy ustanowieniu systemu postulatów, nie tylko przy wykazywaniu ich logicznej zgodności, lecz i przy dowodzie twierdzeń geometrycznych musi geometrya abstrakcyjna opierać się na geometryi zwykłej, musi korzystać z jej usług, jako przewodniczki. Ażeby geometrya abstrakcyjna mogła logicznie wyprowadzić twierdzenia geometryczne z postulatów (pewników), trzeba, by gmach geometryi był już uprzednio systematycznie zbudowany, by przejścia w nim były wytknięte, połączenia dokonane. Lecz w takim razie—spytamy—jaką rolę właściwie spełniać może geometrya abstrakcyjna? Odpowiedź może być tylko jedna: może ona sprawdzić (logiczną) poprawność powiązania twierdzeń w systemie geometryi. Do tego się sprowadza jej „dowodzenie“ tych twierdzeń — przyznać to muszą i przyznają nawet jej promotorzy *). Lecz w jaki sposób można ją w takim razie nazywać geometryą? Przecież geometrya istnieje przed nią jako system gotowy, spójny, logiczny, w którym syllogizm, zastosowany do elementów przestrzennych, gra rolę zasadniczą przy dowodzeniu twierdzeń **). Dowodzenie takie w geometryi, opartej n. p. na systemie pewników Hilberta ***) (którym nadaje się jednak zwykłe znaczenie), nie odwołuje się już zupełnie do przestrzennego pierwiastku, w tem znaczeniu, że nie czerpie z niego prawd nowych, lecz przebiega drogą logiczną, opierając się jednak na tym pierwiastku, tkwiącym w samych elementach, których dowodzenie dotyczy. Mamy tylko jedną geometryę, geometryę zwykłą, czysto przestrzenną, przedstawiającą spójny system racyonalny (lecz nie czysto racyonalny), której część logiczną stanowią nie — jak chce Couturat ****) — twierdzenia geometryi abstrakcyjnej (czystej), lecz prawa zwykłej logiki. System ten można dla pewnych celów pozbawić pierwiastku przestrzennego; można n. p. w ten sposób sprawdzić jego logiczną poprawność (i bez tego najzupełniej zagwarantowaną) oraz nieodwoływanie się ponowne przy dedukcyach do pierwiastku przestrzennego (i bez tego przy odpowiednim wyborze pewników najzupełniej pewne), lecz to pozbawienie geometryi zwykłej pierwiastku przestrzennego nie stworzy nowej geometryi, geometryi czystej czy abstrakcyjnej, a tylko gotowy system geometryi zwykłej przedstawi w postaci wynaturzonej, mimo to jednak dla pewnych celów pożądanej. O sa-

*) Por. Couturat, loc. cit., str. 34.

**) Por. Milhaud: Le raisonnement géométrique et le syllogisme w książce: Le rationnel, 1898.

***) Por. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 1909, st. 2—24.

****) Couturat, loc. cit., str. 211.

modzielnej więc geometryi abstrakcyjnej mowy być nie może: zapomocą czystych pojęć nie można skonstruować geometryi nawet jako systemu hipotetyczno-dedukcyjnego.

Jeżeli jednak nie można mówić o geometryi, skonstruowanej w sposób czysto logiczny, to czy również nie można mówić o geometryi zrekonstruowanej w ten sposób? Wszak zwolennicy geometryi czystej często mówią właśnie o „rekonstrukcyi logicznej geometryi", i geometrya czysta ma przedstawiać sobą tę właśnie rekonstrukcyę. Rozpatrzmy to bliżej.

Przedewszystkiem rozróżnimy dwa znaczenia, jakie posiadać może „rekonstrukcya logiczna geometryi". Po pierwsze, może ona oznaczać rekonstrukcyę geometryi, jako logiki, jako systemu czysto logicznego, jako systemu czystych pojęć; po drugie: rekonstrukcyę geometryi zapomocą czystej logiki, zapomocą czystych pojęć. Jeżeli zważymy, że rekonstrukcya logiczna geometryi zakładać musi istnienie geometryi, która, jak jest to oczywiste na zasadzie poprzednich wywodów, musiała być oparta na pierwiastku przestrzennym i nie mogła być skonstruowana w sposób czysto logiczny, lecz ma być dopiero w ten sposób zrekonstruowana, to się przekonamy, że rekonstrukcya logiczna takiej geometryi — w znaczeniu: rekonstrukcya jej, jako systemu czysto logicznego—nie może znaczyć nic innego, jak błędna rekonstrukcya tej geometryi. Bo system czysto przestrzenny będzie w tej rekonstrukcyi przedstawiony jako system czysto pojęciowy, a więc przedstawiony błędnie. Jeżeli zaś przez rekonstrukcyę logiczną geometryi będziemy pojmowali rekonstrukcyę jej zapomocą czystej logiki, zapomocą czystych pojęć, to nasuwa się natychmiast pytanie, w tej kwestyi decydujące: jako jaki system będzie geometrya przestrzenna zrekonstruowana zapomocą czystych pojęć? Zwolennicy geometryi czystej odpowiedzą oczywiście: jako system czystych pojęć — i w ten sposób kwestya sprowadzi się do poprzedniego wypadku; będziemy mieli znowu rekonstrukcyę błędną, nie uwzględniającą zasadniczego pierwiastku systemu, mającego podledz odbudowie. Prawdziwa rekonstrukcya geometryi, której elementy mają charakter przestrzenny, musi pierwiastek ten uwzględnić, musi geometryę przedstawić nie jako naukę czysto pojęciową, lecz pojęciową, t. j. taką, której elementy są pojęciami, a więc są oparte na wyobrażeniach (przestrzennych). Prawdziwa więc rekonstrukcya geometryi będzie nie (czysto) logiczną rekonstrukcyą, lecz rekonstrukcyą, uwzględniającą również pierwiastek empiryczno-wyobrażeniowy, stanowiący treść, choć nie przedmiot pojęciowych i równocześnie przestrzennych elementów geometryi. Będzie więc ona polegała przedewszystkiem na odbudowie elementów geometrycznych zapomocą elementów epistemologicznych: czystych pojęć i wyobrażeń, na odbudowie ich, jako przestrzennych (czysto przestrzennych i idealnych), a więc jako pojęciowych, nie zaś jako czysto pojęciowych. Jeżeli do elementów geometrycznych w ten sposób skonstruowanych (ściślej: zrekonstruowanych) odniesiemy następnie system czystych pojęć (czystych sądów), stanowiący system postulatów t. zw. geometryi czystej, to dokonamy w ten sposób rekonstrukcyi epistemologicznej systemu pewników naszej geometryi. Dalsza rekonstrukcya geometryi nie będzie już przedstawiała żadnych trudności, i w rezultacie otrzymamy racyonalny system geometryi czysto przestrzennej, przedstawionej jako czysto przestrzenna zapomocą wyobrażeń i pojęć czystych.

Teraz rozumiemy, czem są w istocie rzeczy czysto pojęciowe elementy t. zw. geometryi abstrakcyjnej. Nie są to elementy geometryi teoretycznej, lecz elementy teoryi geometrycznej, to znaczy teoryi poznania geometrycznego, przytem elementy tej teoryi nie jedyne, lecz występujące w niej zawsze w połączeniu z elementami wyobrażeniowymi. Elementy geometryi teoretycznej są pojęciami, których (epistemologicznymi) elementami są znów wyobrażenia i czyste pojęcia. Stąd natarczywe złudzenie, że czyste pojęcia mogą być elementami geometrycznymi, złudzenie, nie ustępujące pomimo paradoksalności faktu, że jedyne elementy nauki racyonalnej byłyby w takim razie natury irracyonalnej. W chwili jednak, gdy odróżniliśmy elementy geometryi teoretycznej od elementów teoryi geometryi i przekonaliśmy się, że owe rzekome elementy geometryi są w rzeczywistości elementami teoryi poznania geometrycznego—złuda znika, gdyż wykryte zostało jej źródło; czysto pojęciowa geometrya abstrakcyjna zostaje pozbawiona godności geometryi i jej pseudogeometryczny charakter nie może już nas więcej w błąd wprowadzać.

Widzimy tu zupełną analogię między (analityczną) geometryą nieeuklidesową z jednej a geometryą abstrakcyjną (czystą) z drugiej strony. Podobnie jak utwory geometryi nieeuklidesowej nie są utworami geometrycznymi, tak również nie są nimi i utwory geometryi czystej, i podobnie jak pierwsze utwory przybierają postać pseudogeometryczną przez swą szatę czysto pojęciową, tak również i utwory geometryi czystej z tego samego powodu mogą łatwo wywołać złudzenie utworów geometrycznych. Bo rzeczywiście zarówno liczby, jak i czyste pojęcia geometryi abstrakcyjnej są w blizkim związku z dziedziną geometryczną: zapomocą liczb ujmuje utwory przestrzenne geometrya analityczna, zapomocą bezprzedmiotowych czystych pojęć (i wyobrażeń) — teorya poznania geometrycznego. Błędem jest jednak wysnuwać z tego wniosek, że wszelki utwór analityczny jest zarazem i geometrycznym, jak również że utwory geometryczne są natury czysto pojęciowej dlatego, że przy ich rekonstrukcyi wchodzą w grę czyste pojęcia. Wnioski podobne w stosunku do geometryi nieeuklidesowej z jednej strony, a geometryi abstrakcyjnej z drugiej strony okazały się — jak widzieliśmy — wręcz błędnymi, i wszystkim w mowie będącym utworom musieliśmy przypisać charakter metageometryczny, bądź czysto analityczny, bądź epistemologiczny.

W ten sposób ostatecznie przekonaliśmy się, że *istnieje jedna tylko geometrya, przestrzenna, pojęciowa geometrya euklidesowa, która przez oparcie się na pierwiastku empiryczno - wyobrażeniowym zdobywa bezwzględną ważność w naszej ciągłej i rozciągłej trójwymiarowej przestrzeni doświadczalnej, przez idealizacyę zaś tego pierwiastku bezwzględną ścisłość oraz przedmiotowość w stosunku do czystej, nieograniczonej, trójwymiarowej, ciągłej i rozciągłej przestrzeni geometrycznej.*

Zakończenie.

Niniejsze „Prolegomena“ chcą być nie tylko prolegomenami filozoficznemi do geometryi, wyjaśniającemi właściwą naturę i znaczenie poznania geometrycznego, lecz zarazem i geometrycznemi prolegomenami do filozofii, na przykładzie zagadnień geometryczno-filozoficznych wskazującemi jedyną, według naszego przekonania, drogę, po której bezpiecznie kroczyć może teorya poznania nauk ścisłych, a obok niej i teorya wszelkiego innego poznania, dążącego do ideału nauki ścisłej.

Jeżeli za elementy teoryi poznania (a właściwie tej jej części, która zajmuje się analizą i rekonstrukcyą danego systemu naukowego) przyjmiemy wyobrażenia i czyste pojęcia, to charakter teoryi poznania zależeć będzie od tego, jaki będzie w niej wzajemny stosunek tych elementów. Jako wypadki graniczne otrzymamy systemy teoryi poznania, oparte tylko na jednym z tych elementów, a więc z jednej strony skrajny empiryzm, z drugiej — skrajny racyonalizm (panlogizm); inne możliwe systemy będą uwzględniały oba elementy, zarówno wyobrażenia jak i czyste pojęcia, będą się jednak zasadniczo różniły znów pod tym względem, jak pojmować będą naturę tych elementów i ich wzajemny stosunek.

Skrajny empiryzm nauki ścisłej ugruntować nie jest w stanie, gdyż zadowala się przedmiotami danymi, wyobrażeniami, którym brak ścisłości, a brak ten w przedmiotach nauki odbija się bezpośrednio na samej nauce, pozbawiając ją tej właśnie cechy. Jeżeli przerzucimy się do przeciwnego bieguna, do skrajnego racyonalizmu, to dla oceny jego wartości, jako teoryi poznania, wystarczy przypomnieć sobie paradoksy geometryczne, w które wpada panlogizm przedewszystkiem przez to, że zupełnie nie liczy się ze światem przestrzenności, że światu temu przypisuje złudny charakter, gdyż nie jest w stanie poznać go w jego prawdziwej naturze, a przyznać jednak nie chce, że coś, co nie jest czystem pojęciem, może posiadać prawdziwe istnienie (w danym wypadku geometryczne), nie poddające się jego wszechwładztwu. Bardziej szczerym jest pod tym względem system Kanta, który uznaje istnienie przestrzenne przedmiotów geometryi i równocześnie przyznaje (choć tylko w chwilach wyjątkowych), że utwory przestrzeni geometrycznej, która jest „czystem wyobrażeniem", nie mogą być ujęte jako czyste pojęcia. Widzi Kant w tem zjawisko paradoksalne, którego paradoksalność na tem właśnie polega, że istnieją w świecie nauki przedmioty, nie poddające się czysto pojęciowemu poznaniu, przedmioty więc z punktu widzenia Kanta irracyonalne. Lecz ten irracyonalizm w istocie rzeczy nie ma źródła w dysharmonii między naturą przedmiotów geometrycznych a naturą naszej myśli poznawczej, lecz tylko w błędnym poglądzie Kanta, który, wyzbywszy się panlogizmu na punkcie natury przedmiotów geometryi, zachował go, gdy chodzi o poznanie tych przedmiotów, przypuszczając, że poznać coś pojęciowo to znaczy poznać jako pojęcie czyste. Nie umiał Kant przezwyciężyć platońskiego przeciwstawienia zmysłowości i rozsądku, wyobrażeń i pojęć, i nie mógł naskutek tego zrozumieć możliwości pojęciowego poznania przedmiotu przestrzennego, jako przestrzennego, poznania go zapomocą czystych pojęć, lecz nie jako czyste pojęcie. To błędne przeciwstawienie elementów jest πρῶτον ψεῦδος kantowskiej teoryi poznania, wymagającej połączenia tych elementów, uznającej niezbędność tego połączenia: z jednej strony wymaga ona, by element przestrzenny stał się pojęciowym, z drugiej jednak strony nie uznaje możliwości tego, by coś, co jest przestrzenne, było pojęciem lub poznane było zapomocą czystych pojęć jako przestrzenne i równocześnie jako pojęcie. Odróżniwszy słusznie przestrzenność od czystej myśli, przeciwstawił Kant równocześnie tę przestrzenność myśli wogóle i dlatego uniemożliwił sobie zarówno poznanie pojęciowego charakteru przestrzeni geometrycznej, jak i zrozumienie nie tylko możliwości poznania geometrycznego, lecz i wszelkiego wogóle przedmiotowego poznania.

Lecz czem jest ta czysta myśl, czem są te czyste pojęcia, które panlogizm chroni od kontaktu wszelkiego z elementem wyobrażeniowym, kantyzm zaś wprawdzie chce połączyć z tym elementem, sam jednak równocześnie rozumie, że połączenie to przy jego przesłankach jest niemożliwe? Dla panlogizmu są one same przez się poznaniem, dla kantyzmu nie są wprawdzie jeszcze poznaniem, lecz same w sobie mają ważność logiczną, są utworami logicznymi. Okazało się jednak—a bliższa analiza współczesnego skrajnego racyonalizmu geometrycznego (str. 118, 119 niniejszej pracy) potwierdziła to najzupełniej — że czyste pojęcia nie są to pojęcia logiczne, lecz utwory same w sobie pozbawione wszelkiego logicznego znaczenia, utwory więc irracyonalne, które mogą uzyskać czy odzyskać logiczne znaczenie tylko przez kontakt z określonymi przedmiotami, a więc w ostatniej instancyi przez połączenie z elementem empiryczno-wyobrażeniowym. A więc złudzeniem są nie bezsprzeczne własności utworów przestrzennych i nie utwory te są irracyonalne, lecz złudzeniem jest logiczna natura czystych pojęć i one to właśnie są utworami irracyonalnymi, mogącymi otrzymać sens i znaczenie tylko od wyobrażeń lub od utworów o podkładzie empiryczno-wyobrażeniowym.

Wszystko to wykazuje niemożliwość nie tylko skrajnego racyonalizmu, lecz i racyonalizmu kantowskiego z jego czystemi pojęciami, które nie mogą być pojęciami logicznemi, grają jednak ich rolę; z czystemi wyobrażeniami, które nie mogą być wyobrażeniami, za takie jednak uchodzą; z wymaganem połączeniem tych elementów, które nie może być wykonane naskutek ich przeciwstawiania, uważane jest jednak naogół za fakt dokonany; z aprioryzmem, wymagającym dla swej przedmiotowości czystych apriorycznych wyobrażeń, które jednak nie istnieją i istnieć nie mogą. Nie można więc również i na podstawach kantowskich zbudować zadowalającej teoryi poznania, można tego jednak dokonać, zarzuciwszy platońskie przesłanki o przeciwieństwie zmysłowości i rozsądku i o logicznej naturze czystych pojęć.

Jakiż jednak jest w takim razie — może kto zapytać — udział naszego rozumu w genezie wiedzy: wszak mamy w tej teoryi poznania bierne tylko elementy, bierne wyobrażenia i jeszcze bierniejsze czyste pojęcia? Czyżby nauka wogóle, a przedewszystkiem nauka ścisła mogła powstać bez wszelkiego czynnego udziału z naszej strony? Pytanie to jednak byłoby zupełnie błędnie skierowane w stronę teoryi poznania, a specyalnie tej jej części, o której teraz mowa. Zajmuje nas mianowicie teraz czysto epistemologiczna część teoryi poznania, rekonstruująca gotowy system naukowy, niema więc nic dziwnego, że w jej elementach niema pierwiastku czynności: rekonstruujemy gotowy system, a nie badamy jego genezę, w której przejawia się czynność naszego rozumu. Sami, odpowiednio do celu, który sobie postawiliśmy, stworzyliśmy elementy tej rekonstruującej teoryi poznania, pozbawiając spostrzeżenie i sąd zawartego w nich pierwiastku czynnego i otrzymując w ten sposób jako ich graniczne wypadki wyobrażenie i czyste pojęcie. Jeżeli chodzi o czynny udział naszego rozumu w genezie nauki, to musimy się zwrócić z tą kwestyą do psychologii, wreszcie do metodologii, lecz nie do rekonstruującej teoryi poznania. Tam też się przekonamy, że w sądach, t. j. w twierdzeniach i przeczeniach, a przedewszystkiem w postulatach metodologicznych przejawia czynność swą rozum, który i w dziedzinie teoretycznej okazuje się czynnym, skierowanym na przedmioty, a nie czystym, oderwanym od przedmiotów rozumem.

TREŚĆ.

Część I. Przestrzeń geometryczna.

Część II. Wywód geometryi euklidesowej.

Część III. Metageometrya.