GEISER

SYNTH
GEOM

S. D,

59.

EINLEITUNG

IN DIE

SYNTHETISCHE GEOMETRIE.

EIN LEITFADEN

BEIM UNTERRICHTE AN HÖHEREN REALSCHULEN
UND GYMNASIEN

VON

DR. C. F. GEISER,
DOCENT AM SCHWEIZERISCHEN POLYTECHNICUM.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1869.

Vorwort.

Wenn aus dem fluthenreichen Strome geometrischer Lehrbücher eine neue Erscheinung auftaucht, welche nicht aus dem Kreise der langerprobten Schulpraktiker hervorgegangen ist, sondern die ihren Ursprung auf einen jüngern akademischen Docenten zurückführt, so wird zwar eine Rechtfertigung derselben nur in ihr selbst gefunden werden können; immerhin aber wird es erlaubt sein, ihre Absichten und Ziele in einem Vorwort auseinanderzusetzen und zu begründen.

Der Verfasser dieser Schrift ist seit mehreren Jahren mit dem obligatorischen Unterrrichte in der synthetischen Geometrie betraut, welcher die Studirenden der mathematischen Fachlehrerschule am Schweizerischen Polytechnikum in die Methoden der genannten Wissenschaft einführen soll. In seinen Vorträgen hat er fortwährend die Erfahrung gemacht, dass die Vorbildung seiner Zuhörer eine Reihe von Lücken bot, die in erster Linie auszufüllen waren, bevor das eigentliche Thema behandelt werden konnte.

Aus diesem Bedürfnisse ging ein Colleg hervor: „Einleitung in die synthetische Geometrie", welches durch vielseitige Ueberarbeitungen bei mehrfacher Wiederholung das Material zu dem vorliegenden Büchlein geliefert hat.

Es galt zunächst, unter möglichst geringen Voraussetzungen das räumliche Anschauungsvermögen der Zuhörer auszubilden.

Zu diesem Zwecke wurden schon im ersten Hauptabschnitte bei Behandlung der „Transversalentheorie“ nach Erledigung einer planimetrischen Partie die entwickelten Sätze, soweit es anging, in den Raum übertragen. Den Sätzen über das ebene Dreieck folgen die entsprechenden Sätze über das körperliche Dreieck und das Tetraeder, neben den harmonischen Punkten und Strahlen werden auch die harmonischen Ebenen betrachtet; ein eigenes Kapitel ist ferner den linearen Transformationen in der Ebene und im Raume gewidmet. Noch inniger gestaltet sich der Zusammenhang zwischen ebenen und räumlichen Figuren im zweiten Hauptabschnitte über „Kreis und Kugel“, in welchem jedes Kapitel sowohl planimetrische als stereometrische Sätze enthält, die sich gegenseitig erläutern. Bei der Ableitung der Fundamentalsätze über Potenz, Aehnlichkeitspunkte und harmonische Eigenschaften des Kreises ist dargethan, dass die räumlichen Anschauungen sogar unter Umständen einfacher zum Ziele führen, als die Rechnungen, welche die Planimetrie zum Beweise dieser Sätze bedarf.

Der Verfasser verhehlt sich nicht, dass der eingeschlagene Weg trotzdem er (abgesehen von einigen einfachen Formeln der Trigonometrie) eigentlich nur die ersten Elemente der Planimetrie und Stereometrie voraussetzt, für die Schüler kein leichter sein wird, weil er in jedem Augenblick die vollste Aufmerksamkeit und eine hinreichende Kenntniss des Vorhergehenden in Anspruch nimmt. Er hat in seinen Vorlesungen genugsam die Erfahrung gemacht, dass gerade die ersten Schritte auf dem Gebiete der synthetischen Geometrie die schwierigsten sind, glaubt aber, dass durch eine gründliche Verarbeitung des gebotenen Materials ein genügendes Verständniss auch auf derjenigen Stufe erreicht werden kann, für welche diese „Einleitung“ geschrieben ist.

Freilich wird dazu erforderlich sein, dass in der Schule die Geometrie zu einer grössern Bedeutung gelange, als bis anhin.

Realschulen, welche ihre Zöglinge auf polytechnische Schulen vorbereiten, werden zu dieser Ausdehnung des geometrischen Unterrichts um so eher geneigt sein, als die technische Bildung eine wesentlich constructive ist und deshalb ein entwickeltes räumliches Anschauungsvermögen verlangt. Dies wird in erhöhtem Masse der Fall sein müssen, wenn die darstellende Geometrie in ihrer naturgemässen Entwickelung sich immer mehr auf die rein synthetische Richtung stützt. Es darf also diese Schrift, namentlich wenn den in ihr enthaltenen Theorien, Lehrsätzen und Constructionen immer die praktische Ausführung in sorgfältig anzufertigenden Zeichnungen beigegeben wird, zugleich als Hilfsmittel für die darstellende Geometrie angesehen werden.

An Gymnasien wird die letztere Rücksicht zwar wegfallen; es lassen sich aber nicht minder gewichtige Gründe dafür angeben, dass auch an diesen Lehranstalten der geometrische Unterricht ausgedehnt, ja in den obersten Klassen geradezu als Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts behandelt werde. Nur wenn dies geschieht, wird es möglich sein, der Mathematik als einer geistig anregenden und bildenden Disciplin die gehörige Stellung gegenüber und inmitten der klassisch-philologischen Wissenschaft zu erringen und zu bewahren.

Noch eine persönliche Bemerkung sei dem Verfasser gestattet. In streng wissenschaftlichen Kreisen werden Leistungen, wie die vorliegende, häufig mit einer grossen Missachtung und Geringschätzung betrachtet. Es hat ihn dies nicht abgehalten, die Veröffentlichung derselben zu wagen; er ist sich bewusst, nicht infolge einer heutzutage freilich ziemlich verbreiteten Sucht der Vielschreiberei die Arbeit übernommen zu haben, sondern er glaubt vielmehr gerade der Wissenschaft einen Dienst zu leisten, wenn er die Wege, die zu ihr hinführen, nach seinen bescheidenen Kräften zu ebnen und zu erleichtern sucht. Im Uebrigen darf er wohl darauf hinweisen, dass sogar die grössten Mathematiker seines Vaterlandes, der Schweiz, es nicht verschmäht haben, für die Verbreitung der Wissenschaft in weiten Kreisen zu sorgen; Männern aber, wie einem Leonhard Euler, einem Jakob Steiner, werden doch auch die Strengstgesinnten aus diesem ihrem Bestreben nicht einen Vorwurf machen wollen.

So sei denn dieser Versuch, die synthetische Geometrie der Schule zugänglich zu machen, einer vorurtheilsfreien Berücksichtigung der Lehrer und Schüler dieser Wissenschaft empfohlen, und wenn namentlich die Schweizerischen Lehranstalten das Büchlein freundlich aufnehmen, so wird ein gern gehegter Wunsch des Verfassers in Erfüllung gehen.

C. F. G.

Inhalts-Verzeichniss.

Transversalentheorie.

Erstes Kapitel.

Die Transversalen im Dreieck.

Zweites Kapitel.

Dreieck und Tetraeder. Vollständige Figuren.

Drittes Kapitel.

Harmonische und involutorische Gebilde.

Viertes Kapitel.

Lineare Beziehungen in der Ebene und im Raume.

Kreis und Kugel.

Fünftes Kapitel.

Potenz. Aehnlichkeitspunkte.

Sechstes Kapitel.

Harmonische Eigenschaften des Kreises und der Kugel.

Siebentes Kapitel.

Anwendungen.

Achtes Kapitel.

Das Princip der reciproken Radien.

Transversalentheorie.

Erstes Kapitel.

Die Transversalen im Dreiecke.

§ 1.

Drei Punkte in gerader Linie.

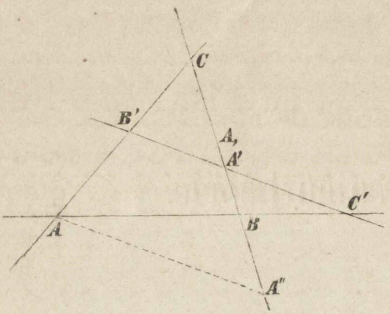
Zieht man durch ein beliebiges Dreieck ABC, dessen Seiten unbegrenzt verlängert gedacht werden, eine Transversale, welche der Allgemeinheit wegen weder eine Ecke des Dreiecks enthalten, noch einer seiner Seiten parallel laufen soll, so sind zwei verschiedene Fälle möglich. Seien nämlich $A'B'C'$ die Durchschnitte der Transversalen resp. mit den Seiten BC, CA, AB, so können entweder zwei dieser Punkte auf begrenzten Seiten des Dreiecks liegen, während der dritte auf die Verlängerung einer Seite fällt, oder es können alle drei Durchschnittspunkte auf den Verlängerungen der Seiten sich befinden; eine andere Anordnung ist nicht möglich. Unter allen Umständen aber gilt für die sechs Abstände, welche durch die Punkte $A'B'C'$ auf den Dreieckseiten erzeugt werden (von jedem dieser Punkte aus nach den Ecken derjenigen Seite gerechnet, auf welcher er liegt), die Relation:

$$BC' \,.\, CA' \,.\, AB' = B'C \,.\, C'A \,.\, A'B,$$

d. h. das Produkt dreier nicht aneinanderliegender von den sechs Abschnitten ist gleich dem Produkte der drei anderen.

Zum Beweise ziehe man durch A eine Parallele zu $A'B'C'$, welche BC in A'' treffen möge. Es ist dann $\triangle\, BC'A' \sim BAA''$, also $BC' : C'A = BA' : A'A''$ und $A'A'' = \dfrac{C'A \,.\, BA'}{BC'}$. Ebenso

Fig. 1.



folgt, weil $\triangle CB'A' \sim CAA''$ ist, $A'A'' = \frac{AB' . CA'}{CB'}$; die Gleichsetzung der beiden gefundenen Werthe für $A'A''$ gibt die zu beweisende Relation.

Liegen nun umgekehrt auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks drei Punkte $A'B'C'$ so, dass erstens entweder einer von ihnen auf einer verlängerten Seite und die beiden anderen auf begrenzten, oder aber alle drei auf verlängerten Seiten sich befinden und zweitens die Relation

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B$$

zwischen den sechs auf den Seiten des Dreiecks erzeugten Abschnitten besteht, so liegen die Punkte $A'B'C'$ auf einer Geraden. Wäre dies nicht der Fall, sondern wäre A_1 statt A' der Schnittpunkt von $B'C'$ mit BC, so müsste nach dem vorhin bewiesenen Satze sein:

$$BC' . CA_1 . AB' = B'C . C'A . A_1B,$$

während nach Voraussetzung

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B$$

ist. Durch Division folgt:

$$\frac{CA'}{CA_1} = \frac{BA'}{BA_1} \text{ oder } BA' : CA' = BA_1 : CA_1$$

und demnach

$$BA' + CA' : CA' = BA_1 + CA_1 : CA_1,$$

also

$$BC : CA' = BC : CA_1,$$

woraus sich schliesslich ergibt:

$$CA' = CA_1,$$

d. h. A' und A_1 fallen zusammen.

Hier ist stillschweigend vorausgesetzt, dass A' (wie es in Fig. 1 gezeichnet ist) auf der begrenzten Seite BC des Dreiecks ABC sich befinde. Der andere Fall, wo dieser Punkt auf einer verlängerten Seite des Dreiecks liegt, erledigt sich ebenso leicht, indem nur bei der Umformung der Proportion

$$BA' : CA' = BA_1 : CA_1$$

die Differenz statt der Summe der auf gleicher Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Strecken einzuführen ist.

Von diesem Satze kann man Gebrauch machen, um den folgenden zu beweisen: Wenn die drei Geraden AA', BB', CC', welche die Ecken zweier Dreiecke ABC, $A'B'C'$ resp. verbinden, durch einen und denselben Punkt O laufen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, AB und $A'B'$ in drei Punkten $A''B''C''$, welche auf einer Geraden liegen.

Zum Beweise hat man für $\triangle\, OA'B'$ und die Transversale AB:

$$OB\,.\,AA'\,.\,B'C'' = OA\,.\,BB'\,.\,C''A';$$

ferner für $\triangle\, OB'C'$ und die Transversale BC:

$$OC\,.\,BB'\,.\,C'A'' = OB\,.\,CC'\,.\,A''B',$$

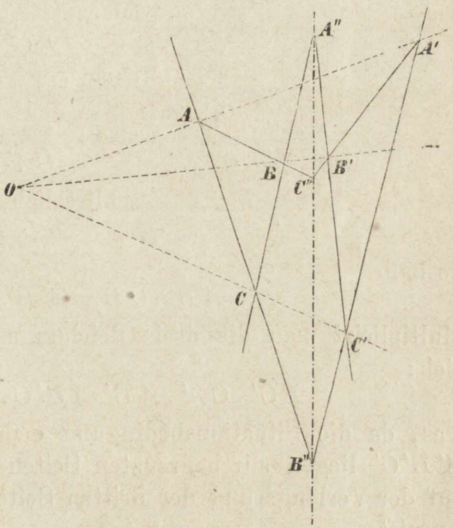
ebenso schliesslich für $\triangle\, OC'A'$ und die Transversale CA:

$$OA\,.\,CC'\,.\,A'B'' = OC\,.\,AA'\,.\,B''C'.$$

Durch Multiplication der drei erhaltenen Gleichungen erhält man:

$$B'C''\,.\,C'A''\,.\,A'B'' = B''C'\,.\,C''A'\,.\,A''B'.$$

Fig. 2.

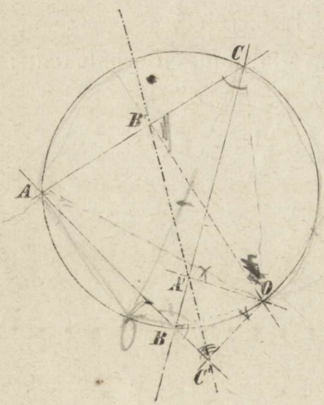


Bedenkt man jetzt, dass $A''B''C''$ Punkte auf den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind und dass sie, wie die Figur 2 zeigt, der Situationsbedingung des Fundamentalsatzes Genüge leisten, so erkennt man die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Zwei Dreiecke, wie die eben behandelten ABC und $A'B'C'$, heissen perspectivisch liegende Dreiecke. Die von ihnen bewiesene Grundeigenschaft kann dazu benutzt werden, einen Punkt C'' auf der Geraden $A''B''$ zu bestimmen, wenn der directen Ausführung dieser Operation Hindernisse entgegenstehen, und zwar kann diess mit einziger Hülfe des Visirens, resp. mittelst des Lineals allein geschehen. Man wähle auf zwei beliebig durch A'' gelegten Geraden Punkte B und C, B' und C'; die Geraden CC', BB' treffen sich dann in einem Punkte O, durch welchen man wieder eine willkürliche Gerade zieht. Diese schneidet CB'' in A, $C'B''$ in A'. Schliesslich lege man die Geraden AB, $A'B'$, welche sich nun in einem Punkte C'' auf der Geraden $A''B''$ treffen.

Der an die Spitze dieses Paragraphen gestellte Satz, oder besser gesagt, dessen Umkehrung, dient auch zum Beweise des Satzes: Fällt man von irgend einem Punkte O des einem Dreiecke ABC umgeschriebenen Kreises aus Perpendikel OA', OB', OC' auf die drei Seiten BC, CA, AB, so liegen deren Fusspunkte $A'B'C'$ in einer Geraden.

Fig. 3.



Da nämlich in einem Kreise Peripheriewinkel über demselben Bogen gleich gross sind, so ist:

$$\triangle OBC' \sim OB'C,$$

d. h.

$$BC' : OB = B'C : OC,$$

oder

$$BC' . OC = B'C . OB;$$

ebenso

$$\triangle OCA' \sim OC'A,$$

also

$$CA' . OA = C'A . OC,$$

schliesslich

$$\triangle OAB' \sim OA'B,$$

deshalb

$$AB' . OB = A'B . OA.$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen miteinander, so ergibt sich:

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B,$$

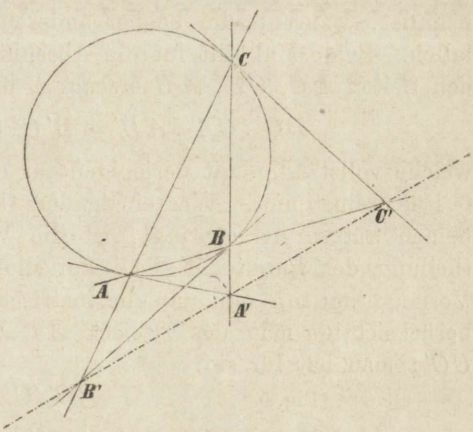
was, da die Situationsbedingung erfüllt ist (zwei der Punkte $A'B'C'$ liegen auf begrenzten Seiten des Dreiecks, der dritte auf der Verlängerung der dritten Seite), den angegebenen Satz beweist.

Wenn man den Punkt O auf der dem Dreieck ABC umschriebenen Kreislinie herumbewegt, so verändert die Gerade

$A'B'C'$ ihre Lage. Wenn O in eine Ecke des Dreiecks ABC fällt, so ist $A'B'C'$ das von dieser Ecke aus auf die gegenüberliegende Seite gefällte Perpendikel, und wenn O der zweite Endpunkt eines Durchmessers ist, welcher eine der Ecken des Dreiecks enthält, so wird $A'B'C'$ die dieser Ecke gegenüberliegende Dreieckseite sein. Fasst man die beiden ausgesprochenen Bemerkungen zusammen, so ergeben sie einen speciellen Fall eines allgemeineren Satzes: Sind O und O_1 die Endpunkte eines Durchmessers in dem Kreise, welcher durch ABC geht, so sind die beiden ihnen zugehörigen Geraden der Punkte $A'B'C'$, $A_1'B_1'C_1'$ zu einander senkrecht.

Es gilt ferner der nachfolgende Satz: Zieht man in den Ecken ABC eines Dreiecks die Tangenten AA', BB', CC' an den dem Dreieck umschriebenen Kreis, so schneiden dieselben die gegenüberliegenden Seiten BC, CA, AB in drei Punkten $A'B'C'$, welche sich auf einer und derselben Geraden befinden.

Fig. 4.



Es ist zunächst

$$\triangle AA'B \sim AA'C,$$

denn diese beiden Dreiecke haben den Winkel bei A' gemein, und ferner ist

$$\sphericalangle ACB = BAA',$$

weil diese Winkel als Peripheriewinkel über demselben Bogen angesehen werden können. Aus dieser Aehnlichkeit ergibt sich:

$$CA' = \frac{CA \,.\, AA'}{BA}; \qquad A'B = \frac{BA \,.\, AA'}{CA}.$$

In ähnlicher Weise hat man $\triangle BB'C \sim BB'A$, daraus folgt:

$$AB' = \frac{AB \,.\, BB'}{CB}; \qquad B'C = \frac{CB \,.\, BB'}{AB}.$$

Schliesslich ist $\triangle CC'A \sim CC'B$ und deshalb

$$BC' = \frac{BC \,.\, CC'}{AC}; \qquad C'A = \frac{AC \,.\, CC'}{BC}.$$

Durch Multiplication je dreier auf derselben Seite stehenden Gleichungen und Vergleichung der sich ergebenden Resultate erhält man sofort:

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B.$$

Die Situationsbedingung für die Punkte $A'B'C'$ ist erfüllt (alle drei Punkte liegen auf Verlängerungen der Dreieckseiten) und demnach der aufgestellte Satz bewiesen.

§ 2.

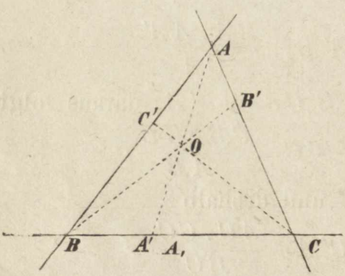
Drei gerade Linien durch einen Punkt.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt O nach den Ecken eines Dreiecks ABC Strahlen OA, OB, OC und verlängert dieselben bis sie die gegenüberliegenden Seiten schneiden, so erhält man auf diesen drei Punkte $A'B'C'$, welche entweder alle drei auf begrenzten Seiten des Dreiecks liegen, oder welche so vertheilt sind, dass nur einer auf einer begrenzten Seite sich befindet, während die beiden anderen auf verlängerte Seiten fallen. Beide Mal gilt für die Abschnitte, welche $A'B'C'$ auf den Seiten BC, CA, AB erzeugen, die Gleichung:

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B,$$

welche vollständig mit derjenigen für den Fnndamentalsatz des § 1 übereinstimmt. Was einzig den Unterschied zwischen den beiden Sätzen hervorbringt, ist die Verschiedenheit der Vertheilung der Punkte $A'B'C'$ auf die Dreieckseiten und ihre Verlängerungen. Um nun die metrische Relation zu beweisen, berücksichtige man das Dreieck ABA' und die Transversale CC'; man hat für sie:

Fig. 5.



$$BC'.CA'.OA = C'A.BC.OA';$$

ebenso für das Dreieck ACA' und die Transversale BB':

$$AB'.BC.OA' = B'C.A'B.OA.$$

Die Multiplication der beiden Gleichungen gibt:

$$BC'.CA'.AB' = B'C.C'A.A'B.$$

Wenn umgekehrt, die Situationsbedingung als erfüllt vorausgesetzt, auf den Seiten eines Dreiecks ABC drei Punkte $A'B'C'$ so liegen, dass

$$BC'.CA'.AB' = B'C.C'A.A'B$$

ist, so schneiden sich die Geraden AA', BB', CC' in einem Punkte.

Wäre A_1 und nicht A' der Schnittpunkt der durch A und den Schnittpunkt O von BB' und CC' gezogenen Geraden mit BC, so hätte man neben der bereits gegebenen Gleichung die andere

$$BC'.CA_1.AB' = B'C.C'A.A_1B,$$

welche der vorige Satz unmittelbar ergibt. Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{BA'}{BA_1} = \frac{A'C}{A_1C}$$

oder

$$BA' : A'C = BA_1 : A_1C,$$
$$BA' + A'C : A'C = BA_1 + A_1C : A_1C,$$

und unter Zuhilfenahme der Fig. 5:

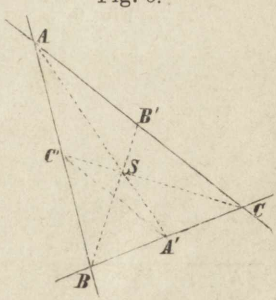
$$BC : A'C = BC : A_1C,$$
$$A'C = A_1C,$$

d. h. A' und A_1 fallen zusammen. Läge A' nicht auf der Seite BC des Dreiecks ABC selbst, sondern auf der Verlängerung derselben, so müsste dieser Beweis einer übrigens nur ganz geringen Modification unterworfen werden.

In den nachfolgenden Anwendungen des Satzes ist das Erfülltsein der Situationsbedingung so leicht nachzuweisen, dass man überall nur die metrische Relation abzuleiten hat.

1. Verbindet man in einem Dreiecke ABC die Ecken mit den Mitten $A'B'C'$ der gegenüberliegenden Seiten, so schneiden sich die Geraden AA', BB', CC' in einem und demselben Punkte (dem Schwerpunkte des Dreiecks).

Fig. 6.



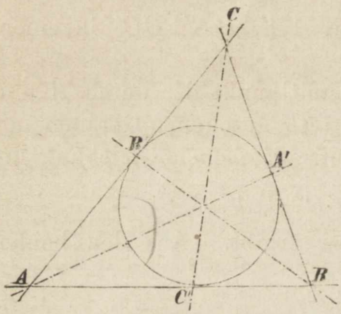
Es ist in der That: $BC' = C'A$, $CA' = A'B$, $AB' = B'C$, so dass durch Multiplication folgt:

$$BC'.CA'.AB' = B'C.C'A.A'B.$$

2. Zieht man in einem Dreieck ABC von den Ecken aus Gerade nach den Berührungspunkten $A'B'C'$ des ein-

geschriebenen Kreises mit den gegenüberliegenden Seiten, so schneiden sich diese Geraden in einem und demselben Punkte.

Fig. 7.

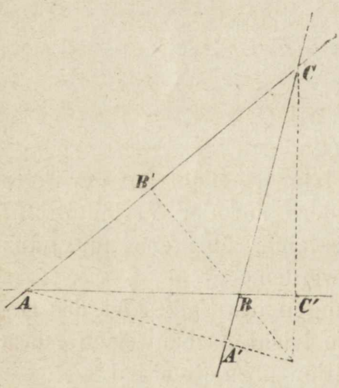


Da $BC' = A'B$, $CA' = B'C$, $AB' = C'A$, so ist

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B.$$

3. Die drei Perpendikel AA', BB', CC', welche man von den Ecken eines Dreiecks ABC aus auf die gegenüberliegenden Seiten fällen kann, schneiden sich in einem Punkte (dem Höhenpunkte des Dreiecks).

Fig. 8.



Man hat

$$\triangle BAA' \sim BCC',$$

also

$$BA' : BA = BC' : BC$$

und

$$BC' . AB = A'B . BC;$$

ferner

$$\triangle CBB' \sim CAA',$$

deshalb

$$CA' . BC = B'C . AC;$$

endlich

$$\triangle ACC' \sim ABB',$$

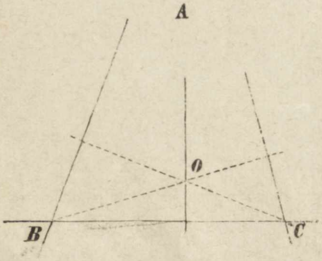
folglich

$$AB' . CA = C'A . AB.$$

Durch Multiplication ergibt sich:

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B.$$

Fig. 9.

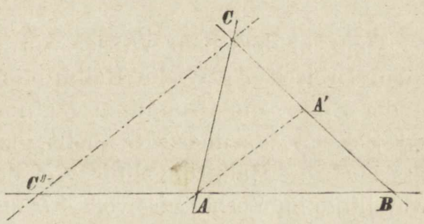


Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes kann man die Aufgabe lösen, von dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geraden aus ein Perpendikel auf eine gegebene Gerade BC zu fällen. In der That, sei A der unbekannte Schnittpunkt, ferner seien B und C die Schnittpunkte von BC mit den beiden sich in A treffenden Geraden, so construire man die beiden Perpendikel von B auf CA und von C auf AB, so wird, wenn O der Schnittpunkt derselben ist, das Perpendikel von O auf BC durch A gehen müssen.

4. Halbirt man die drei Winkel in einem Dreieck, so schneiden sich die Halbirungsgeraden in einem Punkte (dem Mittelpunkte des Kreises, welcher sich dem Dreiecke einschreiben lässt).

Wir bedürfen zunächst eines Hilfssatzes: In einem Dreieck ABC theilt die Halbirungsgerade AA' eines Winkels die gegenüberliegende Seite BC in zwei Abschnitte, welche sich wie die anliegenden Seiten verhalten.

Fig. 10.



Zum Beweise ziehe man CC'' parallel mit AA', dann ist

$$\sphericalangle ACC'' = CAA' = A'AB = AC''C.$$

Nun ist

$$\triangle ABA' \sim C''BC,$$

also

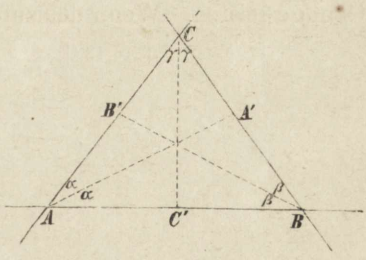
$$BA' : CA' = BA : AC'',$$

oder, da $AC'' = CA$ ist,

$$BA' : CA' = BA : CA.$$

Werden jetzt in einem Dreieck ABC die Halbirungsgeraden der Winkel mit AA', BB', CC' bezeichnet, so ist:

Fig. 11.



$$AC' : C'B = AC : CB$$

oder

$$BC' . AC = C'A . BC;$$

$$BA' : CA' = AB : AC$$

oder

$$CA' . AB = A'B . AC;$$

$$CB' : AB' = BC : AB$$

oder

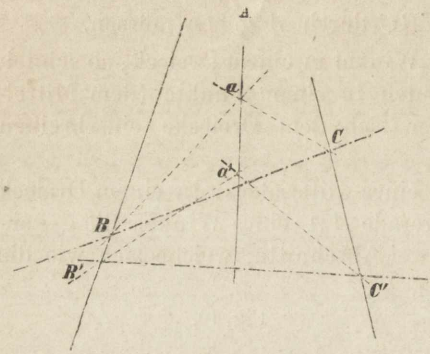
$$AB' . BC = B'C . AB;$$

und durch Multiplication:

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B.$$

Der Satz verhilft zur Construction der Halbirungslinie eines Winkels mit der unzugänglichen Spitze A. Man ziehe eine Gerade, welche die beiden Schenkel in B und C treffen möge und

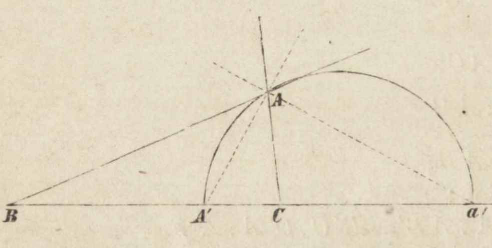
Fig. 12.



halbire die Winkel ABC und ACB; der Schnittpunkt der Halbirungslinie sei a. Eine zweite Gerade ergebe auf den Schenkeln des vorgelegten Winkels die Punkte $B'C'$, während die Halbirungsgeraden der entstehenden Winkel sich in a' schneiden sollen, dann wird die Verbindungsgerade aa' die gesuchte Winkelhalbirende von A sein.

Ganz in derselben Weise, wie gezeigt worden ist, dass in einem Dreieck ABC die Halbirungslinie AA' des Winkels A an der Spitze die Grundlinie BC im Verhältniss der anliegenden Seiten AB und AC theilt, kann nachgewiesen werden, dass auch die Halbirungslinie Aa' des Nebenwinkels von A die Grundlinie im Verhältniss von AB und AC theilt. Eine Strecke BC wird also durch zwei verschiedene Punkte in einem bestimmten Verhältniss getheilt, von denen der eine sich auf der Strecke selbst, der andere aber auf der Verlängerung derselben sich befindet. Ausser diesen beiden Punkten gibt es, wie durch Umkehrung des zum Beweise des genannten Hilfssatzes angewandten Verfahrens oder durch directe Ableitung sofort einzusehen ist, keine anderen, welche der gestellten Bedingung Genüge leisten. Wenn demzufolge die Grundlinie eines Dreiecks

Fig. 13.



fest bleibt, während die Spitze A sich so verändert, dass das Verhältniss der Seiten einen constanten Werth behält, so gehen die Halbirungslinien der Winkel bei A (die Dreieckseiten unbegrenzt gedacht) durch zwei feste Punkte A' und a' auf der Grundlinie. Damit ist nun der Punkt A in seiner Bewegung vollkommen bestimmt, denn da die erwähnten Halbirungsgeraden senkrecht zu einander stehen, so wird der Winkel $A'Aa'$ unter allen Umständen ein Rechter sein, d. h.: wenn in einem Dreieck ABC die Grundlinie BC fest bleibt und ebenso das Verhältniss der beiden Seiten AB und AC ein constantes ist, so liegt die Spitze A auf einem Kreise, der über der Entfernung von zwei durch das gegebene Verhältniss bestimmten Punkten als Durchmesser beschrieben werden kann. Soll eine Strecke BC in einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden, so construire man über BC ein Dreieck ABC, dessen Seiten AB und AC in dem gegebenen Verhältniss stehen. Die Halbirungsgeraden des Winkels A und seines Nebenwinkels schneiden dann auf BC die beiden Punkte aus, welche die Aufgabe lösen.

§ 3.

Quadratsummen von Strecken.

Fällt man von einem Punkte O aus Perpendikel OA', OB', OC' auf die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks, so ist:

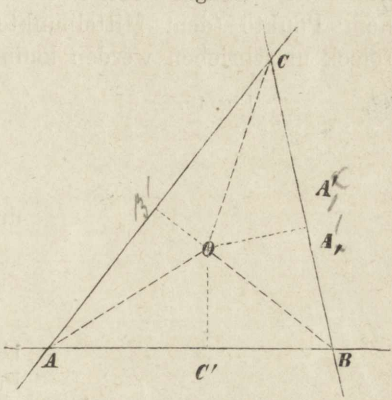
$$BC'^2 + CA'^2 + AB'^2 = B'C^2 + C'A^2 + A'B^2.$$

In der That hat man

$$BC'^2 + OC'^2 = A'B^2 + OA'^2,$$
$$CA'^2 + OA'^2 = B'C^2 + OB'^2,$$
$$AB'^2 + OB'^2 = C'A^2 + OC'^2,$$

woraus durch Addition die angeschriebene Gleichung folgt.

Fig. 14.



Liegen umgekehrt drei Punkte $A'B'C'$ resp. so auf den Seiten eines Dreiecks ABC, dass

$$BC'^2 + CA'^2 + AB'^2$$
$$= B'C^2 + C'A^2 + A'B^2,$$

so schneiden sich die in diesen Punkten auf die Seiten errichteten Perpendikel in einem Punkte.

Man hätte, wenn A_1 und nicht A' der Fusspunkt des vom Schnittpunkte der Perpendikel in B' und C' auf BC gefällten Perpendikels wäre, neben der vorausgesetzten Gleichung die andere:

$$BC'^2 + CA_1^2 + AB'^2 = B'C^2 + C'A^2 + A_1B^2,$$

also durch Subtraction

$$BA'^2 - A'C^2 = BA_1^2 - A_1C^2,$$

oder

$$(BA' + A'C)(BA' - A'C) = (BA_1 + A_1C)(BA_1 - A_1C).$$

Jetzt ist $BA' + A'C = BA_1 + A_1C$, weil beide, insofern die Fig. 14 zu Grunde gelegt wird, gleich BC, also auch

$$BA' - A'C = BA_1 - A_1C$$

und aus diesen beiden Relationen

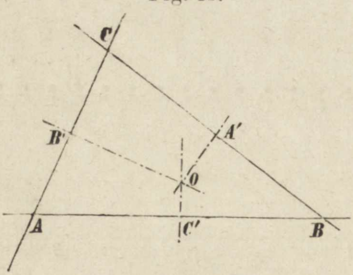
$$BA' = BA_1 \text{ und } CA' = CA_1;$$

demnach fallen A' und A_1 zusammen, d. h. der vorhin bewiesene Satz darf umgekehrt werden. Die Untersuchung derjenigen Fälle, in welchen die Punkte $A'B'C'$ in anderer Weise auf den Seiten des Dreiecks ABC vertheilt sind, als in Fig. 14, wird in analoger Weise durchgefürt.

Einige einfache Anwendungen dieses Satzes sind die nachfolgenden:

1. Die Perpendikel, welche man in den Mitten $A'B'C'$ der Seiten eines Dreiecks ABC errichten kann, schneiden sich in einem Punkte (dem Mittelpunkte des Kreises, welcher dem Dreieck umschrieben werden kann).

Fig. 15.



Es ist nämlich

$$BC' = C'A,$$
$$CA' = A'B,$$
$$AB' = B'C,$$

und demnach

$$BC'^2 + CA'^2 + AB'^2$$
$$= B'C^2 + C'A^2 + A'B^2.$$

2. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (§ 2, 3).

Man hat (siehe Fig. 8):

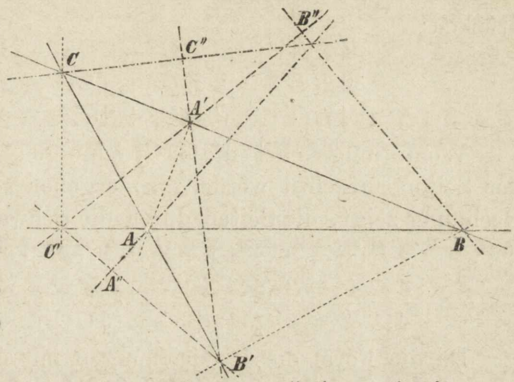
$$BC'^2 = BC^2 - CC'^2, \quad B'C^2 = BC^2 - BB'^2;$$
$$CA'^2 = CA^2 - AA'^2, \quad C'A^2 = CA^2 - CC'^2;$$
$$AB'^2 = AB^2 - BB'^2, \quad A'B^2 = AB^2 - A'A'^2;$$

also wirklich:

$$BC'^2 + CA'^2 + AB'^2 = B'C^2 + C'A^2 + A'B^2.$$

3. Werden in einem Dreieck ABC die Fusspunkte der Höhen mit $A'B'C'$ bezeichnet, so schneiden sich die Perpendikel, welche man von A auf $B'C'$, von B auf $C'A'$ und von C auf $A'B'$ fällen kann, in einem Punkte.

Fig. 16.



Seien A'', B'', C'' die Fusspunkte der genannten Perpendikel, so ist

$$B'C''^2 = B'C^2 - CC''^2,$$
$$B''C'^2 = BC'^2 - BB''^2;$$

$$C'A''^2 = C'A^2 - AA''^2,$$
$$C''A'^2 = CA'^2 - CC''^2;$$

$$A'B''^2 = A'B^2 - BB''^2,$$
$$A''B'^2 = AB'^2 - AA''^2;$$

und deshalb

$$B'C''^2 + C'A''^2 + A'B''^2 = B''C'^2 + C''A'^2 + A''B'^2,$$

weil, wie im vorigen Satze gezeigt worden ist,

$$BC'^2 + CA'^2 + AB'^2 = B'C^2 + C'A^2 + A'B^2.$$

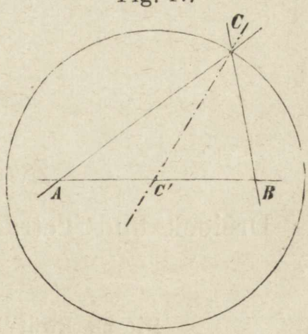
Nach einem bekannten Satze der Planimetrie besteht in einem Dreieck ABC zwischen den Seiten BC, CA, AB und der Geraden CC', welche die Spitze C mit der Mitte C' der Grundlinie verbindet, die Relation:

$$BC^2 + CA^2 = 2(\tfrac{1}{2}AB)^2 + 2CC'^2$$

oder auch

$$BC^2 + CA^2 = 2AC'^2 + 2CC'^2.$$

Fig. 17.



Es lässt sich daraus der Satz ableiten: Verändert sich ein Dreieck derart, dass seine Grundlinie fest bleibt und ebenso die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten einen constanten Werth behält, so bewegt sich die Spitze in einem Kreise, dessen Mittelpunkt die Mitte der Grundlinie ist. In der oben angeschriebenen Formel sind nämlich nach Voraussetzung $BC^2 + CA^2$ und AC'^2 gegebene, unveränderliche Grössen, demnach ist auch CC'^2 unveränderlich, d. h. C behält einen constanten Abstand von C'.

Die Geraden, welche in einem Dreiecke die Ecken ABC mit den Mitten $A'B'C'$ der gegenüberliegenden Seiten verbinden, heissen die Schwerlinien des Dreiecks. Man kann nun vermittelst der aufgestellten Formel nach einer ganz geringen Modification die Schwerlinien durch die Seiten wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} 4AA'^2 &= -BC^2 + 2CA^2 + 2AB^2, \\ 4BB'^2 &= 2BC^2 - CA^2 + 2AB^2, \\ 4CC'^2 &= 2BC^2 + 2CA^2 - AB^2. \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt diese Gleichungen nach den Quadraten der Seiten aufgelöst werden, so ergeben sich, wie eine kleine Rechnung zeigt, die Seiten durch die Schwerlinien ausgedrückt:

$$\begin{aligned} 4BC^2 &= -(\tfrac{4}{3}AA')^2 + 2(\tfrac{4}{3}BB')^2 + 2(\tfrac{4}{3}CC')^2, \\ 4CA^2 &= 2(\tfrac{4}{3}AA')^2 - (\tfrac{4}{3}BB')^2 + 2(\tfrac{4}{3}CC')^2, \\ 4AB^2 &= 2(\tfrac{4}{3}AA')^2 + 2(\tfrac{4}{3}CC')^2 - (\tfrac{4}{3}CC')^2. \end{aligned}$$

Da die Form dieser Gleichungen mit der Form der vorhin angegebenen vollkommen übereinstimmt, so ergibt sich der Satz: In einem Dreieck ABC sind die Seiten zugleich die Schwerlinien eines anderen Dreiecks $A''B''C''$, dessen Seiten $\frac{4}{3}$ mal so gross sind, als die entsprechenden Schwerlinien des Dreiecks ABC. Damit ist die Aufgabe gelöst, ein Dreieck zu construiren, von welchem man die drei Schwerlinien kennt.

Zweites Kapitel.

Dreieck und Tetraeder. Vollständige Figuren.

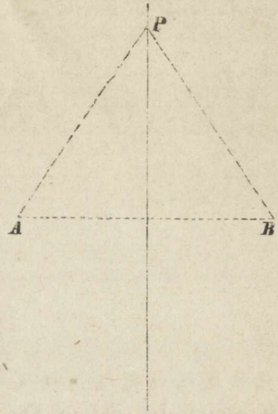
§ 4.

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Mehrere der im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätze über das ebene Dreieck lassen sich ohne die dort benutzte Transversalentheorie beweisen, indem man nur einige ganz einfache Betrachtungen zu Hilfe nimmt.

Seien A und B zwei ganz beliebige Punkte in der Ebene, so ist der Ort aller Punkte P, welche gleichweit von A und B abstehen, das Perpendikel, welches in der Mitte M von AB auf AB errichtet werden kann. Umgekehrt hat auch jeder Punkt P dieses Perpendikels die Eigenschaft, dass für ihn $AP = BP$ ist.

Fig. 18.

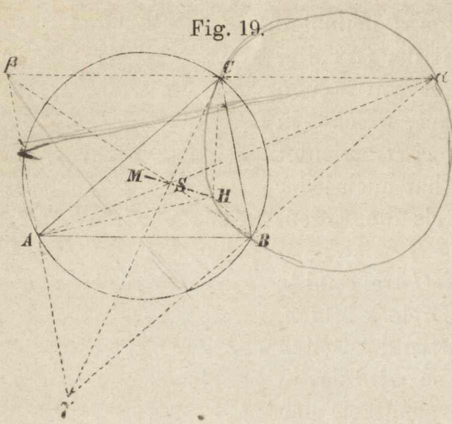


Wenn jetzt (Fig. 15) ABC drei Punkte in der Ebene sind, die ein Dreieck bilden, ferner $A'B'C'$ resp. die Mitten der Seiten BC, CA, AB bedeuten, so wird das in A' auf BC errichtete Perpendikel sich mit dem in B' auf CA errichteten Perpendikel in einem Punkte O treffen, der von allen drei Punkten ABC gleichweit entfernt ist. In der That, da O auf dem in A' errichteten Perpendikel liegt, so ist $OB = OC$, und da O auch auf dem in B' errichteten Perpendikel sich befindet, so hat man $OC = OA$ und also $OA = OB = OC$. Es muss demnach O auch auf dem Perpendikel liegen, welches in C' auf AB gefällt werden kann, d. h.: die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks auf die zugehörigen Seiten errichteten Perpendikel schneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Mittelpunkte des dem Dreiecke umschriebenen Kreises.

Es seien wieder (Fig. 6) $A'B'C'$ die Mitten der Seiten eines Dreiecks ABC, es mögen sich ferner CC' und AA' in einem Punkte S schneiden. Weil nun $C'A' \parallel AC$ ist, so hat man $\triangle ASC \sim A'SC'$, und da $C'A' = \frac{1}{2}CA$, so muss auch $C'S = \frac{1}{2}CS$ sein. Ist S_1 der Punkt, in welchem BB' und CC' sich treffen, so wird in derselben Weise gezeigt, dass $C'S_1 = \frac{1}{2}CS_1$ ist und daraus folgt, dass S und S' zusammenfallen, d. h. die drei Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Schwerpunkte des Dreiecks.

Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks ABC Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten, so bilden diese ein neues Dreieck $\alpha\beta\gamma$, welches ABC ähnlich ist und zwar derart, dass die Seiten von $\alpha\beta\gamma$ zu den entsprechenden von ABC im Verhältniss $2:1$ stehen. Die Punkte ABC sind die Mitten der

Fig. 19.



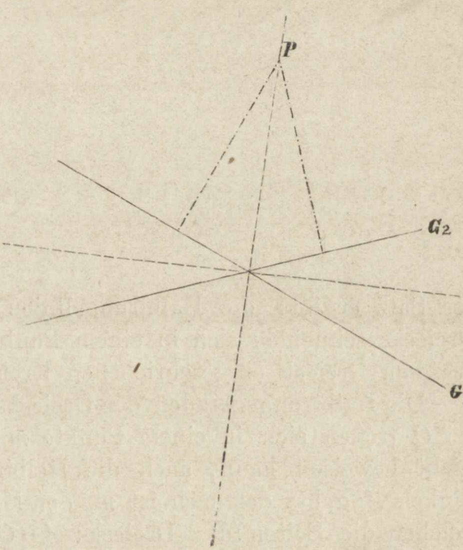
Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$; da nun in diesen die in den Mitten der Seiten errichteten Perpendikel sich in einem und demselben Punkte schneiden, so folgt für das Dreieck ABC, dass die von seinen Ecken aus auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel durch einen und denselben Punkt laufen, und damit ist der Satz bewiesen: In jedem Dreieck schneiden sich die Höhen in einem Punkte, dem Höhenpunkte des Dreiecks.

Der Schwerpunkt und der Höhenpunkt eines Dreiecks stehen zu dem Mittelpunkte des diesem Dreiecke umschriebenen Kreises in einer eigenthümlichen Beziehung. Die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und ABC haben nämlich einen gemeinsamen Schwerpunkt S, in welchem sich die Geraden $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ schneiden und zwar so, dass $AS = \frac{1}{2}S\alpha$, $BS = \frac{1}{2}S\beta$ und $CS = \frac{1}{2}S\gamma$ ist. Wie man nun zu irgend einer Ecke des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, z. B. zu α die entsprechende Ecke des Dreiecks ABC, also A findet, indem man α mit S durch eine Gerade verbindet und diese um $\frac{1}{2}\alpha S$ über S hinaus verlängert, so wird man auch aus dem Mittelpunkte H des dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ umschriebenen Kreises den Mittelpunkt M des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises finden, indem man die Gerade HS zieht und um $\frac{1}{2}HS$ über S hinaus verlängert, d. h.: In einem Dreieck liegt der Schwerpunkt S auf der Strecke HM der Geraden, welche den Höhenpunkt H mit dem Mittelpunkte M des umschriebenen Kreises verbindet und zwar so, dass $HS = 2HM$ ist.

In dem Viereck αBHC sind die Winkel bei B und C Rechte, also liegen die vier Punkte αBHC in einer Kreislinie. Da $\triangle \alpha BC \cong ABC$, so sind die den beiden Dreiecken umschriebenen Kreise gleich gross; wenn man also den durch αBC gehenden Kreis um seine Sehne BC herumklappt, bis er wieder in die Ebene der Figur zu liegen kommt, so wird er den um ABC beschriebenen Kreis in allen seinen Punkten decken. Bei dieser Umklappung ist aber α an die Stelle des Fusspunktes des von α aus auf $\beta\gamma$ gefällten Perpendikels gerückt worden, so dass sich nach leichter Ueberlegung der Satz ergibt: Legt man durch die Mitten der Seiten eines Dreiecks einen Kreis, so geht derselbe auch durch die Fusspunkte der Höhen dieses Dreiecks.

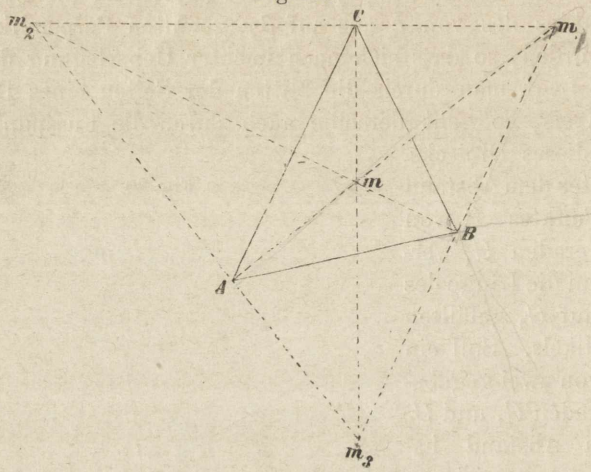
Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Geraden G_1 versteht man die Länge des von P auf G_1 gefällten Perpendikels. Soll ein Punkt von zwei gegebenen Geraden G_1 und G_2 gleichen Abstand haben, so muss er sich auf einer der beiden Halbirungsgeraden der vier Winkel befinden, in welche die Ebene durch G_1 und G_2 getheilt wird. Umgekehrt, wenn ein Punkt P auf einer der beiden Geraden liegt, welche die vier von G_1 und G_2 gebildeten Winkel halbiren, so sind seine Abstände von G_1 und G_2 einander gleich.

Fig. 20.



In einem Dreieck ABC, dessen Seiten unbegrenzt genommen werden, schneiden sich die Halbirungsgeraden der Dreieckswinkel B und C in einem Punkte m, der innerhalb des Dreiecks liegt. Da m auf der Halbirungslinie des Winkels B liegt, so sind seine Abstände von AB und CB einander gleich, ebenso muss der Punkt m, da er auf der Halbirungslinie des Winkels C liegt, gleiche Abstände von AC und BC haben, d. h.: m ist gleich weit von allen drei Seiten des Dreiecks entfernt und muss demzufolge auf einer der Halbirungsgeraden der Winkel liegen, welche CA und BA mit einander bilden. Von diesen Halbirungsgeraden geht aber nur die eine, welche den eigentlichen Dreieckswinkel halbirt, durch das Dreieck, so dass sich

Fig. 21.



der Satz ergibt: die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte m, dem Mittelpunkte des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises.

Die Halbirungsgeraden der Dreiecksnebenwinkel bei B und bei C treffen sich in einem Punkte m_1, durch den, wie man leicht beweisen kann, auch die Halbirungslinie des Dreieckswinkels A geht, demnach ist m_1 der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Seiten des Dreiecks ABC berührt. In ähnlicher Weise findet man, dass die Halbirungsgeraden der Dreiecksnebenwinkel bei C und A und die Halbirungsgerade des Dreieckswinkels B sich in einem Punkte m_2 schneiden; schliesslich ergibt sich noch, dass die Halbirungsgeraden der Dreiecksnebenwinkel bei A und B und die Halbirungsgerade des Dreieckswinkels C durch einen Punkt m_3 laufen. Alles zusammengefasst hat man also den Satz: Es gibt vier Kreise, welche die drei als unbegrenzt angenommenen Seiten eines Dreiecks berühren; von denselben liegt einer innerhalb des Dreiecks und berührt die eigentlichen Seiten des Dreiecks, während die drei anderen ausserhalb des Dreiecks sich befinden und zwar so, dass jeder von ihnen eine eigentliche Seite und zwei Verlängerungen von Dreiecksseiten berührt. Da die Halbirungsgeraden der Winkel, welche von zwei Geraden gebildet werden, zu einander senkrecht stehen, so folgt: die vier Mittelpunkte der Kreise, welche die Seiten eines Dreiecks, resp. deren Verlängerungen berühren, liegen derart, dass jeder von ihnen der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks ist.

Die Lösung einiger einfachen Aufgaben schliesst sich hier bequem an, da der Beweis der nachfolgenden Constructionen in den eben ausgeführten Betrachtungen liegt. Es soll zunächst ein Dreieck ABC construirt werden, von welchem man die Mitten $A'B'C'$ der Seiten kennt. Zu diesem Zwecke lege man blos durch A', B', C' Parallele, resp. zu $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, so bilden diese das gesuchte Dreieck. Wenn man ferner ein Dreieck zu finden hat, von welchem die Fusspunkte der Höhen gegeben sind, so halbire man in dem von diesen Fusspunkten gebildeten Dreiecke die Dreiecksnebenwinkel, dann sind die Halbirungsgeraden die Seiten des verlangten Dreiecks. Sind endlich von einem Dreiecke drei beliebige der Mittelpunkte der vier ihm eingeschriebenen Kreise gegeben, so wird das gesuchte Dreieck gebildet von den Fusspunkten der Höhen in demjenigen Dreiecke, welches durch die drei gegebenen Mittelpunkte bestimmt ist.

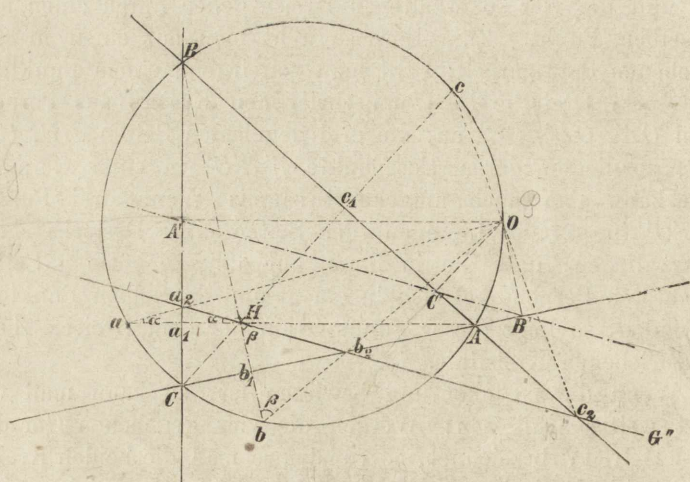
Vier gerade Linien in der Ebene, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen und keine zwei parallel laufen, erzeugen, indem man je drei von ihnen zusammenstellt, vier Dreiecke. Jedem derselben kann ein Kreis umschrieben werden und die vier so erhaltenen Kreise gehen durch einen und denselben Punkt. Zum Beweise geht man auf einen in § 1 gegebenen Satz zurück: Fällt man von irgend einem Punkte O des einem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises aus Perpendikel OA', OB', OC' auf die drei gegebenen Seiten BC, CA, AB, so liegen deren Fusspunkte $A'B'C'$ in einer Geraden. Man kann aber auch umgekehrt sagen: Wenn drei Punkte $A'B'C'$ in gerader Linie auf den Seiten eines Dreiecks ABC derart liegen, dass die in ihnen auf die zugehörigen Seiten errichteten Perpendikel sich in einem und demselben Punkte O schneiden, so liegt dieser Punkt O auf der dem Dreieck ABC umschriebenen Kreislinie.

Wenn diese Umkehrung bewiesen ist, so kann man wie folgt weiter schliessen: Werden die vier gegebenen Geraden mit I II III IV bezeichnet, so construire man die beiden Kreise, welche den Dreiecken II III IV und III IV I umschrieben sind.

Die genannten Kreise haben ausser dem Schnittpunkte von III und IV noch einen Punkt s gemein; von ihm aus fälle man Perpendikel auf I II III IV, deren Fusspunkte resp. mit $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ bezeichnet werden mögen. Zufolge des bereits aus § 1 citirten Satzes liegen nun $p_2\,p_3\,p_4$ in einer Geraden, weil s auf dem um II III IV beschriebenen Kreise liegt, und aus ähnlichem Grunde befinden sich auch $p_1\,p_3\,p_4$ in einer Geraden, demnach sind $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ auf einer und derselben Geraden vertheilt. Umgekehrt, da die Fusspunkte der von s auf II III IV gefällten Perpendikel in einer Geraden liegen, so ist s ein Punkt der um II III IV beschriebenen Kreislinie und aus analogen Gründen liegt s auch auf den um die Dreiecke III IV I, IV I II, I II III beschriebenen Kreislinien, d. h.: Wenn aus vier Geraden durch Gruppirung zu je dreien vier Dreiecke erzeugt und diesen Dreiecken Kreise umgeschrieben werden, so schneiden sich die vier Kreise in einem und demselben Punkte und die Fusspunkte der von diesem Punkte aus auf die vier Geraden gefällten Perpendikel liegen in einer Geraden.

Fällt man von einem Punkte p aus ein Perpendikel auf eine gegebene Gerade G und verlängert dasselbe über seinen Fusspunkt hinaus um sich selbst, so heisst der Endpunkt „der Gegenpunkt von p in Bezug auf G“. In Anwendung dieser

Fig. 22.



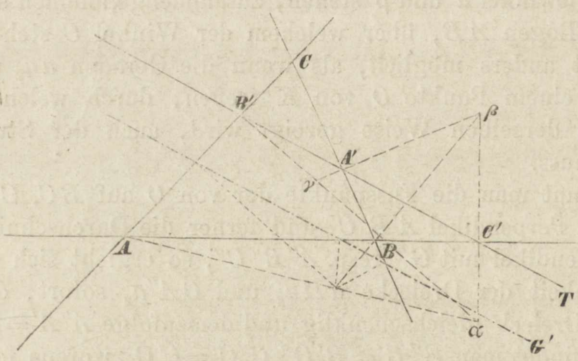
Bezeichnung ergibt sich der Satz: Construirt man für den Höhenpunkt H eines Dreiecks die Gegenpunkte abc in Bezug auf die Seiten BC, CA, AB desselben, so liegen diese auf dem Kreise K, welcher dem Dreieck umschrieben werden kann. Eine durch H gelegte Gerade G'' möge die Seiten des Dreiecks resp. in Punkten $a_2 b_2 c_2$ schneiden, dann treffen sich die drei Geraden aa_2, bb_2, cc_2 in einem Punkte O des Kreises K. Zum Beweise beachte man, dass aus Symmetriegründen die beiden in Fig. 22 mit α bezeichneten Winkel einander gleich sind und ebenso die beiden Winkel β. Da ferner im Viereck $a_1 b_1 HC$ die Winkel bei a_1 und b_1 Rechte sind, so muss $\alpha+\beta=C$ sein, und also sind auch im Kreise K die Bogen, über welchen die Peripheriewinkel α und β stehen, zusammengenommen so gross, als der Bogen AB, über welchem der Winkel C steht. Dies ist nicht anders möglich, als wenn die Geraden aa_2 und bb_2 sich in einem Punkte O von K treffen, durch welchen, wie ganz in derselben Weise gezeigt wird, auch der Strahl cc_2 gehen muss.

Nimmt man die Fusspunkte der von O auf BC, CA, AB gefällten Perpendikel $A'B'C'$ und ferner die Durchschnitte dieser Perpendikel mit G'' resp. $A''B''C''$, so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke aHa_2 und $OA''a_2$ sofort, dass das letztere Dreieck gleichschenklig und demzufolge $A''A'=A'O$ ist. Ebenso findet man $B''B'=B'O$, $C''C'=C'O$, woraus folgt, da ja A'', B'', C'' in gerader Linie liegen, dass auch $A'B'C'$ auf einer und derselben Geraden sich befinden, was übrigens schon früher bewiesen ist. Man kann jetzt den folgenden Satz beifügen: Die Gegenpunkte $A''B''C''$ eines Punktes O auf dem Umfange eines Kreises K, der einem Dreieck ABC umschrieben ist, in Bezug auf die Seiten BC, CA, AB dieses Dreiecks liegen in einer Geraden G'', welche den Höhenpunkt H von ABC enthält. — Zu jedem Punkte O des Kreises K gehört stets eine, aber auch nur eine Gerade G'' und umgekehrt: zu jeder durch H gehenden Geraden gehört stets ein, aber auch nur ein Punkt O, wie die ausgeführten Constructionen unmittelbar ergeben.

Wenn G' eine Gerade ist, welche die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC in drei Punkten $A'B'C'$ schneidet, derart, dass die in ihnen auf die genannten Seiten errichteten Perpendikel sich in einem bestimmten Punkte P schneiden, so kann man stets durch den Höhenpunkt H von ABC zu G' eine Parallele G'' legen, zu welcher in der vorhin angegebenen Weise ein ganz bestimmter Punkt O auf der Kreislinie K gehört. Fällt man von diesem Punkte aus Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks, so liegen deren Fusspunkte in einer Geraden $\mathfrak{G}'$, welche zu G' parallel ist. Es ist aber leicht nachzuweisen, dass G' und $\mathfrak{G}'$ zusammenfallen müssen, d. h. dass es unter den sämmtlichen Geraden G' keine zwei parallele gibt.

Wird nämlich das Dreieck ABC von einer Transversalen T in den Punkten $A'B'C'$ geschnitten, so bilden im Allgemeinen

Fig. 23.



die in $A'B'C'$ auf die zugehörigen Seiten des Dreiecks errichteten Perpendikel ein neues Dreieck $\alpha\beta\gamma$, während, wenn T zu einer der Geraden G' wird, die Punkte $\alpha\beta\gamma$ zusammenfallen. Wenn T zu sich selbst parallel fortgeschoben wird, so muss sich α, wie eine elementare Betrachtung zeigt, auf einer bestimmten Geraden bewegen, welche den Punkt A enthält, während β eine durch den Punkt B gehende Gerade beschreibt. Diese Geraden können sich nur in einem einzigen Punkte treffen und diese hat die Eigenschaft, dass die Fusspunkte der von ihm aus auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel in der einzigen Geraden G' liegen, welche T parallel sein kann. — Da nun bewiesen ist, dass G' und $\mathfrak{G}'$ zusammenfallen, so müssen auch P und O sich vereinigen, und damit ist die Richtigkeit der Umkehrung jenes Satzes dargethan, der oben benutzt worden ist, um zu zeigen, dass diejenigen vier Kreise sich in einem einzigen Punkte schneiden, welche den aus vier beliebigen Geraden gebildeten Dreiecken umschrieben sind.

Da die Fusspunkte des von dem gemeinsamen Punkte s der genannten Kreise aus auf die vier Geraden I II III IV gefällten Perpendikel sich in einer und derselben Geraden befinden, so müssen auch die Gegenpunkte von s nach I II III IV in einer Geraden liegen und diese muss die vier Höhenpunkte der Dreiecke enthalten, die sich aus I II III IV bilden lassen, d. h.: die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche durch Gruppirung von vier Geraden zu je dreien entstehen, liegen in einer Geraden.

§ 5.

Das körperliche und das sphärische Dreieck.

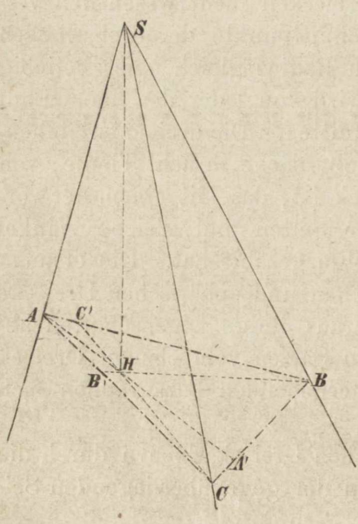
Drei Ebenen, welche willkürlich im Raume gelegen sind, von denen also namentlich keine zwei parallel laufen und die auch nicht alle drei in einer und derselben Geraden sich schneiden, theilen den Raum in acht Theile, von denen jeder ein körperliches Dreieck oder ein Dreikant ist. Die Winkel, welche die Ebenen mit einander bilden, werden bekanntlich die Winkel der körperlichen Dreiecke genannt, während die von den Schnittgeraden der Ebenen erzeugten Winkel als die Seiten der Dreiecke bezeichnet werden. Wie man weiss, sind die sphärischen Dreiecke von den körperlichen Dreiecken nicht wesentlich verschieden. Legt man aus dem Schnittpunkte der drei Ebenen als Mittelpunkt eine Kugel, deren Radius gleich einer beliebig gewählten Längeneinheit ist, so wird von jeder der Ebenen auf der Kugel ein Grosskreis ausgeschnitten. Die drei so entstehenden Grosskreise theilen die Kugeloberfläche in acht Theile, von denen jeder ein sphärisches Dreieck ist, das mit einem der vorhin gefundenen Dreikante gleiche Seiten und gleiche Winkel und genau in derselben Reihenfolge gezählt hat. Die elementarsten Begriffe über die körperlichen und sphärischen Dreiecke sollen hier vorausgesetzt und daraus einige Eigenschaften abgeleitet werden, die verschiedenen Sätzen vom ebenen Dreieck entsprechen, welche in den vorhergehenden Paragraphen sich entwickelt finden.

Legt man in einem körperlichen Dreieck Ebenen durch die Kanten und durch die Mittellinien der gegenüberliegenden Seiten (den winkelhalbirenden Geraden derselben) drei Ebenen, so schneiden sich diese in einer Geraden. Zunächst ist klar, dass die drei genannten Ebenen die Spitze des körperlichen Dreiecks gemein haben; wenn man nun in dem zum vorliegenden körperlichen Dreiecke gehörigen sphärischen Dreiecke die Ecken durch Gerade verbindet, so bilden dieselben ein ebenes Dreieck, dessen Schwerlinien resp. in den Ebenen liegen, welche die Kanten des körperlichen Dreiecks mit den Mittellinien der gegenüberliegenden Seiten verbinden. Diese Ebenen gehen also durch den Schwerpunkt des ebenen Dreiecks und demnach durch die Gerade, welche denselben mit der Spitze des körperlichen Dreiecks verbindet, d. h. durch die Schwerkante des körperlichen Dreiecks. Für das sphärische Dreieck ergibt sich hieraus der Satz: Verbindet man in einem sphärischen Dreiecke die Ecken mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten durch Grosskreisbogen, so laufen dieselben durch einen und denselben Punkt, den Schwerpunkt des sphärischen Dreiecks.

Die Ebenen, welche von den Kanten eines körperlichen Dreiecks aus senkrecht auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt werden können, schneiden sich in einer und derselben Geraden.

Zum Beweise construire man die Ebenen durch SA senkrecht zu BSC und durch SB senkrecht zu CSA, welche sich in einer Geraden SH schneiden mögen. In einen beliebigen Punkt H dieser Geraden lege man eine Ebene, die zu ihr senkrecht steht und welche die Kanten des körperlichen Dreiecks resp. in ABC schneiden möge. Die Gerade AH treffe BC in einem Punkte A', so ist AHS eine Ebene, welche gleichzeitig auf den Ebenen ABC und BSC senkrecht steht, deshalb bildet sie auch mit deren Durchschnittsgeraden BC einen rechten Winkel und demnach ist AH ein Perpendikel auf BC. In derselben

Fig. 24.



Weise wird gezeigt, dass BH ein Perpendikel auf AC ist, woraus nun folgt, dass auch CH eine Höhe des Dreiecks ABC ist und demnach senkrecht zu AB steht. Es ist jetzt leicht einzusehen, dass die Ebene SHC senkrecht zu ASB steht und damit ist bewiesen, dass in der That die Ebenen, welche man von den Kanten eines körperlichen Dreiecks aus senkrecht auf die gegenüberliegenden Seitenflächen fällen kann, sich in einer Geraden (im Falle der vorliegenden Figur ist es SH) schneiden, der Höhenkante des körperlichen Dreiecks. Eine unmittelbare Consequenz dieses Satzes ist: Legt man durch die Ecken eines sphärischen Dreiecks Grosskreisbogen senkrecht zu den gegenüberliegenden Seiten, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, dem Höhenpunkte des sphärischen Dreiecks.

Es ist im Eingang dieses Paragraphen darauf aufmerksam gemacht worden, dass durch drei Ebenen und ihre Schnittgeraden der Raum in acht körperliche Dreiecke abgetheilt wird. Wenn man die Schwerkanten für jedes derselben construirt, so erkennt man, dass je zwei die Scheiteldreiecke sind, die nämliche Gerade zur Schwerkante haben, so dass man vier Schwerkanten erhält; hingegen haben alle acht Dreiecke eine und dieselbe Gerade zur Höhenkante. Die acht sphärischen Dreiecke, in welche die Kugeloberfläche durch drei Grosskreise getheilt wird, ergeben acht Schwerpunkte, die zu je zweien die Endpunkte eines Kugeldurchmessers bilden, und zwei Höhenpunkte, die sich ebenfalls diametral gegenüberstehen.

Der Ort aller Punkte, welche gleichweit entfernt sind von zwei von einem Punkte ausgehenden Geraden (d. h. der Ort aller Punkte im Raume, welche gleiche senkrechte Abstände von beiden Geraden haben), ist die Ebene, welche in der Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels senkrecht auf die Ebene dieses Winkels errichtet werden kann. Wenn man nun in den Mittellinien zweier Seiten eines körperlichen Dreiecks senkrechte Ebenen auf diese Seiten errichtet, so schneiden sich dieselben in einer Geraden, von welcher irgend ein Punkt gleiche senkrechte Abstände von den drei Kanten des körperlichen Dreiecks hat. Die genannte Schnittgerade muss also auch in der Ebene liegen, welche in der Mittellinie der dritten Seite senkrecht zu dieser steht, d. h.: Errichtet man in den

Mittellinien der Seiten eines körperlichen Dreiecks senkrechte Ebenen zu den resp. Seiten, so schneiden sich dieselben in einer Geraden, welche die Axe der Kanten des körperlichen Dreiecks heisst. Daraus ergibt sich: Die drei Grosskreisbogen, welche von den Mitten der Seiten eines sphärischen Dreiecks senkrecht zu denselben ausgehen, treffen sich in einem Punkte.

Fällt man von einem Punkte der Axe der Kanten eines körperlichen Dreiecks aus Perpendikel auf die Kanten, so liegen deren Fusspunkte in einem Kreise, dessen Ebene senkrecht zur Axe steht. Führt man diese Construction für alle Punkte der Axe aus, so erhält man eine Schaar von Kreisen, die einen Rotationskegel erfüllen, welcher auch erhalten wird, wenn man eine der Kanten um die Axe herumdreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt. Die Axe der Kanten eines körperlichen Dreiecks ist also zugleich die Axe eines Rotationskegels, welcher die Kanten desselben enthält. Man findet damit auch die Bedeutung des Durchschnittspunktes der drei, von der Mitte der Seiten eines sphärischen Dreiecks senkrecht zu denselben ausgehenden Grosskreisbogen; er ist der auf der Kugel gelegene Mittelpunkt desjenigen Kleinkreises der Kugel, welcher die Ecken des sphärischen Dreiecks enthält.

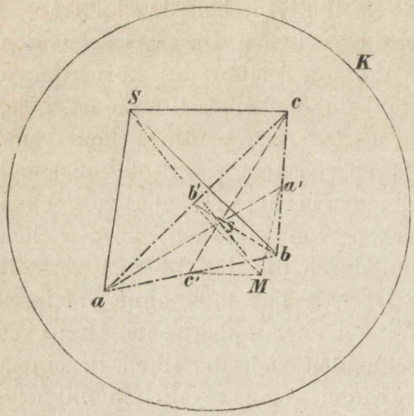
Betrachtet man nicht nur ein einziges körperliches Dreieck, sondern die Gruppe von acht körperlichen Dreiecken, welche durch drei Ebenen im Raume erzeugt wird, und bemerkt ferner, dass die Kanten eines Rotationskegels als unbegrenzt gedacht werden müssen, so findet man, dass diese acht körperlichen Dreiecke zu vier ihre Kanten enthaltenden Rotationskegeln Veranlassung geben, oder: es gibt vier Rotationskegel, welche drei durch einen Punkt gehende Gerade ihrer ganzen Ausdehnung nach enthalten.

Die Halbirungsebenen der Winkel, welche zwei Ebenen mit einander bilden, haben die Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte gleiche senkrechte Abstände nach den gegebenen Ebenen erzeugt; umgekehrt: Wenn ein Punkt gleichweit von zwei Ebenen absteht, so liegt er auf einer der beiden Halbirungsebenen der Winkel, welche die beiden gegebenen Ebenen mit einander bilden. — Halbirt man in einem körperlichen Dreiecke zwei der Winkel, so schneiden sich die Halbirungsebenen in einer Geraden, welche von allen Seitenebenen gleichweit entfernt ist, und wie mit Leichtigkeit bewiesen wird, auch auf der Halbirungsebene des dritten Winkels liegt, d. h.: die Halbirungsebenen der drei Winkel eines körperlichen Dreiecks schneiden sich in einer Geraden, der Axe der Seiten des körperlichen Dreiecks; diese Axe ist zugleich die Axe eines Rotationskegels, welcher die drei Seitenflächen des Dreiecks berührt. Man kann diesem Satze den andern beifügen, dass es vier Rotationskegel gibt, welche drei gegebene Ebenen berühren; jeder von ihnen gehört zu zwei Scheiteldreiecken von den acht körperlichen Dreiecken, in welche der Raum durch die drei Ebenen getheilt wird. — Für das sphärische Dreieck hat man ohne Weiteres den Satz: Halbirt man die Winkel eines sphärischen Dreieckes durch Grosskreisbogen, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, welcher der auf der Kugel gelegene Mittelpunkt desjenigen Kleinkreises der Kugel ist, welcher dem sphärischen Dreieck eingeschrieben werden kann, d. h. die Stücke der Grosskreisbogen berührt, welche die Seiten des Dreiecks bilden.

Unter allen körperlichen Dreiecken zeichnet sich dasjenige aus, in welchem alle Seiten und alle Winkel Rechte sind. Dasselbe entspricht in einer Beziehung dem gleichseitigen ebenen Dreieck, in anderer dem rechten Winkel. Eine Eigenschaft, welche das Letztere in Evidenz setzt, ist die Erweiterung des Satzes, dass der Winkel im Halbkreis ein Rechter ist, welcher Satz auch so ausgesprochen werden kann: Legt man die Spitze eines rechten Winkels in die Peripherie eines Kreises und bestimmt für jeden Schenkel den zweiten Durchschnittspunkt mit dem Kreise, so geht die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte durch den Mittelpunkt des Kreises, also durch einen unveränderlichen Punkt, wie man auch den ersten Winkel an seinem Scheitel herumdrehen mag.

Sei nun K eine feste Kugel, S ein auf ihrer Oberfläche angenommener Punkt, ferner seien Sa, Sb, Sc die Kanten eines gleichseitigen und rechtwinkligen körperlichen Dreiecks, welche K zum zweiten Male in abc treffen möge, so findet man die Mittelpunkte der Kreise, in welchen die Ebenen bSc, cSa, aSb von K getroffen werden, indem man vom Mittelpunkte M der Kugel K aus Perpendikel auf die genannte Ebene fällt. Bezeichnet man die Fusspunkte derselben resp. mit a', b', c', so ergibt sich mit Leichtigkeit, dass sie die Mitten der

Fig. 25.

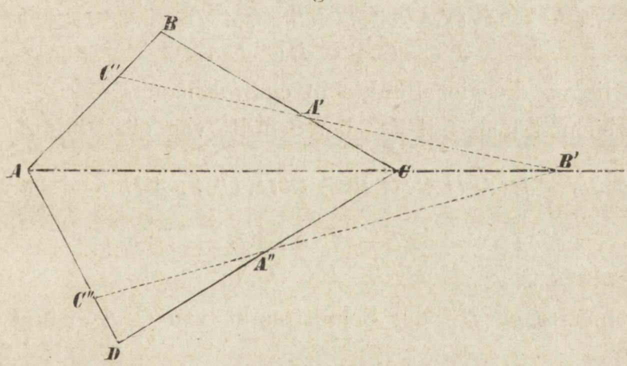


Seiten bc, ca, ab des ebenen Dreiecks abc sind. In der That, die Ebene bSc z. B. wird von K in einem Kreise geschnitten, für welchen der rechte Winkel bSc ein Peripheriewinkel ist, also muss der Mittelpunkt des Kreises die Mitte a' der Strecke bc sein. Da aS und Ma' zwei Perpendikel auf dieselbe Ebene sind, so liegen sie als parallele Gerade in einer Ebene, welche die vier Punkte $aSMa'$ enthält, demzufolge müssen sich die beiden Geraden MS und aa' schneiden. In derselben Weise wird gezeigt, dass MS auch von bb' und cc' getroffen wird, was nur dann geschehen kann, wenn MS durch den Schnittpunkt der Geraden aa', bb', cc' geht, welcher der Schwerpunkt s des Dreiecks abc ist. Da aS und Ma' parallel laufen, so sind die Dreiecke asS und $a'sM$ ähnlich, und weil $as = 2sa'$ ist, so wird man auch haben: $Ss = 2sM$. Alles zusammengefasst ergibt sich der Satz: Dreht man ein rechtwinkliges gleichseitiges körperliches Dreieck um seine Spitze S herum, die auf der Oberfläche einer Kugel K liegt, und bestimmt in jeder der möglichen Lagen, die es annehmen kann, die zweiten Durchschnittspunkte seiner Kanten mit K, die abc heissen mögen, so wird die Ebene des Dreiecks abc immer durch einen festen Punkt s laufen, welcher jedesmal sein Schwerpunkt ist und gefunden wird, indem man auf den Radius SM der Kugel ein Drittel dieses Radius von M aus abträgt. — Fällt man von S aus ein Perpendikel auf die Ebene abc, dessen Fusspunkt h heissen möge, und bezeichnet man ferner mit m den Fusspunkt des von M aus auf dieselbe Ebene gefällten Perpendikels, so zeigt sich, dass $ShsmM$ in einer Ebene liegen und zwar so, dass msh in einer Geraden sich befinden, während zugleich $hs = 2sm$ ist. Dies bestätigt einen in § 4 bewiesenen Satz, da h der Höhenpunkt, s der Schwerpunkt und m der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des Dreiecks abc ist.

Die im Vorigen bewiesenen Sätze über ein beliebig gegebenes körperliches Dreieck hätten auch vermittelst einer Methode abgeleitet werden können, welche die durch die sphärische Trigonometrie ermöglichte Uebertragung der in den §§ 1 und 2 gegebenen Transversalensätze auf den Raum ist. Dies soll hier nicht weiter ausgeführt werden, hingegen soll ein Satz (der streng genommen nicht unter den Titel dieses Paragraphen gehört) bewiesen werden, welchen man als eine andere Verallgemeinerung eines der erwähnten Transversalensätze auf den Raum betrachten kann.

Vier Punkte im Raume $ABCD$, die nicht in einer Ebene liegen und von denen A mit B, B mit C, C mit D und D mit A

Fig. 26.



durch eine Gerade verbunden ist, bilden ein windschiefes Viereck; die Verbindungsgerade AC kann als eine Diagonale desselben bezeichnet werden. Eine willkürlich gelegte Ebene schneide auf den Geraden AB, BC, CD, DA und auf der Verlängerung der Geraden AC resp. die Punkte $C'A'A''C''$ und B' aus, so werden zunächst in der Ebene ABC die Punkte $C'A'B'$ in einer Geraden liegen und es muss also nach einem in § 1 bewiesenen Satze sein:

$$BC'.CA'.AB' = B'C.C'A.A'B.$$

Ebenso befinden sich in der Ebene ADC die Punkte $A''B'C''$ in einer Geraden, es ist also nach demselben Satze:

$$B'C.C''A.A''D = DC''.CA''.AB'.$$

Durch Multiplication der beiden Gleichungen ergibt sich

$$BC'.CA'.C''A.A''D = C'A.A'B.CA''.DC'',$$

d. h.: Schneidet man die Seiten eines windschiefen Vierecks durch eine Ebene, so erhält man acht Abschnitte, auf jeder Seite zwei, so dass das Product von vier nicht an einander liegenden unter ihnen gleich dem Product der vier anderen ist.

Der Satz kann auch umgekehrt werden. Wenn nämlich auf den begrenzten Seiten AB, BC, CD, DA eines windschiefen Vierseits vier Punkte $C'A'A''C''$ angenommen werden, so dass von den acht durch sie auf den Seiten gebildeten Abschnitten das Product aus vier nicht aneinanderliegenden gleich dem Product der vier anderen, ebenfalls nicht aneinanderliegenden ist; wenn man demnach

$$BC' . CA' . C''A . A''D = C'A . A'B . CA'' . DC''$$

oder

$$\frac{C'A . A'B}{BC' . CA'} = \frac{C''A . A''D}{DC'' CA''}$$

hat, so liegen die vier Punkte in einer Ebene.

Bezeichnet man mit B' den Schnitt von $C'A'$ mit AC, so hat man

$$BC' . CA' . AB' = B'C . C'A . A'B$$

oder

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{C'A . A'B}{BC' . CA'}.$$

Wenn ferner B'' der Schnittpunkt von $C''A''$ ist, so ergibt sich

$$B''C . C''A . A''D = DC'' . CA'' . AB''$$

oder

$$\frac{AB''}{B''C} = \frac{C''A . A''D}{DC'' . CA''}.$$

Die Werthe von $\frac{AB'}{B'C}$ und $\frac{AB''}{B''C}$ sind nach der Voraussetzung gleich, des Weitern liegen die Punkte B' und B'' nach Construction beide auf der Verlängerung von AC, also müssen sie zusammenfallen, da nach einem am Schlusse von § 2 erwähnten Satze auf der Verlängerung einer Strecke nur ein einziger Punkt existirt, welcher dieselbe in einem bestimmten Verhältnisse theilt. Wenn aber B' und B'' zusammenfallen, so liegen die Punkte $C'A'A''C''$ in einer Ebene.

Eine einfache Verification des bewiesenen Satzes bildet die Bemerkung, dass die Mitten $C'A'A''C''$ der Seiten AB, BC,

CD, DA eines windschiefen Viereckes in einer Ebene liegen. Man hat nämlich für diesen Fall $AC' = C'B$, $BA' = A'C$, $CA'' = A''D$ und $DC'' = C''A$, woraus durch Multiplication folgt:

$$BC' . CA' . C''A . A''D = C'A . A'B . CA'' . DC'',$$

was die ausgesprochene Behauptung beweist. Die allerelementarste Betrachtung zeigt zudem, dass die vier genannten Punkte die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Wenn $ABCD$ ein windschiefes Viereck ist, dessen begrenzte Seiten AB, BC, CD, DA eine Kugel resp. in den Punkten $C'A'A''B''$ berühren, so hat man:

$$AC' = AC''; \quad BA' = BC'; \quad CA'' = CA'; \quad DC'' = DA'',$$

woraus sich durch Multiplication ergibt:

$$BC' . CA' . C''A . A''D = C'A . A'B . CA'' . DC'',$$

d. h. die vier Berührungspunkte eines windschiefen Vierecks, welches einer Kugel umschrieben ist, dessen Seiten also die Kugel berühren, liegen in einer Ebene.

§ 6.

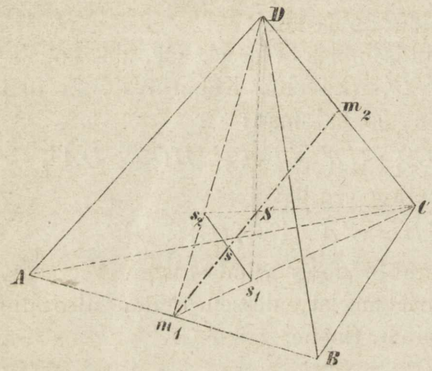
Das Tetraeder.

Die elementare Geometrie zerfällt, je nach den verschiedenen Gebieten, in welchen sie ihre Constructionen ausführt, in eine ebene, sphärische und räumliche Geometrie. Der Lehre vom ebenen Dreieck in der Planimetrie entspricht in der Geometrie auf der Kugelfläche, d. h. in der sphärischen Geometrie die Theorie des sphärischen Dreiecks und in der räumlichen Geometrie kann man als diesem entsprechend die Theorie der dreiseitigen Pyramide oder des Tetraeders betrachten. Hält man diese Analogie fest, so kann man leicht aus der näheren Erörterung planimetrischer Sätze eine Vermuthung schöpfen, in welcher Weise sich dieselben auf den Raum würden ausdehnen lassen, wobei dann freilich nicht immer gesagt ist, dass sich das vermuthete Resultat bestätigen werde. Im Nachfolgenden sollen einige im ersten Kapitel bewiesene Sätze über das ebene Dreieck zum Ausgangspunkte von Betrachtungen über das Tetraeder gewählt werden.

Dem Satze, dass in einem ebenen Dreiecke die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Mitten der gegenüberliegenden

Seiten durch einen und denselben Punkt laufen, entspricht im Raume der Satz: Zieht man von den Ecken eines Tetraeders aus Gerade nach den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Seitenflächen, so schneiden sich dieselben in einem und demselben Punkte.

Fig. 27.



Sei m_1 im Tetraeder $ABCD$ die Mitte der Kante AB, so liegen die Schwerpunkte s_1 und s_2 der Seitenflächen ABC und ABD resp. auf den Geraden m_1C und m_1D, so dass also die Geraden Cs_2 und Ds_1 als in der Ebene $m_1s_1s_2CD$ liegend sich schneiden müssen. Da nun $m_1s_1 = \frac{1}{3}m_1C$ und $m_1s_2 = \frac{1}{3}m_1D$, so folgt, dass auch $s_1s_2 = \frac{1}{3}CD$, d. i. die Dreiecke s_2Ss_1 und CSD sind ähnlich und es muss auch $s_1S = \frac{1}{3}SD = \frac{1}{4}s_1D$ sein. Die Schwerlinie s_1D des Tetraeders $ABCD$ wird also von der durch C gehenden Schwerlinie in einem Punkte S geschnitten, der im Abstande $\frac{1}{4}s_1D$ von der Grundfläche ABC aus gelegen ist. Man zeigt ebenso, dass auch die durch A und B gelegten Schwerlinien des Tetraeders durch den Punkt S gehen, so dass die vier Schwerlinien sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Wenn neben der Mitte m_1 der Kante AB auch noch die Mitte m_2 der ihr gegenüberliegenden Kante CD in die Betrachtung eingeführt wird, so ergibt sich im Dreieck m_1CD sofort

$$s_1C = 2m_1s_1;\ 2m_1s_2 = s_2D;$$

$$Dm_2 = m_2C \text{ oder } s_1C \,.\, m_1s_2 \,.\, Dm_2 = m_1s_1 \,.\, s_2D \,.\, m_2C,$$

d. h.: Da s_1, s_2, m_2 alle drei auf begrenzten Seiten des Dreieckes m_1CD liegen: die Geraden s_1D, s_2C und m_1m_2 schneiden sich in einem und demselben Punkte. Ist s der Schnittpunkt von m_1m_2 und s_1s_2, so erkennt man leicht, dass

$$m_1s = \tfrac{1}{3}m_1m_2 \text{ und } sS = \tfrac{1}{3}Sm_2$$

ist. Man hat aber

$$m_1s + sS + Sm_2 = m_1m_2$$

oder

$$\tfrac{1}{3} m_1 m_2 + \tfrac{1}{3} S m_2 = m_1 m_2,$$

woraus sich

$$S m_2 = \tfrac{1}{2} m_1 m_2$$

ergibt, also: Die Verbindungsgerade der Mitte zweier gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders geht durch den Schwerpunkt desselben und wird in ihm halbirt.

Es ist bewiesen worden, dass die in den drei Mitten der Seiten eines Dreiecks auf die Seiten desselben errichteten Perpendikel sich in einem und demselben Punkte schneiden, welcher der Mittelpunkt des dem Dreiecke umschriebenen Kreises ist. Ein ähnlicher Satz gilt für das Tetraeder. Seien $ABCD$ die Ecken eines beliebigen Tetraeders, so ist der Ort aller Punkte, welche gleichweit von A und von B entfernt sind, die Ebene, welche in der Mitte der Kante AB senkrecht zu AB errichtet werden kann. Umgekehrt, wenn ein Punkt in der genannten Ebene liegt, so hat er gleiche Abstände von A und von B. Bezeichnet man nun den Durchschnitt der drei Ebenen, welche in den Mitten der Kanten AB, AC, AD resp. senkrecht zu diesen Kanten gelegt werden können, mit M, so hat der Punkt M die Eigenschaft, dass er gleichweit absteht von allen Ecken des Tetraeders; er liegt demnach nicht nur in jeder der drei Ebenen, als deren Durchschnitt er definirt worden ist, sondern er liegt auch in den Ebenen, welche von den Mitten der Kanten BC, BD, CD senkrecht zu denselben ausgehen. Bedenkt man noch den Satz, dass das von dem Mittelpunkte einer Kugel aus auf eine schneidende Ebene gefällte Perpendikel den Mittelpunkt des der Ebene und der Kugel gemeinschaftlichen Kreises zum Fusspunkt hat, so ergibt sich: Errichtet man in den Mitten jeder der sechs Kanten eines Tetraeders eine senkrechte Ebene zu derselben, so schneiden sich dieselben in einem und demselben Punkte, dem Mittelpunkte der Kugel, welche dem Tetraeder umgeschrieben werden kann. In dem nämlichen Punkte schneiden sich auch die Perpendikel (durch jedes derselben gehen drei der sechs Ebenen), welche man auf die vier Seitenflächen des Tetraeders resp. in den Mittelpunkten der Kreise errichten kann, die den in den Seitenflächen enthaltenen Dreiecken umschrieben sind.

Soll ein Punkt der Mittelpunkt einer Kugel sein, welche vier gegebene Ebenen (die Seitenflächen eines Tetraeders mit den Ecken $ABCD$) zu Tangentialebenen hat, so müssen seine Abstände von allen vier Ebenen einander gleich sein. Sei also M ein solcher Punkt, so muss er zunächst von drei der Seitenflächen, z. B. DBC, DCA, DAB gleichen Abstand haben, d. h. er muss auf einer der Axen der vier Rotationskegel liegen, welche die Seiten der von den drei genannten Ebenen gebildeten körperlichen Dreiecke berühren (§ 4.) Der Punkt M hat aber auch gleichen Abstand von den Seitenflächen DBC und ABC und liegt demnach auf einer der beiden Halbirungsebenen der Winkel, welche diese Seitenflächen miteinander bilden. Jede derselben wird von den vier Axen in vier Punkten geschnitten, so dass es acht Punkte gibt, von denen jeder gleichweit entfernt ist von den vier Seitenflächen eines Tetraeders, d. h.: einem Tetraeder können acht Kugeln eingeschrieben werden.

Man kann leicht einen Ueberblick der Figur gewinnen, welche entsteht, wenn man die Mittelpunkte dieser acht Kugeln construirt. Halbirt man nämlich die Winkel, welche die in jeder Kante zusammenstossenden Seitenflächen miteinander bilden, so erhält man zwölf Ebenen, die sich sechszehnmal zu dreien in einer Geraden und achtmal zu sechsen in einem Punkte schneiden. Von den sechszehn Geraden gehen achtmal vier durch einen der Mittelpunkte und viermal vier durch eine der Tetraederecken; die acht Mittelpunkte liegen sechszehnmal zu je zweien mit einer Ecke des Tetraeders auf einer Geraden und zwölfmal zu vier mit einer Kante des Tetraeders in einer Ebene. Ueber die Lage der Mittelpunkte mag noch Folgendes bemerkt werden: Durch vier beliebige unbegrenzte Ebenen, von denen keine zwei parallel laufen und die auch nicht alle vier durch einen Punkt gehen, wird der ganze unendliche Raum in fünfzehn Theile getheilt; von diesen ist einer vollkommen begrenzt und bildet ein gewöhnliches Tetraeder, die übrigen erstrecken sich ins Unendliche, und zwar so, dass vier über den Seitenflächen, sechs über den Kanten und vier über den Ecken des Tetraeders stehen. Ein Mittelpunkt befindet sich nun in dem begrenzten Raume, vier andere liegen resp. in den Räumen über den Seitenflächen, die drei übrigen sind vertheilt auf die über den Kanten stehenden Räume, und zwar so, dass, wenn ein Mittelpunkt in einem dieser Räume liegt, dann in dem über der gegenüberliegenden Kante des Tetraeders stehenden keiner vorkommt.

Fällt man von den Ecken $ABCD$ eines Tetraeders aus Perpendikel auf die gegenüberliegenden Seitenflächen, so erhält man vier Gerade, die Höhen des Tetraeders, von denen man in Analogie mit dem Satze, dass die drei Höhen eines Dreiecks sich in einem und demselben Punkte schneiden, erwarten könnte, dass sie einen Punkt gemein hätten. Es ist aber leicht zu zeigen, dass dies nicht der Fall ist. In der That, seien $ABCD$ die Ecken des Tetraeders, so liegt die von A aus auf die Seitenfläche BCD gefällte Höhe a in derjenigen Ebene, welche durch A senkrecht zu der Kante BC gelegt werden kann. Da nun D im Allgemeinen nicht in dieser Ebene liegt, so ist die von D ausgehende Höhe d dieser Ebene parallel, kann also nur dann als die Höhe a schneidend betrachtet werden, wenn a und d parallel laufen (zwei parallele Gerade verhalten sich, als in einer Ebene liegend, wie wenn sie einen unendlich entfernten Punkt gemein hätten). Dies wird aber bei einem willkürlich gewählten Tetraeder nicht eintreten, also schneiden sich im Allgemeinen irgend zwei Höhen des Tetraeders nicht.

Die drei Ebenen, welche in A, B, C resp. senkrecht zu BC, CA, AB errichtet werden können, schneiden sich in einer Geraden d, welche im Höhenpunkte des Dreiecks ABC senkrecht zu der Ebene ABC steht. Da diese Gerade in der ersten der drei genannten Ebenen liegt, so schneidet sie die Höhe a des Tetraeders und ebenso wird gezeigt, dass sie auch die Höhen b und c schneidet, die von B und C ausgehen; mit der Höhe d ist sie parallel, so dass also d_1 eine Gerade ist, welche alle vier Höhen des Tetraeders schneidet. Wenn man in den Höhen der Dreiecke BCD, CDA, ABD senkrechte Gerade a_1, b_1, c_1 resp. zu den Ebenen der Dreiecke legt, so wird auch jede von diesen Geraden alle vier Höhen $abcd$ schneiden. Die beiden Gruppen von Geraden $abcd$ und $a_1 b_1 c_1 d_1$ stehen also in der Beziehung, dass eine jede Gerade der einen Gruppe jede Gerade der andern Gruppe schneidet, während leicht gezeigt wird, dass im Allgemeinen zwei Gerade, die derselben Gruppe angehören, sich nicht schneiden.

Legt man durch die Ecken $ABCD$ eines Tetraeders eine Kugel, so schneidet die Tangentialebene derselben in einer der

Ecken die gegenüberliegende Seitenfläche in einer Geraden. Die Tangentialebene α' in A schneide die Ebene BCD oder α in der Geraden a, ebenso mögen die Tangentialebenen β', γ', δ' in B, C, D die Seitenflächen CDA, DAB, ABC oder $\beta\gamma\delta$ in den Geraden b, c, d schneiden, dann stehen die Geraden a, b, c, d in einer Beziehung zu einander, welche der zwischen den Höhen eines Tetraeders bestehenden Beziehung analog ist.

Zunächst ist zu zeigen, dass im Allgemeinen irgend zwei der Geraden, z. B. a und d sich nicht treffen. Da a in der Ebene α und d in der Ebene δ liegt, so kann, wenn sich die beiden Geraden schneiden, ihr Durchschnitt nur im Durchschnitt der beiden Ebenen, also nur auf der Geraden BC liegen. Weil aber a auf α' liegt, so muss sich der Schnittpunkt von a und d auch in dieser Ebene α' befinden, also im Durchschnitt A_δ von α' mit BC. Dieser Schnittpunkt kann noch in anderer Weise bestimmt werden; er ist nämlich der gemeinsame Punkt von BC und der Tangente in A an den Kreis, welcher dem Dreieck ABC umschrieben ist, was sich ergibt, wenn man bedenkt, dass eine Kugel und ihre Tangentialebene von einer durch ihren Berührungspunkt gehenden Ebene in einem Kreise und einer seiner Tangenten geschnitten werden.

Der Punkt A_δ, durch den d gehen muss, wenn a und d sich schneiden sollen, ist demnach gegeben, sobald A, B und C bekannt sind. Da jetzt d auch in der Tangentialebene δ' liegen muss, so ist δ' eine der durch A_δ an die Kugel gelegten Tangentialebenen. Die Berührungspunkte aller so bestimmter Tangentialebenen liegen in einem Kreise, auf welchem also auch D liegt; d. h. da bei einem beliebigen Tetraeder dies im Allgemeinen nicht eintreten wird: die beiden Geraden a und d schneiden sich im Allgemeinen nicht.

Es sollen jetzt vier Gerade $a'b'c'd'$ construirt werden, von denen jede alle vier Gerade $abcd$ schneidet. Zu dem Ende nimmt man den planimetrischen Satz zu Hilfe, dass in jedem Dreieck die in den Ecken gelegten Tangenten an den ihm umschriebenen Kreis die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten schneiden, welche in gerader Linie liegen (§ 1). Legt man also in A, B, C die Tangenten an den in δ liegenden, um ABC beschriebenen Kreis, so schneiden dieselben die Seiten BC, CA,

AB resp. in A_δ, B_δ, C_δ, die sich auf einer Geraden d' befinden (der hier mit A_δ bezeichnete Punkt ist derselbe, wie der früher so genannte). Ebenso ergibt sich in der Ebene $\alpha = BCD$ eine Gerade a', welche drei Punkte B_α, C_α, D_α enthält, deren Bedeutung man leicht erkennt; dass ferner in den Ebenen β und γ zwei neue Geraden b' und c' entstehen, welche resp. Punkte C_β, D_β, A_β und D_γ, A_γ, B_γ enthalten, ist evident. Wenn man nun bedenkt, dass a und a' sich in der Ebene α befinden, also sich schneiden, und für ihren Schnittpunkt die Bezeichnung A_α einführt, während B_β, C_γ, D_δ eine analoge Bedeutung haben sollen, so ergibt sich nachfolgende Tabelle:

1. auf der Geraden a liegen die Punkte A_α, A_β, A_γ, A_δ,
 „ „ „ b „ „ „ B_α, B_β, B_γ, B_δ,
 „ „ „ c „ „ „ C_α, C_β, C_γ, C_δ,
 „ „ „ d „ „ „ D_α, D_β, D_γ, D_δ;
2. auf der Geraden a' liegen die Punkte A_α, B_α, C_α, D_α,
 „ „ „ b' „ „ „ A_β, B_β, C_β, D_β,
 „ „ „ c' „ „ „ A_γ, B_γ, C_γ, D_γ,
 „ „ „ d' „ „ „ A_δ, B_δ, C_δ, D_δ.

Aus der Tabelle ergibt sich sofort, dass von den beiden Gruppen der Geraden $abcd$ und $a'b'c'd'$ jede Gerade der einen Gruppe jede Gerade der andern Gruppe schneidet, während im Allgemeinen, wie nun leicht gezeigt wird, zwei Gerade, die derselben Gruppe angehören, sich nicht treffen.

Zwei Dreiecke sind in § 1 perspectivisch liegend genannt worden, wenn die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen und denselben Punkt laufen; man hat von ihnen nachgewiesen, dass die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Seiten in einer Geraden liegen. Man kann auch zwei Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ perspectivisch liegend nennen, wenn die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken, AA', BB', CC', DD' durch einen und denselben Punkt O gehen. Die entsprechenden Seitenflächen BCD und $B'C'D'$, CDA und $C'D'A'$, DAB und $D'A'B'$, ABC und $A'B'C'$ schneiden sich dann resp. in vier Geraden $abcd$, die einer und derselben Ebene angehören. In der That liegen die vier Punkte $AA'DD'$ mit dem Punkte O in einer Ebene, so dass also AD und $A'D'$ sich in einem Punkte schneiden; dieser gehört sowohl dem Durchschnitt der Ebenen CDA und $C'D'A'$, als auch dem Durchschnitt der Ebenen DAB und $D'A'B'$ an, d. h. in ihm schneiden sich die beiden Geraden b und c. Da nun im Allgemeinen von den vier Geraden $a\,b\,c\,d$ keine drei durch einen und denselben Punkt gehen, so ergibt sich ohne Weiteres, dass sie in einer Ebene gelegen sind.

Lässt man die Seitenflächen ABC und $A'B'C'$ in eine und dieselbe Ebene fallen, so ergibt sich aus den vorliegenden Betrachtungen sofort der Satz von den perspectivisch liegenden Dreiecken, ein Zeugniss dafür, dass unter Umständen die Ausdehnung eines planimetrischen Satzes auf den Raum dessen Beweis erleichtern kann.

§ 7.

Vollständige Figuren.

In den Elementen der Planimetrie versteht man unter n-Eck eine Figur, welche durch n Punkte in der Ebene gebildet wird, von denen keine drei in gerader Linie liegen. Bezeichnet man die Punkte in einer bestimmten Reihenfolge mit $1, 2, 3, \ldots n$, so entsteht das n-Eck, indem man 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4, $\ldots n-1$ mit n und schliesslich n mit 1 durch eine geradlinige Strecke verbindet. Je nach der Lage der n Punkte und je nach der Reihenfolge, in welcher sie mit einander verbunden werden, kann das n-Eck verschiedene Gestalten annehmen. Für das Viereck z. B. ergeben sich die Formen der Fig. 28, von denen die erste ein convexes, die zweite ein concaves und

Fig. 28.

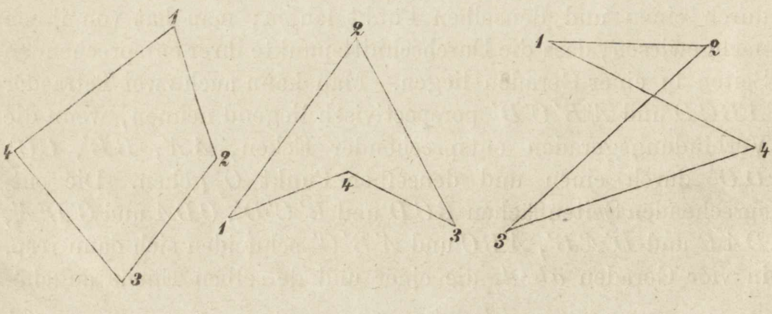
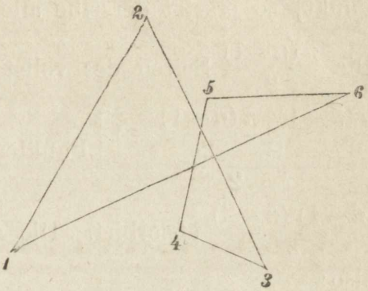


Fig. 29.



die dritte ein überschlagenes Viereck heisst. Um ein weiteres Beispiel anzugeben, ist in Fig. 29 ein Sechseck verzeichnet, welches wesentlich von dem in den Elementen meistentheils einzig betrachteten convexen Sechseck abweicht.

Um für eine Reihe von Sätzen eine allgemeinere Fassung zu gewinnen, führt man neben dem Begriffe des einfachen n-Ecks, wie er im Vorigen enthalten ist, noch denjenigen des vollständigen n-Ecks ein. Man nennt vollständiges n-Eck in der Ebene eine Gruppe von n Punkten, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Die unbegrenzt verlängerten Verbindungsgeraden dieser n Punkte oder Ecken zu je zweien heissen die Seiten des n-Ecks. Von jeder Ecke gehen $n-1$ Seiten aus und jede Seite geht durch zwei Ecken, so dass also das vollständige n-Eck $\frac{n(n-1)}{2}$ Seiten hat. Je zwei Seiten des n-Ecks schneiden sich in einem Punkte, welcher entweder eine Ecke oder keine Ecke ist; im letzteren Falle nennt man ihn einen Diagonalpunkt eines vollständigen n-Ecks. Werden die auf einer beliebigen Seite gelegenen Ecken ausgeschieden, so bleiben $n-2$ Ecken übrig, welche ein vollständiges $(n-2)$-Eck mit $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Seiten bilden. Jede dieser Seiten schneidet auf der angenommenen Seite des n-Eckes einen Diagonalpunkt aus; auf jeder andern Seite des n-Ecks befinden sich ebenso viele Diagonalpunkte, so dass also (da jeder von ihnen auf zwei Seiten liegt) ihre Anzahl

$$d = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

ist.

Man hätte noch in anderer Weise zu dieser Zahl gelangen können: Irgend m beliebige Geraden in der Ebene schneiden sich im Allgemeinen, wie leicht nachgewiesen wird, in $\frac{m(m-1)}{2}$

Punkten; gehen aber die m Geraden durch einen und denselben Punkt, so ersetzt derselbe alle $\frac{m(m-1)}{2}$ Durchschnittspunkte. Die $\frac{n(n-1)}{2}$ Seiten des vollständigen n-Ecks theilen sich in $\frac{\frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2}-1\right]}{2}$ Punkten, von denen aber jede der Ecken $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ absorbirt. Die Anzahl d der Diagonalpunkte ist also:

$$d = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left[\frac{n(n-1)}{2}-1\right]}{2} - n\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

was nach gehöriger Reduction die schon gefundene Zahl ergibt.

Aus einem vollständigen n-Ecke können in mannichfacher Weise einfache n-Ecke abgesondert werden. In der That kann man den n-Ecken derselben in $1.2.3.4\ldots n$ verschiedenen Arten die Zahlen $1, 2, 3, 4\ldots n$ beifügen, und aus jeder dieser Permutationen lässt sich nach der im Eingange dieses Paragraphen gegebenen Definition ein einfaches n-Eck herstellen. Aber diese $1.2.3.4\ldots n$ gefundenen einfachen n-Ecke sind nicht alle von einander verschieden, da man offenbar in einem einfachen n-Ecke die Numerirung der Ecken von jeder Ecke beginnen kann, während man natürlich auch ohne das einfache n-Eck zu verändern, die Numerirung in umgekehrter Reihenfolge ausführen darf. Demnach sind je $2n$ der n-Ecke identisch, d. h. aus einem vollständigen n-Ecke können

$$\frac{1.2.3.4\ldots(n-1).n}{2.n}$$

oder wenn $n > 3$ ist, $3.4.5\ldots(n-1)$ einfache n-Ecke gebildet werden.

Neben das vollständige n-Eck kann man in durchaus analogen Betrachtungen das vollständige n-Seit stellen. Beliebige n Gerade in der Ebene, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, bestimmen ein vollständiges n-Seit. Die n Geraden oder Seiten schneiden sich zu je zweien in $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten, den Ecken des vollständigen n-Seits. Die Verbindungsgerade zweier Ecken ist entweder eine Seite oder aber keine Seite eines vollständigen n-Seits, in welch letzterem Falle sie Diagonale heisst. Das vollständige n-Seit hat

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

Diagonalen. Man kann, wenn $n > 3$ ist, aus dem vollständigen n-Seit $3.4.5\ldots(n-1)$ einfache n-Seite darstellen, insofern man unter einfachem n-Seit die nachfolgende Figur versteht: n beliebigen Geraden in der Ebene mögen in einer bestimmten Reihenfolge die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ beigefügt sein, dann wird ein einfaches n-Seit gebildet durch die Strecken, welche auf 2 durch 1 und 3, auf 3 durch 2 und 4, auf 4 durch 3 und 5 ... auf n durch $(n-1)$ und 1 und auf 1 durch n und 2 ausgeschnitten werden. Dieses einfache n-Seit ist also identisch mit dem einfachen n-Eck, welches successive die nachfolgenden Ecken hat: den Schnittpunkt von 1 und 2, den Schnittpunkt von 2 und 3, den Schnittpunkt von 3 und 4 ..., den Schnittpunkt von $n-1$ und n und schliesslich den Schnittpunkt von n und 1.

Verbindet man die Ecken eines ebenen n-Ecks durch gerade Linien mit einem ausserhalb der Ebene gelegenen Punkte S, so erhält man ein körperliches n-Eck. Der Punkt S heisst die Spitze des körperlichen n-Ecks, die Verbindungsgeraden von S mit den Ecken des ebenen n-Ecks sind die Kanten desselben. Die Ebene zweier Kanten ist eine Seitenfläche und der Durchschnitt zweier Seitenflächen, welcher nicht eine der erzeugenden Kanten ist, heisst eine Diagonalkante des körperlichen n-Ecks.

In durchaus derselben Weise erzeugt man ein körperliches n-Seit, indem man die Seiten eines ebenen n-Seits mit einem ausserhalb der Ebene gelegenen Punkte S durch Ebenen verbindet. Die Anzahl der Seitenebenen, der Kanten und der Diagonalebenen des körperlichen n-Seits lässt sich unmittelbar angeben, da sie übereinstimmt mit der Anzahl der Seiten, Ecken und Diagonalen des ebenen n-Seits.

Sind im Raume n Punkte gegeben, von denen keine vier in einer Ebene und demnach auch keine drei in gerader Linie liegen, so bilden dieselben ein räumliches n-Eck. Die Verbindungsgerade zweier dieser Punkte oder Ecken heisst Seite; die Ebene, welche drei der Ecken enthält, wird Seitenfläche genannt.

Das körperliche n-Eck hat $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Seiten und $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Seitenflächen. Die Seitenflächen eines körperlichen n-Ecks schneiden sich ausser in den Seiten noch in

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}$$

Geraden.

Eine Gruppe von n Ebenen im Raume, von denen keine vier durch einen Punkt und folglich auch keine drei durch eine und dieselbe Gerade gehen, bilden ein räumliches n-Flach. Dasselbe enthält $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Seiten (Schnittgeraden zweier Ebenen) und $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Ecken (Schnittpunkte dreier Ebenen).

Drittes Kapitel.

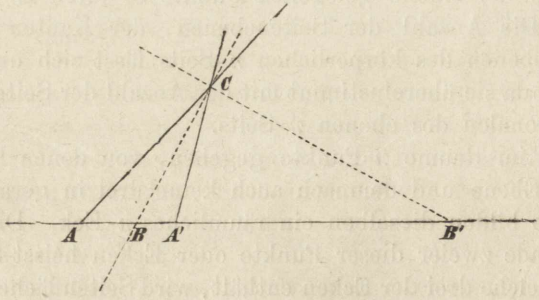
Harmonische und involutorische Gebilde.

§ 8.

Harmonische Punkte.

In § 2, 4 ist bewiesen worden, dass die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze eines Dreiecks die Grundlinie im Ver-

Fig. 30.



hältniss der anliegenden Seiten theilt. Sei nun in etwas veränderter Bezeichnung C der Winkel an der Spitze im Dreieck $AA'C$, dessen Grundlinie AA' ist, dann wird zunächst, wenn die Halbirungslinie von C in B die Gerade AA' trifft,

$$AC : A'C = AB : A'B$$

sein. Man kann aber auch die Halbirungslinie des Nebenwinkels von C construiren, die in B die Grundlinie treffe. Man hat dann:

$$AC : A'C = AB' : A'B',$$

was leicht zu beweisen ist, und durch Verbindung der beiden Proportionen:

$$AB : A'B = AB' : A'B'.$$

Vier Punkte $AA'BB'$ in einer Geraden, die in den durch sie erzeugten Abschnitten diese Proportion befriedigen und welche so liegen, dass man auf der Geraden nicht von A nach A' gelangen kann, ohne über einen und nur über einen der Punkte B und B' zu gehen, und auch nicht von B nach B' sich begeben kann, ohne einen und nur einen der Punkte A und A' zu überschreiten, heissen harmonische Punkte.

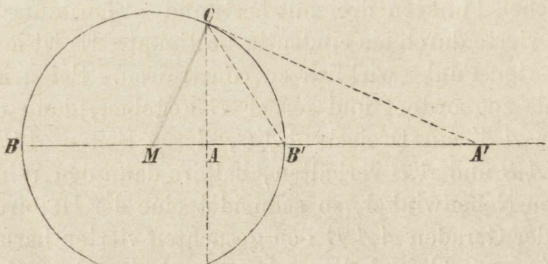
Nehmen wir an, das Verhältniss $AC : A'C$ sei gegeben, so existiren nur zwei Punkte B und B', welche die Strecke AA' nach denselben theilen. Von diesen liegt einer auf der Strecke selbst, der andere auf ihrer Verlängerung, und zwar, wie man leicht erkennt, liegen die Punkte B und B', von der Mitte m der Strecke AA' aus gesehen, auf derselben Seite. Da nun auch durch AB und $A'B$ das Verhältniss $AC : A'C$ bestimmt ist, so folgt, dass durch die aufgestellte Proportion der Punkt B den Punkt B' vollständig bestimmt und umgekehrt. Man nennt deshalb A und A', B und B' zugeordnete Punkte und kann leicht aus dem Gesagten den Schluss ziehen: Werden von vier harmonischen Punkten drei mit bestimmter Zuordnung gegeben, so ist der vierte durch sie eindeutig bestimmt. Es ist auch leicht, diesen vierten Punkt wirklich zu construiren. Seien nämlich A und A' als zugeordnet und ferner B gegeben, dann construire man über AA' ein Dreieck $AA'C$, deren Seiten AC und $A'C$ sich wie AB und $A'B$ verhalten, halbire dann den Winkel bei C und seinen Nebenwinkel, so schneidet eine der Halbirungsgeraden auf der Geraden $AA'B$ den gesuchten vierten harmonischen Punkt B' aus, während die andere durch B geht. Oder auch:

Man verbinde B mit der Spitze C des Dreiecks $AA'C$ durch eine Gerade und lege durch C eine Senkrechte zu derselben, so schneidet diese Senkrechte aus AA' den Punkt B' aus.

Es ist übrigens klar, dass die Punkte B und B' zu A und A' in derselben Beziehung stehen, als die Punkte A und A' zu B und B', d. h. bei vier harmonischen Punkten sind die beiden Paare von zugeordneten Punkten vollkommen gleichgestellt, was daraus hervorgeht, dass die Proportion $BA : B'A = BA' : B'A'$ mit der andern $AB' : A'B = AB' : A'B'$ identisch ist.

Die eben entwickelte Construction des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen bei bestimmter Zuordnung enthält noch eine gewisse Willkürlichkeit, die man zu einer wesentlichen Vereinfachung benutzen kann. Wenn nämlich die Punkte A, A' und B gegeben sind, so ist zwar im Hilfsdreieck $AA'C$ das Verhältniss der Seiten $AC : A'C$ bestimmt; aber diese Seiten selbst dürfen noch innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählt werden, denn der Punkt C ist einzig und allein an die Bedingung gebunden, dass er auf einer Kreislinie liege, welche über BB' als Durchmesser beschrieben ist. Es soll jetzt noch die weitere Bedingung beigefügt werden, dass das Dreieck $AA'C$ bei A oder A' rechtwinklig sei, je nachdem A oder A' auf der begrenzten Strecke BB' liegt. Es möge, um einen der beiden Fälle anzunehmen, A auf BB' gelegen und C die nunmehrige Lage der Spitze des Dreiecks sein, dann ist CA' eine Tangente des über den Durchmesser BB' gelegten Kreises, da die in C an diesen Kreis gezogene Tangente mit CB' einen Winkel bestimmt, der als Peripheriewinkel über dem Bogen CB' aufgefasst werden kann und da ferner $CB' = C'B'$, also wirklich $\sphericalangle A'CB' = B'CC' = B'CA$ ist. (Man hat in der

Fig. 31.



Figur vorausgesetzt, dass A näher bei B' als bei B liege, was übrigens ganz unwesentlich ist). Hat man also zu den Punkten $BB'A$, von denen die beiden ersten als zugeordnete betrachtet werden, den vierten harmonischen Punkt zu construiren, wobei vorausgesetzt wird, dass A auf der begrenzten Strecke BB' liege, so construire man den Kreis über BB', errichte in A ein Perpendikel auf BB' und lege in einem von dessen Schnittpunkten C oder C' mit dem Kreise eine Tangente an denselben, so schneidet diese auf der Geraden BB' den gesuchten vierten harmonischen A zugeordneten Punkt A' aus. Ist umgekehrt zu einem ausserhalb BB' gelegenen Punkte A' und zu BB' ein vierter harmonischer A' zugeordneter Punkt A zu finden, so ziehe man von A' aus eine Tangente an den Kreis über BB' als Durchmesser und fälle von ihrem Berührungspunkte aus ein Perpendikel auf BB', dann ist dessen Fusspunkt der gesuchte Punkt A.

Die Verbindung, in welche AC und CA' durch die besprochene Figur gesetzt sind, lehrt, wie eines der beiden Punktenpaare, aus denen eine Gruppe von vier harmonischen Punkten besteht, im vorliegenden Falle also AA' sich verändert, wenn das andere BB' festbleibt. Es ist schon darauf hingewiesen worden, dass A und A' stets auf derselben Seite von der Mitte M der Strecke BB' sich befinden. Je näher A an einen der Punkte B oder B' rückt, desto mehr nähert sich auch A' demselben Punkte, und wenn A mit B oder B' zusammenfällt, so vereinigen sich auch A und A'. Wenn überhaupt zwei von vier harmonischen Punkten zusammenfallen, so muss nothwendigerweise noch ein dritter mit ihnen zusammenfallen. Wenn A in die Mitte M der Strecke BB' rückt, so geht A' ins Unendliche, und wenn umgekehrt A' im Unendlichen liegt, so fällt A mit der Mitte M der Strecke BB' zusammen. Zu zwei gegebenen Punkten BB' bilden also die Mitte M der Strecke BB' und ein unendlich entfernter Punkt der Geraden BB' ein harmonisches Punktenpaar, woraus man schliessen darf, dass, insofern es sich um harmonische Punkte handelt, alle unendlich entfernten Punkte sich als in einen einzigen vereinigt darstellen. In der That würde man, wenn dies nicht der Fall wäre, dem Satze, dass zu drei Punkten bei bestimmter Zuordnung nur ein einziger vierter harmonischer sich construiren lässt, eine Ausnahme beifügen müssen, sobald der Punkt, dessen zugeordneten man sucht, die Mitte der beiden anderen gegebenen ist. Von diesem Gesichtspunkte aus kann man sich also künftighin des Ausdrucks bedienen: „der unendlich entfernte Punkt einer Geraden“ und unter ihm die Zusammenfassung aller in der Unendlichkeit einer Geraden vorhandenen Punkte verstehen. Es ist klar, dass in diesem Sinne die Gerade als eine geschlossene Figur erscheint, da ja dieselbe von einem beliebigen ihrer Punkte aus sich sowohl nach der einen als nach der anderen Seite hin gegen ihren unendlich entfernten Punkt erstreckt.

Die auseinandergesetzte vereinfachte Construction des vierten harmonischen Punktes lässt noch eine wichtige Schlussfolgerung zu: da nämlich CA' eine Tangente und MC ein Radius des Kreises BB' ist, so ist das Dreieck MCA' rechtwinklig und ähnlich dem Dreiecke MAC, also hat man

$$MA : MC = MC : MA',$$

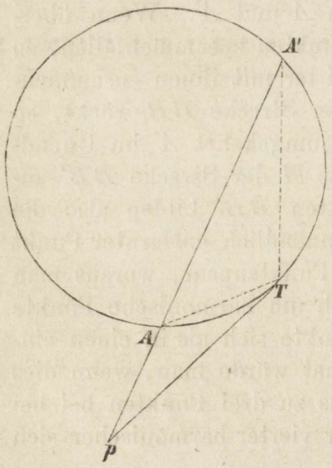
oder, da $MC = MB = MB'$ ist:

$$MB^2 = MB'^2 = MA \,.\, MA'.$$

Ebenso leicht ergibt sich, wenn mit m die Mitte der Strecke AA' bezeichnet wird, $mA^2 = mA'^2 = mB \,.\, mB'$, was übrigens auch aus Fig. 19 zu folgern ist. Wirklich erhält man aus der Proportion $AB : BA' = AB' : A'B'$ sofort die andere:

$$Am + mB' : mA' - mB = Am + mB' : mB' - mA',$$

Fig. 32.



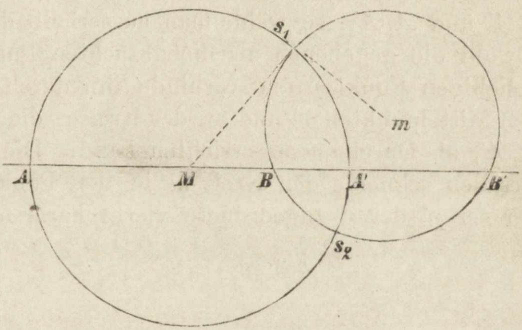
welche durch einfache Reduction in die angegebene Gleichung verwandelt werden kann.

Um noch eine weitere Eigenschaft der harmonischen Punkte darzustellen, soll folgender Hilfssatz abgeleitet werden: Zieht man von einem Punkte p ausserhalb eines Kreises eine Secante durch den Kreis, welche denselben in A und A' treffen möge, so ist das Product der Abschnitte pA und pA' gleich dem Quadrate der von p aus an den Kreis gelegten Tangente pT, also $pA \,.\, pA' = pT^2$.

Da der Winkel ATp als Peripheriewinkel über dem Bogen AT des in Fig. 21 gezeichneten Kreises angesehen werden kann, so ist $\sphericalangle\, ATp = AA'T$, und da zugleich der Winkel bei p sich selbst gleich ist, so hat man $\triangle pTA' \sim pAT$. Daraus ergibt sich $pA : pT = pT : pA'$ oder $pA \cdot pA' = pT^2$.

Seien nun M und m die Mittelpunkte zweier Kreise, die sich in den Punkten s_1 und s_2 unter rechten Winkeln schneiden, so dass also die in diesen Punkten an die Kreise gelegten Tangenten durch M und m gehen, ferner $AMBA'B'$ eine beliebige Transversale, welche durch M (einen der Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise) gelegt ist und den einen der Kreise in A und A', den anderen (mit dem Mittelpunkte m) in B und B' trifft, so sind A und A', B und B' zwei harmonisch zugeordnete Punktenpaare. Zum Beweise beachte man, dass

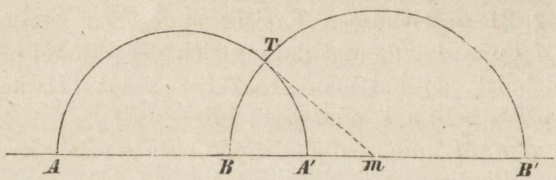
Fig. 33.



Ms_1 die von M aus an den Kreis mit dem Mittelpunkte m gelegte Tangente ist und demnach, wie bereits gezeigt wurde, man $Ms_1^2 = MB \cdot MB'$ hat. Weil aber $Ms_1 = MA = MA'$ ist, ergibt sich die Relation $MA^2 = MA'^2 = MB \cdot MB'$, welche die Punkte $AA'BB'$ in der That als zwei zugeordnete harmonische Punktenpaare erkennen lässt. Es bedarf keines weiteren Beweises, dass dieser Satz auch umgekehrt werden kann, d. h.: Legt man durch ein Punktenpaar AA' einen Kreis, welcher die Strecke AA' zum Durchmesser hat, so wird jeder Kreis, der ein zu AA' harmonisches Punktenpaar BB' enthält, den erstgenannten unter rechten Winkeln schneiden.

Soll ein Punktenpaar BB' gefunden werden, dessen Mitte m bekannt ist und welches zu einem gegebenen Punktenpaare AA' harmonisch sein soll, so schlage man den Kreis über AA' als Durchmesser, ziehe von m aus eine Tangente an denselben, deren Berührungspunkt T sei, dann schneidet der Kreis mit dem

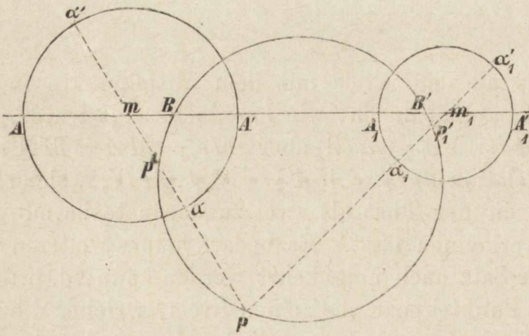
Fig. 34.



Mittelpunkte m und dem Radius mT aus der Geraden AA' das Punktenpaar BB' aus. Die Lösung der Aufgabe ist also nur möglich, wenn m ausserhalb der begrenzten Strecke BB' liegt.

Wenn ein Punktenpaar BB' gesucht ist, das gleichzeitig harmonisch gelegen sein soll zu zwei gegebenen Punktenpaaren AA' und $A_1A'_1$, so wähle man ausserhalb der Geraden, welche sowohl die gegebenen als die gesuchten Punkte enthält, einen beliebigen Punkt p und verbinde ihn durch gerade Linien mit den Mittelpunkten m und m_1 der Kreise, die man über AA' und $A_1A'_1$ als Durchmesser errichten kann. Die erste dieser beiden Geraden schneide den Kreis m in den Punkten α und α', ferner sei p' der p zugeordnete vierte harmonische Punkt zu p, α und α', während p'_1 in derselben Beziehung zu p und den Schnittpunkten $\alpha_1\alpha'_1$ der zweiten Geraden mit dem Kreise m_1 stehen soll, dann schneidet der Kreis $pp'p'_1$, wenn er überhaupt die Gerade $AA'A_1A'_1$ trifft, die Punkte BB' aus. Der Beweis beruht auf dem angegebenen Satze über sich rechtwinklig schneidende Kreise und lässt leicht erkennen, dass eine wirkliche Lösung der Aufgabe nur dann möglich ist, wenn man auf der Geraden AA' von A nach A' gelangen kann, ohne A_1 oder A'_1 zu überschreiten (insofern nämlich auch der Weg durch den unendlich entfernten Punkt der Geraden genommen werden darf), was nach sich zieht, dass man auch auf der Geraden

Fig. 35.



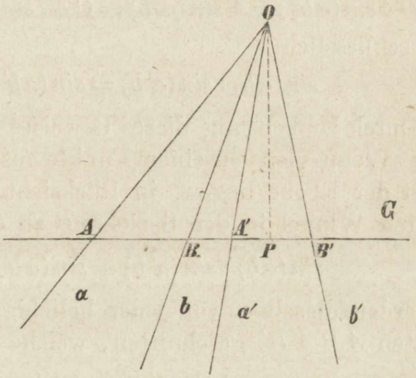
von A_1 nach A'_1 gehen kann, ohne einen der Punkte A und A' bestreichen zu müssen.

§ 9.

Harmonische Strahlen und Ebenen. Lineare Constructionen.

Legt man durch vier harmonische Punkte $AA'BB'$, die auf einer Geraden G liegen, von einem beliebigen Punkte O aus, der nicht auf G sich befindet, vier gerade Linien $a\,b\,a'b'$, so heissen dieselben **vier harmonische Strahlen**. Bezeichnet man mit $(a\,b)$ einen der vier Winkel, welche die Strahlen a und b mit einander bilden und legt den Zeichen $(a'b)$, (ab'), $(a'b')$ eine analoge Bedeutung bei, so hat man für die vier harmonischen Strahlen $a\,b\,a'b'$ die Relation:

Fig. 36.



$$sin(a\,b) : sin(a'b) = sin(a\,b') : sin(a'b').$$

Zum Beweise wendet man die Bemerkung an, dass der Inhalt eines Dreiecks sich sowohl durch Grundlinie und Höhe, als auch durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausdrücken lässt. Fällt man von O aus ein Perpendikel OP auf G, so ergeben sich die nachfolgenden Gleichungen:

$$\triangle ABO = \tfrac{1}{2} AB \,.\, OP = \tfrac{1}{2} OA \,.\, OB\, sin(a\,b)$$

oder

$$AB = \frac{OA \,.\, OB}{OP}\, sin(a\,b),$$

$$\triangle A'BO = \tfrac{1}{2} A'B \,.\, OP = \tfrac{1}{2} OA' \,.\, OB\, sin(a'b)$$

oder

$$A'B = \frac{OA' \,.\, OB}{OP}\, sin(a'b),$$

$$\triangle AB'O = \tfrac{1}{2} AB' \,.\, OP = \tfrac{1}{2} OA \,.\, OB'\, sin(ab')$$

oder

$$AB' = \frac{OA \,.\, OB'}{OP}\, sin(a\,b'),$$

$$\varDelta A'B'O = \tfrac{1}{2} A'B' . OP = \tfrac{1}{2} OA' . OB' \sin(a'b')$$

oder

$$A'B' = \frac{OA' . OB'}{OP} \sin(a'b').$$

Dies führt zu den Proportionen:

$$AB : A'B = OA \sin(a'b) : OA' \sin(a'b),$$
$$AB' : A'B' = OA \sin(ab') : OA' \sin(a'b'),$$

also ist auch, vermöge der metrischen Grundrelation der vier harmonischen Punkte $ABA'B'$:

$$OA \sin(ab) : OA' \sin(a'b) = OA . \sin(ab') : OA' \sin(a'b'),$$

oder schliesslich

$$\sin(ab) : \sin(a'b) = \sin(ab') : \sin(a'b').$$

Durch Umkehrung dieses Beweises ergibt sich der folgende Satz: Wenn vier von einem Punkte ausgehende Strahlen $aba'b'$, die in der Ebene liegen, in Rücksicht auf die von ihnen gebildeten Winkel in der Beziehung zu einander stehen:

$$\sin(ab) : \sin(a'b) = \sin(ab') : \sin(a'b'),$$

so werden dieselben von jeder beliebigen Transversalen in vier Punkten $ABA'B'$ geschnitten, welche die Proportion erfüllen:

$$AB : A'B = AB' : A'B',$$

d. h.: Vier harmonische Strahlen werden von jeder beliebigen geradlinigen Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Von diesem Satze mag hier noch ein zweiter Beweis abgeleitet werden.

Seien $aba'b'$ vier von einem beliebigen Punkte O aus durch die vier harmonischen Punkte $ABA'B'$ gelegte Strahlen, so lege man durch B eine Parallele zu dem Strahle b', welche aba' resp. in $\alpha\beta\alpha'$ treffen möge. Da die Dreiecke $A\alpha\beta$ und AOB' ähnlich sind, so hat man $AB : AB' = \alpha\beta : OB'$. Ebenso folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A'\alpha'B$ und $A'OB'$:

$$BA' : A'B' = \beta\alpha' : OB'.$$

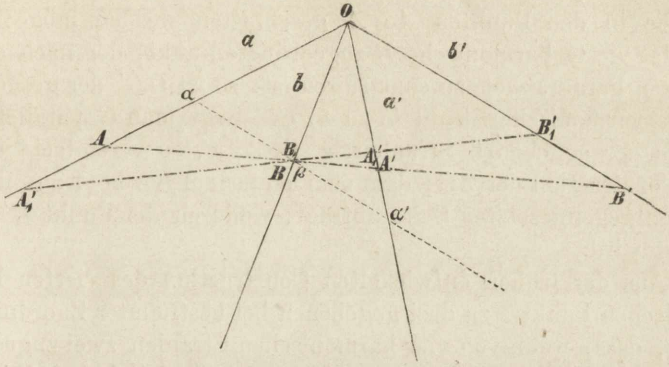
Da aber $ABA'B'$ vier harmonische Punkte sind, so muss

$$AB : A'B = AB' : A'B' \text{ oder } AB : AB' = A'B : A'B'$$

sein, d. h. man hat

$$\alpha\beta : OB' = \beta\alpha' : OB' \text{ und } \alpha\beta = \beta\alpha'.$$

Fig. 37.



Wird jetzt durch den Punkt B eine neue Transversale gezogen, welche die Strahlen $a\,b\,a'\,b'$ in $A_1 B_1 A'_1 B'_1$ treffe, so ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A_1 \alpha B$ und $A_1 OB$ zunächst

$$A_1 B_1 : A_1 B'_1 = \alpha\beta : OB'_1$$

und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\alpha' B_1 A'_1$ und $A'_1 O B'_1$ ebenso leicht

$$A'_1 B_1 : A'_1 B'_1 = \beta\alpha' : OB'_1.$$

Da nun

$$\alpha\beta : OB'_1 = \beta\alpha' : OB'_1$$

ist, so folgt

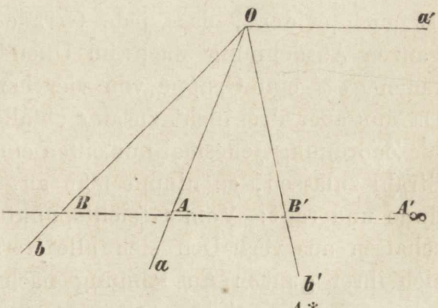
$$A_1 B_1 : A_1 B'_1 = A'_1 B_1 : A'_1 B'_1,$$

d. h. die vier Punkte $A_1 B_1 A'_1 B'_1$ sind harmonisch.

Da nun jede durch B gehende Transversale die Strahlen $a\,b\,a'\,b'$ in vier harmonischen Punkten schneidet, so wird dies überhaupt jede Transversale thun, da man selbstverständlich zu jeder Geraden eine Parallele durch den Punkt B legen kann.

Zu drei durch einen Punkt O gehenden Strahlen $a\,b\,a'$ mit bestimmter Zuordnung (a und a' seien zugeordnet) gehört stets ein, aber auch nur ein vierter harmonischer Strahl b' (welcher b zugeordnet ist). Um ihn zu finden, lege man eine O nicht

Fig. 38.



enthaltende, sonst aber willkürliche geradlinige Transversale G, welche in den Punkten ABA' geschnitten werden möge; sei B' der vierte harmonische B zugeordnete Punkt, der nach dem vorigen Paragraphen zu construiren ist, so ist OB' der gesuchte vierte harmonische Strahl b' zu aba'. Legt man G parallel zu einem der gegebenen Strahlen, z. B. zu a', so vereinfacht sich die Construction der Art, dass man einfach AB von A aus nach der entgegengesetzten Seite abträgt, wodurch der Punkt B' erhalten wird.

Aus der früher entwickelten Construction des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen bei bestimmter Zuordnung folgt, dass, wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete einen rechten Winkel bilden, sie die Winkel halbiren, welche von den beiden anderen sich zugeordneten Strahlen eingeschlossen werden. Umgekehrt, wenn von vier harmonischen Strahlen einer den Winkel zweier zugeordneten hälftet, so steht er zu dem ihm zugehörigen Strahle senkrecht. Diese Resultate hätten sich auch aus der vorhin erläuterten Construction des vierten harmonischen Strahls ableiten lassen.

Da vier parallele Gerade aufgefasst werden können als durch einen und denselben Punkt laufend, so werden vier Parallele, die durch vier harmonische Punkte gelegt sind, vier harmonische Strahlen sein, was auch zu beweisen ist, indem man zeigt, dass sie von jeder Transversalen, die ihnen nicht parallel ist, in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Soll man also zu drei parallelen Geraden aba' einen vierten harmonischen Strahl b', der b zugeordnet ist, construiren, so wird derselbe parallel mit den gegebenen sein müssen.

Wenn speciell b gleichweit entfernt ist von a und a', so wird b' seiner ganzen Ausdehnung nach ins Unendliche rücken. Es ist auch evident, dass jede Gerade der Ebene, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen liegt, mit den Geraden aba' eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen bildet. Da nun aber drei nicht zusammenfallende Strahlen mit bestimmter Zuordnung jedesmal nur einen einzigen vierten harmonischen Strahl zulassen, so nimmt man an, dass dies auch hier stattfinde und sagt: Vom Gesichtspunkte der harmonischen Eigenschaften aus verhalten sich alle Geraden einer Ebene, welche sich ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen befinden, so, als ob sie sich in eine einzige Gerade „die unendlich entfernte Gerade der Ebene“ vereinigt hätten. Diese Bezeichnung wird in den späteren Entwickelungen häufige Anwendung finden, immerhin mag aber darauf hingewiesen werden, dass diese unendlich entfernte Gerade manche der Eigenschaften nicht besitzt, welche den im Endlichen gelegenen Geraden zukommen. So ist es klar, dass auf ihr keine Strecken gemessen werden können; ferner hat sie keine bestimmte Richtung, sondern sie ist jeder beliebigen Geraden der Ebene parallel, da ja zwei Gerade, die einen unendlich entfernten Punkt gemein haben, als parallele bezeichnet werden können.

In ähnlicher Weise, wie die metrische Relation zwischen den Abständen, die durch vier harmonische Punkte auf einer Geraden erzeugt werden, sich vermittelst der Einführung der Mitte eines der beiden zugeordneten Punktenpaare einfacher darstellt, lässt sich auch die charakteristische metrische Relation, welche für vier harmonische Strahlen gilt, durch Einführung des Mittelstrahles zwischen zwei zugeordneten Strahlen vereinfachen.

Es war:

$$\sin(ab) : \sin(a'b) = \sin(ab') : \sin(a'b').$$

Sei nun m ein Strahl, welcher den Winkel der Strahlen a und a' halbirt, so ist unter Beibehaltung der früher eingeführten Bezeichnung, da ja $(ma') = (am)$ ist,

$$\sin(am + mb) : \sin(am - mb) = \sin(mb' + ma) : \sin(mb' - ma),$$

oder

$$\sin(am + mb) + \sin(am - mb) : \sin(am + mb) - \sin(am - mb)$$
$$= \sin(mb' + ma) + \sin(mb' - ma) : \sin(mb' + ma) - \sin(mb' - ma).$$

Wendet man auf jedes Glied dieser Proportion eine der beiden Formeln an:

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B;$$
$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B,$$

so ergibt sich:

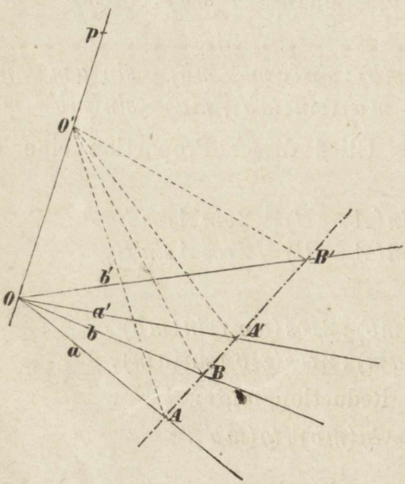
$$2 \sin(am) \cos(mb) : 2 \cos(am) \sin(mb)$$
$$= 2 \sin(mb') \cos(am) : 2 \cos(mb') \sin(am),$$

woraus nach einer leichten Reduction folgt:

$$tg^2(am) = tg(mb) \,.\, tg(mb').$$

Legt man durch eine Gerade g vier Ebenen $\alpha\beta\alpha'\beta'$, welche durch vier harmonische Punkte $ABA'B'$ gehen (von denen AA' und BB' zugeordnete seien und die sich in einer mit g nicht in derselben Ebene liegenden Geraden g' befinden mögen), so erhält man eine Gruppe von vier harmonischen Ebenen, in welcher α und α', β und β' als zugeordnet auftreten. Man kann vier harmonische Ebenen auch erzeugen, indem man durch einen Punkt p, welcher ausserhalb der Ebene von vier sich in einem Punkte O schneidenden harmonischen Strahlen $aba'b'$ sich befindet und durch diese Strahlen Ebenen legt. Dass die beiden gegebenen Erzeugungsarten übereinstimmen, zeigt man leicht. Seien vier harmonische Ebenen durch die erste Erzeugung gegeben, so lege man durch g' eine beliebige Ebene, welche g in einem Punkte O treffen wird. Nun sind die vier Strahlen $O(ABA'B')$ harmonisch und irgend ein Punkt von g bestimmt mit ihnen vier harmonische Ebenen nach der zweiten Erzeugungsart, die mit den gegebenen identisch sind. Liegen aber vier harmonische Ebenen nach der zweiten Erzeugung vor, so verbinde man p mit dem Schnittpunkte der Strahlen $aba'b'$ durch eine Gerade g und schneide ferner die genannten Strahlen durch eine Transversale g', welche auf ihnen vier harmonische Punkte ausschneidet; die Gerade g und die vier harmonischen Punkte auf g' erzeugen dann die angenommenen vier Ebenen nach der ersten Definition.

Fig. 39.



Vier harmonische Ebenen werden von jeder beliebigen Ebene, welche ihre Schnittgerade nicht trifft, in vier harmonischen Strahlen geschnitten und jede Gerade, welche mit der Schnittgeraden der vier harmonischen Ebenen nicht in einer Ebene liegt, trifft dieselben in vier harmonischen Punkten. Der erste Theil dieses Satzes wird bewiesen, indem man die zweite Erzeugungsart zu Hilfe nimmt.

Die Transversalebene möge aus der Geraden pO den Punkt O' ausschneiden und auf $aba'b'$ vier Punkte $ABA'B'$ ergeben; diese sind harmonisch und bestimmen in der That, wenn man sie mit O' verbindet, vier harmonische Strahlen. Zum Beweise des zweiten Theiles beachte man, dass durch die geradlinige Transversale eine Ebene gelegt werden kann, die aus der Gruppe der vier gegebenen harmonischen Ebenen vier harmonische Strahlen ausschneidet und diese vier harmonischen Strahlen erzeugen dann wirklich auf der Transversalen vier harmonische Punkte.

Man weiss, dass der Winkel zweier Ebenen gemessen wird durch den Winkel, welchen zwei Gerade mit einander bilden, die aus den Ebenen durch eine zu ihrer Schnittlinie senkrechte Ebene ausgeschnitten werden. Bezeichnet man also einen der Winkel, welche die Ebenen α und β einschliessen, mit $(\alpha\beta)$ und legt den Zeichen $(\alpha'\beta)$, $(\alpha\beta')$, $(\alpha'\beta')$ eine analoge Bedeutung bei, so ergibt sich aus der metrischen Gleichung, der vier harmonische Strahlen $aba'b'$ genügen:

$$sin(ab) : sin(a'b) = sin(ab') : sin(a'b'),$$

die Relation zwischen vier harmonischen Ebenen $\alpha\beta\alpha'\beta'$:

$$sin(\alpha\beta) : sin(\alpha'\beta) = sin(\alpha\beta') : sin(\alpha'\beta').$$

Ist μ eine Ebene, welche den Winkel zwischen α und α halbirt, so ergibt sich aus der entsprechenden Formel für vier harmonische Strahlen die fernere Beziehung zwischen vier harmonischen Ebenen:

$$tg^2(\mu\alpha) = tg^2(\mu\alpha') = tg(\mu\beta) \,.\, tg(\mu\beta').$$

Die nachfolgenden Entwickelungen über die Gruppe von vier harmonischen Ebenen bedürfen keiner weiteren beweisenden Ausführungen.

Zu drei Ebenen $\alpha\beta\alpha'$ mit bestimmter Zuordnung (α und α' seien zugeordnet) kann stets eine, aber auch nur eine vierte harmonische Ebene β' (welche β zugeordnet ist) gefunden werden. Die Construction derselben kann unter Berücksichtigung entweder der ersten oder der zweiten Erzeugungsart von vier harmonischen Ebenen ausgeführt werden, entweder mit Anwendung der Construction des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen bei bestimmter Zuordnung, oder mit Anwendung der Construction des vierten harmonischen Strahles. — Wenn von vier harmonischen Ebenen ein Paar zugeordnete auf einander senkrecht stehen, so sind sie die winkelhalbirenden Ebenen des anderen Paares. Umgekehrt, wenn von vier harmonischen Ebenen eine den Winkel zweier zugeordneten halbirt, so steht sie auf der ihr zugehörigen senkrecht. — Vier parallele Ebenen, welche durch vier harmonische Punkte gehen, können als eine Gruppe von vier harmonischen Ebenen aufgefasst werden, deren Schnittlinie ganz im Unendlichen liegt. Wenn von vier solchen Ebenen $\alpha\beta\alpha'\beta'$ eine, z. B. β in der Mitte zwischen den zugeordneten α und α' liegt, so fällt die Ebene β' ihrer ganzen Ausdehnung nach ins Unendliche. Umgekehrt wird jede Ebene, welche im Raume ihrer ganzen Ausdehnung nach ins Unendliche fällt, mit $\alpha\beta\alpha'$ eine Gruppe von vier harmonischen Ebenen bilden. Will man also den Satz nicht umstossen, dass zu drei Ebenen bei bestimmter Zuordnung nur eine vierte harmonische gefunden werden kann, so muss man annehmen, dass vom Gesichtspunkte der harmonischen Eigenschaften aus alle in der Unendlichkeit des Raumes gelegenen Ebenen angesehen werden dürfen, als ob sie sich in eine einzige Ebene vereinigten, welche „die unendlich entfernte Ebene des Raumes“ heisst. Ueber die geometrischen Eigenschaften derselben gilt das nämliche, was über die unendlich entfernte Gerade der Ebene gesagt worden ist.

Es ist möglich, zu drei Elementen bei bestimmter Zuordnung das vierte harmonische ohne Hilfe des Zirkels zu construiren. Diese Möglichkeit beruht auf dem Satze, dass auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits vier harmonische Punkte liegen, von denen zwei zugeordnete die auf dieser Diagonale befindlichen Ecken und die beiden anderen die Durchschnitte der zwei übrigen Diagonalen mit der gegebenen sind.

Zum Beweise hat man im Dreieck BCC' die drei durch einen und denselben Punkt B' gehenden Transversalen BB', CB' und $B'C'$, welche ergeben:

$$CD \,.\, C'A' \,.\, AB = DC' \,.\, BA' \,.\, AC.$$

Ferner ist im Dreieck BCC' mit der Transversalen AA':

$$CA \,.\, BA' \,.\, C'D' = BA \,.\, A'C' \,.\, CD'.$$

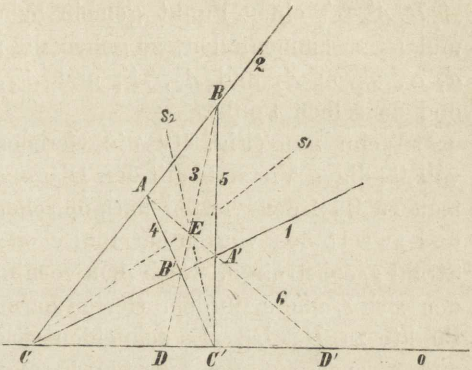
Multiplicirt man die beiden Gleichungen, so kommt

$$CD \,.\, C'D' = DC' \,.\, CD'$$

oder

$$CD : DC' = CD' : C'D'.$$

Fig. 40.



Will man also zu drei Punkten $C\,D\,C'$ den vierten harmonischen Punkt D' construiren, so hat man nur nach Anleitung der Figur ein vollständiges Vierseit in der dort durch Zahlen angegebenen Reihenfolge der Seiten und Diagonalen herzustellen, um im Durchschnitt der Geraden 6 oder $A\,A'$ mit der Geraden 0 oder $C\,D\,C'$ den gesuchten Punkt D' zu erhalten.

Zu drei Strahlen $a\,b\,a'$, die sich in einem Punkte O schneiden, kann man den vierten harmonischen b zugeordneten Strahl b' wie folgt finden: Auf b wähle man einen Punkt p, durch den man zwei willkürliche Gerade zieht. Diese schneiden auf a und a' vier Punkte aus, welche ein vollständiges Viereck bilden; p und O sind zwei Diagonalpunkte desselben, der dritte mit O verbunden liefert den gesuchten vierten harmonischen Strahl. Wie durch die angegebenen Constructionen des vierten harmonischen Punktes und Strahles die früher erwähnte Construction der vierten harmonischen Ebene vereinfacht werden kann, ist leicht abzuleiten.

Es soll hier noch ein zweiter Beweis der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierseits gegeben werden.

Wenn zwei Gruppen von vier harmonischen Strahlen $a_1 b_1 a'_1 b'_1$ und $a_2 b_2 a'_2 b'_2$ einen Strahl gemein haben, so dass z. B. b_1 und b_2 ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammen fallen, so liegen die resp. Schnittpunkte A, A', B' von a_1 und a_2, a'_1 und a'_2, b'_1 und b'_2 in einer Geraden. In der That wird die Verbindungsgerade $A\,A'$ von jeder der beiden Gruppen harmonischer Strahlen in vier harmonischen Punkten geschnitten und zwar (wenn B den Schnittpunkt von $A\,A'$ mit den vereinigten Strahlen $b_1 b_2$ bedeutet) wird sowohl b'_1 als b'_2 aus der Geraden $A\,A'$ den vierten harmonischen B zugeordneten Punkt B' zu $A\,B\,A'$ ausschneiden, d. h. die drei genannten Schnittpunkte liegen in gerader Linie. Analog wird der Satz bewiesen: Wenn zwei

Gruppen von vier harmonischen Punkten $A_1 B_1 A'_1 B'_1$ und $A_2 B_2 A'_2 B'_2$ einen Punkt gemein haben, d. h. wenn z. B. B_1 und B_2 zusammenfallen, so gehen die resp. Verbindungsgeraden a, a', b von A_1 und A_2, A'_1 und A'_2, B'_1 und B'_2 durch einen und denselben Punkt.

Wenn nun (Fig. 40) die Geraden 1245 die Seiten eines vollständigen Vierseits mit den Diagonalen 0, 3, 6 sind, so kann man zu 012 den vierten harmonischen 0 zugeordneten Strahl s_1 und zu 045 den vierten harmonischen, ebenfalls 0 zugeordneten Strahl s_2 construiren. Nach dem vorhin bewiesenen Satze schneiden sich s_1 und s_2 in dem vierten harmonischen D zugeordneten Punkte zu DBB'. Es schneiden sich aus demselben Grunde s_1 und s_2 auch auf dem vierten harmonischen D' zugeordneten Punkte zu $D'AA'$. Der Schnittpunkt der genannten Strahlen liegt also auf jeder der beiden Diagonalen 3 und 6 und ist demnach der Schnittpunkt E derselben. Damit ist zugleich nachgewiesen, dass sowohl $AEA'D'$ als auch $BEB'D$ vier harmonische Punkte sind. Ein Beweis, dass auch $CDC'D'$ eine Gruppe von vier harmonischen Punkten bilden, ist nicht weiter nöthig, sondern ergibt sich aus der Gleichberechtigung der drei Diagonalen.

§ 10.

Das Punktsystem.

Wählt man auf einer Geraden G einen Punkt O und trägt von ihm aus Strecken Oa und Oa', Ob und Ob', Oc und Oc' etc. so ab, dass 1) $Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob' = Oc \,.\, Oc' \ldots = p^2$ ist und dass 2) je zwei entsprechende, mit gleichen Buchstaben bezeichnete Punkte a und a', b und b', c und c' von O aus entweder immer unter der nämlichen Richtung, oder aber immer in entgegengesetzter Richtung gesehen werden, so entsteht ein geometrisches Gebilde, welches Punktsystem, und zwar im ersten Fall hyperbolisches, im zweiten Falle elliptisches Punktsystem heisst. Der Punkt O ist der Mittelpunkt, irgend zwei entsprechende Punkte, wie a und a', b und b', c und c' etc. bilden ein Punktenpaar des Gebildes; die constante Grösse p^2 ist dessen Potenz.

Wenn von einem in der Geraden G gelegenen Punktsystem der Mittelpunkt O und die Potenz p^2 gegeben sind und wenn zugleich festgesetzt ist, ob dasselbe ein elliptisches oder ein hyperbolisches sein soll, so kann man zu jedem Punkte d in G sofort den Punkt d' construiren, der mit ihm zusammengenommen ein Punktenpaar des Punktsystems bildet. Man trage nur die Strecke $\frac{p^2}{Od}$ von O aus im Falle des hyperbolischen Punktsystems in der Richtung Od, im Falle des elliptischen in der entgegengesetzten Richtung ab, so ist der zweite Endpunkt dieser Strecke d'. Es gibt also in einem Punktsystem ebenso viele Punktenpaare, als es in einer Geraden Punkte gibt. Wenn d immer weiter von O sich entfernt, so nähert sich d' immer mehr dem Punkte O, d. h. der Mittelpunkt O bildet mit dem unendlich entfernten Punkte der Geraden G ein Punktenpaar des Punktsystems.

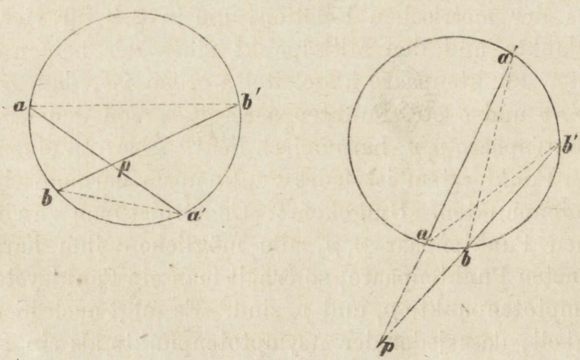
Seien a und a' ein Punktenpaar des Punktsystems, für welches $Oa = Oa'$, so dass also $Oa^2 = Oa'^2 = p^2$, so werden für ein elliptisches Punktsystem die Punkte O die Strecke aa' hälften, beim hyperbolischen Punktsystem aber vereinigen sich die Punkte a und a', und da das sowohl auf der einen als auf der anderen Seite von O aus gesehen geschehen kann, so folgt: Beim elliptischen Punktsystem vereinigt sich nie ein Punkt mit seinem entsprechenden; beim hyperbolischen kommt dies zweimal vor und zwar in zwei Punkten p_1 und p_2, welche die Eigenschaft haben, dass O der Mittelpunkt der durch sie bestimmten Strecken ist. Die Punkte p_1 und p_2 heissen die Asymptotenpunkte oder die Doppelpunkte des Punktsystems; jeder von ihnen stellt ein Punktenpaar des Punktsystems vor, dessen Punkte sich vereinigt haben.

Da $p^2 = Op_1{}^2 = Op_2{}^2 = Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob' = Oc \,.\, Oc' \ldots$, so folgt aus der metrischen Relation, die in § 8 für vier harmonische Punkte und den Mittelpunkt eines der beiden sich zugeordneten Punktenpaare abgeleitet worden ist, dass a und a', b und b', c und c' etc. Punktenpaare sind, von denen jedes zu dem Punktenpaare $p_1 p_2$ harmonisch liegt. Also: In einem hyperbolischen Punktsystem ist jedes Punktenpaar harmonisch zu den Asymptotenpunkten. Umgekehrt: Construirt man zu einem gegebenen Punktenpaar $p_1 p_2$ alle möglichen ihm harmonisch zugeordneten Punktenpaare, so erhält man ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte p_1 und p_2 sind. Es folgt auch hieraus mit Leichtigkeit, dass jeder der Asymptotenpunkte als ein Punktenpaar des Punktsystems aufgefasst werden kann, dessen beide Punkte sich vereinigen.

Wenn zwei Punktenpaare a und a', b und b' eines hyperbolischen Punktsystems gegeben sind, so ist dasselbe vollständig bestimmt, da man sofort nach einer früheren Construction dasjenige Punktenpaar findet, welches den beiden harmonisch zugeordnet ist; dieses Punktenpaar besteht aus den beiden Asymptotenpunkten, mit deren Hilfe nun beliebig viele Punktenpaare des Punktsystems gefunden werden können. Wenn die Asymptotenpunkte bekannt sind, so kann man auch den Mittelpunkt sofort angeben und von diesem aus in der Construction vorgehen. — Soll ein Punktenpaar existiren, welches gleichzeitig zu a und a' und zu b und b' harmonisch liegt, so muss man, insofern der Weg durch's Unendliche gestattet ist, auf der Geraden dieser vier Punkte von a nach a' gelangen können, ohne einen der Punkte b oder b' zu überschreiten; es gibt also auch nur unter dieser Voraussetzung ein hyperbolisches Punktsystem, welchem die beiden gegebenen Punktenpaare angehören. Ist aber die angegebene Situationsbedingung nicht erfüllt, so gehören die beiden Punktenpaare einem bestimmten elliptischen Punktsystem an; es ist demnach in jedem Falle durch zwei Punktenpaare stets ein und nur ein Punktsystem bestimmt.

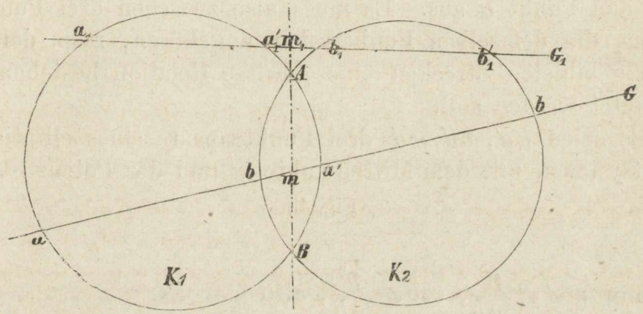
Diesen Satz leitet man ab, indem man eine Eigenschaft des Kreises zu Hilfe nimmt. Zieht man von einem Punkte p aus, der innerhalb oder ausserhalb eines Kreises liegt, zwei willkürliche Sehnen oder Secanten durch den Kreis, welche denselben in a, a' und b, b' treffen mögen, so erhält man beidemale

Fig. 41.



$pa \cdot pa' = pb \cdot pb'$, wie sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke pab' und $pa'b$ ergibt. Construirt man jetzt sämmtliche Kreise, die durch zwei feste Punkte A und B laufen, und schneidet dieselben durch eine beliebige Transversale, so wird im Allgemeinen irgend einer der Kreise von der Transversalen in einem Punktenpaare geschnitten und alle diese Punktenpaare bilden ein Punktsystem. Die Transversale G, welche zwischen den

Fig. 42.



Punkten A und B hindurchgeht, erzeugt ein elliptisches, die Transversale G_1, für welche A und B auf der nämlichen Seite liegen, ergibt ein hyperbolisches Punktsystem; die beiden Mittelpunkte m und m_1 liegen auf der Geraden AB. Man hat in der That, wenn K_1 und K_2 irgend zwei der Kreise, aa', bb' und $a_1a'_1$, $b_1b'_1$ ihre Schnittpunkte mit G und G_1 sind, nach der vorhin für den Kreis bewiesenen Eigenschaft:

$$ma \,.\, ma' = mA \,.\, mB = mb \,.\, mb',$$
$$m_1a_1 \,.\, m_1a'_1 = m_1A \,.\, m_1B = m_1b_1 \,.\, m_1b'_1,$$

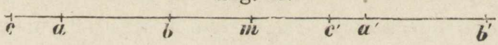
so dass also für die auf G und G_1 gelegenen Punktsysteme nicht nur die Mittelpunkte, sondern auch die Potenzen $mA \,.\, mB$ und $m_1A \,.\, m_1B$ gegeben sind.

Wenn demnach ein Punktsystem construirt werden soll, von welchem zwei Punktenpaare aa', bb' gegeben sind, so lege man durch einen beliebigen Punkt A in der Ebene die Kreise Aaa' und Abb', welche sich ausser in A noch in B schneiden mögen. Jeder durch die Punkte A und B gelegte Kreis schneidet dann auf der Geraden der Punkte aa', bb' ein Punktenpaar des durch dieselben bestimmten Punktsystems aus, dessen Mittelpunkt nach dem vorhin bewiesenen Satze auf der Geraden AB liegt. Das Punktsystem ist elliptisch, wenn A und B auf verschiedenen Seiten, und hyperbolisch, wenn diese Punkte auf der nämlichen Seite derjenigen Geraden liegen, auf welcher das ganze Punktsystem enthalten ist.

Da durch zwei Punktenpaare aa' und bb' ein Punktsystem vollkommen bestimmt ist, so wird von einem dritten Punktenpaar cc' nur ein Punkt c willkürlich gewählt werden dürfen und dann der zweite c' vollständig bestimmt sein; um ihn zu finden, braucht man blos den Kreis ABc zu legen, so schneidet derselbe den Punkt c' aus. Es muss also zwischen drei Punktenpaaren, die demselben Punktsystem angehören, resp. den von ihnen gebildeten Strecken eine gewisse Relation bestehen, die abgeleitet werden soll.

Es seien aa', bb', cc' drei Punktenpaare eines elliptischen Punktsystems, mit dem Mittelpunkte m und der Potenz p^2. Es

Fig. 43.



ist dann $ma' = \frac{p^2}{ma}$, $mb = \frac{p^2}{mb'}$, also

$$ma' + mb = a'b = \frac{p^2}{ma} + \frac{p^2}{mb'} = \frac{p^2(mb' + ma)}{ma \,.\, mb'} = \frac{p^2 \,.\, ab'}{ma \,.\, mb'}.$$

In derselben Weise, wie sich ergeben hat:

$$a'b = \frac{p^2 \,.\, ab'}{ma \,.\, mb'},$$

findet man auch

$$a'b' = \frac{p^2 \,.\, ab}{ma \,.\, mb'},$$

und

$$a'c = \frac{p^2 \,.\, ac'}{ma \,.\, mc'}, \qquad a'c' = \frac{p^2 \,.\, ac}{ma \,.\, mc}.$$

Wenn man bedenkt, dass $p^2 = mb \,.\, mb' = mc \,.\, mc'$, ergibt sich hieraus

$$\frac{a'b \,.\, a'b'}{a'c \,.\, a'c'} = \frac{ab \,.\, ab'}{ac \,.\, ac'}.$$

Genau dieselbe Relation würde sich auf analogem Wege auch für drei Punktenpaare eines hyperbolischen Punktsystems ableiten lassen. Da alle Punktenpaare eines Punktsystems vollkommen gleichberechtigt sind, so wird das gefundene Resultat nicht alterirt, wenn in demselben irgend zwei Punktenpaare mit einander vertauscht werden, d. h. die abgeleitete Gleichung repräsentirt eigentlich die drei nachfolgenden:

$$\frac{ab \,.\, ab'}{ac \,.\, ac'} = \frac{a'b \,.\, a'b'}{a'c \,.\, a'c'}; \quad \frac{ba \,.\, ba'}{bc \,.\, bc'} = \frac{b'a \,.\, b'a'}{b'c \,.\, b'c'}; \quad \frac{ca \,.\, ca'}{cb \,.\, cb'} = \frac{c'a \,.\, c'a'}{c'b \,.\, c'b'}.$$

Durch Multiplication derselben ergibt sich

$$\frac{ab}{ac'} \cdot \frac{ba}{bc} \cdot \frac{ca'}{cb} = \frac{a'b'}{a'c} \cdot \frac{b'a'}{b'c'} \cdot \frac{c'a}{c'b'},$$

oder

$$ab^2 \,.\, a'c^2 \,.\, b'c'^2 = a'b'^2 \,.\, c'a^2 \,.\, bc^2$$

und deshalb auch

$$ab \,.\, a'c \,.\, b'c' = a'b' \,.\, c'a \,.\, bc.$$

Da nun in einem Punktsystem zwei Punkte eines Punktenpaares genau dieselbe Rolle spielen, so verliert diese Gleichung ihre Giltigkeit nicht, wenn man in ihr resp. a und a', b und b', c und c' vertauscht, wodurch sie übergeht in:

$$a'b \,.\, ac \,.\, b'c' = ab' \,.\, c'a' \,.\, bc;$$
$$ab' \,.\, a'c \,.\, bc' = a'b \,.\, c'a \,.\, b'c;$$
$$ab \,.\, a'c' \,.\, b'c = a'b' \,.\, ca \,.\, bc'.$$

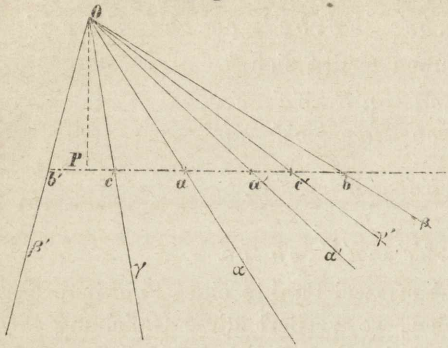
§ 11.

Das Strahlsystem.

Die Gesammtheit der Strahlenpaare, welche von einem Punkte O der Ebene aus nach den sämmtlichen Punktenpaaren eines Punktsystems gezogen werden können, bilden ein Strahlsystem, und zwar entsteht aus einem elliptischen Punktsystem ein elliptisches, aus einem hyperbolischen Punktsystem ein hyperbolisches Strahlsystem. Das hyperbolische Strahlsystem kann auch wie folgt definirt werden: Die sämmtlichen Strahlenpaare, welche zu einem gegebenen Strahlenpaare, den Asymptoten, zugeordnet harmonisch sind, bilden ein hyperbolisches Strahlsystem. Dasselbe wird von jeder beliebigen Transversalen in einem hyperbolischen Punktsystem geschnitten, weil ja vier harmonische Strahlen von jeder beliebigen Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Man zeigt leicht, dass überhaupt jedes beliebige Strahlsystem aus einer Transversalen ein Punktsystem ausschneidet, indem man zunächst eine Relation herleitet, welche zwischen drei Strahlenpaaren desselben besteht.

Zu diesem Zwecke verfährt man in derselben Weise wie in § 9, wo es sich darum handelte, zu zeigen, dass vier harmo-

Fig. 44.



nische Strahlen von jeder Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Es sei O der Mittelpunkt eines Strahlsystems, ferner seien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ Strahlenpaare desselben, die sich in O schneiden, zudem mögen in bekannter Weise $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta')$ etc. die von den Strahlen eingeschlossenen Winkel sein. Mit aa', bb', cc' bezeichne man die drei Punktenpaare eines auf der Geraden G gelegenen Punktsystems, welches mit O zusammen das vorliegende Strahlsystem erzeugt, P sei der Fusspunkt des von O auf G gefällten Perpendikels. Man hat dann, indem man die Inhalte der durch O, P und resp. a, a', b, b', c, c' gebildeten Dreiecke das eine Mal aus Grundlinie und Höhe, das andere Mal aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel berechnet:

$$\triangle\, Oab = \tfrac{1}{2} ab \,.\, OP = \tfrac{1}{2} Oa \,.\, Ob \,.\, \sin(\alpha\beta),$$

also

$$ab = \frac{Oa \,.\, Ob}{OP} \sin(\alpha\beta).$$

Berechnet man in derselben Weise ab', ac, ac' und bildet die Ausdrücke

$$\frac{ab \,.\, ab'}{ac \,.\, ac'} \text{ und } \frac{a'b \,.\, a'b'}{a'c \,.\, a'c'},$$

so findet sich nach gehöriger Reduction:

$$\frac{\sin(\alpha\beta)\sin(\alpha\beta')}{\sin(\alpha\gamma)\,.\,\sin(\alpha\gamma')} = \frac{\sin(\alpha'\beta)\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\alpha'\gamma)\sin(\alpha'\gamma')}.$$

Man sieht daraus, dass zwischen den Sinussen der Winkel, welche von drei Strahlenpaaren eines Strahlsystems gebildet werden, genau dieselbe Relation besteht, wie zwischen den Strecken, welche drei Punktenpaare eines Punktsystems erzeugen. Die eine dieser Relationen zieht die andere nach sich, so dass in der That ein Strahlensystem von jeder Transversalen in einem Punktsystem geschnitten wird. Dass auch beim Strahlensysteme die Strahlenpaare gleichberechtigt sind, und in einem derselben die beiden Strahlen die gleiche Rolle spielen, ist klar. Man hat also für drei Strahlenpaare eines Strahlsystems in Anwendung dieser Bemerkung neben der bereits abgeleiteten Gleichung noch die anderen:

$$\frac{\sin(\beta\alpha)\sin(\beta\alpha')}{\sin(\beta\gamma)\sin(\beta\gamma')}=\frac{\sin(\beta'\alpha)\sin(\beta'\alpha')}{\sin(\beta'\gamma)\sin(\beta'\gamma')};$$

$$\frac{\sin(\gamma\alpha)\sin(\gamma\alpha')}{\sin(\gamma\beta)\sin(\gamma\beta')}=\frac{\sin(\gamma'\alpha)\sin(\gamma'\alpha')}{\sin(\gamma'\beta)\sin(\gamma'\beta')};$$

$$\sin(\alpha\beta)\sin(\alpha'\gamma)\sin(\beta'\gamma')=\sin(\alpha'\beta')\sin(\gamma'\alpha)\sin(\beta\gamma);$$

$$\sin(\alpha'\beta)\sin(\alpha\gamma)\sin(\beta'\gamma')=\sin(\alpha\beta')\sin(\gamma'\alpha')\sin(\beta\gamma);$$

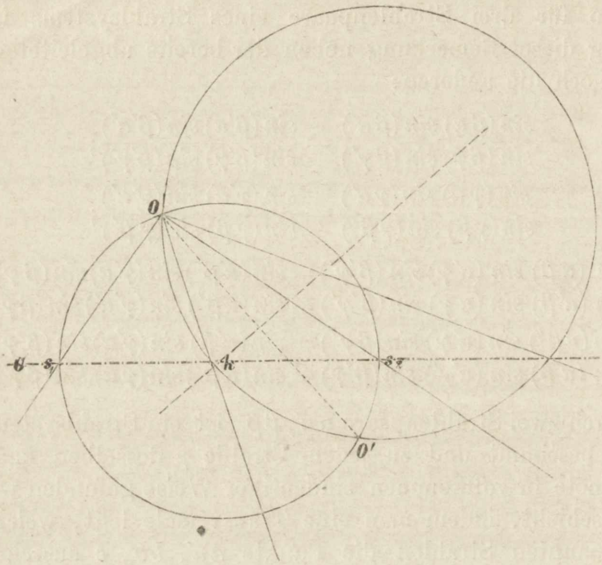
$$\sin(\alpha\beta')\sin(\alpha'\gamma)\sin(\beta\gamma')=\sin(\alpha'\beta)\sin(\gamma'\alpha)\sin(\beta'\gamma);$$

$$\sin(\alpha\beta)\sin(\alpha'\gamma')\sin(\beta'\gamma)=\sin(\alpha'\beta')\sin(\gamma\alpha)\sin(\beta\gamma').$$

Durch zwei Strahlenpaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ist ein Strahlsystem vollständig bestimmt und zu jedem Strahle γ desselben kann der zugeordnete in vollkommen eindeutiger Weise gefunden werden. Dies geschieht, indem man eine Transversale legt, welche aus den genannten Strahlen die Punkte aa', bb', c ausschneidet. Der Punkt c', welcher mit c zusammen ein Punktenpaar des durch aa', bb' bestimmten Punktsystems bildet, kann nach Früherem construirt werden und liefert, mit dem Mittelpunkte des Strahlsystems verbunden, den γ zugeordneten Strahl γ'.

Im Punktsystem befindet sich ein ausgezeichnetes Punktenpaar, welches aus dem Mittelpunkte und dem unendlich entfernten Punkte besteht. Ebenso gibt es in einem Strahlsystem ein ausgezeichnetes Strahlenpaar, das einen rechten Winkel einschliesst. Im hyperbolischen Strahlsystem besteht dieses Paar aus den Winkelhalbirenden der Asymptoten, dass es aber für jedes beliebige Strahlsystem existirt, zeigt folgende Betrachtung: Wird ein Strahlsystem mit dem Mittelpunkte O durch eine Transversale G geschnitten, so kann man durch O und je ein Punktenpaar des auf G erzeugten Punktsystems einen Kreis legen, und alle diese Kreise schneiden sich ausser in O noch in einem festen Punkte O'. Der Winkel, welcher von einem Strahlenpaare des Strahlsystems eingeschlossen wird, kann nun als Peripheriewinkel in einem dieser Kreise aufgefasst werden und soll er ein Rechter sein, so muss der Mittelpunkt des betreffenden Kreises auf der Geraden G liegen. Alle Kreise, die

Fig. 45.



durch O und O' gehen, haben ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, welche G im Allgemeinen nur in einem einzigen Punkte k treffen wird; schlägt man um diesen als Mittelpunkt einen Kreis, der durch die Punkte O und O' geht, so erhält man auf G zwei Schnittpunkte s_1 und s_2, welche mit O verbunden dasjenige Strahlenpaar ergeben, welches einen rechten Winkel einschliesst: die Axen des Strahlsystems. Ein besonderer Fall ist noch zu erwähnen. Wenn nämlich O und O' symmetrisch zu G gelegen sind, dann ist jeder Punkt auf G Mittelpunkt eines Kreises, der gleichzeitig durch O und O' läuft. Das in O befindliche Strahlsystem hat also die Eigenschaft, dass irgend eines seiner Strahlenpaare einen rechten Winkel einschliesst. Umgekehrt: Dreht man einen rechten Winkel um seinen Scheitel herum, so erzeugen seine Schenkel ein besonderes elliptisches Strahlsystem, welches das circulare Strahlsystem heisst.

Durch Einführung des Mittelpunktes wird das Punktsystem in einfacher Weise metrisch definirt. Ebenso vereinfachen sich die metrischen Relationen für das Strahlsystem, wenn die Axen eingeführt werden. Seien in der That α und α' die Axen eines Strahlsystems, $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ zwei Strahlen desselben, so geht, da $(\alpha\alpha') = 90^0$, also $(\alpha'\beta) = 90^0 - (\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta') = 90^0 - (\alpha\beta')$, $(\alpha'\gamma) = 90^0 - (\alpha\gamma)$, $(\alpha'\gamma') = 90^0 - (\alpha\gamma')$ ist, die Formel

$$\frac{\sin(\alpha\beta)\sin(\alpha\beta')}{\sin(\alpha\gamma)\sin(\alpha\gamma')} = \frac{\sin(\alpha'\beta)\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\alpha'\gamma)\sin(\alpha'\gamma')}$$

über in

$$\frac{\sin(\alpha\beta)\sin(\alpha\beta')}{\sin(\alpha\gamma)\sin(\alpha\gamma')} = \frac{\cos(\alpha\beta)\cos(\alpha\beta')}{\cos(\alpha\gamma)\cos(\alpha\gamma')}$$

oder

$$tg(\alpha\beta)\,tg(\alpha\beta') = tg(\alpha\gamma)\,tg(\alpha\gamma').$$

Dieses Product der Tangenten bleibt constant für alle Strahlenpaare des Strahlsystems, die mit den Axen in Beziehung gesetzt werden; es wird die Potenz des Strahlsystems genannt.

Das circulare Strahlsystem ist ein elliptisches Strahlsystem, dessen Potenz $= 1$ ist. Man kann auch ein hyperbolisches Strahlsystem construiren, welches dieselbe Potenz hat, das gleichseitig hyperbolische Strahlsystem, dessen Asymptoten, wie leicht zu verificiren ist, senkrecht zu einander stehen. Ein anderes specielles Strahlsystem, welches in gewissem Sinne den Uebergang vom elliptischen zum hyperbolischen vermittelt, ist das parabolische, dessen beide Asymptoten zusammenfallen. Sei O der Mittelpunkt eines solchen Strahlsystems, ferner repräsentire σ das zusammengefallene Paar der Asymptoten, so wird der einem beliebig durch O gelegten Strahle α entsprechende Strahl α' sich mit σ vereinigen. Umgekehrt bildet σ mit jedem beliebigen Strahle des Strahlsystems ein Strahlenpaar.

Von speciellen Fällen des Punktsystems sei zunächst das parabolische erwähnt, in welchem die beiden Asymptotenpunkte sich vereinigt haben. Sei p der Punkt, in welchem dies geschehen ist, so wird auch der Punkt a', welcher mit einem beliebigen Punkte a ein Punktenpaar des Punktsystems bildet, mit p zusammenfallen; umgekehrt bestimmt p mit jedem beliebigen Punkte der Geraden, auf welcher sich das Punktsystem befindet, ein Punktenpaar derselben. Man nennt gleichseitig hyperbolisches Punktsystem ein solches, welches einen seiner Asymptotenpunkte im Unendlichen hat; der andere Asymptotenpunkt liegt dann in der Mitte irgend eines der Punktenpaare, aus denen das Punktsystem besteht, ganz analog wie auch die Asymptoten eines gleichseitig hyperbolischen Strahlsystems die Winkel irgend eines seiner Strahlenpaare halbiren. — Ein eigenthümliches

Punktsystem existirt auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene: es wird dasselbe durch irgend ein circulares Strahlsystem ausgeschnitten und besteht aus denjenigen unendlich entfernten Punkten der Ebene, die aus irgend einem zugänglichen Punkte derselben unter rechten Winkeln gesehen werden.

Man kann unmittelbar die Eigenschaften der Punktsysteme und Strahlsysteme auf Ebenen übertragen, die von einer willkürlich im Raume gelegenen Geraden aus durch die Punktenpaare eines Punktsystems oder von einem Punkte aus durch die Strahlenpaare eines Strahlsystems gelegt werden können. Auf solche Ebenensysteme und ihre Specialfälle, die sich leicht ergeben, soll nicht weiter eingegangen werden.

Lange bevor die im Vorhergehenden enthaltene Theorie der Punktsysteme und Strahlsysteme entwickelt war, hat man sich mit den Eigenschaften einer Gruppe von sechs Punkten in einer Geraden beschäftigt, zwischen deren Abständen die in § 10 abgeleiteten Relationen für drei Punktenpaare eines Punktsystems gelten. Sechs solche Punkte nannte man eine Involution und daher rührt die zusammenfassende Bezeichnung von Punktsystemen, Strahlsystemen und Ebenensystemen als involutorische Gebilde.

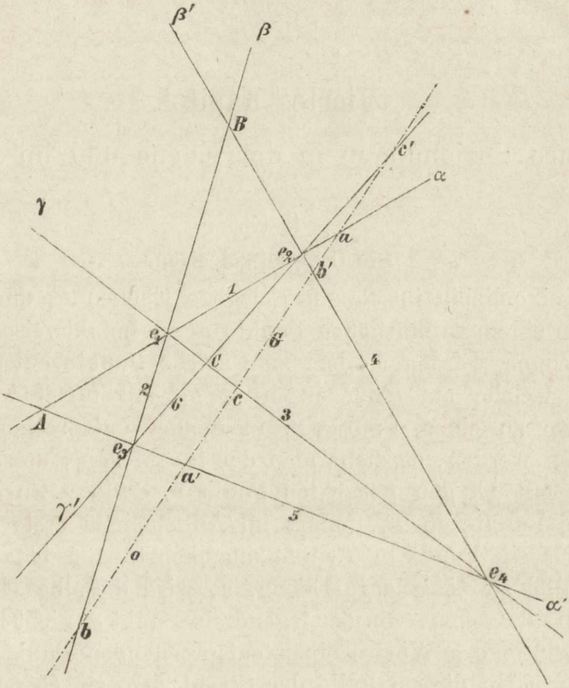
Die Aufgabe, den sechsten Punkt einer Involution zu finden, von welcher fünf Punkte mit bestimmter Zuordnung gegeben sind, kann zwar mit den bereits angegebenen Hilfsmitteln gelöst werden, aber die Construction erfordert zu ihrer Ausführung den Zirkel. Eine lineale Lösung gründet sich auf den Satz, dass die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks von irgend einer Transversalen in einer Involution geschnitten werden.

Das vollständige Viereck $e_1 e_2 e_3 e_4$ habe die drei Paare von Gegenseiten $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, die drei Diagonalpunkte A, B, C und schneide auf der Transversalen G mit seinen Seiten die Punkte aa', bb', cc' aus. Nach einem bekannten Transversalensatze ergibt dann das Dreieck Aaa'

mit der Transversalen

$$\begin{aligned}
\beta &: \quad ab \,.\, Ae_1 \,.\, a'e_3 = ba' \,.\, ae_1 \,.\, Ae_3,\\
\beta' &: \quad ab' \,.\, Ae_2 \,.\, a'e_4 = b'a' \,.\, ae_2 \,.\, Ae_4,\\
\gamma &: \quad a'c \,.\, Ae_4 \,.\, ae_1 = ca \,.\, a'e_4 \,.\, Ae_1,\\
\gamma' &: \quad a'c' \,.\, Ae_3 \,.\, ae_2 = c'a \,.\, a'e_3 \,.\, Ae_2.
\end{aligned}$$

Fig. 46.



Hieraus durch Multiplication:

$$ab \,.\, ab' \,.\, a'c \,.\, a'c' = a'b \,.\, a'b' \,.\, ac \,.\, ac'$$

oder

$$\frac{ab \,.\, ab'}{ac \,.\, ac'} = \frac{a'b \,.\, a'b'}{a'c \,.\, a'c'},$$

d. h. aa', bb', cc' sind drei Punktenpaare eines Punktsystems oder sechs Punkte einer Involution. Nimmt man an, die fünf Punkte aa', bb', c seien in der durch die Bezeichnung angedeuteten Zuordnung gegeben, so findet man c' vermittelst des Lineals allein, indem man die Seiten des vollständigen Vierecks $e_1 e_2 e_3 e_4$ in der durch die Zahlen 1 bis 6 angegebenen Reihenfolge zieht.

Viertes Kapitel.

Lineare Beziehungen in der Ebene und im Raume.

§ 12.

Die Centralprojection.

Zwei beliebig im Raume gelegene Ebenen E_1 und E_2 können von einem willkürlichen Punkte M aus punktweise aufeinander bezogen werden, indem man solche Punkte entsprechende nennt, welche auf einer durch M gehenden Geraden liegen. Soll also zu einem Punkte p_1 in E_1 der entsprechende in E_2 gefunden werden, so zieht man den Strahl Mp_1, dessen Durchschnitt mit E_2 den gesuchten Punkt p_2 ergibt. Zu einem beliebigen Punkte in E_1 gehört im Allgemeinen stets ein, aber auch nur ein Punkt in E_2 und umgekehrt. Sei E'_1 die durch M parallel zu E_1 gelegte Ebene, so wird dieselbe E_2 in einer Geraden G_2 treffen, von der irgend ein Punkt q_2 nicht im eigentlichen Sinne des Wortes einen entsprechenden Punkt q_1 in E_1 hat, da ja in diesem Falle der Strahl Mq_2 zu E_1 parallel ist. Man nimmt nun aber an, dass eine Ebene und eine ihr parallele Gerade einen unendlich entfernten Punkt, den unendlich entfernten Punkt der Geraden, gemein haben, und darf dann sagen, irgend ein Punkt q_2 in E_2, der auf G_2 liegt, hat seinen entsprechenden Punkt q_1 auf E_1 im Unendlichen. Wenn umgekehrt ein Punkt q_1 auf E_1 im Unendlichen liegt, so wird Mq_1 zu E_1 parallel sein und in E'_1 liegen und demnach gehört zu q_1 ein Punkt q_2 auf E_2, der in der Geraden G_2 enthalten ist. Bezeichnet man mit G_1 den Durchschnitt der durch M parallel zu E_2 gelegten Ebene E'_2 mit E_1, so zeigt sich in ähnlicher Weise, dass zu jedem Punkte auf G_1 in E_1 ein im Unendlichen gelegener Punkt auf E_2 gehört, während auch jedem unendlich entfernten Punkte in E_2 ein Punkt auf G_1 in E_1 entspricht. Wenn man also wieder wie bei den harmonischen Eigenschaften festsetzt, dass im Unendlichen einer Geraden alle dort befindlichen Punkte in einer einzigen sich vereinigen, so kann man sagen: Durch die Centralprojection werden zwei Ebenen E_1 und E_2 von einem Punkte M aus vollkommen eindeutig und zwar ohne Ausnahmen aufeinander bezogen. Es mag noch bemerkt werden, dass jeder Punkt der Schnittgeraden G von E_1 und E_2 sich selbst entspricht.

Liegt in E_1 eine Gerade g_1, so wird der Ort der ihren Punkten entsprechenden Punkte in E_2 oder ihre Projection die Gerade g_2 sein, welche die durch M und g_1 bestimmte Ebene aus E_2 ausschneidet; g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkte, der auf G liegt. Zu jeder Geraden, welche in E_2 ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen liegt, gehört in E_1 die Gerade G_1, und irgend einer Geraden, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen der Ebene E_1 liegt, entspricht in E_2 die Gerade G_2. Will man nun den sonst allgemein giltigen Satz, dass zu einer Geraden in E_1 eine und nur eine Gerade in E_2 gehöre, nicht mit einer Ausnahme für die vorliegenden Fälle versehen, so muss man annehmen, dass vom Gesichtspunkte der Centralprojection aus sich alle Geraden, die ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen einer Ebene liegen, so verhalten, als ob sie in einer einzigen Geraden vereinigt wären, der unendlich entfernten Geraden dieser Ebene. Damit findet diese bereits in § 9 angeführte Bezeichnung eine neue Rechtfertigung.

Punkte, die in E_1 auf einer Geraden liegen, haben ihre entsprechenden in E_2 wieder auf einer Geraden. Sind $a_1 a'_1$, $b_1 b'_1$ vier harmonische Punkte, so bilden auch ihre Projectionen eine Gruppe von vier harmonischen Punkten $a_2 a'_2$, $b_2 b'_2$; in der That wird die Projection durch vier von M ausgehende Strahlen vermittelt, welche, weil sie die erstgenannte Gruppe enthalten, harmonisch sind und also auch in E_2 von vier harmonischen Punkten geschnitten werden müssen. Da die Projection von vier harmonischen Strahlen in E_1 auch in E_2 durch vier harmonische Ebenen, die von M ausgehen, vermittelt wird, so folgt, dass vier harmonische Strahlen durch Centralprojection wieder in vier harmonische Strahlen verwandelt werden. Da die von einem Punkte aus durch ein Punktsystem gelegten Strahlen ein Strahlsystem bilden, und jedes Strahlsystem auf einer Transversalen ein Punktsystem erzeugt, so folgt, dass einem Punktsysteme in E_1 ein Punktsystem in E_2 centralprojectivisch zu-gehört, und ebenso, dass in E_1 und E_2 auch Strahlsysteme sich entsprechen. Sechs Punkte in Involution werden durch Projection wieder zu sechs Punkten in Involution. Ein vollständiges n-Eck oder n-Seit in E_1 wird wiederum einem vollständigen n-Eck oder n-Seit in E_2 entsprechen u. s. w.

Die Centralprojection kann häufig dazu benutzt werden, den Beweis von geometrischen Sätzen zu erleichtern und zu vereinfachen. Ist z. B. der Satz von den perspectivisch liegenden Dreiecken (§ 1) zu beweisen, so kann folgendermassen vorgegangen werden: In einer Ebene E_1 sollen zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ liegen, derart, dass die Geraden $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ durch einen und denselben Punkt O_1 laufen; es soll gezeigt werden, dass die Schnittpunkte α_1, β_1, γ_1 der Seitenpaare B_1C_1 und $B'_1C'_1$, C_1A_1 und $C'_1A'_1$, A_1B_1 und $A'_1B'_1$ in gerader Linie liegen. Man wähle ausserhalb E_1 einen beliebigen Punkt M und verbinde denselben mit der Geraden $\alpha_1\beta_1$ durch eine Ebene E'_2. Eine zu E'_2 parallele Ebene E_2 werde nun von M aus mit E_1 in centralprojectivische Beziehung gesetzt. Den Dreiecken $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ entsprechen zwei neue Dreiecke

Fig. 47a.

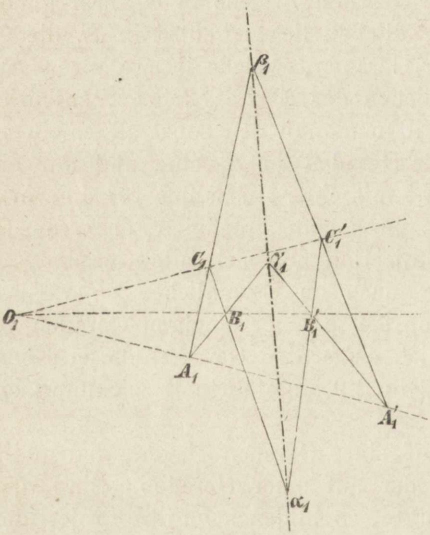
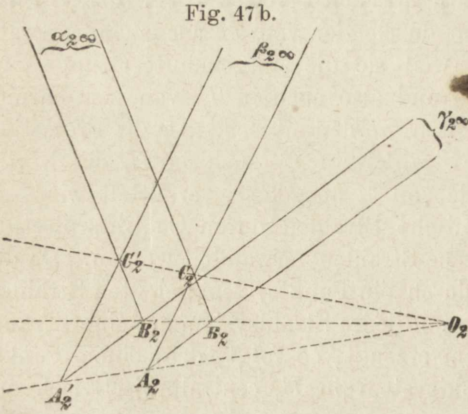


Fig. 47b.



$A_2B_2C_2$, $A'_2B'_2C'_2$, welche die Eigenschaft haben, dass $A_2A'_2$, $B_2B'_2$, $C_2C'_2$ sich in einem Punkte O_2 schneiden. Die Seitenpaare B_2C_2 und $B'_2C'_2$, C_2A_2 und $C'_2A'_2$ schneiden sich in Punkten α_2 und β_2, welche die Projectionen von α_1 und β_1 sind, also im Unendlichen liegen, d. h. diese Seitenpaare sind parallel. Nun wird aber leicht vermittelst ähnlicher Dreiecke gezeigt, dass auch A_2B_2 und $A'_2B'_2$ parallel sind, also ihr Schnittpunkt γ_2 ebenfalls im Unendlichen liegt; derselbe ist aber der entsprechende Punkt zu γ_1, womit bewiesen ist, dass γ_1 auf der Geraden $\alpha_1\beta_1$ liegen muss.

In derselben Weise wird die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierseits zur Evidenz gebracht. Projicirt man ein in der Ebene E_1 gelegenes vollständiges Vierseit so auf eine Ebene E_2, dass eine seiner Diagonalen ins Unendliche von E_2 fällt, so wird es zu einem Parallelogramm, dessen beide im Endlichen gelegenen Diagonalen sich halbiren, während sie von der dritten in ihren unendlich entfernten Punkten geschnitten werden. Auf zweien der Diagonalen des in E_2 gelegenen vollständigen Vierseits liegen also vier harmonische Punkte, von denen zwei als Ecken dem vollständigen Vierseit angehören, die beiden anderen aber Schnittpunkte der Diagonalen sind. Da die harmonische Eigenschaft in der Ebene E_2 bewiesen ist, so gilt sie auch in der Ebene E_1, womit der Satz vom vollständigen Vierseit allgemein bewiesen ist.

Fig. 48a.

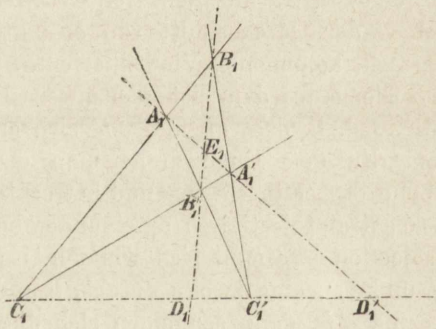
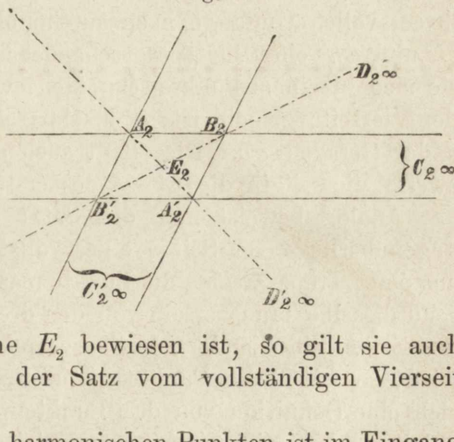


Fig. 48b.



Die Gruppe von vier harmonischen Punkten ist im Eingang des § 8 aus metrischen Relationen definirt worden. Das vollständige Vierseit gibt die Mittel an die Hand, eine solche Gruppe von Punkten zu definiren, ohne den Begriff des Masses resp. der Strecke zu Hilfe zu nehmen. Man nennt vier harmonische Punkte solche, die auf einer Diagonalen eines vollständigen Vierseits derart vertheilt sind, dass zwei Zugeordnete von denselben Ecken das Vierseit bilden, während die anderen von den beiden übrigen Diagonalen ausgeschnitten werden. Es ist nun zu zeigen, dass, wenn drei von den Punkten mit bestimmter Zuordnung gegeben sind, dann der vierte eindeutig bestimmt ist.

Es seien in einem vollständigen Vierseit a und b gegenüberliegende Ecken, c der Schnittpunkt der Diagonalen ab und cgf, ferner $efgh$ die übrigen vier Ecken des Vierseits und schliesslich d der Durchschnitt von eh mit ab. Für ein zweites in Betracht kommendes Vierseit seien $abce'f'g'h'd'$ die entsprechenden Elemente, dann ist nachzuweisen, dass d und d' zusammenfallen, d. h. dass eh und $e'h'$ sich auf der Geraden ab schneiden. Zu dem Ende drehe man das zweite Vierseit aus der Ebene des ersten heraus und betrachte dann die beiden Vierseite als centralprojectivisch aufeinander bezogen. Das Centrum der Projection bestimmt sich wie folgt: Man lege eine Ebene durch ef und $e'f'$, eine zweite durch gh und $g'h'$ und eine dritte durch gf und $g'f'$, dann schneiden sich diese drei Ebenen in dem gesuchten Punkte M. Es leuchtet ein, dass nun die Vierseite ihrem vollen Umfange nach aufeinander bezogen sind, und da eh und $e'h'$ ein Paar entsprechender Geraden bilden, so müssen sie sich in einem Punkte schneiden, welcher den beiden Ebenen der Vierseite gemein ist, d. h. sie treffen sich in einem Punkte d der Geraden ab. Dies trifft auch dann noch ein, wenn das zweite Vierseit in die Ebene des ersten zurückgedreht wird.

Analog beweist man den Satz: Schneiden die drei Paare gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Viereckes $e_1e_2e_3e_4$ aus einer Transversalen die Punktenpaare aa_1, bb_1, cc_1 aus, während dieselbe Transversale von den drei Paaren gegenüberliegender Seiten eines andern Vierecks in aa_1, bb_1, cc_2 geschnitten wird, so fallen die Punkte c_1 und c_2 zusammen. Daraus lässt sich eine Definition von drei Punktenpaaren eines Punktsystems ableiten, die frei ist von allen metrischen Beziehungen.

Geht man also von den beiden zuletzt angegebenen Sätzen aus, so gelangt man zu einer Theorie der harmonischen und involutorischen Gebilde, die alle früher in dieser Richtung abgeleiteten Sätze ergibt, mit Ausnahme derjenigen, welche von den Grössenverhältnissen zwischen Strecken und Winkeln handeln.

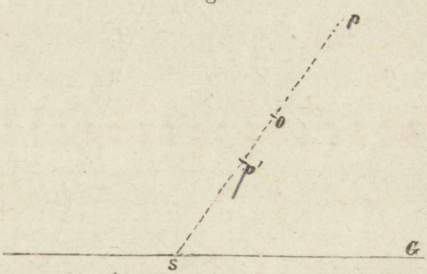
§ 13.

Lineare Transformationen.

Die Centralprojection ist, wie bereits ausgesprochen wurde, durch folgende Eigenschaften zur Ableitung geometrischer Sätze dienlich: Sie lehrt irgend eine ebene Figur in eine andere verwandeln, so dass Punkte wieder zu Punkten, Gerade wieder zu Geraden werden. Da aber Projectionscentrum und Projectionsebene willkürlich gewählt werden dürfen, so gelingt es häufig, die projicirte Figur bedeutend zu vereinfachen und so Sätze von einfachen Figuren überzutragen auf verwickelte. Ganz dasselbe kann man mit harmonischen Eigenschaften leisten und zwar ohne aus der Ebene herauszugehen.

Man wähle in der Ebene eine Gerade G und einen nicht auf dieser Geraden gelegenen Punkt O. Dann findet man zu jedem Punkte p in der Ebene einen zugeordneten in der Weise, dass man die Gerade $p\,O$ zieht, welche G in den Punkten s treffen möge und nun zu den Punkten $p\,O\,s$ den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p' construirt. Zu jedem Punkte p gehört stets ein und nur ein Punkt p' und zu dem Punkte p' gehört umgekehrt der Punkt p, d. h. die Beziehung ist eindeutig und reciprok. Als specielle Fälle mögen erwähnt werden: 1) der Punkt O, der sich selbst entspricht, 2) die Punkte auf der Geraden G, welche sich ebenfalls selbst entsprechen, 3) die unendlich entfernten Punkte der Ebene, deren entsprechende

Fig. 49.

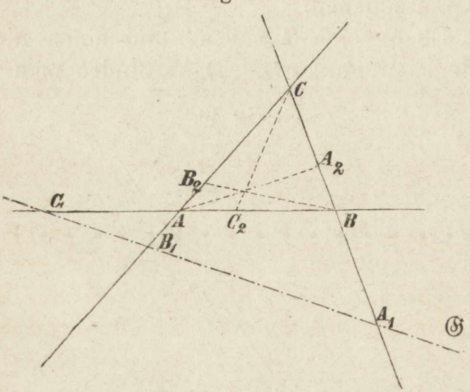


Punkte auf der Geraden liegen, welche in gleichem Abstande von O und G geführt wird.

Um den Ort zu finden, welchen p' beschreibt, wenn p eine Gerade g durchläuft, bemerke man zunächst, dass g und G sich in einem Punkte s schneiden. Legt man durch s diejenige Gerade g', welche zu den Geraden g, G, Os den vierten harmonischen g zugeordneten Strahl liefert, so ist diese der Ort des Punktes p', denn jede durch O gelegte Gerade schneidet die vier harmonischen Strahlen in vier harmonischen Punkten, also g' in dem irgend einem p zugeordneten p'. Es entspricht also jeder Geraden wieder eine Gerade, und zwar schneiden sich entsprechende Gerade auf G. Specielle Fälle sind folgende: 1. Der Geraden G entspricht G selbst; 2. jede durch O gelegte Gerade entspricht sich selbst; 3. der Geraden, welche in gleichem Abstande von G und O liegt, entspricht die unendlich entfernte Gerade der Ebene.

Als Anwendung mag der Beweis des folgenden Satzes dienen. Werden die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC von einer Transversalen $\mathfrak{S}$ resp. in den Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten, und man construirt die resp. A_1, B_1, C_1 zugeordneten vierten harmonischen Punkte A_2, B_2, C_2 zu A_1BC, B_1CA, C_1AB, so laufen die drei Geraden AA_2, BB_2, CC_2 durch einen und denselben Punkt. Man wähle in der Ebene einen beliebigen Punkt O und eine Gerade G, welche parallel zu $\mathfrak{S}$ und doppelt so weit von O entfernt ist als diese, so wird durch Transformation der beschriebenen Figur nach der eben auseinandergesetzten Methode aus dem Dreieck ABC ein neues Dreieck $A'B'C'$, aus $\mathfrak{S}$ entsteht die unendlich entfernte Gerade der Ebene und die Punkte A_2, B_2, C_2 verwandeln sich in die Mitten A'_2, B'_2, C'_2 der Seiten des

Fig. 50.



Dreiecks $A'B'C'$. Da nun $A'A'_2$, $B'B'_2$, $C'C'_2$ sich im Schwerpunkt dieses Dreiecks treffen, so werden auch die sie erzeugenden Geraden AA_2, BB_2, CC_2 durch einen und denselben Punkt gehen müssen.

Die Uebertragung dieses Princips in den Raum ist so einfach, dass die wichtigsten Sätze, welche dasselbe betreffen, an dieser Stelle ohne Beweis mitgetheilt werden dürfen. Man wähle eine Ebene E und einen nicht in ihr liegenden Punkt O. Zu einem Punkte p wird der entsprechende gefunden, indem man die Gerade Op zieht, welche E in s schneidet, und zu den Punkten $p\,O\,s$ den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p' construirt. Auch im Raume ist die Beziehung eindeutig und reciprok. Der Punkt O entspricht sich selbst, jeder Punkt auf E fällt ebenfalls mit seinem entsprechenden zusammen, einem unendlich entfernten Punkte entspricht ein Punkt auf der Ebene $\mathfrak{E}$, welche in gleichem Abstande von O und E geführt wird. Einer Geraden g gehört eine Gerade g' zu, und zwar schneiden sich g und g' auf E. Einer Ebene e entspricht eine andere Ebene e', so dass e und e' sich in einer auf E gelegenen Geraden treffen. Die Ebene E entspricht sich selbst, ebenso ist jede durch O gehende Ebene sich selbst zugeordnet. Die Ebene $\mathfrak{E}$ entspricht allen unendlich entfernten Punkten, d. h. der unendlich entfernten Ebene des Raumes.

Zur Erläuterung der gemachten Bemerkungen soll ein vorhin bewiesener Satz für das Dreieck auf das Tetraeder übergetragen werden. Schneidet man die sechs Kanten eines Tetraeders durch eine Ebene, und bestimmt auf jeder Kante zu den beiden auf ihr gelegenen Ecken und dem in ihr enthaltenen Schnittpunkte mit der Ebene den vierten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Punkt, so erhält man sechs Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass die drei Verbindungsgeraden der auf den drei Paaren gegenüberliegender Kanten dieses Tetraeders enthaltenen sich in einem und demselben Punkte begegnen. Sei die schneidende Ebene $\mathfrak{E}$, so wähle man einen beliebigen Punkt O und eine zu $\mathfrak{E}$ parallele, doppelt so weit wie $\mathfrak{E}$ von O entfernte Ebene E und transformire nach dem Vorigen die ganze Figur auf O und E. Man erhält dann ein neues Tetraeder, zusammengenommen mit der unendlich entfernten Ebene des Raumes; aus den sechs zu untersuchenden

Punkten werden die Mitten der Kanten dieses Tetraeders. Diese erzeugen in der That nach § 6 in den drei Verbindungsgeraden je zweier gegenüberliegender unter ihnen drei Gerade, die sich in einem Punkte schneiden; dasselbe gilt auch von den ursprünglichen sechs Punkten.

Es mag zum Schlusse dieses Paragraphen noch ein ähnliches Transformationsprincip für den Raum in kurzen Zügen angedeutet werden.

Man wähle im Raume zwei Gerade G und G_1, welche sich nicht schneiden und nicht parallel laufen. Durch irgend einen Punkt p, welcher nicht auf einer von ihnen liegt, ist dann stets eine und nur eine Gerade g möglich, welche die beiden gegebenen schneidet. Bestimmt man zu den beiden gefundenen Schnittpunkten und zu p den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p', so kann man den Raum durch p und p' linear auf sich selbst beziehen. In der That entspricht einem Punkte p im Raume stets ein und nur ein Punkt p' und umgekehrt; einem Punkte auf einer der beiden Fundamentalgeraden entspricht er selbst. Einem Punkte, der in unendlicher Entfernung liegt, entspricht ein anderer auf der Ebene, welche G und G' parallel verläuft und von diesen Geraden gleichweit entfernt ist.

Sei E eine Ebene, für welche der Ort der ihren Punkten entsprechenden Punkte gefunden werden soll, so wird dieselbe G und G_1 in zwei Punkten s und s_1 schneiden, deren Verbindungsgerade g heisse. Die Ebene durch g und G heisse e, die Ebene durch g und G_1 heisse e_1, dann construire man zu Eee_1 die vierte harmonische, E zugeordnete Ebene E_1; diese ist der Ort der Punkte, welche den Punkten der Ebene E zugehören. In der That trifft eine durch G und G_1 gelegte Gerade die Ebenen EE_1ee_1 in vier harmonischen, also E und E_1 in zwei sich entsprechenden Punkten. Eine Ebene und ihre entsprechende schneiden sich in einer Geraden, welche sowohl G als G_1 trifft. Eine Ebene, welche eine der Fundamentalgeraden enthält, entspricht sich selbst. Dem Durchschnitt zweier Ebenen gehört wieder der Durchschnitt zweier Ebenen zu, d. h. einer Geraden g entspricht wieder eine Gerade g_1. Im Allgemeinen liegen die vier Geraden gg_1GG_1 so, dass jede Gerade, welche dreien von ihnen begegnet, auch die vierte trifft. Zwei sich entsprechende Gerade schneiden sich im Allgemeinen nicht; trifft aber eine

Gerade eine der beiden Fundamentalen, so hat sie mit ihrer entsprechenden auf dieser einen Punkt gemein. Trifft eine Gerade beide Fundamentallinien, so entspricht sie sich selbst.

Vier harmonischen Punkten entsprechen wieder vier harmonische Punkte, vier harmonischen Strahlen entsprechen vier harmonische Strahlen und vier harmonischen Ebenen vier harmonische Ebenen. Auch die involutorischen Gebilde bleiben bei dieser Transformation involutorisch.

Kreis und Kugel.

Fünftes Kapitel.

Potenz. Aehnlichkeitspunkte.

§ 14.

Die Potenzlinie zweier Kreise.

Aus § 10 (Fig. 41) kann man die nachfolgenden beiden Sätze ziehen: 1. Zieht man von einem Punkte P innerhalb eines Kreises aus Sehnen durch den Kreis, so entstehen auf jeder derselben zwei Abschnitte, deren Product einen constanten Werth hat, der nur abhängig ist von der Lage des angenommenen Punktes und dem Radius des Kreises, es ist dasselbe nämlich gleich dem Quadrate der halben kleinsten Sehne, die durch den Punkt im Kreise gezogen werden kann. Diese kleinste Sehne wird gefunden, indem man p mit dem Mittelpunkte M des vorgelegten Kreises durch eine Gerade verbindet und auf dieselbe in p ein Perpendikel errichtet. 2. Zieht man durch einen Punkt P ausserhalb eines Kreises Secanten, so erhält man auf jeder derselben zwei Abschnitte, deren Product constant ist, und zwar gleich dem Quadrate einer der beiden von P aus an den Kreis zu legenden Tangenten.

In beiden Fällen heisst das constante Product die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis, und zwar, wenn P innerhalb des Kresies liegt, innere Potenz, wenn P ausserhalb des Kreises liegt, äussere Potenz. Alle Punkte, welche gleiche innere oder gleiche äussere Potenz in Bezug auf einen festen Kreis M erzeugen, liegen auf einem mit M concentrischen Kreise. Die äussere Potenz kann durch gehörige Wahl von P

jedem beliebigen Werthe gleich gemacht werden; sie ist Null für einen Punkt auf dem Kreise selbst und wird unendlich gross, wenn P ins Unendliche rückt. Die innere Potenz ist für einen Punkt auf dem Kreise selbst ein Minimum und wird ein Maximum für den Mittelpunkt des Kreises, für welchen sie gleich dem Radiusquadrat ist.

Reducirt sich der Kreis auf seinen Mittelpunkt M, d. h. wird sein Radius unendlich klein angenommen, so ist die Potenz eines Punktes P in Bezug auf denselben gleich PM^2, und zwar ist sie stets eine äussere Potenz. Man kann aber auch den Radius des Kreises M unendlich gross werden lassen. Dies kann in verschiedener Weise geschehen. Man halte zunächst den Mittelpunkt fest, dann wird bei wachsendem Radius der Kreis immer weiter rücken und schliesslich ganz ins Unendliche rücken, d. h. auf die unendlich entfernte Gerade der Ebene zu liegen kommen. Da aber der Kreis immer noch die Eigenschaft behält, von einer Geraden, die durch seinen Mittelpunkt geht, in zwei Punkten geschnitten zu werden, so muss man annehmen, dass der betrachtete Kreis aus der doppelt gelegten unendlich entfernten Geraden der Ebene bestehe. Man kann aber noch anders verfahren. Von einem Kreise halte man einen Punkt P seiner Peripherie fest und lasse den Mittelpunkt auf einer durch P gehenden Geraden G fortschreiten, so wird der Kreis immer das in P auf G errichtete Perpendikel G' zur Tangente haben und sich dieser Tangente um so mehr anschmiegen, je grösser sein Radius wird. Lässt man denselben unendlich gross werden, so fällt ein Theil des Kreises mit G' zusammen, der andere Theil aber kommt auf die unendlich entfernte Gerade zu liegen, d. h. eine beliebige Gerade der Ebene, zusammen genommen mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene, kann als ein Kreis von unendlichem Radius angesehen werden. Die Potenz eines beliebigen Punktes in Bezug auf einen solchen Kreis kann sowohl als innere wie auch als äussere betrachtet werden; sie ist im Allgemeinen unendlich gross und wird unbestimmt, sobald der Punkt auf einer der beiden den Kreis constituirenden Geraden angenommen wird.

Wenn sich zwei Kreise M_1 und M_2 in den Punkten s_1 und s_2 schneiden, so hat jeder Punkt P der Verbindungsgeraden $s_1 s_2$ die Eigenschaft, dass für ihn die Potenzen nach M_1 und M_2

gleich sind. Liegt P auf $s_1 s_2$ selbst, so ist die Potenz eine innere, liegt P auf der Verlängerung der Strecke $s_1 s_2$, so ist die Potenz eine äussere, woraus folgt, dass die Tangenten, welche man von einem solchen Punkte P aus an M_1 und M_2 legen kann, einander gleich sind. Also: Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist die Verbindungsgerade ihrer beiden Schnittpunkte (ihre gemeinschaftliche Sehne) eine Linie gleicher Potenzen oder eine Linie gleicher Tangenten für die Kreise.

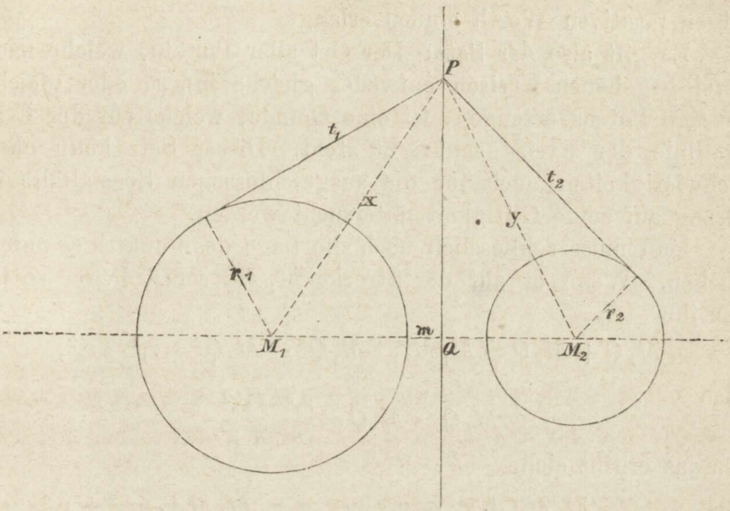
Es soll nun für zwei beliebige Kreise in der Ebene der Ort aller derjenigen Punkte bestimmt werden, welche nach denselben entweder gleiche äussere oder gleiche innere Potenz erzeugen. Wird zunächst von den speciellen Fällen abgesehen, in welchen einer der beiden Radien Null oder unendlich ist, oder wo beide Radien gleich sind, so können zwei Kreise M_1 und M_2 mit den Radien r_1 und r_2, von denen r_1 der grössere sei, zunächst concentrisch liegen, so dass M_2 von M_1 ganz eingeschlossen wird. Lässt man dann den Mittelpunkt von M_2 auf einer Geraden sich bewegen, so wird zunächst M_1 immer noch M_2 einschliessen, bis an einer gewissen Stelle eine Berührung von innen eintritt; nachher schneiden sich die beiden Kreise, auf welches hin eine äussere Berührung eintritt, und schliesslich kommen die beiden Kreise aussereinander zu liegen. Es ist leicht zu zeigen, dass gleiche innere Potenzen nur dann eintreten, wenn M_1 und M_2 sich schneiden, und dann nur auf der geradlinigen Strecke, welche die beiden Strecken mit einander verbindet, oder wenn M_1 und M_2 sich berühren, und dann nur im Berührungspunkte. Es sind jetzt nur noch die Punkte zu untersuchen, für welche gleiche äussere Potenzen eintreten, mit anderen Worten: Es ist der Ort aller derjenigen Punkte zu bestimmen, für welche die Tangenten nach zwei festen Kreisen M_1 und M_2 einander gleich sind, wobei zunächst von dem Falle abgesehen wird, wo die Kreise concentrisch sind.

Sei P ein solcher Punkt, x und y seien seine Entfernungen nach M_1 und M_2 (wenn die Bezeichnung der Kreise gleichzeitig für die Mittelpunkte benutzt wird), t_1 und t_2 seine Tangenten nach M_1 und M_2, so hat man:

$$t_1^2 = x^2 - r_1^2, \quad t_2^2 = y^2 - r_2^2,$$

und da $t_1^2 = t_2^2$ sein soll:

Fig. 51.



$$x^2 - y^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

die Punkte P haben also die Eigenschaft, dass die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von zwei festen Punkten M_1 und M_2 einen constanten Werth hat. Fällt man von P aus ein Perpendikel auf die Centrallinie M_1M_2, dessen Fusspunkt Q sein mag, so ist $M_1Q^2 = x^2 - PQ^2$, $M_2Q^2 = y^2 - PQ^2$, also $M_1Q^2 - QM_2^2 = x^2 - y^2 = r_1^2 - r_2^2$, d. h. auch für den Punkt Q ergeben sich gleiche Potenzen nach den Kreisen M_1 und M_2. Umgekehrt, ist Q ein Punkt der Centrallinie M_1M_2, der nach den beiden Kreisen gleiche Potenzen ergibt, so gilt dasselbe für jeden Punkt des Perpendikels, das in Q auf die Centrallinie gefällt werden kann. Es existirt aber auf M_1M_2 nur ein einziger Punkt Q, für welchen $M_1Q^2 - QM_2^2$ einen bestimmten Werth $r_1^2 - r_2^2$ erlangt. Da $r_1^2 - r_2^2$ positiv ist, so muss der Punkt Q mit M_2 auf derselben Seite von der Mitte m der Strecke M_1M_2 gesehen liegen; für jeden Punkt dieser Strecke ist $M_1Q + QM_2 = M_1M_2$, während $M_1Q - QM_2$ wächst, also auch $M_1Q^2 - QM_2^2$ zunimmt, wenn man von m aus nach M_2 vorwärts geht. Geht aber Q über M_2 hinaus, so ist immer $M_1Q - QM_2 = M_1M_2$, indess $M_1Q + M_2Q$, also auch $M_1Q^2 - QM_2^2$ wächst, womit gezeigt ist, dass Q nur einmal die gestellte Bedingung erfüllen kann; einmal muss dies geschehen, weil

$M_1 Q^2 - M_2 Q^2$ durch die angegebene Veränderung jeden beliebigen positiven Werth einmal erlangt.

Es gilt also der Satz: Der Ort aller Punkte, welche nach zwei gegebenen Kreisen entweder gleiche innere oder gleiche äussere Potenz erzeugen, ist eine Gerade, welche auf der Centrallinie der Kreise senkrecht steht. Dieser Satz kann ohne Schwierigkeiten auch für die ausgeschlossenen Specialfälle in Bezug auf seine Giltigkeit untersucht werden.

Man muss schliesslich noch die Lage des Punktes Q untersuchen. Wenn er auf der Strecke $M_1 M_2$ selbst liegt, so ist für ihn

$$M_1 Q + M_2 Q = M_1 M_2, \quad M_1 Q^2 - M_2 Q^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

also

$$M_1 Q - M_2 Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{M_1 M_2}.$$

Daraus ergibt sich

$$M_1 Q = \frac{M_1 M_2^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 M_1 M_2}; \quad M_2 Q = \frac{M_1 M_2^2 - r_1^2 + r_2^2}{2 M_1 M_2}.$$

Wenn aber Q auf der Verlängerung von $M_1 M_2$ liegt, so ist

$$M_1 Q = \frac{M_1 M_2^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 M_1 M_2}; \quad M_2 Q = \frac{r_1^2 - r_2^2 - M_1 M_2^2}{2 M_1 M_2},$$

durch welche Gleichungen der Punkt Q vollkommen bestimmt ist, da ja schon der Werth für $M_1 Q$ seine Lage genügend angibt, indem Q mit M_2 von M_1 aus immer in derselben Richtung gesehen wird.

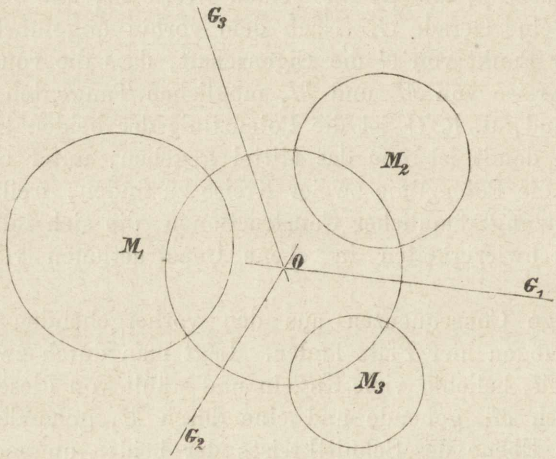
Durch zwei Kreise M_1 und M_2 lassen sich stets zwei Kugeln μ_1 und μ_2 legen, welche sich längs eines Kreises k schneiden. Wenn man einen Punkt p ausserhalb der Ebene E der beiden Kreise wählt, so werden die durch p und M_1, p und M_2 gelegten Kugeln den Punkt p gemein haben und sich also in demselben entweder berühren, oder sich in einem Kreise schneiden, welcher p enthält. Eine Berührung tritt aber nur für gewisse Punkte ein, welche in der Ebene sich befinden, die durch $M_1 M_2$ senkrecht zu E gelegt werden kann; die ausgesprochene Behauptung ist also bewiesen.

Sei e die Ebene des Schnittkreises k der beiden Kugeln μ_1 und μ_2, so wird irgend ein in e gelegener Punkt die Eigenschaft haben, dass die von ihm aus an μ_1 und μ_2 möglichen Tangenten gleichlang sind. In der That ist die Länge dieser Tangenten gleich den Tangenten, die von dem angenommenen Punkte aus an k gelegt werden können, was man aus dem Satze folgert: Legt man durch einen Punkt p eine Ebene, welche eine Kugel μ längs eines Kreises k schneidet, so sind die Tangenten von p an k zugleich Tangenten von p an μ. Da nun E durch μ_1, μ_2 und e gelegt ist, so erhalten wir in dieser Ebene durch μ_1 und μ_2 die beiden Kreise M_1 und M_2, ferner durch e eine Gerade G. Nach dem vorhin angeführten Satze hat jeder Punkt von G die Eigenschaft, dass die von ihm aus an die Kreise von M_1 und M_2 möglichen Tangenten einander gleich sind, d. h. G ist die Potenzlinie der beiden Kreise M_1 und M_2; damit ist nun das Mittel gegeben, unter allen Umständen die Potenzlinie zweier Kreise zu finden, freilich unter Voraussetzung räumlicher Constructionen, die sich indess ohne grosse Schwierigkeiten in ebene Constructionen verwandeln lassen.

Einige Consequenzen aus den vorhergehenden Betrachtungen mögen hier Platz finden. Legt man durch zwei Kreise M_1 und M_2 beliebig viele Kugeln und wählt von diesen irgend eine durch M_1 gehende und eine durch M_2 gehende aus, so wird die Ebene des Schnittkreises der beiden angenommenen Kugeln stets durch eine feste Gerade gehen, welche die Potenzlinie der Kreise M_1 und M_2 ist. Für Kreise, welche sich berühren oder sich schneiden, ist dieser Satz selbstverständlich. — Für zwei concentrische Kreise M_1 und M_2 liefert die räumliche Construction als Potenzlinie die unendlich entfernte Gerade, wie sofort einzusehen ist. — Ebenso wie man beim Kreise den Radius unendlich klein oder unendlich gross werden lassen kann und dann specielle Fälle des Kreises findet, so kann man auch für die Kugel dieselben Specialisirungen vornehmen und findet so, dass ein Punkt als eine Kugel mit unendlich kleinem Radius aufgefasst werden kann, während eine beliebige Ebene, zusammengenommen mit der unendlich entfernten Ebene des Raumes, als Kugel mit unendlich grossem Radius auftritt. — Aus der letzten Bemerkung leitet man den Satz ab: Die Potenzlinie zweier Kreise, von welchen der eine M_1 ganz willkürlich ist, während der andere in eine Gerade G und die unendlich entfernte Gerade der Ebene zerfällt, ist die Gerade G.

Wenn in der Ebene drei Kreise M_1, M_2, M_3 in beliebiger Lage gegeben sind, so bestimmen je zwei von ihnen eine Potenzlinie; diejenige von M_2 und M_3 sei G_1, die von M_3 und M_1 sei G_2 und die von M_1 und M_2 sei G_3. Die Geraden G_1, G_2, G_3 schneiden sich in einem und demselben Punkt, denn sei O

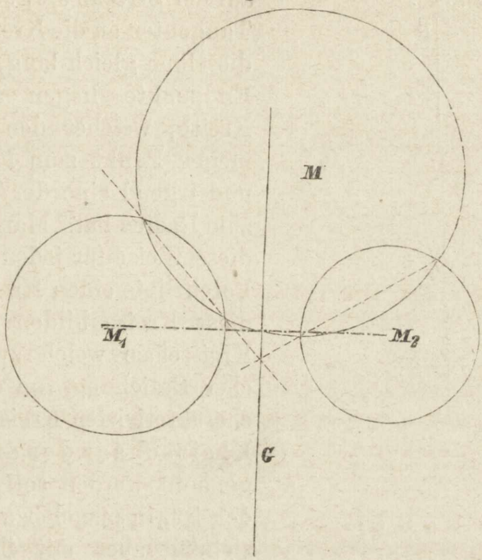
Fig. 52.



der Schnittpunkt von G_1 und G_2, so sind für diesen Punkt, weil er G_1 angehört, die Potenzen nach M_2 und M_3 einander gleich, ebenso, weil er G_2 angehört, sind seine Potenzen nach M_3 und M_1 gleich; demzufolge sind auch seine Potenzen nach M_1 und M_2 einander gleich, also liegt er auf der Potenzlinie G_3 dieser Kreise. Ist O ausserhalb eines der drei Kreise M_1, M_2, M_3 gelegen, so sind die Tangenten von ihm aus an diese Kreise gleich lang und demzufolge ist er der Mittelpunkt eines Kreises, welcher M_1, M_2 und M_3 unter rechten Winkeln schneidet und der Orthogonalkreis dieser drei Kreise heisst.

Der eben bewiesene Satz, dass die drei Potenzlinien dreier Kreise zu je zweien genommen durch einen und denselben Punkt laufen, dient dazu, die Potenzlinie G zweier Kreise M_1 und M_2 zu ziehen, die sich nicht schneiden. Man lege einen Kreis M, welcher die beiden gegebenen schneidet, so werden die Potenzlinien von M und M_1, resp. von M und M_2 die sofort zu con-

Fig. 53.



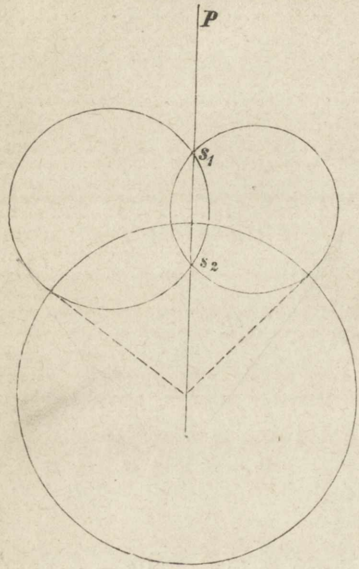
struirenden gemeinschaftlichen Sehnen sein. Fällt man von deren Schnittpunkt aus ein Perpendikel auf die Centrallinie $M_1 M_2$, so ist dasselbe die gesuchte Potenzlinie G.

§ 15.

Kreisschaaren und Kugelschaaren.

Legt man durch zwei Punkte s_1 und s_2 alle möglichen Kreise, so entsteht eine Kreisschaar, welche die Eigenschaft hat, dass die Potenzlinie irgend zweier aus der Schaar entnommener Kreise die Verbindungsgerade $s_1 s_2$ ist. Die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen in dem Perpendikel, das in der Mitte der Strecke $s_1 s_2$ auf dieser Strecke errichtet werden kann. Umgekehrt ist jeder Punkt dieses Perpendikels, welches die Axe der Kreisschaar heisst, Mittelpunkt eines und nur eines ganz bestimmten Kreises der Schaar. Es gibt einen Kreis der Schaar, welcher der kleinste von allen ist: er hat die Verbindungsgerade der Grundpunkte $s_1 s_2$ zum Durchmesser; der grösste Kreis der Schaar besteht aus der Geraden $s_1 s_2$ und der unendlich entfernten Geraden der Ebene. Legt man von einem Punkte der gemeinschaftlichen Potenzlinie P der Schaar aus, welcher nicht

Fig. 54.



auf der Strecke $s_1 s_2$ selbst liegt, Tangenten an die Kreise, so sind dieselben gleich lang, d. h. ihre Endpunkte liegen auf einem Kreise, welcher den angenommenen Punkt zum Mittelpunkt und irgend eine der Tangenten zum Radius hat. Man erhält auf diese Weise für jeden Punkt der Potenzlinie einen Kreis und alle diese Kreise bilden eine neue Kreisschaar, welche zwar in mancher Beziehung von der vorhin charakterisirten Kreisschaar, die Kreisschaar der ersten Art genannt werden soll, verschieden ist, in mancher anderen Beziehung aber mit ihr in den Eigenschaften übereinstimmt.

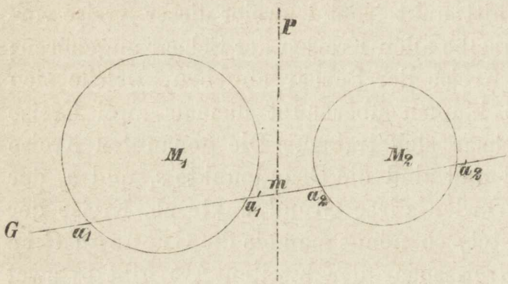
Die Kreisschaar der zweiten Art hat zufolge ihrer Definition die Eigenschaft, dass jeder der ihr angehörigen Kreise alle Kreise der ersten Schaar unter rechten Winkeln schneidet. Daraus folgt, dass umgekehrt jeder Kreis der ersten Schaar jeden Kreis der zweiten Schaar unter rechtem Winkel trifft; schneidet aber ein Kreis zwei gegebene Kreise rechtwinklig, so muss sein Mittelpunkt nothwendig auf der Potenzlinie der beiden anderen Kreise liegen, weil die von ihm aus an diese Kreise gezogenen Tangenten Radien eines und desselben Kreises, also gleich lang sind. Diese Bemerkung beweist den Satz: Die sämmtlichen Kreise der Kreisschaar zweiter Art haben eine gemeinsame Potenzlinie; wählt man auf derselben einen beliebigen Punkt, so sind die Tangenten, die von ihm aus an die Kreise gelegt werden können, gleich lang und ihre zweiten Endpunkte liegen auf einem Kreise, welcher der ersten Schaar angehört, d. h. die erste Kreisschaar kann aus der zweiten ganz ebenso abgeleitet werden, wie die zweite aus der ersten abgeleitet worden ist.

Zwei Kreisschaaren, welche in der eben auseinandergesetzten Beziehung zu einander stehen, heissen conjugirte Kreisschaaren. Die Potenzlinie der einen Schaar ist der Ort der Mittelpunkte oder die Axe der andern Schaar und umgekehrt. Während die Kreise der ersten Schaar zu je zweien sich in denselben zwei Punkten, den Grundpunkten der Schaar, schneiden, so werden sich zwei Kreise der zweiten Schaar nie treffen. Wäre nämlich ein Schnittpunkt irgend zweier dieser Kreise vorhanden, so müsste derselbe allen Kreisen der Schaar angehören; man kann aber zwei Kreise der Schaar angeben, welche sich nicht schneiden, also können überhaupt niemals zwei Kreise dieser zweiten Kreisschaar sich treffen. Die genannten Kreise haben den Radius Null und sind die Grundpunkte s_1 und s_2 der ersten Kreisschaar. Werden diese Grundpunkte als Kreise der zweiten Schaar betrachtet, so nennt man sie die Grenzpunkte der Schaar. In der Kreisschaar der zweiten Art gibt es zwei Kreise, deren Radius Null ist; die Punkte, als welche sie sich darstellen, liegen symmetrisch zur gemeinsamen Potenzlinie der Schaar und sind auf der Geraden enthalten, auf welcher sämmtliche Mittelpunkte sich befinden, also auf der Axe der Schaar. Unter allen Kreisen der zweiten Schaar ist derjenige der grösste, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt; er besteht aus der unendlich entfernten Geraden der Ebene und der Potenzlinie der Schaar. Während bei der Kreisschaar der ersten Art jeder Punkt der Axe zugleich Mittelpunkt eines der Schaar angehörigen Kreises ist, so tritt das bei der Schaar zweiter Art nicht ein, denn die auf der Strecke $s_1 s_2$ gelegenen Punkte ergeben keine Tangenten an die Kreise der Kreisschaar erster Art. Für die Kreisschaar zweiter Art liegen die Mittelpunkte also nur auf den Verlängerungen der Strecke $s_1 s_2$. Zwei conjugirte Kreisschaaren haben die Eigenschaft, dass die Grenzpunkte der einen Schaar zugleich die Grundpunkte der andern Schaar sind; hat eine der beiden Schaaren Grundpunkte, so hat die andere Schaar deren keine, dafür aber Grenzpunkte und umgekehrt. Durch jeden Punkt der Ebene geht ein und nur ein Kreis der einen Schaar und ein und nur ein Kreis der andern Schaar; die beiden Kreise schneiden sich rechtwinklig.

Irgend eine Kreisschaar wird von einer beliebigen Transversalen in einem Punktsystem geschnitten. Für eine Kreisschaar der ersten Art ergibt sich dieser Satz aus den Betrachtungen, die in § 10 an die Fig. 42 geknüpft worden sind. Es ist also hier der Beweis nur für eine Kreisschaar der zweiten Art zu führen.

Zu diesem Zwecke sei eine Kreisschaar mit der Potenzlinie P gegeben, der unter anderen die Kreise M_1 und M_2 angehören. Wird auf einer beliebigen Transversalen G ein Punkt gewählt, so geht durch denselben ein Kreis der Schaar, welcher G noch in einem zweiten Punkte trifft, der mit dem erstangenommenen ein Punktenpaar bildet. Die unendlich vielen Punktenpaare, die in dieser Weise auf G erhalten werden, bilden ein hyperbolisches Punktsystem, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt m von G und P ist. In der That hat man aus der Eigenschaft der Potenzlinie sofort für die Schnittpunkte a_1 und a'_1, a_2 und a'_2 von G mit M_1 und M_2 die Grundrelation des Punktsystems in Bezug auf seinen Mittelpunkt, nämlich $ma_1 . ma'_1 = ma_2 . ma'_2$, wodurch der aufgestellte Satz bewiesen ist. Derselbe erleidet, wie aus dem Beweise hervorgeht, nur dann eine Ausnahme, wenn G mit P oder mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene G_∞ zusammenfällt.

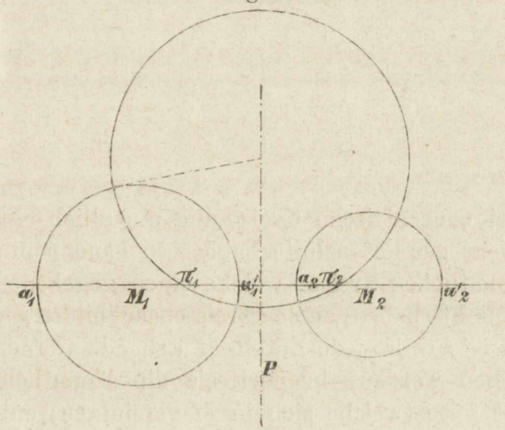
Fig. 55.



In einem hyperbolischen Punktsystem gibt es zwei Doppel- oder Asymptotenpunkte, welche die Eigenschaft haben, dass in jedem von ihnen ein Punktenpaar des Punktsystems vereinigt ist. Die Kreise, welche diese Punktenpaare auf G ausschneiden, berühren G. Wenn also eine Transversale G aus einer Kreisschaar ein hyperbolisches Punktsystem ausschneidet, so gibt es zwei Kreise der Schaar, welche G berühren; ergibt sich aber auf G ein elliptisches Punktsystem, so ist es nicht möglich, Kreise der Schaar zu finden, welche mit G eine Berührung eingehen. Dieser letztere Fall kann nur eintreten, wenn die Kreisschaar Grundpunkte hat, welche auf verschiedenen Seiten von G liegen.

Auf der Axe einer Kreisschaar liegt immer ein Punktsystem, das von den Kreisen der Schaar ausgeschnitten wird und für die erste Art elliptisch, für die zweite Art hyperbolisch ist. Wenn es sich also darum handelt, die Doppelpunkte eines hyperbolischen Punktsystems zu finden, von welchen zwei Punktenpaare a_1 und a'_1, a_2 und a'_2 gegeben sind, so schlage man über den Strecken $a_1 a'_1$ und $a_2 a'_2$ als Durchmesser Kreise M_1 und M_2. Dieselben bestimmen eine Kreisschaar, aus welcher zwei Kreise die Gerade berühren, auf welcher das Punktenpaar liegen soll;

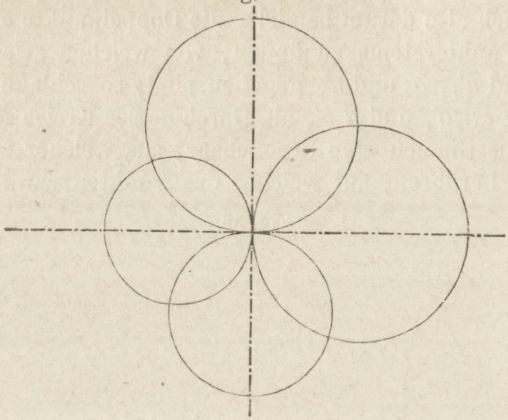
Fig. 56.



da aber diese Gerade die Axe der Schaar ist, so können die genannten Kreise keine anderen sein, als die Grenzpunkte der Schaar. Um die Grenzpunkte zu finden, construire man die Potenzlinie P der Kreise M_1 und M_2; von einem Punkte der Potenzlinie aus lege man eine Tangente an einen der Kreise M_1, M_2, so kann man vermittelst derselben einen Kreis derjenigen Schaar zeichnen, welche zu der gegebenen conjugirt ist; wo derselbe die Gerade der Punkte $a_1 a'_1$ und $a_2 a'_2$ schneidet, sind die gesuchten Grenzpunkte, resp. die Asymptotenpunkte π_1 und π_2 des hyperbolischen Punktsystems.

Als Uebergang von der Kreisschaar der ersten zu der der zweiten Art bietet sich eine Schaar von Kreisen dar, welche sich sämmtlich in einem und demselben Punkte berühren. Sie entsteht, wenn in einer Kreisschaar der ersten Art die beiden Grundpunkte, oder in einer Kreisschaar der zweiten Art die beiden Grenzpunkte sich vereinigen. Einer solchen Kreisschaar ist eine ähnliche conjugirt, wie man sich aus Fig. 57 überzeugt.

Fig. 57.



Da zwei concentrische Kreise die unendlich entfernte Gerade der Ebene zur Potenzlinie haben, so kann man annehmen, dass die sämmtlichen Kreise, welche einen gegebenen Punkt M zum Mittelpunkt haben, eine Kreisschaar bilden, deren Axe unbestimmt ist, d. h. jede durch M gehende Gerade kann als Axe angesehen werden, insofern sie die sämmtlichen Mittelpunkte der Kreise (welche sich in M vereinigen) enthält. Um die conjugirte Schaar zu finden, bemerke man, dass die Mittelpunkte ihrer Kreise im Unendlichen liegen, so dass also diese Kreise, insofern sie überhaupt in das endliche Gebiet der Ebene hineinragen, aus Geraden bestehen. Wenn eine Gerade einen Kreis unter rechten Winkeln schneiden soll, so muss sie durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, woraus durch Umkehrung folgt, dass die sämmtlichen Geraden, die durch M gehen, und von denen jede mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene zusammengenommen wird, als eine Kreisschaar aufgefasst werden können, die conjugirt ist zu der Schaar concentrischer Kreise mit dem Mittelpunkte M.

Die betrachtete Schaar concentrischer Kreise wird, wie jede Kreisschaar, von einer Transversalen G in einem Punktsysteme geschnitten. Dieses Punktsystem ist immer ein gleichseitig hyperbolisches (§ 11), dessen einer Asymptotenpunkt der Fusspunkt des von M auf G gefällten Perpendikels ist, während der andere Asymptotenpunkt im Unendlichen liegt. Das Punktsystem, in welchem die zur concentrischen Kreisschaar conjugirte Schaar geschnitten wird, ist ein parabolisches, dessen vereinigte Asymptotenpunkte sich auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene befinden.

Die verschiedenen Arten von Kreisschaaren lassen sich herstellen, indem man die Gesammtheit der Kugeln zu Hilfe nimmt, welche sich durch einen festen Kreis k legen lassen. Sei dessen Ebene e, so wird eine beliebige Ebene E aus der Kugelschaar eine Schaar von Kreisen ausschneiden, deren gemeinschaftliche Potenzlinie die Durchschnittsgerade P der Ebenen e und E ist. Die Mittelpunkte der Kugeln der Schaar liegen in einer zu e senkrechten Geraden, welche den Mittelpunkt von k enthält; wenn durch diese Gerade eine senkrechte Ebene zu E gelegt wird, so schneidet dieselbe in E eine Gerade aus, welche die Mittelpunkte der Kreisschaar enthält.

Wenn P (oder E) mit k zwei Punkte gemein hat, so erzeugt die Kugelschaar in E eine Kreisschaar der ersten Art; treffen P und k sich nicht, so erhält man eine Kreisschaar der zweiten Art. Ist P eine Tangente an k, so wird diejenige Kreisschaar erzeugt, welche den Uebergang der ersten zur zweiten vermittelt. Ist schliesslich P die unendlich entfernte Gerade der Ebene E (mit anderen Worten: ist E parallel zu e), so erhält man eine Schaar concentrischer Kreise; dies verliert aber seine Giltigkeit, sobald e und E zusammenfallen.

Dreht man zwei Kreise M_1 und M_2 und ihre Potenzlinie P um die Centrallinie $M_1 M_2$ herum, so entstehen aus M_1 und M_2 zwei Kugeln M_1 und M_2 und aus P eine Ebene e, welche die Eigenschaft hat, dass für jeden ihrer Punkte, von dem aus überhaupt Tangenten möglich sind, die Tangenten nach den Kugeln M_1 und M_2 einander gleich sind. Umgekehrt, wenn ein Punkt p die Eigenschaft hat, dass seine Tangenten nach den Kugeln M_1 und M_2 gleich lang sind, so muss er in e liegen, denn wenn man durch p und die Mittelpunkte M_1 und M_2 eine Ebene E legt, so wird p in dieser Ebene E so gelegen sein, dass es der Potenzlinie der beiden durch E aus den Kugeln M_1 und M_2 ausgeschnittenen Kreise angehört. Die in E beschriebene Figur ist aber nur eine andere Lage der Kreise M_1 und M_2 und ihrer Potenzlinie, also liegt p wirklich in der Ebene, welche durch Rotation von P entsteht, und welche man also die Potenzebene der beiden Kugeln nennen kann.

Man hätte zur Potenzebene auch in folgender Weise gelangen können. Zieht man von einem festen Punkte aus, der ausserhalb oder innerhalb einer Kugel liegen mag, Secanten oder Sehnen durch die Kugel, so entstehen auf jeder derselben zwei Abschnitte, deren Product constant ist und die Potenz des Punktes in Bezug auf die Kugel heisst. Liegt der Punkt ausserhalb der Kugel, so heisst die Potenz eine äussere nnd ist gleich dem Quadrate der Tangente, welche von dem Punkte aus an die Kugel gezogen werden kann. Liegt der Punkt innerhalb der Kugel, so ist die Potenz eine innere, und sie ist gleich dem Quadrate vom Radius des kleinsten Kreises der Kugel, welcher durch den gegebenen Punkt möglich ist; dieser kleinste Kreis wird ausgeschnitten durch diejenige Ebene, welche im angenommenen Punkte senkrecht steht auf der Verbindungsgeraden des Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel. Sucht man nun den Ort aller Punkte, welche nach zwei gegebenen Kugeln entweder gleiche innere oder gleiche äussere Potenz erzeugen, so erhält man die Potenzebene der beiden Kugeln.

Wenn zwei Kugeln sich längs eines Kreises schneiden, so ist dessen Ebene zugleich die Potenzebene der beiden Kugeln. Berühren sich zwei Kugeln, so ist die gemeinschaftliche Tangentialebene im Berührungspunkte auch ihre Potenzebene. Wenn sich zwei Kugeln weder schneiden, noch berühren, so lege man durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte irgend eine Ebene und construire für die in ihr enthaltenen Grosskreise der Kugeln die Potenzlinie, so ist diese in der Potenzebene gelegen; die Potenzebene steht zudem auf der erwähnten Verbindungsgeraden senkrecht. Specielle Fälle, in denen eine der Kugeln oder beide entweder den Radius Null oder den Radius Unendlich haben, sollen hier nicht näher erörtert werden; es sei nur erwähnt, dass sich als Potenzebene zweier concentrischer Kugeln die unendlich entfernte Ebene des Raumes ergibt.

Drei Kugeln M_1, M_2 und M_3 erzeugen zu je zweien drei Potenzebenen, die sich in einer und derselben Geraden schneiden. Sei in der That E_{23} die Potenzebene von M_2 und M_3, ferner E_{31} die Potenzebene von M_3 und M_1, so schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden, deren Punkte nach M_1, M_2 und M_3 gleiche Potenzen ergeben und welche also auch auf der Potenzebene E_{12} der Kugeln M_1 und M_2 liegen muss. Hat man also die Potenzebene zweier Kugeln M_1 und M_2 zu finden, welche sich weder schneiden, noch berühren, so wähle man eine dritte Kugel M_3, welche sowohl M_1 als M_2 längs eines Kreises schneidet. Die Ebenen dieser beiden Kreise treffen sich in einer Geraden, welche der gesuchten Potenzebene angehört; legt man also durch die Gerade eine senkrechte Ebene zu der Centrallinie der beiden Kugeln, so hat man die Potenzebene construirt.

Soll für drei sich nicht schneidende Kugeln M_1, M_2, M_3 die Potenzlinie gefunden werden, d. h. diejenige Gerade, in welcher sich die drei Potenzebenen der Kugeln, zu je zweien genommen, schneiden, so lege man die Ebene, in welcher die drei Mittelpunkte der Kugeln sich befinden. In dieser Ebene erhält man aus den Kugeln drei Grosskreise, die einen Punkt gleicher Potenzen zulassen; eine in diesem Punkte senkrecht zur Centralebene errichtete Gerade ist die gesuchte Potenzlinie.

Vier im Raume beliebig gewählte Kugeln geben zu sechs Potenzebenen Veranlassung. Seien die Kugeln mit M_1, M_2, M_3, M_4 bezeichnet, ferner möge E_{12} die Potenzebene von M_1 und M_2 sein, während E_{13}, E_{14}, E_{23}, E_{24}, E_{34} eine analoge Bedeutung haben, so ist zunächst klar, dass diese Potenzebenen in nachfolgender Gruppirung zu dreien durch eine Gerade gehen: 1. E_{23}, E_{34}, E_{42}; 2. E_{34}, E_{41}, E_{13}; 3. E_{24}, E_{41}, E_{12}; 4. E_{23}, E_{31}, E_{12}. Alle sechs Ebenen schneiden sich in einem und demselben Punkte, durch welchen also auch die vier gefundenen Geraden gehen; es ist dies der Punkt, in welchem die Potenzlinie dreier dieser Kugeln die Potenzebene schneidet, welche die vierte mit irgend einer der drei ersten Kugeln bestimmt. Wenn dieser Punkt, der Potenzpunkt der vier Kugeln, nicht innerhalb einer derselben liegt, so ist er der Mittelpunkt einer Kugel, welche die vier gegebenen Kugeln überall unter rechten Winkeln schneidet und ihre Orthogonalkugel genannt wird.

Dreht man eine Kreisschaar um ihre Axe herum, so wird sie zu einer Kugelschaar, indem jeder ihrer Kreise zu einer Kugel sich verwandelt. Die gemeinschaftliche Potenzlinie der Kreisschaar wird zur gemeinschaftlichen Potenzebene, welche mit der unendlichen entfernten Ebene des Raumes zusammengenommen zugleich eine Kugel der Kugelschaar repräsentirt, deren Radius unendlich gross ist. Entsprechend den beiden Arten von Kreisschaaren gibt es auch zwei Arten von Kugelschaaren. Durch Rotation der Kreisschaar erster Art, die zwei Grundpunkte s_1 und s_2 hat, entsteht die Kugelschaar erster Art, die einen Grundkreis k besitzt, welcher durch Rotation der Punkte s_1 und s_2 erzeugt wird. In dieser Kugelschaar ist diejenige Kugel die kleinste, welche über dem Grundkreis der Schaar als Grosskreis errichtet werden kann. In der Kreisschaar der zweiten Art kommen keine Grundpunkte, dafür aber zwei Grenzpunkte vor; demgemäss haben die Kugeln einer Kugelschaar zweiter Art keinen gemeinschaftlichen Grundkreis, dafür aber treten zwei Grenzkugeln ein, von denen jede den Radius Null hat und die auf der Axe symmetrisch zur Potenzebene liegen. Als Uebergang von der Kugelschaar erster Art zu derjenigen zweiter Art kann das System von Kugeln gelten, welche einen Punkt und in diesem die Tangentialebene gemein haben; diese Ebene ist zugleich gemeinschaftliche Potenzebene der Kugelschaar. Eine solche besondere Kugelschaar kann entweder als Kugelschaar erster Art betrachtet werden, deren Grundkreis sich auf einen Punkt reducirt hat, oder als Kugelschaar zweiter Art, deren Grenzpunkte zusammengefallen sind.

Durch zwei im Raume willkürlich gelegte Kugeln ist eine Kugelschaar vollkommen bestimmt. Wenn die beiden Kugeln sich schneiden, so ist die Kugelschaar von der ersten Art; sie ist von der zweiten Art, wenn die beiden Kugeln sich nicht schneiden, und der Grenzfall der Berührung erzeugt die eben erwähnte Uebergangsart. Sind zwei concentrische Kugeln gegeben, so gehören sie einer eigenthümlichen Kugelschaar an, deren sämmtliche Kugeln einen gemeinsamen Mittelpunkt haben; sie enthält eine Kugel, deren Radius Null ist (den Mittelpunkt), und eine andere, deren Radius unendlich gross ist (die doppelt gelegte unendlich entfernte Ebene des Raumes).

Es ist schon bemerkt worden, dass eine Kugelschaar der ersten Art von jeder beliebigen Transversalebene in einer Kreisschaar getroffen wird, von welcher leicht entschieden werden kann, welcher Art sie angehöre. Auch jede andere Kugelschaar wird von irgend einer Transversalebene in einer Kreisschaar geschnitten, deren Centrallinie man construirt, indem man den Durchschnitt der Transversalebene mit derjenigen zu ihr senkrechten Ebene herstellt, welche die Centrallinie der Kugelschaar enthält. Eine Kugelschaar der zweiten Art wird von einer

Ebene stets in einer Kreisschaar der zweiten Art geschnitten, was als speciellen Fall einschliesst, dass concentrische Kugeln von einer Ebene in concentrischen Kreisen geschnitten werden. Dass eine beliebige Kugelschaar von jeder Geraden in einem Punktsystem getroffen wird, bedarf nun keines Beweises mehr.

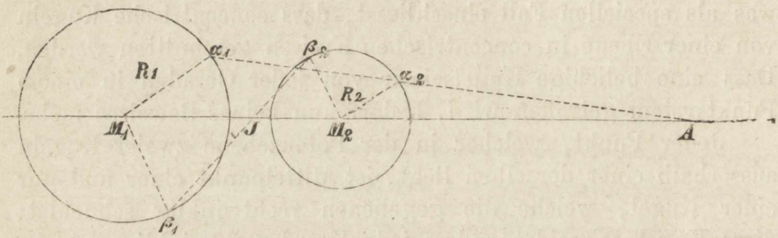
Jeder Punkt, welcher in der Potenzebene zweier Kugeln ausserhalb einer derselben liegt, ist Mittelpunkt einer und nur einer Kugel, welche die gegebenen rechtwinklig schneidet; diese Kugel schneidet zudem jede Kugel rechtwinklig, welche mit den ursprünglichen derselben Schaar angehört. Es ergibt sich hieraus, dass es zu einer Kugelschaar nicht nur eine einzige conjugirte Kugelschaar gibt, sondern dass deren unendlich viele vorhanden sind. In der That, legt man durch die Centrallinie einer Kugelschaar eine Ebene, so erhält man in derselben eine Kreisschaar, zu welcher nach Früherem die conjugirte Kreisschaar gefunden werden kann. Wenn nun über jedem Kreis der beiden Kreisschaaren als Grosskreis eine Kugel geschlagen wird, so erhält man zwei Kugelschaaren, von denen die eine die ursprünglich gegebene ist, die andere aber die Eigenschaft hat, dass jede ihrer Kugeln jede gegebene rechtwinklig schneidet. Es gibt also jede durch die Centrallinie einer Kugelschaar gelegte Ebene einer zu dieser Kugelschaar conjugirten Schaar von Kugeln den Ursprung. Alle einer Kugelschaar conjugirten Schaaren stehen in einem eigenthümlichen Zusammenhang. Man kann nämlich aus diesen Schaaren jeweilen die gleichgrossen Kugeln aussondern; sie haben die Eigenschaft, in ihrer Aufeinanderfolge eine Fläche zu erzeugen, welche auch erhalten wird, wenn man einen Kreis um eine in seiner Ebene gelegene Gerade dreht. Eine solche Fläche heisst Ringfläche; ihre Eigenschaften können in diesem Buche nicht näher erörtert werden, nur mag hier darauf aufmerksam gemacht sein, dass sie verschiedene Formen annimmt je nach der gegenseitigen Lage des Kreises und der geraden Linie.

§ 16.

Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise und zweier Kugeln.

Sind in einer Ebene zwei beliebige Kreise gegeben und man zieht in denselben parallele und gleichgerichtete Radien

Fig. 58.



$M_1\alpha_1$ und $M_2\alpha_2$, so wird die Gerade $\alpha_1\alpha_2$ die Centrale M_1M_2 in einem Punkte A schneiden, welcher sich nicht verändert, wenn $M_1\alpha_1$ und $M_2\alpha_2$ sich gleichzeitig so ändern, dass sie stets parallel und gleichgerichtet sind. Zufolge der Aehnlichkeit der Dreiecke $M_1\alpha_1A$ und $M_2\alpha_2A$ ist $R_1 : R_2 = M_1A : M_2A$, wo R_1 und R_2 die beiden Radien der Kreise sind. Es theilt also A die Strecke M_1M_2 in einem bestimmten, von der Richtung der Radien unabhängigen Verhältnisse und ist dadurch unzweideutig bestimmt, weil, wie der unmittelbare Anblick der Figur lehrt, A immer ausserhalb der genannten Strecke liegen muss.

Wenn jetzt zwei andere Radien $M_1\beta_1$ und $M_2\beta_2$ gezogen werden, die auch parallel laufen, aber ungleich gerichtet sind, so wird die Gerade $\beta_1\beta_2$ die Centrale M_1M_2 in einem Punkte J schneiden, der ebenfalls von der zufälligen Richtung des Radius $M_1\beta_1$ oder $M_2\beta_2$ unabhängig ist. Es sind nämlich die Dreiecke $M_1\beta_1J$ und $M_2\beta_2J$ ähnlich, also ist $R_1 : R_2 = \beta_1J : \beta_2J$. Der Punkt J theilt die Strecke M_1M_2, auf der er selbst liegt, in einem Verhältniss, das nur von den Radien der Kreise abhängt. und ist dadurch vollkommen bestimmt. Da dieses Verhältniss übereinstimmt mit demjenigen, in welchem M_1M_2 durch den ausserhalb liegenden Punkt A getheilt wird, so folgt, dass die vier Punkte M_1JM_2A harmonisch sind, und zwar sind M_1 und M_2, J und A zugeordnet. Die Punkte J und A heissen die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise, und zwar A der äussere, J der innere Aehnlichkeitspunkt.

Für zwei Kreise, die einander ausschliessen, sind die Aehnlichkeitspunkte zugleich die Schnittpunkte resp. der äusseren und der inneren gemeinschaftlichen Tangenten, oder auch: die vier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise bilden ein vollständiges Vierseit, von dessen sechs Ecken zwei auf der Centralen gelegen sind; die auf der Strecke $M_1 M_2$ selbst enthaltene Ecke ist der innere Aehnlichkeitspunkt, die auf der Verlängerung von $M_1 M_2$ gelegene Ecke ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise. Rückt der Kreis M_2 an den Kreis M_1 heran, bis er ihn von aussen berührt, so wird der Berührungspunkt zugleich zum innern Aehnlichkeitspunkt. Schneiden sich die Kreise M_1 und M_2, so ist zwar der äussere Aehnlichkeitspunkt immer noch der Durchschnitt des äusseren gemeinschaftlichen Tangentenpaares der Kreise, der innere Aehnlichkeitspunkt aber liegt zugleich innerhalb M_1 und M_2. Wenn nämlich einer der beiden Aehnlichkeitspunkte innerhalb eines der beiden Kreise liegt, so kann man von ihm aus keine Tangente an diesen Kreis ziehen, also auch nicht an den andern, d. h. er liegt auch innerhalb des zweiten Kreises. Für zwei Kreise, die sich berühren und von denen der eine den andern einschliesst, ist der Berührungspunkt zugleich äusserer Aehnlichkeitspunkt; wenn ferner ein Kreis ganz innerhalb des andern liegt, so liegen die beiden Aehnlichkeitspunkte innerhalb des kleineren Kreises. Sind schliesslich zwei Kreise concentrisch, so fallen die beiden Aehnlichkeitspunkte mit dem gemeinsamen Mittelpunkte zusammen, da ja die Entfernung der beiden Mittelpunkte immer noch durch die Aehnlichkeitspunkte im äusseren und inneren Verhältniss der beiden Radien getheilt werden muss.

Sind zwei Kreise gleich gross, so ist ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt der unendlich entfernte Punkt ihrer Centralen, der innere Aehnlichkeitspunkt liegt in der Mitte zwischen den beiden Mittelpunkten. Wenn von zwei Kreisen einer sich auf seinen Mittelpunkt reducirt, so fallen die Aehnlichkeitspunkte mit diesem Punkte zusammen.

Man kann die meisten der eben abgeleiteten Resultate ohne Weiteres auf zwei Kugeln im Raume übertragen. Zieht man in zwei beliebig gelegenen Kugeln parallele Radien $M_1 \alpha_1$ und $M_2 \alpha_2$, die gleichgerichtet sind, so wird die Verbindungsgerade $\alpha_1 \alpha_2$ der zweiten Endpunkte auf der Centralen $M_1 M_2$ einen Punkt A ausschneiden, welcher für alle Lagen der parallelen und gleichgerichteten Radien derselbe bleibt; er heisst der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kugeln. Durch parallele und entgegengesetzt gerichtete Radien wird auch ein innerer Aehnlichkeitspunkt der beiden Kugeln erzeugt. Die Aehnlichkeitspunkte bilden mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 eine Gruppe von vier harmonischen Punkten, und zwar sind die Aehnlichkeitspunkte sich so zugeordnet, dass der innere auf $M_1 M_2$ selbst, der äussere aber auf der Verlängerung dieser Strecke liegt.

Wenn von zwei Kugeln jede die andere ausschliesst, so gibt es unendlich viele Ebenen, welche beide gleichzeitig berühren und für welche die Kugeln auf der nämlichen Seite liegen. Alle diese Ebenen bilden einen Rotationskegel, dessen Spitze der äussere Aehnlichkeitspunkt A der beiden Kugeln ist. Denkt man sich die sämmtlichen Tangentialebenen dieses Kegels (welche die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der beiden Kugeln sind) unbegrenzt verlängert, so wird der Kegel aus zwei symmetrischen Hälften bestehen, die in der Spitze A (oder im Mittelpunkte A) zusammenhängen.

Die beiden Kugeln liegen in derselben Hälfte dieses unbegrenzten Kegels. Es gibt aber auch unendlich viele gemeinschaftliche Tangentialebenen der Kugeln, für welche die beiden Kugeln auf entgegengesetzten Seiten liegen; sie schneiden sich im inneren Aehnlichkeitspunkte J und bilden ebenfalls einen Rotationskegel, aber so, dass die Kugeln in verschiedenen seiner im Mittelpunkte J zusammenstossenden Hälften liegen. Man erkennt in jedem Falle die Lage der Aehnlichkeitspunkte zweier Kugeln, wenn man dieselben durch eine Ebene schneidet, welche die Verbindungsgerade der Kugelcentra enthält. Die entstehenden Grosskreise ergeben dieselben Aehnlichkeitspunkte wie die Kugeln.

§ 17.

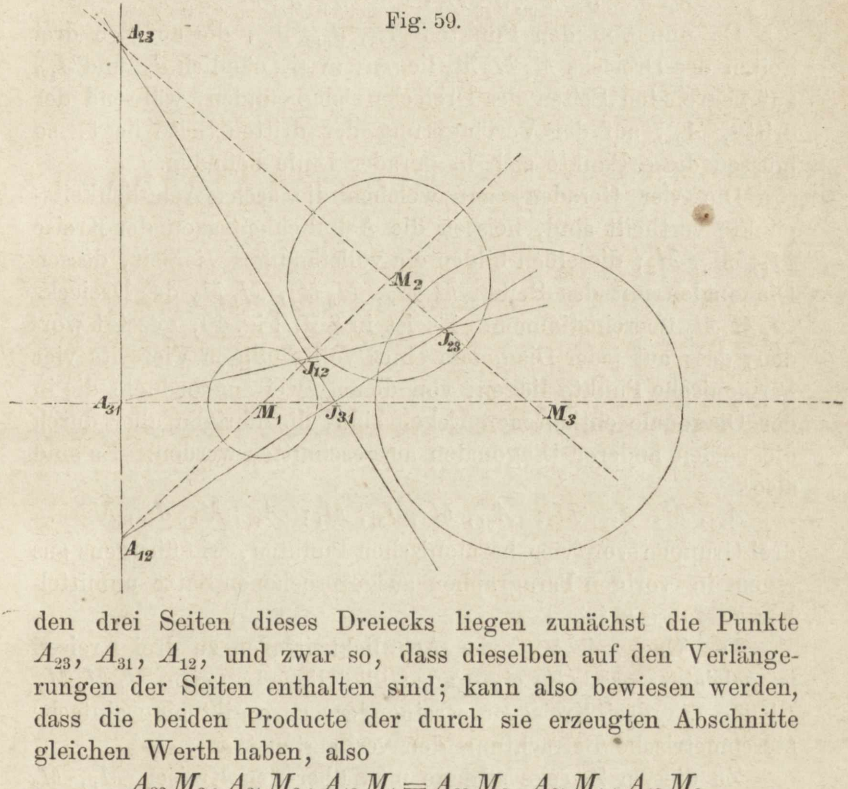
Aehnlichkeitspunkte, Aehnlichkeitsaxen und Aehnlichkeitsebenen.

Wenn in einer Ebene drei Kreise M_1, M_2, M_3, deren Radien resp. R_1, R_2, R_3 sein mögen, in ganz willkürlicher Lage gegeben sind, so bestimmen je zwei von ihnen einen äussern und einen innern Aehnlichkeitspunkt. Die Aehnlichkeitspunkte zu M_2 und M_3 seien A_{23} und J_{23}, zu M_3 und $M_1 : A_{31}$ und J_{31}, zu M_1 und $M_2 : A_{12}$ und J_{12}; es liegen dann von den sechs Punkten A und J viermal drei in einer Geraden, und zwar 1. die drei äusseren: A_{23}, A_{31}, A_{12}, und 2. jeder äussere mit den beiden ihm nicht zugehörigen inneren, also:

$$A_{23},\ J_{31},\ J_{12};\quad J_{23},\ A_{31},\ J_{12};\quad J_{23},\ J_{31},\ A_{12}.$$

Zum Beweise benutzt man einen Fundamentalsatz der Transversalentheorie (§ 1), indem man das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ der drei Mittelpunkte der gegebenen Kreise zu Grunde legt. Auf

Fig. 59.



den drei Seiten dieses Dreiecks liegen zunächst die Punkte A_{23}, A_{31}, A_{12}, und zwar so, dass dieselben auf den Verlängerungen der Seiten enthalten sind; kann also bewiesen werden, dass die beiden Producte der durch sie erzeugten Abschnitte gleichen Werth haben, also

$$A_{23} M_2 \,.\, A_{31} M_3 \,.\, A_{12} M_1 = A_{23} M_3 \,.\, A_{31} M_1 \,.\, A_{12} M_2$$

ist, so ist der erste Theil des aufgestellten Satzes bewiesen. Nun hat man aus dem vorigen Paragraphen

$$A_{23} M_2 : A_{23} M_3 = R_2 : R_3 \quad \text{oder} \quad R_3 \,.\, A_{23} M_2 = R_2 \,.\, A_{23} M_3,$$

und in derselben Weise

$$R_1 \,.\, A_{31} M_3 = R_3 \,.\, A_{31} M_1, \quad R_2 \,.\, A_{12} M_1 = R_1 \,.\, A_{12} M_2,$$

woraus durch Multiplication wirklich folgt:

$$A_{23} M_2 \,.\, A_{31} M_3 \,.\, A_{12} M_1 = A_{23} M_3 \,.\, A_{31} M_1 \,.\, A_{12} M_2.$$

Der zweite Theil des Satzes wird durchaus analog bewiesen; z. B. für die Punkte A_{23}, J_{31}, J_{12} hat man wiederum nach dem vorigen Paragraphen:

$$R_3 \,.\, A_{23} M_2 = R_2 \,.\, A_{23} M_3,$$
$$R_1 \,.\, J_{31} M_3 = R_3 \,.\, J_{31} M_1,$$
$$R_2 \,.\, J_{12} M_1 = R_1 \,.\, J_{12} M_2,$$

woraus durch Multiplication folgt:

$$A_{23} M_2 \,.\, J_{31} M_3 \,.\, J_{12} M_1 = A_{23} M_3 \,.\, J_{31} M_1 \,.\, J_{12} M_2.$$

Da nun von den Punkten A_{23}, J_{31}, J_{12}, die auf den drei Seiten des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ liegen, zwei, nämlich J_{31} und J_{12}, auf begrenzten Seiten des Dreiecks sich befinden, während der dritte, A_{23}, auf der Verlängerung der dritten Seite liegt, so müssen diese Punkte sich in gerader Linie befinden.

Die vier Geraden, auf welchen die sechs Aehnlichkeitspunkte vertheilt sind, heissen die Aehnlichkeitsaxen der Kreise M_1, M_2, M_3; dieselben bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen mit den Seiten $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, $M_1 M_2$ des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ übereinstimmen. Es ist in § 9, Fig. 40, gezeigt worden, dass auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits vier harmonische Punkte liegen, von denen zwei zugeordnete die in der Diagonale enthaltenen Ecken sind, die übrigen aber durch die beiden anderen Diagonalen ausgeschnitten werden. Es sind also

$$A_{23}, M_2, J_{23}, M_3; \quad A_{31}, M_3, J_{31}, M_1; \quad A_{12}, M_1, J_{12}, M_2$$

drei Gruppen von vier harmonischen Punkten, wie übrigens aus einem im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Satze unmittelbar zu folgern ist.

Der Nachweis von vier Aehnlichkeitsaxen zu drei Kreisen ist geleistet worden für eine ganz willkürliche Lage von $M_1 M_2 M_3$. Liegen die drei Kreise aussereinander, so ergibt eine einfache stereometrische Betrachtung den verlangten Satz.

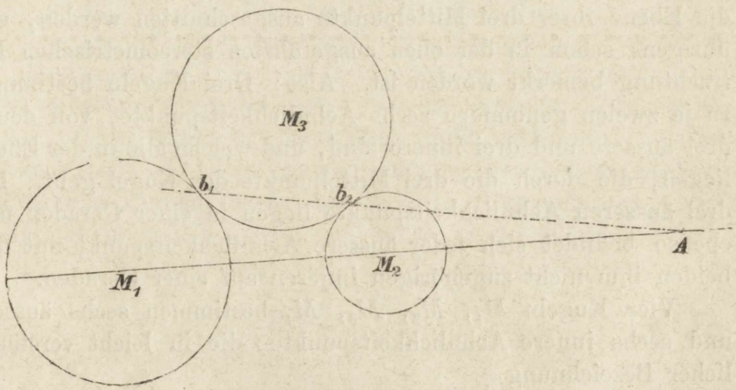
Zu diesem Zwecke schlage man über den Kreisen M_1, M_2 und M_3 als Grosskreisen drei Kugeln; es gibt dann zwei Ebenen, von denen jede die drei Kugeln gleichzeitig berührt, und zwar so, dass für eine dieser Ebenen alle Kugeln auf derselben Seite liegen. Diese beiden Ebenen liegen symmetrisch zu der Ebene der Kreise M_1, M_2, M_3 und schneiden sich in einer Geraden, die ihrer ganzen Ausdehnung nach dieser Ebene angehört.

Seien T und T' diese Ebenen; weil T die über M_1, M_2 und M_3 beschriebenen Kugeln berührt, so ist sie auf jeden Fall eine der gemeinschaftlichen Tangentialebenen von M_2 und M_3, und zwar eine derjenigen, für welche M_2 und M_3 auf derselben

Seite liegen, d. h. T ist eine Tangentialebene desjenigen Rotationskegels, welcher M_2 und M_3 gleichzeitig umschrieben ist und der zum Mittelpunkte den äusseren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kugeln hat. Jede Tangentialebene eines Kegels geht durch seinen Mittelpunkt, also enthält T den genannten äusseren Aehnlichkeitspunkt und dasselbe gilt von T'. Demnach liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kugeln über M_2 und M_3 in der Schnittgeraden von T und T'. Dasselbe wird von den äusseren Aehnlichkeitspunkten der über M_3 und M_1 oder M_1 und M_2 beschriebenen Kugeln bewiesen, die demnach mit dem erstgefundenen in gerader Linie liegen. Die äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kugeln sind zugleich die äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kreise, über denen sie errichtet wurden, so dass also für aussereinanderliegende Kreise gezeigt ist, dass die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier von ihnen auf einer Geraden vertheilt sind. Der Beweis desselben Satzes für einen äuseren und die beiden ihm nicht zugehörigen inneren Aehnlichkeitspunkte wird durch entsprechende Abänderung des eben geführten Beweises geleistet.

Wenn ein Kreis M_3 zwei andere Kreise M_1 und M_2 in den Punkten b_1 und b_2 so berührt, dass er entweder beide einschliesst oder beide ausschliesst, so geht die Berührungssehne $b_1 b_2$ durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2. Im ersten Falle nämlich ist b_1 der äussere Aehnlichkeitspunkt von M_1 und M_3, ferner b_2 der äussere Aehnlichkeitspunkt

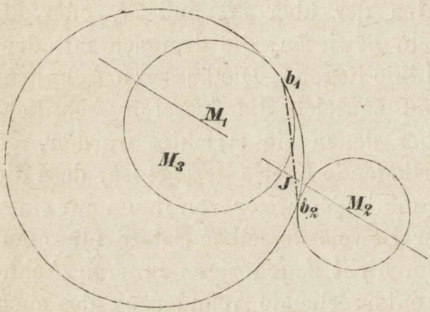
Fig. 60.



von M_2 und M_3, also liegen dieselben wirklich mit dem äusseren Aehnlichkeitspunkte A der Kreise M_1 und M_2 in einer Geraden. Im zweiten Falle ist b_1 der innere Aehnlichkeitspunkt von M_1 und M_3, b_2 der innere Aehnlichkeitspunkt von M_2 und M_3, so dass auch hier b_1, b_2, A derselben Geraden angehören.

Berührt M_3 die Kreise M_1 und M_2 in b_1 und b_2 so, dass er M_1 einschliesst und M_2 ausschliesst, so ist b_1 der äussere Aehnlichkeitspunkt von M_1 und M_3, b_2 der innere Aehnlichkeitspunkt von M_2 und M_3, also geht die Verbindungsgerade $b_1 b_2$ nach dem Satze von den Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise durch den inneren Aehnlichkeitspunkt J der Kreise M_1 und M_2. — Alles zusammengefasst ergibt: Werden zwei feste Kreise von einem dritten Kreise gleichartig berührt, so geht die Berührungssehne durch ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt, und werden sie ungleichartig berührt, so geht die Berührungssehne durch ihren inneren Aehnlichkeitspunkt.

Fig. 61.



Da die Aehnlichkeitspunkte zweier Kugeln zusammenfallen mit den Aehnlichkeitspunkten zweier ihrer Grosskreise, die in derselben Ebene liegen, so ist klar, dass auch die Aehnlichkeitspunkte dreier Kugeln zusammenfallen mit den Aehnlichkeitspunkten derjenigen Kreise, welche aus den Kugeln durch die Ebene ihrer drei Mittelpunkte ausgeschnitten werden, was übrigens schon in der oben ausgeführten stereometrischen Betrachtung bemerkt worden ist. Also: Drei Kugeln bestimmen zu je zweien genommen sechs Aehnlichkeitspunkte, von denen drei äussere und drei innere sind, und welche alle in der Ebene liegen, die durch die drei Mittelpunkte der Kugel geht. Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte liegen in einer Geraden und ebenso befindet sich jeder äussere Aehnlichkeitspunkt mit den beiden ihm nicht zugehörigen inneren auf einer Geraden.

Vier Kugeln M_1, M_2, M_3, M_4 bestimmen sechs äussere und sechs innere Aehnlichkeitspunkte, die in leicht verständlicher Bezeichnung

$A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}; \; J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}$ heissen sollen. Von diesen zwölf Punkten liegen sechzehnmal drei in einer Geraden, nämlich:

$A_{23}, A_{31}, A_{12}; \quad A_{24}, A_{41}, A_{12}; \quad A_{34}, A_{41}, A_{13}; \quad A_{34}, A_{42}, A_{23};$
$A_{23}, J_{31}, J_{12}; \quad A_{24}, J_{41}, J_{12}; \quad A_{34}, J_{41}, J_{13}; \quad A_{34}, J_{42}, J_{23};$
$J_{23}, A_{31}, J_{12}; \quad J_{24}, A_{41}, J_{12}; \quad J_{34}, A_{41}, J_{13}; \quad J_{34}, A_{42}, J_{23};$
$J_{23}, J_{31}, A_{12}; \quad J_{24}, J_{41}, A_{12}; \quad J_{34}, J_{41}, A_{13}; \quad J_{34}, J_{42}, A_{23}.$

Es liegen ferner in jeder Seitenfläche des durch die Mittelpunkte der Kugeln bestimmten Tetraeders sechs Aehnlichkeitspunkte, was folgende Gruppirungen zu sechs ergibt:

1. $A_{23}, A_{31}, A_{12}; \quad J_{23}, J_{31}, J_{12};$
2. $A_{24}, A_{41}, A_{12}; \quad J_{24}, J_{41}, J_{12};$
3. $A_{34}, A_{41}, A_{13}; \quad J_{34}, J_{41}, J_{13};$
4. $A_{34}, A_{42}, A_{23}; \quad J_{34}, J_{42}, J_{23}.$

Die vier in obiger Gruppirung der sechszehn Geraden aus der ersten Horizontalreihe sich ergebenden vier Geraden schneiden sich zu je zweien in sechs Punkten, d. h. die sechs äusseren Aehnlichkeitspunkte der vier Kugeln liegen in derselben Ebene. Auf der Geraden $J_{12}J_{13}$ liegt A_{23}, auf $J_{12}J_{14}$ liegt A_{24} und auf $J_{13}J_{14}$ liegt A_{34}; man erhält somit sechs andere Aehnlichkeitspunkte in einer neuen Ebene und überzeugt sich, dass also folgende Gruppirungen von sechs Aehnlichkeitspunkten je in einer Ebene enthalten sind:

1. $A_{12}, A_{13}, A_{14}; \quad A_{23}, A_{24}, A_{34};$
2. $J_{12}, J_{13}, J_{14}; \quad A_{34}, A_{42}, A_{23};$
3. $J_{12}, J_{23}, J_{24}; \quad A_{34}, A_{41}, A_{13};$
4. $J_{13}, J_{23}, J_{34}; \quad A_{24}, A_{41}, A_{12};$
5. $J_{14}, J_{24}, J_{34}; \quad A_{23}, A_{31}, A_{12}.$

Einem in § 13 für das Tetraeder bewiesenen Satze kann noch entnommen werden, dass sich die Geraden $J_{12}J_{34}$, $J_{13}J_{24}$ und $J_{23}J_{14}$ in einem und demselben Punkte schneiden. Daraus ergeben sich, wie leicht auch auf anderem Wege hätte geschlossen werden können, nachstehende weitere Gruppen von je sechs Aehnlichkeitspunken, die derselben Ebene angehören:

6. $J_{12}, J_{13}, J_{24}, J_{34}; \quad A_{14}, A_{23};$
7. $J_{12}, J_{14}, J_{23}, J_{34}; \quad A_{13}, A_{24};$
8. $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}; \quad A_{12}, A_{34}.$

Sechstes Kapitel.

Harmonische Eigenschaften des Kreises und der Kugel.

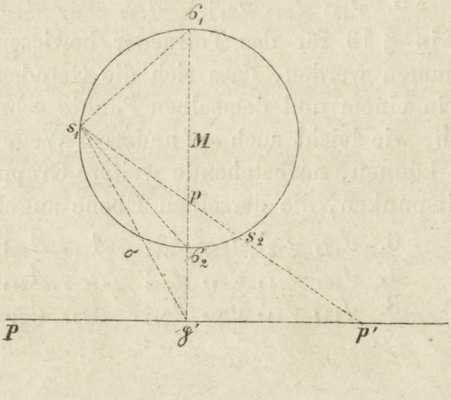
§ 18.

Pol und Polare in Bezug auf den Kreis.

Legt man durch einen Kreis M eine Transversale G, welche denselben in den Punkten s_1 und s_2 treffen möge und bestimmt ein Punktenpaar pp', welches zu dem Punktenpaar $s_1 s_2$ harmonisch ist, so nennt man p und p' zugeordnete harmonische Pole in Bezug auf den Kreis M; wenn also p' ein p zugeordneter harmonischer Pol ist, so ist auch p ein zugeordneter harmonischer Pol zu p'. Zu einem Punkte p gibt es unendlich viele zugeordnete harmonische Pole: liegt nämlich p innerhalb des Kreises, so ist ein solcher auf jeder durch p gehenden Transversalen enthalten; ist p ausserhalb des Kreises gelegen, so enthält jede Gerade, die durch p geht und den Kreis schneidet, einen p zugeordneten harmonischen Pol.

Es soll bewiesen werden, dass die zugeordneten harmonischen Pole eines Punktes p immer auf einer gewissen Geraden vertheilt sind; ist dieser Satz richtig, so wird aus Symmetriegründen die betreffende Gerade senkrecht stehen müssen

Fig. 62.



zu der Geraden, welche p mit dem Mittelpunkte M des vorgelegten Kreises verbindet. Sei nun $\mathfrak{p}'$ auf der Geraden $\mathfrak{s}_1 M p \mathfrak{s}_2$ der p zugeordnete harmonische Pol, ferner sei auf einer beliebig durch p gelegten Geraden $s_1 s_2$ der p zugeordnete harmonische Pol p' construirt, so werden $\mathfrak{s}_1 p \mathfrak{s}_2 \mathfrak{p}'$ und $s_1 p s_2 p'$ zwei Gruppen von vier harmonischen Punkten sein. Es sind demzufolge die Strahlen, die von s_1 aus nach $\mathfrak{s}_1 p \mathfrak{s}_2 \mathfrak{p}'$ gehen, vier harmonische Strahlen, und zwar $s_1 \mathfrak{s}_1$ und $s_2 \mathfrak{s}_2$, $s_1 p$ und $s_1 p'$ zugeordnete Strahlen. Die beiden ersten Strahlen stehen senkrecht zueinander, demnach halbiren sie die Winkel der beiden letzteren, also wird $\sphericalangle\, \mathfrak{s}_2 s_1 \sigma = s_2 s_1 \sigma$ sein, wenn man mit σ den zweiten Schnittpunkt von $s_1 \mathfrak{p}'$ mit dem Kreise bezeichnet. Weil Peripheriewinkel eines Kreises, die gleich gross sind, über gleich grossen Bogen stehen, so sind die Bogen $\mathfrak{s}_2 \sigma$ und $\mathfrak{s}_2 s_2$ einander gleich, also ist auch aus Symmetriegründen $\sphericalangle\, \sigma \mathfrak{p}' \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_2 \mathfrak{p}' s_2$. — Verbindet man den Punkt $\mathfrak{p}'$ mit den vier harmonischen Punkten $s_1 p s_2 p'$, so erhält man vier harmonische Strahlen, von denen $\mathfrak{p}' s_1$ und $\mathfrak{p}' s_2$, $\mathfrak{p}' p$ und $\mathfrak{p}' p'$ zugeordnete sind. Der Winkel, den die beiden ersten Strahlen einschliessen, wird von dem Strahle $\mathfrak{p}' \mathfrak{s}_2$ oder $\mathfrak{p}' p$ halbirt, demzufolge steht dieser auf seinem zugehörigen senkrecht, d. h. construirt man zu p irgend einen conjugirten harmonischen Pol p' in Bezug auf M, so liegt derselbe in derjenigen Geraden, welche in $\mathfrak{p}'$ senkrecht zu $M\mathfrak{p}'$ errichtet werden kann.

Es ist zwar in Fig. 62 vorausgesetzt, dass p innerhalb des Kreises M gelegen sei, aber es ist leicht einzusehen, dass die eben angewendeten Schlüsse ihre volle Giltigkeit behalten, auch wenn p ausserhalb des Kreises angenommen wird; wenn endlich p auf dem Kreise selbst liegt, so liegen die ihm zugeordneten harmonischen Pole auf der durch ihn gehenden Tangente des Kreises. Diese letztere Bemerkung stützt sich auf den Satz, dass irgend ein Punkt p in der Ebene des Kreises M, der ausserhalb M liegt, zugeordneter harmonischer Pol des Berührungspunktes einer durch p gehenden Tangente des Kreises ist.

Alles zusammengefasst ergibt sich der Satz: 'die einem Punkte p in Bezug auf einen Kreis M zugeordneten harmonischen Pole liegen in einer Geraden P, welche die Polare des Punktes p genannt wird. Man erhält sie, indem man p

mit dem Mittelpunkte von M durch eine Gerade verbindet, welche den Kreis in den Punkten $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ schneiden möge und nun zu $p\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2$ den vierten harmonischen p zugeordneten Punkt $\mathfrak{p}'$ construirt; eine Senkrechte auf g in $\mathfrak{p}'$ ergibt dann die gesuchte Polare. Liegt p innerhalb des Kreises, so schneidet P den Kreis nicht, ist p ein Punkt des Kreises, so wird P zu der ihm zugehörigen Tangente, und wenn p ausserhalb M liegt, so ist P die Verbindungsgerade der Berührungspunkte (die Berührungssehne) der beiden von p aus an M möglichen Tangenten. In den beiden ersten Fällen sind alle Punkte von P zugeordnete harmonische Pole von p; im letzten Falle aber nur diejenigen, welche zwischen den Berührungspunkten, also auf der eigentlichen Berührungssehne liegen.

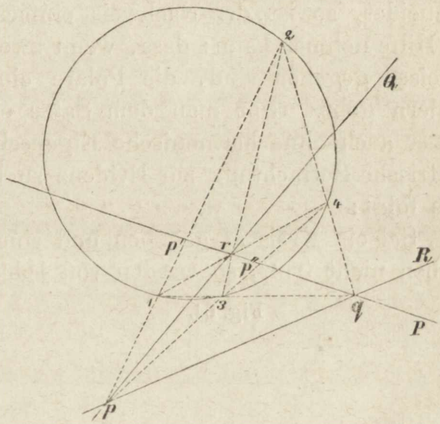
Zu jeder Geraden P in der Ebene eines Kreises M gibt es stets einen und nur einen Punkt p, dessen Polare nach M die Gerade P ist; dieser Punkt heisst der Pol der Geraden P. Er wird gefunden, indem man von dem Mittelpunkte M des Kreises aus ein Perpendikel auf P fällt, dessen Fusspunkt $\mathfrak{p}'$ sein möge, ferner die Schnittpunkte $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ desselben mit dem Kreise bestimmt, und schliesslich zu $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2$ den vierten harmonischen $\mathfrak{p}'$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{p}$ construirt, so ist dieser der gesuchte Pol.

Wenn die Polare den Kreis nicht trifft, so liegt der Pol innerhalb des Kreises; schneidet P den Kreis, so liegt der Pol ausserhalb und ist zugleich der Schnittpunkt der beiden Tangenten in den Punkten, welche P und M gemein haben; wenn endlich P eine Tangente von M ist, so ist der Berührungspunkt zugleich ihr Pol.

Rückt eine Gerade P, indem sie stets sich selbst parallel bleibt, immer weiter vom Centrum M des Kreises weg, so nähert sich ihr Pol immer mehr und mehr dem Punkte M, mit welchem sie zusammenfällt, sobald die Gerade P ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen liegt. Das Nämliche tritt ein, in welcher Richtung P auch angenommen sein mochte, d. h. irgend eine Gerade, die ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen liegt, hat zu ihrem Pole in Bezug auf einen gegebenen Kreis immer dessen Mittelpunkt. Wenn man nun den Satz: dass zu jedem Punkte im Allgemeinen nur eine einzige Polare gehöre, nicht mit einer Ausnahme für den Mittelpunkt des Grundkreises behaften will, so muss man sagen: In Bezug auf die harmonischen Eigenschaften des Kreises verhalten sich alle Geraden, die in der Unendlichkeit der Ebene liegen, so, als ob sie in einer einzigen, der unendlich entfernten Geraden der Ebene vereinigt wären. Dieses Resultat stimmt vollkommen mit früheren Anschauungen überein.

Sobald ein Kreis gezeichnet vorliegt, so kann man die Polare irgend eines Punktes p in seiner Ebene mittelst des Lineals allein verzeichnen. Zu diesem Zwecke ziehe man durch p zwei beliebige Transversalen, welche den Kreis resp. in 1 und 2, 3 und 4 treffen sollen und ergänze das vollständige Viereck durch Construction der Seiten 13, 14, 23, 24. Man erhält dann neben p noch zwei Diagonalpunkte q und r des vollständigen Vierecks 1 2 3 4, deren Verbindungsgerade P die gesuchte Polare ist.

Fig. 63.



Der Beweis wird geleistet, indem man 13, 24, 23, 14 als die Seiten eines vollständigen Vierseits ansieht, dessen Diagonalen dann durch 12, 34 und rq gegeben sind. Sind nun p' und p'' die Durchschnitte von qr resp. mit 12 und 34, so müssen nach der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierseits $p\,1\,p'\,2$ und $p\,3\,p''\,4$ harmonische Punkte sein, womit gezeigt ist, dass $p'p''$ oder rq die Polare des Punktes p ist. In ganz analoger Beweisführung ergibt sich zudem noch, dass pr oder Q die Polare von q und pq oder R die Polare von r ist.

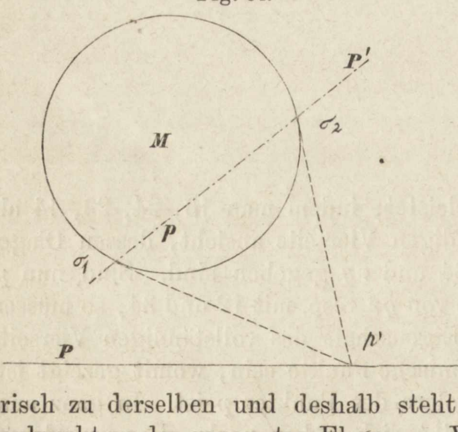
Die Construction von P enthält noch eine Willkürlichkeit, insofern die Geraden 12 und 34 ganz beliebig durch p gelegt werden können. Da aber immer, wie dies auch geschehen mag, dieselbe Gerade P zum Vorschein kommt, so ist klar, dass q

und r sich nur auf dieser Geraden bewegen können; umgekehrt darf einer der Punkte, z. B. q auf dieser Geraden beliebig gewählt werden. Da nun pr oder Q die Polare von q ist, so folgt, dass die Polare eines Punktes von P stets durch p geht, oder allgemeiner ausgesprochen: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden P, so dreht sich seine Polare nach einem Kreise M um einen festen Punkt p, dem Pole von P.

Der allgemein giltige Beweis dieses Satzes ist hier vermittelst des vollständigen Vierecks, dessen Ecken auf dem Kreise liegen, geleistet worden. Wenn P den Kreis nicht schneidet, so ist der Nachweis einfacher, weil man den Satz zu Hilfe nehmen kann: dass, wenn zwei harmonische Pole eines Kreises gegeben sind, die Polare eines derselben durch den andern geht. Gibt man dem Satze eine andere Fassung, so ist er auch ohne harmonische Eigenschaften durch eine stereometrische Betrachtung zur Evidenz zu bringen. Dies geschieht wie folgt:

Sei ein Kreis M gegeben und eine Gerade P, welche denselben nicht trifft, so werden von jedem Punkte p' auf P zwei Tangenten an M gehen, welche eine Berührungssehne P' bestimmen. Schlägt man über M als Grosskreis eine Kugel K, so lassen sich durch P zwei Tangentialebenen an K legen, welche symmetrisch zu der Ebene von M sind. Auch die beiden Berührungspunkte s_1 und s_2 der Tangentialebenen sind symmetrisch zu derselben und deshalb steht ihre Verbindungsgerade senkrecht zu der genannten Ebene. — Von irgend einem Punkte p' auf P lege man jetzt die sämmtlichen Tangentialebenen an K, so bilden dieselben einen Rotationskegel, welcher die Kugel längs eines Kreises k berührt, der die Punkte s_1 und s_2 enthält, und dem auch die Berührungspunkte σ_1 und σ_2 der von p' aus an M möglichen Tangenten angehören. Die Punkte σ_1,

Fig. 64.



σ_2, s_1 und s_2 liegen auf dem Kreise k, also in einer Ebene; diese Ebene enthält die Gerade $s_1 s_2$, also auch den Punkt p, in welchem die Gerade die Ebene des Kreises M schneidet, demzufolge liegen $\sigma_1 p \sigma_2$ gleichzeitig in der Ebene des Kreises k und in der Ebene von M, d. h. die drei Punkte befinden sich in gerader Linie. Umgekehrt: Die Gerade $\sigma_1 \sigma_2$ oder die Berührungssehne P' geht stets durch einen festen Punkt p, wie man auch den Punkt p' auf der Geraden P annehmen mag. Dass dieser Satz in der That mit dem oben bewiesenen zusammenhängt, erhellt aus der Bemerkung, dass die Polare eines Punktes ausserhalb des Kreises zugleich die Berührungssehne der von ihm aus an den Kreis möglichen Tangenten ist.

Der Satz, dass die Polaren sämmtlicher Punkte einer Geraden durch den Pol dieser Geraden laufen, lässt sich umkehren: Dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt, so durchläuft ihr Pol eine Gerade, die Polare des festen Punktes, eine Aussage, welche keines besonderen Beweises mehr bedarf. Als specielle Fälle der beiden Sätze ergeben sich die nachfolgenden: Bewegt sich ein Punkt auf einem Durchmesser des Kreises, so sind die zugehörigen Polaren parallel, d. h. sie schneiden sich in einem unendlich entfernten Punkte. Durchläuft ein Punkt die unendlich entfernte Gerade der Ebene, so dreht sich seine Polare um den Mittelpunkt des Kreises. — Dreht sich eine Gerade um den Mittelpunkt des Kreises herum, so beschreibt ihr Pol die unendlich entfernte Gerade der Ebene. Die Pole eines Systems paralleler Geraden liegen auf einem Durchmesser des Kreises.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass man nach dem Vorhergehenden zu jeder Geraden P in der Ebene eines Kreises den Pol p mittelst des Lineals allein finden kann. Zu diesem Ende construire man nach den angegebenen Regeln zu zwei Punkten von P die Polaren, so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Pole. Diese Construction ist complicirter als die Construction der Polaren zu einem Punkte, welche, nebenbei bemerkt, noch die Tangenten linear ergibt, welche von einem Punkte ausserhalb eines Kreises an den Kreis gezogen werden können.

§ 19.

Tripel; Punkt- und Strahlsysteme im Kreise. Polarisation.

Ein vollständiges Viereck, dessen Ecken auf der Peripherie eines Kreises M liegen, bestimmt ein Diagonaldreieck, dessen Ecken pqr und dessen Seiten PQR die Eigenschaft haben, dass die Polare irgend einer Ecke zugleich die Verbindungsgerade der anderen Ecke oder die gegenüberliegende Seite ist; ebenso ist der Pol einer Seite der Durchschnitt der beiden anderen Seiten oder die gegenüberliegende Ecke. Ein solches Dreieck heisst Tripel des Kreises, und zwar Tripel harmonischer Punkte, wenn die Ecken in Betracht kommen, und Tripel harmonischer Strahlen, wenn es sich um die Seiten handelt.

Von den Ecken eines Tripels harmonischer Punkte liegen stets zwei ausserhalb des Kreises, die dritte innerhalb. Wenn nämlich ein Punkt des Tripels ausserhalb des Kreises angenommen wird, so sind die beiden anderen auf einer Geraden gelegen, welche den Kreis schneidet, und zwar befindet sich einer derselben innerhalb des Kreises, der andere ausserhalb. Liegt aber ein Punkt des Tripels innerhalb des Kreises, so liegen die beiden anderen auf einer Geraden, welche den Kreis nicht trifft, also ausserhalb. Da ein Tripel harmonischer Punkte zugleich ein Tripel harmonischer Strahlen involvirt, so folgt, dass von den Strahlen eines Tripels stets zwei den Kreis treffen, während der dritte an dem Kreise vorbeigeht.

Zieht man durch das Tripel pqr die Gerade Mq, welche Q in q' und den Kreis in s_1 und s_2 treffen möge, so sind die Punkte s_1, q, s_2, q' harmonisch, es müssen also q und q' auf derselben Seite von M liegen, und zwar ist

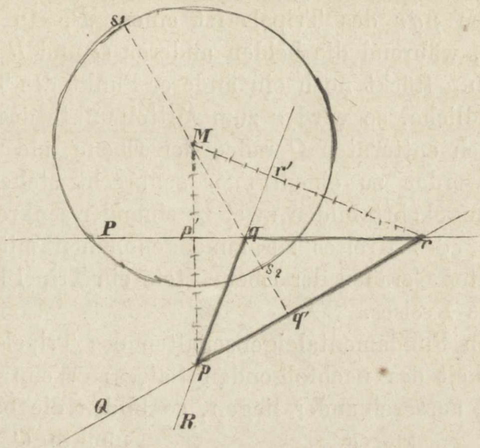
$$Mq \,.\, Mq' = Ms_1^2 = Ms_2^2 = R^2,$$

wenn R den Radius des Kreises bedeutet. Da die Verbindungsgerade von Pol und Mittelpunkt stets senkrecht zur Polaren ist, so muss Mq oder qq' eine Höhe des Dreiecks pqr sein. Die beiden anderen Höhen sind Mpp' und Mrr' und man hat auch für sie

$$Mp \,.\, Mp' = Mr \,.\, Mr' = R^2.$$

Der Punkt M liegt auf den Verlängerungen der Strecken pp', qq', rr', d. h. ein Tripel harmonischer Punkte in Bezug auf

Fig. 65.



einen Kreis bilden ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen Höhenpunkt zugleich der Mittelpunkt des Kreises ist.

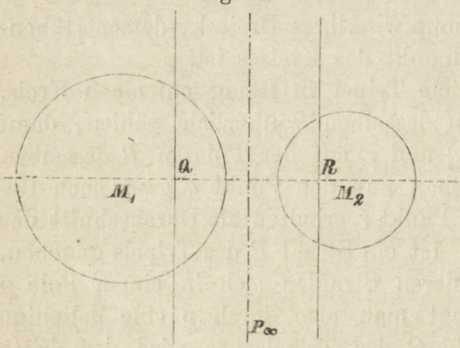
Es gibt unendlich viele Tripel in Bezug auf einen Kreis. Man kann einen Punkt p desselben willkürlich wählen, dann sind die beiden anderen q und r auf der Polaren P desselben gelegen. Auf P nehme man nun den Punkt q ganz nach Belieben an, dann wird der Punkt r erhalten als Durchschnitt der Polaren Q von q mit P. Ist ein Strahl P des Tripels gegeben, so müssen die beiden anderen Strahlen sich in einem Pole p desselben schneiden. Legt man also durch p eine beliebige Gerade als zweiten Strahl Q des Tripels, so wird der dritte Strahl R gefunden, indem man p mit dem auf P gelegenen Pole q von Q verbindet.

Liegt ein Punkt p des Tripels auf der Peripherie des Kreises, so befinden sich die beiden anderen auf der Tangente P des Punktes p, und zwar ist einer derselben mit p vereinigt, während der andere auf P willkürlich gewählt werden darf. Ist ferner ein Strahl P eines Tripels PQR zugleich Tangente des Kreises mit dem Berührungspunkte p, so gehen die beiden anderen Strahlen durch p, und zwar fällt einer von ihnen mit P zusammen, während der andere willkürlich durch p gelegt werden darf.

Wenn von einem Tripel pqr der Punkt p im Unendlichen liegt, so sind q und r Punkte auf einem Durchmesser, und zwar conjugirte harmonische Pole in Bezug auf den Kreis. Von den Strahlen pqr des Tripels ist einer, P, ein Durchmesser des Kreises, während die beiden anderen Q und R zu ihm senkrecht stehen. Rückt noch ein anderer Punkt des Tripels, z. B. q ins Unendliche, so wird r zum Mittelpunkte des Kreises, R zur unendlich entfernten Geraden der Ebene und die Strahlen P und Q werden zu einem Paar senkrecht stehender Durchmesser. Umgekehrt bilden zwei zu einander senkrecht stehende Durchmesser des Kreises zusammengenommen mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene stets ein Tripel harmonischer Strahlen des Kreises.

Aus den Fundamentaleigenschaften des Tripels ergibt sich die Richtigkeit des nachfolgenden Satzes: Wenn zwei Kreise M_1 und M_2 aussereinander liegen, so bilden die beiden Grenzpunkte Q und R der durch M_1 und M_2 bestimmten Kreisschaar (die von zweiter Art ist) mit dem unendlich entfernten Punkte ihrer Potenzlinie ein Tripel harmonischer Punkte sowohl in Bezug auf M_1, als auch in Bezug auf M_2. Zunächst ist nämlich klar, dass die Polaren von P_∞ nach den Kreisen M_1 und M_2 in der Centralen $M_1 M_2$ oder QR der beiden Kreise zusammenfallen; ferner bilden nach früher bewiesenen Sätzen die Punkte Q und R conjugirte harmonische Pole sowohl nach M_1 und M_2, und schliesslich stehen die Polaren von Q und R sowohl nach M_1 als nach M_2 senkrecht zur Centralen $M_1 M_2$, also kann der ausgesprochene Satz wirklich als bewiesen angesehen werden.

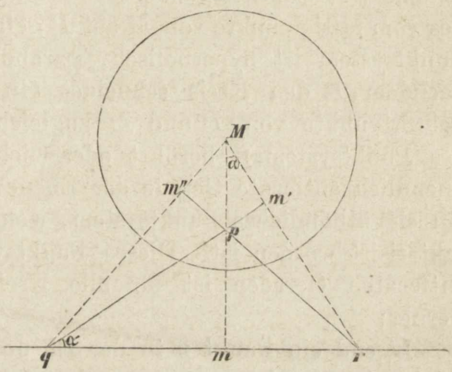
Fig. 66.



Alle Punktenpaare qr, $q'r'$, $q''r''$ etc., welche mit einem gegebenen Punkte p Tripel harmonischer Punkte pqr, $pq'r'$, $pq''r''$ etc. bestimmen, liegen auf einer Geraden P, der Polaren des Punktes p und bestimmen auf derselben ein Punktsystem. Für den Fall, dass der Punkt p ausserhalb des Kreises M liegt, wird P mit M zwei Punkte s_1 und s_2 gemein haben, und zwar ist jedes der Punktenpaare qr, $q'r'$, $q''r''$ etc. zu $s_1 s_2$ harmonisch, d. h. diese Punktenpaare bilden ein hyperbolisches Punktsystem mit den Asymptotenpunkten s_1 und s_2.

Liegt der Punkt p innerhalb des Kreises M, so kann man wie folgt schliessen: Das Tripel pqr bildet ein Dreieck, dessen Höhenpunkt im Mittelpunkt M liegt. Nennt man m, m', m'' die Schnittpunkte von Mp, Mq, Mr resp. mit qr, rp, pq, so erkennt man, dass die rechtwinkligen Dreiecke mpq und mMr ähnlich sind, also gilt die Proportion:

Fig. 67.



$$mq : pm = Mm : mr$$

oder

$$mq \,.\, mr = pm \,.\, Mm.$$

In ähnlicher Weise würde man für die Tripel $pq'r'$, $pq''r''$ finden:

$$mq' \,.\, mr' = pm \,.\, Mm, \quad mq'' \,.\, mr'' = pm \,.\, Mm \text{ etc.},$$

d. h. die Punktenpaare $q'r'$, $q''r''$ etc. bestimmen von m Abstände, deren Product constant ist, und da zwei Punkte desselben Punktenpaares immer auf verschiedenen Seiten von m liegen, so bilden alle Punktenpaare zusammengenommen nach § 10 ein elliptisches Punktsystem.

Die sämmtlichen Strahlenpaare QR, $Q'R'$, $Q''R''$ etc., welche mit einem gegebenen Strahle P Tripel PQR, $PQ'R'$, $PQ''R''$ etc. bilden, schneiden sich in einem und demselben Punkte p, dem Pole der Geraden P und bilden ein Strahlsystem. Zum Beweise beachte man nur, dass jedes Tripel harmonischer Strahlen zugleich ein Tripel harmonischer Punkte involvirt und dass man die zu P gehörigen Strahlentripel erhält, indem man sämmtliche Punktentripel, die zu p gehören, aufsucht und in jedem derselben die Seiten des von den Punkten gebildeten Dreiecks (von denen P übrigens schon bekannt ist) construirt. Die Punktenpaare qr, $q'r'$, $q''r''$ etc., welche mit p Tripel bestimmen, constituiren aber ein Punktsystem; verbindet man die sämmtlichen Punktenpaare desselben durch

Gerade mit p, so erhält man die Strahlenpaare RQ, $R'Q'$, $R''Q''$ etc., welche demnach einem Strahlsysteme angehören.

Man kann nun folgende Sätze aufstellen: Irgend eine beliebige Gerade P in der Ebene eines Kreises M wird durch diesen Kreis in ein Punktsystem verwandelt, dessen Punktenpaare mit dem Pole p der Geraden P Tripel des Kreises bestimmen. Der Mittelpunkt des Punktsystems ist der Fusspunkt des vom Mittelpunkte von M auf P gefällten Perpendikels. Das Punktsystem ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem P den Kreis schneidet (in diesem Falle sind die Schnittpunkte von P und M zugleich die Asymptotenpunkte des Punktsystems), berührt oder nicht schneidet. Ist P die unendlich entfernte Gerade der Ebene, so erhält man auf ihr ein eigenthümliches Punktsystem, welches bereits in § 11 charakterisirt worden ist. Dieses Punktsystem auf der unendlich entfernten Geraden ist für alle Kreise der Ebene dasselbe. Ferner:

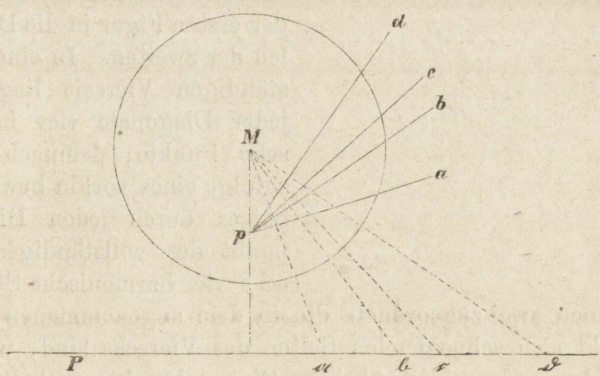
Irgend ein Punkt p in der Ebene wird durch einen Kreis M in ein Strahlsystem verwandelt, dessen Strahlenpaare mit der Polaren P des Punktes p Tripel des Kreises bestimmen. Die Verbindungsgerade von p mit dem Mittelpunkte des Kreises M und ein in p auf diese Gerade errichtetes Perpendikel bilden die Axen des Strahlsystems. Dasselbe ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem der Punkt p ausserhalb des Kreises, auf demselben oder innerhalb desselben liegt. (Im ersten Falle sind die von p aus an M möglichen Tangenten zugleich die Asymptoten des Strahlsystems.) Wenn p der Mittelpunkt des Kreises M ist, so erzeugt er mit demselben ein Strahlsystem, dessen Strahlenpaare rechtwinklig zu einander stehen, und welches in einem früheren Abschnitte circulares Strahlsystem genannt worden ist.

Wenn zu allen Punkten einer Figur, die aus Punkten und Geraden besteht, die Polaren und zu allen Geraden der Figur die Pole in Bezug auf einen festen Kreis M bestimmt werden, so entsteht eine neue Figur, die als durch Polarisation entstanden, die Polarfigur der ursprünglichen heisst. Bezeichnet man die gegebene Figur mit F_1, die Polarfigur mit F_2, so wird jedem Punkt in F_1 eine Gerade in F_2, jeder Geraden in F_1 ein Punkt in F_2 entsprechen.

Ist F_2 die Polarfigur von F_1, so ist auch F_1 die Polarfigur von F_2, d. h. jeder Geraden in F_2 entspricht ein Punkt in F_1 und jedem Punkte in F_2 eine Gerade in F_1. Zu der Verbindungsgeraden zweier Punkte in F_1 gehört der Durchschnitt ihrer Polaren in F_2, dem Durchschnitte zweier Geraden in F_1 entspricht die Verbindungsgerade ihrer Pole in F_2. Liegen drei oder mehr Punkte von F_1 in einer Geraden, so schneiden sich ihre drei oder mehr entsprechenden Geraden in einem Punkte und umgekehrt: wenn drei oder mehr Gerade von F_1 sich in einem Punkte schneiden, so liegen ihre entsprechenden Punkte aus der Figur F_2 in einer Geraden.

Sind auf einer Geraden P vier harmonische Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ gegeben, so bilden ihre Polaren $abcd$ nach einem Kreise M, welche durch den Pol p von P gehen, vier harmonische Strahlen. Zunächst ist klar, dass die Verbindungsgeraden $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{b}$, $M\mathfrak{c}$, $M\mathfrak{d}$ vier harmonische Strahlen sind. Auf diesen stehen

Fig. 68.



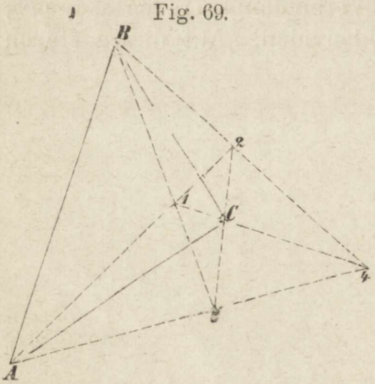
$abcd$ resp. senkrecht, d. h. die Winkel der Strahlen $abcd$ sind entweder gleich den entsprechenden Winkeln der vorhingenannten Verbindungsgeraden, oder sie ergänzen dieselben zu 180^0. Da nun die charakteristische metrische Relation für vier harmonische Strahlen, die in § 9 aufgestellt worden ist, sich nicht verändert, wenn an Stelle der in ihr vorkommenden Winkel gleiche Winkel oder ihre Nebenwinkel treten, so folgt, dass $abcd$ harmonische Strahlen sind und zwar ganz in derselben Zuordnung wie die Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$.

Aus demselben Grunde ergeben die metrischen Relationen, welche in § 11 als zwischen den durch drei Strahlenpaare eines Strahlsystems gebildeten Winkeln bestehend nachgewiesen wurden, den Satz, dass die Polaren dreier Punktenpaare drei Strahlenpaare eines Strahlsystems sind, woraus unmittelbar folgt, dass die Polaren eines Punktsystems ein Strahlsystem bilden.

Diese Sätze lassen sich umkehren: die Pole von vier harmonischen Strahlen bilden eine Gruppe von vier harmonischen Punkten. — Drei Strahlenpaare eines Strahlsystems werden durch Polarisation zu drei Punktenpaaren eines Punktsystems. — Die Pole eines Strahlsystems bilden ein Punktsystem.

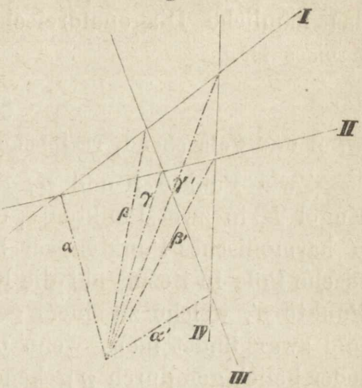
Ein beliebiges vollständiges Viereck 1 2 3 4 in der Ebene wird durch Polarisation zu einem vollständigen Vierseit, die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks zu gegenüberliegenden Ecken des Vierseits; ferner verwandeln sich die Diagonalpunkte der ersten Figur in die Diagonalen der zweiten. In einem vollständigen Vierseit liegen auf jeder Diagonale vier harmonische Punkte; demnach gehen zufolge eines vorhin bewiesenen Satzes durch jeden Diagonalpunkt des vollständigen Vierecks vier harmonische Strahlen, von denen zwei zugeordnete die in dem angenommenen Diagonalpunkt sich schneidenden Seiten des Vierecks sind, während die beiden anderen die übrigen Diagonalpunkte enthalten. In Fig. 69 sind demnach z. B. die Strahlen AB, $A1$, AC, $A3$ harmonische Strahlen.

Fig. 69.



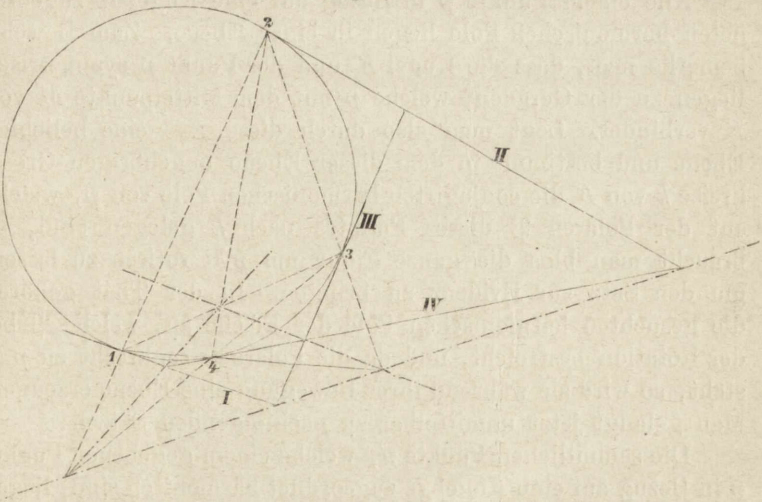
Ein vollständiges Vierseit I II III IV wird durch Polarisation zu einem vollständigen Viereck. Wird durch dieses eine beliebige Transversale gezogen, so erhält man auf den drei Paaren von Gegenseiten des Vierecks drei Punktenpaare eines Punktsystems. Unter Anwendung eines oben abgeleiteten Theorems folgt also, dass die Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte der Ebene eines vollständigen Vierseits aus nach den drei Paaren gegenüberliegender Ecken desselben gezogen werden, drei Strahlenpaare eines Strahlsystems sind. Die Fig. 70 gibt drei solche Strahlenpaare in den Geraden α und α', β und β', γ und γ'.

Fig. 70.



Wenn zu den auf einem Kreise gelegenen Ecken 1 2 3 4 eines vollständigen Vierecks die Polaren I II III IV bestimmt werden, so bilden dieselben ein vollständiges Vierseit, welches zu dem Viereck in einer merkwürdigen Beziehung steht. Die Diagonalpunkte des Vierecks werden nämlich durch Polarisation in die Diagonalen des vollständigen Vierseits verwandelt, und

Fig. 71.



da die Diagonalpunkte des Vierecks ein Tripel harmonischer Punkte in Bezug auf den Kreis sind, so werden die Diagonalen des Vierseits ein Tripel harmonischer Strahlen des Kreises bilden. Zufolge der Fundamentaleigenschaft des Tripels verändert sich aber dasselbe durch Polarisation nur so, dass seine Ecken zu den ihnen gegenüberstehenden Seiten werden, d. h. das vollständige

Viereck 1 2 3 4 und das vollständige Vierseit I II III IV haben das nämliche Diagonaldreieck, das zugleich ein Tripel des Kreises ist.

§ 20.

Pol und Polarebene, reciproke Polaren in Bezug auf die Kugel.

Zwei Punkte p und p', deren Verbindungsgerade G eine Kugel K in zwei Punkten s_1 und s_2 trifft, welche ein zu p und p' harmonisches Punktenpaar bilden, heissen conjugirte harmonische Pole in Bezug auf die Kugel K. Es gibt unendlich viele Punkte p', welche zu einem gegebenen Punkte p conjugirt sind, und zwar findet man, wenn p innerhalb der Kugel liegt, auf jeder beliebigen durch p gehenden Geraden einen solchen Punkt, wenn aber p ausserhalb der Kugel liegt, so enthalten nur diejenigen durch p gehenden Strahlen conjugirte harmonische Punkte zu p, welche innerhalb des von p an die Kugel gehenden Tangentialkegels befindlich sind.

Alle einem Punkte p in Bezug auf eine Kugel K zugeordneten harmonischen Pole liegen in einer Ebene. Zum Beweise bemerke man, dass die Kugel K und der Punkt p symmetrisch liegen zu der Geraden, welche p mit dem Mittelpunkte M von K verbindet. Legt man also durch diese Axe eine beliebige Ebene und bestimmt in dem dieser Ebene angehörigen Grosskreise k von K die conjugirten harmonischen Pole von p, welche auf der Polaren $\mathfrak{P}$ dieses Punktes nach k gelegen sind, so braucht man blos die ganze Figur um pM rotiren zu lassen, um den Satz zur Evidenz zu bringen. In der That gehören die gesuchten harmonischen Pole der Fläche an, welche $\mathfrak{P}$ bei der Rotation bestreicht, und da die Polare $\mathfrak{P}$ senkrecht zu pM steht, so wird sie während ihrer Bewegung eine Ebene erzeugen. Man gelangt jetzt unmittelbar zu nachfolgenden Sätzen:

Die sämmtlichen Punkte p', welche einem gegebenen Punkte p in Bezug auf eine Kugel K zugeordnet harmonisch sind, liegen in einer Ebene P, der Polarebene des Punktes p in Bezug auf die Kugel. Sei M der Mittelpunkt von K, so findet man P, indem man p mit M durch eine Gerade verbindet, deren Durchschnittspunkte $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ mit K fixirt und zu p, $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt $\mathfrak{p}'$ construirt; die in $\mathfrak{p}'$ auf pM errichtete senkrechte Ebene ist die gesuchte Polarebene. Liegt p ausserhalb der Kugel K, so schneiden sich P und K längs eines Kreises, dem Berührungskreise des von p aus an K zu legenden Tangentialkegels; ist p ein Punkt der Kugel selbst, so wird P zur Berührungsebene von K in p; befindet sich p innerhalb der Kugel, so schneiden sich P und K nicht.

Zu der Ebene P kann sofort der zugehörige Punkt p, ihr Pol in Bezug auf die Kugel K gefunden werden. Man fälle von dem Mittelpunkte M der Kugel K ein Perpendikel auf die Ebene P, welches K in $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ treffen möge und dessen Fusspunkt $\mathfrak{p}'$ sei; bestimme sodann zu $\mathfrak{p}'\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ den vierten harmonischen $\mathfrak{p}'$ zugeordneten Punkt p, so ist dieser der gesuchte Pol. Schneiden sich P und K, so liegt P ausserhalb von K und ist Mittelpunkt eines Rotationskegels, welcher K längs des Schnittkreises der Ebene und der Kugel berührt; ist P eine Tangentialebene der Kugel, so ist p ihr Berührungspunkt und geht P an K vorbei, so liegt p innerhalb K.

Legt man durch den Pol p eine Ebene, welche die Kugel K in einem Kreise $\mathfrak{K}$ und die Polarebene P in einer Geraden $\mathfrak{P}$ schneidet, so ist $\mathfrak{P}$ die Polare von p in Bezug auf $\mathfrak{K}$. Dieser Satz folgt aus der Bemerkung, dass, wenn p und p' conjugirte harmonische Pole in Bezug auf eine Kugel sind, sie dann auch conjugirt sind in Bezug auf jeden Kreis, der auf K liegt und dessen Ebene die Gerade pp' enthält. Man kann also die Polarebene von p nach K auch so finden: Man legt durch p zwei Ebenen, welche aus K die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ ausschneiden sollen und bestimmt die Polaren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ des Punktes p nach diesen Kreisen, so liegen dieselben in der gesuchten Polarebene, welche durch die beiden in ihr enthaltenen Geraden vollständig gegeben ist.

Liegt eine Ebene P ganz ausserhalb der Kugel K, so wird ihr Pol p (der innerhalb K liegt) mit jedem Punkte p' von P ein Paar conjugirter Pole von K bestimmen, die Polarebenen von allen Punkten auf P gehen also durch p, d. h.: Bewegt sich ein Punkt p' auf einer Ebene P, welche eine gegebene Kugel K nicht schneidet, so dreht sich die Polarebene P' von p' um einen festen Punkt, den Pol p der Ebene P. Wenn P eine Tangentialebene von K mit dem Berührungspunkte p ist, ferner p' einen beliebigen Punkt in P bedeutet, so sind p und

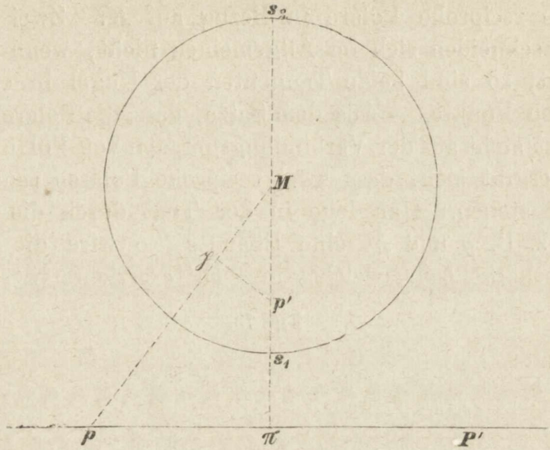
p' immer conjugirte harmonische Pole in Bezug auf K, d. h. die Polarebenen der sämmtlichen Punkte p' gehen durch p. Ist schliesslich P eine Ebene, die K in einem Kreise k schneidet, so wird die Polarebene jedes Punktes p', der auf P innerhalb des Kreises k liegt, durch den Pol p von P gehen. Dass auch für die Punkte von P, welche ausserhalb k liegen, die Polarebenen durch p laufen, erhellt aus einer Betrachtung, die ohne Rücksicht auf die Lage von P den Satz beweist: Bewegt sich ein Punkt p' auf einer beliebigen Ebene P, so dreht sich seine Polarebene um den Pol p von P herum.

Sei in der That p' ein beliebiger Punkt der Polarebene P des Punktes p, so wird eine durch die Gerade pp' gelegte Ebene, welche K in einem Kreise $\mathfrak{K}$ trifft, übrigens aber willkürlich ist, aus der Polarebene P eine Gerade $\mathfrak{P}$ ausschneiden, welche die Polare von p in Bezug auf $\mathfrak{K}$ ist und die zudem den Punkt p' enthält. Es wird also umgekehrt die Polare $\mathfrak{P}'$ von p' nach $\mathfrak{K}$ durch den Punkt p gehen. Da aber $\mathfrak{P}'$ ganz in der Polarebene P' von p' nach K liegt, so muss auch P' durch p gehen.

Der eben abgeleitete Satz lässt sich, wie aus dem Beweise unmittelbar hervorgeht, umkehren: Dreht sich eine Ebene P' um einen festen Punkt p herum, so beschreibt ihr Pol p' in Bezug auf eine Kugel K eine Ebene P, welche die Polarebene des Punktes p ist.

Diese Umkehrung soll noch näher erörtert werden. Sei P' eine beliebig durch p gelegte Ebene, so findet man den Pol p' von P' in Bezug auf K, indem man vom Mittelpunkte M der Kugel K ein Perpendikel mit dem Fusspunkte π auf P' fällt, welches K in s_1 und s_2 treffen möge und zu $\pi\, s_1\, s_2$ den vierten harmonischen π zugeordneten Punkt p' construirt. Fällt man ferner von p' ein Perpendikel auf Mp, dessen Fusspunkt $\mathfrak{p}$ sei, so gilt vermöge der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $M\mathfrak{p}p'$ und $M\pi p$ die Proportion $M\mathfrak{p} : Mp' = M\pi : Mp$. Nun ist aber, wenn ϱ den Radius der Kugel K bedeutet, $Mp' \,.\, M\pi = \varrho^2$, also auch $M\mathfrak{p} \,.\, Mp = \varrho^2$ oder $M\mathfrak{p} = \frac{\varrho^2}{Mp}$. Daraus folgt, dass $M\mathfrak{p}$ und demnach der Punkt $\mathfrak{p}$ unabhängig davon ist, wie P' durch p gelegt wurde, d. h. es liegt p' immer in der Ebene, welche in $\mathfrak{p}$ senkrecht zu Mp errichtet werden kann,

Fig. 72.



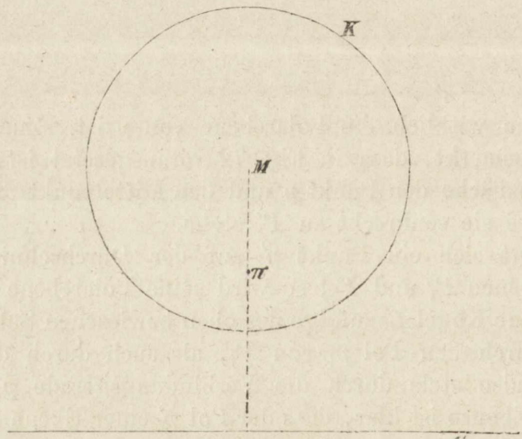
und welche wirklich die Polarebene von p ist. Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass in Fig. 72 vorausgesetzt ist, dass die Zeichnungsfläche den Punkt p und den Mittelpunkt M enthalte, sowie, dass sie senkrecht zu P' stehe.

Bewegt sich ein Punkt p' auf der Durchschnittsgeraden zweier Ebenen P_1 und P_2, so wird seine Polarebene P' in Bezug auf eine Kugel K zufolge des oben bewiesenen Satzes immer sowohl durch den Pol p_1 von P_1, als auch durch den Pol p_2 von P_2, also stets durch die Verbindungsgerade $p_1 p_2$ gehen müssen. Ebenso ist klar, dass der Pol p' einer Ebene P', welche die Verbindungsgerade zweier Punkte p_1 und p_2 enthält, immer sowohl in der Polarebene P_1 von p_1, als auch in der Polarebene P_2 von p_2, demnach stets in der Durchschnittsgeraden von P_1 und P_2 liegen muss, d. h.: Beschreibt ein Punkt p' eine Gerade g, so dreht sich seine Polarebene P' nach einer festen Kugel K um eine Gerade G herum und umgekehrt: Dreht sich eine Ebene P' um eine Gerade G, so durchläuft ihr Pol p' eine andere Gerade g.

Stehen zwei Gerade g und G in einer solchen Beziehung zu einander, dass die Polarebenen der Punkte auf einer von ihnen nach einer festen Kugel K durch die andere gehen, so heissen sie reciproke Polaren der Kugel. Wird eine Gerade gezogen, welche g und G in p und p' trifft und welche auch K schneidet, so sind p und p' conjugirte harmonische Pole der

Kugel. — Zu jeder Geraden g im Raume gehört stets eine und nur eine reciproke Polare in Bezug auf K. Zwei reciproke Polaren schneiden sich im Allgemeinen nicht, wenn dies aber geschieht, so sind beide Tangenten der Kugel in einem und demselben Punkte. — Aus dem Satze, dass die Polarebene stets senkrecht steht auf der Verbindungsgeraden von Pol und Mittelpunkt, ergibt sich, dass zwei reciproke Polaren senkrecht zu einander stehen. Man lege in der That durch die eine derselben, z. B. g und M eine Ebene e, so wird die andere G das Perpendikel sein, welches in π auf e errichtet werden kann,

Fig. 73.



wenn π der Pol von g in Bezug auf den durch die Hilfsebene e aus K ausgeschnittenen Kreis ist. Fällt man von M ein Perpendikel auf g, so trifft dasselbe auch G und steht auf dieser Geraden ebenfalls senkrecht.

Der Pol einer Ebene P, welche den Mittelpunkt M der Kugel K enthält, liegt auf dem in M zu P errichteten Perpendikel und zwar in unendlicher Entfernung von M. Umgekehrt: Für irgend einen in unendlicher Entfernung gelegenen Punkt geht die Polarebene durch den Punkt M. Wenn man also den Satz, dass zu sämmtlichen Ebenen durch einen Punkt Pole gehören, die auf einer Ebene liegen, auch noch gelten lassen will, wenn dieser Punkt M ist, so muss man (wie es übrigens schon früher in § 9 geschehen ist) annehmen, dass alle Punkte im Raume, welche im Unendlichen liegen, einer und derselben Ebene, der unendlich entfernten Ebene des Raumes angehören.

Zu einem System paralleler Ebenen gehören Pole, welche auf einem Durchmesser liegen, der senkrecht zu sämmtlichen Ebenen steht; umgekehrt sind die Polarebenen der Punkte eines Durchmessers unter sich parallel. Da man nun parallele Ebenen so auffassen kann, als ob sie eine unendlich entfernte Gerade gemein hätten, so folgt, dass die reciproke Polare zu einem Durchmesser ganz im Unendlichen liegt.

§ 21.

Polarnetze und Quadrupel. Polarisation im Raume.

Werden im Raume eine Kugel K und eine Ebene E unter der einzigen Bedingung gewählt, dass sie sich nicht berühren sollen, sonst aber ganz willkürlich gelassen, so kann man zu irgend einem Punkte p in E die Polarebene P in Bezug auf K construiren. Bezeichnet man die Schnittgerade von P und E mit π, so ist klar, dass man zu jedem Punkte p in der Ebene stets eine und nur eine Gerade π finden kann. Zu jeder Geraden π gibt es stets einen, aber auch nur einen zugehörigen Punkt, der sich ergibt, indem man die reciproke Polare π' von π in Bezug auf K bestimmt, denn deren Schnittpunkt p erzeugt nach obiger Construction die Gerade π. Dass die Gerade π' mit E nur einen Punkt gemein hat, ist klar, da sie den Pol $\mathfrak{p}$ von E nach K enthält, der zufolge der gestellten Bedingung nicht in E liegen darf.

Die Gesammtheit der wie p und π aufeinander bezogenen Punkte und Geraden in E, welche einestheils alle Punkte, anderntheils alle Geraden der Ebene E umfasst, heisst das Polarnetz der Kugel K in Bezug auf die Ebene E. Wenn E und K sich schneiden, so ist das Polarnetz weiter nichts als die Gesammtheit von Pol und Polaren in Bezug auf den Schnittkreis k der Ebene und der Kugel, und man nennt es in diesem Falle hyperbolisches Polarnetz. Schneiden sich E und K nicht, so heisst das Polarnetz elliptisch; in diesem Falle ist zwar in E kein Kreis vorhanden, in Bezug auf welchen man jeden beliebigen der Punkte p mit seiner zugehörigen Geraden π als Pol und Polare darstellen könnte, immerhin aber behält man für jedes Paar p und π die Bezeichnung Pol und Polare bei, weil eine Reihe von Eigenschaften des hyperbolischen Polarnetzes sofort auf das elliptische übergetragen werden können.

Zunächst bemerke man, dass der unendlich entfernten Geraden in E ein ausgezeichneter Punkt im Polarnetze entsprechen wird; derselbe ist der Fusspunkt m des von dem Mittelpunkte M der Kugel K aus auf E gefällten Perpendikels, wie man sich leicht überzeugen kann. Wenn nun E und K sich schneiden, so ist m der Mittelpunkt des Schnittkreises; auf Grund dieser Eigenschaft nennt man m den Mittelpunkt des Polarnetzes, gleichgiltig, ob derselbe hyperbolisch oder elliptisch sei.

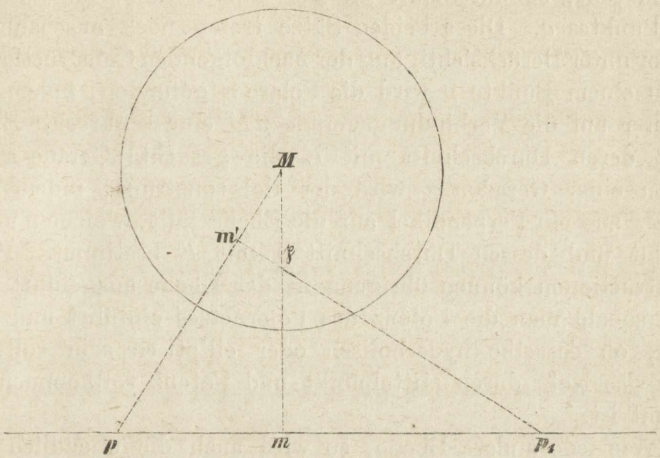
Verbindet man im Polarnetze den Pol p mit dem Mittelpunkte m durch eine Gerade, so steht dieselbe auf der Polaren π senkrecht. Für das hyperbolische Polarnetz ist der Satz selbstverständlich, für das elliptische ergibt er sich wie folgt: Man lege die Ebene, welche den Punkt p und das Perpendikel Mm enthält, so werden die Ebenen E und P (wo P nach Früherem die Polarebene von p ist) beide senkrecht zu ihr stehen, also wird der Schnitt π von E und P ebenfalls senkrecht zu pMm sein und demnach zu jeder in dieser Ebene enthaltenen Geraden, namentlich aber zu pm.

Sei p_1 der Durchschnitt von pm mit π, so ist das Product $pm \,.\, mp_1$ nur abhängig vom Radius R der Kugel K und dem Abstand δ ihres Mittelpunktes M von der Ebene E, nicht aber von der Lage des Punktes p in der Ebene E. Für das hyperbolische Polarnetz ist in der That $pm \,.\, p_1 m = R^2 - \delta^2 = \varrho^2$, wenn man mit ϱ den Radius des Kreises k bezeichnet, in welchem E und K sich schneiden. Ist das Polarnetz elliptisch, so lege man die Ebene der Punkte pMm, welche den Pol $\mathfrak{p}$ von E nach K enthält und die aus K einen Grosskreis ausschneidet. Die beschriebene Figur stimmt im Wesentlichen mit Fig. 67 überein, wenn man in derselben an die Stelle von pqr resp. $\mathfrak{p}$, p, p_1 setzt. Man hat also, wie in § 19 abgeleitet worden ist, $pm \,.\, p_1 m = Mm \,.\, m\mathfrak{p}$, eine Gleichung, deren rechte Seite in der That nur von δ und R abhängt. Es ist nämlich

$$R^2 = M\mathfrak{p} \,.\, \delta \text{ oder } M\mathfrak{p} = \frac{R^2}{\delta},$$

also

Fig. 74.



$$\mathfrak{p}m = \delta - \frac{R^2}{\delta}$$

und schliesslich, da $Mm = \delta$ ist:

$$Mm \,.\, m\mathfrak{p} = \delta^2 - R^2.$$

Diese constante Grösse kann man die Potenz des Polarnetzes nennen und wird dann ganz analog ϱ^2 als Potenz des hyperbolischen Polarnetzes bezeichnen.

In Bezug auf die eben bewiesene Eigenschaft unterscheiden sich das hyperbolische und das elliptische Polarnetz nur dadurch, dass im zweiten m immer auf der Strecke pp_1 selbst, im ersten aber auf der Verlängerung derselben liegt. Man schliesst hier bequem eine weitere Unterscheidung des hyperbolischen vom elliptischen Polarnetz an: Im ersten gibt es unendlich viele Punkte (die sämmtlichen Punkte eines Kreises k), welche auf ihren Polaren liegen, oder unendlich viele Polaren (die sämmtlichen Tangenten des Kreises k), welche durch ihren Pol gehen; im zweiten kann dieser Umstand niemals eintreten.

Bewegt sich der Punkt p auf einer in E gelegenen Geraden γ, so dreht sich seine Polarebene P um eine Gerade, welche $\mathfrak{p}$ enthält und E in einem Punkte g, dem Pole von γ trifft. Daraus folgt: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden γ, so dreht sich seine Polare im Polarnetz um einen festen Punkt. Umgekehrt: Wenn sich die Gerade π um einen festen Punkt a

herumdreht, so durchläuft ihr Pol eine Gerade, die Polare α des Punktes a. Diese beiden Sätze treten noch anschaulicher hervor unter Berücksichtigung der nachfolgenden Constructionen: 1. Zu einem Punkte p wird die Polare π gefunden, indem man durch $\mathfrak{p}$ auf die Verbindungsgerade pM eine senkrechte Ebene legt, deren Durchschnitt mit E die gesuchte Gerade π ist. 2. Zu einer Geraden π wird der Pol construirt, indem man von M aus ein Perpendikel auf die Ebene fällt, welche $\mathfrak{p}$ und π enthält und dessen Durchschnitt p mit E bestimmt. Beide Constructionen können übrigens in der Ebene ausgeführt werden, sobald man die Potenz des Polarnetzes einführt und festsetzt, ob dasselbe hyperbolisch oder elliptisch sein soll, da dann das Netz durch Mittelpunkt und Potenz vollkommen bestimmt ist.

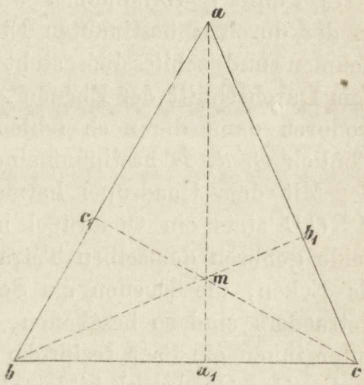
Wie jede andere Ebene, so wird auch die unendlich entfernte Ebene E_∞ des Raumes durch die Kugel K in ein Polarnetz verwandelt. Sei p_∞ ein Punkt in E_∞, so errichte man in M eine senkrechte Ebene e zu der Geraden $p_\infty M$, dann wird dieselbe in E_∞ diejenige Gerade π_∞ ausschneiden, welche in dem durch K und E_∞ bestimmten Polarnetz die Polare des Punktes $\mathfrak{p}_\infty$ ist. Sei nun K_1 eine beliebige zweite Kugel mit dem Mittelpunkte M_1, so wird diese die Ebene E_∞ ebenfalls in ein Polarnetz umwandeln. Die Polare $\pi_{1\infty}$ des schon vorhin angenommenen Punktes p_∞ in Bezug auf dieses neue Polarnetz ergibt sich, indem man in M_1 eine senkrechte Ebene e_1 zu der Geraden $p_\infty M_1$ legt; die Schnittgerade von e_1 und E_∞ ist die gesuchte Polare $\pi_{1\infty}$. Die Geraden $p_\infty M$ und $p_\infty M_1$ sind parallel, ebenso die Ebenen e und e_1; diese schneiden sich also auf E_∞, d. h. π_∞ und $\pi_{1\infty}$ fallen zusammen. Dasselbe tritt für die Polaren eines jeden anderen Punktes in E_∞ ein, d. h. zwei beliebige Kugeln, oder überhaupt alle Kugeln im Raume verwandeln die unendlich entfernte Ebene in ein und dasselbe Polarnetz, welches aber vom gewöhnlichen Polarnetze sich dadurch unterscheidet, dass es weder Mittelpunkt noch Potenz hat.

Drei Punkte abc in der Ebene eines Polarnetzes bilden ein Tripel harmonischer Punkte des Polarnetzes, wenn die Polare jedes der Punkte zugleich die Verbindungsgerade der beiden anderen ist. Diese Definition stimmt im Falle des hyperbolischen Polarnetzes mit derjenigen des Tripels in Bezug auf den

Kreis, wie sie in § 19 gegeben wurde, vollkommen überein. Dass es unendlich viele Tripel im Polarnetze gibt, ist klar: Man wählt den Punkt a beliebig, construirt seine Polare α, wählt ferner auf derselben b beliebig, so geht die Polare β dieses Punktes durch a und schneidet auf α den Punkt c aus, dessen Polare γ in der That durch b und a geht. Dass die Strahlen $\alpha\beta\gamma$ ein Tripel harmonischer Strahlen sind, d. h. dass jeder dieser Strahlen den Durchschnitt der beiden anderen zum Pole hat, ist evident.

Da das Perpendikel vom Pol auf die Polare stets durch den Mittelpunkt m des Polarnetzes geht, so ist m der Höhenpunkt des Dreiecks abc. Dieses ist für ein hyperbolisches Polarnetz stumpfwinklig, für ein elliptisches spitzwinklig. Da in einem beliebigen Dreiecke abc, dessen Höhenpunkt m heisse und dessen Höhen die Fusspunkte $a_1 b_1 c_1$ haben mögen,

Fig. 75.



$$ma.ma_1 = mb.mb_1 = mc.mc_1$$

ist, so folgt, dass ein beliebiges spitzwinkliges oder stumpfwinkliges Dreieck abc mit dem Höhenpunkt m immer als Tripel eines bestimmten Polarnetzes aufgefasst werden kann, dessen Mittelpunkt in m liegt und dessen Potenz den vorhin bezeichneten constanten Werth

$$ma \,.\, ma_1 = mb \,.\, mb_1 = mc \,.\, mc_1$$

hat.

Ein Punkt a und ein Tripel harmonischer Punkte bcd desjenigen Polarnetzes, das eine Kugel K mit der Polarebene A von a erzeugt, bilden eine Gruppe $abcd$, welche Quadrupel harmonischer Punkte in Bezug auf K genannt wird. Sind BCD resp. die Polarebenen von bcd, so haben die Punkte des Quadrupels die Eigenschaft, dass die Polarebene eines jeden durch die drei übrigen geht, während in jedem die Polarebenen der drei anderen sich schneiden.

Es liegen also in

$$\begin{array}{llll} A & \text{die Punkte} & bcd, \\ B & \text{"} \quad \text{"} & cda, \\ C & \text{"} \quad \text{"} & dab, \\ D & \text{"} \quad \text{"} & abc, \end{array}$$

während sich in

$$\begin{array}{llll} a & \text{die Ebenen} & BCD, \\ b & \text{"} \quad \text{"} & CDA, \\ c & \text{"} \quad \text{"} & DAB, \\ d & \text{"} \quad \text{"} & ABC \end{array}$$

schneiden.

Es gibt unendlich viele Quadrupel in Bezug auf K. Um ihre Mannichfaltigkeit zu übersehen, bemerke man, dass der erste Punkt a vollkommen willkürlich gewählt werden kann; in der durch a bestimmten Ebene A darf man b beliebig annehmen und schliesslich steht es noch frei, den Punkt c auf dem Durchschnitt der Ebenen A und B irgend wie festzusetzen, wodurch dann die noch fehlenden Elemente des Quadrupels, nämlich C, d, D bestimmt sind.

Mit dem Quadrupel harmonischer Punkte $abcd$ ist durch $ABCD$ stets ein Quadrupel harmonischer Ebenen verbunden, beide gehören demselben Tetraeder an, und zwar die Punkte als Ecken, die Ebenen als Seitenflächen. Die Kanten dieses Tetraeders sind so beschaffen, dass je zwei gegenüberliegende unter ihnen ein Paar reciproke Polaren in Bezug auf die Kugel sind. Das Quadrupel bildet also zufolge einer im vorigen Paragraphen bewiesenen Eigenschaft der reciproken Polaren ein Tetraeder, dessen drei Paar gegenüberliegender Kanten jeweilen rechte Winkel einschliessen. Man kann dieser Bemerkung noch eine andere Fassung geben: Da für die Kugel die Verbindungsgerade des Mittelpunkts mit dem Pole stets senkrecht zur Polarebene steht, so hat das durch ein Quadrupel der Kugel erzeugte Tetraeder die Eigenschaft, dass seine vier Höhen sich in einem und demselben Punkte, dem Mittelpunkte der Kugel, schneiden.

Rückt eine Ebene des Quadrupels ins Unendliche, so gehen die drei übrigen durch den Mittelpunkt der Kugel, der ein Quadrupelpunkt wird, und schneiden sich dort unter rechten Winkeln, so dass auch die drei im Endlichen gelegenen Kanten des

Tetraeders perpendiculär zu einander sind. Die drei anderen Kanten liegen im Unendlichen und verbinden die dort gelegenen drei übrigen Quadrupelpunkte, welche ein Tripel des eigenthümlichen Polarnetzes bilden, das auf der unendlich entfernten Ebene des Raumes enthalten ist. Die Tripel dieses Polarnetzes werden also erzeugt durch die Schnittpunkte dreier zu einander senkrechter Geraden (oder durch die Schnittgeraden dreier zu einander senkrechter Ebenen) mit der unendlich entfernten Ebene des Raumes.

Zu jedem Punkte p im Raume gehört in Bezug auf eine Kugel K stets eine und nur eine Polarebene P, zu jeder Ebene Π lässt sich stets ein und nur ein Pol π finden und endlich gibt es zu jeder Geraden g stets eine und nur eine reciproke Polare γ. Es folgt daraus, dass man durch Polarisation in Bezug auf eine Kugel jede räumliche Figur F_1, die aus Punkten p_1, Ebenen Π_1 und Geraden g_1 besteht, in eine andere, F_2, ihre Polarfigur, verwandeln kann, welche aus den Polarebenen P_2 der p_1, aus den Polen π_2 der Ebenen Π_1 und aus den reciproken Polaren γ_2 der Geraden g_1 besteht. Es ist klar, dass umgekehrt F_1 die Polarfigur von F_2 ist, so dass also F_1 und F_2 in vollkommen reciproke Beziehung gesetzt sind; jedem Punkte, jeder Ebene, jeder Geraden der einen Figur entspricht resp. ein Punkt, eine Ebene, eine Gerade der andern Figur.

Alle Punkte in F_1, welche in einer Geraden g_1 liegen, werden in F_2 zu Ebenen, welche durch die reciproke Polare γ_2 von g_1 gehen; Punkte in F_1, die einer Ebene P_1 angehören, werden in F_2 zu Ebenen, die durch den Pol p_2 von P_1 laufen. Eine Anzahl von Ebenen in F_1, welche durch dieselbe Gerade g_1 gehen, werden in F_0 zu einer gleichen Anzahl von Punkten, die der reciproken Polaren γ_2 von g_1 angehören. Ebenen in F_1, die sich in einem Punkte p_1 schneiden, werden in F_2 zu Punkten, die auf der Polarebene P_2 des Punktes p_1 liegen. Gerade Linien in F_1, die sich schneiden (also einen endlich oder unendlich entfernten Punkt gemein haben), werden in F_2 zu solchen Geraden, die in einer Ebene liegen, also sich ebenfalls schneiden. Eine Gruppe von Geraden in F_1, welche in einer Ebene liegt, aber nicht durch denselben Punkt läuft, wird in F_2 zu einer Gruppe von Geraden, die durch einen Punkt geht, aber nicht in einer und derselben Ebene liegt. Schliesslich wird einer Gruppe von Geraden in F_1, die durch einen Punkt geht und in einer einzigen Ebene enthalten ist, eine ähnlich geartete Gruppe von Geraden in F_2 entsprechen.

Vermittelst der eben abgeleiteten Sätze kann der Zusammenhang mehrerer der in § 7 gegebenen Eigenschaften der vollständigen Figuren nachgewiesen werden. Man sieht nämlich sofort ein, dass durch Polarisation in Bezug auf eine feste Kugel

ein vollständiges n-Eck in der Ebene in ein körperliches n-Seit,
" " n-Seit " " " " " " n-Eck,
" räumliches n-Eck in ein räumliches n-Flach und
" " n-Flach " " " n-Eck

verwandelt wird. Die Reciprocität z. B. zwischen dem räumlichen n-Eck und dem räumlichen n-Flach zeigt sich, da nach dem Principe der Polarisation sich entsprechen:

1. die n Ecken des n-Ecks und die n Seitenflächen des n-Flachs;

2. die $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Verbindungsgeraden der Ecken des n-Ecks zu zweien und die $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Durchschnittsgeraden der Seitenebenen des n-Flachs zu zweien;

3. die $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Verbindungsebenen der Ecken des n-Ecks zu dreien und die $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Durchschnittspunkte der Seitenebenen des n-Flachs zu dreien etc.

In § 6 ist der Satz bewiesen worden: Die vier Geraden, in welchen die Tangentialebenen in den Ecken eines Tetraeders, das einer Kugel K eingeschrieben ist, die gegenüberliegenden Seitenflächen treffen, bilden eine Gruppe von vier Geraden, zu der eine andere Gruppe von vier Geraden gefunden werden kann, so dass jede Gerade der einen Gruppe jede Gerade der andern Gruppe trifft, während im Allgemeinen keine zwei Geraden sich schneiden, die derselben Gruppe entnommen sind. Durch Polarisation in Bezug auf die Kugel K erhält man hieraus den Satz: Verbindet man in einem Tetraeder, dessen Seitenflächen eine Kugel K berühren, die Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seitenflächen, so entsteht eine Gruppe von vier Geraden, zu welcher eine zweite Gruppe von vier Geraden gefunden werden kann, so dass jede Gerade der einen Gruppe jede Gerade der andern Gruppe trifft, während im Allgemeinen keine zwei Geraden sich schneiden, die derselben Gruppe angehören. Auf Grund der citirten Betrachtungen in § 6 kann übrigens vermittelst Polarisation eine einfache geometrische Bedeutung der zweiten Gruppe von Geraden abgeleitet werden. Irgend drei Seitenflächen des Tetraeders bilden nämlich ein der Kugel K umschriebenes körperliches Dreikant, in welchem die Ebenen, die je eine Kante mit dem Berührungspunkte der gegenüber liegenden Seitenfläche verbinden, sich in einer Geraden schneiden. Die vier Geraden, die in dieser Weise erhalten werden, wenn man im Tetraeder successive jede der Seitenflächen weglässt, bilden die zweite Gruppe.

Siebentes Kapitel.

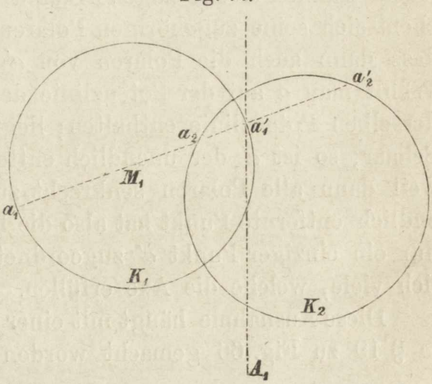
Anwendungen.

§ 22.

Harmonische Eigenschaften des Orthogonalkreises und der Orthogonalkugel.

In § 8 ist der Satz bewiesen worden: Legt man durch den Mittelpunkt M_1 eines Kreises K_1, der einen andern Kreis K_2 rechtwinklig schneidet, eine beliebige Transversale, so erhält man auf derselben durch die Punkte, in welchen sie von den beiden Kreisen getroffen wird, zwei einander harmonisch zugeordnete Punktenpaare $a_1 a'_1$ und $a_2 a'_2$. Wenn man also zu a_1 die Polare A_1 in Bezug auf den Kreis K_2 construirt, so geht dieselbe durch a'_1. Nennt man Ge-

Fig. 76.



genpunkte in einem Kreise solche Punkte, deren Verbindungsgerade ein Durchmesser ist, so kann man sagen: Die Polare A_1 eines dem Kreise K_1 entnommenen Punktes a_1 in Bezug auf einen beliebigen zu K_1 senkrechten Kreis geht durch den Gegenpunkt a'_1 von a_1.

Sind zwei beliebige Kreise K_1 und K_2 in der Ebene gegeben, so kann man nach bekannten Methoden die Polaren A_1 und A_2 eines Punktes a nach denselben leicht construiren und ihren Durchschnitt a' finden. Ein zwar etwas weitläufigerer Weg würde zu dem nämlichen Ziele führen: Durch a kann man immer einen Kreis K legen, welcher K_1 und K_2 rechtwinklig schneidet. Sei in diesem Kreise a' der Gegenpunkt von a, so werden sich A_1 und A_2 in dem Punkte a' schneiden.

Die Kreise K_1 und K_2 bestimmen eine Kreisschaar (§ 15), zu welcher sofort eine conjugirte Kreisschaar gefunden werden kann. Durch irgend einen beliebigen Punkt a geht im Allgemeinen ein und nur ein Kreis K dieser conjugirten Schaar, und dieser hat die Eigenschaft, die sämmtlichen Kreise der durch K_1 und K_2 bestimmten Schaar unter rechtem Winkel zu treffen. Es gehen demnach nicht nur die Polaren A_1 und A_2 des Punktes a nach K_1 und K_2 durch den Gegenpunkt a' von a im Kreise K, sondern die Polaren des Punktes a nach allen Kreisen der durch K_1 und K_2 bestimmten Schaar schneiden sich in a', d. h.: die Polaren eines beliebigen Punktes in der Ebene nach den sämmtlichen Kreisen einer Kreisschaar gehen durch einen und denselben Punkt.

In dieser Weise kann in Bezug auf eine Kreisschaar zu jedem Punkte a ein zugehöriger a' gefunden werden, in welchem sich seine zugehörigen Polaren schneiden; es ist evident, dass dann auch die Polaren von a' sich in a treffen werden. Wählt man a auf der Potenzlinie der Schaar, so ist a' auf eben derselben Potenzlinie enthalten; liegt ferner a auf der Axe der Schaar, so ist a' der unendlich entfernte Punkt der Potenzlinie, weil dann alle Polaren senkrecht zur Axe stehen. Dieser unendlich entfernte Punkt hat also die Eigenschaft, dass ihm nicht nur ein einziger Punkt a' zugeordnet ist, sondern deren unendlich viele, welche die Axe erfüllen.

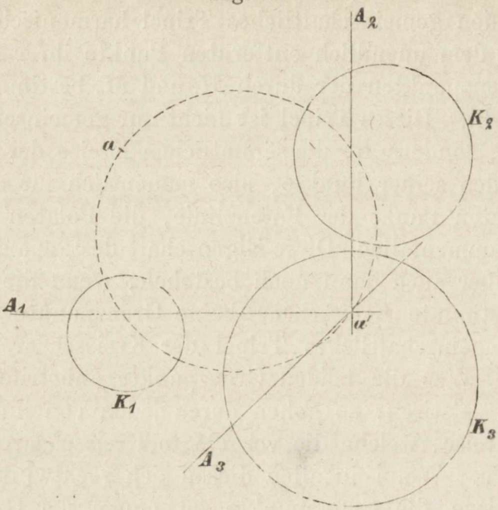
Diese Ausnahme hängt mit einer Bemerkung zusammen, die in § 19 zu Fig. 66 gemacht worden ist. Zu zwei Kreisen M_1

und M_2 in der Ebene, welche sich nicht schneiden, gibt es stets ein ihnen gemeinschaftliches Tripel harmonischer Punkte, welches aus dem unendlich entfernten Punkte ihrer Potenzlinie und den Grenzpunkten der durch M_1 und M_2 bestimmten Kreisschaar besteht. Dieses Tripel ist nicht nur gemeinschaftlich für M_1 und M_2, sondern für die sämmtlichen Kreise der Schaar, so dass für jeden seiner Punkte, also namentlich für den unendlich entfernten Punkt der Potenzlinie, die Polaren nach den Kreisen zusammenfallen. Diese Eigenschaft des genannten Punktes bleibt aber auch dann noch bestehen, wenn die durch M_1 und M_2 bestimmte Kreisschaar keine Grenzpunkte mehr hat, also ein gemeinschaftliches Tripel der Kreisschaar nicht vorhanden ist. Was die beiden Grenzpunkte anbetrifft, insofern sie wirklich existiren, so gehen durch jeden von ihnen unendlich viele Kreise, welche die vorgelegte Kreisschaar rechtwinklig schneiden. Wenn in allen diesen sich rechtwinklig schneidenden Kreisen die Gegenpunkte zu einem der Grenzpunkte construirt werden, so erfüllen dieselben eine Gerade; die Polaren des Grenzpunktes nach allen Kreisen der Schaar haben demnach die sämmtlichen Punkte dieser Geraden gemein, d. h. sie fallen zusammen. Die eindeutige und reciproke Beziehung zwischen a und a' erleidet also eine oder drei Ausnahmen, je nachdem die der Betrachtung zu Grunde gelegte Kreisschaar von der ersten oder der zweiten Art ist.

Sind drei Kreise K_1, K_2, K_3 gegeben, welche nicht derselben Kreisschaar angehören, so werden für einen beliebig in der Ebene angenommenen Punkt a die drei Polaren A_1, A_2, A_3 nach den Kreisen sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden, und man kann also nach dem Ort der besonderen Punkte fragen, für welche dieser Umstand eintritt.

Sei a ein beliebiger Punkt der Ebene, so werden seine Polaren A_1 und A_2 sich in einem Punkte a' treffen, welcher der Gegenpunkt von a in demjenigen Kreise K ist, der durch a geht und die Kreise K_1 und K_2 rechtwinklig schneidet. Ebenso findet man den Schnittpunkt a'' von A_1 und A_3 als Gegenpunkt von A in dem Kreise K', welcher durch A geht und K_1 und K_3 unter rechten Winkeln trifft. Sollen A_1, A_2, A_3 durch denselben Punkt gehen, so müssen a' und a'' zusammenfallen. Da aa' oder aa'' ein Durchmesser sowohl im Kreise K als im

Fig. 77.



Kreise K' ist, so müssen diese beiden Kreise sich in einen einzigen vereinigen, welcher dann alle Kreise K_1, K_2, K_3 unter rechten Winkeln schneidet und nach § 14 der Orthogonalkreis derselben heisst. Wenn umgekehrt ein Punkt a auf dem Kreise K liegt, welcher drei gegebene Kreise K_1, K_2, K_3 unter rechten Winkeln schneidet, so schneiden sich die Polaren A_1, A_2, A_3, die er nach diesen Kreisen erzeugt, in einem Punkte a', welcher sein Gegenpunkt im Kreise K ist.

Man möchte vielleicht aus dieser Entwickelung schliessen, dass der Orthogonalkreis alle Punkte enthalte, für welchen die Polaren nach drei gegebenen Kreisen sich in einem Punkte schneiden. Dies ist aber nicht richtig, denn man braucht sich nur zu erinnern, dass alle Kreise der Ebene auf der unendlich entfernten Geraden dasselbe Punktsystem erzeugen, so erkennt man, dass auch für jeden Punkt dieser ausgezeichneten Geraden die gestellte Forderung erfüllt ist. In der That werden für einen solchen Punkt die drei Polaren parallel und schneiden sich also nach einer schon vielfach gebrauchten Bezeichnungsweise in einem und demselben unendlich entfernten Punkte.

So wie im Anfange dieser Betrachtungen an Stelle zweier gegebenen Kreise sofort die ganze durch sie bestimmte Kreisschaar gesetzt werden konnte, so darf man jetzt auch an Stelle der Kreise K_1, K_2, K_3 die sämmtlichen Kreise setzen, welche ihren Orthogonalkreis K unter rechten Winkeln treffen. Ihre Gesammtheit nennt man ein Kreisnetz. Von den Kreisen desselben gehen durch einen Punkt p der Ebene unendlich viele, welche eine Kreisschaar der ersten Art bilden. In der That braucht man nur p mit dem Mittelpunkte M von K durch eine Gerade zu verbinden, welche K in s_1 und s_2 treffen möge, und den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p' zu p, s_1 und s_2 zu construiren, so wird jeder Kreis des Netzes, welcher p enthält, auch durch p' gehen müssen; umgekehrt schneidet jeder Kreis durch p und p' den Kreis K rechtwinklig. — Wenn zwei Punkte p und p_1, welche nicht in der Beziehung der vorigen Punkte p und p' zu einander stehen, gegeben sind, so wird durch dieselben ein und nur ein Kreis des Netzes gehen, da in p eine Schaar von Kreisen des Netzes sich trifft, von welcher Schaar ein und nur ein einziger Kreis den Punkt p_1 enthält.

Irgend zwei Kreise K_1 und K_2 des Netzes bestimmen zusammen eine Kreisschaar, deren sämmtliche Kreise dem Netze angehören, und zwar ist dann K ein Kreis der ihr conjugirten Schaar. Erzeugen also K_1 und K_2 eine Kreisschaar der zweiten Art, so müssen deren Grenzpunkte auf K liegen.

Man kann ohne Weiteres folgende Sätze hinzufügen: Im Netze kommen unendlich viele Kreise vor, die einen gegebenen Radius haben; ihre Mittelpunkte bilden einen Kreis, welcher mit K concentrisch und grösser als dieser ist. Die Kreise des Netzes, welche den Radius Null haben, bestehen aus den Punkten von K. Ferner sind die Geraden, welche den Mittelpunkt von K enthalten, zugleich diejenigen Kreise im Netze, deren Radius unendlich gross ist. — Als speciellen Fall des Netzes bieten sich alle diejenigen Kreise der Ebene dar, welche einen Punkt gemein haben, der dann als Kreis mit dem Radius Null aufgefasst, zugleich den Orthogonalkreis K des Netzes bildet. — Ebenso bilden alle diejenigen Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, einen speciellen Fall des Kreisnetzes.

Die analogen Betrachtungen im Raume sollen nicht weiter ausgeführt werden, als nöthig ist, um den Ort aller Punkte zu finden, für welche die Polarebenen nach vier willkürlich im Raume gegebenen Kugeln sich in einem Punkte schneiden.

Zunächst ist klar, dass sämmtliche Punkte auf der unendlich entfernten Ebene des Raumes der gestellten Bedingung Genüge leisten, denn für einen von ihnen gehen ja die Polarebenen nach allen möglichen im Raume befindlichen Kugeln nicht nur durch einen Punkt, sondern sogar durch eine Gerade, welche ebenfalls im Unendlichen liegt. (Nach Früherem schneiden sich parallele Ebenen in einer unendlich entfernten Geraden.)

Der übrige Theil des gesuchten Ortes bestimmt sich durch nachfolgende Ueberlegungen: Wenn zwei Kugeln K und K_1 sich unter rechten Winkeln treffen, so wird eine Ebene, welche durch ihre resp. Mittelpunkte M und M_1 geht, zwei Grosskreise dieser Kugeln enthalten, welche sich ebenfalls rechtwinklig schneiden. Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung der auf Pole und Polarebene bezüglichen Eigenschaften der Kugel der Satz: Schneidet eine Kugel K eine andere K_1 rechtwinklig, so geht die Polarebenen eines Punktes a auf K in Bezug auf K_1 durch den Gegenpunkt a' von a nach K, d. h. durch denjenigen Punkt a', welcher der zweite Endpunkt des durch a gezogenen Durchmessers der Kugel K ist.

Sind nun vier Kugeln K_1, K_0, K_3, K_4 gegeben, so construire man nach § 15 ihre Orthogonalkugel K; dann werden die Punkte derselben die verlangte Eigenschaft haben, dass die Polarebenen irgend eines von ihnen, der a heissen möge, in Bezug auf K_1, K_2, K_3, K_4 sich in einem und demselben Punkte p' schneiden, welcher der Gegenpunkt von a nach K ist.

Zum Schlusse sei bemerkt, dass hier stillschweigend vorausgesetzt ist, dass die Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 wirklich eine Orthogonalkugel zulassen. Dies hängt aber davon ab, dass der Schnittpunkt der sechs Polarebenen, welche sie zu je zweien erzeugen, ausserhalb der Kugeln liege. Eine ganz ähnliche Bemerkung muss natürlich auch dem oben behandelten entsprechenden ebenen Problem angefügt werden.

§ 23.

Der Pascal'sche Satz.

In einem einfachen Sechsecke, dessen Ecken $ABCDEF$ und dessen Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FA sein mögen, heissen A und D, B und E, C und F gegenüberliegende Ecken,

AB und DE, BC und EF, CD und FA gegenüberliegende Seiten. Nennt man die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten P, Q, R, so dass $(AB, DE) = P$, $(BC, EF) = Q$, $(CD, FA) = R$, so liegen diese Punkte jedesmal in einer Geraden, sobald $ABCDEF$ sich auf einer Kreisperipherie befinden, d. h.: In einem dem Kreise eingeschriebenen Sechsecke liegen die drei Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten in einer geraden Linie.

Dieser Satz heisst der Pascal'sche Satz. Obschon derselbe für die in diesem Buche behandelten Fragen von keiner Bedeutung ist, sondern seine wichtigsten Consequenzen auf einem ganz andern Gebiete findet, so soll er doch hier ausführlicher erörtert werden, als ein Beispiel dafür, dass das nämliche Resultat auf verschiedenen Wegen erreicht werden kann.

Man verlängere in dem Sechsecke $ABCDEF$ die Seiten BC, DE, FA, so dass sie ein Dreieck LMN bilden. Für die Ecken desselben gelten nach dem Satze von der Potenz des Kreises die Gleichungen:

$$1.\ LD \cdot LE = LF \cdot LA;$$
$$2.\ MF \cdot MA = MB \cdot MC;$$
$$3.\ NB \cdot NC = ND \cdot NE.$$

Drei weitere Gleichungen werden aus dem ersten Transversalensatze (§ 1) erhalten, indem man das Dreieck LMN successive mit den Geraden AB, CD, EF schneidet. Es ergibt sich dann:

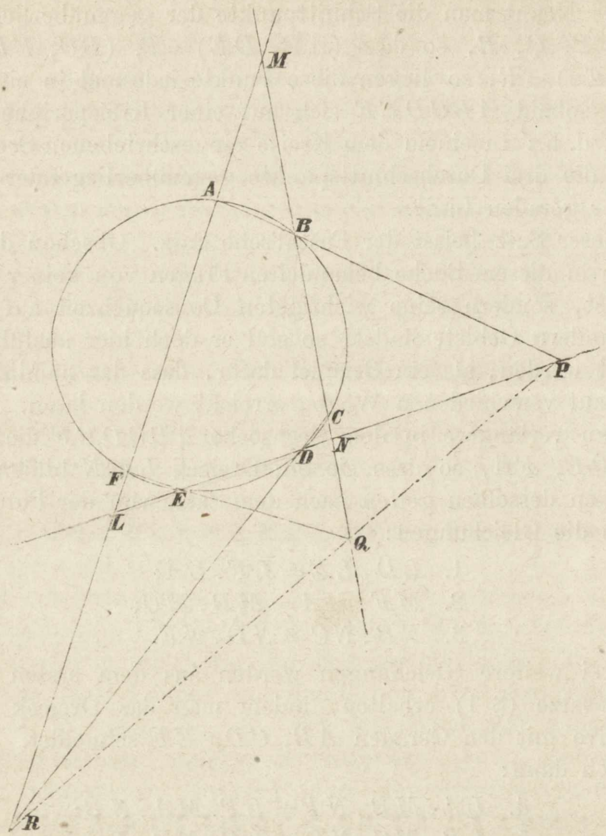
$$4.\ LA \cdot MB \cdot NP = LP \cdot MA \cdot NB;$$
$$5.\ LR \cdot MC \cdot ND = LD \cdot MR \cdot NC;$$
$$6.\ LF \cdot MQ \cdot NE = LE \cdot MF \cdot NQ.$$

Aus der Multiplication der Gleichungen 1 bis 6 folgt weiter:

$$7.\ LR \cdot MQ \cdot NP = LP \cdot MR \cdot NQ,$$

d. h. die Punkte PQR bestimmen auf den Seiten des Dreiecks LMN derartige Abschnitte, dass das Product dreier nicht aneinanderliegender unter ihnen gleich dem Product der drei anderen ist. Aus der Fig. 78 ersieht man, dass die Punkte PQR alle drei auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks LMN liegen; es befinden sich demnach, zufolge der Umkehrung des vorhin aus § 1 citirten Satzes, PQR in einer Geraden, womit der Pascal'sche Satz bewiesen ist.

Fig. 78.



Immerhin muss diesem Beweise noch eine Erläuterung angefügt werden. Derselbe zerfällt nämlich in zwei Theile: 1. Beweis, dass die auf den Seiten des Dreiecks LMN gelegenen Punkte PQR Strecken erzeugen, welche der Gleichung 7 genügen, und 2. Beweis, dass diese drei Punkte PQR resp. auf den Verlängerungen der drei Strecken LN, NM, ML liegen. Der erste Theil ist immer richtig, d. h. die Gleichung 7 ist erfüllt, sobald nur $ABCDEF$ sechs Punkte eines Kreises sind; der zweite Theil aber wurde stillschweigend dem Umstande entnommen, dass diese sechs Punkte in der Fig. 78 zu einem c o n v e x e n einfachen Sechsecke verbunden sind. Nun gibt es nach § 7 mannichfach geartete, vom convexen verschiedene einfache

Sechsecke; man kann sogar, wenn die sechs Ecken $ABCDEF$ gegeben sind, ohne dass die Reihenfolge, in welcher sie unter einander verbunden sein sollen, festgestellt ist, aus ihnen, die ein bestimmtes vollständiges Sechseck constituiren, 60 verschiedene einfache Sechsecke herstellen, und es fragt sich also, ob für jedes beliebige einfache Sechseck im Kreise der Pascal'sche Satz seine Giltigkeit behalte. Offenbar hängt dies davon ab, ob die Punkte PQR der Situationsbedingung genügen, welche in § 1 der vorhin benutzten Umkehrung eines ebenfalls angewendeten Transversalensatzes beigegeben wurde, d. h.: es muss gezeigt werden, dass PQR entweder alle drei auf den verlängerten Seiten des Dreiecks LMN liegen, oder dass einer der Punkte auf einer verlängerten, die beiden anderen auf den Seiten des Dreiecks selbst gelegen seien.

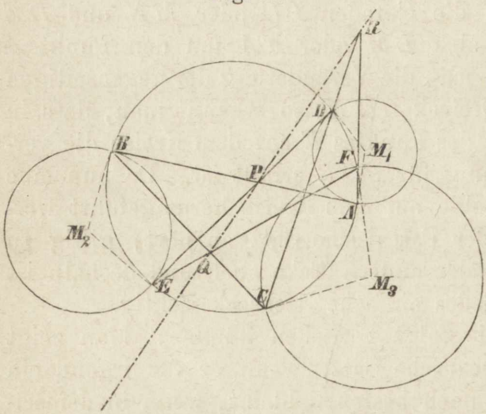
Zu dem Ende nehme man an, dass für irgend ein einfaches Sechseck $ABCDEF$ im Kreise, das durchaus nicht daran gebunden ist, ein convexes zu sein, der Pascal'sche Satz bewiesen sei. Hält man dann die Ecken $ABCDE$ fest, während F sich auf dem Kreise herumbewegt, so bleibt der Punkt P unveränderlich; ebenso bleiben die Geraden BC oder MN und DE oder NL fest, indess sich LM oder FA um den Punkt A herumbewegt. Verfolgt man die Veränderung der gegenseitigen Lage von PQR zum Dreieck LMN, so erkennt man, dass in der That für jede Lage des Punktes F auf dem Kreise die verlangte Situationsbedingung für PQR erfüllt ist. Da nun eine Ecke des Sechsecks beliebig auf dem Kreise herumgeführt werden kann, ohne dass der Pascal'sche Satz aufhört, giltig zu sein, so gilt dies von jeder andern Ecke auch und deshalb ist der genannte Satz für jedes einfache Sechseck richtig.

Man hätte auch wie folgt vorgehen können: Man zeigt zunächst, dass der Pascal'sche Satz, wenn er für irgend ein einfaches Sechseck gilt, noch bestehen bleibt, wenn in demselben zwei Ecken mit einander vertauscht werden (wobei im Wesentlichen nur die drei Fälle zu unterscheiden sind, wo man A mit B, C oder D vertauscht). Ist dieser Beweis geleistet, so ist der Pascal'sche Satz für jedes einfache Kreissechseck bewiesen, da durch successive Vertauschung der Ecken zu je zweien jedes derselben auf ein convexes zurückgeführt werden kann, für welches der Satz gilt.

Zu einem zweiten Beweise des Pascal'schen Satzes gelangt man vermittelst der Bemerkung, dass die sechs Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise zu je dreien auf vier Geraden liegen: nämlich die drei äusseren befinden sich in einer Aehnlichkeitsaxe und ebenso jeder äussere mit den beiden ihm nicht zugehörigen inneren (§ 17). Wenn man also in einem Kreissechsecke $ABCDEF$ die Durchschnittspunkte PQR der gegenüberliegenden Seiten als drei, einer und derselben Axe entnommene Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise darstellen kann, so ist der verlangte Beweis geleistet. Dieser Beweis zerfällt nun, wie der vorige, in zwei Theile: zunächst müssen PQR überhaupt als Aehnlichkeitspunkte dreier bestimmter Kreise dargestellt werden und dann ist zu zeigen, dass dieselben immer einer und derselben Aehnlichkeitsaxe angehören.

Der zweite Theil wird erledigt, indem man in Analogie zu Früherem beweist, dass eine Vertauschung zweier Ecken des Sechsecks unter einander seine Richtigkeit nicht aufheben kann. Was den ersten Theil anbetrifft, so ergibt sich Folgendes: Nennt man A und D, B und E, C und F gegenüberliegende Ecken des dem Kreise K eingeschriebenen Sechsecks, so kann man jeweilen in einem Paar gegenüberliegender Ecken die Tangenten an K legen, welche sich beziehentlich in $M_1 M_2 M_3$ schneiden werden. Diese drei Punkte sind Mittelpunkte von drei Kreisen, von denen jeder K rechtwinklig schneidet, und zwar der erste in A und D, der zweite in B und E, der dritte in C und F.

Fig. 79.



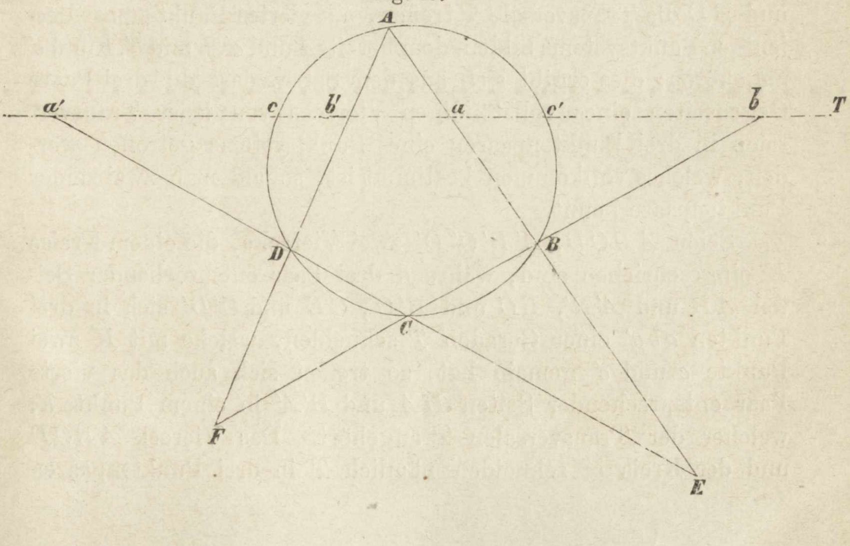
Da die in A an M_1 und die in B an M_2 gelegten Tangenten sich im Mittelpunkte M des Kreises K schneiden und ferner $MA = MB$ ist, so kann man einen Kreis legen, welcher M_1 in A und M_2 in B berührt. Nach der vorliegenden Fig. 79 wird die Berührung eine ungleichartige sein (§ 17) und demnach wird die Berührungssehne AB durch den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2 gehen. Da ferner $MD = ME$, so kann man einen Kreis legen, welcher M_1 und M_2 in den Punkten D und E berührt, und zwar, wie die Figur zeigt, ebenfalls ungleichartig, d. h. die Berührungssehne DE geht auch durch den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2. Es ergibt sich hieraus, dass AB und DE sich in diesem innern Aehnlichkeitspunkte schneiden, welcher also P ist.

Ganz analog zeigt man, dass Q mit dem innern Aehnlichkeitspunkte der Kreise M_2 und M_3 zusammenfällt, und ebenso, dass R mit dem äussern Aehnlichkeitspunkte der Kreise M_3 und M_1 vereinigt ist; daraus folgt unmittelbar, dass PQR auf einer Geraden liegen.

Die gerade Linie, welche zwei von den Punkten PQR verbindet und also auch den dritten enthält, kann, wenn sie nicht ausnahmsweise den Kreis K berührt, diesem gegenüber zwei wesentlich verschiedene Lagen annehmen, indem sie ihn nämlich entweder schneidet oder nicht schneidet. Im erstern Falle ergibt sich der Pascal'sche Satz als eine specielle Folgerung aus einem Theoreme, welches den Kreis mitder Lehre von den Punktsystemen verbindet.

Sei $ABCD$ ein dem Kreise K eingeschriebenes Viereck mit den gegenüberliegenden Seiten AB und CD, BC und DA, so wird eine Transversale T, welche K schneidet, drei Punkten-

Fig. 80.



paare enthalten, a und a', b und b', welche aus den zwei Paaren gegenüberliegender Seiten sich ergeben, und c und c', welches dem Kreise angehört; diese drei Punktenpaare befinden sich in Involution oder sind drei Punktenpaare eines und desselben Punktsystems.

Zufolge des Satzes von der Potenz des Kreises hat man:

$$1.\quad EA\,.\,EB = EC\,.\,ED;$$
$$2.\quad ac\,.\,ac' = aA\,.\,aB;$$
$$3.\quad a'D\,.\,a'C = a'c\,.\,a'c'.$$

Man hat ferner in Anwendung des oft benutzten Transversalensatzes (§ 1) unter Bezugnahme auf das Dreieck Eaa' und die Transversalen BC und DA:

$$4.\quad EC\,.\,Ba\,.\,a'b = EB\,.\,Ca'\,.\,ab;$$
$$5.\quad ED\,.\,Aa\,.\,a'b' = EA\,.\,Da'\,.\,ab'.$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1 bis 5 bekommt man:

$$ac\,.\,ac'\,.\,a'b\,.\,a'b' = a'c\,.\,a'c'\,.\,ab\,.\,ab'$$

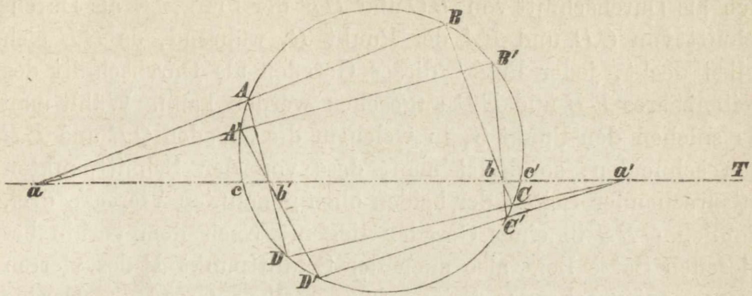
oder auch:

$$\frac{ab\,.\,ab'}{ac\,.\,ac'} = \frac{a'b\,.\,a'b'}{a'c\,.\,a'c'}.$$

Diese Relation ist aber eine von denjenigen, welche nach § 10 zwischen drei Punktenpaaren eines Punktsystems bestehen, der oben ausgesprochene Satz ist also bewiesen. Es mag noch hinzugefügt werden, dass die Punkte d und d', in welchen CA und BD die Transversale T treffen, ein viertes Punktenpaar desjenigen Punktsystems bilden, dem bereits a und a', b und b', c und c' angehören; dies ergibt sich aus dem Satze, dass die drei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks von jeder Transversalen in drei Punktenpaaren eines Punktsystems getroffen werden, welches vollkommen bestimmt ist, sobald man zwei seiner Punktenpaare kennt.

Seien $ABCD$, $A'B'C'D'$ zwei Vierecke, die einem Kreise K eingeschrieben sind, während drei Paar entsprechender Seiten AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CD und $C'D'$ sich in drei Punkten aba' einer Geraden T schneiden, welche mit K zwei Punkte c und c' gemein hat, so treffen sich auch das vierte Paar entsprechender Seiten DA und $D'A'$ in einem Punkte b', welcher der Transversalen T angehört. Das Viereck $ABCD$ und der Kreis K schneiden nämlich T in drei Punktenpaaren

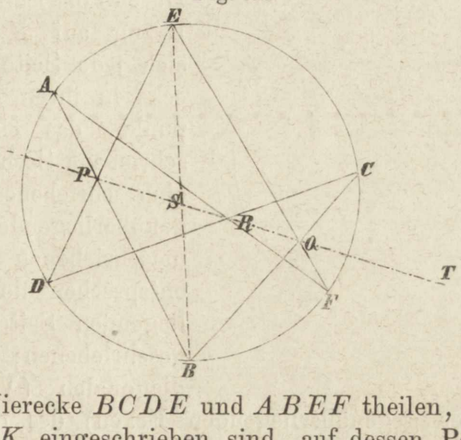
Fig. 81.



eines Punktsystems, oder auch: die Gerade DA geht durch denjenigen Punkt b', welcher mit b zusammengenommen ein Punktenpaar des durch a und a', c und c' bestimmten Punktsystems bildet. Ebenso folgt aus der Lage des Vierecks $A'B'C'D'$ gegenüber dem Kreise K, dass auch $D'A'$ durch den Punkt b' gehen muss, der mit b zusammengenommen ein Punktenpaar des durch a und a', c und c' gegebenen Punktsystems erzeugt. Da nun, wenn a und a', c und c' sowie b gegeben sind, der Punkt b' vollkommen eindeutig bestimmt ist, so schneiden sich in der That DA und $D'A'$ in einem Punkte von T.

Der Pascal'sche Satz ergibt sich jetzt wie folgt: Das Sechseck $ABCDEF$ kann man durch die Diagonale BE in

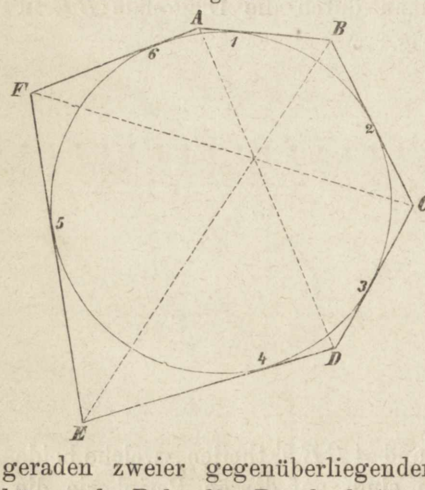
Fig. 82.



die beiden Vierecke $BCDE$ und $ABEF$ theilen, welche beide dem Kreise K eingeschrieben sind, auf dessen Peripherie die Ecken des einfachen Sechsecks sich befinden. Werden DE und AB, BC und EF, CD und FA, EB und EB als entsprechende Seiten in den beiden Vierecken aufgefasst, so ergibt sich als Durchschnitt von BC und EF der Punkt Q, als Durchschnitt von CD und FA der Punkt R, während, da BE sich selbst deckt, jeder Punkt dieser Geraden als Durchschnitt des Seitenpaares EB und EB angesehen werden kann. Wählt man als solchen den Punkt S, in welchem die Geraden QR und EB sich schneiden, so findet man, dass von den Schnittpunkten entsprechender Seiten der beiden oben genannten Vierecke drei, nämlich QRS in einer Geraden liegen. Nach dem vorhin bewiesenen Satze liegt also auch der Schnittpunkt P des vierten Paares entsprechender Seiten in derselben Geraden. Daraus folgt für das Sechseck $ABCDEF$ der Satz, dass die Schnittpunkte PQR seiner drei Paare gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden liegen, womit der Pascal'sche Satz bewiesen ist, freilich mit einer bereits angegebenen Einschränkung.

Aus dem Pascal'schen Satze folgt durch Polarisation in Bezug auf den Kreis der Brianchon'sche Satz: Sind die Seiten eines einfachen Sechsecks zugleich Tangenten eines Kreises, so schneiden sich seine Hauptdiagonalen in einem und demselben Punkte. Sei $ABCDEF$ ein solches Sechseck, in welchem A und D, B und E, C und F gegenüberliegende Ecken sind und welches dem Kreise K umschrieben sein mag. Durch Polarisation (§ 19) in Bezug auf K verwandelt sich jede Seite des Sechsecks in ihren Berührungspunkt, das einfache umschriebene Sechseck in ein eingeschriebenes. Den gegenüberliegenden Ecken des umschriebenen Sechsecks entsprechen die gegenüberliegenden Seiten des eingeschriebenen; den Hauptdiagonalen (Verbindungsgeraden zweier gegenüberliegenden Ecken) des ersteren gehören als Pole die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten des zweiten zu. Nach dem Pascal'schen Satze lie-

Fig. 83.



gen diese in einer Geraden, also schneiden sich ihre Polaren, die drei Hauptdiagonalen des dem Kreise umschriebenen Sechsecks in einem Punkte.

Der Pascal'sche und der Brianchon'sche Satz geben zu mannichfachen Specialfällen Veranlassung; von diesen soll nur ein einziger hervorgehoben werden. Lässt man in einem dem Kreise eingeschriebenen Sechsecke $ABCDEF$ resp. die Ecken A und B, C und D, E und F zusammenfallen, so ergibt sich in Anwendung des Pascal'schen Satzes, dass in einem Dreieck die Schnittpunkte der Seiten mit den Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken an den umschriebenen Kreis in einer Geraden liegen. Die analoge Specialisirung des Brianchon'schen Satzes lautet: Verbindet man die Ecken eines Dreiecks mit den Punkten, in welchen die gegenüberliegenden Seiten von dem dem Dreiecke eingeschriebenen Kreise berührt werden, durch Gerade, so schneiden sich dieselben in einem Punkte. (In den §§ 1 und 2 sind übrigens diese beiden Particularfälle bereits bewiesen worden.)

§ 24.

Das Berührungsproblem der Kreise.

Bei praktischen Constructionen, die man auszuführen hat, kommt es häufig vor, dass ein Kreis nicht durch den Mittelpunkt und den Radius oder durch drei Punkte gegeben ist, sondern dass man nur eine nothwendige und hinreichende Anzahl von Bedingungen kennt, denen er genügen soll; es handelt sich dann darum, den so bestimmten Kreis oder, wenn die Aufgabe mehrere Lösungen zulässt, die beschränkte Anzahl der so bestimmten Kreise wirklich zu construiren. Aus der grossen Reihe derartiger Aufgaben soll hier die eine behandelt werden: Einen Kreis zu finden, der drei gegebene Kreise berührt. — Wenn man beachtet, dass eine Gerade sowohl als ein Punkt specielle Fälle des Kreises sind, die entstehen, indem man den Radius das eine Mal unendlich gross, das andere Mal unendlich klein werden lässt, so folgt, dass in dieser Aufgabe eine Anzahl speciellerer Aufgaben enthalten sind.

Um einen Ueberblick der Lösungen des allgemeineren Problems zu gewinnen, setze man zunächst voraus, dass die drei gegebenen Kreise $M_1\, M_2\, M_3$ ausser einander liegen. Es sind dann folgende Fälle möglich:

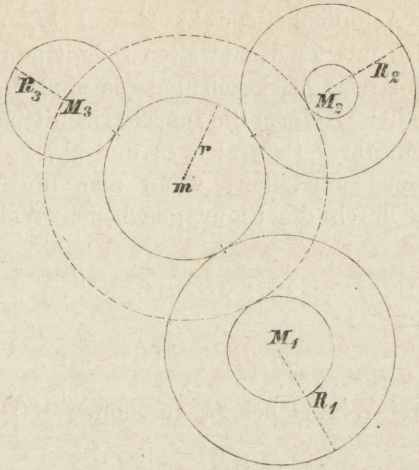
1. der gesuchte Kreis m schliesst alle drei Kreise $M_1 M_2 M_3$ aus
oder
2. „ „ „ m „ „ „ „ $M_1 M_2 M_3$ ein,
3. „ „ „ m „ M_1 aus, M_2 und M_3 ein
oder
4. „ „ „ m „ M_1 ein, M_2 und M_3 aus,
5. „ „ „ m „ M_2 aus, M_3 und M_1 ein
oder
6. „ „ „ m „ M_2 ein, M_3 und M_1 aus,
7. „ „ „ m „ M_3 aus, M_1 und M_2 ein
oder
8. „ „ „ m „ M_3 ein, M_1 und M_2 aus.

Es können also acht Kreise gefunden werden, welche alle die gegebenen drei Kreise berühren. Diese acht Kreise zerfallen in vier Gruppen zu je zweien, wie schon durch das obige Schema angedeutet ist; übrigens wird sich die Zusammengehörigkeit je zweier mit einander verbundenen Kreise auch durch die Construction ergeben.

Will man den Kreis m finden, welcher $M_1 M_2 M_3$ berührt und sie ausschliesst, so kann man wie folgt vorgehen: Die Bezeichnung der Kreise diene (wie bereits in den früheren Paragraphen mehrfach angenommen wurde) zugleich als Benennung der Mittelpunkte, ferner seien r, R_1, R_2, R_3 die Radien resp. von m, M_1, M_2, M_3, wobei vorausgesetzt, dass M_1 der grösste, M_2 der mittlere, M_3 der kleinste der drei Kreise sei. (Der Fall, wo zwei oder drei gleich grosse Kreise gegeben sind, bietet keine Schwierigkeiten, sondern vielmehr Erleichterungen.)

Wird die Aufgabe bereits als gelöst betrachtet, so kann man einen Kreis M mit dem Mittelpunkte m construiren, dessen Radius gleich $r + R_3$ ist; derselbe geht durch M_3 und berührt ausschliessend die Kreise, welche resp. M_1 und M_2 zu Mittelpunkten und $R_1 - R_3$ und $R_2 - R_3$ zu Radien haben. Wenn man umgekehrt einen Kreis construirt, welcher durch M_3 geht und die Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und den Radien $R_1 - R_3$, $R_2 - R_3$ ausschliessend berührt, so hat man nur einen ihm concentrischen Kreis, dessen Radius um R_3 kleiner ist, zu

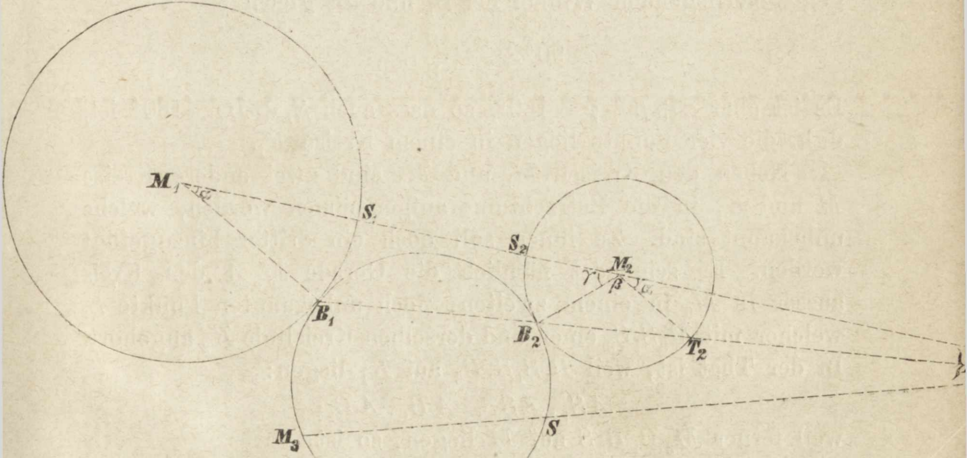
Fig. 84.



verzeichnen, um sofort den gesuchten Kreis m zu haben. Die gesuchte Aufgabe ist also darauf zurückgekehrt, einen Kreis M zu finden, welcher durch einen Punkt M_3 geht und zwei Kreise M_1 und M_2 (resp. von den Radien $R_1 - R_3$, $R_2 - R_3$) ausschliessend berührt.

Seien B_1 und B_2 die Berührungspunkte des gesuchten Kreises mit den Kreisen M_1 und M_2, so muss nach einem früher

Fig. 85.



bewiesenen Satze (§ 17) die Verbindungsgerade $B_1 B_2$ durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A von M_1 und M_2 gehen. Wenn man also mit T_2 den zweiten Schnittpunkt der Geraden $B_1 B_2$ mit dem Kreise M_2 bezeichnet, so sind die Radien $M_1 B_1$ und $M_2 T_2$ parallel. Heissen die inneren Schnittpunkte der Kreise M_1 und M_2 mit ihrer Centralen S_1 und S_2, so kann man folgende Relationen aufstellen, wenn man die Winkel um M_2 herum in der durch die Figur gegebenen Weise mit α, β, γ bezeichnet:

$$\sphericalangle\, T_2 B_2 M_2 = 90^0 - \frac{\beta}{2},$$

$$M_2 B_2 S_2 = 90^0 - \frac{\gamma}{2},$$

und da die drei Winkel bei B_2 zusammen 180^0 betragen:

$$\sphericalangle\, S_2 B_2 B_1 = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Da ferner

$$M_1 S_1 B_1 = 90^0 - \frac{\alpha}{2},$$

so ist

$$\sphericalangle\, B_1 S_1 S_2 = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$$

und demzufolge ist in dem Viereck $B_1 S_1 S_2 B_2$ die Summe der gegenüberliegenden Winkel bei S_1 und B_2 gleich

$$90^0 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Es ist aber $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, so dass auch $S_1 + B_2 = 180^0$ ist, d. h. die vier Punkte liegen in einem Kreise K_1.

Neben den Kreisen M_1 und M_2 sind zwei andere Kreise M und K_1 in die Betrachtung aufgenommen worden, welche unbekannt sind. Zu ihnen soll noch ein dritter hinzugefügt werden. Es schneidet nämlich die Gerade $M_3 A$ den Kreis ausser in M_3 in einem zweiten, noch unbekannten Punkte S, welcher mit $M_3 S_1 S_2$ einer und derselben Kreislinie K_2 angehört. In der That ist, weil $B_1 S_1 S_2 B_2$ auf K_1 liegen:

$$AS_1 \,.\, AS_2 = AB_1 \,.\, AB_2;$$

weil ferner $M_3 B_1 B_2 S$ auf M liegen, so ist

$$AB_1 \,.\, AB_2 = AM_3 \,.\, AS;$$

daraus folgt, dass

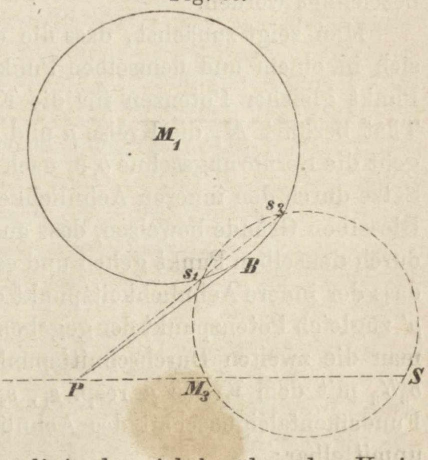
$$AS_1 \,.\, AS_2 = AM_3 \,.\, AS$$

und diese Gleichung zeigt an, dass $M_3 S_1 S_2 S$ einem und demselben Kreise angehören. Construirt man also den Kreis, welcher $M_3 S_1 S_2$ enthält, so schneidet derselbe die Gerade AM_3 ausser in M_3 noch in einem Punkte S des gesuchten Kreises M. Dieser letztere Schluss würde sich auch wie folgt ergeben: Die drei Potenzlinien der Kreise M, K_1 und K_2 (welch letzterer durch die Punkte $M_3 S_1 S_2$ gehen soll, schneiden sich in einem und demselben Punkte. Die Potenzlinie von M und K_1 ist $B_1 B_2$, die Potenzlinie von K_1 und K_2 ist $S_1 S_2$; beide schneiden sich in A, durch welchen Punkt demnach auch die Potenzlinie von M und K_2 gehen muss. Aber diese Potenzlinie geht durch M_3, ist also $M_3 A$ und auf ihr müssen sich M und K_2 ausser in M_3 noch einmal treffen, wie sich bereits vorhin ergeben hatte.

Nachdem S gefunden ist, muss nun der Kreis M so bestimmt werden, dass er durch M_3 und S geht und die Kreise M_1 und M_2 ausschliessend berührt. Es ist also zuvörderst dafür Sorge zu tragen, dass er M_3 und S enthält und einen der Kreise, z. B. M_1 berührt.

Zu dem gegebenen Kreise M_1 und dem gesuchten M nehme man noch einen dritten M', welcher die Punkte M_3 und S enthält und den Kreis M_1 schneidet, sonst aber ganz willkürlich sein kann; die Schnittpunkte von M_1 und M' seien s_1 und s_2. Es werden sich jetzt die Potenzlinien der Kreise M, M' und M_1 in einem und demselben Punkte schneiden und zwar in dem Punkte P, welchen die Geraden $s_1\, s_2$ und $M_3 S$ gemein haben, denn $s_1 s_2$ ist die Potenzlinie von M' und M_1, ebenso $M_3 S$ die Potenzlinie von M und M'. Durch den

Fig. 86.



Punkt P geht auch die Potenzlinie der sich berührenden Kreise M und M_1, welche deren gemeinschaftliche Tangente ist. Zieht man also von P aus eine Tangente an M_1, welche den Berührungspunkt B haben möge, so ist M_3SB ein Kreis, welcher durch M_3 und S geht und den Kreis M_1 berührt. Da von P aus zwei Tangenten an M_1 gehen, so erhält man zwei derartige Kreise, von denen aber nur einer der Bedingung Genüge leistet, dass er gleichzeitig M_1 und M_2 ausschliessend berührt, und dieser ist der gesuchte Kreis M; ein mit ihm concentrischer Kreis, dessen Radius um R_3 kleiner ist, wird endlich der Kreis m sein, welcher die Kreise M_1, M_2, M_3 so berührt, dass er sie alle drei ausschliesst.

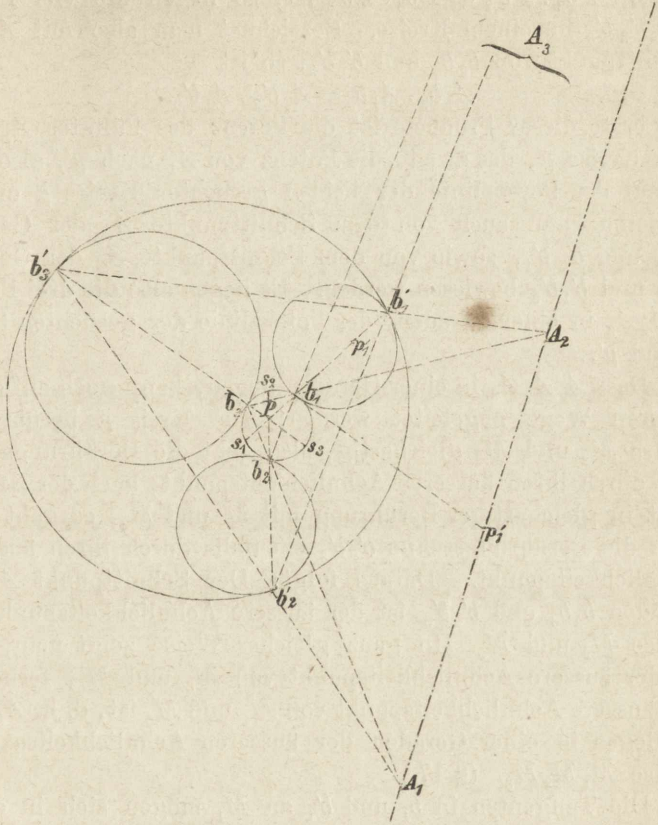
Für die sieben anderen Kreise, welche die im Anfange dieses Paragraphen aufgestellte Tabelle gibt, gelten ganz ähnliche Constructionen, deren weitere Ausführung um so weniger von Interesse ist, als neben der eben gegebenen Lösung der Aufgabe, welche dieselbe auf immer einfachere Aufgaben zurückführt, noch eine andere abgeleitet werden soll, die ohne diese Reductionen zum Ziele gelangt.

Seien wiederum $M_1 M_2 M_3$ die drei gegebenen Kreise, so sollen dieselben untersucht werden in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber den Kreisen μ und μ', von denen jeder die drei gegebenen berührt, während der erste sie alle drei ausschliesst, der zweite sie einschliesst. Die Berührungspunkte auf μ mögen resp. mit b_1, b_2, b_3, die Berührungspunkte auf μ' mit b'_1, b'_2, b'_3 bezeichnet werden.

Man zeigt zunächst, dass die drei Geraden $b_1 b'_1$, $b_2 b'_2$, $b_3 b'_3$ sich in einem und demselben Punkte P schneiden, welcher der Punkt gleicher Potenzen für die Kreise $M_1 M_2 M_3$ ist. In der That berührt M_1 die Kreise μ und μ' ungleichartig, demzufolge geht die Berührungssehne $b_1 b_2$ nach einem mehrfach angewandten Satze durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise μ und μ'. Dieselben Gründe beweisen, dass auch die Geraden $b_2 b'_2$ und $b_3 b'_3$ durch denselben Punkt gehen und es ist also nur noch abzuleiten, dass der innere Aehnlichkeitspunkt der unbekannten Kreise μ und μ' zugleich Potenzpunkt der gegebenen Kreis $M_1 M_2 M_3$ ist. Nennt man die zweiten Durchschnittspunkte der Geraden $b_1 b'_1$, $b_2 b'_2$, $b_3 b'_3$ mit dem Kreise μ resp. s_1, s_2, s_3, so ergibt sich aus der Fundamentaleigenschaft des Aehnlichkeitspunktes zweier Kreise unmittelbar:

$$Pb'_1 : Pb'_2 : Pb'_3 = Ps_1 : Ps_2 : Ps_3.$$

Fig. 87.



Die beiden letzten Glieder auf beiden Seiten dieser Proportion ergeben die Gleichung

$$1. \quad Pb'_2 \,.\, Ps_3 = Pb'_3 \,.\, Ps_2.$$

Ferner ist nach der Potenzeigenschaft des Kreises auch

$$2. \quad Pb_2 \,.\, Ps_2 = Pb_3 \,.\, Ps_3,$$

also durch Multiplication von 1. und 2.:

$$3. \quad Pb_2 \,.\, Pb'_2 = Pb_3 \,.\, Pb'_3.$$

Ganz analog ergibt sich, dass auch $Pb_1 \,.\, Pb'_1$ jedem der in der Gleichung 3. enthaltenen Producte gleich ist, d. h. der Punkt P erzeugt gleiche Potenz nach den Kreisen M_1, M_2, M_3, er ist also ihr Potenzpunkt.

Da $Pb_2 \, . \, Pb'_2 = Pb_3 \, . \, Pb'_3$ ist, so liegen die vier Punkte $b_2 b_3 b'_2 b'_3$ in einem Kreise. Bezeichnet man also mit A_1 den Schnittpunkt von $b_2 b_3$ und $b'_2 b'_3$, so ist

$$A_1 b_2 \, . \, A_1 b_3 = A_1 b'_2 \, . \, A_1 b'_3.$$

Das erste dieser Producte ist die Potenz des Punktes A_1 nach dem Kreise μ, das zweite die Potenz von A_1 nach μ', also liegt A_1 auf der Potenzlinie der beiden gesuchten Kreise μ und μ'. Dasselbe kann auch von dem Schnittpunkte A_2 der Geraden $b_3 b_1$ und $b'_3 b'_1$, sowie von dem Schnittpunkte A_3 der Geraden $b_1 b_2$ und $b'_1 b'_2$ bewiesen werden. Es liegen also die drei Punkte $A_1 A_2 A_3$ in einer Geraden, der Potenzlinie der gesuchten Kreise μ und μ'.

Dass $A_1 A_2 A_3$ in einer Geraden liegen, kann noch auf einem anderen Wege abgeleitet werden: Der Kreis μ berührt die Kreise M_2 und M_3 gleichartig, also geht die Berührungssehne $b_2 b_3$ durch ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt; auch der Kreis μ' steht in gleichartiger Berührung mit M_2 und M_3, es geht demnach die Berührungssehne $b'_2 b'_3$ ebenfalls durch ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt. Daraus folgt: Der Schnittpunkt A_1 der Geraden $b_2 b_3$ und $b'_2 b'_3$ ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_2 und M_3. In ganz gleicher Weise zeigt man, dass A_2 der äussere Aehnlichkeitspunkt von M_3 und M_1, ferner A_3 der äussere Aehnlichkeitspunkt von M_1 und M_2 ist, d. h. A_1, A_2, A_3 liegen in einer Geraden der äusseren Aehnlichkeitsaxe der Kreise $M_1 M_2 M_3$. (§ 17.)

Die Tangenten in b_1 und b'_1 an M_1 mögen sich in einem Punkte p'_1 schneiden, dann sind die Strecken $p'_1 b_1$ und $p'_1 b'_1$ gleich lang. Die Strecke $p'_1 b_1$ ist zugleich eine Tangente an μ, die Strecke $p'_1 b'_1$ eine Tangente an μ', also liegt p'_1 auf der Linie gleicher Tangenten (§ 14) oder auf der Potenzlinie der Kreise $\mu \mu'$. Wenn p'_2 der Schnittpunkt der in b_2 und b'_2 an M_2 gelegten Tangenten ist, ferner p'_3 den Schnittpunkt der in b_3 und b'_3 an M_3 gelegten Tangenten bezeichnet, so müssen nach dem eben Entwickelten die Punkte $p'_1 p'_2 p'_3$ auf der Geraden $A_1 A_2 A_3$ liegen.

Die Gerade $b_1 b'_1$ ist die Polare des Punktes p'_1 in Bezug auf den Kreis M_1; da p'_1 auf der Geraden $A_1 A_2 A_3$ liegt, so wird der Pol p'_1 dieser letzteren nach M_1 genommen auf $b_1 b'_1$ liegen müssen, oder $b_1 b'_1$ wird durch den Pol p_1 der Geraden

$A_1 A_2 A_3$ gehen. Ebenso geht $b_2 b'_2$ durch den Pol p_2 von $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf den Kreis M_2 und $b_3 b'_3$ geht durch den Pol p_3 von $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf den Kreis M_3.

Die abgeleiteten Beziehungen der gesuchten Kreise μ und μ' zu den gegebenen Kreisen $M_1 M_2 M_3$ ergeben nun folgende Construction der ersteren: Man construire die Axe $A_1 A_2 A_3$ der äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kreise $M_1 M_2 M_3$, sowie den Potenzpunkt P dieser drei Kreise. Im Ferneren bestimme man die Pole $p_1 p_2 p_3$ der geraden Linie $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf die Kreise $M_1 M_2 M_3$, so schneidet die Gerade Pp_1 auf M_1 die Punkte b_1 und b'_1 aus, während die Geraden Pp_2 und Pp_3 auf den Kreisen M_2 und M_3 resp. die Punkte b_2 und b'_2, b_3 und b'_3 ergeben. Sowohl von μ als von μ' kennt man jetzt drei Punkte, so dass die beiden Kreise leicht zu construiren sind, namentlich wenn man bedenkt, dass ihre Mittelpunkte sich sofort ergeben, wenn die Mittelpunkte der Kreise $M_1 M_2 M_3$ vorliegen.

Um das Problem, sämmtliche Kreise zu finden, welche drei gegebene Kreise berühren, vollständig zu erledigen, hat man nur an Stelle der Aehnlichkeitsaxe $A_1 A_2 A_3$ die drei anderen Aehnlichkeitsaxen, zu welchen (nach § 17) $M_1 M_2 M_3$ noch Veranlassung geben, zu setzen, so ergibt jede derselben zwei der Kreise, und zwar zwei solche, die eine der vier Gruppen bilden, wie sie im Anfange dieses Paragraphen gegeben worden sind.

Die mannichfaltigen speciellen Fälle dieser Aufgabe sollen nicht erörtert werden, hingegen sei schliesslich noch darauf hingewiesen, dass unter Umständen eine Anzahl der acht Lösungen illusorisch werden kann, was sich dadurch anzeigt, dass die Geraden Pp_1, Pp_2, Pp_3 oder die ihnen für die übrigen Aehnlichkeitsaxen entsprechenden Geraden keine Schnittpunkte mit den Kreisen $M_1 M_2 M_3$ gemein haben. Würde z. B. der Kreis M_1 den Kreis M_2 und dieser den Kreis M_3 ganz einschliessen, so würde man, wie der unmittelbare Anblick lehrt, keine wirkliche Lösung finden können.

§ 25.

Das Berührungsproblem der Kugeln.

Die Aufgabe, eine Kugel zu finden, welche vier gegebene Kugeln berührt, kann ganz analog behandelt werden, wie die

Aufgabe, die im vorigen Paragraphen gelöst worden ist. Um die Anzahl der möglichen Lösungen zu finden, wählt man zunächst vier Kugeln $M_1 M_2 M_3 M_4$, die alle ausser einander liegen. Die gesuchte Kugel μ, welche die vier gegebenen berührt, kann dann folgende verschiedene Lagen haben:

1. μ schliesst alle vier Kugeln aus.
2. μ schliesst alle vier Kugeln ein.
3. μ schliesst drei Kugeln aus und eine Kugel ein.
4. μ schliesst drei Kugeln ein und eine Kugel aus.
5. μ schliesst zwei Kugeln aus und zwei Kugeln ein.

Die beiden ersten Fälle 1. und 2. sind conjugirt; der Fall 3. gibt vier verschiedene Anordnungen der gegebenen Kugeln und zu jeder derselben gehört eine entsprechende Anordnung aus 4.; der Fall 5. gibt sechs Anordnungen, die sich zu zweien entsprechen, so dass also im Ganzen sechszehn Lösungen zum Vorschein kommen, von denen acht Mal zwei zugehörige sind.

Man könnte nun jede der beiden Constructionen, welche im vorigen Paragraphen für den Berührungskreis dreier Kreise gegeben worden sind, in den Raum übertragen und behandeln; um Weitläufigkeiten zu vermeiden, soll aber die erste derselben, welche das Problem successive auf immer einfachere Probleme reducirt, übergangen und nur die zweite Lösung in einer Weise ausgedehnt werden, welche die verlangte Construction im Raume liefert. Auch hier sollen nur die beiden Kugeln bestimmt werden, die den Fällen 1. und 2. entsprechen, die anderen Fälle lassen ganz ähnliche Lösungen zu, wenn sie überhaupt möglich sind, was, wie übrigens schon bei den ersten zu untersuchenden, noch von der gegenseitigen Lage der Kugeln $M_1 M_2 M_3 M_4$ abhängt. Man wird im weiteren Verlaufe dieses Paragraphen leicht erkennen, dass die Construction selbst diese Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Lösungen controlirt.

Neben der Kugel μ, welche alle vier gegebenen Kugeln berührt und sie ausschliesst, betrachte man zunächst von diesen vier Kugeln $M_1 M_2 M_3 M_4$ und ihren resp. Berührungspunkten $b_1 b_2 b_3 b_4$ auf μ die drei ersten Kugeln und deren Berührungspunkte. Da zwischen den Aehnlichkeitspunkten dreier Kugeln (§ 17) dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen den Aehnlichkeitspunkten dreier Kreise, so kann man leicht schliessen, dass die Gerade $b_2 b_3$ durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A_1

der Kugeln M_2 und M_3 geht; es ergibt sich dies nämlich daraus, dass die Kugel μ die Kugeln M_2 und M_3 gleichartig berührt. Aus demselben Grunde muss $b_3 b_1$ durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A_2 der Kugeln M_3 und M_1 und $b_1 b_2$ durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A_3 der Kugeln M_1 und M_2 gehen. Es schneiden sich also die Ebene der Berührungspunkte $b_1 b_2 b_3$ und die Ebene der Mittelpunkte der Kugeln $M_1 M_2 M_3$ in der Axe der äusseren Aehnlichkeitspunkte dieser Kugeln.

Die Ebene $b_1 b_2 b_3$ schneidet aus jeder der Kugeln $M_1 M_2 M_3 \mu$ einen Kreis aus, welche Kreise ebenfalls mit $M_1 M_2 M_3 \mu$ bezeichnet werden sollen; sie stehen in der Beziehung zu einander, dass der Kreis μ die drei anderen so berührt, dass er sie ausschliesst; man kann sie also geradezu als durch die Fig. 87 gegeben betrachten und auf sie die im vorigen Paragraphen entwickelten Sätze anwenden. Es wird z. B. der Punkt b_1 auf der Geraden liegen müssen, welcher den Potenzpunkt P der drei Kreise $M_1 M_2 M_3$ mit dem Pole p_1 der Geraden $A_1 A_2 A_3$ verbindet. Nun ist freilich keiner der Punkte P und p_1 gegeben, da die Ebene $b_1 b_2 b_3$ noch nicht bestimmt ist; aber immerhin kann über dieselben Folgendes festgesetzt werden: Da P Potenzpunkt der Kreise $M_1 M_2 M_3$ ist, so erzeugt er auch gleiche Potenz nach den drei gleichbenannten Kugeln, liegt also auf deren Potenzgeraden, die bekanntlich senkrecht steht auf derjenigen Ebene, welche die Mittelpunkte der Kugeln enthält. Was p_1 anbetrifft, so ist dieser Punkt der Pol der Geraden $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf den Kreis M_1, welcher der Kugel M_1 angehört und liegt deshalb (§ 20) auf der reciproken Polaren von $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf die Kugel M_1; dass diese reciproke Polare ebenfalls auf der Centralebene der Kugeln $M_1 M_2 M_3$ senkrecht steht, ist leicht zu zeigen. Wie also auch die Kugel μ die drei Kugeln $M_1 M_2 M_3$ ausschliessend berühren mag, so muss immer der Punkt b_1, in welchem sie M_1 berührt, in der Ebene enthalten sein, welche die Potenzlinie von $M_1 M_2 M_3$ verbindet, mit der reciproken Polaren von $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf M_1.

In ganz derselben Weise zeigt man, dass, wenn man an Stelle von M_3 die Kugel M_4 in die Betrachtung einführt, dann der Berührungspunkt b_1 in derjenigen Ebene liegt, welche die Potenzgerade der Kugeln $M_1 M_2 M_4$ verbindet mit der reciproken Polaren der äusseren Aehnlichkeitsaxe dieser Kugeln in

Bezug auf die Kugel M_1. Man weiss also, dass b_1 auf zwei verschiedenen Ebenen, also in deren Durchschnittsgeraden liegen muss, ferner ist der gesuchte Punkt auf der Kugel M_1 gelegen, demnach ist er einer ihrer Schnittpunkte mit der genannten Geraden.

Man kann die Gerade, auf welcher b_1 liegen muss, in etwas eleganterer Weise bestimmen, wenn man bedenkt, dass nach § 15 die Potenzgeraden der Kugeln $M_1 M_2 M_3$ und $M_1 M_2 M_4$ sich in dem Potenzpunkte Π der Kugeln $M_1 M_2 M_3 M_4$ schneiden, und dass ferner die Axen der äusseren Aehnlichkeitspunkte einentheils der Kugeln $M_1 M_2 M_3$ und anderntheils der Kugeln $M_1 M_2 M_4$ in der Ebene A liegen, welche die sechs äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kugeln $M_1 M_2 M_3 M_4$ enthält. Es ergibt sich nämlich aus dem letzteren, dass die reciproken Polaren der Aehnlichkeitsaxen sich in dem Pole π_1 der Ebene A in Bezug auf die Kugel M_1 schneiden müssen, d. h. die Gerade $\Pi\pi_1$ enthält den gesuchten Berührungspunkt b_1.

In vollkommener Analogie zu den Resultaten des vorigen Paragraphen ergibt sich also nachfolgende Lösung der gestellten Aufgabe, eine Kugel zu finden, welche vier gegebene Kugeln berührt: Man bestimme den Potenzpunkt P der Kugeln, ferner die Ebene A ihrer äusseren Aehnlichkeitspunkte, dann die Pole π_1, π_2, π_3, π_4 dieser Ebene in Bezug auf die vier Kugeln, so ergibt die Gerade $P\pi_1$ auf M_1 zwei Punkte b_1 und b'_1, ebenso erhält man auf $M_2 M_3 M_4$ Punktenpaare b_2 und b'_2, b_3 und b'_3, b_4 und b'_4, so dass b_1, b_2, b_3, b_4 eine Kugel μ bestimmen, welche die vier gegebenen Kugeln ausschliessend berührt, während $b'_1 b'_2 b'_3 b'_4$ auf einer Kugel μ' liegen, welche die vier gegebenen Kugeln berührt und sie einschliesst. Welche Ebenen an Stelle von A gesetzt werden müssen, damit die übrigen vierzehn Lösungen zum Vorschein kommen, kann man dem § 17 entnehmen.

Achtes Kapitel.

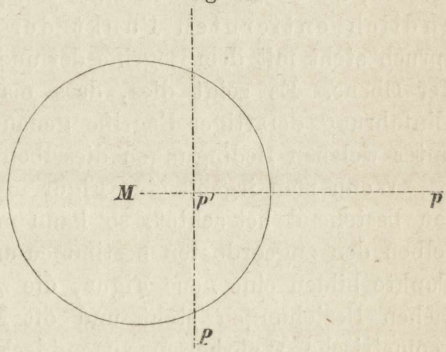
Das Princip der reciproken Radien.

§ 26.

Grundbegriffe. Verwandlung des Kreises und der Kugel.

Wenn in der Ebene ein Kreis K mit dem Mittelpunkte M gegeben ist, so kann man zu jedem Punkte p in der Ebene die Polare P in Bezug auf K construiren und deren Durchschnitt p' mit der Geraden bestimmen, welche p mit M verbindet. Zwei solche Punkte wie p und p' sollen zugeordnete oder reciproke Punkte in Bezug auf K heissen. Der Punkt M wird das Transformationscentrum, der Kreis K der Transformationskreis und das Quadrat r^2 seines Radius r die Transformationspotenz genannt.

Fig. 88.



Vermittelst dieser letztern und des Punktes M kann man zu p den entsprechenden p' finden, indem man die Gerade Mp zieht und auf derselben von M aus in der Richtung des Punktes p die Strecke $\frac{r^2}{Mp}$ abträgt; es ist dann deren zweiter Endpunkt der gesuchte Punkt p', denn in der That ergeben die harmonischen Eigenschaften des Kreises für zwei entsprechende Punkte p und p' die Relation $Mp \,.\, Mp' = r^2$. Es ergibt sich daraus sofort, dass ein Punkt auf K mit seinem reciproken zusammenfällt; ferner entsprechen den sämmtlichen Punkten im Innern des Transformationskreises die sämmtlichen Punkte ausserhalb desselben und umgekehrt.

Im Allgemeinen gehört zu jedem beliebigen Punkte p stets ein und nur ein Punkt p', welchem umgekehrt wiederum der

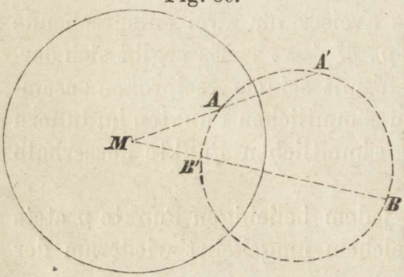
Punkt p zugeordnet ist. Eine Ausnahme macht der Punkt M, denn ihm entspricht, da für ihn die Richtung Mp unbestimmt wird, jeder beliebige Punkt im Unendlichen, während jedem Punkte, der im Unendlichen liegt, der Punkt M zugeordnet ist. Will man also dem im Allgemeinen richtigen Satze, dass nach der aufgestellten Beziehung zwischen den Punktenpaaren p und p' zu irgend einem Punkte p der Ebene stets ein und nur ein Punkt p' gehöre, nicht eine Ausnahme beifügen, für den Fall, dass p im Unendlichen liegt, so muss man annehmen, dass vom Gesichtspunkte der Beziehung aus die sämmtlichen unendlich entfernten Punkte der Ebene so angesehen werden können und müssen, als ob sie sich in einer einzigen vereinigten, den unendlich entfernten Punkt der Ebene, was im Widerspruch steht mit dem Begriffe der unendlich entfernten Geraden der Ebene. Es zeigt dies, dass man sich also jedesmal bei Einführung derartiger Begriffe genau darüber klar sein muss, unter welchen Bedingungen dieselben ihre Giltigkeit haben.

Wenn man irgend eine Figur in der Ebene als aus Punkten bestehend betrachtet, so kann man zu jedem Punkte derselben den zugeordneten bestimmen und alle diese zugeordneten Punkte bilden eine neue Figur, die zu der ersten in mannichfachen Beziehungen steht und oft Mittel an die Hand gibt, geometrische Wahrheiten zu entdecken, welche auf anderem Wege nur schwer zu erkennen wären. Die bezeichnete Methode, von welcher im Nachfolgenden mehrere Anwendungen gemacht werden sollen, heisst das Princip der reciproken Radien.

Sind zwei Punkte A und B mit ihren transformirten A' und B' gegeben, so ergibt sich sofort aus der Relation

$$MA \,.\, MA' = r^2 = MB \,.\, MB',$$

Fig. 89.



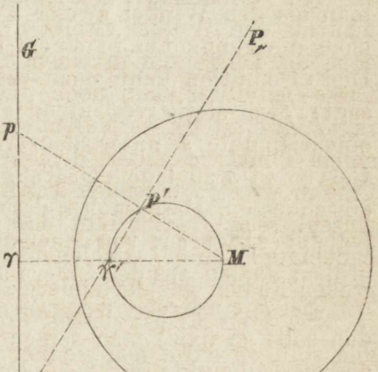
dass die vier Punkte $ABA'B'$ auf einem Kreise k liegen. Die Potenz des Punktes M in Bezug auf diesen Kreis ist gleich r^2, d. h. die Tangente von ihm an k ist gleich dem Radius des Transformationskreises, also schneiden sich k und K unter rechten Winkeln.

Da ein Punkt p und sein entsprechender p' stets mit dem Transformationscentrum M in gerader Linie liegen, so werden zu den sämmtlichen Punkten einer durch M gehenden Geraden G wiederum die Punkte derselben Geraden gehören, und zwar bilden je zwei reciproke Punkte p und p' ein Punktenpaar, eines Punktsystems, dessen Doppelpunkte die Schnittpunkte von G und K sind und dessen Potenz gleich der Transformationspotenz ist.

Die Entfernung des Punktes p' von M ist einzig und allein abhängig von der Entfernung des Punktes p von M. Bleibt also die letztere constant, d. h. bewegt sich p in einen mit K concentrischen Kreise k, so beschreibt auch p' einem mit K und k concentrischen Kreis k'. Liegt k ausserhalb K, so schliesst K den Kreis k' ein und umgekehrt; je mehr der Radius von k zunimmt, desto kleiner wird der Kreis k'. Fällt k mit K zusammen, so vereinigt er sich auch mit k'; wächst k über alle Grenzen, so reducirt sich schliesslich k' auf den Punkt M.

Es soll die transformirte Figur zu einer beliebig in der Ebene gegebenen Geraden G gefunden werden. Zu dem Ende construire man zu einem willkürlich auf G gewählten Punkte p den entsprechenden p', indem man den Durchschnitt von pM mit der Polaren P des Punktes p in Bezug auf den Transformationskreis aufsucht. Wie man aber p auf G wählen möge, so wird stets P durch den Pol γ' von G nach K gehen müssen und stets wird P senkrecht stehen auf dem zugehörigen Strahl pM, d. h. der Winkel $\gamma' p' M$ ist für jeden Punkt p' ein Rechter. Sobald aber G und der Transformationskreis gegeben sind, so sind auch die Punkte γ' und M fixirt, woraus folgt, dass der Ort von p' ein Kreis über dem Durchmesser $M\gamma'$ ist. Sei D der Abstand der Geraden von M, so ist sein Radius $R = \frac{r^2}{2D}$. Die Transformationsfigur einer Ge-

Fig. 90.



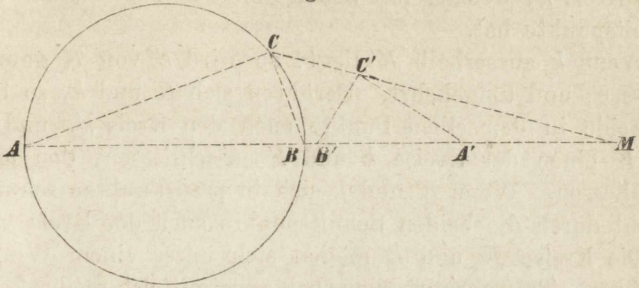
raden nach dem Princip der reciproken Radien ist also ein Kreis, welcher das Transformationscentrum enthält. Umgekehrt wird jeder durch M gehende Kreis in eine Gerade verwandelt.

Es sei noch bemerkt, dass, wenn G ganz ausserhalb des Transformationskreises liegt, dann der ihr zugehörige Kreis k ganz innerhalb K liegen muss. Wenn ferner G und K sich berühren, so werden sie in demselben Punkte auch von k berührt, und wenn schliesslich G und K sich schneiden, so geht auch k durch ihre Schnittpunkte.

Wenn zwei Gerade G und G' sich in einem Punkte s unter einem Winkel α schneiden, so thun dies auch die ihnen reciproken Kreise k und k' in dem reciproken Punkte s' von s. Zum Beweise ist zu beachten, dass nach Fig. 90 die Tangente in M an k parallel zu G ist; ebenso muss die Tangente in M an k' zu G' parallel sein, also begegnen sich k und k' im Punkte M unter dem Winkel α. Zwei Kreise bilden aber in einem ihrer Schnittpunkte eben denselben Winkel wie im anderen, demnach schneiden sich k und k' auch im Punkte s' unter dem Winkel α. — Hierbei ist angenommen worden, dass man als den Winkel zweier Kreise denjenigen bezeichne, welchen die Tangenten in einem ihrer Schnittpunkte einschliessen. Diese Definition kann noch verallgemeinert werden, indem man sagt: Zwei stetig verlaufende krumme Linien schneiden sich in einem Punkte s unter dem Winkel α, insofern die an diese Curven in s zu legenden Tangenten den Winkel α miteinander einschliessen. Daraus folgt, dass die entsprechenden Winkel zweier beliebiger Figuren, von denen die eine nach dem Principe der reciproken Radien aus der andern abgeleitet worden ist, gleich sind.

Sei k ein Kreis, dessen Transformationsfigur gefunden werden soll, so fixire man seinen durch M gehenden Durchmesser, dessen Endpunkte auf k die Punkte A und B sein mögen. Ihre entsprechenden bezeichne man mit A' und B'. Ferner sei C ein beliebiger Punkt auf k, und C' sein reciproker. Es ist nun $\triangle ACM \sim C'A'M$, denn es ist $MA \,.\, MA' = MC \,.\, MC'$ oder $MA : MC = MC' : MA'$. In den beiden genannten Dreiecken sind also die Winkel ACM und $MA'C'$ einander gleich. Ebenso wird die Aehnlichkeit der Dreiecke BCM und $C'B'M$ und daran anschliessend die Gleichheit der Winkel BCM und $C'B'M$ bewiesen. Es folgt daraus

Fig. 91.



$$\sphericalangle ACM - BCM = C'A'M - C'B'M$$

oder

$$\sphericalangle ACB = B'C'A.$$

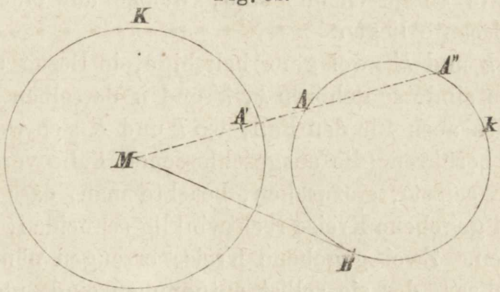
Der erste von diesen ist ein Rechter, als Winkel im Halbkreis, also ist auch der zweite ein Rechter, d. h. der bewegliche Punkt C' sieht die beiden festen Punkte A' und B' immer unter rechtem Winkel, oder: die reciproken Punkte zu den Punkten eines Kreises k erfüllen einen zweiten Kreis k', welcher seinen Mittelpunkt auf der Geraden hat, die M mit dem Mittelpunkte von k verbindet.

Dasselbe Resultat ergibt sich aus Fig. 92. Es ist

$$MA \,.\, MA' = r^2.$$

Wenn A'' der zweite Schnittpunkt der Geraden MA mit dem gegebenen Kreise k und MB eine Tangente dieses Kreises

Fig. 92.



ist, so hat man auch $MA \,.\, MA'' = MB^2$. Durch Division erhält man $MA' : MA'' = r^2 : MB^2$. Die Strecken MA' und MA'' stehen also in einem bestimmten constanten Verhältniss zu einander, und wenn A'' den Kreis k durchläuft, so beschreibt A'

einen Kreis k', welcher mit k den Punkt M zum äussern Aehnlichkeitspunkte hat.

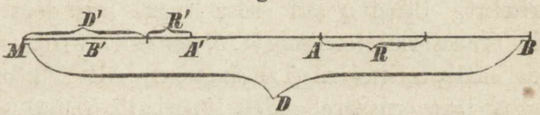
Wenn k ausserhalb K liegt, so wird k' von K ganz umschlossen, und umgekehrt. Berühren sich K und k, so berühren beide in demselben Punkte auch den Kreis k', und zwar wird K einen der Kreise k und k' ausschliessen, den andern einschliessen. Wenn K und k sich in zwei Punkten schneiden, so geht durch die beiden Schnittpunkte auch der Kreis k'.

Die Kreise K und k mögen sich unter einem Winkel α schneiden. Transformirt man beide vermittelst reciproker Radien, so gehen dieselben über in K und k', welche nach einer vorigen Bemerkung denselben Winkel α einschliessen müssen, den K und k bilden, d. h. K halbirt den Winkel, den k und sein transformirter Kreis einschliessen. Wenn k den Kreis K in zwei Punkten rechtwinklig schneidet, so schneiden sich K und k in denselben beiden Punkten ebenfalls rechtwinklig, was nicht anders möglich ist, als wenn k und k' zusammenfallen, d. h. ein beliebiger Kreis, welcher den Transformationskreis rechtwinklig schneidet, ist seine eigene Transformationsfigur, oder alle Kreise (mit einer Ausnahme, die sofort gemacht werden soll), die sich durch Transformation in Bezug auf den Kreis K selbst wieder erzeugen, bilden ein Kreisnetz (§ 22). Auch der Kreis K erzeugt sich selbst wieder, aber in einem ganz andern Sinne, denn jeder seiner Punkte entspricht sich selbst, während bei einem ihn rechtwinklig schneidenden Kreise solche Punkte entsprechende sind, welche auf einer durch M gehenden Secante liegen.

Wenn k und k' zwei ganz beliebige, in Bezug auf K reciproke Kreise sind, so gehören k, k' und K derselben Kreisschaar an. Um dies auch für den Fall, wo k und K sich weder schneiden, noch berühren (die ausgeschlossenen Fälle verstehen sich ja ganz von selbst), einzusehen, beachte man, dass alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneiden, eine Kreisschaar bilden. Zwei gegebene Kreise erzeugen nämlich zuerst eine Kreisschaar, der sie selbst entnommen sind, und dann die ihr conjugirte (§ 15), welche aus den sie rechtwinklig schneidenden Kreisen besteht. Wird nun ein beliebiger Kreis $\varkappa$ gewählt, welcher k und K rechtwinklig schneidet, so wird durch Anwendung der Transformation k zu k', während $\varkappa$ und K unverändert bleiben; auch die Winkel ändern sich nicht, also schneidet $\varkappa$ den Kreis k' rechtwinklig, und dasselbe thut jeder Kreis, welcher k und K unter rechten Winkeln trifft, d. h. k, K und k' gehören derselben Kreisschaar an.

Sei R der Radius des zu transformirenden Kreises k, D die Entfernung seines Mittelpunktes vom Transformationscentrum,

Fig. 93.



ferner sei R' der Radius des transformirten Kreises k' und D' die Entfernung seines Mittelpunktes vom Transformationscentrum, schliesslich mögen A und B, A' und B' die Endpunkte derjenigen Durchmesser von k und k' sein, welche auf die Centrale der beiden Kreise fallen, während r^2 wie immer die Transformationspotenz sein soll.

Jetzt ist

$$MA' = \frac{r^2}{MA} = \frac{r^2}{D-R}, \quad MB' = \frac{r^2}{MB} = \frac{r^2}{D+R},$$

also

$$MA' - MB' = 2R' = \frac{r^2}{D-R} - \frac{r^2}{D+R}$$

oder

$$R' = R \cdot \frac{r^2}{D^2 - R^2}.$$

Ebenso ist

$$MA' + MB' = 2D' = \frac{r^2}{D-R} + \frac{r^2}{D+R}$$

oder

$$D' = D \cdot \frac{r^2}{D^2 - R^2}.$$

Hieraus ergibt sich $\frac{R'}{D'} = \frac{R}{D}$, was auch daraus zu folgern wäre, dass M der äussere Aehnlichkeitspunkt von k und k' ist. Es mag dabei bemerkt werden, dass hier stillschweigend $D > R$ vorausgesetzt ist. Hätte man $R > D$, so brauchte man nur in den Schlussresultaten das Zeichen zu ändern.

Alle bis jetzt erhaltenen Resultate lassen sich unmittelbar in den Raum übertragen. Man braucht blos einen Punkt M fest als Transformationscentrum festzusetzen und eine gegebene

Grösse r^2 als Transformationspotenz anzunehmen, so kann man zu jedem beliebigen Punkte p im Raume sofort den entsprechenden p' finden, indem man auf der Geraden Mp von M aus in der Richtung nach p eine Strecke $Mp' = \frac{r^2}{Mp}$ abträgt; deren zweiter Endpunkt p' ist der reciproke Punkt zu p. Zu jedem Punkte p gehört im Allgemeinen stets ein und nur ein reciproker Punkt p' und umgekehrt. Liegt p auf einer Kugel mit dem Radius r, welche die Transformationskugel K genannt wird, so fällt er mit seinem entsprechenden p' zusammen. Alle Punkte ausserhalb K haben ihre entsprechenden innerhalb K und umgekehrt. Jedem Punkte, der unendlich entfernt ist, entspricht der Punkt M, und umgekehrt kann M als jedem unendlich entfernten Punkte entsprechend betrachtet werden. Will man also die im Allgemeinen als richtig erwiesene eindeutige und reciproke Beziehung zwischen p und p' nicht in dem besonderen Falle aufheben und jedesmal eine Ausnahme beifügen, so ist man gezwungen, festzusetzen, dass vom Gesichtspunkte des Princips der reciproken Radien aus alle unendlich entfernten Punkte im Raume angesehen werden müssen, als ob sie in einem und demselben Punkte des Raumes vereinigt wären. Von anderen Gesichtspunkten aus war früher p der Begriff einer unendlich entfernten Ebene des Raumes abgeleitet und erörtert worden.

Zu allen Punkten p, welche auf einer durch M gehenden Geraden oder Ebene liegen, gehören Punkte p', welche ebenfalls dieselbe Gerade, resp. dieselbe Ebene erfüllen. Punkten p, welche eine mit K concentrische Kugel erfüllen, müssen Punkte p' entsprechen, die im Allgemeinen eine andere, ebenfalls mit K concentrische Kugel bedecken.

Um den Ort der Punkte p' zu finden, welche zu den Punkten p einer Ebene E reciprok sind, fälle man von M aus ein Perpendikel auf E, dessen Fusspunkt π sein möge. Eine durch dieses Perpendikel gelegte Ebene e schneidet aus E eine Gerade G aus, deren reciproke Figur ein Kreis ist, welcher durch M geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $M\pi$ liegt. Dreht man E um $M\pi$ herum, so beschreibt G die Ebene E und jener Kreis den Ort der zu E reciproken Punkte, also eine Kugel k, welche den Punkt M enthält und deren Mittelpunkt auf dem Perpendikel $M\pi$ liegt.

Aus dem Umstande, dass die Tangentialebene an k in M parallel zu E ist, mit Zuziehung der Bemerkung, dass man den Winkel zweier continuirlich verlaufenden Flächen in einem ihrer Schnittpunkte als denjenigen bezeichnet, welchen ihre Tangentialebenen im Schnittpunkte bilden, folgt, dass auch im Raume beliebige Figuren durch Anwendung des Princips der reciproken Radien derart verändert werden, dass die Gleichheit der entsprechenden Winkel in der ursprünglichen und in der transformirten Figur gewahrt wird.

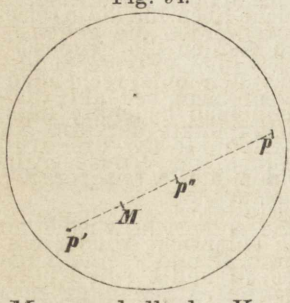
Den Punkten p einer Kugel k entsprechen nach dem Princip der reciproken Radien die Punkte p' einer andern Kugel k'. Zum Beweise lege man durch M und den Mittelpunkt m von k eine Gerade Mm und durch diese eine Ebene e, so schneidet e aus k einen Kreis $\varkappa$ aus, dessen reciproke Figur ein anderer Kreis $\varkappa'$ ist. Wenn nun die ganze in e enthaltene Figur um Mm herumgedreht wird, so entsteht aus $\varkappa$ die Kugel k, aus $\varkappa'$, dessen Mittelpunkt auf Mm liegt, eine Kugel k', welche der gesuchte Ort der reciproken Punkte zu den Punkten p der Kugel k ist. Also entspricht nach dem Princip der reciproken Radien einer Kugel wieder eine Kugel.

Die metrischen Beziehungen zwischen den Kugeln k, K und k' werden ohne Weiteres dieselben sein, welche oben für die Kreise k, K und k' abgeleitet wurden. Ebenso werden die gegenseitigen Lagen der drei Kugeln leicht aus den entsprechenden Eigenschaften der Kreise entwickelt, wenn man bedenkt, dass irgend ein ebener Schnitt durch die Mittelpunkte der drei Kugeln sofort das bereits behandelte Problem der Kreise ergibt und einen Rückschluss auf den Raum gestattet.

Einem beliebigen Kreise $\varkappa$ im Raume entspricht wieder ein Kreis. Zum Beweise kann zunächst durch M und $\varkappa$ eine Kugel gelegt werden, welche also $\varkappa$ seiner ganzen Ausdehnung nach enthält; es muss folglich die reciproke Figur zu $\varkappa$ ganz auf der reciproken Figur der genannten Kugel liegen, d. h. in einer Ebene e enthalten sein. Es lässt sich zudem durch $\varkappa$ eine Kugel k legen, welche die Transformationskugel K rechtwinklig schneidet, diese Kugel k bleibt durch Transformation unverändert und auf ihr ist folglich die reciproke Figur von $\varkappa$ ebenfalls enthalten. Es ergibt sich hieraus der Satz: Die reciproke Figur eines Kreises $\varkappa$ ist wieder ein Kreis $\varkappa'$, der mit dem ursprünglichen auf einer Kugel liegt, welche die Transformationskugel K rechtwinklig schneidet.

Eine weitere Consequenz der bewiesenen Sätze ist folgende: Sei $\varkappa$ ein beliebiger Kreis, welcher auf einer Kugel k liegt, so kann man durch sämmtliche Punkte von $\varkappa$ nach einem Punkte M Gerade ziehen, von denen jede der Kugel k noch ein zweites Mal begegnen wird. Diese sämmtlichen zweiten Schnittpunkte liegen auf einem zweiten Kreise. Zum Beweise beachte man, dass man, insofern M ausserhalb k liegt, um M als Mittelpunkt eine Kugel K legen kann, welche k unter rechtem Winkel trifft. Wird diese als Transformationskugel für reciproke Radien gewählt, so werden jene gesuchten zweiten Schnittpunkte die Transformationsfigur von $\varkappa$, also in der That ein Kreis sein. Ist aber M innerhalb der Kugel k gelegen, so sei p irgend ein Punkt des Kreises $\varkappa$, p' der zweite Schnittpunkt von Mp mit der Kugel k, so ist wegen der Potenz des Punktes p in Bezug auf k das Product $Mp \,.\, Mp'$ constant und einer gewissen Grösse ϱ^2 gleich. Trägt man jetzt von M aus auf der Geraden Mp die Strecke Mp' in der Richtung nach p ab und nennt ihren zweiten Endpunkt p'', so ist auch $Mp \,.\, Mp'' = \varrho^2$, d. h. constant. Der Ort des Punktes p'' ist die Transformation nach reciproken Radien des Kreises $\varkappa$ in Bezug auf das Transformationscentrum M und die Transformationspotenz ϱ^2, also jedenfalls ein Kreis; daher muss auch aus Symmetriegründen der Ort des Punktes p' ein Kreis sein. Dass die Beziehung dieses Beweises zur Potenz eines Punktes nach einer Kugel auch zum Ziele führt, wenn M ausserhalb der Kugel liegt, ist evident.

Fig. 94.



§ 27.

Die stereographische Projection und die Geometrie auf der Kugel.

Wenn man nach dem Princip der reciproken Radien eine Kugel k transformirt, welche das Transformationscentrum M enthält und deren Durchmesser gleich dem Radius r der Transformationskugel k ist, so geht dieselbe in eine Ebene E über,

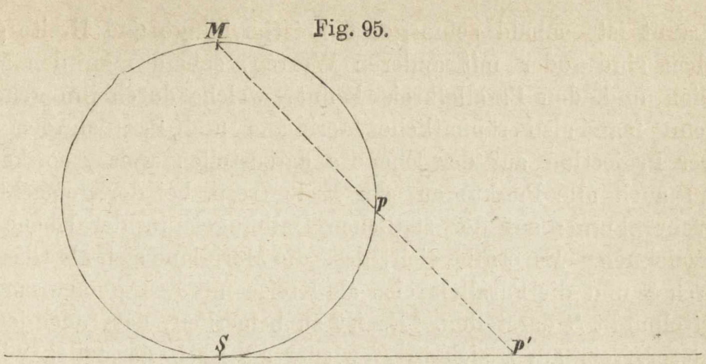


Fig. 95.

welche k berührt, und zwar in demjenigen Punkte S, welcher dem Punkte M diametral in Bezug auf die Kugel k gegenüberliegt. Wird auf k eine Figur f verzeichnet, so geht dieselbe nach der Transformation in eine andere f' über, die der Ebene E angehört, und welche die Eigenschaft hat, dass die in derselben allfällig vorkommenden Winkel gleich gross sind, wie die entsprechenden in der ursprünglichen Figur.

Der Uebergang von der Figur f zu f' kann aber noch anders als durch das Princip der reciproken Radien ausgeführt werden; denn da zwei entsprechende Punkte p und p' stets mit M in einer Geraden liegen, so ist f' geradezu eine Centralprojection von f auf E, deren Projectionsmittelpunkt der Punkt M ist. In diesem Sinne aufgefasst heisst die Projection von k auf E die stereographische Projection der Kugel auf die Ebene. Dieselbe dient zur Herstellung von Erdkarten.

Sei z. B., wenn die Erde als eine Kugel aufgefasst wird, M ihr Nordpol, S ihr Südpol, so kann man die südliche Halbkugel vom Nordpole aus auf die Tangentialebene im Südpole projiciren und das so erhaltene Bild nach einem beliebigen Massstabe verkleinern. (Wollte man durch eine einzige Projection die ganze Erde darstellen, so würde dazu die ganze Ebene in ihrer unendlichen Ausdehnung erforderlich sein. Wenn man aber zuerst vom Nordpole aus die südliche Halbkugel und nachher vom Südpole aus die nördliche Halbkugel projicirt, so erhält man zwei Darstellungen, welche zusammengenommen die ganze Erde umfassen.)

Um näher ins Detail einzugehen, erinnere man sich, dass irgend ein Ort auf der als Kugel betrachteten Erdoberfläche bekannt ist, sobald seine geographische Länge und Breite gegeben sind, oder mit anderen Worten, sobald man den Meridian und den Parallelkreis kennt, welche durch ihn gehen. Wenn man also sämmtliche Meridiane und Parallelkreise in ihrer Projection auf der Ebene e darzustellen weiss, so kann man auch alle Punkte auf der Erde (resp. bei der gemachten Beschränkung: auf der südlichen Halbkugel) in der Ebene E verzeichnen. Es ergibt sich, dass die Meridiane sich als Gerade durch S und die Parallelkreise als Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt S darstellen. Es ist zu bemerken, dass auch jeder andere Kreis auf k sich in E wieder als Kreis darstellen wird.

Meridiane auf der Kugel werden dieselben Winkel einschliessen, wie die ihnen entsprechenden Geraden in E und umgekehrt, während das Gesetz, nach welchem sich Parallelkreise mit ihren entsprechenden Kreisen in E ändern, zwar graphisch sehr einfach, aber durch eine Formel etwas complicirter darstellen lässt. — Dass Parallelkreise und Meridiane sich als concentrische Kreise und Gerade durch ihren Mittelpunkt darstellen, bestätigt den früher angegebenen Satz von der Gleichheit der Winkel in den Figuren auf der Kugel und der entsprechenden Winkel der zugehörigen Figuren in der Ebene. In der That schneiden sich Parallelkreise und Meridiane überall unter rechten Winkeln und genau dasselbe thun die concentrischen Kreise und die Geraden, welche durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt gehen.

Auf einer weitern Anwendung dieses letztern Satzes beruht die Construction einer Linie auf der Kugeloberfläche, welche von einem Punkte derselben ausgehend, alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet. Man geht vermittelst der stereographischen Projection in die Ebene über und zieht durch die Projection des gegebenen Punktes eine Curve, welche die von S ausgehenden Geraden unter dem verlangten, gegebenen Winkel schneidet, so hat man diese Curve einfach auf die Kugeloberfläche zurück zu projiciren und die gegebene Aufgabe ist gelöst.

Die Karten, welche vermittelst der stereographischen Projection und vermittelst eines bestimmten Massstabes angefertigt werden, unterscheiden sich wesentlich von denjenigen Karten, die man nach den gewöhnlichen Methoden von Theilen der Erdoberfläche herstellt, welche man, ohne einen wesentlichen

Fehler zu begehen, als eben betrachten kann. Bei diesen letzteren nämlich gilt für alle Theile der Karte ein und derselbe Massstab, während bei den ersteren der Massstab sich von Parallelkreis zu Parallelkreis, d. h. mit der geographischen Breite ändert.

Die stereographische Projection kann auch zur Erledigung einer Reihe von Fragen dienen, welche die Geometrie auf der Kugeloberfläche betreffen, indem sie dieselben auf ebene Probleme zurückführt. Zu dem Ende beachte man, dass, wenn auf einer Kugel eine Anzahl von Kreisen gegeben sind, dieselben durch die stereographische Projection oder auch durch das Princip der reciproken Radien verwandelt werden können in andere Kreise, die sich in derselben Ebene befinden. Wenn sich zwei Kreise auf der Kugel schneiden, berühren oder nicht schneiden, so werden sich auch ihre entsprechenden Kreise in der Ebene resp. schneiden, berühren oder nicht schneiden, und zwar wird im ersten Falle das Schneiden auf der Kugel und auf der Ebene unter gleichem Winkel geschehen.

Wenn man also die charakteristischen Eigenschaften der Kreisschaar in der Ebene entwickelt, indem man von den sich rechtwinklig schneidenden Kreisen ausgeht, so gelingt es ohne Weiteres, eine Reihe von Sätzen über Kreisschaaren auf der Kugel herzuleiten. Ganz dasselbe gilt von den Berührungsproblemen der Kreise; denn wenn es sich z. B. darum handelt, auf der Kugeloberfläche einen Kreis zu finden, welcher drei gegebene, ebenfalls der Kugeloberfläche angehörige Kreise berührt, so wird man mit Hilfe der genannten Methode den Uebergang zur Ebene nehmen, dort das Problem nach § 24 behandeln und mit den gefundenen Lösungen wieder auf die Kugel zurückkehren.

Es muss aber ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass durch das Princip der reciproken Radien, resp. die stereographische Projection im Allgemeinen der Mittelpunkt des Kreises nicht etwa zum Mittelpunkte des transformirten Kreises wird, ferner dass auch die Eigenschaften der Aehnlichkeitspunkte, der Potenzlinien, sowie von Pol und Polaren wesentlich alterirt werden. Auf Grund des bis jetzt in diesem Leitfaden gebotenen Materials soll es aber dem Leser möglich sein, sich selbst eine Theorie der Kreise, die auf einer Kugel liegen, namentlich in Bezug auf Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinien, Pole und Polaren zu bilden, welche unabhängig vom Princip der reciproken Radien ist.

§ 28.

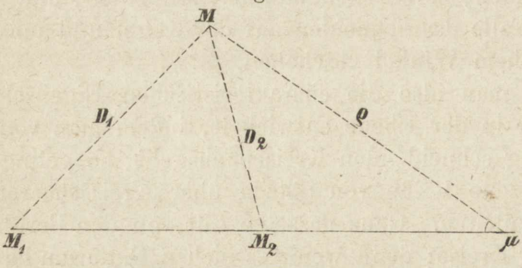
Kreisreihen und Kugelreihen.

Das Princip der reciproken Radien gibt Anlass zu einigen Aufgaben, welche hier behandelt werden sollen und von denen eine im Verlaufe dieses Paragraphen zu einer wichtigen Anwendung führen wird.

1. Es ist zu untersuchen, ob zwei gegebene Kreise M_1 und M_2, deren Radien resp. R_1 und R_2 sind, durch Transformation in zwei gleichgrosse Kreise verwandelt werden können.

Sei M das Transformationscentrum, r^2 die Transformationspotenz, seien ferner R_1 und D_1, R_2 und D_2 für die Kreise M_1

Fig. 96.



und M_2 resp. die Radien und Entfernungen der Mittelpunkte von M, so hat man nach den Formeln des § 26, wenn R'_1 und R'_2 die Radien der transformirten Kreise sind,

$$R'_1 = R_1 \cdot \frac{r^2}{D_1^2 - R_1^2} \text{ und } R'_2 = R_2 \cdot \frac{r^2}{D_2^2 - R_2^2}.$$

Sollen R'_1 und R'_2 einander gleich sein, so kommt:

$$R_1 D_2^2 - R_2 D_1^2 = R_1 R_2 (R_2 - R_1).$$

In dieser Gleichung kommt r^2 nicht mehr vor, d. h. bei der Frage nach der Möglichkeit der geforderten Transformation spielt die Transformationspotenz gar keine Rolle, sondern nur der Ort des Transformationscentrums. Um denselben zu bestimmen, construire man auf der Verlängerung der Strecke $M_1 M_2$ (wo M_1 und M_2 nun die Mittelpunkte der gegebenen Kreise bedeuten) einen Punkt μ, für welchen $M_1 \mu : M_2 \mu = R_2 : R_1$. Es ist dann

$$D_1{}^2 = M\mu^2 + M_1\mu^2 - 2\,M\mu\,.\,M_1\mu\,.\,\cos\mu,$$
$$D_2{}^2 = M\mu^2 + M_2\mu^2 - 2\,M\mu\,.\,M_2\mu\,.\,\cos\mu, \text{ also}$$
$$R_1 D_2{}^2 - R_2 D_2{}^2 = R_1 R_2 (R_2 - R_1)$$
$$= (R_1 - R_2)\,M\mu^2 + R_1\,.\,M_1\mu^2 - R_2\,.\,M_1\mu^2$$
$$-\,2\,M\mu\,.\,\cos\mu\,.\,[R_1\,.\,M_2\mu - R_2\,.\,M_1\mu].$$

Nach der Festsetzung über die Lage des Punktes μ verschwindet das letzte Glied dieser Gleichung und es kann also aus dem Reste die Strecke $M\mu$ durch lauter bekannte Grössen ausgedrückt werden, d. h. der Ort des Punktes M ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte μ und dem Radius $\varrho = M\mu$.

Sollen also zwei beliebige Kreise M_1 und M_2 in zwei gleichgrosse Kreise verwandelt werden, so muss das Transformationscentrum M auf einem dritten Kreise gewählt werden, während die Transformationspotenz völlig willkürlich ist. Was den gefundenen Kreis anbetrifft, so ist klar, dass er allfällige Schnittpunkte von M_1 und M_2 enthalten muss.

2. Können zwei Kreise M_1 und M_2 durch reciproke Radien in concentrische Kreise verwandelt werden?

Zunächst ist klar, dass, da zwei concentrische Kreise keine gemeinschaftlichen Punkte haben, auch zwei Kreise, aus denen sie entstehen sollen, keine gemeinschaftlichen Punkte haben dürfen. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann auch die gestellte Aufgabe gelöst werden, wie nun gezeigt werden soll.

Es ist bereits in § 26 angeführt worden, dass eine Kreisschaar definirt werden kann als die Gesammtheit der Kreise, welche zwei gegebene Kreise unter rechten Winkeln schneiden. Daraus folgt wegen der mehrfach benutzten Unveränderlichkeit der Winkel bei der Transformation, dass eine Kreisschaar durch die Transformation wieder zu einer Kreisschaar wird, und ferner, dass zwei conjugirte Kreisschaaren in zwei andere unter sich ebenfalls conjugirte Kreisschaaren verwandelt werden.

Wenn nun die Kreise M_1 und M_2 gegeben sind, so bestimmen dieselben unter der gemachten Voraussetzung, dass sie sich nicht schneiden sollen, eine Kreisschaar der zweiten Art S_1 (§ 15), der eine Kreisschaar der ersten Art S_2 conjugirt ist, welche zwei Grundpunkte s_1 und s_2 hat. Wird nach reciproken Radien verwandelt, so dass M_1 und M_2 zu zwei concentrischen Kreisen M'_1 und M'_2 werden, so muss die reciproke Kreisschaar S_1 zu S'_1 aus lauter concentrischen Kreisen bestehen.

Tritt dies ein, so ist deren conjugirte Schaar S'_2 (welche zugleich die reciproke Schaar zu S_2 ist) ein System von geraden Linien, und dies ist nicht anders möglich, als wenn es gelingt, die Kreise der Schaar S_2 in Gerade zu verwandeln. Die genannten Kreise der Schaar S_2 gehen alle durch die festen Punkte s_1 und s_2; wählt man demnach einen dieser beiden Punkte, z. B. s_1, zum Transformationsmittelpunkte M, so gehen M_1 und M_2 in concentrische Kreise über, deren gemeinsamer Mittelpunkt der s_2 entsprechende Punkt s'_2 ist. Hieraus zeigt sich aufs Neue, dass M_1 und M_2 sich nicht schneiden dürfen; denn wäre dies der Fall, so müsste die durch M_1 und M_2 bestimmte Schaar S_1 von der ersten Art sein, die ihr conjugirte Schaar S_2 also von der zweiten Art, so dass dieselbe keine Grundpunkte hätte und die Punkte s_1 und s_2 nicht vorhanden wären.

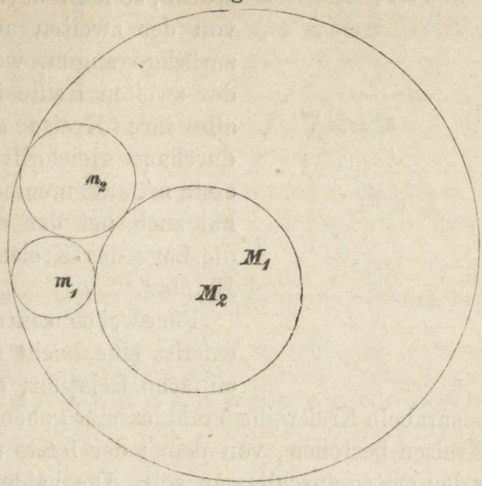
3. Es sollen drei Kreise M_1, M_2, M_3 in drei andere verwandelt werden, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen.

Zu M_1, M_2, M_3 construire man, wenn dies möglich ist, einen Orthogonalkreis. Jeder Punkt M desselben kann dann als Transformationscentrum gewählt werden, so dass die verwandelten Kreise der gestellten Bedingung Genüge leisten; die Transformationspotenz ist dabei ohne Einfluss. In der That wird durch die reciproken Radien der Orthogonalkreis in eine Gerade verwandelt, welche die aus M_1, M_2, M_3 entstehenden Kreise rechtwinklig schneidet. Dies ist nicht anders möglich, als wenn die Gerade in allen drei verwandelten Kreisen Durchmesser ist, also ihre Mittelpunkte verbindet.

Die drei hier behandelten Aufgaben können ohne Weiteres auf den Raum ausgedehnt werden, was keiner näheren Ausführung bedarf. Dafür mag eine Anwendung des zweiten Problems in seiner ebenen und räumlichen Fassung gegeben werden.

Wenn zwei Kreise M_1 und M_2 so gegeben sind, dass der grössere von ihnen, M_1, den anderen M_2 ganz umschliesst, so entsteht ein ringförmiger Streifen zwischen den beiden, dessen sämmtliche Punkte zugleich innerhalb M_1 und ausserhalb M_2 gelegen sind. Man kann in diesen Streifen zunächst einen Kreis m_1 legen, welcher M_1 und M_2 berührt, sonst aber willkürlich ist, daran anschliessend einen Kreis m_2, welcher $M_1 M_2 m_1$ berührt, weiterhin einen Kreis m_3, welcher $M_1 M_2 m_3$ berührt und so fort, so erhält man eine Reihe von Kreisen. Die Reihe

Fig. 97.

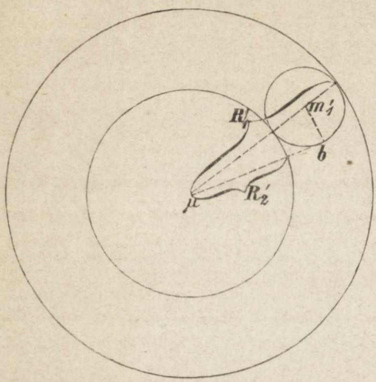


wird entweder einfach um M_2 herumgehen, so dass ein bestimmter ihrer Kreise $M_1 M_2 m_1$ berührt und sich damit schliessen, oder sie wird nicht im ersten Male sich schliessen, sondern mehrmals um M_2 herumgehen müssen, bis wieder einer ihrer Kreise $M_1 M_2 m_1$ berührt, oder endlich, sie wird sich gar nie schliessen, wie lange man auch mit der Construction ihrer Kreise fortfahren mag.

Darüber, welcher dieser Umstände eintreten werde, gilt der Satz: Es ist ganz gleichgiltig, wo man den ersten Kreis m_1 in den ringförmigen Streifen legen mag, immer tritt derselbe der Fälle ein, sobald M_1 und M_2 der Grösse und Lage nach gegeben sind.

Zum Beweise transformire man die beiden Kreise M_1 und M_2 in neue Kreise M'_1 und M'_2, welche concentrisch sind, so werden die Kreise $m_1, m_2 \ldots$ übergehen in andere Kreise $m'_1, m'_2 \ldots$, welche innerhalb des ringförmigen Streifens liegen, der zwischen den Kreisen M'_1 und M'_2 eingeschlossen ist und die alle gleich gross sind. Wenn die Reihe der Kreise $m_1, m_2 \ldots$ nach einem oder mehreren Umläufen schliesst (commensurabel ist), so wird dasselbe mit der Reihe der Kreise $m'_1, m'_2 \ldots$ der Fall sein, bilden aber die Kreise $m_1, m_2 \ldots$ eine sich niemals schliessende (incommensurable) Reihe, so thun dies auch die Kreise $m'_1, m'_2 \ldots$ Gerade wie von der ersten Reihe auf die zweite geschlossen

Fig. 98.



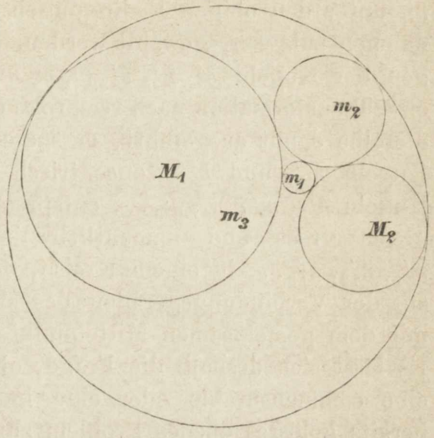
wurde, so kann auch umgekehrt von der zweiten auf die erste zurückgegangen werden. Bei der zweiten Reihe ist aber, da alle ihre Kreise gleich sind, durchaus gleichgiltig, wo der erste m'_1 angenommen wird, also hat auch bei der ersten Reihe die Lage des Kreises m_1 keinen Einfluss.

Für zwei concentrische Kreise existirt eine leicht abzuleitende einfache Relation, damit sie zu einer commensurabeln Kreisreihe Veranlassung geben. Die Reihe soll aus N Kreisen bestehen, von denen der letzte sich nach U Umläufen an den ersten anschliessen soll. Die beiden concentrischen Kreise sollen den gemeinschaftlichen Mittelpunkt μ' haben, ihre resp. Radien seien R'_1 und R'_2. Die Mittelpunkte der Kreise $m'_1, m'_2 \ldots$ liegen auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte μ' und dem Radius $\frac{R'_1 + R'_2}{2}$, während jeder von ihnen den Radius $\frac{R'_1 - R'_2}{2}$ hat. Da die N Kreise U Umläufe machen, so nimmt jeder von ihnen $\frac{U}{N}$ Umläufe in Anspruch und da ein ganzer Umlauf von μ aus unter einem Winkel von 2π gesehen wird, so ist der Winkel, unter dem einer der berührenden Kreise gesehen wird, $= \frac{2\,U\pi}{N}$. Aus Symmetriegründen ergibt sich hieraus, dass, wenn m'_1 den Mittelpunkt des Kreises m'_1 bedeutet und b der Berührungspunkt einer von μ' aus an m'_1 zu legenden Tangente ist, dass $\sphericalangle\, m'_1\,\mu'\,b = \frac{U\pi}{N}$. Dieser Winkel bestimmt sich auch aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\mu' m'_1 b$, in welchem die Hypotenuse $= \frac{R'_1 + R'_2}{2}$ und die dem gesuchten Winkel gegenüberliegende Kathete $= \frac{R'_1 - R'_2}{2}$ ist. Man hat also

$$\frac{R'_1 - R'_2}{R'_1 + R'_2} = \sin \frac{U\pi}{N}.$$

Die Betrachtung ist von zwei Kreisen ausgegangen, M_1 und M_2, von denen der eine ganz innerhalb des anderen lag; man kann ebenso gut annehmen, dass die beiden Kreise aussereinander liegen und bekommt ganz dieselben Resultate. Es ist in diesem Falle aber darauf Acht zu geben, dass die Kreisreihe m_1, m_2 ... nicht nur aus Kreisen bestehen muss, die wie m_1 und m_2 der Figur 99 die gegebenen Kreise M_1 und M_2 ausschliessend berühren, sondern dass auch Kreise vorkommen können, welche wie m_3 die Kreise M_1 und M_2 berühren und einschliessen. Immerhin muss die Berührung eines Kreises der Reihe mit M_1 und M_2 gleichartig sein.

Fig. 99.



Durch die stereographische Projection resp. das Princip der reciproken Radien kann die eben bewiesene Unveränderlichkeit der Kreisreihen auch auf die Kugeloberfläche ausgedehnt werden. Für den Raum, wo Kugeln an Stelle der Kreise treten, gestaltet sich die Sache etwas anders.

Es seien M_1 und M_2 zwei willkürliche Kugeln, von denen die grössere M_1, die andere M_2 ganz umschliessen möge, ferner sei in dem zwischen beiden gelegenen Raume eine Kugel M_3 angenommen, welche beide berührt, und zwar, wie leicht einzusehen, M_2 ausschliessend und von M_1 eingeschlossen. Nun wird eine Reihe von Kugeln bestimmt, von denen die erste m_1 alle drei Kugeln $M_1 M_2 M_3$ berührt, sonst aber willkürlich ist, die zweite m_2 soll daran anschliessend $M_1 M_2 M_3 m_1$ berühren, die dritte m_3 weiterhin $M_1 M_2 M_3 m_2$ berühren und so fort.

Die entstehende Kugelreihe wird entweder einmal um M_3 herumgehen und in ihrer letzten Kugel m_1 wieder berühren, oder das Schliessen tritt erst nach mehreren Umgängen ein (dies sind die beiden commensurabeln Fälle), oder endlich die Reihe schliesst sich nie (ist incommensurabel).

Ob der erste, zweite oder dritte Fall eintrete, ist einzig und allein abhängig von der Grösse und der gegenseitigen Lage der Kugeln M_1 und M_2, nicht aber davon, wie M_3 und m_1 unter den obigen Bedingungen, die noch verschiedene Annahmen zulassen, gewählt werden. Die gegenseitigen Beziehungen der Kugeln $M_1\, M_2\, M_3\, m_1\, m_2\, m_3 \ldots$ werden nämlich durch eine Transformation nach reciproken Radien nicht gestört. Wird dieselbe damit ausgeführt, dass die M_1 und M_2 entsprechenden Kugeln M'_1 und M'_2 concentrisch werden, so werden die den Kugeln M_3, m_1, m_2, $m_3 \ldots$ entsprechenden M'_1, m'_1, m'_2, $m'_3 \ldots$ gleich gross und namentlich liegen die Mittelpunkte von m'_1, m'_2, $m'_3 \ldots$ in einem Kreise, dessen Ebene senkrecht steht auf der Verbindungsgeraden des Mittelpunktes der Kugel M'_3 mit dem gemeinsamen Mittelpunkte der Kugeln M'_1 und M'_2. Es lässt sich deshalb die Frage, ob die Reihe m'_1, m'_2, $m'_3 \ldots$ eine commensurable oder eine incommensurable sei, auf ein bereits gelöstes ebenes Problem zurückführen.

Legt man durch die Mittelpunkte von m'_1, m'_2, $m'_3 \ldots$ eine Ebene, so erhält man in derselben eine Reihe von Kreisen, die gleich gross sind und welche zudem ihre Mittelpunkte auf einem anderen Kreise haben. Daraus folgt, dass sie in den Zwischenräumen zweier concentrischer Kreise liegen und dort eine Reihe bilden, deren Charakter aus einer oben bereits abgeleiteten Formel erkannt werden kann. Aber die Commensurabilität der Kreise ist vollkommen identisch mit der Commensurabilität der Kugeln m'_1, m'_2, $m'_3 \ldots$, also ist ein Kennzeichen für die letzteren gegeben. Dass dieselbe unabhängig von der Lage der Kugeln M'_1 und m'_1 ist, versteht sich jetzt leicht, es gilt also dasselbe für die ursprüngliche Kugelreihe m_1, m_2, $m_3 \ldots$, welche durch die Kugeln $M_1\, M_2\, M_3$ erzeugt wurde.

Mit der Kugelreihe m_1, m_2, m_3 steht eine andere in Verbindung, welche die Kugeln M_1, M_2, M_3 enthält. Es liegen z. B. die beiden Kugeln m_1 und m_3 so, dass sie beide von m_2 berührt werden, ebenso wie M_3 die Kugeln M_1 und M_2 berührt. (Es besteht einzig der Unterschied, dass von den Kugeln m_1 und m_3 jede die andere ausschliesst, während M_2 von M_1 eingeschlossen wird.) Man nehme jetzt die Kugel M_1 hinzu, welche m_1, m_2, m_3 berührt, dann M_2, welche m_1, m_2, m_3, M_1

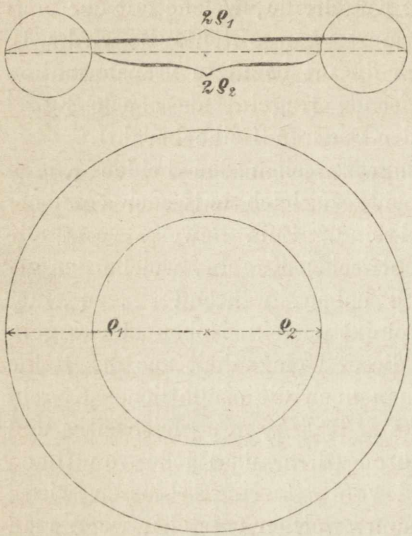
berührt, ferner M_3, welche m_1, m_2, m_3, M_2 berührt und fahre so fort, so hat man eine neue Kugelreihe, welche mit der erstbeschriebenen in genauem Zusammenhange steht. So wird z. B. bewiesen, am einfachsten durch die oft benutzte Transformation von M_1 und M_2 zu concentrischen Kugeln, dass jede Kugel der einen Reihe jede Kugel der anderen Reihe berührt.

Ein anderer Zusammenhang zwischen den beiden Kugelreihen besteht darin, dass beide zugleich entweder commensurabel oder incommensurabel sind. Zum Beweise verwandle man M_1 und M_2 zu zwei concentrischen Kugeln, welche den gemeinschaftlichen Mittelpunkt μ haben, während M_3 zu einer Kugel M'_3 wird, deren Mittelpunkt μ_3 sei. Neben den Kugeln m'_1, m'_2, $m'_3 \ldots$, welche bei dieser Gelegenheit aus der Reihe m_1, m_2, m_3 entstehen, führe man noch die sämmtlichen Kugeln in die Betrachtung ein, welche M'_1, M'_2, M'_3 gleichzeitig und zwar in gleicher Weise berühren (d. h. dass jede von ihnen M'_1 und M'_3 ausschliesst und von M'_2 eingeschlossen wird), so erfüllen dieselben einen Raum, welcher entsteht, wenn man eine gewisse Kreisfläche (die leicht aufzufinden ist; sie liegt mit der Geraden $\mu\mu_3$ in einer Ebene) um $\mu\mu_3$ herumdreht. Ebenso ziehe man zu $M'_1 M'_2 M'_3$ noch alle diejenigen Kugeln, welche m'_1, m'_2, m'_3 gleichartig berühren, so werden ihre Mittelpunkte in der Geraden $\mu\mu_3$ liegen und die Kugeln werden den ganzen unendlichen Raum ausfüllen mit Ausnahme des vorhin beschriebenen begrenzten Raumes.

Während die Commensurabilität der Kugelreihe m'_1, m'_2, m'_3 in der Ebene ihrer Mittelpunkte erledigt werden kann, wie bereits bemerkt wurde, so gelingt es auch, dieselbe Frage für die Kugelreihe M'_1, M'_2, $M'_3 \ldots$ in einer Ebene auszumachen, wenn dieselbe nur ihre Mittelpunkte, resp. die Gerade $\mu\mu_3$ enthält. Es entstehen in einer solchen Ebene durch M'_1, M'_2, $M'_3 \ldots$ eine Reihe von Kreisen, welche zwei symmetrisch zu $\mu\mu_3$ gelegene Kreise entweder beide ausschliessend oder beide einschliessend berühren und zwar werden die beiden genannten Kreise zwei Lagen derjenigen Kreisfläche sein, die durch Rotation jenen Raum erzeugt, welcher die Kugeln m'_1, $m'_2 \ldots$ einschliesst.

Es sind zwei Kreisreihen in Bezug auf die endliche oder unendliche Anzahl ihrer Glieder zu prüfen, von denen die eine

Fig. 100.



zwei concentrischen Kreisen eingeschrieben ist. Sind deren Radien resp. ϱ_1 und ϱ_2, ferner U die gesuchte Anzahl der Umläufe, N die Anzahl der Kreise, so gilt die Relation

$$1. \quad \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} = \sin \frac{U\pi}{N}.$$

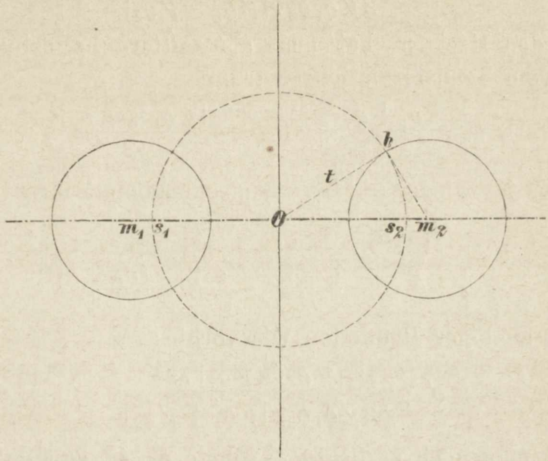
Was die zweite Kreisreihe anbetrifft, die sich in einer zu der Ebene der ersten Kreisreihe senkrechten Ebene befindet, so ist dieselbe zwei gleich grossen Kreisen m_1 und m_2 eingeschrieben, die auf ihrer Centralen (wie aus Figur 100 erhellt), einen inneren Abstand $= 2\varrho_2$ und einen äusseren Abstand $= 2\varrho_1$ haben. Die Radien sind beide $= \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}$, während der Abstand eines der Kreismittelpunkte von der Symmetrieaxe sich durch $\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$ ergibt.

Zur Aufstellung einer Formel für die Anzahl U' der Umläufe und die Anzahl N' der Kreise sind m_1 und m_2 nach der zweiten im Anfange dieses Paragraphen gelösten Aufgabe in zwei concentrische Kreise zu verwandeln, wobei m_1 in einen Kreis m'_1 vom Radius ϱ'_1 und m_2 in einen Kreis m'_2 vom Radius ϱ'_2 übergehen möge. Es gilt dann die Formel:

$$2. \quad \frac{\varrho'_1 - \varrho'_2}{\varrho'_1 + \varrho'_2} = \sin \frac{U'\pi}{N'}.$$

Damit ϱ'_1 und ϱ'_2 durch ϱ_1 und ϱ_2 ausgedrückt werden, ziehe man von O aus eine Tangente an den Kreis m_2, so ist deren Länge t von O bis zum Berührungspunkte b zugleich der Radius eines Kreises mit dem Mittelpunkte O, welcher die beiden Kreise m_1 und m_2 rechtwinklig trifft und aus der Geraden $m_1 m_2$ die Grenzpunkte s_1 und s_2 derjenigen Kreisschaar ausschneidet, die durch die Kreise m_1 und m_2 bestimmt ist. Auf einen derselben, z. B.

Fig. 101.



s_1 muss man die Transformation nach reciproken Radien ausführen. Man hat, da in dem rechtwinkligen Dreieck Obm_2 die Hypothenuse $Om_2 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$, die Kathete $bm_2 = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}$ ist, für die gesuchte Kathete

$$t^2 = \frac{(\varrho_1 + \varrho_2)^2}{4} - \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{4} \text{ oder } t = Os_1 = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}.$$

Nun benutzt man die in § 26 gegebenen Formeln, um aus dem Radius eines gegebenen Kreises, seinem Abstande vom Transformationscentrum und der Transformationspotenz (die gleich r^2 sein soll; ihr Werth ist gleichgiltig, da sie nachher aus der Rechnung verschwindet) den Radius des transformirten Kreises zu finden. Für den Kreis m_1 ist die Entfernung seines Mittelpunktes vom Transformationscentrum

$$\mathfrak{m}_1 s_1 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{[\sqrt{\varrho_1} - \sqrt{\varrho_2}]^2}{2},$$

der Radius $= \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}$, also kommt für den transformirten Radius

$$\varrho'_2 = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \cdot \frac{r^2}{\frac{[\sqrt{\varrho_1} - \sqrt{\varrho_2}]^4}{4} - \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{4}}$$

oder nach gehöriger Reduction (wobei, was nach § 26 gestattet ist, im Nenner das Zeichen gewechselt wurde)

$$\varrho'_1 = \frac{[\sqrt{\varrho_1} + \sqrt{\varrho_2}]\, r^2}{2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2} \cdot [\sqrt{\varrho_1} - \sqrt{\varrho_2}]}.$$

Für den Kreis $\mathfrak{m}_2$ hat man als Entfernung seines Mittelpunktes vom Transformationscentrum

$$s_1 \mathfrak{m}_2 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} + \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{[\sqrt{\varrho_1} + \sqrt{\varrho_2}]^2}{2},$$

der Radius ist wieder $= \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}$, also bekommt man für

$$\varrho'_2 = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \cdot \frac{r^2}{\frac{[\sqrt{\varrho_1} + \sqrt{\varrho_2}]^4}{4} - \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{4}}$$

und nach analoger Reduction wie vorhin:

$$\varrho'_2 = \frac{[\sqrt{\varrho_1} - \sqrt{\varrho_2}] \cdot r^2}{2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2} \cdot [\sqrt{\varrho_1} + \sqrt{\varrho_2}]}.$$

Setzt man noch $r^2 = 2\,[\varrho_1 - \varrho_2]\sqrt{\varrho_1 \varrho_2} \cdot \lambda^2$, so folgt:

3. $\varrho'_1 = \lambda^2 \cdot [\sqrt{\varrho_1} + \sqrt{\varrho_2}]^2$ und $\varrho'_2 = \lambda^2\,[\sqrt{\varrho_1} - \sqrt{\varrho_2}]^2$.

Werden die gefundenen Werthe für ϱ'_1 und ϱ'_2 in die Gleichung 2 eingeführt, so verwandelt sich dieselbe in

4. $$\frac{2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}{\varrho_1 + \varrho_2} = \sin \frac{U'\pi}{N'}.$$

Quadrirt und addirt man die Gleichungen 1 und 4, so ergibt sich

$$1 = \sin^2 \frac{U\pi}{N} + \sin^2 \frac{U'\pi}{N'},$$

woraus folgt, dass die Winkel $\frac{U\pi}{N}$ und $\frac{U'\pi'}{N'}$, welche in Bogenmass ausgedrückt sind, die Summe $\frac{\pi}{2}$ geben. Also ist endlich

5. $$\frac{U}{N} + \frac{U'}{N'} = \tfrac{1}{2}.$$

Man kann in dieser Formel auf die ursprüngliche Bedeutung von U, N, U', N' zurückgehen, welche sie in den Kugelreihen $m_1 m_2 m_3 \ldots$ und $M_1 M_2 M_3 \ldots$ haben. U und N bedeuten Anzahl der Umläufe und Kugeln in der ersten Reihe, U' und N' dasselbe in der zweiten Reihe. Wenn die erste Reihe commensurabel ist, so ist $\frac{U}{N}$ ein bestimmter Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, dasselbe ist nach 5. auch für $\frac{U'}{N'}$ der Fall, d. h. die beiden Kugelreihen m_1, m_2, $m_3 \ldots$ und M_1, M_2, $M_3 \ldots$ sind gleichzeitig commensurabel oder incommensurabel, wie oben behauptet worden ist.

Zum Schlusse ein einfaches Beispiel. Wenn die beiden Kugeln M_1 und M_2 von M_3 berührt werden und sich auch gegenseitig in einem Punkte b berühren, so kann man alle drei Kugeln $M_1 M_2 M_3$ verwandeln, indem man b zum Transformationscentrum wählt. Es werden dann M_1 und M_2 zu zwei parallelen Ebenen M'_1 und M'_2, während M_3 eine Kugel M'_3 wird, welche M'_1 und M'_2 berührt. Offenbar gibt es dann sechs Kugeln m', welche M'_1, M'_2, M'_3 berühren und eine sich schliessende Kugelreihe bilden; sie besteht aus einem Umlauf und sechs Kugeln. Was die zweite Reihe, die der $M_1 M_2 M_3$ betrifft, so ist dieselbe bereits geschlossen, besteht also aus einem Umlauf und drei Kugeln. Die Formel 5 geht für diesen Fall über in

$$\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

und es ist damit jedenfalls eine fühlbare Lücke der Litteratur zum Besten der Studierenden ausgefüllt worden. — — Das Werk bietet genug, ja hie und da vielleicht mehr als genug für das erste Studium der genialen Schöpfungen von Legendre, Abel und Jacobi. Die Darstellung muss als sehr deutlich bezeichnet werden u. s. w." [Schlömilch, in der Zeitschrift f. Mathematik, 1862, 1. Heft.]

Durège, Dr. **H.**, ordentlicher Professor am Polytechnikum zu Prag, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's. gr. 8. 1864. geh. 1 Thlr. 18 Ngr.

„Ich möchte, nach allen diesen Ueberlegungen, das Werk von Durège allen Anfängern empfehlen, welche sich eine erste Kenntniss der modernen mathematischen Anschauungsweisen erwerben wollen. Ich halte dafür, es sei sehr zweckmässig, dass der Lernende ziemlich bald sich an die Betrachtung der Eigenschaften der Functionen gewöhnt. Das gewöhnliche mathematische, mehr rechnende Verfahren, wird durchaus nicht überflüssig durch diese neuere Betrachtungsweise; es lassen sich aber oftmals doch sehr grosse Rechnungen ersparen; ferner, was sowohl für das Studium, als auch für selbstständige Arbeiten von grösstem Werthe ist, die Möglichkeit gewisser Darstellungen (als z. B. der elliptischen Functionen durch die ϑ) lässt sich sofort übersehen; es wird dadurch leichter, den Faden einer gegebenen Rechnung, welche man nachstudirt, zu behalten, und es kann viel zielloses Rechnen bei selbstständigen Arbeiten vermieden werden. Ich empfehle daher das Werk nochmals einem Jeden, welcher sich mit Riemann'schen Arbeiten vertraut machen will, zum Vorstudium." [G. Roch, in der Zeitschrift f. Mathematik, 1865, 4. Heft.]

Fiedler, Dr. **Wilhelm**, Professor am Polytechnikum zu Prag, die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Ein Beitrag zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. gr. 8. 1862. geh. 1 Thlr. 14 Ngr.

Fort, **O.**, und **O. Schlömilch**, Professoren an der Königl. polytechnischen Schule in Dresden, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zwei Theile. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite Auflage. gr. 8. 1863. geh. 2 Thlr. 22½ Ngr.

Einzeln:
I. Theil. **Analytische Geometrie der Ebene**, von O. Fort. 1 Thlr. 7½ Ngr.
II. » **Analytische Geometrie des Raumes** von O. Schlömilch. 1 Thlr. 15 Ngr.

Fuhrmann, Dr. **Arwed**, Assistent für Mathematik und Vermessungslehre an der Königl. polytechnischen Schule zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Mit einem Vorworte von Prof. Dr. O. Schlömilch. In zwei Theilen. Erster Theil: Aufgaben aus der analytischen Geostatik. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1867. 20 Ngr.

Geiser, Dr. **C. F.**, Docent am Schweizerischen Polytechnikum, Einleitung in die synthetische Geometrie. Ein Leitfaden beim Unterricht an höheren Realschulen und Gymnasien. Mit vielen Holzschnitten im Text. gr. 8. 1869. geh.

Hartig, Dr. **Ernst**, Professor der mechanischen Technologie an der k. polytechnischen Schule in Dresden, die Dampfkessel-Explosionen. Beiträge zur Beurtheilung der Maassregeln für ihre Verhütung. Mit lithographierten Tafeln. gr. 8. 1867. geh. 20 Ngr.

Henrici, **Julius**, Professor an der höheren Bürgerschule in Heidelberg, Elementar-Mechanik des Punktes und des starren Systemes. Mit 159 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1869. geh. 24 Ngr.

Hesse, Dr. **Otto**, ord. Professor an der Universität zu Heidelberg, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Zweite Auflage. gr. 8. 1869. geh.

——— Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. gr. 8. geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

Hesse, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Heidelberg, vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. Separatabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik. gr. 8. 1866. geh. 16 Ngr.

Kahl, Dr. E., Lehrer der Physik an der Kriegsschule in Dresden, mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. Zum Gebrauche höherer Schulanstalten und zum Selbstunterricht bearbeitet. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 2 Theile. gr. 8. 1857. geh. 1 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil. Aufgaben. n. 24 Ngr. II. Theil. Auflösungen. n. 20 Ngr.

Kohl, Friedrich, Elemente von Maschinen zunächst als ein Leitfaden für Gewerbschüler. I. u. II. Abth. in einem Bde. Mit 31 lith. Tafeln u. 157 in d. Text gedr. Holzschn. Zweite Ausg. 4. 1858. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

Koenigsberger, Dr. Leo, ord. Prof. an der Universität Greifswald, die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. gr. 8. 1868. geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

Kröhnke, H., Civilingenieur und bestallter Landmesser, Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Für alle vorkommenden Winkel und Radien aufs Sorgfältigste berechnet und herausgegeben. Sechste durchg. Aufl. Mit einer Figurentafel. 8. 1869. geb. 18 Ngr.

Lindelöf, Dr. L., Professeur de Mathématiques à Helsingfors, leçons de calcul des variations. Redigées en collaboration avec M. L'abbé Moigno. Paris 1861. gr. 8. geh. 1 Thlr. 20 Ngr.

Lommel, Dr. Eugen, Professor der Mathematik an der Königl. Akademie für Land- und Forstwirthe zu Hohenheim, Studien über die Bessel'schen Functionen. gr. 8. 1868. geh. 1 Thlr.

Matthiesen, Dr. Ludwig, Subrector und Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Husum, die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. Nach ihren Principien und ihrem inneren Zusammenhange dargestellt. Erste Serie, enthaltend: Substitutions-Methoden. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

Mayer, Dr. Adolph, Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. gr. 8. geh. 20 Ngr.

Mittheilungen der K. Sächs. Polytechnischen Schule zu Dresden. Heft I. A. u. d. T.: Versuche über den Kraftbedarf der Maschinen in der Streichgarnspinnerei und Tuchfabrikation, ausgeführt von Dr. Ernst Hartig, Lehrer der mechan. Technologie an der Kgl. Polytechn. Schule. Unter Mitwirkung der Polytechniker Arndt, Jüngling, Klien und Künzel. [VIII u. 72 S. mit 11 lithographierten Tafeln in 4. u. qu. Folio.] hoch 4. geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

——— ——— Heft II. A. u. d. T.: Versuche über den Kraftbedarf der in der Flachs- und Werg-Spinnerei angewendeten Maschinen, ausgeführt von Dr. Ernst Hartig, Professor der mechan. Technologie an der kön. polytechn. Schule zu Dresden, unter Mitwirkung der Polytechniker F. H. Becker, E. E. Freyberg, W. C. Merkel, Heinrich Judenfeind-Hülsse, Herrmann Judenfeind-Hülsse, E. H. Nacke und P. Püschel. Mit 1 Holzschnitt und 13 lithographierten Tafeln. [117 S.] Lex.-8. 1869. geh. 2 Thlr.

Müller, Dr. J. H. T., Oberschulrath etc., Beiträge zur Terminologie der Griechischen Mathematiker. gr. 8. 1860. geh. n. 8 Ngr.

„Es sind nur 2½ Druckbogen, welche der Verfasser unter dem Titel von Beiträgen veröffentlicht, aber wer den Inhalt prüft, wird über die Fülle erstaunen, welche in dem kleinen Raume zusammengedrängt ist u. s. w." [Zeitschrift für Mathematik 1860, 6. Heft.]

Neumann, Carl, ord. Professor in Leipzig, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und einer lithographierten Tafel. gr. 8. geh. 3 Thlr. 20 Ngr.

Eine Darstellung der Theorie der Abel'schen Integrale, durch welche dieselbe auch denen verständlich wird, deren mathematische Kenntnisse noch gering sind. Der Student, welcher sein erstes oder seine beiden ersten Semester einigermassen gut angewendet hat, soll durch dieses Buch in den Stand gesetzt werden, in das Innere jener schwierigen und bis jetzt fast vollständig unzugänglichen Theorie sofort und mit vollem Verständnis einzudringen.

——— das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen. gr. 8. 1865. geh. 18 Ngr.

——— die Haupt- und Brenn-Puncte eines Linsen-Systemes. Elementare Darstellung der durch Gauss begründeten Theorie. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

——— Theorie der Bessel'schen Functionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen. gr. 8. 1867. geh. 20 Ngr.

Plücker, Julius, neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Mit einem Vorwort von A. Clebsch. gr. 4. 1868. 1869. geh. 5 Thlr.

Reiss, M., Beiträge zur Theorie der Determinanten. gr. 4. 1867. geh. 1 Thlr.

Reusch, E., Professor an der Universität Tübingen, Theorie der Cylinderlinsen. Mit zwei lithographierten Tafeln. gr. 8. 1868. geh. 16 Ngr.

Roch, Dr. G., de theoremate quodam circa functiones Abelianas. 4. geh. 6 Ngr.

Ruete, Dr. C. G. Th., Professor und Geh. Medicinalrath, das Stereoscop. Eine populäre Darstellung. Mit 27 stereoscopischen Bildern in einer Beilage. Zweite durchaus neu bearbeitete Auflage. gr. 8. 1867. geh. 2 Thlr.

Salmon, George, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Unter Mitwirkung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Zweite umgearbeitete und verbesserte Auflage. gr. 8. 1866. geh. 4 Thlr.

„Es kann das Werk in der vorliegenden Form der aufmerksamen Beachtung aller Studierenden der Mathematik empfohlen werden, welche auf möglichst einfachem Wege Zugang zu den Resultaten der neueren Forschungen auf dem Gebiete der analytischen Geometrie erlangen wollen; dem Lehrer der Wissenschaft empfiehlt es sich, abgesehen von der vorzüglichen Methodik des Verfassers, welche in der deutschen Bearbeitung durchaus nicht beeinträchtigt ist, namentlich noch durch die grosse Menge von mehr als vierhundert grossentheils vollständig durchgeführten Aufgaben." [O. Fort, in der Zeitschrift für Mathematik 1861, 3. Heft.]

——— Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. gr. 8. 1863. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

Diese deutsche Ausgabe von Rev. George Salmon's „Lessons introductory to the modern higher Algebra" ist in einigen Punkten verändert, in andern erweitert und nach dem Stande der Entdeckungen vervollständigt worden. Der Theorie der symmetrischen Determinanten ist eine Vorlesung gewidmet, überhaupt die Determinantentheorie vielfach erweitert, namentlich auch die Zahl der Beispiele vermehrt worden. Diese Erweiterung steht in Verbindung mit der volländigeren Behandlung der Theorie der Jacobi'schen und derjenigen der Hesse'schen Determinante, welche als Beispiele für eine Form der Behandlung gegeben sind, die in analytischer Beziehung unleugbare Vorzüge vor derjenigen hat, durch die der Grundcharacter des Originals bestimmt ist. In der Uebersicht der Resultate der Theorie für die biquadratischen ternären Formen ist auf die schönen Untersuchungen von Clebsch Bezug genommen und ein kurzer Abriss der Resultate gegeben worden, welche die algebraische Theorie der binären und ternären Formen für die elliptischen Transcendenten ans Licht gebracht hat. — Das Buch schliesst sich in seiner Bedeutung für die mathematischen Studien dem vorhergehenden Werke desselben Verfassers würdig an.

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, ord. Professor der descriptiven Geometrie am Polytechnikum zu Prag. 2 Theile. gr. 8. 1863. 1865. geh. 5 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil: A. u. d. T.: Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Ein Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten. gr. 8. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

II. Theil: A. u. d. T.: Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen. gr. 8. geh. n. 3 Thlr. 20 Ngr.

„Die ausgezeichnete Begabung des Verfassers für die Darstellung analytisch-geometrischer Untersuchungen, als auch die Tüchtigkeit des Herrn Uebersetzers sind so anerkannt, dass es unnöthig erscheint, irgend etwas zur Empfehlung des vorliegenden Werkes hinzuzufügen."
[Literar. Centralblatt, 1864, Nr. 38.]

Scheffler, Dr. Hermann, Herzogl. Braunschweig. Baurath, imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Centrifugal- und Gyralkraft, mit Anwendungen auf die Theorie des Kreisels, des rollenden Rades, des Polytrops, des rotirenden Geschosses und des Tischrückens. Mit 23 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

Schell, Dr. Wilhelm, Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse technischer Hochschulen. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1.—3. Lieferung. gr. Lex.-8. 1868. 1869. geh. Jede Lieferung à 28 Ngr.

Erscheint in circa 5 Lieferungen von je 12 Druckbogen à 28 Ngr. die Lieferung und wird binnen Jahresfrist vollendet sein.

——— allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Mit Holzschnitten. gr. 8. 1859. geh. 24 Ngr.

Schlömilch, Dr. Oscar, Königl. Sächs. Hofrath, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Mit Holzschnitten im Texte. gr. 8. 1868. geh. 1 Thlr. 18 Ngr.

Schmidt, Carl Heinrich, Professor an der polytechnischen Schule in Stuttgart, Lehrbuch der Spinnereimechanik. Mit einem Atlas von 13 lithograph. Tafeln. gr. 8. 1857. (Der Atlas quer-Folio). n. 3 Thlr.

Schneitler, Dr. C. F., Civilingenieur, die Instrumente und Werkzeuge der höheren und niederen Meßkunst, sowie der geometrischen Zeichenkunst, ihre Theorie, Construction, Gebrauch und Prüfung. Mit 236 in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte sehr verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 1861. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

——— Lehrbuch der gesammten Meßkunst oder Darstellung der Theorie und Praxis des Feldmessens, Nivellirens und Höhenmessens, der militärischen Aufnahmen ganzer Länder, sowie der geometrischen Zeichenkunst. Zum Selbststudium und Unterrichte bearbeitet. Dritte verbesserte Auflage. Mit 225 Holzschnitten. gr. 8. 1861. geh. 2 Thlr.

Die geodätischen Werke Schneitler's entsprechen so sehr einem praktischen Bedürfnisse, dass ihre Verbreitung in fortwährendem Steigen begriffen ist. Die vorliegende dritte Auflage des „Lehrbuchs der Messkunst", welches mit dem gleichzeitig in vierter Auflage erschienenen Werke: „**die Instrumente und Werkzeuge der Messkunst**" ein Ganzes bildet, ist eine wesentlich verbesserte. Insbesondere ist der ganze Abschnitt „Nivelliren" durch Herrn Regierungsconducteur Stocken in Breslau vollständig neu bearbeitet und damit das Buch gerade in einer Partie erweitert worden, deren genaue Kenntnis in unserer Zeit von besonderer Bedeutung für die grossartigen Landes-Meliorationen (Bruch- und Moorbauten, Drain-Anlagen) ist. Der Preis ist ausserordentlich billig

Schneitler, Dr. C. F., und **Julius Andrée**, Civilingenieurs, Sammlung von Werkzeichnungen landwirthschaftlicher Maschinen und Geräthe nebst ausführlichen Beschreibungen. 7 Hefte. Mit 42 Tafeln in gr. Royal-Fol. Text in 4. 1853—1857. geh. 38 Thlr.

Einzeln:

I. Heft, die Drainröhren- und Ziegelpressen auf 7 Foliotafeln: 1) Randell und Sanders Thonröhrenpresse mit mechanischer Abschneide-Vorrichtung; 2) Drainröhrenpresse von Egells in Berlin; 3) Doppeltwirkende Drainröhrenpresse von J. Whitehead in Preston; 4) Drainröhrenpresse von J. Williams in Bedford; 5) Doppelwirkende Drainröhrenpresse von Borie Frères in Paris; 6) Drainröhrenpresse von Mundscheid in Malapane; 7) einfache englische Röhrenpresse. 1853. n. 6 Thlr.

II. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Verbesserte Flachs-Brechmaschine von Kuthe; 2) Flachsschwinge-Maschine von J. Bücklers; 3) Patentirter Apparat und Verfahren der Flachs-Dampfröste von Watt in Irland; 4) E. Kaemmerer's Universal-Säe-Maschine. 1853. n. 6 Thlr.

III. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Transportabler Cylindergöpel von Barret, Exall u. Andrews in Reading; 2) transportables deutsches Rosswerk; 3) Häckselschneide-Maschine nach Gillet; Schrotmühle mit Stahlwalzen. 1854. n. 6 Thlr.

IV. Heft oder II. Serie 1. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Englische Dreschmaschine; 2) Salmon's Häckselschneide-Maschine; 3) Bedford-Eggen. 1855. n. 6 Thlr.

V. Heft, oder II. Serie 2. Heft, mit 6 Tafeln: Thonschlemmerei zu Joachimsthal; Göpel von Pinet; Romaine's Dampfgrabe-Maschine. 1856. n. 6 Thlr.

VI. u. VII. (Doppel)Heft, oder II. Serie 3. u. 4. Heft, a. u. d. T.: Die neueren Dampfcultur-Geräthe und Dampfpflüge Englands. Von Dr. C. F. Schneitler. Mit 11 Tafeln. 1857. n. 8 Thlr.

Heft 1—3 herausgegeben von C. F. Schneitler, Heft 4—7 oder II. Serie 1—4. Heft von C. F. Schneitler und J. Andrée.

Schneitler, Dr. C. F., und **Julius Andree**, Civil-Ingenieurs, die neueren und wichtigeren landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthe, ihre Theorie, Construction, Wirkungsweise und Anwendung. Ein Handbuch der landwirthschaftlichen Maschinen- und Geräthekunde zum Selbststudium und Unterricht. Mit 350 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1862. geh. 3 Thlr.

„Das neueste und vollständigste Buch über landwirthschaftliche Maschinen und Geräthe, welches durch seine vozüglich klaren und anschaulichen Abbildungen wie durch seinen gediegenen beschreibenden Text die vollste Anerkennung bei allen gefunden hat, die als Landwirthe oder Techniker mit den landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthen sich näher bekannt zu machen Veranlassung haben. Wir können nur wiederholen, dass wir es hier mit einem gediegenen, der wärmsten Empfehlung werthen Werke zu thun haben. Alle Landwirthe, welche den Fortschritt in ihrem ehrenwerthen Berufe mit Freuden begrüssen, können „diese“ Maschinen- und Geräthe-Kunde gar nicht entbehren, und legen wir besonders auch allen Mitgliedern unseres Vereins die Anschaffung desselben ans Herz.“

[Landwirthschaftliche Mittheilungen (Neuhaldensleben) 1859, Nr. 4.]

Schrödter, J. G., faßliche Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Algebra. Nach Beispielen aus den in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. gr. 8. 1850. geh. 1 Thlr. 9 Ngr.

Neben einer sehr klaren Darstellung der algebraischen Lehrsätze enthält das Buch ausführliche Auflösungen aller in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen algebraischen Aufgaben, welche dasselbe vorzugsweise zum Selbstunterricht in der Algebra geeignet machen.

Serret, J. A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsch bearbeitet von G. Wertheim. Zwei Bände. gr. 8. 1868. geh. 5 Thlr. 10 Ngr.

Stamm, Ernst, theoretische und praktische Studien über den Selfactor oder die selbstthätige Mule-Feinspinnmaschine. Aus dem Französischen übersetzt von Ernst Hartig. Mit einem Vorwort von Dr. J. A. Hülsse, Director der polytechnischen Schule in Dresden. Mit 10 Kupfertafeln (in qu.-Fol. u. Imp.-Fol.) I. Heft: Text. II. Heft: Kupfertafeln. gr. 4. 1862. geh. 4 Thlr.

Steiner's, Jacob, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Bände.

I. Band: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Docent der Mathematik in Zürich. Mit vielen Holzschnitten. gr. 8. 1867. geh. 1 Thlr. 20 Ngr.

II. Band: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. Heinrich Schröter, ordentl. Professor a. d. Universität zu Breslau. Mit vielen Holzschnitten. gr. 8. 1867. geh. 4 Thlr.

Sturm, Dr. Rudolf, ord. Lehrer am Gymnasium zu Bromberg, synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. gr. 8. 1867. geh. n. 2 Thlr. 20 Ngr.

Vorlaender, I. I., Königl. Preuss. Cataster-Inspector und Steuerrath, Ausgleichung des Fehlers polygonometrischer Messungen. gr. Lex.-8. 1858. geh. 15 Ngr.

——— über die Berechnung der Flächen-Inhalte ganz oder überwiegend aus Originalmaassen. gr. Lex.-8. 1858. geh. 20 Ngr.

Weber, M. M. Freih. von, Ingenieur, Königl. Sächs. Eisenbahn-Director etc., die Technik des Eisenbahn-Betriebes in Bezug auf die Sicherheit desselben. gr. 8. 1854. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

Das vorliegende, von der Kritik einstimmig als jedem Techniker und Eisenbahnbeamten *unentbehrlich* bezeichnete Werk behandelt den technischen Eisenbahnbetrieb in Bezug auf die Sicherheit desselben in folgenden Hauptabtheilungen, deren jede wiederum in eine grosse Anzahl von Unterabtheilungen zerfällt, so dass nichts unerörtert bleibt, was nur irgend für den behandelten Gegenstand in Frage kommen kann, nämlich:

I. Wege und Werke. a. Oberbau. b. Unterbau. c. Bahnbewachung. d. die Stationen. **II. Betriebsmittel.** a. Locomotiven. b. Personenwagen. c. Güterwagen. **III. Bewachung. IV. Signale. V. VI. Böswilligkeit, Unregelmässigkeit, atmosphärische Einflüsse &c. VII. Assecuranzen.** Schlusswort.

——— die rauchfreie Verbrennung der Steinkohle, mit specieller Rücksicht auf C. J. Duméry's Erfindung. Mit 3 lith. Tafeln. gr. 8. 1859. geh. 18 Ngr.

——— die Lebensversicherung der Eisenbahn-Passagiere in Verbindung mit der Unterstützung und Pensionirung der Eisenbahn-Beamten und ihrer Angehörigen. gr. 8. 1855. geh. 12 Ngr.

——— die Gefährdungen des Personals beim Maschinen- und Fahrdienst der Eisenbahnen. Eine Denkschrift. gr. 8. 1862. geh. 12 Ngr.

Dieses Schriftchen ist speciell dem Wohle der Eisenbahn-Beamten und Arbeiter gewidmet. Die auf langjährige Erfahrung gestützten Vorschläge des rühmlichst bekannten Verfassers haben bereits vielseitige Berücksichtigung gefunden.

Weyr, Emil, Assistent der Mathematik am deutschen polytechnischen Institut zu Prag, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse. Mit 5 Figurentafeln. gr. 8. geh.

Wiener, Dr. Christian, Professor an der Polytechnischen Schule zu Carlsruhe, über Vielecke und Vielflache. [VIII u. 31 S. mit 3 lithographierten Tafeln.] gr. 4. geh. 24 Ngr.

——— stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Graden. Mit erläuterndem Texte. [2 photogr. Blätter und 8 S. Text.] qu.-8. 1869. In Couvert 24 Ngr.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.